compétences attendues

Tle

NOUVEAUX PROGRAMMES !

Mathématiques expertes

TRAVAILLER EN AUTONOMIE

- Les connaissances du programme
- Les capacités et compétences
- Les exercices avec tous les corrigés

ellipses

compétences attendues

Mathématiques expertes

Terminale

Nouveaux programmes

Thomas Petit
Professeur agrégé de Mathématiques

ellipses

DANS LA COLLECTION

compétences attendues

ISBN 9782340-045699

32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

Avant-propos

Cet ouvrage, comme tous ceux de la collection *Compétences attendues*, s'adresse aux élèves qui souhaitent travailler en autonomie.

Il est découpé en 7 chapitres qui suivent le programme Mathématiques Expertes de Terminale. Chaque chapitre est structuré en trois grandes parties :

- le cours développé, précis avec les notions du programme, des encadrés qui soulignent le vocabulaire à connaître par cœur et les concepts logiques à maîtriser ;
- les exercices classés par compétences attendues du programme avec devant chaque énoncé la démarche scientifique exigée. Les derniers exercices sont à prise d'initiative ou des exercices bilans. Ils vous aideront à mettre en pratique une démarche scientifique dans le cadre « d'activités de recherche », et à acquérir les techniques et automatismes indispensables pour vos études ;
- les corrigés détaillés de tous les exercices avec les remarques et conseils précieux, tirés de l'expérience des auteurs, professeurs de lycée.

Au début du livre une introduction présente les grandes compétences de la démarche scientifique (Chercher, Modéliser, Représenter, Calculer, Raisonner, Communiquer). Un index permettra aux lecteurs de travailler différemment en choisissant la compétence liée à la démarche scientifique qu'il veut maîtriser.

Cet ouvrage a été conçu dans l'esprit des nouveaux programmes avec la volonté de répondre aux grands enjeux de notre époque imposés par les nouvelles technologies.

Nous espérons qu'il vous donnera entière satisfaction.

Sommaire

Introduction

La démarche scientifique

En Mathématiques, adopter une démarche scientifique consiste à mener une réflexion abstraite en s'aidant de solides méthodes, autrement dit : associer l'imagination à la technique. Il est important de ne pas réduire cette science à l'apprentissage (certes indispensable) de procédures mécaniques et purement techniques mais plutôt de s'appuyer sur elles pour que l'imagination, la recherche vivante puisse s'exercer.

Cet ouvrage se propose de respecter cet équilibre, de manière très ciblée à partir des bulletins officiels des programmes de Mathématiques, qui mentionnent précisément ce dont les élèves doivent se rendre capables en classe de Terminale option Mathématiques expertes.

1 Compétences de la classe de Terminale générale (Maths expertes)

A Chercher, expérimenter (en particulier à l'aide d'outils logiciels)

Utiliser un langage de programmation, un logiciel de géométrie dynamique, un logiciel de calcul formel ou même un tableur permet d'aborder le problème posé sous un certain angle. Ce sont des outils assez faciles, qui permettent de donner des idées de recherche et peuvent se révéler être un formidable outil de vérification de calculs algébriques.

Conseils du professeur

Il faut disposer des logiciels suivants : Python, GeoGebra, Xcas (ou Xcas en ligne) et Excel (ou Open Office Calc).

- Python est un langage de programmation (qui permet de faire fonctionner des algorithmes).
- GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique (qui permet de construire des courbes, des graphiques, etc.).
- Xcas est un logiciel de calcul formel : il effectue des calculs algébriques (développement, factorisation, simplification, etc.).
- Excel (ou Open Office Calc) est un tableur. Il comporte des cellules, et des instructions permettant d'effectuer des calculs (somme, moyenne, etc.).

En classe, il est déjà un peu tard pour découvrir ces logiciels. Comme ils sont gratuits (sauf Excel), il ne faut pas hésiter à les télécharger chez soi et à les utiliser au moins une à deux fois avant. Les enseignants ajoutent souvent des indications dans la feuille photocopiée du problème qu'ils vous soumettront. Normalement, avec un peu d'habitude sur le logiciel, cinq minutes vous suffiront pour trouver ce que le professeur attend. En revanche, si vous n'êtes pas habitué au logiciel, vous passerez une heure sans rien comprendre et aurez tout oublié une fois sorti de cours. Conclusion : télécharger le logiciel (ou l'application avant) et regarder comment il fonctionne avant d'aller en cours.

B Modéliser, réaliser des simulations numériques d'un modèle, valider ou invalider un modèle

Surtout dans le domaine des graphes et des probabilités, l'ordinateur peut permettre de dégager une certaine tendance ou loi mathématique à découvrir, ou au contraire d'écarter une conclusion erronée (l'ordinateur est assez efficace lorsqu'on souhaite vérifier si une théorie a l'air vraie ou pas).

Conseils du professeur

On peut modéliser toute sorte d'expérience avec un ordinateur. L'exemple le plus simple est le lancer d'un dé à six faces avec l'instruction random.randint(1,6) sous Python. Comme les lois mathématiques (en probabilités notamment) ont tendance à se dégager pour un grand nombre d'expériences identiques, on préfère faire faire ce travail fastidieux par un ordinateur : il est en effet éprouvant d'effectuer à la main 1 000 ou 10 000 lancers de dés, alors qu'un ordinateur est capable de le faire en une fraction de seconde.

En général, toute modélisation est guidée par le professeur qui utilisera le plus souvent des algorithmes.

C Représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registre

Suivant ce qui est demandé dans l'exercice, il faut être capable de comprendre quel domaine est concerné. Me demande-t-on un calcul numérique ? Un calcul algébrique ? Un graphe ? En général, c'est précisé mais il faut être capable en Terminale de combiner ces différents registres. Les professeurs aiment beaucoup faire construire des repères, des graphes, des diagrammes, des tableaux… à leurs élèves. Les représentations graphiques sont même parfois un bon prélude à un calcul algébrique.

Conseils du professeur

En T^le^, beaucoup de points sont accordés à la qualité de la représentation graphique. Une représentation graphique tracée avec soin peut rapporter parfois jusqu'à deux points (sur 20). Ce n'est pas quelque chose de difficile, il suffit juste d'être soigneux et d'avoir un matériel de géométrie complet (équerre, règle, rapporteur, compas, crayon bois, gomme). Sinon, de plus en plus, des impressions de courbes tracées sous GeoGebra sont autorisées dans les devoirs maisons. Dans ce cas, la compétence est différente, il faut savoir utiliser intelligemment le zoom et le cadrage de figures. Bien penser à choisir une échelle adaptée, des légendes cohérentes, etc.

D Raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective

Raisonner revient à lier de manière logique des propositions. Chaque étape d'un raisonnement devra être validée par une démonstration, c'est-à-dire une preuve (on met alors en perspective les résultats partiels, le cheminement de pensée en quelque sorte). La démonstration est en quelque sorte « l'épreuve du feu » du raisonnement.

Raisonner « bien » est une compétence fondamentale en mathématiques. Pour la développer, rien de mieux que de s'attaquer à des problèmes algébriques sur les suites, les nombres ou les complexes).

Conseil du professeur

Il vaut mieux faire clair et concis que long et pénible à lire. Les mathématiques sont une discipline où l'on ne ment pas. Si votre raisonnement est solide, il sera agréable à lire et aura la force de l'évidence. Il faut faire simple et rigoureux.

E Calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes

Calculer ou appliquer des techniques est une capacité algébrique. Pour la dominer, il faut essentiellement s'exercer, s'entraîner sur des exercices parfois un peu répétitifs.

Mettre en œuvre des algorithmes est en revanche beaucoup plus délicat, mais en passant du temps sur Python, on fait assez vite des progrès. Chose importante : les programmes (ou algorithmes) sont de plus en plus présents, ils permettent de conjecturer ou de mettre à l'épreuve une modélisation. Il faut donc s'investir dans cette compétence.

Conseils du professeur

On peut demander la création d'un algorithme de A à Z. Dans ce cas, il faut se constituer une petite bibliothèque de programmes tout fait (sous forme d'un calepin, ou d'un répertoire). C'est en programmant qu'on devient programmeur. Au début, créer un algorithme paraît insurmontable. Une fois qu'on en connaît cinq ou six par cœur, cela devient facile.

F Communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche

L'aspect rédactionnel des mathématiques est fondamental : très rigoureux, il doit suivre des règles logiques qui s'enchaînent jusqu'à aboutir à une conclusion infaillible. Chaque étape doit être d'une transparence totale, sans aucune ambiguïté.

Il est de plus en plus fréquent qu'un professeur passe dans les rangs et vous interroge sur votre démarche lorsqu'un exercice demande à être résolu. Sans être un grand orateur, vous devez être capable en quelques mots de justifier vos idées, la direction que vous avez choisie. Peu importe que vous soyez dans la bonne ou la mauvaise direction, le professeur évaluera votre dynamisme, vos idées de recherche, pas forcément leur aboutissement.

Conseils du professeur

Essayez toujours de vous souvenir de votre cours (et de l'enchaînement des différents paragraphes). Un exercice est souvent posé pour illustrer une notion fraîchement vue en classe. On ne risque pas de vous interroger sur le théorème de Thalès de 3e si vous faite un exercice sur les graphes pondérés par exemple. Il vous faut faire un effort de contextualisation puis de mémoire : « pourquoi me pose-t-on cette question ? » est la remarque que vous devez vous faire au moment où vous prenez connaissance de l'exercice. À quel chapitre, cet exercice se rapporte-t-il ?

2 Récapitulatif des exercices illustrant les compétences

Compétences	*Exercices concernés*
Chercher, expérimenter (en particulier à l'aide d'outils logiciels)	**Chap. 1** : 1.2 ; 1.3 **Chap. 2** : 2.3 **Chap. 3** : 3.5 **Chap. 4** : 4.1 ; 4.2 ; 4.3 ; 4.4 **Chap. 6** : 6.4 ; 6.5 **Chap. 7** : 7.4
Modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle	**Chap. 7** : 7.1 ; 7.2 ; 7.3 ; 7.8
Représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique, etc.), changer de registre	**Chap. 2** : 2.1 ; 2.2 ; 2.3 ; 2.4 **Chap. 3** : 3.1 ; 3.2 ; 3.3 ; 3.4 ; 3.5 ; 3.7 **Chap. 5** : 5.1 ; 5.2 ; 5.5 ; 5.6 ; 5.7 **Chap. 7** : 7.1 ; 7.2 ; 7.3
Raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective	**Chap. 3** : 3.4 ; 3.6 **Chap. 4** : 4.3 ; 4.4 **Chap. 5** : 5.3 ; 5.4 ; 5.7 **Chap. 6** : 6.1 ; 6.2 ; 6.6 ; 6.8 ; 6.9 ; 6.10 **Chap. 7** : 7.5 ; 7.6 ;

Compétences	Exercices concernés
Calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes	**Chap. 1** : 1.1 ; 1.2 ; 1.3 **Chap. 2** : 2.1 ; 2.2 **Chap. 3** : 3.1 ; 3.2 ; 3.3 ; 3.4 ; 3.5 ; 3.7 **Chap. 4** : 4.1 ; 4.2 ; 4.3 ; 4.4 **Chap. 5** : 5.1 ; 5.2 ; 5.3 ; 5.4 ; 5.7 **Chap. 6** : 6.1 ; 6.2 ; 6.3 ; 6.7 ; 6.8 ; 6.9 ; 6.10 **Chap. 7** : 7.2 ; 7.3 ; 7.5 ; 7.6 ; 7.7 ; 7.8
Communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche	**Chap. 2** : 2.4 ; 2.5 **Chap. 3** : 3.5 **Chap. 4** : 4.3 ; 4.4 **Chap. 6** : 6.2 ; 6.9 ; 6.10 **Chap. 7** : 7.6 ; 7.7 ; 7.8

Chapitre 1

Nombres complexes : point de vue algébrique

1

Cours

1 Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Partie réelle et partie imaginaire. Opérations

Définition du nombre *i*

Le nombre i, appelé nombre imaginaire (ou impossible) est un nombre inventé par Descartes (1596-1650) vérifiant $i^2 = -1$.

Définition d'un nombre complexe

Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation

L'ensemble de tous les nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle :

- partie réelle de *z*, le nombre réel noté $\mathrm{Re}(z)$ défini par $\mathrm{Re}(z) = a$
- partie imaginaire de *z*, le nombre réel noté $\mathrm{Im}(z)$ défini par $\mathrm{Im}(z) = b$.

Propriétés (opérations)

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors :

1. $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$
2. $z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + i(b_1 - b_2)$
3. $z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)$ (car $i^2 = -1$)
4. Soit $z = a + ib$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$.

2 Conjugaison. Propriétés algébriques

Définition

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe. On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z}=a-ib$.

Propriétés algébriques

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes alors :

a. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ b. $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ c. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (si $z_2\neq 0$)

2. Soit $z=a+ib$ alors $z\overline{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$.

3 Inverse d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe non nul. On appelle inverse du nombre complexe z le nombre complexe $\frac{1}{z}$.

Propriété

Si $z=a+ib$ un nombre complexe non nul alors : $\frac{1}{z}=\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$.

4 Formule du binôme dans $\mathbb{C}$

Théorème

$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^{\,k}z_2^{\,n-k}$ pour tous $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ et n entier positif.

Démonstrations exigibles

1 Démonstration exigible n° 1
Conjugué d'un produit, d'un inverse, d'une puissance entière

1. **Résultat :** $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

▶ **Démonstration**

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ les écritures algébriques de $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

D'un côté : $z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1) \times (a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2$
$= a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 - b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + b_1a_2)$.

Donc : $\overline{z_1 \times z_2} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + b_1a_2)$.

De l'autre côté, $\overline{z_1} \times \overline{z_2} = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1a_2 - ia_1b_2 - ib_1a_2 + i^2b_1b_2$
$= a_1a_2 - ia_1b_2 - ib_1a_2 - b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + b_1a_2)$.

Ainsi, on a bien : $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

2. **Résultat :** $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

▶ **Démonstration**

Soit $z = a + ib$ l'écriture algébrique de $z \in \mathbb{C}^*$ (avec a, b non nuls simultanément).

D'un côté :

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\frac{1}{a^2+b^2}(a-ib)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(\overline{a-ib}\right) = \frac{1}{a^2+b^2}(a+ib)$$

(car $a^2 + b^2$ est un réel).

De l'autre côté, $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{1 \times (a+ib)}{(a-ib) \times (a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$.

Ainsi, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

3. **Résultat** : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ et n entier.

Démonstration

Effectuons un raisonnement par récurrence et considérons la propriété P_n : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$.

Initialisation : P_0 est vraie car $\overline{z^0}=\overline{1}=1$ et $\left(\overline{z}\right)^0=1$.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$) et montrons que P_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $\overline{z^{n+1}}=\left(\overline{z}\right)^{n+1}$).

$\overline{z^{n+1}}=\overline{z^n\times z}=\overline{z^n}\times\overline{z}$ (d'après la propriété 1) sur le conjugué d'un produit))

$=\left(\overline{z}\right)^n\times\overline{z}$ (car P_n étant vraie, on a : $\overline{z^n}=\left(\overline{z}\right)^n$)

$=\left(\overline{z}\right)^{n+1}$. Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion : comme P_0 est que P_n est héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n\geq 0$.

2 Démonstration exigible n° 2

Formule du binôme

Résultat : $\left(z_1+z_2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n-k}$ pour tous $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ et n entier positif.

Démonstration

Effectuons un raisonnement par récurrence.

Soit P_n la propriété : $\left(z_1+z_2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n-k}$.

Initialisation : P_0 est vraie car $\left(z_1+z_2\right)^0=1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}z_1{}^k z_2{}^{0-k}=\binom{0}{0}z_1{}^0 z_2{}^{0-0}=1$.

Hérédité : supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $\left(z_1+z_2\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n-k}$) et montrons que P_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $\left(z_1+z_2\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}$).

On a : $\left(z_1+z_2\right)^{n+1}=\left(z_1+z_2\right)\left(z_1+z_2\right)^n=\left(z_1+z_2\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n-k}$

C'est-à-dire : $\left(z_1+z_2\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^{k+1}z_2{}^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}$

En posant $L=k+1$ (pour la 1re sommation), on obtient :

$$\left(z_1+z_2\right)^{n+1}=\sum_{L=1}^{n+1}\binom{n}{L-1}z_1{}^L z_2{}^{n+1-L}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}$$

$$=\sum_{L=1}^{n}\binom{n}{L-1}z_1{}^L z_2{}^{n+1-L}+\binom{n}{n}z_1{}^{n+1}z_2{}^0+\binom{n}{0}z_1{}^0 z_2{}^{n+1-0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}$$

$$=z_1{}^{n+1}+\sum_{L=1}^{n}\binom{n}{L-1}z_1{}^L z_2{}^{n+1-L}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}+z_2{}^{n+1}$$

$$=z_1{}^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}+z_2{}^{n+1}$$

$$=z_1{}^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}+z_2{}^{n+1}.$$

Or $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, donc : $\left(z_1+z_2\right)^{n+1}=z_1{}^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}+z_2{}^{n+1}$

Donc : $\left(z_1+z_2\right)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}z_1{}^k z_2{}^{n+1-k}$

(car $z_1{}^{n+1}=\binom{n+1}{n+1}z_1{}^{n+1}z_2{}^{n+1-(n+1)}$ et $z_2{}^{n+1}=\binom{n+1}{0}z_1{}^0 z_2{}^{n+1-0}$)

Ainsi P_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : comme P_0 et que P_n est héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour tout entier $n\geq 0$.

Exercices

Compétences attendues

- Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes

Exercice 1.1

Calculer

Simplifier l'expression :

1. $5+3i+7+2i$
2. $i+2i^2$
3. i^3
4. i^4
5. $(-i)^3$
6. $(-i)^4+i(i+1)$
7. $(5+i)(-2+3i)$
8. $i(-1+i)$
9. $-i(1+i)$
10. $(2-i)3i$
11. $\dfrac{1}{2+i}$
12. $\dfrac{1}{3-2i}$
13. $\dfrac{1-i}{1+i}$
14. $\dfrac{1}{2+6i}$
15. $\dfrac{-i}{2-5i}$

Compétences attendues

- Résoudre une équation linéaire $az=b$

Exercice 1.2

Chercher, calculer, expérimenter à l'aide d'outils logiciels

Résoudre l'équation :

1. $(3+2i)z=5-4i$
2. $(-3-i)z+2=1-2i$

Conseils

Vérifier vos résultats avec le logiciel Xcas et l'instruction csolve.

Compétences *attendues*

- Résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$

Exercice 1.3

Expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Calculer, appliquer des techniques

Résoudre l'équation :

1. $z+2\overline{z}=1+4i$
2. $3z-2\overline{z}=-2+3i$

Conseils

Vérifier vos résultats avec le logiciel Xcas et l'instruction csolve.

Exercices-bilan

Exercice-bilan 1.1

5 min • 1,5 points

Simplifier l'expression :

1. $(1+i)(\sqrt{3}-i)$
2. $2i(-5-i)$
3. $\sqrt{2}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$.

Exercice-bilan 1.2

5 min • 2 points

Soit $z_1=\sqrt{3}+i$. Déterminer $z_2=\dfrac{z_1^{\,2}}{2}$ et $z_3=\dfrac{4}{z_2}$.

Exercice-bilan 1.3

15 min • 4,5 points

On considère la suite (z_n) définie par $\begin{cases} z_{n+1}=(1+i)z_n \\ z_0=\sqrt{3}-i \end{cases}$.

1. Déterminer z_1.
2. Soit (w_n) la suite définie par $w_n=\dfrac{1}{z_n}$. Démontrer que $w_{n+1}=\dfrac{(1-i)}{2}w_n$.

Exercice-bilan 1.4

5 min • 3 points

Soit $z_1=3+i\sqrt{3}$ et $z_2=-\sqrt{3}+3i$. Démontrer que $\dfrac{z_2}{z_1}=i$.

Exercice-bilan 1.5

10 min • 4 points

Résoudre l'équation :

1. $(2-i)z=1+3i$
2. $(-1-2i)z+1=1+2i$.

Exercice-bilan 1.6

15 min • 5 points

Résoudre l'équation :

1. $z-2\overline{z}=2-i$
2. $3z-\overline{z}=i$.

Bilan

Corrigé des exercices

Exercice 1.1

1. $5+3i+7+2i=5+7+3i+2i=12+5i$.
2. $i+2i^2=i+2\times(-1)=i-2=-2+i$.
3. $i^3=i^2\times i=-1\times i=-i$.
4. $i^4=i^2\times i^2=-1\times(-1)=1$.
5. $(-i)^3=(-i)(-i)^2=-i\times i^2=-i\times(-1)=i$.
6. $(-i)^4+i(i+1)=i^4+i^2+i=1-1+i=i$.
7. $(5+i)(-2+3i)=-10+15i-2i+3i^2=-10+13i-3=-13+13i$.
8. $i(-1+i)=-i+i^2=-i-1=-1-i$.
9. $-i(1+i)=-i-i^2=-i+1=1-i$.
10. $(2-i)3i=6i-3i^2=6i+3=3+6i$.
11. $\dfrac{1}{2+i}=\dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i}{4+1}=\dfrac{2-i}{5}=\dfrac{2}{5}-i\dfrac{1}{5}$.
12. $\dfrac{1}{3-2i}=\dfrac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{3+2i}{9+4}=\dfrac{3}{13}+i\dfrac{2}{13}$.
13. $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-2i+i^2}{1+1}=\dfrac{1-2i-1}{2}=-i$.
14. $\dfrac{1}{2+6i}=\dfrac{2-6i}{(2+6i)(2-6i)}=\dfrac{2-6i}{4+36}=\dfrac{2-6i}{40}=\dfrac{1}{20}-i\dfrac{3}{20}$.
15. $\dfrac{-i}{2-5i}=\dfrac{-i(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\dfrac{-2i-5i^2}{4+25}=\dfrac{-2i+5}{29}=\dfrac{5}{29}-i\dfrac{2}{29}$.

Exercice 1.2

1. $\left(3+2i\right)z=5-4i \Leftrightarrow z=\dfrac{5-4i}{3+2i} \Leftrightarrow z=\dfrac{\left(5-4i\right)\left(3-2i\right)}{\left(3+2i\right)\left(3-2i\right)} \Leftrightarrow z=\dfrac{15-10i-12i+8i^2}{9+4}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{15-22i-8}{13} \Leftrightarrow z=\dfrac{7}{13}-i\dfrac{22}{13}.$

2. $\left(-3-i\right)z+2=1-2i \Leftrightarrow \left(-3-i\right)z=-1-2i \Leftrightarrow z=\dfrac{-1-2i}{-3-i} \Leftrightarrow z=\dfrac{\left(-1-2i\right)\left(-3+i\right)}{\left(-3-i\right)\left(-3+i\right)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3-i+6i-2i^2}{9+1} \Leftrightarrow z=\dfrac{3+5i+2}{10} \Leftrightarrow z=\dfrac{5+5i}{10} \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{1}{2}.$

Vérification avec le logiciel Xcas :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

csolve((3+2i)*z=5-4i,z)

$$\left[\frac{7-22i}{13}\right]$$

csolve((-3-i)*z+2=1-2i,z)

$$\left[\frac{1+i}{2}\right]$$

On trouve bien la même chose.

Exercice 1.3

1. Soit $z=a+ib$ l'écriture algébrique de z.

$z+2\overline{z}=1+4i \Leftrightarrow a+ib+2\left(a-ib\right)=1+4i \Leftrightarrow a+2a+ib-2ib=1+4i$

$\Leftrightarrow 3a-ib=1+4i \Leftrightarrow 3a=1$ et $-b=4 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$ et $b=-4 \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{3}-4i.$

2. Soit $z=a+ib$ l'écriture algébrique de z.

$3z-2\overline{z}=-2+3i \Leftrightarrow 3\left(a+ib\right)-2\left(a-ib\right)=-2+3i \Leftrightarrow 3a+3ib-2a+2ib=-2+3i$

$\Leftrightarrow a+i5b=-2+3i \Leftrightarrow a=-2$ et $5b=3 \Leftrightarrow a=-2$ et $b=\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow z=-2+i\dfrac{3}{5}.$

Corrigés

Vérification avec le logiciel Xcas :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
csolve(z+2*conj(z)=1+4i,z)
```

$$[\frac{1}{3}+-4i]$$

