REPUBLIQUE DU SENEGAL

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

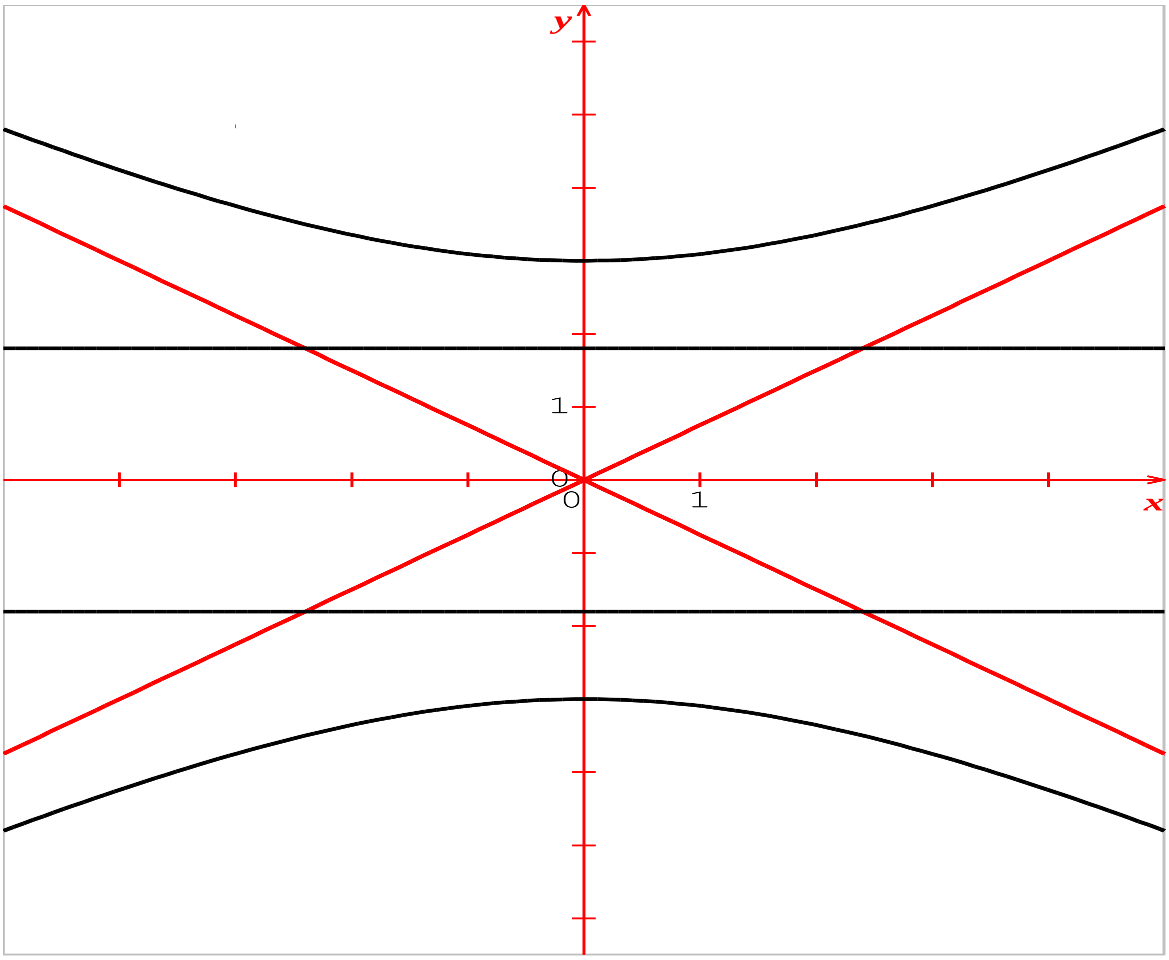
INSPECTION D'ACADEMIE DE SEDHIOU

CENTRE REGIONAL DE FORMATION DES PERSONNELS DE L'EDUCATION

$$j = \left(q + a + \left[\frac{a}{4} \right] - \left[\frac{a}{100} \right] + \left[\frac{a}{400} \right] + \left[\frac{31m}{12} \right] \right) \bmod 7$$

COURS : ARITHMETIQUE – CONIQUES + SERIES D'EXERCICES EN TS_1

$$\overrightarrow{f(M)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$$



Samba Aly Ndiaye formateur au CRFPE Sedhiou

Janvier 2014

SOMMAIRES

ARITHMETIQUE

CONIQUES

PARABOLE

ARITHMETIQUE

I) Diviseurs et multiples d'un entier relatif :

1) Définition -Exemples :

Définition : *Soit a et b deux entiers relatifs, b non nul. On dit que b est un diviseur de a ou que a est un multiple de b s'il existe un entier relatif k tel que :* $a = kb$.

Notation : b est un diviseur de a ou b divise a se note $b \mid a$

Exemples : $-3 \mid 6$ *car* $6 = -2\times(-3)$; $2 \mid -6$ *car* $-6 = -3\times2$

Remarques :

- *0 est multiple de tout entier relatif :* $\forall n \in \mathbb{Z},\ 0 = 0\times n$.
- *-1 et 1 sont des diviseurs de tout entier relatif :* $\forall n \in \mathbb{Z}\ n = n\times1 = (-n)\times(-1)$.
- *L'ensemble des multiples de a,* $a \in \mathbb{Z}^*$, *est noté* $\boldsymbol{a\mathbb{Z}}$:
  $a\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots, -3a, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots..\}$

$\forall a \in \mathbb{Z}^*\ a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$. *L'ensemble* $a\mathbb{Z}$ *contient une infinité d'éléments.*

Soit $a \in \mathbb{Z}^*$, *l'ensemble des diviseurs de a, est noté D (a). D (a) est un ensemble fini non vide.* $D(6) = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$.

2) Propriétés :

Activité 1 *: Soit a un entier relatif non nul. Montrer que a divise a et -a.*

Activité 2 *: Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls tels que* $a \mid b$ *et* $b \mid c$. *Montrer que* $a \mid c$.

Activité 3 *: Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls tels que* $c \mid a$ *et* $c \mid b$. *Montrer que pour tous entiers relatifs* α *et* β ; $c \mid \alpha a + \beta b$.

Activité 4 *: Soit a et b deux entiers relatifs non nuls tels que* $a \mid b$ *et* $b \mid a$.

Montrer que $a = b$ *ou* $a = -b$.

Propriété1 : $\boldsymbol{\forall a \in \mathbb{Z}^*\ a \mid a}$ ***et*** $\boldsymbol{a \mid -a}$.

Exemples **:** $1 \mid 1$; $-3 \mid 3$; $4 \mid -4$; $-5 \mid -5$

Propriété 2 : $\boldsymbol{\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^{*3}\ (a \mid b \text{ et } b \mid c) \Rightarrow a \mid c}$ ***(transitivité de la divisibilité)***

Exemple : $2 \mid 4$ *et* $4 \mid -12$ *d'où* $2 \mid -12$

Propriété 3 : $\boldsymbol{\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^{*3}\ (c \mid a \text{ et } c \mid b) \Rightarrow \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2\ c \mid \alpha a + \beta b}$.

Exemple : $3 \mid 6$ *et* $3 \mid 9$ *d'où* $3 \mid 6\times2 + 9\times(-7)$.

Remarque *: Si* $c \mid \alpha a + \beta b$ *alors c ne divise pas forcément a et b. En effet* $2 \mid 2\times3+4\times5$ *et 2 ne divise ni 3 ni 5.*

Propriété 4 : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^{*2}$ $(a \mid b \text{ et } b \mid a) \Rightarrow (a=b \text{ ou } a = -b)$.

Exercice d'application *: a, b et n sont des entiers relatifs tels* $a = 2n + 3$, $b = 3n - 4$.

a) Montrer que tout diviseur commun de a et b divise 17.

b) En déduire les diviseurs communs de a et b.

II) Division euclidienne :

1) Activité :

a)Ecrire la division euclidienne de 12 par 5.

b) Dans chacun des cas ci-dessous, trouver deux entiers relatifs q et r tels que $0 \le r < 5$;

α) $12 = -5q + r$; β) $-12 = 5q + r$; γ) $-12 = -5q + r$.

2) Théorème -Définition :

Théorème-définition : $\forall a \in \mathbb{Z},\ \forall b \in \mathbb{Z}^{*}\ \exists! (q,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} /\ a = bq + r \text{ et } 0 \le r < |b|$.

Ce système représente la <u>*division euclidienne de a par b dans* $\mathbb{Z}$</u>.

Démonstration :

a) Soit $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{N}^*$. *On a :* $a \in b\mathbb{Z}$ *ou* $a \notin b\mathbb{Z}$.

$a \in b\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a = kb$.

$a \notin b\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / kb < a < (k+1)b$

En résumé de ces deux cas : $\exists k \in \mathbb{Z} / kb \le a < (k+1)b$

$kb \le a < (k+1)b \Leftrightarrow k \le \frac{a}{b} < k + 1 \Leftrightarrow k = E(\frac{a}{b})$. *Donc k existe et est unique.*

$kb \le a < (k+1)b \Leftrightarrow 0 \le a - bk < b$. *Posons* $r = a - bk$.

Alors il existe un unique couple $(k,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ *tel que* $a = bk + r$ *avec* $0 \le r < b$.

b) Soit $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b \in \mathbb{Z}^{*-}$ *alors* $-b > 0$. *Posons* $b' = -b$ *alors* $b' \in \mathbb{N}^*$ *et* $|b| = -b = b'$.

$a \in \mathbb{Z}$ *et* $b' \in \mathbb{N}^*$ *alors d'après le résultat précédent, vu en a),* $\exists! (k,r) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} /$

$a = kb' + r$ *avec* $0 \le r < b'$

$a = (-k)(-b') + r$ *avec* $0 \leq r < |b|$

$a = k'b + r$ *avec* $0 \leq r < |b|$ *; avec* $k' = -k$

Donc $\exists!(k',r) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \,/\, a = k'b + r$ *avec* $0 \leq r < |b|$

Exemples *: La division euclidienne de 15 par* -4 *est :* $15 = -4(-3) + 3$.

La division euclidienne de 15 par -6 *est :* $15 = -2(-6) + 3$.

La division euclidienne de -15 *par* -6 *est :* $-15 = -6 \times 3 + 3$.

La division euclidienne de -15 *par 8 ou par* -2 *est :* $-15 = -2 \times 8 + 1$.

Contre-exemples *:* $15 = -6(-3) - 3$ *;* $15 = -2(-4) + 7$

Remarque *: Dans la division euclidienne de a par b le quotient est* $E\left(\frac{a}{b}\right)$.

III) Nombres premiers :

1) Activité :

Parmi les nombres suivants, lesquels sont des nombres premiers ?

1 ; 2 ; 73 ; 84 ; 91.

2) Définition -Exemples :

Définition : *Soit p un entier relatif distinct de 1 et* -1*. On dit que p est un nombre premier s'il a seulement quatre diviseurs : 1 ;* -1 *; p et* $-p$.

Exemples : -17 *; 13.*

Remarque *: 0 ; 1 ;* -1 *ne sont pas des nombres premiers.*

NB : Dans la suite, on se limitera aux entiers naturels.

3) Propriétés :

Propriété 1 : Tout entier naturel distinct de 1 admet au moins un diviseur premier.

Démonstration :

Tout nombre premier est divisible par lui-même donc il admet un diviseur premier.

Tout entier naturel non nul divise 0, en particulier les nombres premiers.

Soit a un entier naturel non premier, distinct de 0 et 1. Soit p le plus petit diviseur de a différent de 1. Supposons que p est non premier. Alors p admet un diviseur d, d < p et p = kd, k ∈IN.*

$p \mid a \Rightarrow \exists n \in IN\ /\ a = np$ d'où $a = nkd = (nk)d$;

On en déduit que d | a et d < p, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : « p plus petit diviseur de a ». Donc p est premier.

Conséquence *: Tout nombre non premier différent de 1 est multiple d'un nombre premier.*

Propriété 2 : Tout entier naturel n, non premier différent de 0 et de 1, admet au moins un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$ **.**

Démonstration *: Soit p le plus petit diviseur premier de n.*

$p \mid n \Rightarrow \exists q \in IN\ /\ n = pq$; $p \leq q$ *car q est diviseur de n et p est le plus petit diviseur de n, premier.*

$p \leq q \Rightarrow p^2 \leq pq \Leftrightarrow p^2 \leq n$

Donc $p \leq \sqrt{n}$.

Application : Reconnaissance d'un nombre premier :

Montrons que 131 est un nombre premier.

$11 < \sqrt{113} < 12$.

Il suffit d'effectuer les divisions successives de 113 par 1es nombres premiers inférieurs ou égaux à 11.

2, 3 et 5 ne divisent pas 113.

$131 = 7 \times 18 + 5$; $113 = 11 \times 11 + 10$

113 n'a pas de diviseurs premiers p tels que $p \leq \sqrt{113}$ *. Donc 113 est un nombre premier.*

3) Décomposition en produit de facteurs premiers :

Théorème (admis) : Tout entier naturel n, non premier, distinct de 0 et 1, se décompose de façon unique sous la forme : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_k^{\alpha_k}$ *où* p_i *est un nombre premier,* $\alpha_i \in IN^*$ *et* $p_i < p_j$ *pour* $i < j$

On note $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$

Exercice d'application : *Décomposer 432 en produit de facteurs premiers.*

4) Nombre de diviseurs d'un nombre *:*

<u>Propriété :</u>

Un entier naturel n dont la décomposition en facteurs premiers est $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_k^{\alpha_k}$ *admet* $(\alpha_1+1)\ (\alpha_2+1)\times\ldots\times(\alpha_k+1)$ *diviseurs positifs.*

Démonstration :

$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_k^{\alpha_k}$; $p_i^{\alpha_i}$

$p_i^{\alpha_i}$ *admet* (α_i+1) *diviseurs de la forme* p_i^{β} *avec* $0 \le \beta \le \alpha_i$; $\beta \in IN$.

D'après le principe multiplicatif (des choix successifs) $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots\ldots \times p_k^{\alpha_k}$ *admet*

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\times\ldots\times(\alpha_k+1)$ *diviseurs.*

Exemple *: Nombre de diviseurs dans* $\mathbb{Z}$ *de 54 :*

$54 = 2\times3^3$; $(1+1)\times(3+1) = 8$. *Donc 54 admet 8 diviseurs positifs. On en déduit 54 admet 16 diviseurs dans* $\mathbb{Z}$.

IV) PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) :

1) Activité :

a)Déterminer l'ensemble des diviseurs de 18, de 24.

b) On note D (18 ; 24) l'ensemble des diviseurs communs à 18 et 24.déterminer D (18 ; 24) puis PGCD (18 ; 24).

2) Définition :-Exemple :

Définition : *Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle plus grand commun diviseur de a et b, le plus grand élément de l'ensemble D (a; b), ensemble des diviseurs communs de a et b. on le note* ***PGCD (a ; b)****.*

Exemple *: PGCD (72 ; 48)*

D(72; 48) = { 1, -1, 2, -2, 3 ,-3, 4, -4, 6, -6,6,8, -8, -8,12, -12, 24, -24}

PGCD(72 ; 48) = 24

Conséquences :

- *PDCD(a,b) = PGCD ($|a|$, $|b|$).*
- *PGCD(a,b) $\leq |a|$; PGCD(a,b) $\leq |b|$*
- *Dans la suite on ne considère que des entiers naturels.*

  Propriété : Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Si b|a alors PGCD (a,b) = b.

  Preuve : b|b et b|a d'où b est un diviseur commun à a et b et PGCD (a,b) $\leq$ b. On en déduit que PGCD (a,b) = b

  3) Recherche du PGCD :

  ***Propriété 1**:*

  Soit $a=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ *et* $b=\prod_{j=1}^{m} q_j^{\beta_j}$ *les décompositions en produit de facteurs premiers de a et b.*

  Si les x_i avec $1 \leq i \leq \min(k, m)$ sont les n facteurs premiers communs à a et b alors

  PGCD (a , b) = $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$

  ***Remarque** : Le PGCD de plusieurs nombres est égal au produit de leurs facteurs premiers communs affectés de leur plus petit exposant respectif.*

  ***Exemple** :* $a = 2^3\times3^2\times5^2\times11$; $b = 2\times3^3\times5$; $c = 2^3\times3^4\times5^4\times7$: PGCD (a, b, c) $= 2\times3^2\times5$

  ***Propriété 2 :** Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que b < a. Si r est le reste non nul de la division euclidienne de a par b alors PGCD (a, b) = PGCD (b, r).*

  Démonstration :

  $a = bq + r$; $0 < r < b$

  Tout diviseur commun à a et b divise r = a–bq, car r est combinaison linéaires de a et b.

  On en déduit tout diviseur commun à a et b est un diviseur commun à b et r

  Réciproquement tout diviseur commun à b et r divise a , car a est combinaison linaire de b et r

  Donc tout diviseur commun à b et r est un diviseur commun à a et b.

  Il en résulte que D(a,b) = D(b,r) Donc PGCD(a,b) = PGCD(b,r).

  ***Exemple** : PGCD (225 ; 75)*

  225 = 75×3 + 15 ; PGCD (225 ;75) = PGCD(75 ;15) = 15 car 15 | 75.

Conséquence : Algorithme d'Euclide ou méthode des divisions successives :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b < a$.

- *Si $b \mid a$ alors PGCD $(a,b) = b$*
  Supposons que b ne divise pas a. Soit r le reste de la division de a par b , on a

  PGCD $(a,b) =$ PGCD (b,r).

- *Si $r \mid b$ alors PGCD $(b,r) = r$*
  Supposons que r ne divise pas b. Soit r_1 le reste de la division de b par r, on a

  PGCD$(b,r) =$ PGCD (r, r_1).

- *Par itération on a :*
  PGCD$(a,b) =$ PGCD$(b,r) =$ PGCD$(r,r_1) = \ldots =$ PGCD(r_{n-1},r_n) où r_n est le reste de la division de r_{n-2} par r_{n-1} ; $r_{n-2} = r_{n-1}\, q_n + r_n$; avec $0 \leq r_n < r_{n-1} < \ldots\ldots < r_1 < r < b$

  Si $r_n \mid r_{n-1}$ alors PGCD$(a,b) = r_n$. Dans ce cas $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$

  Donc PGCD(a,b) est le dernier reste non nul dans les divisions successives.

  Disposition pratique :

Quotient		Q	q_1	……………		q_n	q_{n+1}
Dividende/diviseur	a	B	r	……………	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
Reste	r	r_1		……………	r_n	0	

PGCD $(a,b) = r_n$

Exemple : PDCG (258,96)

	2	1	2	5
258	96	66	30	6
66	30	6	0	

PGCD (258 ; 96) = 6

Principe : *On divise 258 par 96, le reste est 66 ; puis 96 par 66,il reste 30 ; puis 66 par 30 il reste 6 ; puis 30 par 6, il reste 0.*

Remarque : *L'algorithme d'Euclide permet de trouver des entiers relatifs u et v tels que*

PGCD $(a,b) = au + bv$.

Supposons que PGCD (a,b) $= r_2$ *On a :* $a = bq + r$ *; r est combinaison linéaire de a et b.*

$b = rq_1 + r_1$ *;* $r_1 = b - rq_1$ *peut être écrit comme combinaison linéaire de a et b.*

$r = r_1q_2 + r_2$ *d'où* $r_2 = r - r_1q_2$ *peut être écrit comme combinaison linéaire de a et b puisque r et* r_2 *sont combinaisons linéaires de a et b ; donc il existe u et v entiers relatif tels que*

$r_2 = au + bv$.

Exemple *: Cherchons u et v entiers relatifs tels que :* $945u + 165v = \text{PGCD}(945 ; 165)$

Première méthode :

a	b	Q	r	Forme $r = a - bq$
945	165	5	120	$120 = a - 5b$
165	120	1	45	$45 = b - (a - 5b) = -a + 6b$
120	45	2	30	$30 = a - 5b - 2\times(-a + 6b) = 3a - 17b$
45	30	1	15	$15 = -a + 6b - (3a - 17b) = -4a + 23b$
30	15	0		

Donc $\text{PGCD}(945 ; 165) = 15 = -4\times945 + 23\times165$ *;* $u = -4$ *et* $v = 23$.

Deuxième méthode :

	5	1	2	1	2
945	165	120	45	30	15
120	45	30	15	0	

$945 - 5\times165 - 120 = 0$ $\times(-4)$ pour éliminer 120

$165\times1 - 120 - 45 = 0$ $\times3$ pour éliminer 45

$120 - 2\times45 - 30 = 0$ $\times(-1)$ pour éliminer 30

En additionnant membre à membre on obtient :

$-4\times945 + 20\times165 + 3\times165 = 15$

$-4\times945+(20+3)\times165=15$

$-4\times945+23\times165=15.$

Principe *:*

On écrit les divisions euclidiennes successives en mettant 0 comme second membre sauf pour la dernière où l'on laisse le PGCD. On multiplie tous les termes de chaque égalité, en commençant par l'avant-dernière, par des entiers de telle sorte qu'en ajoutant membre à membre les restes soient éliminés.

Remarque : autre méthode en remplaçant les restes r par $a-bq$ en remontant à partir du PGCD.

$15=45-30=45-(120-2\times45)=-120+3\times45=-120+3\times(165-120)$

$15=-4\times120+3\times165=-4\times(945-5\times165)+3\times165)=-4\times945+20\times165+3\times165$

$15=-4\times945+23\times165.$

4) Propriétés :

Propriété 1 (admise)** : **Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément.

Propriété 2** : **Soit a et b deux entiers relatifs si PGCD (a,b) = δ alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua+vb=\delta$.

Démonstration :

Soit a et b deux entiers relatifs tels que PGCD (a, b) $=\delta$

Soit E l'ensemble des entiers naturels de la forme $ax+by$; $x\in\mathbb{Z}$ et $y\in\mathbb{Z}$.

Si $a>0$ on a $a=a\times1+b\times0$ alors $a\in E$

Si $a<0$ alors $-a=a(-1)+b\times0$ alors $-a\in E$.

On en déduit que $|a|\in E$. Donc $E\neq\varnothing$.

E est une partie non vide de IN, donc E admet un plus petit élément d.

Il existe donc u et v entiers relatifs tels que $d=au+bv$

Tout diviseur commun à a et b divise $au+bv=d$. Donc δ divise d et $\delta\leq d$.

Montrons que $\delta=d$.
Effectuons les divisions euclidiennes de a et b par d.

$a=dq+r$ et $b=ds+t$ avec $0\leq r<d$ et $0\leq t<d$.

On a $r = a - dq = a - (au + bv)q = a(1-u) - bvq$

On a $r = 0$ *ou* $r > 0$

Si $r > 0$ *alors* $r = ax + by$ *avec a* $x = 1 - u$ *et* $y = -vq$.

D'où $r \in E$ *et* $r < d$*. ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : « d est le plus petit élément de E ».*

Donc $r = 0$ *et* $a = dq$.

En raisonnant de même $t = 0$ *et* $b = ds$.

d est alors un diviseurs commun à a et b. d'où $d \leq \delta$.

$\delta \leq d$ *et* $d \leq \delta$ *d'où* $\delta = d$ *donc* $ua + bv = \delta$

Propriété 3 : Soit a et b deux entiers relatifs. Tout diviseur commun à a et b divise le PGCD(a, b).

Démonstration :

Soit $\delta = PDCD\ (a,b)$*. Alors il existe u et v entiers relatifs tels que* $au + bv = \delta$.

Soit d un diviseur commun à a et b, d divise alors $au + bv$ *donc* δ.

***Conséquence** : si PGCD (a,b)* $= \delta$ *alors* $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$.

Propriété 4 : Pour tous entiers relatifs a, b, k non nuls, PGCD (ka, kb) =|k| PGCD (a, b).

Démonstration :

On sait que $PGCD(ka, kb) = PGCD(\ |ka|,\ |kb|\ ) = PGCD\ (|k|\ |a|,\ |k|\ |b|\ )$*. On peut se limiter alors au cas où a, b et k sont des entiers naturels non nuls.*

Posons $\delta = PGCD(a, b)$ *et* $\delta' = PGCD(ka, kb)$

$\delta | a$ *et* $\delta | b$ *donc* $k\delta | ka$ *et* $k\delta | kb$*. Par conséquent* $k\delta$ *est un diviseur commun à ka et kb.*

D'où $k\delta | \delta'$.

Il existe donc $q \in IN^*$ *tel que* $\delta' = qk\delta$

$\delta' | ka$ *et* $\delta' | kb$ *d'où* $qk\delta |\ ka$ *et* $qk\delta | kb$*. Il en résulte que* $q\delta | a$ *et* $q\delta | b$

$q\delta$ *est un diviseur commun à a et b alors* $q\delta | \delta$*. D'où* $q = 1$ *car* $\delta | q\delta$.

Donc $\delta' = k\delta$ *ce qui équivaut à* $PGCD(ka, kb) = kPGCD(a, b)$

5) Nombres premiers entre eux :

4-1) Définition -Exemples :

Définition *: Deux entiers relatifs sont premiers entre eux, lorsque leur PGCD est égal à 1.*

Exemples : *-13 et 15 ; 17 et 29 ; -14 et -25.*

Remarques :

- *-1 et 1 sont les seuls diviseurs communs de deux nombres premiers entre eux.*
- *Deux nombres premiers sont premiers entre eux.*

4-2) Propriétés *:*

Propriété 1: Si PGCD (a, b) = δ alors $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux.

Démonstration :

Si PGCD (a, b) = δ alors $\frac{1}{\delta}PGCD(a,b)=1$

$$\text{On a}\quad \frac{1}{\delta}PGCD(a,b)=PGCD\left(\frac{1}{\delta}\times a,\frac{1}{\delta}\times b\right)=PGCD\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)$$

D'où $PGCD\left(\frac{a}{\delta},\frac{b}{\delta}\right)=1$. Donc $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux.

Propriété 2: Si PGCD(a,b) = δ alors il existe a', b' entiers relatifs premiers entre eux tels que $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$.

Démonstration :

Si PGCD(a,b) = δ alors $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux.

Posons $a'=\frac{a}{\delta}$ et $b'=\frac{b}{\delta}$. On en déduit que $a=\delta a'$ et $b=\delta b'$, a' et b' étant premiers entre eux.

Théorème de Bezout :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ua+vb=1$.

Démonstration :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Il existe u et v entiers relatifs tels que

$ua+vb=PGCD(a,b)$. Il en résulte que si a et b sont premiers entre eux il existe u et v entiers relatifs tels que $ua+vb=1$.

Réciproquement supposons qu'il existe u et v entiers relatifs tels que $ua+vb=1$.

Tout diviseur commun à a et b divise ua + vb combinaison linéaire de a et b; donc divise 1. Les diviseurs de 1 sont –1 et 1.

D'où PGCD (a,b) = 1. Donc a et b sont premiers entre eux.

Exemple : ***$n \in IN$, $n \geq 2$, soit $a = 2n - 1$ et $b = n - 1$***

On a : $1 \times a - 2 \times b = 1$, donc a et b sont premiers entre eux.

Théorème de Gauss :

Soit a, b, c des entiers relatifs. Si a | bc et si a et b sont premiers entre eux alors a | c.

Démonstration :

PGCD (a, b) = 1 alors il existe u et v entiers relatifs tels que $ua + vb = 1$ d'où $cau + cvb = c$.

$a \mid bc \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / bc = ka$; d'où $c = acu + kav = a(cu + kv)$; donc $a \mid c$.

Exercice d'application : ***Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que 3 | 2x.***

V) PPCM (Plus Petit Commun Multiple) :

1) Activité :

a)Déterminer l'ensemble M, des multiples communs à 15 et 20 et de valeur absolue inférieure à 300.

b) En déduire le plus petit multiple strictement positif commun à 15 et 20.

2) Définition -Conséquences :

Définition : ***On appelle plus petit commun multiple de deux entiers relatifs, a et b non nuls, le plus petit multiple strictement positif commun à a et b. On le note PPCM (a, b).***

Conséquences :

- ***PPCM ($|a|$, $|b|$) = PPCM(a, b).***
- ***PPCM (a, b) $\geq$ max (a, b).***
- ***Pour tout m multiple commun de, a et b ; PPCM (a, b)$\leq |m|$.***

3) Calcul du PPCM :

Propriété 1 (admise) : Soit a=$\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ et b= $\prod_{j=1}^{m} q_j^{\beta_j}$ les décompositions en produit de facteurs premiers de a et b.

Si x_i avec $1 \leq i \leq k+m$ sont les n facteurs premiers communs ou non à a et b alors

PGCD (a,b) = $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$

Exemple : ***$a = 2^2 \times 3^4 \times 5$; $b = 2^3 \times 3^2 \times 7^2$; PPCM(a, b) $= 2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7^2$***

Propriété 2 : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Si PPCM (a, b) = μ alors tout multiple commun à a et b, est un multiple de μ. ***(Tout multiple commun de deux entiers, est multiple de leur PPCM).***

Démonstration :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Si PPCM (a,b) =μ alors tout multiple de μ est multiple commun à a et b.

Soit m un entier relatif non nul multiple commun de a et b. Montrons que $\mu | m$

On a : $\mu \leq |m|$

Considérons la division euclidienne de $|m|$ par μ : $|m| = \mu q + r$; avec $0 \leq r < \mu$.

$|m|$ et μq sont des multiples communs de a et b, alors $r = |m| - \mu q$ est multiple commun de a et b.

Si $r > 0$ alors r serait un multiple commun de a et b, plus petit que μ. Ce qui est impossible car $\mu =$ PPCM (a, b).

Donc $r = 0$ et $|m| = \mu q$, $|m|$ est alors multiple de μ. D'où m est multiple de μ

Corollaire : Si PPCM (a, b) = μ alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$

Propriété 3 :

Si a, b et k sont des entiers relatifs, non nuls alors PPCM (ka, kb) = $|k|$ PPCM (a, b).

Démonstration :

Comme PPCM (ka, kb) = PPCM ($|ka|$, $|kb|$) = PPCM ($|k||a|$, $|k||b|$), on peut se limiter au cas où a, b et k sont des entiers naturels non nuls.

Posons $\mu =$ PPCM(a, b). Alors $k\mu$ est un multiple commun à ka et kb.

Montrons que $k\mu =$ PPCM(ka, kb).

Soit m un multiple commun de ka et kb. Alors il existe p et h entier naturel tels que :

$m = pka = hkb$

Comme $k \neq 0$ on en déduit que $pa = hb$ d'où pa est multiple commun de a et b.

Donc pa est multiple de μ car multiple commun de a et b.

Par suite $m = kpa$ est multiple de $k\mu$.

Par conséquent tout multiple commun de ka et kb est un multiple de $k\mu$.

D'où PPCM(ka, kb) = $k\mu$; donc PPCM(ka, kb) = kPPCM(a, b).

Propriété 4 : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls.

Si a et b sont premiers entre eux alors PPCM (a,b) = $|a| \times |b|$.

Démonstration :

Puisque PPCM(a, b) = PPCM(|a|, |b|) on peut alors se limiter au cas où a et b sont des entiers naturels non nuls.

ab est un multiple commun de a et b.

Montrons que tout multiple commun de a et b est multiple de ab.

Soit m un multiple commun à a et b. Alors il existe k ∈ $\mathbb{Z}$ tel que tel que m = kb ; or a divise

m = kb et a et b sont premier entre eux alors d'après le théorème de Gauss a divise k.

d'où il existe h ∈ $\mathbb{Z}$ tel que m = hab. Donc m est multiple de ab.

Il en résulte que PPCM(a, b) = ab.

Corollaire : Pour tous entiers relatifs a et b non nuls PGCD (a, b)× PPCM (a, b)= ab.

Démonstration :

Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. Posons δ = PGCD (a, b).

on a $PPCM(\frac{a}{\delta}, \frac{b}{\delta}) = \frac{a}{\delta} \times \frac{b}{\delta}$ ***car*** $\frac{a}{\delta}$ ***et*** $\frac{b}{\delta}$ ***sont premiers entre eux ;***

d'où $\frac{1}{\delta}PPCM(a, b) = \frac{ab}{\delta^2}$ ***;*** $\delta \times PPCM(a, b) = ab$***. Donc PGCD(a,b)×PPCM(a,b) = ab***

Exemple : ***PGCD (432 ; 810) et PPCM (432 ;810)***

PGCD (432 ;810) = 54 ; PGCD(432 ;810)×PPCM(432 ;810) = 432×810

D'où PPCM (432 ; 810) = $\frac{432 \times 810}{54}$ ***= 6480***

VI) Congruence :

1) Activité :

a) Déterminer les divisions euclidiennes de 88 par 7 et de 179 par 7.

b) En déduire que 179 − 88 est un multiple de 7.

2) Définition- Conséquences

Définition : *Soit a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul.*

On dit que a est congru à b modulo n si a – b est un multiple de n.

On note a ≡ b [n] ou a ≡ b (mod. n) se lit « a congru à b modulo n ».

Donc $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / a = b + kn$

$a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow a - b \in n\mathbb{Z}$

Conséquences :

- *Tout entier relatif est congru à son reste modulo n quand on le divise par n.*

  Si $a = nq + r \quad 0 \leq r < n$ *alors* $a - r \in n\,\mathbb{Z}$

  - $n \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0\ [n]$

Exemple : $15 \equiv 3\ [6]$; $-12 \equiv 3\ [5]$

Remarque : $a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b\ [-n]$.

3) Activités - Propriétés:

Activité 1 :

Soit a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul tels que $a \equiv b\ [n]$

a) *Montrer que les divisions de a et b par n donnent le même reste.*

b) *Soit* $a = np + r$ *et* $b = nq + r$ *avec* $0 \leq r < n$. *Montrer que* $a \equiv b\ [n]$.

Propriété 1 : Deux entiers sont congrus entre eux modulo n si et seulement si, ils donnent le même reste lorsqu'on les divisent par n.

Exercice d'application :

Parmi les entiers suivants 12, 13, 127,144 et 238, déterminer ceux qui sont congrus entre eux : a) modulo 2 ; b) modulo 3.

Activité 2 : *Soit* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, $n \in IN^*$

1) Montrer que $a \equiv a\ [n]$.

2) Montrer que si $a \equiv b\ [n]$ *alors* $b \equiv a\ [n]$

3) Montrer que si $a \equiv b\ [n]$ *et* $b \equiv c\ [n]$ *alors* $a \equiv c\ [n]$.

Propriété 2 : Pour tous entiers relatifs a, b, c et pour tout $n \in IN^*$

$\boldsymbol{a \equiv a\ [n]}$ *(Réflexivité)*

$\boldsymbol{a \equiv b\ [n] \Rightarrow b \equiv a\ [n]}$ *(Symétrique)*

$\boldsymbol{(a \equiv b\ [n] \text{ et } b \equiv c\ [n]) \Rightarrow a \equiv c\ [n]}$ *(Transitivité)*

Activité 3 :

Soit a, b, a', b' des entiers relatifs et $n \in IN^*$ *tels que* $a \equiv b\ [n]$ *et* $a' \equiv b'\ [n]$.

1) Montrer que $a + a' \equiv b + b'\ [n]$ *et* $aa' \equiv bb'\ [n]$.

2) Montrer que $\forall p \in IN^*$ $pa \equiv pb$ [n] et $a^p \equiv b^p$ [n].

2) *Soit $(a_k)_{k \in IN^*}$ et $(b_k)_{k \in IN^*}$ deux nombres entiers relatifs tels que :*
$a_i \equiv b_i$ [n] pour tout $i \in \{0, 1, \cdots, k\}$.

Montrer que $a_0 + a_1 + \cdots + a_k \equiv b_0 + b_1 + \cdots + b_k$ [n] *et*

$a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_k \equiv b_0 \times b_1 \times \cdots \times b_k$ [n]

***Propriété 3 :* Quels que soient les entiers relatifs a, b, a', b', et l'entier naturel n non nul.**

- ***Si** $a \equiv b$ [n] **et** $a' \equiv b'$ [n] **alors** $a + a' \equiv b + b'$ [n] **et** $aa' \equiv bb'$[n]*
- ***Si** $a \equiv b$ [n] **alors** $\forall p \in IN^*$ $pa \equiv pb$ [n] **et** $a^p \equiv b^p$ [n]*
- ***Si** $a_i \equiv b_i$ [n], $0 \le i \le k$, $k \in IN^*$ **alors** $\sum_{i=0}^{k} a_i \equiv \sum_{i=0}^{k} b_i$ [n] **et** $\prod_{i=0}^{k} a_i \equiv \prod_{i=0}^{k} b_i$ [n]*

Exemple : *$3 \equiv 1$ [2] ; $3^3 \equiv 1^3$ [2] ; $3^3 \equiv 1$ [2]*

Exercice d'application:

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 251 par 4.

b) En déduire le reste de la division euclidienne de 251^8 par 4.

Le petit théorème de Fermat :

Théorème

Si p est un nombre premier alors $\forall a \in \mathbb{N}$ $a^p \equiv a$ [p].

Exemple : 3 est un nombre premier, on en déduit d'après le petit théorème de Fermat que

$4^3 \equiv 4$ [3].

Corollaire

Si p est un nombre premier alors pour tout entier a non divisible par p, $a^{p-1} \equiv 1$ [p].

Exemple : 3 est un nombre premier et 4 ne divise pas 3, on en déduit d'après le corollaire du petit théorème de Fermat que $4^{3-1} \equiv 1$ [3], donc $4^2 \equiv 1$ [3]

Exercice d'application :

Quel est le reste de la division euclidienne : 1) de 5^{23} par 23. 2) de 6^{22} par 23

VII) Système de numération :

1) ***Activité :***

a) Calculer les nombres :

$M = 3 \times 10^2 + 9 \times 10 + 7$

$N = 2^8 + 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 2^3 + 2^2 + 0 \times 2 + 1$

$L = 3 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 4 \times 5 + 2$

b) Comparer M, N et L.

Conclusion :

397 a été décomposé de trois façons différentes :

- *M donne l'écriture décimale ou l'écriture en base dix de 397 ; les coefficients sont 3, 9 et 7. Ils sont tous strictement inférieurs à dix.*
- *N donne l'écriture de 397 en base deux ; les coefficients sont 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1 et 1. Ils sont tous strictement inférieurs à deux.*
- *L donne l'écriture de 397 en base cinq ; les coefficients sont 3, 0, 4 et 2. Ils sont tous strictement inférieurs à cinq.*

2) Numération de base a :

Théorème - Définition *:*

On démontre et nous l'admettons :

Théorème : Soit a un entier naturel désignant deux ou cinq ou dix ou seize. Tout entier naturel x non nul s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \cdots + x_1 a + x_0 \quad ; x_n \neq 0,\ x_i \in \mathbb{N},\ 0 \leq x_i < a.$$

On dit que x est écrit dans le ***système de base a.***

On note : $x = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}^{(a)}$ x_i *sont les chiffres,* $0 \leq x_i < a$.

Donc en base a, il y a a chiffres : 0,1, ····, a–1.

En système de base 10 appelé système décimal, les chiffres sont : 0; 1; 2; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

En système de base 2 appelé système binaire, les chiffres sont : 0 ; 1

En système de base 5, les chiffres sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.

En système de base 16, les chiffres sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; A ; B ; C ; D ; E ; F

où A, B, C, D, E, F désignent respectivement dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze.

Exemple :

En base 10 : $128 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 8$

$\overline{1001}^{(deux)} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 9$

$\overline{431}^{(cinq)} = 4 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1 = 116$

$\overline{9AC}^{(seize)} = 9 \times 16^2 + 10 \times 16 + 12 = 2476$

Remarques :

- *Dans l'écriture de x en base dix, on ne fait pas apparaître la barre et la base.*
- *S'il y a n chiffres dans l'écriture décimale alors la plus grande puissance est* $n - 1$.
- *Si* $x = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_1 x_0}^{(a)}$ *alors* $a^n \leq x \leq a^{n+1}$

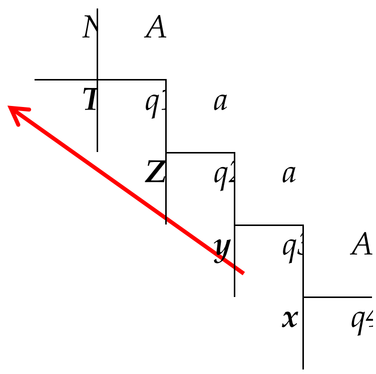
3) Passage du système décimal à un autre système de numération :

Activité : *a désignant deux ou cinq ou seize, soit N un entier naturel tel que* $N = \overline{xyzt}^{(a)}$

a) *Montrer que t est le reste de la division euclidienne de N par a.*
b) *Soit* q_1 *le quotient de la division de N par a. Montrer que z est le reste de la division de* q_1 *par a.*

c) Soit q_2 *le quotient de la division de* q_1 *par a. Montrer que y est le reste de la division de* q_2 *par a.*

d) Soit q_3 *le quotient de la division de* q_2 *par a. Montrer que x est le reste d la division de* q_3 *par a.*



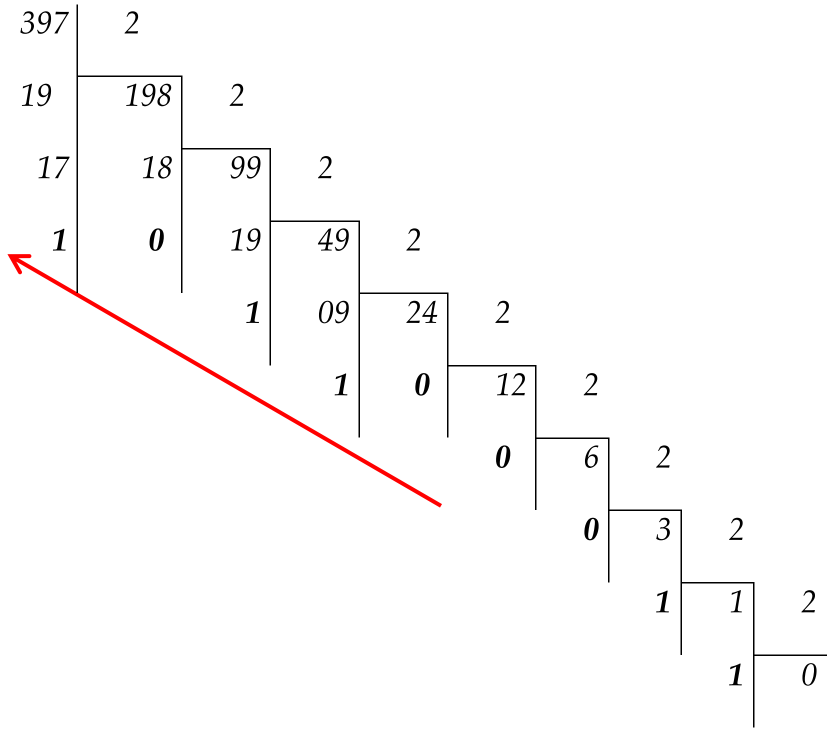
$N = \overline{xyzt}^{(a)}$

Conclusion

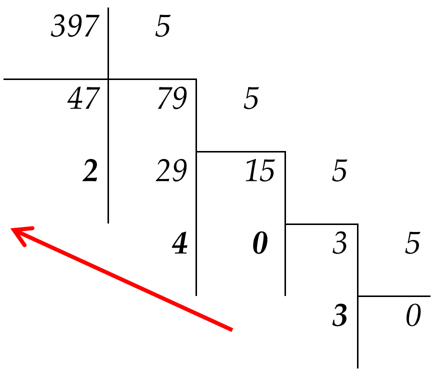
Les chiffres t, z, y et x sont les restes successifs dans les divisions par a de N est des quotients successifs

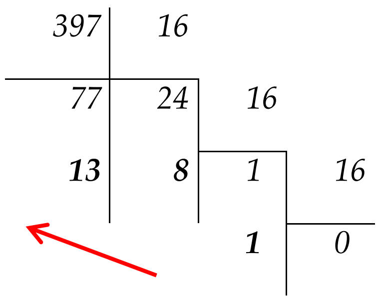
<u>Exemples</u> : *Ecrire 397 en base deux, en base cinq, en base seize.*

Erreur !(2)



397 =





397 = $\overline{18D}$

(16)

397 $\overline{3042}$ (5)

4)Passage d'un système à un autre :

Activité :

1) Soit $x = \overline{101}^{(deux)}$. *Ecrire x en base dix, en base cinq et en base seize.*

2) soit $y = \overline{2C}^{(seize)}$. *Ecrire y en base deux et en base cinq.*

3) soit $z = \overline{431}^{(cinq)}$. *Ecrire z en base dix, en base deux et base seize.*

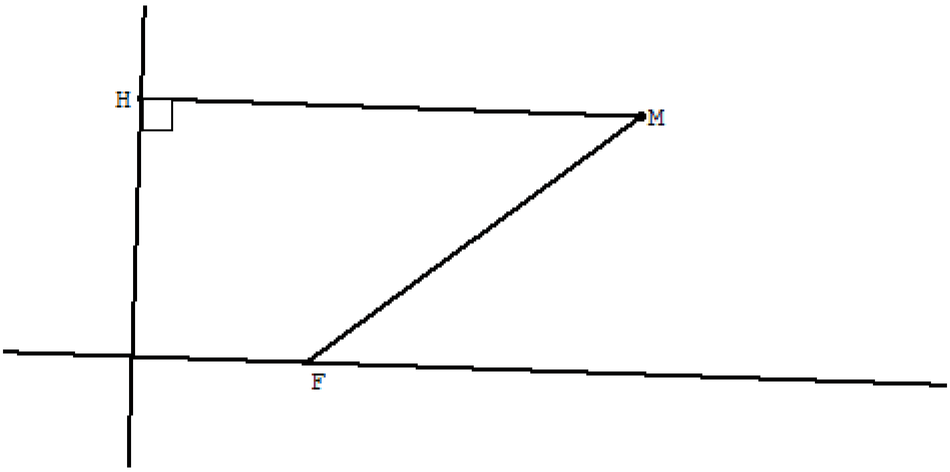
CONIQUES

PARABOLE

1) Définition :

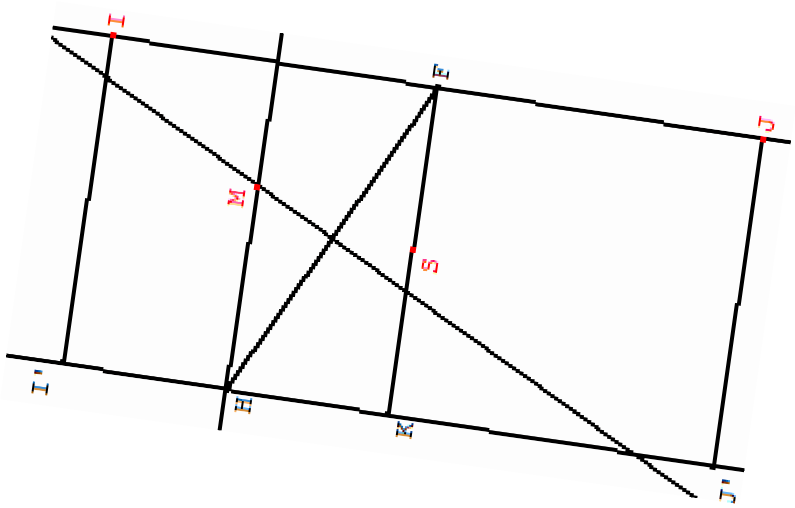
Soit (D) une droite du plan euclidien (P), F un point non situé sur (D), de ce plan.

On appelle ***parabole*** *de foyer F et de directrice (D), l'ensemble des points M du plan tels que : MF=MH où H est le projeté orthogonal de M sur (D).*



2) Construction point par point

Soit K le projeté orthogonal de F sur (D).S le milieu de [FK]. Comme SF=SK alors S appartient à la parabole $(\mathcal{P})$ .S est le sommet de la parabole $(\mathcal{P})$ de directrice (D) et de foyer F. Soit p=FK, p est appelé ***paramètre*** *de cette parabole $(\mathcal{P})$.Sur la perpendiculaire en F à (FK), considérons les points I et J tels que FI=FJ=p.*



❖ ***I et J sont des points de la parabole $(\mathcal{P})$.***

Soit I' projeté orthogonal de I sur (D), J'celui de J sur (D).

Le quadrilatère FII'K est un rectangle car il a trois angles droits :$\widehat{II'K}$ *,* $\widehat{IFK}$ *et*

$\widehat{FKI'}$ *. De plus il a deux côtés consécutifs de même longueur FK=FI=p.*

Donc FII'K est un carré.

On en déduit que IF=II' donc I $\in$ $(\mathcal{P})$.

De FKJ'J est un carré donc JF=JJ' d'où J $\in$ $(\mathcal{P})$.

❖ ***Soit H le point quelconque de (D).Le point d'intersection de la médiatrice de [FH] avec la droite passant par H et perpendiculaire à (D) est un point de la parabole $(\mathcal{P})$.***
❖ ***(FK) est l'axe de symétrie de $(\mathcal{P})$.***

Soit M un point quelconque de (P), H son projeté orthogonal sur (D).

Soit $M' = S_{(FK)}(M)$, $H' = S_{(FK)}(H)$.

Comme F$\in$ (FK), $S_{(FK)}(F) = F$.

Comme $S_{(FK)}$ *conserve les distances alors on a : MF=M'F, MH=M'H'*

$$M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow MF = MH$$

$$\Leftrightarrow M'F = M'H'$$

$$\Leftrightarrow M' \in (\mathcal{P})$$

D'où (FK) est un axe de symétrie de $(\mathcal{P})$.

3) *Autre définition d'une parabole*

On appelle parabole de foyer F et de directrice (D), l'ensemble des centres M des cercles $(\mathcal{C})$ *passant par F et tangent à (D).*

Exercice :

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $(\mathcal{P}) = \left\{M(x, y) \in (P)/x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8 = \frac{1}{25}(3x + 4y + 5)^2\right\}$.

Montrons que $(\mathcal{P})$ *est une parabole.*

Interprétation géométrique de $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = MF^2$ *avec* $M(x, y)$ *et* $F(x_0, y_0)$.

Soit la droite D : $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0,0)$.

$$d(M, D) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = MH$$

Où H est le projeté orthogonale de M sur D.

On en déduit $|ax + by + c| = MH\sqrt{a^2 + b^2}$ *d'où*

$$(ax + by + c)^2 = (a^2 + b^2)MH^2$$

On a : $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2$

$$= MF^2 \quad M(x, y) \text{ et } F(2, -2).$$

Soit D :$(3x + 4y + 5)^2 = (3^2 + 4^2)MH^2 = 25MH^2$

Donc $\qquad x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8 = \frac{1}{25}(3x + 4y + 5)^2$

$$\Leftrightarrow \quad MF^2 = \frac{1}{25}.25MH^2$$

$$MF = MH \text{ avec } F \in D$$

Donc $(\mathcal{P})$ *est la parabole de foyer* $F(2, -2)$ *et de directrice D :* $3x + 4y + 5 = 0$.

Exercice :

Construire géométriquement la directrice D d'une parabole (P) connaissant le foyer F et un point A de (P) une droite (Δ) *parallèle à (D).*

Analyse de la figure

- *Le cercle* $\mathcal{C}(A, AF)$ *est tangent à (D). Donc (D) est une tangente au cercle* $\mathcal{C}(A, AF)$ *qui est parallèle à la droite* (Δ).
- *Soient H et H' les points d'intersection du cercle* $\mathcal{C}(A, AF)$ *avec la droite passant par A et perpendiculaire à* (Δ).

Soit (D) la tangente au cercle $\mathcal{C}(A, AF)$ *en H.*

Soit (D') la tangente au cercle $\mathcal{C}(A, AF)$ *en H'.*

Comme (D)$\perp (HH')$ *et* $(HH') \perp (\Delta)$ *alors (D)*$\parallel (\Delta)$.

Comme (D')$\perp$ (HH') et (HH') $\perp$ (Δ) alors (D')$\parallel$ (Δ).

Les droites (D) et (D') répondent à la question.

Programme de construction.

1) *On construit Le cercle $\mathcal{C}(A, AF)$.*
2) *On construit la droite passant par A et perpendiculaire à (Δ) ; cette perpendiculaire coupe H et H' le cercle $\mathcal{C}(A, AF)$.*
3) *On construit la droite (D) passant par H (ou par H') et perpendiculaire à (HH').*

Exercice :

On donne un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ et une droite (D) ne coupant pas ce cercle.

On donne les cercles (Γ) tangents extérieurement au cercle $\mathcal{C}(O, R)$ et à la droite (D).

Déterminer l'ensemble (P) des points M du plan.

Analyse de la figure :

- *Quand deux cercles sont tangents en I, I appartient à la droite des centres.*
- *Deux cercles sont tangents extérieurement lorsque la distance des centres est égale à la somme des rayons.*
- *Deux cercles sont tangents intérieurement lorsque la distance des centres est égale à la différence des rayons.*

Solution :

Soit la droite (Δ) $\parallel$ (D),située à la distance R de (D) et dans le demi-plan ne contenant pas O et de frontière (D).

(Δ) est fixe car elle est situé à une distance constante R, d'une droite fixe (D).

Soit H le projeté orthogonal de M sur (D).

On a MO=MH=R+r où d (M, O)=d (M,(Δ)) donc (P) est la parabole de foyer O et de directrice (Δ).

4) Equation réduite d'une parabole.

On appelle équation réduite d'une parabole (P) de sommet S, d'axe (Δ) et de foyer F l'équation de cette parabole dans un repère orthogonal $(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec

$$\vec{\imath} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF} \; ou \; \vec{\jmath} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF} \quad p = FK$$

Cas : 1

Dans le repère $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *on a :* $F\left(\frac{p}{2},2\right)$, $K\left(-\frac{p}{2},2\right)$, $H\left(\frac{p}{2},y\right)$ *et* $M(x,y)$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow (P)MF = MH$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2px \text{ (équation réduite de } (P))$$

Avec $F\left(\frac{p}{2},2\right)$ *et* $(D): x = -\frac{p}{2}$.

Cas 2

$$\vec{\imath} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$$

$$\Rightarrow l'\text{équation réduite de } (P): y^2 = -2px$$

Cas 3

Equation réduite de : $x^2 = 2py$ $p = FK = d\big(F,(D)\big)$, $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ *et (P) :* $y = -\frac{p}{2}$

Cas 4

Equation réduite de : $x^2 = -2py$ $p = FK = d\big(F,(D)\big)$, $F\left(0,\frac{p}{-2}\right)$ *et (P) :* $y = \frac{p}{2}$.

Exercice :

L plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Soit la courbe (P) : $y = 2x^2 + 4x - 6$.

Montrer que (P) est une parabole dont on donnera les éléments caractéristiques.

Solution :

$$y = 2(x+1)^2 - 8 \Rightarrow y + 8 = 2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = \frac{1}{2}(y+8)$$

Posons : $\begin{cases} X = x+1 \\ Y = y+8 \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} x = X-1 \\ y = Y-8 \end{cases}$

On obtient (P) : $X^2 = \frac{1}{2}Y$

Eléments caractéristiques	*Dans le repère* $(S,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.	*Dans le repère* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Sommet	$S(X=0,Y=0)$	$S(x=-1,y=-8)$
Foyer	$F\left(X=0,Y=\frac{p}{2}\right)$	$F\left(x=-1,y=-\frac{65}{8}\right)$
Directrice	$(D):Y=-\frac{1}{8}$	$(D):y=-\frac{65}{8}$

N.B Reprendre le même exercice avec (P) : $x=y^2-4y+3$.

Propriétés :

- *Une parabole admet en chacun de ses points une tangente (T) ;*
- *La tangente à une parabole en son sommet S est perpendiculaire à l'axe (Δ) de cette parabole.*

Soit la parabole (P) : $y^2=2px$. Si $M_0(x_0,y_0)\in(P)$, la tangente (T) à (P) au point M_0 a pour équation :$yy_0=p(x+x_0)$.

$$(P):x^2=-2py\,,xx=-p(y+y).$$

(T) a pour équation : $xx_0=-p(y+y_0)$.

Si (T) est la tangente à une parabole (P), de foyer Fet de directrice (D), un point M de (P) distinct du sommet S de (P), on a :

- *(T) est la médiatrice de [FH] où H est le projeté orthogonal de M sur (D).*
- *(T) est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$.*
- *Si (T) coupe la bissectrice en A alors $\widehat{MFA}=90°$.*

On dit qu'on voit du foyer sous un angle droit du segment de tangente compris entre la parabole et sa directrice.

- *Le symétrique du foyer F par rapport à une tangente (T) à une parabole appartient à la directrice (D) de cette parabole ;*
- *Le projeté orthogonal du foyer F sur une tangente (T) à une parabole appartient à la tangente au sommet à la parabole.*

Démonstration :

Soit (P) : $y^2=2px$.

On a: $S(0{,}0)$,$F\left(\frac{p}{2},0\right),M_0(x_0,y_0)\in(P),(D):x=-\frac{p}{2}$ et $H\left(\frac{p}{2},y_0\right)$.

La tangente en M_0 à (P) coupe la directrice (D) en A.

$$y^2=2px\Leftrightarrow y=\sqrt{2px}\text{ ou }y=-\sqrt{2px}$$

(P) est constituée de deux arcs : (P_1): $y = \sqrt{2px}$ *situé au dessus de l'axe (Ox) et*
et (P_2): $y = -\sqrt{2px}$ *situé en dessous de l'axe (Ox).*

Posons et $f(x) = \sqrt{2px}$

- *Tangente au sommet* $S(0,0)$ *à (P).*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2px}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2p}{\sqrt{2px}} = +\infty$$

Donc (P) admet au sommet S une tangente.

- *Tangente (T) en un point* $M_0(x_0, y_0)$ *de (P)* $M_0 \neq S$

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$y = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0) + y_0 \ ; \ y_0 = \sqrt{2px_0}$$

$$yy_0 = p(x - x_0) + {y_0}^2 = p(x - x_0) + 2px_0$$

$$(T) : yy_0 = p(x + x_0)$$

- *(T) est la médiatrice de [FH]*

Le symétrique H du foyer F par rapport à (T) appartient à la droite (D) .

On a : $H\left(-\frac{p}{2}, y_0\right), F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

$M(x, y)$ *appartient à la médiatrice de [FH] si et seulement si MF=MH.*

$$\Leftrightarrow -px = px - 2yy_0 + {y_0}^2$$

Donc la médiatrice de [FH] a pour équation : $2y_0 y = 2px + {y_0}^2$ *avec* $y_0 = \sqrt{2px_0}$

Il s'en suit que : $yy_0 = p(x + x_0)$

D'où : la médiatrice de [FH] est la tangente (T) d'équation $yy_0 = p(x + x_0)$ *à (P) en* M_0.

- *(T) est la bissectrice de* $\widehat{FM_0H}$.

Car dans le triangle FM_0H *isocèle en* M_0 *la médiatrice (T) de la base [FH] est aussi la bissectrice de* $\widehat{FM_0H}$.

Le triangle AFM_0 *est rectangle en F.*

On a : $\begin{cases} M_0 = S_T(M_0) \\ H = S_T(F) \\ A = S_T(A) \end{cases}$ *Donc* $S_T(\widehat{M_0HA}) = \widehat{M_0FA}$.

Or S_T conserve les mesures d'angles géométriques alors $\widehat{M_0HA} = 90°$ *d'où* $\widehat{M_0FA} = 90°$

Exercice :

Une parabole variable de directrice (D) et de foyer variable F passe par un point fixe A et admet en A une tangente (T) qui coupe (D) en un point fixe B.

Déterminer le lieu géométrique du foyer F lorsque cette parabole varie.

Solution :

Le triangle AFB est rectangle en F et son hypoténuse [AB] est fixe donc F appartient au cercle de diamètre [AB].

Comme F $\notin (P)$ *alors* $F \neq A$.

Comme F $\notin (D)$ *alors* $F \neq B$.

Donc le lieu géométrique de F est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

Exercice :

Construire la directrice (D) d'une parabole (P) connaissant le foyer F de (P) et deux tangentes (T_1) et (T_2) à la parabole (P).

Solution :

(D)=(H_1H_2) avec $S_{T_1}(F) = H_1$ *et* $S_{T_2}(F) = H_2$

H_1 projeté orthogonal sur (D) du point de contact M_1 de (T_1) avec (P).

De même H_2 projeté orthogonal sur (D) du point de contact M_2 de (T_2) avec (P).

Exercice :

Construire la directrice (D) d'une parabole (P) connaissant un point A de (P) et la tangente (T) à (P) en A et le foyer F de cette parabole.

