

Mathématiques

TSE

26 EXERCICES
CORRIGES
NOMBRES
COMPLEXES

Initié par :

- **Mohamed TRAORE** professeur titulaire de mathématiques Lycée Kakou Moussa de Daoudabougou de Bamako
- **+22374404100**

- **Oumar M'père COULIBALY** professeur principal de mathématiques Lycée Technique de Bamako ;
- **+22379222035**

- **Ibrahima OUEDRAOGO** professeur principal de mathématiques Lycée Kakou Moussa de Daoudabougou de Bamako ;
- **+22372733580**

- **Adama Diam ASSOUBA** professeur principal de mathématiques Lycée Kakou Moussa de Daoudabougou de Bamako ;
- **+22378228536**

- **Sékou Salla SIBE** professeur de mathématiques Lycée MarliDem de Kalaban Coura Bamako ;
- **+22376345016**

Merci de nous aider à corriger les omissions et les imperfections.



EXERCICE 1

L'objet de cet exercice est de renforcer l'aptitude des élèves aux démonstrations basiques en mathématiques ($A \Rightarrow B$) *qui signifie* (Si A alors B) c'est-à-dire partir directement des hypothèses A données et arriver à la conclusion B après l'utilisation une suite d'implications logiques.

- ❖ La proposition ($A \Rightarrow B$) est vraie si $\begin{cases} (A \text{ est vrai et } B \text{ est vrai}) \text{ ou} \\ (A \text{ est faux et } B \text{ est faux}) \text{ ou} \\ (A \text{ est faux et } B \text{ est vrai}) \end{cases}$
- ❖ La proposition ($A \Rightarrow B$) est fausse si (A est vrai et B est faux)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elles sont exactes ou fausses et donner une preuve démontrée de la réponse choisie.

Proposition 1 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un réel.

Proposition 2 : Pour tout complexe z non nul, on a : $\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1+\bar{z}}{\bar{z}} = \bar{z} - 1$

Proposition 3 : Soit le complexe $n = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ le nombre complexe $n^{25} = n$

Proposition 4 : $\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} - i$

Proposition 5 : $4 \cos 2x \sin 5x \sin x = \cos 8x - \cos 6x + \cos 4x - \cos 2x$

Proposition 6 : $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|\bar{z} + 2i| = \sqrt{2}$ alors $z = \sqrt{2} + 2i$

Proposition 7 : $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ est la forme exponentielle de $\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Proposition 8 : Le complexe $m = \frac{\sqrt{3}-i}{3} (1+i)$ a pour module $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et d'argument $\frac{\pi}{12}$

Proposition 9 : Les racines cubiques de $t = -8i$ sont : $t_0 = 2i$, $t_1 = -\sqrt{3} - i$ et $t_2 = \sqrt{3} - i$

Proposition 10 : soit $z = -2\sqrt{3} - 2i$. La somme $-z^6 - \bar{z}^6 = 2$

Proposition 11 : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, posons $w = -\cos \alpha + i \sin \alpha$. On affirme que $|w| = -1$ et $\text{Arg}(w) = -\alpha$

Proposition 12 : Le complexe $z = 1 + \sqrt{7} + i(1 + \sqrt{7})$ a un module mais il n'a pas d'argument.

Proposition 13 : Dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , soient les points $A(2 - 5i)$ et $B(7 - 3i)$. Le triangle OAB est rectangle isocèle (Aucune figure n'est demandée)

Proposition 14 : Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|\bar{z} + i| = |z + 2i|$. (E) est une droite parallèle à l'axe réel.

Proposition 15 : Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, z^{3n} est imaginaire pur.