```
csolve(3*z-2*conj(z)=-2+3i,z)
```

$$[-2+\frac{3i}{5}]$$

On trouve bien la même chose.

Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 1.1

1. $\left(1+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-i^2=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}+1=1+\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right).$
2. $2i\left(-5-i\right)=-10i-2i^2=-10i+2=2-10i.$
3. $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}^2-i\sqrt{2}^2=2-2i.$

Exercice-bilan 1.2

$$z_2=\frac{z_1{}^2}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{2}=\frac{\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}i+i^2}{2}=\frac{3+2\sqrt{3}i-1}{2}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{2}=1+i\sqrt{3}.$$

$$z_3=\frac{4}{z_2}=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}=\frac{4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{4-i4\sqrt{3}}{1^2+\sqrt{3}^2}$$

$$=\frac{4-i4\sqrt{3}}{4}=1-i\sqrt{3}.$$

Exercice-bilan 1.3

1. $z_1=\left(1+i\right)z_0=\left(1+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=\sqrt{3}-i+i\sqrt{3}-i^2=1+\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right).$

2. $w_{n+1}=\dfrac{1}{z_{n+1}}=\dfrac{1}{\left(1+i\right)z_n}=\dfrac{1}{\left(1+i\right)}\dfrac{1}{z_n}=\dfrac{1}{\left(1+i\right)}w_n=\dfrac{1\times\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\times\left(1-i\right)}w_n$

$$=\frac{1-i}{1-i^2}w_n=\frac{1-i}{1+1}w_n=\frac{1-i}{2}w_n.$$

Exercice-bilan 1.4

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(-\sqrt{3}+3i\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{-3\sqrt{3}+3i+9i-3\sqrt{3}i^2}{9+3}$$

$$=\frac{-3\sqrt{3}+3i+9i+3\sqrt{3}}{9+3}=\frac{12i}{12}=i.$$

Exercice-bilan 1.5

1. $\left(2-i\right)z=1+3i\Leftrightarrow z=\dfrac{1+3i}{2-i}\Leftrightarrow z=\dfrac{\left(1+3i\right)\left(2+i\right)}{\left(2-i\right)\left(2+i\right)}\Leftrightarrow z=\dfrac{2+i+6i+3i^2}{4+1}$

$$\Leftrightarrow z=\frac{2+7i-3}{5}\Leftrightarrow z=\frac{-1}{5}+i\frac{7}{5}.$$

2. $\left(-1-2i\right)z+1=1+2i\Leftrightarrow\left(-1-2i\right)z=2i\Leftrightarrow z=\dfrac{2i}{-1-2i}\Leftrightarrow z=\dfrac{\left(-1+2i\right)2i}{\left(-1-2i\right)\left(-1+2i\right)}$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-2i+4i^2}{1+4}\Leftrightarrow z=\frac{-2i-4}{5}\Leftrightarrow z=-\frac{4}{5}-i\frac{2}{5}.$$

Exercice-bilan 1.6

1. Soit $z=a+ib$ l'écriture algébrique de z.

$$z-2\overline{z}=2-i\Leftrightarrow a+ib-2\left(a-ib\right)=2-i\Leftrightarrow a-2a+ib+2ib=2-i$$

$$\Leftrightarrow -a+i3b=2-i\Leftrightarrow -a=2 \text{ et } 3b=-1\Leftrightarrow a=-2 \text{ et } b=\frac{-1}{3}\Leftrightarrow z=-2-\frac{1}{3}i.$$

2. Soit $z=a+ib$ l'écriture algébrique de z.

$$3z-\overline{z}=i\Leftrightarrow 3\left(a+ib\right)-\left(a-ib\right)=i\Leftrightarrow 3a+3ib-a+ib=i$$

$$\Leftrightarrow 2a+i4b=i\Leftrightarrow a=0 \text{ et } 4b=1\Leftrightarrow a=0 \text{ et } b=\frac{1}{4}\Leftrightarrow z=\frac{1}{4}i.$$

Chapitre 2

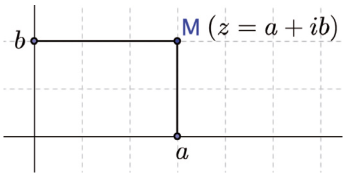
Nombres complexes : point de vue géométrique

Cours

1 Image d'un nombre complexe. Image du conjugué. Affixe d'un point, d'un vecteur

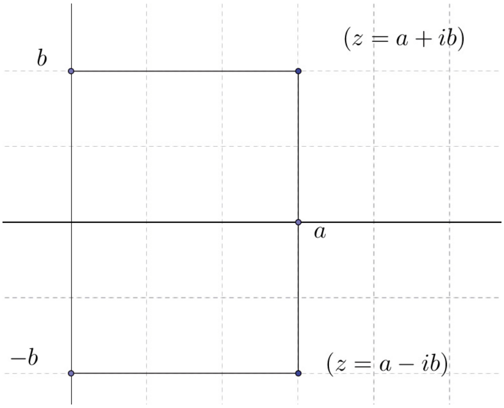
Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le point $M(a,b)$ est appelé image de z.



Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Son conjugué $\overline{z}$ (défini par $\overline{z} = a - ib$) admet pour image le point de coordonnées $(a,-b)$. Ainsi les images de $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$ sont deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses.



Définition

L'affixe du point $M(a,b)$ est le nombre complexe $z_M = a + ib$.

Définition

L'affixe du vecteur $\vec{u}(x,y)$ est le nombre complexe $z_{\vec{u}} = x + iy$.

Cours

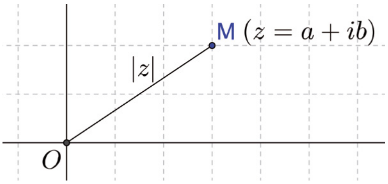
2 Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle module de z le nombre réel noté $|z|$ défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Interprétation géométrique

Le module $|z|$ d'un nombre complexe $z = a + ib$ représente la distance OM où $M(a,b)$ est l'image $z = a + ib$ et O l'origine du repère.



3 Relation $|z|^2 = z\bar{z}$. Module d'un produit, d'un inverse

Propriété

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors $|z|^2 = z\bar{z}$.

Propriété (module d'un produit)

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Propriété (module d'un inverse)

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ pour tous $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$.

4 Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Stabilité de $\mathbb{U}$ par produit et passage à l'inverse

Définition

On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $|z| = 1$.

Propriété (stabilité par produit)

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ alors $z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$.

Propriété (stabilité par passage à l'inverse)

Si $z \in \mathbb{U}$ alors $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

5 Arguments d'un nombre complexe non nul. Interprétation géométrique

Définition

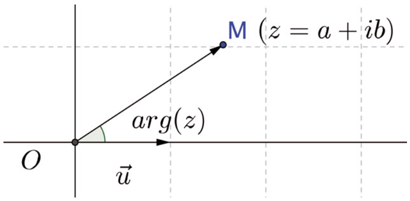
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe (non nul). On appelle argument de z le nombre réel noté $\theta = \arg(z)$ vérifiant $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$.

Remarques

1. Il faut s'aider d'un cercle trigonométrique pour déterminer un argument d'un nombre complexe.
2. L'égalité étant définie modulo 2π (où à 2π près), un nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments, tous égaux modulo 2π.

Interprétation géométrique

L'argument $\arg(z)$ d'un nombre complexe $z = a + ib$ représente une mesure (à 2π près) de l'angle $\arg(z) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ $[2\pi]$ où M est l'image de z dans le repère $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$.



6 Forme trigonométrique

Propriété

Soit z un nombre complexe non nul, alors $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ $[2\pi]$.

Définition

L'expression $r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ où $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\ [2\pi]$ est appelée forme trigonométrique de z.

Démonstrations exigibles

1 Démonstration exigible n° 1

Formule $z\bar{z}=|z|^2$

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe, alors :
$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2=|z|^2$.

2 Démonstration exigible n° 2

Module d'un produit

Résultat : $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$ pour tous $z_1,z_2\in\mathbb{C}$.

▶ **Démonstration**

Considérons les formes algébriques a_1+ib_1 et a_2+ib_2 de z_1 et z_2.
On a : $z_1\times z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)$ et donc :

$$|z_1\times z_2|=\sqrt{(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2}$$

$$=\sqrt{(a_1a_2)^2-2a_1a_2b_1b_2+(b_1b_2)^2+(a_1b_2)^2+2a_1b_2a_2b_1+(a_2b_1)^2}$$

$$=\sqrt{(a_1a_2)^2+(b_1b_2)^2+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2}=\sqrt{a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2}.$$

Par ailleurs : $|z_1|\times|z_2|=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)}\sqrt{(a_2^2+b_2^2)}=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}$

$$=\sqrt{a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+b_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2}.$$

On a donc : $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$.

3 Démonstration exigible n° 3
Module d'une puissance

Résultat : $\left|z^n\right| = |z|^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et n entier positif.

Démonstration

Effectuons un raisonnement par récurrence.

Soit P_n la propriété $\left|z^n\right| = |z|^n$.

Initialisation : P_0 est vraie car : $\left|z^0\right| = |1| = 1$ et $|z|^0 = 1$.

Hérédité : supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $\left|z^n\right| = |z|^n$) et montrons que P_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $\left|z^{n+1}\right| = |z|^{n+1}$).

On a : $\left|z^{n+1}\right| = \left|z^n \times z\right| = \left|z^n\right| \times |z|$ (d'après la propriété $\left|z_1 \times z_2\right| = \left|z_1\right| \times \left|z_2\right|$)

Donc : $\left|z^{n+1}\right| = |z|^n \times |z| = |z|^{n+1}$ (puisque d'après P_n, on a $\left|z^n\right| = |z|^n$).

Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion : comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Exercices

Compétences attendues

- Déterminer le module et les arguments d'un nombre complexe

Exercice 2.1

Calculer, changer de registre

- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z=2\sqrt{3}+2i$.

Exercice 2.2

Calculer, changer de registre

- Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z=-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}i$.

Exercice 2.3

Calculer, changer de registre, expérimenter à l'aide d'outils logiciels

- Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z=4-4i$.

(Vérifier vos résultats avec le logiciel Xcas et les instruction abs et arg.)

Compétences attendues

- Représenter un nombre complexe par un point. Déterminer l'affixe d'un point

Exercice 2.4

Représenter, changer de registre, expliquer une démarche

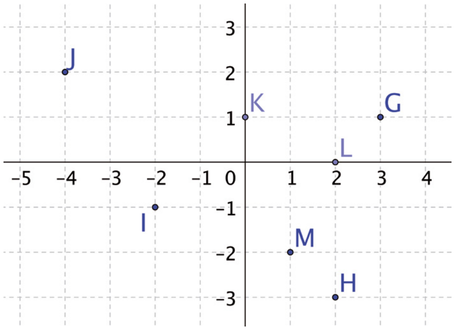
Soient A, B, C, D, E, F les points d'affixes $z_A=1+2i$, $z_B=2-i$, $z_C=-3+i$, $z_D=-4-2i$, $z_E=5$ et $z_F=3i$.

- Représenter ces six points dans un même repère.

Exercice 2.5

Communiquer un résultat par écrit, expliquer une démarche

- Déterminer les affixes des points G, H, I, J, K, L, M situés dans le repère ci-dessous :



Exercices-bilan

Exercice-bilan 2.1

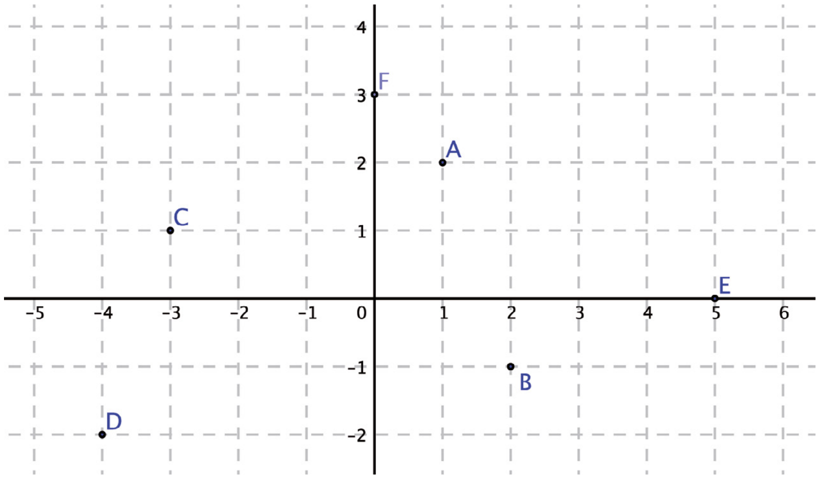
30 min • 10 points

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe :
   a. $z=2-2\sqrt{3}i$.
   b. $z=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$.
   c. $z=\sqrt{3}-i$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de :
   a. $z=1+\sqrt{3}i$.
   b. $z=-i$.

Exercice-bilan 2.2

15 min • 5 points

1. Soient A, B, C, D, E, F les points d'affixes $z_A=2-i$, $z_B=3+2i$, $z_C=-3+2i$, $z_D=-2-4i$, $z_E=-3$ et $z_F=-3i$. Représenter ces six points dans un même repère.
2. Déterminer les affixes des points G, H, I, J, K, L, M situés dans le repère ci-dessous :



Exercice-bilan 2.3

10 min • 5 points

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

1. Démontrer que $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ et $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$.
2. Démontrer que $|z| = |\overline{z}|$.

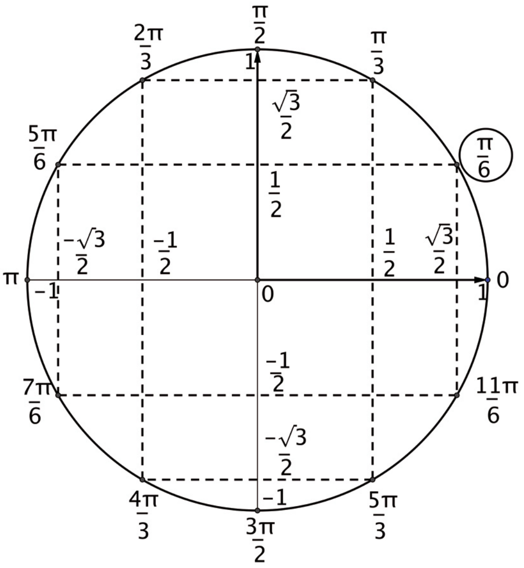
Corrigé des exercices

Exercice 2.1

Module : $r=|z|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{2\sqrt{3}}{|z|}\\ \sin(\theta)=\dfrac{2}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

c'est-à-dire $\theta=\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

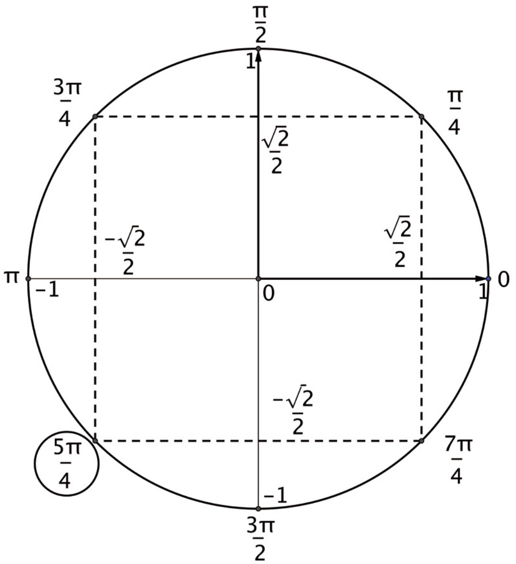


Exercice 2.2

Module : $r=\left|z\right|=\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{27+27}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$.

Argument : $\theta=\arg\left(z\right)$ vérifie : $\begin{cases}\cos\left(\theta\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{\left|z\right|}\\[2ex]\sin\left(\theta\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{\left|z\right|}\end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases}\cos\left(\theta\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\\[2ex]\sin\left(\theta\right)=\dfrac{-3\sqrt{3}}{3\sqrt{6}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ c'est-à-dire $\theta=\dfrac{5\pi}{4}\left[2\pi\right]$.

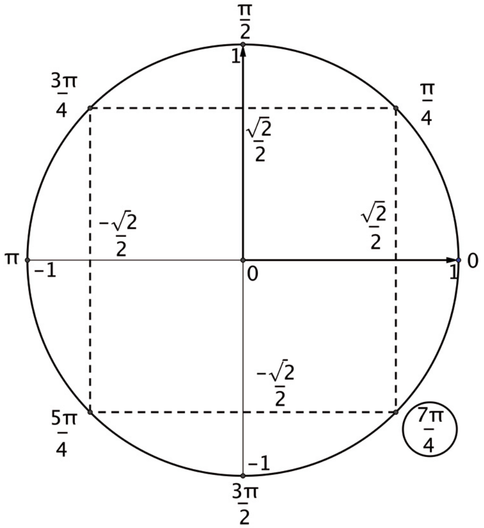


Exercice 2.3

Module : $r = |z| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Argument : $\theta = \arg(z)$ vérifie : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{4}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-4}{|z|} \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ c'est-à-dire $\theta = \dfrac{7\pi}{4}[2\pi]$.



Forme trigonométrique : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Vérification avec le logiciel Xcas :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

abs(4-4i)

$$4\sqrt{2}$$

arg(4-4i)

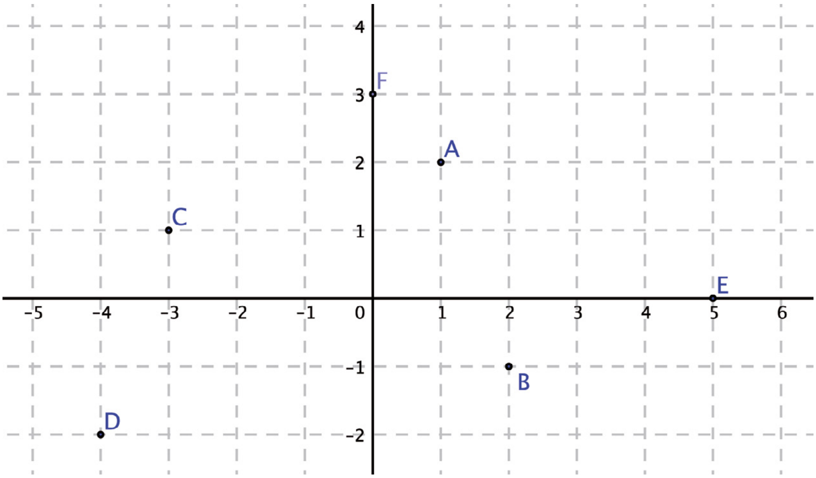
$$\frac{-\pi}{4}$$

On obtient bien la même chose, puisque $-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}\left[2\pi\right]$.

Exercice 2.4

Le point A d'affixe $z_A=1+2i$ a pour abscisse 1 et pour ordonnée 2 donc il s'agit du point $A\left(1;2\right)$.

De même, on obtient : $B\left(2;-1\right)$, $C\left(-3;1\right)$, $D\left(-4;-2\right)$, $E\left(5;0\right)$, et $F\left(0;3\right)$, ce qui nous donne :



Exercice 2.5

Le point G a pour abscisse 3 et pour ordonné 1, il a donc pour affixe $z_G=3+i$.

De même, on obtient $z_H=2-3i$, $z_I=-2-i$, $z_J=-4+2i$, $z_K=i$, $z_L=2$ et $z_M=1-2i$.

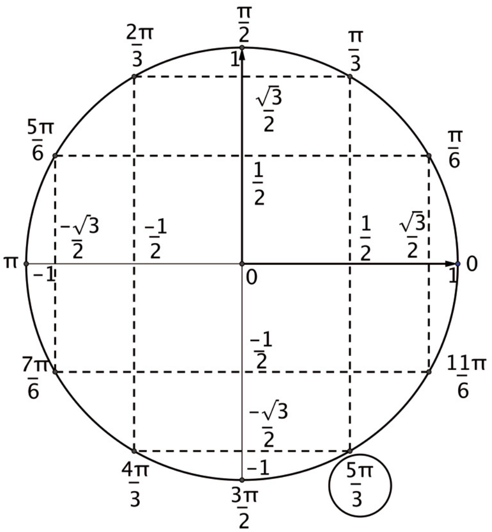
Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 2.1

1. **a.** Module : $r=|z|=\sqrt{2^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{2}{|z|}\\[2mm] \sin(\theta)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \sin(\theta)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

C'est-à-dire $\theta=\dfrac{5\pi}{3}[2\pi]$.



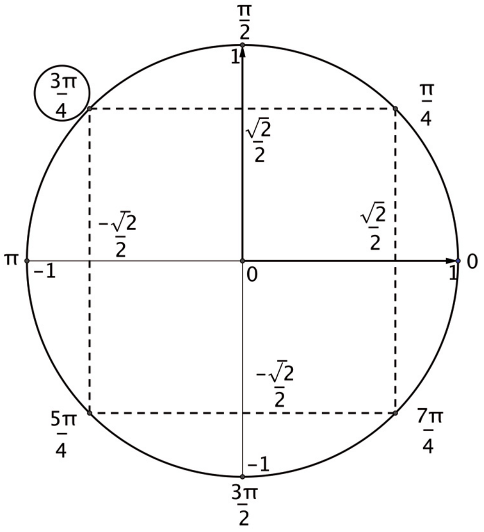
b. Module : $r=|z|=\sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{12+12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{-2\sqrt{3}}{|z|}\\[2mm] \sin(\theta)=\dfrac{2\sqrt{3}}{|z|}\end{cases}$

Corrigés

c'est-à-dire $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

c'est-à-dire $\theta = \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.



c. Module : $r = |z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$

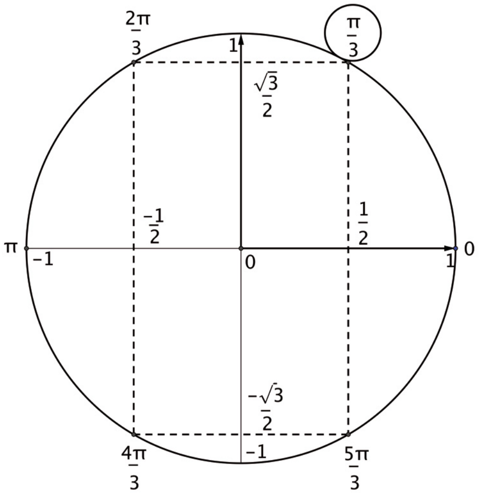
Argument : $\theta = \arg(z)$ vérifie : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{|z|} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-1}{|z|} \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

c'est-à-dire $\theta = \dfrac{11\pi}{6}[2\pi]$.

2. ***a.*** Module : $r=|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{|z|}\\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

c'est-à-dire $\theta=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.



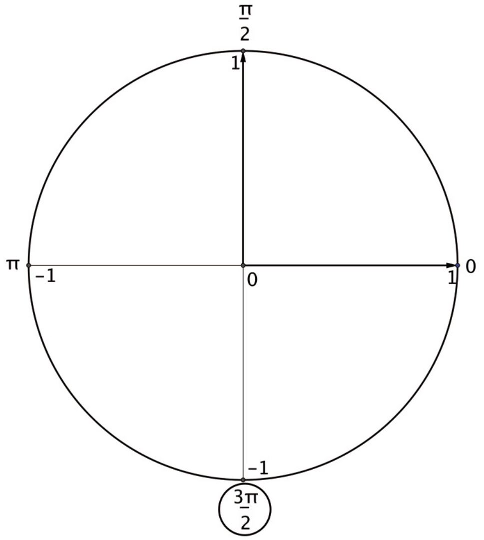
Forme trigonométrique : $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

b. Module : $r=|z|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=\sqrt{1}=1$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{0}{|z|}\\ \sin(\theta)=\dfrac{-1}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=0\\ \sin(\theta)=-1\end{cases}$

c'est-à-dire $\theta=\dfrac{3\pi}{2}[2\pi]$.

Corrigés

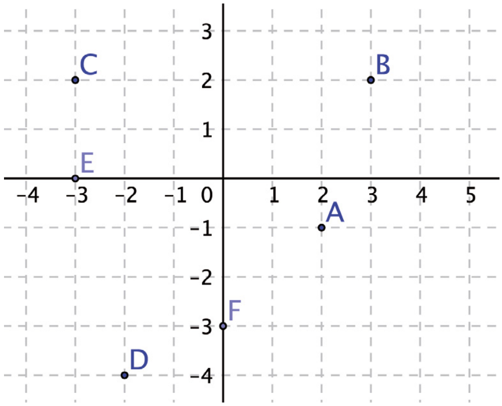


Forme trigonométrique : $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=1\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

Exercice-bilan 2.2

1. Le point A d'affixe $z_A=2-i$ a pour abscisse 2 et pour ordonnée $z_A=-1$ donc il s'agit du point $A(2\,;-1)$.

   De même, on obtient : $B(3\,;2)$, $C(-3\,;2)$, $D(-2\,;-4)$, $E(-3\,;0)$, et $F(0\,;-3)$, ce qui nous donne :



2. Le point G a pour abscisse 4 et pour ordonné 1, il a donc pour affixe $z_G = 4+i$.

De même, on obtient $z_H = 1+2i$, $z_I = -2+i$, $z_J = -2i$, $z_K = -2+4i$, $z_L = 2$ et $z_M = -4+2i$.

Exercice-bilan 2.3

1. On a $\text{Re}(z) = a$ et $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

On a $a^2+b^2 \geq a^2$ (car $b^2 \geq 0$) donc $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2}$ (par croissance de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0;+\infty[$) donc $\sqrt{a^2+b^2} \geq |a|$ (car $\sqrt{a^2} = |a|$ et donc $\sqrt{a^2+b^2} \geq a$ (car $|a| \geq a$) donc $\text{Re}(z) \leq |z|$.

On a $\text{Im}(z) = b$ et $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

On a $a^2+b^2 \geq b^2$ (car $a^2 \geq 0$) donc $\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{b^2}$ (par croissance de la fonction racine carrée sur l'intervalle $[0;+\infty[$) donc $\sqrt{a^2+b^2} \geq |b|$ (car $\sqrt{b^2} = |b|$ et donc $\sqrt{a^2+b^2} \geq b$ (car $|b| \geq b$) donc $\text{Im}(z) \leq |z|$.

2. On a $z = a+ib$ donc $\overline{z} = a-ib$.

Ainsi $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $|\overline{z}| = \sqrt{a^2+(-b)^2}$.

Comme $b^2 = (-b)^2$, on en déduit que $|z| = |\overline{z}|$.

Corrigés

Chapitre 3

Nombres complexes et trigonométrie

Cours

1 Formules d'addition et de duplication à partir du produit scalaire

Propriétés (formules d'addition)

Pour tout a, b réels :

1. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$;
4. $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$.

Propriétés (formules de duplication)

Pour tout a réel :

1. $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$
2. $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

2 Exponentielle imaginaire, notation $e^{i\theta}$. Relation fonctionnelle. Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition

Soit θ un nombre réel, le nombre $e^{i\theta}$ défini par $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ est appelé exponentielle imaginaire.

Relation fonctionnelle

Pour tout θ_1, θ_2 réels : $e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Propriété

Soit z un nombre complexe. Alors $z=re^{i\theta}$ où $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\ [2\pi]$.

Définition

Soit z un nombre complexe, alors $re^{i\theta}$ (où $r=|z|$ et $\theta=\arg(z)\ [2\pi]$) est appelée forme exponentielle de z.

3 Formules d'Euler (1707-1783)

Propriétés

Pour tout θ réel, $\cos(\theta)=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$.

4 Formules de Moivre (1667-1754)

Propriété

Pour tout θ réel et tout entier n, $\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n$.

Démonstration exigible

1 Démonstration exigible n° 1

Démonstration d'une des formules d'addition

Résultat : $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$ pour tous a, b réels.

Démonstration

Sur le cercle trigonométrique, plaçons un point A correspondant à un angle a et un point B correspondant à un angle b.

On a $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=1$, $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|=1$ et $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=a-b[2\pi]$ d'où $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos(a-b)$.

Par ailleurs on a $\overrightarrow{OA}\left(\cos(a),\sin(a)\right)$ et $\overrightarrow{OB}\left(\cos(b),\sin(b)\right)$

(car O, A et B ont pour coordonnées : $O(0,0)$, $A\left(\cos(a),\sin(a)\right)$et $B\left(\cos(b),\sin(b)\right)$)

d'où : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

Comme $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, on a : $1\times1\times\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

c'est-à-dire : $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

Exercices

Compétences attendues

- Passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à sa forme trigonométrique ou exponentielle et inversement

Exercice 3.1

Calculer, Changer de registre

- Déterminer la forme trigonométrique et exponentielle de $z=1+i\sqrt{3}$.

Exercice 3.2

Calculer, Changer de registre

- Déterminer la forme exponentielle et algébrique de $z=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Exercice 3.3

Calculer, Changer de registre

- Déterminer la forme trigonométrique et algébrique de $z=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Compétences attendues

- Effectuer des calculs sur des nombres complexes en choisissant une forme adaptée, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes

Exercice 3.4

Raisonner, Calculer, Changer de registre, Trouver des résultats partiels et les mettre en perspective

On souhaite déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

1. Déterminer l'expression algébrique du nombre complexe z_1 de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ et du nombre complexe z_2 de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer le module et un argument du nombre $z_1 z_2$.

3. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Compétences attendues

- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour transformer des expressions trigonométriques, dans des contextes divers (intégration, suites, etc.), calculer des puissances de nombres complexes

Exercice 3.5

Chercher, expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Calculer, appliquer des techniques, expliquer une démarche

À l'aide du logiciel de calcul formel Xcas, que peut-on conjecturer sur la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\,d\theta$?

À l'aide de la formule d'Euler, démontrer que $\int_0^{\pi} \cos^2(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.6

Raisonner, Trouver des résultats partiels et les mettre en perspective

On considère la suite (u_n) définie par pour $n\geq 1$ par $u_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. Que peut-on conjecturer sur la valeur de u_n pour $n\geq 1$?
2. On pose $z=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. En utilisant la formule de Moivre, démontrer que $\mathrm{Re}\left(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right)=1$.
3. En déduire la valeur de u_n pour $n\geq 1$.

Exercice 3.7

Calculer, changer de registre

- Calculer $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^8$ (on utilisera la formule de Moivre).

Exercices-bilan

Exercice-bilan 3.1

10 min • 6 points

1. Déterminer la forme trigonométrique et exponentielle de $z=1-i\sqrt{3}$.
2. Déterminer la forme exponentielle et algébrique de $z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.
3. Déterminer la forme trigonométrique et algébrique de $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice-bilan 3.2

10 min • 6 points

- À l'aide de la formule d'Euler, démontrer que $\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}$.

Exercice-bilan 3.3

35 min • 8 points

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies pour $n\geq 1$ par :

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\cos^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) \text{ et } b_n=\sum_{k=1}^{n}\cos^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right).$$

On pose $z_n=a_n+ib_n$ (pour $n\geq 1$).

1. En utilisant la formule de Moivre et les sommes géométriques, démontrer que $z_n=\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\dfrac{1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$ puis que :
$$z_n=i\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \text{ (pour } n\geq 1\text{)}.$$
2. En déduire que $a_n=0$ (pour $n\geq 1$).

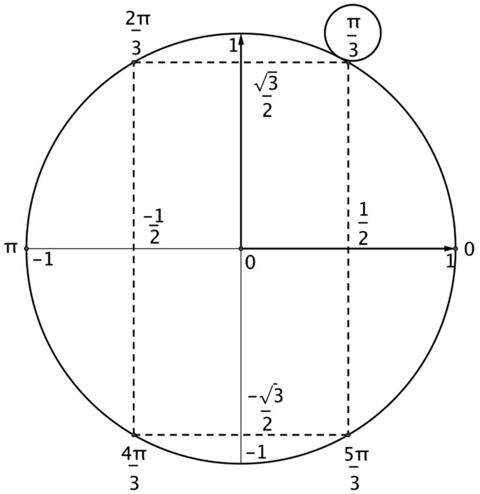
Corrigé des exercices

Exercice 3.1

Module : $r=|z|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{|z|}\\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ c'est-à-dire

$\theta=\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.



Forme trigonométrique : $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

Forme exponentielle : $z=re^{i\theta}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 3.2

$z=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc :

Module : $r=4$.

Argument : $\theta=\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Forme exponentielle : $z=re^{i\theta}=4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Forme algébrique : $z=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $z=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}+2i$.

Exercice 3.3

$z=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ donc :

Module : $r=2\sqrt{2}$.

Argument : $\theta=\frac{5\pi}{4}[2\pi]$.

Forme trigonométrique : $z=r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

Forme algébrique : $z=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2-2i$

Exercice 3.4

1. Choisissons d'utiliser les formes trigonométriques. D'après l'énoncé, on a :

$z_1=1\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ et $z_2=1\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

On obtient alors leurs formes algébriques :

$z_1=1\times\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $z_2=1\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ c'est-à-dire :

$z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Choisissons d'utiliser les formes exponentielles. D'après l'énoncé, on a :

$z_1=1\times e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=1\times e^{-i\frac{\pi}{4}}$ c'est-à-dire $z_1=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

On a alors $z_1z_2=e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{3}-i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{4\pi}{12}-i\frac{3\pi}{12}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$ ce qui montre que z_1z_2 a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{12}[2\pi]$.

2. Choisissons d'utiliser les formes algébriques. On a :

$$z_1z_2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}}{4}-i^2\frac{\sqrt{6}}{4}$$ c'est-à-dire :

$$z_1z_2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Choisissons d'utiliser la forme trigonométrique de z_1z_2. Comme z_1z_2 a pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{12}[2\pi]$, on a : $z_1z_2=1\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

c'est-à-dire $z_1z_2=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

L'égalité $z_1z_2=z_1z_2$ donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Et donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (car deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire).

Exercice 3.5

1. Avec le logiciel Xcas, on obtient :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
int((cos(x))^2,x,0,Pi)
```

$$\frac{1}{2}\pi$$

2. On peut donc conjecturer que $\int_0^{\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{2}$.

3. D'après la formule d'Euler :

$$\cos^2(\theta)=(\cos(\theta))^2=\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^2$$

Corrigés

$$=\frac{1}{4}\left[\left(e^{i\theta}\right)^2+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left(e^{i2\theta}+2e^{0}+e^{-i2\theta}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{i2\theta}+2+e^{-i2\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+2\right).$$

Toujours d'après la formule d'Euler : $e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}=2\cos\left(2\theta\right)$.

Ainsi $\cos^2\left(\theta\right)=\frac{1}{4}\left(2\cos\left(2\theta\right)+2\right)$ et donc $\int_0^{\pi}\cos^2\left(\theta\right)\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(2\cos\left(2\theta\right)+2\right)\,d\theta$

C'est-à-dire $\int_0^{\pi}\cos^2\left(\theta\right)\,d\theta=\frac{1}{4}\left[\sin\left(2\theta\right)+2\theta\right]_0^{\pi}$ car $u'\cos\left(u\right)$ admet pour primitive $\sin\left(u\right)$ (et donc $2\cos\left(2\theta\right)$ admet pour primitive $\sin\left(2\theta\right)$).

Et donc $\int_0^{\pi}\cos^2\left(\theta\right)\,d\theta=\frac{1}{4}\left[\left(\sin\left(2\pi\right)+2\pi\right)-\left(\sin\left(0\right)+2\times 0\right)\right]=\frac{1}{4}\times 2\pi=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.6

1. On a :

- $u_1=\cos\left(\frac{0}{1}\right)=1$;
- $u_2=\cos\left(\frac{0}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+0=1$;
- $u_3=\cos\left(\frac{0}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=1$;
- $u_4=\cos\left(\frac{0}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$

On peut conjecturer que $u_n=1$ pour $n\geq 1$.

