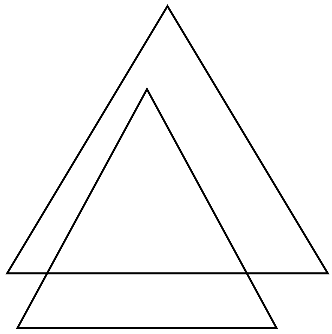
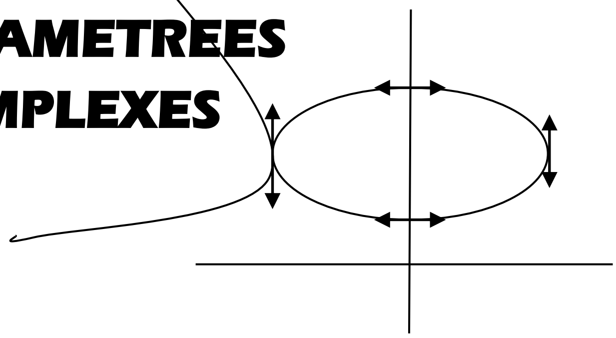
EXERCICES DE GEOMETRIE

TERMINALES C & E

$S_B = R(B,\pi) = h(B,-1)$ $\qquad h(A,k)oh\left(A,\frac{1}{K}\right) = A$



1- ANGLES ORIENTES
2- ISOMETRIES PLANES
3- SIMILITUDES PLANES
4- CONIQUES
5- GEOMETRIE DANS L'ESPACE
6- APPLICATIONS AFFINES
7- COURBES PARAMETREES
8- NOMBRES COMPLEXES



TOME 1 $\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}$; $f = aff(D;\Delta;k)$ **avec** $M' = proj_{D/\Delta}(M)$

$$sim\left(A,\frac{\pi}{4}\sqrt{2}\right) = R\left(A,\frac{\pi}{4}\right)oh(A,\sqrt{2}) \qquad S_BoS_A = t_{\overrightarrow{2AB}}$$

$$f = R_{(\theta,\Delta)}ot_{\vec{u}} = Viss(\vec{u},(\Delta),\theta)$$

OBJECTIF BAC SCIENTIFIQUE
La Vérité du Géant

Réalisé par l'inspecteur **LIPEDY JEAN CLAUDE**
Professeur certifier de l'enseignement secondaire

Tel : 065851804 /069283268/040903817

1. ANGLES ORIENTES

EXERCICE N°1

ABC est un triangle quelconque, (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC. M est un point de (C) distinct de A, B et C. On note A', B' et C' les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC), (CA) et (AB).

1. Faire la figure.
2. Démontrer que :
   a) (C'A', C'M) = (BC, BM) $[\pi]$
   b) (C'B', C'M) = (AC, AM) $[\pi]$
   c) (C'A', C'B') = (BC, BM) + (AM, AC) $[\pi]$
3. a) En déduire que les points A', B' et C'alignés.
   b) Comment appelle – t – on la droite (A'B'C') ?

EXERCICE N°2

Deux cercles (C) et (C') de rayons R et R' se coupent en deux points A et B. Soit M un point de (C) distinct A et B. La droite (AM) recoupe le cercle (C') en N. Les tangentes à (C) en M et à (C') en N se coupent en T.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que :
   a) (BM, BA) = (MT, MA) $[\pi]$
   b) (BN, BA) = (NT, NA) $[\pi]$
3) Démontrer que les points T, M, B et N sont sur un même cercle que l'on tracera.

EXERCICE N°3

Soit un triangle quelconque ABC et trois points A', B' et C' respectivement pris sur les cotés [BC], [CA] et [AB], distincts des sommets A, B et C.
Soit (C) le cercle circonscrit au triangle A'B'C et (C') le cercle circonscrit au triangle A'C'B. On note O l'autre point d'intersection de (C) et (C').

1. Faire la figure
2. Démontrer que :
3. (OB', OA') = (CA , CB)$[\pi]$
4. (OC', OA') = (BA , BC)$[\pi]$
5. En déduire que les points O, A, B' et C' sont cocycliques.

EXERCICE N°4

Deux cercles (C) et (C') de rayons respectifs R et R' se coupent en A et B. Soit C un point de (C) et D un point de (C') non situé sur la droite (AC). Une droite passant par B recoupe le cercle (C) en M et le cercle (C') en N. Les droites (CM) et (DN) se coupent en R.

1. Faire la figure.
2. Démontrer que les points A, C, R et D sont cocycliques.
3. La droite (AC) coupe le cercle (C') en P. Démontrer que les droites (CM) et (NP) sont parallèles

EXERCICE N°5.

Le plan P est orienté dans le sens direct. Soit le segment [BC] tel que BC = 6cm.

1. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan P tels que $(\overline{MB, MC}) = \frac{\pi}{3}[\pi]$
2. Soit A le point d'intersection de la médiatrice de [BC] et (Γ) de façon que le triangle ABC soit direct. Le point A' milieu de [BC] se projette orthogonalement en K sur (AB) et en H sur (AC).
   a) Justifier la nature du triangle ABC.
   b) Montrer que les points K, A', H et A sont cocycliques et tracer le cercle (C) qui les contient.
   c) Montrer que (KB, KH) = $\frac{2\pi}{3}$ $[\pi]$
   d) Montrer que les points B, K, H et C sont cocycliques et tracer le cercle (C') qui les contient.

3. La droite (A'K) coupe (Γ) en D et E de façon que le triangle BKD soit direct. On désigne par F le milieu de [AE].

   a. Montrer que le triangle KFA est isocèle en F.
   b. En déduire que (KF, KA) = (DB, DE) $[\pi]$

c. Montrer que les droites (KF) et (DB) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°6

On considère deux droites (D) et (D') sécantes en E. Soit A et B deux points distincts de (D) tel que A$\in [EB]$, A' et B' deux points distincts de (D') tel que B'$\in [EA']$. R est un point du segment [BA'] tel que le cercle circonscrit au triangle ABR et le cercle circonscrit au triangle A'B'R se coupent en S.

1) Faire la figure.
2) Montrer que les points A, B', S et E sont cocycliques.

EXERCICE N°7

Soit ABC un triangle quelconque direct, D est un point segment [AB] et E un point du segment [AC]. M est un point du cercle circonscrit au triangle ABC. Les cercles circonscrits aux triangles BDM et CEM se coupent en P.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que : (MB, MC) = (AB, DF) + (EP, AC) $[\pi]$
3) En déduire que les points D, E et P sont alignés.

EXERCICE N°8

ABCD est un rectangle direct du plan orienté et P un point du segment [AC] . La perpendiculaire à (AC) passant par P coupe (DC) en T, la droite (AB) en Q et la droite (AD) en S.

1) Démontrer que les droites (AT) et (SC) sont perpendiculaires.
2) En déduire que les points T, P, C et I sont cocycliques où I est le point d'intersection des droites (AT) et (SC).

EXERCICE N°9

Dans le plan orienté on considère deux points A et B tels que AB = 4cm et on désigne par (ɽ) l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Construire (ɽ)
2) a) Construire le point C appartenant à (ɽ) tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

   b) Quelle est la nature du triangle ?
3) On désigne par M et N les images respectifs de B et C par les symétries d'axes (AC) et (AB). Démontrer que les points A, M et N sont alignés.
4) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC]. Soit O l'orthocentre du triangle ABC et H son image par la symétrie d'axe (BC). Démontrer que H appartient à (ɽ).

EXERCICE N°10

Soit (C) et (C') deux cercles de rayons R et R' (R< R'), de centres respectifs O et O', tangents en E. Une droite (Δ) passant par E recoupe (C) en A et (C') en A'. Soit (D) et (D') deux droites passant respectivement par A et A', sécantes en F et recoupant respectivement (C) et (C') en B et B'.

1) Faire la figure.
2) Donner la nature des triangles OAE et O'A'E.
3) Comparer les mesures des angles suivants :
   a) (AO, AA') et (EA, EO)
   b) (A'A, A'O) et (EO', EA')
   c) (BF, BE) et (OA, OE)
   d) (OA, OE) et (O'A', O'E)
4) Démontrer que les droites (OA) et (O'A') sont parallèles.
5) On admet que (B'A', B'E) $= \frac{1}{2}(O'A', O'E)[\pi]$

   En déduire que les points B', B, E et F sont cocycliques. Tracer le cercle (C'') qui les contient.

EXERCICE N°11

Deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O', de rayons R et R'(R>R') sont sécants en A et B.

Soit M un point de (C) tel que la droite (MA) recoupe (C') en C et la droite (BM) recoupe (C') en D. Soit (MT) la tangente à (C) en M.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que :
   a) Les droites (OO') et (AB) sont perpendiculaires.
   b) Les droites (DC) et (MT) sont parallèles.
3) En déduire que les droites (MO) et (DC) sont perpendiculaire.
4) Démontrer que $(AD, AC) = (AO', AO)[\pi]$

EXERCICE N°12

Deux cercles (C) et (C') de diamètres respectifs MB = 6cm et NB = 4cm se recoupent en A. Les points M, B et N ne sont pas alignés. Les tangentes à (C) en M et à (C') en N se coupent en C. Soit I un extérieure (C) distinct de C. La droite (MI) recoupe le cercle (C) en D, la droite (BI) recoupe le cercle (C) en S. Les droites (DB) et (MS) se coupent en E.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que les points I, D, E et S sont cocycliques. Tracer le cercle (Γ) qui les contient.
3) Démontrer que les points B, M, C et N sont cocycliques. Tracer le cercle (Γ') qui les contient.
4) Démontrer que les droites (IE) et (BC) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°13

Soit ABC un triangle quelconque, (C) son cercle circonscrit et H son orthocentre. Démontrer que les symétriques de H par rapport à (AB), (AC) et (BC) appartiennent respectivement à (C).

EXERCICE N°14

A, B, C et D sont quatre points cocycliques tels que (AB) et (CD) soient perpendiculaires. On appelle O l'intersection de la droite (AB) et la droite (CD) et O' le milieu du segment [AD]. Montrer que les droites (OO') et (CD) sont perpendiculaires.

EXERCICE N°15

(C) est un cercle de centre O et rayon 5cm. [AA'] et [EF] sont deux diamètres orthogonaux du cercle (C) de façon que le triangle AEF soit direct. Soit B le milieu du segment [OF]. La droite (AB) recoupe le cercle (C) en C. Les tangentes à (C) en A et en C se coupent en D.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que :
   a) $(OC, OA) = 2(BA, BO)\ [\pi]$
   b) $(CA, CE) = (CF, CA)\ [\pi]$
      Que peut- on en déduire pour la demi – droite [CA) ?
   c) Le triangle CDA est isocèle en D.
   d) Les points D, A, O et C sont cocycliques. Tracer le cercle (C') qui les contient.
3) La perpendiculaire à(EC) passant par A recoupe (C) en H. Démontrer que les droites (EC) et (AA') sont parallèles.

EXERCICE N°16

Dans le plan P on considère un triangle ABC isocèle en A, de sens direct. A' et B' sont les milieux respectifs des segments [BC] et [AC]. Les droites (BB') et (AA') se coupent en D. Les cercles circonscrits aux triangles ADB' et BAD se coupent en E.

1) Faire la figure.
2) Démontrer que les points A', C, A et E sont cocycliques.
3) On note (C) le cercle circonscrit au triangle BAD. La droite (AE) recoupe (C) en F.
   Démontrer que les droites (EF) et (AC) sont parallèles.

EXECERCICE N°17

Dans le plan orienté, on considère un triangle quelconque ABC. Le cercle (C) de diamètre [BC] coupe les droites (AB) et (AC) en P et Q respectivement. Les droites (PC) et (BQ) se coupent en D.

1) Faire la figure.
2) Montrer que les points A, P, D et Q sont cocycliques.
3) Montrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
4) La tangente à (C) en B et la tangente à (C) en P se coupent en E.
   a) Montrer que le triangle EBP est isocèle en E.
   b) Démontrer que : (AP, AD) = (PE, PB) $[\pi]$
5) On désigne par H le symétrique de Q par rapport à la droite (BC).
   Montrer que H appartient au cercle (C).

EXERCICE N°18

Dans le plan orienté P, soit ABC nu triangle équilatéral direct de centre de gravité O. On note (Γ) son cercle circonscrit. La parallèle à (AC) menée par O coupe (AB) en I. La droite (BO) recoupe (Γ) en J.

1. a) Exprimer (AI, AJ) en fonction de (OB, OJ), puis trouver une valeur de (AI, AJ).
   b) Prouver que les points A, I, O, J sont cocycliques.
2. a) Prouver que le triangle OJA est équilatéral.
   b) Prouver que [IJ] est un diamètre du cercle (Γ’) passant par A, I, O, J.
   c) En déduire que le centre O’ de (Γ’) est le point de rencontre de (IJ) et (AC), puis tracer (Γ’).

Inspecteur Jean Claude LIPEDY, Chef de Département Mathématiques.
SIDETPFQE de Pointe-Noire

EXERCICE N°19

Le plan P est muni d’un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Placer dans le repère les points A(-3 ; -1), B(-2 ; 4), C(3 ; -1) et H(-2 ; 0).
  b) Montrer que V(0 ; 1) est le centre du cercle (C) circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon de (C).
  c) Calculer une mesure de l’angle $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB})$. En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

2) On n’admet que H est l’orthocentre du triangle ABC.
  a) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC. Placer le point G sur la figure.
  b) Montrer que les points V, G et H sont alignés.
  c) Comment appelle – t – on la droite (VGH) ?
  d) Déterminer les coordonnées de A’ milieu de [BC] et de K milieu de [AH].
  e) Déterminer la nature du quadrilatère KHA’V.

EXERCICE N°20

Le plan P est orienté. On considère les embles (C) et (Γ) tels que : $(C) = \left\{M \in P ; \frac{MA}{MB} = 4\right\}$ et

$(\Gamma) = \left\{M \in P ; (\overrightarrow{MA} ; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]\right\}$

Construire le point G tel que (C) ∩ (Γ) = $\{G\}$; On donne : AB = 6cm.

2. ISOMETRIES PLANES

EXERCICR N°1

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O, (C) le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite (BO) recoupe (C) en D et la droite (AO) recoupe (C) en E.