Solution :

- *Si* $H = S_T(F)$ *alors* $H \in (D)$.
- *H est le projeté orthogonal de A sur (D).*

Conclusion :

(D) est la droite passant par H et perpendiculaire à l'axe focal

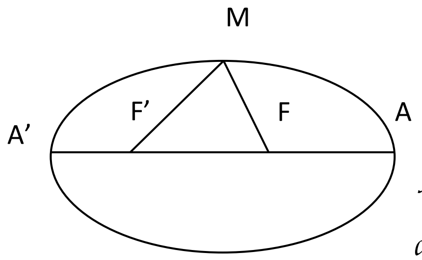
A) ELLIPSE

1) Définition bifocale :

Soient F et F' deux points distincts du plan, $c \in \mathbb{R}_*^+$, $a \in \mathbb{R}+, c < a$ *avec FF'=2c.*

On appelle ellipse de foyers F et F' et de grand axe 2a, l'ensemble des points M du plan tels que : MF'+MF = 2a

Exemple : *ellipse du jardinier*



Un fil de longueur constante est attaché à deux Clous en F et F'. Le clou en M permet d'étendre le fil .Si on fait tourner ce dernier clou sa pointe décrit une ellipse (E) de foyers F et F' de grand axe 2a. Pour tous points M de (E) les vecteurs $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$ *sont appelés des rayons vecteurs de (E).*

a) AA'=2*a*

Comme $A \in (E)$ *et* $A' \in (E)$ *alors* $\begin{cases} AF + AF' = 2a \\ A'F + A'F' = 2a \end{cases}$

Donc $\begin{cases} AF + AF + FF' = 2a \\ A'F' + FF' + A'F' = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2AF + FF' = 2a \\ 2A'F' + FF' = 2a \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre on a :$2AF - 2A'F' = 0$ *d'où AF=A'F'.*

On a: AA'=A'F+A'F'=2a.

En joignant deux points de (E), la plus grande distance est AA'=2a.

On dit alors que (AA') est le grand axe de (E).

b) (AA') est un axe de symétrie de (E) appelé axe focal.

$S_{(AA')}$

M	M'
F	F
F'	F'

Soit $M \in (E)$ *et* $M' = S_{(AA')}(M)$.

$S_{(AA')}$ *conserve la distance alors on a : MF=M'F et MF'=M'F'*

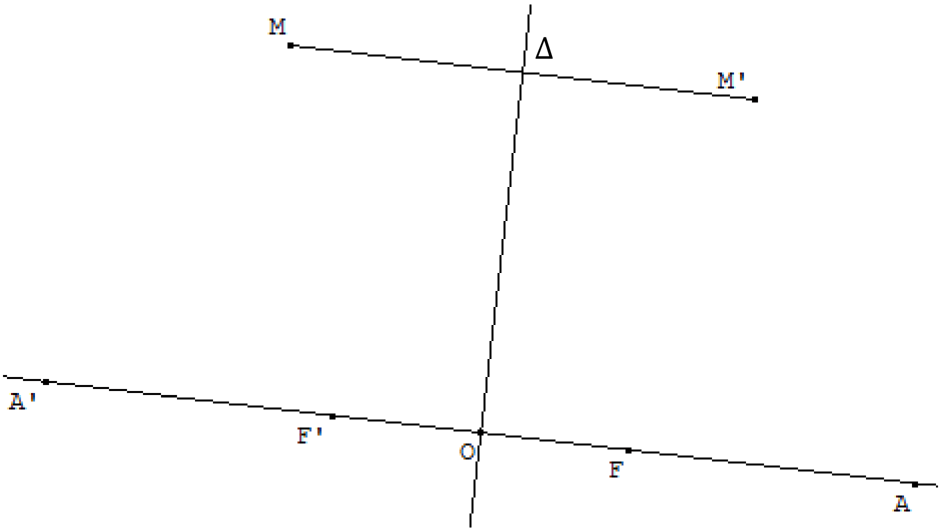
$M \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

$\Leftrightarrow M'F + M'F' = 2a$

Donc (E) est globalement invariant par $S_{(AA')}$.

D'où (AA') est un axe de symétrie de (E).

c) La médiatrice commune (Δ) ***de [AA'] et de [FF'] est aussi un axe de symétrie.***



Soit $\in (E)$, $M' = S_\Delta(M)$.

S_Δ

$\begin{cases} M \to M' \\ F \to F' \\ F' \to F \end{cases}$ *On a alors MF=M'F' et MF'=M'F*

$$M \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$$

$$\Leftrightarrow M'F' + M'F = 2a$$

$$\Leftrightarrow M' \in (E)$$

Donc (E) est invariant par S_Δ *d'où* Δ *est un axe de symétrie de (E) appelé axe focal de (E).*

d) Le point d'intersection O des axes (AA') et (Δ) ***est un axe de symétrie de (E).***

Comme (AA')$\perp (\Delta)$, $S_{(AA')} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ S_{(AA')} = S_O$.

$$\forall\, M \in (E)\,, S_{(AA')} \circ S_\Delta(M) = S_O(M)$$

Or $\forall\, M \in (E)$, $S_\Delta(M) \in (E)$

Comme $S_\Delta(M) \in (E), S_{(AA')}\big(S_\Delta(M)\big) \in (E)$ *doù* $S_O(M) \in (E)$.

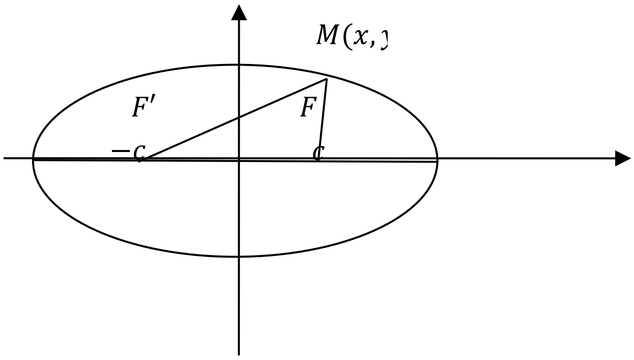
Donc $M \in (E) \Leftrightarrow S_O(M) \in (E)$ *pour tout point M de (E).*

O est alors le centre de symétrie de (E).

2) Equation réduite d’une ellipse

a) Longueur des rayons vecteurs

L’équation réduite d’une ellipse de centre O, de foyers F et F′ est obtenue dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *tel que :* $\vec{\imath} = \frac{1}{F'F}\overrightarrow{F'F}$ *ou bien* $\vec{\jmath} = \frac{1}{F'F}\overrightarrow{F'F}$



Cas 1 : $\boldsymbol{\vec{\imath} = \frac{1}{F'F}\overrightarrow{F'F}}$

Pour tout point $M(x, y)$ *de (E) on peut avoir MF et MF′ en fonction de* a , c *et l’abscisse du point M.*

$$\forall\, M(x, y) \in (E) \begin{cases} MF = a - \dfrac{cx}{a} \\ MF' = a + \dfrac{cx}{a} \end{cases}$$

Démonstration :

On a : $F(c, 0); F'(-c, 0)$ *et* $M(x, y)$

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2cx + c^2$$

$$MF'^2 = (x + c)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2cx + c^2$$

D’où $MF^2 - MF'^2 = -4cx$

$$\Leftrightarrow (MF + MF')(MF - MF') = -4cx$$

Or $MF + MF' = 2a$

D’où $2a(MF - MF') = -4cx \Longrightarrow MF - MF' = -\frac{2cx}{a}$.

On a alors : $\begin{cases} MF + MF' = 2a \\ MF - MF' = -\frac{2cx}{a} \end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases} 2MF = 2a - \frac{2cx}{a} \\ 2MF' = 2a + \frac{2cx}{a} \end{cases}$

D'où $MF = a - \frac{cx}{a}$ *et* $MF' = a + \frac{cx}{a}$

b) Equation réduite de (E)

On a $\forall M \in (E)\, , MF + MF' = 2a \implies \begin{cases} MF = a - \frac{cx}{a} \\ MF' = a + \frac{cx}{a} \end{cases}$

Réciproquement : Pour tout point $M(x, y)$ *du plan,* $\left.\begin{matrix} MF = a - \frac{cx}{a} \\ MF' = a + \frac{cx}{a} \end{matrix}\right\} \implies MF + MF' = 2a$

$$M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MF = a - \frac{cx}{a} \\ MF' = a + \frac{cx}{a} \end{cases}$$

- *On a* $MF = a - \frac{cx}{a} \Leftrightarrow MF^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)\frac{x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } b^2 = a^2 - c^2$$

- $MF' = a + \frac{cx}{a} \Leftrightarrow MF'^2 = \left(a + \frac{cx}{a}\right)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; avec \;\; b^2 = a^2 - c^2$$

D'où $MF = a - \frac{cx}{a} \Leftrightarrow MF' = a + \frac{cx}{a}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; avec \;\; b^2 = a^2 - c^2$$

Conclusion :

$$M(x,y) \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$$

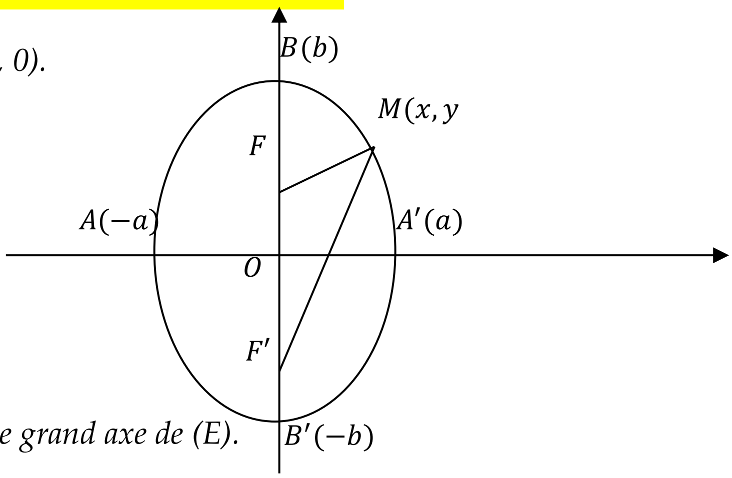
$$\Leftrightarrow \begin{cases} MF = a - \frac{cx}{a} \\ MF' = a + \frac{cx}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; avec \;\; b^2 = a^2 - c^2 \; ; \; a > b$$

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *tel que :* $\vec{\imath} = \frac{1}{F'F}\overrightarrow{F'F}$ *l'ellipse (E) de foyers F et F′, de centre O et de grand axe 2a, a pour équation réduite :*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; avec \;\; b^2 = a^2 - c^2 \; ; \; a > b$$

Dans un tel repère, on a : F(c, 0) et F′ (-c, 0).



Cas : $2\vec{\jmath} = \frac{1}{F'F}\overrightarrow{F'F}$

On a : F (0, c) et F′ (0, -c).

Définition bifocale :

$M \in (E) \;\Leftrightarrow\; MF + MF' = 2b$ *, 2b est le grand axe de (E).*

$$\forall\, M(x,y) \in (E) \,, \Leftrightarrow \begin{cases} MF = b - \frac{cy}{b} \\ MF' = b + \frac{cy}{b} \end{cases}$$

Equation réduite de (E).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; avec \;\; a^2 = b^2 - c^2 \; ; \; a < b$$

Remarque :

Les points d'intersession A, A', B et B' de ellipse (E) avec les axes sont les sommets de (E).

3) Existence et propriétés des tangentes à une ellipse.

Soit une ellipse (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

- *En chacun des sommets de l'axe focal, (E) admet une tangente perpendiculaire à cet axe.*
- *En chacun des sommets de l'axe non focal,(E) admet une tangente perpendiculaire à cet axe.*
- *En tout point* $M_0(x_0,y_0)$ *de (E), (E) admet une tangente (T) d'équation :*

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

Démonstration :

(E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$$\Leftrightarrow y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ ou\ y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

(E) est la réunion des arcs (Γ_1): $\left\{y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,-a\le x\le a\right\}$ *et*

(Γ_2): $\left\{y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,-a\le x\le a\right\}$.

Posons : $f(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{\frac{b}{a}(a-x)(a+x)}{(x-a)\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{x\to a^-}\frac{-\frac{b}{a}(a+x)}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{b}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -a^+}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\lim_{x\to -a^+}\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{x+a}=\lim_{x\to -a^+}\frac{\frac{b}{a}(a-x)(a+x)}{(x+a)\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{x\to -a^+}\frac{\frac{b}{a}(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{b}{0^+}=+\infty$$

Donc en chacun des points A (-a, 0) et A' (a, 0). (Γ_1) *admet une demi-tangente parallèle à (Oy) ou perpendiculaire à l'axe (Ox).*

Comme (Ox) est un axe de symétrie alors (E) admet en chacun de ses sommets A et A' de l'axe focal une tangente perpendiculaire à l'axe focal (AA').

$\forall\, x\in\,]-a,a[\,, a^2-x^2>0$ *et la fonction polynôme* $x\to a^2-x^2$ *est dérivable sur* $]-a,a[$.

$$\forall\, x \in \left]-a, a\right[\,, f'(x) = \frac{b}{a}\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$f'(0) = 0$ *donc (E) admet en son sommet B (0, b) une tangente parallèle à (Ox) ou perpendiculaire à l'axe non focal.*

Comme (Ox) est un axe de symétrie de (E) et que $B'(0, -b) = S_{(Ox)}(B)$ *alors (E) admet en son sommet B' (0,-b) une tangente perpendiculaire à l'axe non focal (Oy).*

Soit $M_0(x_0, y_0) \in (E)$ *on a :* $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - {x_0}^2} \Rightarrow {y_0}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - {x_0}^2)$.

Comme f est dérivable en x_0 *,* (Γ_1) *admet en* M_0 *une tangente (T) non parallèle à (Oy)*

$(T):\ y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$$

$$\Longrightarrow yy_0 = -\frac{b^2}{a^2}x_0(x - x_0) + {y_0}^2$$

$$\Longrightarrow \frac{yy_0}{b^2} = -\frac{xx_0}{a^2} + \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2}$$

Comme $M_0(x_0, y_0) \in (E)$ *alors* : $\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$

D'où (T) :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

4) Cercle principal, cercle secondaire d'une ellipse image d'un cercle par une affinité orthogonale.

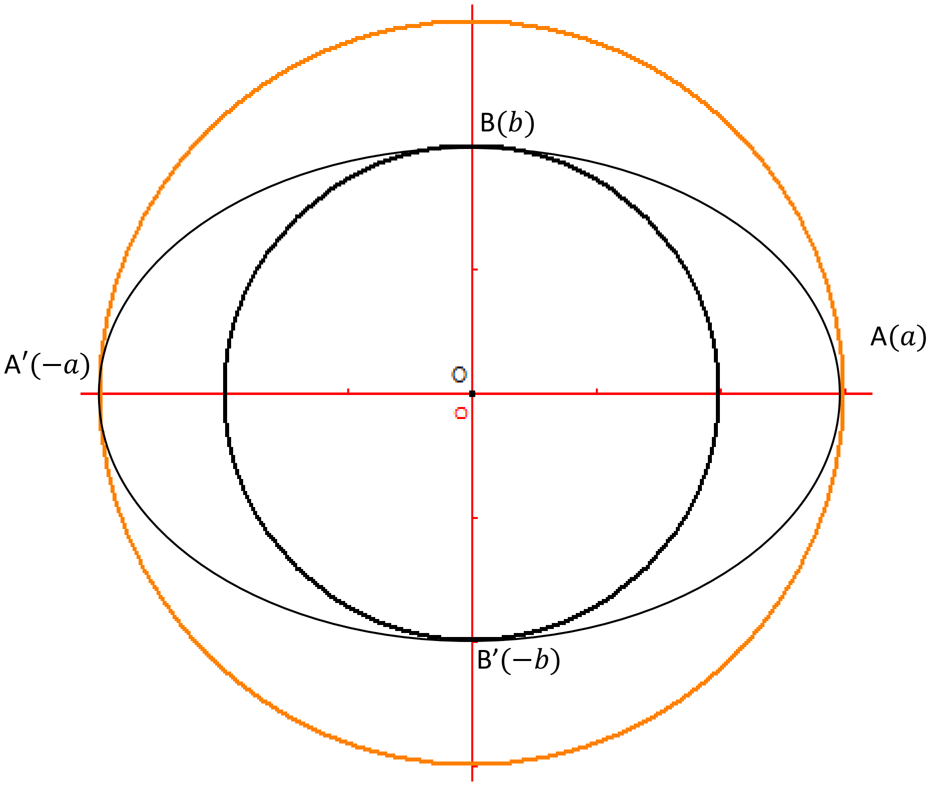
Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) Définitions :

Cas : 1 $a > b$.

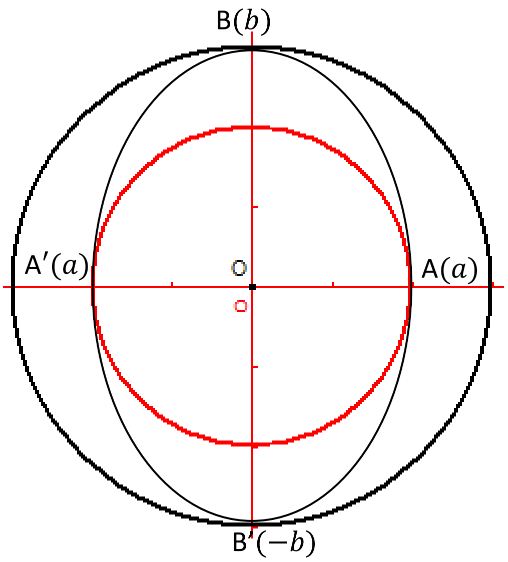
L'axe focal de (E) est (Ox), son grand axe est 2a et son petit axe 2b.

Le cercle C (O, a) est appelé cercle principal de l'ellipse (E).Le cercle C (O, b) est appelé secondaire de (E).

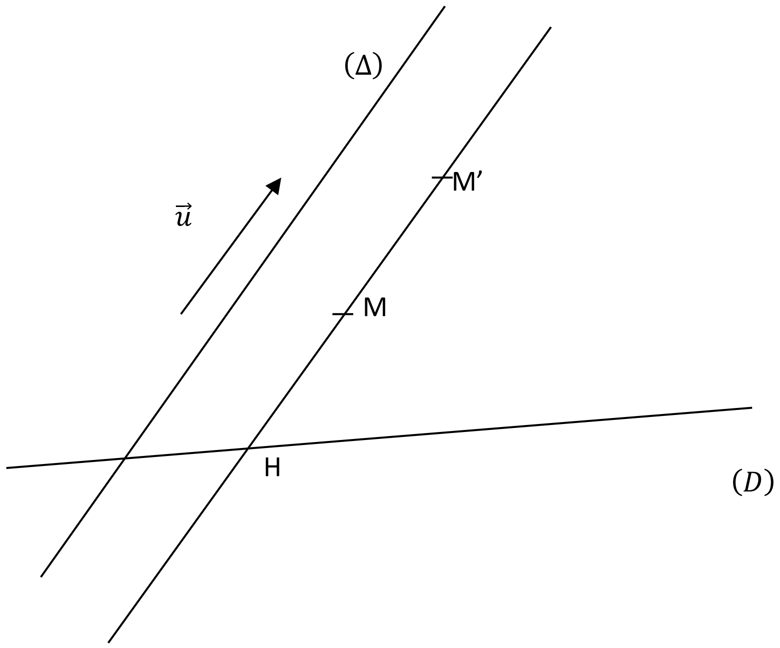


Cas : $2\ a < b$

(E) admet (Oy) comme axe focal, 2b comme grand axe et 2a comme petit axe



b) Affinité $\mathcal{A}$ de base (D) de direction celle de (Δ) et de rapport k.



On appelle affinité de base (D) ou d'axe (D) de direction celle de (Δ) *et de rapport* k *l'application.*

$$\mathcal{A} : \begin{cases} P \to P \\ M \to M' \end{cases} \text{telle que} \begin{cases} (MM') \parallel (\Delta) \\ si\ \{H\} = (MM') \cap (D)\ , alors\ \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM} \end{cases}$$

Remarque :

- *Si* $|k| > 1\ alors\ HM' > HM.$
- *Si* $|k| < 1\ alors\ HM' < HM.$
- *Si* $k > 0$ *M et M' sont de même côté par rapport à (D).*
- *Si* $k < 0$ *M et M' sont de part et d'autre de (D).*
- *Si* $(D) \perp (\Delta)$ *on dit qu'on a une affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport* k.
- *L'ensemble des points invariants par l'affinité* $\mathcal{A}$ *est son axe (D).*

c) Image d'un cercle par une affinité orthogonale
c-1) Ellipse image de son cercle principal par une affinité orthogonale.

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$

Le cercle principal de (E) est le cercle C (O, a)

On a aussi C (O, a) : $x^2 + y^2 = a^2$.

Soit f l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport $k = \frac{b}{a}$.

Pour tout point $M(x, y)$ du plan, soit $M'(x', y')$ l'image de M par f.

Déterminons l'expression analytique de f.

$H(x, 0)$ *projeté orthogonal de* $M(x, y)$ *sur (AA').*

$$M' = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = k(x - x) \\ y' - 0 = k(y - 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \dfrac{b}{a} y \end{cases}$$

$$M(x, y) \in C(O, a) : x^2 + y^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow : x'^2 + \left(\frac{a}{b} y'\right)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{{x'}^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$M'(x', y') \in (E)$$

D'où l'ellipse (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$ *est l'image de son cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport* $\frac{b}{a}$.

c-2) Ellipse image de son cercle secondaire par une affinité orthogonale.

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a < b$

Le cercle principal de (E) est le cercle C (O, b)

On a aussi C (O, b) : $x^2 + y^2 = b^2$.

Soit g l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport $k = \frac{a}{b}$.

Pour tout point $M(x, y)$ du plan, soit $M'(x', y')$ l'image de M par g.

Déterminons l'expression analytique de g.

$H(0, y)$ *projeté orthogonal de* $M(x, y)$ *sur (BB').*

$$M' = g(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - 0 = k(x - 0) \\ y' - y = k(y - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{a}{b}x \\ y' = y \end{cases}$$

$$M(x, y) \in C(O, b) : x^2 + y^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow : \left(\frac{b}{a}x'\right)^2 + y'^2 = b^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$M'(x', y') \in (E)$$

D'où l'ellipse (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a < b$ *est l'image de son cercle secondaire par l'affinité orthogonale d'axe (BB') et de rapport* $\frac{a}{b}$.

Exercice :

On considère une parabole variable (P) dont la directrice (D) est fixe et dont le foyer F décrit un cercle fixe C (A, R).

Déterminer le lieu géométrique du sommet S de la parabole.

Solution :

Soit K le projeté orthogonal de F sur (D). On a K varie sur la droite fixe (D) et $\overrightarrow{KS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KF}$.

Donc S est l'image de F par l'affinité orthogonale f d'axe (D) et de rapport $k = \frac{1}{2}$

$$F \in C(A, R) \Leftrightarrow f(F) \in f(C(A, R))$$

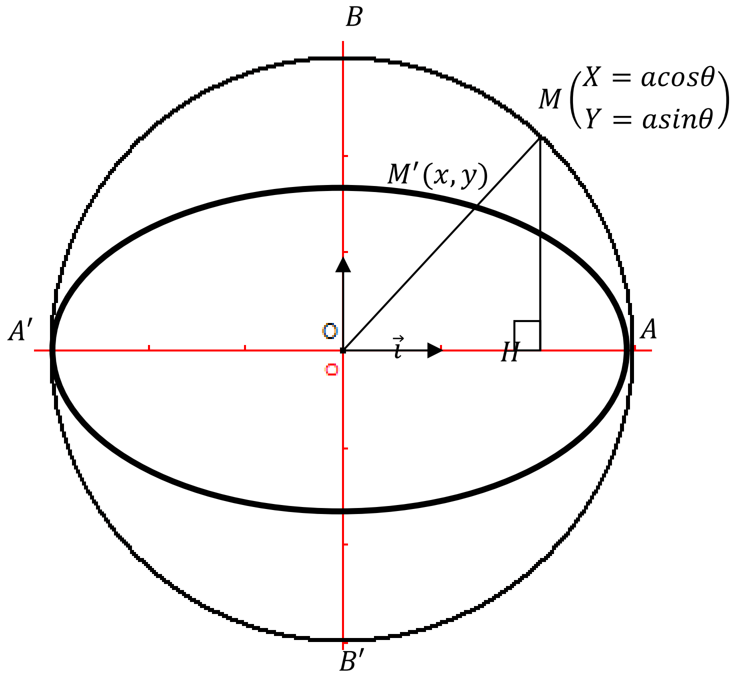
$$\Leftrightarrow S \in (E)$$

Le lieu de S est l'ellipse (E), image du cercle $C(A, R)$ *par l'affinité f.*

c-3) Paramétrage de l'ellipse.

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$.

(E) est l'image de son cercle principal $C(O,a)$ *par l'affinité orthogonale d'axe (AA') et de rapport* $k = \frac{b}{a}$.



f a pour expression analytique.

$$\begin{cases} x = X \\ y = \dfrac{b}{a}Y \end{cases}$$

Si $M \in C(O,a)$ *et si* θ *est une mesure de l'angle* $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ *on a :* $M\binom{X=acos\theta}{Y=asin\theta}$

$\theta \in]0,2\pi]$.

$$M'(x,y) = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = X \\ y = \dfrac{b}{a}Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = acos\theta \\ y = \frac{b}{a} \times asin\theta \end{cases} \quad \theta \in]0,2\pi] .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = acos\theta \\ y = bsin\theta \end{cases} \quad \theta \in]0,2\pi] .$$

Conclusion : Pour tout point $M(x,y)$ *de l'ellipse (E) :* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$ *. si et seulement si :* $\Leftrightarrow \begin{cases} x = acos\theta \\ y = bsin\theta \end{cases} \quad \theta \in]0,2\pi]$.

θ *est appelé ≪* ***anormale excentrique*** *≫ de l'ellipse (E).*

Cercles directeurs

Soit l'ellipse $\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b$. *On appelle cercles directeurs de (E) les cercles de l'ellipse (E) les cercles C (F ; 2a) et C' (F' ; 2a) où F et F' sont les foyers de l'ellipse (E).*

$$M \in (E) \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$$

Soit F'' le symétrique de F par rapport à (MF') on a MF''=MF.

Soit (Γ) *le cercle de centre M et de rayon MF=MF''.*

Soit C le point d'intersection du cercle (Γ) *avec [F'M).*

On a: F'C=MF'+MC; Or MC = MF

Alors on a F'C=MF'+MF=2a.

On en déduit que C appartient au cercle directeur C' (F',2a).

Positions relatives de (Γ) et C'.

Les cercles C' et (Γ) *sont tangents en C car la distance entre leurs centres F'F est égale à la distance de leurs centres M et F'.*

MF'=F'C-MC avec F'C rayon de (C') et MF=rayon de (Γ).

Réciproquement supposons que le cercle C' (F',2a) sont tangents intérieurement au cercle (Γ) *de centre M et de rayon MF où M est un point intérieur à (C').*

Comme (C') et (Γ) *sont tangents intérieurement alors MF'=2a-MF*

D'où : MF+MF'=2a.

On en déduit alors que M ∈ (E) ⇔ $($*C' (F',2a) et* (Γ) *sont tangents intérieurement.*

Théorème :

Une ellipse est l'ensemble des centres M des cercles (Γ) *passant par l'un des foyers de cette ellipse et tangent intérieurement au cercle directeur centré en l'autre foyer de cette ellipse*(Γ).

Exercice :

On donne un cercle C (F, 2a) avec a>0 et un point F situé à l'intérieur du cercle

C (F, 2a).

1) *Construire un cercle* (Γ) *de centre M et tangent intérieurement au cercle C (F, 2a) et passant par un point fixe F' intérieur au cercle* (Γ).
2) *Déterminer l'ensemble des centres M des cercles* (Γ).

Définition de l'ellipse par foyer et directrice associée.

Soit l'ellipse (E) :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad a>b.$$

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *tel que O soit le milieu [FF'] et* $\vec{\imath}=\frac{1}{F'F}\overrightarrow{F'F}$

$F(c,0)$ *et* $F'(-c,0)$.

Les sommets de (E) sont : $A(a,0)$, $A'(-a,0)$, $B(0,b)$ *et* $B'(0,-b)$.

On sait que $M(x,y)\in(E) \quad \Leftrightarrow MF+MF'=2a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MF=a-\dfrac{cx}{a} \\ MF'=a+\dfrac{cx}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} MF=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{a^2}{c}-x\right) \\ MF'=\dfrac{c}{a}\left(\dfrac{a^2}{c}+x\right) \end{cases}$$

On a $a>b$ *et* $a^2-c^2=b^2>0 \Rightarrow a^2>c^2$

D'où $a>c$.

Comparons : $\frac{a^2}{c}$ *et* a

$$\frac{a^2}{c}=a\times\frac{a}{c} \;\; alors \;\; \frac{a^2}{c}>a.$$

Considérons les droites (D) : $x=\frac{a^2}{c}$, (D') : $x=-\frac{a^2}{c}$

Soit H le projeté orthogonal du point $M(x,y)$ *de (E), sur (D), H' le projeté orthogonal du point* $M(x,y)$ *de (E), sur (D').*

$\forall\, M(x,y)\in(E)\,;-a\le x\le a$.

Donc $\forall\, M(x,y)\in(E)$ *on a :* $-\frac{a^2}{c}<-a\le x<\frac{a^2}{c}$.

D'où : $\frac{a^2}{c} - x > 0$ *et* $\frac{a^2}{c} + x > 0$.

On a : $MH = \sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2 + (y - y)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2}{c} - x\right)^2}$$

Et comme $\frac{a^2}{c} - x > 0$ *alors* $MH = \frac{a^2}{c} - x$ *et* $MH' = \frac{a^2}{c} + x$.

Donc : $\forall\, M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow MF = a - \frac{cx}{a}$

$$\Leftrightarrow MF = \frac{c}{a} MH.$$

$\forall\, M(x, y) \in (E) \Leftrightarrow MF' = a + \frac{cx}{a}$

$$\Leftrightarrow MF' = \frac{c}{a} MH'.$$

On dit que l'ellipse (E) est l'ensemble des points du plan tels que : $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ *avec* $\frac{c}{a} < 1$, *H étant le projeté orthogonal de M sur la droite (D):* $x = \frac{a^2}{c}$.

L'ellipse (E) est l'ensemble des points du plan tels que : $\frac{MF'}{MH'} = \frac{c}{a}$ *avec* $\frac{c}{a} < 1$, *H' étant le projeté orthogonal de M sur la droite (D') :* $x = -\frac{a^2}{c}$.

Les droites (D) et (D') sont appelées directrices de l'ellipse (E) et $\frac{c}{a}$ *est appelé excentricité de (E).*

(D) est la directrice associée au foyer F.

(D') est la directrice associée au foyer F'.

La définition de l'ellipse (E) par foyer et directrice est :

$M \in (E) \Leftrightarrow \frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ *ou* $\frac{MF'}{MH'} = \frac{c}{a}$.

Définition générale :

Etant donnés une droite (D) et un point F n'appartenant à (D) et un réel e tel que $0 < e < 1$, *on appelle ellipse de foyer F et de directrice associée à (D), l'ensemble des points M du plan tels que :* $\frac{MF}{MH} = e$ *où H est le projeté orthogonal de M sur (D).*

Exercice :

On donne deux cercles C (F, R) et C (F', R') tels que : R+R'=2a, a>0.

1) *Construire à la règle et au compas un cercle $\Gamma(M, r)$ tangent extérieurement au cercle C (F, R) et tangent intérieurement au C (F', R') et le cercle C'(F', R') étant intérieurement au cercle C (F, R).*
2) *Déterminer le lieu géométrique du point M.*

ANALYSE

Quand deux cercles sont tangents alors la droite des centres passe par leur point de contact donc (MF) passe par I, point de contact de (C) et (Γ).Et (MF') passe par J point de contact de (C') et (Γ).

Soit K le second point d'intersection de (IJ) avec (C').

On a :$\widehat{MIJ} = \widehat{MJI}$ *car le triangle MIJ et isocèle en M.*

$\widehat{MJI} = \widehat{KJI}$ *Car ils sont opposés par le sommet.*

$\widehat{KJF'} = \widehat{JKF'}$ *Car le triangle KJF' est un triangle isocèle en F'.*

Donc $\widehat{FIK} = \widehat{F'KI}$.

Or $\widehat{FIK}$ et $\widehat{F'KI}$ *sont des angles alternes internes par les droites (FI) et (KF') et leur sécante commune (KI)// (KF').*

PROGRAMME DE CONSTRUCTION

1)

- *On choisit I arbitrairement sur (C) et on trace la droite (FI).*
- *On trace la droite passant par F' et parallèle à (FI) ; elle coupe (C') au point K tel que* $\overrightarrow{F'K}$ et $\overrightarrow{IF}$ *soient de même sens.*
- *On trace (KI) qui recoupe (C') en J.*
- *On trace (F'J) qui coupe (FI) en M.*

2) Le lieu géométrique du point M.

On a : $\begin{cases} MF' = R' + r \text{ (tangent extérieur)} \\ MF = R - r \text{ (tangente intérieur)} \end{cases}$

Donc MF+MF' =R+R'=2a (a>0).

Le lieu géométrique de M est donc l'ellipse (E) de foyer F et F' et de grand axe 2a.

Exercice :

On donne dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*,une ellipse (E) :* $\frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1.\, a > b$

Un point mobile M décrit l'ellipse (E).

Déterminer le lieu géométrique du centre du cercle I du cercle inscrit dans un triangle MFF',
F et F' étant les foyers de l'ellipse (E).

Solution :

I est le barycentre $\{(M,FF'),(F,MF'),(F',MF)\}$.

On a $FF' = 2c$ *,* $MF = a - \frac{cx}{a}$ *et* $MF' = a + \frac{cx}{a}$ *avec* $x = x_M$.

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{FF' \times x_M + MF' \times x_F + MF \times x_{F'}}{FF' + MF + MF'} \\ \\ y_I = \dfrac{FF' \times y_M + MF' \times y_F + MF \times y_{F'}}{FF' + MF + MF'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{2cx + \left(a + \frac{cx}{a}\right)c + \left(a - \frac{cx}{a}\right)(-c)}{2c + a - \frac{cx}{a} + a + \frac{cx}{a}} \\ \\ y_I = \dfrac{2cy + \left(a + \frac{cx}{a}\right)0 + \left(a - \frac{cx}{a}\right)0}{2c + a - \frac{cx}{a} + a + \frac{cx}{a}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{2cx + 2\frac{c^2x}{a}}{2a + 2c} \\ \\ y_I = \dfrac{2cy}{2a + 2c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{c}{a}x \\ \\ y_I = \dfrac{a+c}{c}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{c}x_I \\ \\ y = \dfrac{a+c}{c}y_I \end{cases}$$

Or $M(x,y) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x}{a^2}^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{a}{c}x_I\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{a+c}{c}y_I\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{{x_I}^2}{c^2} + \frac{y_I^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1$$

Donc le lieu géométrique de I est l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2} = 1$$

Exercice : Dans le plan euclidien (P), muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe

$$(\mathcal{C}): \frac{(2x+4)^2}{16} + \frac{(3y-6)^2}{9} = 1$$

Déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

$$(\mathcal{C}): \frac{(2x+4)^2}{16} + \frac{(3y-6)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\mathcal{C}): \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$$

Posons : $\begin{cases} X = x+2 \\ Y = y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X-2 \\ y = Y+2 \end{cases}$

D'où

$$(\mathcal{C}) : \frac{X^2}{4} + Y^2 = 1, \qquad a = 2 \ et \ b = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$$

$(\mathcal{C})$ *est l'ellipse d'équation réduite* $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$ *de centre* Ω.

Eléments caractéristiques	*Dans le repère* $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.	*Dans le repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le centre	$\Omega(X = 0, Y = 0)$	$\Omega(x = -2, y = 2)$
L'axe focal	$Y = 0$	$y = 2$
L'axe non focal	$X = 0$	$x = -2$

Sommets	$A\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} et\ B'\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$	$A\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} et\ B'\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$
Foyers	$F\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\0\end{pmatrix} et\ F'\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\\0\end{pmatrix}$	$F\begin{pmatrix}-2+\sqrt{3}\\2\end{pmatrix} et\ F'\begin{pmatrix}-2-\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$
directrices	$(D): X = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ et$ $(D'): X = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$(D): x = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$ $et\ (D'): x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2$

Eléments caractéristiques de $(\mathcal{C})$

Excentricité :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on donne la courbe (C) d'équation :*

$$\frac{\left(\sqrt{6}x+\sqrt{2}y\right)^2}{18} + \frac{\left(\sqrt{2}x-\sqrt{6}y\right)^2}{8} = 1$$

Remarque si on a :

$$\frac{(ax+by)^2}{\alpha^2} + \frac{(cx+dy)^2}{\beta^2} = 1, avec\ |ad-bc| \neq 1\ alors\ on\ peut\ poser.$$

$$\begin{cases} X = \dfrac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \\ Y = \dfrac{cx+dy}{\sqrt{c^2+d^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = xcos(\theta) + ysin(\theta) \\ \\ Y = xsin(\theta) - ycos(\theta) \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} X = \dfrac{\sqrt{6}x+\sqrt{2}y}{\sqrt{6+2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \\ \\ Y = \dfrac{\sqrt{2}x-\sqrt{6}y}{\sqrt{6+2}} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)x + sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)y \\ \\ Y = sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)x - cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{6}x + \sqrt{2}y = 2\sqrt{2}X \\ \sqrt{2}x - \sqrt{6}y = 2\sqrt{2}Y \end{cases}$$

$$(C): \frac{\left(\sqrt{6}x + \sqrt{2}y\right)^2}{18} + \frac{\left(\sqrt{2}x - \sqrt{6}y\right)^2}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{\left(2\sqrt{2}X\right)^2}{18} + \frac{\left(2\sqrt{2}Y\right)^2}{8} = 1$$

(C) est donc l'ellipse d'équation réduite :

$$\frac{X^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + Y^2 = 1$$

On a $a = \frac{3}{2}, b = 1 , a > b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 2X \\ x - \sqrt{3}y = 2Y \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2X & 1 \\ 2Y & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}} = \frac{-2\sqrt{3}X - 2Y}{-4} = \frac{X\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}Y$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2X \\ 1 & 2Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}} = \frac{2\sqrt{3}Y - 2X}{-4} = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

$(\mathcal{C})$ *est l'ellipse d'équation réduite* $\frac{X^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + Y^2 = 1$, *de centre* Ω.

Eléments caractéristiques

Eléments caractéristiques	*Dans le repère* $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.	*Dans le repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le centre	$\Omega(X = 0, Y = 0)$	$\Omega(x = 0, y = 0)$
L'axe focal		
L'axe non focal		
Sommets		
Foyers		
directrices		

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Exercice :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *on donne la courbe* (Γ) *d'équation :*

$$13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

Posons $\begin{cases} x = Xcos\theta + Ysin\theta \\ y = -Xsin\theta + ycos\theta \end{cases}$ *(formule analytique d'une rotation)*

$$\begin{cases} x^2 = X^2cos^2\theta + Y^2sin^2\theta + 2XYsin\theta cos\theta \\ y^2 = X^2sin^2\theta + Y^2cos^2\theta - 2XYsin\theta cos\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$

$$xy = \frac{1}{2}(Y^2 - X^2)sin2\theta + XYcos2\theta$$

Dans le repère on a :

$$(\Gamma): 13(X^2 + Y^2) - 5(Y^2 - X^2)sin2\theta - 10XYcos2\theta - 72 = 0$$

On choisit θ *tel que le coefficient de* XY *soit nul.*

$cos2\theta = 0$ *et vérifié pour* $\theta = \frac{\pi}{4}$.

D'où $(\Gamma): 13(X^2 + Y^2) - 5(Y^2 - X^2) - 72 = 0$

$$18X^2 + 8Y^2 - 72 = 0$$

Avec $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y - X) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ X = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{cases}$

(Γ) : *est donc l'ellipse d'équation* $\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$ *de centre* Ω.

Eléments caractéristiques

Eléments caractéristiques	*Dans le repère* $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.	*Dans le repère* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Le centre	$\Omega(X = 0, Y = 0)$	$\Omega(x = 0, y = 0)$

L'axe focal	$X = 0$	$y = x$
L'axe non focal	$Y = 0$	$y = -x$
Sommets	$A\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} et\ B'\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$	$A\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{2}}\\\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, A'\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{2}}\\-\frac{3}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix} et\ B'\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$
Foyers	$F\begin{pmatrix}0\\\sqrt{5}\end{pmatrix} et\ F'\begin{pmatrix}0\\-\sqrt{5}\end{pmatrix}$	$F\begin{pmatrix}\sqrt{2{,}5}\\\sqrt{2{,}5}\end{pmatrix} et\ F'\begin{pmatrix}-\sqrt{2{,}5}\\-\sqrt{2{,}5}\end{pmatrix}$
Directrices	$(D): Y = \frac{9}{\sqrt{5}}$ $(D'): Y = -\frac{9}{\sqrt{5}}$	$(D): y = -x + \frac{9\sqrt{10}}{5}$ $(D'): y = -x - \frac{9\sqrt{10}}{5}$

L'excentricité $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Autre méthode

Si x^2 et y^2 ont le même coefficient on peut utiliser les formules suivantes

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \\ xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2] \end{cases}$$

(Γ) : $13[(x+y)^2 - 2xy] - 10xy - 72 = 0$

$$13(x+y)^2 - 36xy - 72 = 0$$

$$13(x+y)^2 - 36 \times \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2] - 72 = 0$$

$$4(x+y)^2 + 9(x-y)^2 - 72 = 0$$

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) \\ x - y = \sqrt{2}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

D'où :

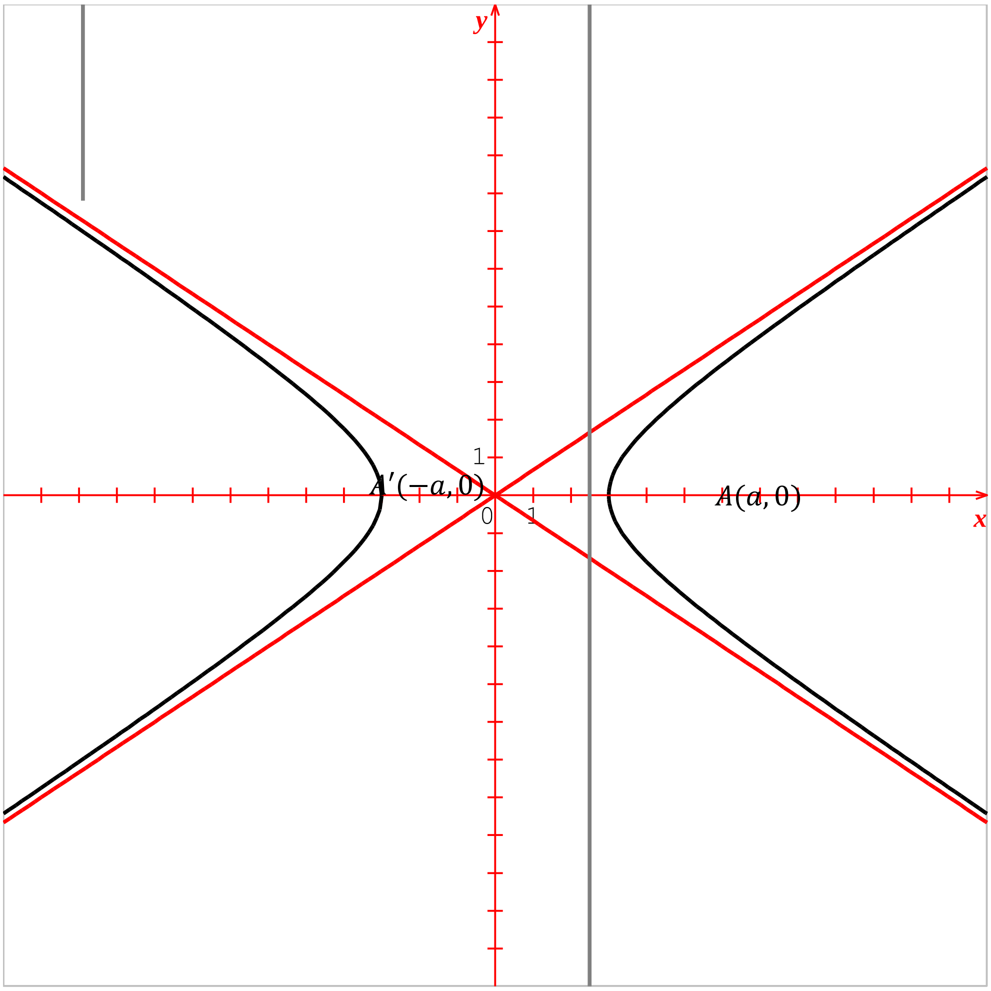
$$4 \times 2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9 \times 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 72 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1$$

$$\frac{X^2}{2^2} + \frac{Y^2}{3^2} = 1$$

B) HYPERBOLE

1^er type



$(\mathcal{H}) = (H_1) \cup (H_2)$

Définition :

a et c étant deux réels tels que $0 < a < c$*,on appelle hyperbole de foyers F et F' avec* $FF' = 2c$*,l'ensemble* $(\mathcal{H})$ *des points M du plan tels que* $|MF - MF'| = 2a.$

On a $(\mathcal{H}) = (H_1) \cup (H_2)$

$$(H_1) = \left\{M \in (P) / MF' - MF = \ 2a\right\} \text{ et } (H_2) = \left\{M \in (P) / MF - MF' = \ 2a\right\}$$

(H_1) est l'arc de l'hyperbole de foyer F.

(H_2) est l'arc de l'hyperbole de foyer F'.

Equation réduite : Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que O soit le milieu de [FF'] et $\vec{\imath} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$.

$$\boxed{(\mathcal{H}) \text{ a pour équation } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, c^2 = a^2 + b^2}$$

(On peut avoir $a > b$ comme $a < b$).

Eléments caractéristiques de $(\mathcal{H})$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, c^2 = a^2 + b^2$	
Foyers de $(\mathcal{H})$:	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$
Axe focal	$(O, \vec{\imath})$
Axe non focal	$(O, \vec{\jmath})$
Sommets	$A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$
Asymptotes	$(\Delta): y = \frac{b}{a}x$ et : $(\Delta'): y = -\frac{b}{a}x$
Directrices	$(D): x = \frac{a^2}{c}$ et $(D'): x = -\frac{a^2}{c}$
Excentricité	$e = \frac{c}{a}$

Définition par foyer et directrice associée :

$$M \in (\mathcal{H}) \iff \frac{MF}{MH} = e = \frac{c}{a}$$

$$\iff \frac{MF'}{MH'} = e = \frac{c}{a}$$

Avec H et H' projetés orthogonaux respectifs de M sur (D) et (D').

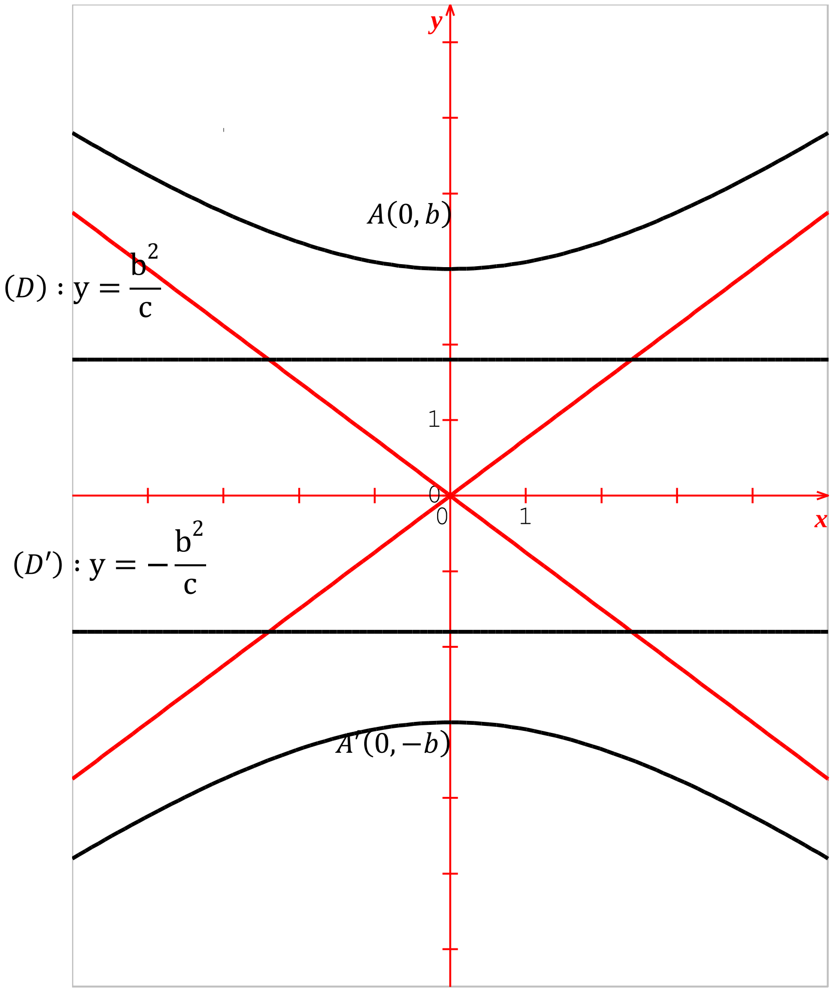
Propriété :

$(\mathcal{H})$ admet en tout point $M_0(x_0, y_0)$ de $(\mathcal{H})$ une tangente (T) d'équation :

$$(T) : \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

- *Si $M_0 \in (H_1)$ et si (T) coupe la directrice (D) en B alors $\widehat{M_0FB} = 90^\circ$*
- *Si $M_0 \in (H_2)$ et si (T) coupe la directrice (D') en C alors $\widehat{M_0F'C} = 90^\circ$*
- $M(x, y) \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow \begin{cases} MF = \left|a - \frac{cx}{a}\right| \\ MF' = \left|a + \frac{cx}{a}\right| \end{cases}$

2^{eme} type :



- ***Définition bifocale :***

$M \in (\mathcal{H}) \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2b, avec\ AA' = 2b\ , FF' = 2c\ , 0 < b < c.$

- ***Equation réduite :***

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, c^2=a^2+b^2$$

On a $(\mathcal{H})=(H_1)\cup(H_2)$

$$(H_1)=\left\{M\in(P)/MF'-MF=\ 2b\right\}\ et\ (H_2)=\left\{M\in(P)/MF-MF'=\ 2b\right\}$$

(H_1) *est l'arc de l'hyperbole de foyer F.*

- ***Sommets :*** $A\binom{0}{b}$ *et* $A'\binom{0}{-b}$
- ***Axe focal de*** $(\mathcal{H})$
- (O,y) *est l'axe focal de* $(\mathcal{H})$
- (O,x) *est l'axe non focal de* $(\mathcal{H})$
- ***Foyers*** *:* $F\binom{0}{c}$ *et* $F'\binom{0}{-c}$
- ***Asymptotes :*** $y=-\frac{b}{a}x$ *et* $y=\frac{b}{a}x$ *:*
- ***Directrices :*** $(D):y=\frac{b^2}{c}$ *et* $(D'):y=-\frac{b^2}{c}$
- ***Excentricité*** *:* $e=\frac{c}{b}$

Définition par foyer et directrice associée :

$M\in(\mathcal{H})\ \Leftrightarrow\frac{MF}{MH}=e=\frac{c}{b}$

$\Leftrightarrow\frac{MF'}{MH'}=e=\frac{c}{b}$

Avec H et H' projetés orthogonaux respectifs de M sur (D) et (D').

Propriété :

$(\mathcal{H})$ *admet en tout point* $M_0(x_0,y_0)$ *de* $(\mathcal{H})$ *une tangente (T) d'équation :*

$$(T):-\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

- *Si* $M_0\in(H_1)$ *et si (T) coupe la directrice (D) en B alors* $\widehat{M_0FB}=90^\circ$
- *Si* $M_0\in(H_2)$ *et si (T) coupe la directrice (D') en C alors* $\widehat{M_0F'C}=90^\circ$
- $M(x,y)\in(\mathcal{H})\Leftrightarrow\begin{cases}MF=\left|b-\frac{cy}{b}\right|\\ MF'=\left|b+\frac{cy}{b}\right|\end{cases}$

Exercice :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$*, on considéré la courbe repère*

$$(\Gamma) : y = \frac{x+1}{x-1}$$

Montrer que (Γ) est une hyperbole.

Solution

$$(\Gamma) : y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow xy - y = x + 1$$

$$\Leftrightarrow xy - (x+y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2] - (x+y) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - (x-y)^2 - 4(x+y) = 4$$

Or $x + y = \sqrt{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$ *et* $x - y = \sqrt{2}\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)$

Donc $(\Gamma) : 2\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\sqrt{2}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right) = 4$

Posons $\begin{cases} U = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ V = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{U+V}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{U-V}{\sqrt{2}} \end{cases}$

On obtient $(\Gamma) : 2U^2 - 2V^2 - 4\sqrt{2}U = 4$

$$(\Gamma) : \left(U - \sqrt{2}\right)^2 - V^2 = 4$$

Posons $\begin{cases} X = U - \sqrt{2} \\ Y = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = X + \sqrt{2} \\ V = Y \end{cases}$

On obtient $(\Gamma) : X^2 - Y^2 = 4$

Ou encore $(\Gamma) : \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$

(Γ) *a une équation de la forme* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ *avec* $a = b = 2$; (Γ) *est une hyperbole équilatère .*

- *L'excentricité* $e = \sqrt{2}$.
- *Asymptotes*

$(D): Y = \frac{b}{a}X$ $\Leftrightarrow V = U - \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ $(D): y = 1$	$(D'): Y = -\frac{b}{a}X$ $\Leftrightarrow V = -U + \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{-x-y}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ $(D): x = 1$

- *Centre de* (Γ)

$$I\begin{pmatrix} X = 0 \\ Y = 0 \end{pmatrix};\ I\begin{pmatrix} U - \sqrt{2} = 0 \\ V = 0 \end{pmatrix}; I\begin{pmatrix} \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 0 \\ \frac{x-y}{\sqrt{2}} = 0 \end{pmatrix}; I\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

Dans le repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *on considéré la courbe* (Γ) :

$$\left(\frac{m+1}{m-1}\right)x^2 + my^2 = 1$$

Discuter suivant les valeurs de m la nature de (Γ).

Solution

- *Si* $m = 1$,*l'équation n'a pas de solution donc* $(\Gamma) = \emptyset$
- *Si* $m = -1$,*on a* $-y^2 = 1$ *impossible* $(\Gamma) = \emptyset$
- *Si* $m \in]-\infty, -1[, \frac{m+1}{m-1} > 0$ *et* $m < 0$ *l'équation devient*

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{-\frac{1}{m}}\right)^2} = 1$$

Donc si $m \in]-\infty, -1[, (\Gamma)$ *est une hyperbole.*

- *Si* $m \in]0,1[, \frac{m+1}{m-1} < 0$ *et* $m > 0$ *l'équation devient*

$$-\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{1-m}{m+1}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2} = 1$$

Donc si $m \in]0,1[, (\Gamma)$ *est une hyperbole.*

- *Si* $m \in]1, +\infty[, \frac{m-1}{m+1} > 0$ *et* $m > 0$ *l'équation devient*

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{m}}\right)^2}=1$$

Donc si $m \in]1,+\infty[, (\Gamma)$ *est une ellipse.*

- *Si* $m=0$,*on a* $-x^2=1$ *impossible* $(\Gamma)=\emptyset$

Exemple

Dans le repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, *on considéré la courbe* (Γ) :

$$(2m-1)x^2+(m{+}1)y^2=1$$

1) *Discuter suivant les valeurs de m, la nature de* (Γ) .
2) *Etudier l'ensemble des points fixes de la famille de courbes.*

Solution

1) - *Si* $m \in]-\infty,-1[, 2m-1<0$ *et* $m+1<0$.*Donc si* $m \in]-\infty,-1[$ *alors* $(\Gamma)=\emptyset$
- *Si* $m \in \left]-1,\frac{1}{2}\right[, 2m-1<0$ *et* $m+1>0$ *l'équation devient*

$$-\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-2m}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{m+1}}\right)^2}=1$$

(Γ) *est une hyperbole.*
- *Si* $m \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[, 2m-1>0$ *et* $m+1>0$ *l'équation devient*

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2m-1}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{m+1}}\right)^2}=1$$

Donc si $m \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[, (\Gamma)$ *est une ellipse.*

- *Si* $m=-1$,*on a* : $-3x^2=1$ *impossible* $(\Gamma)=\emptyset$
- *Si* $m=\frac{1}{2}$, *on a* : $y^2=\frac{2}{3} \Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ *et* $y=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

(Γ) *est la réunion des droites d'équation* $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ *et* $y=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2) *Soit* $M_0(x_0,y_0)$ *un point fixe de la famille de courbe* (Γ).

$$\forall\, m \in R, (2m-1)x_0^2+(m+1)y_0^2=1$$

$\forall\, m \in R, (2x_0^2+y_0^2)m+y_0^2-x_0^2-1=0.$

Le polynôme $(2x_0^2 + y_0^2)m + y_0^2 - x_0^2 - 1 = 0$ *s'annule pour toute valeur de variable* m *donc c'est un polynôme identiquement nul.*

D'où tous les coefficients sont nuls.

$$\begin{cases} 2x_0^2 + y_0^2 = 0 \\ y_0^2 - x_0^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$2x_0^2 + y_0^2 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0 = 0$$

Si $x_0 = y_0 = 0$ *alors* $y_0^2 - x_0^2 - 1 = -1 \neq 0$

Donc la famille de courbe (Γ) *n'admet pas de points fixes.*

LIMITES-CONTINUITE – ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1 :

Etudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{2x^2 - 1}$; $n \in \mathbb{N}$ 2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + ax$; $a \in \mathbb{R}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{x}$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$ 5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{\sin(x^2)}$

6) $\lim\limits_{x \to 0} x\left(\sin\dfrac{1}{x} + 1 - \cos\dfrac{1}{x}\right)$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ 8) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin(x^2) - \sin(ax)}{x-a}$ 9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\sin[\tan(x^2)]}{1-\cos(x^2)}$

10) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\tan x$ 11) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$ 12) $\lim\limits_{x\to+\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

13) $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x + 19} - 3}$ 14) $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\sqrt[3]{x + 54} - 4}{2\sqrt[3]{x + 17} - \sqrt[3]{20x + 16}}$

15) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ 16) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$

EXERCICE 2 :

Soit $f(x) = \begin{cases} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*_+ \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1) *Montrer que f est continue en 0 ; f est-elle dérivable en 0 ?*

2) *Etudier la continuité de f en* $\dfrac{1}{p}$ *avec* $p \in \mathbb{N}$ *et* $p \geq 2$. *Etudier la continuité de f en 1.*

EXERCICE 3 :

$f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$ *pour* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$.

1) *Etudier la continuité de f.*
2) *Démontrer que f admet une bijection réciproque* f^{-1}.
3) *Vérifier que* $f^{-1}(x) = x|x|$.
4) *Représenter graphiquement f et* f^{-1}.

EXERCICE 4 *: Soit* $f : [-\pi, \pi] \to IR$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in IR^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) f est-elle continue sur [-π, π] ?

b) f est-elle dérivable sur [-π, π] ?

EXERCICE 5 *:*

a) Préciser le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$.

b) Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en une fonction g définie sur IR.
c) Déterminer f ' et g' ; g' est-elle le prolongement par continuité de f ' sur IR ?

EXERCICE 6 *:*

Déterminer le nombre de solution de l'équation $x^2 = x^3 + \frac{1}{27}$ *dans IR puis donner, si possible, un encadrement à* 10^{-2} *prés de chacune d'elles. En déduire le signe de f telle que*

$f(x) = -x^3 + x^2 - \frac{1}{27}$.

EXERCICE 7 *:*

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

1°) *Montrer que f définit une bijection de l'intervalle]1, +∞[sur un intervalle à préciser. Soit alors g la bijection réciproque de* $f|]1, +\infty[$*. Etudier g : ensemble de définition, continuité, sens de variation, dérivabilité. Calculer f(2). En déduire g' (2/3).*
2°) *Expliciter g(y).*
EXERCICE 8 *:*

Soit f définie pour x appartenant à [0, 1] par $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

1°) *Montrer que f est une bijection de [0, 1] sur un intervalle que l'on précisera. Etudier la bijection réciproque* f^{-1}*: ensemble de définition, continuité, sens de variation.*
2°) *Etudier la dérivabilité de* f^{-1} *sur son ensemble de définition.*
Calculer $(f^{-1})'(0)$*.Représenter graphiquement C(f) et C(*f^{-1}*) dans un même repère orthonormé. Préciser les pentes des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.*
EXERCICE 9 *:*

a) *Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *sur J à préciser. On note Arcsin sa réciproque.*

b) *Etudier la dérivabilité de Arcsin sur J puis montrer, lorsqu'elle est dérivable, que :*

$(Arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c) *Montrer qu'il existe* $c \in]0\ ;\ 1[$ *tel que,* $\forall x \in]0, 1[$,

$Arcsin(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-c^2}}$.

d) *En déduire que* $\forall x \in]0, 1[$, $Arcsin(x) < \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

EXERCICE:10

Soit $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *et* $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \cos x$ $\qquad$ $x \mapsto \tan x$

1) Montrer que f et g admettent des bijections réciproques respectives arccos et arctan.

2) Montrer que :

a) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) + \arccos x = \pi$. $\qquad$ b) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. $\qquad$ d) $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE :11 $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et expliciter pourquoi on peut prendre pour domaine d'étude $[0, \frac{\pi}{2}[$.

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe.

3) Montrer que f est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ *vers J à préciser.*

4) L'application réciproque f^{-1} *de f est-elle dérivable sur J? 5)*

Dans le cas où f^{-1} *est dérivable, montrer que* $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

EXERCICE 11

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Montrer* $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{(p+1)^3} < f(p) - f(p+1) < \dfrac{2}{p^3}$.

2) A l'aide de ce résultat, montrer que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n^2} < \dfrac{1}{1^3} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2n^2}$.

3) Montrer que $u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^3}$ est convergente.