2. Comme $z\neq 1$, on a d'après la formule sur les sommes géométriques :

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n}{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

$$=\frac{1-\left(\cos\left(n\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{n}\right)\right)}{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)} \text{ (d'après Moivre)}$$

$$=\frac{1-(\cos(\pi)+i\sin(\pi))}{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}=\frac{1-(-1)}{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}=\frac{2}{1-\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

$$=\frac{2\times\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\times\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

$$=\frac{2\times\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2+\left(\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}=\frac{2\times\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2-2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

(car $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ pour tout x)

$$=\frac{2\times\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{2-2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}+i\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2-2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}=1+i\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Ainsi $\operatorname{Re}\left(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right)=1$.

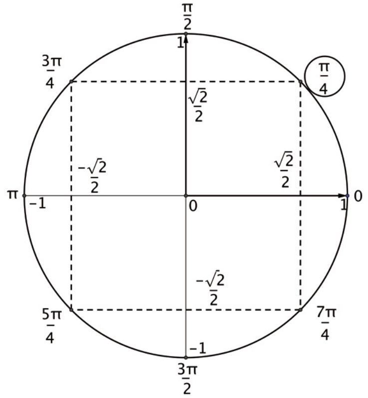
3. Comme pour $n\geq 1$, $u_n=\operatorname{Re}\left(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}\right)$, on en déduit que $u_n=1$ (pour $n\geq 1$).

Exercice 3.7

Module : $r=|z|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2+2}=\sqrt{4}=2$.

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{|z|}\\[2ex] \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\[2ex] \sin(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

c'est-à-dire $\theta=\frac{\pi}{4}[2\pi]$.



Ainsi $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et donc :

$$\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^8=\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^8=2^8\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^8$$

$$=256\left(\cos\left(\frac{8\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{4}\right)\right)$$ (d'après la formule de Moivre)

$$=256\left(\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)\right)=256(1+i\times 0)=256\,.$$

Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 3.1

1. Module : $r=|z|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2\,.$

Argument : $\theta=\arg(z)$ vérifie : $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{|z|}\\ \sin(\theta)=\dfrac{-\sqrt{3}}{|z|}\end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases}\cos(\theta)=\dfrac{1}{2}\\ \sin(\theta)=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

c'est-à-dire $\theta=\frac{5\pi}{3}[2\pi]$.

Forme trigonométrique : $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

Forme exponentielle : $z=re^{i\theta}=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

2. $z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ donc :

Module : $r=2$.

Argument : $\theta=\frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

Forme exponentielle : $z=re^{i\theta}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

Forme algébrique : $z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ donc $z=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}+i$.

3. $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ donc

Module : $r=\sqrt{2}$.

Argument : $\theta=\frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

Forme trigonométrique : $z=r\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Forme algébrique : $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$

Exercice-bilan 3.2

D'après la formule d'Euler :

$$\sin^2(\theta)=\left(\sin(\theta)\right)^2=\left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)^2=\frac{1}{-4}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{-4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2-2e^{i\theta}e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=\frac{1}{-4}\left(e^{i2\theta}-2e^{0}+e^{-i2\theta}\right)=\frac{1}{-4}\left(e^{i2\theta}-2+e^{-i2\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{-4}\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}-2\right).$$

Toujours d'après la formule d'Euler : $e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}=2\cos(2\theta)$.

Ainsi $\sin^2(\theta)=\frac{1}{-4}\left(2\cos(2\theta)-2\right)$ et donc $\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta=\frac{1}{-4}\int_0^{\pi}\left(2\cos(2\theta)-2\right)\,d\theta$

C'est-à-dire $\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta=\frac{1}{-4}\left[\sin(2\theta)-2\theta\right]_0^{\pi}$ car $u'\cos(u)$ admet pour primitive $\sin(u)$ (et donc $2\cos(2\theta)$ admet pour primitive $\sin(2\theta)$).

Et donc $\int_0^{\pi}\sin^2(\theta)\,d\theta=\frac{1}{-4}\left[\left(\sin(2\pi)-2\pi\right)-\left(\sin(0)-2\times 0\right)\right]=\frac{1}{-4}\times(-2\pi)=\frac{\pi}{2}$.

Corrigés

Exercice-bilan 3.3

1. $$z_n = a_n + ib_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) + i\sum_{k=1}^{n}\cos^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\cos^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(k\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\cos^k\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^k \quad \text{(en utilisant la formule de Moivre)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right]^k$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right]^k$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\frac{1-\left[\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\right]^n}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

(d'après la formule $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$)

$$= \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\frac{1-\left[\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(n\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(n\frac{\pi}{n}\right)\right)\right]}{1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}$$

(d'après Moivre)

Donc $$z_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\frac{1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Pour continuer, utilisons la forme conjuguée du dénominateur.

$$z_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left[1-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}{\left[1-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]\left[1-\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}{\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)-i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}{\left[\sin^4\left(\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Car $\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]=i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

Donc $z_n = i\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(1+\cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$.

2. Comme $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$, on en déduit que $a_n = 0$.

Corrigés

Chapitre 4

Équations polynômiales

Cours

1 Solutions complexes d'une équation du second degré à coefficients réels

Théorème

Soit $az^2+bz+c=0$ une équation du second degré à coefficients réels.
Soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant. Alors :

1. Si $\Delta>0$, il y a deux solutions réelles $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. Si $\Delta=0$, il y a une solution (double) réelle $z_0=\dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta<0$, il y a deux solutions complexes $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

2 Factorisation de z^n-a^n par $z-a$

Théorème

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Alors :

$$z^n-a^n=(z-a)\left(z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\cdots+z^2a^{n-3}+za^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

Exemples

$z^2-a^2=(z-a)(z+a)$;

$z^3-a^3=(z-a)\left(z^2+za+a^2\right)$;

$z^4-a^4=(z-a)\left(z^3+z^2a+za^2+a^3\right)$.

3 Factorisation du polynôme P par $z-a$ lorsque $P(a)=0$

Propriété

Si P est un polynôme vérifiant $P(a)=0$ alors on peut factoriser P par $z-a$.

Remarque

On a alors $P(z)=(z-a)\times Q(z)$ où Q est un polynôme de degré $n-1$ (si le degré de P vaut n avec $n\geq 2$).

4 Théorème d'Alembert-Gauss

Théorème

Un polynôme de degré n admet au plus n racines (avec $n\geq 1$).

Démonstrations exigibles

1 Démonstration exigible n° 1

Factorisation de z^n-a^n par $z-a$.

Résultat : Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Alors : $z^n-a^n=(z-a)\left(z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\cdots+z^2a^{n-3}+za^{n-2}+a^{n-1}\right)$

Démonstration

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, alors en développant, on a :

$$(z-a)\left(z^{n-1}+z^{n-2}a+z^{n-3}a^2+\cdots+z^2a^{n-3}+za^{n-2}+a^{n-1}\right)$$

$$=z^n+z^{n-1}a+z^{n-2}a^2+\cdots+za^{n-1}-az^{n-1}-a^2z^{n-2}-\cdots-a^{n-1}z-a^n=z^n-a^n.$$

2 Démonstration exigible n° 2

Factorisation de $P(z)$ par $z-a$ si $P(a)=0$

Résultat : Si $P(a)=0$ alors on peut factoriser $P(z)$ par $z-a$.

Démonstration

Soit $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ (la forme développée du polynôme P).

On a : $P(z)-P(a)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0-\left(a_n a^n+a_{n-1}a^{n-1}+\cdots+a_1 a+a_0\right)$
$P(z)-P(a)=a_n\left(z^n-a^n\right)+a_{n-1}\left(z^{n-1}-a^{n-1}\right)+\cdots+a_1(z-a)$.
Or z^n-a^n, $z^{n-1}-a^{n-1}$, $\cdots$ $z-a$ sont tous factorisables par $z-a$ (démonstration précédente).
Ainsi, il existe des polynômes $Q_n(z)$, $Q_{n-1}(z)$, $\cdots Q_1(z)$ tels que :
$z^n-a^n=(z-a)Q_n(z)$, $z^{n-1}-a^{n-1}=(z-a)Q_{n-1}(z)$, $\cdots z-a=(z-a)Q_1(z)$.
Et donc $P(z)-P(a)=(z-a)\left(a_n Q_n(z)+a_{n-1}Q_{n-1}(z)+\cdots+a_1 Q_1(z)\right)$.
Ce qui prouve que $P(z)-P(a)$ et donc $P(z)$ (puisque $P(a)=0$) est factorisable par $z-a$.

3 Démonstration exigible n° 3

Le nombre de solutions d'une équation polynômiale est inférieur ou égal à son degré

Démonstration

Effectuons un raisonnement par récurrence.

Soit H_n la propriété « Une équation polynômiale de degré n admet au plus n solutions ».

Initialisation : H_1 est vraie. Car une équation polynômiale de degré 1 (donc de la forme $ax+b=0$) admet au plus 1 solution.

Hérédité : Supposons H_n vraie (c'est-à-dire qu'une équation polynômiale de degré n admet au plus n solutions) et montrons que n l'est encore (c'est-à-dire qu'une équation polynômiale de degré H_{n+1} admet au plus $n+1$ solutions).
Considérons une équation polynômiale de degré $n+1$, c'est-à-dire une équation de la forme $P(x)=0$ où P est un polynôme de degré $n+1$. Il y a alors deux alternatives : soit P n'admet aucune racine, soit P en admet au moins une.

- Si P n'admet aucune racine, alors H_{n+1} est immédiatement vraie.
- Si P admet une racine a alors il existe un polynôme Q de degré n tel que $P(x)=(x-a)Q(x)$. Comme H_n est vraie, Q admet au plus n racines et donc P aura au plus $n+1$ racines et donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion : comme H_1 est vraie et que H_n est héréditaire, on en déduit que H_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

Exercices

Compétences attendues

- Résoudre une équation polynômiale de degré 2 à coefficients réels

Exercice 4.1

Expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Calculer, appliquer des techniques

- Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$.

(Vérifier votre résultat avec Xcas et l'instruction csolve).

Exercice 4.2

Expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Calculer, appliquer des techniques

- Résoudre l'équation $z^2 + 25 = 0$.

(Vérifier votre résultat avec Xcas et l'instruction csolve).

Compétences attendues

- Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue

Exercice 4.3

Calculer, Raisonner, Communiquer un résultat par écrit, expérimenter à l'aide d'outils logiciels

On considère l'équation de degré 3 : $x^3 - 6x + 4 = 0$.

1. Montrer que 2 est racine du polynôme $P(x) = x^3 - 6x + 4$.
2. En déduire la résolution de l'équation $x^3 - 6x + 4 = 0$.
   (Vérifier votre résultat avec Xcas et l'instruction solve).

Compétences attendues

- Factoriser un polynôme dont une racine est connue

Exercice 4.4

Calculer, Raisonner, Communiquer un résultat par écrit, expérimenter à l'aide d'outils logiciels

On considère le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20$.

1. Montrer que 1 est racine de $P(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$.
3. Peut-on améliorer cette factorisation ?
   (Vérifier votre résultat avec Xcas et l'instruction factor).

Exercices-bilan

Exercice-bilan 4.1

5 min • 3 points

- Résoudre l'équation $z^2-3z+5=0$.

Exercice-bilan 4.2

5 min • 3 points

- Résoudre l'équation $2z^2+72=0$.

Exercice-bilan 4.3

15 min • 6 points

On considère l'équation de degré 3 : $x^3-10x-12=0$.

1. Montrer que -2 est racine du polynôme $P(x)=x^3-10x-12$.
2. En déduire la résolution de l'équation $x^3-10x-12=0$.

Exercice-bilan 4.4

30 min • 8 points

On considère le polynôme $P(x)=x^4-8x^3+5x^2+74x-120$.

1. Montrer que 2 est racine de $P(x)$.
2. En déduire une factorisation de $P(x)$.
3. Peut-on améliorer cette factorisation ?

Corrigé des exercices

Exercice 4.1

On a : $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times2=4-8=-4$.

Comme $\Delta<0$, il y a deux solutions :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+i\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{2+2i}{2}=1+i \text{ et :}$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-i\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{2-2i}{2}=1-i.$$

D'où : $S=\{1+i\,;1-i\}$.

Vérification avec Xcas :

> **Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).
>
> csolve(z^2-2z+2=0,z)
>
> $[1+i, 1-i]$

On trouve bien la même chose.

Exercice 4.2

On a : $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=25 \end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times1\times25=-100$.

Comme $\Delta<0$, il y a deux solutions :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-0+i\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{10i}{2}=5i \text{ et :}$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-0-i\sqrt{100}}{2\times1}=\frac{-10i}{2}=-5i.$$

D'où : $S=\{5i\,;-5i\}$.

Vérification avec Xcas :

> **Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).
>
> csolve(z^2+25=0,z)
>
> $[-5i, 5i]$

On trouve bien la même chose.

Exercice 4.3

1. $P(2)=2^3-6\times 2+4=8-12+4=0$.
   Ainsi 2 est racine du polynôme $P(x)=x^3-6x+4$.
2. Comme 2 est racine du polynôme $P(x)$, on peut factoriser $P(x)$ par $x-2$.
   Ainsi, il existe un polynôme de degré 2, ax^2+bx+c, tel que :
   $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c)$.
   On a : $P(x)=(x-2)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow x^3-6x+4=(x-2)(ax^2+bx+c)$
   $\Leftrightarrow x^3-6x+4=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c$
   $$\Leftrightarrow x^3-6x+4=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c \Leftrightarrow \begin{cases}1=a\\0=b-2a\\-6=c-2b\\4=-2c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=a\\2=b\\c=-2\end{cases}.$$
   (Car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux).
   Ainsi $P(x)=(x-2)(x^2+2x-2)$.
   $$x^3-6x+4=0 \Leftrightarrow P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x-2) \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=0\\x^2+2x-2=0\end{cases}.$$
   Comme l'équation $x^2+2x-2=0$ admet pour solutions : $-1+\sqrt{3}$ et $-1-\sqrt{3}$ (en utilisant la méthode du discriminant), on a : $S=\{2\,;-1+\sqrt{3}\,;-1-\sqrt{3};\}$.
   Vérification avec Xcas :

   > **Xcas en ligne**. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).
   >
   > solve(x^3-6x+4=0,x)
   >
   > $[-\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1, 2]$

   On trouve bien la même chose.

Corrigés

Exercice 4.4

1. $P(1)=1^4-6\times1^3+1^2+24\times1-20=1-6+1+24-20=0$.
Ainsi 1 est racine de $P(x)$.

2. Comme 1 est racine de $P(x)$, on peut factoriser $P(x)$ par $(x-1)$.
Ainsi, il existe un polynôme de degré 3, ax^3+bx^2+cx+d, tel que :
$P(x)=(x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)$.
On a : $P(x)=(x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)$
$\Leftrightarrow x^4-6x^3+x^2+24x-20=ax^4+bx^3+cx^2+dx-ax^3-bx^2-cx-d$
$\Leftrightarrow x^4-6x^3+x^2+24x-20=ax^4+(b-a)x^3+(c-b)x^2+(d-c)x-d$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}1=a\\-6=b-a\\1=c-b\\24=d-c\\-20=-d\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=-5\\c=-4\\d=20\end{cases}.$$
(Car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux).
Ainsi $P(x)=(x-1)(x^3-5x^2-4x+20)$.

3. Oui. En effet, comme 2 est racine du polynôme $x^3-5x^2-4x+20$ (car $2^3-5\times2^2-4\times2+20=8-20-8+20=0$), on peut factoriser $x^3-5x^2-4x+20$ par $(x-2)$.
Ainsi, il existe un polynôme de degré 2, ax^2+bx+c, tel que :
$x^3-5x^2-4x+20=(x-2)(ax^2+bx+c)$.
$\Leftrightarrow x^3-5x^2-4x+20=ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c \Leftrightarrow x^3-5x^2-4x+20$
$$=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c \quad \Leftrightarrow \begin{cases}1=a\\-5=b-2a\\-4=c-2b\\20=-2c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=a\\b=-3\\c=-10\end{cases}.$$
(Car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux).
Ainsi $x^3-5x^2-4x+20=(x-2)(x^2-3x-10)$.
Enfin, le polynôme $x^2-3x-10$ est également factorisable (car son discriminant est positif). Après calculs, on trouve $x^2-3x-10=(x-5)(x+2)$.

Conclusion : $P(x)=(x-1)(x-2)(x-5)(x+2)$.

Vérification avec Xcas :

> **Xcas en ligne.** Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).
>
> factor(x^4-6x^3+x^2+24x-20,x)
>
> $(x-5)(x-2)(x-1)(x+2)$

On trouve bien la même chose.

Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 4.1

On a : $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=5 \end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times5=9-20=-11$.

Comme $\Delta<0$, il y a deux solutions :

$z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)+i\sqrt{11}}{2\times1}=\dfrac{3+i\sqrt{11}}{2}=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ et :

$z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)-i\sqrt{11}}{2\times1}=\dfrac{3-i\sqrt{11}}{2}=\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

D'où : $S=\left\{\dfrac{3}{2}+i\sqrt{11}\,;\dfrac{3}{2}-i\sqrt{11}\right\}$.

Exercice-bilan 4.2

On a : $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=72 \end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times2\times72=-576$.

Comme $\Delta < 0$, il y a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-0+i\sqrt{576}}{2\times 2} = \frac{24i}{4} = 6i \text{ et :}$$

$$z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-0-i\sqrt{576}}{2\times 2} = \frac{-24i}{4} = -6i\,.$$

D'où : $S = \{6i\,; -6i\}$.

Exercice-bilan 4.3

1. $P(-2) = (-2)^3 - 10\times(-2) - 12 = -8 + 20 - 12 = 0$.

   Ainsi -2 est racine du polynôme $P(x) = x^3 - 10x - 12$.

2. Comme -2 est racine du polynôme $P(x)$, on peut factoriser $P(x)$ par $x - (-2) = x + 2$.

   Ainsi, il existe un polynôme de degré 2, $ax^2 + bx + c$, tel que :

   $P(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

   On a : $P(x) = (x+2)(ax^2+bx+c) \Leftrightarrow x^3 - 10x - 12 = (x+2)(ax^2+bx+c)$

   $\Leftrightarrow x^3 - 10x - 12 = ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c$

   $$\Leftrightarrow x^3 - 10x - 12 = ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2b)x + 2c \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ 0 = b + 2a \\ -10 = c + 2b \\ -12 = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a \\ -2 = b \\ c = -6 \end{cases}.$$

   (Car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux).

   Ainsi $P(x) = (x+2)(x^2 - 2x - 6)$.

   $$x^3 - 10x - 12 = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x-6) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - 2x - 6 = 0 \end{cases}.$$

   Comme l'équation $x^2 - 2x - 6 = 0$ admet pour solutions : $1 - \sqrt{7}$ et $1 + \sqrt{7}$ (en utilisant la méthode du discriminant), on a : $S = \{-2\,;\,1+\sqrt{7}\,;1-\sqrt{7}\}$.

Exercice-bilan 4.4

1. $P(2) = 2^4 - 8\times 2^3 + 5\times 2^2 + 74\times 2 - 120 = 16 - 64 + 20 + 148 - 120 = 0$.

   Ainsi 2 est racine de $P(x)$.

2. Comme 2 est racine de $P(x)$, on peut factoriser $P(x)$ par $(x-2)$.
Ainsi, il existe un polynôme de degré 3, ax^3+bx^2+cx+d, tel que :

$P(x)=(x-2)(ax^3+bx^2+cx+d)$.

On a : $P(x)=(x-2)(ax^3+bx^2+cx+d)$

$\Leftrightarrow x^4-8x^3+5x^2+74x-120=ax^4+bx^3+cx^2+dx-2ax^3-2bx^2-2cx-2d$

$\Leftrightarrow x^4-8x^3+5x^2+74x-120=ax^4+(b-2a)x^3+(c-2b)x^2+(d-2c)x-2d$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=a \\ -8=b-2a \\ 5=c-2b \\ 74=d-2c \\ -120=-2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=-7 \\ d=60 \end{cases}$$

(Car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux).

Ainsi $P(x)=(x-2)(x^3-6x^2-7x+60)$.

3. Oui. En effet, comme 4 est racine du polynôme $x^3-6x^2-7x+60$ (car $4^3-6\times4^2-7\times4+60=64-96-28+60=0$), on peut factoriser :

$x^3-6x^2-7x+60$ par $(x-4)$.

Ainsi, il existe un polynôme de degré 2, ax^2+bx+c, tel que :

$x^3-6x^2-7x+60=(x-4)(ax^2+bx+c)$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2-7x+60=ax^3+bx^2+cx-4ax^2-4bx-4c$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2-7x+60=ax^3+(b-4a)x^2+(c-4b)x-4c$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=a \\ -6=b-4a \\ -7=c-4b \\ 60=-4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=a \\ b=-2 \\ c=-15 \end{cases}.$$

(Car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux).

Ainsi $x^3-6x^2-7x+60=(x-4)(x^2-2x-15)$.

Enfin, le polynôme $x^2-2x-15$ est également factorisable (car son discriminant est positif). Après calculs, on trouve $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$.

Conclusion : $P(x)=(x-2)(x-4)(x-5)(x+3)$.

Corrigés

Chapitre 5

Utilisation des nombres complexes en géométrie

Cours

1 Interprétation géométrique du module et d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$

Interprétation géométrique du module de $\frac{c-a}{b-a}$

$\left|\frac{c-a}{b-a}\right|$ est égal à $\frac{AC}{AB}$ où A, B et C ont respectivement pour affixes a, b et c.

Interprétation géométrique d'un argument de $\frac{c-a}{b-a}$

$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$ est une mesure (modulo $[2\pi]$) de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ où A, B et C ont respectivement pour affixes a, b et c.

2 Racines n–ièmes de l'unité. Description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n–ièmes de l'unité. Représentation géométrique. Cas particuliers : n = 2, 3, 4

Définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On appelle racine $n-$ième de l'unité l'une des n solutions complexes de l'équation $z^n = 1$.

Propriété

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité est :

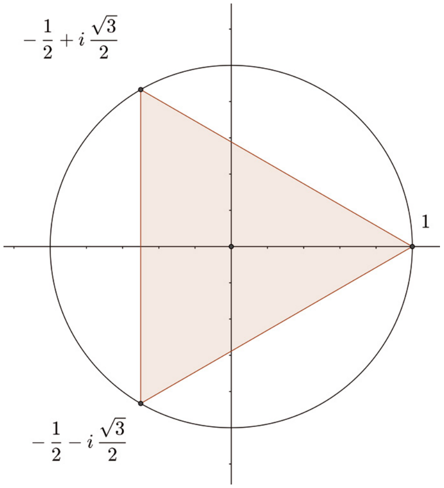
$$\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\} = \bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right\}.$$

Représentation géométrique

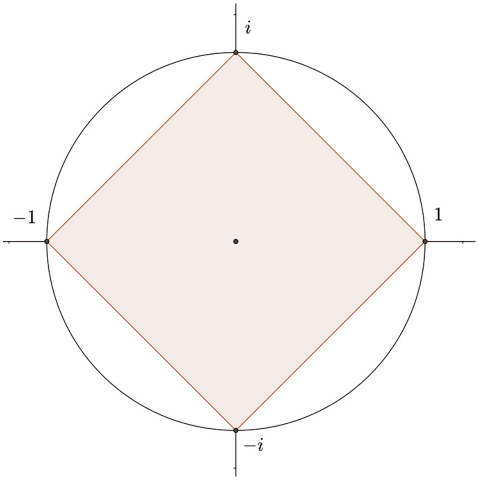
Pour $n \geq 3$, l'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité forme un polygone régulier à n sommets (dont l'un a pour affixe 1).

En particulier, on a :

- $\mathbb{U}_3=\left\{1;e^{i\frac{2\pi}{3}};e^{i\frac{4\pi}{3}}\right\}=\left\{1;-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.



- $\mathbb{U}_4=\left\{1;e^{i\frac{2\pi}{4}};e^{i\frac{4\pi}{4}};e^{i\frac{6\pi}{4}};\right\}=\left\{1;i;-1;-i\right\}$.



Démonstration exigible

1 Démonstration exigible n° 1

Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

Résultat : L'équation $z^n = 1$ admet pour ensemble solution :

$$\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\} = \bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right\}.$$

Démonstration

$z^n = 1 \Leftrightarrow z^n = e^{i2k\pi}$ (avec k entier)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z^n| = |e^{i2k\pi}| \\ \arg(z^n) = \arg(e^{i2k\pi}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n \times \arg(z) = 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \text{ (avec } k \text{ entier)}$$

$\Leftrightarrow z = 1 \times e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ (où k entier).

Conclusion : $\mathbb{U}_n = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, e^{i\frac{6\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \cdots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\} = \bigcup_{k=0}^{n-1}\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right\}$.

(On prend l'entier k compris entre 0 et $n-1$, pour des raisons de « modulo »

et de solutions qui se répètent.

[Par exemple $e^{i\frac{2n\pi}{n}} = e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\frac{(2n+2)\pi}{n}} = e^{i\frac{2n\pi+2\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi}{n}+2\pi} = e^{i\frac{2\pi}{n}}e^{i2\pi} = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, etc.].)

Exercices

Compétences attendues

- Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser les nombres complexes pour étudier des configurations du plan : démontrer un alignement, une orthogonalité, calculer des longueurs, des angles, déterminer des ensembles de points

Exercice 5.1

Représenter dans un cadre géométrique, Calculer

On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = -2+4i$, $z_B = 10+i$, $z_C = 6+2i$.

1. Placer ces trois points dans un même repère.
2. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Démontrer votre résultat.

Exercice 5.2

Représenter dans un cadre géométrique, Calculer

On considère les points A, B, C et D d'affixes $z_A = 2+3i$, $z_B = 7-2i$, $z_C = 7+6i$ et $z_D = -2-3i$.

1. Placer ces quatre points dans un même repère.
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? Démontrer votre résultat.

Exercice 5.3

Raisonner, Calculer, appliquer des techniques

On considère la suite (z_n) définie par $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_n$ et $z_0 = 1$.

Pour tout $n \geq 0$, on considère M_n le point d'affixe z_n.

- Démontrer que pour tout $n \geq 0$, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

Exercice 5.4

Raisonner, Calculer, appliquer des techniques

On considère la suite (z_n) définie par $z_{n+1} = iz_n$ et $z_0 = 1$.
Pour tout $n \geq 0$, on considère M_n le point d'affixe z_n.

- Démontrer que pour $n \geq 0$, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle-isocèle en O.

Exercice 5.5

Représenter, changer de registre

- Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 2i| = 4$.

Exercice 5.6

Représenter, changer de registre

- Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z - i|$.

Compétences attendues

- Utiliser les racines de l'unité dans l'étude de configurations liées aux polygones réguliers

Exercice 5.7

Raisonner, Démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, Représenter dans un cadre géométrique, Calculer

1. Soit $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (l'une des racines cubiques de l'unité). Démontrer la propriété :

« ABC est équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} z_C - z_A = -j(z_B - z_A) \\ ou \\ z_C - z_A = -j^2(z_B - z_A) \end{cases}$ ».

2. Soient A, B et C d'affixes $z_A = 2i$, $z_B = -\sqrt{3} - i$, $z_C = \sqrt{3} - i$.
   a. Représenter les trois points A, B et C dans un même repère.
   b. ABC est-il un triangle équilatéral ? Démontrer votre réponse.

Exercices-bilan

Exercice-bilan 5.1

10 min • 4 points

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes $z_A = -2 - i$, $z_B = 5 + i$, $z_C = 19 + 5i$.

1. Placer ces trois points dans un même repère.
2. Les points *A*, *B* et *C* sont-ils alignés ? Démontrer votre résultat.

Exercice-bilan 5.2

15 min • 5 points

On considère les points *A*, *B*, *C* et *D* d'affixes $z_A = 3 + 2i$, $z_B = 7$, $z_C = 3 - 2i$ et $z_D = 6 + 4i$.

1. Placer ces quatre points dans un même repère.
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? Démontrer votre résultat.

Exercice-bilan 5.3

15 min • 5 points

On considère la suite (z_n) définie par $z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_n$ et $z_0 = i$. Pour tout $n \geq 0$, on considère M_n le point d'affixe z_n.

1. Représenter dans un repère les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2. Que peut-on conjecturer sur la nature de ces deux triangles ?
2. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

Exercice-bilan 5.4

15 min • 6 points

On considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 5 + 3i$, $z_C = 4 + 6i$.

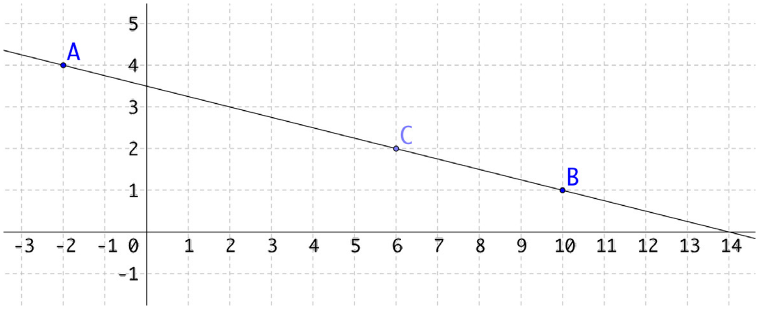
1. Placer ces trois points dans un même repère.
2. Démontrer que le triangle *ABC* est rectangle isocèle en *B*.
3. Est-ce que les affixes des points *A*, *B* et *C* peuvent être considérés comme des racines cubiques de l'unité ?