1) Faire la figure.
2) Caractériser les applications suivantes :

$f_1 = S_{DE} o\, S_{BA}$; $f_2 = S_{BA} o\, S_{BE} o\, S_{DA} o\, S_{DE}$; $f_3 = S_{AC} o\, S_{AB} o\, S_{AE} o\, S_{AC}$; $f_4 = S_{BD} o\, S_{BA} o\, S_{AC} o\, S_{AE}$

EXERCICE N°2

Dans le plan orienté on considère le carré direct ABCD centré en O. J et I sont les milieux respectifs des segments [AD] et [DC]. On défini les applications suivantes :

$f_1 = R_{(O,\frac{\pi}{2})} o\, t_{\overrightarrow{BC}}$; $f_2 = t_{\overrightarrow{BC}}\, o\, R_{(O,\frac{\pi}{2})}$; $f_3 = R_{(A,\frac{\pi}{2})}\, o\, R_{(O,\frac{\pi}{2})}$; $f_4 = R_{(D,\frac{\pi}{2})} o\, R_{(O,-\frac{\pi}{2})}$

$f_5 = S_{AD} o\, R_{(O,\frac{\pi}{2})}\, t_{\overrightarrow{OB}}$; $f_6 = S_{BD} o\, t_{\overrightarrow{BA}}$; $f_7 = S_{AD} o\, R_{(O,\frac{\pi}{2})}$.

1) Trouver $f_1(B)$ et $f_2(A)$
2) Caractériser f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 , f_7

Inspecteur Jean Claude LIPEDY, Chef de département Mathématiques.
SIDETPFQE de Pointe-Noire

EXERCICE N°3

Soit ABC un triangle équilatéral direct centré en O et (C) son cercle circonscrit. Soit (D) la parallèle à (AO) passant par B.

1) Faire la figure
2) Caractériser les applications suivantes :
   $f_1 = t_{\overrightarrow{CB}} o\, R_{(O,\frac{2\pi}{3})}$; $f_2 = R_{(A,\frac{\pi}{3})} o\, R_{(C,-\frac{\pi}{3})}$
3) On pose $g = R_{(C,-\frac{\pi}{3})} o\, R_{(O,\frac{2\pi}{3})}$
   a) Determiner g(A)
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
   c) Construire le cercle (C’) image de (C) par g.
   d) Soit K un point de (C) situé sur l’arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A et K’= g(K). Montrer que les points K, C et K’ sont alignés.
   e) P est le symétrique de C par rapport à K. quelle est l’image P’ de P par g ?
   f) On rapporte le plan à un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, *avec* $\vec{\imath} = \overrightarrow{OA}$
   Ecrire l’expression analytique de g dans ce repère.

EXERCICE N°4

Dans le plan le plan orienté P on considère un carré ABCD centré en O tel que (AB, AD) $= \frac{\pi}{2}\, [2\pi]$. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [DC], [AD], [AB] et [BC].

1) Caractériser les transformations suivantes :
   $f_1 = t_{BA}\, o\, S_{BD}$; $f_2 = S_{AC} o\, t_{IJ}$; $f_3 = S_{AC} o\, t_{CD}$
2) On considère les transformations ponctuelles f_4 *et* f_5 définies par :
   $f_4 = R_{(O,\frac{\pi}{2})} o\, S_{AC}$; $f_5 = R_{(O,\frac{\pi}{2})} o\, S_{AD}$
   a) Caractériser f_4.
   b) Déterminer deux droites (D) et (D’) telles que $R_{(O,\frac{\pi}{2})} = S_D\, o\, S_{D'}$ avec (D’) parallèle à (AD). Caractériser f_5.

EXERCICE N°5

Dans le plan orienté P, on considère un triangle équilatéral ABC centré en O.A’, B’, C’ sont les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].Caractériser les transformations ponctuelles suivantes :

$f_1 = S_{BB'} o\, t_{AB}$; $f_2 = R_{(O,\frac{\pi}{3})} o\, S_{AA'}$; $f_3 = t_{CC'}\, o\, S_{AB}$; $f_4 = R_{(O,\frac{\pi}{3})} o\, S_{AC}$

EXERCICE N°6

On considère dans le plan orienté P un triangle équilatéral direct ABC inscrit dans un cercle (C). Le point A' milieu du segment [BC] se projette orthogonalement en K sur la droite (AB) et en H sur la droite (AC).

1.a) Donner une mesure de l'angle (KB, KH)

b) Démontrer que les points B, K, H et C sont cocycliques puis tracer (C') le cercle qui les contient.

2.a) Démontrer qu'il existe une rotation R qui transforme B en C et K en H. Donner une mesure θ de l'angle de cette rotation.

b) Construire le centre ω de la rotation R.

3) Soit f l'application définie par : $f = R_{(A,\frac{\pi}{3})} o\ t_{CB}$

a) Déterminer f(C)

b) Caractériser f.

c) Soit M un point du plan P et M' son image par $R_{(A,\frac{\pi}{3})}$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que les point M, M' et soient alignés.

EXERCICE N°7

Dans le plan orienté P, on considère un triangle direct ABC. On considère les triangles équilatéraux A'BC, B'AC et C'BA tels que les angles $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{A'B})$, $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C})$ et $(\overrightarrow{C'B}, \overrightarrow{C'A})$ admettent pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

Soient F, G et H les centres respectifs des triangles A'BC, B'AC et C'BA.

1) Faire la figure
2) Soit f la transformation définie par : $f = R_{(F,\frac{2\pi}{3})}\ o\ R_{(G,\frac{2\pi}{3})}\ o\ R_{(H,\frac{2\pi}{3})}$
   a) Déterminer f(B)
   b) Déterminer les droites (Δ) et (Δ') telles que : $R_{(G,\frac{2\pi}{3})} = S_\Delta\ o\ S_{GH}$ et $R_{(H,\frac{2\pi}{3})} = S_{GH}\ o\ S_{\Delta'}$
   c) Caractériser la transformation g définie par : $g = R_{(G,\frac{2\pi}{3})}\ o\ R_{(H,\frac{2\pi}{3})}$.

EXERCICE N°8

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB iso- rectangle en O. On note R_A = rot(A, $\frac{\pi}{2}$), R_B = rot(B,$\frac{\pi}{2}$) et S_O , la symétrie de centre O. Soit C un point sur la droite (AB), BEDC et ACFG deux carrés directs.

1) Faire la figure.

2.a) Caractériser la composée $S_{AO}\ o\ S_{AB}$

b) Soit $f = R_A\ o\ R_B$, montrer que $f = S_O$

3.a) Déterminer f(E)

b) En déduire que O est le milieu du segment [EG].

c) On note R_F = rot (F,$\frac{\pi}{2}$) et R_D = rot (D,$\frac{\pi}{2}$). Déterminer g(C), puis caractériser g.

d) Placer le point H = S_O(D). Démontrer que R_F (H) = D.

e) Démontrer que le triangle FOD est iso-rectangle en O.

EXERCICE N°9

On considère un carré ABCD centré en O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [DC], et [AD]

1) Soit g l'application définie par : $g = R_{(A,\frac{\pi}{2})} o\ S_{AB}$. Caractériser l'application g.
2) Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OL})$. Soit f l'application de P dans P définie par :

   $$\begin{cases} X' = -Y \\ Y' = X - 2 \end{cases}$$

   a) Montrer que f est une isométrie.
   b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   c) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
   d) Caractériser l'application ρ définie par : ρ = fog.
3) On considère l'application h définie par : $h = \rho o t_{KI}$
   a) Qu'appelle – t- on symétrie glissée ?
   b) Montrer que h est une symétrie glissée.

c) Ecrire son expression analytique puis son expression complexe.

EXERCICE N°10

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ et $(AB, AD) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et K le symétrique de I par rapport à la droite (DC).

1) On pose f = $S_{(IC)}\ o\ t_{\overrightarrow{AB}}\ o\ S_{(IJ)}$
   a) Caractériser l'application $S_{(BC)}\ o\ S_{(IJ)}$.
   b) En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera.
2) On pose g = $t_{\overrightarrow{IK}}\ o\ s_{(IC)}$
   a) Caractériser l'application h = go$s_{(AJ)}$.
   b) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
3) Soit φ une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme (AB) en (IJ).
   a) Montrer que φ fixe le point I
   b) Déterminer alors toutes les isométries φ.

EXERCICE N°11

Dans le plan orienté on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. Soit I le milieu du segment [BC]. On note R_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. On rapporte le plan au repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)
   a) Donner l'écriture complexe des transformations R_B, R_C et T.
   b) Donner l'écriture complexe de la transformation S = $R_C o T o R_B$
   c) Caractériser S
2. a) Déterminer sans calcul, la nature de S
   b) Préciser l'image de B par S
   c) Caractériser S

EXERCICE N°12

ABCD est un carré de sens direct ; D_1 la médiatrice du segment [AD] ; D_2 celle du segment [AB]. D_1 et D_2 se coupent en D. D_1 coupe [AD] en E et D_2 coupe [AB] en F.

1) Déterminer l'ensemble (Γ) des déplacements qui laissent invariant le carré ABCD.
2) Déterminer l'ensemble (∏) des antidéplacements qui laissent invariant le carré ABCD.
3) Reconnaitre et caractériser l'application f = $S_{AB} o R\left(B; \frac{\pi}{2}\right) o t_{\overrightarrow{EF}}$.

EXERCICE N°13

Soit le repère ortho normal direct (O ; u, v) du plan complexe. Les points A, B, C sont définis par leurs affixes respectives : $z_A = 3 - i\sqrt{3}$; $Z_B = 3 + i\sqrt{3}$; $Z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

1) Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. On placera l'origine sur la gauche de la feuille.
2) Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe Z_G de G.
   Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].
3) Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que Z'= aZ + b
a) Déterminer a et b pour que R(O) = G et R(A) = C.
b) Prouver que R est une rotation dont on déterminer le centre et l'angle
c) Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?
d) Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.
4) Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = a'\bar{Z} + b'$
a) Déterminer a' et b' pour que f(O)=G et f(A)=C.

b) Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer f(I).
f est-elle une réflexion ?

c) Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

EXERCICE N°14

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de sens direct centré en O. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [CD],[AD],[AB] et [BC].

1) Déterminer les droites (D_1) et (D_2) telles que $R_{(O,\frac{\pi}{2})} = S_{D_1} \text{o}\, S_{D_2}$ où (D_2) est parallèle à (BC).

2) On pose f= $R_{(O,\frac{\pi}{2})} o S_{(BC)}$.

a) Montrer que f= $S_{(OB)} o t_{\overrightarrow{BA}}$

b) Caractériser f

c) Placer les points B', O' et I' images des points B, O et I par f.

Inspecteur Jean Claude LIPEDY chef de département Mathématiques (S.I.D.E.T.P.F.Q.E)

EXERCICE N°15

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{U},\vec{V})$. Unité graphique est 4cm.

Partie A

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectifs : $Z_I = 1$, $Z_J =$ i, $Z_H = 1 +$ i, $Z_A = 2$, $Z_B = \frac{3}{2} +$ i
$Z_C = 2$i et $Z_D = -1$.
2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F. Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe : $Z_F = -1 + \frac{1}{2}$ i.
3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie B

On considère la transformation f du plan d'écriture complexe : $Z' = -i\bar{Z} + 2i$

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.
2. a. Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?
b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?
3. Soit T la translation de vecteur IJ. Donner l'écriture complexe de T et celle de sa réciproque T^{-1}.
4. On pose S= foT^{-1}
. a. Montrer que l'écriture complexe de S est : $Z' = -i\bar{Z} + 1 + i$
b. Montrer que I et J sont invariants par S. En déduire la nature de S.
c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

EXERCICE N°16

Dans le plan orienté, on considère un triangle iso-rectangle direct ABC. Soit I, J, K les milieux respectifs de [BC] ;[CA] et [AB]. On note : R= r (I ;$\frac{\pi}{2}$) et $T = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}}$

On pose : f= RoT et g= ToR.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.
b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g.
2. a. Déterminer la nature de la transformation gof^{-1}.
b. Chercher l'image de A par gof^{-1} et caractériser cette application.
c. Soit M un point quelconque du plan. M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g.
Quelle est la nature du quadrilatère ACM_2M_1 ?

EXERCICE N°17

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j), on considère l'application f qui à tout point M(x ,y) associe le point M'(x',y') tel que :

$$\begin{cases} X' = \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y + 3 \\ Y' = \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Trouver la nature et les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE N°18

ABC est un triangle de sens direct. Les points P et Q sont tels que les triangles PAC et QAB sont extérieures à ABC, iso-rectangle respectivement en P et Q. Soit R_P et R_Q les quarts de tours directs de centres respectifs P et Q.

1. Démontrer que $R_P o R_Q = S_I$ où I est le milieu de [BC].
2. En déduire que IPQ est un triangle iso-rectangle en I.

EXERCICE N°19

Dans le plan orienté P, on considère le cercle (C) de centre O, A et B deux points de (C) tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \pi[2\pi]$. E est le point de (C) tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 35° [360°]$.
La demi-droite [OG) où G est le milieu du segment [AE] coupe le cercle (C) en un point C.
Les droites (AE) et (BC) se coupent en un point D.

1. Démontrer que les points D, E, F et C sont cocycliques, avec $\{F\} = (AC) \cap (BE)$.
2. a) Démontrer que le triangle ABF est isocèle en B.
   b) En déduire qu'il existe une rotation R de centre B qui transforme F en A.
3. a) Démontrer que $S_{BF} o S_{OC}$ est une translation T.
   b) Démontrer que le vecteur de T est $\overrightarrow{AE}$.
4. a) Déterminer le centre Ω et l'angle θ de la rotation g = RoT.
   b) Démontrer que la droite (FD) est une hauteur du triangle ABF.

EXERCICE N°20

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe (D) d'équation : $ax + by + c = 0$
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h = S_{(D)} o S_O$ où (D) est la droite d'équation : $x = 1$

3. SIMILITUDES PLANES.

EXERCICE N°1

On considère un carré ABCD tel que (AB, AD) $= \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On désigne par E et F les milieux respectifs des segments [AC] et [CD].

1. Faire la figure.
2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude plane directe S telle que S(A) = E et S(C) = F.
3. Construire le centre Ω de S.

EXERCICE N°2

Soit ABC un triangle iso-rectangle en A. A' est l'image de A par l'homothétie de centre C et de rapport -1, I est le milieu du segment [BA'].