EXERCICE 12 **:**

Soit f continue sur [0, 1] dans lui-même.

1) Montrer qu'il existe un réel a tel que $f(a) = a$.
2) On suppose f dérivable sur [0, 1] et $\forall x \in [0, 1]$, $/f'(x)/ < 1$. Démontrer que a est l'unique solution de $x = f(x)$ sur [0, 1].
3) Soit (u_n) définie par $u_1 \in [0, 1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $/f'(x)/ < 1$.

a) Démontrer qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que $/u_{n+1} - a\ / < k\ /u_n - a\ /$

b) En déduire que (u_n) converge.

EXERCICE 13 **:**

1) Etudier les variations de f telle que $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

2) Montrer que f admet une bijection réciproque de $[\frac{\pi}{3}, \pi[$ sur J. Préciser les propriétés de f^{-1}.

3) Préciser le variation de f^{-1} et tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

4) Calculer la dérivée de f^{-1} en $-\sqrt{2}$, en $-\frac{1}{2}$ et en 1.

5) Calculer $\cos\left[f^{-1}(t)\right]$ et $\sin\left[f^{-1}(t)\right]$.

EXERCICE 14 **:**

Le plan e rapporté à n repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm).

$f : [0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt{\tan x}$

1) Etudier la fonction f. (On précisera son ensemble de dérivabilité).

2) Montrer que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ $f'(x) = \left[1 + f(x)^4\right]\left(\frac{1}{2f(x)}\right)$.

2) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$. Quelles sont les propriétés de f^{-1} ?

4) Préciser sur quel ensemble f^{-1} est-elle dérivable et déterminer $(f^{-1})'(y)$ en fonction de y.
5) Tracer Cf et Cf^{-1}.

EXERCICE 15 **:**

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f .

b. Etudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty\,;1[$ *et que* $f'(x)=\dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$ *pour tout* $x<1$.

d. Dresser le tableau de variation de f.

e. Représenter graphiquement la fonction f.

2. a. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$ *admet une seule solution* x_1 *dans* $]-\infty\,;0]$ *et que* $-\dfrac{1}{3}<x_1<0$.

b. Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ *admet exactement deux solutions* x_2 *et* x_3 *dans* $[0\,;1]$ *et que* $0<x_2<\dfrac{2}{3}<x_3<1$. *Donner une valeur décimale approchée à* 10^{-3} *près de* x_1.

3. a. On pose $u=\dfrac{3}{2}(x-\dfrac{1}{3})$. *Montrer que l'équation (E) :* $\left|x\sqrt{1-x}\right|=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ *est équivalente à (E') :* $8u^3-6u-1=0$.

b. Pour i = 1, 2, 3, on pose $u_i=\dfrac{3}{2}(x_i-\dfrac{1}{3})$. *Montrer qu'il existe un unique réel* θ_i *de [0 ; π] tel que* $u_i=\cos\theta_i$.

c. Prouver que $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ *pour tout* θ *réel.*

(On rappelle que cos(a+b) = cosa.cosb – sina.sinb et sin 2a = 2sina.cosa)

d. Déduire des questions précédentes que (E') est équivalente à l'équation $\cos 3\theta=\dfrac{1}{2}$.
Résoudre cette équation dans [0 ; π] et en déduire les valeurs exactes de x_1, x_2 *et* x_3.

<u>EXERCICE : 16</u>

Soit a un réel non nul ; f_a *la fonction de IR vers IR définie par* $\forall\, x\in \mathrm{IR}\;\; f_a(x)=x+\dfrac{a}{\pi}\sin\pi x$

a) *Comparer* $f_a(x)$ et $f_a(x+2k)$ $\quad k\in\mathbb{Z}$. *Comparer* $f_a(x)$ et $f_a(-x)$
b) *Etudier suivant les valeurs de a la variation de* f_a *sur l'intervalle* $[0;1]$
c) *Démontrer que si* $|a|\le 1$ *alors* f_a *est une bijection de IR sur IR et que sa restriction à* $[-1;1]$ *est une bijection de cet intervalle sur lui-même.*
d) *Lorsque* $|a|\le 1$ *; préciser les points en lesquels* f_a^{-1} *bijection réciproque de* f_a *est dérivable.*

<u>EXERCICE 16</u> :

Soit g la fonction définie par $g(x) = x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

1) Etudier complètement g (on représentera a courbe C) (unité 8 cm).

2) Montrer que g est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble à préciser et tracer la courbe C′ de g^{-1} *. 3) Calculer l'abscisse* x_0 *du point d'intersection, autre que O, des courbes C et C′.*

4) Quel est l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$*. Représenter cette ensemble dans le même repère.*

<u>EXERCICE 17</u> : *On considère une fonction f définie pour tout réel et vérifiant la propriété pour tout couple* $(x;y) \in \mathbb{R}^2$: $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ *(1)*

a) *Montrer que s'il existe un réel c tel que :* $f(c) = 1$ *ou* $f(c) = -1$ *alors f est constante sur IR.*
   NB *: On suppose dans toute la suite du problème f non constante sur IR.*

b) *En écrivant* $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$ *; montrer que quelque soit le réel x on a :* $-1 \leq f(x) \leq 1$ *et établir que* $f(0) = 0$.
   En déduire que f est impaire.

c) *Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x on a :*
   $\frac{1+f(nx)}{1-f(nx)} = \left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right)^n$
   On pose $\frac{1+f(1)}{1-f(1)} = a$ *; Calculer pour tout entier naturel n, puis pour tout entier relatif n la valeur de* $f(n)$ *en fonction de a. Calculer* $f(x)$ *en fonction de a ou* $x = \frac{p}{q}$ *avec*
   $p \in \mathbb{Z}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$.

<u>EXERCICE 18</u> : *Soit h la fonction définie par :* $h(x) = \begin{cases} x\sqrt{\left|\frac{x+1}{x}\right|} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3 - x^2}{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1) *Montrer que h est définie sur IR. Ecrire la fonction sans barres de valeur absolue.*
2) *Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0 et – 1.*
3) *Etudier les branches infinies et la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes.*
4) *Calculer h' sur les intervalles ou h est dérivable.*
5) *Soit* $f(x) = x^3 + 3x - 2$.

a) *Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique a sur IR puis* $0 < a < 1$.
b) *En déduire le signe de f sur IR.*

6) *Montrer que* $h'(x) = \dfrac{xf(x)}{(x^2+1)^2}$ *sur*

]0 ; + ∞[puis établir le tableau de variations de h sur IR.

7) *Tracer* ($\mathbf{C}_h$).

8) *Montrer que la restriction* h_1 *de h à]- ∞ ; -1] admet une bijection réciproque dont on précisera*

son ensemble de définition J.

9) h_1^{-1} *est-elle dérivable sur J ? Calculer* $h_1(-2)$ *puis* $(h_1^{-1})'(-\sqrt{2})$. *Tracer la courbe de* h_1^{-1}.

EXERCICE :19 *Soit f la fonction définie par :* $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x}} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

2) *Etudier la continuité de f en 0.*

3) *Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.*

4) *Calculer f '(x) dans les intervalles où f est dérivable.*

5) *Etudier les variations de f.*

6) a) *Donner la nature des branches infinies à* C_f

b) *Etudier la position de* C_f *par rapport à ces asymptotes sur]-∞, 0] et sur [0, +∞[.*

7) *Soit g la restriction de f sur* $]-\infty, \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$.

Montrer que g est bijective de $]-\infty, \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$ *vers J à préciser.*

8) a) *Donner les variations de* g^{-1} *et préciser les branches infinies à sa courbe.*

b) g^{-1} *est-elle dérivable sur J ?*

c) *Donner la tangente à* $C_{g^{-1}}$ *en* $I\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ g^{-1}(-\sqrt{3}) \end{pmatrix}$.

d) *Donner l'expression de* g^{-1} *sur* $[0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$.

9) *Tracer* C_f *et* C_g.

EXERCICE 20

1) *Montrer que la fonction* $f : x \to \dfrac{1}{1+x^2}$ *admet des primitives sur R.*

On notera F la primitive de f vérifiant F(0) = 0

2) *Etudier la parité de F et étudier son sens de variation sur R.*

3) *En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout x >0* $F(x) = c - F\left(\frac{1}{x}\right)$

4) *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = c$

5) *On pose pour tout x de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \tan x$.

a- *Montrer que la fonction* $\varphi : x \to F \circ g(x) - x$ *est dérivable sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, *et calculer* $\varphi'(x)$

b- *En déduire que pour tout x de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $F \circ g(x) = x$

c- *Déterminer alors* $F(1), F\left(\sqrt{3}\right)$ *et* $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

EXERCICE 21

Partie : I *soit f la fonction définie sur* $\left]-1;1\right[$ *par* $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) *Etudier les variations de f.*
2) *Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution* α *dans* $\left]-1;1\right[$ *et que* $\alpha > \frac{4}{5}$.
   En déduire le signe de f(x)-x sur $\left]-1;1\right[$.
3) *Montrer que f réalise une bijection de* $\left]-1;1\right[$ *vers R*
4) *Expliciter pour tout réel x,* $f^{-1}(x)$

Partie II : *Soit la suite u définie sur N par :* $\begin{cases} u_0 \in [0, \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

1)a)Montrer que, pour tout n de N, $0 \le u_n \le \alpha$

b) Montrer que la suite u est croissante

c) En déduire que u_n *est convergente et déterminer sa limite*

2) Montrer que pour tout x de R_+ *on a :* $\left|(f^{-1})'(x)\right| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

3) Montrer que pour tout n de N on a : $\left|u_{n+1} - \alpha\right| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n - \alpha\right|$.

4) En déduire que pour tout n de N on a : $\left|u_n - \alpha\right| \le \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \left|u_0 - \alpha\right|$. *Retrouver* $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie : III *Soit h la fonction définie sur* $\left]-1;1\right[$ *par :* $h(x) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

1) *Montrer que pour tout x de* $\left]-1;1\right[$ *:* $h(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$
2) *Montrer que h établit une bijection de* $\left]-1;1\right[$ *sur R.*
3) *Montrer que* h^{-1} *est dérivable sur R et expliciter :* $\left(h^{-1}\right)'(x)$.
4) *Soit pour tout* $x \in R^*$ *, la fonction H telle que :* $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

a- *Montrer que H est dérivable sur R et déterminer H'(x).*

b- Calculer $H(1)$ et $H(-1)$. *En déduire que :* $\begin{cases} H(x) = -1 \; si\, x > 0 \\ H(x) = 1 \quad si\, x < 0 \end{cases}$

5) *Pour tout n de N on a :* $v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right)$ *et* $w_n = \frac{v_n}{n}$

a- *Donner la valeur de* $H\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. *En déduire que* $\forall\; k \in N^* : h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$

b- *Montrer que pour tout n de* N^* $v_n = -n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$.

c-

PRIMITIVES -NOTION D'INTEGRALE –FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

EXERCICE : 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K .

a) $f(x) = \frac{3x-1}{(3x^2-2x-1)}$ *et* $K = \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$

b) $f(x) = \frac{2}{(1+x)^4}$ *et* $K =]-1; +\infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$ *et* $K =]0; +\infty[$

d) $f(x) = -\frac{3x^2+2}{2(x^3+2x)^3}$ *et* $K =]-\infty; 0[$

EXERCICE : 2

Dans chacun des cas suivants , déterminer les primitives de la fonction f sur un intervalle K que l'on précisera .

a) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x-6}}$ c) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

d) $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{(x^2+3x+1)^2}}$

EXERCICE : 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle K , qui vérifie la condition indiquée .

$a) f(x) = \sin x \cos x; I = R, F(\frac{\pi}{2}) = 1$

$b) f(x) = \cos x \sin^5 x; I = R, F(0) = 3$

$c) f(x) = 2x\sin(x^2); I = R, F(0) = 2$

$d) f(x) = \frac{\cos x}{\sin 2x}; I = \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, F(0) = 2$

EXERCICE 4 :

Soit la fonction $f : x \to \frac{1}{1-\sin x}$. *En remarquant que*

$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$.

Déterminer les primitives de f sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

EXERCICE 5 :

La fonction f est définie par $f(x) = \sin^4 x$.

1. *Exprimer* $\sin^2 x$ *en fonction de cos2x et cos4x.*
2. *Quelle est la forme générale des primitives de f sur R ?*
3. *Calculer* $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

EXERCICE : 6

Soit la fonction $f : x \to \frac{x^2-2x-2}{x^3-1}$

1. *Déterminer trois nombres réel a , b et c tels que :*
   $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}\ , f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+C}{x^2+x+1}$.
2. *En déduire la primitive F de f sur* $]-\infty;1[$*, telle que : F(-1) = -ln2.*

EXERCICE 7 :

f et u sont des fonctions définies sur l'intervalle $I = \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ *par* $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ *et*

$u(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$

1. *Vérifier que pour tout x de I* $f'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$.
2. *En utilisant une primitive de la fonction* $x \to \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *.Trouver la primitive sur I, nulle de la fonction u.*

<u>EXERCICE 8 :</u>

f ; g et h sont les fonctions définies sur R par :
$f(x)=x^2\cos x; g(x)=x^2\sin x; h(x)=2x\cos x$

1. *On pose u=g-h*
   Calculer les fonctions dérivées des fonctions g, h et u.
2. *Déduisez en une primitive F de f sur R.*
3. *Calculer I=*$\int_0^{\pi} f(x)dx$.

<u>EXERCICE 9 :</u>

f est la fonction définie sur $[0;\pi]$ *par* $f(x)=2\sin x+\cos^2 x$ *et(C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 4cm).*

1. *Etudier f et tracer la courbe représentative.*
2. *Montrer que la droite d'équation* $x=\dfrac{\pi}{2}$ *est un axe de symétrie pour (C).*
3. *Calculer en unités d'aires, l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x=0$ *et* $x=\dfrac{\pi}{2}$ *.Déduisez en du 2 l'aire du domaine limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x=0$ *et* $x=\pi$.

<u>EXERCICE 10 :</u>

Trouver une primitive sur R de chacune des fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ g(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

<u>EXERCICE 11 :</u>

Soit f et g les fonctions définies par :
$f(x)=\frac{cosx}{cosx+sinx}$ *et* $g(x)=\frac{sinx}{cosx+sinx}$.
Déterminer successivement les primitives sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *de chacune des fonctions f+g , f-g f et g*

<u>Exercice 12:</u>

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ *par :* $h(x)=\int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

Et k la fonction définie sur l'intervalle I= $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ *par :* $k(\theta)=\tan^2\theta.$

a. *Calculer* $(h\circ k)(0)$.

b. *Prouver que pour tout* θ *appartenant à I ,* $(h\circ k)'(\theta) = 4\tan^2\theta$.

c. *En écrivant* $\tan^2\theta$ *sous la forme* ($\tan^2\theta + 1$) – 1 *, déterminer une primitive de* $(h\circ k)'$ *puis donner l'expression de* $(h\circ k)$.

d. *Calculer h (1)*

<u>Exercice 13 :</u>

On définit sur I = $]1;+\infty[$ *la fonction f par :*

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$$

a. *Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que , pour tout nombre réel x de I :*

$$f(x) = \frac{a}{(x^2-1)^2} + \frac{b}{(x^2-1)^2}\ .$$

b. *En déduire une primitive de f sur I .*

<u>Exercice 14 :</u>

Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ *par :*

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2-1}\ .$$

a. *Ecrire* $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ *où a et b sont des nombres réels à déterminer .*

b. *En déduire une primitive de f sur* $]-1;1[$.

<u>EXERCICE 15</u>

1.) *Soit la fonction définie sur R par :* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$.

On désigne par (C) la représentation graphique de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *(unité graphique :4cm).*

a.) *Etudier la fonction f (sens de variation et comportement aux bornes).*

b.) *Tracer (C).*

2.) *Soit la fonction définie sur R par :* $g(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

a.) *Lorsque x>0, donner une interprétation graphique de* $g(x)$ *et lorsque x <0, donner une interprétation de* $\int_{2x}^{x} f(t)dt$ *et comparer cette intégrale a :* $\int_{-x}^{-2x} f(t)dt$.

b.) *Utiliser2.a. et 1. Pour prouver que g est une fonction impaire.*

c.) *Prouver que, pour tout nombre réel x positif, on a :* $\dfrac{x}{\sqrt{1+16x^4}} \le g(x) \le \dfrac{x}{\sqrt{1+x^4}}$.

En déduire $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ *puis* $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.

d.) *Démontrer que G est dérivable sur R et que.* $g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1+16x^4}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ *Déterminer le signe de* $g'(x)$.

e.) *Dresser le tableau de variation de g et donner l'allure de la représentation graphique de g .On ne cherchera pas à préciser les extrémums de g.*

EXERCICE :16

A. *Pour tout entier naturel non nul, on pose :* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx.$

1. a. *Justifier l'existence de* I_n.

b. *Sans calculer* I_n*, montrer que la suite* (I_n) *est une suite décroissante dont tout les termes sont positifs.*

2. a. *Pour tout entier naturel non nul n, calculer la dérivée de la fonction* $x \to \tan^{n+1} x$.

En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

b. *Démontrer que pour tout entier*

Naturel non nul n, $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$.

c. *En déduire la limite de la suite* (I_n) *lorsque n tend vers* $+\infty$.

d. *Calculer* $f(n) = I_{n+4} - I_n$ *en fonction de n ou* $n \in N^*$.

3. a.) *Calculer* I_2.

b.) *Calculer* $f(2) + f(6) + f(10) + ... + f(4k-2)$ *en fonction de* I_2 *et de* I_{4k+2} *ou* $k \in N^*$.

En déduire la limite de la somme : $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - \frac{1}{4k-1} + \frac{1}{4k+1}$ *lorsque k tend vers* $+\infty$.

4. a. *Vérifier que la fonction* $\ln(\cos x)$ *est définie et dérivable sur l'intervalle* $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ *et déterminer sa dériver. Calculer* I_1.

b. *Calculer* $f(1) + f(5) + f(9) + ... + f(4k-3)$ *en fonction de* I_1 *et de* I_{4k+1} *ou* $k \in N^*$.

c. *En déduire la limite de la somme :* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$ *lorsque k tend vers* $+\infty$.

B. Soit α *un réel donné, élément de* $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ *.On pose pour tout entier naturel non nul n,*

$K_n(\alpha)=\int_0^{\alpha}\tan^n x dx$ *et* $S_n(\alpha)=K_1(\alpha)+K_2(\alpha)+...+K_n(\alpha)$.

1. Soit x un nombre réel élément de $[0;\alpha]$ *Calculer pour n entier naturel non nul,*
$\tan x+\tan^2 x+...+\tan^n x$ *en fonction de x et de n.Prouver que :*
$\left|\tan x+\tan^2 x+...+\tan^n x-\frac{\tan x}{1-\tan x}\right|=\frac{\tan^{n+1} x}{1-\tan x}$

2. Etudier le sens de variation de la fonction g_p*, ou* $p\in N^*$*, définie sur* $[0;\alpha]$ *par :*

$g_p(x)=\frac{\tan^p x}{1-\tan x}$*.En déduire que, pour tout* $p\in N^*$ *et pour tout x de* $[0;\alpha]$*,*

$0\le\frac{\tan^p x}{1-\tan x}\le\frac{\tan^p \alpha}{1-\tan\alpha}$.

3. Montrer que, pour tout $n\in N^*$*,*

$\left|S(\alpha)-\int_0^{\alpha}\frac{\tan x}{1-\tan x}dx\right|\le\frac{\alpha\tan^{n+1}\alpha}{1-\tan\alpha}$*. En déduire l'existence de la limite de la suite* $S_n(\alpha)$ *quand n tend vers +∞.*

4. On se propose de préciser cette limite.

a. Montrer que la fonction $x\to\ln(\cos x-\sin x)$ *est dérivable sur l'intervalle* $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ *.Calculer sa dérivée.*

b. On pose :

$A(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}dx$ *Et* $B(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}dx$.

Calculer $B(\alpha)-A(\alpha)$ *et* $B(\alpha)+A(\alpha)$ *puis* $A(\alpha)$ *et* $B(\alpha)$*.En déduire la valeur de la limite de la suite* $S_n(\alpha)$ *quand n tend vers +∞.*

<u>PROBLEME</u>

Soit la fonction numérique définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x)=\frac{\ln x}{x-\ln x}$; $f(0)=-1$
(ln désigne le logarithme népérien).
On note C sa courbe représentative dans un repère ortho normal $(O,\vec{u},\vec{v})$ *.L'unité est de 2cm.*

<u>A) Etude d'une fonction auxiliaire</u>

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ *par* $g(x)=x-\ln x-1$.

1) *Etudier le sens de variation de la fonction g.*
2) *En déduire que* $g \geq 0$ *pour tout x de l'intervalle* $]0;+\infty[$.

B) Etude de f

1. *Montrer que la fonction f est continue en 0.Montrer que f est dérivable en 0 ; en précisant la valeur de sa dérivée en 0.*
2. *Calculer*$lim_{+\infty} f(x)$.
3. *Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.*
4. *Tracer la courbe C.*

C) Etude d'une primitive

On pose, pour tout $x \geq 0$, $F(x)=\int_1^x f(t)dt$.

On ne cherchera pas à calculer F(x).

1) *Etudier le sens de variation de la fonction F sur l'intervalle* $[0 ; +\infty[$.
2) *Montrer en utilisant la fonction g de la partie A, que pour tout réel t de l'intervalle* $[0 ; +\infty[$ *on a* $-1 \leq f(t) \leq t-1$.*Vérifier que cette double inégalité est encore vraie pour* $t=0$.*En déduire que* $\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$.

3)a) *Prouver que pour tout* $t \geq 1$ *on a* $\frac{lnt}{t} \leq f(t)$.

b) *Calculer* $\int_1^x \frac{lnt}{t}dt$.*En déduire*$lim_{x\to+\infty} F(x)$.

3)*On note* (u_n) *la suite définie pour* $n \geq 1$ *par* :$u = \int_n^{n+1} f(t)dt$

a)*Montrer que pour tout* $n \geq 3$*, on a :* $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$,

b)*Montrer que la suite* (u_n) *converge vers zéro.*

4)*On pose, pour tout entier naturel* $n \geq 2$:

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n-1} u_p = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_{n-1}$$

a) *Exprimer* S_n *a l'aide de F.*
b) *En déduire que limite* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

PROBLEME 2

On considère l'application f de $]-1;+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $\begin{cases} f(x) = \frac{ln(1+x)}{x} , si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Partie A

1. *Etudier la continuité de f sur* $]-1;+\infty[$
2. *Etudier la dérivabilité de f sur* $]-1;+\infty[$.*Expliciter la fonction dérivée f'.*
3. *On note g l'application de* $]-1;+\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = \frac{x}{x+1} - ln(1+x)$.

a. *Etudier les variations de g et le signe de* $g(x)$. *(On ne demande pas d'étudier la limite de g en – 1)*
b. *En déduire les variations de f .*

4. *Etudier les limites de f aux bornes de l'intervalle* $]-1;+\infty[$.

5. *Construire la courbe (C) . Préciser les asymptotes et la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses .*
6. *Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .*

Partie B

1. *Démontrer qu'il existe un unique nombre réel α de l'intervalle $]0;1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.(On ne demande pas de calculer α).*
2. *On considère la suite (u_n) définie par :*
   $u_0=\frac{1}{2}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ $u_{n+1}=f(u_n)$.

a. *Démontrer que :$\forall\, n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\leq 1$.*

b. *Démontrer que :$\forall\, n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.*
(On remarquera que $u_{n+1}-\alpha=f(u_n)-f(\alpha)$ et on utilisera le résultat $-\frac{1}{2}\leq f'(x)\leq 0.$)

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

PROBLEME 3

A) *On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par*

$$g(x)=1+x^2-2x^2lnx.$$

a.) *Dresser le tableau de variation de g.*

b.) *Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique λ telle que $1.89<\lambda<1.90$*

c.) *Déduire de ce qui précède le signe de g(x).*

2.) On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{lnx}{1+x^2}$

a.) *Dresser le tableau de variation de f.*

b.) *Vérifier que :$f(\lambda)=\frac{1}{2\lambda^2}$. En déduire un encadrement de f(λ) d'amplitude 10^{-3}.*

c.) *Tracer la représentation graphique de f dans un plan rapporté a un repère en orthogonal en adoptant 2cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20cm pour unité sur l'axe des ordonnées.*

B) *On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt.$*

1.) *Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et préciser F'(x).*
En déduire le sens de variation de F.

2.) *a.) Vérifier que pour $t\geq 1$ on a : $\frac{lnt}{(1+t)^2}\leq f(t)\leq\frac{lnt}{t^2}$*

c.) *Pour $x>0$,on pose*
$I(x)=\int_1^x\frac{lnt}{t^2}\,dt$ *et* $J(x)=\int_1^x\frac{lnt}{(1+t)^2}dt$

A l'aide d'une intégration par parties, Calculer I(x).

A l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité $\frac{1}{(1+t)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}$ pour tout $t>0$.

Calculer J(x).

c) *Déduire de ce qui précède que, pour $x>1$, on a :*

$ln2 + ln\frac{x}{x+1} - \frac{lnx}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

d) *On admet que :*$lim_{+\infty} F(x) = l$.
Sans calculer l vérifier que
$ln2 \leq l \leq 1$.

3.) *Soit G la fonction numérique définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$.

a) *Calculer G'(x) pour x*> 0.

b) *Vérifier que pour tout x*> 0, *G(x)=0.*

c) *Déduire de ce qui précède la limite de F en 0.*

<u>problème 4</u>

Soit u la fonction définie par $u(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1) *Prouver que u est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et calculer u'(x) .*

2) *On pose pour tout réel x de* $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$ $f(x) = u(tanx)$.

a. *Montrer que f est dérivable et calculer f'(x) pour x* $\in \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$.

b. *En déduire que f(x) = x pour tout x de* $\left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$.

c. *Calculer* $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

3) *Soit* (I_n) *la suite définie par* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ *. si n*$\neq 0$ *et* $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

a. *Montrer que* $I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}$ *. Calculer alors* I_2 , I_4 , I_6 .

b. *Montrer que pour tout entier p :* $0 \leq I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1}$*. En déduire la limite de* I_{2p} *lorsque p tend vers* $+\infty$.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

EXERCICE 1

Résoudre les systèmes suivants.

$\begin{cases} 4e^x - 3e^y = 9 \\ 2e^x + e^y = 7 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} e^{2x} - 7e^{y+1} = -10 \\ x - y = 1 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ e^{x-y} = \frac{2}{5} \end{cases}$

EXERCICE 2

Résoudre dans R les inéquations suivantes :

a) $e^{-x} \geq 2$ *b)* $e^{x^2-1} < 1$ *c)* $e^{x^2-3} \geq e^{2x}$ *d)* $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$

EXERCICE 3

Résoudre dans R les équations suivantes :

a) $5^x = 1$ *b)* $(0,1)^x = 10$ *c)* $3^x = 2^{-x+3}$

EXERCICE 4

1) *Démontrer que :* $\forall\, x \in]0;+\infty[\,,\ \frac{1}{x+1} < ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$.

   En déduire que : $\forall\, x \in]0;+\infty[\,, \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} < e < \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.
2) *Démontrer que :* $\forall\, n \in \mathbb{N}^{*}\ \frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = exp\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right), si\ x \in \mathbb{R} - \{-1;1\} \\ f(1) = f(-1) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f.

1) *Démontrer que f est dérivable à gauche en 1 et à droite en – 1.*
2) *Etudier f et tracer (C).*

EXERCICE 6

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(0) = 0 \\ f(x) = xe^{-x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ *et* $+\infty$.

2. Etudier la continuité de f en 0.

3. Etudier la dérivabilité de f en 0.

4. Etudier les variations de f.

5. Montrer que la droite d'équation $y = x+1$ *est asymptote à la courbe de f*

(on sera amené à poser $x = \frac{1}{t}$*).*

6. Tracer la courbe de f dans le plan muni d'un repère ortho normal d'unité 3 cm.

EXERCICE 7: *Soit* U_n *une suite géométrique croissante de raison q à termes positifs telle que :* $\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 63 \end{cases}$

1) *a)Montrer que* $\begin{cases} u_1 \times u_3 = 144 \\ u_1 + u_3 = 51 \end{cases}$

   b) En déduire u_1 *et* u_3 *puis q.*

2) *Déterminer le terme général de* $(u_n)_{n\geq 1}$ *puis étudier la convergence de la suite* $(S_n)_{n\geq 2}$ *définie par :* $S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$

3) *Soit* $(V_n)_{n\geq 1}$ *la sa suite définie par* $V_n = \ln(u_n)$

Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ *est une suite arithmétique.*

Problème 1 *Soit f la fonction définie par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} & si \quad x \prec 0 \\ f(x) = x^2 \ln x & si \quad x \succ 0 \end{cases}$ *et* $f(0) = 0$

1) *a) Etudier la continuité de f en 0.*
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0.Interpréter géométriquement les résultats obtenus.
2) *a) calculer les limites de f en* $-\infty$ *et* $+\infty$
   b) Calculer f′(x), on précisera le domaine de dérivabilité de f.
   c)Etudier le signe de f′(x) et établir le tableau de variation de f.
3) *a)Etudier les branches infinies de la courbe représentative de f.*
   b) Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
   (Unité 4cm)
   c)α étant un réel tel que : $0 \prec \alpha \prec 1$*, calculer en cm² l'aire q (α) de l'ensemble des points* $M(x,y)$ *tels que :* $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$ *à l'aide d'une intégration par parties.*
   d) Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} q(\alpha)$ *et interpréter ce résultat.*

4) *Soit g la restriction de f sur* $\left]0; \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$

a) *Montrer que g admet une bijection réciproque* g^{-1}. *Préciser son ensemble de définition J.*
b) *Etudier la dérivabilité de* g^{-1} *sur J.*
c) *Représenter sur la même figure* g^{-1}.

Problème : 2 *Soit f la fonction définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x \ln|x|}{x+1} \; si \; x \in]-\infty;1] - \{-1\} \\ f(x) = (x^2 - x)e^{\frac{1}{x-1}} \; si \; x \in]1;+\infty] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Partie : A

1) *Montrer que f est définie sur* $R-\{-1\}$ *et calculer* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), et \lim\limits_{x\to1} f(x)$.
2) *Etudier la continuité de f en 0 et en 1 .On pourra poser* $X=\dfrac{1}{x-1}$
3) *Etudier la dérivabilité de f en 0 et 1 puis interpréter ces résultats.*
4) *Etudier la nature des branches infinies.*

Partie : B

1) *Soit* $h(x)=\ln|x|+x+1$. *Etudier les variations de h.*
2) *Montrer que l'équation* $h(x)=0$ *admet une unique solution* α *et vérifier que* $0{,}27 \prec \alpha \prec 0{,}28$
3) *Déterminer le signe de h(x) suivant le signe de x.*
4) *a)Calculer* $f'(x)$ *sur* $]-\infty;1]-R-\{-1\}$

   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ *sur* $]-\infty;1]-R-\{-1\}$

   c)Calculer $f'(x)$ *sur* $]1;+\infty]$
5) *dresser le tableau de variation de f*
6) *résoudre l'équation f(x)=0*
7) *tracer la courbe C*

Problème : 3 *Les parties A et B du problème ne sont pas indépendantes.*

PARTIE A

1) *Etudier sur* $\mathbb{R}$ *le signe de* $4e^{2x} - 5e^{x} + 1$.
2) *Soit* φ *la fonction définie par :*

   $\varphi(x) = lnx - 2\sqrt{x} + 2$

   a) Déterminer son domaine de définition Dj et calculer ses limites aux bornes de Dj.

   b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variations.

   c) En déduire son signe.

PARTIE B

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{e^x}{2e^x-1} & si\ x \le 0 \\ 1 - x\sqrt{x}lnx & si\ x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

1) a) Déterminer Df le domaine de définition de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de Df et étudier les branches infinies de (C f).

c) Etudier la position de (C f) par rapport à l'asymptote non parallèle aux axes dans $]-\infty; 0]$

2) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3) Déterminer la dérivée de f et dresser le tableau de variations de f.

4) Construire dans le repère les asymptotes, la courbe (C f) et les demi-tangentes. On remarquera que f(0) = 1et f'(0) = 1.

5) Calculer en cm2 l'aire du domaine délimité par (C f), la droite d'équation
y = x et les droites d'équations x = -ln8 et x = - ln4.

Problème : 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$ *et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *.*

1. *a)Etudier les variations de la fonction f.*
   En déduire que pour tout réel x on a : $0 < f(x) \leq 1$ *.*
   b) Tracer la courbe C.

   2. On considère la fonction g définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $g(x) = ln(tanx)$

a) *Montrer que g est dérivable sur* $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et calculer g'(x) pour tout* $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$
b) *Montrer que g admet une bijection réciproque h définie sur* $\mathbb{R}$ *. Calculer h(0).*
c) *Montrer que h est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que pour tout x de* $\mathbb{R}$ *2h'(x)=f(x).*
   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ $\int_0^x f(t)dt = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$ *.*

Soit n un entier naturel non nul et F_n *la fonction définie sur* $[0,+\infty[$ *par*
$F_n(x) = \int_0^x f^n(t)dt$ *.*

1) *a)Calculer* $F_1(x)$ *en fonction de h(x) et montrer que* $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$ *.*
   b) Soit K la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $K(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$ *. Montrer que K'(t)=*$f^2(t)$*.*
   Calculer alors F_2 *et montrer que* $\lim_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$*.*
2) *a)Montrer que l'image de l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par* F_n *est* $\left[0;\lim_{x\to+\infty} F_n(x)\right[$
   b) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul on a : $f(t) < 2e^{-t}$ *,*
   *En déduire, en utilisant **I-1)a)** , que pour tout réel x de* $[0,+\infty[$ *on a* $F_n(x) \leq 2$ *et*
   $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ *est finie*
   c)Vérifier que pour tout réel positif ou nul on a : $f(t) \geq e^{-t}$*.*
   Montrer alors que pour tout réel positif on a : $\frac{1-e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$ *et en déduire que* $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$
   est non nulle.
3) *Soit la suite* (u_n) *définie sur* N^* *par* $u_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$

a) *Donner la valeur de* u_1 *et* u_2 *.*
b) *En remarquant que* $4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$ *, montrer que pour tout n de* N^* *et pour tout t de* $[0,+\infty[$ *on a :*$f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t)$
   A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de N^* *et tout x de*

$$\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt$$

c) *En déduire que pour tout* n *de* N^* *et tout* x *de* $[0,+\infty[$ *on a :* $(n+1)F_{n+2}(x)-nF_n(x)=K(x)f^n(x)$

Montrer alors que : $u_{n+2}=\dfrac{n}{n+1}u_n$.

4) a) *Soit* n *un entier naturel non nul .Déterminer, en fonction de* n *les deux termes* u_{2n+1} *et* u_{2n+2}.

b) *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

c) *Montrer que pour tout* n *de* N *on a :* $\dfrac{2n}{2n+1}\leq\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}\leq 1$.

En déduire la limite de $\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$

d) *Montrer alors que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2\times4\times6\times...(2n)}{1\times3\times5...(2n-1)}\right)^2\times\dfrac{2}{2n+1}\right]=\pi$

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE : 1

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur R l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée.

$a.)\,(E): y'-3y=0 \quad et \;\; y(0)=2$

$b.)\,(E): 3y'+y=0 \quad et \;\; y(1)=e$

$c.)\,(E): y'+y\ln 2=0 \quad et \;\; y(1)=1$

$d.)\,(E): y'=y \quad et \;\; y(1)=-1$

EXERCICE : 2

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur R l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données.

$a.)\,(E): y''+2y'+y=0, \;\; y(0)=-1 \; et \; y'(0)=0$

$b.)\,(E): y''+16y=0, \quad y(0)=0 \; et \; y'(0)=-1$

$c.)\,(E): y''-(\ln 2)^2=0, \;\; y(0)=1 \; et \; y(2)=1$

$d.)\,(E): 4y''+y=0, \quad y(\frac{\pi}{3})=1 \; et \; y(\frac{\pi}{2})=1$

$e.)\,(E): y''+2y'-3y=0, \;\; y(0)=3 \; et \; y'(0)=-1$

$f.)\,(E): y''+y'+y=0, \quad y(0)=-1 \; et \; y(0)=\sqrt{3}$

EXERCICE : 3

On considère l'équation différentielle (E) : $y'+2y=e^{-2x}$.

1. *Vérifier que la fonction* $g : x \to (x+1)e^{-2x}$ *est solution sur R de (E).*
2. *Démontrer qu'une fonction* $f+g$ *est solution de l'équation de (E) si et seulement si la fonction* f *est solution de l'équation différentielle :* $y'+2y=0$.
3. *En déduire les solutions sur R de (E).*

EXERCICE : 4

Soit la fonction $f : x \to (x+1)e^{-2x}$.

1. *Déterminer les nombres réels a et b pour que* f *soit solution sur R de l'équation différentielle (E)* $y''+ay'+by=0$.

2. *Démontrer pour tout entier naturel n non nul, la dérivée d'ordre n de n de* f *est solution de (E).*

3. *Déterminer parmi les solutions de* f *, celle qui est solution de (E).*

EXERCICE : 5

Soit α *un nombre réel tel que :* $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$.*Résoudre sur R l'équation différentielle :*

$(1+\cos 2\alpha)y''-2y'\sin 2\alpha+2y=0$.

Exercice : 6

Soit θ *un nombre réel tel que* $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$.

a. *Résoudre d ns C , l'équation :*
$z^2cos^2\theta - 2zsin\,\theta cos\theta + 1$=*0.*

Déterminer le module et un argument des solutions éventuelles de cette équation.

b. *Résoudre l'équation différentielle :*
$(1+\cos 2\theta)y''-2\sin 2\theta y'+2y=0$.

EXERCICE : 7

1. *Résoudre sur R l'équation différentielle (E)* $y''+16y=0$

2. *Déterminer la solution f qui vérifie : f (*$\frac{\pi}{4}$*)=-2 et f' (π)=8.*

3. *Résoudre dans* $[0;\pi]$ *l'équation f(x)=*$\sqrt{2}$.

EXERCICE : 8

1. *Résoudre sur R l'équation différentielle (E)*

$y''+2y'+5y=0$.

2. *Déterminer la solution f qui vérifie : f(0)=1 et f'(0)=-1*
3. *On pose :* $F(x) = -\frac{1}{5}[f'(x) + 2f(x)]$

a. *Démontrer que* F *est une primitive de f sur R ; expliciter* $F(x)$.

b. *En déduire le calcul de* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

EXERCICE : 9

Soit l'équation différentielle (E) $y'+3y = 10\cos x$..

a. *Résoudre l'équation différentielle (F) :* $y'+3y = 0$
b. *Déterminer les nombres réels* α *et* β *tels que la fonction g définie par :* $g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x$ *soit une solution de l'équation (E)*
c. *Démontrer qu'une fonction f est une solution de (E) si et seulement si* $f - g$ *est une solution de (F).*
d. *En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E*

EXERCICE 10 *Soit* θ *un réel tel que* $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

1) *Résoudre dans* **C** $z^2\cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$. *Déterminer module et argument des solutions.*
2) *Résoudre* $(1+\cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$

EXERCICE 11

On se propose de résoudre $(E): y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) *Déterminer la solution de* $(E_0): y' - 2y = 0$ *prenant la valeur 1 en 0*
2) *Soit f dérivable sur IR telle que f(0)=ln2 et g définie par* $f(x) = e^{2x}g(x)$.*Calculer* $g(0)$, $f'(x)$*en fonction de* $g'(x)$ *et* $g(x)$
3) *Montrer que* f *est solution de* (E) *si et seulement si* $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. *En déduire l'expression de g(x) puis celle de f'(x) de telle sorte que f soit solution de (E).*

EXERCICE 12

1) *Résoudre* (E) $y'' + 2y' + 5y = 0$. *Déterminer la solution f telle que f(0)=1,* $f'(0 = -1)$
2) $F(x) = -\frac{1}{5}(f'(x) + 2f(x))$. *Démontrer que F est une primitive de f sur IR. Expliciter F(x).*

En déduire le calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

EXERCICE 13 *BAC 2009*

1) *Résoudre l'équation différentielle* $(E): y'' + 2y' + y = 0$

2) Soit $(E'): y''+2y'+y=x+3$ déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x)=ax+b$ soit solution de (E')

3) a) démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g-h$ est solution de (E)

b) Résoudre alors (E')

c) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=2$ et $f'(0)=-1$

4) Soit $k(x)=(x+2)e^{-x}$

a) Etudier les variations de k

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de k au point d'abscisse 0

c) Démontrer que le point I(0 ;2) est un point d'inflexion de la courbe

d) Tracer la courbe et la tangente

<u>EXERCICE 14</u> BAC S2 2008

1) Soient les équations différentielles $(E_0): y'+y=0$ et $(E); y'+y=e^{-x}\cos x$

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x)=(a\cos x+b\sin x)e^{-x}$ soit solution de (E)

b) démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-h$ est solution de (E_0)

c) résoudre (E_0)

d) Déduire des questions précédentes la solution générale de (E)

e) Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0)=0$

3) Soit $l(x)=e^{-x}\sin x$

a) Exprimer $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

b) Etudier les variations de l sur $[0;2\pi[$

c) Calculer $\int_0^{2\pi} l(x)\,dx$

<u>EXERCICE 15</u> Soit la fonction définie sur IR par $g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x réel
2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
3) Dresser le tableau de variations de g
4) Donner le signe de $g(x)$

<u>PARTIE B</u>

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

1) *Montrer que* $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$
2) *Déterminer*
a) *La limite de* f *en* $-\infty$
b) *La limite de* f *en* $+\infty$. *On pourra remarquer que si on pose*

$X = 1 + 2e^{x}$, $f(x)$ *s'écrit* $4\dfrac{X}{(X-1)^2}\dfrac{\ln X}{X}$

3) *Dresser le tableau de variations de* f
4) *Tracer* Cf *dans un repère orthonormé*
5) *Soit* α *un réel strictement positif.*
a) *Vérifier que pour tout réel* x, $\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right)$ *en déduire la valeur de*

$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}dx$

b) *Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire de la partie du plan limitée par* Cf, $x'x$ *et les droites d'équations* $x = 0$ *et* $x = \alpha$

PARTIE C

On considère l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 2\left(\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\right)$

1) *Vérifier que* f *est solution de* (E)
2) *Montrer qu'une fonction* h *est solution de* (E) *si et seulement si* $h - f$ *est solution de* $(E'): y' + 2y = 0$
3) *Résoudre* (E') *et en déduire les solutions de* (E)

EXERCICE 16

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale

$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})]dx$ *à l'aide d'une équation différentielle :*

1. *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' + 2y' + 2y = 0$ (E_1)
2. *On considère l'équation différentielle* $y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ (E)

a. Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 *définie par :* $\forall x \in R$

$f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ *soit solution de l'équation (E) .*

f désignant une numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.

b.Démonter que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1) .

En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E).

Vérifier que la fonction f de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $f'(0) = 2$ *et*

$f(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos(x - \frac{\pi}{4})$. *Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.*

3. *En déduire la valeur de l'intégrale I.*

EXERCICE : 17

1) *Déterminer l'ensemble des solutions définies sur R de l'équation différentielle :*
   $y'' + y = 0$ (1).
2) *Etant donné une fonction numérique de variable réelle* x *, g deux fois dérivable sur*
   $\forall\, x \in R^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$.
   Exprimer $f''(x)$ à $l'aide\ de$ $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ *et de x.*
3) *On considère l'équation différentielle.*
   $y'' = -\frac{1}{x^4}y$ *(2)*
   a) *Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur* R^* *est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par :* $\forall\, x \in R^*$; $f(x) = xg(\frac{1}{x})$ *est solution de (1).*
   b) *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation de (2) définies sur chacun des intervalles* et $]0, +\infty[$.
4) *Soit g une solution de l'équation (2) définie sur* $]0, +\infty[$. *Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction : x* $\frac{1}{x^4}g(x)$.

<u>PROBLEME : 1</u>

A) *Soit (E) l'équation différentielle du second ordre :*
 $y'' - 3y' + 2y = 0$ *(E).*

1. *a) Quelles sont les solutions de (E) ?*

   b) Quelle est la solution de (E) dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse x = 0 la même tangente que la courbe (C′) représentative de y = e^{3x} *? On dit que (C) et (C′) sont tangentes.*

   2. Représenter, dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C′) dont on précisera les positions relatives.

   3. λ *étant un réel strictement positif, soit* h_λ *les fonctions telles que :*

   $h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}$.

a. *Montrer que* h_λ *est solution de (E).*
b. *Soit* C_λ *la courbe représentative de* h_λ. *Après avoir calculé ,en fonction de* λ *les coordonnées du point commun à des courbes* C_λ *et (C′),*
   montrer que ces courbes sont tangentes en ce point .
c. *Préciser les positions relatives de* C_λ *et (C′.*

B) *Soit (E′) l'équation différentielle :* $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$ *(E′)*

1. *Trouver un polynôme P du second degré solution de l'équation (E′).*
2. *On pose f(x) = g(x)* $-\frac{1}{2}x^2 - x$.

Montrer que f est solution de (E′) si et seulement si g est solution de (E). En déduire les fonctions f solutions de (E′).

3. *Déterminer la solution de (E′)*

dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0 , 2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

PROBLEME 2

Partie A

1. (E_0) *désigne l'équation différentielle :* $y'' + 2y' + y = 0.$.
   Déterminer les solutions générales de (E_0).
2. *(E) est l'équation différentielle* $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$
   a. *Vérifier que la fonction h définie sur R par* $h(x) = x^2e^{-x}$ *est solution de (E).*
   b. *Démontrer que* φ *est une solution de (E) si et seulement si* $g = \varphi - h$ *est solution de* (E_0).
   c. *Déterminer toutes les solutions de (E).*
   d. *Déterminer la solution* f_0 *de (E) satisfaisant aux conditions initiales* $f_0(0) = 4$ *et* $f'_0(0)=0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par : $f(x)= (x+2)^2e^{-x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'unité graphique étant 1 cm)

1. *Etudier les variations de f et tracer (C) avec soin.*
2. *En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive F de f sur R. (On calculera* $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t)dt$*)*
3. *Pour tout entier naturel n , on pose :* $I_n=\int_0^n f(t)dt$.
   a. *Exprimer* I_n *en fonction de n et interpréter graphiquement.*
   b. *Etudier la convergence de la suite* (I_n)*, puis en déduire l'aire de l'ensemble des points M(x,y) du plan tels que* $x\leq 0$ *et* $0\leq y \leq f(x)$.

Partie C

On se propose d'étudier la convergence de la suite (u_n) *définie, pour tout entier naturel n non nul par*

1. *Vérifier que pour tout entier naturel n non nul , on a* $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

   et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n + \frac{4e-9}{ne}$

2. *Etablir que , pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel k tel que* $0 \leq k \leq n-1$ *,* *on a :* $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

3. *Démontrer que , pour tout entier naturel non nul n , on a :* $u_n \leq \int_0^1 f(t)dt \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$.

4. *En déduire pour tout entier naturel n non nul on a :* $I_1 - \frac{4e-9}{ne} \leq u_n \leq I_1$.

5. *Déterminer la convergence de la suite* u_n *, puis préciser sa limite .*

PROBLEME 3

Partie : I On donne un entier naturel n strictement positif et on considère l'équation différentielle $(E_n): y'+y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ *;*

1) *On fait l'hypothèse que deux fonctions f et g définies et dérivables sur R, vérifient pour tout réel x :* $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a) *Montrer que g est solution de* (E_n) *si et seulement si, pour tout réel x* $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.

b) *En déduire la fonction h associée à une solution de g de* (E_n) *,sachant que h(0)=0.Quelle est alors la fonction g ?*

2) *Soit* φ *une fonction dérivable sur R.*

a) *Montrer que* φ *est solution de* (E_n) *si et seulement si* $\varphi - g$ *est solution de (F) :* $y' + y = 0$.

b) *Résoudre (F).*

c) *Déterminer la solution générale de l'équation* (E_n) *.*

d) *Déterminer la solution f de l'équation* (E_n) *vérifiant f(0)=0*

Partie II : On pose pour tout réel x, $f_0(x) = e^{-x}$ *et* $f_1(x) = xe^{-x}$ *.*

1) *a)Vérifier que* f_1 *est solution de l'équation différentielle* $y'+y = f_0$ *.*

b) Pour tout entier n strictement positif on définit la fonction f_n *comme solution de l'équation différentielle* $y'+y = f_{n-1}$ *vérifiant* $f_n(0) = 0$ *.*

En utilisant la partie I, montrer par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$ *:* $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ *.*

2) *Pour tout entier naturel n, on pose* $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$ *;*

a) *Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x de l'intervalle* $[0;1]$

$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.

b) *En déduire que* $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, *puis déterminer la limite de la suite* (I_n).

c) *Montrer pour tout entier naturel k non nul, l'égalité :* $I_k - I_{k-1} = \frac{1}{k!}e^{-1}$;

d) *Calculer* I_0 *et en déduire que :* $I_n = 1 - \frac{1}{e}\sum_{k=}^{n}\frac{1}{n!}$

e) *En déduire que* $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=}^{n}\frac{1}{k!} = e$

CALCUL INTEGRAL

1. 1. Questions de cours : équations différentielles

Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1. Les solutions de l'équation différentielle : y′ + 4y = 0 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = e^{-4x} + C$$

où C est une constante réelle.

2. La fonction définie pour tout x réel par $f(x) = e^{-7x} + 5$ *est l'unique solution de l'équation différentielle :*

$$y' = -7y + 35 \text{ et } y(0) = 5.$$

1. 2. Calcul de primitives 1

Déterminez une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants : (pensez à vérifier vos réponses)

1. $f(x) = 12x^5 - 4x^3 + 1$; $I = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 3 - \frac{4}{x^2}$; $I =]0\ ;+\infty[$

3. $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$

4. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1\ ;+\infty[$

5. $f(x) = \frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I = \mathbb{R}$

16. $f(x) = -\sin x + 2\cos x$; $I = \mathbb{R}$

17. $f(x) = \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I = \mathbb{R}$

18. $f(x) = -1 + \frac{3}{x^2}$; $I =]0\ ;+\infty[$

19. $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3$; $I = \mathbb{R}$

20. $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} + \sin x$; $I = \left]-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right[$

6. $f(x) = -\cos x + 2\sin x$; $I = \mathbb{R}$

7. $f(x) = \cos x \sin^3 x$; $I = \mathbb{R}$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

9. $f(x) = (2x+1)^2$; $I = \mathbb{R}$

10. $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 2}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$

11. $f(x) = (3x-1)^2$; $I = \mathbb{R}$

12. $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3x^2 + 1}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$

13. $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3 - 1}}$; $I =]1 ; +\infty[$

14. $f(x) = \dfrac{-5x}{(x^2+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$

15. $f(x) = \cos x \sin^4 x$; $I = \mathbb{R}$

21. *f(x) = 3 + cos x,* $I = \mathbb{R}$

22. *f(x) = sin 3x,* $I = \mathbb{R}$

23. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

24. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$, $I =]3 ; +\infty[$

25. $f(x) = x^2(x^3+2)^3$, $I = \mathbb{R}$

26.
$f(x) = 2\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) - 4\sin\left(\dfrac{x+\pi}{3}\right) + \dfrac{5}{3}\cos\dfrac{2\pi}{3}$

27. $f(x) = \dfrac{5}{7\sqrt{3x-1}} - 4$, $I = \left]\dfrac{1}{3} ; +\infty\right[$

28. $f(x) = \dfrac{3}{(2x-4)^3} + \dfrac{1}{4(5-x)^7}$, *I=] 2 ; 5[*

29. $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{(2x^3 + 3x^2)^4}$, *I=]0 ;* $+\infty$ *[*

30. $f(x) = \dfrac{5x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{x^3}$, *I=]0 ;* $+\infty$ *[*

Quelques réponses

1. *Solution :* $F(x) = 2x^6 - x^4 + x + K$.

2. $F(x) = 3x + \dfrac{4}{x} + K$.

3. $f(x) = \dfrac{3}{2}\left[2x\left(x^2+1\right)^{-3}\right] \Rightarrow F(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{-3+1}\left(x^2+1\right)^{-3+1} + K = -\dfrac{3}{4\left(x^2+1\right)^2} + K$.

4. $f(x) = \left[2x\left(x^2-1\right)^{-1/2}\right] \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}+1}\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}+1} + K = 2\sqrt{x^2-1} + K$.

5. $f(x) = 3\left[(2x+1)\left(x^2+x+1\right)^{-1/2}\right] \Rightarrow F(x) = \dfrac{3}{-\dfrac{1}{2}+1}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{1}{2}+1} + K = 6\sqrt{x^2+x+1} + K$.

6. $F(x) = -\sin x - 2\cos x + K$.

7. $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + K$.

8. $F(x)=\tan x+\sin x+K$.

9. $f(x)=\frac{1}{2}\left[2(2x+1)^2\right]\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{2+1}(2x+1)^{2+1}+K=\frac{1}{6}(2x+1)^3+K$.

10. $f(x)=x^2-4-\frac{2}{x^2}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{2}{x}+K$.

21. $F(x) = 3x + \sin x$.

22. $F(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$.

23. $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ *avec* $u(x) = \cos x$ $F(x)=\frac{1}{u(x)}=\frac{1}{\cos x}$.

24. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2-3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\times 2x\times(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}u'(x)u(x)^{-\frac{1}{2}}$, $u(x) = x^2 - 3$, $n - 1 = -1/2$, $n = ½$, $F(x)=u(x)^{\frac{1}{2}}=(x^2-3)\frac{1}{2}=\sqrt{x^2-3}$.

25. $u(x) = x^3 + 2$, $u'(x) = 3x^2$, $n - 1 = 3$, $n = 4$, $G(x) = (x^3 + 2)^4$, $g'(x) = 4\times 3x^2\times(x^3 + 2)^3$, $F(x) = \frac{1}{4}G(x)=\frac{1}{4}\left(x^3+2\right)^4$.

1. 3. Calcul de primitives 2

1. Montrer grâce à la formule de duplication que pour tout réel x, $\cos^2 x=\frac{1+\cos(2x)}{2}$. *En déduire une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction f :* $x\to\cos^2 x$.

2. En utilisant la question 1. montrer que pour tout x, $\cos^4 x=\frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}$. *En déduire une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction* f^2.

3. Montrer que pour tout x, $\cos^3 x=\cos x-\cos x\sin^2 x$. *En déduire une primitive sur* $\mathbb{R}$ *de la fonction g :* $x\to\cos^3 x$.

4. A l'aide d'une intégration par parties, donner une primitive sur $\mathbb{R}$ *de la fonction h définie par* $h(x)=2x\sin(3x)$.

1. 4. Calcul d'intégrales

Calculez les intégrales suivantes (la rédaction doit être détaillée ; vous pouvez cependant vérifier vos réponses à l'aide de la calculatrice) :

a) $\int_{-3}^{0}(x^3+2x^2-1)dx$; b) $\int_{1}^{2}\frac{x-1}{x^2-2x+2}dx$; c) $\int_{1}^{e}\frac{\ln t}{t}dt$; d) $\int_{1}^{2}2e^{3x}dx$; e) $\int_{0}^{3}\frac{5}{\sqrt{2x+3}}dx$;

f) $\int_{1}^{2}(x+1)\ln x\,dx$; g) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$; h) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}dx$; i) $\int_{-2}^{0}(2x^3-x+1)dx$; j) $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3u-1)^2}du$; k) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$; l) $\int_{0}^{2}3e^{2x}dx$;

m) $\int_{0}^{4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$; n) $\int_{1}^{2}x^2\ln x\,dx$; o) $\int_{1}^{e}\frac{\ln 2t}{t^2}dt$; p) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,e^{\sin x}dx$;

q) $\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt$; r) $\int_{1}^{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+2x)^2}dx$; s) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)du$.

t) $\int_{0}^{1}xe^{2x}dx$ u) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x\,dx$, v) $\int_{1}^{2}\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

__1. 5. Encadrement-1__

Pour tout réel positif a, on définit $I(a)=\int_{1}^{a}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(a)=\frac{\ln(a)-1}{a^2}+1$.

2. En déduire la limite de I(a) quand a tend vers $+\infty$.

3. On définit maintenant $J(a)=\int_{1}^{a}\frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$. *En utilisant (avec justification) que pour tout x supérieur à 1,* $x^2\le x^2+1\le 2x^2$, *montrer que* $\frac{1}{2}I(a)\le J(a)\le I(a)$.

__1. 6. Encadrement-2__

Soit f la fonction définie sur [1 ; $+\infty$ *[par :* $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$.

Pour tout $\alpha>1$, *on considère l'intégrale :* $I(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}f(x)\,dx$.

1. Interpréter géométriquement le nombre $I(\alpha)$.

2. Démontrer que, pour tout $x\in[1;+\infty[$, *on a :* $e^{-x}\le f(x)\le xe^{-x}$.

3. En déduire pour tout $\alpha>1$ *un encadrement de* $I(\alpha)$.

4. Quelle est la limite de $I(\alpha)$ *lorsque* α *tend vers* $+\infty$ *?*

5. Déterminer la dérivée par rapport à α de I. Quel est son signe ? Dresser le tableau de variation de I.

.

1. 7. argchx

Soit la fonction $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

1. Montrer que f existe sur $[1,+\infty[$ *; calculer sa dérivée f'(x).*

2. Déduisez en la valeur de $K=\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

3. Pensez-vous pouvoir utiliser une méthode semblable pour calculer l'intégrale

$K'=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ *?*

1. 8. fonction trigo

1. On pose F(x) = ax²cosx + bxsinx + c cosx (a, b, et c sont trois constantes réelles). Calculer F'(x).

2. Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de x²sinx.

3. En déduire le calcul de $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x dx$.

1. 9. Intégrale et suite 1

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

1. Déterminer une fonction polynôme P, de degré inférieur ou égal à 3 qui a même valeur et même nombre dérivé que f en 0 et 1.

2. Soit k la fonction définie par $k(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+x-1$. *Factoriser k et en déduire la position relative de* C_f *et* C_P*, les courbes représentatives de f et P.*

3. A l'aide d'un encadrement de 1+x pour x dans [0 ; 1] montrer que $\frac{1}{240}<\int_0^1 k(x)dx<\frac{1}{120}$.

4. Calculer $\int_0^1 f(x)dx$ *et* $\int_0^1 P(x)dx$.

5. Déduire des résultats précédents la valeur de l'entier n tel que $\frac{n}{240}<\ln 2<\frac{n+1}{240}$.

6. On considère la suite géométrique u_n *de premier terme 1 et de raison −x.*

a. Calculer la somme des n premiers termes : $s_n(x) = 1 - x + x^2 - ... + (-x)^n$ *; en déduire* $f(x) = s_n(x) + \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}$.

b. Montrer que $\int_0^a f(x)dx = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + ... + \frac{1}{n+1}(-x)^{n+1} + \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx$.

c. Montrer que sur [0 ; a] on a $-\frac{a^{n+1}}{1+a} \le \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \le \frac{a^{n+1}}{1+a}$ *puis que* $-\frac{a^{n+2}}{1+a} \le \int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx \le \frac{a^{n+2}}{1+a}$.

Préciser la limite de $\int_0^a \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}dx$ *lorsque n tend vers* $+\infty$.

d. On admet que ce résultat reste valable lorsque a vaut 1. En déduire un algorithme de calcul de ln2.

Rappel : somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0*, de raison q :* $u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

1. 10. Intégrale et suite 2

Pour tout k entier on note f_k *l'application de [0 ; 1] dans* $\mathbb{R}$ *définie par* $f_k(x) = x^k\sqrt{1-x}$. *On appelle* C_k *sa courbe représentative.*

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f_k.

2. Donner, en distinguant suivant la valeur de k, le tableau de variations de f_k.

3. Etudier les positions respectives de C_k *et* C_{k+1}. *Tracer les courbes* C_0, C_1, C_2.

4. On pose $I_k = \int_0^1 f_k(x)dx$. *Calculer* $\int_0^1 f_0(x)dx$.

a. Quel est le sens de variation de I_k *? Montrer que* I_k *converge vers une limite l que l'on ne cherchera pas.*

b. Montrer, en intégrant par parties que pour tout entier k > 0, on a $I_k = \frac{2k}{2k+3}I_{k-1}$. *En déduire une expression de* I_k.

c. Montrer que pour tout k entier, on a $\int_0^1 f_k(x)dx \le \frac{a}{1+k}$ *où a est une constante que l'on déterminera. En déduire la limite de* I_k.

1. 11. Intégrale 1

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \quad ; \quad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad ; \quad \mathrm{K} = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx.$$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur [0; 1] par $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.

b. En déduire la dérivée f ´ de f.

c. Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et de K

a. Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : J + 2I = K.

b. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que :

$$\mathrm{K}=\sqrt{3}-\mathrm{J}.$$

c. En déduire les valeurs de J et de K.

1. 12. Intégrale 2

Soit la fonction f définie par : f(x) = sin⁴ x ; x ∈ ℝ.

1. Exprimer $\sin^2 x$ *en fonction de cos 2x, puis* $\sin^4 x$ *en fonction de cos 2x et de cos 4x.*

2. Quelle est la forme générale des primitives de f sur ℝ ?

3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(x)dx$.

1. 13. Intégrale 3

On désigne par n un nombre entier relatif différent de −1 et par x un nombre réel supérieur ou égal à 1.