Bilan

Corrigé des exercices

Exercice 5.1

1. On obtient :



2. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{6+2i-(-2+4i)}{10+i-(-2+4i)}\right)=\arg\left(\dfrac{8-2i}{12-3i}\right)$

$=\arg\left(\dfrac{(8-2i)(12+3i)}{(12-3i)(12+3i)}\right)=\arg\left(\dfrac{96+24i-24i-6i^2}{144+9}\right)=\arg\left(\dfrac{102}{153}\right)=0[2\pi]$

(car $\dfrac{102}{153}$ est un réel positif).

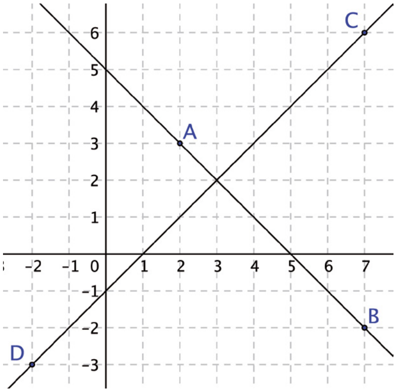
Comme $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0[2\pi]$, on en déduit que A, B et C sont alignés.

Conseil

Il faut bien se souvenir que A, B et C alignés équivalent à $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=0[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\pi[2\pi]$.

Exercice 5.2

1. On obtient :



2. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\frac{-2-3i-(7+6i)}{7-2i-(2+3i)}\right)=\arg\left(\frac{-9-9i}{5-5i}\right)$

$=\arg\left(\frac{(-9-9i)(5+5i)}{(5-5i)(5+5i)}\right)=\arg\left(\frac{-45-45i-45i-45i^2}{25+25}\right)=\arg\left(\frac{-90i}{50}\right)$

$=\arg\left(\frac{-9}{5}i\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi].$

Comme $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$, on en déduit que $(AB)\perp(CD)$.

Conseil

Il faut bien se souvenir que $(AB)\perp(CD)$ équivaut à $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Corrigés

Exercice 5.3

On a :

- $OM_n = |z_n - 0| = |z_n|$;
- $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n\right|$

  $= \left|\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right||z_n| = |z_n|$ car $\left|\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = 1$;
- $OM_{n+1} = |z_{n+1} - 0| = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n\right| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right||z_n| = |z_n|$

  Car $\left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = 1$.

  Comme $OM_n = M_nM_{n+1} = OM_{n+1}$, on en déduit que le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

Exercice 5.4

On a :

- $OM_n = |z_n - 0| = |z_n|$;
- $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = |iz_n - z_n| = |(-1+i)z_n| = |(-1+i)||z_n| = \sqrt{2}|z_n|$

  (car $|(-1+i)| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$) ;
- $OM_{n+1} = |z_{n+1} - 0| = |z_{n+1}| = |iz_n| = |i||z_n| = |z_n|$

  (car $|i| = 1$).

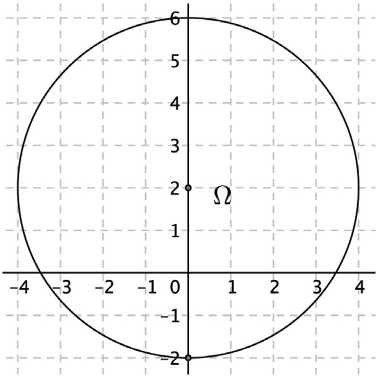
  Comme $M_nM_{n+1}{}^2 = OM_n{}^2 + OM_{n+1}{}^2$ (car $2|z_n|^2 = |z_n|^2 + |z_n|^2$), on en déduit que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle en O (d'après la réciproque de Pythagore).

  Comme $OM_n = OM_{n+1}$, on en déduit que le triangle OM_nM_{n+1} est isocèle en O.

  Ainsi OM_nM_{n+1} est rectangle-isocèle en O.

Exercice 5.5

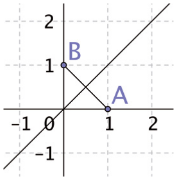
Posons Ω le point d'affixe $2i$. L'égalité $|z-2i|=4$ se traduit par l'égalité $\Omega M=4$, ce qui se traduit par : M appartient au cercle de centre Ω (d'affixe $2i$) et de rayon 4.



Ainsi, l'ensemble cherché est le cercle de rayon 4 et de centre le point d'affixe $2i$.

Exercice 5.6

Posons A le point d'affixe 1, et B le point d'affixe i. L'égalité $|z-1|=|z-i|$ se traduit par l'égalité $AM=BM$ c'est-à-dire $MA=MB$, ce qui se traduit par : M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.



Ainsi, l'ensemble cherché est la médiatrice du segment [AB] où A est le point d'affixe 1, et B le point d'affixe i.

Exercice 5.7.

1. ABC équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \text{ et } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ AB=AC \text{ et } \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}.$

Corrigés

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \text{ et } \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

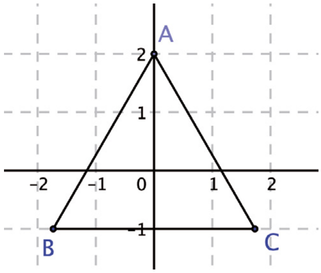
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \text{ et } \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \\ ou \\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \textit{ et } \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} \\ ou \\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -e^{i\frac{\pi}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -j \\ ou \\ \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -j^2 \end{cases}$$

$$\left(\text{car } -j = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{3\pi}{3}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \left[\text{car } e^{-i\frac{3\pi}{3}} = e^{-i\pi} = -1\right]\right.$$

$$\left.\text{et } -j^2 = -e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{3\pi}{3}} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}\right).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_C - z_A = -j(z_B - z_A) \\ ou \\ z_C - z_A = -j^2(z_B - z_A) \end{cases}.$$

2. *a.* On obtient :



b. On a :

$$z_C - z_A = \sqrt{3} - i - 2i = \sqrt{3} - 3i \text{ et } z_B - z_A = -\sqrt{3} - i - 2i = -\sqrt{3} - 3i\,.$$

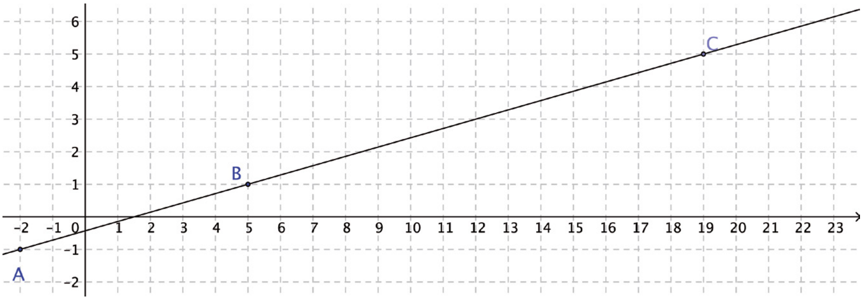
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} - 3i} = \frac{\left(\sqrt{3} - 3i\right)\left(-\sqrt{3} + 3i\right)}{\left(-\sqrt{3} - 3i\right)\left(-\sqrt{3} + 3i\right)} = \frac{-3 + i3\sqrt{3} + i3\sqrt{3} + 9}{3 + 9}$$

$= \dfrac{6+i6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ donc $z_C - z_A = -j^2\left(z_B - z_A\right)$ ce qui prouve que ABC est un triangle équilatéral.

Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 5.1

1. On obtient :



2. $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg\left(\dfrac{19+5i-\left(-2-i\right)}{5+i-\left(-2-i\right)}\right) = \arg\left(\dfrac{21+6i}{7+2i}\right)$

$= \arg\left(\dfrac{\left(21+6i\right)\left(7-2i\right)}{\left(7+2i\right)\left(7-2i\right)}\right) = \arg\left(\dfrac{147-42i+42i-12i^2}{49+4}\right) = \arg\left(\dfrac{159}{53}\right) = 0\left[2\pi\right]$

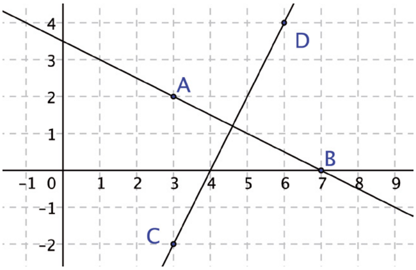
(car $\dfrac{159}{53}$ est un réel positif).

Comme $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0\left[2\pi\right]$, on en déduit que A, B et C sont alignés.

Corrigés

Exercice-bilan 5.2

1. On obtient :



2. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{6+4i-(3-2i)}{7-(3+2i)}\right)=\arg\left(\dfrac{3+6i}{4-2i}\right)$

$=\arg\left(\dfrac{(3+6i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}\right)=\arg\left(\dfrac{12+6i+24i+12i^2}{16+4}\right)=\arg\left(\dfrac{30i}{20}\right)$

$=\arg\left(\dfrac{3}{2}i\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

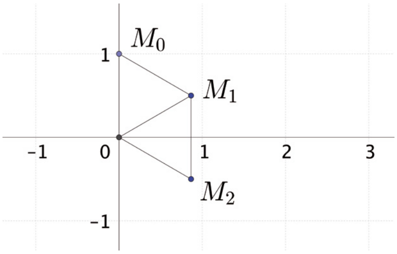
Comme $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$, on en déduit que $(AB)\perp(CD)$.

Exercice-bilan 5.3

1. $z_0=i$ donc $z_1=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_0=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i=\dfrac{1}{2}i-i^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$

et $z_2=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z_1=\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i-\dfrac{3}{4}i-\dfrac{\sqrt{3}}{4}i^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

On obtient alors :



On peut conjecturer que les triangles OM_0M_1 et OM_1M_2 sont équilatéraux.

2. On a :

- $OM_n = |z_n - 0| = |z_n|$;
- $M_nM_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n\right|$

$= \left|\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right||z_n| = |z_n|$ car $\left|\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = 1$;

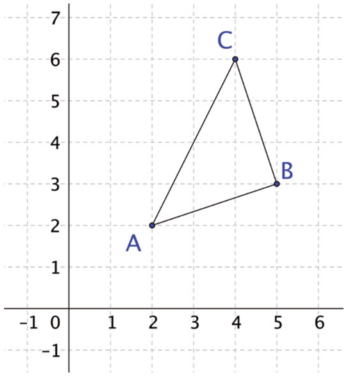
- $OM_{n+1} = |z_{n+1} - 0| = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_n\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right||z_n| = |z_n|$

Car $\left|\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = 1$.

Comme $OM_n = M_nM_{n+1} = OM_{n+1}$, on en déduit que le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

Exercice-bilan 5.4

1. On obtient :



2. On a :

- $AB = |z_B - z_A| = |5 + 3i - (2 + 2i)| = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$;
- $BC = |z_C - z_B| = |4 + 6i - (5 + 3i)| = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$;
- $AC = |z_C - z_A| = |4 + 6i - (2 + 2i)| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$;

Corrigés

Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, on en déduit que le triangle *ABC* est rectangle en *B* (d'après la réciproque de Pythagore).

Comme $AB = BC$, on en déduit que le triangle *ABC* est isocèle en *B*. Ainsi *ABC* est rectangle-isocèle en *B*.

3. Non, tout simplement parce que *ABC* n'est pas un triangle équilatéral (en effet, la représentation graphique des racines cubiques de l'unité est un triangle équilatéral).

Chapitre 6

Arithmétique

Cours

1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition

Soient a et b deux entiers (avec $a \neq 0$). On dit que a divise b lorsqu'il existe un entier k tel que $b = ka$.

2 Division euclidienne d'un élément de $\mathbb{Z}$ par un élément de $\mathbb{N}^*$

Définition

Soient a et b deux entiers. La division euclidienne de a par b consiste à déterminer deux entiers q et r tels que : $a = bq + r$ avec $0 \leq r < |b|$.

L'entier q est alors appelé quotient, et l'entier r est appelé reste.

3 Congruences dans $\mathbb{Z}$. Compatibilité des congruences avec les opérations

Définition

Soient a, b et n trois entiers (avec $n > 0$). On dit que a est congru à b modulo n, ce qu'on écrit $a \equiv b[n]$, lorsque $a - b$ est divisible par n.

Compatibilité des congruences avec les opérations

1. $a \equiv a[n]$.
2. Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$.
3. $a \equiv 0[n] \Leftrightarrow n$ divise a.
4. $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ entraîne $a + a' \equiv b + b'[n]$.
5. $a \equiv b[n]$ entraîne $ka \equiv kb[n]$ (pour tout entier k).
6. $a \equiv b[n]$ et $a' \equiv b'[n]$ entraîne $a \times a' \equiv b \times b'[n]$.
7. $a \equiv b[n]$ entraîne $a^p \equiv b^p[n]$ (pour tout entier p).

4 PGCD de deux entiers. Algorithme d'Euclide

Définition

Soient a et b deux entiers, on appelle pgcd de a et b, le nombre noté pgcd(a,b) comme étant le plus grand commun diviseur de a et b.

Algorithme d'Euclide

Si $a=bq+r$ alors pgcd(a,b) = pgcd(b,r). Dans ce cas, pgcd(a,b) est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Exemple

$\text{pgcd}(365,105)=5$ car $\mathbf{365}=\mathbf{105}\times3+\mathbf{50}$, $\mathbf{105}=\mathbf{50}\times2+\mathbf{5}$, $\mathbf{50}=\mathbf{5}\times10+\mathbf{0}$. (5 est le dernier reste non nul).

5 Couples d'entiers premiers entre eux

Définition

Soient a et b deux entiers, on dit que (a,b) est un couple d'entiers premiers entre eux lorsque $\text{pgcd}(a,b)=1$.

6 Théorème de Bézout

Théorème de Bézout (1730-1783)

Soient a et b deux entiers, alors :

$\text{pgcd}(a,b)=1 \Leftrightarrow$ il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$.

7 Théorème de Gauss

Théorème de Gauss (1777-1855)

Soient a, b, c trois entiers. Si a divise bc et $\text{pgcd}(a,b)=1$ alors a divise c.

Conséquence de Gauss

Soient a, b et c trois entiers. Si a divise c, b divise c, et $\text{pgcd}(a,b)=1$ alors ab divise c.

8 Nombres premiers. Leur ensemble est infini

Définition

L'entier p est un nombre premier s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et p.

Théorème fondamental de l'Arithmétique

Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.

Théorème d'Euclide (325-265 av. J.-C.) sur les nombres premiers

Il existe une infinité de nombres premiers.

9 Existence et unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Théorème

Tout entier n supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers : $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ (avec $p_1, p_2, \cdots p_r$ premiers et $k_1, k_2, \cdots k_r$ entiers).

10 Petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat (1601-1665)

Soit p un nombre premier, alors pour tout entier a positif, on a $a^p \equiv a [p]$.

Cours

Démonstration exigible

1 Démonstration exigible n° 1
Écriture du PGCD de a et b sous la forme $ax+by$, $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$

Résultat : Soient a et b deux entiers non nuls. Alors il existe deux entiers x et y tels que $ax+by=\text{pgcd}(a,b)$.

Démonstration

Soit G l'ensemble des entiers de la forme $ax+by$ avec $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$. G est non vide (par exemple l'élément $|a|$ y appartient) w d. Ainsi il existe deux entiers u,v tels que $au+bv=d$. Puisque $au+bv=d$, tout diviseur commun à a et à b divise d. Ainsi $\text{pgcd}(a,b)$ divise d et donc $\text{pgcd}(a,b)\leq d$.

Montrons que d divise a. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors on aurait par division euclidienne de a par d, $a=dq+r$ avec $0<r<d$.

ce qui donne $r=a-dq=a-(au+bv)q=a(1-qu)+b(-vq)$ et donc $r\in G$ (car il s'écrit sous la forme $ax+by$) et donc par définition de d, $r\geq d$. Contradiction (car on a $0<r<d$). Ainsi d divise a.

Par un raisonnement similaire, d divise b.

Ainsi d divise $\text{pgcd}(a,b)$ et donc $d\leq\text{pgcd}(a,b)$.

Conclusion : $d=\text{pgcd}(a,b)$, ce qui prouve qu'il existe deux entiers x et y tels que $ax+by=\text{pgcd}(a,b)$.

2 Démonstration exigible n° 2
Théorème de Gauss

Résultat : Soient a, b, c trois entiers. Si a divise bc et $\text{pgcd}(a,b)=1$ alors a divise c.

Démonstration

Comme $\text{pgcd}(a,b)=1$, il existe deux entiers u et v tels que $au+bv=1$, et donc tels que $acu+bcv=c$.

Or par hypothèse, a divise bc, donc a divise bcv.

Bien sûr a divise acu. Ainsi a divise leur somme $acu+bcv=c$.

3 Démonstration exigible n° 3

L'ensemble des nombres premiers est infini

Résultat : Il y a une infinité de nombres premiers.

Démonstration

On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \cdots p_k$ triés par ordre croissant. On considère l'entier $N = p_1 p_2 \cdots p_k$.

Tout d'abord, $N+1 > p_k$ (car $p_1 \geq 2$ et par conséquent tous les autres p_i).

Ensuite, $N+1$ est un nombre premier, car il n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même. En effet, 1 et $N+1$ divisent effectivement $N+1$. Considérons maintenant un entier $k \geq 2$ qui divise $N+1$. L'entier k admet un diviseur premier (car tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier) qui figure nécessairement parmi la liste des nombres premiers $p_1, p_2, \cdots p_k$. Appelons-le p_i. Comme p_i divise k et que k divise $N+1$, on en déduit que p_i divise $N+1$. Par ailleurs, p_i divise $N = p_1 p_2 \cdots p_k$.

Comme p_i divise $N+1$ et N, on en déduit que p_i divise leur différence égale à 1, ce qui est impossible (Car un nombre premier est supérieur ou égal à 2 et donc ne peut pas diviser 1).

CONTRADICTION : en supposant qu'il existe un nombre fini de nombres premiers $p_1, p_2, \cdots p_k$ triés par ordre croissant, on peut construire un nouveau nombre premier $N+1 = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ qui ne fait pas partie de la liste précédente (car supérieur à p_k le plus grand d'entre eux). Ceci est absurde.

(Ainsi l'hypothèse selon laquelle il existe un nombre fini de nombres premiers est à écarter).

Conclusion : il existe une infinité de nombres premiers.

Exemples d'algorithmes

1 Algorithme n° 1

Algorithme d'Euclide de calcul du PGCD de deux nombres et calcul d'un couple de Bézout

```
a=int(input("Valeur de a :"))
b=int(input("Valeur de b :"))
while b!=0:
    r=a%b
    a=b
    b=r
print("pgcd=",a)
```

2 Algorithme n° 2

Crible d'Eratosthène

```
def Suppression_multiples(Liste,k):
    for x in Liste:
        if x!=k and x%k==0:
            Liste.remove(x)

def Crible_Eratosthène(n):
    Tous=list(range(2,n))
    for z in Tous:
        Suppression_multiples(Tous,z)
    return Tous
```

Une fois qu'on a appuyé sur F5 (console Idle), on obtient par exemple avec l'instruction Crible_Eratosthène(100) la liste des nombres premiers compris entre 2 et 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

3 Algorithme n° 3

Décomposition en facteurs premiers

```
from math import *
n=int(input("Valeur de n ?"))
j=n
m=0
for p in range(2,floor(n/2)):
    if j%p==0:
        m=m+1
        puissance=1
        j=j/p
        while j%p==0:
            puissance=puissance+1
            j=j/p
        if m>1:
            print("*",end='')
        print("(",p,"^",puissance,")",end='')
if m==0:
    print(n)
```

Exercices

Compétences attendues

- Déterminer les diviseurs d'un entier, le PGCD de deux entiers

Exercice 6.1

Calculer, Raisonner

1. Déterminer les diviseurs de 60.
2. Déterminer les diviseurs de 24.
3. En déduire $\text{pgcd}(60,24)$.

Exercice 6.2

Calculer, Raisonner, expliquer une démarche

1. Déterminer la décomposition en facteur premier de 1 200.
2. Déterminer la décomposition en facteur premier de 1 500.
3. En déduire $\text{pgcd}(1200,1500)$.

Exercice 6.3

Calculer, Appliquer des techniques, mettre en œuvre un algorithme

- Déterminer $\text{pgcd}(365,250)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Compétences attendues

- Résoudre une congruence $ax \equiv b[n]$. Déterminer un inverse de a modulo n lorsque a et n sont premiers entre eux

Exercice 6.4

Expérimenter à l'aide d'outils logiciels, Chercher, expérimenter, Calculer

- Résoudre l'équation $2x \equiv 3[7]$.

(Vérifier votre résultat sous Xcas en utilisant l'instruction solve).

Exercice 6.5

Chercher, expérimenter, Calculer

- Déterminer un inverse de 3 modulo 7.

Compétences attendues

- Établir et utiliser des tests de divisibilité, étudier la primalité de certains nombres, étudier des problèmes de chiffrement

Exercice 6.6

Raisonner, Démontrer

- Démontrer le critère de divisibilité par 3 : « un entier est divisible par 3 si la somme des chiffres l'est » pour les nombres à quatre chiffres de la forme *abcd*.

Exercice 6.7

Mettre en œuvre des algorithmes

1. Écrire un algorithme qui teste si un entier n est divisible par i .
2. En déduire un algorithme qui teste si un entier est premier.

Exercice 6.8

Raisonner, Mettre en œuvre des algorithmes

Jules César (l'un des trois plus grands stratèges de tous les temps, avec Alexandre le Grand (356-323 av. J.-C.) et Napoléon Bonaparte [1769-1821]) ajoutait trois lettres à chacun des caractères constituant son message. Par exemple, la lettre A (0) devenait D (3), la lettre B (1) devenait E (4)..., la lettre V (21) devenait Z (25), W (22) devient A (0), Y (24) devenait B (1), Z(25) devenait C (2). (En effet, ce sont des calculs modulo 26, comme annoncé dans l'introduction).

Une fois le message crypté, le destinataire n'avait qu'à enlever trois lettres pour le décrypter.

1. Crypter le mot CLEOPATRE (2, 11, 4, 14, 15, 0, 19, 17, 4).
2. Décrypter le mot EUXWXV (4, 20, 23, 22, 23, 21).
3. Écrire un programme Python capable de crypter et décrypter un message selon le chiffrement de Jules César (102-44 av. J.-C.).

Exercices

Compétences attendues

- Résoudre des équations diophantiennes simples

Exercice 6.9

Calculer, Appliquer des techniques, Raisonner, Communiquer un résultat par écrit, Expliquer une démarche

- Résoudre l'équation diophantienne $4x = 3y$.

Exercice 6.10

Calculer, Appliquer des techniques, Raisonner, Communiquer un résultat par écrit, Expliquer une démarche

On considère l'équation diophantienne $7x - 5y = 1$ où $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer une solution particulière (a, b) de cette équation.
2. En déduire que l'ensemble des solutions (x, y) sont de la forme $x = 5k + a$ et $y = 7k + b$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercices-bilan

Exercice-bilan 6.1

5 min • 2 points

- Déterminer les diviseurs de 120, les diviseurs de 80. En déduire $\text{pgcd}(120,80)$.

Exercice-bilan 6.2

5 min • 2 points

- Déterminer la décomposition en facteur premier de 1600, de 2400. En déduire $\text{pgcd}(1600,2400)$.

Exercice-bilan 6.3

5 min • 2 points

- Déterminer $\text{pgcd}(340,120)$ en utilisant l'algorithme d'Euclide.

Exercice-bilan 6.4

10 min • 4 points

1. Résoudre l'équation $5x \equiv 2[11]$.
2. Déterminer un inverse de 5 modulo 11.

Exercice-bilan 6.5

10 min • 4 points

- Résoudre l'équation diophantienne $5x = 2y$.

Exercice-bilan 6.6

20 min • 6 points

On considère l'équation diophantienne $12x - 7y = 1$ où $x, y \in \mathbb{Z}$.

1. Déterminer une solution particulière (a,b) de cette équation.
2. En déduire que l'ensemble des solutions (x,y) sont de la forme $x = 7k + a$ et $y = 12k + b$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Bilan

Corrigé des exercices

Exercice 6.1

1. Liste des diviseurs de 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
(car $60=1\times60=2\times30=3\times20=4\times15=5\times12=6\times10$)
2. Liste des diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
(car $24=1\times24=2\times12=3\times8=4\times6$)
3. Liste des diviseurs communs à 60 et 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 12
Ainsi $\text{pgcd}(60,24)=12$.

Exercice 6.2

1. $1200=2\times600=2^2\times300=2^3\times150=2^4\times75=2^4\times3\times25=2^4\times3\times5^2$.
2. $1500=2\times750=2^2\times375=2^2\times3\times125=2^2\times3\times5^3$.
3. Ainsi $\text{pgcd}(1200,1500)=2^2\times3\times5^2$ (car $2^2\times3\times5^2$ est le plus grand nombre qui divise à la fois $2^4\times3\times5^2$ et $2^2\times3\times5^3$).

Exercice 6.3

$\mathbf{365}=\mathbf{250}\times1+\mathbf{115}$, $\mathbf{250}=\mathbf{115}\times2+\mathbf{20}$, $\mathbf{115}=\mathbf{20}\times5+\mathbf{15}$, $\mathbf{20}=\mathbf{15}\times1+\mathbf{5}$,
$\mathbf{15}=\mathbf{5}\times3+\mathbf{0}$. Stop ! Le dernier reste non nul est 5, ainsi $\text{pgcd}(365,250)=5$.

Exercice 6.4

On a 6 valeurs (modulo 7) pour x à tester.

- Pour $x\equiv0[7]$, $2x\equiv0[7]$.
- Pour $x\equiv1[7]$, $2x\equiv2[7]$.
- Pour $x\equiv2[7]$, $2x\equiv4[7]$.
- Pour $x\equiv3[7]$, $2x\equiv6[7]$.
- Pour $x\equiv4[7]$, $2x\equiv8\equiv1[7]$.
- Pour $x\equiv5[7]$, $2x\equiv10\equiv3[7]$.

- Pour $x \equiv 6[7]$, $2x \equiv 12 \equiv 5[7]$.