1. Faire la figure.
2. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f transformant A' en C et C en B.
3. Soit O le centre de f. Montrer que O = S_I(A).
4. Trouver l'image de la droite (AC) par f.
5. Montrer que le triangle BOC est iso-rectangle en C.
6. Trouver la nature de l'application g = fofofof=f^4.

EXERCICE N°3

Dans le plan orienté, on considère un rectangle OBCA tel que : OB = $\sqrt{2}$; OA = 1 et $(\vec{OB}, \vec{OA})$ $= \frac{\pi}{2} [2\pi]$, I milieu de [OB] et K celui de [BC]. On désigne par S la similitude plane directe de centre Ω tel que : S(O) = B et S(A) = I.

1. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. Démontrer que S(B) = C et S(I) = k.
3. On pose g = SoS.
   a. Démontrer que g est une homothétie de rapport -$\frac{1}{2}$.
   b. Calculer g(O) et g(A). En déduire une construction de Ω.
4. On considère un repère $(O ; \vec{U}, \vec{V})$ tel que : B ait affixe $\sqrt{2}$ et A ait pour affixe i.
   a. Donner l'écriture complexe de S.
   b. En déduire l'affixe de Ω.

EXERCICE N°4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{U}, \vec{V})$.On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : Z_A= 1 – i ; Z_B= 3 – 2i ; Z_C= -1 + 2i ; Z_D= -3 + 6i.

1. Citer les éléments caractéristiques d'une similitude plane indirecte.
2. Soit l'application f définie par : Z' =aZ + b. Déterminer les réels a et b sachant que f(A) = C et f(B) = D.
3. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'application f.

EXERCICE N°5

Dans le orienté P rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'application f définie analytiquement par :

$$\begin{cases} X' = X + Y + 1 \\ Y' = X - Y + 2 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est une similitude plane.
2. Démontrer que f est une similitude plane indirecte.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
4. Déterminer sa deuxième droite globalement invariante.
5. On considère le cercle (C) d'équation $x^2 + y^2 = 1$.
   a. Déterminer l'équation de (C') = f(C).
   b. Reconnaitre et caractériser (C').

EXERCICE N°6

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. La hauteur issue du point C coupe (BA) en H et coupe la parallèle à (BC) menée par A en D. On pose CA=b et BC=a.

1. Soit S la similitude plane directe qui transforme C en A et B en C.
   a. Déterminer son rapport en fonction de a et b puis préciser son angle.
   b. Démontrer que le point H est le centre de la similitude S.
2. En utilisant S démontrer l'égalité HC^2= HA x HB.
3. Soit I le milieu de [BC], J celui de [CA] et K celui de [AB]. Démontrer le triangle IJK est rectangle en J et que H est le pied de la hauteur issue de J.

EXERCICE N°7

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et AB = 2AC.

Soit (D) et (D') deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des cotés du triangle ABC .Soit (Δ) la droite passant par A et perpendiculaire à (D) et (D'). La droite (Δ) coupe les droites (D) et (D') respectivement en I et J.

1. Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et C en A.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de S.
   b. Soit Ω le centre de S. Monter que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).
2. a. Déterminer S(D') et S(Δ).
   b. En déduire S(J).
   c. Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω.

EXERCICE N°8

ABCD est un carré direct de centre I. On désigne par J le milieu de [AI] et S la similitude plane directe qui transforme A en I et B en J.

1. Déterminer l'angle et le rapport de S.
2. Construire les images de C et D par S.
3. Démontrer que le centre Ω de S appartient au cercle de diamètre [AD] et au cercle circonscrit au triangle ABJ puis construire Ω.

EXERCICE N°9

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$; AB = 3 et BC = 4.

Soit I le milieu de [BC], on suppose qu'il existe une similitude S transformant A en I et B en C.

1. Déterminer l'angle et le rapport de S.
2. Donner une construction géométrique du centre Ω de S.

EXERCICE N°10

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que : AB = AC = 2cm ; $(\overrightarrow{AB}, AC) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

I est le point tel que le triangle CIA isocèle avec (CA, CI) = $-\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

1. On pose f = $R_{(C,-\frac{\pi}{2})} o R_{(A,\frac{\pi}{4})}$
   a. Déterminer f(A) et f(B).
   b. Démontrer que f est une rotation dont on déterminera l'angle et le centre. Construire ce centre.
2. Soit S la similitude plane directe telle que : S(A) = A et S(C) = I. Caractériser S.
3. On considère la suite des points M définie par : M_0 = C et M_{n+1}= S(M_n).
   a. Construire les points M_1, M_2, M_3 et M_4.
   b. Calculer la somme : $d_n = {M_1M_0}^2 + {M_2M_1}^2 + ...+ {M_nM_{n-1}}^2$ en fonction de AC.
   c. En déduire la convergence de la suite (d_n).

EXERCICE N°11

Dans le plan orienté, on considère le triangle équilatéral direct ABC. Soit R la rotation de centre B qui transforme C en A et T la translation de vecteur BC. On désigne par (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et A', B', C' les milieux respectifs des cotés [BC], [AC], [AB].

1. a .Déterminer les droites (D_1), (D_2) et (D_3) telles que : T = $S_{D_1} o S_{D_2}$ et R = $S_{D_2} o S_{D_3}$
   b .Reconnaitre et caractériser l'application f = ToR.
2. Soit O le centre de gravité du triangle ABC. La bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO})$ coupe les droites (AO) et (D_2) respectivement en O' et I. D est le symétrique de B par rapport à O'.
   a. Montrer que les points B, C, D, I sont cocycliques. On notera (C') le cercle passant par B, C, D, I.
   b. Soit S la similitude plane directe de centre C qui transformation (C) en (C').
      Caractériser S.
   c. Pour tout point M de (C), on note (C') = S(C). Montrer que les points M, M' et B sont alignés.
3. On définit le point F par AF = AC et $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6}[2\pi]$.
   a. Donner la nature exacte du triangle FAC.
   b. Montrer qu'il existe une similitude plane directe S' de centre F transformant C en A. Déterminer le rapport et l'angle de S'.

EXERCICE N°12

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{U}, \vec{V})$. On considère les points A, B, C, D d'affixes respectives : $Z_A = 1$; $Z_B = -1 + i$; $Z_C = 2 + i$; $Z_D = 1 + 3i$.
Soit f la similitude plane indirecte qui transforme A en B et C en D.

1. Donner l'écriture complexe de f.
2. Donner les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE N°13

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O ; \vec{U}, \vec{V})$. L'unité graphique est 4cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $Z_A = 1$; $Z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $Z_C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
$Z_D = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$

1. a). Donner la forme exponentielle de Z_C et la forme algébrique de Z_D.
   b).Placer les points A, B, C et D.
   c). Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.
3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude plane directe S de centre O qui transforme A en C.
4. On note E et G les images par S des points D et C respectivement. Montrer que les points E, C et G sont alignés.
5. Déterminer l'affixe du point E.
6. On considère la transformation f qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \bar{Z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   a). Soit R la transformation qui, à tout point M_1, d'affixe Z_1 associe le point M' d'affixe Z_1' telle que : $Z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} Z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R.
   b). Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$, puis déterminer la droite (Δ) telle que : R= $S_\Delta o S_{AO}$.
   c). Montrer que f = RoS_{AO}. En déduire la nature de f.

EXERCICE N°14

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; U, V), unité graphique 2cm.
On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives : $1 + i$; 1 ; 3 et $2 + \frac{1}{2}i$.

Partie A

1. Soit (C) le cercle de centre Ω passant par A.
   a. Montrer que (C) passe par C et D.
   b. Montrer que le segment [AD] est un diamètre de (C)
   c. Faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer (C). On note B la seconde intersection de (C) avec la droite (OA).
   d. Montrer que le point O est extérieur au segment [AB].
2. Montrer que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.
3. Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.
   a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.
   b. Quel est centre de S ?

Partie B

1. a. Déduire de la partie **A.2.** que l'on a OA x OB = OC x OD.
   b).En déduire le module de l'affixe Z_B du point B. Déterminer un argument de Z_B.
2. Déterminer l'écriture complexe de S.
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de SoS.

EXERCICE N°15

On un triangle ABC tel que AB = 2 ; AC = $1 + \sqrt{3}$ et (AB, AC) = $\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1. a). Démontrer qu'il existe une unique similitude S qui transforme A en C et B en A.
   b).Déterminer le rapport K et l'angle θ de S.
2. On note I le centre de S.
   a) Démontrer que I appartient au cercle de diamètre [AB].
   b) Démontrer I appartient à la droite (BC).
   c) Construire le point I.
3. On pose O= S(C).
   a) Démontrer que les points A, I et O sont alignés.
   b) Démontrer que les droites (OC) et (AB) sont parallèles.
   c) Construire le point O.
   d) Calculer OC.

EXERCICE N°16

Dans le plan orienté, on considère le cercle (C) de centre Ω et de diamètre [BI]. Soit A et O deux points de (C) tels que : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

1) Faire la figure.
2) S est la similitude plane directe qui laisse invariant le point I et qui transforme A en B.
   a) Trouver l'angle de S.
   b) Quelle est la nature du triangle IAB ? En déduire le rapport de la similitude S.
3) Construire le point G tel que : $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
4) La droite (IG) recoupe le cercle (C) en K. Soit S' la similitude plane directe de centre K et qui transforme A en B. Déterminer l'angle de la similitude S'.
5) On veut trouver le rapport de S'.
   a) Montrer que : $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}$
   b) Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BK), exprimer KH en fonction de KB.
   c) En déduire que : KA.KB = $-\frac{1}{2}KB^2$
   d) Déterminer le rapport de S'.

Inspecteur LIPEDY Jean Claude Chef de département mathématiques

EXERCICE N°17

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O ; U, V) et on considère les points A (-2 ; 0), B (0 ; 2), C (2 ; 0) et D (0 ; -2). Soit f l'application ponctuelle définie par :

$$\begin{cases} X' = 2Y - 4 \\ Y' = 2X + 2 \end{cases}$$

1) Déterminer l'homothétie h telle que : f = Soh où S est la symétrie orthogonale d'axe (AB). On précisera le centre et le rapport de h.
2) En déduire que f est une similitude indirecte dont on précisera les éléments caractéristiques.
3) Déterminer et construire les images par f des points A, B, C et D.
4) Soit A_1 = f(A), A_2 = f (A_1), …. , A_n = f (A_{n-1}).
   On appelle Z_1 , Z_2,……, Z_n les affixes des points A_1, A_2 , ……., A_n.
   a) Montrer que les points sont A_1, A_2,…. A_n sont alignés.
   b) Déterminer une relation entre Z_n et Z_{n-1}.
5) Soit la suite complexe (t_n) définie par : $t_n = Z_n$ - 2i.
   Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 2t_n$.

EXERCICE N°18

Soit α un réel appartenant à l'intervalle] 0, $\frac{\pi}{2}$[. Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la transformation f de (P) qui à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : Z' = (1 + i tanα)Z + tanα.

1) Montrer que f est une similitude plane directe dont on précisera le centre, l'angle et le rapport.
2) On pose $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
   a) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que |Z'| = 2.
   b) Déterminer l'intersection de (Γ) avec le droite (Δ) d'équation X= 1.

EXERCICE N°19

Soit (O ; i, j) un repère orthonormal du plan, A_o le point d'affixe 6 et S la similitude de centre O de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On pose A_{n+1} = S (A_n) pour n = 0, 1, 2, …, 11.

1) Déterminer en fonction de n l'affixe du point A_n et vérifier que A_{12} appartient à la demi – droite (O ; i).
2) Montrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}. Représenter les points A_o, A_1,…, A_{12}.
3) Calculer la longueur du segment [A_oA_1]. En déduire la longueur L de la ligne polygonale $A_oA_1A_2…A_{12}$.

EXERCICE N°20

Soit deux cercles (C) et (C') de rayons distincts, de centres O et O' respectivement sécants en Ω et B. On considère la similitude plane directe S de centre Ω qui transforme (C) en (C').

1) Caractériser S.
2) On note I le projeté orthogonal de Ω sur la droite (OO'). Montrer que I est milieu de [ΩB].
3) Soit M un point de (C) et M' son image par S. Montrer que les points B, M et M' sont alignés.
4) Soit C un point du cercle (C) et D un point de (C ') non situé sur la droite (ΩC). Les droites (CM) et (DM') se coupent en P. Démontrer que les points Ω, C, D et P sont cocycliques.
5) On note Q le projeté orthogonal de Ω sur (MM'). Démontrer que le lieu géométriques décrit par Q quand M décrit (C) est un cercle de centre I que l'on tracera.
6) Soit H le symétrique de M par rapport à C. Placer le point H' = S(H).

Inspecteur Jean Claude LIPEDY Chef de département des mathématiques.

4. CONIQUES

EXERCICE N°1

1) Construire la parabole (P) de foyer F et de directrice (D) dans les cas suivants :
   a) F (1 ; 1), (D) : X = 4
   b) F (2 ; 3), (D) : Y = 1
   c) F (-2 ; 4), (D) : Y = X
2) Donner une équation cartésienne de (P) dans chaque cas.

EXERCICE N°2

1) Démontrer que les ensembles (P) ci-dessous sont des paraboles dont- on déterminera le sommet S, le paramètre p et la directrice (D) :
   a) (P_1) : 2Y = $-x^2$ + X – 2
   b) (P_2) : $(Y-3)^2$ = 4X + 6
   c) (P_3) : $-Y^2$ + 2X + 3Y +1 = 0
2) Trouver ces ensembles dans un repère orthonormé (O ; i, j).

EXERCICE N°3

Pour chacune des équations suivantes :

1) (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.
2) (E) : x^2+y^2 + 16x – 2y + 13 = 0.
3) (E) : $9x^2+4y^2$ - 18x + 16y – 11 = 0.

a) Reconnaitre (E).
b) Tracer (E) à partir de son centre Ω et ses sommets.
c) Déterminer sa demi-distance focale, ses foyers, son excentricité et ses directrices.

EXERCICE N°4

Le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j).