1. Calculer l'intégrale $I_n(x)=\int_1^x t^n \ln t dt$ *(on pourra effectuer une intégration par parties).*

2. En déduire le calcul de $J_n(x)=\int_1^x t^n(\ln t)^2 dt$.

3. Calculer $I_n(e)-J_n(e)$.

4. déterminer la limite de $\frac{I_n(e)-J_n(e)}{e^{n+1}}$ *quand n tend vers* $+\infty$.

1. 14. Intégrale 4

On pose $I_0=\int_1^e xdx$ *et* $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n dx$ *pour tout n entier non nul.*

1. Calculer I_0 *et* I_1 *(on pourra utiliser une intégration par parties).*

2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$. Calculer I_2.

3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1}\le I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3}\le I_n\le\frac{e^2}{n+2}$.

4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

1. 15. Intégrale 5

Soit p et n des entiers naturels. On pose $I_{p,n}=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx$.

1. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{n,1}$.

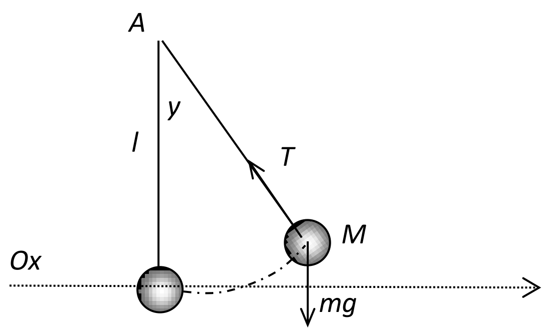
2. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.

3. Etablir une relation de récurrence entre $I_{p,n}$ et $I_{p+1,n+1}$. En déduire la valeur de $I_{p,n}$ en fonction de p et n.

1. 16. Equa diff : pendule

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un pendule, on est amené à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t)+g\sin\frac{y(t)}{l}=0$$



où y représente l'angle que forme le pendule avec la verticale, l la longueur du pendule et g l'accélération de la pesanteur (9,81 m.s^{-2}) ; les conditions initiales sont alors l'angle duquel on écarte initialement le pendule, soit y(0) et la vitesse angulaire initiale, soit y'(0). Lorsque y(0) est faible, le nombre $\frac{y(t)}{l}$ reste également faible et on considère dans ce cas que $\sin\left(\frac{y(t)}{l}\right)\approx\frac{y(t)}{l}$ La résolution de l'équation devient alors

$$y''(t)+\frac{g}{l}y(t)=0\,.$$

1. On pose $y(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ (A, B et ω sont des constantes indéterminées); calculer y' et y'' les dérivées première et seconde de y.

2. Vérifier que la fonction y proposée est telle que $y''=-\omega^2 y$. En déduire que $\omega=\pm\sqrt{\frac{g}{l}}$.

3. On écarte un pendule de 1 m de long à t=0 de 0,2 radian et on le lâche sans vitesse initiale. Calculer alors les constantes A et B du mouvement (on prendra $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$).

Autres exercices sur le calcul intégral

1. Calculer les intégrales suivantes (on précisera éventuellement l'intervalle de validité) :

1°) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ **2°)** $\int_0^{-2} t.\exp(-t^2)dt$ **3°)** $\int_1^e (x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx$ **4°)** $\int_{-1}^{x} \frac{dt}{1-t}$

5°) $\int_0^{\pi/6} \sin 3u\, du$ **6°)** $\int_{e^2}^{e} \frac{\ln t}{t} dt$ **7°)** $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx \ (n \in N^*)$ **8°)** $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2} dt$

9°) $\int_a^{a^n} \frac{dx}{x \ln x}$ **10°)** $\int_1^{e^2} (x^3+1)\ln(x)dx$ **11°)** $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}dx$; **12°)** $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)dx$.

Rep : **1)** $\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{16}\right)$ **2)** $\frac{1-e^{-4}}{2}$ **3)** $e^2/2 - 1/e - 1/2$ **4)** $\ln(2) - \ln(1 - x)$ pour $x < 1$

5) 1/3 **6)** –3/2 **7)** (ln2)/n **8)** 1 - 2/e **9)** ln(n) avec $a > 0$ et $a \neq 1$

10) $(7e^8 + 16e^2 + 17)/16$ **11)** 4 - 8/e **12)** $\pi^2 - 4$

2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas l'intervalle.

1°) f(x) = ln(x) ; **2°)** $f(x) = x.e^{-x}$; **3°)** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$;

4°) f(x) = tan(x) ; **5°)** f(x) = cotan(x) ; **6°)** $f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$.

3. **1°)** Montrer que les intégrales $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$ et $J = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$ existent.

2°) Calculer I + J et I – J. En déduire I et J.

4. Application du changement de variable. Montrer:

-- si f est impaire et continue sur [–a, a], alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ (a > 0) ;

-- si f est paire et continue sur [-a, a], alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$ (a > 0) ;

-- si f est périodique de période T est continue sur **R**, alors $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Calculer : $\int_{-3}^{3} x\sqrt{x^4+1}\, dt$; $\int_0^{2\pi} \sin^3 t\, dt$.

5. Etudier rapidement f : x ξ x + 1 + e^{-x} ; préciser les branches infinies ; tracer C_f. Pour a> 0, calculer l'aire du domaine plan $D_a = \{M(x, y) ; 0 \leq x \leq a \text{ et } x + 1 \leq y \leq f(x) \}$. Déterminer la limite de cette aire quand a tend vers $+\infty$.

6. Soit f définie sur **R*** par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1°) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur **R***. **2°)** Montrer que f est impaire.

3°) Calculer f '(x) pour x > 0. On écrira : f(x) = F(2x) - F(x) avec F primitive de x ξ $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ sur $\mathbf{R}^*_+$

6. (escp 89) Soit f définie sur **R** par : $f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)dt$

1°) a) Etudier la parité de f.

b) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2.\exp(-4x^2) - \exp(-x^2)$.

b) Etudier la variation de f. Préciser les points où f admet un extremum.

c) Calculer f ''(x) et déterminer son signe.

d) Construire C_f (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0,3).

Suites définies par une intégrale.

7. Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, dx$.

1°) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n + 1) I_n = -2n I_{n-1}$.

2°) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

8. p et q étant deux nombres entiers positifs ou nuls, on pose : $B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1°) Comparer B(p, q) et B(q, p).

2°) Etablir la relation : $B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$ $(p \geq 1)$.

3°) Calculer B(0, n) pour tout n appartenant à **N** ; en déduire B(p, q).

9. Pour n entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \, dx$

1°) Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0.

2°) Calculer I_1.

3°) Montrer que pour tout n ≥ 2, on a : $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera suivant la parité de n).

4°) Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers

0.

5°) Montrer que n(n + 1)(n + 2) $I_n I_{n□1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur ; en déduire un équivalent simple de I_n lorsque I_n tend vers $+\infty$.

10. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, dx$, avec n appartenant à **N**.

1°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n ≥ 2, on a :

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3°) Après avoir calculé I_0 et I_1, en déduire I_{2p} et I_{2p+1}, $p \in$ **N**.

4°) Montrer que pour tout $p \in$ **N**, on a : $\frac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$.

5°) En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de $\left(\frac{2.4.6.\ldots.2p}{1.3.5\ldots.(2p-1)}\right)^2 . \frac{1}{2p+1}$ (formule de Wallis).

11. On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n :

$$u_n(a) = \int_0^1 \exp(\, a(1-x)\,)\, x^n \, dx$$

1°) Calculer $u_0(a)$.

2°) Convergence de la suite $(\, u_n(a)\,)_{n\in \mathbf{N}}$. Soit a > 0 donné.

a) Montrer que pour tout n dans **N** : $0 < u_n(a) < \frac{\exp(a)}{n+1}$.

b) Montrer que la suite ($u_n(a)$) est décroissante.

c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°) Forme explicite de $u_n(a)$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans **N** :

$$a.u_{n+1}(a) = -1 + (n+1).u_n(a).$$

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans **N** :

$$u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}\left[\exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}\right].$$

12. (essec math 3 2001) On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\,dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\,dt$$

1°) convergence de la suite (J_k/I_k).

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$: $t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier k tel que $k \geq 0$:

$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties I_{k+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n).

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1}, en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k ($k \geq 1$).

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$: $\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$: $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que

$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$. *Autrement dit,* $S_n + \frac{1}{n}$ *constitue une valeur approchée de S à* $\frac{1}{n^2}$ *près.*

e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

13. (isg 89) Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par :

$$S_n = 1 + . \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}}$$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq \frac{1}{k^{1/3}}$$

2°) En déduire l'encadrement : $\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \leq S_n \leq \int_1^{n} \frac{dx}{x^{1/3}} + 1$.

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{4/3}} \text{ est convergente.}$$

14. Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5}$; $n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2}$ (rappel : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$) ; $\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

15. (esg 94 2[e] épreuve.) Soit k un entier naturel non nul et soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \qquad U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n+1}\right)^k$$

1°) Déterminer la limite de cette suite pour k = 1, k =2, puis k = 3.
2°) Pour k quelconque > 0 déterminer la limite de la suite (U_n).

16. Soit n un entier ≥ 2 et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$. Démontrer :

1°) $\forall\, k \in [[1, n-1]]$ $\quad \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}$.

2°) $u_n \leq \int_{1/n}^{1} \ln(x)dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

3°) $\frac{1}{n} - 1 \leq u_n \leq \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

4°) $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = -1$.

5°) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.

17. Pour $n \in \mathbf{N}$ on note $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$

1°) Montrer que pour tout k appartenant à [[0, n□1]] :

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} 2^t dt \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}}.$$

2°) En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3°) Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

18. Soit f la fonction définie pour tout x strictement positif par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

1°) Etudier les variations de f. montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

2°) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0, +∞[. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3°) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$

a) Etablir, pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

b) en déduire l'encadrement : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$

c) Montrer les inégalités : $0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$

d) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

4°) On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité :

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n. En déduire la limite : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

Annales E.S.C.L.

- **escl 88 1°)** Vérifier : $\forall x \in [0, +\infty[\ 0 \leq \ln(1 + x) \leq x$. En déduire la limite de quand l'entier n tend vers +∞ de $\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$.

2°) Soit u la suite réelle définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

En déduire la limite de u_n et celle de $n.u_n$ quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 89** Soit I la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

1°) **a)** Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite I.

2°) Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.

a) Montrer que $\forall$ n $\in$ **N** $I_{n+1} = (n + 1)I_n - 1/e$, et :

$$I_n = \frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!} + \frac{n!}{(n+p)!}I_{n+p}$$

b) En déduire que pour tout n dans **N** : $0 \leq I_n - \frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!} \leq \frac{n!}{(n+p+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$

c) Comment peut-on choisir p pour que $0 \leq I_{15} - \frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!} < 10^{-6}$?

En déduire là l'aide de la calculatrice une valeur approchée de I_{15} à 10^{-6} près.

c*) Ecrire en turbo-pascal un programme qui affiche une valeur de $\frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!}$. p est fourni par l'utilisateur. On veillera à minimiser les calculs.

- **escl 90** Pour tout n dans **N**, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$

1°) Quelle est la dérivée de la fonction f : **R** $\to$ **R** définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$?
Calculer I_0.

2°) Calculer I_1.

3°) Montrer que pour tout n dans **N**, $0 \leq In \leq \frac{1}{n+1}$ En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4°) Etablir à l'aide d'une intégration par parties : $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}J_n$.

Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

- **escl 91** Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx.$$

1°) Etude de la suite $(J_n)_{n\mu 1}$.

a) Calculer J_1.

b) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1 $0 \leq J_n \leq 1/(n+1)$.

c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\mu 1}$.

2°) Etude de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1 :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2} .$$

b) Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

c) Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 92** Soit f : $]1, +\infty[$ τ **R** l'application définie par : $\forall x \in]1, +\infty[$ $f(x) = \dfrac{1}{x.\ln(x)}$.

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2°) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 3$: $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k - 1)$.

Pour tout $n \in$ **N** tel que $n \geq 2$ on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in$ **N** tel que $n \geq 2$: $S_n - \dfrac{1}{2.\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \dfrac{1}{n.\ln(n)}$.

b) En déduire que pour tout $n \in$ **R** tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + 1/2\ln(2) .$$

c) Etablir : $S_n \sim_{+\infty} \ln(\ln(n))$.

Pour tout $n \in$ **N** tel que $n \geq 2$ on note : $u_n = S_n - \ln(\ln(n+1))$ et $v_n = S_n - \ln(\ln(n))$.

4°) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5°) a) Montrer que pour tout $n \in$ **N** tel que $n \geq 2$: $0 \leq v_n - \ell \leq \dfrac{1}{n.\ln(n)}$

b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} prés.

b*) Ecrire un programme en turbo-pascal qui utilise le résultat du a) pour calculer et afficher une valeur approchée de ℓ à moins de e près, e étant un nombre réel > 0 fourni par l'utilisateur.

- **escl 93** Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^1 \exp(-x^2).(1-x)^n\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x.\exp(-x^2).(1-x)^n\,dx .$$

1°) a) Former le tableau de variations de $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $x \to x.\exp(-x^2)$.

b) En déduire, pour tout n de **N** : $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2e}.(n+1)}$.

c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout n de **N** :

$I_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+1}$. En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 94** On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\,dx$, et $I_0 = e - 1$.

1°) a) Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

b) Montrer, pour tout entier naturel n : $I_n \geq 0$.

c) Déduire des questions a) et b) que, pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

d) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

e) Montrer : $I_n \sim_{+\infty} \dfrac{e}{n}$.

2°) Soit a un réel différent de I_0 ; on note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = e - (n+1)u_n \end{cases}$$

Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. (On pourra considérer la suite $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $D_n = |u_n - I_n|$.)

- **escl 95** On définit la fonction $f : [2,+\infty[\to \mathbf{R}$, $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1°) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2°) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x)dx$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

b) On définit la fonction F : [2, +∞ [→ **R** , $x \to \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers +∞.

3°) On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$.

a) Montrer que : $I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + 1/\sqrt{3}$.

b) Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers +∞.

- **escl 96** Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n . e^{-x} dx$.

1°) a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et donner sa limite.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \frac{1}{e(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

3°) a) En déduire pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n - \frac{1}{e(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers +∞.

- **escl 98 bis** (sujet de secours) Soit f la fonction réelle définie sur **R** par $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$

1. Vérifier que f est paire et étudier les variations de f.

2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{t^4 + 1} dt$ existe.

On définit la fonction réelle F sur **R** par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t^4 + 1} dt$.

3.a. Etudier le signe de F.

b. Etudier la parité de F.

4. a. Montrer, pour tout réel x strictement positif $\frac{x}{16x^4 + 1} \leq F(x) \leq \frac{x}{x^4 + 1}$

b. En déduire les limites de F en -∞ et +∞.

5. a. Vérifier, pour tout réel x : $(1 - 14x^4)F'(x) \geq 0$.

b. Dresser le tableau des variations de F sur [0, +∞[.

On admettra qu'une valeur approchée de $14^{-1/4}$ est 0,52 et qu'une valeur approchée du maximum de F sur [0, +∞[f est 0,37.

c. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé (unité 5 cm).

6. a. Montrer, pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{x}{16x^4(16x^4+1)} \leq \int_x^{2x}\frac{dt}{t^4} - F(x) \leq \frac{x}{x^4(x^4+1)}.$$

b.. En déduire que F(x) est équivalent à $\frac{7}{24x^3}$ au voisinage de $+\infty$.

7. a. Montrer : $\forall n \in \mathbf{N}\ \ \forall t \geq 0 \quad \left|\frac{1}{1+t^4} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k}\right| \leq t^{4n+4}$.

b. En déduire que, pour tout réel x de $]0, \frac{1}{2}[$, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{2^{4n+1}-1}{4n+1} x^{4n+1}$ converge.

c. Montrer, pour tout réel x de]0, 1/2[: $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{4n+1}-1}{4n+1} x^{4n+1}$.

- **escl 99** Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

1. Calculer w_0 et w_1.

2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

3. Montrer, pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t\, dt$. En déduire : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

5. Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant **2.** Et **4.** : $0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$. En déduire : $w_{n+1} \sim_{n\to+\infty} w_n$.

6. Montrer, en utilisant **4.** , que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante. En déduire : $w_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

- **escl 2000** (egalement etude de fonctions) on considere la fonction f : $]-1;+\infty[\to \mathbf{r}$ definie , pour tout x de $]-1;+\infty[$, par : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[. \end{cases}$

1. a. montrer que *f* est continue sur]-1;+∞[.

b. montrer que *f* est de classe c^1 sur]1, 0[et sur]0, +∞[∪ $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Pour tout reel *x* de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$ .C)

c. montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque *x* tend vers 0.

d. en deduire que *f* est de classe c^1 sur $]-1;+\infty[$.

2. montrer : $\forall x \in]-1;+\infty[, \quad \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0$.

en deduire les variations de *f* . on precisera les limites de *f* en -1 et en +∞ .

3. montrer que , pour tout *x* de l'intervalle] -1/2, +∞[, l'integrale $\int_x^{2x} f(t)dt$ existe .

4. on considere la fonction *f* definie, pour tout *x* de]-1/2, + ∞[, par :
$F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$.

a. montrer que *f* est derivable sur]-1/2; +∞[et que *f* est croissante .

b. montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, F(x) \geq xf(2x)$.

c. en deduire que *f*(*x*) tend vers +∞ quand *x* tend vers +∞ .

d. montrer que l'integrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$ est convergente.

en deduire que la fonction *f* admet une limite finie en $-\frac{1}{2}$. on ne cherchera pas a calculer cette limite.

- **escl 2001**, extrait ; cf chap VII.

1°) pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n : **R** → **R** définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

a) Soit n ∈ **N**. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.

b) Montrer : ∀n ∈ **N***, ∀X ∈ [0 ; +∞[, $\int_0^{x} f_n(t)\,dt = -\frac{e^{-x}x^n}{n!} + \int_0^{x} f_{n-1}(t)\,dt$.

c) En deduire : ∀n ∈ **n** , $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$.

- **escl 2002** On considère, pour tout n ∈ **N***, la fonction polynomiale P_n : [0 ; +∞[→ **R** définie, pour tout x appartenant à [0 ; +∞[, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Etude des fonctions polynomiales P_n

1°) Montrer, pour tout n ∈**N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[: $P'_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$,

où P_n désigne la dérivée de P_n.

2°) Etudier, pour n ∈ **N***, les variations de P_n sur [0 ; +∞[et dresser le tableau de variations de P_n.

3°) Montrer, pour tout n ∈ **N*** : $P_n(l) < 0$.

4°) a) Vérifier, pour tout n ∈ **N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b) En déduire, pour tout n ∈ **N*** : $P_n(2) \geq 0$.

5°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1 ; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée x_n, et que $1 < x_n \leq 2$.

6°) Ecrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. **1°)** Etablir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in [0 ; +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t+1} dt$$

2°) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1} dt$

3°) Démontrer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in [1 ; +\infty[$: $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

4°) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\displaystyle\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$, puis : $\displaystyle 0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$

5°) Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Annales E.S.C.

- **esc 97** Soit n un entier naturel non nul. On pose : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

1. Calculer I_1.

2. a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.
  b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
  c) Montrer que, pour tout $x \in [1,e]$: $\ln(x) \leq x/e$.
  d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.

  b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

- **esc 98** Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$, $n \in \mathbf{N}$.

1. Calculer I_0.

2. (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

  (b) Etablir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

  (c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

3. (a) Justifier l'inégalité : $x^n \ln(1 + x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.

  (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $I_n \leq 1/(n+1)$

  (c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. **(a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_n = \dfrac{\ln(2)}{n+1} - \dfrac{1}{n+1}\int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

(b) Montrer que $0 \leq \int_0^1 \dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \dfrac{1}{n+2}$ et en déduire un encadrement de I_n.

(c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

- **esc 2001**, extrait. cf chap VIII

1°) On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale : $I_n = \int_1^{+\infty} \dfrac{\ln t}{t^n}dt$.

a) Calculer pour $A \geq 1$ l'intégrale $\int_1^A \dfrac{\ln t}{t}dt$ et en déduire que I_1 est divergente.

b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. (On donne $\sqrt{e} \approx 1{,}65$.)

d) En déduire grâce à I_2 que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \dfrac{\ln k}{k^2}$ converge (on ne cherchera pas à calculer cette série).

Annales EDHEC

- **edhec 93** Pour n appartenant à **N,** on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$

1°) a) Montrer que pour tout n dans **N** $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$.

b) En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.

2°) Calculer I_0 et I_1.

3°) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout n supérieur ou égal à 2.

4°) Démontrer par récurrence : $\forall\, p \geq 1$

$$I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}$$

- **edhec 96, exercice 1** On considère la suite (d_n) définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall\, n \in$ **N*** $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

1°) **a.** Calculer d_2, d_3, d_4, d_5.

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$ $d_n \in \mathbf{N}$: $d_{n+1} = (n + 1)d_n + (-1)^{n+1}$

2°) On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^t dt$.

a. Calculer I_0, puis exprimer, pour tout entier naturel n, I_{n+1} en fonction de I_n.

b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$ $e.d_n = n!\,(1 + (-1)^n I_n)$.

c. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|d_n - \frac{n!}{e}\right| \leq \frac{1}{n+1}$.

d. Vérifier que cette dernière inégalité détermine parfaitement d_n pour $n \geq 2$, puis retrouver la valeur de d_5 obtenue à la deuxième question et calculer d_{10}. On donne $\frac{5!}{e} \approx 44{,}15$ et $\frac{10!}{e} \approx 1334960{,}92$ à 5.10^{-3} près.

- **edhec 96, exercice 3** (également étude de fonction)

1°) Montrer que pour tout t > 0 : ln(1+t) > t/(1+t).

2°) Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x)$.

a) Pour tout réel x, calculer f ' (x) et en déduire les variations de f.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

3°) Pour tout réel x, vérifier que : $f(x) = 1 - f'(x) - e^x/(1+e^x)$ En déduire, en fonction de f, une primitive F de f sur **R**.

4°) Soit a un réel et g la fonction définie par : g(x) = 0 si x < 0 et g(x) = a.f(x) si x ≥ 0. Déterminer a pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

- **edhec 98** (extrait du problème ; voir chapitre VIII)

On considère la fonction définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

1°) a. Dresser le tableau de variation de f.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$ $f(x) \leq x$, l'égalité ayant lieu seulement pour x = 0.

2°) a. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} dt$$

b.. En écrivant l'égalité précédente pour n = 2, puis pour n = 3, montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \; \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leq x - f(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

- **edhec 99** : voir chapitre VIII. Rien en 2000, guère plus en 2001, voir chapitre VIII.

•**edhec 2002** On note f la fonction définie sur **R**₊ par : $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) a. Vérifier que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

b. Etudier le signe de f(x).

2°) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbf{R}_+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

3°) Pour tout x de $\mathbf{R}_+$, on pose : g(x) = F(x) − x.

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et que, pour x > 0, on peut écrire g'(x) sous la forme

$$g'(x) = \frac{-x\,h(x)}{1+x^2}$$

b. Etudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx -0{,}48$).

c. En déduire le signe de g(x).

4°) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de **N** : $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \in [0, 1]$.

b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite(u_n) converge et donner $\lim_{n\to+\infty} (u_n)$.

• **edhec 2003** On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

1) a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2) Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3) a. Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \le I_n \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

4) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Annales ECRICOME

- **ecricome 91** Pour n appartenant à **N** on pose : $u(n) = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^n}\, dx$. .

1°) Calculer u(1).

2°) Montrer que la suite $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et convergente.

3°) Montrer que pour tout X appartenant à [0, 1]n, on a : $1 - X \le \sqrt[3]{1-X} \le 1 - X/3$.

Interpréter graphiquement.

4°) En déduire un encadrement de u(n) et la limite de u(n) quand n tend vers $+\infty$.

- **ecricome 92** On définit la suite u par $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t)\, dt$.

1°) a) Rappeler la valeur de la dérivée de la fonction tangente sur $]-\pi/2, \pi/2[$

b) Calculer alors u_0.

2°) Montrer que la suite u est décroissante.

3°) Montrer que quel que soit n dans **N** : $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$.

4°) En déduire que pour tout n dans **N** : $\frac{1}{2(2n+3)} \le u_n \le \frac{1}{2(2n+1)}$ puis donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5°) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Montrer que pour tout n dans **N** : $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$

b) En déduire la limite de S_n et un équivalent de $S_n - \pi/4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **Ecricome 93**

Soit x un réel strictement positif. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+x+1}.$$

On se propose d'étudier la limite S(x) de la somme $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1°) Pour tout entier naturel p on pose : $f_p(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{x+p}}{1+t} & si\ 0 < t \leq 1 \\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$,

et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t)dt$. Montrer que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $I_p(x)$ existe.

2°) Montrer que pour tout réel t $\in$ [0, 1] , on a : $\dfrac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k + \dfrac{(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$.

3°) Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt \quad = \quad S_n(x) + R_n(x) \qquad \text{où} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \,.$$

4°) Démontrer que l'on a pour tout entier naturel n : $0 \leq \int_0^1 \dfrac{t^{n+x+1}}{1+t}dt \leq \dfrac{1}{n+2}$.

5°) Conclure que l'on a : $S(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}dt$.

6°) Etude du cas particulier où x = 1/2 .
a) En utilisant le changement de variable $u = t^{1/2}$, calculer S(1/2). *(Indication : $u^2 = 1 + u^2 - 1$.)*
(On rappelle que $\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2}dt = \dfrac{\pi}{4}$.)

b) En déduire que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{1}{2k+1} = \dfrac{\pi}{4}$.

- D'après **ecricome OG 93** **1°)** Soit f la fonction définie **sur]0,1]** par : $f(x) = \dfrac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

Montrer que f est continue, décroissante, positive ou nulle sur]0, 1]. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2°) Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$;

a) Pour k $\in$ [[2, n]], montrer : $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx$.

b) Pour k $\in$ [[1, n−1]], montrer : $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \leq \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

c) Déduire du a) et du b) : $\int_{1/n}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_{1/n}^{1} f(x)dx + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

3°) a) Soit a > 0. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_a^1 f(x)dx$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

b) Quelle est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$?

c) Déduire alors du 2)c) la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
4°) Ecrire en turbo-pascal un programme qui :
--- déclare la fonction f ;
--- utilise cette fonction pour calculer et afficher la valeur de S_n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 fourni par l'utilisateur.

5°) Déduire du 3)c) la limite de $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$ quand n tend vers $+\infty$.

- **ecricome 97** α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$u_n(\alpha) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha + k)}$.

1.. Étude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$.
a. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}})$ est monotone et convergente. Que peut-on en déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$

b. On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha\, \ell(\alpha)}{n}$.

c. Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.

a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N}\quad u_n(\alpha) \geq \dfrac{1}{n+\alpha}$.

b. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3. 0n pose, pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt$.

a. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.

b. Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties : $\int_0^{x} e^{-\alpha t}\left(1 - e^{-t}\right)^n dt$, et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout n entier naturel non nul.
c. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbf{N}\quad I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$.
4. On suppose désormais que $\alpha > 1$.

a. Montrer que, pour tout N entier naturel : $\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) \;=\; \dfrac{1}{\alpha-1} - I_{N+1}(\alpha-1)$.

b. En déduire que la série de terme général $u_n(a)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

- **ecricome 98** (extrait ; voir chap VII) **1°)** Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $x \to g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter sa dérivée.
b) Dresser le tableau de variation de g avec ses éventuelles limites aux bornes.
2°) Soit f l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $x \to f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$.
A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel x positif, on a :

$\int_0^x f(t)dt = g(e^x) + 2\ln(2)$.

- **ecricome 99** (extrait ; voir chapitre VII) On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$ converge et vaut $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit α un réel strictement positif ; si x est un élément de $\mathbf{R}^+$, on pose : $I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2}du$ et $J(x) = \int_0^x t^2 e^{-(t/\alpha)^2}dt$.

1°) a) A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbf{R}^+$, J(x) en fonction de $I(\frac{x}{\alpha})$.

1°) b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbf{R}^+$:

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2}du - x\,e^{-x^2}.$$

1°) c) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-(t/\alpha)^2}dt$ converge et vaut $\frac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

- **ecricome 2002 FAIT**

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies sur $]-1, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(1 + x)$.

1. Etude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$.

1. Etudier le sens de variation des fonctions h_n.

2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.

3. Etude du cas particulier n = 1.

   a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur $]-1, +\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.

   b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur $1-1, +\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.

   a. Justifier la dérivabilité de f_n sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.

   b. En déduire les variations de f_n sur $]-1, +\infty[$. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

2. Etude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

2.1. Calcul de U_1.

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in [0,1] \quad \frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.

3. Montrer que $U_1 = 1/4$.

2.2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est monotone.

2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ (on ne demande pas sa limite).

3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N^*} \quad 0 \le U_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$

4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

2.3. Calcul de U_n pour $n \geq 2$.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbf{N^*}$ on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

1. Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.

2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

Annales ISC-ESLSCA

- **eslsca 93** On pose : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ et : $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t.\ln(t)}$.

1°) Montrer que ces intégrales ont un sens lorsque x est un nombre réel strictement positif et
différent de 1.

2°) Déterminer explicitement la fonction g.

3°) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f.

b) Que vaut $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$?

c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

4°) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} [f(x) - g(x)]$, et en déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

b) Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 1.

5°) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer l'allure de la branche infinie de (C) et enfin donner l'allure de (C).

- **eslsca 95** 1°) Pour tout réel x > -1 et pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt\,.$$

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout entier n et tout réel x > -1, on a :

$$I_{n+1}(x) = -I_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

b) Calculer $I_0(x)$, en déduire $I_1(x)$, puis $I_2(x)$.

2°) Prouver par récurrence que, pour tout réel x > -1,et pour tout entier n > 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt\,.$$

(*Remarque* : ces deux questions prouvent en fait la formule de Taylor avec reste intégral dans un cas particulier ; celle-ci étant dorénavant au programme, entraînez-vous à l'appliquer pour obtenir directement le 2°).)

3°) Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $u_n(x)$ définie par :

$$u_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt\,.$$

Montrer que pour tout entier n de **N**: $|u_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, en déduire la limite de la suite ($u_n(x)$).

4°) Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite ($v_n(x)$) définie pour n > 0 par :

$$v_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Montrer que la suite ($v_n(x)$) converge et déterminer sa limite.

- **eslsca 96** (également étude de fonction)

Partie 1. Pour n dans **N** et x dans $\mathbf{R}^*$ on pose : $f_n(x) = x^n e^{-1/x} = x^n \exp(-l/x)$. (exp désignant la fonction exponentielle de base e).

l) Montrer que la restriction de f_n à $]0, +\infty[$ peut être prolongée par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable ?

2) Déterminer les limites éventuelles de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et en 0 par valeurs inférieures.

3) Etudier, suivant les valeurs de n les variations de f_n. En désignant par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé, préciser les positions relatives de (Cn) et (C_{n+1}). Tracer dans le même repère (Co), (C_1),(C_2), (C_3).

.Partie 2. Pour n dans **N**, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

l) Montrer que pour tout n dans **N,** I_n est bien défini. Etudier la monotonie de la suite

(I_n).

2) A l'aide d'un encadrement simple, montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Pour n dans **N,** déterminer une relation entre I_n et $I_{n\square 1}$. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **eslsca 98** m et n étant deux entiers naturels quelconques, on pose : $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$.

1°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $m \geq 1$, on a :

$I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.

2°) Calculer $I_{0,m+n}$ et en déduire la valeur de $I_{m,n}$ pour tout couple d'entiers naturels m et n.

3°) a) Calculer, pour tout entier naturel n, $I_{n,n}$.

b) Montrer que l'on a : $\forall\ n \in \mathbf{N}\ \ I_{n,n} \leq 1/4^n$.

4°) Calculer la valeur de $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} [\cos(u)]^{2m+1}.[\sin(u)]^{2n+1} du$.

•**eslsca 99** On considère la fonction f définie sur **R**₊ par $\begin{cases} f(x) = -x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On pose, pour n entier naturel non nul , $I_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, l'intégrale I_n est bien définie.
   b) Calculer I_1. (On pourra, pour ε > 0, effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $\int_\varepsilon^1 f(x)dx$, puis faire tendre ε vers 0.)

2. On pose, pour h et k entiers naturels non nuls, $J_{h,k} = \int_0^1 x^h (\ln x)^k dx$ et $J_{h,0} = \int_0^1 x^h dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour h ≥ 1 et k ≥ 1, on a :

   $J_{h,k} = -\frac{k}{h+1} J_{h,k-1}$.

   b) Calculer $J_{h,0}$. En déduire la valeur de $J_{h,k}$.

   c) Calculer I_n.

SUITES NUMERIQUES

Exercice 1

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

a) $5^{2n} - 3^n$ *divisible par 11.*
b) $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ *divisible par 17.*

Exercice 2

Soit une suite géométrique décroissante telle que :

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 3 + \sqrt{2} \\ v_1 . v_2 . v_3 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Déterminer v_1, v_2 *et* v_3 .

Exercice 3

Calculer les limites des suites suivantes .

a) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.
b) $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots \frac{1}{\sqrt{n+n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Exercice 4

Soient les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n , par

$$(v_n)\begin{cases} v_0 = -\frac{3}{2} \\ v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n - 1 \end{cases} \quad et \quad (w_n) : w_n = 2v_n + 6$$

1. *Démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique dont vous précisera le premier terme et la raison .*
2. *Donner les expressions de w_n et v_n en fonction de n . Déduisez-en la limite de (v_n) .*
3. *Soient $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} w_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$. Exprimez S_n et S'_n en fonction de n .*
4. *Calculer les limites de terme général S_n et S'_n .*

<u>Exercice</u> 5

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$ pour tout n entier naturel.

1. Donner les valeurs approchées à 10^{-3} près de $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$.

2. Démontrer que, pour tout n de N , $0 \leq u_n \leq 3$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

<u>Exercice</u> 6

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2, v_2 .

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n).

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) *et* (v_n).

Exercice 7

Soit I l'intervalle [0 ; 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+4}$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ *appartient à I.*

2. On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1}=f(u_n)=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}$. *Montrer que, pour tout n entier,* u_n *appartient à I.*

On se propose d'étudier la suite (u_n) *par deux méthodes différentes.*

Première méthode :

3. a. Représenter graphiquement f dans un repère ortho normal d'unité graphique 10 cm.

b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 *et* A_3 *d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives* u_0, u_1, u_2 *et* u_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) *et sa convergence ?*

c. Etablir la relation $u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ *et en déduire le sens de variation de la suite* (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) *est convergente.*

e. Prouver que la limite l de la suite (u_n) *vérifie* $l = f(l)$ *et calculer l.*

Deuxième méthode : On considère la suite (v_n) *définie par* $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

4. a. Prouver que (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{2}{5}$.

b. Calculer v_0 *et exprimer* v_n *en fonction de n.*

c. Exprimer u_n *en fonction de* v_n, *puis en fonction de n.*

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) *et sa limite l.*

Exercice 8

On considère la suite u_n *définie par* $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1}=u_n(2-u_n) \end{cases}$ *où a est un réel donné avec* $0 < a < 1$.

1. On suppose que $a=\dfrac{1}{8}$;

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Tracer dans un repère ortho normal la courbe représentative P de la fonction f : $f(x)=x(2-x)$ *ainsi que la droite d (y = x).*

c. Utiliser d et P pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. On suppose dans cette question que a est quelconque (0 < a < 1).

a. Montrer par récurrence que $0 < u_n < 1$.

b. Montrer que u_n est croissante.

c. Que peut-on en déduire ?

3. On suppose de nouveau $a=\frac{1}{8}$ et on considère la suite $v_n = 1-u_n$.

a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

<u>Exercice</u> 9

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_1 = 12, v_1 = 1, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$

1. Pour tout entier n ≥ 1, on pose $w_n = u_n - v_n$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique à termes positifs, déterminer sa limite et exprimer w_n en fonction de n.

2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

3. Pour tout entier n ≥ 1, démontrer que $u_n \geq v_n$. En déduire que $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$.

4. Pour tout entier n ≥ 1, on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite constante.

5. En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis les limites de (u_n) et (v_n).

<u>Exercice</u> 10

<u>Partie A</u>

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\,;\vec{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points (A_n, 2) et (B_n, 1), le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés (A_n, 1) et (B_n, 3).

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n.

Montrer que : $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ *. On admet de même que* $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

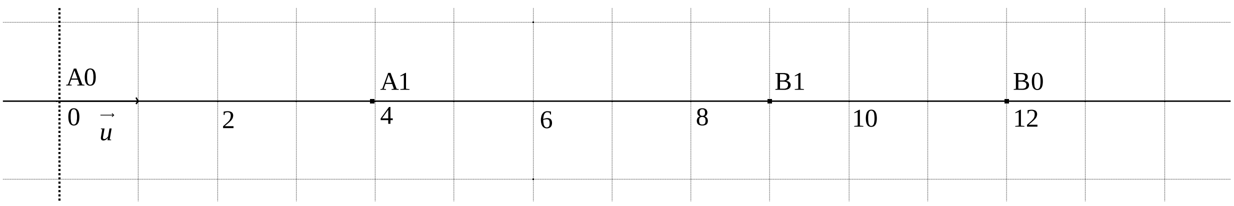
b. Étudier les variations de la suite (b_n).

3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3a_n + 4b_n$. Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).



Exercice 11

α est un réel appartenant à l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et M son image sur le cercle trigonométrique*

1) Démontrer que $\sin\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$ *, on pourra remarquer l'aire du secteur délimité par les segments [OI] et [OM] et l'arc de cercle* $\widehat{IM}$ *est comprise entre les aires des triangles OIM et OIT.*

2) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ $\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\tan x}{x}$ *et* $\cos x < \frac{\sin x}{x}$.

3) Soit (U_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par : $U_n = \sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} \ldots + \sin\frac{1}{2n}$.

a) *Etudier la monotonie de la suite (U_n).*
b) *Montrer que (U_n) est majorée (utiliser la question 1°). En déduire que (U_n) est convergente .*

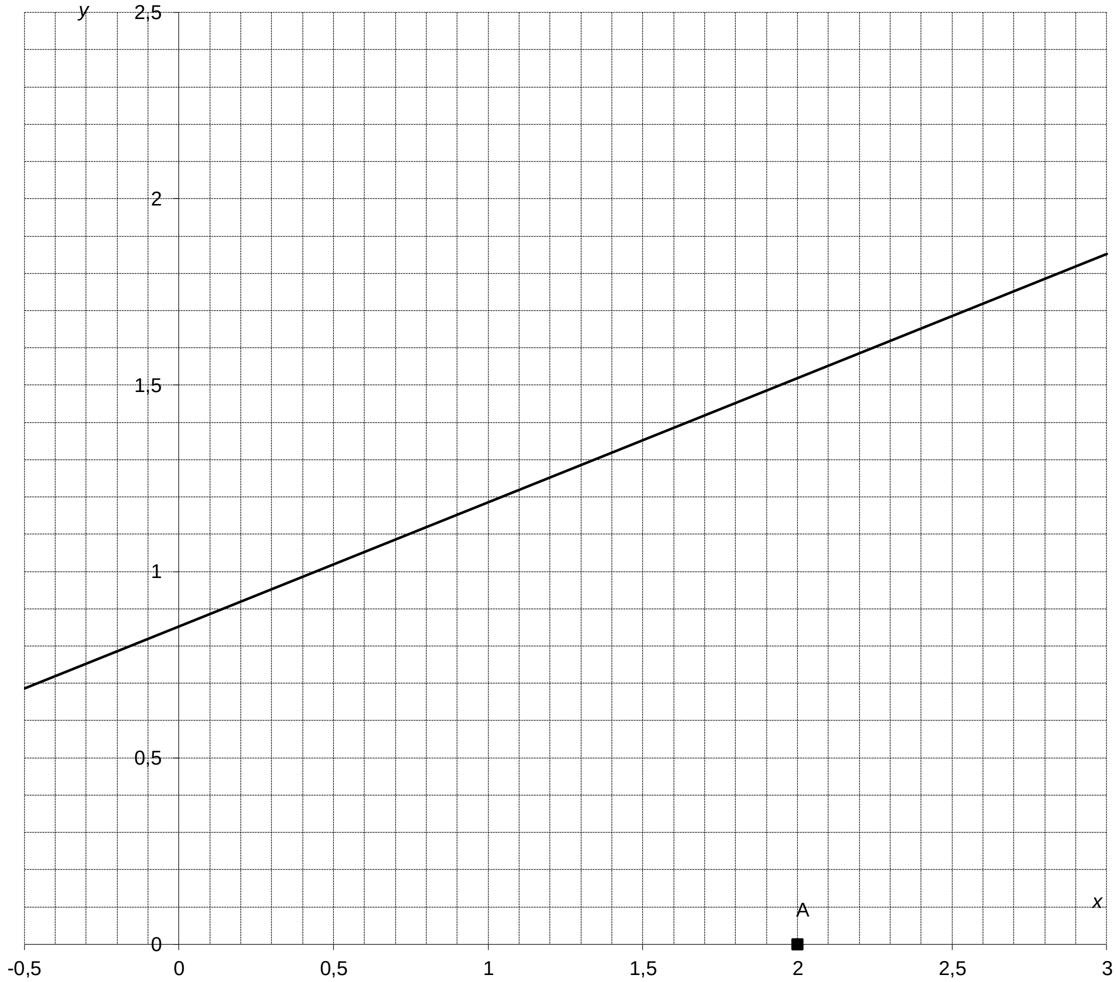
Exercice 12

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$.

***1. a.** Démontrer que pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$.*
***b.** En déduire que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$.*
***c.** En déduire la limite de la suite (u_n).*
***2.** On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$.*
***a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.*
***b.** Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$*
***c.** Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n)*

une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.
***d.** En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.*

Exercice 13



1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ *pour tout entier naturel n.*

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ *et le point A de coordonnées (2 ; 0).*

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

c'est-à-dire que $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}277\,7\ldots7$ *avec n décimales consécutives égales à 7.*

Ainsi $v_0 = 1{,}2$, $v_1 = 1{,}27$ et $v_2 = 1{,}277$.

En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

Exercice 14

PARTIE A

Étant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points : A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$ et B_1 barycentre de $\{(A_0, 1) ; (B_0, 2)\}$.

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n, 1) ; (B_n, 2)\}$.

1. Placer les points A_1 , B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12$ cm.

Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\ ;\vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\overrightarrow{A_0B_0}$.

Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad et \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

PARTIE B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$; $v_0 = 12$; $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

4. On considère la suite (t_n) définie par $t_n = 2u_n + 3v_n$. Montrer qu'elle est constante.

PARTIE C

À partir des résultats obtenus dans les parties A et B, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 15

1. Montrer par récurrence que pour tout n ≥ 0, on a $3^n \geq n^2(n-1)$.

2. On définit, pour n ≥ 1, la suite (u_n) *par* $u_n = \frac{1}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}$.

a. Quel est le sens de variation de (u_n) *?*

b. Montrer par récurrence que pour tout entier k ≥ 1, $k - \left(\frac{3}{2}\right)^k \leq 0$. *En déduire que, pour tout k ≥ 1,* $\frac{k}{3^k} \leq \frac{1}{2^k}$ *puis un majorant de* u_n. *Que peut-on en conclure pour* (u_n) *?*

3. On définit pour n ≥ 1 la suite (v_n) *par* $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. *En utilisant la question 1), montrer que* (v_n) *est décroissante. Quelle est la limite de* $(v_n - u_n)$ *? Que peut-on en conclure pour* (v_n) *?*

Exercice 16

Pour tout entier naturel n, on note $F_n = 2^{\left(2^n\right)} + 1$. *Calculer* F_0, F_1, F_2, F_3.

2. Démontrer par récurrence que pour tout n > 1, on a $F_0 \times F_1 \times F_2 \dots \times F_n = F_{n+1} - 2$.

3. Montrer que la suite (F_n) *est croissante et non majorée. Quelle est sa limite ?*

Exercice 17

Soit (U_n) *la suite définie par* U_0, *et pour tout* $n \geq 0$, $U_{n+1} = \sqrt{6+U_n}$.

a. *On pose* U_0 *=2. Montrer que la suite* (U_n) *est croissante et majorée par 3.En déduire qu'elle convergente et déterminer sa limite .*
b. *On pose* U_0 *=3 . Quelle est la nature de la suite* (U_n) *?*
c. *On pose* $U_0 = 10$ *.Montrer que la suite* (U_n) *est décroissante et minorée .En déduire sa convergence vers une limite que l'on précisera.*

Exercice 18

Soit (U_n) *la suite définie par* $U_0 = 1$, *et pour* $n \geq 0$, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{14}{3}$.

a. *Montrer que par récurrence que la suite* (U_n) *est croissante .*
b. *Montrer que si* (U_n) *converge , alors sa limite est 7.*
c. *On pose* $V_n = U_n - 7$ *pour* $n \geq 0$ *.Montrer que* (V_n) *est géométrique de raison* $\frac{1}{3}$ *.En déduire l'expression de* V_n *puis celle de* U_n *en fonction de n .Conclure quant à la convergence de la suite* (U_n) .

Exercice 19

Soit la suite (U_n) *définie par* $U_0 = -3$ *et pour tout naturel* $n, U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9}$.

a. *Montrer que la suite* (U_n) *est croissante et majorée par 1.*
b. *En déduire que la suite* (U_n) *est convergente et déterminer sa limite .*

Exercice 20

Soit la fonction définie par $g(x) = \ln(x+3)$.

1. *Soit* (U_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \ln(U_n + 3) \end{cases}$, *pour tout n entier .*
a. *En utilisant la croissance de g , étudier le sens de variation de la suite* (U_n).
b. *Montrer que la suite* (U_n) *est majorée par 2.*
c. *En déduire que cette suite converge vers un réel l.*
2. *Soit* (V_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \ln(V_n + 3) \text{ pour tout } n \text{ entier} \end{cases}$
a. *En utilisant la croissance de g , étudier le sens de variation de la suite* (V_n).
b. *Montrer que la suite* (V_n) *est minorée par 1.*
c. *En déduire que cette suite converge vers un réel l'.*
3. *a. Montrer que l=l'.*
b.En déduire une valeur décimale approchée de l à 10^{-3} *prés .*

Exercice 21

On considère la suite numérique (U_n) *définie par :*

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \text{ dans } N,\ 2U_{n+1} = U_n - 1 \end{cases}$$

1. *Calculer les cinq premiers termes de la suite* (U_n).
2. *Montrer que si* (U_n) *converge , alors sa limite est -1. On pose* $V_n = U_n + 1$ *pour tout entier nature.*
3. *a. Montrer* (V_n) *est géométrique .*
b.En déduire les valeurs de V_n *et de* U_n *en fonction de n .*
c. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (U_n).

d. Trouver le plus petit entier positif n tel que $U_n + 1 < 10^{-4}$.

Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$.

Exercice 22

On considère la suite numérique (U_n) *définie par :*

$u_0 = 1$*et , pour tout entier naturel* n , $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1$

Soit (v_n) *la suite définie par définie , pour tout entier naturel* n *, par .* $v_n = 4u_n - 6n - 15$

a. *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique .*
b. *Calculer* V_0 *puis calculer* (v_n) *en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n .* $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.
c. *Montrer que* U_n *peut s'écrire sous la forme* $U_n = t_n + w_n$ *où* (t_n) *est une suite géométrique et* (w_n) *une suite arithmétique.*
d. *Calculer* $T_n = t_0 + t_1 + ... + t_n$ *et* $W_n = w_0 + w_1 + ... + w_n$

En déduire : $U_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

Exercice 23

On se propose d'étudier la suite (u_n) *définie sur l'ensemble des entiers naturels N par :*

$u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ *puis la convergence de la suite* (S_n) *définie par*

$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$.

1. *a. Prouver que pour tout entier n de N ,* u_n *est positive .*
   b.Prouver que la suite (u_n) *est décroissante .*
   c. En déduire qu' elle est convergente et trouver sa limite .

   2. *Démontrer que pour tout entier n de N ,*

$u_{n+1} = e^{-S_n}$ *et en déduire que* S_n *tend vers* $+\infty$ *quand n tend vers l'infini.*

Exercice 24

Soit la suite numérique (u_n) *définie pour tout entier naturel non nul par :* $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. *a. Prouver que pour tout entier n non nul , 0<* $u_n \leq 1$.

b.Etudier le sens de variation de la suite (u_n) *.*
c.Calculer la limite de u_n *lorsque n tend vers l'infini.*

2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots . \times u_n$.

a. Démontrer que par récurrence que pour tout n élément de N^* *on a :* $x_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

b. Calculer la limite de x_n *lorsque n tend vers l'infini.*

3. On pose $v_n = ln(u_n)$ *.*

a. Justifier que la suite (v_n) *est définie pour tout entier non nul.*

b. Déduire de 1. Que la suite (v_n) *est négative .*

c. Prouver que la suite (v_n) *est croissante .*

d. Déterminer la limite de la suite (v_n) *lorsque n tend vers l'infini.*

4.On pose pour tout entier n strictement positif .$y_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots v_n$

a. Exprimer y_n *en fonction de n* x_n.

b.Déterminer la limite de y_n *lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice 25

Soient deux suites (u_n) *et* (v_n) *définies sur N par :* u_0=9, u_{n+1}=$\frac{1}{2}u_n - 3$ *et*

$v_n = u_n + 6$.

1.a Démontrer que la suite (v_n) *est géométrique à termes positifs .*

b. Calculer la somme $S_n = v_0$ +…+v_n *en fonction de n .En déduire que*

S'_n=$u_0 + \cdots + u_n$ *en fonction de n . Déterminer* $lim_{+\infty} S_n$ *et* $lim_{+\infty} S'_n$.

2. *On définit la suite* (w_n) *par* $w_n = ln(v_n)$ *pour tout entier n .Démontrer que la suite* (w_n) *est arithmétique .*

   Calculer la somme S''_n=$w_0 + \cdots + w_n$ *en fonction de n et déterminer* $lim_{+\infty} S''_n$.

3. *Calculer le produit* P_n=$v_0 . v_1 \dots v_n$ *en fonction de n et calculer* $lim_{+\infty} P_n$.

Exercice 26

Soit (u_n) *la suite numérique définie sur N par :* $u_0 = 0$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$
1. a. *Montrer que* (u_n) *est majorée par 4.*
b. *Montrer que* (u_n) *est strictement croissante.*
c. *En déduire que* (u_n) *converge et déterminer sa limite.*
2. a. *Montrer que pour tout entier naturel n, on a :*$4-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4-u_n)$ *.*

b. *Retrouver le résultat du **1 c**.*
c. *Étudier la convergence de la suite (v_n) définie sur N par : $v_n = n^2\,(4-u_n)$.*

Exercice 27

On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$

$v_{n+1} = (u_n + 3v_n)$

1. *On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.*
a. *Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.*
b. *Déterminer la limite de la suite w.*
2. a. *Montrer que la suite u est croissante.*
b. *Montrer que la suite v est décroissante.*
c. *En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.*
3. *On admet que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera l .*
4. *On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.*
a. *Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.*
b. *Déterminer alors la valeur de l.*

Exercice 28

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+4}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

Exercice 29

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$

Exercice 30

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad et \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

Exercice 31

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n^{p-1}},\ p \in N^*$

Exercice 32

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \left(1+\frac{1}{1^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)...\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \quad et \quad v_n = u_n + \frac{u_n}{n}$$

Exercice 33

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$a_n = u_{2n} \;\; et \;\; b_n = u_{2n+1} \; où \; u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

Exercice 34

Soit (u_n) *une suite de réels décroissante de limite nulle. Pour tout n on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} u_k$. *Montrer que les suites extraites* (S_{2n}) *et* (S_{2n+1}) *sont adjacentes et en déduire que* (S_n)*est convergente.*

Exercice 35

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{n} - \ln(n) \; et \; v_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

Exercice 36

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *et* $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 37

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :

$$u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} \;\; v_{n+1} = \frac{qu_n + pv_n}{p+q} \; avec \; 0 \prec p \prec q \; fixés \; et \; u_0 \prec v_0$$

Exercice 38

Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ *et* $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

Montrer que les suites sont adjacentes

calculs barycentriques

EXERCICE 1

ABC est un triangle équilatéral de coté de longueur à, I milieu du segment [BC].A tout point M du plan, on associe $f(M) = 2MA^2 - MB^2 - MC^2$.

1.) Calculer le vecteur $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

2.) a.) Montrer que pour tout point M du plan, on a $f(M) = 2\overrightarrow{MA}.\vec{v} + f(A)$.

b.) Calculer $f(A)$ en fonction de a.

c.) En déduire l'ensemble E des points M tels que $f(M) = -2a^2$ est une droite perpendiculaire a (AI).

3.) Cherchons maintenant l'ensemble (E′) des points M tels que $f(M) = a^2$.On désigne par (Δ) la droite de repère $(A, \vec{v})$ et pour tout point M, on note H son projeté orthogonal sur (Δ).Il existe donc un réel α tel que $\overrightarrow{AH} = \alpha \vec{v}$

a.) Déterminer α pour que $f(M) = a^2$.

b.) Montrer que ≪ M appartient a (E') ≫ équivaut a $\overrightarrow{MH}.\vec{v} = 0$. En déduire (E′).

<u>EXERCICE 2</u>

Dans le plan affine euclidien (P) on donne un triangle équilatéral ABC de coté a. Soit A′ le milieu de [BC].

1.) Montrer que le milieu G du segment [AA′] est le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 et 1.

2.) Soit h, l'application de P dans P qui a tout point M de P, associe le point M′ de P tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a.) Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

b.) Calculer GA, GB, GC puis en déduire $2GA^2 + GB^2 + GC^2$.

3.) a) Démontrer que pour tout point N du plan P on a

$$2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 4NG^2 + (2GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

b) En déduire l'ensemble des points N du plan P tels que $2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2$

c.) Construire cet ensemble.

<u>EXERCICE 3</u>

Dans le plan P, on considère un triangle ABC isocèle de sommet A tel que AB=AC=3a et BC=2a (a est un réel strictement positif).

On appelle G barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 2, 3 et 3. Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [AI].

1.) Montrer que G est le milieu de [IJ].

2.) M étant un point de P, Calculer la somme : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$ en fonction de MG et de a.

3.) Déterminer l'ensemble (E_1) des points M de P tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2$

4.) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M de P tels que $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2$.

5.) Montrer que les droites (BC), (AB) et(AC) ont chacune, un unique point commun avec (E_2).

Que représente le point G pour le triangle ABC ?

EXERCICE 4

Dans le plan P, on considère trois A, B et C tels que : $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4d$ et $\|\overrightarrow{BC}\| = 2d$ ou d est un réel strictement positif donné. On considère les points A, B, et C affectés des coefficients respectifs λ, 1 et 1 ou $\lambda \in R - \{-2\}$.

1.) Déterminer l'ensemble (Δ) des barycentres G_λ de ces points lorsque λ décrit $R - \{-2\}$.

2.) Dans ce cas ou λ =-1, on appelle G barycentre des point pondérés A, B, et C affectés des coefficients -1, 1 et 1.

a.) Déterminer G.

b.) Déterminer l'ensemble E des points M du plan vérifiant l'égalité : $\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2$.

3.a) Démontrer que pour tout point M du plan P, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b.) Déterminer l'ensemble Δ′ des points M du plan P tels que :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MA}\|^2 = 32d^2$$

EXERCICE 5

On donne trois points A, B, C distincts, non alignés du plan et on désigne respectivement par a, b, c les longueurs BC, CA et AB.

On se propose d'étudier l'ensemble E des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

1. Soit G, l'isobarycentre du triangle ABC et soit I le milieu du segment [BC].

a.) Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de $AI^2 + BC^2$.EN déduire que :

$AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.Ecrire de même les expressions GB^2 et GC^2

b.) Montrer que $AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

2. Déterminer l'ensemble E.
3. On choisit a=5, b=4, c=3.Placer les trois point A, B, et C et dessiner E dans ce cas particulier.

Soit A, B, et C trois points du plan non alignés tels que le triangle ABC ne soit pas équilatéral.

On désigne par A′, B′ et C′ les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

On pose BC = a, AC = b et AB = c.

1. *On considère le vecteur* $\vec{u}=a^2\overrightarrow{BC}+b^2\overrightarrow{CA}+c^2\overrightarrow{AB}$. *Montrer que* $\vec{u}=(a^2-b^2)\overrightarrow{AC}+(c^2-a^2)\overrightarrow{AB}$. *En déduire* $\vec{u}$ *n'est pas le vecteur nul.*
2. *Pour tout point M du plan on pose : f(M) =* $a^2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{MA'}+b^2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MB'}+c^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC'}$

a. *Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, calculer f(O).*

b. *Soit G le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que* $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{6}(b^2-c^2)$. *En déduire la valeur de f(G).*

c. *Déterminer l'ensemble D des points M du plan tels que f(M) = 0*

EXERCICE 6

Dans IP, plan rapporté au repère (0, $\vec{i},\vec{j}$ *), soit A, B, les points définis par* $\overrightarrow{OA}=\vec{i},\overrightarrow{OB}=\vec{j}$.

Soit a réel fixé et (A_n) *la suite de point telle que :*

A_0 *est barycentre de* $\{(O,1+a),(A,-a)\}$;

A_1 *est barycentre de* $\{(A_0,1+a),(O,-a)\}$;

A_{n+2} *est barycentre de* $\{(A_{n+1},1+a),(A_n,-a)\}$

Soit x_n *l'abscisse de* A_n.

1. *Démontrer que, pour tout n de IN :* $x_{n+1}=ax_n-a$
2. *Soit a =1 exprimer* x_n *en fonction de n, étudier la limite de la suite* $(x_n)_n$.
3. *Soit* $a\neq 1$

a. *Soit, pour tout n de IN :* $X_n=x_n+\lambda$. *Déterminer* λ *pour que* $(X_n)_n$ *soit une suite géométrique .*

b. *Exprimer* X_n *puis* x_n *en fonction de a et n.*

c. *Etudier la limite de la suite* $(x_n)_n$

d. *Etudier la suite* $(A_n)_n$ *pour a = 0 et a= -1*

EXERCICE 7

Soit a réel de l'intervalle]0 ;1 [. Dans IP plan rapporté au repère (O, $\vec{i},\vec{j}$ *), soit les points distincts* $M_0(x_0;y_0)$ *et* $M_1(x_1;y_1)$*, et la suite de point* $M_n(x_n;y_n)$ *tels que pour tout n de IN* M_{n+2} *est le barycentre de* $\{(M_n,a),(M_{n+1},1-a)\}$.

1. *Exprimer* $\overrightarrow{OM}_{n+2}$ *en fonction de* $\overrightarrow{OM}_n$ *et* $\overrightarrow{OM}_{n+1}$. *Calculer les coordonnées de* M_{n+2} *en fonction de celle de* M_n *et* M_{n+1}.
2. *Soit* $(u_n)_n$ *la suite définie par :* $u_n=\alpha r^n+\beta$, $n\in IN$, *ou* α,β *et r sont des réels* $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $r\neq 1$.

a. *Déterminer r tel que, pour tout n de IN :* $u_{n+2}=au_n+(1-a)u_{n+1}$.

b. *Pour cette valeur de r, déterminer* α et β *en fonction de* u_0 *et* u_1. *Calculer* u_n *en fonction* u_0 *et* u_1 .

c. *Démontrer que la suite* $(u_n)_n$ *est convergente. Préciser sa limite.*

3. *Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) converge respectivement vers x et y. Préciser x et y. Soit G le point de coordonnées (x,y). Démontrer que G est le barycentre de M_0 et M_1, affectés de coefficients à préciser.*

EXERCICE 8

Dans P, plan euclidien, soit (A, B, C) un triangle rectangle en A tel que : AC= 2AB = 2d, $d \in IR^{+*}$.

1. *Construire G_1 barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$. Construire G_2 barycentre de $\{(A,5),(B,2),(C,-3)\}$. Calculer G_1G_2 en fonction de d.*
2. *Etudier suivant les valeurs de k, réel positif, la nature de l'ensemble :* $\{M \in P \; MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 4k\}$. *Construire E_k pour k=* $\frac{3d^2}{2}$.
3. *Etudier, suivant les valeurs de a, réel positif, la nature de l'ensemble :* $\{M \in P \; MG_1 + MG_2 = 2a\}$

EXERCICE 9 ***Le tétraèdre équifacial***

Soit un tétraèdre ABCD et I, J, K, L, M et N les milieux des arêtes [AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD].

1.) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1)(IK) est orthogonale a (CD) ;

(2) $CA^2 + CB^{2^2} = DA^2 + DB^2$. *En déduire qu'il est équivalent de dire :*

(1)Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées (i.e. les bi médianes (IK), (JL) et (MN)) sont orthogonales a ces arêtes ;

(2)Les arêtes opposées sont de même longueur (AB=CD, AC=BD et AD=BC) (les faces du tétraèdre sont alors des ≪triangles identiques ≫(cotés de même longueur), d'où le nom de tétraèdre équifacial).

EXERCICE 10

Soit un tétraèdre ABCD.