Ainsi, on a : $2x \equiv 3[7] \Leftrightarrow x \equiv 5[7]$.
Vérification sous Xcas :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
solve(2x=3%7)
                    [5]
```

On obtient le même résultat !

Exercice 6.5

$3 \times 1 \equiv 3[7]$.

$3 \times 2 \equiv 6[7]$.

$3 \times 3 \equiv 9 \equiv 2[7]$.

$3 \times 4 \equiv 12 \equiv 5[7]$.

$3 \times 5 \equiv 15 \equiv 1[7]$. Stop ! Ainsi, un inverse de 3 modulo 7 est 5.

Exercice 6.6

Soit *abcd* un nombre à quatre chiffres. Alors il peut s'écrire sous la forme $1000a+100b+10c+d$. Mais $1000a+100b+10c+d \equiv a+b+c+d[3]$
(car $10 \equiv 3\times 3+1 \equiv 1[3]$, $100 \equiv 3\times 33+1 \equiv 1[3]$, $1000 \equiv 3\times 333+1 \equiv 1[3]$.
Ainsi, on a les équivalences suivantes :
abcd est divisible par 3 $\Leftrightarrow abcd \equiv 0[3] \Leftrightarrow 1000a+100b+10c+d \equiv 0[3]$
$\Leftrightarrow a+b+c+d \equiv 0[3] \Leftrightarrow$ la somme de ses chiffres $(a+b+c+d)$ est divisible par 3.

Exercice 6.7

1. On obtient :

```python
n=int(input("Valeur de l'entier n : "))
i=int(input("Valeur de l'entier i : "))
if n%i==0:
    print(n, " est divisible par ",i)
```

Corrigés

2. On obtient :

```
n=int(input("Valeur de l'entier n : "))
premier=1
for i in range(2,n):
    if n%i==0:
        premier=0
if premier==1:
    print(n, " est premier.")
else:
    print(n, " n'est pas premier")
```

Exercice 6.8

1. Le mot CLEOPATRE (2, 11, 4, 14, 15, 0, 19, 17, 4) se crypte en FOHRSDWUH (5, 14, 7, 17, 18, 3, 22, 20, 7).
2. Le mot EUXWXV (4, 20, 23, 22, 23, 21) se décrypte en BRUTUS (1, 17, 20, 19, 20, 18).
3. On obtient :

```
Réponse=int(input("Pour crypter, tapez 1. Pour décrypter, tapez 2."))
def ca_vers_ch(caractere):
    return ord(caractere)-65
def ch_vers_ca(chiffre):
    return chr(chiffre+65)
if Réponse==1:
            Message=input("Tapez le message à crypter : ")
            for x in Message:
                y=(ca_vers_ch(x)+3)%26
                print(ch_vers_ca(y), end="")
if Réponse==2:
            Message=input("Tapez le message à décrypter : ")
            for x in Message:
                y=(ca_vers_ch(x)-3)%26
                print(ch_vers_ca(y), end="")
```

Exercice 6.9

Soit (x,y) une solution de l'équation $4x=3y$, alors 4 divise $3y$. Mais 4 est premier avec 3 (car $\text{pgcd}(4,3)=1$), d'après le théorème de Gauss, 4 divise y.

Ainsi il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y=4k$.

L'équation $4x=3y$ devient alors : $4x=3\times 4k$ c'est-à-dire $x=3k$.

Ainsi, si (x,y) est solution alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=3k$ et $y=4k$.

Réciproquement : $(3k,4k)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est solution de l'équation $4x=3y$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est de la forme $x=3k$ et $y=4k$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 6.10

1. On a $7\times3-5\times4=21-20=1$, ainsi $(a,b)=(3,4)$ est une solution particulière.
2. Soit (x,y) une solution de l'équation $7x-5y=1$. Comme (a,b) est solution également, on a $7a-5b=1$. On a alors :

$$\begin{cases}7x-5y=1\\7a-5b=1\end{cases}\Leftrightarrow 7(x-a)-5(y-b)=0\Leftrightarrow 7(x-a)=5(y-b)$$

Ainsi 7 divise $5(y-b)$ mais comme 7 est premier avec 5 (car $\text{pgcd}(7,5)=1$), d'après le théorème de Gauss, 7 divise $y-b$. Ainsi il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-b=7k$ ce qui donne $y=7k+b$.

L'équation $7(x-a)=5(y-b)$ devient alors :

$7(x-a)=5\times7k$ c'est-à-dire $(x-a)=5k$ c'est-à-dire $x=5k+a$.

Ainsi, si (x,y) est solution alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=5k+a$ et $y=7k+b$.

Réciproquement : $(5k+a,7k+b)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est solution de l'équation $7x-5y=1$.

Conclusion : l'ensemble des solutions (x,y) sont de la forme $x=5k+a$ et $y=7k+b$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 6.1

Liste des diviseurs de 120 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Liste des diviseurs de 80 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.

Liste des diviseurs communs à 120 et 80 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Ainsi $\text{pgcd}(120,80)=40$.

Exercice-bilan 6.2

$1600=2\times800=2^2\times400=2^3\times200=2^4\times100=2^5\times50=2^6\times5^2$.

$2400=2\times1200=2^2\times600=2^3\times300=2^4\times150=2^5\times75=2^5\times3\times5^2$.

Ainsi $\text{pgcd}(1600,2400)=2^5\times5^2$ (car $2^5\times5^2$ est le plus grand nombre qui divise à la fois $2^6\times5^2$ et $2^5\times3\times5^3$).

Corrigés

Exercice-bilan 6.3

$\mathbf{340} = \mathbf{120} \times 2 + \mathbf{100}$, $\mathbf{120} = \mathbf{100} \times 1 + \mathbf{20}$, $\mathbf{100} = \mathbf{20} \times 5 + \mathbf{0}$. Stop ! Le dernier reste non nul est 20, ainsi $\text{pgcd}(340,120) = 20$.

Exercice-bilan 6.4

On a 10 valeurs (modulo 11) pour x à tester.

Pour $x \equiv 0[11]$, $5x \equiv 0[11]$.

Pour $x \equiv 1[11]$, $5x \equiv 5[11]$.

Pour $x \equiv 2[11]$, $5x \equiv 10[11]$.

Pour $x \equiv 3[11]$, $5x \equiv 15 \equiv 4[11]$.

Pour $x \equiv 4[11]$, $5x \equiv 20 \equiv 9[11]$.

Pour $x \equiv 5[11]$, $5x \equiv 25 \equiv 3[11]$.

Pour $x \equiv 6[11]$, $5x \equiv 30 \equiv 8[11]$.

Pour $x \equiv 7[11]$, $5x \equiv 35 \equiv 2[11]$.

Pour $x \equiv 8[11]$, $5x \equiv 40 \equiv 7[11]$.

Pour $x \equiv 9[11]$, $5x \equiv 45 \equiv 1[11]$.

Pour $x \equiv 10[11]$, $5x \equiv 50 \equiv 6[11]$.

1. Ainsi, on a : $5x \equiv 2[11] \Leftrightarrow x \equiv 7[11]$.
2. Comme $5x \equiv 45 \equiv 1[11] \Leftrightarrow x \equiv 9[11]$, un inverse de 5 modulo 11 est 9.

Exercice-bilan 6.5

Soit (x,y) une solution de l'équation $5x = 2y$, alors 5 divise $2y$. Mais 5 est premier avec 2 (car $\text{pgcd}(5,2) = 1$), d'après le théorème de Gauss, 5 divise y.

Ainsi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 5k$.

L'équation $5x = 2y$ devient alors : $5x = 2 \times 5k$ c'est-à-dire $x = 2k$.

Ainsi, si (x,y) est solution alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$ et $y = 5k$.

Réciproquement : $(2k,5k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solution de l'équation $5x = 2y$.

Conclusion : l'ensemble des solutions de l'équation est de la forme $x = 2k$ et $y = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice-bilan 6.6

1. On a $12\times3-7\times5=36-35=1$, ainsi $(a,b)=(3,5)$ est une solution particulière.
2. Soit (x,y) une solution de l'équation $12x-7y=1$. Comme (a,b) est solution également, on a $12a-7b=1$. On a alors :

   $$\begin{cases}12x-7y=1\\12a-7b=1\end{cases}\Leftrightarrow 12(x-a)-7(y-b)=0\Leftrightarrow 12(x-a)=7(y-b)$$

   Ainsi 12 divise $7(y-b)$ mais comme 12 est premier avec 7 (car $\text{pgcd}(12,7)=1$), d'après le théorème de Gauss, 12 divise $y-b$. Ainsi il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $y-b=12k$ ce qui donne $y=12k+b$.

   L'équation $12(x-a)=7(y-b)$ devient alors : $12(x-a)=7\times12k$ c'est-à-dire $(x-a)=7k$ c'est-à-dire $x=7k+a$.

   Ainsi, si (x,y) est solution alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x=7k+a$ et $y=12k+b$.

   Réciproquement : $(7k+a,12k+b)$ avec $k\in\mathbb{Z}$ est solution de l'équation $12x-7y=1$.

   Conclusion : l'ensemble des solutions (x,y) sont de la forme $x=7k+a$ et $y=12k+b$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Corrigés

Chapitre 7

Graphes et matrices

Cours

1 Graphes, sommets, arêtes. Exemple du graphe complet

Définition d'un graphe

Un graphe est la donnée de points (appelés sommets) et de liens (appelés arêtes) établis entre deux points (distincts ou non).

Définition d'un graphe complet

Un graphe est complet lorsque deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par une arête.

2 Sommets adjacents, degré, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe connexe

Définition de deux sommets adjacents

Deux sommets sont adjacents lorsqu'ils sont reliés par une arête.

Définition du degré d'un sommet

On appelle degré d'un sommet, le nombre d'arêtes qui parviennent à ce sommet.

Définition de l'ordre d'un graphe

L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets.

Définition d'une chaîne

Une chaîne est une suite de sommets telle que chaque sommet est relié au suivant par une arête.

Définition de la longueur d'une chaîne

La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose.

Définition d'un graphe connexe

Un graphe est connexe si deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne.

3 Notion de matrice (tableau de nombres réels). Matrice carrée, matrice colonne, matrice ligne. Opérations. Inverse, puissances d'une matrice carrée

Définition d'une matrice

Une matrice est un tableau de nombres. Elle peut avoir différents formats. Si elle possède p lignes et n colonnes, alors les nombres qui y sont contenus, appelés coefficients de la matrice, sont repérés par leur emplacement ligne-colonne dans la matrice.

$$M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pn} \end{pmatrix}$$

Remarque

Le logiciel Xcas manipule très bien le calcul matriciel. Voici par exemple comment créer la matrice $T=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ sous Xcas : $T=[[0.1,0.3,0.6],[0.2,0.4,0.4],[0.5,0.1,0.4]]$.

Définition de la matrice nulle

La matrice nulle (notée 0) est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Définition d'une matrice carrée

Une matrice qui a autant de lignes que de colonnes est dite carrée.

Définition de la matrice identité

La matrice identité (notée Id) est la matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1.

Définition d'une matrice colonne

Une matrice à une seule colonne est appelée matrice colonne.

Définition d'une matrice ligne

Une matrice à une seule ligne est appelée matrice ligne.

Somme de deux matrices carrées

On ne peut ajouter (ou retrancher) que deux matrices de la même taille. Sous ces conditions, la somme de deux matrices a pour coefficients la somme des coefficients des deux matrices.

Multiplication par un réel

Soit k un nombre réel et A une matrice. La matrice kA est la matrice dont les coefficients sont obtenus en multipliant les coefficients de A par le réel k.

Produit d'une matrice *A* par un vecteur colonne *V*

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ est une matrice (à p lignes et n colonnes) et $V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vecteur colonne (à n lignes), alors on définit AV (ou $A\times V$) par :

$$AV=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}v_1+a_{12}v_2+\cdots+a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1+a_{22}v_2+\cdots+a_{2n}v_n \\ \\ a_{p1}v_1+a_{p2}v_2+\cdots+a_{pn}v_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, AV est un vecteur colonne (à p lignes).

Produit d'un vecteur ligne *U* par une matrice *T*

Si $U=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_p \end{pmatrix}$ est un vecteur ligne (à p colonnes) et

$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \cdots & t_{pn} \end{pmatrix}$ une matrice (à p lignes et n colonnes), alors on définit

UT par : $UT=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{p1} & t_{p2} & \cdots & t_{pn} \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} u_1t_{11}+u_2t_{21}+\cdots+u_pt_{p1} & u_1t_{12}+u_2t_{22}+\cdots+u_pt_{p2} & \cdots & u_1t_{1n}+u_2t_{2n}+\cdots+u_pt_{pn} \end{pmatrix}$$

Ainsi, UT est un vecteur ligne (à n colonnes).

Produit de deux matrices A et B

Si $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ possède n colonnes et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{p2} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}$ possède n lignes, alors AB (ou $A\times B$) est la matrice dont les colonnes correspondent au produit de A par chaque colonne de la matrice B.

Par exemple, si on a $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Définition de la matrice inverse de A

Soit A une matrice carrée. On dit que A est inversible s'il existe une matrice notée A^{-1} vérifiant $AA^{-1}=A^{-1}A=Id$ (où Id est la matrice identité).

Propriété

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2, alors :

- Si $ad-bc\neq 0$, alors $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Si $ad-bc=0$, alors la matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Remarque

Pour déterminer la matrice inverse d'une matrice carrée A, on peut utiliser l'instruction inverse(A) ou A^{-1} du logiciel Xcas.

Puissance d'une matrice A

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, on note A^n la matrice définie par $A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n \text{ fois}}$

4 Exemples de représentations matricielles : matrice d'adjacence d'un graphe ; transformations géométriques du plan ; systèmes linéaires ; suites récurrentes

Définition de la matrice d'adjacence d'un graphe

Considérons un graphe à n sommets. La matrice d'adjacence qui lui est associée est la matrice $\left(m_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ où m_{ij} désigne le nombre d'arêtes reliant le sommet i à j.

Définition de la matrice associée à une transformation géométrique du plan

1. La matrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à un changement d'échelle « horizontale » de coefficient k.
2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ est la matrice associée à un changement d'échelle « verticale » de coefficient k.
3. La matrice $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ est la matrice associé à un changement d'échelle « diagonale » de coefficient k.
4. La matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est la matrice associée à la rotation de centre O et d'angle θ.
5. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à une réflexion par rapport à l'axe horizontal.
6. La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée à une réflexion par rapport à l'axe vertical.

Définition de la matrice associée à un système linéaire

La matrice associée au système linéaire $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$ est la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Ainsi le système $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme $AX = Y$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Définition de la matrice associée à une suite récurrente

Considérons la suite (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où (a_n) et (b_n) sont deux suites définies par $\begin{cases} a_{n+1} = m_{11}a_n + m_{12}b_n \\ b_{n+1} = m_{21}a_n + m_{22}b_n \end{cases}$. La matrice associée à la suite (U_n) est la matrice $\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. Ainsi $\begin{cases} a_{n+1} = m_{11}a_n + m_{12}b_n \\ b_{n+1} = m_{21}a_n + m_{22}b_n \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme $U_{n+1} = MU_n$.

5 Exemples de calcul de puissances de matrices carrées d'ordre 2 ou 3

Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Alors : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times2+4\times1 & 2\times4+4\times3 \\ 1\times2+3\times1 & 1\times4+3\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$;

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\times2+20\times1 & 8\times4+20\times3 \\ 5\times2+13\times1 & 5\times4+13\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 92 \\ 23 & 59 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2

Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Alors : $M^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\times\lambda+1\times0 & \lambda\times1+1\times\lambda \\ 0\times\lambda+\lambda\times0 & 0\times1+\lambda\times\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$;

$$M^3 = M^2M = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2\times\lambda+2\lambda\times0 & \lambda^2\times1+2\lambda\times\lambda \\ 0\times\lambda+\lambda^2\times0 & 0\times1+\lambda^2\times\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Montrons par récurrence que $M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

Soit (P_n) la propriété : $M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

- **Initialisation :** (P_1) est vraie puisque :

  $$M = M^1 = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 1\lambda^{1-1} \\ 0 & \lambda^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^1 & \lambda^0 \\ 0 & \lambda^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

- **Hérédité :** Supposons (P_n) vraie, c'est-à-dire que $M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. Montrons que (P_{n+1}) est encore vraie, c'est-à-dire que $M^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & n\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$.

  On a : $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ c'est-à-dire :

  $$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} \lambda^n \times \lambda + n\lambda^{n-1} \times 0 & \lambda^n \times 1 + n\lambda^{n-1} \times \lambda \\ 0 \times \lambda + \lambda^n \times 0 & 0 \times 1 + \lambda^n \times \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

  c'est-à-dire : $M^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qu'on voulait.

- **Conclusion :** Comme (P_1) est vraie et que (P_n) est héréditaire, on en déduit que (P_n) est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire que : $M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \geq 1$.

Exemple 3

Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ce qui donne : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque

On peut aussi montrer par récurrence que $B^n = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle) pour $n \geq 3$.

6 Suites de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$

Définition

La suite (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + C$ (où A est une matrice carrée, U_n et C sont deux vecteurs colonnes) est une suite récurrente.

Propriété

Soit (U_n) une suite récurrente (vérifiant $U_{n+1} = AU_n + C$) alors :

$U_n = A^n(U_0 - D) + D$ où $D = (Id - A)^{-1} C$.

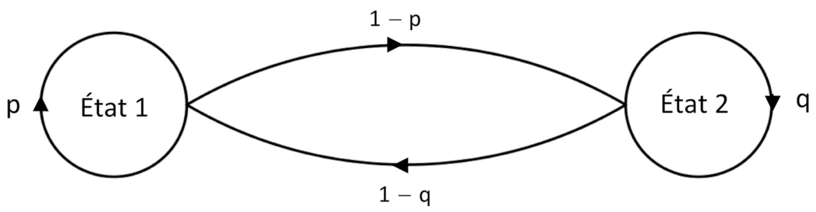
7 Graphe orienté pondéré associé à une chaîne de Markov à deux ou trois états

Définition d'une chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est un processus stochastique dans lequel l'état du système à l'étape n + 1 ne dépend que de l'état du système à l'étape n (l'état système du futur ne dépend que de l'état présent).

Définition d'un graphe orienté associé à une chaîne de Markov

Une chaîne de Markov (présentant plusieurs états qui peuvent évoluer à chaque étape) est représentée par un graphe orienté. Par exemple, le système ci-dessous peut prendre deux états : l'état 1 et l'état 2.



Il passe de l'état 1 à l'état 1 avec la probabilité p $\left(0 \le p \le 1\right)$ et il passe de l'état 1 à l'état 2 avec la probabilité $1-p$.

Il passe de l'état 2 à l'état 2 avec la probabilité q $\left(0 \le q \le 1\right)$ et il passe de l'état 2 à l'état 1 avec la probabilité $1-q$.

Remarque

Bien sûr, un système peut présenter davantage d'états (mais le plus souvent c'est 2, 3 ou 4), dans ce cas le graphe est plus grand et il y plus de flèches (donc plus de probabilités dont il faut tenir compte).

8 Chaîne de Markov à deux ou trois états. Distribution initiale, représentée par une matrice ligne π_0. Matrice de transition, graphe pondéré associé

Définition de la distribution après *n* transitions

La variable aléatoire donnant l'état du système à l'étape n possède une loi de probabilité π_n appelée distribution après n transitions (et donnant les probabilités [de somme 1] de chaque état, à l'étape n) représentée par un vecteur ligne.

Définition de la distribution initiale

π_0 est appelée distribution initiale (étape 0).

Remarque

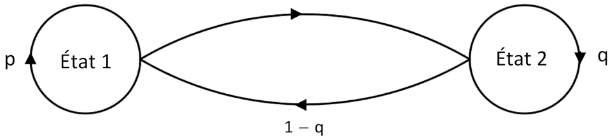
Si au départ (étape 0), le système est à l'état 1, alors : $\pi_0 = \begin{array}{cc} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition de la matrice de transition du graphe pondéré

La matrice de transition P d'un graphe pondéré associé à une chaîne de Markov est la matrice définie par : $p_{i,j}$ est la probabilité que le système se trouve dans l'état j sachant qu'il était dans l'état i précédemment. Cette matrice résume le graphe pondéré.

Exemple

Si on a le graphe pondéré ci-dessous :



Alors la matrice de transition est :

$$P = \begin{array}{ccc} \nearrow & \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ \text{Etat 1} & p & 1-p \\ \text{Etat 2} & 1-q & q \end{array}$$

Propriété

Soit π_n la distribution après n transitions d'une chaîne de Markov de matrice de transition P, alors on a $\pi_{n+1} = \pi_n P$ (pour tout $n \geq 0$).

9 Pour une chaîne de Markov à deux ou trois états de matrice P, interprétation du coefficient (i, j) de P^n. Distribution après n transitions, représentée comme la matrice ligne $\pi_0 P^n$

Propriété

Le coefficient (i, j) de la matrice P^n représente la probabilité au bout de n transitions de passer de l'état i à l'état j.

Propriété

Soit π_n la distribution après n transitions, alors π_n vérifie $\pi_n = \pi_0 P^n$.

10 Distributions invariantes d'une chaîne de Markov à deux ou trois états

Définition

On appelle distribution invariante d'une chaîne de Markov de matrice de transition P, la distribution π vérifiant l'équation matricielle $\pi = \pi P$.

Propriété de convergence

Si la matrice de transition (ou l'une de ses puissances) a tous ses coefficients strictement positifs, alors la suite $\left(\pi_n\right)$ définie par $\pi_n = \pi_0 P$ converge vers la distribution invariante π quelque soit la distribution initiale π_0.

Démonstrations exigibles

1 Démonstration exigible n° 1

Expression du nombre de chemins de longueur *n* reliant deux sommets d'un graphe à l'aide de la puissance *n*-ième de la matrice d'adjacence

Résultat : « Dans un graphe, le nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets i et j est égal à $\left(M^n\right)_{ij}$ où M est la matrice d'adjacence du graphe. »

Démonstration

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe.

Soit P_n la propriété « le nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets i et j est égal à $\left(M^n\right)_{ij}$ ».

Initialisation : P_1 est vraie (par définition même de la matrice d'adjacence M).

Hérédité : Supposons P_n vraie. Montrons que P_{n+1} l'est encore.

Considérons un chemin de longueur $n+1$ reliant les sommets i et j.

Ce chemin est constitué d'un chemin de longueur n reliant le somme i à k, au nombre de $\left(M^n\right)_{ik}$ (par hypothèse de récurrence) puis d'un chemin de longueur 1 allant de k à j, au nombre de M_{kj} (par définition de M).

Cela fait $\left(M^{n}\right)_{ik}\times M_{kj}$ chemins possibles pour k compris entre 1 et n, c'est-à-dire un total de $\sum_{k=1}^{n}\left(M^{n}\right)_{ik}\times M_{kj}$ qui est par définition du produit matriciel égal au coefficient $\left(M^{n}\times M\right)_{ij}$ c'est-à-dire $\left(M^{n+1}\right)_{ij}$. Ainsi P_{n+1} est vraie.

Conclusion : comme P_1 est vraie et que P_n est héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

2 Démonstration exigible n° 2

Pour une chaîne de Markov, expression de la probabilité de passer de l'état *i* à l'état *j* en *n* transitions, de la matrice ligne représentant la distribution après *n* transitions

Résultat : Considérons une chaîne de Markov de matrice de transition P.

1. Le coefficient (i,j) de la matrice P^{n} représente la probabilité au bout de n transitions de passer de l'état *i* à l'état *j*.
2. Soit π_n la matrice ligne représentant la distribution après *n* transitions, alors π_n vérifie $\pi_n=\pi_0 P^{n}$.

Démonstration

Soit Q_n la propriété « $\left(P^{n}\right)_{ij}=P_{(X_0=i)}\left(X_n=j\right)$ et $\pi_n=\pi_0 P^{n}$ » (où X_n est la variable aléatoire associée à l'état où on se trouve à l'étape *n*).

Initialisation : Q_1 est vraie (par définition même de la matrice de transition *P*).

Hérédité : Supposons Q_n vraie. Montrons que Q_{n+1} l'est encore.

On a : $\pi_{n+1}=\pi_n P$ (par définition de P)

Donc $\pi_{n+1}=\pi_0 P^{n}P=\pi_0 P^{n+1}$(par hypothèse de récurrence).

Comme $P^{n+1}=P^{n}P$, on a $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=\sum_{m=1}^{t}\left(P^{n}\right)_{im}P_{mj}$ (où *t* représente le nombre d'états possibles de la chaîne de Markov).

Or $\left(P^{n}\right)_{im}=P_{(X_0=i)}\left(X_n=m\right)$ (par hypothèse de récurrence)

Et $P_{mj}=P_{(X_n=m)}\left(X_{n+1}=j\right)$ (par définition de la matrice de transition).

Donc : $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=\sum_{m=1}^{t}P_{(X_0=i)}\left(X_n=m\right)P_{(X_n=m)}\left(X_{n+1}=j\right)$.

Comme une chaîne de Markov est sans mémoire, on a :

$P_{(X_n=m)}\left(X_{n+1}=j\right)=P_{(X_n=m)\cap(X_0=i)}\left(X_{n+1}=j\right)$.

Donc : $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=\sum_{m=1}^{t}P_{(X_0=i)}\left(X_n=m\right)P_{(X_n=m)\cap(X_0=i)}\left(X_{n+1}=j\right)$.

Donc : $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=\sum_{m=1}^{t}\dfrac{P\left(X_n=m\right)\cap\left(X_0=i\right)}{P\left(X_0=i\right)}\times\dfrac{P\left(\left(X_n=m\right)\cap\left(X_0=i\right)\cap\left(X_{n+1}=j\right)\right)}{P\left(X_n=m\right)\cap\left(X_0=i\right)}$

(par définition d'une probabilité conditionnelle).

Donc : $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=\sum_{m=1}^{t}\dfrac{P\left(\left(X_n=m\right)\cap\left(X_0=i\right)\cap\left(X_{n+1}=j\right)\right)}{P\left(X_0=i\right)}$

Or $\left(X_n=m\right)_{1\leq m\leq t}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales : $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=\dfrac{P\left(\left(X_0=i\right)\cap\left(X_{n+1}=j\right)\right)}{P\left(X_0=i\right)}$

Et donc : $\left(P^{n+1}\right)_{ij}=P_{(X_0=i)}\left(\left(X_{n+1}=j\right)\right)$ ce qui prouve que la propriété Q_{n+1} est vraie.

Conclusion : comme Q_1 est vraie et que Q_n est héréditaire, on en déduit que Q_n est vraie pour tout $n\geq 1$.

Exercices

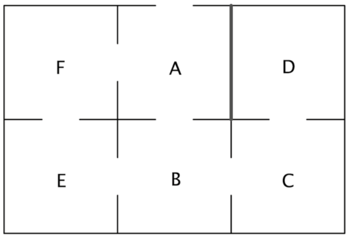
Compétences attendues

- Modéliser une situation par un graphe

Exercice 7.1

Modéliser, changer de registre

On considère un appartement dont la disposition des pièces A, B, C, D et E et des portes est donnée ci-dessous.



- Modéliser cette situation par un graphe, en prenant pour sommets les pièces et pour arêtes les passages permettant de passer d'une pièce à l'autre.

Compétences attendues

- Modéliser une situation par une matrice

Exercice 7.2

Modéliser, représenter, changer de registre, Calculer

Un artisan-chocolatier propose la fabrication de chocolats noirs et blancs suivant le tableau des doses suivantes :

	Chocolat noir	Chocolat blanc
Cacao	10 doses	0 dose
Beurre de cacao	3 doses	9 doses
Lait	0 dose	5 doses

Il a une commande de 15 chocolats noirs et 20 chocolats blancs.

Après avoir modélisé la situation par une matrice (les doses), une matrice colonne (pour les commandes), déterminer sous forme de matrice colonne la quantité de doses de cacao, de beurre de cacao et de lait que l'artisan-chocolatier doit utiliser pour honorer sa commande.

Compétences attendues

- Associer un graphe pondéré à une chaîne de Markov à deux ou trois états

Exercice 7.3

Modéliser, représenter, changer de registre, Calculer

Dans une région très localisée, un météorologue a remarqué que :

- Un jour pluvieux, la probabilité qu'il pleuve à nouveau le lendemain est de 40 %, qu'il y ait du soleil est de 60 %.
- Un jour ensoleillé, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est de 25 %, qu'il y ait du soleil à nouveau est de 75 %.

1. Associer un graphe pondéré à la chaîne de Markov à deux états (correspondant à cette situation) avec les conventions :
   - État 1 : Temps pluvieux.
   - État 2 : Temps ensoleillé.
2. Déterminer la matrice de transition associée au graphe.
3. On suppose qu'à l'étape 0 (le 1er jour), le temps est pluvieux (État 1). Déterminer la distribution initiale (sous forme de matrice ligne) π_0.

Compétences attendues

- Calculer l'inverse, les puissances d'une matrice carrée

Exercice 7.4

Calculer, Expérimenter à l'aide d'outils logiciels

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1}, la matrice inverse de A.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer A^2 et A^3.
   (Vérifier vos résultats avec Xcas.)

Compétences attendues

- Dans le cadre de la résolution de problèmes, utiliser le calcul matriciel, notamment l'inverse et les puissances d'une matrice carrée, pour résoudre un système linéaire, étudier une suite récurrente linéaire, calculer le nombre de chemins de longueur donné entre deux sommets d'un graphe, étudier une chaîne de Markov à deux ou trois états (calculer des probabilités, déterminer une probabilité invariante)

Exercice 7.5

Raisonner, Calculer, appliquer des techniques

Dans un enclos du zoo, il y a des autruches et des zèbres pour un total de 21 têtes et 64 pattes. Déterminer le nombre d'autruches et de zèbres.

Exercice 7.6

Raisonner, Trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, Calculer, appliquer des techniques, Communiquer un résultat par écrit

On considère les deux suites (a_n) et (b_n) sont définies par $\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n - 18b_n \\ b_{n+1} = 3a_n - 7b_n \end{cases}$ et $\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 3 \end{cases}$

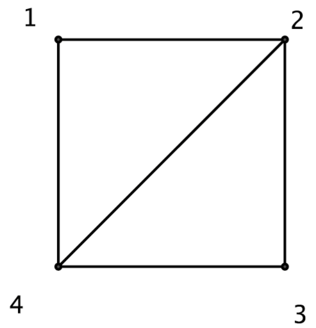
et la suite récurrente linéaire (U_n) définie par $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A, la matrice carrée d'ordre 2 vérifiant la relation $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence sur n que $U_n = A^n U_0$.
3. Démontrer que $A = PDP^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. Démontrer par récurrence sur n que $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Montrer par récurrence sur n que $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire que $\begin{cases} a_n = 2\left(3\cdot 2^n + 2\cdot(-1)^{n+1}\right) + 3\left(-3\cdot 2^{n+1} + 6\cdot(-1)^n\right) \\ b_n = 2\left(2^n + (-1)^{n+1}\right) + 3\left(-2^{n+1} + 3\cdot(-1)^n\right) \end{cases}$.

Exercice 7.7

Calculer, appliquer des techniques, Communiquer un résultat par écrit, expliquer une démarche

On admet le résultat suivant : « Dans un graphe, le nombre de chemins de longueur n reliant deux sommets i et j est égal à $\left(M^n\right)_{ij}$ où M est la matrice d'adjacence du graphe. »
On considère le graphe suivant :



- Calculer le nombre de chemins de longueur 3 entre les sommets 2 et 4.

Exercice 7.8

Modéliser, Calculer, Communiquer un résultat par écrit, expliquer une démarche

En reprenant l'énoncé de l'exercice 7.3, déterminer :

1. la probabilité qu'il pleuve le lendemain.
2. la probabilité qu'il pleuve le surlendemain.
3. la météo à terme (on déterminera la distribution invariante).

Exercices-bilan

Exercice-bilan 7.1

5 min • 3 points

1. Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1}, la matrice inverse de A.

2. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^2 et A^3. Que peut-on conjecturer sur A^n ? Comment démontreriez-vous votre conjecture ?

Exercice-bilan 7.2

5 min • 2 points

Dans le laboratoire d'un entomologiste, il y a des abeilles et des araignées pour un total de 15 têtes et 94 pattes. Déterminer le nombre d'abeilles et d'araignées.

Exercice-bilan 7.3

25 min • 8 points

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1}=-7x_n+6y_n \\ y_{n+1}=-18x_n+14y_n \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=1 \end{cases}.$$

1. On pose $U_n=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Déterminer A, la matrice carrée d'ordre 2 vérifiant la relation $U_{n+1}=AU_n$.

2. Soient $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.
   a. Montrer que $A=PDQ$
   b. Montrer que $Q=P^{-1}$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 0$, $D=\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$.

4. Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 0$, $A=PD^nP^{-1}$.

5. En déduire l'expression de U_n pour tout $n\geq 0$.

6. En déduire l'expression de x_n et de y_n pour tout $n\geq 0$.

Bilan

Exercice-bilan 7.4

20 min • 7 points

Cyprien n'est pas un élève qu'on pourrait toujours qualifier d'élève modèle. En effet, ses professeurs ont étudié de manière très scientifique son attitude en classe qui comporte essentiellement trois états :

- État 1 : Cyprien dort.
- État 2 : Cyprien bavarde.
- État 3 : Cyprien note sagement son cours.

Voici comment il passe d'un état à l'autre :

Si Cyprien dort, alors cinq minutes plus tard il dormira encore avec une probabilité de 60 %, il se réveillera et notera sagement son cours avec une probabilité de 20 % et il se réveillera et se mettra à bavarder avec une probabilité de 20 %.

Si Cyprien note sagement son cours, alors cinq minutes plus tard il continuera de noter sagement son cours avec une probabilité de 40 %, il se mettra à dormir avec une probabilité de 40 %, il se mettra à bavarder avec une probabilité de 20 %.

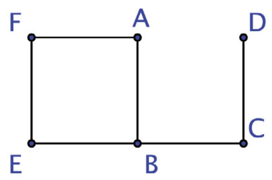
Si Cyprien bavarde, alors cinq minutes plus tard il continuera de bavarder avec une probabilité de 30 %, il se mettra à noter sagement son cours avec une probabilité de 40 %, il se mettra à dormir avec une probabilité de 30 %.

1. Déterminer le graphe pondéré associé à cette chaîne de Markov à 3 états.
2. Déterminer la matrice de transition associée à ce graphe pondéré.
3. Déterminer la distribution invariante du système. En déduire la proportion de temps que Cyprien passe (à terme) à noter sagement son cours, à bavarder et à dormir.

Corrigé des exercices

Exercice 7.1

On peut modéliser la situation par le graphe :



Exercice 7.2

On peut modéliser la situation de la manière suivante :

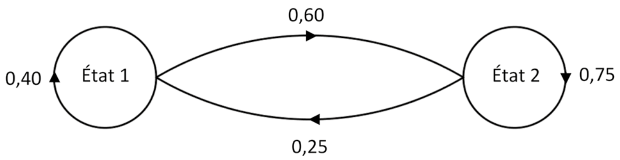
- On utilise la matrice $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ pour les doses.
- On utilise la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ pour les commandes.
- On obtient la matrice $H = D \times C$ permettant d'honorer la commande.

  On obtient alors $H = D \times C = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 3 & 9 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \times 15 + 0 \times 20 \\ 3 \times 15 + 9 \times 20 \\ 0 \times 15 + 5 \times 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 225 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Cela signifie que l'artisan doit utiliser : 150 doses de cacao, 225 doses de beurre de cacao et 100 doses de lait.

Exercice 7.3

1. On peut modéliser la situation par le graphe pondéré :



2. La matrice de transition associée à ce graphe est :

$$P = \begin{array}{c|cc} \nearrow & \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ \hline \text{Etat 1} & 0{,}40 & 0{,}60 \\ \text{Etat 2} & 0{,}25 & 0{,}75 \end{array}$$

3. On a $\pi_0 = \begin{array}{cc} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.4

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{1\times 4 - 3\times(-2)}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & -0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

Vérification avec Xcas :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
A:=[[1,3],[-2,4]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

```
A^-1
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

On obtient bien la même chose !