1) Construire la courbe (E) d'équation : $9x^2+16y^2=144$. On précisera sa nature, son centre et ses sommets.
2) Soit f la transformation plane définie par :
   $$\begin{cases} X' = X \\ Y' = \frac{4}{3}Y \end{cases}$$
   a) Déterminer l'équation cartésienne de (C) image de (E) par f.
   b) Reconnaitre et caractériser (C).
   c) Tracer (C) dans le même repère que (E).

EXERCICE N°5

1) Donner une équation cartésienne réduite de l'ellipse (E) de foyer F (0 ; 2), de directrice (D) : Y = 8 et d'excentricité e = 0,5.
2) Tracer (E).

EXERCICE N°6

Pour chacune des courbes (H) suivantes d'équations respectives :

a) $4x^2$- y^2 + 8x + 8 = 0
b) $16x^2$ - $9y^2$ - 64x – 54y – 161 = 0

1) Reconnaitre et tracer (H) à partir de son centre et ses sommets.
2) Déterminer respectivement sa demi distance, ses foyers, son excentricité, ses asymptotes et ses directrices.

EXERCICE N°7

Dans le plan (P), on considère le point F et la droite (Δ) telle que la distance de F à (Δ) vaut $\frac{1}{2}$.

1) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tel que 3MF – 2MH = 0 où H est le projeté orthogonal de M sur (Δ).
2) Déterminer les éléments caractéristiques de (E).

3) Déterminer l'équation cartésienne et paramétrique de (E).

Inspecteur Jean Claude LIPEDY, Chef de département des mathématiques
SIDETPFQE –Pointe-Noire

EXERCICE N°8

Soit le plan orienté P. On donne un segment [OC]. A est l'image de C par le quart de tour direct de centre O. B est le symétrique de C par rapport à O. I désigne le centre de gravité du triangle ABC.
On considère l'ellipse (E) de foyers B et C passant par A.

1) Construire les points de (E) situés sur les demi-droites [CI) et [BI).
2) Tracer (E).
3) Calculer l'excentricité e de (E).
4) Construire (E') l'image de (E) par la similitude plane directe S de centre C qui transforme A en O.
5) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé (O ; OC, OA).
   a) Ecrire l'équation cartésienne de (E).
   b) Ecrire l'équation cartésienne de (E').

EXRCICE N°9

Le plan euclidien (P) est rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j).
Soit f l'application ponctuelle qui, à tout point M(x, y) associe M'(x', y') tel que :

$$\begin{cases} X' = X - Y + 1 \\ Y' = X + Y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une similitude plane directe dont-on caractérisera.
2) Soit la courbe (C) d'équation : $x^2 + y^2$ - 2xy + x – 3y = 0.
   a) Déterminer une équation cartésienne de la courbe (C'), image de la courbe (C) par f.
   b) Reconnaitre la nature de la nature de courbe (C') et préciser ses éléments (sommets, foyers et directrices).
3) Déterminer la nature de la courbe (C), puis préciser ses éléments caractéristiques.
4) Construire (C) et (C'). Unité graphique : 2cm.

EXERCICE N°10

Dans un (P) rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j), on considère la courbe (Γ_m) d'équation :
$y^2 = \text{m}x^2$ – (m – 1) x – 3(2m + 1), où m désigne un nombre réel.

1) Vérifier que le point A (3 ; 0) appartient à (Γ_m), ∀ m réel.
2) Dans cette question on suppose m non nul.
   a) Montrer que la courbe (Γ_m) est une conique à centre, de centre $I_m(\frac{m-1}{2m}$; 0).
   b) Préciser suivant les valeurs de m la nature et les éléments caractéristiques (centre, sommets) de (Γ_m).
   c) Caractériser les courbes $(\Gamma_{-1}$) ; (Γ_1) et (Γ_2), puis tracer (Γ_{-1}) et (Γ_1) dans le repère.

EXERCICE N°11

Dans le plan orienté (P) on considère deux carrés directs ABCD et OEBH, de centres respectifs O et Ω où E est le milieu du segment [AB]. On désigne par I le milieu du segment [BH] et par (C), le cercle circonscrit au carré OEBH.

1) Faire la figure.
2) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe f, de centre A, qui transforme la droite (OE) en la droite en la droite (OD).
3) Soit g l'application définie par : g = $S_{\Omega E} o R_{(O;\frac{\pi}{2})}$
   a) Caractériser g.
   b) Soit (C '), l'image de (C) par g. Démontrer que (C ') est le translaté de (C), puis construire (C').
4) Soit J milieu du segment [EB] et S la similitude plane directe telle que : S(O) = E et S(Ω) = J. Caractériser S.
5) Soit L milieu du segment [AD] et (E) l'ellipse de foyer D et C passant par O.
   a) Placer les de (E) situés sur les droites (DH) et (CL).

b) Tracer (E), puis (E’) image de (E) par g.

Inspecteur Jean Claude LIPEDY Chef de département des mathématiques
SIDETPFQE-Pointe-Noire

EXERCICE N°12

Dans le plan orienté, on considère le rectangle ABCD tel que : $\overrightarrow{AB} = 4cm$, $\overrightarrow{AD} = 2cm$, I le centre de ABCD et J milieu du segment [CD]. Soit f l’application du plan qui à tout point M associe le point M’ tel que HM’ $= \frac{1}{2}$ HM, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (IJ). On note (C) le circonscrit à ABCD.

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
2) Tracer l’ensemble (E) image de (C) par f, puis placer les foyers F et F’ et les directrices de (E)
3) Tracer l’hyperbole (H) de rectangle fondamental ABCD et d’axe focal (IK) où k est le milieu du segment [BC].

EXERCICE N°13

Le plan est muni d’un repère orthonormé (O ; i, j). Soit (H) l’hyperbole d’excentricité $e = \sqrt{2}$ dont l’un des foyers est F (3 ; 2) et l’une des directrices est (D) : $x - y + 1 = 0$.

1) Déterminer l’équation cartésienne de (H).
2) Ecrire l’équation de (H) sous la forme : $(x - a)(y - b) = 6$
3) En déduire les coordonnées du centre de (H).
4) Déterminer le second couple (F’ ; D’).

EXERCICE N°14

Le plan (P) est orienté dans le sens direct. OAB est un triangle iso-rectangle direct en O, on désigne par I le milieu du segment [AB], par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et B, par H et K les symétriques respectifs des points C et D par rapport à I.

1) Faire la figure.
2) Soit f la similitude plane directe qui transforme A en D et O en C.
   a) Déterminer le rapport et la mesure de l’angle de f.
   b) Soit Ω le projeté orthogonal de O sur la droite (AC). Déterminer les images des droites (OΩ) et (AΩ) par f.
   c) En déduire que Ω est le centre de f.
3) Soit g la similitude plane indirecte de centre I qui transforme A en D et O en C.
   a) Déterminer le rapport et l’axe de g.
   b) Caractériser l’application $h = go f^{-1}$. (on pourra déterminer h(C) et h(D)).
4) Soit (P_o) la parabole de foyer C, de sommet S passant par D et tangente en D à la droite (BA).
   a) Déterminer la directrice (D) de (P_o).
   b) Construire l’arc (E_o) de la parabole (P_o) de corde focale [DJ] où J est le symétrique de D par rapport à la droite (CK).
   c) Construire l’image (E_1) de l’arc (E_o) de la parabole (P_o) par h.
5) Le plan est rapporté au repère (S ; i, j) avec i = SC et j = SI. Déterminer l’équation réduite de la parabole (P_o).
6) Soit (E) l’ellipse de sommet D sur le grand axe, O sur le petit axe et de centre I.
   a) Tracer (E), puis placer ses foyers F et F’.
   b) Déterminer l’équation réduite de (E).
   c) Calculer l’excentricité e de (E).

EXERCICE N°15

Dans un plan orienté, on considère le carré direct ABCD centré en O, les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des cotés [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Faire une figure que l’on complètera.
2) Déterminer et construire l’ensemble (E) des points M du plan vérifiant la relation : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

3) Soit R la rotation de centre Ω, d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme le point A en D.
   a) Prouver que le point Ω appartient à l'ensemble (E).
   b) Construire le point Ω.
4) On considère les rotations R et R' de centre respectifs Ω et A, d'angles de mesures respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.
   a) Déterminer les droites (D_1) et (D_2) telles que l'on ait : R= $S_{D_1}oS_{\Omega A}$ et R'=$S_{\Omega A}oS_{D_2}$.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f définie par f=RoR'
5) On rappelle que les projetés orthogonaux du foyer d'une parabole sur les tangentes de cette parabole appartiennent à la perpendiculaire à l'axe focal de la parabole en son sommet.

Soit (P) la parabole de sommet le point J, d'axe focal la droite (JB) dont une tangente est la droite (OB).
   a) Montrer que le point C est le foyer de la parabole (P).
   b) Montrer que la droite (AB) est la directrice de la parabole (P).
   c) Montrer que le point D appartient à la parabole (P).
   d) Construire le point N de la parabole (P), situé sur la droite (DC) puis préciser la tangente à la parabole en N.
   e) Construire la parabole (P).
6) Construire l'image (P') de la parabole (P) par la similitude plane indirecte S de centre B, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'axe la droite (BD).

EXERCICE N°16

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC iso-rectangle direct en A. Les points I, J, K et R sont les milieux respectifs des segments [AC], [AB], [BC] et [JB]. P est le projeté orthogonal de I sur la droite (BC).
1) Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
2) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S telle que : S(J) = K et S(K) = P
3) Soit Ω le centre de la similitude S, montrer que pour tout point M' = S(M), le triangle ΩMM' est iso-rectangle direct en M' puis déduire que Ω est le point I.
4) Construire le point F tel que S(F) = A.
5) Soit g l'application ponctuelle définie par : g $=S^4$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
6) On considère l'ensemble (E) des points M du plan tels que : MA + MJ = AB.
   a) Montrer que (E) est une ellipse d'axe focal la droite (AB).
   b) Montrer que le point R appartient à l'ellipse (E) et préciser ses sommets.
   c) Construire (E).
   d) Déduire l'image (E') de (E) par la similitude S.

EXERCICE N°17

Dans le plan orienté (P), on considère équilatéral OBA de sens direct et de centre de gravité G. On construit à l'extérieur de ce triangle un autre triangle équilatéral OAC tels que les points A', C' et B' désignent respectivement les milieux des segments [OC], [BA], et [OA]. Les droites (BA') et (OA) se coupent en I.

1/ Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

2/ a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude plane directe S_1 transformant B en B' et A en A'.

b) Déterminer l'image $S_1(O)$ du point O par la similitude directe S_1.

3/ Montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme O en B' et B en A', on déterminera son centre et son rapport.

4/ Soit S_2 la similitude plane indirecte de centre O transformant B en B', déterminer son axe et son rapport.

5/ Déterminer la composée S = $S_1 o S_2$.

6/ Soit (H) l'hyperbole de rectangle fondamentale OC'AA', de foyers F et F' où F est un point du segment [AC].

a) Construire l'hyperbole (H).
b) Soit (H_0), l'arc de l'hyperbole (H) situé à droite du segment [AA']. Construire l'image (H'_0) de (H_0) par S_2.

EXERCICE N°18

Dans le plan orienté (P), on considère le carré ABCD direct de centre O.
E, F, G et H désignent respectivement les milieux des segments [AD], [AB], [BC] et [CD].

1) On définit les transformations ponctuelles suivantes : f = $R_{(O;\frac{\pi}{2})} o t_{BC}$ et g = $S_{AD} o R_{(O;\frac{\pi}{2})}$.
   a) Déterminer f(B)
   b) Caractériser f et g.
2) Soit S la similitude plane directe de centre D qui transforme E en C. Caractériser S et placer le point O' image de O par S.
3) On désigne par (Γ) l'ellipse de centre O dont un foyer est F et un sommet est E.
   a) Préciser l'autre foyer et les autres sommets S_1, S_2 et S_3 de (Γ).
   b) Construire l'ellipse (Γ).
   c) Calculer l'excentricité e de (Γ).
   d) Construire (Γ') l'image de (Γ) par la similitude S.
4) G est un point du plan tel que le triangle EFG soit iso-rectangle en F, de sens direct. On note (Δ) la droite passant par G et perpendiculaire à la droite (OH). Que représente la droite (Δ) pour l'ellipse (Γ) ? Justifier la réponse.
5) Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé (O ; OH, OE).
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans ce repère.
   b) Trouver l'expression analytique de S.
   c) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par S.

EXERCICE N°19

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que (BC, BA) = $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$. La bissectrice de l'angle (BC, BA) coupe le segment [AC] en un point O. On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].

1) Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].
2) Soit f la similitude plane directe telle que : f(B) = O et f(H) = H'.
   a) Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que son angle a pour mesure $\frac{\pi}{6}$.
   b) Déterminer le centre de f.
3) Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètre respectifs [AB] et [AO] se coupent en un point D.

Soit g =$S_{(DH)} o f$.

   a) Déterminer g(A) et g(C).
   b) Montrer que g est une similitude plane indirecte dont on précisera le rapport.
   c) Soit Ω le centre de g. Montrer que : $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega A}$.
   d) Construire le centre Ω et l'axe (Δ) de g.
4) Soit (E) l'ellipse de foyers A et B passant par O.
   a) Montrer que la longueur du grand axe de (E) est égale à 2OA.
   b) Construire les points de (E) situés sur les droites (BC) et (AD).
   c) Achever la construction de (E).

EXERCICE N°20

ABC est un triangle indirecte, rectangle en A tel que BC = 2AB et S la similitude plane directe de centre B, qui transforme C en A.

1) Préciser le rapport et une mesure de l'angle de S.
2) Soit (H) l'ensemble des points M du plan tels que MB = 2d (M, (AC)).
   a) Donner la nature et les éléments remarquables de (H).
   b) Donner la nature puis les foyers et l'excentricité de (H') = S(H).
3) Les points A, B et C ont pour affixes respectives 1 + 2i ; 1 + 5i et 7 + 2i.

a) Donner la forme complexe de S.
b) Ecrire une équation cartésienne de (H).
c) Construire (H) dans un repère orthonormé du plan complexe.

EXERCICE N°21

Soit ABC un triangle iso-rectangle en A et de sens direct. On note I milieu du segment [BC] et D le symétrique de A par rapport à I. On désigne par (P) la parabole de foyer A et de directrice (BD).

1) Déterminer l'axe focal et le sommet de (P).
2) Montrer que le point C appartient (P).
3) Montrer que la droite (BD) est tangente à (P) puis construire (P).

