

Nouveau programme

Fomesoutra.com
ça soutra!

Ministère de l'Éducation
de l'Alphabétisation et de la
Promotion des langues Nationales

République du Mali

Un peuple – Un but – Une foi

Mali – Maths

Série : TSE – STI

Tome 2

(Primitives – Logarithmes – Exponentielle – Equations différentielles)

- Rappel de cours.
- Exercices et problèmes inédits.
- Corrigés détaillés.
- Sujets de types Bac (*voir dans le tome 4*).

6.000 FCFA

Edition 2014

Conçu et Réalisé par :

Mr DEMBELE Idrissa. (PESG).

Cel : 79298938 / 65787728

Etablissement

(ECICA – Bamako – Mali)

Email : idrissa_dembele30@yahoo.fr

Avants - Propos :



Conformément au nouveau programme des mathématiques au Mali, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé avec assiduité. Il a pour objectif d'être un tremplin pour les élèves des classes inférieures afin d'uniformiser le niveau de ceux des classes supérieures. Outre cet objectif pédagogique, ce manuel est d'un apport inestimable pour l'acquisition des connaissances requises en mathématiques.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de 04 parties :

■ *Le cours :*

Rien que l'essentiel dans un langage clair et simple soutenu par des démonstrations. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, en parfaite harmonie avec le programme en vigueur.

■ *Les exercices et problèmes :*

- **Les exercices :** Inédits et ordonnés suivant l'évolution des cours. Ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation correcte des cours.
- **Les problèmes :** Ils viennent en appoint aux exercices tout en restant fidèle au programme en vigueur.

■ *Les corrigés:*

Ils sont rédigés avec assiduité et appuyés par des démonstrations claires et explicites. Chaque corrigé est suivi d'un commentaire simple afin de faciliter son appréhension au profit de tous les élèves.

■ *Les sujets de type Bac*

Introduit par des conseils pratiques, ils sont le fruit d'une longue expérience professionnelle. En outre, ils sont constitués chacun de deux exercices et d'un problème. Cette séquence de sujets permet aux Bacheliers de s'auto-évaluer après 9 mois d'acquisition de connaissance.

Je souhaite donc une utilisation rationnelle de ce manuel qui ne saurait se substituer aux cours des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace et utile surtout au profit des apprenants pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, je tiens à remercier Dieu le tout puissant de m'avoir donné l'occasion de réaliser ce manuel et tous ceux qui de loin ou de près ont contribué à l'élaboration de ce modeste travail. Compte tenu du fait que toute œuvre humaine est imparfaite, vos critiques et suggestions seront la bienvenue pour améliorer d'avantage la qualité de ce travail que je publierais dans une future édition.

Sommaire

Chapitres	Pages
Primitives-Intégrales I- Primitives. Définition. Propriétés. Tableaux des primitives. II- Intégrales. Définition. Propriétés. Intégration par parties. Intégration par changement de variable. Calculs de valeurs approchées. Calculs d'aires. Exercices et corrigés	1
Fonctions logarithmes Néperien Définition. Ensemble de définition. Propriétés remarquables. Limites remarquable. Dérivées remarquables. Primitives remarquables. Fonction logarithme de base a . Etude et représentation de la fonction logarithme de base a . Exercices et corrigés	46
Fonctions exponentielles Définition. Ensemble de définition. Propriétés remarquables. Limites remarquable. Dérivées remarquables. Primitives remarquables. Fonction exponentielle de base a . Etude et représentation de la fonction exponentielle de base a . Exercices et corrigés	129
Equations différentielles Définition. Différents types d'équations différentielles. Exercices et corrigés	203

Chapitre 4

Primitives-Intégrales

COURS

I- Primitives :

1) Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I ; F'(x) = f(x)$

2) Propriétés

P_1 : Toute fonction continue sur un intervalle I admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

P_2 : L'ensemble des primitives d'une fonction f sur un intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur cet intervalle par $x \rightarrow F(x) + k$ où k est un nombre réel.

3) Tableaux des primitives :a) Primitives des fonctions usuelles

Fonctions	Primitives	Intervalles
$a (a \in \mathbb{R})$	$ax + k$	$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$
ax^n	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases} \mathbb{R}^* \text{ si } n < 0 \\ \mathbb{R} \text{ si } n > 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	\mathbb{R}^*
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^* \text{ avec } (n \neq 1)$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R}^* \text{ avec } (n \neq 1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	\mathbb{R}_+
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	\mathbb{R}_+
$\frac{a}{\sqrt{x}}$	$2a\sqrt{x} + k$	\mathbb{R}_+
\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$	\mathbb{R}_+
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + k$	\mathbb{R}

$\sin x$	$-\cos x + k$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x + k$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + k$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$	$-\cot x + k$	$\mathbb{R} - \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$
$\sin(ax + b) (a \in \mathbb{R}^*)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$	\mathbb{R}
$\cos(ax + b) (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$	\mathbb{R}
$\operatorname{tg}(ax + b) (a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$	\mathbb{R}

b) Opérations sur les Primitives :

Fonctions	Primitives
$u' + v'$	$u + v + K$
$u'v + v'u$	$u \cdot v + K$
$au' (a \in \mathbb{R})$	$au + K$
$u' \cdot u^n$	$\frac{(u)^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{u'}{(u)^n}$	$\frac{-1}{(n-1)(u)^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\sin(u)$	$-\frac{1}{u'} \cos(u) + k$
$\cos(u)$	$\frac{1}{u'} \sin(u) + k$
$\frac{u'}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u$	$\operatorname{tg}(u) + k$
$\frac{u'}{\sin^2 u} = 1 + \cot^2 u$	$\operatorname{Cotg}(u) + k$

II- Intégrale d'une fonction

1) Définition :

Soit f une fonction définie, dérivable sur un intervalle $I = [a ; b]$ et F une primitive de f sur I .
On appelle intégrale de la fonction f entre a et b le nombre réel A tel que :

$$A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

2) Propriétés :

Propriété 1 : (linéarité)

Soient f et g deux fonctions continues sur $I = [a ; b]$ on a :

- $\int_a^b (f + g)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $(\alpha ; \beta) \in \mathbb{R} ; \int_a^b (\alpha f + \beta g)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx + \int_a^b \beta g(x)dx$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$
- Si $f \geq 0$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- Si $f \geq g$; alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- Si $|f|$ est continue sur I , alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Propriété 2 : (Relation de Chasles).

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
Soient trois réels $a ; b ; c$ éléments de l'intervalle I

D'après Chasles : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Conséquences :

- si $a = b$ alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$

Propriété 3 : (Inégalité et valeur de la moyenne)

a) Inégalité de la moyenne :

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors on a : $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$

b) Valeur moyenne :

On appelle valeur moyenne de f , le réel \bar{M} tel que :

$$\bar{M} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ et il existe un réel } c \in [a; b] \text{ tel que :}$$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

III- Intégration par parties – Intégration par changement de variable affine1) Intégration par Parties**Théorème** :

Si u et v sont deux fonctions différentiables sur un l'intervalle $I = [a; b]$, tel que :
 $(u \times v)' = u'v + v'u$. On appelle intégration par parties, toutes opérations définie par :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx.$$

Preuve :

$$\int_a^b (u \times v)'(x) dx = \int_a^b [u'(x)v(x) + v'(x)u(x)] dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b v'(x)u(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx.$$

2) Intégration par substitution ou par changement de variable

Dans certaines intégrales, l'intégration est effectuée plus facilement lorsqu'on substitue à la place de la variable x une autre variable qui est fonction de x .

Méthode pratique :

Pour calculer l'intégrale : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt$ ($\alpha \neq 0$) ; on utilise la méthode suivante :

- Faire le changement de variable en posant : $u = \alpha t + \beta$ et on obtient $du = \alpha dt$:
- Utiliser l'égalité : $\int_a^b f(\alpha t + \beta) dt = \int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(u) du$

IV- Calculs de valeurs approchées d'une intégrale :**Méthode de rectangles** :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a; b]$, tel que $|f'|$ admet un majorant M sur cet intervalle.

Lorsque l'on partage $[a; b]$ en n intervalles de même amplitude et d'extrémités $a = x_0; x_1; x_2; x_3; \dots; x_n = b$; on a :

Une suite (S_n) $n \in \mathbb{N}^*$ de termes général S_n tel que : $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ qui converge vers $A = \int_a^b f(t)dt$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $|A - S_n| \leq \frac{M}{2n} (b-a)^2$

I) Calcul d'aires :

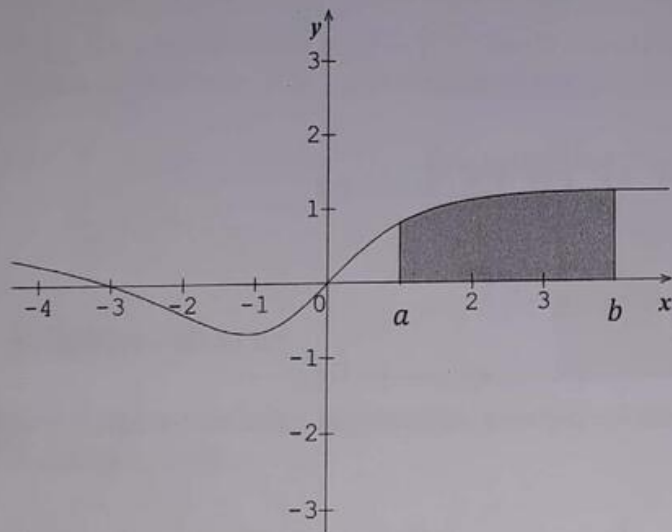
De façon générale nous admettrons que lorsque f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, alors l'aire du domaine colorié ci-contre est égale à $F(b) - F(a)$ ou F est une primitive de f sur $[a; b]$; (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle $OIAJ$).
Par la définition de l'intégrale définie, la surface entre une fonction $f(x)$ et l'axe des abscisses ou encore entre deux fonctions f et g ($f > g$) et l'axe des abscisses est donnée respectivement comme suit, lorsque x va de a vers b ($a < b$).

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ (Unité d'aire) ou } S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \text{ (Unité d'aire).}$$

NB : Dans cette intégration, les portions de surface au dessus de l'axe des abscisses donnent une contribution positive, tandis que les portions en dessous de l'axe des abscisses donnent une contribution négative.

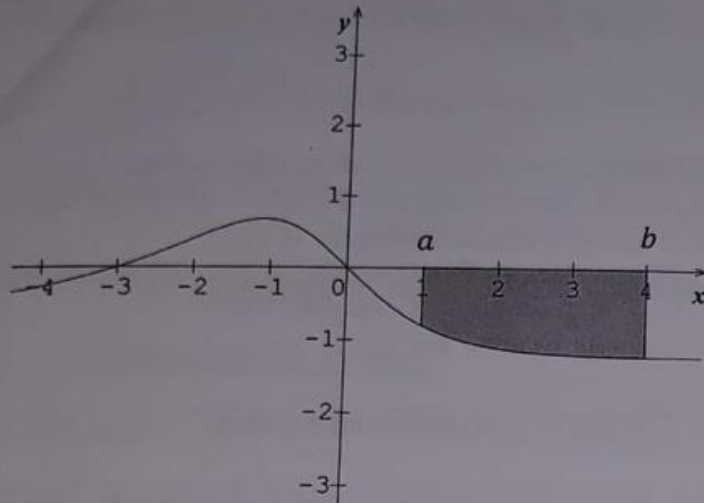
Ainsi quelques méthodes de calcul des surfaces sont illustrées dans les cas de figure qui suivent :

1^{er} Cas de figure :



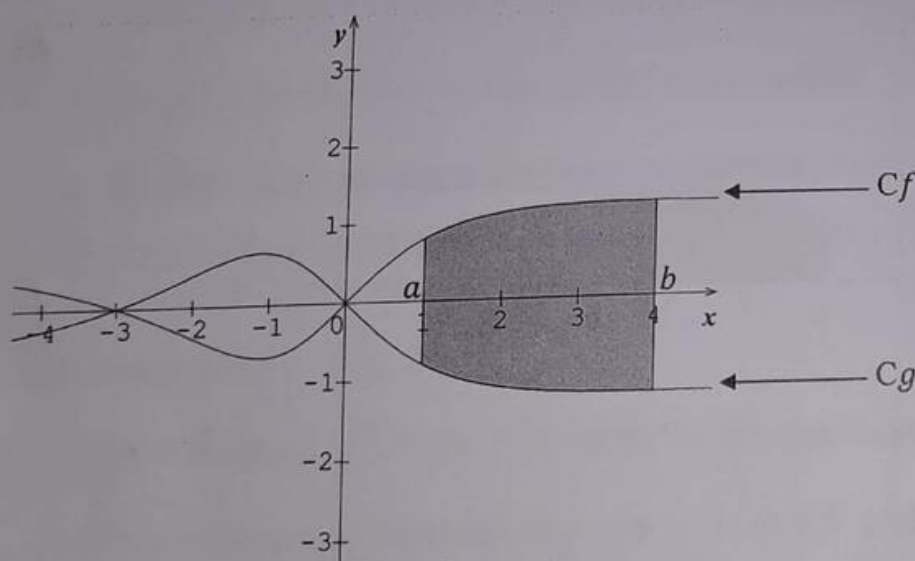
L'aire du domaine plan hachuré par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = \int_a^b f(x)dx$ (Unité d'aire)

2^{ème} Cas de figure :

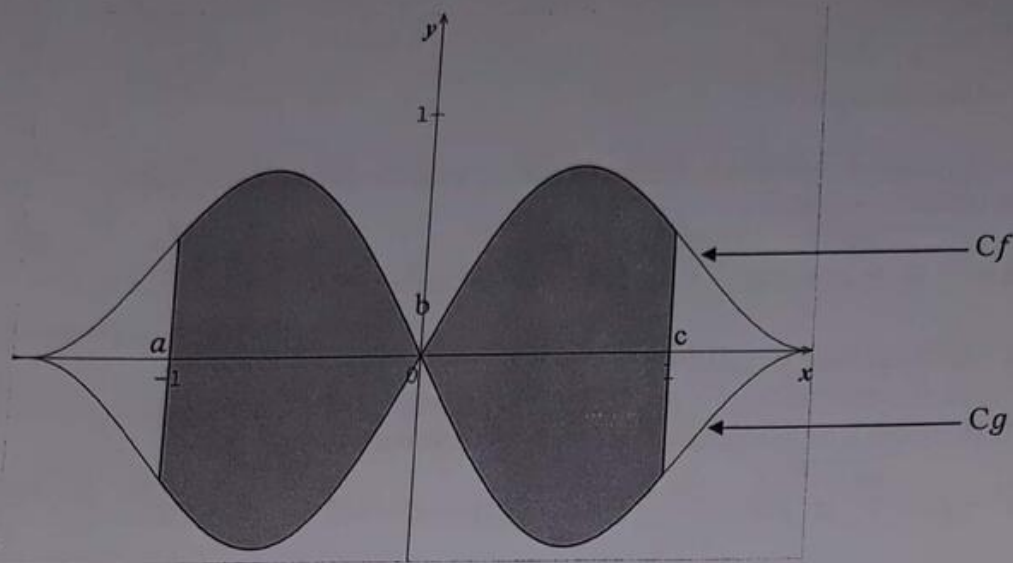
L'aire du domaine plan hachuré par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites

d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = - \int_a^b f(x) dx$ (Unité d'aire)

3^{ème} Cas de figure :

L'aire du domaine plan hachuré par les courbes (Cf), (Cg), l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$ et $x = b$ est : $S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ (Unité d'aire)

NB : la différence $f(x) - g(x)$ est très importante car la courbe (Cf) est au dessus de la courbe (Cg) dans l'intervalle $[a ; b]$

4^{ème} Cas de figure :

L'aire du domaine plan hachuré par les courbes (Cf) , (Cg) , l'axe des abscisses et les droites d'équation : $x = a$; $x = b$ et $x = c$ est :

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx + \int_b^c [f(x) - g(x)] dx \quad (\text{Unité d'aire})$$

NB : On a la différence $g(x) - f(x)$ sur l'intervalle $[a ; b]$ car la courbe (Cf) est au dessus de la courbe (Cg) et la différence $f(x) - g(x)$ dans l'intervalle $[b ; c]$

EXERCICESPrimitivesPrimitives directes

1 En utilisant les formules de primitives directes, calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1- f(x) = 4x^3 + x^2 - 4 \quad ; \quad 2- f(x) = (x^2 - 3)^3 \quad ; \quad 3- f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1$$

$$4- f(x) = \sqrt{-3x + 2} \quad ; \quad 5- f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \quad ; \quad 6- f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2$$

$$7- f(x) = \cos(-6x + 5) \quad ; \quad 8- f(x) = 3\sin(1 - 4x) \quad ; \quad 9- f(x) = \frac{1}{3\cos^2 3x}$$

$$10- f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3} \quad ; \quad 11- f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2 \quad ; \quad 12- f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}}$$

$$13- f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} \quad ; \quad 14- f(x) = (x - 1)(-3x^2 + 6x + 7)^2 \quad ; \quad 15- f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x + 1}}$$

$$16- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3}$$

Primitives et linéarisation

2 En utilisant les formules de primitives directes, linéariser puis calculer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sin^3 x \quad ; \quad 2) f(x) = \cos^5 \frac{x}{2} \quad ; \quad 3) f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^3 x \quad ; \quad 4) f(x) = \sin^3(-x + 3)$$

Primitives vérifiant une condition

3 Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

$$1- f(x) = x^3 - x^2 - 1 \quad \text{et} \quad F(0) = 7 \quad ; \quad 2- f(x) = (x - 3)^6 \quad \text{et} \quad F(3) = 0$$

$$3- f(x) = \frac{2}{(3-x)^3} \quad \text{et} \quad F(0) = 0 \quad ; \quad 5- f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} \quad \text{et} \quad F(0) = \sqrt{5}$$

$$6- f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{et} \quad F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad ; \quad 7- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^3 x} \quad \text{et} \quad F(\pi) = 1$$

4 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition

2) Déterminer les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

3) En déduire la primitive de f qui s'annule en 0

5 Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Déterminer les réels $a ; b$ et c tel que $\forall x \in \left] -\infty ; \frac{3}{2} \right]$, F soit une primitive de f sur $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right]$

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive

6 En utilisant les formules des primitives, calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5) dx \quad ; \quad 7) I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$$

$$2) I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi) dx \quad ; \quad 8) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

3) $I = \int_0^4 \sqrt{4x+9} dx$

; 9) $I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$

4) $I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^2} dx$

; 10) $I = \int_0^1 (-2x + 1)\sqrt{5x^2 - 5x + 4} dx$

5) $I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx$

; 11) $I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx$

6) $I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

; 12) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos(2x - \pi)| dx$

Intégrations par parties

7 En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$

; 4) $I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx$

2) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$

; 5) $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x^2 \cos(x + \pi) dx$

3) $I = \int_0^4 x\sqrt{4x+9} dx$

8 Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos^2 2x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin^2 2x dx$

1) Calculer : I + J.

2) Calculer : I - J en utilisant la technique de l'intégration par parties.

3) Déduisez - en les valeurs de I et J.

Intégrations par changement de variable

9 En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx$

;

2) $I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

10 Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

1) Montrer que -2 est un zéro double de P.

2) Calculer I en utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calculer l'intégrale : $I = \int_4^5 p(x) dx$

Intégrales et suites

11 Soit l'intégrale I_n définie par : \times

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n-2}
(On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$).

2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calculer : I_2 et I_4

12 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($n \geq 0$)

- 1) Calculer I_0
- 2) En intégrant par parties, montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.
- 3) En déduire la valeur de I_1 ; I_2 et I_3 .

13 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$ ($n \in \mathbb{N}$)

- 1) Démontrer que $I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$ puis calculer I_0
- 2) Démontrer que $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

14 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

- 1) Déterminer le seul réel a tel que : $\forall x \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right]$ on a : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}$.
- 2) Calculer la valeur de I_0 .

3) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}}$ (On pourra poser : $\frac{1}{\cos^{2n+1} x} = \frac{1}{\cos^{2n-1} x} \times \frac{1}{\cos^2 x}$)

15 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$

- 1) Calculer I_1 .
- 2) En intégrant par parties, montrer que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \cdot x^{n-1}$)

16 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}} dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante et majorée.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$. En déduire la limite de la suite I_n .

17 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t dx$ ($n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

- 1) En utilisant une intégration par parties ; calculer $I_n(x)$
- 2) En déduire le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$
- 3) a) Calculer $I_n(e) - J_n(e)$.
- b) Déterminer la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Intégrales linéaires

18 Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Calculer I

2) Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a) Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

b) En déduire une relation entre I et J .

c) Calculer J .

19 Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx ; J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \text{ et } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

1) Calculer $I - J$ et $I + J + K$

2) En déduire la valeur de : $I + J - 3K$ puis celles de I ; J et K .

20 Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \text{ et } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Calculer $I + J$ et $I - J$ puis en déduire les valeurs de I et J .

21 On se propose de calculer l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1 + e^x)^3} dx$

1) Calculer les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} dx$

2) Déterminer les réels a ; b et c tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1)

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculé $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimer J en fonction de I .

b- En déduire la valeur de J .

22 On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

1) a- Montrer que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx - \frac{1}{3} J$

c- Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx - \frac{1}{3} I$

2) a- Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$.

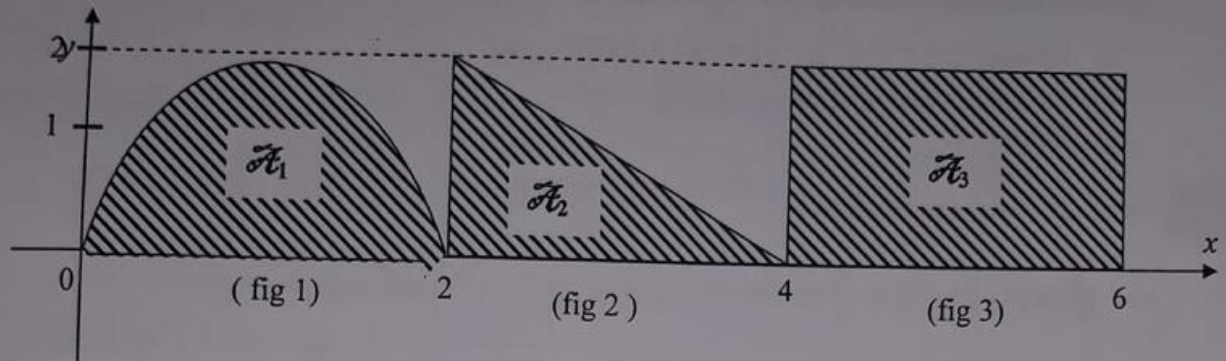
b- Montrer que $J - I = 0$

c- En déduire les intégrales I et J .

Calculs d'aires

23

On donne les cas de figures suivantes dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

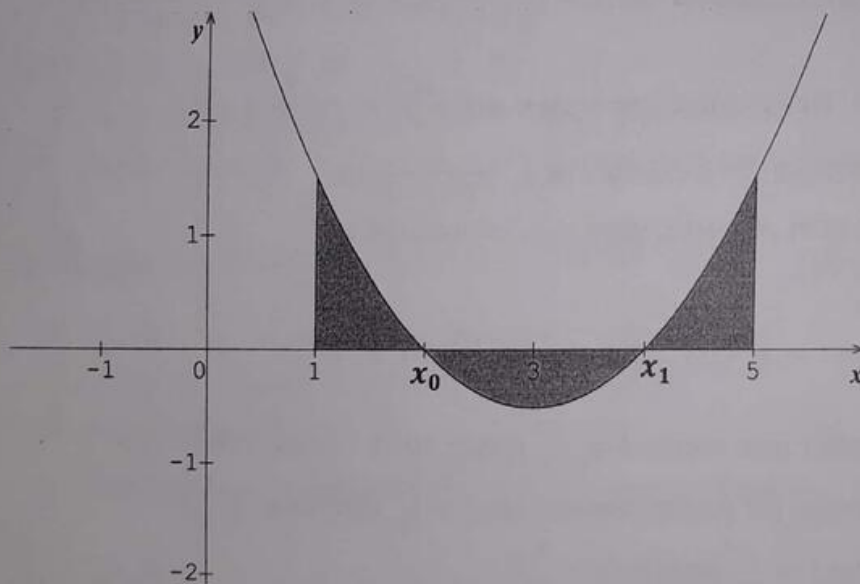


- 1) Calculer l'aire \mathcal{A}_1 ; \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 du domaine plan hachuré dans les cas des figures : (fig 1) ; (fig 2) et (fig 3).
- 2) En déduire l'aire totale hachurée.

24

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

- 1) Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$
- 2) Ci-dessous est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$.



On souhaite déterminer la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

- a- Déterminer les zéros x_0 et x_1 de la fonction f (avec $x_0 < x_1$).
- b- Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx$.

c- Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$.

d- En déduire l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique : 2cm)

Solutions

Primitives directes

1 En utilisant les formules de primitives directes, calculons l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1- f(x) = 4x^3 + x^2 - 4 \Rightarrow F(x) = \frac{4}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x + k = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x + k$$

$$2- f(x) = (x^2 - 3)^3 = x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 27 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{9}{5}x^5 + 3x^3 - 27x + k$$

$$3- f(x) = \frac{3}{2}x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 1 \Rightarrow F(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{4}{9}x^5 - x + k$$

$$4- f(x) = \sqrt{-3x + 2} \Rightarrow F(x) = -\frac{2}{9}(-3x + 2)\sqrt{-3x + 2} + k$$

$$5- f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = -\frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + k$$

$$6- f(x) = 3(-x + 2)(3x + 2)^2 = -27x^3 - 31x^2 + 60x + 24 \Rightarrow$$

$$F(x) = -\frac{27}{4}x^4 - \frac{31}{3}x^3 - 30x^2 + 24x + k$$

$$7- f(x) = \cos(-6x + 5) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{6}\sin(-6x + 5) + k$$

$$8- f(x) = 3\sin(1 - 4x) \Rightarrow F(x) = \frac{3}{4}\cos(1 - 4x) + k$$

$$9- f(x) = \frac{1}{3\cos^2 3x} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{\cos^2 3x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{9} \times (1 + \tan^2 3x) + k$$

$$10- f(x) = \frac{3}{(3x + 1)^3} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2(3x + 1)^2} + k$$

$$11- f(x) = (4x - 4)(2x^2 - 4x + 1)^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}(2x^2 - 4x + 1)^3 + k$$

$$12- f(x) = \frac{-6}{\sqrt{-6x + 5}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{-6x + 5} + k$$

$$13- f(x) = \frac{-5}{(7x + 3)^3} = \frac{7}{7} \times \frac{-5}{(7x + 3)^3} = \frac{-5}{7} \times \frac{7}{(7x + 3)^3} \Rightarrow F(x) = \frac{-5}{7} \times \frac{-1}{2(7x + 3)^2} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{14(7x+3)^2} + k$$

$$14- f(x) = (x-1)(-3x^2+6x+7)^2 = \frac{-6}{-6} \times (x-1)(-3x^2+6x+7)^2 \\ = -\frac{1}{6} \times (-6x+6)(-3x^2+6x+7)^2 \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{18} \times (-3x^2+6x+7)^3 + k$$

$$15- f(x) = \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} = \frac{-8}{-8} \times \frac{1}{\sqrt{-8x+1}} = \frac{1}{-8} \times \frac{-8}{\sqrt{-8x+1}} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{8} \times 2\sqrt{-8x+1} + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{-8x+1} + k$$

$$16- f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^3} = \frac{-(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^3} = \frac{1}{2(\cos x + \sin x)^2} + k$$

Primitives et linéarisation

2

En utilisant les formules de primitives directes, linéarisons puis calculons l'ensemble des primitives des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \sin^3 x$$

$$\text{Posons } \theta = x \Rightarrow f(x) = \sin^3 \theta = (\sin \theta)^3 = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^3 = \frac{(z - \bar{z})^3}{(2i)^3} = \frac{z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3}{-8i}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(z^3 - \bar{z}^3) + (-3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2)}{-8i} = \frac{(z^3 - \bar{z}^3) - 3z\bar{z}(z - \bar{z})}{-8i}$$

$$\text{Or } z^n - \bar{z}^n = 2i \sin(n\theta) \Rightarrow z^3 - \bar{z}^3 = 2i \sin(3\theta) \quad \text{et } z - \bar{z} = 2i \sin \theta$$

$$\text{De même } z^n \bar{z}^n = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2i \sin(3\theta) + 3(2i \sin \theta)}{-8i} = \frac{2i \sin 3\theta + 6i \sin \theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i} (\sin 3\theta + 3 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} (\sin 3\theta + 3 \sin \theta) \quad \text{or } \theta = x$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} (\sin 3x + 3 \sin x) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3} \cos 3x - 3 \cos x \right] + k$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{12} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x + k$$

$$2) f(x) = \cos^5 \frac{x}{2} =$$

$$\text{Posons } \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow f(x) = \cos^5 \theta = (\cos \theta)^5 = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^5 = \frac{(z + \bar{z})^5}{(2)^5}$$

$$f(x) = \frac{z^5 + 5z^4\bar{z} + 10z^3\bar{z}^2 + 10z^2\bar{z}^3 + 5z\bar{z}^4 + \bar{z}^5}{32}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(z^5 + \bar{z}^5) + (5z^4\bar{z} + 5z\bar{z}^4) + (10z^3\bar{z}^2 + 10z^2\bar{z}^3)}{32}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(z^5 + \bar{z}^5) + 5z\bar{z}(z^3 + \bar{z}^3) + 10z^2\bar{z}^2(z + \bar{z})}{32}$$

Or $z^n + \bar{z}^n = 2\cos(n\theta) \Rightarrow z^5 + \bar{z}^5 = 2\cos(5\theta)$; $z^3 + \bar{z}^3 = 2\cos(3\theta)$ et
 $z + \bar{z} = 2\cos\theta$

De même $z^n\bar{z}^n = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1$ et $z^2\bar{z}^2 = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2\cos(5\theta) + 5(2\cos(3\theta)) + 10(2\cos\theta)}{32} = \frac{2}{32} (\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{16} (\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta) \text{ or } \theta = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{16} \left(\cos \frac{5x}{2} + 5\cos \frac{3x}{2} + 10\cos \frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{16} \left[\frac{2}{5} \sin \frac{5x}{2} + \frac{10}{3} \sin \frac{3x}{2} + 20 \sin \frac{x}{2} \right] + k = \frac{1}{40} \sin \frac{5x}{2} + \frac{5}{24} \sin \frac{3x}{2} + \frac{5}{4} \sin \frac{x}{2} + k$$

3) $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin^3 x$

Posons $\theta = x \Rightarrow f(x) = \cos^3 \theta \cdot \sin^3 \theta = (\cos \theta)^3 (\sin \theta)^3 = \left(\frac{z+\bar{z}}{2} \right)^3 \left(\frac{z-\bar{z}}{2i} \right)^3$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(z+\bar{z})^3}{(2)^3} \times \frac{(z-\bar{z})^3}{(2i)^3} = \frac{(z+\bar{z})^3 (z-\bar{z})^3}{-64i}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3)(z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3)}{-64i}$$

Après développement, on a :

$$f(x) = \frac{(z^6 - \bar{z}^6) + (-3z^4\bar{z}^2 + 3z^2\bar{z}^4)}{-64i} = \frac{(z^6 - \bar{z}^6) - 3z^2\bar{z}^2(z^2 - \bar{z}^2)}{-64i}$$

Or $z^n - \bar{z}^n = 2i\sin(n\theta) \Rightarrow z^6 - \bar{z}^6 = 2i\sin(6\theta)$ et $z^2 - \bar{z}^2 = 2i\sin(2\theta)$

De même $z^n\bar{z}^n = 1 \Rightarrow z^2\bar{z}^2 = 1$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2i\sin(6\theta) - 3(2i\sin(2\theta))}{-64i} = \frac{2i}{-64i} (\sin 6\theta - 3\sin 2\theta) = \frac{1}{32} (\sin 6\theta - 3\sin 2\theta)$$

Or $\theta = x \Rightarrow f(x) = \frac{1}{32} (\sin 6x - 3\sin 2x)$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{32} \left[-\frac{1}{6} \cos 6x + \frac{3}{2} \cos 2x \right] + k = -\frac{1}{192} \cos 6x + \frac{3}{64} \cos 2x + k$$

4) $f(x) = \sin^3(-x + 3)$

$$\text{Posons } \theta = -x + 3 \Rightarrow f(x) = \sin^3 \theta = (\sin \theta)^3 = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^3 = \frac{(z - \bar{z})^3}{(2i)^3} = \frac{z^3 - 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 - \bar{z}^3}{-8i}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(z^3 - \bar{z}^3) + (-3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2)}{-8i} = \frac{(z^3 - \bar{z}^3) - 3z\bar{z}(z - \bar{z})}{-8i}$$

$$\text{Or } z^n - \bar{z}^n = 2i \sin(n\theta) \Rightarrow z^3 - \bar{z}^3 = 2i \sin(3\theta) \text{ et } z - \bar{z} = 2i \sin \theta$$

$$\text{De même } z^n \bar{z}^n = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2i \sin(3\theta) + 3(2i \sin(\theta))}{-8i} = \frac{2i \sin 3\theta + 6i \sin \theta}{-8i} = \frac{2i}{-8i} (\sin 3\theta + 3 \sin \theta)$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} (\sin 3\theta + 3 \sin \theta) \text{ or } \theta = -x + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} [\sin 3(-x + 3) + 3 \sin(-x + 3)]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4} [\sin(-3x + 9) + 3 \sin(-x + 3)]$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} \cos(-3x + 9) - 3 \cos(-x + 3) \right] + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{12} \cos(-3x + 9) + \frac{3}{4} \cos(-x + 3) + k$$

Primitives vérifiant une condition

3 Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant les conditions indiquées :

$$1- f(x) = x^3 - x^2 - 1 \text{ et } F(0) = 7$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - x + k. \text{ Or } F(0) = 7 \Leftrightarrow k = 7.$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - x + 7$$

$$2- f(x) = (x - 3)^6 \text{ et } F(3) = 0$$

$$f(x) = (x - 3)^6 \Rightarrow F(x) = \frac{(x - 3)^7}{7} + k. \text{ Or } F(3) = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{(x - 3)^7}{7}$$

$$3- f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3} \text{ et } F(0) = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{(3 - x)^3} = -2 \times \frac{-1}{(3 - x)^3} \Rightarrow F(x) = -2 \times \frac{-1}{2(3 - x)^2} + k = \frac{1}{(3 - x)^2} + k$$

$$\text{Or } F(0) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{9}. \text{ D'où } F(x) = \frac{1}{(3-x)^2} + \frac{1}{9}$$

$$5- f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} \text{ et } F(0) = \sqrt{5}$$

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{2}{2} \times \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+5}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2-6x+5} + k \Rightarrow F(x) = \sqrt{x^2-6x+5} + k. \text{ Or } F(0) = \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{5} + k = \sqrt{5} \Leftrightarrow k = 0. \text{ D'où } F(x) = \sqrt{x^2-6x+5} +$$

$$6- f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \text{ et } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{\cos x} + k. \text{ Or } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\frac{1}{2}} + k = 1 \Leftrightarrow -2 + k = 1$$

$$\Rightarrow k = 3. \text{ D'où } F(x) = -\frac{1}{\cos x} + 3$$

4 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3x^3 - 7x^2 + 5x + 1}{(x-1)^2}$$

1) Déterminons l'ensemble de définition.

$$Df = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) Déterminons les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$

La division Euclidienne de $(3x^3 - 7x^2 + 5x + 1)$ par $(x-1)^2$ donne :

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}. \text{ Par identification avec } f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$$

$$\text{On a : } a = 3; b = -1 \text{ et } c = 2$$

3) En déduisons la primitive de f qui s'annule en 0

$$f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x-1} + k. \text{ Or } F(0) = 0 \Leftrightarrow k = -2$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{2}{x-1} - 2$$

5 Soit les fonctions f et F définies par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$ et $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$

Déterminons les réels a ; b et c tel que $\forall x \in]-\infty ; \frac{3}{2}]$, F soit une primitive de f sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$

NB : F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x} \Rightarrow F'(x) = \frac{-5ax^2 + x(6a-3b) + (3b-c)}{\sqrt{3-2x}}. \text{ Or}$$

$$f(x) = x\sqrt{3-2x}. \text{ Par identification : } F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{-5ax^2 + x(6a-3b) + (3b-c)}{\sqrt{3-2x}} = x\sqrt{3-2x} \Leftrightarrow$$

$$-5ax^2 + x(6a-3b) + (3b-c) = x(3-2x) \Leftrightarrow$$

$$-5ax^2 + x(6a-3b) + (3b-c) = -2x^2 + 3x. \text{ Par identification, on a :}$$

$$a = \frac{2}{5} ; b = -\frac{1}{5} \text{ et } c = -\frac{3}{5}$$

$$\text{D'où } F(x) = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\right)\sqrt{3-2x} = \frac{1}{5}(2x^2 - x - 3)\sqrt{3-2x} + k$$

Intégrales

Intégrations à l'aide d'une primitive

6 En utilisant les formules des primitives, calculons les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x - 5)dx \Rightarrow I = [x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x]_0^1$$

$$\Rightarrow I = F(1) - F(0) = (-3) - (0) = -3$$

$$2) I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-2x + \pi)dx \Rightarrow I = \left[\frac{1}{2}\cos(-2x + \pi)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\Rightarrow I = F(\pi) - F(-\pi) = \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$3) I = \int_0^4 \sqrt{4x+9}dx \Rightarrow I = \left[\frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9}\right]_0^4$$

$$\Rightarrow I = F(4) - F(0) = \left(\frac{125}{6}\right) - \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{49}{3}$$

$$4) I = -4 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{5}{x^3} dx = -20 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^3} dx = -20 \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \left[\frac{20}{x^2}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow I = F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = \left(\frac{20}{3}\right) - \left(\frac{20}{2}\right) = -\frac{10}{3}$$

$$5) I = \int_{-1}^2 (x+2)\sqrt{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x+2)^{\frac{3}{2}} dx \Rightarrow I = \left[\frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{-1}^2$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{2}{5} (x+2)^2 \sqrt{x+2} \right]_{-1}^2 \Rightarrow I = F(2) - F(-1) = \left(\frac{64}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{62}{5}$$

$$6) I = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow I = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \Rightarrow I = [2\sqrt{x-1}]_2^5$$

$$\Rightarrow I = F(5) - F(2) = (4) - (2) = 2$$

$$7) I = \int_1^2 \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{-2}{-2} \times \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx = \frac{1}{-2} \times \int_1^2 \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} \times [2\sqrt{x^2-2x+5}]_1^2 = [-\sqrt{x^2-2x+5}]_1^2$$

$$\Rightarrow I = F(2) - F(1) = (-\sqrt{5}) - (-2) = -\sqrt{5} + 2$$

$$8) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx \Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + \cos x}{(\cos x + \sin x)^2} dx$$

$$\Rightarrow I = - \left[\frac{-1}{\cos x + \sin x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{\cos x + \sin x} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (1) - (-1)$$

$$\Rightarrow I = 2$$

$$9) I = \int_0^1 (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} (x^2 - 1)(x^3 - 3x + 1)^3 dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \int_0^1 (3x^2 - 3)(x^3 - 3x + 1)^3 dx \Rightarrow I = \left[\frac{(x^3 - 3x + 1)^4}{4} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$10) I = \int_0^1 (-2x+1)\sqrt{5x^2-5x+4} dx = \int_0^1 (-2x+1)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{-5}{-5} \times \int_0^1 (-2x+1)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-5} \int_0^1 (10x-5)(5x^2-5x+4)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{-5} \left[\frac{(5x^2 - 5x + 4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \left[-\frac{2}{15} (5x^2 - 5x + 4) \sqrt{5x^2 - 5x + 4} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I = F(1) - F(0) = \left(-\frac{16}{15} \right) - \left(-\frac{16}{15} \right) = 0$$

$$11) I = \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2$$

$$\Rightarrow I = [F(0) - F(1)] + [F(1) - F(2)] = [F(0) - F(1)] + [F(1) - F(2)]$$

$$\Rightarrow I = \left[\left(-\frac{1}{6} \right) - (0) \right] + \left[\left(-\frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{5}{6} \right) \right] = -\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = 0$$

$$12) I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos(2x - \pi)| dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x - \pi) dx \Rightarrow I = \left[\frac{1}{2} \sin(2x - \pi) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(-\frac{1}{2} \right) - (0) = -\frac{1}{2}$$

Intégrations par parties

7 En utilisant la formule de l'intégration par partie, calculons les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin 2x \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{Alors } I = \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos 2x dx = \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx \Rightarrow$$

$$I = \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow I = F(\pi) - F(0) = \left(-\frac{\pi}{2} \right) - (0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$2) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx = \int_{-1}^2 x \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow v(x) = 2\sqrt{x+2}$$

$$\text{Alors } I = \left[2x\sqrt{x+2} \right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 2\sqrt{x+2} dx = \left[2x\sqrt{x+2} \right]_{-1}^2 - 2 \int_{-1}^2 \sqrt{x+2} dx \Rightarrow$$

$$I = [2x\sqrt{x+2}]_{-1}^2 - 2 \left[\frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} \right]_{-1}^2 = [2x\sqrt{x+2}]_{-1}^2 - \left[\frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2} \right]_{-1}^2$$

$$\left[2x\sqrt{x+2} - \frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2} \right]_{-1}^2$$

$$\Rightarrow I = F(2) - F(-1) = \left(-\frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$3) I = \int_0^4 x\sqrt{4x+9} dx$$

Posons : $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \sqrt{4x+9} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9}$$

Alors $I = \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{6}(4x+9)\sqrt{4x+9} dx$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \frac{1}{6} \int_0^4 (4x+9)\sqrt{4x+9} dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \frac{1}{24} \int_0^4 4(4x+9)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \frac{1}{24} \left[\frac{(4x+9)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \frac{1}{60} \left[(4x+9)^{\frac{5}{2}} \right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \frac{1}{60} \left[(4x+9)^2 \sqrt{4x+9} \right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} \right]_0^4 - \left[\left(\frac{x}{15} + \frac{3}{20} \right) \sqrt{4x+9} \right]_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{6}(4x^2+9x)\sqrt{4x+9} - \left(\frac{x}{15} + \frac{3}{20} \right) \sqrt{4x+9} \right]_0^4$$

$$\Rightarrow I = F(4) - F(0) = \left(\frac{250}{3} \right) - \left(\frac{25}{12} \right) = \frac{325}{4}$$

$$4) I = \int_{-2}^1 (x-5)\sqrt{2-x} dx$$

Posons : $u(x) = x-5 \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \sqrt{2-x} \Rightarrow v(x) = -\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}$$

$$\text{Alors } I = \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 + \int_{-2}^1 \frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 + \frac{2}{3} \int_{-2}^1 (2-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 - \frac{2}{3} \int_0^4 -(2-x)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 - \frac{2}{3} \left[\frac{(2-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_{-2}^1$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 - \frac{4}{15} \left[(2-x)^{\frac{5}{2}} \right]_{-2}^1$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 - \frac{4}{15} \left[(2-x)^{\frac{5}{2}} \right]_{-2}^1$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} \right]_{-2}^1 - \frac{4}{15} \left[(2-x)^2 \sqrt{2-x} \right]_{-2}^1$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(2-x)(x-5)\sqrt{2-x} - \frac{4}{15}(2-x)^2 \sqrt{2-x} \right]_{-2}^1$$

$$\Rightarrow I = F(1) - F(-2) = \left(\frac{12}{5} \right) - \left(\frac{144}{5} \right) = -\frac{132}{5}$$

$$5) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x + \pi) dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = \cos(x + \pi) \Rightarrow v(x) = \sin(x + \pi)$$

$$\text{Alors } I = \left[x^2 \sin(x + \pi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin(x + \pi) dx \Rightarrow$$

$$I = \left[x^2 \sin(x + \pi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x + \pi) dx. \text{ Posons } A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x + \pi) dx$$

$$\Rightarrow I = \left[x^2 \sin(x + \pi) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2A. \text{ Intégrons ainsi par partie } A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x + \pi) dx$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x + \pi) dx$$

$$\text{Posons : } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin(x + \pi) \Rightarrow v(x) = -\cos(x + \pi)$$

$$\text{Alors } A = [-x \cos(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + \pi) dx = [-x \cos(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow A = [-x \cos(x + \pi) + \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = [x^2 \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2A. \text{ Avec } A = [-x \cos(x + \pi) + \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = [x^2 \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2[-x \cos(x + \pi) + \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = [x^2 \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + [2x \cos(x + \pi) - 2 \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = [x^2 \sin(x + \pi) + 2x \cos(x + \pi) - 2 \sin(x + \pi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{-\pi^2 + 8}{4}\right) - \left(\frac{\pi^2 - 8}{4}\right) = \frac{-\pi^2}{2}$$

8

Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x dx$

1) Calculons : $I + J$.

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) (\cos^2 2x + \sin^2 2x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{\pi^2 + 4\pi}{8}\right) - (0) = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8}$$

2) Calculons : $I - J$ en utilisant la technique de l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos^2 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) (\cos 4x) dx \end{aligned}$$

Posons : $u(x) = x + 1 \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \cos 4x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\text{Alors } I - J = \left[\frac{(x+1)}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin 4x dx$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I - J &= \left[\frac{(x+1)}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4x \, dx = \left[\frac{(x+1)}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{4} \cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\frac{(x+1)}{4} \sin 4x + \frac{1}{16} \cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I - J = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{16}\right) - \left(\frac{1}{16}\right) = 0$$

3) En déduisons les valeurs de I et J.

$$\text{D'après les questions 1) et 2), on a : } I + J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8} \quad \text{et} \quad I - J = 0$$

Formons ainsi le système avec $I + J$ et $I - J$

$$\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8} & (1) \\ I - J = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{La somme des équations (1) et (2) donne : } 2I = \frac{\pi^2 + 4\pi}{8} \Rightarrow I = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16}$$

$$\text{En remplaçant } I \text{ par sa valeur dans l'équation (2), on obtient } \frac{\pi^2 + 4\pi}{16} - J = 0 \Rightarrow$$

$$J = \frac{\pi^2 + 4\pi}{16}$$

Intégrations par changement de variable

9 En utilisant un changement de variable, calculons les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \, dx$$

Posons $u = x + 2 \Rightarrow x = u - 2$. Alors $dx = du$

Si $x = -1$ alors $u = 1$ et Si $x = 2$ alors $u = 4$

$$\Rightarrow I = \int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}} \, du = \int_1^4 \frac{u}{\sqrt{u}} \, du - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} \, du = \int_1^4 \sqrt{u} \, du - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{u}} \, du$$

$$= \int_1^4 \sqrt{u} \, du - 2 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}} \, du \Rightarrow I = \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} \right]_1^4 - 2 \left[2\sqrt{u} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} \right]_1^4 - \left[4\sqrt{u} \right]_1^4$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} - 4\sqrt{u} \right]_1^4$$

$$\Rightarrow I = F(4) - F(1) = \left(-\frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{10}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$2) I = \int_{-1}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

Posons $u = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = u + 1 \Rightarrow x = \sqrt{u+1}$. Alors $2xdx = du$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x}. \text{ Or } x = \sqrt{u+1} \Rightarrow dx = \frac{du}{2\sqrt{u+1}}$$

Si $x = -1$ alors $u = 0$ et Si $x = 2$ alors $u = 3$

$$\Rightarrow I = \int_0^3 \frac{\sqrt{u+1}}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2\sqrt{u+1}} = \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} [2\sqrt{u}]_0^3 = [\sqrt{u}]_0^3 \Rightarrow I = F(3) - F(0) = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$$

10

Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 12x - 16$.

1) Montrons que -2 est un zéro double de P .

-2 est un zéro double de P si et seulement si $x^3 - 12x - 16$ est divisible par $(x + 2)^2$

La division Euclidienne de $x^3 - 12x - 16$ par $(x + 2)^2$ donne pour quotient $x - 4$ et pour reste 0. D'où -2 est un zéro double de P . Ainsi la forme factorisée de P est :

$$p(x) = (x - 4)(x + 2)^2.$$

2) Calculons I en utilisant la méthode de l'intégration par partie et la méthode par changement de variable, calculer l'intégrale : $I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx$

$$I = \int_4^5 \sqrt{p(x)} dx = \int_4^5 \sqrt{(x-4)(x+2)^2} dx = \int_4^5 (x+2) \sqrt{x-4} dx.$$

- Méthode d'intégration par parties :

$$I = \int_4^5 (x+2) \sqrt{x-4} dx$$

Posons : $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = \sqrt{x-4} \Rightarrow v(x) = \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4}$$

$$\text{Alors } I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^5 - \int_4^5 \frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x-4} dx$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^5 - \frac{2}{3} \int_4^5 (x-4)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^5 - \frac{2}{3} \left[\frac{(x-4)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_4^5$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^5 - \frac{4}{15} \left[(x-4)^{\frac{5}{2}} \right]_4^5 \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^5 - \frac{4}{15} \left[(x-4)^{\frac{5}{2}} \right]_4^5 \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} \right]_4^5 - \frac{4}{15} \left[(x-4)^2\sqrt{x-4} \right]_4^5 \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+2)(x-4)\sqrt{x-4} - \frac{4}{15}(x-4)^2\sqrt{x-4} \right]_4^5
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = F(5) - F(4) = \left(\frac{22}{5} \right) - (0) = \frac{22}{5}$$

- Méthode d'intégration par changement de variable :

$$I = \int_4^5 (x+2)\sqrt{x-4} dx$$

Posons $u = x - 4 \Rightarrow x = u + 4$. Alors $dx = du$

Si $x = 4$ alors $u = 0$ et Si $x = 5$ alors $u = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_0^1 (u+4+2)\sqrt{u} du = \int_0^1 (u+6)\sqrt{u} du = \int_0^1 (u\sqrt{u} + 6\sqrt{u}) du \\
&= \int_0^1 \left(u^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{u} \right) du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du + \int_0^1 6\sqrt{u} du = \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du + 6 \int_0^1 \sqrt{u} du \\
\Rightarrow I &= \left[\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right]_0^1 + 6 \left[\frac{2}{3} u\sqrt{u} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{5} u^2\sqrt{u} \right]_0^1 + \left[4u\sqrt{u} \right]_0^1 = \left[\frac{2}{5} u^2\sqrt{u} + 4u\sqrt{u} \right]_0^1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = F(1) - F(0) = \left(\frac{22}{5} \right) - (0) = \frac{22}{5}$$

Intégrales et suites

11

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1) En utilisant la technique d'intégration par parties, trouvons une relation entre I_n et I_{n-2}
(On posera : $\sin^n x = \sin^{n-1} x \cdot \sin x$)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx$$

Posons : $u(x) = \sin^{n-1} x \Rightarrow u'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2} x$

$$v'(x) = \sin x \Rightarrow v(x) = -\cos x$$

$$\text{Alors } I_n = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x (n-1) \cos x \sin^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow I_n = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx$$

$$= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx$$

$$= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x) dx$$

$$= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx. \text{ Avec } [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Leftrightarrow I_n + (n-1)I_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$I_n(1+n-1) = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \Leftrightarrow \Rightarrow I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$$

D'où la relation entre I_n et I_{n-2} est $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.