Proposition 16 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ Si $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ alors $|i + z| = 1 + |z|$

Proposition 17 : Le point A' d'affixe $2 + i$ est l'image de A d'affixe i par la symétrie centrale de centre $\Omega(1, 0)$

Proposition 18 : Pour tout nombre complexe z , dont $|z| = 2$ et $\text{Arg}(z) = x$, $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{(z - \bar{z})^4}{16} = \frac{1}{4} (\cos 4x - 4\cos 2x + 6)$$

Proposition 19 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{-\cos x + i \sin x}{3i(\cos 5x + i \sin 5x)} = \frac{1}{3} e^{i(\frac{\pi}{2} - 6x)}$

Proposition 20 : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\left(\frac{z-i}{1-i}\right) + \frac{1-\bar{z}}{1+i} + \overline{i-1} = i$

Proposition 21 : Soient les complexes $A = 2e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $B = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

$$A^2 = B \text{ si et seulement si } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{8} \\ \sin \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

Proposition 22 : $z^2 - i = 0$ si et seulement si $z = \sqrt{i}$ ou $z = -\sqrt{i}$

SOLUTION 1

• **Proposition 1** : Vraie

En effet : $z \in \mathbb{C}$ et $|z| = 1$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z| = z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = z^2 + \bar{z}^2 = 2 \cos 2x \in \mathbb{R} \text{ où } x = \text{Arg}(z) \text{ ce qu'il fallait démontrer (cqfd)}$$

• **Proposition 2** : Vraie

En effet : $\left(\overline{z + \frac{1}{z}}\right) - \frac{1+\bar{z}}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} - 1 = \bar{z} - 1$ ce qu'il fallait démontrer (cqfd)

• **Proposition 3** : Fausse

En effet : $n = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$n^{25} = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{25} = (2\sqrt{2})^{25} e^{i\frac{25\pi}{3}} = 2^{37}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ car la mesure principale de } \frac{25\pi}{3} \text{ est } \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi + \pi}{3} = 8\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

Alors $n^{25} = 2^{37}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2^{36}n \neq n$ **cqfd**

• **Proposition 4 : Fausse**

$$\text{En effet : } \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} - i \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = -1 \end{cases} \text{ absurde cqfd}$$

• **Proposition 5 : Vraie**

$$\text{En effet : } 4 \cos 2x \sin 5x \sin x = 4 \left(\frac{z^2 + \bar{z}^2}{2}\right) \left(\frac{z^5 - \bar{z}^5}{2i}\right) \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} [z^8 + \bar{z}^8 - (z^6 + \bar{z}^6) + (z^4 + \bar{z}^4) - (z^2 + \bar{z}^2)] = -\cos 8x + \cos 6x - \cos 4x + \cos 2x \text{ cqfd}$$

• **Proposition 6 : Fausse**

$$\text{En effet : } \forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |\bar{z} + 2i| = \sqrt{2}$$

J'attire l'attention sur le symbole \forall "quelque soit" cela veut dire qu'à chaque fois que $|\bar{z} + 2i| = \sqrt{2}$ donc c'est que $z = \sqrt{2} + 2i$

$$\text{or } |\bar{z} + 2i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\overline{\bar{z} + 2i}| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z - 2i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow AM = \sqrt{2} \text{ où } M(z) \text{ et } A(2i)$$

Pour dire que M est situé sur le cercle de centre A et de rayon $r = \sqrt{2}$ donc M ne peut être unique.

Dire que $z = \sqrt{2} + 2i$ revient à dire que $M(z)$ est unique ce qui est absurde **cqfd**

Autre méthode :

D'après le cours $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$ alors $|\bar{z} + 2i| = |-\bar{z} - 2i| = |z - 2i| = |-z + 2i| = \sqrt{2}$ donc z ne peut être unique il suffit de prendre $-\bar{z} = -\sqrt{2} + 2i$ cqfd

• **Proposition 7 : Vraie**

$$\text{En effet : } 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Mais } 1 + \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{alors } 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \text{ cqfd}$$

$$\text{NB : } 1 + e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

• **Proposition 8 : Vraie**

$$\text{En effet : } m = \frac{\sqrt{3}-i}{3}(1+i)$$

$$|m| = \frac{1}{3}|\sqrt{3}-i||1+i| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Arg}(m) &= \text{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{3}\right) + \text{Arg}(1+i) \\ &= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \text{ cqfd} \end{aligned}$$