EXERCICE N°22

On considère dans le plan orienté, un carré ABCD direct de centre O. E, F, G et H désignent respectivement les milieux des segments [AD], [AB], [BC] et [CD].

1) Soit S la similitude plane directe qui fixe le point D et qui transforme E en C.
   a) Caractériser S.
   b) Placer O' = S(O).
2) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan P définie par $(\Gamma) = \left\{ M \in P \;;\; MF + MH = AC \right\}$
   a) Démontrer que E et G appartiennent à (Γ).
   b) Construire (Γ) après avoir préciser les foyers, le centre et les sommets.
   c) Construire (Γ') image de (Γ) par S.
3) Le plan est rapporté au repère $(O, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$
   a) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ) dans ce repère.
   b) Calculer l'excentricité e de (Γ).
   c) Donner l'expression analytique de S.
   d) Déterminer l'équation cartésienne de (Γ') et préciser les coordonnées de son centre puis ses directrices.
   e) Calculer l'excentricité e' de (Γ').
   f) Tracer l'hyperbole (H) de sommets E et G, d'asymptotes (OA) et (OD) puis placer ses foyers F_1 et F_2.
   g) Ecrire l'équation de (H) dans le repère $(O, \overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OE})$

EXERCICE N°23

Dans une ellipse (E) de foyers F et F', on appelle r et r' les rayons vecteurs $\overrightarrow{MF}$ *et* $\overrightarrow{MF'}$ d'un point M de (E) et 2θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF'})$.

1) Montrer que rr'$cos^2\theta = b^2$(b, longueur du demi-petit axe).
2) La normale en M à l'ellipse coupe FF' en N. En écrivant que l'aire du triangle F'MF est la somme des aires des triangles FMN et NMF', établir que : aMN=rr'cosθ.
3) En déduire que la projection de la normale MN, sur le rayon vecteur MF, a une valeur constante quand M décrit l'ellipse (E).
4) Etablir une propriété analogue pour la normale MN à une hyperbole.
5) Que devient cette propriété quand, le foyer F restant fixe, le foyer F' s'éloigne indéfiniment sur la droite (FF') ?

EXERCICEN°24

ABCD est un carré direct centré en O. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [AD]. Soit R la rotation de centre A qui transforme D en B et S la symétrie orthogonale d'axe (AB). On pose : f = RoS et g = hof où h est l'homothétie de centre A qui transforme C en O.

1) Déterminer f(O) et f(A), puis montrer que f est une symétrie orthogonale. Préciser son axe.
2) Déterminer le rapport de h.
3) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
4) Soit (E) l'ellipse de foyers B et D, passant par A.
   a) Montrer que la longueur du grand axe est a = AB.

b) Construire les sommets de (E).
c) Construire les points de (E) situés sur les demi-droites (DI) et (BK). Achever la construction de (E).

5) Soit (E’) l’image de (E) par g.
a) Déterminer les foyers de (E’).
b) Construire (E’).

EXERCICE N°25

Dans le plan orienté, on considère le triangle OAB isocèle en O de sens direct. On prendra AB = 6cm.

Partie A

1) Construire les points I et J barycentres respectifs des systèmes de points pondérés $\{$(A, -1) ; (B,2)$\}$ et $\{$(A, 1) ; (B, 2)$\}$.
2) Montrer l’ensemble (Γ_1) des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$ est le cercle de diamètre [IJ]. Construire (Γ_1).
3) Construire l’ensemble (Γ_2) des points M du plan tels que $(MA, MB) = \frac{\pi}{3}[\pi]$.
4) (Γ_1) et (Γ_2) se coupent en deux points Ω_1 et Ω_2. Ω_1 étant situé dans le demi-plan de frontière (AB) contenant le centre E de (Γ_2). On désignera par K le centre de (Γ_1).
a) Montrer que Ω_1 est le centre de la similitude plane directe S d’angle de mesure $\frac{\pi}{3}$, de rapport $\frac{1}{2}$ et qui transforme A en B.
b) Démontrer que les points A, E et Ω_1 sont alignés.

Partie B

1) Soit F le symétrique de E par rapport à la droite (AB).
a) Démontrer que J est le centre de gravité du triangle EFB.
b) Démontrer que BK = EJ et que $(EJ, BK) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
c) En déduire qu’il existe une rotation R qui transforme E en B et J en K.
d) Démontrer que le centre de R est Ω_1.
2) Soit $g = t_{BA} \, o \, R$. Démontrer que le centre de g est le point F.

Partie C

Soit (H) l’hyperbole de centre J passant par A et dont un des foyers est le point I.

1) Construire le point M de (H) situé sur le segment $[I\Omega_1]$.
2) Démontrer que les droites (JE) et $(F\Omega_1)$ sont asymptotes de (H).
3) Construire les sommets de (H).
4) Tracer la branche de (H) contenue dans le demi-plan de frontière $(B\Omega_1)$ contenant K.
5) On désigne par (H’) l’image de (H) par la similitude S.
a) Démontrer que l’excentricité de (H’) est égale à 2.
b) Déterminer les asymptotes de (H’).
6) Construire (H) et (H’).

EXERCICE N°26

Dans le plan orienté (P) on considère un triangle équilatéral ABC de centre O, de sens direct. On désigne par A’, B’, C’ les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].

1) Soit S_1 la similitude indirecte de centre A qui transforme C’ en C.
a) Déterminer le rapport k_1 et l’axe (Δ) de la similitude S_1.
b) Déterminer l’image de la droite (BC’) par S_1.
2) On désigne par D l’image de C par l’homothétie h de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$. S_2 est la similitude directe de centre A qui transforme D en O.
a) Montrer que son rapport est $k_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) Préciser une mesure θ_2 de l’angle de S_2.
c) Montrer que les droites (AO) et (OD) sont perpendiculaires.
3) Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe la droite (OD) en E et F de telle sorte que le triangle OEA soit direct. Soit $(\Gamma) = \{ M \in (P) \,/\, MB + MC = EF \}$
a) Montrer que $O \in (\Gamma)$.

b) Donner la nature de (Γ). Préciser ses foyers et son centre.
c) Construire la courbe (Γ).

4) Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(A', \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{A'C}$
a) Préciser les coordonnées de O dans ce repère.
b) Ecrire l'équation cartésienne de (Γ).

EXERCICE N°27

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O ; i, j).
Soit (D) la droite d'équation X = 6 et F le point de coordonnées (8 ; 0).
Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. On désigne par (Γ_θ) l'ensemble des points M du plan tels que :
$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{cos\theta}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (D).

1) Préciser la nature de (Γ_θ) suivant les valeurs de θ.
2) Construire la courbe (Γ_0) correspondant à $\theta = 0$.
3) a. Ecrire une équation cartésienne de la courbe $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ correspondant à $\theta = \frac{\pi}{6}$.
b. Préciser les éléments caractéristiques de $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$.
c. Construire $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$.
4) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 10.
a) Ecrire une équation cartésienne de la courbe (E) transformée de (C) par l'affinité orthogonale d'axe la droite d'équation Y = 0 et de rapport $\frac{3}{5}$.
b) Préciser les foyers de (E).
c) En déduire que les tangentes à (E) et à $(\Gamma_{\frac{\pi}{6}})$ aux points d'intersections de ces courbes sont perpendiculaires.

EXERCICE N°28

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; i, j), on considère l'ensemble (E) des points M de coordonnées (X, Y) telles que :

$$\begin{cases} X = \sqrt{2}\cos t - \sin t \\ Y = \sqrt{2}\cos t + \sin t \end{cases}, \quad t \in R$$

1) a)Vérifier qu'une équation cartésienne de (E) est : $3x^2\ 3y^2 - 2xy - 8 = 0$ (1)
b) vérifier que l'équation (1) est équivalente à : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (\frac{x+y-4}{2})^2$ (2)
c) Interpréter géométriquement chaque membre de (2). En déduire que (E) est une conique dont – on précisera la nature.
d) Montrer que O est un centre de symétrie de (E) et préciser ses éléments caractéristiques(excentricité, foyers, directrices)
2) Soit f la transformation du plan orienté qui, à chaque points M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : $Z' = \frac{1-i}{2} Z$
a) Donner la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.
b) Déterminer l'image de (E) par f. Préciser les éléments remarquables de cette image et la construire.

EXERCICE N°29

Soit AFED un carré direct de coté 4cm, centré en O. On désigne par B et O_1les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1) Soit R la rotation qui transforme F en E et E en D.
a) Caractériser la rotation R.
b) Montrer que $f = Ro S_{OO_1}$est une symétrie orthogonale d'axe (OE).
2) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en F et B en E.
a) Déterminer l'angle et le rapport de S.
b) Montrer que $S = Ro h_{(A;\frac{1}{2})}$
c) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient aux deux cercles de diamètres respectifs

[AF] et [BE], puis construire Ω.

d) Montrer que S(E) = O. En déduire que les points Ω, O et B sont alignés.

3) On désigne par I le milieu de [AF] ; J le milieu de [OI] et L le symétrique de J par rapport à I. Soit (E) l'ellipse de sommets A, F, J et L.

   a) Construire les foyers G_1 et G_2 de (E) ($G_2 \in$ [IF]). Soit $G'_1 = S(G_1)$ où S et la similitude de centre Ω d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

   b) Montrer que la droite $(\Omega G'_1)$ est tangente à l'ellipse (E).

   c) Construire (E).

EXERCICE N°30

Le plan (P) est orienté. On considère le triangle ABC rectangle en A tel que AB = 1, AC = $1 + \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. (On construira la vraie valeur de $\sqrt{2}$ et on placera de préférence [AB] horizontal). Unité graphique 4cm.

1) Construire la parabole (P) de directrice (AC) et de foyer B. On précisera le sommet O de (P) et on décrira la méthode de construction d'un point M quelconque de (P).
2) Soit S la similitude plane directe transformant B en A et A en C. Déterminer son rapport et son angle.
3) On désigne par Ω le centre de S. Montrer que Ω est le point d'intersection de la droite (BC) et du cercle de diamètre [AB]. Placer Ω.
4) Soit D l'image du point C par S. Placer le point D.
5) On rapporte le plan au repère orthonormé (O ; i, j) avec i = OB. La tangente (T_M) à (P) en un point M coupe l'axe focal (AB) en un point T et la perpendiculaire (D_M) à (T_M) coupe l'axe focal en un point N. On se propose de montrer que le symétrique T' de T par rapport à O est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.
   a) Donner les équations cartésiennes de (P), de (T_M), et (D_M).
   b) Montrer que MT'.TT' = 0, puis conclure.
   c) Montrer que le symétrique N' de N par rapport à O appartient à la droite (T_M).
6) Donner les éléments géométriques de (P'), image de (P) par S. Construire (P') dans le même repère que (P).

EXERCICE N°31

Dans un plan orienté (P), on considère le carré direct ABCD centré en O, de coté 8cm. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. On prendra une page entière pour la figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Partie A

On considère l'application f définie par : f = $R_{(A;\frac{\pi}{2})} \circ t_{CA}$

1) Calculer f(C), puis reconnaitre et caractériser f.
2) Le point S est le milieu du segment [OC]. On considère l'ellipse (E) de centre O dont deux de ses sommets sont B sur le grand axe (axe focal) et S sur le petit axe (axe non focal). On rappelle que le cercle de O et de rayon [OB] est principal tandis que celui de centre O et rayon [OS] est secondaire, la parallèle à (BD) en S coupe le cercle principal en H et F est le projeté orthogonal de H sur l'axe focal (BD).
   a) Que représente le point F pour l'ellipse (E) ?
   b) Tracer l'ellipse (E). On précisera les sommets, les foyers et les directrices.

Partie B

Le plan est maintenant rapporté à un repère orthonormé direct (O ; OB, OC)

3) Déterminer les coordonnées de F et une équation cartésienne réduite de l'ellipse (E) dans ce repère.
4) Soit T la transformation ponctuelle qui à tout point M(X, Y) associe le point M'(X', Y') tel que :

$$\begin{cases} X' = \frac{X}{X-1} \\ Y' = \frac{Y}{X-1} \end{cases} \quad (X \neq 1)$$

   a) Vérifier que l'application T est involutive.
   b) Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
   c) Déterminer, caractériser et construire dans le même repère que (E) l'image (E') de l'ellipse (E) par l'application T.

EXERCICE N°32

On considère un carré direct ABCD centré en O, de coté 2cm. On désigne par (P_1) la parabole de directrice la droite (AD) et tangente en C à la droite (AC).

1) Démontrer que le foyer de (P_1) est B. Soit (P_2) la parabole de foyer B et tangente à la droite (AD) en D, E le symétrique de B par rapport à A, F le symétrique de D par rapport à la droite (AB).
2) Démontrer que la droite (EF) est la directrice de (P_2).
3) Construire le deuxième point H de (P_2) appartenant à la droite (DB).
4) Comment appelle-t-on le segment [DH] pour la parabole (P_2) ? Justifier la réponse.
5) Démontrer que le point I symétrique de C par rapport à (BE) appartient à (P_1).
6) Construire les arcs des paraboles (P_1) et (P_2) de cordes respectives [CI] et [DH].
7) Caractériser la similitude plane directe S qui transforme (P_2) en (P_1).
8) Montrer que l'équation cartésienne de (P_1) dans le repère (J ; JB, JO) est : $y^2 = 4x$.

EXERCICE N°33

ABCD est un rectangle tel que $(\text{BD}, \text{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On considère le losange BDEG tel que

$(\text{BD}, \text{BA}) = (\text{BD}, \text{BE})\ [2\pi]$. On désigne par F, H, et L les milieux respectifs des segments [BG], [EG] et [DE].

1) Faire la figure.
2) Soit f la similitude plane directe qui transforme D en A et E en F.
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude f.
   b) Montrer que le point que le point B est le centre de B.
3. a) Montrer que les droites (HF) et (BE) sont parallèles.
   b) Que représente la droite (EF) pour l'angle$(\widehat{\overrightarrow{FA};\overrightarrow{FH}})$
4) Soit (P) la parabole de directrice la droite (HL), dont une tangente est la droite (EF), la normale associée est la droite (GB) et l'axe focal est la droite (EB).
   a) Démontrer que A est le foyer de (P).
   b) Construire le point I de (P) tel que [IF] soit une corde focale.
   c) Placer le sommet S de (P), puis construire (P).
5) Soit (P') l'image de (P) par f.
   a) Montrer que le foyer de (P') est le milieu du segment [BF].
   b) Construire (P').