2. $A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\times a + 1\times 0 & a\times 1 + 1\times a \\ 0\times a + a\times 0 & 0\times 1 + a\times a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$.

$A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\times a^2 + 1\times 0 & a\times 2a + 1\times a^2 \\ 0\times a^2 + a\times 0 & 0\times 2a + a\times a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$.

Vérification avec Xcas :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
A:=[[a,1],[0,a]]
```

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

```
A^2
```

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

```
A^3
```

$$\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

On obtient bien la même chose !

Exercice 7.5

Soit x le nombre d'autruches et y le nombre de zèbres.

On a $\begin{cases} x+y=21 \text{ (pour les têtes)} \\ 2x+4y=64 \text{ (pour les pattes)} \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21 \\ 64 \end{pmatrix}$ ou encore

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 21 \\ 64 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{1\times4-2\times1}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 21 \\ 64 \end{pmatrix}$

C'est-à-dire : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4\times21-1\times64 \\ -2\times21+1\times64 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 \\ 22 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Ainsi, il y a 10 autruches et 11 zèbres.

Exercice 7.6

1. $\begin{cases} a_{n+1}=8a_n-18b_n \\ b_{n+1}=3a_n-7b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1}=AU_n$

avec $A=\begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Soit P_n la propriété $U_n=A^nU_0$.

Corrigés

Initialisation : P_0 est vraie car $U_0 = A^0 U_0$ (car $A^0 = Id$).

Hérédité : supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $U_n = A^n U_0$) et montrons que P_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$).

On a $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$, donc P_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

3. $$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -18 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = A$$

4. Soit Q_n la propriété $A^n = PD^n P^{-1}$.

Initialisation : Q_0 est vraie car $A^0 = PD^0 P^{-1} = PIdP^{-1} = PP^{-1} = Id$ (car $A^0 = Id$).

Hérédité : supposons Q_n vraie (c'est-à-dire que $A^n = PD^n P^{-1}$) et montrons que Q_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $A^{n+1} = PD^{n+1} P^{-1}$).

On a $A^{n+1} = AA^n = PDP^{-1} PD^n P^{-1} = PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$, donc Q_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : comme Q_0 est vraie et que Q_n est héréditaire, on en déduit que Q_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

5. Soit R_n la propriété $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

Initialisation : R_0 est vraie car $D^0 = Id$, $2^0 = 1$ et $(-1)^0 = 1$.

Hérédité : supposons R_n vraie et montrons que R_{n+1} l'est encore.

On a $D^{n+1} = DD^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$, donc R_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : comme R_0 est vraie et que R_n est héréditaire, on en déduit que R_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

6. On a $A^n = PD^n P^{-1}$ donc :

$$A^n = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & -2^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 3(-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\times 2^n + 2\times(-1)^{n+1} & -3\times 2^{n+1} + 6\times(-1)^n \\ 2^n + (-1)^{n+1} & -2^{n+1} + 3\times(-1)^n \end{pmatrix}.$$

L'égalité $U_n = A^n U_0$, donne alors :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\left(3\cdot 2^n + 2\cdot(-1)^{n+1}\right) + 3\left(-3\cdot 2^{n+1} + 6\cdot(-1)^n\right) \\ 2\left(2^n + (-1)^{n+1}\right) + 3\left(-2^{n+1} + 3\cdot(-1)^n\right) \end{pmatrix}$$ c'est-à-dire le résultat demandé.

Exercice 7.7

Le graphe admet pour matrice d'adjacence : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tout revient à déterminer $\left(M^3\right)_{24}$.

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a $\left(M^3\right)_{24} = 5$. Ainsi il y a cinq chemins de longueur 3 menant le sommet 2 au sommet 4.

Corrigés

Exercice 7.8

Comme pour tout n, on a $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}P$, on a :

1. $\pi_1 = \pi_0 P$ c'est-à-dire $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}60 \end{pmatrix}$

ou encore : $\pi_1 = \begin{pmatrix} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ 0{,}40 & 0{,}60 \end{pmatrix}$.

Ainsi la probabilité qu'il pleuve le lendemain (État 1) vaut 0,40.

2. $\pi_2 = \pi_1 P$ c'est-à-dire $\pi_2 = \begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}31 & 0{,}69 \end{pmatrix}$

ou encore : $\pi_2 = \begin{pmatrix} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ 0{,}31 & 0{,}69 \end{pmatrix}$.

Ainsi la probabilité qu'il pleuve (état 1) le surlendemain vaut 0,31 (c'est-à-dire 31 %).

3. On pose $\pi = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ (avec : $x + y = 1$). Maintenant on résout l'équation

$\pi P = P$, ce qui donne : $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}40 & 0{,}60 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 0{,}40x + 0{,}25y & 0{,}60x + 0{,}75y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 0{,}40x + 0{,}25y = x \\ 0{,}60x + 0{,}75y = y \\ x + y = 1 \end{cases}$. Comme $x + y = 1$, on a : $y = 1 - x$ et en réinjectant

dans la 1re équation $0{,}40x + 0{,}25y = x$, cela nous donne : $0{,}40x + 0{,}25(1 - x) = x$

c'est-à-dire : $0{,}40x + 0{,}25 - 0{,}25x = x$ c'est-à-dire : $x = \dfrac{-0{,}25}{-0{,}85} \simeq 0{,}2941$ puis

$y \simeq 1 - 0{,}2941 \simeq 0{,}7059$

Conclusion : la distribution invariante est $\pi = \begin{pmatrix} 0{,}2941 & 0{,}7059 \end{pmatrix}$ ou encore :

$\pi = \begin{pmatrix} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} \\ 0{,}2941 & 0{,}7059 \end{pmatrix}$. Cela signifie qu'à terme, on a une probabilité de 29,41 % qu'il pleuve contre une probabilité de 70,59 % qu'il y ait du soleil.

Corrigé des exercices-bilan

Exercice-bilan 7.1

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ donc : $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{0\times2-2\times(-1)}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+a\times0 & 1\times a+a\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times a+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

$A^3=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times1+a\times0 & 1\times2a+a\times1 \\ 0\times1+1\times0 & 0\times2a+1\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

On peut conjecturer que $A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, résultat qu'on peut démontrer très facilement par un raisonnement par récurrence.

Exercice-bilan 7.2

Soit x le nombre d'abeilles et y le nombre d'araignées.

On a $\begin{cases} x+y=15 \text{ (pour les têtes)} \\ 6x+8y=94 \text{ (pour les pattes)} \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ 94 \end{pmatrix}$ ou encore

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 15 \\ 94 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{1\times8-1\times6}\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 94 \end{pmatrix}$

C'est-à-dire : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 8\times15-1\times94 \\ -6\times15+1\times94 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 26 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ainsi, il y a 13 abeilles et 2 araignées.

Exercice-bilan 7.3

1. On trouve $A=\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -18 & 14 \end{pmatrix}.$

Corrigés

2. *a.* On a :

$$PDQ=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-15&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&6\\-18&14\end{pmatrix}.$$
$$=A$$

b. $P=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$ est inversible puisque $ad-bc=1(\neq 0)$, et on a :

$$P^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}=Q.$$

3. Soit P_n la propriété $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$.

Initialisation : P_0 est vraie puisque $D^0=Id$ et $\begin{pmatrix}2^0&0\\0&5^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=Id$.

Hérédité : supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$) et montrons que

P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $D^{n+1}=\begin{pmatrix}2^{n+1}&0\\0&5^{n+1}\end{pmatrix}$).

On a : $D^{n+1}=D^nD=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n+1}&0\\0&5^{n+1}\end{pmatrix}$

donc P_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : Comme P_0 est vraie et que P_n est héréditaire, on en déduit que P_n est vraie pour tout $n\geq 0$ c'est-à-dire que : $D^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$ pour tout $n\geq 0$.

4. Soit H_n la propriété $A^n=PD^nP^{-1}$.

Initialisation : H_0 est vraie puisque $A^0=Id$ et $PD^0P^{-1}=PIdP^{-1}=PP^{-1}=Id$ et donc $A^0=PD^0P^{-1}$.

Hérédité : Supposons H_n vraie (c'est-à-dire $A^n=PD^nP^{-1}$) et montrons que H_{n+1} l'est encore (c'est-à-dire que $A^{n+1}=PD^{n+1}P^{-1}$).

On a : $A^{n+1}=AA^n=APD^nP^{-1}=PDP^{-1}PD^nP^{-1}=PDIdD^nP^{-1}$

C'est-à-dire $A^{n+1}=PDD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$ donc H_{n+1} est encore vraie.

Conclusion : comme H_0 est vraie et que H_n est héréditaire, on en déduit que H_n est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 0$.

5. Comme $U_{n+1} = AU_n$, on a : $U_n = A^nU_0$ (c'est un théorème du cours, cela dit on peut le redémontrer très facilement par récurrence).

Or : $A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n \\ -3\times5^n & 2\times5^n \end{pmatrix}$

c'est-à-dire : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3\times5^n & -2^{n+1}+2\times5^n \\ 3\times2^{n+1}-6\times5^n & -3\times2^n+4\times5^n \end{pmatrix}$. Or $U_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

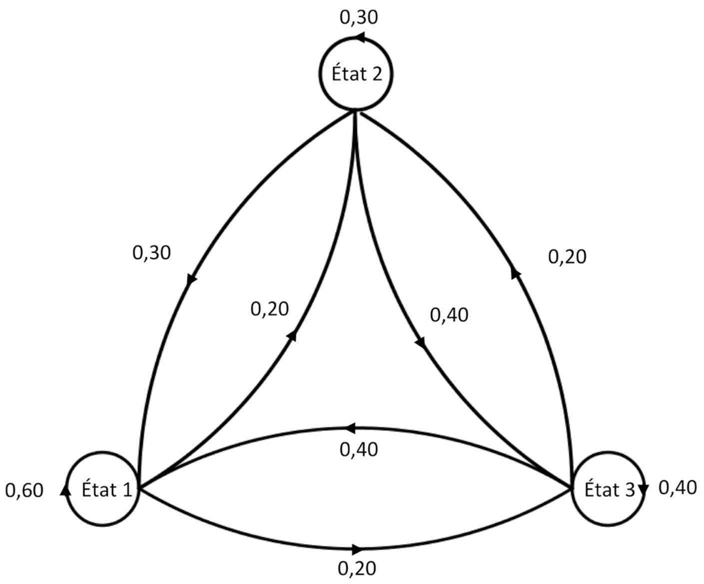
On a donc :

$$U_n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3\times5^n & -2^{n+1}+2\times5^n \\ 3\times2^{n+1}-6\times5^n & -3\times2^n+4\times5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+3}-2^{n+1}-4\times5^n \\ 3\times2^{n+2}-3\times2^n-8\times5^n \end{pmatrix}$$

6. Comme $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, on a : $\begin{cases} x_n = 2^{n+3}-2^{n+1}-4\times5^n \\ y_n = 3\times2^{n+2}-3\times2^n-8\times5^n \end{cases}$.

Exercice-bilan 7.4

1. On obtient le graphe pondéré suivant :



2. On obtient la matrice de transition :

$$P = \begin{array}{c|ccc} \nearrow & \text{Etat 1} & \text{Etat 2} & \text{Etat 3} \\ \text{Etat 1} & 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ \text{Etat 2} & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ \text{Etat 3} & 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{array}$$

3. On pose $\pi = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$ (avec : $x+y+z=1$). Maintenant on résout l'équation $\pi P = P$, ce qui donne : $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 0,6x+0,3y+0,4z & 0,2x+0,3y+0,2z & 0,2x+0,4y+0,4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 0,6x+0,3y+0,4z = x \\ 0,2x+0,3y+0,2z = y \\ 0,2x+0,4y+0,4z = z \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Comme $x+y+z=1$, on a : $z = 1-x-y$ et en réinjectant dans la 1re équation $0,40x+0,25y = x$, cela nous donne :

$$\begin{cases} 0,6x+0,3y+0,4(1-x-y) = x \\ 0,2x+0,3y+0,2(1-x-y) = y \\ 0,2x+0,4y+0,4(1-x-y) = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8x+0,1y = 0,4 \\ 0,9y = 0,2 \\ -0,2x+0,4 = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{36} \\ y = \dfrac{0,2}{0,9} = \dfrac{2}{9} (\simeq 0,2222) \quad \text{(Après calculs)} \\ z = \dfrac{11}{36} \end{cases}$$

Ce qui nous donne : $\pi \simeq \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} & \text{Etat 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4722 & 0,2222 & 0,3056 \end{pmatrix} \end{array}$.

Cela signifie que Cyprien passe (à terme) 47,22 % de son temps à dormir (état 1), 22,22 % de son temps à bavarder (état 2), et 30,56 % de son temps à noter sagement son cours (état 3).

Chapitre 8

Problèmes résolus

Problèmes possibles du chapitre 2

1 Problème

Suite de nombres complexes définie par $z_{n+1} = az_n + b$

Énoncé

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 5$.

Soit M_n le point d'affixe z_n et A le point d'affixe $z_A = 4 + 2i$.

Le but du problème est de montrer que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = z_n - z_A$. Montrer que $u_{n+1} = \frac{i}{2} u_n$.
2. En déduire que $u_n = (-4-2i)\left(\frac{i}{2}\right)^n$.
3. En déduire que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Résolution

1. $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A = \frac{i}{2} z_n + 5 - (4+2i) = \frac{i}{2} z_n + 1 - 2i = \frac{i}{2}\left(z_n + \frac{1-2i}{\frac{i}{2}}\right)$

$$= \frac{i}{2}\left(z_n + \frac{2-4i}{i}\right) = \frac{i}{2}\left(z_n + \frac{2i-4i^2}{i^2}\right) = \frac{i}{2}\left(z_n - \left(2i - 4i^2\right)\right) = \frac{i}{2}\left(z_n - 2i - 4\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(z_n - z_A\right).$$

2. Comme $u_{n+1} = \frac{i}{2} u_n$, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{i}{2}$ et de premier terme $u_0 = z_0 - z_A = -4 - 2i$. D'après la formule $u_n = u_0 \times q^n$, on a $u_n = (-4-2i) \times \left(\frac{i}{2}\right)^n$.

Remarque

On peut aussi démontrer ce résultat par récurrence.

3. Le vecteur $\overrightarrow{AM_n}$ a pour affixe $z_n - z_A$ c'est-à-dire u_n.
Le vecteur $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ a pour affixe $z_{n+4} - z_A$ c'est-à-dire u_{n+4}.
On a $u_{n+4} = (-4-2i)\times\left(\frac{i}{2}\right)^{n+4} = (-4-2i)\times\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{i}{2}\right)^{4} = u_n \times \frac{1}{16}$ (car $i^4 = 1$).
Ainsi $\overrightarrow{AM_{n+4}} = \frac{1}{16}\overrightarrow{AM_n}$ et donc les vecteurs $\overrightarrow{AM_{n+4}}$ et $\overrightarrow{AM_n}$ sont colinéaires, ce qui prouve que les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

2 Problème

Inégalité triangulaire pour deux nombres complexes ; cas d'égalité

Résultat : pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (avec égalité lorsqu'il existe un réel λ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$).

Démonstration

Rappelons-nous d'abord que $|z|^2 = z\overline{z}$ et $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)}$ (car $|z|^2 = z\overline{z}$)

donc $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2$

donc $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2$ (car $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$)

donc $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| + |z_2|^2$ (car $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$)

donc $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z}_2| + |z_2|^2$

donc $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$ (car $|z| = |\overline{z}|$)

donc $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

donc $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (car $|z_1 + z_2| \geq 0$ et $|z_1| + |z_2| \geq 0$).

Cas d'égalité : $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$

$\Leftrightarrow |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = 2|z_1||\overline{z}_2|$ (car $|z| = |\overline{z}|$)

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) = |z_1||\overline{z}_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(|z_1\overline{z}_2|) = |z_1\overline{z}_2| \Leftrightarrow z_1\overline{z}_2$ est un réel positif (car $z = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$)

$\Leftrightarrow$ il existe un réel positif K tel que $z_1\overline{z}_2 = K$.

Si $z_2 \neq 0$, en posant $\lambda = \dfrac{K}{|z_2|^2}$ (si $z_2 \neq 0$), on a $z_1 = \lambda z_2$.

Si $z_2 = 0$, alors en posant $\lambda = 0$, on a $z_2 = \lambda z_1$.

3 Problème
Étude expérimentale de l'ensemble de Mandelbrot, d'ensembles de Julia

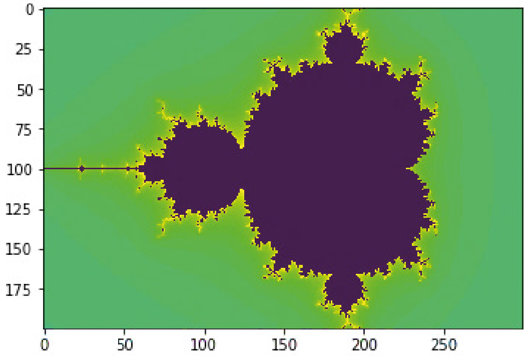
1. Étude de l'ensemble de Mandelbrot :

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble $\left\{C \in \mathbb{C} : (z_n) \text{ est bornée}\right\}$ (où (z_n) est la suite définie par $z_{n+1} = z_n + C$).

Grâce au programme (sous Python Anaconda) ci-dessous : on peut procéder à une étude expérimentale de cet ensemble. Dans ce programme, on a pris $z_0 = 0$ qu'on peut faire varier.

```python
from matplotlib.pyplot import imshow
import numpy as np

def Module(z):
    return(z.real**2+z.imag**2)**0.5

def Mandelbrot(c,n):
    z=0
    for i in range(0,n):
        z=z*z+c
        if Module(z)>=10:
            return i
    return -40

Tableau=np.zeros((200,300))

def Ensemble_Mandelbrot(Tableau,n):
    for i in range(0,300):
        x=-2+i/100
        for j in range(0,200):
            y=-1+j/100
            c=complex(x,y)
            Tableau[j,i]=Mandelbrot(c,n)
    return imshow(Tableau)
```

On peut alors obtenir différentes fractales de la forme :



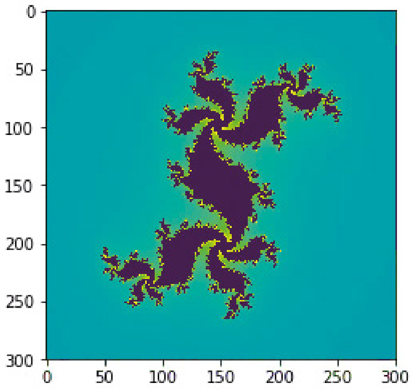
2. Étude de l'ensemble de Julia :

L'ensemble de Julia est l'ensemble défini par $\left\{(z_n):(z_n) \text{ est bornée}\right\}$ (où (z_n) est la suite définie par $z_{n+1} = z_n + C$).

Grâce au programme (sous Python Anaconda) ci-dessous : on peut procéder à une étude expérimentale de cet ensemble. Dans ce programme, on a pris $C = -0{,}285 - 0{,}013i$ qu'on peut faire varier.

```
from matplotlib.pyplot import imshow
import numpy as np

def Module(z):
    return(z.real**2+z.imag**2)**0.5

def Julia(z0,n):
    z=z0
    for i in range(0,n):
        z=z*z+complex(-0.285,-0.013)
        if Module(z)>=10:
            return i
    return -40

Tableau=np.zeros((300,300))

def Ensemble_Julia(Tableau,n):
    for i in range(0,300):
        x=-1.5+i/100
        for j in range(0,300):
            y=-1.5+j/100
            z0=complex(x,y)
            Tableau[j,i]=Julia(z0,n)
    return imshow(Tableau)

```

On peut alors obtenir différentes fractales de la forme :



Problèmes possibles du chapitre 4

1 Problème

Racines carrées d'un nombre complexe, équation du second degré à coefficients complexes

Énoncé

1. Racines carrées d'un nombre complexe.

a. Montrer que :

$$z^2 = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}\left(z^2\right) = c \\ \mathrm{Im}\left(z^2\right) = d \\ \left|z^2\right| = \left|c+id\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = c \\ 2ab = d \\ a^2 + b^2 = \left|c+id\right| \end{cases}$$ où $z = a + ib$ avec

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

b. En déduire les racines carrées du nombre complexe $3 - 4i$.

2. En déduire la résolution de l'équation $z^2+(-4-3i)z+1+7i=0$ par la méthode du discriminant.

Résolution

1. a. Si $z=a+ib$ alors $z^2=(a+ib)^2=a^2+2aib+(ib)^2=a^2-b^2+2iab$.

Ainsi $z^2=c+id \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z^2)=c \\ \mathrm{Im}(z^2)=d \\ |z^2|=|c+id| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=c \\ 2ab=d \\ a^2+b^2=|c+id| \end{cases}$.

b. $z^2=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z^2)=3 \\ \mathrm{Im}(z^2)=-4 \\ |z^2|=|3-4i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4 \\ a^2+b^2=\sqrt{9+16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \\ 2ab=-4 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$.

Cela nous donne : $2a^2=8$, $2b^2=2$, $ab=-2$ c'est-à-dire : $a^2=4$, $b^2=1$, $ab=-2$. L'égalité $ab=-2$ nous indique que a et b sont de signe contraire. $a^2=4$, $b^2=1$ nous donnent alors les deux possibilités suivantes : $a=2$, $b=-1$ et $a=-2$, $b=1$.

Ainsi les racines carrées de $3-4i$ sont $2-i$ et $-2+i$.

2. On a $a=1$, $b=-4-3i$, $c=1+7i$ donc :
$\Delta=b^2-4ac=(-4-3i)^2-4\times1\times(1+7i)$
C'est-à-dire : $\Delta=16+24i-9-4-28i=3-4i$. Soit $\delta=2-i$ l'une des racines carrées de $3-4i$.

L'équation admet deux solutions $z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}=\dfrac{4+3i+(2-i)}{2}=\dfrac{6+2i}{2}=3+i$ et $z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}=\dfrac{4+3i-(2-i)}{2}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$.

2 Problème
Formules de Viète (1540-1603)

1. Résultat pour un polynôme de degré 2

Soit $P(x)=ax^2+bx+c$ de racines x_1,x_2 alors : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Démonstration

$P(x)=ax^2+bx+c$ admettant pour racines x_1,x_2 on a :
$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$. Comme $P(x)=P(x)$, on a :
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \Leftrightarrow ax^2+bx+c=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2\right)$
$\Leftrightarrow ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$
Deux polynômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on a : $a=a$, $b=-a(x_1+x_2)$ et $c=ax_1x_2$ c'est-à-dire $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ et $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

2. Résultat pour un polynôme de degré 3

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ de racines x_1,x_2,x_3 alors : $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$ et $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$.

Démonstration

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ admettant pour racines x_1,x_2,x_3 on a :
$P(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Comme $P(x)=P(x)$, on a :
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
$\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3\right)$
Deux polynômes étant égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, on a : $a=a$, $b=-a(x_1+x_2+x_3)$, $c=a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$, $d=-ax_1x_2x_3$ c'est-à-dire : $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}$ et $x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$.

3 Problème
Résolution par radicaux de l'équation de degré 3

Résultat : On considère l'équation $x^3+px+q=0$. Soit $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3$. Si $\Delta>0$, alors l'équation admet pour solution réelle : $x_0=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$.

Démonstration

On pose $x=u+v$ avec $uv=\frac{-p}{3}$.

$x^3+px+q=0 \Leftrightarrow (u+v)^3+p(u+v)+q=0 \Leftrightarrow u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$

$\Leftrightarrow u^3+v^3+0\times(u+v)+q=0 \Leftrightarrow q=-(u^3+v^3)$.

On a alors :

$$\begin{cases} u^3+v^3=-q \\ u^3v^3=\frac{-p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^3=-q-u^3 \\ u^3v^3=\frac{-p^3}{27} \end{cases} \Leftrightarrow u^3(-q-u^3)=\frac{-p^3}{27} \Leftrightarrow (u^3)^2+qu^3-\frac{p^3}{27}=0.$$

De même : $(v^3)^2+qv^3-\frac{p^3}{27}=0$.

Ainsi u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du 2nd degré $X^2+qX-\frac{p^3}{27}=0$, de discriminant $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3$ qui admet pour solutions $\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$.

Ainsi $u=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $v=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$ et donc $x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}$.

Exemple

Résoudre $x^3+3x+1=0$ (donc $p=3$ et $q=1$).

On a $\Delta=q^2+\frac{4}{27}p^3=1^2+\frac{4}{27}3^3=5$.

Ainsi : $x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}=\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\,(\simeq-0{,}32)$ est solution réelle de l'équation $x^3+3x+1=0$.

Problèmes possibles du chapitre 5

1 Problème possible n° 1

Lignes trigonométriques de $\frac{2\pi}{5}$, construction du pentagone

Énoncé

On considère $1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$ les racines cinquièmes de l'unité qui sont également les cinq affixes des points formant un pentagone régulier.

1. Démontrer que $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0$.
2. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}$.
3. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{4}$

   (on pourra utiliser l'égalité $\cos(a)\times\cos(b)=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$).
4. En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$ puis les valeurs de $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$.
5. En déduire une construction du pentagone régulier (correspondants aux points d'affixes $1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}$) à la règle et au compas.

Résolution

1. $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3+\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$

$$=\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}}=0.$$

2. $1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}=0 \Leftrightarrow 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{8\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{i\frac{6\pi}{5}}=0$

$\Leftrightarrow 1+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{-i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}+e^{-i\frac{4\pi}{5}}=0 \Leftrightarrow 1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\frac{1}{2}$.

3. $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\times\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{4\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)}{2}$

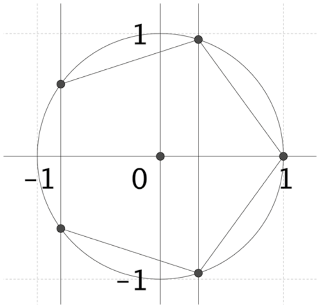
$=\dfrac{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)}{2}=\dfrac{\frac{-1}{2}}{2}=\dfrac{-1}{4}$ (d'après la question 2)).

4. Les deux nombres $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ (l'un positif et l'autre négatif) sont racines du trinôme X^2-SX+P avec $S=\frac{-1}{2}$ et $P=\frac{-1}{4}$, c'est-à-dire du trinôme $X^2+\frac{1}{2}X-\frac{1}{4}$ (qui admet pour racines $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$).

Ainsi $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ ($\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$ car $0<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$).

On a $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

5. Pour construire le pentagone régulier, on construit le cercle unité et la droite d'équation $x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (on obtiendra déjà trois points, pour les deux qui manquent on reporte au compas les deux longueurs manquantes en centrant sur les sommets déjà construits).



Remarque

Pour obtenir la mesure $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ à la règle et au compas (permettant de tracer la droite d'équation $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$) voici comment procéder :

$\sqrt{5}$ peut être obtenu comme hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés de longueur 1 et 2.

$\sqrt{5}-1$ peut être obtenu en retirant le rayon du cercle unité de la longueur $\sqrt{5}$.

$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ peut être obtenu en deux temps, d'abord en obtenant $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (avec la médiatrice) puis la moitié de $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (de nouveau avec une médiatrice).

2 Problème
Somme des racines *n*-ièmes de l'unité

Résultat : la somme des racines *n*-ièmes de l'unité vaut 0.

▶ **Démonstration**

$$\mathbb{U}_n=\left\{1,e^{i\frac{2\pi}{n}},e^{i\frac{4\pi}{n}},e^{i\frac{6\pi}{n}},\cdots,e^{i\frac{2k\pi}{n}},\cdots,e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$

Ainsi, la somme des racines *n*-ièmes de l'unité vaut :

$$1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+e^{i\frac{4\pi}{n}}+e^{i\frac{6\pi}{n}}+\cdots+e^{i\frac{2k\pi}{n}}+\cdots+e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}$$

$$=1+e^{i\frac{2\pi}{n}}+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^3+\cdots+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k+\cdots+\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\frac{1-e^{i2\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=\frac{0}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}}=0\,.$$

3 Problème

Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

Résultat : l'équation $z^n=Z$ (où Z complexe) admet pour ensemble solution : $\left\{\sqrt[n]{r},\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}},\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+4\pi}{n}},\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+6\pi}{n}},\ldots,\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ldots,\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}}\right\}$ avec $r=|Z|$ et $\theta=\arg(Z)[2\pi]$.

Démonstration

$z^n=Z\Leftrightarrow z^n=re^{i(\theta+2k\pi)}$ où $r=|Z|$ et $\theta=\arg(Z)[2\pi]$ et k entier.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z^n|=\left|re^{i(\theta+2k\pi)}\right|\\ \arg(z^n)=\arg\left(re^{i(\theta+2k\pi)}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^n=r\\ n\times\arg(z)=\theta+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt[n]{r}=r^{\frac{1}{n}}\\ \arg(z)=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\end{cases}.$$

Ainsi les racines *n*-ièmes de Z forment l'ensemble :

$$\left\{\sqrt[n]{r},\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}},\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+4\pi}{n}},\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+6\pi}{n}},\ldots,\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ldots,\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

où $r=|Z|$ et $\theta=\arg(Z)[2\pi]$.

Exemple

Déterminer les racines cubiques de $Z=8i$.

Cela revient à résoudre $z^3=8i$.

$z^3=8i \Leftrightarrow z^n=8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$ où $r=|8i|=8$ et $\theta=\arg(8i)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et k entier.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|z^3\right|=\left|8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right| \\ \arg\left(z^3\right)=\arg\left(8e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3=8 \\ 3\times\arg(z)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|=\sqrt[3]{8}=2 \\ \arg(z)=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} \end{cases}.$$

Ainsi les racines cubiques de $8i$ forment l'ensemble :

$$\left\{2e^{i\frac{\pi}{6}},2e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}},e^{i\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}}\right\}=\left\{2e^{i\frac{\pi}{6}},2e^{i\frac{5\pi}{6}},e^{i\frac{9\pi}{6}}\right\}.$$

4 Problème
Transformation de Fourier discrète

Définition : On considère un signal s. La transformée de Fourier discrète est définie pour $k\in\{0,1,2,\cdots N-1\}$ par $S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}s(n)e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}$. (Elle possède un intérêt en théorie du signal où elle est très fréquemment utilisée pour les représentations spectrales.)

Énoncé : Déterminer l'expression de la transformée de Fourier associée au signal constamment égal à 1 (c'est-à-dire s définie par $s(n)=1$ pour tout n).

Résolution : $S(k)=\sum_{n=0}^{N-1}1e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}\right)^n=\dfrac{1-\left(e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}\right)^N}{1-e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}}$

$$=\frac{1-e^{-i2\pi kn}}{1-e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}}=\frac{1-1}{1-e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}}=0.$$

Problèmes possibles du chapitre 6

1 Problème
Détermination des racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers

Énoncé : Déterminer les éventuelles racines rationnelles du polynôme $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x - 2$.

Analyse : soit $\frac{a}{b}$ (avec $\text{pgcd}(a,b) = 1$) une racine rationnelle de $P(x)$.

Alors $P\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 5\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 5\frac{a}{b} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3\frac{a^3}{b^3} - 5\frac{a^2}{b^2} + 5\frac{a}{b} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 3a^3 - 5a^2b + 5ab^2 - 2b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a^3 = 5a^2b - 5ab^2 + 2b^3 \\ 2b^3 = 3a^3 - 5a^2b + 5ab^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^3 = b\left(5a^2 - 5ab + 2b^2\right) \\ 2b^3 = a\left(3a^2 - 5ab + 5b^2\right) \end{cases}.$$

Ainsi $\begin{cases} b \text{ divise } 3a^3 \\ a \text{ divise } 2b^3 \end{cases}$.

Comme $\text{pgcd}(a,b) = 1$, on a également : $\text{pgcd}(a^3,b) = 1$ et $\text{pgcd}(a,b^3) = 1$.

Ainsi $\begin{cases} b \text{ divise } 3a^3 \\ a \text{ divise } 2b^3 \end{cases}$ implique d'après le théorème de Gauss : $\begin{cases} b \text{ divise } 3 \\ a \text{ divise } 2 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} b = \pm 3 \text{ ou } b = \pm 1 \\ a = \pm 2 \text{ ou } a = \pm 1 \end{cases}$. Ainsi si $P(x)$ admet des racines rationnelles de $P(x)$, celles-ci sont nécessairement $\frac{\pm 2}{\pm 3}$; $\frac{\pm 1}{\pm 3}$; $\frac{\pm 2}{\pm 1}$; $\frac{\pm 1}{\pm 1}$.

Synthèse : parmi les huit valeurs $\frac{\pm 2}{\pm 3}$; $\frac{\pm 1}{\pm 3}$; $\frac{\pm 2}{\pm 1}$; $\frac{\pm 1}{\pm 1}$, seule $\frac{2}{3}$ est effectivement racine du polynôme $P(x)$ (car $P\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 5 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$.

Conclusion : $P(x)$ admet une et une seule racine rationnelle : $\frac{2}{3}$.

2 Problème
Lemme chinois et applications à des situations concrètes

Lemme chinois : étant donné deux entiers a et.b premiers entre eux, alors le système $\begin{cases} x \equiv k_1[a] \\ x \equiv k_2[b] \end{cases}$ admet une unique solution (modulo $[ab]$).

Application : mon panier peut contenir au maximum 40 œufs. Si je le vide, trois par trois, il en reste un. Si je le vide huit par huit, il en reste deux. Combien y a-t-il d'œufs dans le panier ?

Résolution : cela revient à résoudre le système $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 2[8] \end{cases}$ avec x entier vérifiant $x \leq 40$.

Comme $\text{pgcd}(3,8) = 1$, le lemme chinois nous annonce que le système admet une unique solution (modulo 24).

On peut alors, tenter toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 24 jusqu'à ce que l'une d'entre elles fonctionne. On pourra alors affirmer qu'il s'agit de l'unique solution (modulo 24).

Avec un peu de patience, ou en utilisant le programme ci-dessous :