• **Proposition 9 : Vraie**

$$\text{En effet : Posons } z^3 = 8i$$

$$\text{Soit } z = \rho e^{i\theta}; \rho > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}^* \text{ on a } 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow \rho^3 e^{3i\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \{0; 1; 2\}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi+4k\pi}{6} \end{cases}$$

$$\boxed{Z_k = \rho e^{i\theta} = 2e^{i\left(\frac{\pi+4k\pi}{6}\right)} \quad k \in \{0; 1; 2\}}$$

$$\text{Pour } k = 0 : Z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$$

$$\text{Pour } k = 1 : Z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{Pour } k = 2 : Z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$

$$\boxed{S = \{-2i; -\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i\}} \text{ cqfd}$$

Autre méthode :

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow Z^3 = (-2i)^3 \Leftrightarrow \frac{Z^3}{(-2i)^3} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{-2i}\right)^3 = 1$$

$\frac{Z}{-2i}$ est une racine cubique de l'unité c'est-à-dire $\frac{Z}{-2i} \in \{1, j, \bar{j}\}$ où $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Donc on obtient :

- $\frac{Z}{-2i} = 1 \Rightarrow Z = -2i$
- $\frac{Z}{-2i} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Z = \sqrt{3} + i$
- $\frac{Z}{-2i} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Z = -\sqrt{3} + i$

$$S = \{-2i; -\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} + i\}$$

- **Proposition 10 : Fausse**

En effet : soit $z = -2\sqrt{3} - 2i$

$$z = -2\sqrt{3} - 2i = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$-z^6 - \bar{z}^6 = -(z^6 + \bar{z}^6) = -4^6(2 \cos 5\pi) \text{ car } (z^n + \bar{z}^n = 2|z|^n \cos n\theta \text{ où } \theta = \text{Arg}(z), n \in \mathbb{N})$$

Mieux encore $z^6 = 4^6(\cos 5\pi + i \sin 5\pi)$

$$\bar{z}^6 = 4^6(\cos 5\pi - i \sin 5\pi)$$

Alors $z^6 + \bar{z}^6 = 4^6(2 \cos 5\pi) \Leftrightarrow -(z^6 + \bar{z}^6) = -2^{12}(-2) = 2^{13} \text{ cqfd}$

- **Proposition 11 : Fausse**

En effet : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on pose $w = -\cos \alpha + i \sin \alpha$

$|w| = -1$ est absurde car le module d'un complexe est absolument positif. Cqfd

- **Proposition 12 : Fausse**

En effet : $z = 1 + \sqrt{7} + i(1 + \sqrt{7}) \Leftrightarrow z = (1 + \sqrt{7})(1 + i)$

$$|z| = |1 + \sqrt{7}| |1 + i| = (1 + \sqrt{7})\sqrt{2}$$

$$\text{Arg}(z) = \text{Arg}(1 + \sqrt{7}) + \text{Arg}(1 + i) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ cqfd}$$

Alors z a bien un module et un argument

- **Proposition 13 : Fausse**

En effet : Dans le repère orthonormé $(o; \vec{i}, \vec{j})$ $A(2 - 5i)$ $B(7 - 3i)$

$$\frac{z_A - z_0}{z_B - z_0} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{2 - 5i}{7 - 3i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \neq i \neq -i \text{ cqfd}$$

- **Proposition 14 : Vraie**

En effet : $|\bar{z} + i| = |z + 2i| \Leftrightarrow |\overline{z - i}| = |z + 2i| \Leftrightarrow |z - i| = |z + 2i|$

L'ensemble des points $M(z)$ vérifiant cette relation est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $z_A = i$ et

$z_B = -2i$ mieux encore c'est la droite $(D): y = -\frac{1}{2}$ donc parallèle à l'axe réel. Cqfd

- **Proposition 15 : Fausse**

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

En effet : $z = 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, z^{3n} = \left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{3n} = (2\sqrt{3})^{3n} (i)^n$$

Mais i^n est : $\begin{cases} \text{réel si } n \text{ est paire} \\ \text{imaginaire pur si } n \text{ est impaire} \end{cases}$

Pour dire que z^{3n} est tantôt réel tantôt imaginaire pur. **Cqfd**

• **Proposition 16 : Vraie**

En effet : $z \in \mathbb{C}^*$ supposons que $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$.