EXERCICE N°34

On considère un triangle iso-rectangle en A de sens direct tel que AC = 6cm. On désigne par D, E, F les milieux respectifs des segments [BC], [AB] et [BD].

1) Faire la figure.
2) Soit (P) la parabole de foyer B et de directrice la droite (AC).
   a) Qu'appelle-t-on pas ou paramètre d'une parabole ?
   b) Déterminer le pas α de (P).
3) Soit G le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

a) Démontrer que la droite (AG) est une tangente à (P) en un point à déterminer.
b) Construire le point H de (P) situé sur la médiatrice du segment [EB].
c) Construire l'arc (P_0) de (P) de corde focale le segment [GI] où I est le symétrique de G par rapport à la droite (AB). Soit (P') la parabole de foyer B et de directrice (AG).

4) Déterminer le centre Ω, le rapport k et une mesure de l'angle θ de la similitude plane directe S qui transforme (P') en (P).
5) Construire l'antécédent J de G par S.
6) Construire l'arc (P'_0) qui à pour image (P_0) par S.

<u>EXERCICE N° 35</u>

On considère dans le plan (P), un carré ABCD de sens direct , centré en O. E, F, G et H désignent respectivement les milieux des segments [AD] , [AB] , [BC] et [CD] . On prendra AB = 4 cm.

1.a) Faire la figure.
b) Caractériser la similitude plane directe S qui fixe le point D et qui transforme B en C.
c) Placer le point O' = S (O)

2 - On désigne par (E) l'ellipse de centre O dont un sommet est le point E et un foyer est le point F.
a) Préciser l'autre foyer de (E)
b) Placer les autres sommets de (E), puis tracer (E)
c) Calculer l'excentricité e de (E)
d) T est le point du plan tel que le triangle EFT soit iso-rectangle en F, de sens indirect. On note (Δ) la droite passant par T et perpendiculaire à la droite (OH). Que représente (Δ) pour (E) ?

3- Construire (E ') = S(E)

4- Soit (P_0) la parabole de directrice (Δ) et de foyer F.
a) Construire le point M_0 de (P_0) situé sur la droite (AD), puis le point M_1 situé sur la droite (BC) ;
b) Tracer (P_0) après avoir précisé son sommet I.

5- Le plan est rapporté au repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{OH}$,$\overrightarrow{OE}$).
a) Déterminer l'équation cartésienne de (E) dans ce repère.
b) Trouver l'expression analytique de S dans ce repère.
c) Déterminer équation cartésienne de (E ').
d) Calculer l'excentricité e' de (E'). Comparer e et e' , justifier ce résultat.
e) Déterminer l'équation cartésienne de (P_0) dans ce repère.

6- a) Tracer l'hyperbole (H) de sommets E et G, d'asymptotes les droites (OC) et (OD).
b)Placer ses foyer F_1 et F_2 puis tracer ses directrices (D_1) et (D_2).
c) Déterminer l'équation cartésienne de (H) dans ce repère.

<u>EXERCICE N° 36</u>

Le plan est orienté. Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct de centre de gravité E.

1. Faire une figure. On prendra AB = 4cm.
2. Construire le cercle (C) de centre A passant par B
3. Construire le point F symétrique de A par à E.
4. Montrer que les droites (CF) et (CA) sont perpendiculaires.

Soit (Γ) l'hyperbole de cercle principal (Γ) et dont une directrice est la droite (BC).

5. Montrer que F est un foyer de (Γ).Préciser son axes focal.
6. On désigne par G le projeté orthogonal de F sur la droite (BC), et H le point de l'axe focal tel que $\overrightarrow{AH} = 3\overrightarrow{AG}$.
   a) Construire H.
   b) On pose $AF = c \; et \; AB = a$. Que représente le rapport $\frac{AF}{AB}$ pour (Γ) ?
   Montrer que ce rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
7. Soit I un point du plan tel que $\overrightarrow{GI} = \frac{c}{a}\overrightarrow{GH}$. Montrer que $GI = 2a$, puis construire le point I.
8. Soit (d) la perpendiculaire à l'axe focal passant par H. Construire le point J de (Γ) situé sur

(d) dans le demi plan délimité par la droite (AH), contenant le point C.

9. On note S le sommet de (Γ) associé au foyer F. Construire l'arc (H) de (Γ) d'extrémités J et S.
10. On désigne par f la similitude plane indirecte définie par : $f = hoS_{BC}$, ou h est l'homothétie de centre A et rapport $\frac{1}{2}$ et S_{BC} la symétrie orthogonale d'axe (BC).
    a) Déterminer l'axe (Δ) et le centre Ω de f.
    b) Construire l'arc (H'), image de (H) par f.
    c) Déterminer l'excentricité de (Γ') image de (Γ) par f.

EXERCICE N° 37

Dans le plan orienté, on considère le losange ABCD tels que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et BC= 6cm centré en O. On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] et [DA].

1. Faire la figure que l'on complétera au fur et à mesure.
2. a) Déterminer les droites (Δ_1) et (Δ_2) telles que $t_{\overrightarrow{IC}} = S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$ sachant que $O \in (\Delta_2)$.
   b) Caractériser l'application f définie par : $f = S_{LJ} o S_{AB} o S_{AK}$
   c) Construire $f(I)$ et $f(K)$.
3. a) Montrer qu'il existe une homothétie h qui transforme I en A et J en C. On déterminera son rapport et son centre.
   b) Déterminer l'axe (Δ) de la similitude plane indirecte g définie par : $g = S_\Delta o h_{(B\,;\,2)}$ telle que $g(J) = A$
   c) En déduire le centre de g.
4. Soit (H) l' hyperbole de rectangle fondamental JCLA dont un foyer appartient à la droite (CD).
   a) Préciser l'axe focal de (H).
   b) Placer les points M_0 et M_1 de (H) appartenant respectivement à l'arc (H_0) de (H) situé à droite de (CL) et à l'arc (H_1) de (H) situé à gauche de (AJ).
   c) Construire (H) puis $(H') = f(H)$
5. Soit (C) le cercle circonscrit au quadrilatère JCLA et S l'application ponctuelle définie par : $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$ avec $M' = S(M)$ et H le projeté orthogonal de M sur la droite (BD).
   a) Reconnaitre et caractériser l'application S.
   b) Donner la nature de l'ensemble (E) des points M du plan tel que (E) = S(C) puis construire (E).
6. Soit (P) la parabole de directrice (JK) dont une tangente en L est la droite (JL).
   a) Montrer que le point A est le foyer de de la parabole (P).
   b) Préciser l'axe focal de la parabole (P).
   c) Montrer que I est un point de la parabole (P) puis tracer (P).
   d) Tracer la parabole (P') image de (P) par g.

EXERCICE N° 38

Dans le plan orienté (P), on considère un triangle DBC rectangle en B tel que $(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On fera une figure où l'on prendra BC=6cm.

1. On désigne par O le milieu du segment [DC]. Montrer le triangle OBD est équilatéral.
2. A est l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (DC). On désigne par A', B', et C' les milieux respectifs des segments [BC] , [AC] et [AB].
   a) Montrer que les points B, C, B' et C' sont situés sur un cercle (C) que l'on tracera.
   b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C' et C en A'.
   a) Déterminer son rapport K et une mesure θ de son angle.
   b) Soit Ω le centre de la similitude S. Montrer que , pour tout point M distinct de Ω d'image M' le triangle ΩMM' est rectangle en M' de sens indirect.
   c) En déduire que le centre de S est le point O.
4. On considère l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in (P); |MB - MC| = A'C\}$
   a) Définir (Γ) en précisant ses foyers et son centre.
   b) Que présente le cercle (C) pour l'ensemble (Γ) ?

c) Placer les sommets S_1 et S_2 de (Γ), puis tracer ses asymptotes.
d) Soit (C_1) le cercle de centre B et de rayon BA'. (C_1) coupe la droite (BD) en K_0 de telle sorte que le triangle BK_0C soit un triangle direct. La médiatrice du segment $[K_0C]$ coupe la droite (BK_0) en M_0. Montrer que M_0 est un point de (Γ).
e) Achever la construction de (Γ).
f) Tracer les directrices $(\Delta_1) et (\Delta_2)$ de (Γ).

EXERCICE N° 39

Dans le orienté, on considère un rectangle OBCA tel que :$OB = \sqrt{2}$, OA=1 et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, I milieu de [OB] et K celui de [BC]. On désigne par S la similitude plane directe de centre Ω tel que : S(o)=B et S(A)=I.

1) Déterminer le rapport et l'angle de S.
2) Démontrer que S(B)=C et S(I)=K.
3) On pose $g = SoS$.
   a) Démontrer que g et une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$
   b) Calculer $g(O) et\ g(A)$. En déduire une construction de Ω.
4) Soit f l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$, où H est le projeté orthogonal de M sur la droite (JL) où J est le centre de OBCA et L le milieu de [AC].
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
   b) Tracer l'ensemble (E) image du cercle circonscrit à OBCA par f.
   c) Placer les foyers F et F' de (E) puis tracer ses directrices $(\Delta) et\ (\Delta')$
   d) Tracer l'hyperbole (H) de rectangle fondamental OBCA et d'axe focal (JK).
   e) Placer les foyer F_1 et F_2 de (H) puis tracer ses directrices$(\Delta_1) et\ (\Delta_2)$.

EXERCICE N° 40

Dans le plan orienté, on considère nu carré ABCD de centre O, de sens direct. J, K et I désignent respectivement les milieux des segments [AB], [BC] et [AD]. Soit P un point du segment [KC] distinct de K et de C. Les droites (AP) et (DC) se coupent en Q. La perpendiculaire à (AP) en A coupe respectivement (BC) et (CD) en L et en E.

1. Faire soigneusement la figure que l'on complètera. On prendra BC=3cm, BP=2cm et l'on placera [AB] horizontalement.
2. Construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
3. Soit R la rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, qui transforme B en D.
   a. Montrer que le centre Ω de la rotation R est le point A.
   b. Quelle est l'image de la droite (BC) par R ?
   c. Quelle est l'image de la droite (AL) par R ?
   d. On rappelle que si f est une isométrie, $(D_1) et\ (D_2)$ deux droites du plan telles que $(D_1) \cap (D_2) = \{M\} alors\ f(D_1) \cap f(D_2) = \{f(M)\}$
   Montrer que R(L)=Q et R(P)=E
4. Soit g la similitude plane directe de centre A, qui transforme B en C.
   a. Déterminer son rapport ρ et une mesure θ de son angle.
   b. Montrer que pour tout point M distinct de A, d'image M' par g le triangle AMM' est iso-rectangle en M.
   c. Construire les images des points J, B et C par g.
5. On considère la parabole (P) de foyer B, dont la tangente en C est la droite (AC).
   a. Déterminer la directrice de (P).
   b. Construire (P).
   c. Construire (P'), l'image de (P) par g.
6. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$
   a. Donner les coordonnées des points B et A.
   b. Montrer que l'équation cartésienne de (P) est : $y^2 - 2y + 4x + 1 = 0$.

EXERCICE N° 41

Soit ABC un triangle iso-rectangle en A de sens direct. $D = S_B(A)$; O et J les milieux respectifs des segments [CD] et [CB]. Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre [CD]. $M = S_J(A) et\ N = S_B(M)$. Soit S la similitude plane directe tel que S(D)=B et S(B)=C.

1. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. Soit I le centre de S.
   a)Déterminer la nature de SoS.
   b) Déduire que I∈ $(\mathcal{C})$ et IB=BC.
   c)Montrer que (OB) est la médiatrice de [IC].
   d) Préciser la nature de CADI. Placer I sur la figure
3. a) Prouver qu'il existe un unique déplacement f qui transforme C en B et B en I.
   b) Caractériser f
4. Soit $g = Sof$
   a) Déterminer $g(C) et\ g(B)$
   b) Prouver que g est une similitude plane indirecte. Préciser son centre et son rapport.
   c) Soit K le point de [CI] tel que CB=CK. Montrer que $CK = \frac{\sqrt{2}}{2} CI$, puis que l'axe $(\Delta) de\ g$ est la médiatrice de [BK].
5. Soit (P_0) la parabole de cactus [MN].
   a) Préciser le foyer et la directrice de (P_0).
   b) Que représente la droite (AM) pour (P_0). Justifier la réponse.
   c) Placer le point M_0 de (P_0) appartenant à la demi-droite [BC), puis tracer la normale $[M_0N_0]$, la sous-normale $[N_0M_1]$ et la sous-tangente $[TM_1]$.
   d) Tracer (P_0) et (P'_0) image de (P_0) par f.

<u>EXERCICE N° 42</u>

ABCD est un carré direct. Soit K et F les symétriques respectifs de A par rapport à D et à B. On note E le milieu de [DC].

1.a) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude plane directe S_1 qui transforme K en D et D en B.
 b) On désigne par Ω_1 le centre de S_1. Montrer que le triangle Ω_1DB est rectangle isocèle. En déduire une construction de Ω_1.
 c) Déterminer l'image de B par S_1.

2. Soit S_2 la similitude plane indirecte de rapport $k = \frac{1}{2}$, d'axe (BD) telle que $S_2(A) = E$.
 a. Construire le centre Ω_2 de S_2
 b. Montrer que l'image B' de B par S_2 est le milieu du segment [BD].

3. Soit (E) l'ellipse de foyer B, de directrice (AD) et d'excentricité $\frac{2}{3}$.
 a. Construire deux points de (E) situés sur $(\Omega_1$B).
 b. Placer la deuxième directrice et le deuxième foyer de (E).
 c. Tracer (E)

4. Soit (E')= S_1(E)
 a. Construire (E'), ses directrices et ses foyers.
 b. Calculer l'excentricité e' de (E').

5. Soit (H) l'hyperbole de rectangle fondamental ABCD et dont un sommet est le point E.
 a. Construire (H), ses foyers et ses directrices.
 b. Construire $(H') = S_2(H)$

<u>EXERCICE N°43</u>

Dans le plan orienté (P), on considère un carré direct centré en O. E, F, G et H désignent les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC], [CD], [DA]. (C_1) est le cercle circonscrit au triangle ABD et I le symétrique de O par rapport à G.