1. *Démontrer que les droites (AB) et (CD) orthogonales si et seulement si :*
$AC^2 + BD^2 = DA^2 + BC^2$ *(1)*
2. *Démontrer que si dans tétraèdre les arêtes (AB) et (CD) d'une part sont orthogonales, alors les arêtes (BD) et (AC) sont aussi orthogonales.*
3. *Dans cette question, on suppose réalisées les conditions de la question 2) .Soit A' le projeté orthogonal de A sur la face (BCD).Démontrer que A' est l'orthocentre du triangle BCD. Soient B', C' et D' les projetés respectifs des points B, C, et D sur la face opposée.*

Démontrer que les droites (AA'), BB') (CC') sont concourante

Exercice 11

On considère un triangle ABC de l'espace. Montrer que chacun des ensembles suivant est un plan on précisera un point et un vecteur normal ***(indication générale : « barycentre ») :***

$a)\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$b)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$c)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0.$

Exercice 12

On donne, dans l'espace, quatre points A, B, C et D, non coplanaires. I est le milieu de [AB]. J est le milieu de [CD]. G le milieu de [IJ].

1° Peut-on avoir I = J ?

Existe-t-il des ponts de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}$? *Justifier votre réponse.*

2° Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$.

3° Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tel que : $MA^2+MB^2=MC^2+MD^2$.

Peut-on avoir (P_1) = (P_2) ?

Exercice 13

ABCD est un rectangle ; AB = a et AD = 2a. M est un point de l'espace.

$f(M)=MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$

$g(M)=MA^2+MB^2-MC^2-MD^2.$

1° Déterminer l'ensemble des points M tels que $(1)\,6a^2\leq f(M)\leq 10a^2$.

2° Même question pour $(2)\,g(M)=4a^2$.

3° Quelle es l'intersection de ces deux ensembles ?

Exercice 14

Dans un plan (P) de l'espace, on considère le cercle (C) de diamètre [AB]. Soit Δ *la droite passant par A appartenant à (P) et S un point de* Δ *distinct de A. On note I le projeté orthogonale de A sur la droite (BS).Pour tout point M du cercle (C), on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).*

1° Placer les données précédentes sur une figure, Δ étant placée verticalement.

2° Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre [AS].

3° Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B.

Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS).

En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).

4° Montrer que H appartient au plan Π passant par I et orthogonale à la droite (BS).

5° a) Déterminer l'intersection Γ de Σ et Π.

c) Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt (C) est égal à Γ. A cet effet, étant donnée un point N' de Γ distinct de A, on pourra montrer que le plan (AN'S) coupe (C) en A et en un autre point M.

Nombres complexes

Exercice n°1

Les trois parties I), II) et III) sont

Indépendantes.

Partie I

1)*a)On pose* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *; calculer* j^2 *. En déduire le calcul de :* $1 + j + j^2$ *;* j^3 *;* $\frac{1}{j}$

b) Démontrer que, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ *on a :* $2(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

Partie II

2) *a) Déterminer le module et un argument de :*

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_2 = 1 + i$; $\frac{z_1}{z_2}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{5\pi}{12}$

c) Comment choisir l'entier naturel n pour que z_1^n *soit un réel? un imaginaire? :*

d) Résoudre l'équation dans IR $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin x = 2$

Partie III

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$

On considère le nombre complexe z, tel que :

$$z=-\sin 2\theta+2i\cos^2\theta .$$

1) *Déterminer le module et un argument de z lorsqu'il existe, en fonction de θ.*
2) *Déterminer θ pour que z et $1-z$ aient même module.*

Exercice n°2

Les trois questions 1), 2) et 3) sont Indépendantes.

1) *a)Démontrer que* $\forall(z,z')\in C^2 \quad |z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$

b) Interpréter géométriquement l'égalité ci-dessus et en déduire une propriété du parallélogramme.

2) *Démontrer que* $\forall(z,z')\in C^2$ *la double inégalité triangulaire :* $\left||z|-|z'|\right|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$.

3) *Démontrer que, si les nombres complexes*

z_1 et z_2 ont pour module 1 et tels que $z_1z_2\neq-1$, *le nombre complexe:* $z=\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ *est réel*

Exercice n°3 :

Soit z, z′, u des nombres complexes tels que

$u^2 = zz'$.

Montrer que $\quad |z|+|z'|=\left|\dfrac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\dfrac{z+z'}{2}+u\right|$

Exercice n°4 :

*Soit **a** et **b** deux nombres complexes non nuls, A et B leurs images respectives.*

1) *Démontrer que les points O, A, B sont alignés si seulement si :* $a\bar{b}\in IR$

Montrer que pour que $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ *soit réel, il est nécessaire et suffisant que O, A et B soient alignes ou que OA = OB.*

2) *On suppose dans cette question que les points O, A et B ne sont pas alignes et que* $|a|=|b|=1$.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ *est un réel strictement positif.*

3) Application

Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 ,tels que les points O M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a) Calculer en fonction de z_1 et z_2 l'affixe Z du point G barycentre de $(M_1, |z_1|)$ *et* $(M_2, |z_2|)$

b) Démontrer que $\frac{Z^2}{z_1 z_2} \in IR$

c) En déduire que $\overrightarrow{OG}$ *est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle* M_1OM_2 .

<u>Exercice n°4</u> : Lieux géométriques

Déterminer et construire l'ensemble des points M(z) tels que :

a) $Re(z^3) = Im(z^3)$

b) $(z-1-i)(\bar{z}-1+i) = 25$

c) $(z\bar{z})^2 - 13z\bar{z} + 36 \leq 0$

d) $arg\left(\frac{z-2+i}{z+2i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$

e) $arg(z^2-4) = arg(z+2)\ [2\pi]$

f) *Le triangle* $MM'M''$ *soit rectangle*

en M avec $M'(z^2)$ *et* $M''(z^3)$.

<u>Exercice n°5 :</u> I, II et III sont indépendantes

<u>Partie</u> : I

On pose : $\forall n \in IN^*$

$$C_n(\theta) = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots \cos n\theta \ \text{ et } \ S_n(\theta) = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots \sin n\theta .$$

1) *Montrer que si $\theta \neq 2k\pi$, ($k \in \mathbb{Z}$), alors :*

$$\Sigma_n(\theta) = C_n(\theta) + iS_n(\theta) = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}$$

2) *En déduire que* $\Sigma_n(\theta)=e^{i\theta}\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\;e^{i\frac{n\theta}{2}}$ *puis les valeurs de* $C_n(\theta)$ *et* $S_n(\theta)$.

3) *On prend maintenant* $\theta=\dfrac{\pi}{n}$.

Déduire de **2)** *que* $u_n=C_n\left(\dfrac{\pi}{n}\right)=0$ *et que* $v_n=S_n\left(\dfrac{\pi}{n}\right)=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

Calculer la limite de la suite $\left(\dfrac{v_n}{n}\right)_{n\geq 1}$

Partie : II

En s'inspirant de la première partie

1) *Calculer* $A_n(x)=\cos^2 x+\cos^2 2x+\ldots+\cos^2 nx$

2) *Montrer que :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$

Exercice n°6

Partie I

Soit $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ *où* $a_k\in IR$ *pour tout k*

1) a) *Montrer que :* $\forall z\in\mathbb{C}:\ \overline{P(z)}=P(\bar{z})$

b) *En déduire que si* α *est solution alors* $\bar{\alpha}$ *l'est aussi.*

2) *On pose :* $P(z)=z^4-z^3+z^2+2$

Calculer $P(1+i)$ *puis en déduire l'ensemble des solutions* $\mathbb{C}$ *dans l' équation :* $P(z)=0$

Partie II

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $Z^4-1=0$.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ *de l'équation :*

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$$

Partie III

.

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système : $\begin{cases} z_1 z_2 = \dfrac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$ *. On donnera les solutions sous forme exponentielle.*

Exercice n°7

On vous propose de résoudre, dans C, l'équation (1) d'inconnu

$$z^4 - 4(\cos a \cos b)z^3 + 2(1+\cos 2a + \cos 2b)z^2 - 4(\cos a \cos b)z + 1 = 0$$

où a et b sont deux nombres réels.

1) Démontrer qu'en posant $u = z + \dfrac{1}{z}$ *on peut ramener la résolution de l'équation (1)*

à celle de deux équations du second degré. à celle de deux équations du second degré.

2) Résolvez (E)

Exercice n°8 :

Calculer la somme $S(z) = 1 + z^2 + z^4 \ldots\ldots\ldots + z^{2n-2}$, $z \in \mathbb{C}$

a) Résoudre dans C, l'équation définie par : $z^{2n} - 1 = 0$, $n \in IN^*$.

b) Démontrer que $S(z) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2 - 2z\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1\right)$

c) En considérant S (1), démontrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\dfrac{k\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$

d) En considérant S (i), calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \cos\dfrac{k\pi}{n}$

Exercice n°9 :

1° a) α est un nombre réel. Résoudre l'équation : $(S_{\alpha,1})\begin{cases} z \in C \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0 \end{cases}$

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $(S_{\alpha,1})\begin{cases} z \in C \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0 \end{cases}$ *dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.*

2) *Pour tout entier naturel n , pour réel α et pour tout complexe , on pose :*

$P_\alpha(z)=z^{2n}-2z^n\cos\alpha+1$

On admet que, pour tout z, α et n, *on a :* $\prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2-2z\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right]$

a) Calculer $P_\alpha(1)$ *et en déduire que :* $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{4^{n-1}}$.

b) Pour tout $\alpha\in\left]0;\pi\right[$ *et pour tout naturel* $n\geq 2$ *, on pose* $H_n(\alpha)=\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que , α *élément de l'intervalle]0 ;* π *[et on a :* $2^{n-1}H_n(\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$.

c) Quelle est la limite de $\lim\limits_{\alpha\to 0}H_n(\alpha)$ *En déduire que : pour tout naturel* $n\geq 2$ $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice n°10 :

Déterminer et construire l'ensemble des points

M(z) tels que : $\left(\frac{z+1}{z-2}\right)^5\in IR$ *(Intéressant)*

Exercice n°11 :

Racines 5èmes – valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ $\tan\frac{\pi}{5}$ ***, construction d'un pentagone***

Calcul de $\tan\frac{\pi}{5}$ ***et*** $\cos\frac{2\pi}{5}$

1. *Résoudre dans* ℂ *l'équation* $Z^5=1$.

2. *a) soit* θ *un élément de]* $-\pi,\pi$ *[.*

Exprimer en fonction de θ *la solution de l'équation :* $\frac{1-iz}{1+iz}=e^{i\theta}$

b) Résoudre dans C l'équation : $\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^5=1$

c) Développer et ordonner l'expression : $(1-iz)^5-(1+iz)^5$

Puis Résoudre l'équation dans C : $(1-iz)^5-(1+iz)^5=0$

Déduisez – en alors la valeur de $\tan\frac{\pi}{5}$.

3. *On pose* $z_0=e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $\alpha=z_0+z_0^4$ *et* $\beta=z_0^2+z_0^3$

a) *Démontrer* $1+z_0+z_0^2+z_0^3+z_0^4$; *déduisez-en que* α *et* β *sont les solutions de l'équation :*

$$X^2-X-1=0\ (1)$$

b) *Déterminer a en fonction de* $\cos\frac{2\pi}{5}$

Résoudre l'équation (1) et donner la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$

Construction du pentagone

4. *On désigne par A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 les points d'affixes respectives 1,* z_0 , z_0^2, z_0^3 *et* z_0^4 *dans le repère orthonormal direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$. *, H est le d'intersection de la droite (A_1A_4) avec l'axe des abscisses.*

a) *Démontrer que :* $\overline{OH}=\cos\frac{2\pi}{5}$

Ω *est le point d'affixe* $-\frac{1}{2}$ *et B est le point d'affixe i. Le cercle de centre* Ω *et passant par B coupe l'axe des abscisses en M et N, M étant le point d'abscisse positive.*

b) *Démontrer que : OM = a, ON = β et H est le milieu du segment [OM].*

c) *Déduisez- en une construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.*

Exercice n°11 :

Quadrangle harmonique

Dans le plan complexe. Soit les points A, B, M, images respectives des nombres complexes a, b et z : $a\neq b$.

Soit z' le complexe d'image M',défini par (1) : $\frac{z'-a}{z'-b}:\frac{z-a}{z-b}=-1$

Le quadrangle (A, B, M, M') est dit quadrangle harmonique.

1) *Démontrer que :* $\frac{M'A}{M'B}=\frac{MA}{MB}$ *et :* $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})=(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})+\pi\ (2\pi)$

2) *Démontrer que la relation* (1) *équivaut à* $2(ab+zz')=(a+b)(z+z')$.

3) *Soit H le milieu de* $[AB]$. *Démontrer que*

(AB) *est une bissectrice de* $(\overrightarrow{HM},\overrightarrow{HM'})$ *et* $HM \times HM' = HA^2 = HB^2$

4) *Démontrer même que si K est le milieu de* $[MM']$ *, la droite* (MM') *est une bissectrice de l'angle* $(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB})$ *et* $KA \times KB = KM^2 = KM'^2$

5) *On suppose que A,B fixés et M ,M' variables, de façon que leurs affixes vérifient la relation* (1).

Déduire de ce précède la construction du point M et de M' quand K est fixé, et prouver l'égalité :

$KA + KB = HM + HM'$

Application *:* ***Construction géométrique des solutions d'une équation du 2nd degré dans*** $\mathbb{C}$

Soit l'équation $(E): z^2 - 2pz + \alpha^2 = 0$ *où p et* α *sont des complexes fixés.*

Soit C, C', M'et M''les images respectives de α , $(-\alpha)$, *z'et z''.(où z'et z''sont les solutions de* (E).

Démontrer que le quadrangle (C,C',M',M'') *est harmonique.*

En remarquant que A point d'affixe p est le milieu de $[MM']$, *construire les points M' et M'' , les points C,C' et A étant fixés.*

Exercice n°12 :

Le plan est muni d'un repère ortho normal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. *On note (C) le cercle de centre O et de rayon R>0 et A un point de (C) d'affixe R .Soit n un entier supérieur ou égal à 2 , on note r la rotation de centre O et d'angle* $\frac{2\pi}{n}$. *On considère la suites points* (M_k) *de (C) définie par :* $M_0 = A$ *et* $M_{k+1} = r(M_k)$. *On note* z_k *l'affixe de* M_k .

1. a) *Exprimer* z_{k+1} *en fonction de* z_k .
b) *En déduire l'expression de* z_k *en fonction de k et n .*
c) *Comparer* M_n *et* M_0 .
d) *Faire une figure pour n = 8 (on prendra n = 8).*
2. A) *Prouver que , pour* $k \geq 0$, $M_kM_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.
b) *On note* $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots M_{n-1}M_n$ *le périmètre du polygone régulier* $M_0M_1 \ldots M_n$.
Déterminer la limite de L_n *lorsque n tend vers* $+\infty$ *.-*
Interpréter géométriquement le résultat.

EXERCICE 3 :7points

A.) ***Racines septième de l'unité***

1.) *Résoudre dans C l'équation :* $z^7 - 1 = 0$.

(Donner les solutions sous forme exponentielle).

2.) On pose $\omega^{\frac{2i\pi}{7}}$

a.) Démontrer que les solutions de l'équation sont les nombres $\omega^k \;\; 0 \leq k \leq 6$.

b.) En déduire que le produit des racines de l'équation est égale a 1.

3.) On note S la somme des racines de L'équation.

a.) Démontrer que : $\omega S = S$.

b.) En déduire que la somme des racines de l'équation est nulle.

4.a) Démontrer que les solutions de l'équation sont deux a deux conjuguées.

b) En déduire que pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^7 - 1 = (z-1)\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{7} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{7} + 1\right)\left(z^2 - 2z\cos\frac{6\pi}{7} + 1\right)$$

B.) <u>Relations trigonométriques</u>

1.a) Démontrer que $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

b) En déduire les solutions de l'équation : $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

2.) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{7}; \cos\frac{4\pi}{7}; \cos\frac{6\pi}{7}$ sont les racines de l'équation $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0$.

3.) Démontrer que $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ et $\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{8}$

C) <u>Polygone a 7 cotes</u>

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1.) On pose $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ .Placer les images des solutions de $z^7 - 1 = 0$.
On note A, B, C, D, E, F, G les sommets du polygone régulier convexe direct P ainsi obtenu.

2.) Démontrer que O est l'isobarycentre des sommets du polygone P.

3.) Démontrer que l'aire du polygone P est égale a $\frac{7}{2}\sin\frac{2\pi}{7}$.

4.) On pose a=AB; b=AC et c=AD.

a. Démontrer que $a^2 + b^2 + c^2 = 7$.

b. Démontrer que $a = 2\sin\frac{\pi}{7}; b = 2\sin\frac{2\pi}{7}; c = 2\sin\frac{3\pi}{7}$.

<u>EXERCICE 4 :6points</u>

Soit P le plan complexe rapporté a un repère ortho normal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

A.1. On prend pour point M_0 *l'origine du repère ; soit alors* M_1 *le point du plan P tel que* $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{i}$*. On fixe un nombre réel* $r \succ 0$*, et un nombre réel* θ *dans* $R - \{k\pi; k \in Z\}$*. Soit* M_2 *le point du plan P tel que :* $\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| = r\left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\|$ *et* $(\overrightarrow{M_0M_1}; \overrightarrow{M_1M_2}) = \theta$.

Calculer l'affixe v_0 *du vecteur* $\overrightarrow{M_0M_1}$ *et l'affixe* v_1 *du vecteur* $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Les points M_0, M_1, M_2 *ayant été définis ci-dessus, pour tout* $n \geq 1$ *dans* N*, on définit le point le point* M_{n+1} *a partir des points* M_{n-1} *et* M_n *par :*

$$\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = r\left\|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\right\| \quad et \quad (\overrightarrow{M_{n-1}M_n}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta$$

On obtient ainsi une suite de points $M_0, M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n \ldots.$ *et la figure obtenue en traçant les segments* $[M_0M_1], [M_1M_2], \ldots\ldots, [M_nM_{n+1}]..$ *est appelée* ≪ *joligone* ≫.

On note v_n *l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

a. *Montrer que pour tout naturel* $n \geq 1$, $v_n = re^{i\theta}v_{n-1}$.
b. *Déduisez- en pour tout naturel* $n \geq 0$*, l'expression de* v_n *en fonction de n, r et* θ.
c. *Dans cette question, on suppose* $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $\theta = \frac{\pi}{4}$*. Calculer* v_n *pour* $0 \leq n \leq 3$ *et placer les points* M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 *en prenant 8cm pour unité de longueur.*

B. Dans toute la suite du problème, on suppose $0 < r < 1$ *et, pour naturel* $n \geq 0$

On note z_n *l'affixe du point* M_n.

1. *Calculer* z_0, z_1 *et* z_2.
2. *Pour tout* $n \geq 0$ *, exprimer* v_n *en fonction de* z_n *et* z_{n+1}*; déduisez-en que pour tout* $n \geq 1$, $z_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_{n-1}$.
3. *On rappelle que pour tout nombre complexe* $z \neq 1$,
   $1 + z + z^2 + \ldots\ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$.
   Calculez, pour tout $n \geq 0$, z_n *en fonction de* n, r *et* θ.
4. *a) Démontrer que que le module du nombre complexe* $z_n - \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$ *tend vers 0 quand n tend vers* $+\infty$.
   b) On note Ω *le point du plan P d'affixe* $\omega = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$*. Interprétez géométriquement le résultat de la question a.*

5. Pour tout $n \geq 0$, on note z_n' l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a. Calculer z_n' en fonction de n, r et θ.

b. Etablisse qu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ tel que pour tout $n \geq 1$, $z'_n = az'_{n-1}$.

c. En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminer une similitude f telle que pour tout ≥ 1, $f(M_{n-1}) = M_n$.

Précisez le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d. Dans cette question, on suppose que $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Calculez dans ce cas les coordonnées du point Ω et placer ce point sur la figure précédemment tracée. Indiquer une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placer les points M_5, M_6, M_7 et M_8 sur la figure.

isométries du plan

EXERCICE : 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M, de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.
2. Démontrer que : $f \circ f = f$.
3. a)Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE : 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M, de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(5x - 12y + 24) \\ y' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 36) \end{cases}$$

1. Démontrer que : $f \circ f = Id$.

2. *Démontrer que l'ensemble des points invariants par f est une droite (D) que l'on précisera.*
3. *Soit Mun point du plan et M' son image par f.*

a) *Démontrer que le milieu de [MM'] appartient à (D).*
b) *Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe, orthogonale à celle de (D).*
c) *En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.*

EXERCICE : 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère l'application f du plan dans lui-même qui au point M, de coordonnées (x, y) associe le point coordonnées (x', y') telles que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x - y + 2) \\ y' = \dfrac{1}{2}(x + \sqrt{3}y + 4 - 2\sqrt{3}) \end{cases}$$

1. *Démontrer que f est une isométrie du plan.*
2. *Montrer que f possède un unique point invariant I. En déduire la nature de f.*
3. *O' désigne l'image de O par f, déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'})$.*
   En déduire la nature de f

EXERCICE : 4

Le plan affine euclidien P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit f l'application de P dans P qui à tout point $M(x, y$ associe le point $M'(x'; y')$ définie par $\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x + 2 \end{cases}$

1) *Montrer que f est une isométrie affine du plan P. est-telle un déplacement ? un antidéplacement ?*
2) *Démontrer que l'ensemble des points I milieux du segment [MM'] est une droite (D).*
3) *Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S par rapport à (D).*
4) *Déterminer t tel que : $f = S \circ t$*

EXERCICE : 5

Soit ABC un triangle équilatéral direct, inscrit dans un cercle (Γ).On considère un point M de (Γ) situé sur celui des arcs d'extrémités A et C qui ne contient pas le point B, et I le point du segment [MB] tel que MI = MA.

Montrer que IB = MC. En déduire que MA+MC =MB.

EXERCICE : 6

Soit ABCD un parallélogramme tel que l'angle en A soit aigu .On désigne par H et K les projetés orthogonaux de B respectivement sur (AD) et (DC).

1. *Déterminer* $f = S_{(AB)}oS_{(DC)}oS_{(AD)}oS_{(BC)}$.
2. *Déterminer* $g = S_{(BC)}oS_{(AD)}oS_{(CD)}oS_{(AB)}$.
3. *Que deviennent f et g si ABCD est un rectangle ?*

EXERCICE : 7

Soit ABCD un parallélogramme ; On pose $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \alpha[2\pi]$.

1. *Déterminer la nature des transformations f et g définies par :*
   $f = S_{(AB)}oS_{(AD)}oS_{(BC)}\ oS_{(CD)}$
   $g = S_{(AD)}oS_{(AB)}oS_{(DC)}\ oS_{(AD)}$
2. *Déterminer f et g lorsqu'ABCD est un rectangle.*

EXERCICE : 8

Dans le plan orienté on considère un triangle ABCD tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
Soit I, J et K les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB]. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ *. t la translation de vecteur* $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *et on pose f=*Rot *et g=* toR .

1) *a)Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g*
2) *b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g Déterminer la nature de la transformation* gof^{-1} .

a) *Chercher l'image de A par* gof^{-1} *et caractériser alors cette application.*
b) *Soit M un point du plan,* M_1 *l'image de M par f et* M_2 *l'image de M par g .*
c) *Quelle est la nature du quadrilatère AC* M_1M_2 *?*

EXERCICE : 9

Dans le plan orienté on considère un triangle ABCD tel que : AB=AC et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ *; on désigne par I le milieu de [BC] . On note* R_B *la rotation de centre B et d'angle* $\frac{\pi}{2}$, R_C *la rotation de centre C et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *et t la translation de vecteur* $\overrightarrow{BC}$.

a) *Déterminer* $f = R_C otoR_B$.
b) *Préciser l'image par f du point B.*
c) *Caractériser f.*

EXERCICE : 10

On note H l'orthocentre d'un triangle équilatéral direct ABC. On désigne par r_A , r_B *et* r_C *les rotations de centres respectifs A , B et C et de même angle* $\frac{\pi}{3}$ *et on pose*
$f = r_A or_B$ *et* $g = r_C or_B or_A$

a) *Calculer f(A), f(B) et g(B) et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et de g*
b) *On désigne par* $s_{(AB)}$, $s_{(BC)}$ *et* $s_{(CA)}$ *les réflexions d'axes respectifs (AB) , (BC) et (CA) et on pose* $h = s_{(CA)}o\ s_{(AB)}os_{(BC)}$ *et soit (d) la droite parallèle à (AC) passant par B.*
Montrer que $s_{(AB)}os_{(BC)} = s_{(d)}o\ s_{(AB)}$.

c) *Soit B′ le milieu de [AC]. Montrer que* $h = t_{2\overrightarrow{BB'}} o\ s_{(AB)}$.

EXERCICE : 11

Soit AOO′ un triangle rectangle et isocèle direct de sommet A tel que $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'}\right)=\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
On note (C) le cercle de centre O et de rayon OA, (C′) le cercle de centre O′ et de rayon O′A.
Les cercles (C) et (C′) se recoupent en B.
1 a) Montrer que : $S_{(AB)}$*(C)= (C′).*
b) Déduisez- en l'égalité angulaire : $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO'}\right)$.
2. déterminer la nature de l'isométrie $R=S_{(AB)}oS_{(AO)}$.
3. Déterminer l'image du cercle (C) par R.
a. En déterminant l'image de (C) par chaque réflexion.
b. En utilisant directement la rotation R.
4. Soit $f=S_{(AO)}oS_{(AB)}$. *Déterminer l'image (* Γ *) du cercle (C) par f, représentez- la. Montrer que (AO) est tangente à (* Γ *) en A.*

EXERCICE : 12

Dans le plan orienté on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Pour la figure on prendra comme unité de longueur le centimètre et AB = 16.

Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

Soit un point C, distinct de A, tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$.

La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F. On appelle I le milieu de [BC], J le milieu de [EF] et D le point d'intersection des droites (EC) et (BF).

On note h_A *l'homothétie de centre A qui transforme B en E et* h_D *l'homothétie de centre D qui transforme E en C.*

1. Déterminer $h_A(C)$ *puis* $h_D(F)$.

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_A$ *puis de* $h_A \circ h_D$.

3. On appelle E' l'image de E par h_A *et E" l'image de E' par* h_D.

Représenter E' puis construire E" en justifiant la construction.

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_A \circ h_A \circ h_D$.

5. Montrer que le quadrilatère BECE" est un parallélogramme.

6. On appelle Δ l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$*. Δ est donc une demi-droite ouverte d'origine A. Pour la suite les points A, B, E sont fixes et le point C décrit Δ.*

Déterminer et construire le lieu géométrique Δ" du

EXERCICE 1 3

Le plan P est orienté. Soit ABC un triangle non rectangle inscrit dans un cercle (C) de centre O et soit H son orthocentre. Soient (C_1) *et* (C_2) *les cercles de centre* (O_1) *et* (O_2) *symétrique du cercle* (C), *respectivement par rapport aux droites (AB) et (AC).*

1) *Soit* α *le symétrique de H par rapport à la droite (AB).*
   Justifier que $(\overrightarrow{\alpha A};\overrightarrow{\alpha C}) = -(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{\alpha C}) + k\pi$.
   Montrer que $(\overrightarrow{\alpha A};\overrightarrow{\alpha C}) = (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + k\pi$.
   Que peut –on en déduire pour α *, puis pour H ? Déterminer* $C_1 \cap C_2$.
1) *Montrer que* C_2 *est l'image de* C_1 *par une rotation R de centre A dont vous préciserez une mesure de l'angle.*
2) *Soit M un point quelconque du cercle C dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AC) et (AB) sont B' et C'.Justifier les égalités suivantes.*

$$R(C') = B' ; (\overrightarrow{HB'};\overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2B'};\overrightarrow{O_2A}) + k\pi$$
$$(\overrightarrow{HC'};\overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1C};\overrightarrow{O_1A}) + k\pi$$
$$(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{OC'};\overrightarrow{OA}) + k2\pi$$

En déduire que $(\overrightarrow{HB'};\overrightarrow{HC'}) = k\pi$.*Que peut-on déduire pour les points H, B' et C' puis pour les points H, A', B, C' ou A' est le symétrique de M par rapport à la droite (BC)?*

3) *Montrer que les points I, J et K milieux respectifs des segments [MA'], [MB'] et [MC'] sont alignés.*
4) *Réciproquement, soit M un point quelconque du plan dont les projections orthogonales K, J, I sur les droites (AB), (AC), (BC) sont alignés .Démontrer que M appartient au cercle C. (On pourra montrer que les points M, I, J, C d'une part et M, I, K, B d'autre part sont cocycliques).*

similitudes directes du plan

Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère ortho normal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. *Unité graphique : 0,5 cm. On note j le nombre complexe* $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. *On considère les points A, B et C d'affixes respectives a = 8, b = 6j et c = 8j².*

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, *B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$, *C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle* $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A′, B′ et C′ dans le repère donné.

2. On appelle a′, b′ et c′ les affixes respectives des points A′, B′ et C′.

a. Calculer a′. On vérifiera que a′ est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. *En déduire que O est un point de la droite (BB′).*

c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$. *Montrer que les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en O.*

3. On se propose désormais de montrer que la distance MA+MB+MC est minimale lorsque

M = O.

a. Calculer la distance OA + OB + OC.

b. Montrer que $j^3 = 1$ *et que* $1 + j + j^2 = 0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe. On rappelle que a = 8, b = 6j et c = 8j².

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right| = \left|a+bj^2+cj\right| = 22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, $|z+z'+z''| \leq |z|+|z'|+|z''|$. *Montrer que MA+MB+MC est minimale lorsque M = O.*

Exercice 2

On considère les nombres complexes $a = -\sqrt{3} + i$, $b = 3 + 2i$ *et* $c = 7 - 2i$.

1. *a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a . En déduire les valeurs de* $cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $sin\frac{5\pi}{12}$.
   b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n *est un nombre réel*
   c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n *est imaginaire pur .*
2. *Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :*

a. $|z-b| = |z-c|$

b. b. $2\,|z-b| = |a|$.

3. *Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ telle que :* $z' = (1+i\sqrt{3})z - 5i\sqrt{3}$.

a. *Démontrer que f admet un seul point invariant Ω .*

b. *Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω . Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie .*

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b. Déterminez les images de R et de P par r.

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS?

3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR]. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ *et de rapport* $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 4

Le plan complexe est rapporté a un repère ortho normal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. *On prendra pour unité graphique 1 cm.*

On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 6 + 3i$, $z_D = -1 + 6i$.

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que f (A) = B et f (C) = D.

Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit J le point d'affixe 3 + 5i. Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ *transforme A en D et C en B.*

4. On appelle I le point d'affixe 1 + i, M et N les milieux respectifs des segments [AC] et [BD].

Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

a. Calculer les affixes z_P *et* z_Q *des points P et Q.*

b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ *et* $\frac{IQ}{IC}$ *ainsi qu'une mesure des angles* $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IP}\right)$ *et* $\left(\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IQ}\right)$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que g(A) = P et g(C)= Q.

c. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

Exercice 5

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que AC = BD et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC] , [CD] et [DA].

On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3).

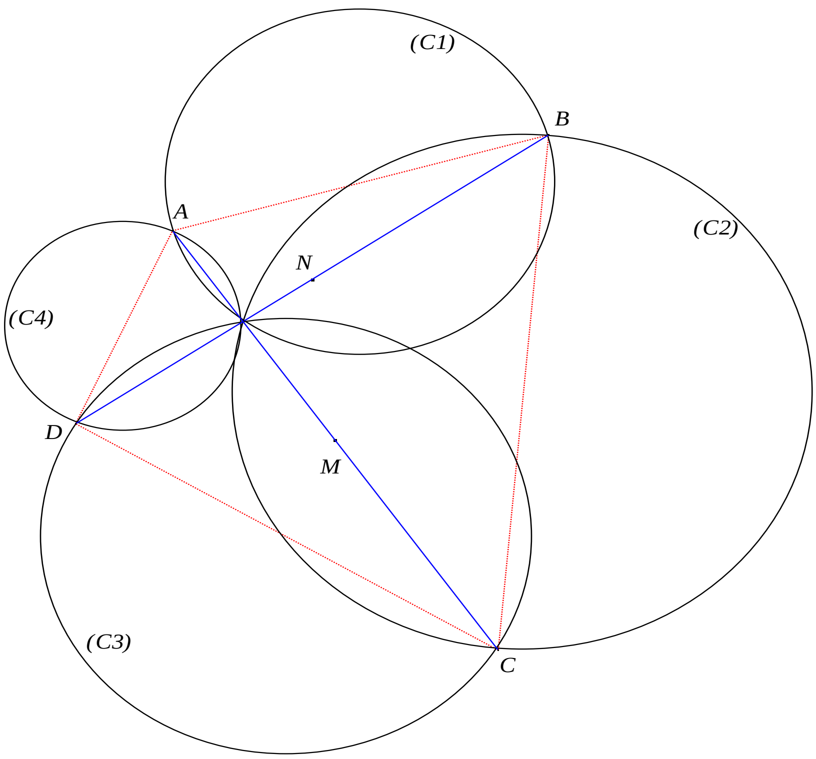
b. Soit r′ la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r′ ? Montrer que le centre J de r′ appartient aux cercles (C_2) et (C_4).

c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ? On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ *et d'angle* $\frac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de [PR].



Exercice 6

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI})=-\frac{\pi}{2}$. *Pour la figure, que l'on complétera en traitant les questions, on prendra AB = 5 cm.*

1. On appelle r_A *la rotation de centre A qui transforme B en C et* r_C *la rotation de centre C et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$. *On pose* $f = r_C \circ r_A$.

a. Déterminer les images par f de A et de B.

b. Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.

c. Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

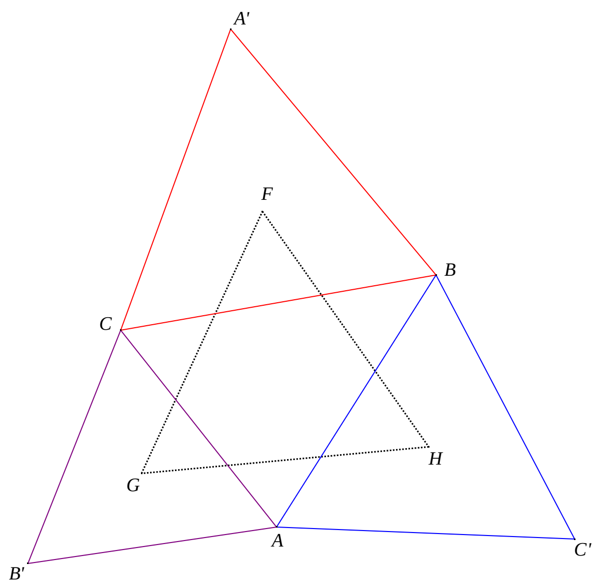
2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B. On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H' son image par s.

a. Donner une mesure de l'angle de s. Montrer que C' appartient à la droite (OA).

b. Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H' est le milieu de [OB].

c. Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB). En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.

Exercice 7



1. 17. *Le théorème de Napoléon 3*

On considère un triangle ABC direct de centre de gravité O. On construit les triangles équilatéraux CBA′, ACB′ et BAC′ tels que les angles $\left(\overrightarrow{A'C},\overrightarrow{A'B}\right)$, $\left(\overrightarrow{B'A},\overrightarrow{B'C}\right)$, $\left(\overrightarrow{C'B},\overrightarrow{C'A}\right)$ *aient pour mesure* $+\frac{\pi}{3}$. *On désigne par F, G et H les centres des triangles équilatéraux.*

Le but de l'exercice est de montrer de deux *façons différentes que le triangle FGH est équilatéral direct.*

1. a. Soit R la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Déterminer R(C′) et R(C). En déduire que CC′ = BB′ et que $\left(\overrightarrow{C'C},\overrightarrow{BB'}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$.

b. Montrer que $\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}$.

c. Montrer que OH = OG et $\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OG}\right)=-\frac{2\pi}{3}(2\pi)$.

d. En déduire que FGH est équilatéral direct de centre O.

2. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations d'angle $+\frac{2\pi}{3}$ de centres respectifs F, G et H.

a. Quelle est l'image de B par $f = R_1 \circ R_2 \circ R_3$? Déterminer la nature de f.

b. En déduire le centre et l'angle de la rotation $R = R_2 \circ R_3$.

c. On note S la réflexion d'axe (GH). Déterminer les axes des réflexions S_2 et S_3 telles que $R_2=S_2 \circ S$ et $R_3=S \circ S_3$. Montrer que ces axes se coupent en F′ tel que F′GH soit équilatéral direct.

d. Montrer que F′ et F sont confondus et en déduire que FGH est équilatéral direct.

Exercice 8

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = B$.

1. Déterminer la nature de $r_C \circ r_B \circ r_A$ et préciser la position du point E.

2. a. Montrer qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme S cette similitude.

b. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}\right)$. En déduire S(E).

3. Soit Ω le centre de la similitude S.

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrit aux triangles ABC et DBE. Construire Ω.

4. a. Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD].

En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment [DE].

Exercice 9

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_A *la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$, r_B *la rotation de centre B et d'angle* $\frac{\pi}{3}$, r_C *la rotation de centre C et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *et par D et E les points tels que :* $r_B(A) = D$ *et* $r_C(D) = B$.

1. Déterminer la nature de $r_C \circ r_B \circ r_A$ *et préciser la position du point E.*

2. a. Montrer qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ *et d'angle* $\frac{-2\pi}{3}$ *qui transforme A en B. On nomme S cette similitude.*

b. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$, *ainsi qu'une mesure de l'angle* $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}\right)$. *En déduire S(E).*

3. Soit Ω *le centre de la similitude S.*

Montrer que Ω *appartient aux cercles circonscrit aux triangles ABC et DBE. Construire* Ω.

4. a. Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD].

En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment [DE].

Exercice 10

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

On désigne par : r_A *la rotation de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{3}$; r_B *la rotation de centre B et d'angle* $\frac{\pi}{3}$; r_C *la rotation de centre C et d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *et par D et E les points tels que :* $r_B(A) = D$ *et*

$r_C(D) = E$.

1. Démontrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ *est la symétrie centrale de centre B. Préciser alors la position du point E.*

2. On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme S cette similitude. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD})$. En déduire que S(E) = D.

3. Soit ω le centre de la similitude S.

Montrer que ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et DBE. Construire ω.

4. a. Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB).

b. Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD].

En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment [DE].

courbes paramétrées planes

Exercice :1

Tracer les courbes définies par les équations paramétriques suivantes :

a. $\begin{cases} x(t) = sin2t \\ y(t) = cost \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = cost - \frac{1}{2}cos2t \\ y(t) = sint \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t) = 2sint \\ y(t) = cos3t \end{cases}$

Exercice :2

Soit la courbe C définie par ses équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = sin^3 t \\ y(t) = 1 + cost \end{cases}$

a. Indiquer les positions des points M(t) et M(t+2π) En déduire un intervalle d'étude.
b. Indiquer la position des points M(t) et M(-t).On précisera alors la symétrie de la courbe C.En déduire un nouvel intervalle d'étude I.
c. Etudier les variations de x et y sur I .On admettra qu'au point de vecteur nul, la tangente est verticale.
d. Tracer la courbe C .

Exercice :3

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit C la courbe dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x = 2e^t + e^{-t} \\ y = 2e^t - e^{-t} \end{cases}$ *où le réel t décrit R .*

1) *Soit M(a , b) un point de C .*
a) *Donner , en fonction de a et b les coordonnées d'un vecteur directeur* $\vec{u}$ *de la tangente en M à C .*
b) *Soit N le point de coordonnées (b , a) et T le point défini par :* $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM}$ $+\overrightarrow{ON}$ *Montrer que la droite (MT) est la tangente en M à la courbe C .*
2) *a) Montrer que la courbe C est continue dans l'hyperbole H d'équation :* $x^2 - y^2 = 8$
b) Tracer l'hyperbole H et préciser les éléments caractéristiques suivants : centre , sommets , foyers asymptotes .

Exercice :4 **La cardioïde**

Soit la courbe C , appelée cardioïde , définie par ses équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(\theta) = 2cos\theta - cos2\theta \\ y(t) = 2sin\theta - sin2\theta \end{cases} \theta \in [\![-\pi;\pi]\!]$$

1. *Etude de la courbe*
a. *Comparer les positions des points $M(\theta)$ et des points $M(-\theta)$.En déduire une symétrie de la cardioïde et un intervalle d'étude I.*
b. *Etudier les variations de x et y sur I.*
c. *Tracer la cardioïde C . On admettra qu'au point S(1 ;0) , la tangente est horizontale.*
d. *Donner les coordonnées des points des points à tangente horizontale , autres que S .On nommera H_1 celui d'ordonnées positive , H_2 l'autre point.*
e. *Donner les coordonnées de trois points à tangente verticale. On nommera K_1 celui d'ordonnées positive et K_2 celui d'ordonnée négative.*
f. *Démontrer que H_1 S etK_2, sont alignés .En déduire l'alignement des points H_2 S et K_1.*
2. *Une construction point par point.*

Soit I le point du cercle Γ de centre O et de rayon 1 , de coordonnées , vecteur directeur de $(cos\theta; sin\theta)$, $\theta\epsilon[0;2\pi]$

a.) *Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{SM}$ sont Colinéaires .*
b.) *Prouver que $\left\|\overrightarrow{SI}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2$.En déduire que La tangente en I au cercle Γ est la médiatrice de du segment [SM].Expliquer une construction , point par .*
point de la cardioïde .
c.) *Démontrer que $\overrightarrow{IM}$ est orthogonal à $\vec{V}$ vecteur directeur à de la tangente en M à la cardioïde .Le cercle de centre I passant par S est dit tangent à la cardioïde en M .*

Exercice :5

Dans le plan orienté , (C) est le cercle trigonométrique .Atout point m de (C) on associe le point M symétrique du point A d'affixe 1 par rapport à la tangente en m au cercle (C) .ON cherche à construire l'ensemble Γ des points M lorsque m décrit (C).

1. *Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de Γ.*
2. *Pour un point m de (C) , soit t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{Om})$. Montrer que les coordonnées $x(t) et\ y(t)$ de M sont telles que*
$$\begin{cases} x(t) = 2cost - cos2t \\ y(t) = 2sint - sin2t \end{cases} (1)$$
3. *On doit donc construire la courbe paramétrée Γ dont (1) est un système d équation paramétrique , le réel t parcourant R.*
a. *Etudier les variations de $x(t) et\ y(t)$, sur $[0;\pi]$.*

b. Montrer que pour tout $t \neq 0(\pi)$, un vecteur directeur de la tangente en M à Γ est $\vec{u}(\cos\frac{3t}{2}, \sin\frac{3t}{2})$.

c. Soit M un point de Γ de paramètre t ;a(t) le coefficient directeur de la droite (AM). Déterminer la limite a_0 de a(t) lorsque t tend vers 0.(On admettra que a_0 est la pente de la tangente en A à Γ)

d. Déterminer les points ou la tangente est parallèle à un des axes du repère.

4. Tracer la courbe Γ .

coniques

EXERCICE 1 :

Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice.

a) $y^2 = 4x$; $x^2 = 6y$; $y^2 = -8x$; $x^2 = -3y$

b) Montrer que les courbes (P_1), (P_2) et (P_3) d'équations respectives : $y^2 = 5x - 1$, $x^2 - 4y + 2x - 1 = 0$ et $y^2 - x + y = 0$ sont des paraboles dont on précisera les éléments caractéristiques.

c) Vérifier que le point A(1,2) appartient à (P_3) et déterminer l'équation de la tangente T à (P_3) en A.

d) Déterminer les coordonnées du point B appartenant à (P_3) tel que la tangente à (P_3) en B soit perpendiculaire à T.

EXERCICE 2:

1) Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets, l'équation d'une directrice et l'excentricité.

a) $4x^2 - 36y^2 = 121$ b) $-9x^2 + 4y^2 = 196$ c) $2x^2 - 2y^2 = 1$;

2) Identifier les ensembles des points M(x, y) tels que :

a) $x = \frac{2}{cost}$ et $y = 3tant$ et $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

b) $x = 2\left(t + \frac{1}{t}\right)$ et $y = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ $t \in R^*$

c) $x = \frac{1}{cos2t}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}tan2t$ et $t \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 3:

Pour chacune des ellipses suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets, l'équation d'une directrice et l'excentricité.

1) $4x^2 + 36y^2 = 121$;$9x^2 + 4y^2 = 196$; $2x^2 + 2y^2 = 1$;

2) Identifier les ensembles des points M(x, y) tels que

$$x = 5cost \text{ et } y = 3sint \text{ , } t \in R$$

$$x = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \; et \; y = \frac{e^{t}}{e^{2t} + 1} \; , t \in R$$

EXERCICE 4 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation :

1) $x^2 + 4y^2 + 2x = 1$
2) $x^2 - 8y^2 + 2x - 16 = 1$
3) $x^2 + 4y^2 + 2x = 1$
4) $mx^2 + 4mx + (m-1)y^2 + 2 = 0 \; , m \in R$
5) $y^2 - 4y = 2x - \frac{x^2}{m} \; , m \in R^*$

EXERCICE 5 :

Soit les courbes H et E, d'ensemble des points M dont les coordonnées (x, y) vérifient :

H: $4x^2 - 9y^2 + 8x + 54y - 113 = 0$

E: $16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$

Trouver les équations réduites de H et E.

Vérifier que H et E ont le même centre de symétrie.

Trouver les axes de symétrie de H et E ainsi que leurs foyers.

Reconnaitre les courbes H et E.

EXERCICE 6

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{u};\vec{v})$ *direct.*

1. *On considère les points A (-1 ; 0) et I (4 ; 0). Soit (E) ellipse de centre I dont A est un sommet et O un foyer.*
a. *Déterminer les autres sommets de (E).*
b. *Calculer l'excentricité de (E) et donner une équation de sa directrice associée au foyer O dans* $(O;\vec{u};\vec{v})$.
c. *Donner une équation de (E) dans* $(O;\vec{u};\vec{v})$.
d. *Tracer (E) , préciser les points d'intersection de (E) et de droite* $(O;\vec{v})$
1. *Soit dans **C** l'équation d'inconnue z :* $z^2 - 2(4 + 5cos\theta)z + (4cos\theta + 5)^2 = 0$ *ou* θ *est un paramètre réel.*
a. *Résoudre cette équation pour* $\theta \in [0;\pi]$.
b. *Lorsque* $\theta \in]0;\pi[$ *, on note* z_1 *la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et* z_2 *l'autre solution.*

Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .Déterminer les coordonnées de M_1 en fonction de θ dans $(O;\vec{u};\vec{v})$.

En déduire l'ensemble des points M_1 , puis celui des points M_2 lorsque θ varie dans $]0;\pi[$.

EXERCICE 7

1. *Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan du plan (P) dont l'affixe z vérifie $10z\bar{z} + 3(z^2 + \bar{z}^2) = 4$ où $\bar{z}$ est le complexe conjugué de z.Indiquer ses foyers F et F ', ainsi que ses directrices.*
2. *Soit f la composée de l'homothétie de centre O et de rapport 2, et la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.Déterminer une équation de (E ') image de (E) par f.*
3. *Montrer que (E') est une ellipse de foyers f(F) et f (F').Comparer les excentricités de (E) et (E ').*

EXERCICE 8

Dans un repère ortho normal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère la rotation R de centre A($\frac{2}{3}$;0) et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et H l'homothétie de centre B (1 ;1) et de rapport 3.

1. *On pose $S = H \circ R$.*

Déterminer la nature de S et ses éléments caractéristiques

2. *Soit (P) la courbe d'équation $y^2 - \frac{8}{3}x=0$.*

a. *Donner la nature de (P) et ses éléments caractéristiques. Construire (P).*
b. *Déterminer et construire l'image de (P) par S.*

EXERCICE 9

Dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les trois points A (1 ; 1) ; B ($\frac{3}{2}$;$\frac{1}{2}$) ; C($\frac{3}{2}$;$-\frac{1}{2}$) et (D) la droite d'équation x=1.G est le point tel que ABGC soit un parallélogramme. On note Γ l'ensemble des points M de (P) de coordonnées

(x ; y) qui vérifient la relation

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$$

1. *Montrer que B et C appartiennent Γ .*
2. *Montrer que Γ est l'ensemble des points M de (P) tels que MG=$\sqrt{2}$d (M ; D) ou d (M ; D) est la distance de M à (D).*
3. *En déduire la nature de Γ et préciser ses éléments caractéristiques. Représenter (Γ).*

EXERCICE 10

Dans le plan complexe orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère la courbe (C) d'équation : $4x^2+3y^2+6y-9=0$

1. a. Déterminer la nature de (C).

b. Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (C)

c. Tracer (C) (unité 20 cm)

2. Soit M un point de (C) d'affixe z=x+iy , x et y étant des réels.

a. Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3 - y)$.

b. En déduire que $|z| = \frac{3}{2 + \sin\theta}$, *θ étant un argument de z.*

3 .a Soit M' et M'' deux points de (C) d'affixes respectives z' et z' et ' , d'arguments respectives θ *et* $\theta + \pi$. *Calculer la distance M'M'' en fonction de* θ

c. Déterminer M'M'' si OM'=2.

EXERCICE 11

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ *.Pour les représentations graphiques, on adoptera une unité de longueur 2 cm.*

1. *Soit (H) l'hyperbole d'équation* $x^2 - 4y^2$*=4. Représenter graphiquement (H) en précisant les coordonnées de ses sommets et ses coordonnées de ses asymptotes. Déterminer l'excentricité et les coordonnées des foyers de H)*
2. *Soient F et F ' les points de coordonnées respectives* $(0;\sqrt{3})$ *et* $(0;-\sqrt{3})$.

Déterminer une équation de l'ellipse (E) de foyers F et F ' d'excentricité $\frac{\sqrt{3}}{2}$*.Représenter graphiquement (E) en précisant les coordonnées de ses sommets.*

EXERCICE 12

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. *On considère la courbe (H) d'équation* $x^2 - 2y^2 = 1$.

Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Construire H.

2. *On étudie en fonction du temps t le mouvement du point M(x, y), du plan tel que :*

$$\begin{cases} x = \frac{1}{cos2t} \text{ où } t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} tan2t \end{cases}$$

a. *Montrer que la trajectoire Γ de M est une partie de H que l'on déterminera.*
b. *Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse* $\vec{v}$ *et en déduire la tangente à Γ au point d'abscisse 2.*

c. *Déterminer les coordonnées du vecteur accélération et vérifier que le mouvement est accéléré*

EXERCICE 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. *Soit (E) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation* $15x^2+13y^2-2xy\sqrt{3}=768$ *et soit f l'application de (P) dans (P) qui, à tout point M (x ; y) associe le point M ' (x' ;y') tel que :*

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}(x+\sqrt{3}y) \\ y' = \frac{1}{4}(-\sqrt{3}x+y) \end{cases}$$

1. *Montrer que f est une similitude directe que l'on caractérisera. Déterminer* f^{-1}.
2. *Déterminer une équation de f(E) et montrer que f(E) est une ellipse dont on précisera les sommets, les foyers et l'excentricité.*
3. *En déduire que (E) est l'ensemble des points M du plan tels que ;* $MF_1+MF_2=16$ *ou* F_1 *et* F_2 *sont deux points que l'on déterminera.*

EXERCICE 14

1. *Soit* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *un repère orthonormé du plan (P).*

a.) *On considère les vecteurs :* $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ *et* $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$. *Démontrer que* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *est un repère orthogonal du plan.*

b.) *Démontrer que , si un point M de (P) a pour coordonnées* (x, y) *dans* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *et* (X, Y) *dans* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *alors :* $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ *et* $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$.

2. *Soit (H) l'hyperbole d'équation* $x^2-y^2=2$ *dans le repère* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. *En utilisant la question 1., donner une équation de (H) dans le repère* $(O,\vec{u},\vec{v})$.
3. *Soit (E) l'ensemble des points des points M du plan dont les coordonnées vérifient, dans le repère* $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ *, l'équation :* $5x^2+5y^2-2xy-12=0$.

a.) *Déterminer une équation de (E) dans le repère* $(O,\vec{u},\vec{v})$. *En déduire que (E) est une ellipse dont on précisera les éléments remarquables.*

b.) *L'unité étant le centimètre, construire la courbe (E).*

4. *Soit la fonction homographique f définie dans* $\boldsymbol{R}-\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ *par :* $f(x)=\frac{x}{x\sqrt{2}-1}$.

a.) *Etudier les variations de f .Préciser les asymptotes à l'hyperbole* Γ *représentant la fonction f .Construire* Γ.

b.) *En utilisant la question 1., déterminer une équation de* Γ *dans le repère* $(O,\vec{u},\vec{v})$.

c.) *Préciser le centre, l'axe focal et les sommets de* Γ.

EXERCICE 15

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit (C) la courbe d'équation : $x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 16 = 0$.

1. *Démontrer que (C) est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques : centre, foyers et directrices associées, etc. ...*

Tracer (C).

2. *Soit (D) la droite d'équation* $y - 3 = 0$. *On désigne par d(M,D) la distance du point M à la droite (D).*

Soit P le point de coordonnées (-4,6) ; d(M,P) désigne la distance de M `a P.

Quel est l'ensemble des points M du plan (P) tels que d (M, P)=2 d (M,D) ?

EXERCICE 16

Soit a un réel de l'intervalle] 0, π [. On considère l'équation d'inconnue complexe z : (E) $z^2 \sin^2 a - 4z \sin a + 4 + \cos^2 a = 0$.

1. *Résoudre (E).*

2. *On désigne par M′ et M′′ les images des racines z′ et z′′ de l'équation (E) dans un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ *du plan complexe.*

Montrer que, lorsque a varie, l'ensemble des points M′ et M′′est une branche d'hyperbole (H).

Préciser les éléments caractéristiques de (H) et dessiner la branche d'hyperbole en question.

EXERCICE 17

Soit $a \in IR$, *dans le plan muni d'un repère orthonormé direct* $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, *on considère l'ensemble* C_α *des points M de coordonnées* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *telles que*

$x^2 + y^2 + 2axy - 1 = 0$

1. *Discuter en fonction de a le genre de la conique.*

2. *Préciser l'ensemble* C_0.

3. *Préciser les ensembles* C_1 *et* C_{-1}.

4. On considère le repère $R_\theta(O,\vec{u},\vec{v})$ obtenu par rotation d'angle θ de R, on note $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ les coordonnées de

M dans ce repère. Comment choisir $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ pour que le terme en XY de l'équation Ca dans ce repère soit nul ? Quelle est alors l'équation de C_α .

5. En déduire les paramètres a, b, c et e lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 2$.

EXERCICE 18

Le plan est rapporté à un repère ortho normal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère l'ensemble (C) des points M du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$25(x^2 + y^2) = (3x-16)^2$ (1)

1-En interprétant géométriquement l'équation (1) démontrer que (C) est une conique de foyer 0 et de directrice la droite Δ d'équation $x = \frac{16}{3}$.. Donner la nature et l'excentricité de (C).

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de(C) et θ une mesure de l'angle $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$.

2-a Déduire de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b- Démontrer que OM= $\frac{16}{5+3\cos\theta}$.

3- On suppose ici que θ appartient à $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. . La droite (OM) coupe Δ en 1 et recoupe (C) en un point M'.

a- Démontrer que $\frac{1}{OM}+\frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b- Démontrer que $\frac{1}{OM}-\frac{1}{OM'}=\frac{2}{OI}$.

EXERCICE 19

On appelle Γ l'ensemble des points du plan (P) dont les coordonnées $(x;y)$ vérifient : $x^2 - y^2 - 2xy\sqrt{3} + 2 = 0$.

1° On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,et on considère la transformation g de (P) dans (P) qui, à tout point M d'affixe z, associe le point g(M) d'affixe jz.

Montrer que g est une rotation de centre O et de d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2° On désigne par (H) l'ensemble des points M de (P) d'affixe z vérifiant $\operatorname{Re}\left(z^2=1\right)$. *Définir la nature de ensemble (H) et le tracer.*

3° Soit M un point d'affixe z.

Montrer qu'un point M d'affixe z appartient à l'ensemble Γ *si et seulement si* $\operatorname{Re}\left[(jz)^2\right]=1$.

4° Montrer que (H) est l'image de Γ *par la transformation g.*

En déduire la nature de Γ *et tracer* Γ *sur la figure précédente.*

EXERCICE 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. *Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que* $2x^2+y^2+xy=10$.

1° Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\left(O,\vec{i'},\vec{j'}\right)$ *dans lequel l'équation de (E) est de la forme* $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$.

2° En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E). Construire (E).

EXERCICE 21 Construction géométrique des foyers et directrice

1° cas de l'ellipse : *Soit (E) l'ellipse d'équation réduite*

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *avec* $0<b<a$, *dans le repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, *A et A' les sommets sur l'axe focale, F et F' les foyers. La perpendiculaire en F à l'axe focale coupe le cercle (C) de diamètre [AA'] en U et U', la tangente en U à (C) coupe l'axe focal en T.*

Démontrez que T est le pied, sur l'axe focal, de la directrice associée à F.

2° cas de l'hyperbole : *Soit (H) l'hyperbole d'équation réduite* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *dans un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, *A et A' les sommets de (H), F et F' les foyers, (C) le cercle de diamètre [AA'],* (Δ) *et* (Δ') *les asymptotes. La tangente à (C) coupe* (Δ) *en E.*

a) Calculez OE. Déduisez-en une construction de F et F', à la règle et au compas, à partir de A et A' et des asymptotes.

b) Déterminez les coordonnées des points communs à (C), (Δ) *et* (Δ').

3° Appliquez les résultats précédents à la construction géométrique des foyers et directrices des coniques d'équation : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ *et* $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

EXERCICE 22

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan (P) dont l'affixe z vérifie :
$10z\bar{z} + 3\left(z^2+\bar{z}^2\right)= 4$ *où* $\bar{z}$ *est le nombre complexe conjugué de z. Indiquer ses foyers F et F ', ainsi que ses directrices.*

2) Soit f la composé de l'homothétie de centre O et de rapport 2, et de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ *Déterminer une équation de (E ') image de (E) par f.*
Montrer que (E ') est une ellipse de foyers f(F) et f (F ').

EXERCICE 23

Soit D une droite du plan et F un point dont la distance à D est égale à 3, l'unité étant le centimètre.

Soit Δ la droite passant par F et orthogonale à D.

On considère θ *un réel tel que* $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$..

1. / Soit Γ_θ *l'ensemble des points M du plan tels que* $\frac{MF}{MH}=\cos\theta$., *H désigne le projeté orthogonal de M sur D.*

Donner suivant les valeurs de θ *la nature de* Γ_θ.

2. / Tracer Γ_θ *cas où* $\theta=0$

3. / a) Soit $\theta=\frac{\pi}{3}$. *Déterminer les sommets A et A ' de* $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ *situés sur Δ, le centre O et le deuxième foyer F ', de* $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$. *Tracer* $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$.

b) Déterminer l'équation cartésienne de $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ *dans le repère orthonormé* $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ *où O est le centre de* $\Gamma_{\frac{\pi}{3}}$ *et* $\vec{u}$ *un vecteur unitaire de la droite Δ.*

EXERCICE 24

Soit (I) une parabole de foyer F (- 1, 0) et de directrice (D) : y = x.

1) Déterminer une équation cartésienne de (I).

2) Donner l'équation réduite de (I).

EXERCICE 25

1) On donne la courbe (E) d'équation : $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0.$

a) Montrer que. (E) est une conique et déterminer sa nature

b) Déterminer le centre, les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité de cette conique.

2) On considère la courbe H d'équation : $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0.$

a) Montrer que H admet un centre de symétrie, noté Ω, et que H est une conique, dont on déterminera la nature.

b) Déterminer les sommets, les foyers, les directrices, l'excentricité et les asymptotes de H.

3) On donne : (P1) : $x^2 - x + 2y + 2 = 0$ et (P2) : $y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Donner l'équation réduite de ces courbes, et en déduire la nature, ainsi que les éléments

Caractéristiques de chacune d'elles.

EXERCICE 26

A tout point M d'affixe z non nulle du plan complexe, on associe le point M' d'affixe z ' telle que : $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

1) Déterminer l'ensemble des points M tels que z ' soit un nombre réel.

2) On suppose que M décrit le cercle de centre O et de rayon 2.

a) Vérifier que : $z = 2e^{i\theta}$ $(\theta \in IR)$.

b) Démontrer que M' décrit une conique dont on déterminera les éléments caractéristiques.

EXERCICE 27

On donne dans le plan deux points fixes distincts F et A. On considère les ellipses (E) dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1) a) Quel est l'ensemble des points O centre des ellipses (E) ?

b) Soit O un point de cet ensemble et soit $(\mathcal{D})$la perpendiculaire en O à la droite (AF).Construire (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse (E) appartenant à $(\mathcal{D})$.

2) a) Soit B un sommet du segment du petit axe d'une ellipse (E), montrer que B appartient à une parabole (P) de foyer F dont on déterminera la directrice Δ.

b) Déterminer la partie de (P) qui est l'ensemble des points B.

EXERCICE 27

1) Soit (P) un plan rapporté à un repéré orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit (Γ) *l'ensemble des points de (P) dont les coordonnées* (x,y) *dans le repère* $(O,\vec{i},\vec{j})$ *vérifient :*

$$16x^4+81y^4+72x^2y^2-1296y^2=0.$$

Montrer (Γ) *est la réunion de deux coniques* (Γ_1) *et* (Γ_2) *(on remarquera que le membre de gauche est une différence de deux carrés).*

2) Représenter (Γ) *après avoir précisé le centre et les sommets des coniques* (Γ_1) *et* (Γ_2).

EXERCICE 28

Le plan est rapporté à un repère ortho normal $(O,\vec{i},\vec{j})$.*Soit* (D)*la droite d'équation* $x=6$ *et F le point de coordonnées* (8,0).