$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$ alors z est imaginaire pur soit $z = ib$, $b > 0$

$$|i + z| = 1 + |z| \Leftrightarrow |i + ib| = 1 + |ib| \Leftrightarrow |i(1 + b)| = 1 + |b| \Leftrightarrow 1 + b = 1 + b \text{ cqfd}$$

• **Proposition 17 : Vraie**

En effet : $A'(2 - i)$; $A(i)$ et $\Omega(\omega = 1)$

Soit S la symétrie centrale et soit $M'(z')$ image de $M(z)$ par S

$$\begin{aligned} S(M) = M' &\Leftrightarrow \overline{\Omega M'} = -\overline{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = -(z - \omega) \Leftrightarrow \\ & z' = -z + 2\omega \end{aligned}$$

Alors $z_{A'} = -z_A + 2\omega = -i + 2 \Rightarrow z_{A'} = 2 - i$. **Cqfd**

• **Proposition 18 : Fausse**

En effet : $|z| = 2$ et $\text{Arg}(z) = x$

$$\frac{(z - \bar{z})^4}{16} = \frac{z^4 + \bar{z}^4 - 4(z^2 + \bar{z}^2) + 6}{16} \quad \text{lci } |z| = 2 \text{ donc}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $z^n = 2^n(\cos nx + i \sin nx)$

$$\bar{z}^n = 2^n(\cos nx - i \sin nx)$$

$$z^n + \bar{z}^n = 2^{n+1} \cos nx$$

$$\text{D'où } \frac{(z - \bar{z})^4}{16} = \frac{z^4 + \bar{z}^4 - 4(z^2 + \bar{z}^2) + 6}{16} = \frac{2^5 \cos 4x - 2^3 \cos 2x + 6}{16} = \frac{16 \cos 4x - 4 \cos 2x + 3}{8} \neq$$

$$\frac{\cos 4x - 4 \cos 2x + 6}{4} \quad \text{cqfd}$$

NB : $z^n + \bar{z}^n = 2 \cos nx$ n'est valable que si $|z| = 1$

• **Proposition 19 : Vraie**

$$\text{En effet : } \forall x \in \mathbb{R}; \frac{-\cos x + i \sin x}{3i(\cos 5x + i \sin 5x)} = \frac{\cos(\pi - x) + i \sin(\pi - x)}{3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(\cos 5x + i \sin 5x)} = \frac{e^{i(\pi - x)}}{3e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i5x}} = \frac{1}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right)}$$

cqfd

• **Proposition 20 : Vraie**

En effet : $\overline{\left(\frac{z-i}{1-i}\right)} + \frac{1-\bar{z}}{1+i} + \overline{i-1} = \frac{\bar{z}+i}{1+i} + \frac{1-\bar{z}}{1+i} -i - 1 = -i \quad \text{cqfd}$

• **Proposition 21 : Vraie**

En effet : $A = 2e^{i\frac{\theta}{2}} ; B = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{i\sqrt{5}-1}{2}$

$$A^2 = B \Leftrightarrow \left(2e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{i\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow 4(\cos \theta + i \sin \theta) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{5}+1}{8} \\ \sin \theta = \frac{-\sqrt{5}+1}{8} \end{cases} \quad \text{cqfd}$$

• **Proposition 22 : Fausse**

En effet : $z = \sqrt{i}$ ou $z = -\sqrt{i}$ n'a aucun sens car i n'est pas réel positif

Mais $z^2 - i = 0 \Leftrightarrow z^2 = i$

Posons $z = x + iy ; (x, y) \in \mathbb{R}^2$

D'après le cours on a
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |i| = 1 & (1) \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(i) = 0 & (2) \\ 2xy = \operatorname{Im}(i) = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans (3): $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$

Pour $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans (3): $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$

On obtient $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$ ou $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$ et non $z = \sqrt{i}$ ou $z = -\sqrt{i}$ qui est absurde

NB : On pourra également utiliser les racines n^e d'un complexe (pour $n = 2$)

• **Proposition 23 : Vraie**

En effet : $A(1 - 2i) ; B\left(-\frac{1}{2} + i\right)$ et $C(91 - 182i)$

$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3}{180} \in \mathbb{R}^*$ alors les points **A, B et C** d'affixes respectives i et $91 - 182i$ sont situés sur

la même droite dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

EXERCICE 2

I- 1- Calculer $(1 + i)^6$ (on se souviendra que $i^2 = -1$)

2- On considère dans \mathbb{C} les équations $(E) : z^2 = -8i$ et $(E') : z^3 = -8i$

Déduire de la question 1-) toutes les solutions de (E) et (E') sous forme algébrique.