2) On donne $I_0 = \frac{\pi}{2}$. Calculons : I_2 et I_4

On sait que : $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$.

- Pour $n = 2$; on a : $I_2 = \frac{(2-1)}{2} I_{2-2} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$.

- Pour $n = 4$; on a : $I_4 = \frac{(4-1)}{4} I_{4-2} = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{3\pi}{16}$.

12

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($n \geq 0$)

1) Calculons I_0

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \Rightarrow I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{1}{2} [2\sqrt{1+x^2}]_0^1 = [\sqrt{1+x^2}]_0^1. \Rightarrow I_0 = F(1) - F(0) = (\sqrt{2}) - (1) = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow I_0 = \sqrt{2} - 1$$

2) En intégrant par parties, montrons que $\forall n \geq 1$ on a : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n} \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{2n} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{2n} \cdot \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Posons $u(x) = x^{2n} \Rightarrow u'(x) = 2nx^{2n-1}$

$$v'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow v(x) = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_n &= \frac{1}{2} \left[2x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 4nx^{2n-1} \sqrt{1+x^2} dx \\ &= \left[x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - 2n \int_0^1 x^{2n-1} \sqrt{1+x^2} dx \end{aligned}$$

En rendant rationnelle $\sqrt{1+x^2}$; on a : $\sqrt{1+x^2} = \frac{(\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow I_n = \left[x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - 2n \int_0^1 x^{2n-1} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \left[x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - 2n \int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \left[x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - 2n \int_0^1 \frac{x^{2n-1} + x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \left[x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 - 2n \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - 2n \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left[x^{2n} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 &= \sqrt{2} \Rightarrow I_n = \sqrt{2} - 2n \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - 2n \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= -2nI_{n-1} - 2nI_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_n + 2nI_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1} \Leftrightarrow (2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$$

D'où la relation : $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$

3) En déduisons la valeur de I_1 ; I_2 et I_3 .

- Pour $n = 1$; on a : $3I_1 = \sqrt{2} - 2I_0 = \sqrt{2} - 2(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} \Rightarrow I_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$

- Pour $n = 2$; on a : $5I_2 = \sqrt{2} - 4I_1 = \sqrt{2} - 4\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow I_2 = \frac{-8 + 7\sqrt{2}}{15}$

- Pour $n = 3$; on a : $7I_3 = \sqrt{2} - 6I_2 \Rightarrow I_3 = \frac{48 - 27\sqrt{2}}{105}$

13

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$ ($n \in \mathbb{N}$)

1) Démontrons que $I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$ puis calculons I_0

Appliquons la relation de Chasles entre -1 et 1 .

$$\Rightarrow I_n = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = \int_{-1}^0 (t^2 - 1)^n dt + \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$$

Ainsi posons $A = \int_{-1}^0 (t^2 - 1)^n dt$ puis Effectuons un changement de variable.

Posons $t = -X \Rightarrow X = -t$. Alors $dt = -dX$

Si $t = -1$ alors $X = 1$ et Si $t = 0$ alors $X = 0$

$$\Rightarrow A = \int_{-1}^0 (t^2 - 1)^n dt = - \int_1^0 (t^2 - 1)^n dt = \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$$

$$\text{D'où } I_n = \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt + \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$$

$$\Rightarrow I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt \quad (\text{ce qu'il fallait démontrer})$$

En déduisons la valeur de I_0

$$I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt \Rightarrow I_0 = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^0 dt = 2 \int_0^1 1 dt = [2t]_0^1 = 2.$$

$$\Rightarrow I_0 = 2$$

2) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a : $I_n = -\frac{2n}{1+2n} I_{n-1}$

$$\text{On sait que } I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt \Rightarrow I_{n-1} = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^{n-1} dt$$

$$I_n = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^{n-1+1} dt = 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^{n-1} \times (t^2 - 1) dt$$

$$= 2 \int_0^1 t^2 (t^2 - 1)^{n-1} dt - 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^{n-1} dt$$

$$= 2 \int_0^1 t \times t (t^2 - 1)^{n-1} dt - 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^{n-1} dt$$

$$= \int_0^1 t \times 2t (t^2 - 1)^{n-1} dt - 2 \int_0^1 (t^2 - 1)^{n-1} dt = \int_0^1 t \times 2t (t^2 - 1)^{n-1} dt - I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \int_0^1 t \times 2t (t^2 - 1)^{n-1} dt - I_{n-1}$$

Intégrons par partie l'intégrale $\int_0^1 t \times 2t (t^2 - 1)^{n-1} dt$

Posons $u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$

$$v'(t) = 2t(t^2 - 1)^{n-1} \Rightarrow v(t) = \frac{(t^2-1)^n}{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t \times 2t(t^2 - 1)^{n-1} dt = \left[\frac{t \times (t^2-1)^n}{n} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(t^2-1)^n}{n} dx. \text{ Or } \left[\frac{t \times (t^2-1)^n}{n} \right]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t \times 2t(t^2 - 1)^{n-1} dt = -\frac{1}{2n} \int_0^1 2(t^2 - 1)^n dx = -\frac{1}{2n} I_n$$

$$\text{D'où } I_n = \int_0^1 t \times 2t(t^2 - 1)^{n-1} dt - I_{n-1} = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{2n} I_n - I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{2n} I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right) I_n = -I_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right) I_n = -I_{n-1} \Rightarrow I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

D'où $I_n = -\frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$ (ce qu'il fallait démontrer)

14

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$

1) Déterminons le seul réel a tel que : $\forall x \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x}$.

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{a \cos x}{1 + \sin x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x (1 + \sin x) + a \cos x (1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x (1 + \sin x + 1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{2a \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2a}{\cos x} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{2a}{\cos x}$$

Par identification, on a : $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$\text{D'où } \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{2(1 - \sin x)} + \frac{\cos x}{2(1 + \sin x)}$$

2) Calculons la valeur de I_0 .

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} \Rightarrow I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{2(1 - \sin x)} + \frac{\cos x}{2(1 + \sin x)} \right) dx$$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\cos x}{1 - \sin x} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$\Rightarrow I_0 = -\frac{1}{2} [\ln(1 - \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} [\ln(1 + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{4}}. \text{ Puisque } \frac{1}{2} \ln a = \sqrt{a}, \text{ alors :}$$

$$I_0 = \left[-\ln\sqrt{1 - \sin x} + \ln\sqrt{1 + \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\ln\sqrt{1 + \sin x} - \ln\sqrt{1 - \sin x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Puisque } \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}, \text{ alors } I_0 = \left[\ln \left(\frac{\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\ln \left(\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I_0 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \ln \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right)$$

3) Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$2nI_n = (2n - 1)I_{n-1} + \frac{2^{-n}}{\sqrt{2}} \left(\text{On pourra poser : } \frac{1}{\cos^{2n+1}x} = \frac{1}{\cos^{2n-1}x} \times \frac{1}{\cos^2x} \right)$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1}x} \Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n-1}x} \cdot \frac{1}{\cos^2x} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \frac{1}{\cos^{2n-1}x} \Rightarrow u'(x) = \frac{(2n-1)\sin x}{\cos^{2n}x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{\cos^2x} \Rightarrow v(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow I_n = \left[\frac{1}{\cos^{2n-1}x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)\sin x}{\cos^{2n}x} \times \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)\sin x}{\cos^{2n}x} \times \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)\sin^2 x}{\cos^{2n+1}x} dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2n-1)(1 - \cos^2 x)}{\cos^{2n+1}x} dx = \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^{2n+1}x} dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}x} dx + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\cos^{2n+1}x} dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}x} dx + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}x \cdot \cos^{-2}x} dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n+1}x} dx + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{2n-1}x} dx$$

$$= \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n}x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left[\frac{\sin x}{\cos^{2n} x} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} &= F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^{2n}} \right) - (0) = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n}} \right) = \left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n} \right] = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2^n = \sqrt{2} \times 2^n \times 2^{-1} = \sqrt{2} \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_n = \sqrt{2} \times 2^{n-1} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}. \text{ Or } \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2}{\sqrt{2}} \times 2^{n-1} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)I_n + (2n-1)I_{n-1} \Leftrightarrow I_n + (2n-1)I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (1+2n-1)I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} + (2n-1)I_{n-1} \Leftrightarrow 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on a : } 2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$$

15

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ 1) Calculons I_1 .

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \Rightarrow I_1 = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\int_0^1 -\frac{2}{2} x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{3} \left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} \left[(1-x^2) \sqrt{1-x^2} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow I_1 = F(1) - F(0) = (0) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

2) En intégrant par parties, montrons que $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (on posera $x^n = x \cdot x^{n-1}$)

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x \cdot x^{n-1} \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 x^{n-1} \cdot x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = x^{n-1} \Rightarrow u'(x) = (n-1)x^{n-2}$$

$$v'(x) = x \sqrt{1-x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{3} (1-x^2) \sqrt{1-x^2}. \text{ (D'après la question 1°)}$$

$$\Rightarrow I_n = \left[-\frac{1}{3} x^{n-1} \times (1-x^2) \sqrt{1-x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{3} (n-1) \int_0^1 x^{n-2} (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\Rightarrow I_n = \left[-\frac{1}{3} x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 + \frac{1}{3} (n-1) \int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Or } \left[-\frac{1}{3} x^{n-1} \times (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3} (n-1) \int_0^1 (x^{n-2} - x^n)\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3} (n-1) \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} (n-1) \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2} dx$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{3} (n-1) I_{n-2} - \frac{1}{3} (n-1) I_n \Leftrightarrow I_n + \frac{1}{3} (n-1) I_n = \frac{1}{3} (n-1) I_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{3} (n-1) \right) I_n = \frac{1}{3} (n-1) I_{n-2} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3} I_n = \frac{n-1}{3} I_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$(n+2) I_n = (n-1) I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}.$$

D'où $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ (ce qu'il fallait démontrer)

16

Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}} dx$ avec $n \in \mathbb{N}$

1) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante et majorée.

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$; on a : $x^{n+1} \leq x^n$

$$\Rightarrow 1 < 1 + x^{n+1} \leq 1 + x^n. \text{ D'où } \frac{1}{x^{n+1}} \leq \frac{1}{x^{n+1} + 1}$$

En intégrant sur $[0; 1]$; on a : $\int_0^1 \frac{1}{x^{n+1}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^{n+1} + 1} dx$ soit $I_n \leq I_{n+1}$

Ainsi on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$; I_n est croissante.

D'autre part $0 \leq x^n \leq 1$ donc $1 \leq x^n + 1 \leq 2$ d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n + 1} \leq 1$ et en intégrant sur

$$[0; 1]; \text{ on a : } \frac{1}{2} \leq I_n \leq 1 \quad (1)$$

I_n est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$. En déduisons la limite de la suite I_n .

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$; on a : $\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{x^{n+1} - x^n}{x^{n+1}} = 1 - \frac{x^n}{x^{n+1}}$

$$x^n + 1 \geq 1. \text{ D'où } \frac{1}{x^{n+1}} \leq 1 \text{ soit } -\frac{x^n}{x^{n+1}} \geq -x^n \Leftrightarrow 1 - \frac{x^n}{x^{n+1}} \geq 1 - x^n$$

En intégrant sur $[0 ; 1]$; on a : $\int_0^1 \left(1 - \frac{x^n}{x^{n+1}}\right) dx \geq \int_0^1 (1 - x^n) dx$.

D'où $I_n \geq 1 - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$ soit $I_n \geq 1 - \frac{1}{n+1}$.

A l'aide de la relation (1), on obtient $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$ et en utilisant le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

17 Soit l'intégrale I_n définie par : $I_n(x) = \int_1^x t^n \ln t \, dx$ ($n \in \mathbb{N} - \{-1\}$ et $x > 0$)

1) En utilisant une intégration par parties ; calculons $I_n(x)$

Posons $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = t^n \Rightarrow v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_n(x) &= \left[\frac{t^{n+1} \times \ln t}{n+1} \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)} dx = \left[\frac{t^{n+1} \times \ln t}{n+1} \right]_1^x - \frac{1}{n+1} \int_1^x t^n dx \\ &= \left[\frac{t^{n+1} \times \ln t}{n+1} \right]_1^x - \frac{1}{n+1} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_1^x = \left[\frac{t^{n+1} \times \ln t}{n+1} \right]_1^x - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^x \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{t^{n+1} \times \ln t}{n+1} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^x = \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^x$$

$$\Rightarrow I_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1} \ln x - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2}$$

2) En déduisons le calcul de $J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt$

$$J_n(x) = \int_1^x t^n (\ln t)^2 dt = \int_1^x t^n \times \ln t \times \ln t dt = \int_1^x \ln t \times t^n \ln t dt$$

Posons $u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = t^n \ln t \Rightarrow v(t) = \frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{t(n+1)^2} dx.$$

$$= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t}{t(n+1)^2} dx + \int_1^x \frac{t^{n+1}}{t(n+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{t^n \times \ln t}{n+1} dx + \int_1^x \frac{t^n}{(n+1)^2} dx \\
 &= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t \right]_1^x - \frac{1}{n+1} \int_1^x t^n \times \ln t dx + \frac{1}{(n+1)^2} \int_1^x t^n dx \\
 &= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t \right]_1^x - \frac{1}{n+1} I_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_1^x \\
 &= \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t \right]_1^x - \frac{1}{n+1} \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^x + \frac{1}{(n+1)^2} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_1^x
 \end{aligned}$$

Avec $I_n(x) = \left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^x$

$$\Rightarrow J_n(x) = \left[\left[\frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^2} \right] \ln t - \frac{(n+1)t^{n+1} \times \ln t - t^{n+1}}{(n+1)^3} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)^3} \right]_1^x$$

$$\Rightarrow J_n(x) = F(x) - F(1) = \frac{(n+1)x^{n+1} \times \ln x [(n+1)\ln x - 2] - 2}{(n+1)^3}$$

3) a) Calculons $I_n(e) - J_n(e)$.

$$I_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1} \ln x - x^{n+1} + 1}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad J_n(x) = \frac{(n+1)x^{n+1} \times \ln x [(n+1)\ln x - 2] - 2}{(n+1)^3}$$

$$\Rightarrow I_n(e) - J_n(e) = \frac{(n+1)(e^{n+1} + 1) + 2}{(n+1)^3}$$

b) Déterminons la limite de $\frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)(e^{n+1} + 1) + 2}{(n+1)^3}}{e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(e^{n+1} + 1) + 2}{(n+1)^3 e^{n+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^{n+1}}{n^3 e^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{D'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n(e) - J_n(e)}{e^{n+1}} = 0$$

Intégrales linéaires

18 Soient les intégrales I et J définies par : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$

1) Calculons I

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow I = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$$

$$\Rightarrow I = 1$$

2) Soit la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$.

a- Montrons que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\text{Posons } u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$$

$$\begin{aligned} v(x) &= \cos^3 x \Rightarrow v'(x) = -3\sin x \cos^2 x \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(\cos x)(\cos^3 x) - (-3\sin x \cos^2 x)(\sin x)}{(\cos^3 x)^2} = \frac{\cos^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\ &= \frac{\cos^2 x (\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + 3 - 3\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3 - 2\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}.$$

b- En déduisons une relation entre I et J.

On sait que : $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$. En intégrant $f'(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^4 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = 3J - 2I. \text{ Or } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) = 2$$

$$\Rightarrow 3J - 2I = 2$$

c- Calculons J.

$$3J - 2I = 2 \Rightarrow J = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}I = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(1) = \frac{4}{3}. \text{ D'où } J = \frac{4}{3}$$

19 Soient les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

1) Calculons $I - J$ et $I + J + K$

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \quad \text{et} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Rightarrow I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \Rightarrow I - J = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

$$\Rightarrow I - J = 0$$

Calcul de $I + J + K$

$$\begin{aligned} I + J + K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I + J + K = \frac{\pi}{2}$$

2) Calculer : $I + J - 3K$ puis en déduire les valeurs de I ; J et K .

$$\begin{aligned} I + J - 3K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx - 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 x \cos^2 x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x \sin x)^2 dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx = \left[\frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0 \\
\Rightarrow I + J - 3K &= 0
\end{aligned}$$

Ainsi pour en déduire les valeurs de I ; J et K ; on forme le système avec les équations :

$$I - J = 0 ; I + J + K = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I + J - 3K = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I - J = 0 & (1) \\ I + J + K = \frac{\pi}{2} & (2) \\ I + J - 3K = 0 & (3) \end{cases}$$

L'équation (1) donne $I - J = 0 \Rightarrow I = J$ puis en remplaçant I par J dans les équations (2) et (3), on a :

$$\begin{cases} J + J + K = \frac{\pi}{2} \\ J + J - 3K = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J + K = \frac{\pi}{2} \\ 2J - 3K = 0 \end{cases}$$

La résolution de Ce système Donne: $J = \frac{3\pi}{16}$ et $K = \frac{\pi}{8}$.

En remplaçant J par sa valeur dans l'équation (1), on a : $I = \frac{3\pi}{16}$

20 Soient les intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Calculons $I + J$ et $I - J$ puis en déduisons les valeurs de I et J .

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I + J = \frac{\pi}{2}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\cos x + \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx = [\ln(\cos x + \sin x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 0$$

$$\Rightarrow I - J = 0$$

Ainsi pour en déduire les valeurs de I et J ; on forme le système avec les équations :

$$I + J = \frac{\pi}{2} \text{ et } I - J = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases}$$

La résolution de Ce système Donne: $I = \frac{\pi}{4}$ et $J = \frac{\pi}{4}$.

21 On se propose de calculer l'intégrale J définie par $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3} dx$

1) Calculons les deux intégrales A et B tel que $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

$$A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \Rightarrow A = [\ln(1+e^x)]_0^1 \Rightarrow A = F(1) - F(0) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx \Rightarrow B = \left[\ln\left(\frac{-1}{1+e^x}\right) \right]_0^1 \Rightarrow B = F(1) - F(0) = \frac{e-1}{2(1+e)}$$

2) Déterminons les réels a ; b et c tel que : $\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1)

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(1+t)^2} = \frac{a(1+t)^2 + bt(1+t) + ct}{(1+t)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{(a+b)t^2 + (2a+b+c)t + a}{(1+t)^2}$$

Par identification ; on a : $a = 1$; $b = -1$ et $c = -1$

$$\text{D'où } \frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2} \quad (1)$$

3) En posant $t = e^x$ dans l'égalité (1), calculons $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx$

$$\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - \frac{t}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2} \text{ En posant } t = e^x; \text{ on a :}$$

$$\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } I &= \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx - \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^1 1 dx - A - B \\ &= [x]_0^1 - A - B = 1 - A - B = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) - \frac{e-1}{2(1+e)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3+e}{2(1+e)} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

4) a- A l'aide d'une intégration par partie, exprimons J en fonction de I .

$$J = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+e^x)^3} dx = \int_0^1 x \cdot \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \Rightarrow v(x) = \frac{-1}{2(1+e^x)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2(1+e^x)^2} dx = \left[\frac{-x}{2(1+e^x)^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2} dx \\ \Rightarrow J &= \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} I \end{aligned}$$

b- En déduisons la valeur de J .

$$\begin{aligned} J &= \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} I. \text{ Or } I = \frac{3+e}{2(1+e)} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \\ \Rightarrow J &= \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{3+e}{2(1+e)} - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \right] = \frac{-1}{2(1+e)^2} + \frac{3+e}{4(1+e)} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \\ &= \frac{1+4e+e^2}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+e}{2}\right). \text{ D'où } = \frac{1+4e+e^2}{4(1+e)^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+e}{2}\right). \end{aligned}$$

22 On considère les intégrales $I = \int_0^\pi \cos^4 x dx$ et $J = \int_0^\pi \sin^4 x dx$.

1) a- Montrons que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \cos^4 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x \times \cos^2 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x \times (1 - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^\pi \cos x \times \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx \end{aligned}$$

$$\text{D'où } I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$$

b- A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$

$$I = \int_0^\pi \cos x (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \cos x \Rightarrow u'(x) = -\sin x$$

$$v'(x) = \cos x - \cos x \sin^2 x \Rightarrow v(x) = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$\Rightarrow I = \left[\left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\sin^2 x + \frac{1}{3} \sin^4 x \right) dx$$

$$\text{Or } \left[\left(\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right) \cos x \right]_0^\pi = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= - \int_0^\pi \left(-\sin^2 x + \frac{1}{3} \sin^4 x \right) dx = \int_0^\pi \left(\sin^2 x - \frac{1}{3} \sin^4 x \right) dx \\ &= \int_0^\pi \sin^2 x dx - \int_0^\pi \frac{1}{3} \sin^4 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^4 x dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J$$

c- Montrons de même que $J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$

$$J = \int_0^\pi \sin^4 x dx.$$

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \sin^4 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x \times \sin^2 x dx = \int_0^\pi \sin^2 x \times (1 - \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^\pi \sin x \times \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int_0^\pi \sin x (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx \end{aligned}$$

Ainsi intégrons par parties $\int_0^\pi \sin x (\sin x - \sin x \cos^2 x) dx$

$$\text{Posons } u(x) = \sin x \Rightarrow u'(x) = \cos x$$

$$v'(x) = \sin x - \sin x \cos^2 x \Rightarrow v(x) = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

$$\Rightarrow J = \left[\left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \cos x dx$$

$$\text{Or } \left[\left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right) \sin x \right]_0^\pi = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J &= - \int_0^\pi \left(-\cos^2 x + \frac{1}{3} \cos^4 x \right) dx = \int_0^\pi \left(\cos^2 x - \frac{1}{3} \cos^4 x \right) dx \\ &= \int_0^\pi \cos^2 x dx - \int_0^\pi \frac{1}{3} \cos^4 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3} \int_0^\pi \cos^4 x dx \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$$

$$2) \text{ a- Montrons que } I + J = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{On sait que : } I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$$

$$I = \int_0^\pi \sin^2 x dx - \frac{1}{3}J \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 x dx - \frac{1}{3}I$$

$$\Rightarrow I + J = \int_0^\pi (\cos^2 + \sin^2 x) dx - \frac{1}{3}(I + J) = \int_0^\pi dx - \frac{1}{3}(I + J)$$

$$\Rightarrow I + J = [x]_0^\pi - \frac{1}{3}(I + J) = \pi - \frac{1}{3}(I + J)$$

$$\Rightarrow I + J = \pi - \frac{1}{3}(I + J) \Leftrightarrow 3(I + J) = 3\pi - (I + J) \Leftrightarrow 3(I + J) + (I + J) = 3\pi$$

$$\Leftrightarrow 4(I + J) = 3\pi \Rightarrow I + J = \frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{b- Montrons que } J - I = 0$$

$$\text{De même : } I - J = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi - \frac{1}{3}(I - J) = \frac{1}{3}(I - J)$$

$$\Rightarrow I - J = \frac{1}{3}(I - J) \Leftrightarrow 3(I - J) = I - J \Leftrightarrow 3(I - J) - (I - J) = 0 \Leftrightarrow 2(I - J) = 0$$

$$\Rightarrow I - J = 0$$

c- En déduisons les intégrales I et J .

Ainsi pour en déduire les valeurs de I et J ; on forme le système avec les équations :

$$I + J = \frac{\pi}{2} \text{ et } I - J = 0$$

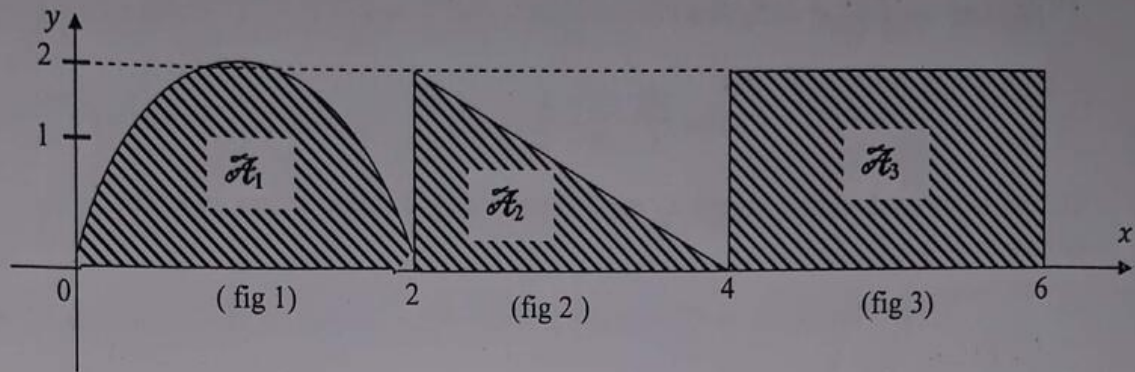
$$\Rightarrow \begin{cases} I + J = \frac{3\pi}{4} \\ I - J = 0 \end{cases}$$

La résolution de Ce système Donne: $I = \frac{3\pi}{8}$ et $J = \frac{3\pi}{8}$

Calculs d'aires

23

On donne les cas de figures suivantes dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.



1) Calculons l'aire \mathcal{A}_1 ; \mathcal{A}_2 et \mathcal{A}_3 du domaine plan hachurer dans les cas des figures : (fig 1) ; (fig 2) et (fig 3).

La figure (1) représente un demi-cercle :

L'aire d'un cercle est : πr^2 . Alors l'aire du demi-cercle représentée sur la figure est :

$$\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2} \pi r^2 \text{ avec } r = 1\text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_1 = \frac{\pi}{2} = 1,57\text{ cm}^2$$

La figure (2) représente un triangle :

L'aire d'un triangle est : $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ alors l'aire du triangle représentée sur la figure est :

$$\mathcal{A}_2 = \frac{2 \times 2}{2} \text{ avec } \text{base} = 2\text{ cm} \text{ et } \text{hauteur} = 2\text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_2 = 2\text{ cm}^2$$

La figure (3) représente un rectangle :

L'aire d'un rectangle est : **Longueur + largeur**. Alors l'aire du triangle représentée sur la figure est :

$$\mathcal{A}_3 = 2 + 2 \text{ avec } \text{Longueur} = 2\text{ cm} \text{ largeur} = 2\text{ cm} \Rightarrow \mathcal{A}_3 = 4\text{ cm}^2$$

2) En déduire l'aire totale hachurée.

Ainsi l'aire totale hachurée est : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = (1,57 + 2 + 4)\text{ cm}^2$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = 7,57\text{ cm}^2$$

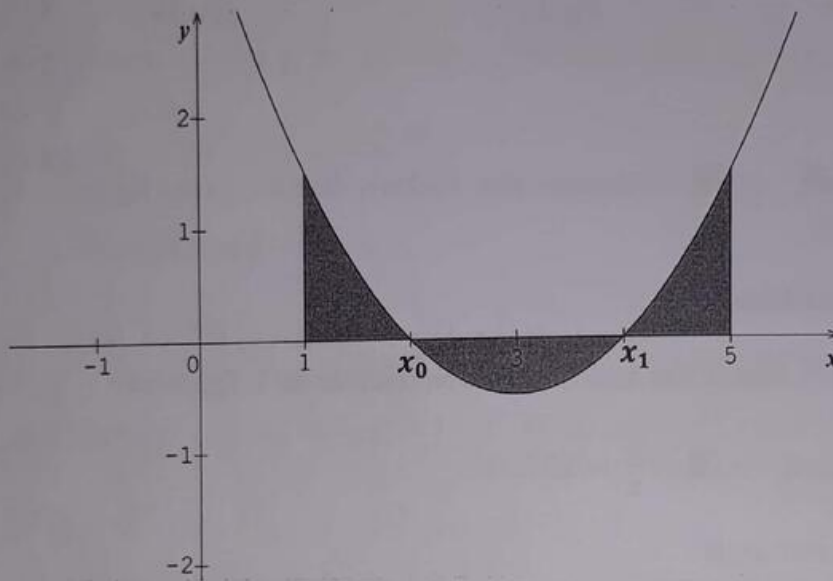
24 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

1) Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_1^5 f(x)dx$

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^5$$

$$\Rightarrow \int_1^5 f(x)dx = F(5) - F(1) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

2) Ci-dessous est donnée la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$.



On souhaite déterminer la valeur de l'aire du domaine plan grisé.

a- Déterminons les zéros x_0 et x_1 de la fonction f (avec $x_0 < x_1$).

En observant le graphique, on remarque que $x_0 = 2$ et $x_1 = 4$

b- Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx$.

$$\int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx + \int_4^5 \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_1^2 + \left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_4^5 = \left(\frac{3}{2}\right) + (6) = \frac{15}{2}$$

c- Déterminons la valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ c'est-à-dire $\int_2^4 f(x)dx$

D'après le graphique on a : $\int_1^5 f(x)dx = \int_1^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx$.

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^{x_0} f(x)dx - \int_{x_1}^5 f(x)dx. \text{ Or } x_0 = 2 \text{ et } x_1 = 4$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx - \int_4^5 f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \left(\int_1^2 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx \right) = \left(\frac{2}{3} \right) - \left(\frac{15}{2} \right) = -\frac{41}{6}$$

d- En déduisons l'aire de la partie grisée sur le graphique. (Unité graphique : 2cm)

$$\mathcal{A} = \left(\frac{2}{3} \right) (2cm)^2 = \frac{8}{3} cm^2$$

Chapitre 6

Fonctions logarithme
COURS1- Définition :

On appelle fonction Logarithme Népérien notée (\ln), la primitive de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ qui prend la valeur 0 en 1 sur l'intervalle $]0; +\infty[$

2- Ensemble de définition des fonctions logarithmiques :

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow Df =]0; +\infty[$
- Si $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; ax + b > 0\}$
- Si $f(x) = \ln[u(x)] \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; \frac{u(x)}{v(x)} > 0\}$
- Si $f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow Df = \{x/x \in \mathbb{R}; u(x) \neq 0\}$

3- Propriétés Remarquables :

$\forall a > 0$ et $\forall b > 0$, on a les propriétés suivantes:

- $P_1: \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ $P_6: \ln\sqrt{a} = \ln a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln a$
- $P_2: \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $P_7: \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $P_3: \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ $P_8: \ln e^a = a$ et $e^{\ln a} = a$
- $P_4: \ln(a)^n = n \ln a$ $P_9: \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$
- $P_5: \ln e = 1$ et $\ln 1 = 0$ $P_{10}: \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $P_{11} \ln(a) \geq \ln(b) \Leftrightarrow a \geq b$

4- Limites remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x n \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^n} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad (\text{Nombre dérivé de la fonction } \ln \text{ au point } 1)$$

5- Dérivées logarithmiques:

La dérivée logarithmique d'une fonction u , est la dérivée de $\ln|u|$

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Si $f(x) = \ln|ax + b| \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{ax+b}$
- Si $f(x) = \ln(U(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si $f(x) = \ln\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln(U(x) \cdot v(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$
- Si $f(x) = \ln[u(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n \frac{u'(x)}{u(x)}$

6- Primitives remarquables :

En appliquant la technique de l'intégration par parties, calcule une primitive des fonctions :
 $x \rightarrow \ln x$ et $x \rightarrow \ln(ax + b)$. Ainsi on retiendra :

- Si $f(x) = \ln x \Rightarrow F(x) = x \ln x - x + k$
- Si $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax + b) - x + k$
- Si $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \Rightarrow F(x) = \ln|u(x)| + k$

7- Fonction logarithme de base a :a) Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base a , la fonction définie par : $\log_a(x) : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

N.B : Lorsque $a = 10$, la fonction logarithme de base 10 est appelé fonction logarithme décimale. Ainsi la fonction logarithme d'un nombre réel positif est noté $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$M = \frac{1}{\ln 10}$ est appelée la **Mantisse** du logarithme décimal ; ainsi $\log x = M \cdot \ln x$.

b) Propriétés :

$$P_1 : \log(ab) = \log a + \log b$$

$$P_3 : \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$P_2 : \log(a)^n = n \log a$$

$$P_4 : \log(10)^n = n$$

$$P_5 : (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

8- Etude de la fonction $\log_a(x)$:

Soit $f(x) = \log_a(x)$ et de courbe représentative (C_a) .

1^{er} Cas : $0 < a < 1$ ($\ln a < 0$)

$$Df =] 0 ; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C) .

$(x'Ox)$ est branche parabolique (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} < 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

$$- (C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

$$- (C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0 \text{ et } f(0) = \ln(0) \text{ qui n'existe pas.}$$

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

2^{ème} Cas : $a > 1$ ($\ln a > 0$)

$$Df =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Alors la courbe (C) admet des branches : $x = 0$ est asymptote verticale pour la courbe (C).

($x'Ox$) est branche parabolique (car $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0$$

D'où le tableau de variation est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

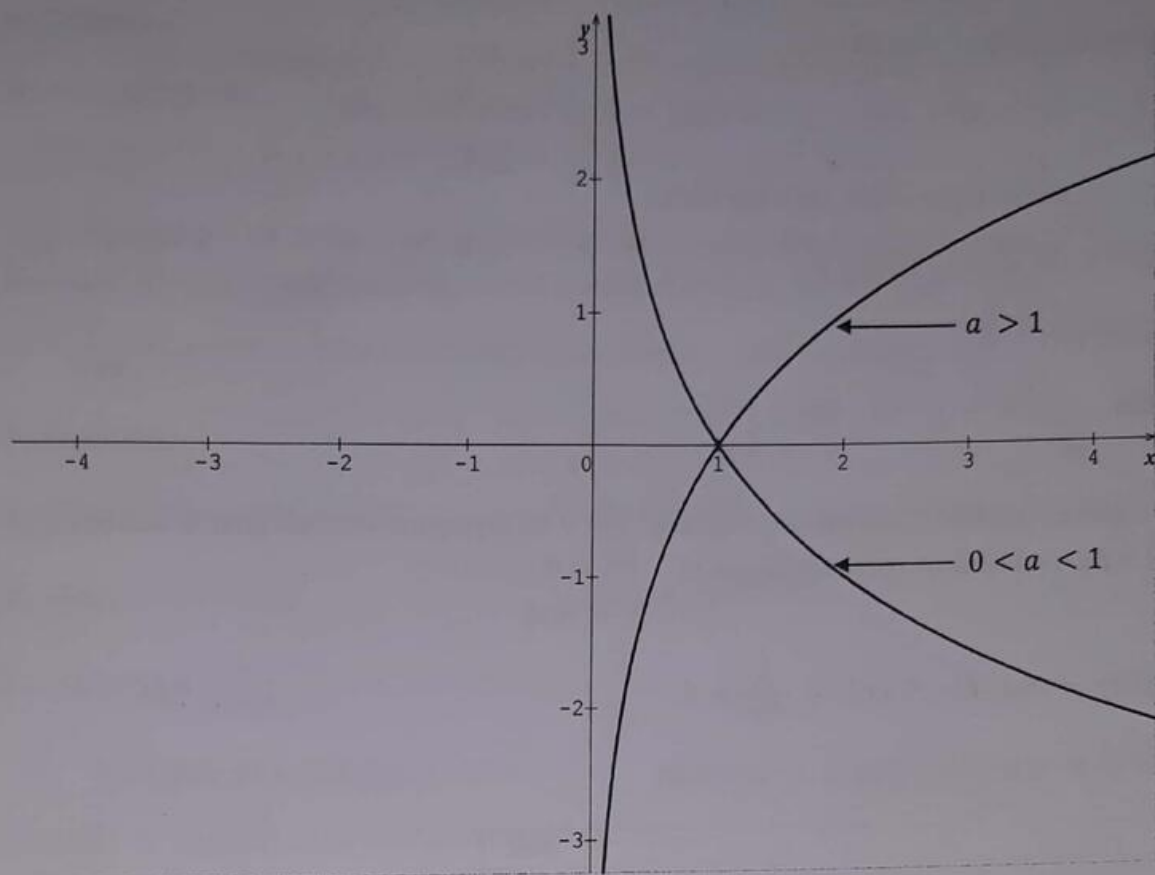
$$- (C) \cap (OX) \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1$$

Donc (C) coupe l'axe (ox) en 1

$$- (C) \cap (OY) \Rightarrow x = 0 \text{ et } f(0) = \ln(0) \text{ qui n'existe pas.}$$

Donc (C) ne coupe pas l'axe (oy).

NB : dans tous les cas, $\log_a(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

ReprésentationEXERCICES

Propriétés de la fonction logarithme

- 1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprimé en fonction de $\ln 2$ les réels suivants :

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2} ; B = \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 + \sqrt{2})$$

$$C = \ln 2\sqrt{2} + \ln 4 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2^3} ; D = \ln 64 + \frac{5}{3} \ln 8 - \ln \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

- 2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a- $\ln(2x + 7) = \ln(x - 3)$; b- $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7)$

c- $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3)$; d- $\ln(x - 3) = \ln(x + 7) - \ln(x + 1)$.

e- $\ln(2x - 2) + \ln(x + 2) = 3\ln 2$; f- $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = 2\ln(x + 1)$.

$$g- \ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x ; \quad h- \ln|x-1| + \ln|2x-1| = 0$$

$$i- (\ln x)^2 - 7\ln x + 6 = 0 ; \quad j- 3[\ln(x+1)]^2 - 2\ln(x+1) - 5 = 0$$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$a- \ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0 ; \quad b- \ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3$$

$$c- \ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

$$a- \begin{cases} x+y=15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases} ; \quad b- \begin{cases} x^2+y^2=15 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases} ; \quad c- \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 \\ 4\ln x + \ln y = 3 \end{cases}$$

$$d- \begin{cases} \ln x \times \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} ; \quad e- \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases}$$

2 La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est $M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

1) Calculer $\ln a$ sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$.

2) En déduire la magnitude apparente des astres suivants :

$$a- \text{Soleil} : E = 4,786 \times 10^{10} E_0 \quad ; \quad b- \text{Lune} : E = 1,2 \times 10^5 E_0$$

3 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calculer $q(1)$ puis résoudre les équations $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$

2) En déduire la résolution de :

$$a- \text{l'équation} : 2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0$$

$$b- \text{l'inéquation} : 2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 \geq 0$$

Application des limites de la fonction logarithme

4 Calculer la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

$$1) f(x) = \ln(2-x) ; \quad 2) f(x) = \ln(-x^2+2x+3) ; \quad 3) f(x) = (x+1)\ln x - x$$

$$4) f(x) = \ln|-x^2+2x+3| ; \quad 5) f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) ; \quad 6) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

$$7) f(x) = x^3 - x - 2\ln x + 1 ; \quad 8) f(x) = \frac{\ln|\cos x|}{x^2} ; \quad 9) f(x) = (2x-1)\ln(2x-1)$$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

5 1) Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a- $f(x) = \ln(2x + 7)$; b- $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$; c- $f(x) = (x + 7)\ln(3x + 2)$

d- $f(x) = \ln\sqrt{2x - 3}$; e- $f(x) = [\ln(x + 1)]^3$; f- $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)$

g- $f(x) = \ln(x^3 - x)(x^2 + 2)$; h- $f(x) = \sqrt{x - 1} \ln(-x + 1)$

2) Calculer la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = \ln(2x + 7)$; b- $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}$; c- $f(x) = \frac{-x + 1}{x^2 - 2x - 5}$

d- $f(x) = \ln(3 - x)$; e- $f(x) = \frac{7}{2x - 5}$; f- $f(x) = \ln x + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x - 5}$

g- $f(x) = \frac{2}{x \ln x}$; h- $f(x) = \frac{2 - \frac{2}{x}}{x - \ln x}$

6 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tel que $\forall x \in]1; +\infty[$

On ait $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$

2) En déduire une primitive de la fonction g sur $]1; +\infty[$

Problèmes

Partie A :

7 Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dresser le tableau de variation de g .

2) Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$

3) a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f .

b) Etudier le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduire la position de (C) et (Δ).

4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.

8

Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

- 1- Etudier les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
- 2- Dresser le tableau de variation de g puis en déduire son signe sur $]0; +\infty[$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

- 1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C), puis étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) .
- 2) Déterminer les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ) .
- 3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0,5; 1[$
- 4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.
- 5) Hachurer puis calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C); la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

9

Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

- a- Dresser le tableau de variation de g .
- b- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $1,89 < \alpha < 1,90$.
- c- Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

- a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$
- c) Tracer (C) dans le repère.

Partie B :

On considère la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

- 1) a) Prouver que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et préciser $F'(x)$.
b) En déduire le sens de variation de F .

2) a) Vérifier que $\forall t \geq 1$; on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$

- A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, calculer $J(x)$.
- c) Dédurre de ce qui précède que $\forall x > 1$; on a :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$
- d) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ vérifier que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

10

L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$

- Déterminer Dg et déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Etudier les variations de g ; on ne demande pas de calculer ses limites en -1 et en 0 .
- Calculer $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis démontrer que l'on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[; g(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini.

- Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$h : t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad k : t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

Après une brève étude sur $[0; +\infty[$ des fonctions h et k ; démontrer que :

$$\forall t \geq 0; \text{ on a : } t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

- En déduire que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

- En utilisant les résultats précédents, démontrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Donner une interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Partie C : Etude de la fonction f .

- Déterminer Df et déterminer la limite de f en -1

- 2) Etudier la continuité de f en 0
- 3) Démontrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$
- 4) Calculer la dérivée de f et démontrer que $f'(x) = x \times g(x)$
- 5) Dresser le tableau de variations de f
- 6) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0
Déterminer les asymptotes à (Cf) .
- 7) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.
- 8) Tracer (T) ; les asymptotes et la courbe (Cf)

11 **Partie A :**

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ) , cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

- 1) Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$
 - a) Montrer que la fonction g est dérivable et que $\forall x \in Dg \quad g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$
 - b) Etudier les variations de la fonction g puis déterminer le signe de $g(x)$.
- 2) a- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b- Montrer que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donner le tableau de variations de la fonction f .

Partie B :

Γ désigne la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

- 1) Etudier le sens de variation de h puis montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$
- 2) Montrer que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$
- 3) a- Vérifier que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.
b- Utiliser les résultats de la question 1) pour déterminer les positions relatives de Γ et Δ .
- 4) Construire Γ et Δ dans le repère ortho normal $(o; \vec{i}; \vec{j})$
- 5) a- Calculer au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$
b- En déduire l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe Γ , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$
- α est le réel mis en évidence au **B. 1**.
- φ est la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = e^{-x}$

- 1) u est la suite récurrente définie par $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$
Montrer qu'on a pour tout $x \in I$:

- a) $\varphi(x) \in I$
 b) $|\varphi'(x)| \leq 0,7$
 c) $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$
 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$ puis en déduire par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$
 b) Conclure alors quant à la convergence de la suite u .
 3) Déterminer un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donné à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.
 En déduire une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3} près

12

Partie A : On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites aux bornes de cet ensemble.
 b) Déterminer la fonction dérivée de f et établir son tableau de variations.
 2) Démontrer que $\forall x \in]1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
 Vérifier qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près est 3,9.
 3) Préciser, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

- 1) Démontrer que g est continue en 0. Etudier la dérivabilité de g en 0.
 2) Calculer $g'(t)$ et exprimer $g'(t)$ en fonction de $f(t)$
 3) a) Déterminer la limite en $+\infty$ de g .
 b) Dresser le tableau des variations de g .
 4) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$. Construire la courbe (Γ) représentative de g .

Partie C : Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire A , en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

- 1) a) Démontrer que la fonction g_1 définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$ est dérivable en 0.
 b) Soit φ la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$
 Démontrer que φ est dérivable en tout point de $[0 ; +\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$
 2) En déduire que $A = \int_0^1 g(t) dt = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$
 3) Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ et k la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = \tan^2 \theta$
 a) Calculer $(h \circ k)(0)$
 b) Prouver que $\forall \theta \in I$; on a : $(h \circ k)'(\theta) = 4 \tan^2 \theta$

c) En écrivant $\tan^2\theta = (\tan^2\theta + 1) - 1$; déterminer une primitive de $(hok)'$ puis donner l'expression de (hok)

d) Calculer $h(1)$

4) déduire des résultats précédents la valeur exacte de A.

13 Partie A :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Calculer les limites aux bornes de D_f puis en déduire que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a-Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse l où l est le point d'inflexion de la courbe (C) .

b-Etudier la position de (C) et (T) puis tracer (C) et (T) dans le même repère.

5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$.

a-Calculer I en utilisant une intégration par parties.

b-En déduire en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C) , la tangente

(T) et la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par

$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x)$ où f est la fonction définie dans la Partie A :

1) Vérifier que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{\sin x}$$

2) Calculer l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$

Soit l'intégrale (I_n) ; n appartenant à \mathbb{N} définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$.

a-Calculer I_0 et I_1

b- Calculer l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^n x dx$

c- En déduire l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n puis calculer I_2 ; I_3 et I_4

14 PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - \ln x$. On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudier les branches infinies de la courbe C_g .

3) Etudier les variations de g .

4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.

- Déterminer un encadrement de α
- 5) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x .
Interpréter graphiquement le résultat.
 - 6) a- Tracer la courbe C_g .
a- Discuter graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m , le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x\ln x}$. On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

- 1) a) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $x > \ln x$.
b) justifier que la fonction f est bien définie sur $]0; +\infty[$.
- 2) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?
- 3) a- Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-x\ln x)^2}$
b- Dresser le tableau de variation de f .
- c - Montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$ puis en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- 4) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse 1.
- 5) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis tracer la courbe (C_f) et la tangente (T) dans le même repère.
- 6) a- Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln x}$
b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
Montrer que $A(\alpha) = 2\ln(\alpha - 1)$ puis en déduire un encadrement de $A(\alpha)$.
- 7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale à .
a- Calculer $a_n = \int_1^n f(x)dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.
b- Calculer la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t)dt$. On désigne par (Ch) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

- 1) a- Montrer que $h(x) = \ln(e^x - x)$.
b- Montrer que pour tout nombre réel , on a : $e^x > x$.
- 2) a- Calculer limite de $h(x)$ puis limite de $\frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

b- Montrer que pour tout nombre réel , on a : $h(x) = x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)$.

- En déduire de $\lim h(x)$ en $+\infty$
- 3) Etudier la position relative de (Ch) et de $(\Delta): y = x$
 - 4) Dresser le tableau de variation de h puis tracer (Ch) .

15 PARTIE A :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$. On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

- 1) Montrer que f est impaire.
- 2) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} puis montrer que sa dérivée $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Etudier les branches infinies de la courbe (Cf) .
- 5) Trouver une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.
- 6) Préciser la position de (T) et (Cf) .
- 7) Tracer la droite (T) et la courbe (Cf) .
- 8) Soit α un réel strictement positif. Calculer en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

PARTIE B :

- 1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on précisera.
- 2) Construis dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g .
- 3) Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.
- 4) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left] \frac{-\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2} \right[$.
- 5) Calculer en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (Cf) et (Cg) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

- 1) Montrer que φ est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donner les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.
- 3) Etudier puis représenter le fonction h sur $]-1 ; 1[$.

16

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C est défini sur $[0 ; 10]$ par $C(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$.

Le but du problème est d'étudier le coût total C_t et le coût moyen C_m de la production, puis de minimiser le coût moyen. Les coûts sont exprimés en milliers de francs.

Partie A : Etude de la fonction C_t

- 1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x de $[0 ; 10]$; $C(x) = ax + \frac{b}{x + 1}$.
- 2) La fonction C_t est la primitive de C qui s'annule pour $x = 0$. Déterminer C_t .

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire f .

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1)$

- 1) Montrer que $\forall x \in [0 ; 10]$ la dérivée f' de f est donnée par $f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$
- 2) Dresser le tableau de variation de f sur $[0 ; 10]$. On admettra que la fonction f s'annule pour $\alpha = 1,712$

Partie C : Etude du coût moyen C_m

La fonction C_m est définie sur $]0 ; 10[$ par $C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}$

- 1) Calculer la dérivée C'_m puis Vérifier que $C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire introduite dans la **partie B**
- 2) Etudier le sens de variation de C_m sur $]0 ; 10[$
- 3) Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum et quel est ce coût ?

17 **Partie A :**

Soit la fonction numérique f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = \ln(2x + 4)$.