Soit θ *un nombre réel tel que* $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$.

On désigne par (Γ_θ) *l'ensemble des points M du plan tels que* $\frac{MF}{MH}=\frac{1}{cos\theta}$*, où H est le projeté orthogonal de M sur (D).*

1) *Préciser la nature de* (Γ_θ) *suivant les valeurs de* θ.
2) *Construire la courbe* (Γ_0) *correspondant à* $\theta=0$.
3) *a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe* $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ *correspondant à* $\theta=\frac{\pi}{6}$.

b) Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (foyers, sommets, éléments de symétrie, asymptotes)

c) Construire la courbe $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$.

4) *Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10*

a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale ayant pour axe la droite d'équation $y=0$ *et de rapport* $\frac{3}{5}$.

b) Préciser les foyers de (E).En déduire que les tangentes à $\left(\Gamma_{\frac{\pi}{6}}\right)$ *et à (E) aux points d'intersection de ces courbes sont perpendiculaires.*

arithmétiques

Exercice1 :

Déterminer dans chaque cas la division euclidienne :

1) a) 32 par 6 ; b) de -32 par 6 ; c) de 32 par -6 ; d) -32 par -6.
2) a) de 18 par 5 ; b) de 18 par -5 ; c) de -18 par 5 ; d) de -18 par -5.

Exercice 2 :

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer le reste de la division euclidienne de :

1) $(n+2)^2$ par $n+4$; 2) $2n^2+n$ par $n+1$; 3) $7n+15$ par $3n+2$

Exercice 3 :

Soit n un entier supérieur ou égal à deux ; $A = n^4-1$.

1) Montrer que $n-1$, $n+1$, n^2+1 sont des diviseurs de A.

2) Déterminer les autres diviseurs de A distinct des précédents.

Exercice 4 :

Soit a et b deux entiers naturels. Montrer que $(a+2b)^4-a^4$ *est multiple de huit.*

Exercice 5 :

Soit a et b deux entiers naturels. Montrer que si 3 divise a^3+b^3 *alors 3 divise*

$(a+b)^3$

Exercice 6:

Déterminer les entiers naturels n tels que :

1) $n-1$ divise $n+3$; 2) $n+3$ divise $2n+18$; 3) $n-4$ divise $3n+24$.

Exercice 7 :

Déterminer le plus petit entier naturel possédant : 10 diviseurs ; 2) 15 diviseurs.

Exercice 8 :

Soit p un nombre premier.

1) Montrer que : $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$, pour p et k, entiers tels que $1 \leq k \leq p$.

2) En déduire que p divise C_p^k pour tout entier naturel k tels que $1 \leq k \leq p-1$.

3) En déduire que pour tout nombre premier p $(a+b)^p-(a^p+b^p)$ est divisible par p.

Exercice 9 :

1) Déterminer les diviseurs de 25.

2) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a^2 - b^2 = 25$.

Exercice 10 :

Soit un entier naturel non nul supérieur ou égal à 2.

1) Développer $(n+1)^n$ *par la formule du binôme de Newton.*

2) Soit $A_n = (n+1)^n - 1$. *Montrer que* n^2 *divise* A_n *et déterminer le quotient de la division de* A_n *par* n^2.

Exercice 11 :

1) Soit x un entier naturel. Montrer que $x+1$ *divise* x^3+1.

2) Montrer que pour tout entier naturel k non nul, 3^k *divise* $2^{3^k} + 1$.

Exercice 12 :

1) Montrer que quel que soient les entiers naturels a, b, n, a-b divise $a^n - b^n$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n pair, 3 divise $2^n - 1$

3) Montrer alors que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1, $A_n =$

$$\frac{2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1}{3}$$

est un entier naturel.

Exercice 13 :

Déterminer les entiers naturels n dont la division euclidienne par 16 donne un reste égal au carré du quotient.

Exercice 14 :

Soit n un entier naturel.

1) Vérifier que $n^3 - n = (n+2)(n^2 - 2n + 3) - 6$.

2) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\frac{n^3 - n}{n+2}$ *est un entier.*

Exercice 15 :

1) Démontrer que $a \mid b$ *si et seulement si pour tout k de* $\mathbb{Z}$ $a \mid (b - ka)$.

2) Déterminer les entiers relatifs a, tels que $(a-5) \mid (a+7)$.

3) Déterminer les entiers relatifs b, tels que $(b+2) \mid (4b-6)$.

Exercice 16 :

On divise 524 par un entier naturel b non nul. Le quotient est 15 et le reste r. Déterminer les valeurs possibles de b et r.

Exercice 17 :

Dans une division euclidienne, on a augmenté le dividende de 20 et le diviseur de 4 ; le quotient et le reste sont alors inchangés. Quel est le quotient ?

Exercice 18 :

Dans la division euclidienne de 377 par l'entier naturel b non nul, le reste obtenu est 8.

Déterminer les valeurs possibles du diviseur et du quotient.

Exercice 19 :

1) Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

2) Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{5n+1} + 3^{n+3}$ est multiple de 29.

Exercice 20 :

1) Pour tout entier naturel n, démontrer que $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.

2) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n + 1$.

3) Existe-t-il des entiers naturels pour lesquels $3n^2 + 15n + 19$ est divisible par $n^2 + 3n + 2$?

Exercice 21 :

Déterminer les entiers naturels dont la division euclidienne par 64 donne un reste égal au cube du quotient.

Exercice 22 :

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations :

1) $x^2 - y^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 13$; 3) $x^2 - y^2 = p$, où p est un nombre premier.

Exercice 23 :

Les nombres suivants sont-ils premiers ?

1) 1421 ; 2) 1527 ; 3) 1519 ; 4) 1247 ; 5) 2419 ; 6) 5183 ; 7) 5189 ; 8) 6131.

Exercice 24 :

Déterminer, s'il en existe, les valeurs de l'entier naturel n pour lesquels u_n est premier.

1) $u_n = n^3$; 2) $u_n = n^2 - 1$; 3) $u_n = 7n^2 + 12n$; 4) $u_n = n^2 + 8n - 20$.

Exercice 25:

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les nombres suivants sont premiers entre eux :

1) n et $n+1$; 2) $3n+1$ et $9n+4$; 3) $3n+2$ et $2n+1$; 4) $2n+1$ et $n(n+1)$; 5) $2n+5$ et n^2+5n+6.

Exercice 26 :

Calculer le PGCD et PPCM de :

1) 171 et 99 ; 2) 924 et 336 ; 3) 480 et 576 ; 4) 227 et 3325.

Exercice 27 :

1) Décomposer en produit de facteurs premiers les entiers 171, 324, 225, et 396.

2) En déduire le PGCD et le PPCM des entiers 171, 324, 225, et le PPCM des entiers171, 324 et 396.

Exercice 28 :

1) Déterminer le PGCD des entiers : 748, 968, 1089.

2) Déterminer le PPCM des entiers : 450, 180, 108, 300.

Exercice 29 :

Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers, puis déterminer le plus grand carré qui le divise : 1) 17 199 ; 2) 27 104.

Exercice 30 :

1) Quel est le plus petit entier qui multiplié par 1998, donne un carré parfait ?

2) Même question lorsque le multiplicateur est 5246.

Exercice 31 :

Deux entiers a et b ont pour PGCD δ. Quel est le PGCD des entiers :

1) $x = 7a + 3b$ et $y = 2a + b$; 2) $x = 13a + 5b$ et $y = 5a + 2b$.

Exercice 32 :

Soit n un entier naturel non nul.

1) Démontre que les entiers n et n +1 sont premiers entre eux.

2) En déduire que la fraction $\frac{n}{2n+1}$ *est irréductible.*

Exercice33 :

Calculer pour tout entier naturel n non nul :

1) PGCD(n, 2n+1) et PPCM(n, 2n+1) 2) PGCD(n, 2n+2) et PPCM(n, 2n+2).

3) PGCD(2n+2,4n+2) et ¨PPCM(2n+2,4n+2).

Exercice 34 :

Soit n un entier naturel non nul. On pose a = 2n–1 et b = 9n + 4).

1) Démontrer que le PGCD de a et b est un diviseur de 17.

2) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer les entiers n pour lesquels le PGCD de a et b est 17.

Exercice 35 :

1) Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 5 ; 13 ; 17 lorsqu'on le divise respectivement par : 15 ; 23 ; 27.

2) Déterminer le plus petit entier naturel dont les restes sont 8 ; 12 ; 18 lorsqu'on le divise respectivement par : 14 ; 18 ; 24.

Exercice36 :

Le nombre d'élèves d'une classe est inférieur à 40. Si on les regroupe par 9 ou par 12, il en reste 1 chaque fois. Quel est ce nombre ?

Exercice 37 :

Une usine fabrique des boîtes de sucre de dimension $15cm \times 10cm \times 6cm$*. Quelle est l'arête de la plus petite caisse cubique pouvant être remplie exactement de ces boîtes ? Combien de boîtes de sucre contiendra-t-elle ?*

Exercice 38 :

Une entreprise fabrique des savons de forme cubique et dispose de caisses de dimensions $48cm \times 84cm \times 60cm$*. Quelle est la plus grande dimension à donner à un savon afin de pouvoir remplir exactement une caisse ?*

Exercice 39 :

Le PGCD de deux entiers naturels non nuls, est 84. Le plus grand est 2520 trouver les valeurs possibles de l'autre.

Exercice 40 :

Le PPCM de deux entiers naturels non nuls, est 792. Sachant l'un de ces nombres est 24, trouver les valeurs possibles de l'autre.

Exercice 41 :

Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b dont :

1) le PDCD est 30 et la somme 540.

2) Le PGCD est 7 et la différence $a^2 - b^2 = 686$.

3) Le PGCD est 17 et leur produit 1734.

Exercice 42 :

Trouver tous les entiers naturels non nuls a et b dont :

1) Le PPCM est 140 et la somme 48.

3) Le PPCM est 252 et le produit 1512.

3) Le PPCM est 340 et $5a - 4b = 0$.

Exercice 43 :

Résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: 1) $\begin{cases} PGCD(a,b) = 15 \\ PPCM(a,b) = 90 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} PGCD(a,b) = 42 \\ PPCM(a,b) = 1680 \end{cases}$

3) $PGCD(a,b) - PPCM(a,b) = 77$; 4) $2 \times PGCD(a,b) + 7 \times PPCM(a,b) = 111$.

Exercice 44 :

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer une solution particulière de chacune des équations suivantes :

1) $24x + 17y = 1$; 2) $59x + 68y = 1$; 3) $137x - 191y = 1$; 4) $1274x - 275y = 1$

Exercice 45 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ *les équations :* 1) $11x = 16y$; 2) $65x + 25y = 0$; $9x + 21y = 0$.

Exercice 46 :

1)a)Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres 37 et 23.

b) En déduire une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $37x + 23y = 1$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $37x + 23y = 1$.

Exercice 47 :

1)a)Déterminer une solution particulière dans IN^2 de l'équation $41x - 27y = 1$;

b) En déduire une solution particulière, dans IN^2 de l'équation $41x - 27y = 5$

2) Résoudre dans IN^2 l'équation $41x - 27y = 5$.

Exercice 48 :

Soit l'équation (E) : $11x - 5y = 14$.

1) Vérifier que le couple (19 ;39) est solution de (E).

2) En déduire tous les couples (x,y) entiers relatifs solutions de (E).

Exercice 49 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: 1) $14x \equiv 3\ [4]$; 2) $6x \equiv 3\ [4]$ 3) $\begin{cases} 3x \equiv 1\ [5] \\ 5x \equiv 2\ [7] \end{cases}$

Exercice 50 :

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $6x - 13y = 5$ (1)

2) Soit N un entier naturel. Lorsqu'on divise N par 6, le quotient est q et le reste 2. Lorsqu'on divise N par 13, le quotient est q' et le reste 7.

a) Montrer que (q,q') est solution de (1).

b) En déduire la forme générale de N.

Exercice 51 :

On considère l'équation (E) $6x + 10y = a$, où a est un entier relatif.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que (E) possède au moins une solution.

2) Résoudre (E) dans le cas où a = 22.

Exercice 52 :

1) Soit $a\in\mathbb{Z}$. Montrer que l'équation $6y-3x=a$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si, a est multiple de 3.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations : a) $6y-3x=-3$; b) $6y-3x=3$.

3)En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation $(6y-3x-4)(6y-3x+4)=-7$.

Exercice 53:

Pour tout entier relatif x, on pose : $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ et $A=\{x\in\mathbb{Z}/ f(x)\in\mathbb{Z}\}$.

1) Montrer que A n'est pas l'ensemble vide, puis déterminer l'ensemble A..

2) Déterminer : $B=\{x\in A/ 4x^2-9(f(x))^2$ est divisible par 7 }.

Exercice 54 :

Soit dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation (E) : $324x-245y=7$

1) Montrer que, pour toute solution (x,y) de (E), x est multiple de 7.

2) Déterminer une solution (x_o,y_o) de (E). En déduire toutes les solutions de (E).

3) Soit d le PGCD des éléments d'un couple solution de (E). Quelles sont les valeurs possibles de d ? Déterminer les solutions de (E) telles que x et y soient premiers entre eux.

Exercice 55 :

Soit le système (S) $\begin{cases} n\equiv 1\ [5] \\ n\equiv 5\ [7] \end{cases}$ *, $n\in\mathbb{Z}$.*

1) Montrer que si n est solution du système (S) alors $\begin{cases} 4n+1\equiv 0\ [5] \\ 4n+1\equiv 0\ [7] \end{cases}$

2) En déduire que tout entier n, solution vérifie la relation : $35k-4n=1$, où $k\in\mathbb{Z}$ (1).

3) Déterminer les solutions de (1) puis en déduire celles de (S).

Exercice 56 :

On désigne par S l'ensemble des solutions, dans $\mathbb{Z}$, de l'équation : $138x-55y=5$ (1).

1)a)Montrer que si (x ;y) est un élément de S, alors x est divisible par 5.

b) En déduire une solution (x_o,y_o) de (1).

2) Résoudre (1).

3) k est un entier naturel, on considère les nombres : $a = 55k + 10$ et $b = 138k + 25$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel k, (a ;b) appartient à S.

b) En déduire les valeurs possibles de PGCD(a ;b).

c) Déterminer pour quelles valeurs de k : PGCD(a ;b) = 5.

Exercice 57 :

On considère, lorsque n appartient à IN, les deux entiers a et b : $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$.*

1)a)Démontrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 50.

b) En déduire que PGCD (a ;b) = PGCD (a ;50).

2)a)Résoudre dans IN, l'équation $50x - 11y = 3$.*

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 comme plus grand commun diviseur.

3) Pour quelles valeurs de n, les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur ?

Exercice 58 :

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose $a = 4n + 3$ et $b = 5n + 2$.

On note d = PGCD(a ;b)

1) Donner la valeur de d pour n = 1 ; n = 11 ; n = 15.

2) Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.

3)a)Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

b) Déterminer les entiers naturels n et k' tels que $5n + 2 = 7k'$.

4)a)Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.

b) Pour quelles valeurs de r, d est égal à 1 ?

Exercice 59 :

Un astronome a observé, au jour J_0, le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. 6 jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.

On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronomie. Le but de l'exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soit u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_o et J_1.

Montrer que le couple (u ;v) est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2)a)Donner un couple d'entiers relatifs (x_o ;y_o) solution particulière de (E_2) : $35x - 27y = 1$.

b) En déduire une solution particulière (u_o ;v_o) de (E_1)

c) Déterminer toutes les solutions de (E_1).

d) Déterminer la solution (u ;v) permettant de donner J_1.

3)a)Combien de jours s'écouleront entre J_o et J_1 ?

b) Le jour J_o était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ?(L'année 2000 était bissextile).

c). Si l'astronome a manqué ce rendez-vous, combien de jours devra-t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice 60 :

Déterminer le reste de la division euclidienne de :1) 35^{27} par 7; 2) 69^{35} par 11; 3) 77^{20} par 13.

Exercice 61 :

1) Vérifier que $1000 \equiv 1$ [37] et en déduire que pour tout entier naturel n, on a $10^{3n} \equiv 1$ [37].

2) En déduire le reste de la division euclidienne de 1 001 037 par 37.

Exercice 62:

1) Vérifier que $1000 \equiv -1$ [13]

2) En déduire selon la parité de n les restes de la division de 10^{3n} par 13.

3) Démontrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n+3} + 10^{3n}$ est divisible par 13.

Exercice 63 :

1) Vérifier que 999 est divisible par 27.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1$ [27].

3) $A = 10^{100} + 100^{10}$. Quel est le reste de la division euclidienne de A par 27 ?

Exercice 64 :

1) Montrer que $3^5 \equiv 1$ *[11].*

2)a)En déduire que, pour tous entiers naturels k et r, $3^{5k+r} \equiv 3^r$ *[11].*

b) Soit n un entier naturel. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^n *par 11 ?*

3) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $3^n + 7$ *soit divisible par 11.*

Exercice 65 :

Déterminer les entiers n tels que $N = n^2 - 3n + 6$ *soit divisible par 5.*

Exercice 66 :

Montrer que :

1) $67^{89} - 1$ *est un multiple de 11.*
2) *Quel que soit l'entier naturel n,* $n(n+2)(n+4)$ *est un multiple de 3.*
3) *Quel que soit l'entier naturel n,* $n(n^4 - 1)$ *est un multiple de 5.*
4) *Quel que soit l'entier naturel n,* $n(n^6 - 1)$ *est un multiple de 42.*
5) *Quels que soient a, b entiers naturels* $ab(a^4 - b^4)$ *est multiple de 30.*

Exercice 67 :

1) Déterminer suivants les valeurs de l'entier x à quoi est congru x^2 *modulo 5.*

2) En déduire que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$ *n'a pas de solution dans* $\mathbb{Z}^2$

Exercice 68 :

Pour quelles valeurs de n entier naturel :

1) $5^{2n} + 5^n + 1$ *est un multiple de 3 ?*
2) $2^{2n} + 2^n + 1$ *est divisible par 7 ?*

Exercice 69:

1) Démontrer que le carré de tout entier naturel est de la forme $5n-1$ *ou* $5n$ *ou* $5n+1$*.*

2) Démontre que le cube de tout entier naturel est de la forme $7n-1$ *ou* $7n$ *ou* $7n+1$*.*

Exercice 70 :

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $7^{3n} \equiv 1$ *[19].*

2) Démontrer que, quels que soient les entiers naturels n et k , on a $7^{3n+k} \equiv 7^k$ *[19].*

Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 7^n *par 19 ?*

3) Démontrer que si a, b, c sont trois entiers naturels consécutifs, alors $7^a + 7^b + 7^c$ est un multiple de 19.

Exercice 71 :

1) Le nombre $2^{11} - 1$ est-il premier ?

2)a)Si p et q sont des entiers naturels non nuls comment la somme :

$S = 1 + 2^p + 2^{2p} + 2^{3p} + \ldots + 2^{p(q-1)}$ peut-elle encore s'écrire ?

b) En déduire que $2^{pq} \equiv 1$ $[2p - 1]$.

3)a)Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et $2^q - 1$.

b) En déduire que si le nombre $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est elle vraie ?. (Les nombres de la forme $2^n - 1$ sont appelés nombres de MERSENNE).

Exercice 72 :

1) Vérifier que 7 divise les nombres :$2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$; $5^6 - 1$.

2) Soit n un entier naturel et A_n défini par : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$.

Montrer que $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7.

3) Soit n un entier naturel, q et r son quotient et son reste, dans la division euclidienne par 6. Montrer que A_n et A_r ont même reste dans la division euclidienne par 7.

4) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est divisible par 7.

5) Soit $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

a) Montrer que $A_n \equiv B_n$ [7].

b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7.

Exercice 73 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définis par $u_o = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$; $n \in IN$

1) Calculer u_1, u_2, u_3, et u_4. Quelle conjecture peut-on faire émettre concernant les derniers chiffres de u_n ?

2)a)Montrer que $\forall n \in IN$, $u_{n+2} \equiv u_n$ [4].

b) En déduire pour tout $k \in IN$ $u_{2k} \equiv 2$ [4] et $u_{2k+1} \equiv 0$ [4].

3)a)Montrer par récurrence que $\forall n \in IN$ $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b) En déduire que $\forall n \in IN$, $2u_n \equiv 28$ [100].

4) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

5) Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 74 :

Déterminer l'écriture en base cinq de : 1) 126 ; 2) 221 ; 3) 1000.

Exercice 75 :

Ecrire dans le système à base seize, à base deux, et à base cinq le nombre 1238.

Exercice 76 :

Un nombre s'écrit $\overline{11011}$ en base deux, l'écrire en base dix, en base cinq et en base seize.

Exercice77 :

Un nombre s'écrit $\overline{3BD}$ en base seize, l'écrire en base dix, en base deux et en base cinq.

Exercice 78 :

1) Un nombre A s'écrit $\overline{5x3y}$ en base dix. Déterminer les nombres A qui sont pairs et divisibles par 11.

2) Déterminer le chiffre x pour que le nombre $\overline{53x4}$ en base dix soit divisibles par 9.

Exercice 79 :

Calculer en numération binaire : $1101+1011$; $1101-1011$; 110×101; $(101)^2$.

Exercice 80 :

Calculer dans le système de numération à base seize : 39B7 +213 ; 110100+39BC ; 27×43.

Exercice :81_ (Extrait Bac S_1 2009)

Dans le système de numération de base a on considère les nombres

$A = \overline{211}$, $B = \overline{312}$ *et* $C = \overline{133032}$.

1. Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3 .
2. a) Sachant que $C = A\times B$, montrer que $a^3-3a^2-2a-8=0$.
b) En déduire que a divise 8 .
c) Déterminer alors a .

3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214 , écrire ce nombre dans la base 4.
4. Dans cette question on suppose a=4 .
a) Ecrire A , B et C dans le système décimal.
b) Montrer alors que C = A×B=PPCM(A,B).
En déduire que l'équation : Ax+By=1 a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 37x+54y=1.
a) Vérifier que (19, -13) est une solution de cette équation .
b) Résoudre cette équation .

Exercice :82

1. *On considère l'équation (E) : 109x-226y=1 où x et y sont des entiers relatifs .*
   a. *Déterminer le pgcd de 109 et 226 .Que peut –on en conclure pour l'équation (E) ?*
   b. *Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble le des couples de la forme (141+226k ,68+109k) , où k appartient à $\mathbb{Z}$. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que 109d=1+226e .*
   (On précisera les valeurs de d et e)
2. *Démontrer que 227 est un nombre premier .*
3. *On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.*

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
à tout entier a de A , f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 .

à tout entier a de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227 .

a. *Vérifier que g[f(0)]=0.*
   On rappelle le résultant suivant appelé théorème de Fermat :

   Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 modulo p$.

b. *Montrer que, quel que soit l'entier a de A , $a^{226} \equiv 1[modulo 227]$.*
c. *En utilisant 1.b.,en déduire que , quel que soit l'entier non nul a de A , g[f(a)]=a.*
   Que peut – on dire de f[g(a)]=a. ?

Exercice : 83

***1.** On considère l'ensemble A_7 = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}*
***a.** Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que ay ≡ 1 (modulo 7).*
***b.** Pour x entier relatif, démontrer que l'équation 3x ≡ 5 (modulo 7) équivaut à x ≡ 4 (modulo 7).*
***c.** Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation ax ≡ 0 (modulo 7) sont les multiples de 7.*
***2.** Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On*

considère l'ensemble $A_p = \{1 ; 2 ; . . . ; p -1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p .
a. *Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation ax ≡ 1 (modulo p).*
b. *On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation ax ≡ 1 (modulo p).*
c. *Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que xy ≡ 0 (modulo p) si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.*
d. *Application : p = 31. Résoudre dans A_{31} les équations : 2x ≡ 1(modulo31) et 3x ≡ 1 (modulo31). À l'aide des résultats précédents, résoudre dans Z l'équation $6x^2-5x +1 \equiv 0$ (modulo 31).*

Annexe

A	1	2	3	4	5	6
Y						6

Exercice : 84

PARTIE A : Question de cours

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, La multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note 0, 1, 2, . . . , 9, a, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple : $\overline{\beta\alpha7}^{12} = \beta\times122 + a\times12+7 = 11\times122 +10\times12+7 = 1711$ en base 10 .

1. a. *Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :*
$N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10
b. *Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :*
$N_2 = 1131 = 1\times103 +1\times102 +3\times10+1$
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.
Dans toute la suite*, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :*
$N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{12}$
2. a. *Démontrer que $N \equiv a_0$ (3). En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.*
b. *À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.*
3. a. *Démontrer que $N \equiv a_n + \cdot\cdot\cdot + a_1 + a_0$ (11). En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.*
b. *À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.*

4. *Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$.Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.*

Exercice : 85

1. a. *Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.*
b. *Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.*
c. *En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.*
d. *Démontrer que $6^{40} -1$ est divisible par 55.*

__2.__ Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
__a.__ Montrer que l'équation (E) $65x - 40y = 1$ n'a pas de solution.
__b.__ Montrer que l'équation (E') $17x - 40y = 1$ admet au moins une solution.
__c.__ Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E').
__d.__ Résoudre l'équation (E').
En déduire qu'il existe un unique naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1$ [40].
__3.__ Pour tout entier naturel a, démontrer que si $a^{17} \equiv b$ [55] et si $a^{40} \equiv 1$ [55], alors $b^{33} \equiv a$ [55].

__EXERCICE :86__ (Extrait Bac S_1 2010)

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p , alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$.
1. a) Démontrer que 193 est un nombre premier.
b) Soit a un entier naturel inferieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$.
2. On considère l'équation (E) : $83x - 192y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
a) Vérifier que le couple (155, 67) est solution de (E).
b) Résoudre l'´equation (E).
3. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inferieurs ou égaux à 192 et on considère
les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :
a tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193
a tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193
a) Démontrer $g[f(a)] \equiv a^{83\times155}[193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g[f(a)]=a$.
b) Déterminer $f[g(a)]=a$.

__EXERCICE :87__

L'espace est rapporté au repère ortho normal . On nomme (S) la surface d'équation $x^2+ y^2-z^2= 1$.
__1.__ Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
__2.__ On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).
__a.__ Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
__b.__ Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
__3.__ Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
__4. a.__ On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation z = 68.
Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
__b.__ M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.
On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que
a et b soient de entiers naturels vérifiant a < b et pppcm(a ; b)= 440,
c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système :

$$(1)\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ ppcm(a;b) = 440 \end{cases}$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors pgcd(a ; b) est égal à 1ou 5.
Conclure
Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

__EXERCICE :88__

Partie A

On considère l'équation (E) : $11x - 26y = 1$, où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. *Vérifier que le couple $(-7\ ;\ -3)$ est solution de (E).*

2. *Résoudre alors l'équation (E).*

3. *En déduire le couple d'entiers relatifs (u ; v) solution de (E) tel que 06u 625.*

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

– on calcule $11x + 8$

– on calcule le reste de la division euclidienne de $11x + 8$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.

Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $11 \times 11 + 8 = 129$ or $129 \equiv$ 25(0modulo26) ; 25 est le reste de la division euclidienne de 129 par 26. Au nombre 25 correspond la lettre Z.

La lettre L est donc codée par la lettre Z.

1. *Coder la lettre W.*

2. *Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.*

a. *Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j , on a :*

$11x \equiv j$ (modulo 26) équivaut à $x \equiv 19j$ (modulo 26).

b. *En déduire un procédé de décodage.*

c. *Décoder la lettre W.*

EXERCICE :89

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b l'ensemble des points du plan, muni d'un repère ortho normal, dont les coordonnées (x ; y) sont des entiers vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$; et $0 \leq y \leq b$. On note Ra, b ce réseau.

Le but de l'exercice est de relier certaines propriétés arithmétiques des entiers x et y à des propriétés géométriques des points correspondants du réseau.

A - Représentation graphique de quelques ensembles

Dans cette question, les réponses sont attendues sans explication, sous la forme d'un graphique

qui sera dûment complété sur la feuille annexe no 1 à rendre avec la copie.

Représenter graphiquement les points M(x ; y) du réseau R8,8 vérifiant :

1. *$x \equiv 2$ (modulo 3) et $y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 1 de la feuille annexe*

2. *$x + y \equiv 1$ (modulo 3), sur le graphique 2 de la feuille annexe ;*

3. *$x \equiv y$ (modulo 3), sur le graphique 3 de la feuille annexe.*

B - Résolution d'une équation

On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$, où les inconnues x et y sont des entiers relatifs.

1. *Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0; y_0)$ solution de l'équation (E).*

2. *Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).*
3. *Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution (x ; y) pour laquelle le point M(x ; y) correspondant appartient au réseau R4,7.*

C - Une propriété des points situés sur la diagonale du réseau.

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on considère la diagonale [OA] du réseau Ra, b, avec O(0 ; 0) et A(a ; b).
1. *Démontrer que les points du segment [OA] sont caractérisés par les conditions :* $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$; $ay = bx$.
2. *Démonter que si a et b sont premiers entre eux, alors les points O et A sont les seuls points du segment [OA] appartenant au réseau Ra, b.*
3. *Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment [OA] contient au moins un autre point du réseau.*
(On pourra considérer le pgcd d des nombres a et b et poser a = da' et b = db'.)

EXERCICE :90

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, *lorsque n est un entier naturel.*
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ *».*

Partie A. *Quelques exemples.*
1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n,* 4^n *est congru à 1 modulo 3.*
2. *Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que* $4^{28} - 1$ *est divisible par 29.*
3. *Pour* $1 \leq n \leq 6\ 4$, *déterminer le reste de la division de* 4^n *par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre* $4^{4k} - 1$ *est divisible par 17.*
4. *Pour quels entiers naturels n le nombre* $4^n - 1$ *est-il divisible par 5 ?*
5. *À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de* $4^{28} - 1$.

Partie B. *Divisibilité par un nombre premier*
Soit p un nombre premier différent de 2.
1. *Démontrer qu'il existe un entier* $n > 1$ *tel que* $4^n \equiv 1 \bmod p$.
2. *Soit* $n > 1$ *un entier naturel tel que* $4^n \equiv 1 \bmod p$. *On note b le plus petit entier strictement positif tel que* $4^b \equiv 1 \bmod p$ *et r le reste de la division euclidienne de n par b.*
a. *Démontrer que* $4^r \equiv 1 \bmod p$. *En déduire que r = 0.*
b. *Prouver L'équivalence :* $4^n - 1$ *est divisible par p si et seulement si n es multiple de b.*
c. *En déduire que b divise* $p - 1$.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$ *».*

Exercice :100

Partie A. *Quelques exemples.*
1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n,* 4^n *est congru à 1 modulo 3.*
2. *Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que* $4^{28} - 1$ *est divisible par 29.*
3. *Pour* $1 \leq n \leq 4$, *déterminer le reste de la division de* 4^n *par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre* $4^{4k} - 1$ *est divisible par 17.*
4. *Pour quels entiers naturels n le nombre 4n −1 est-il divisible par 5 ?*
5. *À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de* $4^{28} - 1$.

Partie B. *Divisibilité par un nombre premier*

Soit p un nombre premier différent de 2.
1. *Démontrer qu'il existe un entier $n > 1$ tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$.*
2. *Soit $n > 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \bmod p$. On note b le plus petit entier strictement*
positif tel que $4^b \equiv 1 \bmod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
a. *Démontrer que $4^r \equiv 1 \bmod p$. En déduire que $r = 0$.*
b. *Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.*
c. *En déduire que b divise $p - 1$.*

<u>Exercice :101</u>

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD(a ; b) = 1 alors PGCD(a^2 ; b^2) = 1 ».
Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.
1. *Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.*
2. *Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.*
a. *Démontrer que PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}) = $(2k+1)^2$PGCDk^2 ; $(k+1)$*
b. *Calculer PGCD (k ; k +1).*
c. *Calculer PGCD(S_{2k} ; S_{2k+1}).*
3. *Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.*
a. *Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.*
b. *Calculer PGCD(S_{2k+1} ; S_{2k+2}).*
4. *Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.*

Exercice :102

1. *Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.*
Soit u la suite numérique définie par :
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.
2. *Calculer les termes u_2, u_3 et u_4 de la suite u.*
3. a. *Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.*
b. *Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.*
c. *En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.*
4. *Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \frac{1}{3}$*
a. *Montrer que v_n est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.*
b. *Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.*
c. *Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.*

<u>Exercice :103</u>

1. a. *Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.*
b. *Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a telle des solutions ?*
c. *Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a telle des solutions ?*
2. a. *Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m+5p = 1$.*
b. *En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5v = 12$.*
c. *Démontrer que le couple d'entiers relatifs (x ; y) est solution de l'équation $42x+5y = 2$*

si, et seulement si $42(x+4)=5(34-y)$.
d. *Déterminer tous les couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x+5y=2$.*
3. *Déduire du* **2.** *les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(42x+5y-3)(42x+5y+3)=0$*
déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice :104

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six
jours plus tard (J_0+6), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours.
On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .
1. *Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1.Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x-27y=2$.*
2. a. *Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :*
$35x-27y=1$.
b. *En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).*
c. *Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).*
d. *Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.*
3. a. *Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?*
b. *Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J1 ? (L'année 2000 était bissextile.)*
c. *Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devrait-il attendre jusqu'à*
la prochaine conjonction des deux astres ?

Exercice :105

1. *On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x+10y=1$.*
a. *Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).*
b. *Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x+10y=412$.*
c. *Résoudre (E').*
2. *Montrer que les nombres entiers $A_n=3^{2n}-1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).*
3. *On considère l'équation (E'') $A_3x+A_2y=3\ 296$.*
a. *Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').*
b. *Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.*

Exercice :106

1. *On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de Z^2 : $11n-24m=1$.*
a. *Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.*
b. *En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).*
c. *Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).*
2. *recherche du P.G.C.D. de $10^{11}-1$ et $10^{24}-1$.*

a. *Justifier que 9 divise* $10^{11}-1$ *et* $10^{24}-1$.
b. *(n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire :*

$$(10^{11n}-1)-10(10^{24m}-1)=9$$

c. *Montrer que* $10^{11}-1$ *divise* $10^{11n}-1$.
(on rappelle l'égalité $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a^0)$ *)*
(valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11}-1)N-10(10^{24}-1)M=9$$

d. *Montrer que tout diviseur commun à* $10^{24}-1$ *et* $10^{11}-1$ *divise 9.*
e. *Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de* $10^{24}-1$ *et* $10^{11}-1$.

<u>Exercice :107</u>

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x<y$.
S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $PGCD(x, y) = y-x$.
1. a. *Calculer le PGCD(363, 484).*
b. *Le couple (363, 484) appartient-il à S ?*
2. *Soit n un entier naturel non nul ; le couple (n, n +1) appartient-il à S ?*
Justifier votre réponse.
3. a. *Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul*
tel que $x = k(y-x)$ *et* $y = (k+1)(y-x)$.
b. *En déduire que pour tout couple (x, y) de S on a :* $PPCM(x, y) = k(k+1)(y-x)$.
4. a. *Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.*
b. *En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que PPCM(x, y) = 228.*

<u>Exercice :108</u>

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres
$a=n^3-n^2-12n$ *et* $b=2n^2-7n-4$.
1. *Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par* $n-4$.
2. *On pose* $\alpha = 2n+1$ *et* $\beta = n+3$. *On note d le PGCD de* α *et* β.
a. *Établir une relation entre* α *et* β *indépendante de n.*
b. *Démontrer que d est un diviseur de 5.*
c. *Démontrer que les nombres* α *et* β *sont multiples de 5 si et seulement si* $n-2$ *est multiple de 5.*
3. *Montrer que* $2n+1$ *et n sont premiers entre eux.*
4. a. *Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.*
b. *Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers* $n = 11$ *et* $n = 12$.

<u>Exercice :109</u>

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u-13v=1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 *et* v_0 *tels que* $14u_0-26v_0=4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a-26k=4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ *le reste de la division euclidienne de* $an+b$ *par 26.*

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.

On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a. Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que

$$\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}.$$

3. On suppose que a = 17 et b = 3.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors

$17(n - p) = 0$ modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que a = 17 et b = 3.

a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

Exercice : 110

L'espace est rapporté au repère ortho normal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2+y^2-z^2=1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).

4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation z = 68. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant a < b et ppcm(a ; b)= 440, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ \text{ppcm}(a\,;b)=440 \end{cases}.$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors pgcd(a ; b) est égal à 1 ou 5. Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Exercice : 11

Rappel : Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a\equiv b \bmod 7$ *lorsqu'il existe un entier relatif k tel que a = b +7k.*

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances

a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.

Démontrer que : si $a\equiv b \bmod 7$ *et* $c\equiv d \bmod 7$ *alors* $ac\equiv bd \bmod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls si $a\equiv b \bmod 7$ *alors pour tout entier naturel n,* $a^n\equiv b^n \bmod 7$.

2. Pour a = 2 puis pour a = 3, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \bmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \bmod 7$.

b. On appelle ordre de a mod 7, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \bmod 7$.

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \bmod 7$. *En déduire que k divise 6. Quelles sont les valeurs possibles de k ?*

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. *Montrer que* $A_{2006} \equiv 6 \bmod 7$.

Exercice : 112

<u>Partie A : Question de cours</u>

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

<u>Partie B</u>

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ *le système* $(S)\begin{cases} n \equiv 13\,(19) \\ n \equiv 6\,(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : 19u + 12v = 1.

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).

Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ *est une solution de (S).*

2. a. Soit n_0 *une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à* $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\,(19) \\ n \equiv n_0\,(12) \end{cases}$ *équivaut à* $n \equiv n_0\,(12 \times 19)$.

3. a. Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation 19u + 12v = 1 et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.

On divise n par 228 = 12×19. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice : 113

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ *pour tout entier naturel n.*

1. Calculer u_1, u_2, u_3 *et* u_4.

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n *?*

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. *En déduire que pour tout entier naturel k,*

$$u_{2k} \equiv 2 (\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 (\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 (\text{modulo } 100)$.

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n *suivant les valeurs de n.*

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Exercice 114

Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ *alors les nombres a et b sont premiers entre eux.*

b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ *alors a et b sont premiers entre eux.*

2. On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. *Un tel couple sera appelé solution.*

a. Déterminer a lorsque a = b.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si (a ; b) est solution et si $a < b$, *alors* $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\,;x)$ et $(y\,;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier n, $n \geq 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice :115

. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+...+x^{k-1}) = x^k - 1 \ .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : n = dk. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.

b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.

a. On définit m′ et n′ par m = dm′ et n = dn′. En appliquant le théorème de Bézout à m′ et n′, montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu}-1)-(a^{nv}-1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

Exercice :116

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : 123u + 2003v = 1.

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que : $123k_0 \equiv 1\,[2003]$.

c. Montrer que, pour tout entier relatif x, $123x \equiv 456\,[2003]$ si et seulement si $x \equiv 456k_0\,[2003]$.

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456\,[2003]$.

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que : $1 \leq n \leq 2002$ et $123n \equiv 456\,[2003]$.

2. Soit a un entier tel que : $1 \leq a \leq 2002$.

a. Déterminer PGCD(a ; 2003). En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1[2003]$.

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que : $1 \leq x \leq 2002$ *et* $ax \equiv b[2003]$.

Exercice :117

Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ *est divisible par n + 3.*

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ *est un entier naturel non nul.*

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$PGCD(a\,;b) = PGCD(bc - a\,;b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

$$PGCD(3n^3 - 11n\,;n + 3) = PGCD(48\,;n + 3).$$

4. a. Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ *soit un entier naturel.*

Exercice :118

On considère les suites (x_n) *et* (y_n) *définies par* $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ *et* $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$, $n \in N$.

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n *de coordonnées* $(x_n\,;y_n)$ *sont sur la droite* (Δ) *dont une équation est* $5x - y + 3 = 0$. *En déduire que* $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n *sont des entiers naturels. En déduire que tous les* y_n *sont aussi des entiers naturels.*

3. Montrer que :

a. x_n *est divisible par 3 si et seulement si* y_n *est divisible par 3.*

b. Si x_n *et* y_n *ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.*

4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \frac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ *est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.*

Exercice :119

Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ *et* $5n + 1$ *sont premiers entre eux.*

2. On considère l'équation (E) : $87x + 31y = 2$ *où x et y sont des entiers relatifs.*

a. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1., que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que $87u + 31v = 1$ *puis une solution* $(x_0 ; y_0)$ *de (E).*

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

c. Application : Déterminer les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ *dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.*

Indication :On remarquera que le point M de coordonnées (x ; y) appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple (x ; y) vérifie l'équation (E).

Exercice :120

On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$ *:* $11n - 24m = 1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ *et* $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ *et* $10^{24} - 1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ *divise* $10^{11n} - 1$ *(on rappelle l'égalité* $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0)$*, valable pour tout entier naturel n non nul).*

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$(10^{11} - 1)N - (10^{24} - 1)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

Exercice :121

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples (x, y) tels que $PGCD(x, y) = y - x$.

1. a. Calculer le PGCD(363, 484).

b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que (x, y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que

$$x = k(y - x) \text{ et } y = (k+1)(y - x).$$

b. En déduire que pour tout couple (x, y) de S on a : $PPCM(x, y) = k(k+1)(y - x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples (x, y) de S tels que $PPCM(x, y) = 228$.

Exercice 122

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x + 10y = 1$.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 32n - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E'') $A_3 x + A_2 y = 3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

Exercice 122

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres $a = n^3 - n^2 - 12n$ *et* $b = 2n^2 - 7n - 4$.

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ *et* $\beta = n + 3$. *On note d le PGCD de* α *et* β.

a. Établir une relation entre α *et* β *indépendante de n.*

b. Démontrer que d est un diviseur de 5.

c. Démontrer que les nombres α *et* β *sont multiples de 5 si et seulement si* $n - 2$ *est multiple de 5.*

3. Montrer que $2n + 1$ *et n sont premiers entre eux.*

4. a. Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.

b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ *et* $n = 12$.

Exercice : 123

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ *(a et b entiers naturels donnés tels que* $ab \neq 0$*). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.*

a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0 ; y_0)$*.Montrer que d divise 60.*

b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0 ; y_0)$ *à l'équation (1).*

2. On considère l'équation (2) : $24x + 36y = 60$. *(x et y entiers relatifs).*

a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation.

On appellera S l'ensemble des couples (x ; y) solutions.

c. Énumérer tous les couples (x ; y) solutions de (2) et tels que : $-10 \leq x \leq 10$. *Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.*

d. Dans le plan rapporté à un repère ortho normal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées (x ; y) telles que : $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions (x ; y) de l'équation (2) appartiennent à E.

Comment peut-on caractériser S ?

Exercice 124

1. Déterminer PGCD(2688 ; 3024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes

(1) $2688x + 3024y = -3360$;

(2) $8x + 9y = -10$.

b. Vérifier que (1 ; −2) est une solution particulière de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit un repère ortho normal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z = -2$ et $3x - y + 5z = 0$.

a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

Exercice 125

1. a. Pour $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division par 7.

c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7.

d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

2. Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, n entier supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$.

b. Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c. Déterminer tous les diviseurs de u_6 *.*

Exercice 126

On considère l'équation (E) : 8x+ 5y = 1, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}.$$

a. Montrer que le couple (a ; b) est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation 8x + 5y = 100, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIIIème siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

Exercice 127

Dans le plan muni d'un repère ortho normal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, *on donne le point A(12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe* $(O\,;\vec{i})$ *et par C un point de l'axe* $(O\,;\vec{j})$ *tels que*

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple (x ; y) est solution de l'équation (E) : 2x +3y = 78.

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble N des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0\,;y_0)$ *de (E) avec* x_0 *et* y_0 *appartenant à N.*

c. Démontrer qu'un couple (x ; y) d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme (12 + 3k ; 18 − 2k), où k appartient à N .

d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que : $-6 \leq x \leq 21$ *et* $-5 \leq y \leq 14$ *?*

Exercice 128

Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ *est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).*

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ *est un multiple de 7 et que* $2^{3n+2} - 4$ *est un multiple de 7.*

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a. Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p*, par 7 ?*

b. Démontrer que si p = 3n + 1 alors A_p *est divisible par 7.*

c. Étudier le cas où p = 3n + 2.

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire (en base 2) :

a = 1001001000, b = 1000100010000.

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p*. Sont-ils divisibles par 7 ?*

probabilités

EXERCICE :1

Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 , 3 boules bleues numérotées de 6 à 8 et 2 boules vertes numérotées 9 et 10.

On tire deux boules simultanément de l'urne .

1. *Calculer la probabilité des événements suivants :*
   A : ≪ les deux boules ont des numéros impairs≫
   B :≪ les deux boules ont la même couleur≫
   C :≪les deux boules ont des numéros impairs et sont de la même couleur≫
   Les événements A et B sont –ils indépendants ?
2. *Quelle est la probabilité des événements :*
   D :≪ les deux boules sont de couleurs différentes≫
   E :≪les deux boules sont de couleurs différentes et portent des numéros impairs≫
3. *On vient de tirer deux boules de couleurs différentes ;quelle est la probabilité pour qu'elles portent des numéros impairs ?*

EXERCICE :2

Une porte monnaie contient 2 pièces de 50 F et n pièce de 100 F .

1. *Un enfant prend une pièce au hasard puis la remet dans la porte monnaie .Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait tiré une pièce de 100 F ?*
2. *L'enfant prend 2 pièce au hasard puis les remet .Qu'elle est la probabilité pour qu'il ait extrait 2 pièces de 100 F ?*
3. *L' enfant tire 4 pièces simultanément puis les remet .Qu'elle valeur faut-il donner à n pour que la probabilité pour qu'il ait tiré exactement 300 F soit $\frac{1}{11}$?*
4. *Dans cette question on pose n =10.*
   L'enfant tire simultanément 4 pièces .Soit X la variables aléatoire égale à la somme tirée .Qu'elle est la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique ?

<u>EXERCICE :3</u>

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .L'urne U_1 contient 3 boules noires et 1 boule blanche , l'urne U_2 contient 1 boule noire et deux blanches .

On jette un dé cubique , parfaitement équilibré .Si le dé donne 6 , on tire au hasard une boule dans l'urne U_2 , sinon on tire au hasard une boule dans l'urne U_1 .On désigne par :

S l'événement :≪ On obtient 6 avec le dé≫

N l'événement :≪On tire une boule noire≫

1. *Calculer la probabilité des événements suivants $S \cap N$ et $S \cap \overline{N}$.*
2. *Calculer la probabilité de tirer une boule noire .*
3. *Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 avec le dé sachant que l'on a tiré une boule blanche*

<u>EXERCICE :4</u>

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B .Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotés de 1 à 4.Lorsqu'on jette un dé , on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face) .Pour le dé A , les quatre numérotés ont tous la même probabilité d'être cachés . Pour le dé B , la probabilité P_i de noter le numéro est proportionnel à i.

1. *Calculer les probabilités P_1 , P_2 , P_3 et P_4 pour les quatre faces du dé B.*
2. *On lance les deux dés .On note i le numéro caché du dé A et j le numéro caché dé B. On suppose les lancers indépendants .On note P(i , j) la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.*

a. *Montrer que P(1,1)=P(2,1)=P(3,1)=P(4,1)=$\frac{1}{4}$*

b. *Déterminer les probabilités P(i , j) pour les nombres i et j compris entre 1 et 4.*

3. *On appelle Z la variable aléatoire définie par Z(i,j) est le plus grand des nombres i et j*

a. *Quelles sont les valeurs prises par Z ?*

b. *Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique E(Z).*

EXERCICE :5

Les questions 1 et 2 sont indépendantes .

Dans une classe de 10 élèves , 2 élèves ont triché pendant un devoir.

1. *Un professeur choisit n élève dans cette classe . Calculer la valeur minimale de n pour que la probabilité d'avoir au moins un tricheur parmi ces n élèves soit supérieur ou égale à 0,9.*
2. *Chacun des tricheurs porte le N°1 , chaque autre élève porte le N°0.On choisit 3 élèves dans la classe. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des numéros portés par les 3 élèves .*

a. *Donner la loi de probabilité de X.*
b. *Calculer l'espérance mathématique de X.*
c. *Déterminer et représenter la fonction de répartition de X.*

EXERCICE :6

Un sac contient quatre jetons rouges numérotés 1 , 2 , 3 ,et 4 et quatre jetons noirs numérotés 1, 2 , 3 , et 4. Deux jetons de

1. *Un joueur tire au hasard et simultanément deux jetons de l'urne du sac. On convient de la règle suivante.*

- *S'il tire les deux jetons numérotés 1 , il gagne 600 F.*
- *S'il tire deux jetons de même couleur , il gagne 200 F.*
- *Dans les autres cas il perd 200 F.*

a. *Qu'elle est la probabilité pour qu'il tire deux jetons numérotés 1 ?*
b. *Qu'elle est la probabilité pour qu'il tire deux jetons de même couleur ?*
c. *Qu'elle est la probabilité pour qu'il perd 200 F ?*

2. *Après le premier tirage , le joueur remet les deux jetons tirés dans le sac et procédé à un deuxième tirage , en convenant de la même règle.*
   Soit X la variable qui à deux tirages successifs associe le gain algébrique du joueur.

a. *Déterminer la loi de probabilité de X.*
b. *En déduire la probabilité pour que le gain algébrique du joueur soit au moins égale à 400 F.*

EXERCICE :6

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre ≪ couleurs ≫ : pique , trèfle , carreau et cœur ;

Chaque ≪ couleur ≫ comprend huit cartes dont une carte as.

1. *On simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu. Calculer la probabilité des évènements suivants :*
   A :≪ les trois cartes sont des as≫
   B :≪ il y a au moins 2 « couleurs » parmi ces 3 cartes ≫
   C :≪ il n'y a pas d'as parmi les 3 cartes ≫

2. *On tire successivement avec remise 3 cartes d'un jeu de 32 cartes .Le nombre de cœurs tiré définit une variable aléatoire X .Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ; la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.*

<u>EXERCICE :7</u>

Une boite contient 5 jetons : 2 jetons blancs et 3 jetons blancs , indiscernables au toucher .

1. *On extrait simultanément au hasard 2 jetons de la boîte .*

a. *Calculer la probabilité des évènements suivants .*
E= « on extrait 2 jetons noirs »
F= « on extrait 2 jetons de même couleur »

b. *On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus.*

Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. *On effectue la un tirage successif de 2 jetons de la boite ; de la manière suivante :*

On titre un jeton de la boite ; on note sa couleur et on le remet dans la boite en ajoutant en plus dans la boite un autre jeton de la même que celui qu'on a tiré ; on considère suivants :

N_1 = *« on obtient un jeton noir au premier tirage ».*

N_2 = *« on obtient un jeton noir au second tirage ».*

B_1 = *« on obtient un jeton blanc au premier tirage ».*

a. *Calculer la probabilité de N_2 sachant N_1 : $P(N_2/N_1)$ puis la probabilité de N_2 sachant B_1 : $P(N_2/B_1)$*

b. *En déduire $P(N_2)$.*

<u>EXERCICE 8</u>

Dans pays donné , la maladie du Sida touche cinq pour mille de sa population. Des études statistiques montrent que la probabilité pour un individu d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0 ,8 et celle d'avoir un test négatif sachant qu'il n'est pas atteint par la maladie est 0,9.

On note ; T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie »

M l'évènement « être malade »

$\overline{M}$ *l'évènement « contraire de M »*

On rappelle que pour tout évènements A et B on a :

$(*)$ *A=*$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ *et* $P_A(B)$ *désigne la probabilité de B sachant A.*

1. *a. Réécrire la relation* $(*)$ *pour* A=T *et* B=M *puis pour* A=$\overline{M}$ *et* B=$\overline{T}$.
   b.En déduire que $P(\overline{M} \cap T)= P(\overline{M})\left[1 - P_{\overline{M}}(\overline{T})\right]$.

   2. Calculer la probabilité pour qu'un individu ait un test positif à cette maladie.

   3. a. Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test positif à cette maladie.

   b. Calculer la probabilité pour qu'un individu soit malade sachant qu'il a un test négatif à cette maladie.

   On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

EXERCICE :9

Pendant l'année scolaire , la cantine d'un lycée propose souvent du riz.

Le premier jour de l'année , il y'a 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.

Si elle en propose un jour , il y'a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.

Si elle n'en propose pas un jour , il y'a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.

On appelle J_n *l'évènement « la cantine propose du riz au* n^{ieme} *jour » et* K_n *l'évènement « la cantine n'en propose pas le* n^{ieme} *jour » .*

Soit p_n *la probabilité de l'évènement* J_n.

1. *Déterminer* $p(J_2/J_1)$ *et* $p(J_2/K_1)$. *En déduire* p_2 .
2. *Montrer que* $p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$.
3. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_n = p_n - \frac{1}{2}$

a. *Montrer que* (u_n) *est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.*
b. *Calculer* u_n *puis* p_n *en fonction de n.*
c. *Un élève de l'établissement , fin mathématicien ne mange les jours pairs .*

Montrer que à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{8}{15}$.

EXERCICE 11.

Dans un magasin d'électroménager, on s'intéresse au comportement d'un acheteur potentiel d'un téléviseur et d'un magnétoscope. La probabilité pour qu'il achète un téléviseur est de 0,6. La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il a acheté un téléviseur est de 0,4.La probabilité pour qu'il achète un magnétoscope quand il n'a pas acheté de 0,2.
1) *Quelle est la probabilité pour qu'il achète un téléviseur et un magnétoscope ?*

2) *Quelle est la probabilité pour qu'il achète un magnétoscope ?*
3) *Le client achète un magnétoscope. Quelle est la probabilité qu'il achète un téléviseur ?*

Exercice n°12.

On dispose de deux urnes u_1 et u_2. L'urne u_1 contient trois boules blanches et une boule noire . L'urne u_2 contient une boule blanche et deux boules noires. On lance un dé non truqué. Si le dé donne un numéro d inférieur ou égal à 2, on tire une boule dans l'urne u_1 . Sinon on tire une boule dans l'urne u_2 .
(On suppose que les boules sont indiscernables au toucher)
1) *Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.*
2) *On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne u_1 .*

Exercice n°13.

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.
a) *Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à 5/48*
b) *Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?*
c) *Le vaccin est-il efficace ?*

Exercice n°14.

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule
Si elle est rouge, il gagne 10 € , si elle est jaune, il perd 5 €, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir
replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 €, sinon il perd 4 €.
1) *Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.*
2) *Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée*
négativement).
a) *Etablir la loi de probabilité de la variable X*
b) *Calculer l'espérance de X*
3) *Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque*
la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Exercice n°15.

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés.
Le dé rouge comporte : deux faces numérotées □1 ; deux faces numérotées 0 ; -deux faces numérotées 1.
Le dé vert comporte : une face numérotée 0;trois faces numérotées 1;deux faces numérotées 2.
On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.
1) *Déterminer la loi de probabilité de X.*
2) *Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique.*

Exercice n°17

Dans une académie, les élèves candidats au baccalauréat série ES se répartissent en 2003 selon les trois enseignements de spécialité : mathématiques, sciences économiques et sociales et langue vivante. Nous savons de plus que : 37% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques.
25% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité langue vivante.
21% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité mathématiques et ont obtenu le baccalauréat.
32,5% des candidats ont choisi l'enseignement de spécialité SES et ont obtenu le baccalauréat. De plus, parmi les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité langue vivante, 72,5% ont obtenu le baccalauréat. On interroge un candidat pris au hasard. On note :
M l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques » ;
S l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité sciences économiques et sociales » ;
L l'événement « le candidat a choisi l'enseignement de spécialité langue vivante » ;
R l'événement « le candidat a obtenu le baccalauréat ».
On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions. Les résultats seront arrondis au millième.
***1)** Traduire en termes de probabilités les informations numériques données ci-dessus.*
***2) a)** Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de SES.*
***b)** Déterminer la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait réussi aux épreuves du baccalauréat.*
***3)** Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait choisi l'enseignement de spécialité langue vivante et ait échoué au baccalauréat ?*
***4)** Ce candidat a choisi l'enseignement de spécialité mathématiques. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas obtenu le baccalauréat ?*
***5)** Montrer que le pourcentage de réussite au baccalauréat pour les candidats de ES dans cette académie est 71,6%.*
***6)** On interroge successivement au hasard et de façon indépendante trois candidats.*
***a)** Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux soit reçu ?*
***b)** Quelle est la probabilité que deux candidats sur trois exactement soient reçus ?*

Exercice n°18.

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée, de sorte que lorsqu'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit 1/ 4 ; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est 1/ 2 à chaque lancer.
***1)** On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité 1/ 2 d'être prise)*
***a)** Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?*
***b)** On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée.*
***c)** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?*
***2)** Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité 1/ 2 d'être lancée) : déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile*

3) *On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?*

Exercice n°19.

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du
questionnaire.

1) *Quelle est la loi de probabilité de X ?*

2) *Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.*

Exercice n°20.

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ». On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les évènements suivants:

B : la pièce prise est normale. B : la pièce prise est truquée.

P : on obtient « Pile » au premier lancer. n F : on obtient « Face » pour les n premiers lancers.

1) a) *Quelle est la probabilité de l'évènement B ?*

b) *Quelle est la probabilité de l'évènement P sachant que B est réalisé ?*

2) *Calculer la probabilité de l'événement P□□B , puis de l'évènement P□□B .*

En déduire la probabilité de l'évènement P.

3) *Calculer la probabilité de l'évènement* F_n □B *puis de l'évènement* F_n □B .

En déduire la probabilité de l'évènement F_n .

Exercice 21

On dispose de deux urnes U_1 *et* U_2 *contenant des boules indiscernables au toucher.*

U_1 *contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.*

U_2 *contient 2 boules blanches et une boule noire.*

On tire une boule au hasard dans U_1 *et on la place dans* U_2*. On tire ensuite, au hasard, une boule dans* U_2*. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.*

On note B_1 *(respectivement* N_1*) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne* U_1 *».*

On note B_2 *(respectivement* N_2*) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne* U_2 *».*

1. ***a.*** *Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :*

Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 *est égale à* $\frac{3k+6}{4k+12}$

.

Dans la suite on considère que k = 12.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. *U_n joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.*
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros.
Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
a. *Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et −8.*
b. *Déterminer la loi de probabilité de la variable X.*
c. *Calculer l'espérance mathématique de X.*
d. *Le jeu est-il favorable au joueur ?*
3. *U_n joueur participe n fois de suite à ce jeu.*
Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urneU_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 22

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche,
ou rouge.
On sait de plus qu'il y au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.
1. *On note g (n, b, r) la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.*
Démontrer que $g(n, b, r)=\frac{1}{210}[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)]$.
2. *Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité g (n, b, r) soit minimale.*
L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ortho normal.
Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (15 ; 0 ; 0), (0 ; 15 ; 0) et (0 ; 0 ; 15) et soit M le point de coordonnées (n, b, r). On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.
a. *Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est* $x + y + z - 15 = 0$.
b. *En déduire que le point M est un point du plan (NBR).*
c. *Démontrer que g (n, b, r) =1/210[OM^2 −15].*
d. *Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR).Déterminer les coordonnées du point H.*
e. *En déduire tes valeurs de n, b et r afin que la probabilité g (n, b, r) soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à 2/7.*

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit 2/7.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.

S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. *Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de x et de k.*

2. *Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.*

Exercice 23

On considère plusieurs sacs de billes S_1, S_2, . . . , S_n, . . . tels que :

– le premier, S_1, contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;

– chacun des suivants, S_2, S_3, . . . , S_n, . . . contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

– on tire au hasard une bille dans S_1 ;

– on place la bille tirée de S_1 dans S_2, puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;

– on place la bille tirée de S_2 dans S_3, puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;

– etc.

Pour tout entier n >1, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note p (E_n) sa probabilité.

1. *Mise en évidence d'une relation de récurrence*

a. *D'après l'énoncé, donner les valeurs de p (E_1) , pE_1 (E_2) , $p\overline{E_1}$ (E_2).*

En déduire la valeur de p (E_2).

b. *À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer p (E_{n+1}) en fonction de p (E_n).*

2. *Étude d'une suite*

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}un + \frac{2}{5} \end{cases}$

pour tout n >1.

a. *Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.*

b. *Démontrer que (u_n) est croissante.*

c. *Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.*

3. *Évolution des probabilités p (E_n)*

a. *À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités p (E_n).*

b. *Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : 0,499996≤ p (E_n)≤60,5 ?*

Exercice 24

Tous les résultats seront arrondis à10^{-2}près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. *On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.*

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. *On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.*

b. *Calculer la probabilité des évènements suivants :*

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
***2.** En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut. On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement « le stylo présente un défaut », et E l'évènement « le stylo est accepté ».*
***a.** Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.*
***b.** Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.*
***c.** Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.*
***3.** Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.*
Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question
***1. b.**. Quel commentaire peut-on faire ?*

Exercice 25

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.
***1.** Soit R l'évènement « le joueur obtient une boule rouge ».*
Montrer que $p(R) = 0,15$.
***2.** Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A es telle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B?*

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x, x-2$ et -4.
***1.** Déterminer la loi de probabilité de G.*
***2.** Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.*
***3.** Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) > 0$?*

Exercice 26

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur

couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :
• pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
• pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.
Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.
***1.** Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est à-dire à l'âge de deux mois.*
***a.** Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.*
***b.** Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.*
***c.** Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?*
***2.** Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à $10-2$ près.*
***3.** L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.*
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Exercice 27

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 %au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :
– D l'évènement « le composant est défectueux » ;
– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;
– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».
***1. a.** Dessiner un arbre pondéré.*
***b.** Calculer $p(D \cap F1)$, puis démontrer que $p(D) = 0,0225$.*
***c.** Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?*
Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3}près.
***2.** Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?*
***3.** La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.*
***a.** Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ. Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.*

b. *Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?*
c. *Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?*

sujets de bac et problémes de synthése

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE SERIES C-E

ANNEE SCOLAIRE : 1993-1994

EXERCICE : 1

Soit n un entier naturel non nul et q un nombre réel différent de 0,-1 et 1.