II- Soit P le polynôme complexe défini par $P(z) = z^4 + iz^3 + 8z + 8i$

1- Montrer que $z_0 = -i$ est une racine de $P(z) = 0$

2- Factoriser $P(z)$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$

3- Ecrire chacune des solutions de l'équation $P(z) = 0$ sous forme exponentielle.

SOLUTION 2

I) 1) $(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 = (2i)^3 = -8i$

2) $(E): z^2 = -8i \Leftrightarrow z^2 = (1+i)^6$

$$z^2 = [(1+i)^2]^3 \Leftrightarrow \frac{z^2}{[(1+i)^2]^3} = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{z}{(1+i)^3} \right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{z}{2i-2} \right]^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{2i-2} \in \{-1; 1\} \text{ c'est - à - dire } \frac{z}{2i-2} \text{ est la racine carrée de l'unité}$$

$$\frac{z}{2i-2} \in \{-1; 1\} \Leftrightarrow \boxed{z \in \{2-2i; 2i-2\}}$$

$$(E'): z^3 = -8i \Leftrightarrow z^3 = [(1+i)^2]^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{2i}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{2i} \in \{1, j, \bar{j}\} \Leftrightarrow \boxed{z \in \{2i; -i-\sqrt{3}; -i+\sqrt{3}\}}$$

II) $P(z) = z^4 + iz^3 + 8z + 8i$

1) $P(z_0) = P(i) = 0$ alors $-i$ est solution de $P(z) = 0$.

2)

	1	i	0	8	8i
-i		-i	0	0	-8i
	1	0	0	8	0

$$P(z) = (z+i)(z^3+8)$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z^3+8) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z = -i} \text{ où } z^3 = -8$$

$$z^3 = -8 = (-2)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{-2}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{-2} \in \{1, j, \bar{j}\} \Leftrightarrow z \in \{-2; 1-i\sqrt{3}; 1+i\sqrt{3}; -i\}$$

3) $\boxed{z_1 = -2 = 2e^{i\pi}}$; $\boxed{z_2 = 1-i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$; $\boxed{z_3 = 1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$ et $\boxed{z_0 = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}}$.

EXERCICE 3

A- On donne $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ecrivez le nombre complexe $z = 1 + (2 - \sqrt{3})i$ sous forme trigonométrique et exponentielle.

B- Dans \mathbb{C} , on souhaite trouver toutes les solutions de l'équation (E) : $\frac{(z-1)^4+2}{2} = -1$

1- Déterminez les racines 4^e de l'unité sous forme algébrique et calculez $(1+i)^4$.

2- En déduire alors toutes les solutions de l'équation (E).

C- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (F) : $z^4 - (1+2i)z^2 + 2i = 0$

indication : (On pourra poser $u = z^2$; on *donne* $(1+i)^2 = 2i$)

D- Résolvez dans \mathbb{C}^2 le système $\begin{cases} (3+i)z - 2iz' = 5+i \\ (1+i)\bar{z} + 4i\bar{z}' = -3+i \end{cases}$

SOLUTION 3

A) On donne $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$z = 1 + (2 - \sqrt{3})i$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (2 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2(1 - \sqrt{3})^2}$$

$$|z| = |1 - \sqrt{3}|\sqrt{2} = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$$

Soit $\alpha = \arg(z)$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \alpha = \frac{2-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

B) (E) : $\frac{(z-1)^4+2}{2} = -1$

1) $z^4 = 1 \Leftrightarrow z \in \{1; -1; i; -i\}$

$$(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$$

2) (E) : $\frac{(z-1)^4-2}{2} = -1 \Leftrightarrow (z-1)^4 = -4 = (1+i)^4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{1+i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{1+i} \in \{-1; 1; i; -i\} \Leftrightarrow \boxed{z \in \{-i; 2+i; i; 2-i\}}$$