- 1) Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe sur $[0 ; 10]$. Établir le tableau de variation de f .
- 2) Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide de valeurs décimales arrondies à 0,1 près par excès.

x	0	1	2	4	6	8	10
$f(x)$							

- 3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm), dessiner avec soin la représentation graphique de f .

Partie B

On note (Cf) ; la courbe représentative de la fonction f étudiée dans la **partie A** et (D) ; la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$

- 1) Dans le plan utilisé à la **partie A** tracer la droite (D) . On appelle A et B les points d'intersection entre (Cf) et (D) , A désignant celui d'abscisse positive.
- 2) On se propose de déterminer un encadrement de l'abscisse a de A . Pour cela, on définit sur l'intervalle $I = [0 ; 10]$. la fonction h par $h(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4)$
 - a- Étudier sur I le sens de variation de h et dresser le tableau de variation correspondant.
 - b- Soit a la solution dans I de l'équation $h(x) = 0$. Reproduire puis compléter le tableau suivant afin d'en déduire un encadrement de a , d'amplitude 0,1.

x	5,2	5,3	5,4	5,5
$h(x)$				

Partie C

Une usine fabrique mensuellement x produits ($0 \leq x \leq 10$). Chaque mois, les frais de production sont donnés par $f(x) = \ln(2x + 4)$; la recette obtenue en vendant x produits, au prix unitaire de 50.000 FCFA, s'exprime par $g(x) = \frac{1}{2}x$ (frais et recette en centaines de milliers de FCFA).

- 1) Montrer que le bénéfice mensuel de l'usine est exprimé par $B(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4)$
- 2) L'usine réalise-t-elle un bénéfice lorsqu'elle vend chaque mois :
 - a- 4 produits ?
 - b- 7 produits ?
- 3) Quel nombre minimal de produits faut-il vendre mensuellement pour être bénéficiaire ?

18 **Partie A**

On considère la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + 3\ln(x + 1)$.
Où a et b sont deux réels et soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o ; \vec{i} ; \vec{j})$ (Unité graphique 2cm).

- 1) Déterminer les réels a et b sachant que (Cf) passe par $A(0 ; 5)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
- 2) Dans la suite du problème on considère la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x + 1).$$

- a- Calculer la dérivée $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f .
- b- Préciser la valeur exacte du maximum de f .

- 3) Tracer la courbe (Cf) et ses asymptotes éventuelles dans le repère.
- 4) a- Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Avec $\alpha < 0 < \beta$
- b- Calculer $f(-0,9)$; $f(-0,8)$; $f(5,2)$ et $f(5,3)$ puis en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α et β .
- c- En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -1 ; +\infty[$
- 5) Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = (x + 1)\ln(x + 1) - x$.
Calculer $g'(x)$ puis en déduire une primitive de f qui s'annule en 0.

Partie B

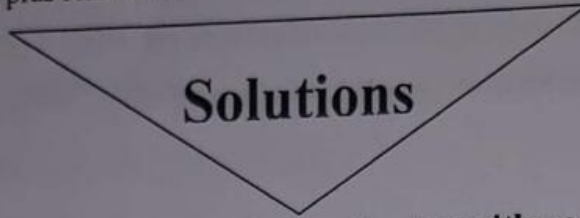
Une entreprise a une capacité de production de 5.000 ouvrages par jour.
Une étude a montré que le coût marginal de production de cette entreprise peut être par $f(q)$ en (milliers de francs) où q désigne la quantité d'ouvrages imprimés en (milliers d'unités). On rappelle que le coût marginal est la dérivée du coût de production.

- 1) a- Calculer $\int_0^5 f(q) dq$
- b - En déduire le coût total en (francs) de production de 5.000 ouvrages.

2) L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8.000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités suivantes :

- 5.000 ouvrages le premier jour et 3.000 ouvrages le second jour.
- 4.000 ouvrages pendant deux jours ;

Quelle est l'option la plus rentable ?



Propriétés de la fonction logarithme

1

1) En utilisant les propriétés logarithmiques, exprimons en fonction de $\ln 2$ les réels suivants :

$$A = \ln 8 + \frac{1}{2} \ln 16 - \ln \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = \ln 2^3 + \frac{1}{2} \ln 2^4 - \ln 2^{\frac{1}{2}} = 3 \ln 2 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 \Rightarrow A = \frac{9}{2} \ln 2$$

$$B = \ln(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(2 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow B = \ln \left[(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 + \sqrt{2}) \right]$$

$$= \ln \left[\left((2)^2 - (\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 \right) (2 + \sqrt{2}) \right] = \ln \left[(4 - (2 + \sqrt{2})) (2 + \sqrt{2}) \right]$$

$$= \ln \left[(4 - 2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) \right] = \ln(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = \ln \left[(2)^2 - (\sqrt{2})^2 \right]$$

$$= \ln(4 - 2) = \ln 2 \Rightarrow B = \ln 2$$

$$C = \ln 2\sqrt{2} + \ln 4 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \ln \sqrt{2^3}$$

$$\Rightarrow C = \ln 2^{\frac{3}{2}} + \ln 2^2 - (\ln 1 - \ln \sqrt{2}) + \ln (2^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \ln 2^{\frac{3}{2}} + \ln 2^2 + \ln \sqrt{2} + \ln 2^{\frac{3}{2}} = \ln 2^{\frac{3}{2}} + \ln 2^2 + \ln 2^{\frac{1}{2}} + \ln 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \ln 2 + 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 + 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 2$$

$$= \frac{11}{2} \ln 2 \Rightarrow C = \frac{11}{2} \ln 2$$

$$D = \ln 64 + \frac{5}{3} \ln 8 - \ln \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \ln 2^6 + \frac{5}{3} \ln 2^3 - \ln 2^{\frac{15}{16}}$$

$$= 6 \ln 2 + 5 \ln 2 - \frac{15}{16} \ln 2 = \frac{161}{16} \ln 2$$

$$\Rightarrow D = \frac{161}{16} \ln 2$$

2) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a- $\ln(2x + 7) = \ln(x - 3) \Rightarrow D_v =]3; +\infty[$

Alors $\ln(2x + 7) = \ln(x - 3) \Leftrightarrow 2x + 7 = x - 3 \Leftrightarrow x = -10 \notin D_v \Rightarrow S = \{\emptyset\}$

b- $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7) \Rightarrow D_v =]-7; -1[\cup]3; +\infty[$

Alors $\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x + 7) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 49$ Donc $x_1 = -2 \in D_v$ et $x_2 = 5 \in D_v \Rightarrow S = \{-2; 5\}$

c- $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3) \Rightarrow D_v =]0; +\infty[$

Alors $\ln x + \ln(3x + 2) = \ln(2x + 3) \Leftrightarrow \ln[x(3x + 2)] = \ln(2x + 3) \Leftrightarrow$

$x(3x + 2) = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \notin D_v$ ou

$x = 1 \in D_v \Rightarrow S = \{1\}$

d- $\ln(x - 3) = \ln(x + 7) - \ln(x + 1) \Rightarrow D_v =]3; +\infty[$

Alors $\ln(x - 3) = \ln(x + 7) - \ln(x + 1) \Leftrightarrow \ln(x - 3) = \ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) \Leftrightarrow x - 3 = \frac{x+7}{x+1}$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 49$

Donc $x_1 = -2 \notin D_v$ et $x_2 = 5 \in D_v \Rightarrow S = \{5\}$

e- $\ln(2x - 2) + \ln(x + 2) = 3 \ln 2 \Rightarrow D_v =]1; +\infty[$

Alors $\ln(2x - 2) + \ln(x + 2) = 3 \ln 2 \Leftrightarrow \ln[(2x - 2)(x + 2)] = \ln 2^3 \Leftrightarrow$

$(2x - 2)(x + 2) = 2^3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 25$. Donc $x_1 = -3 \notin D_v$ et $x_2 = 2 \in D_v \Rightarrow S = \{2\}$

f- $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = 2 \ln(x + 1) \Rightarrow D_v =]2; +\infty[$

$$\text{Alors } \ln(x-2) + \ln(x+3) = 2 \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln[(x-2)(x+3)] = \ln(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+3) = (x+1)^2 \Leftrightarrow -x-7=0 \Rightarrow x=-7 \notin D_v \Rightarrow S = \{\emptyset\}$$

$$\text{g- } \ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow D_v = \left] \frac{3}{2}; +\infty[$$

$$\text{Alors } \ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2} \ln x \Leftrightarrow \ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \ln\sqrt{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln\sqrt{2x-3} + \ln\sqrt{x} = \ln(6-x) \Leftrightarrow \ln[(\sqrt{2x-3})(\sqrt{x})] = \ln(6-x) \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{2x-3})(\sqrt{x}) = 6-x \Leftrightarrow \sqrt{x(2x-3)} = 6-x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x} = 6-x \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)^2 = (6-x)^2 \Leftrightarrow 2x^2-3x = x^2-12x+36 \Leftrightarrow x^2+9x-36=0$$

$$\Rightarrow \Delta = 225. \text{ Donc } x_1 = -12 \notin D_v \text{ et } x_2 = 3 \in D_v \Rightarrow S = \{3\}$$

$$\text{h- } \ln|x-1| + \ln|2x-1| = 0 \Rightarrow D_v =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\ln|(x-1)(2x-1)| = 0 \Leftrightarrow \ln|(x-1)(2x-1)| = \ln 1 \Leftrightarrow |(x-1)(2x-1)| = 1$$

$$\Leftrightarrow |2x^2-3x+1| = 1 \Rightarrow 2x^2-3x+1 = -1 \text{ ou } 2x^2-3x+1 = 1$$

$$\text{- Si } 2x^2-3x+1 = -1 \Leftrightarrow 2x^2-3x+2 = 0 \Rightarrow \Delta = -7 \text{ et } S_1 = \{\emptyset\}.$$

$$\text{- Si } 2x^2-3x+1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2-3x = 0 \Rightarrow (2x-3)x = 0. \text{ Donc } x = 0 \in D_v \text{ ou } x = \frac{3}{2} \in D_v \Rightarrow S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{i- } (\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0.$$

Effectuons un changement de variable en posant : $\ln x = X$

$$\text{Alors l'équation } (\ln x)^2 - 7 \ln x + 6 = 0 \text{ devient : } X^2 - 7X + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25.$$

$$\text{Donc } X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 6$$

$$\text{- Si } X_1 = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e^1 = e.$$

$$\text{- Si } X_2 = 6 \Leftrightarrow \ln x = 6 \Rightarrow x = e^6$$

$$\Rightarrow S = \{e; e^6\}$$

$$\text{j- } 3[\ln(x+1)]^2 - 2\ln(x+1) - 5 = 0$$

Effectuons un changement de variable en posant : $\ln(x+1) = X$

Alors l'équation $3[\ln(x+1)]^2 - 2\ln(x+1) - 5 = 0$ devient : $3X^2 - 2X - 5 = 0$

$$\Rightarrow \Delta = 64. \text{ Donc } X_1 = -1 \text{ et } X_2 = \frac{3}{5}$$

$$\cdot \text{ Si } X_1 = -1 \Leftrightarrow \ln(x+1) = -1 \Rightarrow x+1 = e^{-1} \Rightarrow x = -1 + e^{-1}$$

$$\cdot \text{ Si } X_2 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{5} \Rightarrow x+1 = e^{\frac{3}{5}} \Rightarrow x = -1 + e^{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -1 + e^{-1} ; -1 + e^{\frac{3}{5}} \right\}$$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a- $\ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0 \Rightarrow D_v =]-2 ; +\infty [$

$$\ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) \leq 0.$$

$$\text{Posons } \ln(x+8) - \ln(x+14) + \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+8}{x+14}\right) + \ln(x+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left[\frac{(x+8)(x+2)}{x+14}\right] = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{(x+8)(x+2)}{x+14} = 1 \Leftrightarrow (x+8)(x+2) = x+14 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + 10x + 16 = x + 14 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 73. \text{ Donc on a :}$$

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{73}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-9 + \sqrt{73}}{2} \Rightarrow S_1 = \left[\frac{-9 - \sqrt{73}}{2} ; \frac{-9 + \sqrt{73}}{2} \right]$$

$$\text{Ainsi l'intersection de } D_v =]-2 ; +\infty [\text{ et } S_1 = \left[\frac{-9 - \sqrt{73}}{2} ; \frac{-9 + \sqrt{73}}{2} \right] \text{ donne :}$$

$$S = \left] -2 ; \frac{-9 + \sqrt{73}}{2} \right]$$

b- $\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3 \Rightarrow D_v = \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[$

$$\ln(2x-1) - \ln(1-x) < \ln 3$$

$$\text{Posons } \ln(2x-1) - \ln(1-x) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x-1}{1-x}\right) = \ln 3 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{1-x} = 3 \Leftrightarrow$$

$$2x-1 = 3(1-x) \Leftrightarrow 5x-4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow S_1 = \left] -\infty ; \frac{4}{5} \right[$$

$$\text{Ainsi l'intersection de } D_v = \left] \frac{1}{2} ; 1 \right[\text{ et } S_1 = \left] -\infty ; \frac{4}{5} \right[\text{ donne : } S = \left] \frac{1}{2} ; \frac{4}{5} \right[$$

c- $\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1) \Rightarrow D_v =] 1 ; +\infty [$

$$\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1).$$

$$\text{Posons } \ln(x+1) = \ln(4x-1) - \ln(x-1) \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln\left(\frac{4x-1}{x-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$x+1 = \frac{4x-1}{x-1} \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 4x-1 \Leftrightarrow x^2-1 = 4x-1 \Leftrightarrow x^2-4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4 \Rightarrow S_1 =]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$$

Ainsi l'intersection de $D_v =]1 ; +\infty[$ et $S_1 =]-\infty ; 0[\cup]4 ; +\infty[$ donne :
 $S =]4 ; +\infty[$

4) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

A retenir

Si S et P désignent respectivement la somme et le produit de deux termes x et y , alors :

- $x + y = S.$
- $x \times y = P.$
- $x^2 + y^2 = S^2 - 2P$
- $x^3 + y^3 = S^3 - 3PS$

$$\text{a- } \begin{cases} x + y = 15 \\ \ln x + \ln y = \ln 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ \ln(x \times y) = \ln 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ x \times y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 15 \\ P = 36 \end{cases}$$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 15$ et $P = 36$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 15X + 36 = 0 \Rightarrow \Delta = 81$. Donc $X_1 = 3$ et $X_2 = 12$

$$\Rightarrow S = \{(3; 12) ; (12; 3)\}$$

$$\text{b- } \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln x + \ln y = \ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ \ln(x \times y) = \ln 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \times y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 13 \\ P = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2(6) = 13 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 12 = 13 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 = 25 \\ P = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 5$ et $P = 6$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 5X + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 1$. Donc $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$

$$\Rightarrow S = \{(3; 2) ; (2; 3)\}$$

$$\text{c- } \begin{cases} 2\ln x - \ln y = 0 & (1) \\ 4\ln x + \ln y = 3 & (2) \end{cases}$$

La somme des équations (1) et (2) donne : $6\ln x = 3 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$

En remplaçant $x = e^{\frac{1}{2}}$ par sa valeur dans l'équation (1), on a : $2\ln e^{\frac{1}{2}} - \ln y = 0 \Leftrightarrow$

$$2 \times \frac{1}{2} - \ln y = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln y = 0 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$$

$$\Rightarrow S = \left\{ \left(e^{\frac{1}{2}} ; e \right) ; \left(e ; e^{\frac{1}{2}} \right) \right\}$$

$$\text{d. } \begin{cases} \ln x \times \ln y = -10 \\ \ln x + \ln y = 3 \end{cases} \quad \text{Posons } \ln x = X \text{ et } \ln y = Y \Rightarrow \begin{cases} X \times Y = -10 \\ X + Y = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = -10 \\ S = 3 \end{cases}$$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 3$ et $P = -10$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 3X - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = 49$. Donc $X_1 = 5$ et $X_2 = -2$

- Si $X_1 = 5 \Leftrightarrow \ln x = 5 \Rightarrow x = e^5$
- Si $X_2 = -2 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$

$$\Rightarrow S = \left\{ (e^5 ; e^{-2}) ; (e^{-2} ; e^5) \right\}$$

$$\text{e. } \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(\frac{\ln y}{\ln x} + \frac{\ln x}{\ln y}\right) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ 4\left(\frac{\ln^2 y + \ln^2 x}{\ln x \times \ln y}\right) = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ \frac{\ln^2 y + \ln^2 x}{\ln x \times \ln y} = \frac{17}{4} \end{cases} \quad \text{Posons } \ln x = X \text{ et } \ln y = Y \Leftrightarrow \begin{cases} X \times Y = 4 \\ \frac{Y^2 + X^2}{X \times Y} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 2(4)}{4} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ \frac{S^2 - 8}{4} = \frac{17}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S^2 - 8 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} P = 4 \\ S = 5 \end{cases}$$

Ce système est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = 5$ et $P = 4$

Alors résolvons l'équation : $X^2 - 5X + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9$. Donc $X_1 = 1$ et $X_2 = 4$

- Si $X_1 = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$
- Si $X_2 = 4 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$

$$\Rightarrow S = \left\{ (e ; e^4) ; (e^4 ; e) \right\}$$

2 La magnitude apparente d'un astre d'éclat E est $M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right)$ où E_0 est l'éclat de référence.

1) Calculons $\ln a$ sachant que $E_0 = \frac{E}{10}$ et $M = 5$

$$M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right) \Leftrightarrow M = \frac{\ln \left(\frac{E}{E_0} \right)}{\ln a} \Leftrightarrow M = \frac{\ln \left(\frac{E}{\frac{E}{10}} \right)}{\ln a} \Leftrightarrow M = \frac{\ln(10)}{\ln a} \Leftrightarrow \ln a = \frac{\ln(10)}{M}$$

$$\Rightarrow \ln a = \frac{\ln(10)}{5} = 0,46$$

2) En déduisons la magnitude apparente des astres suivants :

a- Soleil : $E = 4,786 \times 10^{10} E_0$

$$M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right) \Leftrightarrow M = \frac{\ln \left(\frac{E}{E_0} \right)}{\ln a} \Leftrightarrow M = \frac{\ln \left(\frac{4,786 \times 10^{10} E_0}{E_0} \right)}{\ln a} = \frac{\ln(4,786 \times 10^{10})}{\ln a}$$

$$= \frac{10 \ln(4,786 \times 10)}{\ln a} = \frac{10 \ln(47,86)}{\ln a}. \text{ Or } \ln a = 0,46 \Rightarrow M = \frac{10 \ln(47,86)}{0,46} \approx 84$$

b- Lune : $E = 1,2 \times 10^5 E_0$

$$M = \log_a \left(\frac{E}{E_0} \right) \Leftrightarrow M = \frac{\ln \left(\frac{E}{E_0} \right)}{\ln a} \Leftrightarrow M = \frac{\ln \left(\frac{1,2 \times 10^5 E_0}{E_0} \right)}{\ln a} = \frac{\ln(1,2 \times 10^5)}{\ln a}$$

$$= \frac{5 \ln(1,2 \times 10)}{\ln a} = \frac{5 \ln(12)}{\ln a}. \text{ Or } \ln a = 0,46 \Rightarrow M = \frac{5 \ln(12)}{0,46} \approx 27$$

3 Soit le polynôme q définie par $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

1) Calculons $q(1)$ puis résolvons les équations $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$

$$q(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 8(1) + 3 = 2 + 3 - 8 + 3 = 0$$

Résolvons les équations $q(x) = 0$ et $q(x) \geq 0$

Pour cela, factorisons $q(x)$. La forme factorisée de $q(x)$ en trois produit de facteurs est :

$$q(x) = (x - 1)(x + 3) \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Alors } q(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ 1; -3; \frac{1}{2} \right\}$$

De même $q(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 0$. Posons $(x-1)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$. Ainsi le tableau de signe est le suivant :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x-1$		-	-	0	+
$x+3$		+	-	-	-
$x-\frac{1}{2}$		+	0	-	-
$q(x)$		-	+	-	+

D'après le tableau de signe, l'ensemble solution correspondant à l'inéquation $q(x) \geq 0$ est :

$$S = \left[-3 ; \frac{1}{2}\right] \cup [1 ; +\infty[$$

2) En déduisons la résolution de :

a- l'équation : $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0$

$$2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 = 0. \text{ Posons } \ln x = X \Rightarrow 2X^3 + 3X^2 - X + 3 = 0$$

$$(X-1)(X+3)\left(X-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow X = 1 \text{ ou } X = -3 \text{ ou } X = \frac{1}{2}.$$

- Si $X = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$
- Si $X = -3 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}$
- Si $X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow S = \left\{e ; e^{-3} ; e^{\frac{1}{2}}\right\}$$

b- l'inéquation $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 8\ln x + 3 \geq 0$

en utilisant la question 1) et 2) a-), on a : $S = \left[e^{-3} ; e^{\frac{1}{2}}\right] \cup [e ; +\infty[$

Application des limites de la fonction logarithme

4 Calculons la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = \ln(2-x)$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R} ; 2-x > 0\}. 2-x > 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow D_f =]-\infty ; 2[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) = -\infty$$

$$2) f(x) = \ln(-x^2 + 2x + 3)$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; -x^2 + 2x + 3 > 0\}. -x^2 + 2x + 3 > 0. \text{ Posons } -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$\Rightarrow \Delta = 16$. Donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Ainsi le tableau de signe est le suivant:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$-x^2 + 2x + 3$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+\infty$

$$\Rightarrow D_f =]-1; 3[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(-x^2 + 2x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \ln(-x^2 + 2x + 3) = -\infty$$

$$3) f(x) = (x+1)\ln x - x$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; x > 0\}. x > 0 \Rightarrow D_f =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)\ln x - x = (0+1)(-\infty) - 0 = (1)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\ln x - x = (+\infty)(+\infty) - (+\infty) = +\infty - \infty = "FI"$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x + \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln x + \frac{\ln x}{x} - 1 \right)$$

$$= (+\infty)(+\infty + 0 - 1) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$4) f(x) = \ln|-x^2 + 2x + 3|$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; -x^2 + 2x + 3 \neq 0\}. -x^2 + 2x + 3 \neq 0. \text{ Posons } -x^2 + 2x + 3 = 0$$

$\Rightarrow \Delta = 16$. Donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$. Alors $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|-x^2 + 2x + 3| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|-x^2| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|-x^2 + 2x + 3| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|-x^2| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

$$5) f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$$

$$D_f = \left\{ x / x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x+2} > 0 \right\}. \frac{x-1}{x+2} > 0; \text{ Posons } \frac{x-1}{x+2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ \text{et} \\ x+2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{et} \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	0	$-$	$+$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \ln\left(\frac{-3}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(0) = -\infty$$

$$6) f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; x + 1 > 0 \text{ et } x^2 \neq 0\}.$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \quad \text{et} \quad x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

La reunion de ces deux conditions Donne $D_f =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \frac{\ln(0)}{1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x} = (-\infty) \times (1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x} = (+\infty) \times (1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$$

$$7) f(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; x > 0\}. \quad x > 0 \Rightarrow D_f =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - x - 2 \ln x + 1 = 0 - 0 - 2(-\infty) + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x - 2 \ln x + 1 = +\infty - \infty = "FI"$$

Levons l'indétermination:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x - 2 \ln x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x - \frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) = (+\infty)^2(+\infty) = +\infty$$

$$8) f(x) = \frac{\ln|\cos x|}{x^2}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0 \text{ et } x^2 \neq 0\}.$$

$$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\text{La reunion de ces deux conditions Donne } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$9) f(x) = (2x - 1) \ln(2x - 1)$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; 2x - 1 > 0\}. \quad 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow D_f = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x - 1) \ln(2x - 1) = (0)(-\infty) = "FI"$$

Levons l'indétermination en effectuant un changement de variable:

$$\text{Posons } 2x - 1 = X \Rightarrow x = \frac{X+1}{2}. \text{ Si } x \rightarrow \frac{1}{2} \text{ alors } X \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) \ln(2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln 2x = +\infty$$

Dérivées et primitives de la fonction logarithme

5) 1) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$$\text{a- } f(x) = \ln(2x + 7) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x + 7}$$

$$\text{b- } f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\text{c- } f(x) = (x + 7) \ln(3x + 2) \Rightarrow f'(x) = \ln(3x + 2) + \frac{3(x + 7)}{3x + 2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(3x + 2) \ln(3x + 2) + 3x + 21}{3x + 2}$$

$$\text{d- } f(x) = \ln \sqrt{2x - 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x - 3}} = \frac{1}{2x - 3}$$

$$\text{e- } f(x) = [\ln(x + 1)]^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \left(\frac{1}{x + 1} \right) [\ln(x + 1)]^2 = \frac{3 \ln^2(x + 1)}{x + 1}$$

$$\text{f- } f(x) = \ln \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{x + 2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)(x + 2)}$$

$$\text{g- } f(x) = \ln(x^3 - x)(x^2 + 2) \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} + \frac{2x}{x^2 + 2} = \frac{5x^4 + 3x^2 - 2}{(x^3 - x)(x^2 + 2)}$$

$$\text{h- } f(x) = \sqrt{x - 1} \ln(-x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - 1}} \times \ln(-x + 1) + \frac{-1}{-x + 1} \times \sqrt{x - 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\ln(-x + 1)}{2\sqrt{x - 1}} - \frac{\sqrt{x - 1}}{-x + 1} = \frac{\ln(-x + 1)}{2\sqrt{x - 1}} + \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1} = \frac{(x - 1) \ln(-x + 1) + 2(x - 1)}{2(x - 1)\sqrt{x - 1}}$$

2) Calculons la primitive des fonctions suivantes :

$$\text{a- } f(x) = \ln(2x + 7)$$

NB : Si $f(x) = \ln(ax + b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax + b) - x + k$

Alors $f(x) = \ln(2x + 7) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{7}{2}\right) \ln(2x + 7) - x + k$

b- $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{-(-\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = -\ln|\cos x + \sin x| + k$

c- $f(x) = \frac{-x + 1}{x^2 - 2x - 5} = \frac{-2}{-2} \times \frac{-x + 1}{x^2 - 2x - 5} = -\frac{1}{2} \times \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 5}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \times \ln(x^2 - 2x - 5) + k$

d- $f(x) = \ln(3 - x) \Rightarrow F(x) = (x - 3) \ln(3 - x) - x + k$

e- $f(x) = \frac{7}{2x - 5} = \frac{2}{2} \times \frac{7}{2x - 5} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{2x - 5} = \frac{7}{2} \times \ln|2x - 5| + k$

f- $f(x) = \ln x + \frac{-x + 1}{x^2 - 2x - 5} \Rightarrow F(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2} \times \ln(x^2 - 2x - 5) + k$

g- $f(x) = \frac{2}{x \ln x} = 2 \times \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow F(x) = 2 \times \ln|\ln x| + k = 2 \ln|\ln x| + k$

h- $f(x) = \frac{2 - \frac{2}{x}}{x - \ln x} = \frac{2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x - \ln x} \Rightarrow F(x) = 2 \times \ln|x - \ln x| + k = 2 \ln|x - \ln x| + k$

6

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$ par $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$

1) Déterminons les nombres réels a ; b et c tel que $\forall x \in]1; +\infty[$

On ait $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}$

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1} \Rightarrow g(x) = \frac{a(x - 1)(x + 1) + bx(x + 1) + cx(x - 1)}{x(x - 1)(x + 1)}$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{a(x^2 - 1) + bx(x + 1) + cx(x - 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{x^2(a + b + c) + x(b - c) - a}{x(x^2 - 1)}$$

D'autre part $g(x) = \frac{1}{x(x^2 - 1)}$. Ainsi par identification, on a:

$$\frac{x^2(a + b + c) + x(b - c) - a}{x(x^2 - 1)} = \frac{1}{x(x^2 - 1)} \Leftrightarrow x^2(a + b + c) + x(b - c) - a = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ -a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + b + c = 0 \\ b - c = 0 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 1 \\ b - c = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \text{ et } c=\frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

2) En déduisons une primitive de la fonction g sur $]1; +\infty[$

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \Rightarrow G(x) = -\ln x + \frac{1}{2} \ln(x-1) + \frac{1}{2} \ln(x+1) + k$$

Problèmes

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$

1) Dressons le tableau de variation de g .

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 + 1 - \ln x = -(0)^2 + 1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 1 - \ln x = -(+\infty)^2 + 1 - (+\infty) = -\infty - \infty = -\infty$$

$$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right).$$

Alors $\forall x \in]0; +\infty[$ $g'(x) < 0$. D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2) Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

$$g(x) = -x^2 + 1 - \ln x \Rightarrow g(1) = 0$$

Alors d'après le tableau de variation de g , on a :

$$\forall x \in]0; 1[\quad g(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]1; +\infty[\quad g(x) < 0$$

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe

dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) Dressons le tableau de variation de f .

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} = -\frac{1}{2}(0) + 1 + \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} = -\frac{1}{2}(+\infty) + 1 + \frac{1}{2}(0) = -\infty$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1 - \ln x}{2x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[$, $2x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a :

$$\forall x \in]0; 1[\quad g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0; 1[\quad f'(x) > 0$$

et

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]1; +\infty[\quad f'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	α	1	β	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

2) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $(\alpha < \beta)$

D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]0; 1[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]0; 1[$ vers $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α

De même, $\forall x \in]1; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1; +\infty[$ vers $]-\infty; \frac{1}{2}[$.

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution β

3) a) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f .

La droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} \right) - \left(-\frac{1}{2}x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\ln x}{2x} + \frac{1}{2}x - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}(0) = 0$$

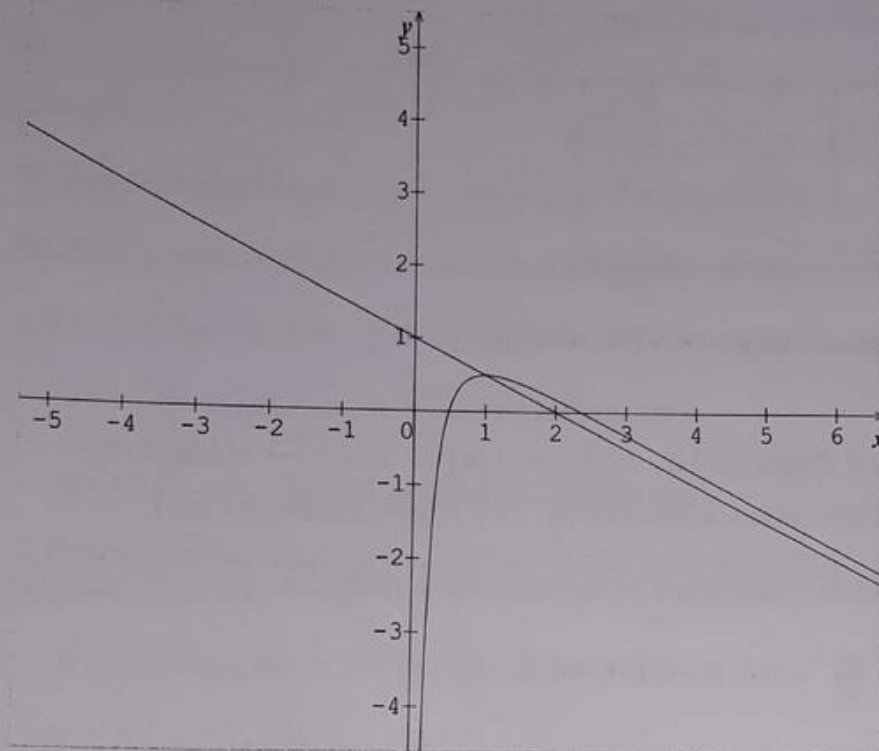
D'où la droite (Δ) d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) de f

b) Etudions le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ puis en déduire la position de (C) et (Δ) .

L'étude du signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)$ nous permet d'en déduire que :

- $\forall x \in]0; 1[$; (C) est en dessous de la droite (Δ)
- $\forall x \in]1; +\infty[$; (C) est au dessus de la droite (Δ)

4) Traçons (C) et (Δ) dans le même repère.



8 Partie A :

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x$

1- Etudions les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2 - 2 \ln x = (0)^2 + 2 - 2(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 - 2 \ln x = (+\infty)^2 + 2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = "FI"$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 - 2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right) = (+\infty)^2 (1 + 0 - 0) = +\infty$$

2- Dressons le tableau de variation de g puis en déduire son signe sur $]0; +\infty[$

$$g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[; x > 0$ Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 1$

$$\text{Posons } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \notin D_g \text{ ou } x = 1$$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	
	-		+
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]0; +\infty[g(x) > 0$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

1) a) Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + 2 \frac{\ln x}{x} = 0 + 2(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \frac{\ln x}{x} = +\infty + 2(0) = +\infty$$

b) Etudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

$$f(x) = x + 2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{2(1 - \ln x)}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après **Partie A 2)**, on a : $\forall x \in]0; +\infty[g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0; +\infty[f'(x) > 0$

D'où $\forall x \in]0; +\infty[; f$ est strictement croissante le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c) Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C), puis étudions la position de (C) par rapport à la droite (Δ).

La droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 \frac{\ln x}{x} \right) - (x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 \frac{\ln x}{x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = 2(0) = 0$$

D'où la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) de f

Étudions le signe de $f(x) - y$ puis en déduire la position de (C) et (Δ).

L'étude du signe de $f(x) - y$ nous permet d'en déduire que :

- $\forall x \in]0 ; 1[$; (C) est en dessous de la droite (Δ)
- $\forall x \in]1 ; +\infty[$; (C) est au dessus de la droite (Δ)

2) Déterminons les coordonnées du point A sachant que la courbe (C) admet au point A une tangente (T) parallèle à (Δ).

- Soit (T) la tangente $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
- Soit la droite (Δ) d'équation $y = x$
- Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ce point

La tangente (T) est parallèle à la droite (Δ) si et seulement si les coefficients directeurs sont égaux c'est-à-dire $f'(x_0) = 1$. Or $f'(x_0) = \frac{x_0^2 + 2 - 2\ln x_0}{x_0^2}$

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 2 - 2\ln x_0}{x_0^2} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 + 2 - 2\ln x_0 = x_0^2 \Leftrightarrow 2 - 2\ln x_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = e \quad \text{et} \quad y_0 = x_0 = e.$$

D'où $A \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$ est le point cherché.

3) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0,5 ; 1[$

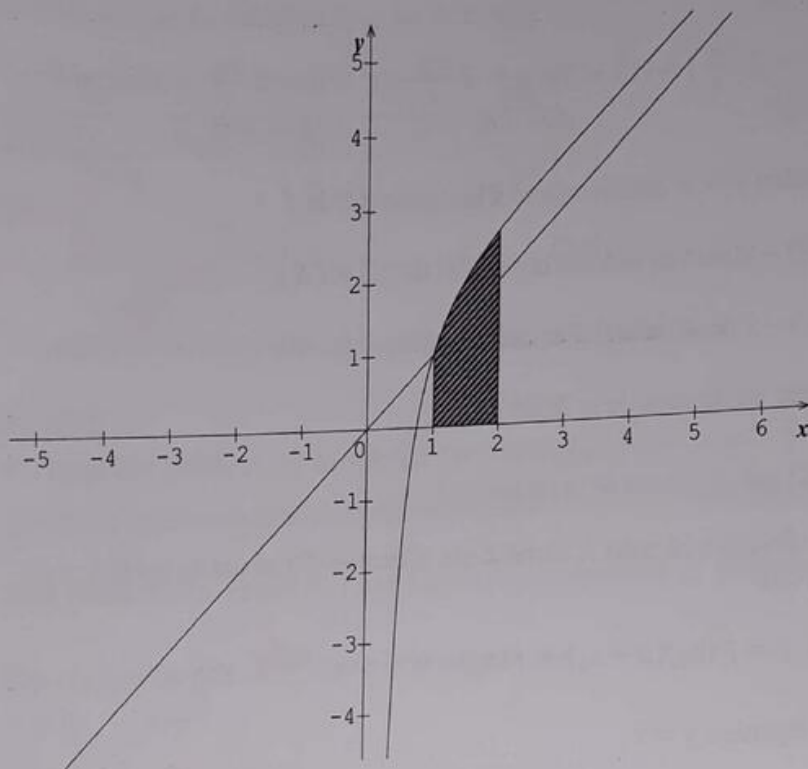
- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]0; +\infty[$ f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(0,5) = -2,2 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0,5) \times f(1) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]0,5; 1[$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]0,5; 1[$

4) Tracer (C) et (Δ) dans le même repère.



5) Hachurons puis calculons l'aire du domaine plan limité par la courbe (C); la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

Soit $A = \int_1^2 [f(x) - y] dx$ cette aire

$$A = \int_1^2 [f(x) - y] dx \Leftrightarrow A = \int_1^2 \left[\left(x + 2 \frac{\ln x}{x} \right) - (x) \right] dx \Leftrightarrow A = \int_1^2 \left(2 \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$\Rightarrow A = 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{x} \ln x dx = 2 \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 = [(\ln x)^2]_1^2 = 1,92 \text{ cm}^2$$

Pour le domaine hachuré, (Voir figure)

9

Partie A :

1) On considère la fonction numérique g définie par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

a- Dressons le tableau de variation de g .

$$D_g =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = 1 + (0)^2 - 2(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = 1 + (+\infty)^2 - 2(+\infty) = +\infty - \infty = \text{"FI"}$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = (+\infty)^2 (0 + 1 - \infty) = -\infty$$

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x \Rightarrow g'(x) = -4x \ln x$$

$\forall x \in]0; +\infty[; -4x < 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $\ln x$

Posons $\ln x > 0 \Rightarrow x > e^0 \Rightarrow > 1$. Ainsi pour les $x > 1$, on a : $\ln x > 0$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	α	$+\infty$
$-4x$		-	-	-
$\ln x$		-	0	+
$g'(x)$		+	-	-
$g(x)$	1	2	0	$-\infty$

b- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $1,89 < \alpha < 1,90$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]1; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1; +\infty[$ vers $]-\infty; 2[$.

Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(1,89) = 0,02 \\ g(1,90) = -0,02 \end{cases} \Rightarrow g(1,89) \times g(1,90) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $1,89 < \alpha < 1,90$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$.

c- Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

Alors d'après le tableau de variation de g , on a :

$$\forall x \in]0; \alpha[\quad g(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]\alpha; +\infty[\quad g(x) < 0$$

2) On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

a- Dressons le tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x(\ln x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[; x(1+x^2)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) c)**, on a :

$$\forall x \in]0; \alpha[; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0; \alpha[; f'(x) > 0$$

et

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; +\infty[; f'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

b- Vérifions que $(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$

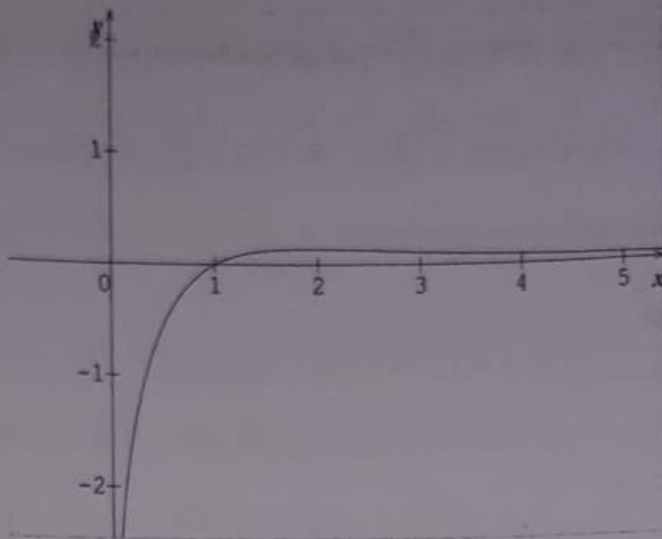
D'après **Partie A 1) b)**, on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$

D'autre part $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2}$

Remplaçons $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$ par sa valeur dans $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2}$. Ainsi on a :

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}}{1 + \alpha^2} = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2(1 + \alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}. \text{ D'où } (\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

c- Traçons (C) dans le repère.

**Partie B :**

On considère la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$

1) a) Prouvons que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et précisons $F'(x)$.

f est une fonction continue sur $]0; +\infty[$. Alors F est donc dérivable sur $]0; +\infty[$

Sa fonction dérivée est $F'(x) = f(x)$ avec $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

b) En déduire le sens de variation de F .

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		-	+
$F(x)$			

D'après le tableau :

$\forall x \in]0; 1[; F$ est strictement décroissante

$\forall x \in]1; +\infty[; F$ est strictement croissante

2) a) Vérifions que $\forall t \geq 1$; on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$

On sait que $\forall t \geq 1$; on a : $t^2 \leq 1+t^2 \leq t^2+2t+1$

En prenant les inverses, on a : $\frac{1}{t^2+2t+1} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$

En multipliant cette dernière par $\ln t$, on a :

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2} \Leftrightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2} \quad (\text{ce qu'il fallait démontrer})$$

b) Pour tout $x > 0$ et $t \neq 0$; on pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{t^2} \ln t dt$$

$$\text{Posons } u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow I(x) = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \right]_1^x$$

$$\Rightarrow I(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

c) A l'aide d'une intégration par partie et de l'égalité : $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$, calculons $J(x)$.

Puis en déduisons de ce qui précède que $\forall x > 1$; on a :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \int_1^x \frac{1}{(1+t)^2} \times \ln t dt$$

$$\text{Posons } u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{1+t}$$

$$\Rightarrow J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)} dt = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \right) dt$$

$$\Rightarrow J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + [\ln t - \ln(1+t)]_1^x = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \ln t - \ln(1+t) \right]_1^x$$

$$\Rightarrow J(x) = \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{1+x}$$

En déduisons que $\forall x > 1$; on a : $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

D'après 2) a), on a : $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \int_1^x f(t) dt \leq \frac{\ln t}{t^2}$. Intégrons cette inégalité sur $[1; x]$

$$\int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt \Leftrightarrow J(x) \leq F(x) \leq I(x) \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

d) On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \theta$. Sans calculer θ vérifions que $\ln 2 \leq \theta \leq 1$

$$\text{On sait que : } \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

En appliquant le théorème des gendarmes à l'inégalité :

$$\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}, \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln 2 \leq \theta \leq 1 \quad (\text{Ce qu'il fallait démontrer})$$

10 L'objectif de ce problème est l'étude complète de la fonction numérique f définie pour tout nombre réel x différent de -1 par :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \end{cases}$$

Les parties A et B sont indépendantes.

On notera (Cf) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire.

$$\text{Soit } g \text{ la fonction numérique définie par : } g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

1) Déterminons l'ensemble de définition Dg

$$Dg = \left\{ x / x \in \mathbb{R} ; x(x+1) \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \right\} \Rightarrow Dg = \mathbb{R} - \{0; -1\}$$

$$\Rightarrow Dg =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

Déterminons les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = 0$$

2) Etudions les variations de g ; on ne demande pas de calculer ses limites en -1 et en 0 .

$$g(x) = \frac{2x+1}{x(x+1)} - 2\ln\left|1 + \frac{1}{x}\right| \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{x^2(x+1)^2} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} - \{0; -1\}; \text{ on a : } g'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-		-	-	
$g(x)$	0	0		0	0

3) Calculons $g\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

D'après le tableau de variation de g ; on a :

$$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-\frac{1}{2}; 0[; g(x) < 0 \text{ et } \forall x \in]-1; -\frac{1}{2}[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0$$

Partie B : Etude de la limite de f à l'infini.

1) Soient les fonctions h et k définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$h : t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \text{ et } k : t \rightarrow \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$$

Après une brève étude sur $[0; +\infty[$ des fonctions h et k ; démontrons que :

$$\forall t \geq 0; \text{ on a : } t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

- Etude brève de $h(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$h'(t) = \frac{t^2}{1+t} \Rightarrow \forall t \in; [0; +\infty[\quad h'(t) \geq 0. \text{ Alors } h \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

De plus $h(0) = 0$. Donc $\forall t \geq 0$; on a : $h(t) \geq 0$ et par suite $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t)$

- Etude brève de $k(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$k'(t) = -\frac{t^3}{1+t} \Rightarrow \forall t \in; [0; +\infty[\quad k'(t) \leq 0. \text{ Alors } k \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+.$$

De plus $k(0) = 0$. Donc $\forall t \geq 0$; on a : $k(t) \leq 0$ et par suite $\ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

Conclusion $\forall t \geq 0$; on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

2) En déduisons que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

D'après ce qui précède, on a : $t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$

Multiplions tous les membres de l'inégalité par -1 . Ainsi on a :

$$-t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq -\ln(1+t) \leq -t + \frac{t^2}{2}$$

Ajoutons t à tous les membres de l'inégalité. Ainsi on a :

$$\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \leq t - \ln(1+t) \leq \frac{t^2}{2}$$

Divisons tous les membres de l'inégalité par t^2 . Ainsi on a :

$$\frac{1}{2} - \frac{t}{3} \leq \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{t}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$

3) En utilisant les résultats précédents, démontrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$$f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|. \text{ Posons } x = \frac{1}{t} \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t).$$

Quand t tend vers 0 , alors x tend vers $+\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2} \quad \text{De même } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Interprétation graphique des résultats de la question précédente.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf)

Partie C : Etude de la fonction f .

$$f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

1) Déterminons Df

$$Df = \left\{ x / x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \text{ et } 1 + \frac{1}{x} \neq 0 \right\} \Rightarrow Df = \mathbb{R} - \{0; -1\}$$

$$\Rightarrow Df =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; +\infty[$$

Calculons la limite de f en -1

$$\forall x \in Df; f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \text{ et on a : } \lim_{x \rightarrow -1} \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

2) Etudions la continuité de f en 0

$$f \text{ est continue en } 0 \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x - x^2 \ln|x+1| + x^2 \ln|x|. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0. \text{ De plus } f(0) = 0 \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

3) Démontrons que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x \ln|x+1| + x \ln|x|. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

Conclusion : f est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $f'(0) = 1$

4) Calculons la dérivée de f et démontrons que $f'(x) = x \times g(x)$

$$\forall x \in Df ; f(x) = x - x^2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x+1} - 2x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$$

$$\Rightarrow f'(x) = x \left[\frac{2x+1}{x(x+1)} - 2 \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right] \Rightarrow f'(x) = x \times g(x) \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

5) Dressons le tableau de variations de f

D'après **Partie A ; 3)**, et **Partie C ; 4)** on a :

$$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]-\frac{1}{2} ; 0[\cup]0 ; +\infty[; f'(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]-1 ; -\frac{1}{2}[; f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+		-	+	+
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

6) Déterminons une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0

L'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0 est $y = x$

Déterminons les asymptotes à (Cf) .

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$. Alors la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe (Cf) .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$. Alors la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe (Cf) .

7) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7$.

$\forall x \in]-1 ; -\frac{1}{2}[; f$ est continue et strictement décroissante de $]-1 ; -\frac{1}{2}[$ vers $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $f(\beta) = 0$

- De plus $\begin{cases} f(-0,8) = 0,087 \\ f(-0,7) = -0,28 \end{cases} \Rightarrow f(-0,8) \times f(-0,7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\beta \in]-0,8 ; -0,7[$

De même :

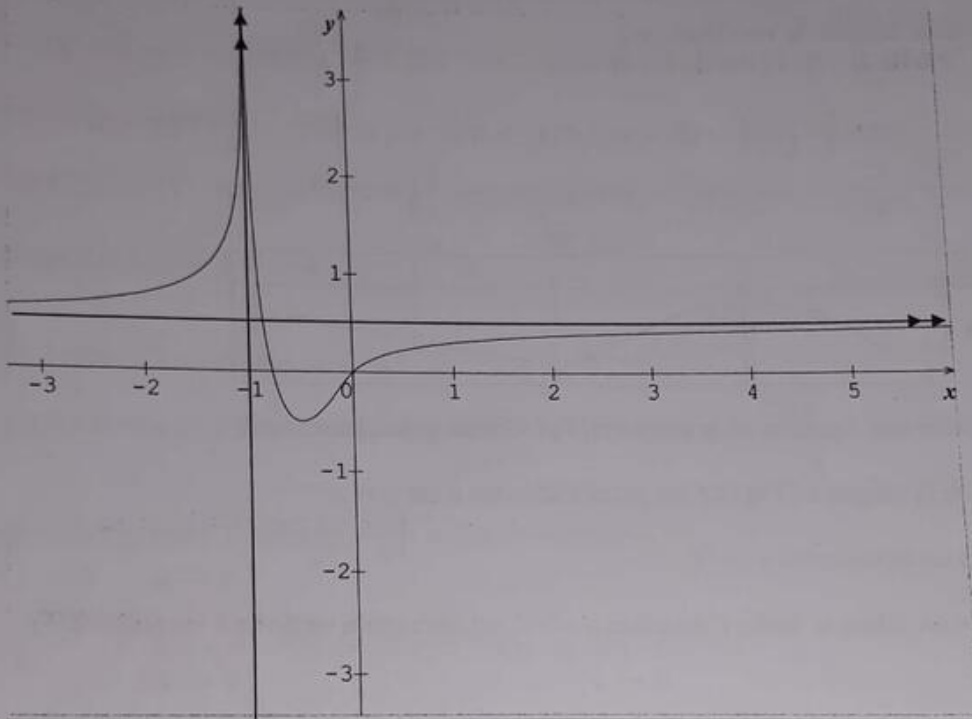
$\forall x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[; f$ est continue et strictement croissante de $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ vers $]-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}[$
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique δ telle que $f(\delta) = 0$

Or $f(0) = 0$ donc $\delta = 0$

$\forall x \in]-\infty; -1[; f(x) > 0.$

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions 0 et β avec $-0,8 < \beta < -0,7.$

8) Traçons (T) ; les asymptotes et la courbe (C_f)



11 Partie A :

Le but de ce problème est d'étudier dans la partie A la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$, de déterminer ensuite dans la **partie B** la position de sa courbe représentative par rapport à son asymptote oblique et enfin d'étudier une suite récurrente dans la partie (Γ), cette dernière partie étant dans une large mesure indépendante des deux autres.