1. Faire une figure que l'on complètera. On prendra AB=4cm et on placera (AB) horizontalement.
2. Soit (Γ) l'hyperbole de rectangle fondamental le carré ABCD et d'axe non focal la droite (EG).
   a) Préciser le foyer J de (Γ) situé sur la demi-droite [OF).
   b) Préciser la directrice (D) de (Γ) associée au foyer J.

c) Construire le point K de (Γ) situé sur le segment [JB].

d) Déterminer la demi-droite asymptote de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites [OF) et [OG).

e) Construire la branche (Γ_0) de (Γ) située dans la portion du plan délimitée par les demi-droites [OF) et [OG).

3. Soit S la similitude plane indirecte d'axe la droite (AC) de rapport 2, qui transforme le point F en le point I. Démontrer que son centre est le point O.

4. Soit (Γ') image de (Γ) par S.

a) Montrer que (Γ') est une hyperbole équilatère.

b) Trouver l'excentricité de (Γ').

c) Construire le cercle principal (C_2) de (Γ').

d) Démontrer que (Γ) et (Γ') ont les mêmes asymptotes.

e) Déterminer l'axe focal de (Γ').

f) Construire l'image J' du foyer J de (Γ).

g) Construire l'image (C'_1) du cercle (C_1) par S.

h) Construire l'image (Γ'_0) de (Γ_0) par S.

EXERCICE N° 44

Partie A

Dans orienté $\mathscr{P}$, soit ABC un triangle équilatéral direct de centre de gravité O. On note (Γ) son cercle circonscrit. La parallèle à (AC) menée par O coupe (AB) en I. La droite (BO) recoupe (Γ) en J.

1. Prouver que les points A, I, O et J sont cocycliques.
2. Tracer le cercle (Γ') de centre O' qui les contient.
3. Soit f la similitude plane directe qui transforme (Γ) en (Γ') et qui fixe la point A. Caractériser f.

Partie B

La droite (AO) recoupe (Γ) en F. Soit (E) l'ellipse de centre O, d'excentricité $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont un foyer est F.

1. Déterminer les sommets de (E) et tracer (E).
2. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{OF}, \vec{j})$. Donner une équation cartésienne de (E).
3. Soit g l'affinité orthogonale d'axe (OF) et de rapport $\sqrt{2}$. Donner une équation cartésienne de (E') image de (E) par g.

5. GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE N° 1

1. Soit A (3 ; -2 ; 4), B(-2 ; 1 ; 3) et C(1 ;1 ; α). Déterminer α pour que le triangle ABC soit rectangle en A.
2. On considère les plans (P) et (P') d'équations respectives : $2x - 4y + 3z + 5 = 0$ *et* $x - 2y + 3z - 2 = 0$

a)Vérifier que (P) et (P') ne sont pas parallèles.
b) Déterminer un système d'équations paramétriques de leurs intersection (D).
c) Former une équation cartésienne du plan (Q) passant par A (2, -2, 0) et perpendiculaire à (P) et (P').

EXERCICE N° 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on donne : A (3 ; 2 ; -1) et H (1 ; -1 ; 3)
1. Calculer la distance AH.
2. Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. Soit B (-5 ; 1 ; 1) , C (4 ; -3 ; 3) et D (-1 ; -5 ; -1)
   a) Démontrer les points B, C et D appartiennent au plan (P).
   b) Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   c) Démontrer que l'aire du triangle BCD est $5\sqrt{29}$
   d) Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est $\frac{145}{3}$

EXERCICE N° 3

On considère l'espace E rapporté au repère orthonormé direct $(0;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soient les points A(3 ; -2 ; 2), B (6 ; 1 ; 5), C (6 ; -2 ; -1) et D (0 ; 4 ; -1).

1) Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2) a) Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.
   b) Ecrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonal à la droite (AC) et passant par A.
   c) Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.
3) Donner une expression analytique de la projection orthogonale P sur le plan (P_2).
4) a) Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$.
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(L) = (S) \cap (P_2)$
5) a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
   b) Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

EXERCICE N° 4

L'espace E est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. Soient les points A(-3 ;5 ;2) est B(3 ;-2 ;5) et C(4 ; 3 ;4)

1) *Déterminer une équation cartésienne et une équation paramétrique de la droite (D) passant par A et B. les points A ;B et C sont-ils alignés ?*
2) *Trouver équation du plan (P) contenant les A ;B et C*
3) *Déterminer l'expression analytique S_P la réflexion d'axe le plan (P)*
4) *Donne :*

a) L'expression analytique de la symétrie centrale S_B de centre B.
b) L'expression analytique de la translation T de vecteur -2$\overrightarrow{BC}$
5) Montrer que $f = ToS_B = S_C$.
6) Etudier la composée $g = S_P oT$

EXERCICE N° 5

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

1) Montrer que l'ensemble (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6 + 5y - 2z + 8 = 0$ est une Sphère dont on précisera le centre et le rayon.
2) Soit (P) le plan d'équation $4x - 8z + 12 = 0$. Montrer que l'intersection de (P) et (S) et un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3) Former une équation de l'ensemble (E) ; projeté orthogonal de (C) sur le plan z=0
4) Montrer que (E) est une ellipse dont le centre est le projeté orthogonal sur le plan z=0 du centre de (C).
5) Calculer l'excentricité de (E).

EXERCICE N° 6

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On considère les points A(1 ;0 ;-1) , B(3 ;-1 ;2) , C(2 ;-2 ;-1) et E(4 ;-1 ;-2).

1) Montrer que la droite (CE) est orthogonale à la droite (AB) et à la droite (AC)
2) En déduire une équation cartésienne du plan (P) passant par les points A , B et C
3) Calculer la distance du point E au plan (P)
4) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AE)
5) On considère la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \quad (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$
   a) Donner un point J et un vecteur directeur $\vec{w}$ de (D)
   b) Expliquer pourquoi la droite (D) est contenue dans le plan (P)
   c) Déterminer le point M de (D) tel que les vecteurs $\overrightarrow{EM}\ et\ \vec{V}$ soient orthogonaux
   d) En déduire la distance du point E à la droite (D)

6)Calculer le volume du tétraèdre ABCE

EXERCICE N° 7

Soit $(0;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace E. On donne les points A(2 ; 0 ;-2) et $M(x, y, z)$.

1) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M de E tel que AM=4.
2) Trouver l'intersection (C) de (Γ) avec le plan d'équation $z = 0$. Tracer (C).
3) Calculer la puissance du point B(0 ; -1 ; 0) par rapport à (Γ). Conclure.

EXERCICE N° 8

E désigne l'espace rapporté à au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit f l'application de E dans E définie par : $\begin{cases} x' = z + 4 \\ y' = x - 5 \\ z' = y + 6 \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie positive.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3) Sachant que f est un vissage, donner ses éléments caractéristiques.
4) Déterminer l'image de la sphère $(S) = x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0\ par\ f^{-1}\ réciproque\ de\ f$.

EXERCICE N° 9

Soient $f\ et\ g$ définies analytiquement par f: $\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = z - 1 \\ z' = x - 2 \end{cases}$ et g: $\begin{cases} 3x' = 2x - y + 2z + 1 \\ 3y' = -x + 2y + 2z + 1 \\ 3z' = 2x + 2y - z - 2 \end{cases}$

1) Montrer que $f\ et\ g$ conservent les distances. Que peut-on en déduire ? Dire pour chaque cas s'il s'agit d'un déplacement ou non.
2) Montrer que f est une rotation et que g est une réflexion.
3) Montrer l'existence d'une réflexion $h\ telle\ que\ f = goh. Caractériser\ h$.

EXERCICE N° 10

A/ Soit (D_1) la droite d'équation : $\frac{x+3}{2} = \frac{3-y}{6} = \frac{-z+2}{5}$

1) Citer un point B et un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D_1).
2) En déduire l'équation du plan (P_1) perpendiculaire à (D_1) et contenant B.

B/ Soit le plan (P_2) d'équation $x = 3y + \frac{5}{2}z + 17$. Trouver la représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (P_2) et passant par O(0 ;0 ;0).

C/ Soit (D_2) la droite d'équation $\frac{x}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{-z}{5}$

1) Trouver deux points A et B de la droite (D_2)
2) Déterminer l'équation de (P_3) plan médiateur [AB].
3) Etudier l'intersection de (P_3) avec (D_2).

EXERCICE N° 11

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on définit l'application

$$f:\ \begin{cases} 4x' = 3x - y\sqrt{6} - 2 \\ 4y' = x\sqrt{6} + 2y + z\sqrt{6} \\ 4z' = -x - y\sqrt{6} + 3z \end{cases}$$

1. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'axe (Δ) et l'angle θ
2. Montrer que f est bijective. Caractériser f^{-1}.
3. Démontrer par récurrence que $\forall\, n \in N^*,\ f^{-1} o f^{-1} o f^{-1} o \ldots\ldots o f^{-1} = R(\Delta;\ \frac{-n\pi}{3})$

EXERCICE N° 12

Dans l'espace affine E muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère l'application g définie par : $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = z \\ z' = y \end{cases}$

1) Montrer que g est une isométrie
2) Reconnaitre et caractériser g

EXERCICE N° 13

On considère l'application f définie par : $\begin{cases} x' = z \\ y' = x + 1 \\ z' = y + 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie positive
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
3) a) En déduire que f est un vissage
   b) Caractériser f

EXERCICE N° 14

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct$(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les points A(-4 ;6 ;-1), B(1 ;2 ;2) et C(-1 ;4 ;3)

1. a) Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.
   b) Ecrire l'équation cartésienne du plan (ABC)
   c) Calculer l'aire du triangle ABC
2) Soit I milieu de [AC] et D=S_I(B)
   a) Démontrer que les points A,B,C et D sont coplanaires .
   b) Donner la nature du quadrilatère ABCD et puis calculer son aire.
3) On donne : $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$
   a) Montrer que la fonction $\vec{f}$ est bijective.
   b) Déterminer l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{f(M)}\| = 8$.

EXERCICE N°15

On considère l'application affine f qui à tout point M de coordonnées $(x; y; z)$ fait correspondre le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ telles que :

$$\begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = x - 2 \\ z' = -z \end{cases}$$

1. Montrer que f est un déplacement.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. Montrer que f est un visage. Déterminer ses éléments caractéristiques.

EXERCICE N° 16

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$, on considère les points A(4 ;2 ;2) et B(0 ;2 ;0). On désigne par S la symétrie orthogonale par rapport à un plan (P) telle que S (A) =B

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (P)
2. Donner l'expression analytique de S.

EXERCICE N° 17

L'espace étant rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points A(2 ;2 ;0) ; B(0 ;2 ;2) et C(1 ;0 ;1).

1) Placer les points A , B et C dans le repère
2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}$
3) Déterminer l'équation du plan (P) contenant les points A , B et C
4) D et E étant les points d'intersections du plan (P) avec respectivement avec les axes (Ox) et (Oy).
   a) Déterminer les coordonnées des points D et E
   b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{DE}$
   c) Quelle est la nature du quadrilatère ABED ?
5) Montrer que le triangle ABC est isocèle et calculer son aire
6) Calculer la distance du point $I(0, 2, 0)$ au plan (P) ainsi que le volume du tétraèdre IBCA

EXERCICE N°18

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a $(a > 0)$

1) Faire la figure
2) Calculer $\overrightarrow{DF} . \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DF} . \overrightarrow{BG}$
3) Que peut-on déduire pour la droite (DF) et le plan (BEG) ?
4) Démontrer que la droite (AE) est parallèle au plan (DGH)
5) Soit I le milieu du segment [EF] , (Δ_1) la droite issue de A passant par I et (Δ_2) celle issue de G passant par I. Démontrer que les droites (Δ_1) et (Δ_2) déterminent le plan (AIG)
6) J est le centre du carré ADHE. Démontrer que la droite (BJ) est perpendiculaire au plan (AIG)
7) L'espace est orienté par le repère $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$
   a) Vérifier que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$
   b) En déduire l'aire du triangle AIG
   c) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (AIG)
   d) Déterminer une équation cartésienne du plan (AIG)

EXERCICE N° 19

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1

1. a) Exprimer le plus simplement le vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
   b) En déduire que $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = 0$
2. Déduire de la question précédente que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE)
3. Soit I le point défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} = \vec{0}$

a) Montrer que le point I appartient au plan (BDE)

b) Déduire de 1.a) que le point I est le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE), et préciser la position du point I sur le segment [AG]

4. L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BDE)

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point H et perpendiculaire au plan (BDE)

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection , noté J , de la droite (Δ) et du plan (BDE)

e) En déduire la distance JH , qui est la distance du point H u plan (BDE)

EXERCICE N° 20

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD]

1. Démontrer pour tout point M de l'espace , $\overrightarrow{MD} . \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$
2. En déduire l'ensemble (C) des points M tels que $\overrightarrow{MD} . \overrightarrow{MA} = 0$

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(3 ;0 ;0) , B(0 ;6 ;0) , C(0 ;0 ;4) et D(-5 ;0 ;1)

1.a) Démontrer que les points A , B et C déterminent un plan que l'on notera (ABC)

b) Vérifier que le vecteur $\vec{n}(4; 2; 3)$ est normal au plan (ABC)

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

2.a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) , perpendiculaire au plan (ABC) et passant par D

b) En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)

c) Calculer la distance DH , qui est la distance du point D au plan (ABC)

d) Démontrer que H appartient à l'ensemble (C) défini dans la partie A

EXERCICE N°21

Soit P un plan. A , B et C sont trois points de P tel que AB=AC=5 et BC=6

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) On note $G = bary\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}$. Construire le point G et calculer la distance GA
3) On considère l'application f de P dans R qui a tout point M de P associe le réel:

$$f(M) = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}. Démontrer\ que\ f(M) = f(G) + 4MG^2$$

4) Calculer numériquement $f(A) et\ f(G)$
5) Déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan tels que $f(M) = f(A)$

6. APPLICATIONS AFFINES

EXERCICE N°1

Dans le plan affine muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne les points A(1 ;1) , B(0 ;1) et C(-2 ;2)

1) Démontrer qu'il existe une application affine f $telle\ que\ f(A) = B ; f(B) = C\ et\ f(C) = A$
2) f est-elle bijective ? Si oui définir f^{-1}