On considère dans le plan complexe les n points $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ *d'affixes respectives* $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$.

1.) *Démontrer que le système de points pondérés* $\{(A_k ; q^k), 0 \leq k \leq n-1\}$ *admet un barycentre* G_n.

2.) *On choisit les nombres complexes* z_k *de la façon suivante.*

$$z_0 = 1, z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

Et $z_k = (z_1)^k$ *pour* $1 \leq k \leq n-1$.

a.) *Déterminer l'affixe* Z_n *de* G_n *a l'aide de q et de* z_1.

b.) *Préciser la partie réelle* X_n *et la partie imaginaire* Y_n *de* Z_n.

3.) a) *Déterminer n pour que* Z_n *soit un nombre réel.*

b) *Calculer les limites de* X_n *et* Y_n *lorsque n tend vers* $+\infty$.

c) *En déduire la position limite du point* G_n *quand n tend vers* $+\infty$.

EXERCICE : 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A , tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$. *On appelle R la rotation de centre A , qui , transforme B en C et T la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

On note I le milieu du segment [BC].

1. *Construire J =R(I).*
2. *On pose* $F_1 = R \circ T$ *et* $F_2 = T \circ R$.

Déterminer $F_1(J)$ *et* $F_2(I)$ *puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de* F_1 *et* F_2 .

3. Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 l'image de M par F_2 . Quelle est la nature du quadrilatère BC M_1M_2 ?

PROBLEME :

Partie A : Etude d'une fonction exponentielle.

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1. *On note f' , f'' et $f^{(3)}$ les dérivées successives de f .*

Etablir que : $\forall\, x \in R \;\; f^{(3)}(x) = 4x(3 - x^2)\, e^{-x^2}$.

2. *Etudier les variations de la fonction f'' et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan .*
3. *En déduire que* $\forall\, x \in R\; |f''(x)| \leq 2$.

Partie B : Calcul approchée d'une intégrale

On souhaite obtenir une valeur approchée de l'intégrale I = $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ *à 10^{-3} prés .*

B1.

Soit u la fonction affine croissante définie par u(x)= $\alpha x + \beta$ *où* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in R$ *; et soit g la fonction composée définie par :* $\forall\, x \in R$ *g(x) = (f∘ $u)(x)$.*

On pose : $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} g(t)dt - 2xg(0)$ *. avec* $x \in R^+$.

1. *Sans chercher à calculer* $\varphi(x)$*, établir que si G est une primitive de la fonction g alors :* $\forall\, x \in R_+ \;\; \varphi(x) = G(x) - G(-x) - 2xg(0)$.
2. *En déduire que :* $\forall\, x \in R_+ \; \varphi''(x) = g'(x) - g'(-x)$.
3. *a. Démontrer en utilisant A3) ,que :* $\forall\, x \in R\; |g''(x)| \leq 2\alpha^2$.

b. A l'aide du théorème des accroissements finis , établir que : $\forall\, x \in R_+$
$|\varphi''(x)| \leq 4\alpha^2 x$.

c. Par intégrations successives, démontrer que : $\forall\, x \in R_+$

$$-\frac{2}{3}\alpha^2 x^3 \leq \varphi(x) \leq \frac{2}{3}\alpha^2 x^3.$$

a. En cadrer $\varphi(1)$ *et en déduire que :*$\forall\, x \in R_+$

$$-\frac{2}{3}\alpha^2 \leq \int_{-1}^{1} g(t)dt - 2g(0) \leq \frac{2}{3}\alpha^2.$$

B2.

1) *Démontrer que :*

$\int_{-1}^{1} g(t)dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} f(u)du$.

2) *On se place dans le cas où* $\alpha = \frac{1}{2n}$ *et* $\beta = \frac{2k+1}{2n}$,$k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ *. Etablir que :* $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

$$-\frac{1}{12n^3} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(u)du - \frac{1}{n} f\left(\frac{2k+1}{n}\right) \leq \frac{1}{12n^3}$$

3) *En déduire que :*

$$\left|\int_0^1 f(u)du - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{12n^3}$$

4) *Déterminer le plus petit entier n qu'il faut prendre pour avoir une valeur approchée de I à 10^{-3} prés . En déduire que I a une valeur approchée de 0, 75.*

Partie C : Etude d'une fonction définie par une intégrale.

Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1) *Démontrer que F est définie et continue sur R.*
2) *Etudier la parité de F.*
3) *Quel est le sens de variation de F ?*
4) *a) Démontrer que* $\forall\, t \geq 1, e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

b) Soit (u_n)n>0, la suite de terme général $u_n = F(n)$. Démontrer que cette suite est croissante et majorée par I + $\frac{1}{e}$.
c) En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel L $\leq 1{,}13$.
d) Quelle conclusion obtient-on en ce qui concerne la limite de la fonction F lorsque x tend vers $+\infty$?
5) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère du plan.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE. SERIE C-E

ANNEE SCOLAIRE : 1994-1995

EXERCICE : 1

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale

$$I= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[sin(2x) + e^{-x}cos(x - \frac{\pi}{4})]dx$$

à l'aide d'une équation différentielle :

4. *Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+2y = 0$ (E_1)*
5. *On considère l'équation différentielle $y''+2y'+2y = 4\cos(2x) - 2\sin(2x)$ (E)*
a. *Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par :*
$\forall x \in R$ $f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$ soit solution de l'équation (E).
b. *f désignant une numérique, on désigne par g la fonction $f - f_1$.*
Démonter que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E1).
c. *En déduire la forme générale des fonctions vérifiant l'équation (E).*
6. ***a)*** *Vérifier que la fonction f de (E) telle que $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0) = 2$ est*
$f(x) = \sin(2x) + e^{-x}cos(x - \frac{\pi}{4})$

b) *Utiliser (E) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.*

c) *En déduire la valeur de l'intégrale I.*

EXERCICE : 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O ;\vec{\imath} , \vec{\jmath})$ on considère les points A , M , et N d'affixes respectives

$\sqrt{2}(1 + i)$; $z = re^{i\theta}$ *et* $1/z$.

1) *P désignant le barycentre de M affecté du coefficient 2 et de N affecté du coefficient 1 exprimer les coordonnées de P en fonction de r et θ .*
2) *Le point M se déplace sur le cercle de centre O et passant par A. Montrer alors que P est situé sur une courbe (E) dont on donnera l'équation.*

3) *Tracer cette courbe (E) et préciser ses sommets.*
4) *Soit f l'affinité orthogonale de rapport k >0 et d'axe (O, $\vec{j}$) . Déterminer k pour que f(E) soit un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle.*

PROBLEME

En 1995 , un artisan doit réaliser un socle en ébène de hauteur 30 cm et dont la base est limitée par la courbe (Γ) d'équations :

$$\begin{cases} x = 2cost - cos2t \\ y = 2sint + sin2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

A) <u>Plan du socle</u>

On désigne par A , B et C les points de coordonnées respectives $(\frac{3}{2} ; \frac{3\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{3}{2} ; -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ $(-3;\ 0)$. *Le pied de la hauteur du triangle ABC issue de C est noté C' et C'' est le point d'abscisse positive commun à (Γ) et x'Ox.*

1. *Etudier les fonctions x et y et dresser un unique tableau des variations simultanées de ces deux fonctions.*
2. *Lorsque* $t \in [0;\pi]$ *, préciser l'intersection de (Γ) avec les axes de coordonnées.*
3. *Soit (Δ) la demi- droite d'origine C et contenant O.*

a. *Soit M un point de (Γ) de paramètre t avec* $t \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ *. Exprimer en fonction de t la pente de la droite (CM).*

b. *Quelle est la valeur limite de cette pente lorsque le point M se déplace sur (Γ) et se rapproche de C ? Qu'en déduit – on pour (Δ) ?*

4. *a) Déterminer le point I centre du cercle circonscrit au triangle ABC.*
   b) Démontrer que (Γ) est invariante par une rotation de centre I dont on précisera l'angle θ *avec*$\in [0;\pi]$.
5. *a) Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie.*
   b) A l'aide de la question 4b), préciser les tangentes à (Γ) en A et B.
   c) Tracer (Γ).

B) <u>Evaluation du volume du socle</u>

La base du socle ne pouvant être réalisée avec une bonne précision, l'artisan préfère tailler un nouveau socle dont la base est une figure dont les côtés sont elliptiques.

1. *L'un de ces côtés noté (E) passe par A et C'' et correspond à une ellipse de centre* $\Omega(2;0)$. *Tracer (E) et en donner une équation.*
2. *D désignant la partie du plan limitée par (E) et la droite d'équation (x=* $\frac{3}{2}$ *), démontrer que l'aire de D exprimée en unité d'aire est :*

$$A(D) = 6\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt$$

3. a) Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(t) = \sqrt{1-t^2}$. On ne demande dans cette question une étude détaillée de f.

b) On subdivise l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ en dix sous- intervalles de même longueur. En utilisant la méthode des rectangles, encadre $rA(D)$.

4. Le bois d'ébène présente la particularité d'être de deux couleurs

Il est très clair sur le pourtour de sa section et il est noir au cœur de la section. La partie claire représente environ 20 % de sa section. On admet que ces deux parties son circulaires et concentriques .On suppose également le tronc de l'arbre cylindrique. Quel devra être le diamètre de l'arbre pour que ce nouveau socle soit réalisable en bois entièrement noir ?

5. Sachant que le bois d'ébène a un diamètre qui augmente chaque année de 1 mm, quel est l'âge minimal de l'arbre utilisé par l'artisan pour faire ce travail ?

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE. SERIE C-E

ANNEE SCOLAIRE : 1995-1996

EXERCICE : 1

Dans le plan complexe orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère la courbe (C) d'équation :$4x^2+3y^2+6y-9=0$

1. a. Déterminer la nature de (C).

b. Déterminer les foyers, les directrices et l'excentricité de (C)

c. Tracer (C)(unité 20 cm)

2. Soit M un point de (C) d'affixe z=x+iy , x et y étant des réels.

a. Démontrer que $|z| = \frac{1}{2}(3-y)$.

b. En déduire que $|z| = \frac{3}{2+\sin\theta}$, θ étant un argument de z.

3 a) Soit M' et M'' deux points de (C) d'affixes respectives z' et z' et ' , d'arguments respectives θ et $\theta+\pi$. Calculer la distance M'M'' en fonction de θ

b) Déterminer M'M'' si OM'=2.

EXERCICE : 2

Dans le plan orienté on considère deux points A et B . On prendra AB = 6cm pour la figure .

1. *Déterminer et représenter l'ensemble des (C) des points M du plan tels que* $\frac{MA}{MB}$= 3.
2. *Déterminer et représenter l'ensemble des (A) des points M du plan tels que* $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.
3. ***a)*** *Placer le point C image de B par la rotation de centre A et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$, *puis le point D tel que* $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
   b) *On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D .*
   Déterminer le rapport et l'angle de S .
   c) *On note Ω le centre de S . Exprimer*
   ΩB *en fonction de* ΩA *et donner une mesure de l'angle* $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$
   d) *En déduire la position de Ω et le placer sur la figure .*
   e) *Démontrer que les points Ω , A , C et D sont cocycliques .*

PROBLEME **10 pts**

A-1) *Soient f une fonction numérique dérivable sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$ *et g la fonction définie sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$ *par* $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

Soit (E) l'équation : $xy' - 2y = lnx$ *; on dit que f est solution de (E) si et seulement si, pour tout x appartenant à* $]0\,;+\infty[$: $xf'(x) - 2f(x) = lnx$.

(f' désignant la dérivée de f).

Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si g est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ *de la fonction :* $x \to \frac{lnx}{x^3}$.

2) *Quel est l'ensemble des primitives de la fonction :* $x \to \frac{lnx}{x^3}$?

(On pourra faire une intégration par parties).

3) *En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur* $]0\,;+\infty[$ *par :* $x \to -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + ax^2$, *où a désigné une constante réelle arbitraire.*

4) *On désigne par φ la fonction :* $x \to -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + \frac{1}{4}x^2$, *où* $x \in e\,]0\,;+\infty[$.

Etudier la variation de φ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

B-1) *Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer en fonction de λ l'intégrale :*

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \varphi(x)dx$$

2) *Montrer que, lorsque λ tend vers 0, $I(\lambda)$ admet une limite égale à $\frac{1}{3}$.*

3) *Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel x tel que :*

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}, \text{ on a :}$$

$$\varphi(\frac{k+1}{n}) \leq \varphi(x) \leq \varphi(\frac{k}{n}) \ .$$

Montrer que : $$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi(\frac{k}{n}) \leq I(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi(\frac{k}{n}) \ .$$

En déduire : $$I(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n}) \leq \frac{1}{n}\varphi(\frac{1}{n}) + I(\frac{1}{n}) \ .$$

4) *Déduire des questions 2) et 3) que , lorsque n tend vers l'infini , $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n})$ admet une limite finie , la calculer .*

5) a) *Montrer que :* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(\frac{k}{n}) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{n}{k}) - \frac{1}{4}$:

b) *Etablir les égalités :*

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(\frac{n}{k}) = \ln(\frac{n^n}{n!}) \ .$$

6) a) *Utiliser les résultats précédentes pour démontrer que la suite :$n \to \frac{1}{n}ln(\frac{n^n}{n!})$ a une limite que l'on précisera .*

b) *En déduire que la limite $n \to \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ a une limite que l'on précisera.*

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE. SERIE C-E

ANNEE SCOLAIRE : 1996-1997

<u>Exercice : 1</u>

Soit dans l'espace un tétraèdre régulier ABCD. On pose AB =a.

1) *Montrer que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales.*
2) *Soit I le milieu de [AB] et (P) le plan passant par I, parallèle à (AC) et (BD)*
a) *Montrer que (P) coupe les autres arêtes du tétraèdre en J, K, L, milieu respectives de [BC] , [CD] , [AD] .*
b) *Montrer que IJKL est un carré.*
c) *Soit G l'isobarycentre de A, B, C et D. Montrer que G est le centre de IJKL.*

Exercice : 2

On se place dans un repère ortho normal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe z' tel que : $z' = f(z) = (1+i)z + 2$.

1) *Donner la nature de f ainsi que les éléments caractéristiques. On notera A son point invariant.*
2) *a) Donner une construction géométrique du point M'image de M par f.*
   b) Quelle est la nature du triangle AMM' ?
3) *Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :* $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{OM'}\|$.
4) *Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que :* $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0$.
5) *Tracer E et F.*

Problème :

Partie A

Le but du problème est de montrer l'inégalité suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$$

Soit n un entier naturel positif.

Soit g la fonction définie sur $R - \{-1;1\}$ *par* $g(x) = ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - 2x$.

Soit f_n *la fonction définie sur R par* $f_n(x) = x^n e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de g dans un repère ortho normal $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$

1.) *Montrer que (C) est symétrique par rapport à O .*

2.a) *Etudier g.*

b) *Montrer que (C) admet une asymptote oblique en plus et moins l'infini*

c) *Tracer (C).*

3.) Montrer que : $\forall\, x \in]0:1[$, $g(x) > 0$.

Partie B.

1. Montrer que : $ln\left(\frac{f_n(x+n)}{f_n(x-n)}\right) = ng\left(\frac{x}{n}\right)$
2. En déduire que : $\forall\, x \in]0:n[$, $f_n(n+x) > f_n(n-x)$.
3. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ de f_n .

a. Montrer que $(x \to F_n(n+x))$ est une primitive de $(x \to f_n(n+x))$ et que $(x \to -F_n(n-x))$ est une primitive de $(x \to f_n(n-x))$.

b. En déduire les égalités : $\int_0^n f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n-t)dt$ et $\int_n^{2n} f_n(t)dt = \int_0^n f_n(n+t)dt$

4. En déduire que : $\int_0^n f_n(t)dt < \int_n^{2n} f_n(t)dt$.

Partie C

1) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $I_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.
a) Calculer $I_1(x)$.
b) Donner une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
c) Montrer que par récurrence que : $\int_0^x f_n(t)dt = n!(1-e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!})$.
2) En déduire, pour n fixé, que : $lim_{x\to+\infty}(\int_0^x f_n(t)dt) = n!$.
3) En déduire, à l'aide du B]4), que : $2\int_0^n f_n(t)dt < \int_n^{2n} f_n(t)dt < n!$.
4) En déduire, à l'aide du C] 1c) et 3), que : $\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} > \frac{e^n}{2}$.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE. SERIE C-E

ANNEE SCOLAIRE : 1997-1998

EXERCICE : 1

1) Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = ln\left[x + \sqrt{x^2+1}\right]$.
a) Démontrer que f est une fonction impaire.
b) Etudier cette fonction f.
c) Représenter graphiquement la fonction g_3 définie sur $[-2;2]$ par $g(x) = 3 + f(x)$.
2) Soit g_h la fonction définie sur $[-2;2]$ par $g_h(x) = h + f(x)$ où h est un réel strictement supérieur à 2.

α , β sont des réels vérifiant $0 < \alpha < \beta < 2$. On désigne par :

D_α le domaine plan limité par la courbe C représentative de g_h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $(x = \alpha)$ et $(x = -\alpha)$.

D_β le domaine plan limité par la courbe C , l'axe des abscisses les droites d'équations $(x = \alpha)$, $(x = -\alpha)$, $(x = \beta)$, et $(x = -\beta)$;

D_2 le domaine plan limité par la courbe C , l'axe et les droites d'équations

$$(x = \beta),(x = 2),(x = -2),(x = -\beta).$$

a) Sur la figure faite en 1.b) ; représenter les domaines D_α , D_β et D_2 .
b) $D_\beta \cup D_\alpha \cup D_2$ est une cible. Un joueur vise cette cible et l'atteint.
Les probabilités $p(D_\alpha), p(D_\beta)$ et $p(D_2)$ pour qu'ils atteignent les zones D_α , D_β et D_2 sont proportionnelles à leurs aires.
En notant k le coefficient de proportionnalité, démontrer que : $hk = \frac{1}{4}$.
c) Trouver alors α et β pour que l'on soit en situation d'équiprobabilité.

EXERCICE : 2

Dans le plan orienté (P), on donne deux points O_1 et O_2 et on désigne par r_1 la rotation de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre O_2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Pour tout point M de (P), on note M_1 l'image de M par r_1 et M_2 l'image de M_1 par r_2

1. a) Démontrer que le milieu J du segment $[MM_2]$ est un point fixe pour $r_2 \circ r_1$.
b) Construire soigneusement J et prouver que J est situé sur le cercle de diamètre $[O_1O_2]$ (on prendra O_1O_2 = 10 cm).

2. Soit H le projeté orthogonal de O_1 sur la droite (MM_1).

a) Préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe S de centre O_1 qui transforme H en M.
b) Démontrer que M, M_1, M_2 sont alignés si et seulement si H est situé sur le cercle de diamètre $[O_1J]$.
c) En déduire l'ensemble (C) des points M du plan (P) pour lesquels M, M_1, M_2 sont alignés.

3a) Exprimer M_1M en fonction de O_1M_1 puis M_1M_2 en fonction de O_2M_1.

b) Où se situe M_1 lorsque l'on a l'égalité $M_1M_2 = \sqrt{3}\, M_1M$?
c) Trouver (Δ) ensemble des points du plan (P) tels que $M_1M_2 = \sqrt{3}\, M_1M$.

PROBLEME :

A) Soit ϕ la fonction numérique définie par : $\phi(x) = \dfrac{x}{(\ln x)^2}$, si $x > 0$ et $\phi(0) = 0$

1) Démontrer que ϕ est une fonction continue sur son ensemble de définition.
2) a)Etudier la dérivabilité de ϕ en 0.
b) Dresser le tableau de variation de la fonction ϕ .

3) a) Etudier le comportement asymptotique de ϕ pour les grandes valeurs de

b) Préciser la tangente (T) à la courbe (C) représentative de ϕ *au point d'abscisse e.*

c)Tracer (C) et (T) dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

4) Démontrer que l'équation $\phi(x) = e$ *admet exactement deux solutions dans l'intervalle* $]1;+\infty[$ *et que l'une de ces solutions est comprise entre* e^3 *et* e^4.

B) Dans cette partie, on considère la fonction f définie par :

$$f \; : \;]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \int_e^x \frac{dt}{lnt}$$

Le but de cette partie est de reprèsenter graphiquement cette fonction sans connaitre l'expression explicite de $f(x)$.

1) *a) Justifier l'existence de f .*
b) *Démontrer que f est croissante sur* $]1;+\infty[$
2) *a)Etablir que pour tout réel t appartenant à* $]1;+\infty[$ *on a :* $lnt < t - 1$.

b)En déduire une minoration de $f(x)$ *lorsque* $x > e$. *Préciser alors la limite de* $f(x)$ *lorsque x tend vers* $+\infty$.

c)De façon analogue , calcluer la limite de f(x) lorsque x tend vers 1 par valeurs supèrieures .

3) *a) Soient a et b deux réels tels que* $e \leq a < b$.

Etablir que : $\frac{b-a}{lnb} \leq \int_a^b \frac{dt}{lnt} \leq \frac{b-a}{lna}$.

b)Soit x un réel strictement supèrieur à e . Démontrer que : $\forall\, u \,/\; e \leq u < x$, $\frac{x-u}{lnx} \leq f(x) \leq u + \frac{x-u}{lnu}$.

c)Résoudre l'inèquation $\phi(x) < x$. *Justifier que l'on peut prendre* $u = \phi(x)$ *lorsque* $x > e^4$ *. Etablir alors que :* $\forall\; x > e^4$ $, 1 - \frac{\phi(x)}{x} \leq \frac{lnx}{x} f(x) \leq \frac{1}{lnx} + \left[1 - \frac{\phi(x)}{x}\right] \frac{lnx}{ln\phi(x)}$

$d)$ *Démontrer que :* $lim_{+\infty} \frac{lnx}{ln\phi(x)} = 1$. *Et en déduire que :* $lim_{+\infty} \frac{lnx}{x} f(x) = 1$.

e)Vérifier que l'on a l'égalité : $\forall\; x > e^4$, $f(x) = \frac{x}{lnx}[1 + \varepsilon(x)]$ *avec* $lim_{+\infty}\, \varepsilon(x) = 0$

f) En déduire le comportement asymptotique de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

4) a) On cherche à obtenir une valeur approchée de f(2) :

Soit h : $t \longrightarrow at + b$ *la fonction telle que h(e)=1 et h(2)=*$\frac{1}{ln2}$.

Calculer les réels a et b et donner deux valeurs approchées de ces réels à 10^{-3} prés .

On utilisera ces valeurs approchées pour la question 4b).

b)On prend alors f(2) ≈ $\int_e^2 h(t)dt$. *Calculer cette valeur .*

5)a) Donner le tableau de variation de f .

b) Construire la courbe reprèsentative de cette fonction .

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE. SERIE S1-3

ANNEE SCOLAIRE : 1998-1999

EXERCICE : 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *unité 2cm. On considère l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que :* $|z-1-i| = \frac{1}{4}|z+iz-8(1+i)|$ *(1)*

1) *a)Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que* $z + i\bar{z} - 8(1+i) = 0$ *est une droite* (Δ) .
   b) En interprétant géométriquement l'équation (1) , démontrer que (E) es une conique de foyer le point F d'affixe $1+i$ *, de directrice la droite* (Δ) *et d'excentricité ½.*
2) *a)Préciser l'axe focal (D) de (E).*
   b) Vérifier que les points A et A' d'affixes respectives 2+2i et -2 - 2i sont deux sommets de (E).
   c)Placer ces éléments sur une figure et construire géométriquement les sommets de (E) situés sur l'axe non focal.
   d) Donner l'allure de (E) en précisant les tangentes aux sommets.

EXERCICE : 2

On considère, dans le plan euclidien orienté, un triangle ABC équilatéral direct ; on note H le pied de la hauteur issue de C, H_1 *le projeté orthogonal de H sur [AC].*

1) *a)Calculer le rapport* $\frac{H_1A}{H_1C}$.
   b) Déterminer les centres des similitudes directes planes d'angle nul ou plat transformant A en C.
2) *Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : MC = 3MA.*
3) *Construire le centre Ω de la similitude plane directe s de rapport 3 et d'angle* $-\frac{\pi}{3}$ *telle que S(A)=C.*

EXERCICE : 3

Soit ABCD un tétraèdre régulier. G son centre de gravité et H celui du triangle BCD. On note I, J, K, et L les milieux respectifs des segments [AD] , [BC] , [AC] et [BD] .

1. *–a) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) se coupent en G.*
   -b) Démontrer que la droite (CG) perce le plan (ABD) en H.
   -c) Placer sur une figure les données précédentes.

2. Soient S_1 la réflexion par rapport au plan (BIC) et S_2 la réflexion par rapport au plan (ALC). On pose r=$S_2 \circ S_1$.

a. Montrer que (BIC) est le plan médiateur du segment du segment [AD] ; en déduire les images de A et de D par S_1.Déterminer de même les images de B et de D par S_2 .

b. Déterminer les images des points A, B, C et G par r.

c. Démontrer que r est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

PROBLEME : 10PTS

1. *Soit la fonction g définie sur R_+ par : g(x) = $\frac{2x^2}{1+x^2} - ln(1+x^2)$.*
   a. *Etudier les variations de g et déterminer sa limite en $+\infty$. En déduire que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α dans l'intervalle $]1;+\infty[$. Prouver que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.*
   b. *Préciser le signe de g(x) surR_+.*
2. *Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) (unité 2 cm) Soit la fonction f définie sur R par : f(0) = 0 et si $x \neq 0$ f(x) = $\frac{ln(1+x^2)}{x}$.*
   On note (C) la courbe représentative de f .
   a. *Démontrer que la fonction f est impaire et dérivable en 0.*
   b. *Etudier les variations de f sur R et calculer sa limite en$+\infty$. Dresser son tableau de variations.*
   c. *Démontrer que pour tout réel x , x> -1 , on a : ln(1+x) $\leq x$. En déduire la position relative de (C) et de sa tangente à l'origine O. Tracer la courbe (C).*
3. *On note F la fonction définie sur R par : F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.*
   On ne cherchera pas à calculer l'intégrale.
   a. *Soit r un réel strictement positif. Montrer que F(r) et F(-r) sont les aires des parties isométriques du plan . En déduire la parité de F .*
   Déterminer les variations de F sur $[0;+\infty[$.
   b. *Démontrer que 0 $\leq F(1) \leq \frac{1}{2}$ en utilisant la position de (C) par rapport à sa tangente en O.*
   c. *Démontrer que pour tout réel strictement supérieur à 1.*
   $$\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(1+t^2)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$$
   d. *Soit un nombre réel x, $x \geq 1$. Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$.*

En déduire les limites de F(x) et de $\dfrac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EPREUVE DE MATHEMATIQUES PREMIER GROUPE. SERIE S1-3

ANNEE SCOLAIRE : 1999-2000

EXERCICE : 1

1) *Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :* $y'' + y = 0 \ (1)$.
   Etant donnée une fonction numérique de variable réelle, g, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Exprimer $f''(x)$ *en fonction de* $g''\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *et de x.*
2) *On considère l'équation différentielle :* $y'' = -\dfrac{1}{x^4}\, y\ (2)$
   a) *Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par* $\forall\, x \in \mathbb{R}^*\ f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ *est solution de (1).*
   b) *En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles* $]-\infty; 0[$ *et* $]0; +\infty[$.
3) *Soit g une solution de l'équation (2) définie sur* $]0; +\infty[$. *Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction :* $x \to \dfrac{1}{x^4}\, g(x)$

EXERCICE : 2

Soit u la fonction définie par $(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

4) *Prouver que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(x)$.*
5) *On pose pour tout réel x de* $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$ $f(x) = u(tanx)$.

d. *Montrer que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour* $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$.

e. *En déduire que f(x) = x pour tout x de* $\left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[$.

f. *Calculer* $I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

6) *Soit* (I_n) *la suite définie par* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$. *si* $n \neq 0$ *et* $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

c. Montrer que $I_{2p} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}$. Calculer alors I_2 , I_4 , I_6 .

d. Montrer que pour tout entier p : $0 \leq I_{2p} \leq \frac{1}{2p+1}$. En déduire la limite de I_{2p} lorsque p tend vers $+\infty$.

EXERCICE : 3

ABCDEFGH est le cube ci-dessous représenté. O est son centre, I est le milieu de [AB] , J le centre de gravité de la face DCGH.

1. a) Montrer que (ABG) est le plan médiateur des segments [ED] et [FC] .

   b) On note S_1 , S_2 et S_3 les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG) , (BCH) et (IOJ) .Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.

2. On considère l'application f telle que $f = S_1 \circ S_2$:

a) Prouver que f est une rotation d'axe (BH).

b) En orientant le plan (ACF) par $\overrightarrow{BH}$, déterminer la restriction de f à ce plan . En déduire l'angle de f.

3. Soit r le demi –tour d'axe (OI) et g l'application $r \circ f$.

a. En décrivant r comme la composée de deux réflexions judicieusement choisies déterminer la nature de g.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

PROBLEME : .

Le plan affine $\wp$ est muni d'un repère ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$; on note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls ; $\wp^*$ désigne le plan $\wp$ privé de 0.

Soit l'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$, on note F l'application de $\wp^*$ dans $\wp$ qui à tout point m de $\wp^*$ d'affixe z fait correspondre le point M d'affixe Z = f(z).

1) a) Déterminer l'ensemble des points invariants par F.
   b) Soit M(Z) un point de $\wp^*$ non invariant par F. Montrer que M est l'image par F de deux points m_1 et m_2 de $\wp^*$. Vérifier que M est milieu de $[m_1m_2]$.
   c)On note A (1+i), placer A et $\left(\frac{-1}{1+i}\right)$, en déduire la construction de l'image A' de A par F .

2) Dans cette question on cherche l'image de l'axe $(O;\vec{u})$ privé de O.
   Soit φ la fonction numérique définie par : $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

a) *Etudier les variations de φ .*
b) *En déduire l'image par F de l'ensemble des points de l'axe réel de $\wp^*$.*
3) *Recherche de l'image du cercle de centre O et de rayon 1.*
a) *Soit z un nombre complexe non nul distinct de i et de –i d'image Z par f, exprimer $\frac{Z+i}{Z-i}$ en fonction de $\frac{z+i}{z-i}$.*
En déduire une relation entre $\left(\overrightarrow{mU};\overrightarrow{mU'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{MU};\overrightarrow{MU'}\right)$ où U et U' sont respectivement U(i) et U' (-i).
b) *Soit (Γ) le cercle de diamètre [UU'].*
- *Montrer que l'image M de tout point m de (Γ) est un point de [UU'].*
- *Soit M un point de [UU'], vérifier que M est l'image de deux points de (Γ)*
Quelle est donc l'image par f de (Γ) .
4) *Recherche de l'image d'un cercle (Γ') de centre O et de rayon $r\neq 1$. Soit m un point de (Γ') d'affixe z.*
a) *Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction du module r et d'un argument θ de z.*
b) *En déduire que M est un point d'une conique E_r dont on donnera la nature.*
c) *Donner les éléments géométriques de E_2 et construire E_2.*
5) *Image de $D^* = D - \{0\}$ où D : y=x.*
a) *Ecrire une équation paramétrique de D^* . En déduire les coordonnées X et Y du point M image de lm par F.*
b) *Montrer que M appartient à une hyperbole dont on précisera une équation.*

Epreuve premier groupe 2001 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

Exercice 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on donne les points $C\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$, $D\left(+\frac{1}{2},0,0\right)$ et E (0 ,1 , 0) .

1) *a) Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $\left\|\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{ME}\right\|$.*
b) Déterminer l'intersection (Δ) de (Γ) avec le plan $(O;\vec{e}_2,\vec{e}_3)$;
2) *a) Montrer que les points de (Γ) sont à égale distance de E et de la droite (CD).*
c) *Montrer que l'intersection de (Γ) et du plan d'équation z = 0 est la parabole de foyer E et de directrice (CD).*

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un carré MNPQ de centre O.

Soit I un point de [NP] distinct de N.

On note J le point d'intersection de (MI) et (PQ). La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1) *Faire une figure avec NP= 5 cm ; NI= 2 cm (On placera (NP) $\ll verticalement \gg$ c'est-à-dire parallèlement au grand côté de la feuille)*
2) *Soit R le quart de tour direct de centre M.*
a) *Déterminer l'image de la droite (NP) par R.*
b) *Déterminer les images de K et I par R.*
c) *Quelle est la nature des triangles KMJ et IML ?*
3) *On note E le milieu du segment [IL], F celui de [JK] ; soit s la similitude directe de centre M d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.*
a) *Préciser les images de K et de I par s.*
b) *Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit [NP] privé de N.*
c) *Déduire de ce qui précède que les points O, N, E et Q sont alignés.*

<u>*Exercice 3*</u>

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{u};\vec{v})$ direct .

2. *On considère les points A(-1 ;0) et I(4 ;0) . Soit (E) ellipse de centre I dont A est un sommet et O un foyer.*
e. *Déterminer les autres sommets de (E).*
f. *Calculer l'excentricité de (E) et donner une équation de sa directrice associée au foyer O dans $(O;\vec{u};\vec{v})$.*
g. *Donner une équation de (E) dans $(O;\vec{u};\vec{v})$.*
h. *Tracer (E) , préciser les points d'intersection de (E) et de droite $(O;\vec{v})$*
2. *Soit dans **C** l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2(4 + 5cos\theta)z + (4cos\theta + 5)^2 = 0$ ou θ est un paramètre réel.*
c. *Résoudre cette équation pour $\theta \epsilon [0;\pi]$.*
d. *Lorsque $\theta \epsilon]0;\pi[$, on note z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution.*

Soit M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2 .Déterminer les coordonnées de M_1 en fonction de θ dan s $(O;\vec{u};\vec{v})$. En déduire l'ensemble des points M_1 , puis celui des points M_2 lorsque θ varie dans $]0;\pi[$.

<u>*Problème*</u>

*Le problème propose l'étude d'une famille de fonctions (partie **A.**) , d'une suite (partie **B.**) et d'une courbe définie (partie **C.**) définies à partir des fonctions .*

A .Etude d'une famille de fonctions.

On considère , pour tout n de $\mathbb{N}^*$ *, la fonction* f_n *, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *, définie sur l'intervalle* $]0,+\infty[$ *par :* $f_n(x) = \frac{lnx}{x^n}$.

1. *Déterminer les limites de* f_n *aux bornes de l'intervalle* $]0,+\infty[$*.Etudier les variations de* f_n .
2. *Construire la courbe* C_1 *représentative de la fonction* f_1 *dans un repère orthonormé. Préciser ses asymptotes.*
3. *Pour tout réel* x *supérieur ou égal à 1. On pose :* $I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt$

a. *Calculer* $I_1(x)$.

b. *En utilisant une intégration par parties , calculer* $I_n(x)$ *en fonction de n et de* x *, pour n supérieur ou égal à 2 . Déduire de ce résultat la valeur de l'intégral* $\int_2^x f_2(t)\,dt$

c. *Soit n un entier naturel non nul fixé. Calculer la limite de* $I_n(x)$ *quand* x *tend vers* $+\infty$ *.(On distinguera deux cas n=1 et n*≥ 2*). Calculer la limite quand* x *tend vers* $+\infty$ *de* $\int_2^x f_2(t)\,dt$.

B. Etude d'une suite définie à partir de $\boldsymbol{f_n}$.

On considère la fonction f_2 *définie en A. par :* $f_2(x) = \frac{lnx}{x^2}$.

1. *Montrer que pour tout entier naturel k , k*≥ 2*. :*

$f_2(k+1) \leq \int_k^{k+1} f_2(t)dt \leq f_2(k)$*.(On peut utiliser le sens de variation de* f_2*).*

2. *On considère la suite S définie par son terme général :*

$S_p = \frac{ln2}{2^2} + \frac{ln3}{3^2} + \cdots . + \frac{lnp}{p^2}$ *où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

a. *Montrer que la suite S est croissante .*

b. *En utilisant B.1, montrer que :* $S_p - \frac{ln2}{2^2} \leq \int_2^2 f_2(t)\,dt \leq S_p - \frac{lnp}{p^2}$ *et en déduire un encadrement de* S_p *.*

c. *En utilisant la valeur de* $\int_2^p f_2(t)\,dt$ *trouvée en A., montrer que la suite S est majorée.*

d. *Montrer que la suite S est convergente et que sa limite L vérifie :* $\frac{1}{2} + \frac{ln2}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} + \frac{3ln2}{4}$.

C. Etude d'une courbe définie para métriquement à partir de des fonctions de $\boldsymbol{f_n}$.

On considère la courbe Γ_1 *, définie para métriquement par :* $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$

Où test un réel appartenant à l'intervalle $[1;10]$.

a. *Représenter dans un même tableau les variations des deux fonctions qui à t associe respectivement $x(t)$ et $y(t)$.*
b. *Représenter la courbe Γ_1 dans un repère ortho normal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 20cm). Préciser les points de Γ_1 en lesquels les tangentes sont parallèles à l'un ou l'autre des axes de coordonnées.*

Epreuve premier groupe 2002 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

<u>Exercice : 1</u>

On pose $Q(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1+\cos\alpha)^2 z + i(1+\cos^2\alpha)$ *o ou z désigne nombre complexe, i l'unité imaginaire pure, α un nombre réel tel que* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Les trois racines de Q(z) sont désignées sont désignées par a, b et c respectivement. On veut déterminer les racines de Q(z) de deux façons différentes.

<u>1ere façon</u>

1. *Sans calculer a, b et c, calculer (a+b+c), (ab+ca+cb) et abc.*
2. *Sachant que la somme de deux de ses racines est égale a 2icosa ; Utiliser les résultats précédents pour résoudre l équation Q(z)=0.*

<u>2ieme façon</u>

3. *Montrer que Q(z) a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.*
4. *En déduire les autres racines de Q(z).*
5. *A étant la racine de Q(z) dont la partie réelle est positive, donner son module et son argument en fonction de a.*
6. *Le plan est rapporté a un repéré orthonormé* $(O;\vec{u};\vec{v})$ *; Soit f la similitude directe de centre ω d'affixe c, c étant la racine imaginaire pure de Q(z) et qui transforme le point B d'affixe b en A d'affixe a. Donner l'écriture complexe de Déduire de cette écriture que f est une rotation de centre ω*

<u>Exercice 2</u>

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B .Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotés de 1 à 4.Lorsqu'on jette un dé , on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face) .Pour le dé A , les quatre numérotés ont tous la même probabilité d'être cachés . Pour le dé B , la probabilité P_i de noter le numéro est proportionnel à i.

4. *Calculer les probabilités P_1 , P_2 , P_3 et P_4 pour les quatre faces du dé B.*
5. *On lance les deux dés .On note i le numéro caché du dé A et j le numéro caché dé B. On suppose les lancers indépendants .On note P(i , j) la probabilité de noter i pour le dé A et j pour le dé B.*

c. *Montrer que P(1,1)=P(2,1)=P(3,1)=P(4,1)=$\frac{1}{4}$*

d. *Déterminer les probabilités P(i , j) pour les nombres i et j compris entre 1 et 4.*

6. *On appelle Z la variable aléatoire définie par Z(i,j) est le plus grand des nombres i et j*

c. *Quelles sont les valeurs prises par Z ?*

d. *Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique E(Z).*

Exercice 3

Le plan (P) est rapporté orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1. *On considère la courbe (H) d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$.*
   Justifier que (H) est une conique dont on donnera un foyer, la directrice associée et l'excentricité. Construire (H).
2. *On étudie en fonction du temps t le mouvement du point $M(x, y)$, du plan tel que :*
   $$\begin{cases} x = \frac{1}{cos2t} \text{ où } t \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} tan2t \end{cases}$$

a) *Montrer que la trajectoire (Γ) de M est une partie de (H) que l'on précisera.*

b) *Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et en déduire la tangente à (Γ) au point d'abscisse 2.*

c) *Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse.*

Problème :

I. *Soit la fonction définie sur $R_+ - \{1\}$ par :*
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{lnx} \quad si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $R_+ - \{1\}$. Etudier la dérivabilité en 0*
2. *Etudier les variations de f.*
3. *Construire la courbe de (C) représentant la fonction f dans le plan muni d'un repère ortho normal . On fera figurer la demi- tangente en l'origine du repère .*

II. *Dans cette partie on étudie*
la fonction H définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer . On pose $H(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)dt$ pour tout x de $R_+ - \{1\}$.

1. a . Justifier l'existence de H(x) sur $R_+ - \{1\}$.
   b. Etudier le signe de H(x) sur $R_+^* - \{1\}$.
2. Déterminer H'(x) pour tout réel x de $R_+^* - \{1\}$.
3. Montrer qu'il existe un réel M tel que pour tout réel x de $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, on ait $|f(x)| \leq M$. En déduire la limite de H en 0 .
4. a. On donne $K(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{dt}{tlnt}$. Montrer que K est une fonction constante .
   b. Montrer que la fonction g telle que $g(x) = \frac{x-1}{xlnx}$ admet un prolongement φ par continuité en 1. Montrer que $lim_{x\to 1}\left(\int_{\sqrt{x}}^{x}\varphi(t)dt\right)$= 0 et en déduire la limite en 1 de la fonction (H – K) puis celle de H .
   c. Montrer que pour tout réel $x > 0$ et $x \neq 1$, on a : $\frac{x-\sqrt{x}}{lnx} \leq H(x) \leq \frac{2(x-\sqrt{(x)}}{lnx}$. En déduire la limite en $+\infty$ de H puis la limite en 0 et en $+\infty$ de l a fonction $\left[x \to \frac{H(x)}{x}\right]$. Interpréter graphiquement ces résultats ;
   d . Dresser le tableau de variation de H .

Epreuve premier groupe 2003 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

Exercice 1

Dans le plan orienté , (C) est le cercle trigonométrique .Atout point m de (C) on associe le point M symétrique du point A d'affixe 1 par rapport à la tangente en m au cercle (C) .ON cherche à construire l'ensemble Γ des points M lorsque m décrit (C).

5. Montrer que l'axe des abscisses est un axe de symétrie de Γ.
6. Pour un point m de (C) , soit t une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{Om})$. Montrer que les coordonnées $x(t)et\ y(t)$ de M sont telles que
   $\begin{cases} x(t) = 2cost - cos2t \\ y(t) = 2sint - sin2t \end{cases}$ (1)
7. On doit donc construire la courbe paramétrée Γ dont (1) est un système d équation paramétrique , le réel t parcourant R.

e. Etudier les variations de $x(t)et\ y(t)$, sur $[0;\pi]$.

f. Montrer que pour tout $t \neq 0(\pi)$, un vecteur directeur de la tangente en M à Γ est $\vec{u}(\cos\frac{3t}{2},\sin\frac{3t}{2})$.

g. Soit M un point de Γ de paramètre t ;a(t) le coefficient directeur de la droite (AM). Déterminer la limite a_0 de a(t) lorsque t tend vers 0.(On admettra que a_0 est la pente de la tangente en A à Γ)

h. Déterminer les points ou la tangente est parallèle à un des axes du repère.

8. Tracer la courbe Γ .

Exercice 2

Soit ABCD un losange de centre Ω.Le cercle (Γ) de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E ; et J celui des points O et Ω.

1.a) Démontrer que G est le barycentre de chacun des systèmes $\{(\Omega;4);(E;1)\}$ *et* $\{(J;4);(A;1)\}$.

b) Soit f l'application du plan dans lui-même associant a tout point M le point M' défini par

$4\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}$*.Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques. Quelles sont les images de E et de A par f ?*

2.) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta=(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD})$ *et s=rof*

a.) Démontrer que s est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.

b.) Construire H=s(G) et L=s(A).

c.) Démontrer que les centre I de la similitude s appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire le point I.

Exercice :3

Soit Δ une droite de l'espace, F un point n'appartenant pas à Δ , K le projeté orthogonal de F sur Δ et A un point de Δ tel que AK = 1.

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble (Γ) *des points M de l'espace tels que* $\|\overrightarrow{MF}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MK}\wedge\overrightarrow{MA}\|$.

1) *a) Montrer qu'un point de l'espace appartient à* (Γ) *si et seulement si* $\|\overrightarrow{MF}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MK}\wedge\overrightarrow{KA}\|$.

   b) En déduire que M appartient à (Γ) *si et seulement si* $\frac{MF}{d(M,\Delta)}=\frac{1}{2}$ *; où d(M,Δ) désigne la distance du point M à la droite Δ .*
2) *Déterminer l'ensemble des points du plan (P_1) de repère* $(K,\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KF})$ *tels que* $\|\overrightarrow{MF}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{MK}\wedge\overrightarrow{MA}\|$ ..
3) *Soit (P_2) le plan passant par K et perpendiculaire à Δ .*

a) *Montrer qu'un point M de* (Γ) *est un point de (P_2) si et seulement si :*

$$\begin{cases} \overrightarrow{MK}.\overrightarrow{KA}=0 \\ MF=\frac{1}{2}MK\left|sin(\overrightarrow{MK},\overrightarrow{KA})\right| \end{cases}$$

b) *En déduire que l'intersection de* (Γ) et *(P_2) est l'ensemble des points de (P_2) tels que MK = 2MF . Déterminer alors la nature de cette intersection .*

Problème : **9 pts**

A) *Soit* φ *la fonction numérique définie par :* $\begin{cases} \varphi(x) = exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que φ *est continue et dérivable sur R .*

b) Etablir que pour tout réel x , on a : $2\varphi(x) = x^3\varphi'(x)$ ***(1)***

2) Etudier les variations de φ *et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *(unité graphique 1cm) .*

On précisera les points d'inflexions éventuels .

B) *Soit f la fonction définie sur R par :* $\begin{cases} f(x) = \frac{\int_0^x \varphi(t)dt}{\varphi(x)} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Dans cette partie , on se propose d'étudier f et sa dérivée au voisinage de 0 .

1) *a) Etablir que f est impaire et dérivable sur* R^* *.*

b) Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $\int_0^x \varphi(t)dt \leq x\varphi(x)$.

c) En déduire que f est continue en 0 .

2) *Pour tout entier naturel n et tout réel x on pose* $J_n(x) = \int_0^x t^n\varphi(t)dt$ *pour n non nul et* $J_0(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ *. (On remarquera que* $f(x) = \frac{J_0(x)}{\varphi(x)}$ *)*

*En utilisant la relation **(1)** et en intégrant par parties , montrer que pour tout n de N :*

$2J_n(x) + (n+3)J_{n+2}(x) = x^{n+3}\varphi(x)$ ***(2) .***

a) En déduire que pour tout entier naturel n et tout x de R_+^* *on a :*

$$\begin{cases} J_n(x) \leq \frac{1}{2}x^{n+3}\varphi(x) \\ J_{n+2}(x) \leq \frac{1}{n+1}x^{n+3}\varphi(x) \end{cases}$$

b) En déduire $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ *puis que est dérivable à droite de 0 . Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer f'(0).*

3) *a) En utilisant la relation (2) , montrer que*

$J_0(x) = \frac{15}{4}J_4(x) + \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^5\right)\varphi(x)$.

b) En déduire que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$

c) Montrer que pour tout $x \neq 0$*,* $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}f(x)$ *.En déduire que f est continue en 0 .*

Epreuve premier groupe 2004 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

<u>Exercice 1</u>

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.

1. *Soit L , le centre du carré ABFE et J le milieu de [AL].Soit la similitude directe du plan (ABF) telle que f(A)=L et f(B)=J.*
a. *Déterminer l'angle et le rapport de f .*
b. *Construire E'=f(E).Montrer que f(F) est le milieu du segment [AB] .*
c. *Soit Ω le centre de la similitude f. Montrer que les points Ω , A , L et E d'une part et Ω , A , B et J d'autre part sont cocycliques . En déduire une construction de Ω .*
d. *Montrer que les droites (ΩA) et (ΩE) sont orthogonales .*
2. *On désigne par I le milieu du segment [FG] et toujours L le centre du carré ABFE.*
a. *Vérifier que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{IH} \wedge \overrightarrow{IB}$. En déduire l'aire du triangle IHB.*
b. *Calculer le volume du tétraèdre BCIH et en déduire la distance du point C au plan (BIH).*

Exercice 2

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 4 boules vertes. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 2 boules vertes .

Dans chaque urne les tirages sont équiprobables et les urnes ont la même probabilité d'être choisies .On choisit au hasard l'une des urnes et l'on extrait une boule que l'on remet dans aucune urne ; si la boule est verte , on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule est blanche , on recommence le tirage dans l'autre urne .

1. *Montrer que la probabilité de tirer deux boules blanches est* $\frac{2}{9}$.
2. *Soit X la variable aléatoire qui prend +1 si on obtient deux boules de la même couleur et -1 pour deux couleurs distinctes .*
Donner la loi de probabilité de X , son espérance mathématique E(X) et son écart – type $\sigma(X)$.
3. *On dit que l'on a obtenu un succès si les deux boules sont de même couleur .On répète l'expérience précédente 5 fois de suite . Y est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de ≪ succés ≫ parmi ces 5 épreuves .Quelle est la probabilité p d'avoir 4 succès exactement ?Donner une valeur approchée de p à 10^{-1} prés par excès . Calculer E(Y) et* $\sigma(Y)$.

Exercice 3

Pour tout entier n> 1 on pose : $u_n = 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

1) *Etablir que* $\left| u_n - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \right| \le \frac{2}{2n+3}$.

2) *Soit* $J = \int_0^1 \varphi(x)dx$ *avec* $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *On désigne par F la primitive de* φ *nulle en 0 et soit G la fonction numérique définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $G(v) = F(tanv)$.

a) *Montrer que G est dérivable et déterminer sa dérivée G'. Quelle est la valeur de G ?*

b) *En déduire la valeur de J puis montrer que la suite* u_n *est convergente et déterminer sa limite .*

<u>Problème :</u>

Le plan (P) est rapporté ortho normal $(O;\vec{u};\vec{v})$ *; le point de coordonnées (x ; y) est caractérisé par son affixe z = x+yi. Soit a un réel tel que* $|a| > 1$. *On désigne par A, B, I et J les points d'affixes respectives a , -a , 1 et -1 ; Soit* F_a *l'application de (P) privé de A dans (P) qui , au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe* $Z = \frac{az-1}{a-z}$ *;*

Le problème est consacré à l'étude de l'application F_a *et à la détermination d'ensemble d'images de configurations du plan par* F_a.

1) *a)Montrer que* F_a *admet deux points invariants que l'on déterminera.*
b) Montrer que F_a *est une bijection de (P) privé de A dans (P) privé de b et que la bijection réciproque notée* $F^{-1}{}_a$ *est telle que* $F^{-1}{}_a = F_{-a}$ *. Dans toute la suite du problème, on suppose qu'a > 1.*

2) *Soit M un point de (P) d'affixe z non réelle et M', son image par* F_a.

a) *Vérifier que (Z+a) (z- a) =* $1-a^2$.

b) *On considère le cercle passant par M et I et dont le centre est situé sur l'axe des ordonnées ; (on remarquera que ce cercle contient aussi le point J) . La droite (AM) coupe ce cercle en un point d'affixe z' (qui peut être confondu avec M). Montrer que* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}$.

c) *Vérifier que deux vecteurs* $\overrightarrow{U_1}$ *et* $\overrightarrow{U_2}$ *d'affixes respectives* z_1 *et* z_2 *sont colinéaires si et seulement si* $\overrightarrow{U_1}.\overrightarrow{U_2} = z_1.\overline{z_2}$ *. En déduire que (z-a)*$(\overline{z'} - a) = a^2 - 1$ *puis que M' est le symétrique de N par rapport à l'axe des ordonnées .*

3) *a)En utilisant les résultats de la question 2) , donner une construction géométrique de M'.*
b)Quelle est l'image par F_a *d'un cercle contenant les points I et J ? (on pourra remarquer que le centre d'un tel cercle appartient à l'axe des ordonnées)*

4) *On cherche l'image par* F_a *d'une droite passant par O .*

a) *Soit g la fonction définie pour out réel x distinct de a par :* $g(x) = \frac{ax-1}{a-x}$. *Etudier les variations de g (on rappelle que a >1) .En déduire :*
   - *L'ensemble image par* F_a *du segment [JI].*
   - *L'ensemble image par* F_a *de l'axe des abscisses privé de A .*

b) *On désigne par C le point de (P) d'affixe* $\frac{-1}{a}$ *. Pour z distinct de 0 et a , montrer que* $arg\left(\frac{Z+\frac{1}{a}}{Z+a}\right) = argz[2\pi]$.

c) *En déduire que l'image par F_a d'une droite passant par O et distincte de l'axe des abscisses est un cercle passant par B et C , privé de B . Préciser les cas particuliers de l'axe des ordonnées .*
5) *Soit r un réel strictement positif . On note (Γ_r) le cercle de centre O et de rayon r .*
a) *Montrer que si M est un point de (Γ_r)d'image M' par F_a , on a : $\frac{M'C}{M'B} = \frac{r}{a}$.*
b) *En déduire que pour r distinct de a , si M décrit (Γ_r) , M' décrit un cercle que l'on précisera .*
c) *Déterminer l'image du cercle (Γ_a) .*

Epreuve premier groupe 2005 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

Exercice 1

Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$: $h(x) = xlnx$, et (F) l'ensemble des fonctions numériques f , dérivable sur $]0;+\infty[$, et telles que pour tout t de $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$,

(1) $f(tx) = tf(x) + xf(t)$.
1) *Démontrer que pour tout réel k fixé la fonction kh appartient à (F) . O appartient à (F).On rappelle que ((kh)(x)=kh(x)) .*
2) *Démontrer que si f appartient à (F) , alors f(1)=0. (On remarquera que 1=1$\times$ 1)*
3) *Pour tout x de $]0;+\infty[$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.*
a) *Démontrer que si , f appartient à (F) , alors pour tout x de $]0;+\infty[$*
   $xf'(x) = f(x) + xf'(1)$.
   b) *on suppose que f appartient à (F) , déduire du a) une équation différentielle vérifiée par la fonction g .*
4) *Déterminer toutes les fonctions vérifiant la relation (1).*

Exercice 2

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC},)$ un repère orthonormé direct orienté ; M(x , y ,z) un point de l'espace , H son projeté sur le plan (ABC) et K son projeté sur la droite (AB).

1) *On désigne par G l'isobarycentre de A, B et C.*
a) *Montrer que la droite (OG) est orthogonale au plan (ABC).*
b) *Vérifier que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{OG}$; en déduire que $|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OG}| = \frac{1}{\sqrt{3}}MH$.*
c) *Calculer en fonction de x , y et z la distance MH du point M au plan (ABC) .*
2) *a) Exprimer MK en fonction de $\|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\|$*
   b)En déduire que MK=$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2z^2 + (1 - x - y)^2}$.
3) *On se place dans le plan (OAB) et on considère l'ensemble © des points de ce plan qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).*

a) *Montrer que (C) ne contient aucun point de la droite (AB) .*
b) *Soit M un point de (OAB) n'appartenant pas à (AB).Calculer la valeur du rapport* $\frac{MH}{MK}$.
c) *En déduire que (C) est une conique dont on donnera , un foyer , la directrice associée et l'excentricité .*

PROBLEME :

PARTIE A : *Soit k un réel strictement positif et f_k l'application numérique définie sur* $[0;+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f_k(x) = x^k(e^x - e^{-x}) \\ f_k(0) = 0 \end{cases}$ *si* $x \neq 0$

On désigne par C_k la courbe représentative de f_k dans le plan muni d'un repère ortho normal direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) *Etudier la dérivabilité de f_k en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.*
2) *Pour x>0 , calculer $f'_k(x)$ puis dresser le tableau de variation de f_k.*
3) *a)Etudier la nature e la branche infinie en* $+\infty$
b)Montrer que toutes les courbes C_k passent par deux points fixes dont on donnera les cordonnées.
c)Construire les courbes $C_{\frac{1}{2}}$ et C_2 dans le repère en précisant leur position relative et leur tangente à l'origine .

PARTIE : B

Pour tout $n \in N^*$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!}(e^x - e^{-x})\,dx$, $A_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{-x}\,dx$ *et* $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$;

Puis $I_0 = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx$ $A_0 = \int_0^1 e^{-x}\,dx$.

1) *Prouver que pour tout $n \in N^*$, $0 \leq A_n \leq \frac{1}{n!}$ en déduire* $\lim_{n\to+\infty} A_n$.
2) *a)A l'aide d'une intégration par parties , montrer que pour tout $n \in N^*$:*
$A_n = A_{n-1} - \frac{e^{-1}}{n!}$
b)Exprimer alors U_n en fonction de n puis démontrer que $\lim_{n\to+\infty} U_n = e$.
3) *a)Pour tout $n \in N^*$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par :*
$f_n(x) = e^x - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *et on pose* $f_0(x) = e^x - 1$
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in N$, la fonction f_n est positive et croissante .

b) *Soient* $I = \int_0^1 e^x(e^x - e^{-x})dx$ *et pour tout $n \in N$,* $S_n = I_0 + I_1 + \cdots I_n = \sum_{k=0}^{n} I_k$
Montrer que pour tout $n \in N$, $0 \leq 1 - S_n \leq (e^1 - e^{-1})(e^1 - U_n)$. En déduire que la suite (S_n) est convergente et calculer sa limite .

Epreuve premier groupe 2006 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

Exercice 1

1. *On considère l'équation différentielle :* $y'+y=\dfrac{e^{-x}\cos x}{2+\sin x}\,(E)$

F étant une fonction numérique dérivable sur R, on pose : $g(x)=e^{x}f(x)$

a. *Montrer que f est solution de (E) si et seulement si* $g'(x)=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$
b. *Déterminer la solution générale de (E) , en déduire la solution de (E) qui s'annule en 0.*
2. *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe Γ d'équations paramétriques :*

$$\begin{cases} x(t) = ln(2+sint) \\ y(t) = ln(2+cost) \end{cases} t\epsilon R$$

$a.\ Comparer\ \ M(t)et\ M(t+2\pi)\ ainsi$ *que M(t) et M(-t+$\frac{\pi}{2}$).*

$\mathbf{b}.$ *En déduire la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve Γ et montrer que pour construire Γ* $,il\ suffit$ *d'étudier x et y dans* $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}+\pi\right]$.

c.*Dresser le tableau de variation des fonction x et y dans* $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}+\pi\right]$. *Et tracer la courbe Γ*

Exercice 2

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.
1) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui à
chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas
remises dans l'urne. On note A, B, C et D les événements suivants :
A : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules. »
B : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »
C : « Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules. »

D :« Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules.»
a) Calculer p(D/A), p(D/B) et p(D/C).
b) En déduire la probabilité des événements D □□A, D □□B et D □□C.
Calculer p(D) [On remarquera que D = D □□(A □□B □□C)].

Exercice 3:

Dans le plan euclidien orienté, on considère un rectangle direct ABCD de centre O tel que AB = 3 a et BC = a $\sqrt{3}$; où a est un réel strictement positif donné.

1) *Déterminer la nature du triangle BCO .*
2) *Soit E le point du segment [BD] tel que BE =$\frac{3}{4}BD$. Donner une construction géométrique du centre □□de la similitude directe s telle que s (B) = O et s (E) = C*
3) *On suppose dans la suite que a = 1 et on pose $\vec{u} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{AD}\overrightarrow{AD}$ et on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.*
   a) *Déterminer les affixes des points B et de O .*
   b) *En déduire l'écriture complexe de l'application s .*
4) *Déterminer l'affixe du point □ et du point A'=s(A).*
5) *On considère la suite de points M_n d'affixe z_n définie par M_0=A et pour tout n M_{n+1}=s(M_n).*
   a) *Démontrer que la suite (α_n) définie par $\alpha_n = z_{n+1} - z_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme α_0 et la raison .*
   b) *Exprimer en fonction de n la longueur de la ligne polygonale $M_0M_1M_2 \dots M_{3n}$ et déterminer la limite de cette longueur quand n tend vers +∞.*

Problème :

Dans ce problème on calcule dans la partie A la valeur d'une intégrale et on étudie dans la partie B une suite numérique (I_n) et quelques unes de ses différentes propriétés.

<u>Partie A</u> : Calcul de $I = \int_0^{\ln\sqrt{2}} \sqrt{e^{2t} - 1}\, dt$.

Soit g et G les fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par : $g(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$ **et** $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$.