1) a) Dérivée de la fonction g

La fonction g , définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 1$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ (comme somme algébrique de telles fonctions) et sa dérivée est :

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x-1)(3x^2 - x - 2)}{x}$$

b) Variations de g et signe de $g(x)$.

On peut résumer l'étude du sens de variation de g et du signe de $g(x)$ dans le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$x - 1$	-		+
$3x^2 + 3x + 2$	+	0	+
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

D'après le tableau de variation, $g(x) > 0$

2) a) Limite de f en 0 et en $+\infty$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = +\infty$$

b- Montrons que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ puis donnons le tableau de variations de la fonction f .

La fonction f , définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa

$$\text{dérivée est : } f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1-2\ln x}{x^3} = \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$\forall x \in]0 ; +\infty[; x^3 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$

Or d'après **Partie A 1) b)**, on a :

$$\forall x \in]0 ; +\infty[; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0 ; +\infty[f'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Partie B :

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x + \ln x$.

1) Etudions le sens de variation de h puis montrons que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0,4; 0,7]$

La fonction h définie sur $]0; +\infty[$ est également dérivable $]0; +\infty[$ et sa fonction dérivée est $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \forall x \in]0; +\infty[; h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

- D'après le tableau de variation de h , $\forall x \in]0; +\infty[$ h est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]0; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$.

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $h(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} h(0,4) = -0,52 \\ h(0,7) = 0,34 \end{cases} \Rightarrow h(0,4) \times h(0,7) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in [0,4; 0,7]$

Conclusion : l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0,4; 0,7]$

2) Montrons que l'on a : $e^{-\alpha} = \alpha$

D'après **Partie B 1)** on a : $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = -\alpha \Rightarrow e^{-\alpha} = \alpha$

3) a- Vérifions que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à Γ en $+\infty$.

La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - y = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

D'où La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (Γ) en $+\infty$

b- Utilisons les résultats de la **Partie B** question 1) pour déterminer les positions relatives de (Γ) et Δ .

Pour étudier la position relative (Γ) et (Δ) nous devons étudier le signe de $f(x) - y$.

$$\text{Or } f(x) - y = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

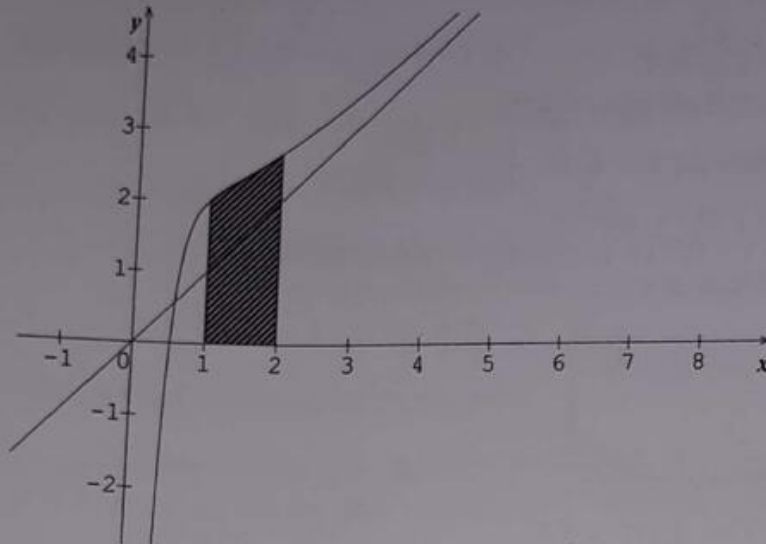
Donc le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $h(x)$.

Or d'après le tableau de variation obtenu dans la **Partie B 1)** on a :

$\forall x \in]0; \alpha[$ $h(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]0; \alpha[$ $f(x) - y < 0$ et par conséquent $\forall x \in]0; \alpha[$; la courbe (Γ) est en dessous de la droite (Δ)

De même $\forall x \in]\alpha; +\infty[$ $h(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; +\infty[$ $f(x) - y > 0$ et par conséquent $\forall x \in]\alpha; +\infty[$; la courbe (Γ) est au dessus de la droite (Δ)

4) Construction de la courbe (Γ) et de la droite Δ dans le repère ortho normal $(o; \vec{i}; \vec{j})$



5) a- Calculons au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt$

$$I = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2} \ln t dt$$

$$\text{Posons } u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow I = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2 = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \right]_1^2 = \left[-\frac{1 + \ln t}{t} \right]_1^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

b- En déduisons l'aire, en cm^2 de la portion de plan limitée par la courbe (Γ) , la droite Δ et les droites parallèles à l'axe des ordonnées d'équation $x = 1$ et $x = 2$.

L'aire A de la portion de plan indiquée est, en cm^2 , puisque (Γ) est au dessus de (Δ) et puisque (Δ) est au dessus de l'axe des abscisses pour $1 \leq x \leq 2$

$$A = (2 \text{ cm})^2 \int_1^2 (f(x) - y) dt = 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) dt = 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dt$$

$$= 4 \text{ cm}^2 \int_1^2 \frac{1}{x} dt + 4I \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 [\ln t]_1^2 + 4I \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 \ln 2 + 4I \text{ cm}^2$$

$$= 4 \text{ cm}^2 \ln 2 + 4 \text{ cm}^2 \left(\frac{1 - \ln 2}{2} \right) = 4 \text{ cm}^2 \left(\ln 2 + \frac{1 - \ln 2}{2} \right) = 4 \text{ cm}^2 \left(\frac{2 \ln 2 + 1 - \ln 2}{2} \right)$$

$$= 4 \text{ cm}^2 \left(\frac{\ln 2 + 1}{2} \right) = 2 \text{ cm}^2 (\ln 2 + 1) = (2 \ln 2 + 2) \text{ cm}^2 = 3,39 \text{ cm}^2$$

Partie C : Etude d'une suite

Dans cette partie :

- I désigne l'intervalle $[0,4 ; 0,7]$
- α est le réel mis en évidence au B. 1.
- φ est la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = e^{-x}$

1) u est la suite récurrente définie par $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_0 = 0,4 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$ a) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $\varphi(x) \in I$ Pour tout x de l'intervalle $I = [0,4 ; 0,7]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I .On peut résumer l'étude des variations de φ sur I dans le tableau suivant :

x	0,4	0,7
$\varphi(x)$	0,670	0,497

$$\varphi(0,4) = 0,670 < 0,7 \quad \text{et} \quad \varphi(0,7) = 0,497 > 0,4$$

Donc pour tout x de l'intervalle $I = [0,4 ; 0,7]$; $\varphi(x)$ appartient à l'intervalle I .b) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi'(x)| \leq 0,7$ On sait que : $0,4 \leq x \leq 0,7$ Appliquons $\varphi'(x)$ à l'inégalité : $0,4 \leq x \leq 0,7$

$$\Rightarrow \varphi'(0,4) \leq \varphi'(x) \leq \varphi'(0,7)$$

$$\Rightarrow -0,670 \leq \varphi'(x) \leq -0,497$$

Appliquons la valeur absolue à l'inégalité : $-0,670 \leq \varphi'(x) \leq -0,497$

$$\Rightarrow |-0,4970| \leq |\varphi'(x)| \leq |-0,67| \Leftrightarrow 0,4970 \leq |\varphi'(x)| \leq 0,67$$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)| \leq 0,67. \text{ Or } 0,67 \approx 0,7. \text{ D'où } |\varphi'(x)| \leq 0,7$$

c) Montrons qu'on a pour tout $x \in I$ on a : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$ Puisque $|\varphi'(x)| \leq 0,7$ alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction φ pour x appartenant à I , on a : $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \alpha|$ Or d'après **Partie B 2)** on a $\varphi(\alpha) = e^{-\alpha} = \alpha$. Alors $|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \leq 0,7|x - \alpha| \Leftrightarrow$

$$|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha| \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

2) a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$

On sait que : $|\varphi(x) - \alpha| \leq 0,7|x - \alpha|$. Posons $x = u_n$

$$\Rightarrow |\varphi(u_n) - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|. \text{ Or } \varphi(u_n) = u_{n+1}$$

$$\Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha| \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

En déduisons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$

On sait que $\alpha \in [0,4 ; 0,7] \Leftrightarrow 0,4 \leq \alpha \leq 0,7$ et $u_0 = 0,4$

Il vient que $0,4 - 0,4 \leq \alpha - u_0 \leq 0,7 - 0,4$

$$\Leftrightarrow 0 \leq u_0 - \alpha \leq 0,3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0,3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0,3(0,7)^0$$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$

puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3(0,7)^{n+1}$$

D'après **Partie C 2) a)**, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha|$

$$\text{Par suite } |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,7|u_n - \alpha| \leq 0,7[0,3(0,7)^n]$$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq 0,3(0,7)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b) Etudions la convergence de la suite u puis.

$$\text{Calculons } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

La suite de terme général $0,3(0,7)^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

3) Déterminons un entier p tel que pour $n \geq p$ on ait : $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ puis donnons à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de u_p à 10^{-3} près.

On sait que $|u_n - \alpha| \leq 0,3(0,7)^n$ et d'autre part $|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}$.

$$\text{Par identification on a : } 0,3(0,7)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow (0,7)^n \leq \frac{10^{-3}}{0,3} \Leftrightarrow e^{n \ln 0,7} \leq \frac{10^{-3}}{0,3}$$

$$\Leftrightarrow n \ln 0,7 \leq \ln \left(\frac{10^{-3}}{0,3} \right) \Rightarrow n \geq \frac{\ln \left(\frac{10^{-3}}{0,3} \right)}{\ln 0,7} \quad (\text{Car } \ln 0,7 < 0)$$

$\Rightarrow n \geq 15,99$. On peut donc prendre $p = 16$

Ainsi à l'aide de la calculatrice, on obtient à 10^{-3} près la valeur de $u_{16} \approx 0,567$

En déduisons une valeur approchée par défaut et par excès de α à 10^{-3} près

- 0,567 est la valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de α .

- 0,568 est la valeur approchée à 10^{-3} près par excès de α .

13

Partie A :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

1) a) Déterminons l'ensemble de définition de f

$$Df = \{x / x \in \mathbb{R}; 1+x \neq 0 \text{ et } 1+x > 0\} \Rightarrow Df =]-1; +\infty[$$

Calculons la limite de f aux bornes de cet ensemble.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - (1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

Effectuons un changement de variable en posant $X = 1+x \Rightarrow x = X-1$

Si $x = -1$ alors $X = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2(X-1) - X \ln X}{X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2X - 2 - X \ln X}{X} = \frac{2(0) - 2 - (0)}{0^+} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} - \ln(x) = 2 - (+\infty) = -\infty$$

b) Déterminons la fonction dérivée de f puis établissons son tableau de variations.

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2(1+x) - (1)(2x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$

$\forall x \in Df (1+x)^2 > 0$. Alors le signe $f'(x)$ dépend du signe de $1-x$

Posons $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$.

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		0	$1 - \ln 2$	0	$-\infty$

2) Démontrons que $\forall x \in [1 ; +\infty[$; l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
Vérifions qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-3} près est 3,9.

D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in [1 ; +\infty[$ f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $[1 ; +\infty[$ vers $]-\infty ; 1 - \ln 2]$.
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} f(3,9) = 0,003 \\ f(4) = -0,009 \end{cases} \Rightarrow f(3,9) \times f(4) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant
 $3,9 < \alpha < 4$

3) Précisons, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$

D'après le tableau de variation de f :

$$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]\alpha ; +\infty[; f(x) < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0 ; \alpha[; f(x) > 0$$

Partie B : soit g la fonction définie par : $g(0) = 0$ et $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}}$ si $t > 0$

1) Démontrons que g est continue en 0.

g est continue en 0 si et seulement si $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \sqrt{t} = (1) \times (0) = 0$$

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0) = 0$, alors g est continue en 0.

Étudions la dérivabilité de g en 0.

$$g \text{ est dérivable en } 0 \text{ si et seulement si } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0) = l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= 1 \times (+\infty) = +\infty \neq l \in \mathbb{R}$$

Alors g n'est pas dérivable en 0.

2) Calculons $g'(t)$ et exprimons $g'(t)$ en fonction de $f(t)$

Pour tout $t > 0$; on a : $g(t) = \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \Rightarrow g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t} \times \sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \ln(1+t)}{(\sqrt{t})^2}$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{\frac{\sqrt{t}}{1+t} - \frac{\ln(1+t)}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{\sqrt{t}}{t(1+t)} - \frac{\ln(1+t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \left(\frac{2t}{1+t} - \ln(1+t) \right)$$

$$\Rightarrow g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t)$$

3) a) Déterminons la limite en $+\infty$ de g .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left[t\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t + \ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t^{\frac{1}{2}}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} = 0 + 0 = 0$$

b) Dressons le tableau des variations de g .

$$g'(t) = \frac{1}{2t\sqrt{t}} \times f(t). \forall t \in D_g; 2t\sqrt{t} > 0. \text{ Alors le signe de } g'(t) \text{ dépend du signe de } f(t).$$

Or D'après **Partie B** : 3) on a :

$$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[; f(t) > 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty; 0[\cup]\alpha; +\infty[; g'(t) < 0$$

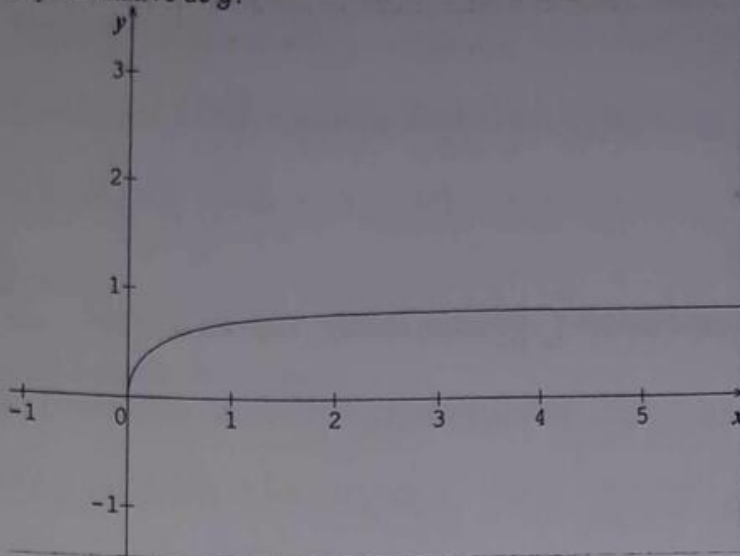
et

$$\forall x \in]0; \alpha[; f(t) < 0 \Rightarrow \forall x \in]0; \alpha[; g'(t) > 0$$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	0	$g(\alpha)$	0

4) Le plan est rapporté au repère orthogonal $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Construisons la courbe (Γ) représentative de g .



Partie C : Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire A , en unités d'aires, de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1) a) Démontrons que la fonction g_1 définie sur $[0; +\infty[$ par : $g_1(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$ est dérivable en 0.

g_1 est dérivable en 0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = g_1'(0) = l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x) - g_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0 \in \mathbb{R}$$

D'où la fonction g_1 est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $g_1'(0) = 0$

b) Soit φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$
Démontrons que φ est dérivable en tout point de $[0; +\infty[$

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x} \ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt = 2g_1(x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$$

$$\forall x \in]0; +\infty[; g_1 \text{ est dérivable et sa dérivée est } g_1'(x) = \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \text{ et } g_1(0) = 0$$

De plus la fonction δ définie sur $[0; +\infty[$ par $\delta(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}$ est continue sur $[0; +\infty[$

Donc la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$ est définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$. On en déduit donc que φ est dérivable en tout point de $[0; +\infty[$. Montrons que $\varphi'(x) = g(x)$

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt \Rightarrow \varphi'(x) = 2\left[\frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x}\right] - \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = g(x)$$

2) En déduisons que $A = \int_0^1 g(t) dt = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

$$A = \int_0^1 g(t) dt = [\varphi(t)]_0^1 = \left(2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt\right) \text{ unité d'aire}$$

3) Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt$

et k la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $k(\theta) = \tan^2 \theta$

a) Calculons $(h \circ k)(0)$

$$(h \circ k)(0) = h[k(0)] = h[0] = 0$$

b) Prouvons que $\forall \theta \in I$; on a : $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2 \theta$

$$(h \circ k)'(\theta) = k'(\theta) \times h'[k(\theta)].$$

Or $\forall \theta \in I$; $h'(\theta) = 2\tan\theta(\tan^2\theta + 1)$ et $\forall x \in [0; +\infty[$; $h'(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

$$\text{Donc } \forall \theta \in I \quad (h \circ k)'(\theta) = 2\tan\theta(\tan^2\theta + 1) \left(\frac{2\sqrt{\tan^2\theta}}{1 + \tan^2\theta}\right) = 4\tan\theta \times |\tan\theta|$$

$$= 4\tan^2\theta \quad \text{Car } \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ (ce qu'il fallait démontrer)}$$

D'où $\forall \theta \in I$; on a : $(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2\theta$

c) En écrivant $\tan^2\theta = (\tan^2\theta + 1) - 1$; déterminons une primitive de $(h \circ k)'$ puis donnons l'expression de $(h \circ k)$

$$(h \circ k)'(\theta) = 4\tan^2\theta = 4[(\tan^2\theta + 1) - 1] = 4(\tan^2\theta + 1) - 4 = 4(\tan)'(\theta) - 4$$

Soit H une primitive de $h \circ k$. Alors $H(\theta) = 4(\tan)(\theta) - 4\theta$.

Or $h \circ k$ est une primitive de $(h \circ k)'$. D'où $(h \circ k)(\theta) = 4(\tan)(\theta) - 4\theta + c$. ($c \in \mathbb{R}$).
De plus $(h \circ k)(0) = 0$

$$\text{Donc } (h \circ k)(\theta) = 4(\tan)(\theta) - 4\theta$$

d) Calculons $h(1)$

$$h(1) = h\left[k\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = (h \circ k)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi = 4 - \pi \text{ avec } k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

4) déduisons des résultats précédents la valeur exacte de A.

$$A = 2 \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t} dt = 2 \ln 2 - h(1) = (2 \ln 2 - 4 + \pi) \text{ unité d'aire}$$

13 Partie A :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ et soit (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) Déterminons l'ensemble de définition D_f de f .

$$D_f = \left\{x / x \in \mathbb{R}; 1-x > 0 \text{ et } \frac{1-x}{1+x} > 0\right\} \Rightarrow D_f =]-1; 1[$$

2) Calculons les limites aux bornes de D_f puis en déduisons que (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\infty$$

Alors les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales à la courbe (C) de f

3) Dressons le tableau de variation de f

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = -\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = -\left(\frac{2}{1-x^2}\right) = \frac{-2}{1-x^2}$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{1-x^2} < 0 \forall x \in D_f$. D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1	1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4) a-Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse l où l est le point d'inflexion de la courbe (C) .

Déterminons le point d'inflexion de la courbe (C)

$$f'(x) = \frac{-2}{1-x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}. \text{ Posons } f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0$$

$\Rightarrow x = 0$. Donc $f''(x) > 0$ sur $]-1; 0[$ puis $f''(x) < 0$ sur $]0; 1[$ d'où le point $I(0; f(0)) = (0; 0) \Rightarrow I(0; 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point $I(0; 0)$ est :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \text{ Or } x_0 = 0 \Rightarrow y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

$$\Rightarrow y = f'(0)(x) + f(0) = -2(x) + 0 = -2x$$

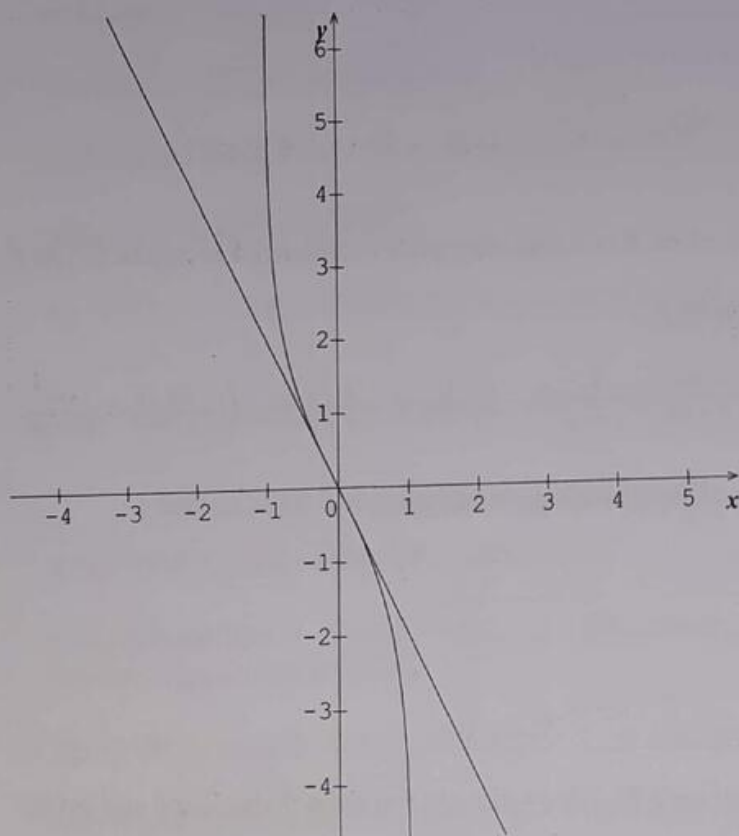
D'où (T) : $y = -2x$ est l'équation de la tangente au point $I(0; 0)$

b-Etudions la position de (C) et (T) puis tracer (C) et (T) dans le même repère.

D'après 4) b), on a :

$$\forall x \in]-1; 0[; f''(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]-1; 0[; (C) \text{ est au dessus } (T)$$

$$\forall x \in]0; 1[; f''(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]0; 1[; (C) \text{ est en dessous } (T)$$



5) On considère l'intégrale I définie par $= \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx$.

a-Calculons I en utilisant une intégration par parties.

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^0 1 \times f(x) dx$$

Posons $u(x) = f(x) \Rightarrow u'(x) = f'(x)$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= [xf(x)]_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 xf'(x) dx = \left[x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \times \frac{-2}{1-x^2} dx \\ &= \left[x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 - \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{-2x}{1-x^2} dx = \left[x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 - [\ln(1-x^2)]_{-\frac{1}{2}}^0 \\ &= \left[x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \ln(1-x^2) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{3}{2} \ln 3 - \ln 4 \end{aligned}$$

b- En déduisons en cm^2 l'aire A de la partie du plan délimité par la courbe (C), la tangente (T) et la droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$

$$\begin{aligned} A &= (2\text{cm})^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) - y) dx = 4\text{cm}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) + 2x) dx \\ &= 4\text{cm}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx + 4\text{cm}^2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 2x dx \\ &= 4\text{cm}^2 \left[x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \ln(1-x^2) \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + 4\text{cm}^2 [x^2]_{-\frac{1}{2}}^0 \\ \Rightarrow A &= 4\text{cm}^2 \left[x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \ln(1-x^2) + x^2 \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = (6\ln 3 - 4\ln 4 - 1)\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Partie B :

On considère dans cette partie la fonction numérique h définie sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ par

$$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x) \text{ où } f \text{ est la fonction définie dans la Partie A :$$

1) Vérifions que h est la primitive qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sin x}$

h est la primitive de la fonction g qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si $h'(x) = g(x)$

$$h(x) = \frac{1}{2} f(\cos x) \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2} \sin x f'(\cos x). \text{ Or } f'(x) = \frac{-2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{2} \sin x \times \frac{-2}{1-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin x} = g(x)$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} f(0) = 0. \text{ D'où } h \text{ est la primitive de la fonction } g \text{ qui s'annule en } \frac{\pi}{2}$$

2) Calculons l'intégrale $K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$

$$K = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = [h(x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = h\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 - h\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

D'où $K = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$

3) Soit l'intégrale (I_n) ; n appartenant à \mathbb{N} définie par : $I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx$.

a- Calculons I_0 et I_1

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx \Rightarrow I_0 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^0 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx \Rightarrow I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^1 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx = [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b- Calculons l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \cos^n x dx$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \cos^n x dx = \left[-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

c- En déduisons l'expression de $I_n - I_{n+2}$ en fonction de n

$$I_n - I_{n+2} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+2} x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x - \cos^{n+2} x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x (1 - \cos^2 x)}{\sin x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x \sin^2 x}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \cos^n x dx \left[-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow I_n - I_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \Leftrightarrow I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

Calculons I_2 ; I_3 et I_4

$$I_{n+2} = I_n - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

- Pour $n = 0$; on a : $I_2 = I_0 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$.

- Pour $n = 1$; on a : $I_3 = I_1 - \frac{1}{8} = -\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}$.

- Pour $n = 2$; on a : $I_4 = I_2 - \frac{1}{24} = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{13}{24}$

14 PARTIE A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -x^2 + 3x - 1 - \ln x$. On désigne par C_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1) Etudions les limites de g en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 + 3x - 1 - \ln x = -(0) + 3(0) - 1 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x - 1 - \ln x = -(+\infty) + 3(+\infty) - 1 - (+\infty)$$

$= -\infty + \infty = "FI"$. Alors levons l'indétermination.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x - 1 - \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \right)$$

$$= (+\infty)(-1 + 0 - 0 - 0) = (+\infty)(-1) = -\infty$$

2) Etudions les branches infinies de la courbe Cg .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3x - 1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 3 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = -(+\infty) + 3 + 0 - 0 = -\infty$$

Alors la courbe (Cg) admet une branche parabolique de direction (oy)

3) Etudions les variations de g .

$$g(x) = -x^2 + 3x - 1 - \ln x \Rightarrow g'(x) = -2x + 3 - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + 3x - 1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[; x > 0$. Alors le signe de $g'(x)$ dépend du signe de $-2x^2 + 3x - 1$.

$$\text{Posons } -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}$$

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	1	$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$g'(x)$		0	0	-	
$g(x)$	$+\infty$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\infty$

4) Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$; g est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $-\infty; \frac{1}{2}[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(2) = 0,3 \\ g(3) = -2,09 \end{cases} \Rightarrow g(2) \times g(3) < 0$$

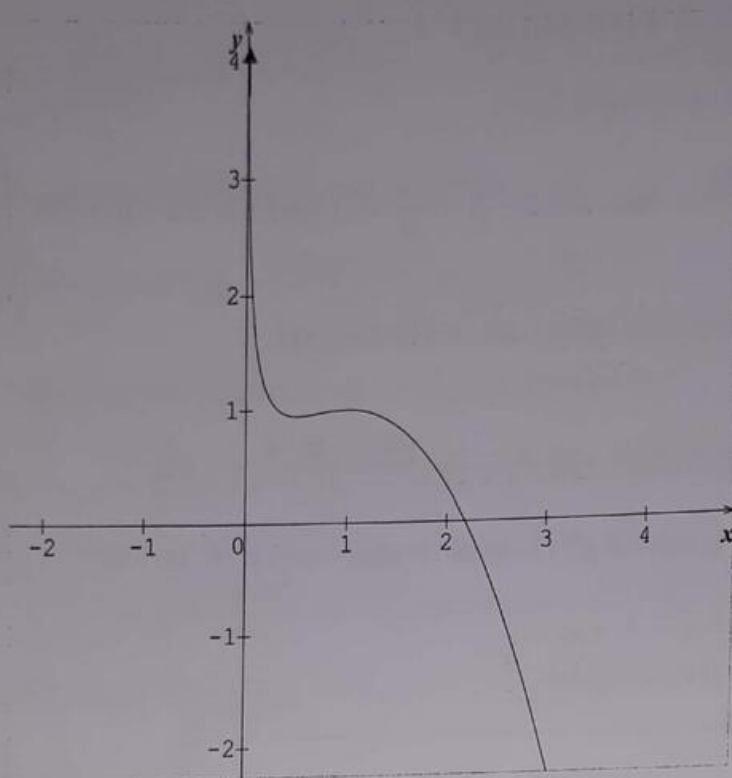
Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit l'encadrement suivant $2 \leq \alpha \leq 3$

5) Dédisons de ce qui précède le signe de $g(x)$ en fonction de x .
Interprétons graphiquement le résultat.

D'après le tableau de variation de g :

$$\forall x \in]0; \alpha[; g(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]\alpha; +\infty[; g(x) < 0$$

6) a- Traçons la courbe (C_g) .



b- Discutons graphiquement suivant les valeurs du périmètre réel m , le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$

D'après le graphique, $\forall y \in]-\infty ; +\infty[$; l'équation $g(x) = m$ admet une solution unique.

PARTIE B :

Soit la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x \ln x}$. On désigne par (C_f) la courbe

représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a) Montrons que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a $x > \ln x$.

Posons $p(x) = x - \ln x$ puis effectuons une étude brève de la fonction p sur $]0; +\infty[$, afin de déterminer son signe.

$$\lim_{x \rightarrow 0} p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x = (0) - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = (+\infty) - (+\infty) = +\infty - \infty = \text{"FI"}$$

Levons l'indétermination

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = (+\infty)(1 - 0) = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$p(x) = x - \ln x \Rightarrow p'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$\forall x \in]0; +\infty[; x > 0$. Alors le signe de $p'(x)$ dépend du signe de $x - 1$.

$$\text{Posons } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$p'(x)$		-	+
$p(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

D'après le tableau de variation de p , $\forall x \in]0; +\infty[; p(x) > 0 \Leftrightarrow x - \ln x > 0$

$\Rightarrow x > \ln x$ (Ce qu'il fallait démontrer)

b) justifions que la fonction f est bien définie sur $]0; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x \ln x}$$

- La fonction $x \rightarrow x - 1$ est définie sur $]0; +\infty[$.

- La fonction $x \rightarrow x^2 - x \ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$.

Alors $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x \ln x}$ est une fonction qui est bien définie sur $]0; +\infty[$.

2) Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$. Que peut-on en déduire ?

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2 - x \ln x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2 - x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = \frac{0-0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

Ainsi on en déduit que les droites d'équation $x = 0$ et $y = 0$ sont respectivement asymptote verticale et horizontale à la courbe (C_f)

3) a- Montrons que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - x \ln x)^2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{x^2 - x \ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1)(x^2 - x \ln x) - (2x - \ln x - 1)(x-1)}{(x^2 - x \ln x)^2} \\ &= \frac{(x^2 - x \ln x) - (2x - \ln x - 1)(x-1)}{(x^2 - x \ln x)^2} = \frac{x^2 - x \ln x - 2x^2 + x \ln x + x + 2x - \ln x - 1}{(x^2 - x \ln x)^2} \\ &= \frac{-x^2 + 3x - 1 - \ln x}{(x^2 - x \ln x)^2} = \frac{g(x)}{(x^2 - x \ln x)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2 - x \ln x)^2} \quad (\text{Ce qu'il fallait démontrer})$$

b- Dressons le tableau de variation de f .

$\forall x \in]0; +\infty[$; $(x^2 - x \ln x)^2 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $g(x)$.

Or d'après PARTIE A 5) on a :

- $\forall x \in]0; \alpha[$; $g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]0; \alpha[$; $f'(x) > 0$
- et
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[$; $g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; +\infty[$; $f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

c - Montrons que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$

D'après PARTIE A 5) l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{Alors } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 1 - \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = -\alpha^2 + 3\alpha - 1 \quad (1)$$

$$\text{D'autre part } f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x \ln x} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2 - \alpha \ln \alpha} \quad (2)$$

$$\text{Éliminons } \ln \alpha \text{ entre les équations (1) et (2)} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2 - \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 1)}$$

$$\Rightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - \alpha(-\alpha^2 + 3\alpha - 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 1)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha(\alpha - 1)^2} = \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)}$$

D'où $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)}$ (Ce qu'il fallait démontrer)

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$.

$$\text{On sait que : } 2 \leq \alpha \leq 3 \quad (1)$$

$$\text{De même : } 2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \alpha - 1 \leq 3 - 1 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha - 1 \leq 2 \quad (2)$$

$$2 \leq \alpha \leq 3 \quad (1)$$

$$1 \leq \alpha - 1 \leq 2 \quad (2)$$

Effectuons le produit des relations (1) et (2). Ainsi on a :

$$(2)(1) \leq (\alpha)(\alpha - 1) \leq (3)(2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \alpha(\alpha - 1) \leq 6$$

En prenant l'inverse de l'inégalité précédente, on a :

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{\alpha(\alpha - 1)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq f(\alpha) \leq \frac{1}{2} \quad (\text{Ce qu'il fallait démontrer})$$

4) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente (T) à la courbe (Cf) de f au point d'abscisse 1 est :

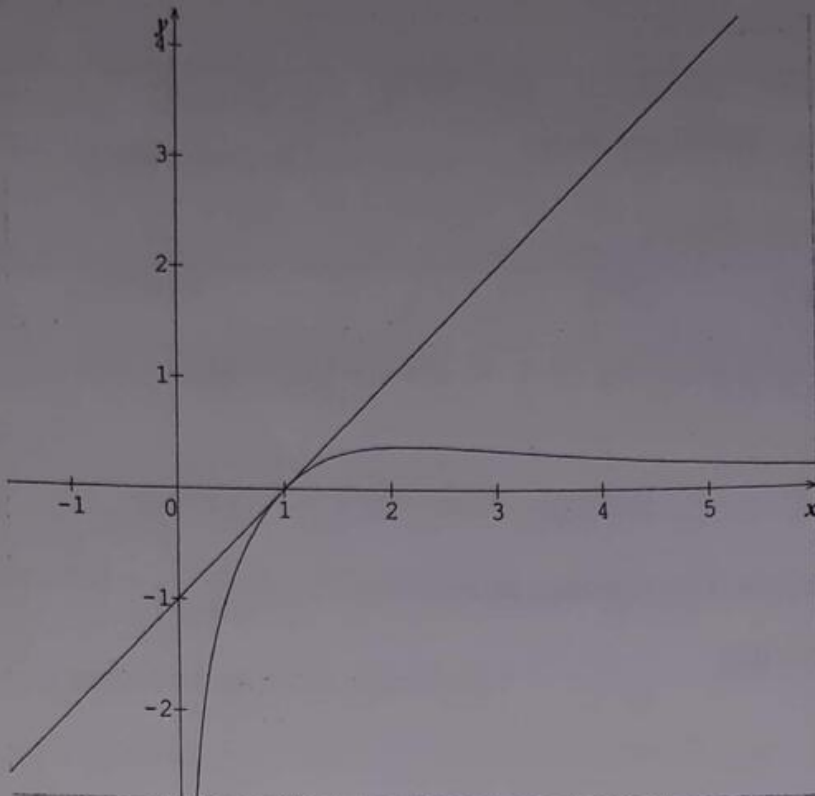
$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Rightarrow y = x - 1$$

5) Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x^2 - x \ln x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Alors la courbe (Cf) coupe l'axe (ox) en $x = 1$

Traçons la courbe (Cf) et la tangente (T) dans le même repère.



6) a- Montrons que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln x}$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - x \ln x} \Rightarrow f(x) = \frac{x(1 - \frac{1}{x})}{x(x - \ln x)} = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln x} \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

b- Soit $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Montrons que $A(\alpha) = 2 \ln(\alpha - 1)$

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x) dx = \int_1^\alpha \frac{x-1}{x^2 - x \ln x} dx = \int_1^\alpha \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \ln x} dx = [\ln(x - \ln x)]_1^\alpha$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \ln(\alpha - \ln \alpha) = \ln[\alpha - (\ln \alpha)]. \text{ Or PARTIE A 5), on a : } \ln \alpha = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$$

$$\Rightarrow A(\alpha) = \ln[\alpha - (-\alpha^2 + 3\alpha - 1)] = \ln(\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 1) = \ln(\alpha^2 - 2\alpha + 1)$$

$$= \ln(\alpha - 1)^2 = 2 \ln(\alpha - 1)$$

D'où $A(\alpha) = 2 \ln(\alpha - 1)$ (Ce qu'il fallait démontrer)

En déduisons un encadrement de $A(\alpha)$.

$$2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \alpha - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \ln(\alpha - 1) \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \ln(\alpha - 1) \leq 2 \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq 2 \ln(\alpha - 1) \leq \ln 4 \Leftrightarrow 0 \leq A(\alpha) \leq \ln 4 \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

7) Soit n un entier naturel supérieur ou égale 0.

a- Calculons $a_n = \int_1^n f(x) dx$.

$$a_n = \int_1^n f(x) dx = 2 \ln(n-1)$$

Interprétons graphiquement ce résultat.

a_n est l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

b- Calculons la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(n-1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(n) = +\infty$$

PARTIE C :

Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \int_1^{e^x} f(t) dt$. On désigne par (C_h) la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique : 1 cm.

1) a- Montrons que $h(x) = \ln(e^x - x)$.

$$h(x) = \int_1^{e^x} f(t) dt = \int_1^{e^x} \frac{1-t}{t-\ln t} dt = \ln(e^x - \ln e^x) = \ln(e^x - x)$$

b- Montrons que pour tout x de \mathbb{R} ; on a : $e^x > x$.

Posons $k(x) = e^x - x$ puis effectuons une étude brève de la fonction k sur \mathbb{R} ; afin de déterminer son signe.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$k(x) = e^x - x \Rightarrow k'(x) = e^x - 1$$

$$\text{Posons } k'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = \ln 1 = 0$$

D'où le tableau de variation de k est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	-	0	+
$k(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

D'après le tableau de variation de k , $\forall x \in \mathbb{R} ; k(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x > 0$

$\Rightarrow e^x > x$. (Ce qu'il fallait démontrer)

2) a- Calculons limite de $h(x)$ limite de $\frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[e^x(1 - \frac{x}{e^x})]}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x + \ln(1 - \frac{x}{e^x})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 - \frac{x}{e^x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 - \frac{x}{e^x})}{x} = 1 + 0 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 - \frac{x}{e^x}) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - \frac{x}{e^x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - \frac{x}{e^x}) = \ln(1 - 0) = 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique pour la courbe (Ch) en $+\infty$

b- Montrons que pour tout nombre réel, on a : $h(x) = x + \ln(1 - \frac{1}{e^x})$.

$$h(x) = \ln(e^x - x) = \ln[e^x(1 - \frac{x}{e^x})] = \ln e^x + \ln(1 - \frac{x}{e^x}) = x + \ln(1 - \frac{1}{e^x}).$$

D'où $h(x) = x + \ln(1 - \frac{1}{e^x})$ (Ce qu'il fallait démontrer)

En déduisons de $\lim h(x)$ en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 - \frac{1}{e^x}) = +\infty + 0 = +\infty$$

3) Etudions la position relative de la courbe (Ch) et de la droite $(\Delta): y = x$.

Pour cela, étudions le signe de $h(x) - y$

L'étudions le signe de $h(x) - y$ montre que :

$\forall x \in]-\infty ; 0] ; h(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; 0] ; (Ch)$ est au dessus (Δ)

$\forall x \in [0 ; +\infty[; h(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in [0 ; +\infty[; (Ch)$ est en dessous (Δ)

4) Dressons le tableau de variation de h puis tracer.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln\left(1 - \frac{x}{e^x}\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - x) = +\infty$$

$$h(x) = \ln(e^x - x) \Rightarrow h'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

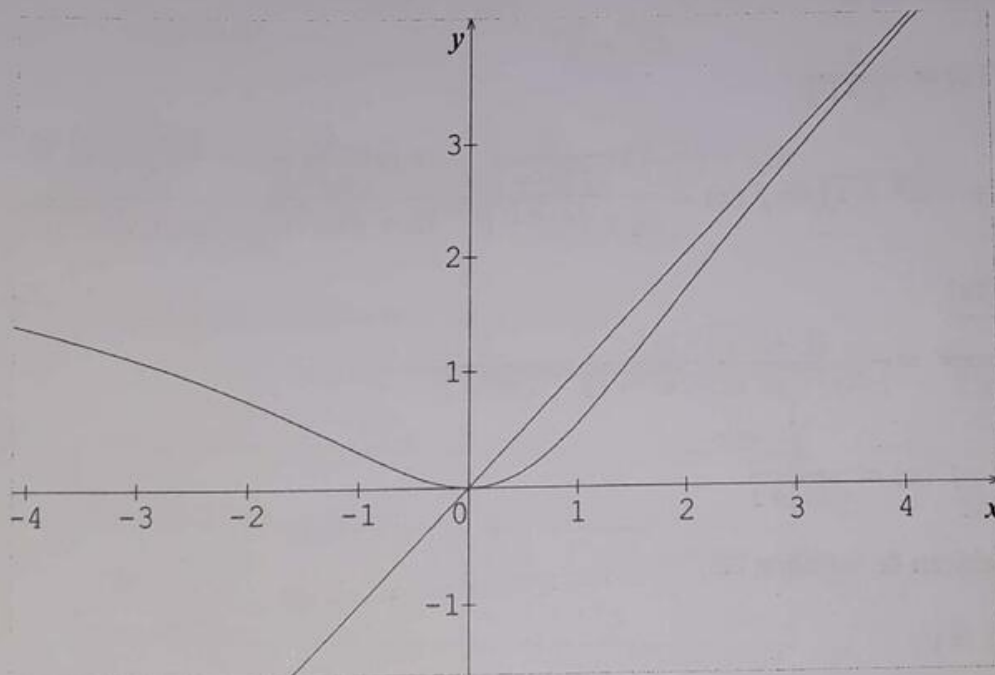
D'après PARTIE C 1) b), on a : $e^x - x > 0$; alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $e^x - 1$. Posons $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 0$

Ainsi on dira que pour les $x > 0$; $h'(x) > 0$

D'où le tableau de variation de h est le suivant

D'où le tableau de variation de k est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$



15 PARTIE A :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$. On désigne par (Cf) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

1) Montrons que f est impaire

f est impaire si et seulement si $f(-x) = -f(x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = \ln \left[\frac{(-2x + \sqrt{4x^2 + 1})(-2x - \sqrt{4x^2 + 1})}{-2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right] \\ &= \ln \left[\frac{(-2x)^2 - (\sqrt{4x^2 + 1})^2}{-2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right] = \ln \left[\frac{4x^2 - (4x^2 + 1)}{-2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right] = \ln \left(\frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{-2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{-1}{-2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right) = \ln \left(\frac{1}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} \right) = -\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

D'où f est impaire

2) Montrons que f est dérivable sur \mathbb{R}

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}).$$

- $2x$ est une fonction dérivable sur \mathbb{R}
- $\sqrt{4x^2 + 1}$ est aussi une fonction dérivable sur \mathbb{R}

Alors f est dérivable sur \mathbb{R}

$$\text{Montrons que } f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) &\Rightarrow f'(x) = \frac{2 + \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2 + \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}}{2x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{4x^2 + 1} + 4x}{\sqrt{4x^2 + 1}(2x + \sqrt{4x^2 + 1})} \\ &= \frac{2(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + 1}(2x + \sqrt{4x^2 + 1})} = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

3) Dressons le tableau de variation de f .

$$\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) > 0$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; f$ est strictement croissante.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[2x + \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[2x + |2x| \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[2x + 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left[2x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \right) \right] = \ln[(+\infty)(2)] = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left[\frac{(2x + \sqrt{4x^2 + 1})(2x - \sqrt{4x^2 + 1})}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left[\frac{(2x)^2 - (\sqrt{4x^2 + 1})^2}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left[\frac{4x^2 - (4x^2 + 1)}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{4x^2 - 4x^2 - 1}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2 + 1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x - \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x - |2x| \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x - (-2x) \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x + 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{-1}{2x} \right) = -\infty$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4) Étudions les branches infinies de la courbe (Cf).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})}{x} = 0$$

Alors la courbe (Cf) admet une branche parabolique de direction (ox)

5) Trouvons une équation cartésienne de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul.

L'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse nul est $y = f'(0)(x) + f(0)$

$$\Rightarrow y = f'(0)(x) + f(0) = 2x. \text{ D'où on a } (T) : y = 2x$$

6) Précisons la position de (T) et (Cf).

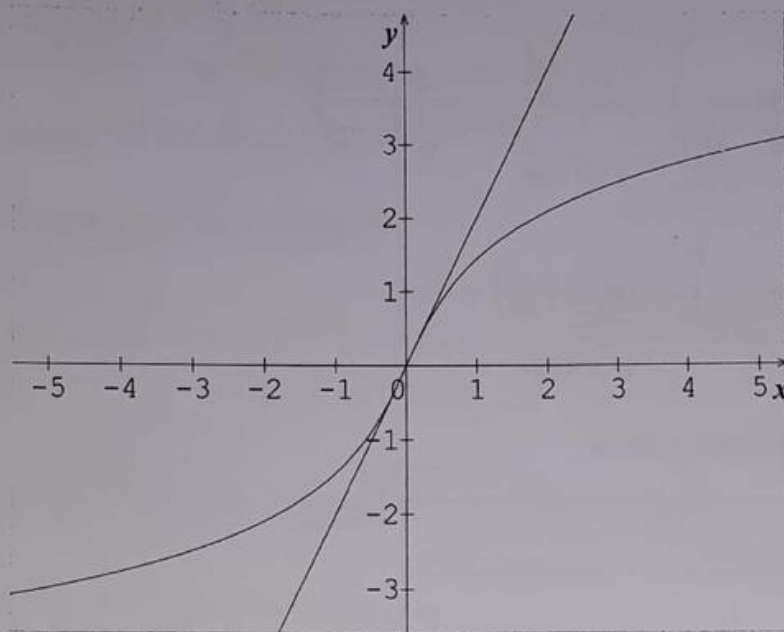
Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$

L'étudions le signe de $f(x) - y$ montre que :

$\forall x \in]-\infty ; 0] ; f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in]-\infty ; 0] ; (Cf)$ est au dessus (T)

$\forall x \in [0 ; +\infty[; f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in [0 ; +\infty[; (Cf)$ est en dessous (T)

7) Traçons la droite (T) et la courbe (Cf)



8) Soit α un réel strictement positif. Calculons en fonction de α , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (Cf) et les droites d'équations respectives $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha$.

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) \Rightarrow u'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(\alpha) &= [x \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx \\ &= [x \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) - 2\sqrt{4x^2 + 1}]_0^\alpha \\ &= \alpha \ln(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 \end{aligned}$$

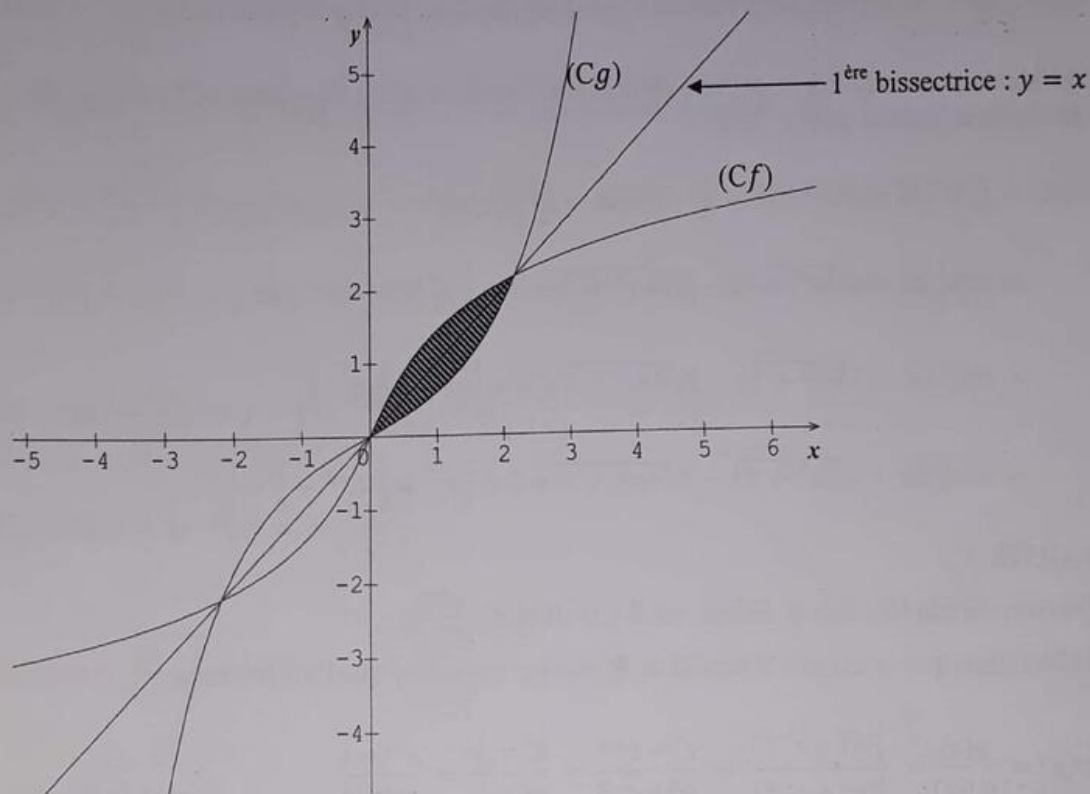
PARTIE B :

1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on précisera.

D'après le tableau de variation f ; f est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty ; +\infty[$ vers $]-\infty ; +\infty[$.

D'où la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur l'intervalle $I =]-\infty ; +\infty[$

2) Construisons dans le même repère que (Cf) , la courbe (Cg) de la fonction g .