```
x=0
while x<=24:
    if x%3==1 and x%8==2:
        print(x)
    x=x+1
```

On trouve $x \equiv 10[24]$, c'est-à-dire deux possibilités (car $x \leq 40$), le panier contient 10 œufs ou bien 34 œufs.

3 Problème
Démonstration du petit théorème de Fermat

Résultat : Si p est un nombre premier et a un entier positif alors $a^p \equiv a[p]$.

Démonstration

Effectuons un raisonnement par récurrence.

Soit H_a la propriété $a^p \equiv a[p]$.

Initialisation : H_0 est vraie (car $0^p \equiv 0[p]$).

Hérédité : Supposons H_a vraie (c'est-à-dire que $a^p \equiv a[p]$) et montrons que H_{a+1} l'est encore (c'est-à-dire que $(a+1)^p \equiv a+1[p]$).

On a d'après la formule du binôme, $(a+1)^p \equiv \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k 1^{p-k} [p]$

c'est-à-dire $(a+1)^p \equiv \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k [p]$ c'est-à-dire : $(a+1)^p \equiv 1+\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + a^p [p]$.

Or d'après le théorème de Gauss p divise $\binom{p}{k}$.

(En effet, p divise $k!\binom{p}{k} = p(p-1)\dots(p-k+1)$ et p est premier avec $k!$ [car p est premier et supérieur à k]). Ainsi $(a+1)^p \equiv 1+a^p [p]$. Or par hypothèse de récurrence, on a $a^p \equiv a[p]$. Ainsi : $(a+1)^p \equiv 1+a[p]$ et donc H_{a+1} est encore vraie.

Conclusion : comme H_0 est vraie et que H_a est héréditaire, on en déduit que H_a est vraie pour tout entier a positif.

4 Problème

Problèmes de codage (code-barres, code ISBN, clé du Rib, code Insee)

Tous ces problèmes de codage visent à détecter une erreur de frappe à l'aide d'un caractère ou d'une clef de contrôle. En effet, la moindre erreur de calcul modifie la valeur du caractère (ou de la clef) de contrôle et témoigne donc d'une erreur de saisie. En voici quatre exemples.

1. **Le code-barres**

   Un code-barres est un numéro attitré à chaque article. Il est de la forme $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}c$ où chacun des a_i est un chiffre et où c est un caractère de contrôle déterminé de la manière suivante : on calcule le résidu r modulo 10 du nombre :

   $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+a_{13}+3\times(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})$.

   - Si r vaut 0, alors c vaut 0.
   - Si r est différent de 0, alors c vaut $10-r$.

   Par exemple l'article 978234002529 admet $c=5$ comme caractère de contrôle.

2. **Le code ISBN**

   L'ISBN (ISBN : International Standard Book Number) est un numéro attitré à chaque livre. Il est de la forme $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9c$ où chacun des a_i est un chiffre et où c est un caractère de contrôle déterminé de la manière suivante : on calcule le résidu r modulo 11 du nombre $a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+8a_8+9a_9$.

- Si r est différent de 10, alors c vaut r.
- Si r vaut 10, alors c vaut le caractère X.

Par exemple l'ouvrage 272 983 409 admet $c = 5$ comme caractère de contrôle.

Par exemple l'ouvrage 272 983 947 admet $c = X$ comme caractère de contrôle.

3. **Clé du Rib**

Le RIB (relevé d'identité bancaire) est un numéro attitré à chaque bénéficiaire d'un compte bancaire.

Il est de la forme $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}a_{19}a_{20}a_{21}cd$ où chacun des a_i est un chiffre et où cd est une clef de contrôle déterminée de la manière suivante : on calcule le résidu r modulo 97 du nombre :
$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}a_{19}a_{20}a_{21}00$.
Dans ce cas, cd vaut $97 - r$.

Par exemple le compte 305450204554812245 4 (qu'on complète par deux zéros) admet $cd = 39$ comme clef de contrôle.

4. **Code Insee**

Le code Insee est un code attitré à chaque personne.

Il est de la forme $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}cd$ où chacun des a_i est un chiffre et où cd est une clef de contrôle déterminée de la manière suivante : on calcule le résidu r modulo 97 du nombre $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$.
Dans ce cas, cd vaut $97 - r$.

Par exemple l'individu 1750876640295 admet $cd = 76$ comme clef de contrôle.

5 Problème
Étude du test de primalité : notion de témoin, nombres de Carmichaël

Un test de primalité repose sur l'implication suivante :

N premier $\Rightarrow$ pour tout x d'un certain ensemble, la propriété P_x est vraie.

Comme il s'agit d'une implication (et non d'une équivalence), il se présente deux possibilités :

- Si on trouve un témoin x telle que P_x est faux, alors c'est sûr que N n'est pas premier.
- Si P_x est vraie pour tous les témoins examinés, alors on peut considérer qu'il y a de fortes chances que N soit premier (mais sans aucune certitude).

Le test de primalité le plus célèbre est le test de Fermat :

N premier $\Rightarrow$ pour tout entier $2 \leq x \leq N-1$, $P_x : x^N \equiv x[N]$.

Exemples

1. Le chiffre 5 a de fortes chances d'être premier puisque la propriété est vraie pour tous les témoins examinés : $2^5 \equiv 32 \equiv 2[5]$, $3^5 \equiv 243 \equiv 3[5]$, $4^5 \equiv 1024 \equiv 4[5]$.
2. Le chiffre 9 n'est pas premier (puisque P_2 n'est pas vraie, en effet $2^9 \not\equiv 2[9]$ car $2^9 = 512 \equiv 8[9]$). Ainsi on a trouvé un témoin, à savoir $x = 2$ tel que P_x soit faux).
3. Les nombres comme 561 et 1 105 passent aussi avec succès le test de Primalité de Fermat : on pouvait donc penser qu'il y avait de fortes chances qu'ils soient premiers alors qu'il n'en est rien (561 est divisible par 11 et 1 105 est divisible par 13). De tels nombres (finalement assez trompeurs) sont appelés nombres de Carmichaël (du nom du mathématicien américain Robert Carmichael [1879-1967]).

6 Problème

Problèmes de chiffrement (affine, Vigenère, Hill, RSA)

Dans les problèmes de chiffrement, les 26 lettres de l'alphabet sont remplacées par les nombres 0,1, 2, 3 …25 par la correspondance résumée dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Les calculs cryptographiques se feront bien sûr modulo 26.

Par la suite, le nombre d'étoiles (*) de chaque chiffrement désigne leur résistance par rapport aux tentatives de décryptage, l'attaque de décryptage la plus connue étant l'analyse des fréquences : elle repose sur le fait que la lettre E, même si elle est cryptée, est facilement reconnaissable dans un texte car elle est utilisée dans une proportion égale à 18 % (pour les textes de langue française par exemple). Ainsi, par des statistiques (car les autres lettres ont elle aussi une fréquence d'apparition qui leur est propre), on peut décrypter facilement un texte si celui-ci a été codé selon un chiffrement trop simple (comme celui de César que nous allons voir).

Nous classerons chaque chiffrement donc de 1 étoile (*) pour faiblement résistant (comme le chiffrement affine) à 4 étoiles (****) pour ultra résistant (comme le RSA).

1. Chiffrement affine* :

Une fonction affine est une fonction du type $x \longrightarrow ax + b$. L'idée du chiffrement affine est d'utiliser une telle fonction, modulo 26.

Voici comment crypter le mot ROI (17, 14, 8) avec la fonction $x \to 3x+5$

- R (17) devient : E (4 car : $3\times17+5\equiv56\equiv4[26]$).
- O (14 devient : V (21 car : $3\times14+5\equiv47\equiv21[26]$).
- I (8) devient : D (3 car : $3\times8+5\equiv29\equiv3[26]$).

Ce qui donne le mot EVD (4, 21, 3).

Pour décrypter le mot RQF (17, 16, 5) obtenu à partir du même chiffrement affine $x \to 3x+5$, voici comment procéder :

On pose $y\equiv3x+5[26]$ et on exprime x en fonction de y.

$y\equiv3x+5[26]\Leftrightarrow y-5\equiv3x[26]$. Cherchons l'inverse de 3 modulo 26. Avec Xcas, on tape : irem(3^-1,26) et on trouve 9.

$y-5\equiv3x[26]\Leftrightarrow 9\times(y-5)\equiv9\times3x[26]\Leftrightarrow 9y-45\equiv x[26]$

C'est-à-dire $x\equiv9y-19[26]$.

Donc :

- R (17) devient : E (4 car : $9\times17-19\equiv134\equiv4[26]$).
- Q (16) devient : V (21 car : $9\times16-19\equiv125\equiv21[26]$).
- F (5) devient : A (0 car : $9\times5-19\equiv26\equiv0[26]$).

Ce qui donne le mot EVA.

Algorithme du chiffrement affine (cryptage et décryptage) :

```
Réponse=int(input("Pour crypter, tapez 1. Pour décrypter, tapez 2."))
def ca_vers_ch(caractere):
    return ord(caractere)-65
def ch_vers_ca(chiffre):
    return chr(chiffre+65)
if Réponse==1:
            Message=input("Tapez le message à crypter : ")
            for x in Message:
                y=(3*ca_vers_ch(x)+5)%26
                print(ch_vers_ca(y), end="")
if Réponse==2:
            Message=input("Tapez le message à décrypter : ")
            for x in Message:
                y=(9*ca_vers_ch(x)-19)%26
                print(ch_vers_ca(y), end="")
```

Remarque

Comme annoncé, l'ennemi redoutable des chiffrements, c'est l'analyse de fréquences. C'est le point faible du chiffrement affine qui ne lui résiste pas. En revanche, le chiffrement qui va suivre est nettement meilleur !

2. Chiffrement de Vigenère** (1523-1596)

Ce chiffrement est un chiffrement amélioré de celui de César (qui consiste à ajouter trois lettres à chaque lettre du mot à crypter). Plutôt que d'ajouter trois lettres à chaque fois, on ajoute des lettres différentes suivant une clef de cryptage (un mot) à chaque lettre.

Voici comment crypter le mot MARIE (12, 0, 17, 8, 4) avec la clef de cryptage REINE (17, 4, 8, 13,4).

- M (12) devient : D (3, on ajoute 17 lettres, modulo 26).
- A (0) devient : E (4, +4 lettres).
- R (17) devient : Z (25, +8 lettres).
- I (8) devient : V (21, +13 lettres).
- E (4) devient : I (8, +4 lettres).

Ce qui donne le mot DEZVI (3, 4, 25, 21, 8).

Pour décrypter le mot GEZVW (crypté au départ avec la même clef de cryptage REINE (17,4,8,13,4)), voici comment procéder :

- G (6) devient : P (15, on retranche 17 lettres, modulo 26).
- E (4) devient : A (0, on retranche 4 lettres).
- Z (25) devient : R (17, on retranche 8 lettres).
- V (21) devient : I (8, on retranche 13 lettres, modulo 26).
- W (22) devient : S (18, on retranche 4 lettres).

Ce qui donne le mot PARIS.

Algorithme du chiffrement de Vigenère (cryptage et décryptage) :

```
Réponse=int(input("Pour crypter, tapez 1. Pour décrypter, tapez 2."))
def ca_vers_ch(caractere):
    return ord(caractere)-65
def ch_vers_ca(chiffre):
    return chr(chiffre+65)
if Réponse==1:
            Message=input("Tapez le message à crypter : ")
            Clef=input("Clef ?")
            i=0
            for x in Message:
                y=(ca_vers_ch(x)+ca_vers_ch(Clef[i]))%26
                i=(i+1)%len(Clef)
                print(ch_vers_ca(y), end="")
if Réponse==2:
            Message=input("Tapez le message à décrypter : ")
            Clef=input("Clef ?")
            i=0
            for x in Message:
                y=(ca_vers_ch(x)-ca_vers_ch(Clef[i]))%26
                i=(i+1)%len(Clef)
                print(ch_vers_ca(y), end="")
```

Remarque

Le chiffrement de Vigenère est très résistant face à l'attaque par analyse de fréquence (sur nos exemples, on voit bien que la lettre E du mot renaissance n'est pas nécessairement codée par la même lettre), néanmoins il fut astucieusement cassé (par des méthodes vraiment complexes et hors programme) par un officier prussien du nom de Kasiski en 1863.

3. Chiffrement de Hill***

Il faut tout d'abord avoir vu le chapitre sur les matrices avant d'aborder ce chiffrement car l'idée est de crypter un message par une matrice (inversible modulo 26, sinon on ne pourra pas le décrypter). Comme on utilise une matrice carrée d'ordre 2, le message qu'on crypte devra être découpé en autant de paquets de deux lettres. Par exemple, si on souhaite crypter le nom : PASCAL, on fera trois paquets de 2 lettres, à savoir : PA, SC, et AL.

Voici comment crypter le mot RIRE (17, 8, 17, 4) avec la matrice de cryptage $A=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On crée deux paquets de 2 lettres RI (17,8), et RE(17,4) qu'on convertir en vecteur colonne $U=\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- RI (17,8) devient : GH (6,7) en effet : $AU=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 188 \\ 33 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}[26]$.
- RE (17,7) devient RF (17,5) en effet : $AV=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 \\ 7 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 173 \\ 31 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 17 \\ 5 \end{pmatrix}[26]$.

Ainsi on obtient le mot crypté : GHRF (6, 7, 17, 5).

Voici comment décrypter le mot CNJO (2, 13, 9, 14) obtenu à partir de la même matrice de cryptage $A=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On crée deux paquets de 2 lettres CN (2,13), et JO (9,14) qu'on convertit en vecteur colonne $U=\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$. On cherche la matrice inverse (modulo 26) de $A=\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Avec Xcas, on tape irem(A^-1,26) et on obtient :

```
A:=[[4,15],[1,2]]
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
irem(A^-1,26)
```

$$\begin{pmatrix} 22 & 17 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

On a donc $A^{-1}\equiv\begin{pmatrix} 22 & 17 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}[26]$.

- CN (2,13) devient : FE (5,4) en effet : $A^{-1}U=\begin{pmatrix} 22 & 17 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 265 \\ 264 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}[26]$
- JO (9,14) devient UX (20,23) en effet : $A^{-1}V=\begin{pmatrix} 22 & 17 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 436 \\ 387 \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 20 \\ 23 \end{pmatrix}[26]$

Ainsi on obtient le mot décrypté : FEUX (5, 4, 20, 23).

Remarque

Le chiffrement de Hill résiste bien à l'attaque par l'analyse de fréquence, cela est dû en partie au regroupement de lettres par paquets de 2. Le chiffrement de Hill est aussi un bon chiffrement car tenter de le casser en cherchant la matrice inverse de celle utilisée pour crypter nécessite plus de 150 000 tentatives (si la matrice est carrée d'ordre 2, car si elle est d'ordre supérieur, alors le nombre de tentatives devient astronomique !).

4. Chiffrement RSA****

Le codage RSA repose essentiellement sur le petit théorème de Fermat.

On imagine qu'un message entre Juliette (la destinataire) et Roméo (l'expéditeur) va être émis.

Étape 1 : Juliette (la destinatrice) choisit deux nombres premiers p et q.

Étape 2 : Juliette calcule $n = p \times q$.

Étape 3 : Juliette calcule $\varphi(n) = (p-1) \times (q-1)$.

Étape 4 : Juliette choisit un nombre e, premier avec $\varphi(n)$.

Étape 5 : Juliette peut maintenant dévoiler sa **clef publique** (n, e).

Étape 6 : Juliette calcule maintenant sa **clef privée** d, qu'elle ne dévoilera à personne en utilisant la formule $d = e^{-1}\left[\varphi(n)\right]$ (Avec Xcas : $d := irem(e \wedge -1, phi)$).

Étape 7 : **Roméo**, grâce à la clef publique (n, e) de Juliette, va **crypter son message** m (m vérifiant $0 \leq m \leq n-1$), en le transformant en c (c comme crypté) par la formule $c = m^e\left[n\right]$ (Avec Xcas, $c := irem(m \wedge e, n)$).

Étape 8 : **Juliette** ayant reçu le message crypté c, **va le décrypter**. Elle calcule $c^d\left[n\right]$ (Avec Xcas, $c := irem(c \wedge d, n)$) grâce à sa clef privée d et retrouve m.

Remarque

RSA est considéré comme très résistant à l'analyse de fréquences mais nécessite sans cesse la découverte de nouveaux nombres premiers inconnus.

7 Problème
Recherche de nombres premiers particuliers (Mersenne, Fermat)

1. Un nombre de Mersenne est un nombre de la forme $2^n - 1$. Beaucoup de nombres de Mersenne sont premiers, comme $2^2 - 1 = 3, 2^3 - 1 = 7, 2^5 - 1 = 31, 2^7 - 1 = 127$. D'ailleurs la plupart des nombres premiers qui sont découverts aujourd'hui sont des nombres de Mersenne particuliers car on dispose de l'implication « $2^n - 1$ premier $\Rightarrow$ n premier » et d'un bon test de primalité appelé test de Lucas.

2. Un nombre de Fermat est un nombre de la forme $2^{2^n}+1$. Beaucoup de nombres de Fermat sont premiers, comme $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$, $2^{2^4}+1=65537$, Fermat ayant démontré l'implication « 2^p+1 premier $\Rightarrow p$ est une puissance de 2 », il y avait un espoir de découvrir de nouveaux nombres premiers parmi ce type de nombres. Hélas, Euler (1707-1783) a démontré que $2^{2^5}+1=4294967297$ n'était pas premier (car factorisable par 641), aujourd'hui, on sait que $2^{2^6}+1$, $2^{2^7}+1, \cdots 2^{2^{32}}+1$ ne le sont pas non plus et il y a encore une incertitude sur $2^{2^{33}}+1$.

   Conclusion : la recherche de nombres premiers peut se faire parmi des nombres particuliers et s'est montrée historiquement plutôt fructueuse. Il y a eu d'autres tentatives, Euler a proposé par exemple les nombres de la forme n^2+n+41 dont les 40 premières valeurs donnent des nombres premiers.

8 Problème
Exemple simple de codes correcteurs

Lorsqu'un message *abcd* est transmis (où a,b,c,d sont des entiers égaux à 0 ou 1), on peut inventer une clé de contrôle *keys* définie par $k=b+c+d\left[2\right]$, $e=a+c+d\left[2\right]$, $y=a+b+d\left[2\right]$, $s=a+b+c\left[2\right]$.

Le message $abcd=1111$ admet pour clef de contrôle $keys=1111$.

En cas d'une erreur :

- 0111 (au lieu de $abcd=1111$) on a : $keys=1000$ au lieu de $keys=1111$.
- 1011 (au lieu de $abcd=1111$) on a : $keys=0100$ au lieu de $keys=1111$.
- 1101 (au lieu de $abcd=1111$) on a : $keys=0010$ au lieu de $keys=1111$.
- 1110 (au lieu de $abcd=1111$) on a : $key=0001$ au lieu de $keys=1111$.

On constate, alors que la clef de contrôle détecte la position de l'erreur.

9 Problème
Étude du système cryptographique RSA

Voir problème n° 6 chiffrement n° 4 pour une présentation complète.

10 Problème
Détermination des triplets pythagoriciens

L'algorithme donne les solutions entières x, y, z (chacune comprises entre 0 et 500) avec $x < y < z$ de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

```
for x in range(1,501):
    for y in range(1,501):
        for z in range(1,501):
            if x**2+y**2==z**2:
                print(x,y,z)
```

Lorsqu'on le fait fonctionner, l'algorithme affiche $(3,4,5)$, $(5,12,13)$, etc. qui vérifient en effet l'équation de Pythagore $x^2 + y^2 = z^2$ puisque $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$, etc.

11 Problème possible n° 11
Étude des sommes de deux carrés par les entiers de Gauss

Les entiers de Gauss sont des nombres complexes de la forme $x + iy$ où x et y sont deux entiers.
L'égalité $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$ montre qu'un entier qui est somme de deux carrés d'entiers peut se factoriser comme produit de deux entiers de Gauss.

Grâce à cette propriété, Gauss a démontré (démonstration hors programme) qu'un nombre premier p est somme de deux carrés d'entiers si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$. C'est le cas par exemple de $2 = 1^2 + 1^2$, de $5 = 1^2 + 2^2$ (avec $5 \equiv 1[4]$), mais pas de 11 (car $11 \equiv 3[4]$) qui ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers.

12 Problème possible n° 12
Étude de l'équation de Pell-Fermat

L'algorithme ci-dessous donne les solutions entières x, y (chacune comprise entre 0 et 2 000) de l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$.

```
for x in range(1,501):
    for y in range(1,501):
        for z in range(1,501):
            if x**2-2*y**2==1:
                print(x,y,z)
```

Lorsqu'on le fait fonctionner, l'algorithme affiche $(1,0)$, $(3,2)$, $(17,12)$, $(99,70)$, $(577,408)$ qui vérifient en effet l'équation de Pell-Fermat $x^2 - 2y^2 = 1$ puisque $1^2 - 2\times0^2 = 1$, $3^2 - 2\times2^2 = 1$, $17^2 - 2\times12^2 = 1$, etc.

Remarque

Cette équation, redoutable à résoudre, passionnait déjà les mathématiciens grecs. Ils connaissaient d'ailleurs la solution $(577, 408)$.

Problèmes possibles du chapitre 7

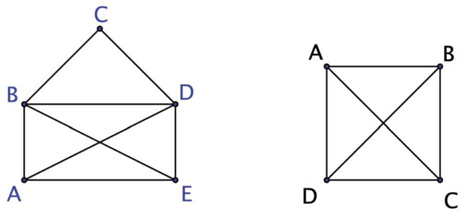
1 Problème
Étude de graphe eulériens

Énoncé

Une chaîne (d'un graphe connexe) est dite eulérienne si elle contient une et une seule fois chacune des arêtes. Un graphe est dit eulérien s'il admet au moins une chaîne eulérienne.

Le mathématicien Euler a démontré qu'un graphe était eulérien si et seulement si le nombre de sommets de degré impair valait 0 ou 2.

1. Déterminer parmi les graphes suivants, lequel est eulérien.



Graphe 1 Graphe 2

2. Parmi le graphe eulérien que vous avez trouvé, déterminer au moins une chaîne eulérienne.

Résolution

1. Le graphe 1 est eulérien (A et E sont les deux seuls sommets de degré impair).
   Le graphe 2 n'est pas eulérien (il possède quatre sommets de degré impair).
2. Dans le graphe 1, la chaîne A-B-C-D-A-E-B-D-E est eulérienne.

2 Problème
Interpolation polynômiale

Énoncé

On considère le polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$ dont la courbe passe par les points de coordonnées (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_1) (avec x_0,x_1,x_2 distincts).

1. Montrer que déterminer un tel polynôme mène à résoudre l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire le polynôme du second degré dont la courbe passe par les points de coordonnées $(1,-2)$, $(2,-5)$, $(6,3)$.

Résolution

1. Comme la courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$ passe par les points de coordonnées (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_1), on a :

$$\begin{cases} y_0=ax_0^2+bx_0+c \\ y_1=ax_1^2+bx_1+c \\ y_2=ax_2^2+bx_2+c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

2. Un tel polynôme mène à la résolution de l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 6^2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Avec Xcas, on obtient :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
T:=[[1,1,1],[4,2,1],[36,6,1]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

```
T^-1
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{-8}{5} & \frac{7}{4} & \frac{-3}{20} \\ \frac{12}{5} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{20} \\ \frac{-8}{5} & \frac{7}{4} & \frac{-3}{20} \\ \frac{12}{5} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

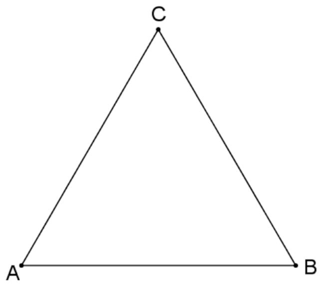
Ainsi le polynôme cherché vaut $P(x) = x^2 - 6x + 3$.