1) Pour tout x ∈ ∇ , on pose : $H(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

a) Montrer que la fonction H est dérivable sur ∇ et déterminer sa dérivée.

b) Calculer (H o tan) '(x) pour tout x ∈ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **. En déduire que (H o tan) (x) = x pour tout x ∈** $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ **. Calculer alors H(1) .**

2) Pour tout x ∈ [0 , + ∞ [, on pose : F (x) = g (x) – H o g (x),

a) Vérifier que F et G sont dérivables sur] 0 , + ∞ [et que pour tout x ∈] 0 , + ∞ [, F ' (x) = G ' (x).

b) En déduire que G (x) = F (x). Calculer alors I. [On remarquera que I = G ($\ln\sqrt{2}$ **)].**

<u>Partie B</u> : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{2x} - 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\ln\sqrt{2}} [f(x)]^{\frac{n}{2}}\, dx \quad \text{puis } I_0 = \ln\sqrt{2}$$

1) a) Vérifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = 2\,[1 + f(x)] \qquad (1).$$

b) Montrer en utilisant la relation (1) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+2} \qquad (2).$$

Vérifier que la relation (2) reste encore valable pour $n = 0$.

c) En remarquant que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $U_n = I_{n+4} - I_n$.

a) En remplaçant n par $n + 2$, dans la relation (2) , montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$U_n = \dfrac{1}{n+4} - \dfrac{1}{n+2}$. En déduire l'expression de U_{4n+1} en fonction de n .

b) Calculer $\sum\limits_{n=0}^{p} U_{4n+1}$ en fonction de I_{4p+5} et de I_1.

c) Calculer la limite lorsque p tend vers $+\infty$ de la somme

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{-1}{4p+3} + \frac{1}{4p+5} = \sum_{n=0}^{2p+2} \frac{(-1)^n}{2n+1} .$$

Epreuve premier groupe 2007 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

<u>EXERCICE 1</u> (3 ,5pts)

Soient α et β deux nombres complexes donnés . On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et pour tout complexe z : $f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$.

1. *Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^3) = 3$ (On pourra utiliser $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$)*
2. *a. En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.*

b. En utilisant a), montrer que l'un au moins des nombres réels $|f(1)|$; $|f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ;\vec{\imath} , \vec{\jmath})$ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixe. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b. Dans cette question on prend $\alpha = -\frac{a+b}{r}$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

a. Montrer que les affixes respectives de B et C sont rj et rj^2.

b. Montrer que BO.BI.BJ = $r^3|f(j)|$. Calculer de la même manière CO.CI.CJ et AO.AI.AJ

c. Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : SO.SI.SJ ≥ r3.

EXERCICE 2 : (04 points). *Le plan (P) étant orienté ; on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On note O l'intersection des bissectrices intérieures de ABC. Soit s_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude plane directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M du plan distinct de A et de B ; on associe le point N = s1(M) et le point P = $s_2^{-1}(M)$*

1. a. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})$

b. On désigne par s' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en M. Montrer que $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$; en déduire l'image de O par s'. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$.

c. Proposer une construction géométrique de N, lorsque le point M est donné.

2. a. Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? Préciser ses éléments géométriques caractéristiques.

b. Déterminer r(P) et en déduire une construction géométrique de P `a partir de N.

c. Lorsque M = O, montrer que le point N appartient `a la demi-droite [AC) et le point P à la demi-droite [CA) .

3. Faire une figure comportant les points A,B,C,O, P et N avec M = O.

<u>EXERCICE 3</u> : (3,5 points). *On considère dans le plan muni d'un repère ortho normal, les trois points A,B et C de coordonnées respectives (1, 0), (0, 1) et (1, 1) , puis à tout réel t $\in$ [0, 1] on associe le point M(t) barycentre du système*

((B, $(1-t)^2$), (A, $2t(1-t)$), (C, t^2)).

On note x(t) et y(t) les coordonnées de M(t) et (Γ) l'ensemble des points M(t) lorsque t d´écrit [0, 1].

1. a. Exprimer en fonction de t les coordonnées x(t) et y(t) de M(t).

b. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B,C et $M\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3. Trouver une relation entre x(t) et y(t) indépendante de t. On calculera y en fonction de x et on posera y = f(x). La fonction f est-elle dérivable à gauche au point 1 ?

PROBLEME : (9 points)

PARTIE A :

Soit f une fonction définie sur [1;+∞[, ayant une dérivée continue et croissante. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ *on pose :* $u_p = \sum_{n=1}^{p} f'(n)$

1. *Démontrer la relation suivante :*

$$(0.1)\ \forall n \in \mathbb{N}^* :\ f'(n) \le f(n+1) - f(n) \le f'(n+1)$$

a. *En appliquant le théorème des accroissements finis à f dans un intervalle bien choisi.*

b. *En utilisant la valeur moyenne de f′ sur [n; n + 1]. [On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue g sur un intervalle [a; b] est :* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ *]*

2. *En utilisant la relation (0.1), de la question 1. Démontrer que*

$$(0.2)\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ u_p - f'(p) \le f(p) - f(1) \le u_p - f'(1)$$

3. Dans cette question on prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a. Vérifier que la suite (u_p) *est monotone.*

b. En utilisant la relation (0.2), de la question 2. montrer que la suite (up) est bornée.

c. En déduire que la suite (v_p) *de terme général* $v_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3}$ *est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle* $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$.

4. Dans cette question on prend f(x) = −ln x.

a. En utilisant la relation (0.2), montrer que $u_p \le -\frac{1}{p} - \ln p$

b. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3} = +\infty$.

PARTIE B :

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|dt$

a. En effectuant le changement de variable u=t-nπ et en remarquant que la fonction $u \to |\sin u|$ *est périodique de période π*

b. En utilisant le résultat admis suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [n\pi, (n+1)\pi],\ |\sin t| = (-1)^n \sin t.$$

2. Pour tout réel a > 0, on considère la fonction h_a *définie sur I = [0;+∞[par :*

$h_a(t) = \left|\frac{\sin at}{t}\right|$ *si* $t \in]0;+\infty[$, *et ha(0) = a.*

a. Montrer que les fonctions h_a *sont continues sur I.*

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \frac{1}{n+1}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|dt \le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t)dt \le \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|dt$$

$Et\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|dt \leq \int_0^{\pi} h_1(t)dt$

c. En déduire que :

$(0.3)\ \forall n \in N^*:\ \frac{2}{(n+1)\pi} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_1(t)dt \leq \frac{2}{n\pi}\ \ et\ \ \frac{2}{\pi} \leq \int_0^{\pi} h_1(t)dt$

3. On veut utiliser les résultats précédents pour calculer $\lim_{a\to+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} h_a(t)dt$

a. En utilisant la relation (0.3) comparer $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$ et $\int_0^{p\pi} h_1(t)dt$

b. Déduire de la question 4)b) partie A $\lim_{p\to+\infty}\int_0^{p\pi} h_1(t)dt$

c. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x} h_1(t)dt$ [On pourra introduire l'entier $p = E\left(\frac{x}{\pi}\right)$; où E désigne la fonction partie entière]

4. Montrer que $\forall\ a \in \mathbb{R}_+^*\ \int_0^{\pi} h_a(t)dt = \int_0^{a\pi} h_1(t)dt$. En déduire $\lim_{a\to+\infty}\int_0^{\pi} h_a(t)dt$.

Epreuve premier groupe 2008 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

<u>EXERCICE 1</u> Une variable aléatoire prend les valeurs -1 , 1 et 2 avec les probabilités respectives e^a , e^b et e^c où a , b et c sont en progression arithmétique .

On suppose que l'espérance mathématique de X est égale à 1 .

1. Calculer a , b et c et la variance V(X) de X .
2. Soient A , B et C trois points d'affixes respectives -1 , 1 et 2 sur une droite graduée (Δ).

a. Calculer l'abscisse du point G barycentre du système $\{(A,1);(B,2);(C,4)\}$.

b. On pose $\varphi(M) = \frac{1}{7}(MA^2 + 2MB^2 + 4MC^2)$, où M est un point de Δ.Montrer que $\varphi(G) = V(X)$.

c. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de Δ tels que $\varphi(M) = 3$.

<u>EXERCICE 2</u> Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x + 1}{x}$.

En utilisant , la fonction f , on se propose de déterminer la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$.

1. Soit k un entier naturel non nul : Etablir les égalités suivantes

a. $\dfrac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx \leq \dfrac{1}{k}$

b. $\int_k^{k+1} \dfrac{1}{x}\,dx = \dfrac{1}{k} - f(k)$

2. *a. Déterminer deux réels a , b et c tels que* $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$.

   b. Soit $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \dfrac{1}{2n(n+1)} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$. *Calculer U_n en fonction de n et déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

   c. Déduire des résultats de la question (1) que $0 \leq \sum_{k=n}^{2n} U_k \leq U_n$.

   d. Montrer que $f(k) = S_n - \ln\dfrac{2n+1}{n}$. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

EXERCICE :3 (4pts) *Le plan est orienté, PQR est un triangle équilatéral de sens direct du plan. I et J sont les milieux respectifs de [QR] et [RP].* Q_1 *est le symétrique de Q par rapport à J.*

1.) *Soit t la translation transformant J en Q et r la rotation de centre P transformant Q en R. On pose f=tor.*

a.) *Faire une figure. Définir et construire les points P' et Q' images respectives par f des points P et Q.*

b.) *Déterminer la nature du triangle JIR et préciser l'image par f du point R.*

c.) *Donner la nature et ses éléments caractéristiques.*
En déduire la nature du triangle IPP'.

2.) *Soit s la similitude directe telle que s(J)=P et s(R)=I.*

a.) *Déterminer l'angle et le rapport de s. Montrer que s(I)=P'.*

b.) *Soit **Ω** le centre de s .Montrer que les points **Ω**, I, R et P d'une part et les points **Ω**, P, J et* Q_1 *sont cocycliques. En déduire la position de **Ω** puis construire ce point.*

PROBLEME : (8 points)

1. *Soit l'équation différentielle :*

   (E_m) : $my'' + 2y' + 2y = 0$ *; où m est un réel .*

a. *Déterminer suivant les valeurs de m , l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur R solutions de l'équation (E_m) .*

b. *Déterminer la solution (E_1) dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées (0,1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation* $y = -x$.

2. *Soit f(t) la fonction définie sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *par* $f(t) = e^{-t}cost$ *. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'unités (2cm sur l'axe des abscisses et 10cm sur l'axe des ordonnées) .*
3. *Soit g le prolongement à R de f .*
a. *Comparer* $g(t)$ et $g(t + 2\pi)$ *. Donner alors le sens de variation de g .*
b. *On pose* $u(t) = e^{-t}$ *et* $v(t) = -e^{-t}$*. On note* (C_u) *et* (C_v) *leurs courbes représentatives respectives et (G) celle de g dans le même repère . Quels sont les points communs à (G) et* (C_u) *d'une part et à (G) et* (C_v) *d'autre part ?*
c. *Montrer qu'en chacun de ses points les deux courbes ont même tangente .*
d. *Démontrer que g admet une limite en* $+\infty$ *. On fait remarquer que* $-1 \leq cost \leq 1$ *.*
4. *Pour tout réel k on pose :* $a_k = \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} g(t)dt.$
a. *Calculer* a_k *(on pourra faire deux fois une intégration par parties).*
b. *Pour tout entier n , on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ *.*

   Monter que la suite (S_n) *admet une limite .*

   Interpréter géométriquement ce résultat .
5. *Dans cette question , le plan est muni d'un repère orthonormé . On considère la courbe* (Λ) *définie par le système d'équations .*

   $\begin{cases} x(t) = e^{-t}cost \\ y(t) = e^{-t}sint \end{cases}$ *; pour* $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ *.*
a. *Etudier les variations de* x et y *et dresser le tableau de variations conjointes.*
b. *Soit* M_t *le point de* (Λ) *de paramètre t et* $\overrightarrow{V_t}$ *le vecteur dérivé lui correspondant .*

   Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM_t}$ *et monter que l'angle* $(\overrightarrow{OM_t}; \overrightarrow{V_t})$ *est constant .*
c. *Représenter graphiquement* (Λ)*. On précisera les tangentes aux points de paramètre* $-\frac{\pi}{2}$ *et 0 .*

Epreuve premier groupe 2009 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

EXERCICE 1 Pendant l'année scolaire , la cantine d'un lycée propose souvent du riz.

Le premier jour de l'année , il y'a 2 chances sur 5 qu'elle propose du riz.

Si elle en propose un jour , il y'a une chance sur 3 qu'elle en propose le lendemain.

Si elle n'en propose pas un jour , il y'a une chance sur 3 qu'elle n'en propose pas le lendemain.

On appelle J_n l'évènement « la cantine propose du riz au n^{ieme} jour » et K_n l'évènement « la cantine n'en propose pas le n^{ieme} jour » .

Soit p_n la probabilité de l'évènement J_n.

4. Déterminer $p(J_2/J_1)$ et $p(J_2/K_1)$. En déduire p_2 .
5. Montrer que $p_n = -\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{3}$.
6. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{1}{2}$

d. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
e. Calculer u_n puis p_n en fonction de n.
f. Un élève de l'établissement , fin mathématicien ne mange à la cantine que les jours pairs .

Montrer que à chaque fois qu'il se rend à la cantine la probabilité qu'il a de manger du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{8}{15}$.

EXERCICE 2 Dans le système de numération de base a on considère les nombres

$A = \overline{211}$, $B = \overline{312}$ et $C = \overline{133032}$.

1. Expliquer pourquoi a doit être strictement supérieur à 3 .
2. a) Sachant que C = A×B , montrer que $a^3-3a^2-2a-8=0$.
b) En déduire que a divise 8 .
c) Déterminer alors a .
3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214 ,écrire ce nombre dans la base 4.
4. Dans cette question on suppose a=4 .
a) Ecrire A , B et C dans le système décimal.
b) Montrer alors que C = A×B=PPCM(A,B).
En déduire que l'équation : Ax+By=1 a des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
5. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 37x+54y=1.
a) Vérifier que (19, -13) est une solution de cette équation .
b) Résoudre cette équation .

PROBLEME (12 points)

Le problème est composé de trois parties A , B et C .

Les parties B et C peuvent être indépendamment de la partie A .

Le plan euclidien (P) est mini d'un repère orthonormé $\Re = (O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

On appelle f_a *la fonction numérique de la variable réelle définie par :*

$$f_a(x) = \frac{x}{ax-a+1}, \text{ où a est un ré el différent de 0 et 1.}$$

On note la courbe représentative de f_a *dans le repère* $\Re$.

Partie : A

1. a. Montrer que l'application φ de (P) dans (P) définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = -x+1 \\ y' = -y+1 \end{cases}$ est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation que l'on précisera .
   b. Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a et montrer que la courbe C_a est globalement invariante par φ .
2. a. Montrer que toutes les courbes C_a passent par deux points fixes indépendants de a b. Déterminer tous les points fixes de f_a c'est-à-dire ceux qui vérifient $f_a(l) = l$.
3. a. Etudier les variations de f_a , on discutera suivant le valeurs de a .
   b. Construire dans le même repère $\Re$ les courbes C_{-2} et $C_{0,5}$.
   (On prendra pour unité graphique 1 cm).
   c. Construire dans le même repère $\Re$ d'unité 2 cm , les courbes $C_{1,5}$ et C_2 .

4. Soit F(a) la fonction définie sur $]-\infty;1[$ par :

$$F(a) = \int_0^1 f_a(x)dx \text{ et } F(0) = \int_0^1 xdx .$$

a. Montrer que pour tout réel $a < 1$ et $a \neq 0$, la fonction $x :\to ax - a + 1$ est strictement positive dans $[0;1]$. Etablir alors que la fonction f_a est définie dans $]-\infty;1[$.
b. En faisant le changement de variable $t = ax - a + 1$, vérifier que pour tout réel a différent de 0 et strictement inférieur à 1 on a :
$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a^2} ln(1-a) . \text{ Déterminer alors } \lim_{a\to 1^-} F(a) \text{ et } \lim_{a\to -\infty} F(a).$$
c. Démontrer que pour tout réel a différent de 0 et strictement inférieur à 1 , on a :
$$\forall\, x \in [0;1]\ f_a(x) \in [0;1] .$$
d. En utilisant le résultat de la question c) , montrer que pour tout réel a différent de 0 et strictement inférieur à 1 , on a : $\forall\, x \in [0;1]$, $|f_a(x) - x| \leq |a|$. Calculer $\lim_{a\to 0}|F(a) - F(0)|$ puis $\lim_{a\to 0} F(a)$; La fonction F est-elle continue au point 0 ?

Partie : B

1. On note Ω_a le point de coordonnées $(1, -\frac{1}{a}, \frac{1}{a})$ et on considère les vecteurs

$\overrightarrow{e_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ *et* $\overrightarrow{e_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

a. *Montrer que* $\Re_a = (\Omega_a, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *est un repère orthonormé du plan .*
b. *Soit M un point du plan de coordonnées* (x, y) *dans le repère* $\Re$ *. Appelons* (X, Y) *son couple de coordonnées dans* $\Re_a$ *. En utilisant la relation vectorielle* $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega_a} + \overrightarrow{\Omega_a M}$ *, montrer que :* $\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y) \\ y = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-X+Y) \end{cases}$
c. *Vérifier que la courbe* (C_a) *a pour équation* $Y^2 - X^2 = \frac{2a(a-1)}{a^2}$ *dans le repère* $\Re_a$.
d. *Déterminer la nature de* (C_a) *. Préciser ses sommets* S_a *et* S'_a *suivant les valeurs de a .*

2. *Soit D la droite d'équation* $y = -x + 1$ *dans le repère* $\Re$ *. Montrer que* (C_a) *a ses sommets sur D si et seulement si* $a < 1$.
3. *On suppose que* $a > 1$

a. *Calculer en fonction de a les distances* $\Omega_a S_a$ *et* $\Omega_2 \Omega_a$.
   Pour calculer $\Omega_a S_a$ *on peut se placer dans le repère* $\Re_a$.
   Pour calculer $\Omega_2 \Omega_a$ *on peut se placer dans le repère* $\Re$.
b. *En appliquant le théorème de Pythagore au triangle* $\Omega_2 \Omega_a S_a$ *, calculer* $S_a \Omega_2$.
c. *En déduire que les sommets de* (C_a) *sont sur un cercle de centre* Ω_2 *dont on précisera le rayon .*

Partie : C

Dans cette partie , a est un élément de l'intervalle $]0;1[$ *. Soit* u_0 *un élément de* $[0,1]$ *et* (u_n) *, la suite définie par son premier terme* u_0 *et par la relation de récurrence* $u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. *a) Montrer que la suite* (u_n) *est strictement croissante dans* $[0,1]$*. Quelle est l'image de l'intervalle* $[0,1]$ *par* f_a *?*
   b) Montrer que la suite (u_n) *est partout définie et* $\forall\, n \in N, u_n \in [0,1]$*. Que peut-on dire de la suite* u_n *si* $u_0 = 0$? , $u_0 = 1$
2. *On suppose que* u_0 *est différent de 0 et 1 .*
   a)Vérifier que la suite (u_n) *est strictement monotone .*
   b)En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Epreuve premier groupe 2010 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

<u>EXERCICE 1</u>

Dans le plan orienté , on considère deux points A et B distincts . Sur la figure , on prendra 8 cm comme unité de longueur du segment [AB] .

5. Etudier et représenter l'ensemble des points $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 4$.
6. Etudier et représenter l'ensemble des points $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ du plan tels que :$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
7. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{4}$. On désigne par s la similitude transformant A en B et C en D .

a. Déterminer le rapport et l'angle de s .

b. On note I le centre de la similitude . Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB})$. En déduire la position du point I et le placer sur la figure .

c. Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD .

<u>EXERCICE 2</u>

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

≪ si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p alors $a^{p-1} = 1[p]$ ≫

1. a)Démontrer que 193 est un nombre premier .
   b)Soit a un entier naturel inférieur à 193 , montrer que $a^{192} = 1[193]$.
2. On considère (E) : $83x - 192y = 1$, où x et y sont des entiers relatifs .

a. Montrer que le couple (155,67) est solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

3. On note A , l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs où égal à 192 et on considère les deux fonctions suivantes définies de la manière suivante :
   à tout réel a de A , f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193
   à tout réel a de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193

a. Démontrer que g((fa))= $a^{155\times 83}[193]$. En déduire que pour tout a de A g ((fa))=a

b. Déterminer $f \circ g = a$.

<u>PROBLEME :</u>

<u>PARTIE : A</u>

Soit a un réel non nul , u et v deux fonctions dérivables sur R et telles que :

$$(0.1)\quad \begin{cases} u' = v \\ v' = au \end{cases}$$

1. a) Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle :

$$(0.2)\quad y'' - ay = 0$$

   b)Résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de a .
2. On suppose que a = 1 , déterminer u et v sachant que u(0)= 3 et v(0) =0 .

Partie : B

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O\ ,\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath}\ )$ (unité graphique 2cm) .

Soit (Γ) *l'ensemble des points M du plan (P) dont les coordonnées* (x, y) *vérifient :*

(0.3) $$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{2}(e^t + e^{-t}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad si\ t > 0 \\ y(t) = \frac{3}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases}$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (Γ) *les droites d'équation* $y = 0$, $x = 3$ *et* $x = 5$.

1. *a)Démontrer que* (Γ) *est une partie de la conique dont une équation est :*

(0.4) $x^2 - y^2 - 9 = 0$.

b) Préciser la nature de cette conique et ses éléments géométriques caractéristiques Construire (Γ)

2. . *Soit* $f : R \to R$, $x \to x - \sqrt{x^2 - 9}$ *et* $g : R^* \to R$, $x \to \frac{x}{2} + \frac{9}{2x}$

a. *Etudier les variations de f .*

b. *Montrer que , la restriction de f à l'intervalle I =* $[3; +\infty[$ *est une bijection de I sur un intervalle J à préciser . On note* φ *cette restriction .*

c. *Démontrer que , pour tout x élément de J on a :* $\varphi^{-1}(x) = g(x)$.

d. *Tracer* (C_φ) *, courbe représentative de* φ *dans un repère orthonormé* $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*. Expliquer , comment obtenir* $(C_{\varphi^{-1}})$*, courbe représentative de* φ^{-1} *dans ce repère à partir de* (C_φ)*. Tracer* $(C_{\varphi^{-1}})$.

3. *Soit* β *un élément de* $]0; 3[$ *et* $\alpha = g(\beta)$.

a) *Calculer* $\int_\beta^3 g(x)dx$ *, en déduire que* $\int_3^\beta f(x)dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}$.
[indication : on pourra considérer ces deux intégrales comme des aires] .

b) *En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe* (Γ) *les droites d'équation* $y = 0$, $x = 3$ *et* $x = 5$.

PARTIE : C

On considère la suite (u_n) *telle que :*

(0.5) $$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \qquad\qquad si\ n \in N \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n).

1. *a) Etudier les variations de g puis montrer que*
$\forall\, n \in N, u_n > 3$ *et* $\forall\, n \in N^*\ \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0$.
b) Déterminer le signe $u_1 - u_0$ *puis montrer que la suite* (u_n) *est monotone .*
c) En déduire que la suite (u_n) *est convergente et déterminer sa limite .*

2. *a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction dans un intervalle approprié , montrer que :*

$\forall\, n \in N \ \frac{g(u_n)-3}{u_n-3} < \frac{1}{2}$.

En déduire que $\forall\, n \in N^*\ u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}$

Montrer que la suite (u_n) *est convergente et déterminer sa limite .*

c) *Déterminer une valeur approchée de n pour laquelle* $u_n - 3 < 10^{-3}$

3. *Pour tout entier* $n \in N$ *, on pose* $v_n = \frac{u_n-3}{u_n+3}$.

a) *Montrer que* lnv_n *est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison .*

b) *Exprimer alors* u_n *en fonction de n et trouver alors la limite de la suite(* u_n) .

Epreuve premier groupe 2011 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

EXERCICE 1

On considère la suite (un) d'entiers naturels définie par : $u_0 = 27$ $\forall n \in N$,
$u_{n+1} = 3u_n - 4$
1. Calculer u_1, u_2, u_3 *et* u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n\ [8]$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $u_{2n} \equiv 3\ [8]$ *et* $u_{2n+1} \equiv 5\ [8]$.
3. Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = u_n - 2$.
Montrer que la suite (v_n) *est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.*
En déduire que pour tout entier naturel n, $2u_n = 50 \times 3^n + 4$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 54\ [100]$.
Déterminer les deux derniers chiffres de l'´ecriture décimale de un suivant les valeurs de n.
5. Montrer que deux termes consécutifs de la suite (u_n) *sont premiers entre eux.*

EXERCICE 2.

L'espace oriente E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$

Soit f l'application de E dans E qui `a tout point M de coordonnées (x, y, z) associe le point M' de coordonnées (x', y', z') tel que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = z+1 \\ z' = x-1 \end{cases}$

1. a) Montrer que f est une isométrie. (C'est `a dire que f conserve la distance.)
b) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est la droite (Δ) passant par le point A de coordonnées (0, 0, −1) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.
2. Soit P le plan perpendiculaire à (Δ) en A.
a) Montrer que le point I de coordonnées (−1, 0, 0) appartient à P.
b) Prouver que I'= f(I) appartient à P.
3. Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques.
4. Déterminer l'ensemble des points M de E d'images M''tels que le milieu J de [MM'] appartient :
a) au plan Q d'´equation cartésienne : 2x + y − z = 0 ;
b) à la droite (D) dont un système d'´equations cartésiennes est : x = y = z.

PROBLEME

Partie A

Soit f une fonction numérique d´finie sur l'intervalle I = [−1, 1] et admettant sur I une Dérivée troisième f ''' continue. Soit a un point de I, a ≠ 0.
1. a) Dire pourquoi f ''' est bornée (c'est `a dire il existe deux réels m et M tels que pour tout
x ∈ I, m ≤ f '''(x) ≤ M ou il existe un réel K > 0 tel que pour tout x ∈ I, |f '''(x)| ≤ K.)
En déduire $\lim\limits_{a\to 0} \frac{1}{a^2}\int_0^a (a-x)^2 f'''(x)dx$
b) Soit g une fonction numérique définie sur I et admettant sur I une dérivée troisième g ''' continue.
Quelle est la dérivée de f''g' − f'g'' ?
En déduire que : (0.1) $\int_0^a f'(x)g'''(x) = \left[(f'g''-g'f'')(x)\right] + \int_0^a f'''g'(x)dx$
2. On prend $g(x) = \frac{1}{6}(a-x)^3$
a) Après avoir calculé g '(x), g ''(x) et g '''(x) pour x ∈ I, montrer en utilisant la relation
(0.1) *que* $f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{a}{2}f''(0) + \int_0^a (a-x)^2 f'''(x)dx$
b) Application
En choisissant pour f la fonction x→ e^x*, calculer* $\lim\limits_{a\to 0}\frac{e^a - a - 1}{a^2}$

3. Dans le plan P muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$ *;*$\vec{\jmath}$*) on considère la courbe Γ de Système d'´equations paramétriques :* $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{e^t - 1} \\ y(t) = \frac{t}{e^t-1}e^t \end{cases}$ *si t > 0 et x(0)=y(0) = 1*

a) Montrer que les fonctions x et y sont continues au point 0.
b) Vérifier qu'elles sont dérivables en 0. Quelle est la tangente T_B *à Γ au point B de coordonnées (1, 1) ?*

Partie B

Pour tout entier naturel non nul n on considère la fonction numérique f_n définie sur [0 +∞ [

par : $f_n(x) = e^{\sqrt{x}} - (1+\frac{1}{n})\sqrt{x}$ *. C_n est sa courbe représentative dans le plan P muni d'un repère orthonormé* $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ *(unité graphique 2 cm).*

1. a) Justifier la dérivabilité de f_n sur]0, +∞ [et calculer $f'_n(x)$ pour x > 0.

La fonction f_n est-elle dérivable au point 0 ? (On pourra utiliser 2.b de la partie A)

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ *puis* $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ *et dresser le tableau de variations de f_n.*

c) Construire dans le repère, la courbe C_1, sa demi-tangente au point d'abscisse 0 et sa tangente au point d'abscisse ln [(e+1)] ^{2}

2. a) Montrer que l'´equation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions α_n *et* β_n *telles que*

$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$

b) Soit b un réel positif ou nul. Montrer que $\int_0^b \sqrt{x}dx = 2 + 2(\sqrt{b} - 1)e^{\sqrt{b}}$. *Pour cela, on pourra utiliser la formule d'intégration par parties : en prenant u(x) = √x .*

c) Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^{\alpha_n} f_n(x)dx$

Vérifier que $I_n = 2 + 2\left(e + \frac{1}{n}\right)\sqrt{\alpha_n}\left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3}\alpha_n - 1\right)$

3. Pour tout $x \in R_{+}^{*}$, *on pose :* $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$

a) Démontrer que les restrictions h_1 et h_2 de h respectivement à chacun des intervalles V_1 =] 0, 1] et V_2 = [1, +∞ [sont des bijections de V_1 et V_2 respectivement sur des intervalles à déterminer.

On pose $h = h_2^{-1} \circ h_1$ *et on désigne par C_h. la courbe de h dans le repère.*

On ne cherchera pas l'expression de h(x) en fonction x.

b) Verifier que pour tout entier n ≥ 1, $e + \frac{1}{n} = h_1(\sqrt{\alpha_n})$ *; en déduire que la suite* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *est convergente et calculer sa limite. En déduire* $\lim_{n\to+\infty} I_n$

c) Déterminer de même la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geq 1}$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n le point du plan de coordonnées $(\sqrt{\alpha_n}; \sqrt{\beta_n})$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le point M_n appartient à C_h.

(C'est à dire $h(\sqrt{\alpha_n}) = \sqrt{\beta_n}$

b) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

Montrer que la fonction h est décroissante.

c) Démontrer que h est dérivable dans] 0, 1[.

En remarquant que :

(0.2) *φ(x) = φ(h(x)), pour tout x appartenant à V_1, établir que ∀x ∈] 0, 1[,*

$h'(x) = \frac{x-1}{x} \times \frac{h(x)-1}{h(x)}$

5. a) Soit M(x, y) un point de C_h. On pose $t = ln\left(\frac{y}{x}\right)$

En utilisant la relation (0.2), montrer que : $\begin{cases} \frac{y}{x} = e^t \\ y - x = t \end{cases}$

En déduire que M est le point de Γ de paramètre t

b) Réciproquement, vérifier que tout point de Γ appartient `a C_h.

c) Donner une équation de T_A, tangente à C_h. au point A d'abscisse 0, 4

(On prendra 2 comme valeur approchée de h (0, 4)).
Représenter la courbe C_h ainsi que les tangentes T_A et T_B

Epreuve premier groupe 2012 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

EXERCICE 1 *Dans le plan affine euclidien on donne une droite (D) et deux points distincts F et A, symétriques par rapport à (D).*

On désigne par $(\mathcal{H})$ l'hyperbole d'excentricité 2 qui admet F pour foyer et (D) pour directrice associée à F.

1. *Montrer que A est un sommet de $(\mathcal{H})$ .Déterminer l'autre sommet A' en exprimant $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$.*
   Construire géométriquement les directrices de $(\mathcal{H})$, ses foyers, ses sommets, son centre et donner l'allure de $(\mathcal{H})$.
2. *Soit (C) un cercle passant par F et centré en un point Ode (D) non situé sur l'axe focal. Construire (C) sur la figure.*
   On se propose de montrer que $(\mathcal{H}) \cap (C) = \{A, M_1, M_2, M_3\}$ où $M_1, M_2 et\ M_3$ sont les sommets d'un triangle équilatéral.
   On se rapporte le plan à un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, choisi de façon que $(O;\vec{\imath})$ soit un repère de (D).
   A chaque point M du plan correspond ainsi son affixe $z = x + iy$;on désigne par a l'affixe de F.

a. *Montrer que M(z) appartient à (C) si et seulement si : $z\bar{z} - a\bar{a} = 0$*
(On pourra interpréter géométriquement $z\bar{z} - a\bar{a}$)

Montrer de même que M(z) appartient à $(\mathcal{H})$ si et seulement si :

$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) + (z - \bar{z})^2 = 0.$

b. *En déduire que $(\mathcal{H}) \cap (C)$ est l'ensemble des points du plan dont les affixes z vérifient une équation de la forme : $(z - \bar{a})(z^3 - k) = 0$,où k est un nombre complexe qu'on exprimera en fonction de a.*

c. *Montrer que $k = r^3 e^{i\theta}$ où r est le module de a et θ un argument de a. Résoudre alors l'équation $(z - \bar{a})(z^3 - k) = 0$ et conclure par rapport au problème posé.*

EXERCICE : 2 *On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :*
$u_n = 2^n + 3 \times 7^n + 14^n - 1$

1) *a)Calculeru_3.*
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
   c)On note $(\mathcal{E})$ l'ensemble des nombres premiers qui divisent la suite (u_n)
   Les entiers 2, 3,5 et 7 appartiennent –t-ils à l'ensemble$(\mathcal{E})$.
2) *On rappelle le petit théorème de Fermat :*

$\ll$ *Si p est un nombre premier et q un entier naturel premier avec p , alors* $q^{p-1} \equiv 1[p]. \gg$

Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.

Soient m et n deux entiers naturels tels que 14=m n.

a) *Quelles sont les valeurs possibles de m ?*
b) *Montrer que* $14\times m^{p-2} \equiv n(modulo\ p)$.
c) *En déduire que* $14u_{p-2} \equiv 0(modulo\ p)$.
d) *L'entier p appartient-il à l'ensemble* $(\mathcal{E})$?
e) *Déterminer* $(\mathcal{E})$.

PROBLEME : *On considère la fonction f définie par :* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}, si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

C désigne la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

PARTIE : A

1. *Etudier la continuité de f.*
2. *a) démontrer que pour tout réel* x *non nul de l'intervalle* $]-1;+\infty[$ *on a :*

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^x \frac{u^2}{1+u}du \leq x\int_0^x \frac{1}{1+u}du\ .$$

(On pourra montrer ce résultat pour x appartenant $]0;+\infty[$ *puis pour* x $]-1;0[$ *).*

b) Vérifier que : $\forall\ u \in]-1,+\infty[,\ \dfrac{1}{1+u} = 1-u+\dfrac{u^2}{1+u}$

En déduire que: $\forall x \in]-1,+\infty[, x \neq 0 \Rightarrow f(x) = 1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}\int_0^x \dfrac{u^2}{1+u}du$

c) En exploitant les résultats des questions précédents, montrer que f est dérivable au point 0.

Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 et étudier la position de C par rapport à cette tangente.

d) Etudier la dérivabilité de f.

3) a)Soit g l'application définie sur $]-1,+\infty[$ *par* $g(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}$.

Etudier les variations de g et déterminer le signe de $g(x)$ *suivant les valeurs de* x *.*

b) En déduire le sens de variation de f.

4) Etudier les limites de f aux bornes de l'intervalle $\left]-1,+\infty\right[$.

5) Déterminer les droites asymptotes à C et préciser la position de C par rapport à l'axe des abscisses.

6) Construire la courbe C.

PARTIE : B

1) *Justifier que pour tous réels a et b de* $\left]-1,+\infty\right[$ *tels que a*$<b$ *ona :*

En déduire un encadrement de l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=0 \, et x=1$*; on utilisera les nombres* $0,\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5} et 1$.

2) *a) En utilisant la fonction g, montrer que pour tout* $x \succ 0,\ f(x)-\frac{1}{1+x}\geq 0$

b) En déduire la limite lorsque t tend vers $+\infty$ *de la fonction :*$t \rightarrow \int_0^t f(x)dx$

3) *a)Soit h l'application définie sur* $\left]-1,0\right[$ *par* $h(x)=x+1-(x+1)\ln(1+x)$
Calculer $h'(x)$ *pour* x *appartenant à* $\left]-1,0\right]$ *et montrer que pour tout réel* x *de cet intervalle on a :* $h(x)\in\left]0,1\right]$.

b) Montrer que : $\forall x \in \left]-1,-\frac{1}{2}\right], 0\leq f(x)\leq -2\ln(1+x)$.

En déduire que la fonction $F: t \rightarrow \int_t^{-1/2} f(x)dx$ *est majorée dans* $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]$

c) *on considère la suite* $(v_n)_{n\succ 0}$ *de terme général* $v_n=\int_{-1+1/n}^{0} f(x)dx$*. Etudier le sens de variation de la suite* $(v_n)_{n\succ 0}$ *.En déduire que cette suite est convergente.*

Epreuve premier groupe 2013 : Baccalauréat Séries S1-S3

Durée 4 heures

EXERCICE 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit K le point du plan tel que OIKJ est un carré.

Soit M un point quelconque de la droite (OK) diffèrent de O et s la similitude plane directe de centre J qui transforme O en M. On note m l'affixe du point M, I' et M'les images respectives des points I et M par s.

1) *Montrer que* $|m-1| = |m-i|$ *et que les complexes et que les complexes* $(m-1)(m-i)$ *et* $m(1+i)$ *sont imaginaires purs.*

   Indication : M étant un point de la première bissectrice diffèrent de O, il existe un réel x *non nul tel que* $x = x + ix$.

2) *a) Vérifier que le rapport de s est* $|m-i|$ *,calculer M'I' en fonction de m.*
   b) Calculer le rapport de $s \circ s$ *. En déduire que M'J=*$|m-i|^2$.
   c) Démonter que M'J=M'I'.
3) *a) Démontrer que l'écriture complexe de s est* $z' = (1+im)z + m$.
   En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{II'}$, $\overrightarrow{M'I'}$ *ont pour affixes respectives* $m(1+i)$ *et*$-(m-1)(m-i)$.

   b) Prouver alors que I' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (IK).

   c) Déduire de la relation de la question 2)c) que lorsque le point M parcourt la droite (OK) privé du point O, le point O' appartient à une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. Placer toutes les données précédentes sur une même figure.

EXERCICE 2 :

Dans un plan $\mathcal{P}$ *de l'espace, on considère un cercle* $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *de diamètre [AB]. Soit* (Δ)*la droite passant par A et orthogonal au plan* $\mathcal{P}$ *et S un point de* (Δ) *distinct de A .On note I le projeté orthogonal de A sur (BS).*

Pour tout point M du cercle $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ *on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).*

1) *Placer les données précédentes sur une même figure,* (Δ)*étant tracée verticalement.*
2) *Prouver que H appartient à la sphère* $\sum$ *de diamètre [AS].*

3) *Dans cette question, on suppose M est distinct de A et de B .Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS) .En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).*
4) *Montrer que H apparient au plan $\prod$ passant pat I et orthogonal à la droite (BS).*
5) *Déterminer l'intersection Γ de la sphère $\sum$ et du plan $\prod$.*

PROBLEME :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2,5 cm)

PARTIE A

1. *a) soit m un réel strictement positif .Déterminer en fonction de m des réels a, b, c , α et β tels que pour tous réels x on ait :*

$$\int_0^x ue^{-mu}\,du = (\alpha x + \beta)e^{-mx} + \frac{1}{m^2} \; et \; \int_0^x u^2e^{-mu}\,du = (ax^2 + bx = c)e^{-mx} + \frac{2}{m^3}.$$

b. Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x ue^{-mu}du$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x u^2e^{-mu}du$

c .Montrer que les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{u}{e^u + e^{-u}}du \;\; et \; g(x) = \int_0^x \frac{u^2}{e^u + e^{-u}}du$$

sont positives, dérivables et croissante sur $I = [0, +\infty[$.Après avoir vérifié $\forall\, u \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{2}\frac{1}{e^u} \le \frac{1}{e^u+e^{-u}} \le \frac{1}{e^u}$,déduire du b .que quand x tend vers $+\infty$,elles ont des limites l et s appartenant à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $[1,2]$.

Indication : *on admettra qu'une fonction continue, croissante et majorée sur $[0, +\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.*

d .Montrer que la fonction f est paire (faire le changement de variable t=-u)

2. *En vue d'étude éventuels des points d'inflexions de la courbe de C_f représentant la fonction f dans le repère R,montrer que la fonction h définie sur I par :*

$$h(x) = (1 - x)e^x + (1 + x)e^{-x}$$

est dérivable sur I et s'annule en un unique point x_0 appartenant à $]1; 1{,}3[$.

3. *a. Montrer que $\forall x \in R$, $e^x > x$ .En déduire que $\forall x \in R$, $f'(x) < 1$.*
   b. Soit x un réel non nul .En appliquant le théorème des accroissements finis à f dans l'intervalle d'extrémité 0 et x ,étudier les positions relatives de la courbe C_f et la première bissectrice.
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution 0.

PARTIE B

1) *Soit x un réel positif .Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :*

$$f(x)-\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\int_0^x ue^{-(2p+1)u}du=(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{ue^{-(2n+2)u}}{e^u+e^{-u}}du$$

(On convient que $(-1)^0=1$)

En déduire que pour tout entier naturel n : $\left|l-\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^2}\right|\leq\frac{1}{(2n+3)^2}$

(Utiliser la question 1 .b partie A).

Donner alors une valeur approchée de l à 10^{-1} prés.

2) En procèdent à une intégration par parties, vérifier que pour tout réel positif λ on a : $\int_0^{\lambda}(f(\lambda)-f(x))\,dx=g(\lambda)$.

En déduire que $g(\lambda)$ et s peuvent être interprétés comme des aires des domaines que l'on déterminera.

3.) *Représenter la courbe C_f.*

On prendra x_0 = 1, 2, $f(x_0)$ = 0, 2. On représentera en particulier l'asymptote horizontale, la tangente horizontale, les points d'inflexions et les tangentes à C_f en ces points et le domaine plan dont une mesure de l'aire est $g(3)$.

NB. On rappelle que si une fonction est deux fois d´dérivable en un point x0 et si sa d'dérivée seconde s'annule en x_0 en changeant de signe, alors le point de sa courbe d'abscisse x_0 est un point d'inflexion.

4. Soit un réel strictement positif. On pose a_0 = a et pour tout entier naturel n, a_{n+1}
a. Démontrer que la suite (a_n) est positive et monotone.
b. En déduire que la suite (a_n) est convergente. Calculer alors sa limite.

PARTIE C

On considère la fonction F définie sur R_+ par : $F(0)=l$ et pour tout réel x strictement positif on a $F(x)=f(lnx)$.

1) *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

Montrer que F est continue au point 0.

2) *a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.*

b) déduire du a) que $\forall x \in R_+^*, F(x) = \int_1^x \frac{\ln u}{1+u^2} du$.

Problème 1

Le problème a pour objet l'étude d'une suite de fonctions, d'une suite d'intégrales, puis la recherche d'une valeur approchée d'une équation du type : f(x) = k.

Partie A

On note f_n *la fonction numérique de la variable réelle définie sur* $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ *par :* $f_n(x) = \frac{e^{1+x}}{(x+2)^n}$ *pour n un entier naturel non nul .*

(C_n) désigne la courbe représentative f_n *dans le plan muni d'un repère ortho normal*

(O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) , l'unité graphique étant égale à 2 cm.

1. *a. Etudier les limites de* f_n *en* $-\infty$ *et en* $+\infty$ *.*
   (Pour la limite en $+\infty$ *, on pourra poser X = x+2) .*
   b. Etudier suivant la parité de n , la limite de f_n *en – 2.*
2. *a. Calculer* $f'_n(x)$ *, puis étudier son signe suivant la parité de n .*
   b. Dresser le tableau de variation de f_n *.*
3. *Démontrer que toutes les courbes* (C_n) *passent par un point fixe A. Déterminer une équation de la tangente* T_n *à* (C_n) *en A .*
4. *a. Calculer* $lim_{x\to+\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ *, puis interpréter graphiquement ce résultat.*
   b. Démontrer que pour tout entier n non nul , et pour tout nombre réel x différent de -2 , on a : $f'_n(x) = f_n(x) - nf_n(x)$.
   c . En déduire les positions des courbes (C_1) *et* (C_2) *.*
   Représenter graphiquement (C_1) *et* (C_2) *.*

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_{-1}^{0} f_n(x)dx$ *, pour tout entier naturel n non nul .*

1. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout n non nul , on a : (u_n)*≥ 0.
   Que peut-on conclure ?
2. *Démontrer que pour tout entier naturel , n supérieur ou égal à 2 , on a :*
   $$\frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \leq u_n \leq \left(\frac{1-2^{-n+1}}{n-1}\right)e$$
   En déduire la limite de la suite (u_n).
3. *a. En utilisant une intégration par parties , démontrer que pour tout entier naturel n supérieur où égal à 2 on a :* $nu_{n+1} = 1 + u_n - \frac{e}{2^n}$ *:*

b. Retrouver ce résultat en utilisant la relation de la question 4.b) de la partie A .

c. En déduire que :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{ne^{1+x}}{(x+2)^{n+1}}dx = 1$.

Partie C

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ *par g(x)=* $f_1(x-1)$*. On note* (Γ) *sa courbe représentative dans le repère (* $O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}$ *).*

1. *Construire la courbe* (Γ)*à partir de la courbe* (C_1)*. Justifier la construction .*
2. *On note* φ *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :* $\varphi(x) = 1 + ln(1 + x)$.

a. *Démontrer que l'équation f(x)= x admet une solution*

b. *unique* α *dans l'intervalle I=*$[2;3]$ *.*

c. *Démontrer que pour tout x positif , l'équation* $\varphi(x) = x$ *est équivalente à l'équation g(x)= e.*

d. *Démontrer que pour tout réel x de I ,* $|\varphi'(x)| \le \frac{1}{3}$.

3. *Soit* (v_n) *la suite définie pour tout entier naturel n par :* v_0*= 2 et* v_{n+1}*=*$\varphi(v_n)$*.*

b. *Démontrer que la suite* (v_n) *est croissante et majorée par* α *. Conclure .*

c. *Démontrer que* $\varphi(I) \subset I$ *.*

d. *Démontrer par récurrence , que pour tout entier naturel n , on a :* v_n *appartient à l'intervalle I.*

4. *a. Démontrer que pour tout entier naturel n , on a :*

$|v_{n+1} - v_n| \le \frac{1}{3}|v_n - \alpha|$ *, puis que,* $\alpha - v_{n+1} \le \frac{1}{3}(\alpha - v_n)$.

b . En déduire que , pour tout entier naturel n , $\alpha - v_n \le \frac{1}{3}$ *et que la suite* (v_n) *converge vers* α *.*

c .Déterminer un entier naturel p pour lequel v_p *est une valeur approchée de* α *à* 10^{-3} *prés. Calculer cette valeur approchée.*

Problème 2

Ce problème a pour buts , d'une part d'étudier la suite de terme général $\frac{n^n e^{-x}}{n!}$ *d'autre part de donner une expression de* e^a *comme limite d'une suite.*

Pour tout n> 0 *, on note* f_n *la fonction numérique définie sur l'intervalle* $[0;+\infty[$ *par :*

$f_n(x) = \frac{n^n e^{-x}}{n!}$.

On appelle (C_n) *la courbe représentative de* f_n *dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ;*$\vec{\imath}$ *,* $\vec{\jmath}$ *). On prendra* $\|\vec{\imath}\|$ *= 2cm et* $\|\vec{\jmath}\|$ *=10 cm .*

A. 1*. Déterminer le tableau de variation de* f_n *sur* $[0;+\infty[$.

2. *Pour tout n* ≥ 2 *, étudier la position relative de* (C_n) *et de* (C_{n-1}) *et vérifier que le point* A_n *de coordonnées (n ; f(n)) appartient à* (C_{n-1}) *.*

3. Construire avec soin , sur un même graphique , les courbes (C_1) (C_2) et (C_3) ; on placera les tangentes en O à ces trois courbes

***B.** Le but de cette seconde partie est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$.*

***1. a.** En utilisant les résultats de A. , démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*

***b.** La suite (u_n) est – elle convergente ? Justifier.*

On se propose dans les questions suivantes , de déterminer la limite de cette suite .

***2. a.** Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :*

$$g(t) = ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}.$$

En utilisant les variations de g , démontrer que , pour tout t de $[0;1]$, on a :

$ln(1+t) \leq t + \frac{t^2}{4}$.

***b.** En déduire que , pour tout entier $n > 0$, on a : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.*

***3. a.** Démontrer que , pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-\frac{1}{4n}}$*

***b.** En déduire que , pour tout n supérieur ou égal à 2 , on a :*

$u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+1\right)}$

***4.a**. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a :* $\int_1^x \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots \ldots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$

(On pourra utiliser des considérations des aires).

***b**. En déduire que pour tout $n \geq 2$, on a : $u_n \leq e^{-1-\frac{1}{4}lnn}$*

***c.** Quelle est la limite de la suite (u_n) ?*

***C.** Pour tout $n > 0$ et pour tout réel a positif ou nul , fixé , on pose :*

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt.$$

***1**. Calculer $I_1(a)$.*

***2**. Démontrer que pour tout entier*

$n > 0$ et pour tout réel a positif ou nul , on a : $0 \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}$. En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

***3 .a.** Démontrer que pour tout entier $n > 0$, on a : $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$ (On pourra utiliser **B.1.a**).*

***b.** Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.*

***4.a.** Etablir pour tout entier $n \geq 2$ une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).*

***b.** En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :*

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right).$$

Cette égalité reste – t- elle valable pour n = 1 ?

Démontrer que pour tout a de $[0;+\infty[$ on a : $e^a = lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$

.

Problème 4

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(0) = 0, f(1) = 1$ Et $f(t) = \frac{t-1}{\ln t}$ si $t \in]0;1[$.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère ortho normal $(O;\vec{i};\vec{j})$ *.Le but du problème est d'étudier f et de calculer l'intégrale* $I = \int_0^1 f(t)dt$

A Etude de f

I-1) Montrer que f est continue en 0 et en 1.

2) Montrer que f est dérivable sur $]0;1[$ *.Calculer f'(t) et montrer que f'(t) a le même signe que la fonction* $\varphi(t)$ *, ou* φ *est la fonction définie sur* $]0;1[$ *par* $\varphi(t) = \ln t - 1 + \frac{1}{t}$.

3) Etudier les variations, puis le signe de f'.

II).Etudier la dérivabilité de f en 0.Que peut-on en déduire pour tangente a C au point O ?

1.) *Prouver que pour tout élément u de* $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ $0 \leq \frac{1}{1-u} - (1+u) \leq 2u^2$.

En déduire que : $0 \leq -\ln(1-u) - (u + \frac{u^2}{2}) \leq \frac{2u^3}{3}$.

2.) *Soit g la fonction définie sur* $]0;1]$ *par :* $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ *. Prouver que pour tout h de* $\left[-\frac{1}{2};0\right]$:

$0 \leq g(1+h) - g(1) + \frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$.

En déduire que g est dérivable en 1 et préciser g'(1).

3.) *En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que f'(1)=* $\frac{1}{2}$.

III) Tracer la courbe C (unité graphique :10cm)

B) Calcul de l'intégrale I

Pour tout élément x de $]0;1]$*, on pose :*$I(x) = \int_x^1 f(t)dt$ *et* $J(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$

(On ne cherchera pas à calculer ces intégrales)

I.) *Soit K la fonction définie sur* $]0;1]$ *par* $K(x) = J(x^2) - J(x)$.

1.) *Montrer que K est dérivable sur* $]0;1[$ *et que* $K'(x) = \frac{1}{x}[f(x) - 2f(x^2)]$

2.) *Prouver que pour tout x de* $]0;1]$: $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$.

3.) *En déduire que pour tout élément x de* $]0;1[$:$I(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{lnt}dt$ *(1).*

II.) *Calculer la dérivée de la fonction* $t \to \ln(-\ln t)$ *sur* $]0;1[$.

En déduire que pour tout élément x de $]0;1[$ $\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{lnt}dt = ln2$ *(2).*

III.) *Prouver que pour tout x de* $]0;1[$ *et pour tout t de* $]0;x[$: $0 \leq \frac{-1}{\ln t} \leq \frac{-1}{\ln x}$.

En déduire que pour tout élément x de $]0;1[$: $0 \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{lnt} \leq \frac{-x}{lnx}$. (3)

IV) A partir de (1), (2) et (3), déterminer la limite de I(x) lorsque x tend vers 0.

V) Etablir, pour tout x de]0 ; 1] :$I - I(x) = \int_0^x f(t)dt$.En déduire que $0 \leq I - I(x) \leq x$.

VI) Prouver finalement que $I = ln2$.

Problème 5

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur R par :

$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x+1}$. On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère ortho normal (O, $\vec{u}$; $\vec{v}$) ; (unité graphique : 10cm).

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

A) Etude de la fonction f_n.
1. On suppose que n = 0
a. Etudier les limites de f_0 en $+\infty$ et $-\infty$;
b. Etudier le sens de variation de f_n puis dresser le tableau de variation de f_n;
c. Montrer que le point I(0 ;$\frac{1}{2}$) est centre de symétrie de C_0.
d. Tracer la courbe C_0 en précisant sa tangente en 1.
2. On suppose que $n \geq 1$.
a. Etudier les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$.
b. Montrer que f_n est dérivable sur R et vérifier que , pour tout x, on a :
$f'_n(x) = -\frac{e^{-nx}[n+(n+1)e^x]}{(e^x+1)^2}$.
c. Etudier le sens de variation de f_n. puis dresser son tableau de variation ;
d. Vérifier que le point I appartient à toutes les courbes C_0.
e. Tracer C_1 dans le même repère que C_0 , en précisant la tangente en I .

B) Etude de la suite (u_n).

Dans cette partie n et p désignent les entiers naturels non nuls .

1. Etude d'une suite auxiliaire (v_n). Pour tout n , on pose $v_n = \int_0^1 e^{-nx}dx$.
a. Calculer v_n ;
b. Déterminer $limv_n$ puis $lim(nv_n)$.
2. Comparaison de (u_n) et (v_n).
a. Etablir que , pour tout x appartenant à $[0; 1]$, on a $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$;

b. *En déduire que , pour tout n , on a :* $\frac{1}{2}v_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}v_n$;

c. *Déterminer* $\lim u_n$ *, puis* $\lim(nu_n)$;

3. *Etude d'une suite associée à* (u_n)*. On pose* $s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$ *et* $t_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$.

a. *Montrer que* $0 \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$ *(on observera que , pour tout p , on a :* $\frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$*)*

b. *En utilisant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle* $[p; p+1]$*, montrer qu'on a :* $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$:

c. *En déduire que , pour tout n , on a :* $\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq 1 + \ln(n)$;

d. *Montrer , en utilisant a) et b) et c) que* $\lim t_n = +\infty$*. puis lim* $\frac{t_n}{\ln(n)}$;

e. *Que peut- on déduire pour* s_n ?

Problème 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = (1+x)e^{-x}$ *soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé*$(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) *a- Dresser le tableau de variation de f.*
b- Tracer la courbe (C), (on précisera ses branches infinies).

2) *Soit la suite* $v_n = \int_0^n f(x)dx$ *où* $n \in N^*$.

a –Montrer que pour tout $n \in N^*$ $v_n = 2 - (n+2)e^{-n}$

b- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

3) *Pour tout* $k \in N^*$ *on pose* $u_k = \int_{k-1}^{k} f(x)dx$ *. Montrer que pour tout n de* N^*, $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

4) *a- Montrer que pour tout* $k \in N^*, u_k = (e-1)ke^{-k} + (e-2)e^{-k}$.

b- En déduire que, $v_n = (e-1)\sum_{k=1}^{n} ke^{-k} + \frac{e-2}{e-1}(1-e^{-n})$.

5) *Soit* $S_n = \sum_{k=1}^{n} ke^{-k}$. *Montrer* $\lim_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{e}{(e-1)^2}$

Problème 7

Si pour tout réel t tel que : $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ *:* $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2k}(t)dt$ *et* $J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 cos^{2k}(t)dt$ *où*

$k \in N$.

1) *Etablir l'inégalité suivante pour tout réel t tel que :* $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $t \le \frac{\pi}{2} sin(t)$ *;*
2) *Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel k*≥ 0 , $0 \le J_k \le \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.
3) *Montrer que pour tout entier k*≥ 0 *:*$I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k$.
4) *Déduire des questions précédentes que :* $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{J_k}{I_k} = 0$.
5) *Montrer que, pour tout entier naturel k tel que k*≥ 1 *:* $I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}$
6) *En déduire que, pour tout entier naturel k tel que k*≥ 1 *:* $\dfrac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \dfrac{J_k}{I_k} = \dfrac{1}{2k^2}$ *et*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

PROBLEME 8

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n *définie sur* $[0;+\infty[$ *par*$f_n(x) = x^n e^{-nx}$.
On appelle C_n*, la courbe représentative de la fonction* f_n *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ *(unité graphique 3 cm).*

A- *1)a) Dresser le tableau de variation de la fonction* f_n .
b) Déterminer la position relative des courbes C_n *et* C_{n+1} .
2)a)Tracer C_1 *et* C_2 *en précisant les demi- tangentes à l'origine*
b) Calculer l'aire S_n *du domaine limité par la courbe* C_1 *, l'axe des abscisses et les droites d'équation* $x = 0$ *et* $x = n$ *;*
c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

B- *Pour tout* $x \ge 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$ *, on pose* $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

1) *Montrer que pour tout* $t \ge 0$ *, on a :*

$$0 \le f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \le 1 \ .$$

2) *a)Montrer alors que, pour tout* $t \ge 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$ *, on a :*

$$0 \le f_n(t)e^{-\frac{t}{2}} \le 1$$

b) En déduire que , pour tout $t \ge 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$ *, on a :*

$0 \le F_n(x) \le 2$.

C- *Pour tout réel* $u \ge 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$ *, on pose :* $G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t} dt$

1) a) Montrer que pour tout $n \ge 2$ *, on a :*

$$G_n(u) = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u) .$$

b) En déduire que : $G_n(u) = -n!e^{-u} \sum_{p=2}^{n} \frac{u^p}{p!} + n!G_1(u)$

2) Montrer alors que : $\lim_{u \to +\infty} G_n(u) = n!$

3) a) Montrer que pour tout réel $x \ge 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$ *, on a :*

$G'_n(nx) = n^n f_n(x)$

(f_n *la fonction définie dans la partie A)*

b) Montrer alors que pour tout réel $n \ge 0$ *et pour tout entier* $n \ge 1$ *,*

On a : $F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(nx)$.

c) En déduire $\lim_{x \to +\infty} = F_n(x)$

PROBLEME 9

A- *1) Soit la fonction* φ *définie sur IR par* $\varphi(x) = e^x (2 - x) - 2$

a- Etudier les variations de φ *.*

b- Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ *admet dans IR exactement deux solutions. On notera a la solution non nulle et on vérifiera que* $1 < a < 2$.

c- En déduire le signe de $\varphi(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - 1} \; si \; x \neq 0 \\ 0 \; si \; x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que f est continue sur IR.

b- Monter que f est dérivable sur IR et que : Pour tout $x \in IR^*$ *on a :* $f'(x) = \frac{x\varphi(x)}{(e^x - 1)^2}$

c- Montrer que $f(a) = a (2 - a)$.

d- Etudier les variations de f, puis construire la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, i, j), (pour la construction on prendra a = 1,6).

3) On considère la fonction F définie sur IR^+ *par :* $F(x) = \int_{in2}^{x} t^2 e^{-t} dt$

a- Justifier l'existence de F(x) pour tout réel positif x.

b- Montrer que F est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$

c- Donner la forme de l'intervalle F(I).

d- A l'aide de deux intégrations par parties, calculer G(x) puis montrer que G admet une limite en $+\infty$ *que l'on précisera.*

e- Montrer que : Pour tout $t \in [ln2, +\infty[$ *on a* $f(t) \le 2t^2 e^{-t}$ *et en déduire qu'il existe un réel positif M tel que: Pour tout* $x \in IR^+$ *on a* $F(x) \le M$.

d- En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) \leq M$

(Dans la suite du problème on posera $L = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ *).*

B*- Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.*

1) a- Montrer que pour tout réel positif x, on a : $\dfrac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + ... + e^{-nx} + \dfrac{e^{-nx}}{e^x - 1}$

b- Montrer que pour tout réel positif x, on a : $0 \leq \int_0^x f(t) e^{-nt}\, dt \leq \frac{a(2-a)}{n}$.

c- x étant un réel positif, calculer $I_n(x) = \int_0^x t^2\, e^{-nt} dt$.

d- Montrer que $I_n(x)$ *admet une limite lorsque x tend vers* $+\infty$

2) a- Montrer que pour tout réel positif x, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k(x) = F(x) - \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$

En déduire que la fonction H_n *définie sur* R^+ *par :* $H_n(x) = \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$ *admet une limite* l_n *lorsque x tend vers* $+\infty$ *vérifiant* $L - l_n = 2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}\right)$

b- En utilisant le résultat établi à la question B 1) b-, montré que la suite (l_n) *converge vers 0.*

c- Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$

Montrer que cette suite est convergente et a pour limite le réel L' tel que L = 2 L'

<u>Problème 10</u>

A. 1. Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a. Etudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b. Etudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère ortho normal $(O ;\vec{i}, \vec{j})$ (unité 5 cm).

2. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan Δ compris entre la courbe (C) , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. On pourra faire une intégration par parties.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on pose g(x) = f(sinx).Montrer que la fonction g est une primitive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction h telle que $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

B. Dans toute la suite du problème , a désigne un réel de l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ .Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on pose : $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} dt$.

1. Montrer que : $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$.

2. En déduire la limite de $I_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C. Pour tout n supérieur ou égal à 1 , on définit sur $[0; a]$ la fonction F_n par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \cdots .. + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

1. Montrer que F_n est dérivable sur $[0; a]$ et que , pour tout réel t de l'intervalle $[0; a]$:

$F'_n(t) = \frac{1-\sin^{2n} t}{\cos t}$. Calculer $F_n(0)$.

2. En intégrant la relation précédente entre 0 et a , montrer que $F_n(a) = g(a) - I_n(a)$. En déduire la limite de $F_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère la suite u définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\times 2^3} + \frac{1}{5\times 2^5} + \cdots .. + \frac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}.$

a. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que cette suite est convergente vers une limite que l'on précisera.

b. Montrer, en utilisant **C.2** et **B.1**, que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , u_n est une valeur approchée de : $\ln\sqrt{3}$ à $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ prés par défaut .

c. En déduire sous forme de fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln\sqrt{3}$ à 10^{-3} près par défaut.