3) Montrons que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

$$f(x) = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}). \text{ Posons } f(x) = y \Leftrightarrow \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) = y \Leftrightarrow$$

$$2x + \sqrt{4x^2 + 1} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 1} = e^y - 2x \Leftrightarrow (\sqrt{4x^2 + 1})^2 = (e^y - 2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 1 = e^{2y} - 4xe^y + 4x^2 \Leftrightarrow e^{2y} - 4xe^y = 1 \Leftrightarrow 4xe^y = e^{2y} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 1}{4e^y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{(e^{2y} - 1)e^{-y}}{4} = \frac{e^{2y} \times e^{-y} - e^{-y}}{4} = \frac{e^y - e^{-y}}{4} = \frac{1}{4}(e^y - e^{-y}).$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x}). \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

4) Montrons que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in \left] \frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right[$.

- D'après le tableau de variation de $g, \forall x \in]0; +\infty[; g$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $] -\infty; +\infty[$ vers $] -\infty; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = \alpha$.

$$- \text{ De plus } \left[g\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \times \left[g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left] \frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right[$.

5) Calculons en fonction de α l'aire du domaine limité par les deux courbes (C_f) et (C_g) et situées dans le demi-plan $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \int_0^\alpha [f(x) - g(x)] dx = \int_0^\alpha f(x) dx - \int_0^\alpha g(x) dx \\ &= \alpha \ln(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \frac{1}{4} \int_0^\alpha (e^x - e^{-x}) dx \\ &= \alpha \ln(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \left[\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} \right]_0^\alpha \\ &= \alpha \ln(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 1}) - 2\sqrt{4\alpha^2 + 1} + 2 + \frac{1}{4} e^\alpha + \frac{1}{4} e^{-\alpha} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

PARTIE C :

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

1) Montrons que φ est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^{2x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; \varphi'(x) > 0$$

D'où le tableau de variation de φ est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$	-1	1

D'après le tableau de variation φ : φ est définie ; continue et strictement croissante de $]-\infty ; +\infty[$ vers $]-1 ; 1[$.

D'où la fonction φ admet une fonction réciproque $\varphi^{-1}(x)$ définie sur l'intervalle $J =]-1 ; 1[$.

2) On pose $h(x) = \varphi^{-1}(x)$. Donnons les expressions de $h(x)$ et $h'(x)$.

$$\varphi(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}. \text{ Posons } \varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = y(e^{2x} + 1) \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \Leftrightarrow e^{2x} - ye^{2x} = 1 + y \Leftrightarrow e^{2x}(1 - y) = 1 + y \Rightarrow e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \Rightarrow$$

$$2x = \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right) = \ln\sqrt{\frac{1 + y}{1 - y}} \Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$\text{D'où } h(x) = \varphi^{-1}(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

$$h(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \Rightarrow h'(x) = \frac{\frac{1}{(1 - x)^2} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}}{\frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}}} = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\text{D'où } h'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

3) Etudions puis représentons le fonction h sur $]-1 ; 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln \sqrt{\frac{2}{0^+}} = +\infty$$

$$h(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

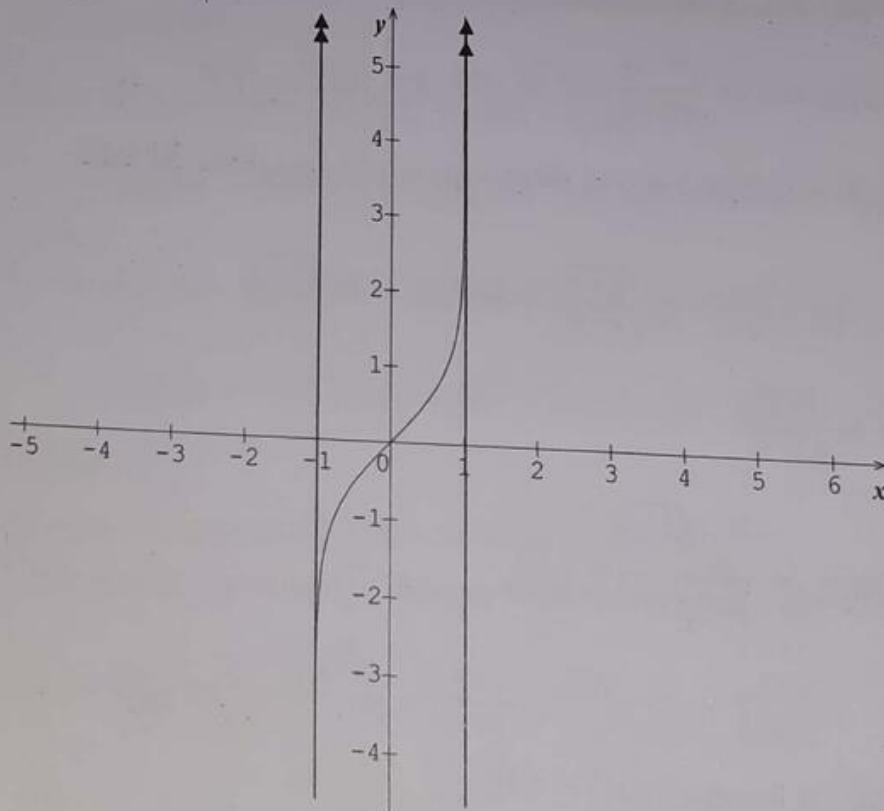
Alors le signe de $h'(x)$ dépend du signe de $1 - x^2$. Posons $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

D'où le tableau de variation de h est le suivant :

x	-1	1
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$+\infty$

La représentation de la courbe (Ch) sur $] -1 ; 1[$ est le suivant :



16

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C est défini sur $[0 ; 10]$ par $C(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

Le but du problème est d'étudier le coût total C_t et le coût moyen C_m de la production, puis de minimiser le coût moyen. Les coûts sont exprimés en milliers de francs.

Partie A : Etude de la fonction C_t

1) Déterminons les réels a et b tels que, pour tout x de $[0 ; 10]$; $C(x) = ax + \frac{b}{x+1}$

$$C(x) = ax + \frac{b}{x+1} = \frac{ax(x+1) + b}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + b}{x+1} \quad \text{D'autre part } C(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x+1}$$

$$\text{Par identification on a : } \frac{ax^2 + ax + b}{x+1} = \frac{x^2 + x + 4}{x+1} \Leftrightarrow ax^2 + ax + b = x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$a = 1 \text{ et } b = 4$$

$$\text{D'où } C(x) = x + \frac{4}{x+1}$$

2) La fonction C_t est la primitive de C qui s'annule pour $x = 0$. Déterminons C_t

$$C(x) = x + \frac{4}{x+1} \Rightarrow C_t(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x+1) + k. \text{ Or } C_t(0) = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\text{D'où } C_t(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln(x+1)$$

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire f .

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1)$

1) Montrons que $\forall x \in [0 ; 10]$ la dérivée f' de f est donnée par $f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{8}{(x+1)^2} - \frac{8}{x+1} = \frac{2x(x+1)^2 + 8 - 8(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x^2 + 2x - 3)}{(x+1)^2} = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2} \quad (\text{Ce qu'il fallait démontrer}).$$

2) Dressons le tableau de variation de f sur $[0 ; 10]$.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

$\forall x \in [0 ; 10] ; (x+1)^2 > 0$; Alors le signe de $f'(x)$. Posons $2x(x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -3$$

Puisque la fonction f s'annule pour $\alpha = 1,712$, alors le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	1	α	10
$f'(x)$		0	+	
$f(x)$	0	-0,55	0	88,08

D'après le tableau de variation, le signe de f est le suivant

$\forall x \in [0; \alpha[; f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[; f(x) > 0$.

Partie C : Etude du coût moyen C_m

La fonction C_m est définie sur $]0; 10[$ par $C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}$

1) Calculons la dérivée C'_m puis Vérifier que $C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$ où f est la fonction auxiliaire introduite dans la **partie B**

$$C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x} \Rightarrow C'_m(x) = \frac{1}{2} + 4 \left[\frac{\frac{1}{x+1}x - \ln(x+1)}{x^2} \right] = \frac{1}{2} + 4 \left[\frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} + 4 \left[\frac{\frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x+1}}{x^2} \right] = \frac{1}{2} + 4 \left[\frac{x - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} \right] = \frac{1}{2} + \frac{4x - 4(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$= \frac{x^2(x+1) + 8x - 8(x+1)\ln(x+1)}{2x^2(x+1)} = \frac{(x+1) \left[x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1) \right]}{2x^2(x+1)} \Rightarrow$$

$$C'_m(x) = \frac{x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8\ln(x+1)}{2x^2} = \frac{f(x)}{2x^2} \text{ (Ce qu'il fallait démontrer).}$$

2) Etudions le sens de variation de C_m sur $]0; 10[$

On sait que $\forall x \in]0; 10[; C'_m(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$. Alors $\forall x \in]0; 10[; 2x^2 > 0$; Alors le signe

de $C'_m(x)$ dépend du signe de $f(x)$. Or d'après **partie B, 2)** on a :

$\forall x \in [0; \alpha[; f(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in [0; \alpha[; C'_m(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $[0; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[; f(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; +\infty[; C'_m(x) > 0$ d'où f est croissante sur $] \alpha; +\infty[$

Ainsi le tableau de variation de f sur $]0; 10[$ est le suivant

x	0	α	10
$C'_m(x)$		-	+
$C_m(x)$	4	3,18	5,95

NB: $\alpha = 1,712 \Rightarrow C_m(\alpha) = 3,18$

3) Déterminons la production pour la qu'elle l'entreprise a un coût moyen minimum.

D'après le tableau de variation, l'entreprise a un coût moyen minimum pour production de 3,18 milliers de tonnes et le coût correspondant est de 1,712 milliers de francs.

17 Partie A :

Soit la fonction numérique f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(x) = \ln(2x + 4)$.

1) Calculons $f'(x)$ et déterminer son signe sur $[0 ; 10]$.

Établissons le tableau de variation de f .

$$f(x) = \ln(2x + 4) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x + 4}. \text{ Pour tout } x \in [0 ; 10]; f'(x) > 0$$

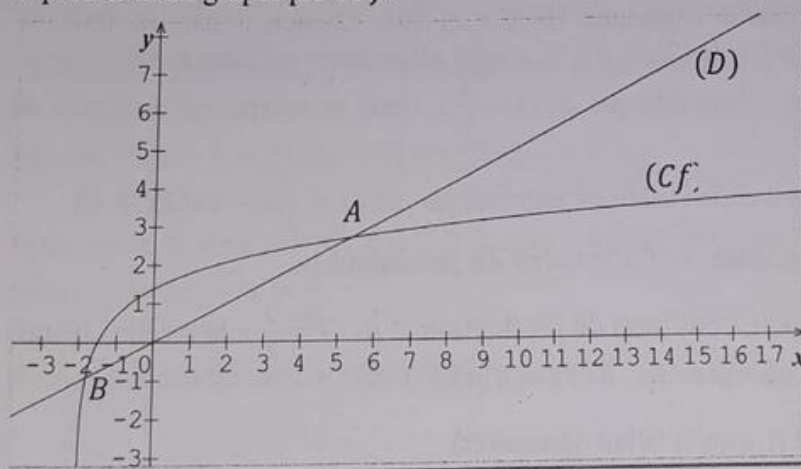
D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	10
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\ln 4$	$\ln 24$

2) Complétons le tableau suivant à l'aide de valeurs décimales arrondies à 0,1 près par excès.

X	0	1	2	4	6	8	10
$f(x)$	1,4	1,8	2,1	2,5	2,8	3,0	3,2

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm), dessinons avec soin la représentation graphique de f .



Partie B

On note (Cf) ; la courbe représentative de la fonction f étudiée dans la partie A et (D) ; la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$

1) Dans le plan utilisé à la partie A traçons la droite (D) . On appelle A et B les points d'intersection entre (Cf) et (D) , A désignant celui d'abscisse positive. (Voir figure)

2) On se propose de déterminer un encadrement de l'abscisse a de A . Pour cela, on définit sur l'intervalle $I = [0 ; 10]$, la fonction h par $h(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4)$

a- Étudions sur I le sens de variation de h et dressons le tableau de variation correspondant.

$$h(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4) \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2x+4} = \frac{x}{2x+4} \Rightarrow \forall x \in [0 ; 10] ; h'(x) \geq 0$$

Alors h est strictement croissante. D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	0	10
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$\ln 4$	$5 - \ln 24$

b- Soit a la solution dans I de l'équation $h(x) = 0$. Reproduisons puis complétons le tableau suivant afin d'en déduire un encadrement de a , d'amplitude 0,1.

X	5,2	5,3	5,4	5,5
$h(x)$	-0,06	-0,03	0,005	0,04

D'après le tableau ci-dessus, $\forall x \in [5,3 ; 5,4] ; h(5,3) \times h(5,4) < 0$

Alors d'après le théorème des balayages, on a : $5,3 < a < 5,4$

Partie C

Une usine fabrique mensuellement x produits ($0 \leq x \leq 10$). Chaque mois, les frais de production sont donnés par $f(x) = \ln(2x + 4)$; la recette obtenue en vendant x produits, au prix unitaire de 50.000 FCFA, s'exprime par $g(x) = \frac{1}{2}x$ (frais et recette en centaines de milliers de FCFA).

1) Montrer que le bénéfice mensuel de l'usine est exprimé par $B(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4)$

On sait que : **Bénéfice = Recette - Coût total de production.**

Si $f(x) = \ln(2x + 4)$ représente Coût total de production et $g(x) = \frac{1}{2}x$ la recette obtenue en vendant x produits, alors le bénéfice est : $B(x) = g(x) - f(x)$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{1}{2}x - \ln(2x + 4) \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

2) Vérifions si l'usine réalise un bénéfice lorsqu'elle vend chaque mois :

a- 4 produits

Pour une vente de $x = 4$ produit, on a : $B(4) = -0,48 < 0$. Alors pas de bénéfice.

b- 7 produits

Pour une vente de $x = 7$ produit, on a : $B(7) = 0,609$ Alors on a un bénéfice de 0,609 Milliers de FCFA

2) Déterminons le nombre minimal de produits qu'il faut vendre mensuellement pour être bénéficiaire

Pour être bénéficiaire, il faut que l'usine vende un nombre minimal de $x = 7$ produits par mois.

18 Partie A

On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + 3\ln(x + 1)$.
Où a et b sont deux réels et soit (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité graphique 2cm).

1) Déterminons les réels a et b sachant que (Cf) passe par $A(0; 5)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

$$f(x) = ax + b + 3\ln(x + 1)$$

- La courbe (Cf) passe par $A(0; 5)$ si $f(0) = 5 \Leftrightarrow b = 5$

- La courbe (Cf) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ si $f'(\frac{1}{2}) = 0$ avec

$$f'(x) = a + \frac{3}{x+1}. \text{ Alors } f'(\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\text{D'où } f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x + 1)$$

2) Dans la suite du problème on considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x + 1).$$

a- Calculons la dérivée $f'(x)$ puis dressons le tableau de variation de f .

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x + 1) \Rightarrow f'(x) = -2 + \frac{3}{x+1} = \frac{1-2x}{x+1}$$

Pour tout $x \in]-1; +\infty[; x + 1 > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $1 - 2x$.

$$\text{Posons } 1 - 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	-1	α	$\frac{1}{2}$	β	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	0	$4 + 3\ln\frac{3}{2}$	0	$-\infty$

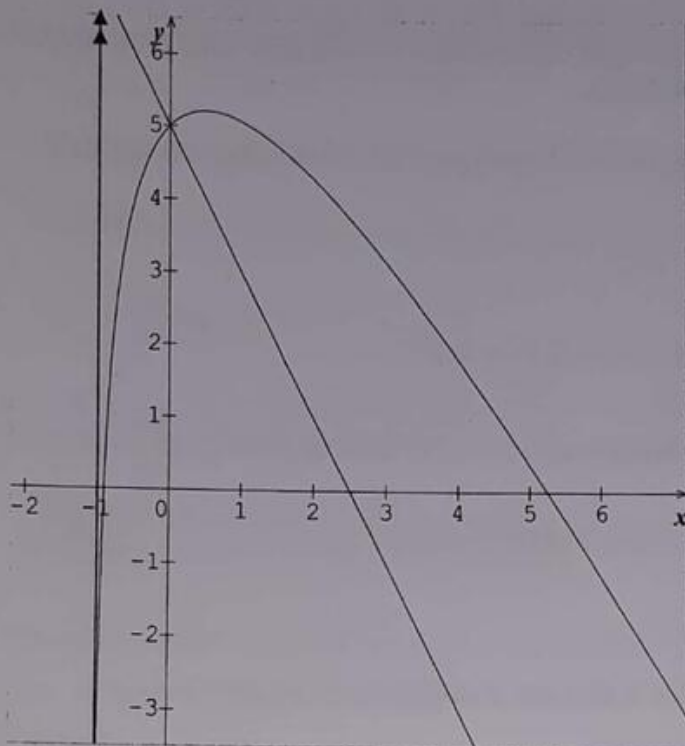
b- Précisons la valeur exacte du maximum de f .

La valeur exacte du maximum de f est $4 - 3\ln 2 = 5,21$

3) Traçons la courbe (C_f) et ses asymptotes éventuelles dans le repère.

La droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale

La droite d'équation $y = -2x + 5$ est asymptote oblique



4) a- Montrons qu'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Avec $\alpha < 0 < \beta$

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]-1 ; \frac{1}{2}[$; f est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-1 ; \frac{1}{2}[$ vers $]-\infty ; 4 + 3\ln\frac{3}{2}[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une première solution α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De même $\forall x \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$; f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]\frac{1}{2} ; +\infty[$ vers $]-\infty ; 4 + 3\ln\frac{3}{2}[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seconde solution β telle que $f(\beta) = 0$.

Conclusion : il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Avec $\alpha < 0 < \beta$

b- Calculons $f(-0,9)$; $f(-0,8)$; $f(5,2)$ et $f(5,3)$ puis en déduisons un encadrement

d'amplitude 10^{-1} de α et β .

suivant afin d'en déduire un encadrement de a , d'amplitude 0,1.

X	-0,9	-0,8	5,2	5,3
$f(x)$	-0,1	1,7	0,7	-0,7

Alors d'après le théorème des balayages, on a : $-0,9 < \alpha < -0,8$ et $5,2 < \beta < 5,3$

c- En déduisons le signe de $f(x)$ sur $] -1 ; +\infty[$

$$\forall x \in] -1 ; \alpha[\cup] \beta ; +\infty[; f(x) < 0 \text{ et } \forall x \in] \alpha ; \beta [; f(x) > 0$$

5) Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.
Calculons $g'(x)$

$$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \Rightarrow g'(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}(x+1) - 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1)$$

De cette dérivée nous pouvons dire que la primitive de $\ln(x+1)$ est $(x+1)\ln(x+1) - x$.

En déduisons une primitive de f qui s'annule en 0.

$$f(x) = -2x + 5 + 3\ln(x+1) \Rightarrow F(x) = -x^2 + 5x + 3[(x+1)\ln(x+1) - x] + k$$

$$\Rightarrow F(x) = -x^2 + 5x + 3(x+1)\ln(x+1) - 3x + k$$

$$= -x^2 + 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + k. \text{ Or } F(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$$

D'où la primitive de f qui s'annule en 0 est $F(x) = -x^2 + 2x + 3(x+1)\ln(x+1)$

Partie B

Une entreprise a une capacité de production de 5.000 ouvrages par jour.

Une étude a montré que le coût marginal de production de cette entreprise peut être par donné la fonction $f(q)$ en (milliers de francs) où q désigne la quantité d'ouvrages imprimés en (milliers d'unités). On rappelle que le coût marginal est la dérivée du coût de production.

1) a- Calculons $\int_0^5 f(q) dq$

D'après Partie A 5) on a :

$$\text{Si } f(q) = -2q + 5 + 3\ln(q+1) \Rightarrow F(q) = -q^2 + 2q + 3(q+1)\ln(q+1)$$

$$\Rightarrow \int_0^5 f(q) dq = [-q^2 + 2q + 3(q+1)\ln(q+1)]_0^5 = -15 + 18\ln 6$$

b - En déduisons le coût total en (francs) de production de 5.000 ouvrages.

Puisque le coût marginal est la dérivée du coût de production, alors $C'(q) = f(q)$.

Alors le coût total de production $C(q)$ est la primitive du coût marginal $f(q)$.

Donc $C'(q) = f(q) \Leftrightarrow C(q) = \int f(q) dq$. Or D'après Partie B 1)-a on a :

$$\int f(q) dq = F(q) = -q^2 + 2q + 3(q+1)\ln(q+1)$$

D'où le coût total de production est : $C(q) = -q^2 + 2q + 3(q+1)\ln(q+1)$

En déduisons ainsi le coût total en (francs) de production de 5.000 ouvrages.

$$C(5.000) = 24862213,55 \text{ francs}$$

2) L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8.000 ouvrages. Il hésite entre deux possibilités suivantes :

- 5.000 ouvrages le premier jour et 3.000 ouvrages le second jour.

Pour 5.000 ouvrages le premier jour et 3.000 ouvrages le second jour, on a :

$$C(5.000) + C(3.000) = 24862213,55 + 8921915,672 = 15940297,88 \text{ francs}$$

- 4.000 ouvrages pendant deux jours

Pour 4.000 ouvrages pendant deux jours, on a :

$$2 \times C(4.000) = 31784887,04 \text{ francs}$$

Déterminons l'option la plus rentable

$$15940297,88 \text{ francs} < 31784887,04 \text{ francs}$$

Alors l'option la plus rentable est la commande réalisée de 4.000 ouvrages pendant deux jours

Chapitre 7

Fonction exponentielle
COURS1- Définition :

La fonction exponentielle noté « $\exp x$ » ou « e^x » est la fonction réciproque de la fonction $\ln x$ définie sur $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

2- Ensemble de définition de la fonction exponentielle :

Si $f(x) = e^x$ alors $Df = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$

NB :

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ (car la fonction exponentielle est la bijection réciproque de la fonction logarithme Népérien. Elle prend ces valeurs dans \mathbb{R}_+).

3- Propriétés remarquables :

$$P_1 : e^{a \times b} = (e^a)^b$$

$$P_2 : e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$P_3 : e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$P_4 : e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$P_5 : (e^a)^n = e^{na}$$

$$P_6 : e^{\ln a} = \ln e^a = a$$

$$P_7 : e^0 = 1 \text{ et } e^1 = e$$

$$P_8 : \ln e = e^{\ln 1} = 1$$

$$P_9 : e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$P_{10} : e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b \text{ et } e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

$$P_{11} : e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b$$

4- Limites remarquables :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et pour } a > 0, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{\ln x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty$$

5- Dérivées remarquables :

- Si $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- Si $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow f'(x) = ae^{(ax+b)}$
- Si $f(x) = e^{[u(x)]} \Rightarrow f'(x) = u'(x)e^{[u(x)]}$

6- Primitives remarquables :

- Si $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + K$
- Si $f(x) = e^{(ax+b)} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{(ax+b)} + K$
- Si $f(x) = u'(x) e^{[u(x)]} \Rightarrow F(x) = e^{[u(x)]} + K$

7- Fonctions puissances :

a) Définition :

$$f_a'(x)$$

On appelle fonction puissance toute fonction f_a définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
 $f_a(x) = a^x = e^{x \ln a}$, où a est un nombre réel positif et différent de 1.

b) Etude des fonctions puissances :

- Dérivée : $f_a'(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a e^{x \ln a}$, d'où : $f_a'(x) = a^x \ln a$
- Tableaux de variation :

Les tableaux de variations suivants résument l'étude de f_a suivant les valeurs de a .

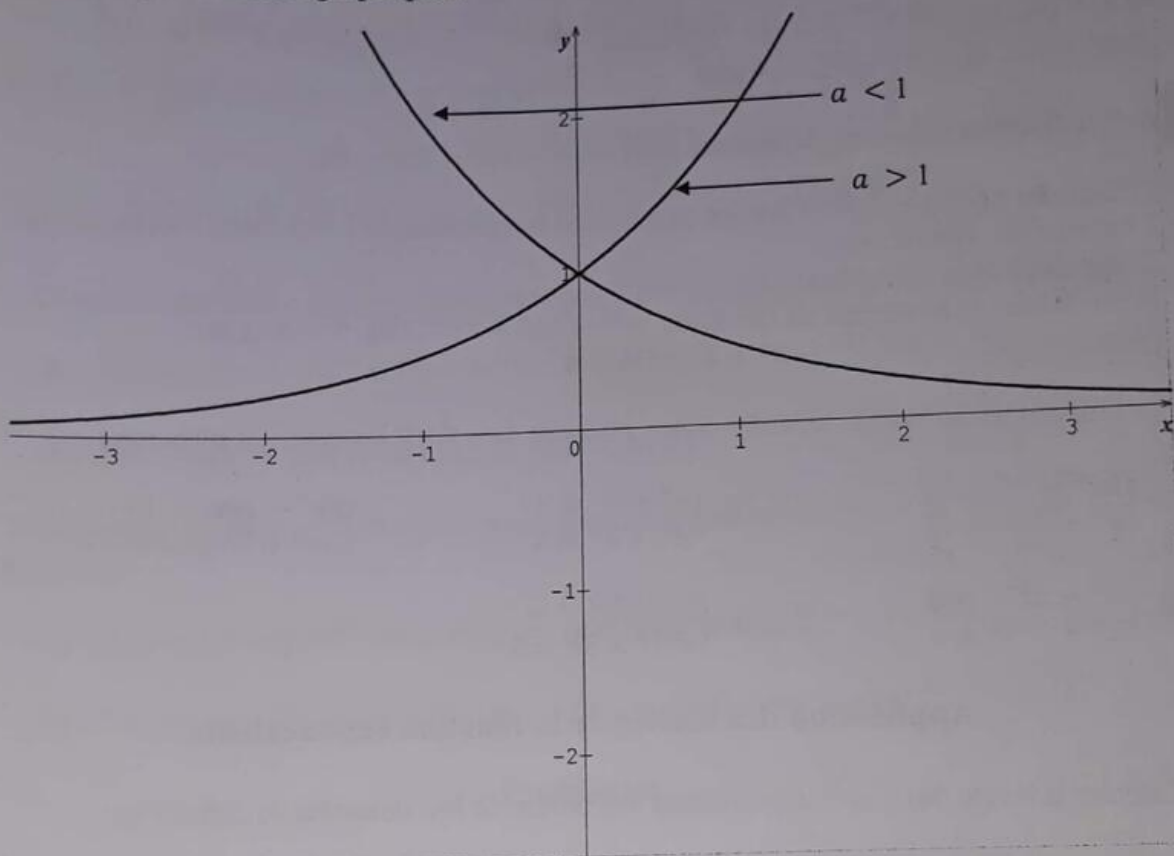
1^{er} cas : Si $0 < a < 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a'(x)$	-	
$f_a(x)$	$+\infty$	0

2^{ème} cas : Si $a > 1$ alors on a : le tableau suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_a(x)$		+
$f_a(x)$	0	$+\infty$

- Représentations graphiques:



EXERCICES

Propriétés de la fonction exponentielle

- 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifier les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + e^{\frac{1}{3}\ln 8} - e^{-\ln \frac{1}{4}}; \quad B = e^{2\ln 5} - e^{-\ln 3} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}})$$

$$C = -2\ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + 3e^{\ln(-\ln \frac{1}{e})}; \quad D = e^{\ln \sqrt{e\sqrt{e}}}$$

2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $e^x = 3$; b) $e^{-x} = 2$; c) $e^{2x} = \frac{1}{2}$; d) $e^{3x+1} = e^{-x+3}$; e) $e^{2-3x} = e^{-x^2}$

f) $3^x = 4$; g) $4^{-x} = 3$; h) $7^{5x} = -3$; i) $\frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2}$; j) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$; k) $\frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}}$

l) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

a) $e^{-2x} \geq 4$; b) $e^{-x} \leq 6$; c) $e^{2x} > \frac{1}{2}$; d) $e^{3x+1} < e^{-x+3}$; e) $e^{2-3x} \geq e^{-x^2}$

f) $3^x < 4$; l) $e^{2x} + 5e^x + 4 < 0$

2

Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calculer $f(-1)$ et $f(-3)$ puis en déduire une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

2) Résolvez l'équation $f(x) = 0$

3) En déduire la résolution de l'équation : $e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0$ et de l'équation : $2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0$

3

En utilisant les propriétés logarithmiques, résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

a- $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$; b- $\begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases}$; c- $\begin{cases} 3e^x - 2\ln y = 13 \\ 5e^x + 3\ln y = 9 \end{cases}$

d- $\begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases}$; e- $\begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases}$

Application des limites de la fonction exponentielle

4

Calculer la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

1) $f(x) = e^{-x^2+2x-3}$; 2) $f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$; 3) $f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$

4) $f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+2}$; 5) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1+e^{2x-3}}$; 6) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

7) $f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$; 8) $f(x) = \ln(e^x - 1)$; 9) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5

1) Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2-x-1}$; b) $f(x) = e^{\sqrt{x^2-3}}$; c) $f(x) = e^{\frac{3}{x-1}}$

d) $f(x) = \frac{-1}{e^{x^2+2x}}$; e) $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}}$; f) $f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x-5e^x+6}}$

g) $f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)]$; h) $f(x) = (x+2)(e^x - 1)$

2) Calculer la primitive des fonctions suivantes :

a- $f(x) = e^{2x-3}$; b- $f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3-e^{2x-3}}$; c- $f(x) = (-x+1)e^{x^2-2x+5}$

d- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; e- $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+3}}e^{\sqrt{2x+3}}$; f- $f(x) = \frac{5}{e^{2x-3}}$

g- $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; h- $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$; i- $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; j) $f(x) = 2^x$

6

1) déterminer les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f.

a) $f(x) = (2x+1)e^x$ et $F(x) = (ax+b)e^x$

b) $f(x) = (x+1)e^{\frac{-x}{2}}$ et $F(x) = (ax+b)e^{\frac{-x}{2}}$

2) Déterminer les réels a; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f

a) $f(x) = (x^2-1)e^{2x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

b) $f(x) = (x^2-3x+1)e^{-3x}$ et $F(x) = (ax^2+bx+c)e^{-3x}$

Problèmes

7

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A : Etude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$
(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$).

2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ et préciser la position de la courbe C par rapport à la droite Δ .

- 3) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f .
- b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.
- c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
- d) Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4) Soit I l'intervalle $[1,9; 2]$. Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .
- 5) Tracer la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Partie B : Recherche d'une approximation de α :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

- 1) Démontrer, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.
- 2) Etudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .
- 3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
- 4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} = g(u_n)$
 - a) Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$
 - b) En déduire, en raisonnant par récurrence que pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ puis donner la limite de la suite u_n en $+\infty$

Partie C : Calcul d'aire :

- 1) En intégrant par parties, calculer l'intégrale $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$
- 2) a) Déterminer, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.
- b) Démontrer qu'on peut écrire $A = (\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$.

8

Partie A : Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = x e^x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$ où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
- 2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.
 - a) Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .
 - b) Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) .
 - c) En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) .
- 3) Déterminer la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0.

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

- 1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.
- 2) Etudier le sens de variation de g , puis dresser son tableau de variation.
- 3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.

- Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.
- L'autre solution est appelée α . Montrer que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

- Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).
- Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Etudier le sens de variation de f .
- Montrer que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la partie B. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).
- Etablir le tableau de variation de f .
- Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Partie D : Calcul d'aire

- Soit m un réel négatif, Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x)dx$
 - Calculer $\int_m^0 xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
 - En déduire $\int_m^0 f(x)dx$
 - Calculer la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.
- 9 L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$

- Calculer $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de \mathbb{R} .
- Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation de g .
- Donner le signe de $g(x)$.

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

- Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.
- Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 - Déterminer la limite de f en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4 \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{\ln X}{X}$

Dresser le tableau de variation de f .

- Tracer C.
- Soit α un réel strictement positif.

- a) Calculer la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+2e^x} dx$
 b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$
 puis donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

- 1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).
- 2) Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
- 3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

10 Partie A :

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x + x - 5$

- 1) Etudier le sens de variation de g .
(On ne demande pas de déterminer les limites de g , ni de construire sa courbe).
- 2) a) Calculer $g(0)$ et $g(2)$
 b) Démontrer que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que $1,30 < \alpha < 1,31$

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $] -\infty ; 5[$ par : $f(x) = \ln(5-x)$.

- 1) Etudier le sens de variation de f . Préciser les limites de f en 5 et en $-\infty$.
- 2) Prouver que $f(\alpha) = \alpha$
- 3) a) Démontrer que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 b) En déduire que $\forall x \in [0 ; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$
 c) Démontrer que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.
- 4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) , d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f .
 a) Tracer la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées (x, y) tel que : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ on notera (S) cette partie.
 b) En remarquant que, $\forall x \neq 5, \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; montrer que $\int_\alpha^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$
 c) Prouver que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
 (On utilisera une intégration par partie).

- 11 On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$
 On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

- 1) a) Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.
- b) Calculer la limite de cette fonction lorsque x tend vers -1 . Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
- 2) Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$.
- 3) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) Tracer la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0.
(Unité graphique : 4 cm)
- 5) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[1; 10]$. Utiliser le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a; b]$.

B) Calcul d'une aire

- 1) Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$.
- a) Etudier le sens de variation de g dans l'intervalle $[1; 2]$.
- b) Montrer que, pour tout x appartenant à $[1; 2]$, on a : $1 \leq g(x) \leq 2,5$.
- c) En déduire un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x) dx$.
- 2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimer A_2 en fonction de A_1 et en déduire un encadrement de A_2 .

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Soit h la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$.

- 1) a) Vérifier que, pour tout x appartenant à $]-1; +\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.
- a) Calculer $h'(x)$.
- b) En utilisant la question a), calculer $f''(x)$. En déduire le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

- 2) En déduire que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
- 3) On définit la suite (u_n) , pour tout nombre entier naturel n , par :
 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geq 0$.

On admet que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

- a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |u_n - \beta|$.
- b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- c) En déduire une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

12

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

- 1) Montrer que pour tout réel positif x , $f_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$. En déduire le sens de variation de f_1 .
- 2) Calculer la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$). Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Dresser le tableau de variation de f_1 .
- 4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position de C_1 par rapport à Δ .
- 5) Tracer C_1 et Δ .

Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

- 1) Montrer que pour tout réel x positif, $f_3'(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$. En déduire le sens de variation de f_3 .
- 2) Déterminer les positions relatives de C_1 et C_3 .
- 3) Tracer C_3 dans le même repère que C_1 .
(on admettra que C_3 a la même asymptote que C_1 en $+\infty$).
- 4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1 , les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3 , les deux axes de coordonnées et la droite D .
 - a) Calculer A_1 .
 - b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.
- 2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 . Placer S_1, S_2, S_3 sur la figure.
- 3) Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$
 - a) Etudier le sens de variation de g .
 - b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. En déduire que tout point S_n , on a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

13

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

Partie A :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

- 1) Déterminer la fonction dérivée f'_n de f_n et donner l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} .
- 2) Etudier les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)
- 3) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.
- 4) Déterminer la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour les courbes (C_n) ? Tracer sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2) .

Partie B :

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

- 1) Démontrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.
- 2) Déterminer en utilisant la relation de la question A).1), une relation entre I_n et I_{n+1} .

Partie C :

Dans cette partie, $n = 2$.

- 1) Démontrer que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α .

- 2) Etudier les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et en déduire que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25$

- 3) Soit (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a- Démontrer, en utilisant la question C.2., que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

b- En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et que la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ converge vers α .

14 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$

On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définit la fonction g sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

- 1) Etudier les variations de g , dresser son tableau de variation. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1,14 < \alpha < 1,15$.
- 2) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : (Etude et tracée de f).

- 1) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f .
- 2) a) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$; $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$
 b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
- 3) Montrer que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$ puis déterminer l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$
- 4) Montrer que $f(x) - x = \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$. Etudier les variations de la fonction $T(x) = e^x - xe^x - 1$. Puis en déduire la position de (C) par rapport à (T). Tracer (C) et (T).

Partie C :

- 1) Déterminer une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la partie B.
 2) Calculer en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C), la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

15 **Partie A :**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ L'unité graphique est 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$.
- 2) a- Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$ b) En déduire que, pour tout x de \mathbb{R} : $2 + \cos x + \sin x > 0$
 b- Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
- 3) a- Montrer que, pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.
 b- En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
 c- Interpréter géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.
- 4) a- Montrer que, sur l'intervalle $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .
 b- Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
- 5) Représenter la courbe (C) sur $[0; 4]$

Partie B :

On veut calculer l'aire, A , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

- 1) Montrer que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$
- 2) On pose : $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt$
 a- A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
 $I = -\cos 1 + e - J$ et $J = -\sin 1 + I$.
 b- En déduire la valeur de I .

- 3) Déterminer la valeur exacte de A en unités d'aire, puis donner une valeur approchée de A à 10^{-3} près par défaut.

Partie C :

- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.
- 1) a) Montrer que la fonction h admet des primitives sur \mathbb{R} .
b) Calculer la primitive H de la fonction h , qui prend en 0 la valeur $(1 + \ln 3)$.
 - 2) a) Déterminer $\ln(f(x))$ pour tout x de \mathbb{R} .
b) Etudier le sens de variation de la fonction H .
c) déterminer le tableau de variations de H .
 - 3) On appelle Γ la courbe représentative de la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$. (On ne demande pas de représenter Γ). On appelle Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.
a) Etudier la position relative de Γ et de Δ .
b) Déterminer les abscisses des points communs à Γ et Δ .
1) a) Etablir une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0.
b) Etudier la position relative de Γ et T .
 - 5) Montrer que la courbe Γ est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations.

16

Partie A :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité graphique 1 cm).

- 1) a- Déterminer la limite de f en $-\infty$.

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$; déterminer la limite de f en $+\infty$. Puis en déduire

l'équation des asymptotes à la courbe (C)

- b- Calculer la dérivée f' de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .
- 2) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$.
- 3) Tracer sur un même graphique la courbe (C) ; ces asymptotes et la tangente (T) .

Partie B :

Une entreprise fabrique un certain produit P . On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées.

On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C .

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

- 1) a- Montrer que le coût total est donnée par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.
b- Exprimer $C(x)$ en fonction de x .
c- Qu'elle est le coût total de 5 tonnes de ce produit P ? On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près.

- 2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$
- a- Exprimer $C_m(x)$, en fonction de x .
- b- Vérifier que, pour tout $x \in [0; +\infty[$; $C_m(x) = 10 + \frac{10 \ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x}$
- c- En déduire la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

Solutions

Propriétés de la fonction exponentielle

- 1) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, simplifions les expressions suivantes :

$$A = e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + e^{\frac{1}{3} \ln 8} - e^{-\ln \frac{1}{4}} \Rightarrow A = e^{\ln 3} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + e^{\frac{1}{3} \ln 2^3} - e^{\ln 4}$$

$$\Rightarrow A = e^{\ln 3} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + e^{\ln 2} - e^{\ln 4} = 3 - \frac{1}{3} + 2 - 4 = \frac{2}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$B = e^{2 \ln 5} - e^{-\ln 3} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{\sqrt{8}}) \Rightarrow B = e^{\ln 5^2} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + \ln(e^{\sqrt{2}} \times e^{2\sqrt{2}})$$

$$= e^{\ln 25} - \frac{1}{e^{\ln 3}} + \ln e^{3\sqrt{2}} = 25 - \frac{1}{3} + 3\sqrt{2} = \frac{74 + 9\sqrt{2}}{3} \Rightarrow B = \frac{74 + 9\sqrt{2}}{3}$$

$$C = -2 \ln e^3 + \ln \sqrt{e} - \ln(\ln e) + 3e^{\ln(-\ln \frac{1}{e})} \Rightarrow C = -2 \ln e^3 + \ln e^{\frac{1}{2}} - \ln(1) + 3e^{\ln(\ln e)}$$

$$= -2 \ln e^3 + \ln e^{\frac{1}{2}} - \ln(1) + 3e^{\ln(1)} = -6 + \frac{1}{2} + 3 = -\frac{5}{2} \Rightarrow C = -\frac{5}{2}$$

$$D = e^{\ln \sqrt{e \sqrt{e}}} \Rightarrow D = e^{\ln e^{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{4} \Rightarrow D = \frac{3}{4}$$

- 2) En utilisant les propriétés de la fonction exponentielle, résolvons dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $e^x = 3 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 3 \Rightarrow x = \ln 3$. Alors $S = \{\ln 3\}$

b) $e^{-x} = 2 \Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln 2 \Rightarrow -x = \ln 2 \Rightarrow x = -\ln 2$. Alors $S = \{-\ln 2\}$

c) $e^{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln e^{2x} = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -\ln 2 \Rightarrow x = -\frac{\ln 2}{2}$. Alors $S = \left\{-\frac{\ln 2}{2}\right\}$

d) $e^{3x+1} = e^{-x+3} \Leftrightarrow 3x+1 = -x+3 \Leftrightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Alors $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$e) e^{2-3x} = e^{-x^2} \Leftrightarrow 2-3x = -x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2.$$

$$\text{Alors } S = \{1; 2\}$$

$$f) 3^x = 4 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} = 4 \Leftrightarrow x \ln 3 = \ln 4 \Rightarrow x = \frac{\ln 4}{\ln 3}. \text{ Alors } S = \left\{ \frac{\ln 4}{\ln 3} \right\}$$

$$g) 4^{-x} = 3 \Leftrightarrow e^{-x \ln 4} = 3 \Leftrightarrow -x \ln 4 = \ln 3 \Rightarrow x = -\frac{\ln 3}{\ln 4}. \text{ Alors } S = \left\{ -\frac{\ln 3}{\ln 4} \right\}$$

$$h) 7^{5x} = -3 \Leftrightarrow e^{5x \ln 7} = -3 \text{ "Impossible"}. \text{ Alors } S = \{ \emptyset \}$$

$$i) \frac{e^x + 1}{e^x - 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x + 2 = e^x - 4 \Leftrightarrow e^x = -6 \text{ "Impossible"}. \text{ Alors } S = \{ \emptyset \}$$

$$j) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 0 \text{ "Impossible"} \Rightarrow S = \{ \emptyset \}$$

$$k) \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{1}{e^{-x}} \Leftrightarrow e^{2x} \times e^{-x} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = e^x + 1 \Rightarrow 0 = 1. \text{ Absurde } \Rightarrow S = \{ \emptyset \}$$

$$l) e^{2x} + 3e^x - 4 = 0. \text{ Effectuons un changement de variable en posant } X = e^x$$

$$\text{Alors l'équation } e^{2x} + 3e^x - 4 = 0 \text{ dévient : } X^2 + 3X - 4 = 0 \Rightarrow X_1 = 1 \text{ et } X_2 = -4.$$

$$\cdot \text{ Si } X_1 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0.$$

$$\cdot \text{ Si } X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4 \text{ "Impossible"}. \Rightarrow S = \{0\}$$

3) En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$a) e^{-2x} \geq 4 \Leftrightarrow -2x \geq \ln 4 \Rightarrow x \leq \frac{-\ln 4}{2} \Rightarrow S = \left] -\infty; \frac{-\ln 4}{2} \right]$$

$$b) e^{-x} \leq 6 \Leftrightarrow -x \leq \ln 6 \Rightarrow x \geq -\ln 6 \Rightarrow S = [-\ln 6; +\infty[$$

$$c) e^{2x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > -\ln 2 \Rightarrow x > \frac{-\ln 2}{2} \Rightarrow S = \left] \frac{-\ln 2}{2}; +\infty \right[$$

$$d) e^{3x+1} < e^{-x+3} \Leftrightarrow 3x+1 < -x+3 \Leftrightarrow 4x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$$

$$e) e^{2-3x} \geq e^{-x^2} \Leftrightarrow 2-3x \geq -x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0. \text{ Posons } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 2. \text{ Alors } S = \left] -\infty; 1 \right] \cup [2; +\infty[$$

$$f) 3^x < 4 \Leftrightarrow e^{x \ln 3} < 4 \Leftrightarrow x \ln 3 < \ln 4 \Rightarrow x < \frac{\ln 4}{\ln 3} \Rightarrow S = \left] -\infty; \frac{\ln 4}{\ln 3} \right[$$

$$g) e^{2x} + 5e^x + 4 < 0. \text{ Effectuons un changement de variable en posant } X = e^x$$

$$\text{Alors l'inéquation } e^{2x} + 5e^x + 4 < 0 \text{ dévient : } X^2 + 5X + 4 < 0. \text{ Posons } X^2 + 5X + 4 = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -1 \text{ et } X_2 = -4.$$

$$\cdot \text{ Si } X_1 = -1 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ "Impossible".}$$

$$\cdot \text{ Si } X_2 = -4 \Leftrightarrow e^x = -4 \text{ "Impossible".}$$

$$\text{Alors } S = \{ \emptyset \}$$

2 Soit la fonction polynôme définie par $f(x) = x^3 - 4x^2 - 29x - 24$

1) Calculons $f(-1)$ et $f(-3)$

$$f(-1) = 0 \text{ et } f(-3) = 0$$

En déduisons une factorisation de f sous forme d'un produit de 3 facteurs du premier degré.

Ainsi la forme factorisée de $f(x)$ est $f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 8)$

2) Résolvons l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 3)(x - 8) = 0 \Rightarrow x = -1; x = -3 \text{ ou } x = 8$$

$$\Rightarrow S = \{-1; -3; 8\}$$

3) En déduisons la résolution des équations :

$$e^{2x} - 4e^x - 29 - 24e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 29 - \frac{24}{e^x} = 0 \Leftrightarrow e^{3x} - 4e^{2x} - 29e^x - 24 = 0$$

Effectuons un changement de variable en posant $X = e^x$

Alors l'équation $e^{3x} - 4e^{2x} - 29e^x - 24 = 0$ devient : $X^3 - 4X^2 - 29X - 24 = 0$

D'après 2), on a : $X = -1; X = -3$ ou $X = 8$

$$\cdot \text{ Si } X = -1 \Leftrightarrow e^x = -1 \text{ impossible}$$

$$\cdot \text{ Si } X = -3 \Leftrightarrow e^x = -3 \text{ impossible}$$

$$\cdot \text{ Si } X = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \Rightarrow x = \ln 8$$

$$S = \{ \ln 8 \}$$

$$2^{3x} - 4 \times 2^{2x} - 29 \times 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 4(2^x)^2 - 29 \times 2^x - 24 = 0. \text{ Posons } X = 2^x$$

$$\Rightarrow X^3 - 4X^2 - 29X - 24 = 0$$

D'après 2), on a : $X = -1; X = -3$ ou $X = 8$

- Si $X = -1 \Leftrightarrow 2^x = -1 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = -1$ impossible
- Si $X = -3 \Leftrightarrow 2^x = -3 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = -3$ impossible
- Si $X = 8 \Leftrightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = 8 \Rightarrow x \ln 2 = \ln 8 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 2^3 \Leftrightarrow x \ln 2 = 3 \ln 2 \Rightarrow x = 3$

Alors $S = \{3\}$

En utilisant les propriétés logarithmiques, résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ les systèmes suivantes :

$$\text{a- } \begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4e^x - 2e^y = 30 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5e^x = 70 \Rightarrow e^x = 14 \text{ et } x = \ln 14$$

Remplaçons $x = \ln 14$ par sa valeur dans l'équation $e^x + 2e^y = 40$. Ainsi on a :

$$14 + 2e^y = 40 \Leftrightarrow e^y = 13 \Rightarrow y = \ln 13$$

$$\text{D'où } S = \{(\ln 14; \ln 13); (\ln 13; \ln 14)\}$$

$$\text{b- } \begin{cases} e^x \times e^y = 8 \\ e^x + e^y = 6 \end{cases} \text{ Posons } e^x = X \text{ et } e^y = Y. \text{ Alors le système devient } \begin{cases} X \times Y = 8 \\ X + Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} P = 8 \\ S = 6 \end{cases} \text{ Ainsi ce système est solution de l'équation } X^2 - SX + P = 0$$

Où S et P désignent respectivement la somme et le produit.