3 Problème

Marche aléatoire sur un graphe. Étude asymptotique

Énoncé

Une puce se trouve au départ au point A. A chaque étape, elle saute aléatoirement vers n'importe quel autre sommet (elle ne saute pas sur place, ce qui signifie qu'elle change nécessairement de sommet).



Partie algorithmique

On considère que le sommet A est représenté par le nombre 0, le sommet B par le nombre 1 et le sommet C par le nombre 2.

1. Écrire un algorithme permettant de :
   - simuler tous les déplacements possibles de la puce en n étapes et donnant l'emplacement de la puce en fin de parcours.
   - déterminer les fréquences de passage de la puce sur chacun des sommets A, B ou C au bout de n étapes.
2. Faire fonctionner l'algorithme pour 100 000 étapes.
3. Que peut-on alors conjecturer ?

Partie matricielle

On appelle X_n la variable aléatoire associée à l'état de la puce (position sur le triangle) au bout de n étapes. On considère :

- État 1 : la puce se trouve sur le sommet A.
- État 2 : la puce se trouve sur le sommet B.
- État 3 : la puce se trouve sur le sommet C.

Soit π_n la distribution après n transitions (ou loi de probabilité de la variable aléatoire X_n) et représentée par un vecteur ligne.

1. Déterminer le graphe pondéré associé à cette chaîne de Markov à trois états.
2. Déterminer P, la matrice de transition associée à ce graphe pondéré.
3. On considère au départ que la puce se trouve au sommet A.
   a. Déterminer π_0.
   b. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer π_{10}. Interpréter le résultat obtenu.
   c. Déterminer les probabilités respectives de se trouver sur le sommet A, B ou C à terme (on utilisera le théorème de convergence).
   d. Vos résultats sont-ils conformes à la simulation algorithmique ?

Résolution

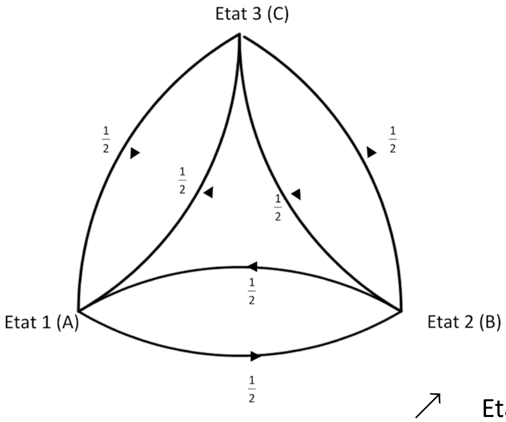
1. L'idée est d'utiliser les congruences. La position de la puce sera représentée par les entiers :
   - $0[3]$ (pour le sommet A).
   - $1[3]$ ou $-2[3]$ (pour le sommet B).
   - $2[3]$ ou $-1[3]$ (pour le sommet C).

```
import random
i=0
SommetA=1
SommetB=0
SommetC=0
N=100000
for n in range(1,N):
    if random.random()<0.5:
        i=(i-1)%3
    else:
        i=(i+1)%3
    if i==0:
        SommetA=SommetA+1
    elif i==1 or i==-2:
        SommetB=SommetB+1
    else:
        SommetC=SommetC+1
Freq_A=SommetA/N*100
Freq_B=SommetB/N*100
Freq_C=SommetC/N*100
print("Freq_A",Freq_A,"Freq_B",Freq_B,"Freq_C",Freq_C)
```

2. Lorsqu'on fait fonctionner l'algorithme pour $n = 100\,000$, on constate qu'on a des fréquences très proches (autour de 33,3 %) pour chacun des sommets A, B et C.
3. On peut donc conjecturer que la puce passe avec la même fréquence sur chacun des sommets A, B et C.

Partie matricielle

1. On obtient le graphe pondéré suivant :



2. On en déduit la matrice de transition associée : $P = \begin{array}{cccc} \nearrow & \text{Etat1} & \text{Etat2} & \text{Etat3} \\ \text{Etat1} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \text{Etat2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \text{Etat3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$

3. a. Puisqu'au départ, la puce se trouve au sommet A (État 1), on a :

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} \text{Etat1} & \text{Etat2} & \text{Etat3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Comme pour tout n, $\pi_n = \pi_0 P^n$ (Théorème du cours), on a :

$$\pi_{10} = \pi_0 P^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^{10}$$ ce qui donne avec le calcul formel :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
P:=[[0,1/2,1/2],[1/2,0,1/2],[1/2,1/2,0]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

```
Pi_0:=[1,0,0]
```

$$[1,0,0]$$

```
Pi_0*P^10
```

$$\left[\frac{171}{512}, \frac{341}{1024}, \frac{341}{1024}\right]$$

```
evalf(Pi_0*P^10)
```

$$[0.333984375, 0.3330078125, 0.3330078125]$$

C'est-à-dire $\pi_{10} \simeq \begin{pmatrix} \text{Etat1} & \text{Etat2} & \text{Etat3} \\ 0{,}334 & 0{,}333 & 0{,}333 \end{pmatrix}.$

Interprétation : au bout de 10 étapes, c'est-à-dire 10 déplacements, la puce a une probabilité de 33,4 % d'être sur le sommet A (état 1), 33,3 % d'être sur le sommet B et 33,3 % d'être sur le sommet C.

c. On va déterminer π, la distribution invariante. Comme P^2 a ses coefficients strictement positifs (comme on peut le voir avec un logiciel de calcul formel)

```
P^2
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

on va pouvoir appliquer le théorème de convergence qui affirme que la suite (π_n) définie par $\pi_n = \pi_0 P^n$ va converger la distribution invariante π, quelle que soit la loi de probabilité initiale π_0.

On va prendre $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (peu importe) et déterminer $\pi_{20} = \pi_0 P^{20}$ (cela sera amplement suffisant) pour avoir une bonne approximation de U.

```
evalf(Pi_20:= Pi_0*P^20)
                [0.333333969116, 0.333333015442, 0.333333015442]
```

On a donc : $\pi \simeq \begin{pmatrix} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} & \text{Etat 3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Ainsi la probabilité de se trouver à terme sur les sommets A, B ou C est égale.

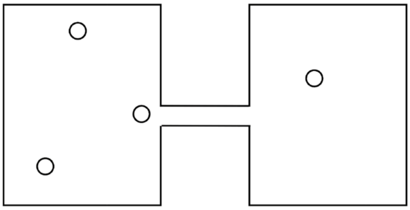
d. Ces résultats sont tout à fait conformes avec la simulation algorithmique qui donne des fréquences de passage tout aussi proches. En fait la loi des grands nombres de Bienaymé-Tchebycheff affirme, que plus le nombre d'expériences est grand ($n = 100\,000$ est déjà assez grand mais pas assez), plus les fréquences expérimentales sont proches des probabilités théoriques. C'est exactement ce que l'aspect algorithmique (expérimental) puis matriciel (théorique) illustre ici.

4 Problème
Modèle de diffusion d'Ehrenfest

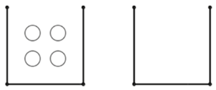
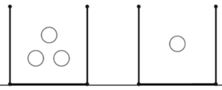
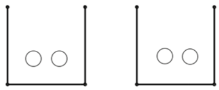
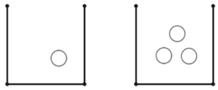
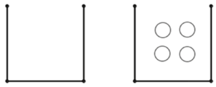
Énoncé

On partage une urne en deux compartiments. Dans le compartiment de gauche, il y a des molécules de gaz, tout comme dans celle de droite. A chaque seconde (durée d'une étape), une molécule prise au hasard change de compartiment.

On considère qu'au départ il y a 4 molécules de gaz.



Concernant ce processus stochastique, il y a donc cinq états possibles :

État 1 :	
État 2 :	
État 3 :	
État 4 :	
État 5 :	

1. Donner le graphe pondéré associé à cette chaîne de Markov à cinq états.
2. Déterminer P, la matrice de transition associée au graphe pondéré.

   On considère X_n la variable aléatoire donnant l'état du système à l'étape n (au bout de n secondes donc) et π_n la distribution après n transitions (ou loi de probabilité associée à X_n), π_n étant un vecteur ligne.
3. On suppose qu'au départ, les quatre molécules sont dans le compartiment de **droite**. Déterminer la distribution initiale π_0 (étape 0).
4. Déterminer au bout de 20 secondes, les probabilités :
   - d'avoir autant de molécules dans chaque compartiment (état 3).
   - d'avoir toutes les molécules dans le compartiment de droite (état 5).
   - que les molécules aient toutes changé de compartiment (état 1).

Résolution

1. On obtient :

$$\text{État 1} \underset{\frac{1}{4}}{\overset{1}{\rightleftarrows}} \text{État 2} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{\frac{3}{4}}{\rightleftarrows}} \text{État 3} \underset{1}{\overset{\frac{1}{2}}{\rightleftarrows}} \text{État 4} \underset{1}{\overset{\frac{1}{4}}{\rightleftarrows}} \text{État 5}$$

En effet, la probabilité de passer de l'état 2 (3 molécules à gauche) à l'état 3 (2 molécules à gauche), par exemple, est de 3 sur 4 : en effet il y a trois chances sur 4 que la molécule qui change de compartiment provienne du compartiment de gauche.

2. La matrice de transition est alors :

$$P = \begin{array}{c} \nearrow \\ \text{Etat 1} \\ \text{Etat 2} \\ \text{Etat 3} \\ \text{Etat 4} \\ \text{Etat 5} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} & \text{Etat 3} & \text{Etat 4} & \text{Etat 5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. Puisqu'au départ, les quatre molécules sont dans le compartiment de droite, on est dans l'état 5. On a donc : $\pi_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} & \text{Etat 3} & \text{Etat 4} & \text{Etat 5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Au bout de 20 secondes, on est à l'étape 20. On va donc déterminer π_{20}. Comme d'après le cours $\pi_n = \pi_0 P^n$, on a : $\pi_{20} = \pi_0 P^{20}$, ce qui donne avec un logiciel de calcul formel :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
P:=[[0,1,0,0,0],[1/4,0,3/4,0,0],[0,2/4,0,2/4,0],[0,0,3/4,0,1/4],[0,0,0,1,0]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Pi_0:=[0,0,0,0,1]
```

$$[0, 0, 0, 0, 1]$$

```
Pi_20:=Pi_0*P^20
```

$$\left[\frac{262143}{2097152}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{262145}{2097152}\right]$$

```
evalf(Pi_20:=Pi_0*P^20)
```

$$[0.124999523163, 0.0, 0.75, 0.0, 0.125000476837]$$

On a donc : $\pi_{20} \simeq \begin{pmatrix} \text{Etat 1} & \text{Etat 2} & \text{Etat 3} & \text{Etat 4} & \text{Etat 5} \\ 0{,}125 & 0 & 0{,}75 & 0 & 0{,}125 \end{pmatrix}$.

Conclusion : au bout de 20 secondes, il y a environ :

- 75 % de chances d'avoir autant de molécules dans chaque compartiment (état 3).
- 12,5 % de chances qu'il y ait encore toutes les molécules dans le compartiment de droite (état 5).
- 12,5 % de chance qu'elles aient toutes changé de compartiment (état 1).

5 Problème

Modèle « proie-prédateur » discrétisé : évolution couplée de deux suites récurrentes

Énoncé

On considère deux populations :

- les prédateurs dont l'effectif est représenté par la suite (g_n).
- les proies dont l'effectif est représenté par la suite (h_n).

Lotka (1880-1949) et Volterra (1860-1940) ont montré qu'elles évoluaient suivant les équations ci-après, appelées équations de Lotka Volterra : $\begin{cases} g_{n+1} = (1-d)g_n + cg_nh_n \\ h_{n+1} = (1+a)h_n - bg_nh_n \end{cases}$

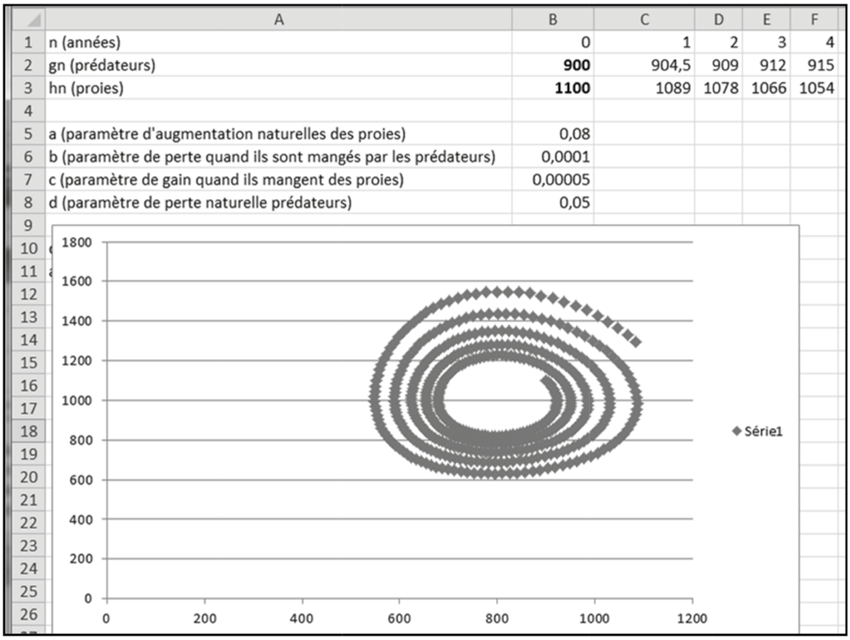
- n (la variable des suites) représente le temps en années.
- d est un paramètre biologique de perte naturelle de prédateurs (lutte de territoire ou pollution de l'eau)
- c est un paramètre biologique d'augmentation (meilleure natalité) des prédateurs lorsqu'ils mangent des proies (lors des g_nh_n rencontres possibles entre proies et prédateurs).
- a est un paramètre d'augmentation naturelle des proies.
- b est un paramètre biologique de perte de proies (des proies se font manger par les prédateurs lors des g_nh_n rencontres possibles entre proies et prédateurs).

1. Écrire une feuille de calcul Excel permettant de déterminer g_n et h_n avec les paramètres suivants : $a = 0{,}08$, $b = 0{,}0001$, $c = 0{,}00005$, $d = 0{,}05$ et pour $g_0 = 900$ et $h_0 = 1100$ sur une durée de 500 ans. Représenter le nuage de points (g_n, h_n) pour n compris entre 0 et 500.

2. On considère qu'il y a équilibre lorsque les suites (g_n) et (h_n) ne s'annulent pas et qu'elles sont constantes, c'est-à-dire lorsque pour tout n, $g_{n+1}=g_n$ et $h_{n+1}=h_n$. Montrer qu'il y a équilibre lorsque pour tout n, $g_n=\frac{a}{b}$ et $h_n=\frac{d}{c}$ (on aura donc en particulier $g_0=\frac{a}{b}$ et $h_0=\frac{d}{c}$, considéré comme point d'équilibre).
3. Modifier dans le tableur $g_0=900$ par $g_0=\frac{a}{b}$ et $h_0=1100$ par $h_0=\frac{d}{c}$.
Que constatez-vous graphiquement ? (On rappelle que : $a=0{,}08$, $b=0{,}0001$, $c=0{,}00005$, $d=0{,}05$.)
4. On suppose qu'on se place au voisinage du point d'équilibre, c'est-à-dire que $g_0\simeq\frac{a}{b}$ et $h_0\simeq\frac{d}{c}$. Sous ces conditions, on considère que les équations de Lotka-Volterra sont équivalentes au système suivant : $\begin{cases} g_{n+1}=g_n+\frac{ca}{b}h_n-\frac{ad}{b} \\ h_{n+1}=-\frac{bd}{c}g_n+h_n+\frac{ad}{c} \end{cases}$. (On dit qu'on a linéarisé les équations de Lotka Volterra au voisinage du point d'équilibre).
   a. On pose $U_n=\begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} -\frac{ad}{b} \\ \frac{ad}{c} \end{pmatrix}$.
   Déterminer la matrice carrée A vérifiant : $U_{n+1}=AU_n+C$.
   b. Déterminer le vecteur colonne D constant vérifiant : $D=AD+C$.
   c. En déduire que : $\begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{ca}{b} \\ -\frac{bd}{c} & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} g_0-\frac{a}{b} \\ h_0-\frac{d}{c} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{a}{b} \\ \frac{d}{c} \end{pmatrix}$.
   d. Application numérique : en déduire une approximation des deux populations dans 5 ans (toujours avec : $a=0{,}08$, $b=0{,}0001$, $c=0{,}00005$, $d=0{,}05$) et pour $g_0=810$ et $h_0=1010$ (g_0 et h_0 sont proches du point d'équilibre). Comparer avec les résultats donnés par le tableur.

Résolution

1. On obtient la feuille de calcul ci-après :



	A	B	C	D	E	F
1	n (années)	0	1	2	3	4
2	gn (prédateurs)	**900**	904,5	909	912	915
3	hn (proies)	**1100**	1089	1078	1066	1054
4						
5	a (paramètre d'augmentation naturelles des proies)	0,08				
6	b (paramètre de perte quand ils sont mangés par les prédateurs)	0,0001				
7	c (paramètre de gain quand ils mangent des proies)	0,00005				
8	d (paramètre de perte naturelle prédateurs)	0,05				

Dans la cellule B1, on écrit 0. Dans la cellule C1, on écrit 1. On sélectionne la plage B1 : C1, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'à SH1.

Dans la cellule B2, on écrit 900. Dans B3, on écrit 1 100.

Dans B5, on écrit 0,08. Dans B6, on écrit 0,001. Dans B7 on écrit 0,00005. Dans B8, on écrit 0,05.

Dans la cellule C2, on écrit =(1-$B$8)*B2+$B$7*B3*B2.

Dans la cellule C3, on écrit =(1+$B$5)*B3-$B$6*B3*B2.

On sélectionne la plage C2 : C3, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'à SH2 : SH3.

Ensuite, on va dans insertion > nuage de points > on sélectionne les données g_n en abscisses et h_n en ordonnées.

Remarque

on constate alors cette drôle de spirale (voir ci-dessus) qui s'explique biologiquement de la manière suivante : au moment où les proies augmentent, il y a plus à manger : mécaniquement les prédateurs se sentent « mieux » et se multiplient davantage, leur nombre augmente. Lorsqu'ils deviennent plus nombreux, ils mangent plus (enfin pas chacun individuellement mais au total), il y a donc moins de proies (leur nombre va diminuer). S'il y a moins de proies, les prédateurs mangent moins, se sentent donc moins bien (certains même vont commencer à avoir « la dalle » !) et vont diminuer en nombre, et ainsi de suite : la boucle est bouclée !

2. $\begin{cases} g_{n+1}=g_n \\ h_{n+1}=h_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-d)g_n+cg_nh_n=g_n \\ (1+a)h_n-bg_nh_n=h_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -dg_n+cg_nh_n=0 \\ ah_n-bg_nh_n=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -d+ch_n=0 \\ a-bg_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_n=\dfrac{d}{c} \\ g_n=\dfrac{a}{b} \end{cases}$ (pour tout n).

(Note : on a pu diviser par g_n et par h_n car on a supposé que ces suites ne s'annulaient pas.)

3. On remplace $h_0=1100$ par $h_0=\dfrac{d}{c}=\dfrac{0{,}05}{0{,}00005}=1000$ et $g_0=900$ par $g_0=\dfrac{a}{b}=\dfrac{0{,}08}{0{,}0001}=800$ et on constate sur le tableur que la spirale ne se réduit plus qu'à un seul point, le point d'équilibre (800 prédateurs et 1 000 proies).

4. a. $\begin{cases} g_{n+1}=g_n+\dfrac{ca}{b}h_n-\dfrac{ad}{b} \\ h_{n+1}=-\dfrac{bd}{c}g_n+h_n+\dfrac{ad}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g_{n+1} \\ h_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dfrac{ad}{b} \\ \dfrac{ad}{c} \end{pmatrix}$

On a donc $U_{n+1}=AU_n+C$ avec : $A=\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 1 \end{pmatrix}$.

b. $D=AD+C \Leftrightarrow D-AD=C \Leftrightarrow (Id-A)D=C \Leftrightarrow D=(Id-A)^{-1}C$.

Or $Id-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{ca}{b} \\ \dfrac{bd}{c} & 0 \end{pmatrix}$ et donc :

$$(Id-A)^{-1}=\frac{1}{\dfrac{bd}{c}\cdot\dfrac{ca}{b}}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{ad}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{c}{bd} \\ -\dfrac{b}{ac} & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi en posant $D=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on obtient : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{c}{bd} \\ -\dfrac{b}{ac} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dfrac{ad}{b} \\ \dfrac{ad}{c} \end{pmatrix}$

Problèmes résolus

ce qui donne : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{d}{c} \end{pmatrix}$ (on reconnaît le point d'équilibre).

c. Les équations $U_{n+1} = AU_n + C$ et $D = AD + C$ donnent en les soustrayant l'équation : $U_{n+1} - D = A\left(U_n - D\right)$ c'est-à-dire : $U_n - D = A^n\left(U_0 - D\right)$(Théorème) c'est-à-dire : $U_n = A^n\left(U_0 - D\right) + D$

ce qui donne : $\begin{pmatrix} g_n \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{ca}{b} \\ -\dfrac{bd}{c} & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} g_0 - \dfrac{a}{b} \\ h_0 - \dfrac{d}{c} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{d}{c} \end{pmatrix}$.

d. Application numérique : les valeurs $n = 5$, $a = 0{,}08$, $b = 0{,}0001$, $c = 0{,}00005$, $d = 0{,}05$ et pour $g_0 = 810$ et $h_0 = 1010$ nous donnent :

$$\begin{pmatrix} g_5 \\ h_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}04 \\ -0{,}1 & 1 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Avec Xcas, on obtient : $\begin{cases} g_5 \simeq 811{,}58 \\ h_5 \simeq 1004{,}64 \end{cases}$, regardez !

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette co
bouée).

```
A:=[[1,0.04],[-0.1,1]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.04 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
U:=[[10],[10]]
```

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

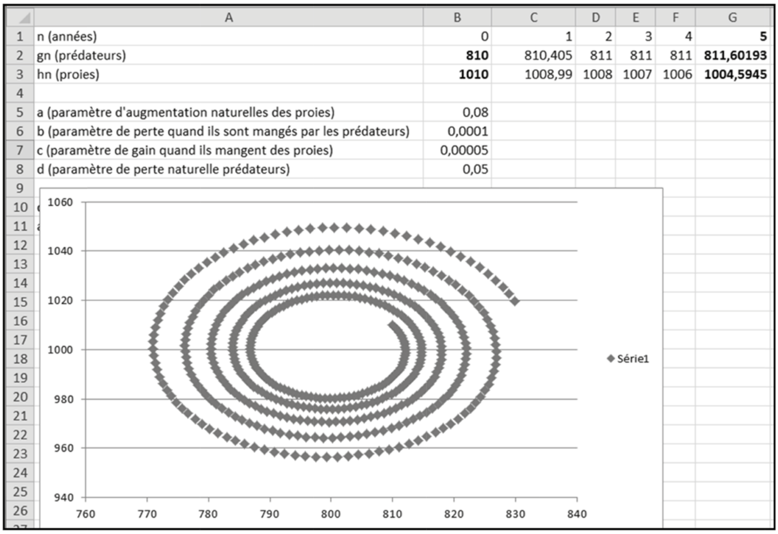
```
V:=[[800],[1000]]
```

$$\begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

```
A^5*U+V
```

$$\begin{pmatrix} 811.5848064 \\ 1004.640784 \end{pmatrix}$$

Avec le tableur, on obtient : $\begin{cases} g_5 \simeq 811{,}60 \\ h_5 \simeq 1004{,}59 \end{cases}$, regardez !



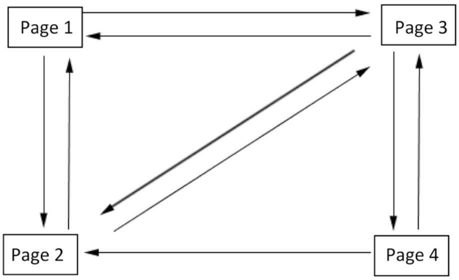
	A	B	C	D	E	F	G
1	n (années)	0	1	2	3	4	5
2	gn (prédateurs)	**810**	810,405	811	811	811	**811,60193**
3	hn (proies)	**1010**	1008,99	1008	1007	1006	**1004,5945**
4							
5	a (paramètre d'augmentation naturelles des proies)	0,08					
6	b (paramètre de perte quand ils sont mangés par les prédateurs)	0,0001					
7	c (paramètre de gain quand ils mangent des proies)	0,00005					
8	d (paramètre de perte naturelle prédateurs)	0,05					

On peut constater que les résultats sont très proches et donc que le procédé de linéarisation au voisinage du point d'équilibre est très précis. Graphiquement on peut voir aussi la spirale se concentrer de manière très proche autour du point d'équilibre (un peu comme s'il était « attiré » par lui !).

6 Problème possible n° 6
Algorithme PageRank

Énoncé

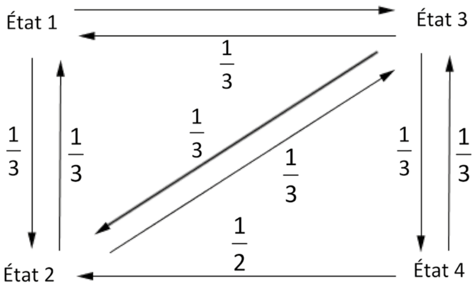
Un réseau intranet a été mis en place par une société. Il est constitué de quatre pages Web, les flèches représentant les liens entre chacune des quatre pages web.



1. Sachant qu'on passe d'une page à l'autre avec la même probabilité (par exemple depuis la page 3 on peut aller vers trois pages (1, 2 et 4), avec la même probabilité $\frac{1}{3}$), déterminer le graphe pondéré associé à cette chaîne de Markov en considérant les quatre états suivants :
   - État 1 : l'internaute se trouve sur la page 1.
   - État 2 : l'internaute se trouve sur la page 2.
   - État 3 : l'internaute se trouve sur la page 3.
   - État 4 : l'internaute se trouve sur la page 4.
2. Déterminer la matrice de transition P associée au graphe pondéré.
3. On considère X_n la variable aléatoire donnant l'état du système à l'étape n et π_n la distribution après n transitions (ou loi de probabilité associée à X_n).
   a. Déterminer la distribution invariante π.
   b. Donner alors le pagerank du réseau, c'est-à-dire : donner les états (les pages) par ordre de probabilité décroissante.

Résolution

1. On obtient :



2. On obtient donc la matrice de transition :

$$P = \begin{array}{cc} \nearrow & \begin{array}{cccc} Etat\ 1 & Etat\ 2 & Etat\ 3 & Etat\ 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} Etat\ 1 \\ Etat\ 2 \\ Etat\ 3 \\ Etat\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. a. On peut appliquer le théorème de convergence, puisque la matrice P possède une puissance, à savoir P^3 dont les coefficients sont strictement positifs, comme on peut le voir avec un logiciel de calcul formel :

```
P^3
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{7}{24} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Ainsi la suite $(\pi_n)_n$ définie par $\pi_n = \pi_0 P^n$ converge vers π, distribution invariante, quelle que soit la loi de probabilité initiale π_0.

On peut prendre $\pi_0 = \begin{pmatrix} Etat\ 1 & Etat\ 2 & Etat\ 3 & Etat\ 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui revient à considérer qu'on entre sur le réseau intranet par la page 1) puis on calcule $\pi_{20} = \pi_0 P^{20}$ (ce qui devrait être largement suffisant) à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

Xcas en ligne. Tapez une instruction dans cette console (assistant avec la bouée).

```
P:=[[0,1/2,1/2,0],[1/2,0,1/2,0],[1/3,1/3,0,1/3],[0,1/2,1/2,0]]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

```
Pi_0:=[1,0,0,0]
```

$$[1, 0, 0, 0]$$

```
Pi_20:=Pi_0*P^20
```

$$\left[\frac{815567}{3145728}, \frac{233015}{786432}, \frac{349525}{1048576}, \frac{174763}{1572864}\right]$$

```
evalf(Pi_20:=Pi_0*P^20)
```

$$[0.259261767069, 0.29629389445, 0.333333015442, 0.111111323039]$$

π, la distribution invariante est donc environ égale à :

$\pi \simeq \begin{pmatrix} Etat\ 1 & Etat\ 2 & Etat\ 3 & Etat\ 4 \\ 0{,}259 & 0{,}296 & 0{,}334 & 0{,}111 \end{pmatrix}$

b. On en déduit le pagerank (c'est-à-dire les pages par probabilités décroissantes) :

- Page 3 (33,4 %)
- Page 2 (29,6 %)
- Page 1 (25,9 %)
- Page 4 (11,1 %).

Table des matières

compétences attendues

NOUVEAUX PROGRAMMES !

TRAVAILLER EN AUTONOMIE AVEC

- **Un cours approfondi et précis**.

  En +
  - le vocabulaire à connaître
  - les automatismes à maîtriser
  - les points à retenir
  - de nombreux exemples
  - les conseils du professeur

- **Des exercices classés par compétences attendues** du programme avec une mise en valeur des grandes compétences du socle commun (ex. chercher, analyser, représenter, etc.). Ces compétences sont rappelées devant chaque énoncé pour permettre au lecteur de réviser compétence par compétence.

- **Les corrigés détaillés de tous les exercices** avec les conseils d'un professeur de l'Éducation nationale.

www.editions-ellipses.fr
9 782340 045699