EXERCICE N° 2

L'espace E est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère l'application f de E dans E

définie par : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x + y + z + 1) \\ y' = -x + 2y + z + 1 \\ z' = \frac{1}{2}(3x - 3y - z - 3) \end{cases}$

1) Montrer que f est une application affine
2) Montrer que f est une projection affine

3) Caractériser f

EXERCICE N° 3

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application affine f telle que $f(A)=A'; f(B)=B' et\ f(O)=O' avec\ A(-1;O), B(1;1), O(0;0), A'\left(0;\frac{-1}{2}\right), B'\left(6;\frac{-3}{2}\right) et\ O'(\frac{5}{2};\frac{-5}{2})$

1) Déterminer l'expression analytique de f
2) Montrer que f est bijective puis définir f^{-1}
3) Déterminer l'ensemble $Inv(f)$ des points invariants par f
4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{u}(a;b)$
5) Soit $H(x_H;y_H)$ le projeté de $M(x;y)\ sur\ Inv(f)\ parallèlement$ à $\vec{u}$
   a) Déterminer les coordonnées de H en fonction de celle de M
   b) Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{HM'}\ et\ \overrightarrow{HM}$
   c) Caractériser f

EXERCICE N° 4

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application f qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ telle que : $\begin{cases} x'=\frac{5}{2}x+y+\frac{5}{2} \\ y'=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}y-\frac{5}{4} \end{cases}$

1) Montrer que f est une bijection de (P) dans (P)
2) Déterminer l'expression analytique de l'application réciproque $f^{-1}\ de\ f$
3) Déterminer l'ensemble $Inv(f)$, des points invariants par f
4) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ à une direction fixe $\vec{v}$
5) Soit $H(x_H;y_H)$ le projeté de $M(x;y) sur\ Inv(f) parallèlement$ à $\vec{v}$
   a) Déterminer les coordonnées de H en fonction de celles de M
   b) Trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{HM'}\ et\ \overrightarrow{HM}$
6) Déduire que f est une affinité dont on déterminera le rapport, la base et la direction

EXERCICE N° 5

A , B et C sont trois points non alignés du plan (P) et D un point tel que C soit milieu de [BD]
Soit f l'application affine de (P) définie par : $f(A)=A, f(B)=D\ et\ f(C)=B$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2) En déduire qu'il existe un point G de la droite (BC) , invariant par f, et exprimer $\overrightarrow{GB}\ en\ fonction\ \ de\ \overrightarrow{GC}$
3) Démontrer que f est une affinité que l'on caractérisera

EXERCICE N° 6

Soit E l'espace rapporté au repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère l'application f de E dans E qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$tel que : $\begin{cases} x'=3x+2y-2z \\ y'=2x+3y-2z \\ z'=2x+2y-z \end{cases}$

1) Montrer que l'ensemble des invariants par f est un plan vectoriel
2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ appartient à une direction fixe (D)
3) Soit I le point d'intersection de (P) et la droite passant par M et de direction (D)
   a) Déterminer le réel $k\ tel\ que\ \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE N° 7

Le plan (P) est muni du repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit f l'application de (P) dans (P) qui à tout point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ telles que : $\begin{cases} 3x'=4x-2y-6 \\ 3y'=2x-y-12 \end{cases}$

1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera
2) Démontrer que $fof = f$
3) Déterminer l'ensemble des points invariants par f
4) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE N° 8

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$. Soit (D) la droite de E de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \quad (t \in R) \\ z = -t \end{cases}$$

Et (P) le plan d'équation $x + y + 2z = 0$. Déterminer l'expression analytique de la symétrie d'axe (D) et de direction (P)

EXERCICE N° 9

On considère l'espace E rapporté à un repère $(0;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point $M(x, y, z)$ *le point* $M(x', y', z')$ tel que : $\begin{cases} x' = -2y + z - 1 \\ y' = -x - y + z - 1 \\ z' = -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est une projection affine
2) Caractériser f
3) Trouver l'image de la droite (D) d'équation $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$ par f
4) Trouver l'image du plan (P) d'équation $x + y - z + 5 = 0$

EXERCICE N° 10

Le plan affine P est rapporté au repère $(0;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère l'application f définie analytiquement par : $\begin{cases} x' = 4x - y + 1 \\ y' - 2x + 5y - 2 \end{cases}$

1) Montrer que f est une application affine
2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe $\vec{u}$ à déterminer
3) Sachant que f est une affinité , trouver son axe , sa direction et son rapport

7 COURBES PARAMETREES

EXERCICE N° 1

On considère dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe paramétrée (Γ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 2cos3t \\ y(t) = 3sin2t \end{cases} \quad (t \in R)$

1. Définir la fonction vectorielle F associée à (Γ)
2. Montrer que F est périodique de période 2π
3. Comparer $M(t) et\ M(-t)$. En déduire que l'on peut restreindre le domaine d'étude à l'intervalle $I = [0;\ \pi]$
4. Etudier les variations de la fonction x sur I
5. Etudier les variations de la fonction y sur I
6. Dresser le tableau conjointes des variations de $x\ et\ y\ sur\ I$
7. Tracer (Γ)

EXERCICE N° 2

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = 2cost - cos2t \\ y(t) = 2sint - sin2t \end{cases} \quad t \in [-\pi\,;\pi]$

1. Montrer que M(t) et M(-t) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

2. Construire (Γ)

EXERCICE N° 3

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ unité 2cm , on considère la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = cost \\ y(t) = sin2t + 2sint \end{cases}$ $(t \in R)$

1. Montrer que la fonction vectorielle F associée à (Γ) peut être étudier sur l'intervalle $I = [0;\ \pi]$
2. Etudier les variations de F sur I
3. Tracer (Γ)

EXERCICE N° 4

Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère la courbe (C) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ $t \in R$

1. Par quelle symétrie le points M(-t) se déduit-t- il du point M(t) ? Comment peut-on alors choisir l'intervalle d'étude I ?
2. Etudier les variations de $x\ et\ y\ sur\ I$
3. Tracer (C)

EXERCICE N° 5

(Γ) est la courbe définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = tlnt \\ y(t) = \frac{1}{t}lnt \end{cases}$ $(t > 0)$

1) Par quelle transformation du plan le point $M(\frac{1}{t})$ se déduit-t-il du point M(t) ?
2) Etudier les variations $x\ et\ y$ sur]0 , 1]
3) Tracer (Γ)

EXERCICE N° 6

(Γ) est la courbe définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = 3t^2 - 2 \\ y(t) = 3t - t^3 \end{cases}$ $(t \in R)$

Tracer (Γ) sur [-2 ; 2]

EXERCICE N° 7

(Γ) est la courbe définie paramétriquement par : $\begin{cases} x(t) = e^t cost \\ y(t) = e^t sint \end{cases}$

1) Comparer les points $M(t + 2\pi) et\ M(t - 2\pi)$
2) Etudier les fonctions $x\ et\ y\ sur\ l'intervalle$ $[0\ ; 2\pi]$
3) Tracer (Γ) sur $[0\ ; 2\pi]$

EXERCICE N° 8

(Γ) est la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x(t) = 3sint + sin3t \\ y(t) = 2cost + cos3t \end{cases}$

1) Comparer M(t) et M(-t)
2) Comparer $M(t + 2\pi) et\ M(t)$
3) Dresser le tableau de variation de $de\ x\ et\ y\ sur$ $[0\ ;\ \pi]$
4) Tracer (Γ)

EXERCICE N° 9

Etudier puis tracer la courbe (Γ) définie par : $\begin{cases} x(t) = cost \\ y(t) = sin2t \end{cases}$

EXERCICE N° 1

On considère les nombres complexes suivants : $Z_1 = \sqrt{3} - i$, $Z_2 = 2 - 2i$ et $Z_3 = \frac{{Z_1}^4}{{Z_2}^3}$

1) Déterminer le module et un argument de Z_1 , Z_2 et Z_3
2) Donner la forme trigonométrique de Z_1 , Z_2 et Z_3
3) Donner la forme algébrique de Z_3
4) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$
5) Résoudre dans R l'équation (E) :$(\sqrt{6}+\sqrt{2})cosx + (\sqrt{6}-\sqrt{2})sinx = 2$

EXERCICE N° 2

Soit P le polynôme définie par $P(Z) = Z^3 - (2+7i)Z^2 - (14-10i)Z + 12 + 6i$

1) Calculer P(3i) , puis conclure
2) Trouver le polynôme Q tel que P(Z)=(Z-3i)Q(Z)
3) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0

EXERCICE N° 3

On considère le complexe $Z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

1) Calculer Z^2 puis mettre Z^2 sous forme trigonométrique
2) En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{8}$ et de $sin\frac{\pi}{8}$

EXERCICE N° 4

On considère dans l'ensemble C des nombre complexes le polynôme complexe :
$P(Z) = Z^3 + [\sqrt{3} + i(1-\sqrt{3})]Z^2 + [(1+\sqrt{3}) - 3i]Z - i\sqrt{3}$

1) Calculer $(1+i\sqrt{3})^2$ et $P(i\sqrt{3})$
2) Résoudre dans C l'équation (E) : P(Z)=0
3) Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique

EXERCICE N°5

On considère le polynôme : $P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

1) Montrer que si Z est une racine de $P(Z)$ alors $\overline{Z}$ est aussi une racine de $P(Z)$
2) Résoudre dans C l'équation $Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$
3) Exprimer $\frac{P(Z)}{Z^2}$ en fonction de $t = Z + \frac{1}{Z}$
4) Résoudre dans C les équations suivantes : $Z + \frac{1}{Z} = 1$ et $Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$
5) En déduire les solutions de l'équation P(Z)=0

EXERCICE N° 6

1) Soit α un réel de $[0\,;\,\pi]$
   a) Vérifier que : $e^{2i\alpha} - (2isin\alpha)e^{i\alpha} = 1$
   b) Résoudre dans C l'équation : $Z^2 - 2e^{i\alpha}Z + (2isin\alpha)e^{i\alpha} = 0$
2) a est un nombre complexe non nul. On définit le polynôme P par : $P(a) = a^2 - 2ia - 1$
   a) Factoriser $P(a)$
   b) Résoudre C l'équation $Z^2 - a(a+i)Z + ia^3 = 0$
   c) On pose $a = \rho e^{i\theta}$. On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 définis par :
      $Z_1 = ai$ et $Z_2 = a^2$
      i) Déterminer en fonction de ρ et θ le module et un argument de Z_1 et Z_2
      ii) Quelle condition faut-il donner à a pour que Z_1 soit réel ?
3) On considère l'équation (E) : $Z^2 - (2^{\theta+1}cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$, $\theta \in [0; 2\pi]$
   a) Résoudre (E) dans C. On donnera les solutions sous forme trigonométrique
   b) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de (E). Déterminer θ pour que OAB soit un triangle équilatéral

EXERCICE N° 7

1) Résoudre dans C l'équation : $Z^2 + 2(cos\theta)Z + 1 = 0$, $\theta \in]0 ; \frac{\pi}{2}[$
2) On donne $P(Z) = Z^3 - (1 - 2cos\theta)Z^2 + (1 - 2cos\theta)Z - 1$
   a) Montrer que si Z_0 est une racine de P(Z), alors $\overline{Z_0}$ aussi est une racine de P(Z)
   b) Montrer que P(Z) admet une racine réelle
   c) Résoudre dans C l'équation P(Z)=0
3) On donne $Z_A = 1$; $Z_C = e^{i(\pi-\theta)}$ et $Z_C = e^{i(\pi+\theta)}$
   a) Montrer que $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\theta}$
   b) En déduire la nature du triangle ABC
   c) Déterminer Z_D pour que ABCD soit un parallélogramme

EXERCICE N° 8

1) Résoudre dans C l'équation : $Z^2 - \left(2ie^{i\theta}cos\theta\right)Z - e^{2i\theta} = 0$, $\theta \in R$
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}\ ,\vec{v})$, soient les points A et B d'affixes respectives $Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $Z_B = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\theta)}$. $On\ note\ Z_O$ l'affixe de O
   a) Exprimer $Arg\left(\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O}\right)$ $en\ fonction\ de\ \theta$
   b) En déduire l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $\overline{(\overrightarrow{OA}\ ,\overrightarrow{OB})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
   c) On suppose que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Ecrire le conjugué de $Z_A + Z_B$ sous forme exponentielle

EXERCICE N° 9

1) Résoudre dans C l'équation : $Z^2 + \left(\sqrt{3} + i\right)Z + 1 = 0$ (On donnera les solutions sous forme exponentielle)
2) Résoudre dans C l'équation : $Z^4 = 8\sqrt{2}(1 - i)$
3) a) Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$
   b) En déduire une solution de (E) : $Z^2 = -8i$
   c) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle
   d) En déduire les solutions de l'équation (E_0): $Z^3 = -8i$

EXERCICE N° 10

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0;\vec{u}\ ,\vec{v})$. On considère l'équation (E) :$Z^4 = -7 - 24i$

1) Démontrer que $Z_0 = 2 - i$ est une solution de (E)
2) Résoudre l'équation (E) dans C
3) On désigne par A , B , C et D les images des solutions de (E) ou A a pour affixe Z_0 , B a ses coordonnées positives , D a ses coordonnées négatives
   a) Placer les points A , B , C et D dans le repère
   b) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S qui transforme D en A et qui le point B

EXERCICE N° 11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(0;\vec{u},\vec{v})$ unité 2cm. On désigne par I le point d'affixe $Z_I = 1$, par A le point d'affixe $Z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $Z_B = -2 + 2i$ et par (C) le cercle de diamètre [AB]

1) Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon
2) Soit D le point d'affixe $Z_D = \frac{3+3i}{4+2i}$. Ecrire Z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C)
3) Sur le cercle (C), on considère le point E , d'affixe Z_E , tel que $\left(\overrightarrow{\Omega I}\ ,\overrightarrow{\Omega E}\right) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$
   a) Préciser le module et un argument de $Z_E + \frac{1}{2}$
   b) En déduire que $Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$
4) Soit R l'application définie par : $Z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z + \frac{1}{2})$
   a) Caractériser R
   b) Déterminer l'affixe de K' image de K par R avec K(2 ;0)

EXERCICE N° 12