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - 6X + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 \text{ Alors } X = 2 \text{ ou } X = 4$$

$$\text{- Si } X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

$$\Rightarrow S = \{(\ln 2; \ln 4); (\ln 4; \ln 2)\}$$

$$\text{- Si } X = 4 \Leftrightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$\text{c- } \begin{cases} 3e^x - 2 \ln y = 13 \\ 5e^x + 3 \ln y = 9 \end{cases} \text{ Effectuons un changement de variable en posant } e^x = X \text{ et } \ln y = Y$$

$$\text{Alors le système devient } \begin{cases} 3X - 2Y = 13 \\ 5X + 3Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9X - 6Y = 39 \\ 10X + 6Y = 18 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 19X = 57 \Rightarrow X = 3$$

Remplaçons $X = 3$ par sa valeur dans l'équation $5X + 3Y = 9$. Ainsi on a :

$$15 + 3Y = 9 \Leftrightarrow 3Y = -6 \Rightarrow Y = -2$$

$$\cdot \text{ Si } X = 3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$$

$$\Rightarrow S = \{(\ln 3; e^{-2}); (e^{-2}; \ln 3)\}$$

$$\cdot \text{ Si } Y = -2 \Leftrightarrow \ln y = -2 \Rightarrow y = e^{-2}$$

$$\text{d. } \begin{cases} 2^x - 2^{2-y} = 0 \\ 2^x - 2^{2+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x \ln 2} - e^{(2-y) \ln 2} = 0 \\ e^{x \ln 2} - e^{(2+y) \ln 2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^{x \ln 2} + e^{(2-y) \ln 2} = 0 \\ e^{x \ln 2} - e^{(2+y) \ln 2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e^{(2-y) \ln 2} - e^{(2+y) \ln 2} = 0$$

$$e^{(2-y) \ln 2} = e^{(2+y) \ln 2} \Leftrightarrow (2-y) \ln 2 = (2+y) \ln 2 \Leftrightarrow 2-y = 2+y \Leftrightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Remplaçons $y = 0$ par sa valeur dans l'équation $e^{x \ln 2} - e^{(2-y) \ln 2} = 0$. Ainsi on a :

$$e^{x \ln 2} - e^{2 \ln 2} = 0 \Leftrightarrow e^{x \ln 2} = e^{2 \ln 2} \Leftrightarrow x \ln 2 = 2 \ln 2 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow S = \{(2; 0); (0; 2)\}$$

$$e \cdot \begin{cases} 3^x \times 3^{2y-1} = 1 \\ 3^{x+2} \times 3^y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x \ln 3} \times e^{(2y-1) \ln 3} = 1 \\ e^{(x+2) \ln 3} \times e^{y \ln 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{(x+2y-1) \ln 3} = 1 \\ e^{(x+y+2) \ln 3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+2y-1) \ln 3 = \ln 1 \\ (x+y+2) \ln 3 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y-1) \ln 3 = 0 \\ (x+y+2) \ln 3 = \ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1 = 0 \\ x+y+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+2y = 1 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 1 \\ -x-y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2$$

Remplaçons $y = 2$ par sa valeur dans l'équation $x + 2y = 1$. Ainsi on a :

$$x + 4 = 1 \Rightarrow x = -3$$

$$\Rightarrow S = \{(-3; 2); (2; -3)\}$$

Application des limites de la fonction exponentielle

4 Calculons la limite des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définitions :

$$1) f(x) = e^{-x^2 + 2x - 3}$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$2) f(x) = e^{\sqrt{x-3}}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; x - 3 \geq 0\}$$

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_f = [3; +\infty[$$

$$f(3) = e^{\sqrt{3-3}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$3) f(x) = e^{\frac{3}{-x+2}}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; -x + 2 \neq 0\}$$

$$-x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{3}{-x+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{3}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{3}{-x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{3}{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{3}{-x+2}} = e^{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{3}{-x+2}} = e^{0^-} = 0$$

$$4) f(x) = \frac{e^{x^2+2x}}{x+2}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; -x + 2 \neq 0\}$$

$$x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{x^2+2x}}{x+2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$5) f(x) = \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; -1 + e^{2x-3} \neq 0\}$$

$$-1 + e^{2x-3} \neq 0 \Rightarrow e^{2x-3} \neq 1 \Rightarrow 2x-3 \neq \ln 1 \Leftrightarrow 2x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{e^{x^2}}{-1 + e^{2x-3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$6) f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0\}$$

$e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0$. Effectuons un changement de variable en posant $X = e^x$

Alors l'équation $e^{2x} - 5e^x + 6 \neq 0$ dévient : $X^2 - 5X + 6 \neq 0 \Rightarrow X_1 \neq 2$ et $X_2 \neq 3$.

- Si $X_1 \neq 2 \Leftrightarrow e^x \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \ln 2$.

- Si $X_2 \neq 3 \Leftrightarrow e^x \neq 3$

$$\Rightarrow D_f =]-\infty; \ln 2[\cup]\ln 2; \ln 3[\cup]\ln 3; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = 0$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 2}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^+} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 2}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 3^-} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 3}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 3^+} \frac{e^{x^2}}{e^{2x} - 5e^x + 6} = \frac{e^{\ln^2 3}}{0^+} = +\infty$$

$$7) f(x) = \frac{e^x}{(x-1)^2}$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; (x-1)^2 \neq 0\}$$

$$(x-1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^x}{(x-1)^2} = \frac{e}{0^+} = +\infty$$

$$8) f(x) = \ln(e^x - 1)$$

$$D_f = \{x / x \in \mathbb{R}; e^x - 1 > 0\}$$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 \Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow D_f =]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) = +\infty$$

$$9) f(x) = (x+2)(e^x - 1)$$

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)(e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$$

Dérivées et primitives de la fonction exponentielle

5

1) Calculons la dérivée des fonctions suivantes :

$$a) f(x) = e^{-x^2 - x - 1} \Rightarrow f'(x) = (-2x - 1)e^{-x^2 - x - 1}$$

$$b) f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} e^{\sqrt{x^2 - 3}}$$

$$c) f(x) = e^{\frac{3}{x-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} e^{\sqrt{x^2 - 3}}$$

$$d) f(x) = \frac{-1}{e^{x^2 + 2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)e^{x^2 + 2x}}{(e^{x^2 + 2x})^2}$$

$$e) f(x) = \frac{e^{-x^2}}{e^{x-3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2xe^{-x^2})(e^{x-3}) - (e^{x-3})(e^{-x^2})}{(e^{x-3})^2} = \frac{-(2x+1)e^{-x^2+x-3}}{(e^{x-3})^2}$$

$$f) f(x) = \frac{-x^2}{e^{2x} - 5e^x + 6} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-2x)(e^{2x} - 5e^x + 6) - (2e^{2x} - 5e^x)(-x^2)}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$$

$$= \frac{-x[(2-2x)e^{2x} - 5(2+x)e^x + 12]}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x[(2-2x)e^{2x} - 5(2+x)e^x + 12]}{(e^{2x} - 5e^x + 6)^2}$$

$$g) f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)] \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{\ln(e^x - 1)}} = \frac{1}{(e^x - 1)\ln(e^x - 1)}$$

$$h) f(x) = (x + 2)(e^x - 1) \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 + e^x(x + 2) = e^x - 1 + xe^x + 2e^x \\ \Rightarrow f'(x) = xe^x + 3e^x - 1$$

2) Calculons la primitive des fonctions suivantes :

$$a- f(x) = e^{2x-3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} + k$$

$$b- f(x) = \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} = \frac{-2}{-2} \times \frac{3e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}} = \frac{3}{-2} \times \frac{-2e^{2x-3}}{3 - e^{2x-3}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{-2} \ln|3 - e^{2x-3}| + k$$

$$c- f(x) = (-x + 1)e^{x^2 - 2x + 5} = \frac{-2}{-2} \times (-x + 1)e^{x^2 - 2x + 5} = \frac{1}{-2} \times (2x - 2)e^{x^2 - 2x + 5}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{-2} \times e^{x^2 - 2x + 5} + k$$

$$d- f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = -e^{\frac{1}{x}} + k \Rightarrow F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + k$$

$$e- f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+3}} e^{\sqrt{2x+3}} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{2x+3}} e^{\sqrt{2x+3}} \Rightarrow F(x) = e^{\sqrt{2x+3}} + k$$

$$f- f(x) = \frac{5}{e^{2x-3}} = 5e^{-2x+3} \Rightarrow F(x) = -\frac{5}{2}e^{-2x+3} + k$$

$$g- f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{2}{2} \times \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2e^{\sqrt{x}} + k$$

$$h- f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} \Rightarrow F(x) = \ln|1 + e^x| + k$$

$$i- f(x) = 2^x = e^{x \ln 2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} \times e^{x \ln 2} + k$$

6) 1) déterminons les réels a et b pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f .

$$a) f(x) = (2x + 1)e^x \text{ et } F(x) = (ax + b)e^x$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$. Avec $F'(x) = (ax + a + b)e^x$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x = (2x + 1)e^x \Leftrightarrow ax + a + b = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{D'où } F(x) = (2x - 1)e^x + k$$

$$b) f(x) = (x + 1)e^{\frac{-x}{2}} \text{ et } F(x) = (ax + b)e^{\frac{-x}{2}}$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$. Avec $F'(x) = \frac{1}{2}(-ax + 2a - b)e^{\frac{-x}{2}}$

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(-ax + 2a - b)e^{\frac{-x}{2}} = (x + 1)e^{\frac{-x}{2}} \Leftrightarrow -ax + 2a - b = 2(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow -ax + 2a - b = 2x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ 2a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ -4 - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{D'où } F(x) = (-2x - 6)e^{\frac{-x}{2}} + k$$

2) Déterminons les réels a ; b et c pour que la fonction F soit une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f

$$a) f(x) = (x^2 - 1)e^{2x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

$$\text{Avec } F'(x) = [2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c]e^{2x}, F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$[2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c]e^{2x} = (x^2 - 1)e^{2x} \Leftrightarrow 2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2(a + b) = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\text{D'où } F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + k$$

$$b) f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x} \text{ et } F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$$

F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

$$\text{Avec } F'(x) = [-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x}, F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$[-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c]e^{-3x} = (x^2 - 3x + 1)e^{-3x} \Leftrightarrow$$

$$-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c = x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 1 \\ 2a - 3b = -3 \\ b - 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{9} \\ c = -\frac{8}{9} \end{cases}$$

$$F(x) = \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{8}{9}\right)e^{-3x} + k$$

Problèmes

7

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$
 On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0; \vec{i}; \vec{j})$

Partie A : Etude de la fonction f et construction de la courbe (C) .

1) Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$

(on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^x$).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x = 2(-\infty) + 1 - \frac{1}{e}(0) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{e}e^x \right) = (+\infty)(2 - \infty) = -\infty$$

2) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$

La droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{x-1}) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}xe^x - 2x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e}xe^x = 0.$$

D'où la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe C en $-\infty$.

Précisons la position de la courbe C par rapport à la droite Δ .

Pour cela, étudions le signe de $f(x) - y$. Posons $f(x) - y = -\frac{1}{e}xe^x$.

$\forall x \in D_f, e^x > 0$ Alors le signe de $f(x) - y$ dépend du signe de $-\frac{1}{e}x$. Posons $-\frac{1}{e}x = 0$

$\Rightarrow x = 0$. D'où le tableau de signe de $f(x) - y$ est le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-

D'après le tableau de signe :

$\forall x \in D_f]-\infty; 0[; f(x) - y > 0$. Alors $\forall x \in D_f]-\infty; 0[; C$ est au dessus de Δ

$\forall x \in D_f]0; +\infty[; f(x) - y < 0$. Alors $\forall x \in D_f]0; +\infty[; C$ est en dessous de Δ

3) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f .

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1} \Rightarrow f'(x) = 2 - (x+1)e^{x-1} \text{ et } f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant la limite de la fonction f' en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - xe^{x-1} - e^{x-1} = 2 - 0 - 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - (xe^{x-1} + e^{x-1}) = 2 - (+\infty + \infty) = -\infty$$

$$f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$$

$\forall x \in D_f, e^{x-1} > 0$ Alors le signe de $f''(x)$ dépend du signe de $-(x+2)$.

$$\text{Posons } -(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

D'où le tableau de variation de $f'(x)$ est le suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f''(x)$		0		
$f'(x)$	2	$2 + e^{-3}$	0	$-\infty$

c) Calculer $f'(1)$

$$f'(1) = 2 - 2 = 0$$

En déduisons le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .

D'après de variation de $f'(x)$:

$$\forall x \in D_f]-\infty; 1[; f'(x) > 0.$$

$$\forall x \in D_f]1; +\infty[; f'(x) < 0.$$

d) Dressons le tableau de variation de la fonction f .

En utilisant la question précédente, on a le tableau de variation de la fonction f suivante :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	α
$f(x)$	$-\infty$		2		0

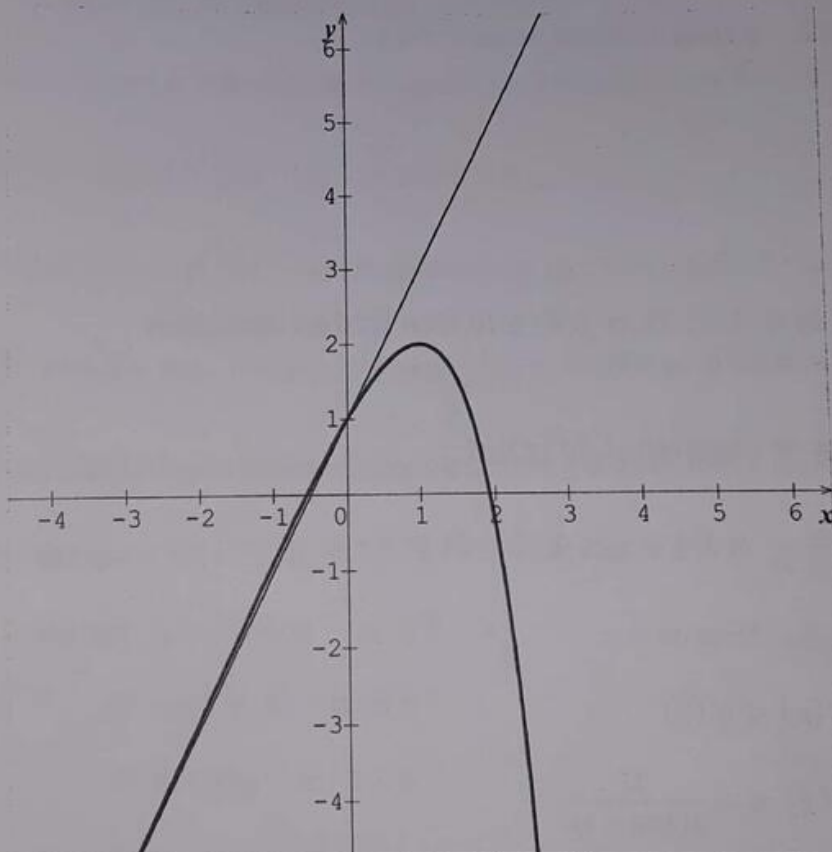
4) Soit I l'intervalle $[1,9 ; 2]$. Démontrer que, sur I , l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique, α .

- D'après le tableau de variation de f , $\forall x \in]1 ; +\infty[$; f est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]1 ; +\infty[$ vers $]-\infty ; 2[$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha) = 0$.

- De plus $\begin{cases} f(1,9) = 0,12 \\ f(2) = -0,43 \end{cases} \Rightarrow g(1,9) \times g(2) < 0$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α tel que $\alpha \in [1,9 ; 2]$.

5) Traçons la droite Δ et la courbe C (unité graphique : 2 cm).



Partie B : Recherche d'une approximation de α :

Soit la fonction g définie sur I par $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

1) Démontrer, sur I , l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$.

$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. Alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - xe^{x-1} = 0 \Leftrightarrow xe^{x-1} = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{x-1} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow x-1 = \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = x \Leftrightarrow$$

$$g(x) = x \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

2) Etudions le sens de variation de la fonction g sur I .

$$g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \times \frac{x}{2x+1} = -\frac{1}{x(2x+1)} < 0$$

D'où pour tout x appartenant à l'intervalle $I = [1,9; 2]$; g est strictement décroissante.

Démontrer que, pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I .

$x \in [1,9; 2] \Leftrightarrow 1,9 \leq x \leq 2$. g étant décroissante sur I ; on a :

$$g(2) \leq g(x) \leq g(1,9)$$

$$\Leftrightarrow 1,91 \leq g(x) \leq 1,96$$

$$\Leftrightarrow 1,9 \leq g(x) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1,9 \leq g(x) \leq 2 \Rightarrow g(x) \in [1,9; 2] \Leftrightarrow g(x) \in I \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

3) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

$$\text{On sait que : } g'(x) = -\frac{1}{x(2x+1)} \text{ et } 1,9 \leq x \leq 2 \quad (1)$$

D'autre part si : $1,9 \leq x \leq 2$; Alors on a :

$$g'(1,9) \leq g'(x) \leq g'(2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{1,9(2 \times 1,9 + 1)} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{2(2 \times 2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{9,12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{10} \text{ . En appliquant la valeur absolue à l'inégalité on a :}$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{10} \right| \leq |g'(x)| \leq \left| -\frac{1}{9,12} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9,12}. \text{ Or } \frac{1}{9,12} \approx \frac{1}{9}. \text{ Donc l'inégalité devient : } \frac{1}{10} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{9}.$$

$$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{9}.$$

D'où pour tout x de l'intervalle I ; on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$ (Ce qu'il fallait démontrer)

4) Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout n de \mathbb{N} ,
 $u_{n+1} = g(u_n)$

a-Démontrons que, pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$

- D'après **Partie A-4)**, on a : $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 - \alpha e^{\alpha-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha-1} = 2\alpha + 1$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = 2 + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha - 1 = \ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) \Leftrightarrow 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$g(\alpha) = \alpha$$

- D'autre part on a démontré que $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$

Ainsi d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|. \text{ Or } g(\alpha) = \alpha$$

$$\Rightarrow |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|x - \alpha|. \text{ En posant } x = u_n; \text{ on a : } |g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|.$$

Or $g(u_n) = u_{n+1} \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|u_n - \alpha|$. (Ce qu'il fallait démontrer)

b-En déduisons, en raisonnant par récurrence que Pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^n$

On sait que $\alpha \in [1,9; 2] \Leftrightarrow 1,9 \leq \alpha \leq 2$ et $u_0 = 2$

Il vient que $1,9 - 2 \leq \alpha - u_0 \leq 2 - 2$

$$\Leftrightarrow -0,1 \leq u_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq 0,1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{10}\left(\frac{1}{9}\right)^0$$

Alors la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n \text{ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre } n + 1 \text{ c'est-à-dire } \forall n \in \mathbb{N};$$

$$\text{on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$$

$$\text{D'après Partie B 4) a), on a : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha|.$$

$$\text{Par suite } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{9} \left[\frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n \right]$$

$$\text{D'où } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$; on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b) Etudions la convergence de la suite u puis donnons sa limite en $+\infty$.

La suite de terme général $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

Partie C : Calcul d'aire

1) En intégrant par parties, calculons l'intégrale $J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$

$$J = \int_1^\alpha x e^{x-1} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{x-1} \Rightarrow v(x) = e^{x-1}$$

$$\Rightarrow J = [x e^{x-1}]_1^\alpha - \int_1^\alpha e^{x-1} dx = [x e^{x-1}]_1^\alpha - [e^{x-1}]_1^\alpha = [x e^{x-1} - e^{x-1}]_1^\alpha$$

$$\Rightarrow J = (\alpha - 1) e^{\alpha-1}$$

2)a) Déterminons, en unités d'aire, l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$.

$$A = \int_1^\alpha f(x) dx = \int_1^\alpha (2x + 1 - xe^{x-1}) dx = \int_1^\alpha (2x + 1) dx - \int_1^\alpha xe^{x-1} dx$$

$$\Rightarrow A = \int_1^\alpha (2x + 1) dx - J = [x^2 + x]_1^\alpha - J = \alpha^2 - \alpha - J. \text{ Or } J = (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow A = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

b) Démontrons qu'on peut écrire $A = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)$.

$$\text{On sait que } A = \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1)e^{\alpha-1}$$

$$\text{D'autre part d'après Partie B 1), on a : } e^{x-1} = \frac{2x+1}{x} \Leftrightarrow e^{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } A &= \alpha^2 + \alpha - 2 - (\alpha - 1) \left(\frac{2\alpha+1}{\alpha} \right) = \alpha^2 + \alpha - 2 - \frac{2\alpha^2 - \alpha - 1}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha} = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha^2 - 1)}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right).$$

D'où l'aire A de la portion de plan limitée par la courbe (C) , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 1$ et la droite d'équation $x = \alpha$ est donné par :

$$A = (\alpha - 1) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right). \text{ (Ce qu'il fallait démontrer).}$$

8 **Partie A** : Résolution de l'équation différentielle $(E_1) : y' - 2y = xe^x$

1) Résolvons l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$

$$\text{On a } (E_2) : y' - 2y = 0 \Rightarrow S = ke^{2x}$$

2) Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = (ax + b)e^x$.

a- Déterminons a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .

u est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ avec

$$u(x) = (ax + b)e^x \text{ et } u'(x) = (ax + a + b)e^x.$$

$$u'(x) - 2u(x) = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x \Leftrightarrow$$

$$[(ax + a + b) - 2(ax + b)]e^x = xe^x \Leftrightarrow (ax + a + b) - 2(ax + b) = x \Leftrightarrow$$

$$-ax + a - b = x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } u(x) = -(x + 1)e^x$$

b- Montrons qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) .

NB :

Montrer que $A \Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \text{et} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) , on montre que

$$\left\{ \begin{array}{l} v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2) \\ \text{et} \\ u - v \text{ est solution de } (E_2) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \end{array} \right.$$

- Montrons que v est solution de l'équation $(E_1) \Rightarrow u - v$ est solution de (E_2)
 - u est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u'(x) - 2u(x) = xe^x$ (1)
 - v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $v'(x) - 2v(x) = xe^x$ (2)

Effectuons ainsi la différence des relations (1) et (2) :

$$(1) - (2) : [u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = xe^x - xe^x$$

$$\Leftrightarrow (u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2)$$

D'où v est solution de l'équation $(E_1) \Rightarrow u - v$ est solution de (E_2)

- Montrons que $u - v$ est solution de $(E_2) \Rightarrow v$ est solution de l'équation (E_1)

Si $u - v$ est solution de (E_2) alors on a : $(u - v)'(x) - 2(u - v)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$[u'(x) - v'(x)] - 2[u(x) - v(x)] = 0 \Leftrightarrow u'(x) - v'(x) - 2u(x) + 2v(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x). \text{ Avec } u(x) = -(x + 1)e^x \text{ et } u'(x) = -(x + 2)e^x.$$

$$\text{Alors } v'(x) - 2v(x) = u'(x) - 2u(x) \Leftrightarrow$$

$$v'(x) - 2v(x) = [-(x + 2)e^x] - 2[-(x + 2)e^x] \Leftrightarrow v'(x) - 2v(x) = xe^x$$

D'où $u - v$ est solution de $(E_2) \Rightarrow v$ est solution de l'équation (E_1)

Conclusion : puisque $\begin{cases} v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \Rightarrow u - v \text{ est solution de } (E_2) \\ \text{et} \\ u - v \text{ est solution de } (E_2) \Rightarrow v \text{ est solution de l'équation } (E_1) \end{cases}$

Alors une fonction v est solution de l'équation (E_1) si et seulement si $u - v$ est solution de (E_2) . (Ce qu'il fallait démontrer).

c- En déduisons l'ensemble des solutions de (E_1) .

- On sait que $u(x) - v(x)$ est solution de l'équation (E_2)
- D'autre part ke^{2x} est aussi solution de l'équation (E_2)

Par identification, on a : $u(x) - v(x) = ke^{2x} \Rightarrow v(x) = u(x) - ke^{2x}$.

$$\text{Or } u(x) = -(x+1)e^x$$

$$\Rightarrow v(x) = -(x+1)e^x - ke^{2x}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est $v(x) = -(x+1)e^x - ke^{2x}$

3) Déterminons la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0.

La solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0 est définie par $v(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$

D'où la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0 est $v(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

Partie B : Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 2e^x - x - 2$.

1) Déterminons la limite de g en $-\infty$ et la limite de g en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - x - 2 = 2(0) - (-\infty) - 2 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = (+\infty)[2(+\infty) - 1 - 0]$$

$$= (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

2) Etudions le sens de variation de g

$$g(x) = 2e^x - x - 2 \Rightarrow g'(x) = 2e^x - 1. \text{ Posons } g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$e^x > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \ln \frac{1}{2} \Rightarrow x > -\ln 2.$$

Ainsi : pour les $x > -\ln 2$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x < -\ln 2$, on a : $g'(x) < 0$

D'où $\forall x \in]-\infty; -\ln 2[$; g est strictement décroissante et

$\forall x \in]-\ln 2; +\infty[$; g est strictement croissante

Dressons le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	α	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	0	$-1 + \ln 2$	0	$+\infty$

3) On admet que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
a-Vérifions que 0 est l'une de ces solutions.

$$g(x) = 2e^x - x - 2 \Rightarrow g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$$

D'où 0 est l'une de ces solutions de l'équation $g(x) = 0$.

b-L'autre solution est appelée α . Montrons que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

- D'après le tableau de variation de g , $\forall x \in]-\infty; -\ln 2[$; g est définie, continue et strictement décroissante de l'intervalle $]-\infty; -\ln 2[$ vers $]-1 + \ln 2; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(-1,6) = 0,003 \\ g(-1,5) = -0,05 \end{cases} \Rightarrow g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ a une deuxième solution α tel que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$.

4) Déterminons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs du réel x .
D'après le tableau de variation :

$$\text{- } \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0.$$

$$\text{- } \forall x \in]\alpha; 0[; g(x) < 0.$$

Partie C : Etude de la fonction principale

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

1) Déterminons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (On pourra mettre e^{2x} en facteur).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - (x + 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0 - 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left[1 - \frac{(x+1)}{e^x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} (1 - 0) = +\infty$$

2) Calculons $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x+1)e^x] = 2e^{2x} - e^x - (x+1)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} - e^x - (x+1)e^x = e^x(2e^x - 1 - x - 1) = e^x \times g(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$. Alors $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe. Or d'après **Partie B -4)**, on a :

$$- \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[; g(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[; f'(x) > 0$$

$$- \forall x \in]\alpha; 0[; g(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in]\alpha; 0[; f'(x) < 0$$

Etudions le sens de variation de f .

$$- \forall x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[; f \text{ est strictement croissante.}$$

$$- \forall x \in]\alpha; 0[; f \text{ est strictement décroissante.}$$

3) Montrons que $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$, où α est défini dans la **partie B**.

$$\text{D'après } \underline{\text{Partie B 3) b)}, \text{ on a : } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2e^\alpha - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{2}$$

$$\text{D'autre part } f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x \Leftrightarrow f(\alpha) = (e^\alpha)^2 - (\alpha+1)e^\alpha.$$

$$\text{Or } e^\alpha = \frac{\alpha + 2}{2} \Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - (\alpha + 1) \times \frac{\alpha + 2}{2} = \left(\frac{\alpha + 2}{2}\right)^2 - \frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \frac{\alpha^2 + 3\alpha + 2}{2} = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4 - 2\alpha^2 - 6\alpha - 4}{4}$$

$$= \frac{-\alpha^2 - 2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4} \Rightarrow f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}. \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

En déduisons un encadrement de $f(\alpha)$. (On rappelle que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$).

$$-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$$

$$\Leftrightarrow f(-1,6) \leq f(\alpha) \leq f(-1,5)$$

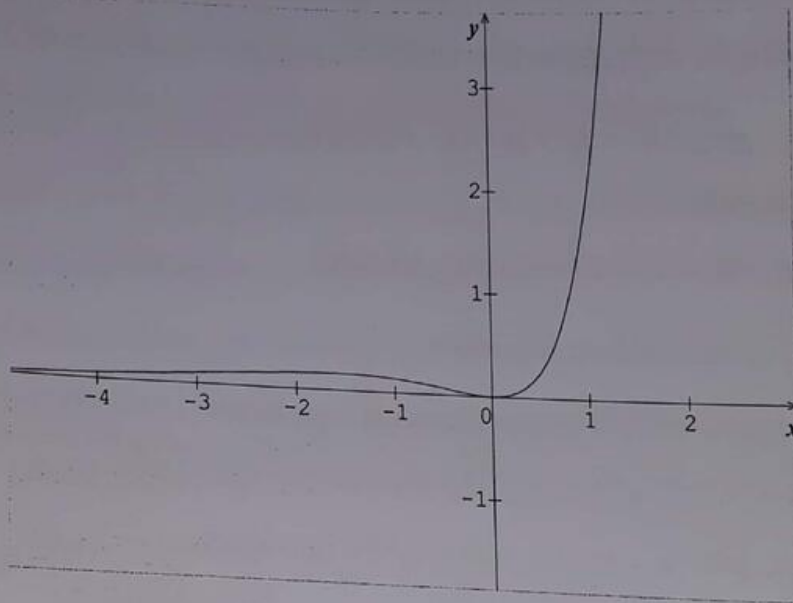
$$\Leftrightarrow 0,32 \leq f(\alpha) \leq 0,37$$

4) Etablissons le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$		$f(\alpha)$		$+\infty$

Diagram illustrating the variation of $f(x)$ based on the table above. The function starts at 0 for $x \rightarrow -\infty$, increases to a local maximum at $f(\alpha)$ where $x = \alpha$, then decreases to a local minimum at 0 where $x = 0$, and finally increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

5) Traçons la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal



Partie D : Calcul d'aire

1) Soit m un réel négatif, Interprétons graphiquement l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$.
On a $m < 0$ et la fonction f est positive sur $[m ; 0]$ donc l'intégrale $\int_m^0 f(x) dx$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = m$ et $x = 0$.

2) a- Calculons $\int_m^0 x e^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

$$\int_m^0 x e^x dx$$

Posons $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

$$v'(x) = e^x \Rightarrow v(x) = e^x$$

$$\Rightarrow \int_m^0 x e^x dx = [x e^x]_m^0 - \int_m^0 e^x dx = [x e^x - e^x]_m^0 = (1 - m) e^m - 1$$

b-En déduisons $\int_m^0 f(x)dx$

$$\int_m^0 f(x)dx = \int_m^0 [e^{2x} - (x+1)e^x]dx = \int_m^0 e^{2x}dx - \int_m^0 xe^x dx - \int_m^0 e^x dx$$

$$\Rightarrow \int_m^0 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0 = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0 - [xe^x - e^x]_m^0 - [e^x]_m^0$$

$$\Rightarrow \int_m^0 f(x)dx = \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2}$$

3) Calculons la limite de $\int_m^0 f(x)dx$, lorsque m tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{2m} + 2me^m + 1}{2} = \frac{-(0) + 2(0) + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_m^0 f(x)dx = \frac{1}{2}$$

9 L'objet de ce problème est d'étudier, à l'aide d'une fonction auxiliaire, une fonction et de résoudre une équation différentielle dont elle est solution.

A) Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

1) Calculons $g'(x)$ et montrer que ce nombre est strictement négatif pour tout x de \mathbb{R} .

$$g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) \Rightarrow g'(x) = \frac{e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x - 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2}. \text{ Puis que } \forall x \in \mathbb{R} \frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} > 0 \text{ alors } -\frac{e^x(1+4e^x)}{(1+2e^x)^2} < 0$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; g'(x) < 0$

2) Déterminons les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) = \frac{1}{2} - (+\infty) = -\infty$$

3) Dressons le tableau de variation de g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$-\infty$

4) Donnons le signe de $g(x)$.

D'après le tableau de variation, $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x)$ est strictement négative.

B) Etude d'une fonction et calcul d'une aire.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$.

On note C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

1) Calculons $f'(x)$ et montrons que pour tout réel x , $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) \Rightarrow f'(x) = -2e^{-2x} \times \ln(1 + 2e^x) + \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \times e^{-2x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] = 2e^{-2x}g(x).$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$.

2)a) Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2e^x)}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^x} \times \frac{\ln(1 + 2e^x)}{2e^x}$$

Effectuons un changement en posant $X = 2e^x$. Si $x \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} \times \frac{\ln(1+X)}{X}. \quad \text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \text{ est une limite remarquable}$$

$$\text{Et d'autre part } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{4}{X} \times \frac{\ln(1+X)}{X} = (+\infty)(1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

b) Déterminons la limite de f en $+\infty$.

On pourra remarquer que : si on pose $X = 1 + 2e^x$, $f(x)$ s'écrit $4 \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{\ln X}{X}$

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} 4 \frac{X}{(X-1)^2} \times \frac{\ln X}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4X}{X^2} \times \frac{\ln X}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4}{X} \times \frac{\ln X}{X} = 0 \times 0 = 0$$

Dressons le tableau de variation de f .

$$f'(x) = 2e^{-2x}g(x).$$

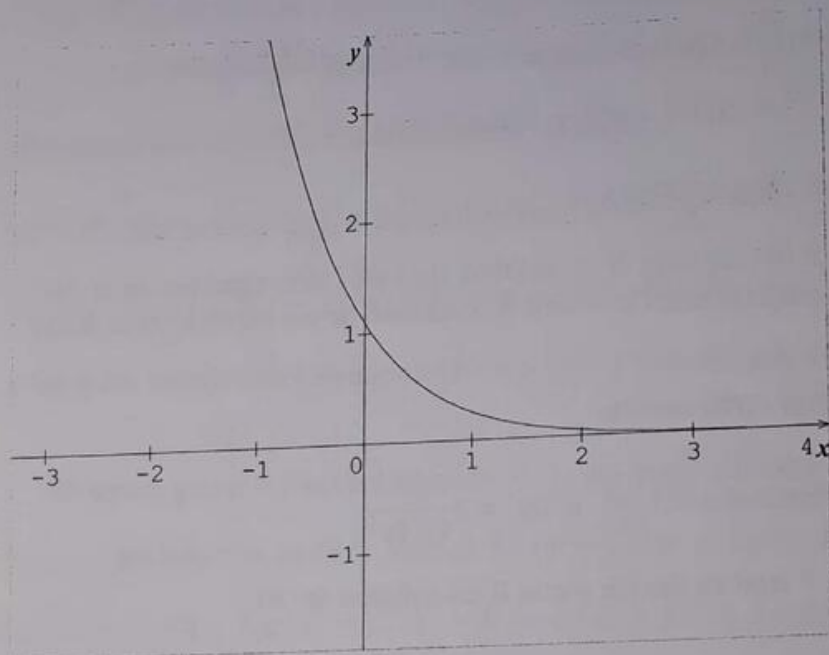
$\forall x \in \mathbb{R}; 2e^{-2x} > 0$ et d'après **Partie A)3)**, $g(x) < 0$.

D'où $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) < 0$

D'où le tableau de variation de f est le suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

3) Traçons la courbe C .



4) a- Montrons que $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

$$e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1}{e^x}+2} = \frac{e^{-2x}}{\frac{1+2e^x}{e^x}} = \frac{e^{-2x} \times e^x}{1+2e^x} = \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

D'où $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$

b- Soit α un réel strictement positif. Calculer l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx = I(\alpha) = \int_0^\alpha \left(e^{-x} - 2 \times \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2} \right) dx = [-e^{-x} - 2 \ln(e^{-x} + 2)]_0^\alpha$$

$$\Rightarrow I(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} - 2 \ln\left(\frac{e^{-\alpha} + 2}{3}\right)$$

c- En déduisons, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) dx$$

Posons $u(x) = \ln(1 + 2e^x) \Rightarrow u'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x}$

$$v'(x) = e^{-2x} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\Rightarrow J(\alpha) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times \ln(1 + 2e^x) \right]_0^\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times \ln(1 + 2e^x) \right]_0^\alpha + I(\alpha)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} \times \ln(1 + 2e^x) \right]_0^\alpha + I(\alpha). \text{ Or } I(\alpha) = 1 - e^{-\alpha} - 2 \ln\left(\frac{e^{-\alpha} + 2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow J(\alpha) = 1 + \frac{5}{2} \ln 3 - \frac{1}{2}e^{-2\alpha} \times \ln(1 + 2e^\alpha) - 2 \ln(e^{-\alpha} + 2) - e^{-\alpha}$$

Donner une interprétation graphique de $J(\alpha)$.

La fonction f est positive sur $[0 ; \alpha]$ avec $\alpha > 0$. Donc $J(\alpha)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan comprise entre la courbe (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

C) Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 2\frac{e^x}{1+2e^x}$

1) Vérifions que la fonction f étudiée dans la partie B est solution de (E).

$$f \text{ est solution de (E) si et seulement si } f'(x) + 2f(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

Avec $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ et $f'(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right]$

Alors $f'(x) + 2f(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] + 2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$
 $= \frac{2e^{-x}}{1+2e^x} - 2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + 2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

D'où f est solution de (E) : $y' + 2y = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

2) Montrons qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

NB :

Pour montrer que $A \Leftrightarrow B$, on montre que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \text{et} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour montrer qu'une fonction φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de (E') : $y' + 2y = 0$, on montre que :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l'équation (E)} \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de (E')} \\ \text{et} \\ \varphi - f \text{ est solution de (E')} \Rightarrow \varphi \text{ est solution de l'équation (E)} \end{cases}$$

- Montrons que φ est solution de l'équation (E) $\Rightarrow \varphi - f$ est solution de (E')
- φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ (1)
 - f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$ (2)

Effectuons ainsi la différence des relations (1) et (2) :

$$(1) - (2) : [\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)] = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x} - 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

$$\Leftrightarrow (\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de (E')}$$

D'où φ est solution de l'équation (E) $\Rightarrow \varphi - f$ est solution de (E')

- Montrons que $\varphi - f$ est solution de (E') $\Rightarrow \varphi$ est solution de l'équation (E)

Si $\varphi - f$ est solution de (E') alors on a : $(\varphi - f)'(x) + 2(\varphi - f)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$[\varphi'(x) - f'(x)] + 2[\varphi(x) - f(x)] = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) - f'(x) + 2\varphi(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x).$$

Avec $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$ et $f'(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right]$

Alors $\varphi'(x) + 2\varphi(x) = f'(x) + 2f(x) \Leftrightarrow$

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2e^{-2x} \left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right] + 2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 2 \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$$

D'où $\varphi - f$ est solution de (E') $\Rightarrow \varphi$ est solution de l'équation (E)

Conclusion : puisque $\begin{cases} \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \Rightarrow \varphi - f \text{ est solution de } (E') \\ \text{et} \\ \varphi - f \text{ est solution de } (E') \Rightarrow \varphi \text{ est solution de l'équation } (E) \end{cases}$

Alors une fonction φ est solution de l'équation (E) si et seulement si $\varphi - f$ est solution de (E') . (Ce qu'il fallait démontrer).

3) Résolvons (E')

$$(E') : y' + 2y = 0 \Rightarrow S = ke^{-2x}$$

En déduisons les solutions de (E) .

- On sait que $\varphi(x) - f(x)$ est solution de l'équation (E')
- D'autre part ke^{-2x} est aussi solution de l'équation (E')

Par identification, on a : $\varphi(x) - f(x) = ke^{-2x} \Rightarrow \varphi(x) = f(x) + ke^{-2x}$.

$$\text{Or } f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + ke^{-2x}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\varphi(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + ke^{-2x}$ avec $(k \in \mathbb{R})$

10 Partie A :

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x + x - 5$

1) Etudions le sens de variation de g .

(On ne demande pas de déterminer les limites de g , ni de construire sa courbe).

$$g(x) = e^x + x - 5 \Rightarrow g'(x) = e^x + 1. \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}; g'(x) > 0$$

D'où tout $x \in \mathbb{R}; g$ est strictement croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

2) a) Calculons $g(0)$ et $g(2)$

$$g(0) = -4 \quad \text{et} \quad g(2) = e^2 - 3$$

b) Démontrons que l'équation : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$ admet une solution unique α et que $1,30 < \alpha < 1,31$

- D'après le tableau de variation de $g, \forall x \in]-\infty; +\infty[; g$ est définie, continue et strictement croissante de l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ vers $]-\infty; +\infty[$. Alors l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\text{- De plus } \begin{cases} g(1,30) = -0,03 \\ g(1,31) = 0,01 \end{cases} \Rightarrow g(1,30) \times g(1,31) < 0$$

Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $1,30 < \alpha < 1,31$.

Partie B :

Soit la fonction numérique f définie sur $]-\infty; 5[$ par : $f(x) = \ln(5 - x)$.

1) Etudions le sens de variation de f . Précisons les limites de f en 5 et en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(5 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \ln(5 - x) = -\infty$$

$$f(x) = \ln(5 - x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{5-x} = \frac{1}{x-5} \Rightarrow \forall x \in]-\infty; 5[; f'(x) < 0$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	5
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

2) Prouvons que $f(\alpha) = \alpha$

D'après **Partie A 2) b)**, l'équation l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $g(\alpha) = 0$. Alors $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha + \alpha - 5 = 0 \Rightarrow e^\alpha = 5 - \alpha \Rightarrow \alpha = \ln(5 - \alpha)$

D'autre part $f(x) = \ln(5 - x) \Leftrightarrow f(\alpha) = \ln(5 - \alpha)$. Or $\alpha = \ln(5 - \alpha) \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$.

3) a) Démontrons que $\forall x \in [0; 3]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{x-5}$$

$$x \in [0; 3] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq x - 5 \leq -2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-5} \leq -\frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{5} \right| \leq |f'(x)| \leq \left| -\frac{1}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

b) En déduisons que $\forall x \in [0; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Puis que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|. \text{ Or } f(\alpha) = \alpha. \Rightarrow |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

D'où $\forall x \in [0; 3]$, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$ (Ce qu'il fallait démontrer).

c) Démontrons que si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$.

$$0 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow f(3) \leq f(x) \leq f(0) \text{ (Car } f \text{ est décroissante)}$$

$$\Rightarrow \ln 2 \leq f(x) \leq \ln 5 \Leftrightarrow 0,69 \leq f(x) \leq 1,60 \Rightarrow f(x) \in [0,69; 1,60].$$

Or $[0,69; 1,60] \subset [0; 3]$. Si $0 \leq x \leq 3$, alors $0 \leq f(x) \leq 3$. (Ce qu'il fallait démontrer)

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$, d'unité graphique (3 cm), on désigne son (C) la représentation graphique de la fonction f .

a-Traçons la courbe (C). Calculer puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées

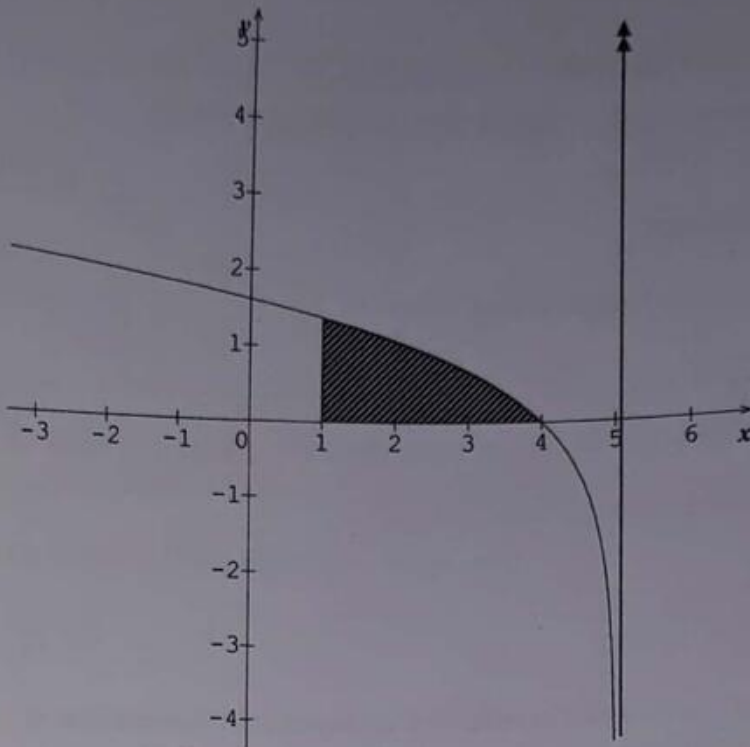
$$(x, y) \text{ tel que : } \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \text{ on notera (S) cette partie.}$$

$$S = (3\text{cm})^2 \int_1^4 f(x) dx = (3\text{cm})^2 \int_1^4 \ln(5-x) dx.$$

$$\text{Or si } f(x) = \ln(ax+b) \Rightarrow F(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \ln(ax+b) - x + k$$

$$\Rightarrow S = (3\text{cm})^2 \int_1^4 f(x) dx = (3\text{cm})^2 \int_1^4 \ln(5-x) dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1}\right) \ln(5-x) - x \right]_1^4 (3\text{cm})^2$$

$$= \left[(x-5) \ln(5-x) - x \right]_1^4 (3\text{cm})^2 = (-3 + 4 \ln 4) \times 9 \text{ cm}^2 = 22,90 \text{ cm}^2$$



b-En remarquant que, $\forall x \neq 5$, $\frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$; montrons que $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

$$\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = \int_{\alpha}^4 \left(1 + \frac{5}{x-5} \right) dx = \int_{\alpha}^4 \left(1 + 5 \frac{1}{x-5} \right) dx = [x + 5 \ln|x-5|]_{\alpha}^4$$

$$= [x + 5 \ln|5-\alpha|]_{\alpha}^4 = (4 + 5 \ln 1) - (\alpha + 5 \ln(5-\alpha)).$$

$$\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5 \ln(5-\alpha). \text{ Or } \alpha = \ln(5-\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - \alpha - 5\alpha = 4 - 6\alpha. \text{ (Ce qu'il fallait démontrer)}$$

c-Prouvons que l'aire A de la partie (S) en cm^2 est donnée par $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$.
(On utilisera une intégration par partie).

$$\Rightarrow A = \int_{\alpha}^4 f(x) dx = \int_{\alpha}^4 \ln(5-x) dx = \left[\left(x + \frac{5}{-1} \right) \ln(5-x) - x \right]_{\alpha}^4$$

$$= [(x-5) \ln(5-x) - x]_{\alpha}^4 = (-\ln 1 - 4) - ((\alpha-5) \ln(5-\alpha) - \alpha)$$

$$= -4 - (\alpha-5) \ln(5-\alpha) + \alpha. \text{ Or } \alpha = \ln(5-\alpha)$$

$$\Rightarrow A = -4 - (\alpha-5)\alpha + \alpha = -4 - \alpha^2 + 5\alpha + \alpha = -\alpha^2 + 6\alpha - 4.$$

D'où $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$. (Ce qu'il fallait démontrer)

11

On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$
 On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

A) Etude de la fonction f et tracé de (C)

1) a) Calculons la limite de cette fonction lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(1+x)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

b) Calculons la limite de cette fonction lorsque x tend vers -1 .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^{-1}}{0^+} = +\infty$$

On peut en déduire que la courbe (C) admet une possibilité d'asymptote oblique et admet la droite d'équation $x = -1$ comme asymptote verticale.

2) Calculons $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\frac{x-1}{x+1}$

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - 2(1+x)e^x}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x)[(1+x)-2]}{(1+x)^4} = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x}{(1+x)^2} \times \frac{x-1}{x+1}$$

Or $\forall x \in D_f; \frac{e^x}{(1+x)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $\frac{x-1}{x+1}$.

Etudions le signe de $\frac{x-1}{x+1}$. Posons $x-1=0$ et $x+1=0$
 $\Rightarrow x=1$ et $x=-1$

D'où le tableau de signe de $\frac{x-1}{x+1}$ est le suivant :

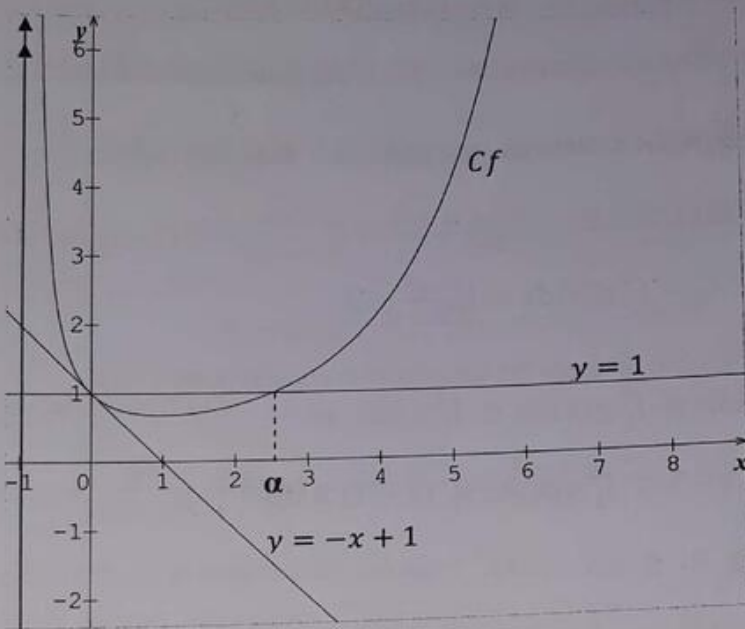
x	-1	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x+1}$	0	$-$	0
		$+$	

3) Dressons le tableau de variation de f .

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
	-		+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{4}$	$+\infty$

4) Traçons la courbe (C), les droites d'équations respectives $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à cette courbe en son point d'abscisse 0. (Unité graphique : 4 cm)

La tangente a pour équation $y = -x + 1$.



5) Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[1; 10]$.

Sur l'intervalle $[1; 10]$; f est dérivable et strictement croissante, donc f réalise une bijection

de $[1; 10]$ vers l'intervalle $[f(1); f(10)] = \left[\frac{e}{4}; \frac{e^{10}}{121}\right] = [0,67; 182,03]$.

Nous en déduisons 1 appartient à l'intervalle $\left[\frac{e}{4}; \frac{e^{10}}{121}\right]$. Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une

unique solution notée α , dans l'intervalle $[1; 10]$ telque $f(\alpha) = 1$

Utilisons le graphique précédent pour donner deux nombres entiers consécutifs a et b tels que α appartient à l'intervalle $[a; b]$.

Ainsi à l'aide du graphique, nous remarquons α appartient à l'intervalle $[a ; b] = [2 ; 3]$.

B) Calcul d'une aire

1) Soit g la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$

a-Étudions le sens de variation de g dans l'intervalle $[1 ; 2]$.

g est dérivable sur $[1 ; 2]$ comme quotient des deux fonctions dérivables non nulles :

$$x \rightarrow e^x \text{ et } x \rightarrow 1+x ; \text{ et nous avons } g'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

De plus $g'(x)$ est strictement positif sur $[1 ; 2]$, alors g est strictement croissante.

b-Montrons que, pour tout x appartenant à $[1 ; 2]$, on a : $1 \leq g(x) \leq 2,5$.

g étant croissante sur $[1 ; 2]$ alors on a l'encadrement suivant : $g(1) \leq g(x) \leq g(2)$.

Or $g(1) = \frac{e}{4} \approx 1,35$ et $g(2) = \frac{e^2}{3} \approx 2,46$. Nous avons : $g(1) > 1$ et $g(2) < 2,5$.

Alors pour tout $x \in [1 ; 2]$: $1 \leq g(x) \leq 2,5$

c-En déduisons un encadrement de $A_1 = \int_1^2 g(x) dx = \int_1^2 \frac{e^x}{x+1} dx$

Nous avons : $1 < 2$ et $1 \leq g(x) \leq 2,5$; d'après les théorèmes d'encadrement d'une intégrale nous déduisons que : $\int_1^2 1 dx \leq \int_1^2 g(x) dx \leq \int_1^2 2,5 dx \Leftrightarrow$

$$[x]_1^2 \leq \int_1^2 g(x) dx \leq [2,5x]_1^2 \Leftrightarrow 2 - 1 \leq \int_1^2 g(x) dx \leq (2 - 1) \times 2,5$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \int_1^2 g(x) dx \leq 2,5 \Leftrightarrow 1 \leq A_1 \leq 2,5$$

2) Soit A_2 l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$, la courbe (C) et l'axe des abscisses.

A l'aide d'une intégration par parties, exprimons A_2 en fonction de A_1

La fonction f est positive sur $[1 ; 2]$, donc l'aire A_2 cherchée est donnée par :

$$A_2 = \int_1^2 \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

Posons : $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$

$$v'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow A_2 = \left[-\frac{e^x}{1+x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^x}{1+x} dx = -\frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} + A_1$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$$

En déduisons un encadrement de A_2 .

On sait que l'encadrement de A_1 est : $1 \leq A_1 \leq 2,5$.

$$\text{Or } A_2 = A_1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \Rightarrow A_1 = A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2}$$

$$\text{Alors } 1 \leq A_1 \leq 2,5 \Leftrightarrow 1 \leq A_2 + \frac{e^2}{3} - \frac{e}{2} \leq 2,5 \Leftrightarrow 1 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2} \leq A_2 \leq 2,5 - \frac{e^2}{3} + \frac{e}{2}$$

C) Approximation d'un nombre à l'aide d'une suite

Pour cette partie, on utilisera sans justification le fait que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution β et que celle-ci est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3}$

1) a- Vérifions que, pour tout x appartenant à $] -1; +\infty[$, on a : $f'(x) = f(x) - 2h(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On sait que } f'(x) &= \frac{e^x(x-1)}{(1+x)^3} = \frac{e^x(x+1-2)}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x - 2e^x}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)e^x}{(1+x)^3} - 2 \frac{e^x}{(1+x)^3} \\ &= \frac{e^x}{(1+x)^2} - 2 \frac{e^x}{(1+x)^3} = f(x) - 2h(x). \end{aligned}$$

b- Calculons $h'(x)$.

$$h(x) = \frac{e^x}{(1+x)^3} \Rightarrow h'(x) = \frac{(1+x)^3 e^x - 3(1+x)^2 e^x}{(1+x)^6} = \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$$

c- En utilisant la question a), calculé $f''(x)$.

$$f'(x) = f(x) - 2h(x) \Rightarrow f''(x) = f'(x) - 2h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3} - 2 \frac{(x-2)e^x}{(1+x)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x^2 - 2x + 3)e^x}{(1+x)^4}$$

En déduisons le sens de variation de f' dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Pour tout x de l'intervalle $] -1; +\infty[$; $x^2 - 2x + 3$ est positif, donc $f''(x)$ est strictement positif sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, nous en déduisons que f' est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

2) En déduisons que, pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

$$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

D'autre part f' est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -\frac{4x^3}{27} \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -0,24 \leq f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |f(x)| \leq \left| -\frac{1}{4} \right| \Leftrightarrow 0 \leq |f(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Alors pour tout x appartenant à $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a : $|f(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait démontrer)

3) On définit la suite (u_n) , pour tout nombre entier naturel n , par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n), \text{ pour } n \geq 0$$

On admet que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

a-Montrons que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

Puis que $|f(x)| \leq \frac{1}{4}$, alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\beta)| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|. \text{ Or } f(\beta) = \beta. \Rightarrow |f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$$

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $|f(x) - \beta| \leq \frac{1}{4}|x - \beta|$

Posons $u_n = x$. Alors on a : $|f(u_n) - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$. Or $f(u_n) = u_{n+1}$

D'où pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta|$

b-Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

- si $n = 0$; $u_0 = 1$ et $\beta \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Alors $|1 - \beta| \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$ vraie $\forall x \in \mathbb{N}$.

- Supposons que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire $|u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

En utilisant le résultat de la question précédente, nous pouvons écrire :

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4}|u_n - \beta| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion : pour tout nombre entier naturel n , on a : $|u_n - \beta| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ (Ce qu'il fallait démontrer)

c-En déduisons une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

Cherchons n tel que $|u_n - \beta| < 10^{-3}$. D'après ce qui précède, il suffit que $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit inférieur à 10^{-3} si $n \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln 10^{-3} \Leftrightarrow -n \ln 4 < \ln 10^{-3} \Leftrightarrow n \ln 4 > -\ln 10^{-3} \Rightarrow n > -\frac{\ln 10^{-3}}{\ln 4}$

$\Rightarrow n > 4,98$. Puisque n est un entier alors il suffit de prendre $n = 5$.

D'où u_5 est donc une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

Ainsi $u_5 \approx 0,697$ est une valeur approchée numérique de β à 10^{-3} près.

12

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 5 cm).

Partie A :

On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle C_1 sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel positif x , $f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$

$$f_1(x) = xe^{-x^2} \Rightarrow f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}$$

En déduire le sens de variation de f_1 .

$$f'_1(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow f'_1(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $e^{-x^2} > 0$ alors le signe de $f'_1(x)$ dépend du signe de $1 - 2x^2$.

$$\text{Posons } 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[; f'_1(x) > 0$. Par conséquent $\forall x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right[; f_1$ est strictement croissante.

$\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[; f'_1(x) < 0$. Par conséquent $\forall x \in \left]\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[; f_1$ est strictement décroissante.

2) Calculons la limite de f_1 en $+\infty$ (on pourra poser $u = x^2$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2}. \text{ Posons } u = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{u} \Leftrightarrow x = u^{\frac{1}{2}}.$$

Si $x \rightarrow +\infty$ alors $u \rightarrow +\infty$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} f_1(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{\frac{1}{2}}e^{-u}. \text{ Or pour tout } n \in \mathbb{N}; \lim_{u \rightarrow +\infty} u^n e^{-u} = 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la Courbe C_1 de f_1

3) Dressons le tableau de variation de f_1 . D'où le tableau de signe de $f'_1(x)$ est le suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f'_1(x)$		+	-
$f_1(x)$	0	$e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$	0

4) On appelle Δ la droite d'équation $y = x$. Déterminons la position de C_1 par rapport à Δ .

Pour déterminer la position de C_1 par rapport à Δ , nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$$h(x) = x - f_1(x).$$

$$h(x) = x - f_1(x) = x - xe^{-x^2} = x(1 - e^{-x^2}).$$

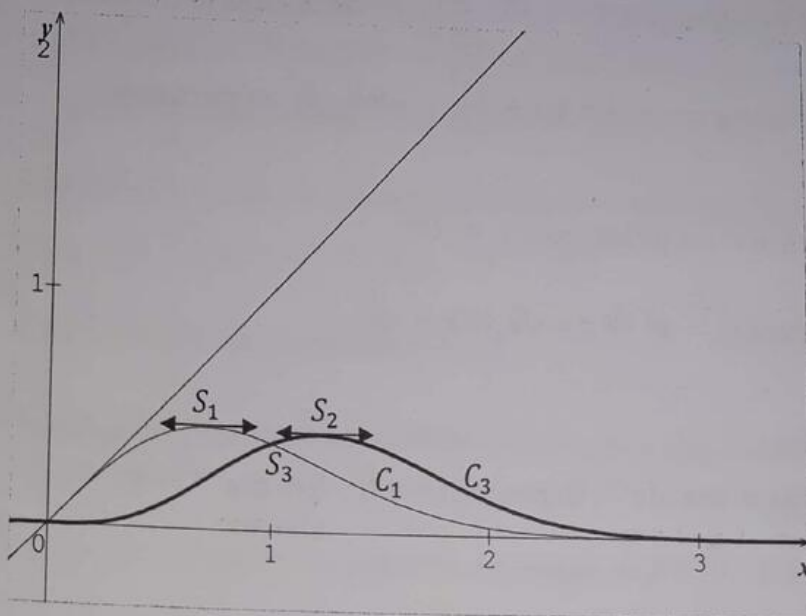
x est positif ou nul sur $[0; +\infty[$; $h(x)$ a donc le signe de $1 - e^{-x^2}$.

Posons $1 - e^{-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq \ln 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$. En posant $x^2 = 0$; on a : $x = 0$

Alors nous en déduisons que $h(x)$ est positif ou nul sur $[0; +\infty[$.

D'où $\forall x \in [0; +\infty[$; la courbe C_1 est au dessus de la droite Δ .

5) Traçons C_1 et Δ .



Partie B :

On considère la fonction f_3 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle C_3 sa courbe représentative.

1) Montrons que pour tout réel x positif, $f'_3(x)$ a même signe que $3 - 2x^2$.

$$\begin{aligned} f_3(x) = x^3 e^{-x^2} &\Rightarrow f'_3(x) = 3x^2 e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} \times x^3 = 3x^2 e^{-x^2} - 2x^4 e^{-x^2} \\ &= (3 - 2x^2)x^2 e^{-x^2}. \end{aligned}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 e^{-x^2} > 0$; Alors le signe de $f'_3(x)$ dépend du signe de $3 - 2x^2$.

En déduisons le sens de variation de f_3 .

Posons $3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2}}$. D'où le tableau de signe de $f'_3(x)$ est le suivant :

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'_3(x)$		+	-

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall x \in \left[0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right[; f'_3(x) > 0$. Par conséquent $\forall x \in \left[0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right[; f_3$ est strictement croissante.

$\forall x \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[; f'_3(x) < 0$. Par conséquent $\forall x \in \left]\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[; f_3$ est strictement décroissante.

2) Déterminons les positions relatives de C_1 et C_3 .

Pour déterminer la position de C_1 et C_3 par rapport à Δ , nous étudions le signe de $h(x)$ avec :

$$k(x) = f_1(x) - f_3(x) = x e^{-x^2} - x^3 e^{-x^2} = (1 - x^2)x e^{-x^2}.$$

$x e^{-x^2}$ est positif ou nul sur $[0; +\infty[$. Donc le signe de $k(x)$ dépend du signe de $1 - x^2$.

Posons $1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$k(x)$		+	-

D'après le tableau ci-dessus :

$\forall x \in [0; 1[; k(x) > 0$. Par conséquent $\forall x \in [0; 1[; la courbe C_1 est au dessus de la courbe $C_3$$

$\forall x \in]1; +\infty[; k(x) < 0$. Par conséquent $\forall x \in]1; +\infty[$; la courbe C_1 est en dessous de la courbe C_3

3) Traçons C_3 dans le même repère que C_1 (Voir figure dans la partie A)

4) On appelle D la droite d'équation $x = 1$. Soit A_1 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_1 , les deux axes de coordonnées et la droite D et soit A_3 l'aire en unités d'aire du domaine limité par la courbe C_3 , les deux axes de coordonnées et la droite D .

a-Calculons A_1 .

$$\begin{aligned} \text{Sur } [0; 1]; f_1(x) \geq 0. \text{ Donc } A_1 &= \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \int_0^1 \frac{-2}{-2} \times x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 = \left(-\frac{e^{-1}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ u. a. } \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ u. a.} \end{aligned}$$

b-A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$

$$A_3 = \int_0^1 f_3(x) dx = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^2 \times x e^{-x^2} dx$$

Posons : $u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$

$$v'(x) = x e^{-x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2}$$

$$\Rightarrow A_3 = \left[-\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad A_3 = -\frac{e^{-1}}{2} + A_1. \text{ Or } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow A_3 = -\frac{1}{2e} + A_1$$

Partie C :

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$; f_n est dérivable et sa dérivée est telle que :

$$\text{Si } f_n(x) = x^n e^{-x^2} \Rightarrow f'_n(x) = n x^{n-1} \times e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} \times x^n = x^{n-1} (n - 2x^2) e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = x^{n-1}(n - 2x^2)e^{-x^2}.$$

Pour tout $x \in [0; +\infty[$; $x^{n-1}e^{-x^2} > 0$. Alors le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de

$$n - 2x^2. \text{ Posons } n - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{n}{2}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-

D'après le tableau ci-dessus :

$$\forall x \in]0; \sqrt{\frac{n}{2}}[; f'_n(x) > 0 \text{ et } \forall x \in]\sqrt{\frac{n}{2}}; +\infty[; f'_n(x) < 0.$$

D'où f_n admet un maximum pour $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$ et ce maximum est noté α_n

2) On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$.

Montrons que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 .

S_2 est le point d'abscisse $\sqrt{\frac{2}{2}} = 1$. Son ordonnée est $f_2(1) = \frac{1}{e}$.

Calculons $f_n(1)$

$$f_n(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}. \text{ Donc } S_2 \text{ appartient à toutes les courbes } (C_n)$$

Plaçons S_1, S_2, S_3 (Voir la figure).

3) Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$

a-Étudions le sens de variation de g .

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables et sa

$$\text{dérivée est } g'(x) = \left[\frac{x}{2} \times \frac{1}{x} + \frac{1}{2}(-1 + \ln \frac{x}{2}) \right] \times g(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{2} \times g(x)$$

$g(x) = e^{\frac{x}{2}(-1 + \ln \frac{x}{2})}$ est positif pour tout $x \in]0; +\infty[$; donc $g'(x)$ a le signe de $\ln \frac{x}{2}$.

$$\text{Posons } \ln \frac{x}{2} > 0 \Rightarrow \frac{x}{2} > e^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow x > 2.$$

Ainsi pour les $x > 2$; on a $g'(x) > 0$ et les $x < 2$; on a $g'(x) < 0$.

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	1	e^{-1}	$+\infty$

- $\forall x \in]0; 2[; g$ est strictement décroissante.

- $\forall x \in]2; +\infty[; g$ est strictement croissante.

b-Montrons que pour tout entier $n \geq 1, \alpha_n = g(n)$.

$$\alpha_n = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{n \ln \sqrt{\frac{n}{2}}} \times e^{-\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}(\ln \frac{n}{2} - 1)} = g(n) \Rightarrow \alpha_n = g(n)$$

En déduisons que tout point S_n , on a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

S_n est le point de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{n}{2}}; g(n)\right)$; S_2 est le point de coordonnées $(1; g(2))$.

Puisque g est croissante sur $]2; +\infty[$ et décroissante sur $]0; 2[$; alors admet un minimum pour la valeur 2.

Pour tout x de $]0; +\infty[; g(x) \geq g(2)$. Alors on en déduit que, pour tout $n \geq 1$; on a :

$$g(n) \geq g(2).$$

D'où le point S_n a une ordonnée supérieure à celle de S_2 .

13

Le problème est composé de l'étude d'une suite de fonctions dépendant d'un paramètre, puis de la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation du type : $f(x) = x$.

Partie A :

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n la fonction numérique de la variable réelle

définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par : $f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).

1) Déterminons la fonction dérivée f'_n de f_n et donnons l'expression de f'_n en fonction de f_n et de f_{n+1} .

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n} \Rightarrow f'_n(x) = \frac{e^x(x+1)^n - n(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}} = \frac{e^x(x+1)^n}{(x+1)^{2n}} - n \frac{(x+1)^{n-1}e^x}{(x+1)^{2n}}$$

$$= \frac{e^x}{(x+1)^{-n} \times (x+1)^{2n}} - n \frac{e^x}{(x+1)^{-n+1} \times (x+1)^{2n}} = \frac{e^x}{(x+1)^n} - n \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$$

2) Etudions les variations de f_n et ses limites éventuelles en $-\infty$; -1 et $+\infty$. (On distinguera les cas où n est pair et n est impair.)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^-)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ \text{et} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x}{(x+1)^n} = \frac{e^{-1}}{(0^+)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ \text{et} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

3) Démontrons que toutes les courbes (C_n) passent par un même point.

Soit $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ce point tel que si toutes les courbes (C_n) passent par un même point, alors on a :

$$f_0(x_0) = f_1(x_0).$$

$$f_0(x_0) = f_1(x_0) \Leftrightarrow \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^0} = \frac{e^{x_0}}{(x_0+1)^1} \Leftrightarrow e^{x_0} = \frac{e^{x_0}}{x_0+1} \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x_0+1} \Leftrightarrow$$

$$x_0 + 1 = 1 \Rightarrow x_0 = 0.$$

En remplaçant $x = 0$ par sa valeur dans $y_0 = f_1(x_0)$ ou dans $y_0 = f_0(x_0)$; on a :

$$y_0 = f_1(0) = \frac{e^0}{(0+1)^1} = \frac{1}{1} = 1. \text{ D'où toutes les courbes } (C_n) \text{ passent par un même point } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

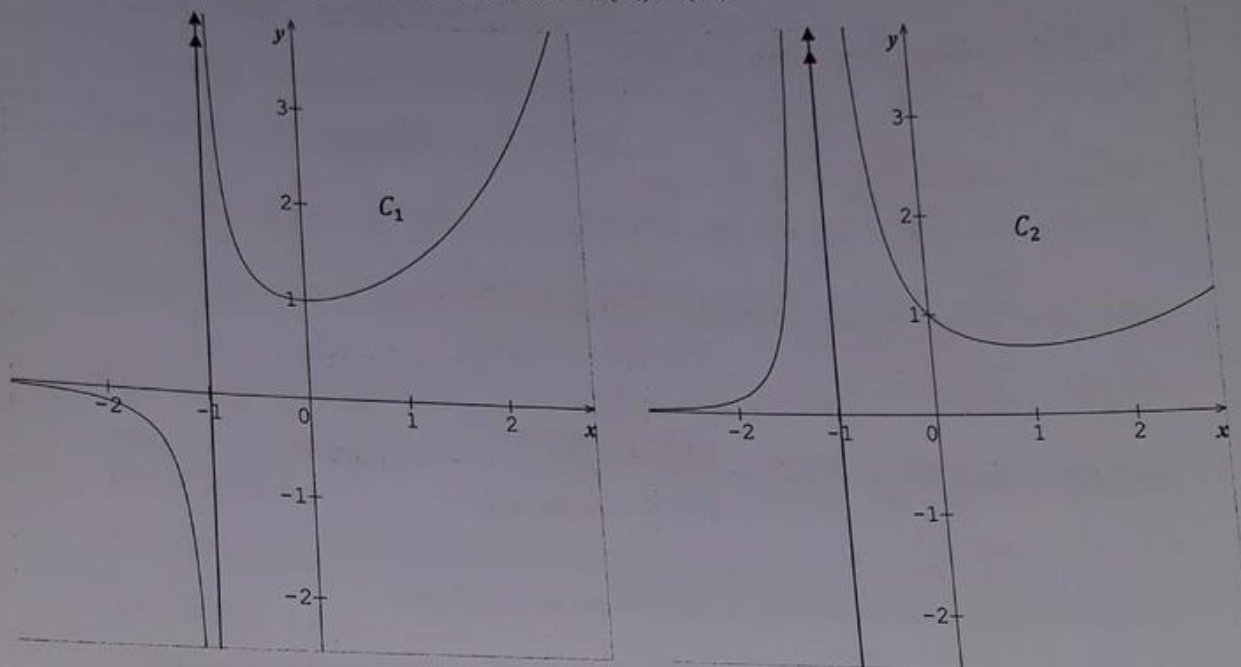
4) Déterminons la limite de $\frac{f_n(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{(x+1)^n}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x \times x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{n+1}} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = +\infty$$

On peut en déduire que toutes les courbes (C_n) admettent l'axe $(y'0y)$ comme direction parabolique.

Traçons sur deux figures distinctes les courbes (C_1) et (C_2) .



Partie B :

Pour tout entier n strictement positif, on note : $I_n = \int_0^1 f_n dx$.

1) Démontrons que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle converge.

La suite (I_n) est décroissante si et seulement si $I_{n+1} - I_n < 0$

Pour tout x appartenant à $[0 ; 1]$; $(x+1)^{n+1} > (x+1)^n \Leftrightarrow \frac{1}{(x+1)^{n+1}} < \frac{1}{(x+1)^n}$

Or $e^x > 0$. Alors on a : $\frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} < \frac{e^x}{(x+1)^n}$. En intégrant sur $[0 ; 1]$, on a :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^n} dx \Leftrightarrow I_{n+1} < I_n \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n < 0.$$

D'où la suite (I_n) est décroissante.

D'autre part si x appartient à $[0 ; 1]$; alors on a :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq (x+1)^n \leq 2^n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{(x+1)^n} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{2^n} \leq \frac{e^x}{(x+1)^n} \leq e^x. \text{ En intégrant sur } [0; 1]; \text{ on a :}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{2^n} dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^n} dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \int_0^1 e^x dx \leq I_n \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2^n} [e^x]_0^1 \leq I_n \leq [e^x]_0^1 \Leftrightarrow \frac{e-1}{2^n} \leq I_n \leq e-1. \text{ Alors La suite } (I_n) \text{ est majorée.}$$

Conclusion : La suite (I_n) étant décroissante et majorée, alors elle converge.

2) Déterminons en utilisant la relation de la question A).1), une relation entre I_n et I_{n+1} .

D'après la relation de la question A).1), on a : $f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$.

$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$. En intégrant sur $[0; 1]$; on a :

$$\int_0^1 f'_n(x) dx = \int_0^1 f_n(x) dx - n \int_0^1 f_{n+1}(x) dx \Leftrightarrow [f_n(x)]_0^1 = I_n - n I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)]_0^1 = I_n - n I_{n+1} \Leftrightarrow [f_n(1) - f_n(0)]_0^1 = I_n - n I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{2^n} - 1 = I_n - n I_{n+1}.$$

D'où la relation entre I_n et I_{n+1} est : $I_n - n I_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$

Partie C :

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de α .
On pose : $n = 2$.

1) Démontrons que l'équation $f_2(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$

$$f_2(x) = x \Leftrightarrow f_2(x) - x = 0. \text{ Posons } h(x) = f_2(x) - x$$

Sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$; h est dérivable et strictement décroissante, donc h réalise une

bijection de $[\frac{1}{2}; 1]$ vers l'intervalle $[h(1); h(\frac{1}{2})] = [-0,32; 0,22]$.

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution notée α , dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ tel que $h(\alpha) = 0$. Or $h(x) = f_2(x) - x$. Par conséquent l'équation $f_2(x) - x = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = x$ admet une solution unique α telle que $f_2(\alpha) = \alpha$

De plus $h\left(\frac{1}{2}\right) \times h(1) < 0$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

2) Etudions les variations de f'_2 dans $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et en déduisons que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'_2(x) = \frac{(x^2-1)e^x}{(x+1)^4} \text{ et } f''_2(x) = \frac{(x^2-2x+3)e^x}{(x+1)^4} > 0.$$

D'où $\forall x \in Df'_2; f''_2(x) > 0$. Par conséquent f'_2 est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

D'où si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$; on a : $f'_2\left(\frac{1}{2}\right) \leq f'_2(x) \leq f'_2(1) \Leftrightarrow -0,25 \leq f'_2(x) \leq 0$

En appliquant la valeur absolue, on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq 0,25 \Leftrightarrow 0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$

D'où $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$; on a : $0 \leq |f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$ (Ce qu'il fallait démontrer).

3) Soit $(u_n), n \in \mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f_2(u_n) \end{cases}$

a-Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

On sait que : $u_{n+1} = f_2(u_n)$

Pour $n = 0$; on a : $u_1 = f_2(u_0) = f_2(0) = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Vraie

Supposons la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ est vraie et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

On sait que $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], f_2(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ et $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. En posant $x = u_n$, on a :

$$f_2(u_n) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ car } f_2(u_n) = u_{n+1}.$$

D'où la relation est vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ (Ce qu'il fallait démontrer).

b- Démontrons, en utilisant la question C.2, que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

On sait que d'après la question C.2, on a : $|f'_2(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f_2(x) - f_2(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|. \text{ Or d'après la question C.1, on a : } f_2(\alpha) = \alpha. \text{ D'où}$$

$$|f_2(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|. \text{ En posant } x = u_n, \text{ on a : } |f_2(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$$

Or $f_2(u_n) = u_{n+1}$. D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ (Ce qu'il fallait démontrer).

c- En déduisons que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

On sait que $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ et $u_0 = 0$

Il vient que : $u_0 - \frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq u_0 - 1$

$$\Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq |u_0 - \alpha| \leq \left|u_0 - \frac{1}{2}\right|$$

$$\Leftrightarrow |u_0 - 1| \leq |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^0$. D'où la relation est vraie à l'ordre $n = 0$

Supposons la relation est vraie à l'ordre n c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$; on a :

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ Puis montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n + 1$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$;

on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

D'après **Partie C 3) b)**, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$.

Par suite $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

D'où $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$. (Ce qu'il fallait démontrer).

Montrons que la suite (u_n) , $n \in \mathbb{N}$ converge vers α .

La suite de terme général $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est convergente $\forall n \in \mathbb{N}$ et converge donc vers 0.

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$$

D'où la suite u_n est convergente et converge vers α

14 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$
On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique (4 cm).

Partie A : (Etude d'une fonction auxiliaire).

On définit la fonction g sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x + 2 - e^x$

1) Etudions les variations de g , puis dressons son tableau de variation.

$$Dg = [0; +\infty[$$

$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = (+\infty)(1 + 0 - \infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$g(x) = x + 2 - e^x \Rightarrow g'(x) = 1 - e^x.$$

$$\text{Posons } g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < \ln 1 \Rightarrow x < 0.$$

Ainsi pour les $x < 0$, on a : $g'(x) > 0$ et pour les $x > 0$, on a : $g'(x) < 0$

Nous en déduisons que $\forall x \in [0; +\infty[$; g est strictement décroissante.

D'où le tableau de variation de g est le suivant :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	1	0	$-\infty$

Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et que $1,14 < \alpha < 1,15$.

D'après le tableau de variation g est définie, continue et strictement décroissante de $[0; +\infty[$ vers $]-\infty; 1]$ et par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α telle que $g(\alpha) = 0$

$$\text{De plus : } \begin{cases} g(1,14) = 0,01 \\ g(1,15) = -0,008 \end{cases} \Rightarrow g(1,14) \times g(1,15) < 0. \text{ Alors d'après le théorème des}$$

valeurs intermédiaires il existe un unique α tel que $1,14 < \alpha < 1,15$.

2) En déduisons le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

D'après le tableau ci-dessus, $\forall x]0; \alpha[; g(x) > 0$ et $\forall x]\alpha; +\infty[; g(x) < 0$

Partie B : (Etude et tracée de f).

1) Montrons que $\forall x \in [0; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(xe^x + 1) - (x+1)e^x \times (e^x - 1)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x(x+2 - e^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

D'où $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$ (Ce qu'il fallait démontrer).

En déduisons le sens de variation de f .

Pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $\frac{e^x}{(xe^x + 1)^2} > 0$. Alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du

signe de $g(x)$. Or d'après **partie A** 2), on a :

$\forall x]0; \alpha[; g(x) > 0$. Alors $\forall x]0; \alpha[; f'(x) > 0$

Et

$\forall x]\alpha; +\infty[; g(x) < 0$. Alors $\forall x]\alpha; +\infty[; f'(x) < 0$

Nous en déduisons ainsi que :

$\forall x]0; \alpha[; f$ est strictement croissante.

Et

$\forall x]\alpha; +\infty[; f$ est strictement décroissante.

2) a) Montrons que $\forall x \in [0; +\infty[; f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x - \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x - \frac{1}{e^x}} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

b) En déduisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = \frac{1 - 0}{+\infty + 0} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Interprétons graphiquement ce résultat.

Puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C).

3) Montrons que $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

D'après partie A) 1), on a : $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2$

D'autre part, $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$

En remplaçant $e^\alpha = \alpha + 2$ par sa valeur dans $f(\alpha)$; on a :

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

D'où $\forall x \in [0; +\infty[$, $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ (Ce qu'il fallait démontrer)

Puis déterminons l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$

L'équation de la tangente au point $x_0 = 0$ est $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1(x) + 0 = x$

D'où $y = x$ est l'équation de la tangente au point $x_0 = 0$.

4) Montrons que $f(x) - x = \frac{(x + 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - x^2) - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{e^x(1 - x)(1 + x) - (1 + x)}{xe^x + 1} = \frac{(1 + x)[e^x(1 - x) - 1]}{xe^x + 1} = \frac{(x + 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

D'où $f(x) - x = \frac{(x + 1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$ (Ce qu'il fallait démontrer)

Etudions les variations de la fonction $T(x) = e^x - xe^x - 1$.

$$T(x) = e^x - xe^x - 1$$

$$DT = [0; +\infty[$$

$$T(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - xe^x - 1 = -\infty$$

$$T(x) = e^x - xe^x - 1 \Rightarrow T'(x) = -xe^x$$

Pour tout x appartenant à $[0; +\infty[$, $e^x > 0$. Alors le signe de $T'(x)$ dépend donc du

Signe de $-x$. Posons $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

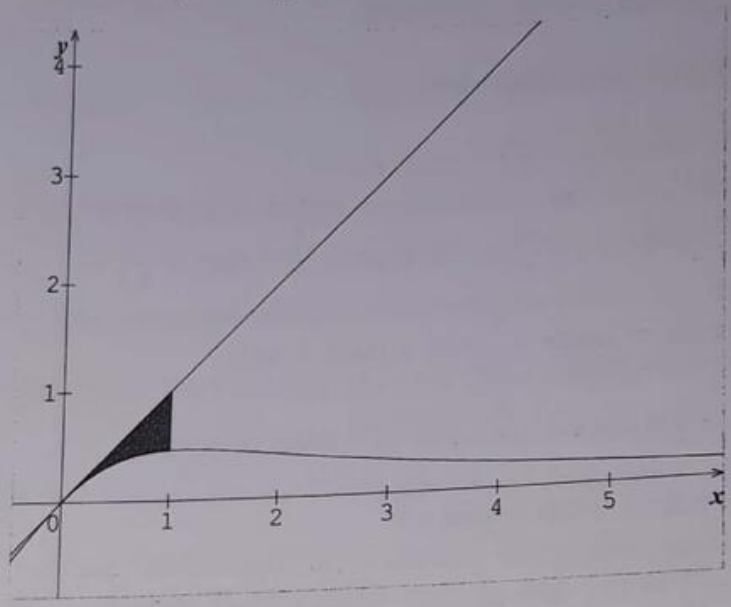
D'où le tableau de signe de $T(x)$ est le suivant :

x	0	$+\infty$
$T(x)$		-

En déduisons la position de (C) par rapport à (T). Tracer (C) et (T).

D'après le tableau de signe de T , $\forall x \in [0; +\infty[; T(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) - x \geq 0$

D'où $\forall x \in [0; +\infty[;$ la courbe (C) est en dessous de la tangente (T).



Partie C :

1) Déterminons une primitive F de f en utilisant la question 2) a) de la partie B.

D'après partie B 2) a) on a : $\forall x \in [0; +\infty[; f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

Alors si $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \Rightarrow F(x) = \ln|x + e^{-x}| + k$

2) Calculons en cm^2 l'aire A du domaine plan limité par (C) , la tangente (T) et droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

$$A = (4cm)^2 \int_0^1 f(x) dx = 16cm^2 \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} dx = 16cm^2 [\ln|x + e^{-x}|]_0^1$$

$$= \ln\left(\frac{1+e}{e}\right) \times 16cm^2 = 5,01cm^2$$

15

Partie A :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$. L'unité graphique est $4 cm$ sur l'axe des abscisses et $2 cm$ sur l'axe des ordonnées.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrons que, pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$.

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$.

D'autre part $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc $2 + \cos x > 0$ et $e^{1-x} > 0$

Donc pour tout x de \mathbb{R} : $f(x) > 0$. (Ce qu'il fallait démontrer)

2) a- Montrons que, pour tout x de \mathbb{R} : $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \times \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \times \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{2}{2} \cos x + \frac{2}{2} \sin x = \cos x + \sin x$$

D'où pour tout x de \mathbb{R} , $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$. (Ce qu'il fallait démontrer)

b) En déduisons que, pour tout x de \mathbb{R} : $2 + \cos x + \sin x > 0$

$$2 + \cos x + \sin x = 2 + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\frac{2}{\sqrt{2}} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left[\sqrt{2} + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\text{Alors } 2 + \cos x + \sin x \geq \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) > 0$$

D'où pour tout x de \mathbb{R} , $2 + \cos x + \sin x > 0$ (Ce qu'il fallait démontrer)

c- Montrons que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x)e^{1-x} < 0$.

D'où la fonction f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3) a- Montrons que, pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 2 - 1 \leq 2 + \cos x \leq 2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 1 \times e^{1-x} \leq (2 + \cos x)e^{1-x} \leq 3e^{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$$

D'où pour tout x de \mathbb{R} : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$. (Ce qu'il fallait démontrer)

b- En déduisons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'après a), on a : $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{1-x} = 0$$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{1-x} = +\infty$$

Alors d'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c- Interprétons géométriquement le résultat obtenu lors du calcul de la limite de f en $+\infty$.

Puis que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) de f .

4) a- Montrons que, sur l'intervalle $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α .

Puis que f est dérivable et strictement décroissante sur $[0; \pi]$, alors elle réalise une bijection de $[0; \pi]$ vers $[f(\pi); f(0)] = [e^{1-\pi}; 3e]$. Or $e^{1-\pi} < 3 < 3e$

Donc l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0; \pi]$

b- Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}

Puisque : $\begin{cases} f(0,87) = 3,012 > 3 \\ f(0,88) = 2,973 < 3 \end{cases}$ alors un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} est donnée par

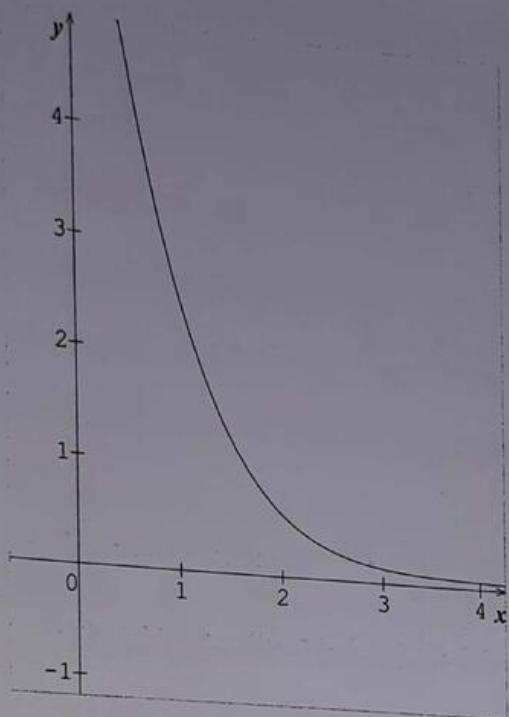
$$0,87 < \alpha < 0,88$$

5) Représentons la courbe (C) sur $[0; 4]$

Le tableau de variation de f sur $[0 ; 4]$ est donnée par :

x	0		4
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$3e$		0,07

Ainsi la représentation graphique de la courbe (C) sur $[0 ; 4]$ est la suivante :



Partie B :

On veut calculer l'aire, A , exprimée en unités d'aire, du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

1) Montrons que : $A = 2e - 2 + \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$

La fonction f est positive sur $[0 ; 1]$ donc l'aire A est donnée par :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 2e^{1-x} dx = \int_0^1 (2 + \cos x) e^{1-x} dx = \int_0^1 2e^{1-x} dx + \int_0^1 \cos x \cdot e^{1-x} dx \\ &= \left[-2e^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 \cos x \cdot e^{1-x} dx = -2 + 2e + \int_0^1 \cos t \cdot e^{1-t} dt \end{aligned}$$

D'où $A = -2 + 2e + \int_0^1 \cos t \cdot e^{1-t} dt$

2) On pose $I = \int_0^1 e^{1-t} \cos t dt$ et $J = \int_0^1 e^{1-t} \sin t dt$

a- A l'aide de deux intégrations par parties, montrons que :

$$I = -\cos 1 + e - J \text{ et } J = -\sin 1 + I$$

On a : $I = \int_0^1 \text{Cost } e^{1-t} dt$, faisons une intégration par parties :

$$u(t) = \text{Cost} \Rightarrow u'(t) = -\text{sint}$$

$$v'(t) = e^{1-t} \Rightarrow v(t) = -e^{1-t}$$

$$\Rightarrow I = [-\text{Cost}e^{1-t}]_0^1 - \int_0^1 \text{Sint } e^{1-t} dt$$

$$= -\text{Cos}1 + \text{Cose}^1 - J = -\text{Cos}1 + e - J \Rightarrow I = -\text{Cos}1 + e - J$$

De même, on intègre par parties J en posant :

$$w(t) = \text{Sint} \Rightarrow w'(t) = \text{cost}$$

$$v'(t) = e^{1-t} \Rightarrow v(t) = -e^{1-t}$$

$$\Rightarrow J = [-\text{Sint } e^{1-t}]_0^1 + \int_0^1 \text{Cost } e^{1-t} dt = -\text{Sin}1 \cdot e^0 + I = -\text{sin}1 + I$$

$$\text{D'où } J = -\text{Sin}1 + I$$

b) En déduisons la valeur de I

Des relations précédentes obtenues, on en déduit :

$$I = -\text{cos}1 + e - J = -\text{Cos}1 + e + \text{sin}1 - I \Rightarrow$$

$$2I = \text{sin}1 - \text{Cos}1 + e \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\text{sin}1 - \text{Cos}1 + e)$$

3) Déterminons la valeur exacte de A en unité d'aire puis donnons une valeur approchée de A à 10^{-2} près.

On obtient finalement $A = -2 + 2e + I = -2 + \frac{5}{2}e + \frac{1}{2}(\text{sin}1 - \text{Cos}1)$ et une valeur approchée de A par défaut est $A = 4,94$ (u. a).

Partie C :

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\text{sin}x}{2 + \text{cos}x}$.

1) a- Montrons que h admet des primitives sur \mathbb{R} .

La fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -1 - \frac{\text{sin}x}{2 + \text{cos}x}$ est dérivable sur \mathbb{R} donc elle admet des primitives sur \mathbb{R} .

b) Déterminons la primitive de H de h qui prend la valeur $1 + \ln 3$ en 0.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}; 2 + \text{cos}x > 0$ et $h(x) = -1 - \frac{\text{sin}x}{2 + \text{cos}x}$.

$$\Rightarrow H(x) = \ln(2 + \text{cos}x) - x + k$$

Si cette fonction prend la valeur $1 + \ln 3$ en 0 alors $H(x) = 1 - x + \ln(2 + \text{cos}x)$

1) a- Déterminons $\ln(f(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) > 0$ et l'on obtient :

$$\ln(f(x)) = \ln[(2 + \cos x)e^{1-x}] = \ln(2 + \cos x) + \ln e^{1-x} = 1 - x + \ln(2 + \cos x)$$

$$= H(x)$$

b) Etudions le sens de variation de la fonction H

On a peut résumer les variations de H dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0
$H(x)$	$+\infty$	$-\infty$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$; H est strictement décroissante.

3) a- Soit (Γ) la courbe de la fonction $x \rightarrow 1 - x + \ln(2 + \cos x)$ et soit (Δ) la droite d'équation $y = -x + 1$. Etudions la position relative de (Γ) et de (Δ)

Pour étudier la position relative de (Γ) et (Δ) , on étudie le signe de $H(x) - y$.

$$\text{Posons } H(x) - (-x + 1) > 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x \geq 2 - 1 = 1$$

Alors on obtient : $H(x) - (-x + 1) \geq 0$ et par conséquent (Γ) est au dessus de (Δ) .

b) Déterminons les abscisses des points communs à Γ et Δ

$$\text{Posons } H(x) - y = 0 \Leftrightarrow H(x) - (-x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

4) a- Equation de la tangente à (Γ) en 0

$$y = H'(0)(x - 0) + H(0) \Rightarrow y = -x + 1 + \ln 3.$$

b) Etude de la position de (Γ) et la tangente (T)

Etudions le signe de $H(x) - (-x + 1 + \ln 3)$

$$H(x) - (-x + 1 + \ln 3) = \ln(2 + \cos x) - \ln 3$$

Soit puisque $2 + \cos x \leq 2 + 1 = 3 \Leftrightarrow \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$. Alors on a :

$H(x) - (-x + 1 + \ln 3) \leq 0$. Et par suite, la courbe (Γ) est au dessus de (T)

5) Montrons que la courbe (Γ) est contenue dans une bande du plan limitée par deux droites parallèles dont on donnera des équations :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R}; 1 \leq 2 + \cos x \leq 3$. Alors en appliquant la fonction \ln sur l'inégalité, on obtient :

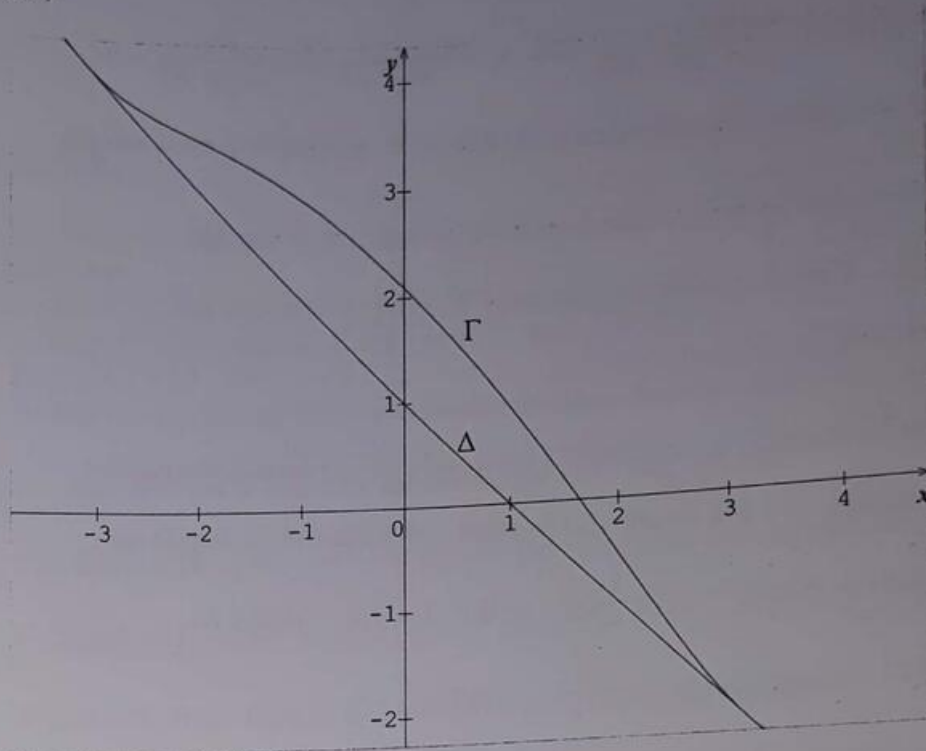
$$\ln 1 \leq \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \ln(2 + \cos x) \leq \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - x \leq 1 - x + \ln(2 + \cos x) \leq 1 - x + \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - x \leq H(x) \leq 1 - x + \ln 3$$

Donc la courbe (Γ) est contenue dans la bande limitée sur les deux droites parallèles (Δ) et (Γ)



16

Partie A :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4}$. On note (C) la courbe représentative de f

dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité graphique 1 cm).

1) a- Déterminons la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10e^x}{e^x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10(0)}{0 + 4} = \frac{0}{4} = 0$$

En écrivant $f(x) = 10 - \frac{40}{e^x + 4}$; déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{e^x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 - \frac{40}{e^x} = 10 - 0 = 10$$

En déduisons l'équation des asymptotes à la courbe (C)

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Alors la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 10$. Alors la droite d'équation $y = 10$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$

b- Calculons la dérivée f' de la fonction f puis dressons le tableau de variation de f .

$$f(x) = \frac{10e^x}{e^x + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{10e^x(e^x + 4) - e^x \times 10e^x}{(e^x + 4)^2} = \frac{10e^x(e^x + 4 - e^x)}{(e^x + 4)^2} = \frac{40e^x}{(e^x + 4)^2} > 0$$

D'où $\forall x \in D_f$; f est strictement croissante et le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	10

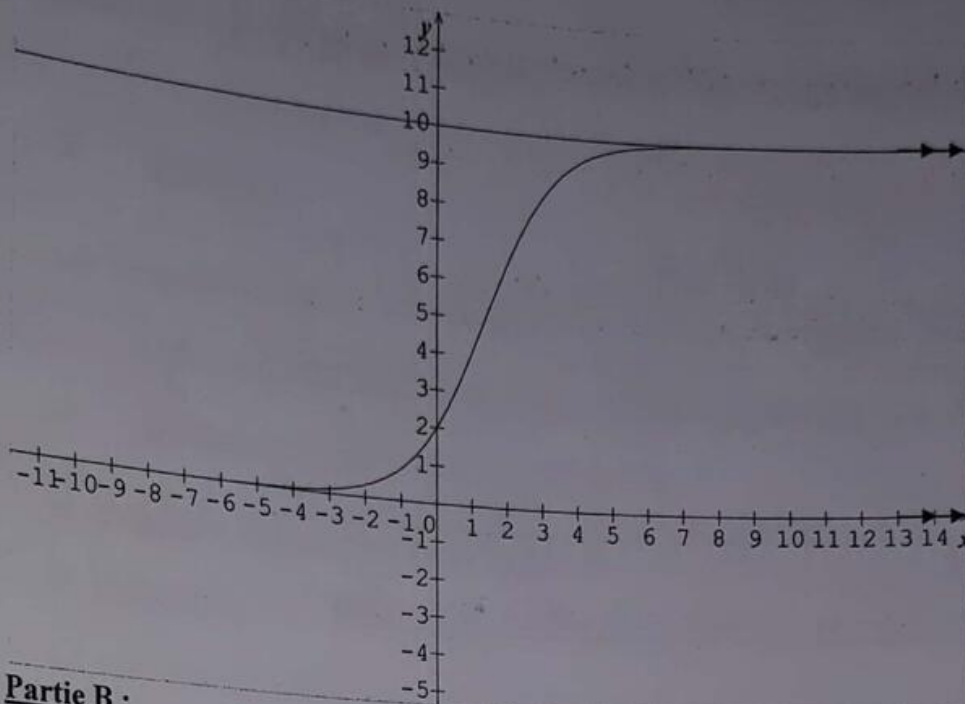
2) Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$.

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $\ln 4$ est donnée par :

$$y = f'(\ln 4)(x - \ln 4) + f(\ln 4) \Rightarrow y = \frac{5}{2}(x - \ln 4) + 5 = \frac{5}{2}x - 5\ln 2 + 5$$

D'où la tangente (T) a pour équation : $y = \frac{5}{2}x - 5\ln 2 + 5$

3) Traçons sur un même graphique la courbe (C) ; ces asymptotes et la tangente (T).

**Partie B :**

Une entreprise fabrique un certain produit P. On appelle x le nombre de tonnes de produit fabriquées.

On note $C(x)$ leur coût total de fabrication, exprimé en milliers d'euros.

La fonction coût marginal, C' est la dérivée de la fonction C .

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a $C'(x) = f(x)$; où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

De plus, on suppose qu'il n'y a pas de charges fixes, donc que $C(0) = 0$.

1) a- Montrons que le coût total est donnée par $C(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $C'(x) = f(x)$. Intégrons cette égalité sur $[0; x]$; alors on a :

$$\int_0^x C'(x)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow [C(t)]_0^x = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow C(x) - C(0) = \int_0^x f(t)dt.$$

Or $C(0) = 0$. D'où $C(x) = \int_0^x f(t)dt$. (Ce qu'il fallait démontrer).

b- Exprimons $C(x)$ en fonction de x .

$$\begin{aligned} C(x) = \int_0^x f(t)dt &\Leftrightarrow C(x) = \int_0^x \frac{10e^t}{e^t + 4} dt = 10 \int_0^x \frac{e^t}{e^t + 4} dt = 10[\ln(e^t + 4)]_0^x \\ &= 10\ln(e^x + 4) - 10\ln 5 = 10[\ln(e^x + 4) - \ln 5] = 10\ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } C(x) = 10\ln\left(\frac{e^x + 4}{5}\right)$$

c- Déterminons le coût total de 5 tonnes de ce produit P

(On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la dizaine d'euros près).

Le coût total de 5 tonnes du produit P est donnée par $C(5) = 10 \ln \left(\frac{e^5 + 4}{5} \right) = 34,17$ euros.

2) On appelle $C_m(x)$, le coût moyen défini, pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

a- Exprimons $C_m(x)$, en fonction de x .

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x} \Rightarrow C_m(x) = \frac{10 \ln \left(\frac{e^x + 4}{5} \right)}{x} = \frac{10}{x} \ln \left(\frac{e^x + 4}{5} \right)$$

b- Vérifions que, pour tout $x \in [0; +\infty[$; $C_m(x) = 10 + \frac{10 \ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x}$

$$\begin{aligned} C_m(x) &= \frac{10 \ln \left(\frac{e^x + 4}{5} \right)}{x} = \frac{10 \ln(e^x + 4) - 10 \ln 5}{x} = \frac{10 \ln \left[e^x \left(1 + \frac{4}{e^x} \right) \right] - 10 \ln 5}{x} \\ &= \frac{10 \ln e^x + \ln(1 + 4e^{-x}) - 10 \ln 5}{x} = \frac{10x + \ln(1 + 4e^{-x}) - 10 \ln 5}{x} \\ &= 10 + \frac{10 \ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x} \end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in [0; +\infty[$; on a : $C_m(x) = 10 + \frac{10 \ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x}$

c- En déduisons la limite de $C_m(x)$ en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 + \frac{10 \ln(1 + 4e^{-x})}{x} - \frac{10 \ln 5}{x} = 10 + 0 - 0 = 10$$

Chapitre 8

Equations différentielles

COURS

I- Définition :

On appelle équations différentielles, toutes équations faisant intervenir une fonction (l'inconnue), ses dérivées et sa variable x . Leur résolution consiste à déterminer toutes les fonctions solutions. Ainsi les équations différentielles sont classées par ordre.

II- Différents types d'équations différentielles

1) Equations différentielles du 1^{er} ordre ($y' - ay = 0$)

a) Définition :

f étant une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , la relation $f'(x) - af(x) = 0$; où f est une fonction inconnue, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, sans second membre. Cette équation est souvent notée $y' - ay = 0$.

b) Résolution :

Les solutions, définies sur \mathbb{R} , de l'équation différentielles $y' - ay = 0$ sont les solutions f_k qui à tout nombre réel x , associent $f_k(x) = ke^{ax}$, où k est un nombre réel quelconque.

Ainsi l'ensemble solution est : $S = \{ ke^{ax} \}$

2) Equations différentielles du 2^{ème} ordre :

a) Cas particulier : (Equation du 2^{ème} ordre de la forme $y'' + A(x) = 0$)

Avec $A(x)$ est une fonction quelconque.

Ce type d'équation différentielle contient uniquement la variable x et la dérivée seconde de la fonction à chercher. Résoudre ce type d'équation différentielle revient donc, dans un premier temps, à chercher y' puis ayant déterminé y' à chercher y en utilisant une primitive.

b) Equation différentielle de la forme: ($ay'' + by' + cy = 0$)

Pour résoudre de telles équations différentielles, on recherche d'abord une équation caractéristique de la forme $ar^2 + br + c = 0$. Ainsi on calcule le discriminant associé Δ tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Si $\Delta > 0$ on a deux solutions distinctes r_1 et r_2 tel que : $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et

$$S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \text{ Avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\Delta = 0$, on a deux solutions doubles r_1 et r_2 tel que $r_1 = r_2 = r_0 = \frac{-b}{2a}$ et

$$S = f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} \text{ Avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

* Si $\Delta < 0$, on a 2 solutions complexes r_1 et r_2 tel que :

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha + i\beta$$

Où α et β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

$$\text{et } S = f(x) = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x} \text{ Avec } C_1 \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}$$

c) Equations différentielles de la forme $(y'' + w^2y = 0)$

Ce type d'équation différentielle est très fréquent en sciences physiques. Sa résolution est suivit d'une application.

Résolution :

$$\text{La solution de telles équations est de la forme : } S = f(x) = C_1\cos wx + C_2\sin wx$$

Avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$

d) Equations différentielles de la forme $(y'' - w^2y = 0)$

Ce type d'équation différentielle est utilisé ici pour résoudre une application concrète.

Résolution :

$$\text{La solution de telles équation est de la forme : } S = f(x) = C_1e^{wx} + C_2e^{-wx}$$

Avec C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$

EXERCICES

Equations différentielles sans second membre.

1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) y'' - 4y' + 3y = 0 \quad ; \quad 2) y'' - 9y = 0 \quad ; \quad 3) y' - 2y = 0$$

$$4) y'' + 2y' + 2y = 0 \quad ; \quad 5) 4y'' + 5y = 0 \quad ; \quad 6) 7y' + 4y = 0$$

$$7) 9y'' - 24y' + 16y = 0 \quad ; \quad 8) 4y'' - \sin x + e^{-2x} = 0 \quad ; \quad 9) 2xy + y'x^2 = e^x$$

2 Vérifiez que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

1) $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ et (E) : $y'' - 4y = 0$

2) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

3) $f(x) = e^{-x}\sin x$ et (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$

3 Déterminer la solution f des équations différentielles données, vérifiant les conditions données suivantes :

1) $y'' - 2y' + y = 0$; conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

2) $y'' + 4y = 0$; conditions : $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$

3) $y'' + y = 0$; conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

4) $y'' - 3y' + 2y = 0$; conditions : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

4 On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases} \text{ où } y \text{ et } Z \text{ désignent deux fonctions inconnues de variable réel } x.$$

- 1) Former l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$
- 2) Résoudre l'équation (E) et en déduire la solution générale du système.
- 3) Préciser la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

5 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \times 5^{3x}$

- 1) Déterminer les réels a et b tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$
- 2) En déduire une primitive de f sur \mathbb{R}

6 Déterminer la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(2 ; e)$.

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 0)$ et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(0 ; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées $(\ln 2 ; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

6) $y'' - 2y' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4} ; 0)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Equations différentielles avec second membre.

7 Soient les équations différentielles (E) : $y' + 2y = x^2$ et (E') : $y' + 2y = 0$

- 1) Déterminer une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).
- 2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E')
 - a) Résolvez l'équation (E').
 - b) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E).

8 Soient les équations différentielles (E) et (E') telles que :

$$(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2 \text{ et } (E') : y'' + 2y' + y = 0$$

- 1) Déterminer une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).
- 2) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E')
- 3) a) Résolvez l'équation (E').
b) En déduire l'ensemble solution de l'équation (E).

9 1) Résoudre l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

2) Soit l'équation (E) : $x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

3) On pose $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

- a- Montrer que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.
- b- Déduisez-en la résolution de l'équation (E).

10 On se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété : pour tout $x > 0$, on a :

$$(E) : x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3 \ln x.$$

1) Trouver tous les polynômes P du 3^{ème} degré telles que $\forall x > 0 ; x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0$

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$

- a) Calculer $h(1)$ et calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.
- b) Démontrer que f vérifie (E) si et seulement si $\forall x \in]0; +\infty[; h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$
- c) On suppose que f vérifie (E). Démontrer que h est définie sur $]0; +\infty[$, par

$$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t dt$$
- d) Déterminer $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie
- e) Démontrer qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donner l'expression de $f(x)$.

11

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E₁) : $y' - 2y = \frac{-2}{1 + e^{-2x}}$

- 1) Déterminer la solution de l'équation différentielle (E₂) : $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
- 2) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.
- a- Calculer $g(0)$
- b- Calculer $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.
- c- Démontrer que f est solution de (E₁) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
- d- En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

12

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

- 1) On pose sur $\mathbb{R} : Z = y^{1-n}$ (avec $y > 0$).
 Déterminer une équation différentielle satisfaite par Z et la résoudre.
- 2) En déduire les solutions, strictement positives, de (E) sur \mathbb{R} .
 Que donne le cas $n = 0$?

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13

Un tronc de baobab y grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.
 On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.
 Combien de temps lui faut-il pour tripler de volume ?

14

Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation :
 $N'(t) = -25 \cdot 10^{-8} N(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années).
 De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

- 1) Déterminer l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .
- 2) Au bout de combien d'années la teneur du nombre d'atome de radium aura-t-il quadruplé ?

15

Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.
 A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

- 1) Former l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.
- 2) En déduire une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t .

15

Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur \mathbb{R}_+ , l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.
Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

- 1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $g(t) = f(t)e^t$.
Démontrer que g est une fonction affine.
- 2) Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a .
- 3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.
 - a- Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
 - b- Déterminer graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.
 - c- Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5$ en gL^{-1} .

Solutions

Equations différentielles sans second membre.

1

Résolvons les équations différentielles suivantes :

NB : Dans tout l'exercice, on désignera par (E.C) l'équation caractéristique.

$$1) y'' - 4y' + 3y = 0$$

$$(E.C) : r^2 - 4r + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4. (\Delta > 0). \text{ Alors } r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 3$$

$$\Rightarrow S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow S = f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}. \text{ Avec } (C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$2) y'' - 9y = 0. \text{ Ici } w^2 = 9 \Rightarrow w = 3$$

$$\Rightarrow S = f(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

$$3) y' - 2y = 0. \text{ Ici } a = 2 \Rightarrow S = f(x) = k e^{2x}. \text{ Avec } (k \in \mathbb{R})$$

$$4) y'' + 2y' + 2y = 0$$

$$(E.C) : r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 = 4i^2. (\Delta < 0).$$

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i \quad \Rightarrow \alpha = -1 \text{ et } \beta = 1$$

$$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

Où α et β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2

Et $S = f(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) e^{-x}$. Avec $(C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$

$$5) 4y'' + 5y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{5}{4}y = 0. \text{ Ici } w^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow w = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S = f(x) = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx \Rightarrow S = f(x) = C_1 \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

Avec $(C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$

$$6) 7y' + 4y = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{4}{7}y = 0. \text{ Ici } a = -\frac{4}{7} \Rightarrow S = f(x) = ke^{-\frac{4}{7}x}. \text{ Avec } (k \in \mathbb{R})$$

$$7) 9y'' - 24y' + 16y = 0$$

$$(E.C): 9r^2 - 24r + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 0. (\Delta = 0). \text{ Alors } r_1 = r_2 = r_0 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow S = f(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x} = (C_1 x + C_2) e^{\frac{4}{3}x}. \text{ Avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$8) 4y'' - \sin x + e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 4y'' = \sin x - e^{-2x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{4} e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{8} e^{-2x} + k \text{ et } y = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{16} e^{-2x} + kx + k'$$

$$\Rightarrow S = f(x) = -\frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{16} e^{-2x} + kx + k'$$

$$9) 2xy + y'x^2 = e^x \Leftrightarrow (x^2 \times y)' = e^x \Leftrightarrow x^2 \times y = e^x \Rightarrow y = \frac{e^x}{x^2} + k$$

2

Vérifions que les fonctions f données sont solutions des équations différentielles (E) correspondantes :

$$1) f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x} \text{ et } (E): y'' - 4y = 0$$

La fonction $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ est solution de (E) : $y'' - 4y = 0$ si et seulement si

$$f''(x) - 4f(x) = 0 \text{ Avec : } f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}; f'(x) = -4e^{-2x} + 6e^{2x} \text{ et}$$

$$f''(x) = 8e^{-2x} + 12e^{2x}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f''(x) - 4f(x) &= (8e^{-2x} + 12e^{2x}) - 4(2e^{-2x} + 3e^{2x}) \\ &= 8e^{-2x} + 12e^{2x} - 8e^{-2x} - 12e^{2x} = 0 \end{aligned}$$

Puisque $f''(x) - 4f(x) = 0$.

Alors $f(x) = 2e^{-2x} + 3e^{2x}$ est solution de (E) : $y'' - 4y = 0$

$$2) f(x) = (2x + 1)e^{-x} \quad \text{et (E) : } y'' + 2y' + y = 0$$

La fonction $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ est solution de (E) : $y'' + 2y' + y = 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + f(x) &= 0. \text{ Avec } f(x) = (2x + 1)e^{-x}; f'(x) = (-2x + 1)e^{-x} \text{ et} \\ f''(x) &= (2x - 3)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f''(x) + 2f'(x) + f(x) &= (2x - 3)e^{-x} + 2(-2x + 1)e^{-x} + (2x + 1)e^{-x} \\ &= (2x - 3 - 4x + 2 + 2x + 1)e^{-x} = (0)e^{-x} = 0 \end{aligned}$$

Puisque $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Alors $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ est solution de (E)

$$3) f(x) = e^{-x} \sin x \quad \text{et (E) : } y'' + 2y' + 2y = 0$$

La fonction $f(x) = e^{-x} \sin x$ est solution de (E) : $y'' + 2y' + 2y = 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) &= 0. \text{ Avec } f(x) = e^{-x} \sin x; f'(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x} \text{ et} \\ f''(x) &= (-2\cos x)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) &= (-2\cos x)e^{-x} + 2(\cos x - \sin x)e^{-x} + 2e^{-x} \sin x \\ &= -2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \sin x = 0 \end{aligned}$$

Puisque $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$. Alors $f(x) = e^{-x} \sin x$ est solution de (E)

3 Déterminons la solution f des équations différentielles données, vérifiant les conditions données suivantes :

$$1) y'' - 2y' + y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$(E.C) : r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0. (\Delta = 0). \text{ Alors } r_1 = r_2 = r_0 = 1$$

$$\Rightarrow S = f(x) = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^x. \text{ Avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Conditions : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

$$f(x) = (C_1x + C_2)e^x \text{ Alors } f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$$

$$f'(x) = (C_1x + C_1 + C_2)e^x \text{ Alors } f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 1. \text{ Or } C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\text{D'où } f(x) = xe^x$$

$$2) y'' + 4y = 0$$

$$y'' + 4y = 0. \text{ Ici } w^2 = 4 \Rightarrow w = 2$$

$$S = f(x) = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx \Rightarrow S = f(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \text{ Avec } (C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Conditions : $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$

$$f(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \text{ Alors } f(0) = 6 \Leftrightarrow C_1 = 6$$

$$f'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x \text{ Alors } f'(0) = 10 \Leftrightarrow 2C_2 = 10 \Rightarrow C_2 = 5$$

$$\text{D'où } f(x) = 6 \cos 2x + 5 \sin 2x$$

$$3) y'' + y = 0. \text{ Ici } w^2 = 1 \Rightarrow w = 1$$

$$S = f(x) = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx \Rightarrow S = f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \text{ Avec } (C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Conditions : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \text{ Alors } f(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$f'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \text{ Alors } f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$$

$$\text{D'où } f(x) = \sin x$$

$$4) y'' - 3y' + 2y = 0$$

$$(E.C) : r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1. (\Delta > 0). \text{ Alors } r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

$$\Rightarrow S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow S = f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \text{ Avec } (C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Conditions : $f(1) = 1$ et $f'(1) = 3$

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \text{ Alors } f(1) = 1 \Leftrightarrow C_1 e + C_2 e^2 = 1$$

$$f'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}. \text{ Alors } f'(1) = 3 \Leftrightarrow C_1 e + 2C_2 e^2 = 3$$

Formons ainsi le système avec ces deux conditions :

$$\begin{cases} C_1 e + C_2 e^2 = 1 \\ C_1 e + 2C_2 e^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -C_1 e - C_2 e^2 = -1 \\ C_1 e + 2C_2 e^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_2 e^2 = 2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{e^2} \Rightarrow C_2 = 2e^{-2}$$

En remplaçant $C_2 = 2e^{-2}$ par sa valeur dans l'équation 2, on a : $C_1 = -e^{-1}$

$$D'où $f(x) = -e^{-1} \times e^x + 2e^{-2} \times e^{2x} = -e^{x-1} + 2e^{2x-2} = 2e^{2x-2} - e^{x-1}$$$

4

On considère le système suivant, d'équations différentielles du 1^{er} ordre tel que :

$$\begin{cases} y' + 4Z = 2e^{2x} \\ Z' - y = e^{2x} \end{cases} \text{ où } y \text{ et } Z \text{ désignent deux fonctions inconnues de variable réel } x.$$

1) Formons l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$

$$(1) y' + 4Z = 2e^{2x} \Rightarrow y'' + 4Z' = 4e^{2x}$$

$$(2) Z' - y = e^{2x} \Rightarrow Z' = y + e^{2x}$$

En remplaçant $Z' = y + e^{2x}$ par sa valeur dans (1). Alors on a :

$$y'' + 4(y + e^{2x}) = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y + 4e^{2x} = 4e^{2x} \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$$

D'où l'équation différentielle du second ordre (E) à laquelle satisfait $y(x)$ est

$$(E) : y'' + 4y = 0.$$

2) Résolvons l'équation (E)

$$y'' + 4y = 0. \text{ Ici } w^2 = 4 \Rightarrow w = 2$$

$$\text{Alors } y(x) = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \text{ avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

En déduisons la solution générale du système, c'est-à-dire la fonction inconnue Z .

$$D'après l'équation (2), on a : $Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow$$$

$$\text{Donc } Z' = y + e^{2x} \Leftrightarrow \int Z'(x) dx = \int y(x) dx + \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) dx + \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = \int C_1 \cos 2x dx + \int C_2 \sin 2x dx + \int e^{2x} dx$$

$$\Leftrightarrow Z(x) = C_1 \int \cos 2x dx + C_2 \int \sin 2x dx + \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow Z(x) = C_1 \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right] + C_2 \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right] + \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]$$

$$\Rightarrow Z(x) = \frac{C_1}{2} \sin 2x + -\frac{C_2}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} (C_1 \sin 2x - C_2 \cos 2x + e^{2x})$$

3) Précisons la solution particulière pour laquelle on a : $y = 1$ et $Z = -1$ pour $x = 0$.

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

Si $y = 1$ Pour $x = 0$ alors on a : $1 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \Leftrightarrow C_1 = 1$

$$Z(x) = \frac{1}{2} (C_1 \sin 2x - C_2 \cos 2x + e^{2x})$$

Si $Z = -1$ Pour $x = 0$ alors on a : $-1 = \frac{1}{2} (C_1 \sin 0 - C_2 \cos 0 + e^0) \Leftrightarrow$

$$C_1 \sin 0 - C_2 \cos 0 + e^0 = -2 \Leftrightarrow -C_2 + 1 = -2 \Leftrightarrow C_2 = 3$$

Alors $y(x) = \cos 2x + 3 \sin 2x$ et $Z(x) = \frac{1}{2} (\sin 2x - 3 \cos 2x + e^{2x})$

D'où la solution particulière du système est :

$$\begin{cases} y(x) = \cos 2x + 3 \sin 2x \\ \text{et} \\ Z(x) = \frac{1}{2} (\sin 2x - 3 \cos 2x + e^{2x}) \end{cases}$$

5 Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \times 5^{3x}$

1) Déterminons les réels a et b tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$

$f(x) = x \times 5^{3x} \Rightarrow f(x) = x \times e^{3x \ln 5}$. Ainsi :

$$f'(x) = (1 + 3x \ln 5) e^{3x \ln 5} \text{ et } f''(x) = (2 + 3x \ln 5) 3 \ln 5 e^{3x \ln 5}$$

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + 3x \ln 5) 3 \ln 5 e^{3x \ln 5} + a(1 + 3x \ln 5) e^{3x \ln 5} + bx \times e^{3x \ln 5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 + 3x \ln 5) 3 \ln 5 + a(1 + 3x \ln 5) + bx = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \ln 5 + x(3 \ln 5)^2 + a + 3ax \ln 5 + bx = 0$$

$$\Leftrightarrow x[(3 \ln 5)^2 + 3a \ln 5 + b] + a + 6 \ln 5 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3 \ln 5)^2 + 3a \ln 5 + b = 0 \\ a + 6 \ln 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (3 \ln 5)^2 \\ a = -6 \ln 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

D'où les réels a et b sont tels que : $a = -6 \ln 5$ et $b = (3 \ln 5)^2$

2) En déduisons une primitive de f sur \mathbb{R}

Pour cela, déterminons la fonction f en résolvant l'équation différentielle :

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \Leftrightarrow f''(x) - 6\ln 5 f'(x) + (3\ln 5)^2 f(x) = 0$$

$$f''(x) - 6\ln 5 f'(x) + (3\ln 5)^2 f(x) = 0$$

$$(E.C) : r^2 - 6\ln 5 r + (3\ln 5)^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0. (\Delta = 0). \text{ Alors } r_1 = r_2 = r_0 = 3\ln 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x} = (C_1 x + C_2) e^{3x \ln 5}. \text{ Avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{Alors si } f(x) = (C_1 x + C_2) e^{3x \ln 5} = C_1 x e^{3x \ln 5} + C_2 e^{3x \ln 5}$$

Posons $A(x) = C_1 x e^{3x \ln 5}$ et $B(x) = C_2 e^{3x \ln 5}$ puis cherchons une primitive de A et B .

$$\text{Pour : } A(x) = C_1 x e^{3x \ln 5}$$

$$\text{Posons : } u(x) = C_1 x \Rightarrow u'(x) = C_1$$

$$v'(x) = e^{3x \ln 5} \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3\ln 5} e^{3x \ln 5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(x) &= \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} \right] - \int \frac{C_1}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} dx = \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} \right] - \frac{C_1}{3\ln 5} \int e^{3x \ln 5} dx \\ &= \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} \right] - \frac{C_1}{3\ln 5} \left[\frac{1}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} \right] = \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} \right] - \left[\frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x \ln 5} \right] \\ &= \left[\frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x \ln 5} \right] = \frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x \ln 5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x \ln 5}$$

$$\text{Pour : } B(x) = C_2 e^{3x \ln 5}$$

$$\text{Si } B(x) = C_2 e^{3x \ln 5} \text{ alors la primitive de } B \text{ est : } \frac{C_2}{3\ln 5} e^{3x \ln 5}$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{C_1 x}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} - \frac{C_1}{(3\ln 5)^2} e^{3x \ln 5} + \frac{C_2}{3\ln 5} e^{3x \ln 5} = \frac{e^{3x \ln 5}}{3\ln 5} \left(C_1 x - \frac{C_1}{3\ln 5} + C_2 \right) + k$$

6

Déterminons la solution f des équations différentielles données, dont la courbe (C) vérifie les conditions données suivantes :

NB : Il est important et nécessaire de connaître que :

- La courbe (Cf) passe par le point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ si et seulement $f(x_0) = y_0$.
- La courbe (Cf) admet au point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses c'est-à-dire l'axe ox si et seulement si $f'(x_0) = 0$.

- La courbe (Cf) admet au point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente parallèle à la droite (D) d'équation : $y = ax + b$ si et seulement si $f'(x_0) = a$.
- La courbe (Cf) admet au point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ une tangente de coefficient directeur k si et seulement si $f'(x_0) = k$.

1) $y' - 3y = 0$; (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.

$$y' - 3y = 0 \Rightarrow S = f(x) = ke^{3x}$$

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$ si et seulement si $f'(0) = 1$ avec $f'(x) = 3ke^{3x}$

$$\text{Alors } f'(0) = 1 \Leftrightarrow 3ke^0 = 1 \Leftrightarrow 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}. \text{ D'où } f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

2) $2y' - y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (2 ; e).

$$2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow S = f(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$$

(C) passe par le point de coordonnées (2 ; e) si et seulement si $f(2) = e$

$$f(2) = e \Leftrightarrow ke^{\frac{1}{2} \cdot 2} = e \Leftrightarrow ke = e \Rightarrow k = 1. \text{ D'où } f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

3) $y'' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) et admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en ce point.

$$y'' + 2y = 0. \text{ Ici } w^2 = 2 \Rightarrow w = \sqrt{2}$$

$$\text{Alors } S = f(x) = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x \text{ avec } (C_1 ; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

(C) passe par le point de coordonnées (0 ; 0) $\Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$

(C) admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente au point (0 ; 0) $\Rightarrow f'(0) = 1$.
Avec $f'(x) = -C_1 \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x + C_2 \sqrt{2} \cos \sqrt{2}x$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 \sqrt{2} = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ D'où } f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \sqrt{2}x$$

4) $y'' - 4y' + 4y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$$(E.C) : r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0. (\Delta = 0). \text{ Alors } r_1 = r_2 = r_0 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow S = f(x) = (C_1 x + C_2) e^{2x} = (C_1 x + C_2) e^{2x} \text{ Avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$(C) \text{ passe par le point de coordonnées } (0; 1) \Rightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1$$

(C) admet au point $(0; 1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si :

$$f'(0) = 0. \text{ Car l'axe des abscisses a pour équation } y = 0 \text{ et } f'(x) = (2C_1 x + C_1 + 2C_2) e^{2x}$$

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 = 0. \text{ Or } C_2 = 1 \text{ alors } C_1 + 2 = 0 \Rightarrow C_1 = -2$$

$$\text{D'où } f(x) = (-2x + 1) e^{2x}$$

5) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (C) passe par le point coordonnées $(\ln 2; 0)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -4

$$(E.C) : r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1. (\Delta > 0). \text{ Alors } r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

$$\Rightarrow S = f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow S = f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \text{ Avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$(C) \text{ passe par le point coordonnées } (\ln 2; 0) \Rightarrow f(\ln 2) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{\ln 2} + C_2 e^{2 \ln 2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$C_1 e^{\ln 2} + C_2 e^{\ln 4} = 1 \Leftrightarrow 2C_1 + 4C_2 = 1 \quad (1)$$

$$(C) \text{ admet au point } (\ln 2; 0) \text{ une tangente de coefficient directeur } -4 \Rightarrow f'(\ln 2) = -4$$

$$\text{Avec } f'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$$

$$f'(\ln 2) = -4 \Leftrightarrow C_1 e^{\ln 2} + 2C_2 e^{2 \ln 2} = -4 \Leftrightarrow C_1 e^{\ln 2} + 2C_2 e^{\ln 4} = -4 \Leftrightarrow 2C_1 + 8C_2 = -4$$

$$\Leftrightarrow C_1 + 4C_2 = -2 \quad (2)$$

Formons ainsi le système avec les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} 2C_1 + 4C_2 = 1 \\ C_1 + 4C_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C_1 + 4C_2 = 1 \\ -C_1 - 4C_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1 = 3$$

En remplaçant $C_1 = 3$ par sa valeur dans l'équation (1), on a : $C_2 = -\frac{5}{4}$

$$\text{D'où } f(x) = 3_1 e^x - \frac{5}{4} C_2 e^{2x}$$

6) $y'' - 2y' + 2y = 0$; (C) passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}; 0)$ et sa tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

$$(E.C) : r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 = 4i^2. (\Delta < 0).$$

$$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 - 2i}{2} = 1 - i \quad \Rightarrow \alpha = 1 \text{ et } \beta = -1$$

$$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

Où α et β désignent respectivement les parties réelles et imaginaires des solutions r_1 et r_2 .

Et $S = f(x) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} = (C_1 \cos x - C_2 \sin x) e^x$. Avec $(C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$

(C) passe par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{4}; 0) \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2} C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} C_2) e^{\frac{\pi}{4}} = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_2 = 0 \quad (1)$$

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses $\Rightarrow f'(0) = 0$.

Avec $f'(x) = (C_1 \cos x + C_2 \cos x + C_2 \sin x - C_1 \sin x) e^x$.

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + C_2 = 0 \quad (2)$$

Formons ainsi le système avec les équations (1) et (2) :

$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ et } C_2 = 0$$

D'où $f(x) = 0$

Equations différentielles avec second membre.

7

Soient les équations différentielles (E) : $y' + 2y = x^2$ et (E') : $y' + 2y = 0$

1) Déterminons une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ce polynôme de degré deux solution de (E) tel que :

$$g'(x) + 2g(x) = x^2 \Leftrightarrow (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2 \Leftrightarrow 2ax^2 + x(2a + 2b) + b + 2c = x^2$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ D'où } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

2) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E')

NB:

Montrer que $A \Leftrightarrow B$, revient à montrer que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \text{et} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour montrer qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E'), on montre que

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est solution de l'équation (E)} \Rightarrow f - g \text{ est solution de (E')} \\ \text{et} \\ f - g \text{ est solution de (E')} \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation (E)} \end{array} \right.$$

- Montrons que f est solution de l'équation (E) $\Rightarrow f - g$ est solution de (E')
 - f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f'(x) + 2f(x) = x^2$ (1)
 - g est solution de l'équation (E) si et seulement si $g'(x) + 2g(x) = x^2$ (2)

Effectuons ainsi la différence des relations (1) et (2) :

$$(1) - (2) : [f'(x) - g'(x)] + 2[f(x) - g(x)] = x^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0 \Rightarrow f - g \text{ est solution de (E')}$$

D'où f est solution de l'équation (E) $\Rightarrow f - g$ est solution de (E')

- Montrons que $f - g$ est solution de (E') $\Rightarrow f$ est solution de l'équation (E)

Si $f - g$ est solution de (E') alors on a : $(f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$[f'(x) - g'(x)] + 2[f(x) - g(x)] = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 2f(x) - 2g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x). \text{ Avec } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \text{ et } g'(x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Alors } f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x). \Leftrightarrow$$

$$f'(x) + 2f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = x^2$$

D'où $f - g$ est solution de (E') $\Rightarrow f$ est solution de l'équation (E)

Conclusion : puisque $\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation (E)} \Rightarrow f - g \text{ est solution de (E')} \\ \text{et} \\ f - g \text{ est solution de (E')} \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation (E)} \end{cases}$

Alors une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E'). (Ce qu'il fallait démontrer).

3) a- Résolvons l'équation (E').

$$(E') : y' + 2y = 0 \Rightarrow S = ke^{-2x}$$

b- En déduisons l'ensemble solution de l'équation (E).

- On sait que $f(x) - g(x)$ est solution de (E').

- De même ke^{-2x} est solution de (E').

Par identification des deux solutions, on a : $f(x) - g(x) = ke^{-2x} \Rightarrow f(x) = ke^{-2x} + g(x)$.

$$\text{Or } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Alors } f(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

8 Soient les équations différentielles (E) et (E') telles que :

$$(E) : y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2 \text{ et } (E') : y'' + 2y' + y = 0$$

1) Déterminons une fonction polynôme g , de degré deux, solution de (E).

Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ce polynôme de degré deux solution de (E) tel que :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$(2a) + 2(2ax + b) + (ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$2a + 4ax + 2b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow$$

$$ax^2 + x(4a + b) + 2a + 2b + c = x^2 + 2x - 2$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4a + b = 2 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases} \text{ D'où } g(x) = x^2 - 2x$$

2) Démontrons qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, $f - g$ est solution de l'équation (E')

NB :

Montrer que $A \Leftrightarrow B$, revient à montré que $\begin{cases} A \Rightarrow B \\ \text{et} \\ B \Rightarrow A \end{cases}$

Ainsi pour montrer qu'une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E'), on montre que

$$\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation (E)} \Rightarrow f - g \text{ est solution de (E')} \\ \text{et} \\ f - g \text{ est solution de (E')} \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation (E)} \end{cases}$$

- Montrons que f est solution de l'équation (E) $\Rightarrow f - g$ est solution de (E')

$$f \text{ est solution de l'équation (E) si et seulement si } f''(x) + 2f'(x) + f(x) = x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$

$$g \text{ est solution de l'équation (E) si et seulement si } g''(x) + 2g'(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2 \quad (2)$$

Effectuons ainsi la différence des relations (1) et (2) :

$$(1) - (2) : [f''(x) - g''(x)] + 2[f'(x) - g'(x)] + [f(x) - g(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (f - g)''(x) + 2(f - g)'(x) + (f - g)(x) = 0 \Rightarrow f - g \text{ est solution de (E')}$$

D'où f est solution de l'équation (E) $\Rightarrow f - g$ est solution de (E')

- Montrons que $f - g$ est solution de (E') $\Rightarrow f$ est solution de l'équation (E)

$$\text{Si } f - g \text{ est solution de (E')} \text{ alors on a : } (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f''(x) - g''(x)] + 2[f'(x) - g'(x)] + [f(x) - g(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow f''(x) - g''(x) + 2f'(x) - 2g'(x) + f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) - g''(x) - 2g'(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x)$$

$$\text{Avec } g(x) = x^2 - 2x ; g'(x) = 2x - 2 \text{ et } g''(x) = 2$$

$$\text{Alors } f''(x) + 2f'(x) + f(x) = g''(x) + 2g'(x) + g(x) \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = (2) + 2(2x - 2) + x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = x^2 + 2x - 2$$

D'où $f - g$ est solution de (E') $\Rightarrow f$ est solution de l'équation (E)

Conclusion : puisque $\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation } (E) \Rightarrow f - g \text{ est solution de } (E') \\ \text{et} \\ f - g \text{ est solution de } (E') \Rightarrow f \text{ est solution de l'équation } (E) \end{cases}$

Alors une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E') . (Ce qu'il fallait démontrer).

3) a- Résolvons l'équation (E') .

$$(E') : y'' + 2y' + y = 0$$

$$(E.C) : r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0. (\Delta = 0). \text{ Alors } r_1 = r_2 = r_0 = -1$$

$$\Rightarrow S = (C_1x + C_2)e^{r_0x} = (C_1x + C_2)e^{-x}. \text{ Avec } (C_1; C_2) \in \mathbb{R}^2$$

b- En déduisons l'ensemble solution de l'équation (E) .

- On sait que $f(x) - g(x)$ est solution de (E') .

- De même $(C_1x + C_2)e^{-x}$ est solution de (E') .

Par identification des deux solutions, on a : $f(x) - g(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} \Rightarrow$

$$f(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} + g(x). \text{ Or } g(x) = x^2 - 2x$$

$$\text{Alors } f(x) = (C_1x + C_2)e^{-x} + x^2 - 2x.$$

9

1) Résolvons l'équation différentielle d'inconnue f tel que : $x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0$.

$$x^2 f'(x) + 2xf(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 \times f(x))' - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 \times f(x))' = 1 \Leftrightarrow$$

$$\int (x^2 \times f(x))' dx = \int 1 dx \Leftrightarrow x^2 \times f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

2) Soit l'équation $(E) : x^2 f'(x) - 2xf(x) + f^2(x) = 0$.

$$\text{On pose } g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

a-Montrons que l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$.

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{g(x)} \text{ et } f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

En remplaçant $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ et $f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ par leur valeur dans l'équation (E), on a :

$$(E) : x^2 \left[-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \right] - 2x \left[\frac{1}{g(x)} \right] + \left[\frac{1}{g(x)} \right]^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2 g'(x)}{g^2(x)} - \frac{2x}{g(x)} + \frac{1}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^2 g'(x) - 2xg(x) + 1}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 g'(x) + 2xg(x) - 1}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow x^2 g'(x) + 2xg(x) - 1 = 0.$$

D'où l'équation (E) est équivalent à $x^2 g'(x) + 2xg(x) = 1$. (Ce qu'il fallait démontrer).

b-Déduisons-en la résolution de l'équation (E).

D'après la question 1), on a : $f(x) = \frac{1}{x}$ et D'après la question 2)-a, on a : $f(x) = \frac{1}{g(x)}$

Par identification, on a : $\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x) = x$

D'où la solution de l'équation (E) est $g(x) = x$

10 On se propose de résoudre le problème suivant : trouver une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, s'annulant pour $x = 1$ et vérifiant la propriété : pour tout $x > 0$, on a :

$$(E) : x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3 \ln x.$$

1) Trouvons toutes les fonctions polynômes P du 3^{ème} degré telles que, pour tout réel x , on ait

$$x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0.$$

Soit $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a; b; c$ et d sont tous des réels ce polynôme de degré 3 tel que : $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$x \times P'(x) - 3 \times P(x) = 0 \Leftrightarrow x(3ax^2 + 2bx + c) - 3(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3ax^3 + 2bx^2 + cx - 3ax^3 - 3bx^2 - 3cx - 3d = 0 \Leftrightarrow -bx^2 - 2cx - 3d = 0$$

Par identification, on a : $b = 0$; $c = 0$ et $d = 0$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$; on a : $P(x) = ax^3$. $a \in \mathbb{R}^*$.

2) Soit une fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ telle que $f(1) = 0$ et soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par la relation $f(x) = x^3 \times h(x)$

a-Calculons $h(1)$ et calculer $f'(x)$ en fonction de $h'(x)$ et $h(x)$.

$$f(x) = x^3 \times h(x) \Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{x^3} \text{ et } h(1) = \frac{f(1)}{1^3} = \frac{0}{1^3} = 0$$

$$f(x) = x^3 \times h(x) \Rightarrow f'(x) = 3x^2 h(x) + x^3 h'(x)$$

b-Démontrons que f vérifie (E) si et seulement si $\forall x \in]0 ; +\infty[; h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$

$$(E) : x \times f'(x) - 3 \times f(x) = 3 \ln x.$$

$$f(x) = x^3 \times h(x) \text{ et } f'(x) = 3x^2 h(x) + x^3 h'(x)$$

Remplaçons $f(x)$ et $f'(x)$ par leur valeur dans l'équation (E), on a :

$$x[3x^2 h(x) + x^3 h'(x)] - 3[x^3 \times h(x)] = 3 \ln x \Leftrightarrow 3x^3 h(x) + x^4 h'(x) - 3x^3 h(x) = 3 \ln x$$

$$\Leftrightarrow x^4 h'(x) = 3 \ln x \Rightarrow h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$$

D'où f vérifie (E) si et seulement si $\forall x \in]0 ; +\infty[; h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$ (Ce qu'il fallait démontrer).

c-On suppose que f vérifie (E).

Démontrons que h est définie sur $]0 ; +\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt$

$h(1) = 0$ et $h'(x) = \frac{3}{x^4} \ln x$. Alors h est la primitive de $h' : x \rightarrow \frac{3}{x^4} \ln x$ qui s'annule en 1.

D'où h est définie sur $]0 ; +\infty[$, par $h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt$

d-Déterminons $h(x)$ en fonction de x par une intégration par partie

$$h(x) = \int_1^x \frac{3}{t^4} \ln t \, dt$$

$$\text{Posons : } u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = \frac{3}{t^4} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t^3}$$

$$\Rightarrow h(x) = \left[-\frac{\ln t}{t^3} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^4} \, dt = \left[-\frac{\ln t}{t^3} \right]_1^x + \left[-\frac{1}{3t^3} \right]_1^x = \left[-\frac{\ln t}{t^3} - \frac{1}{3t^3} \right]_1^x$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$$

e-Démontrons qu'il existe une unique fonction f solution du problème posé et donner l'expression de $f(x)$.

$$f(x) = x^3 \times h(x). \text{ Or } h(x) = -\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 \left(-\frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3} \right) = -\ln x - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3}$$

Puisque h est unique alors f est unique.

11

On se propose de résoudre l'équation différentielle : $(E_1) : y' - 2y = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$

1) Déterminons la solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow S = y(x) = ke^{2x}. \text{ Or } y(0) = 1 \Leftrightarrow ke^0 = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{D'où } y(x) = e^{2x}.$$

2) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f(0) = \ln 2$ et soit g la fonction définie par la relation : $f(x) = e^{2x} \times g(x)$.

a- Calculons $g(0)$

$$f(x) = e^{2x} \times g(x) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2$$

b- Calculons $g'(x)$ en fonction de $f'(x)$ et de $f(x)$.

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x) \times e^{2x} - 2e^{2x} \times f(x)}{e^{4x}} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$$

c- Démontrons que f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

$$(E_1) : y' - 2y = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$$

f est solution de (E_1) si et seulement si $f' - 2f = -\frac{2}{1 + e^{-2x}}$.

$$\text{Or } f(x) = e^{2x}g(x) \text{ et } f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x) = e^{2x}[g'(x) + 2g(x)]$$

$$f' - 2f = -\frac{2}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow e^{2x}[g'(x) + 2g(x)] - 2e^{2x}g(x) = -\frac{2}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}g'(x) + 2e^{2x}g(x) - 2e^{2x}g(x) = -\frac{2}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow e^{2x}g'(x) = -\frac{2}{1 + e^{-2x}} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = -\frac{2}{(1 + e^{-2x})e^{2x}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

D'où f est solution de (E_1) si et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

d- En déduisons l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E) .

D'après la question précédente, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow \int g'(x) dx = \int \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} dx \Leftrightarrow$

$$g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + k. \text{ Or } g(0) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + e^0) + k = \ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 + k = \ln 2 \Rightarrow k = 0$$

$$\text{D'où } g(x) = \ln(1 + e^{-2x})$$

12

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel différent de 1.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + by^n$

1) On pose sur \mathbb{R} : $Z = y^{1-n}$ (avec $y > 0$).

Déterminons une équation différentielle satisfaite par Z et la résoudre.

La fonction Z est dérivable sur \mathbb{R} (car y l'est) et :

$$Z' = (1-n)y'y^{-n}. \text{ Or } y' = ay + by^n$$

$$\Rightarrow Z' = (1-n)(ay + by^n)y^{-n} = (1-n)(ay + by^n)y^{-n} = (1-n)(ay^{1-n} + by^0)$$

$$= (1-n)(ay^{1-n} + b). \text{ Or } Z = y^{1-n}$$

$$\Rightarrow Z' = (1-n)(aZ + b) \Leftrightarrow Z' = a(1-n)Z + b(1-n)$$

$$\Rightarrow Z' = ke^{(1-n)ax} - \frac{b}{a}$$

2) En déduisons les solutions, strictement positives, de (E) sur \mathbb{R} .

$$\text{Puisque l'on a posé } Z = y^{1-n}, \text{ alors } y = Z^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}; y(x) = \left[ke^{(1-n)ax} - \frac{b}{a} \right]^{\frac{1}{1-n}}$$

Lorsque $n = 0$, on récupère l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec ses solutions :

$$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}. \text{ Cette équation est appelée : équation de Bernoulli.}$$

Equations différentielles dans les cas pratiques.

13

Un tronc de baobab y grossi avec une vitesse proportionnelle à lui-même.

On sait de plus que ce tronc double de volume tous les 10 ans.

Déterminons le temps nécessaire pour tripler de volume.

Par hypothèse, on a : $y' - ay = 0$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Notons t le temps (en années).

D'autre part, l'équation différentielle $y' - ay = 0$ a pour solution : $y(t) = ke^{at}$. ($k \in \mathbb{R}^*$)

Puisque le tronc de baobab double de volume tous les 10 ans, alors on a :

$$y(t+10) = 2y(t) \Leftrightarrow ke^{a(t+10)} = 2ke^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+10)} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+10a)} = 2e^{at}$$

$$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{10a} = 2e^{at} \Leftrightarrow e^{10a} = 2 \Rightarrow 10a = \ln 2 \Rightarrow a = \frac{\ln 2}{10}$$

D'où $y(t) = ke^{\frac{\ln 2}{10}t}$ avec ($k \in \mathbb{R}^*$)

Cherchons maintenant le temps T nécessaire pour tripler de volume.

$$y(t+T) = 3y(t) \Leftrightarrow ke^{a(t+T)} = 3ke^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+T)} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+aT)} = 3e^{at}$$

$$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{aT} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{aT} = 3 \Rightarrow aT = \ln 3 \Rightarrow T = \frac{\ln 3}{a}. \text{ Or } a = \frac{\ln 2}{10}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln 3}{\frac{\ln 2}{10}} = \frac{10 \ln 3}{\ln 2} \approx 15,85 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Il faut donc attendre 15 ans, 10 mois et 6 jours (au jours près) pour que le volume du tronc de baobab puis triplé.

- 14** Lors du tremblement de terre qui a secoué la centrale nucléaire de FUKUSHIMA au Japon, la teneur du nombre d'atome de radium $N(t)$ échappé à l'instant t est donné par la relation : $N'(t) = aN(t)$ et $N(0) = N_0$ où (t est exprimé en années). De plus sa teneur en toxine triple chaque deux ans.

1) Déterminons l'expression de $N(t)$ en fonction de N_0 et t .

$$N'(t) = aN(t) \Leftrightarrow N'(t) - aN(t) = 0$$

Cette équation différentielle est donc sous la forme :

$$y' - ay = 0 \text{ qui a pour solution : } y(t) = ke^{at}. (k \in \mathbb{R}^*)$$

$$\text{Donc } N'(t) - aN(t) = 0 \Rightarrow N(t) = N_0 e^{at}. (N_0 \in \mathbb{R}^*)$$

2) Déterminons le temps au bout du quel la teneur du nombre d'atome de radium aura quadruplé.

Puisque la teneur en toxine triple chaque deux ans, alors on a :

$$N(t+2) = 3N(t) \Leftrightarrow N_0 e^{a(t+2)} = 3N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+2)} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+2a)} = 3e^{at}$$

$$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{2a} = 3e^{at} \Leftrightarrow e^{2a} = 3 \Rightarrow 2a = \ln 3 \Rightarrow a = \frac{\ln 3}{2}$$

D'où $N(t) = N_0 e^{\frac{\ln 3}{2}t}$ avec $(N_0 \in \mathbb{R}^*)$

Cherchons maintenant le temps T nécessaire pour quadrupler de teneur.

$$N(t+T) = 4N(t) \Leftrightarrow N_0 e^{a(t+T)} = 4N_0 e^{at} \Leftrightarrow e^{a(t+T)} = 4e^{at} \Leftrightarrow e^{(at+aT)} = 4e^{at}$$

$$\Leftrightarrow e^{at} \times e^{aT} = 4e^{at} \Leftrightarrow e^{aT} = 4 \Rightarrow aT = \ln 4 \Rightarrow T = \frac{\ln 4}{a}. \text{ Or } a = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{\ln 4}{\frac{\ln 3}{2}} = \frac{2 \ln 4}{\ln 3} \approx 3.$$

Il faut donc attendre à peu près 3 ans, pour que la teneur du nombre d'atome de radium soit quadruplée.

15

Une substance se dissout dans l'eau avec une vitesse de dissolution proportionnelle à la quantité non dissoute.

A l'instant $t = 0$ (en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. Sachant que les 10 premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1) Formons l'équation différentielle expliquant cette situation en fonction de $f'(t)$ et de $f(t)$.

Comme la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $f'(t) = a(20 - f(t))$.

Les solutions sont de la forme, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $f(t) = ke^{-at} + 20$.

2) En déduisons une expression de la quantité dissoute $f(t)$, en grammes, en fonction de t .

A l'instant initial, il n'y a pas encore de la quantité dissoute donc :

$$f(0) = 0$$

$$\Rightarrow C + 20 = 0$$

$$\Rightarrow C = -20$$

Comme les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes, on a :

$$f(5) = 10$$

$$\Rightarrow -20e^{-5a} + 20 = 10$$

$$\Rightarrow e^{-5a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\ln 2}{5} \approx 0,14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

On a donc, pour $t \in \mathbb{R}_+$: $f(t) = 20 \left(1 - e^{-\frac{\ln 2}{5}t} \right) = 20 \left(1 - 2^{-\frac{t}{5}} \right)$

15

Le taux d'alcoolisme $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, en jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur \mathbb{R}_+ , l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = ae^{-t}$.
Où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose pour tout $t \in \mathbb{R}_+$: $g(t) = f(t)e^t$.

Démontrons que g est une fonction affine.

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}_+ car les fonctions f et exponentielles le sont.

$$\text{Alors } g'(t) = f'(t)e^t + f(t)e^t = (f'(t) + f(t))e^t$$

Puisque f est solution de (E) sur \mathbb{R}_+ : $g'(t) = a$. D'où $g(t) = at + b$.

Conclusion : La fonction g est bien affine sur \mathbb{R}_+ .

2) Exprimons $f(t)$ en fonction de t et de a .

$$\text{On sait que : } g(t) = f(t)e^t \Rightarrow f(t) = \frac{g(t)}{e^t} = g(t)e^{-t}$$

Or à l'instant $t = 0$, l'alcool n'est pas encore dans le sang, donc $f(0) = 0$

$$\Rightarrow be^{-t} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\text{D'où } f(t) = ate^{-t}.$$

3) Dans cette question, on pose que $a = 5$.

a-Etudions les variations de f et tracer sa courbe.

$$f(t) = ate^{-t}. \text{ Puis que } a = 5. \text{ Alors } f(t) = 5te^{-t} \text{ et } f'(t) = 5e^{-t}(1 - t)$$

$5e^{-t} > 0$. Alors le signe de $f'(t)$ dépend du signe de $1 - t$.

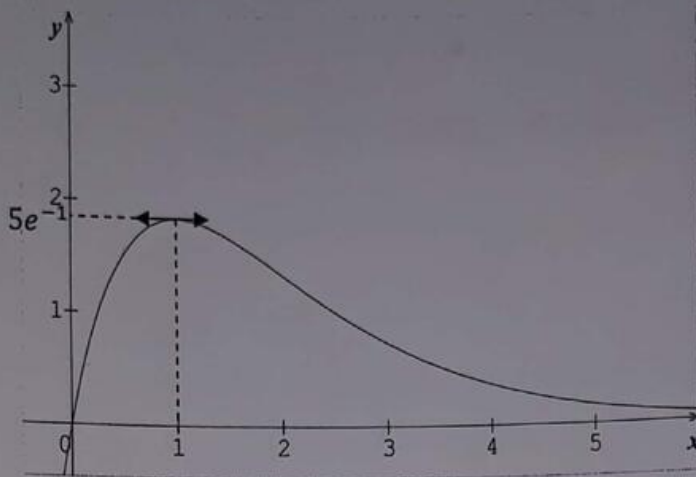
$$\text{Posons } 1 - t = 0 \Rightarrow t = 1$$

D'où le tableau de variation de $f(t)$ est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$5e^{-1}$	0

D'après le tableau :

$\forall x \in [0; 1]; f$ est croissante et $\forall x \in [1; +\infty[; f$ est décroissante.



b-Déterminons graphiquement le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

Graphiquement le taux d'alcoolémie maximal est donné par : $5e^{-1} \approx 1,83 \text{ gL}^{-1}$ et cette valeur est atteinte à l'instant $t = 1 \text{ min}$

c-Donnons une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5 \text{ en gL}^{-1}$.

La valeur du délai T au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à $0,5 \text{ en gL}^{-1}$ est obtenue en résolvant l'inéquation : $f(t) \leq 0,5$.

Résoudre algébrique l'inéquation : $f(t) \leq 0,5$ est pratiquement impossible, alors utilisons le théorème de la bijection sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Pour tout $t \in [1; +\infty[; f$ est définie, continue et strictement décroissante, donc réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[0; 5e^{-1}]$.

Alors il existe une unique solution α sur $[1; +\infty[$.

Déterminons ainsi un encadrement de α en utilisant le graphique.

Traçons maintenant la droite $y = 0,5$ qui coupe la courbe dans l'intervalle $[3; 4]$ (Voir figure)

D'où $\alpha \in [3; 4] \Leftrightarrow 3 < \alpha < 4$.

Il faut donc 4 heures (à l'heure près par excès) pour pouvoir, par exemple, reprendre le volant.

Bonne continuation avec le tome 3 !!!!!