C) (F) : $z^4 - (1+2i)z^2 + 2i = 0$

Posons $u = z^2$; $u \in \mathbb{C}$

$$u^2 - (1+2i)u + 2i = 0 \text{ on a : } a + b + c = 0 \text{ donc } u = 1 \text{ où } u = 2i$$

Pour $u = 1$ alors $z^2 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ où $z = -1$

Pour $u = 2i$ alors $z^2 = (1 + i)^2 \Leftrightarrow z = 1 + i$ où $z = -1 - i$

$$s = \{-1; 1; 1 + i; -1 - i\}$$

$$D) \begin{cases} (3 + i)z + 2iz' = 5 + i & (1) \\ (1 + i)z + 4iz' = -3 + i & (2) \end{cases}$$

$$(7 + 3i)z = 7 + 3i \Rightarrow z = 1$$

$$\text{Dans (1) : } 3 + i - 2iz' = 5 + i \Rightarrow z' = i$$

$$s = \{(1; i)\}$$

EXERCICE 4

Dans le cours, on a estimé que le complexe $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1- Montrer les propriétés suivantes de j

a- $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

b- $j^3 = 1$

c- $1 + j + j^2 = 0$

d- $-j^2 = e^{\frac{i\pi}{3}}$

2- Dans le repère orthormé direct du plan, on considère les points M, N et P d'affixes respectives m, n et p.

a- Démontrer que le triangle MNP est équilatéral de sens direct si et seulement si,
 $m - n = -j^2(p - n)$.

b- En déduire des questions précédentes que le triangle MNP est équilatéral de sens direct si et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$

SOLUTION 4

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1) a) $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $j^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$

c) $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$

d) $1 + j + j^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + j = -j^2 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j^2 \Leftrightarrow -j^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ **cqfd**

2) a) $M(n) ; N(n)$ et $P(p)$ (le triangle **MNP** est équilatéral de sens directe) $\Leftrightarrow \frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow m -$

$n = -(p - n)j^2 \Leftrightarrow m - n = -j^2(p - n)$ **cqfd**

Réciproquement $m - n = -j^2(p - n) \Leftrightarrow \frac{m-n}{p-n} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors le triangle **MNP** est équilatéral de sens direct

b) On a :

$$m - n = -j^2(p - n) \Leftrightarrow m - n = (1 + j)(p - n) \Leftrightarrow m + pj^2 + jn = 0 \quad \text{cqfd}$$

EXERCICE 5

NB : Les parties **A** et **B** sont indépendantes

Partie A : Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et Ω d'affixes respectives $a = -1 + \sqrt{3} + i$ et $\omega = -1 + 2i$

- 1- Ecrire $a - \omega$ sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle.
- 2- On appelle r , la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{-1}{2}$.

Placer sur une figure A et Ω , puis B image du point A par r , C image du point B par r et D image du point A par h .

- 3- On note b, c et d , les affixes respectives des points B, C et D

Le tableau suivant contient deux affirmations. Le candidat se prononcera sur la bonne réponse en la recopiant sur sa copie après un calcul détaillé.

Affirmations	Réponses possibles	Réponses possibles	Reponses possibles
$\frac{b-d}{a-d} =$	$\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{\sqrt{3}}{3}i$
point D est	image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$	image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $\frac{-\pi}{6}$

- 4- Quelle est la nature du triangle ABD ? justifier

Partie B : On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$

- 1- Trouver deux nombres réels a et b tels pour tout nombre complexe z , on ait :

$$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$$

- 2- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$

- 3- Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) Unité graphique 1 centimètre.

Placer les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = -7 + 5i$, $Z_B = -7 - 5i$ et $Z_C = i\sqrt{2}$

- 4- Déterminer l'affixe du point D telle que $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer le point D

SOLUTION 5

Partie A : $A(a = -1 + \sqrt{3} + i)$ $\Omega(\omega = -1 + 2i)$

1) $a - \omega = \sqrt{3} - i \Leftrightarrow a - \omega = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

2) Soit $M'(z')$ image de $M(z)$ par $h\left(\Omega, -\frac{1}{2}\right)$ et $r\left(\Omega, \frac{2\pi}{3}\right)$

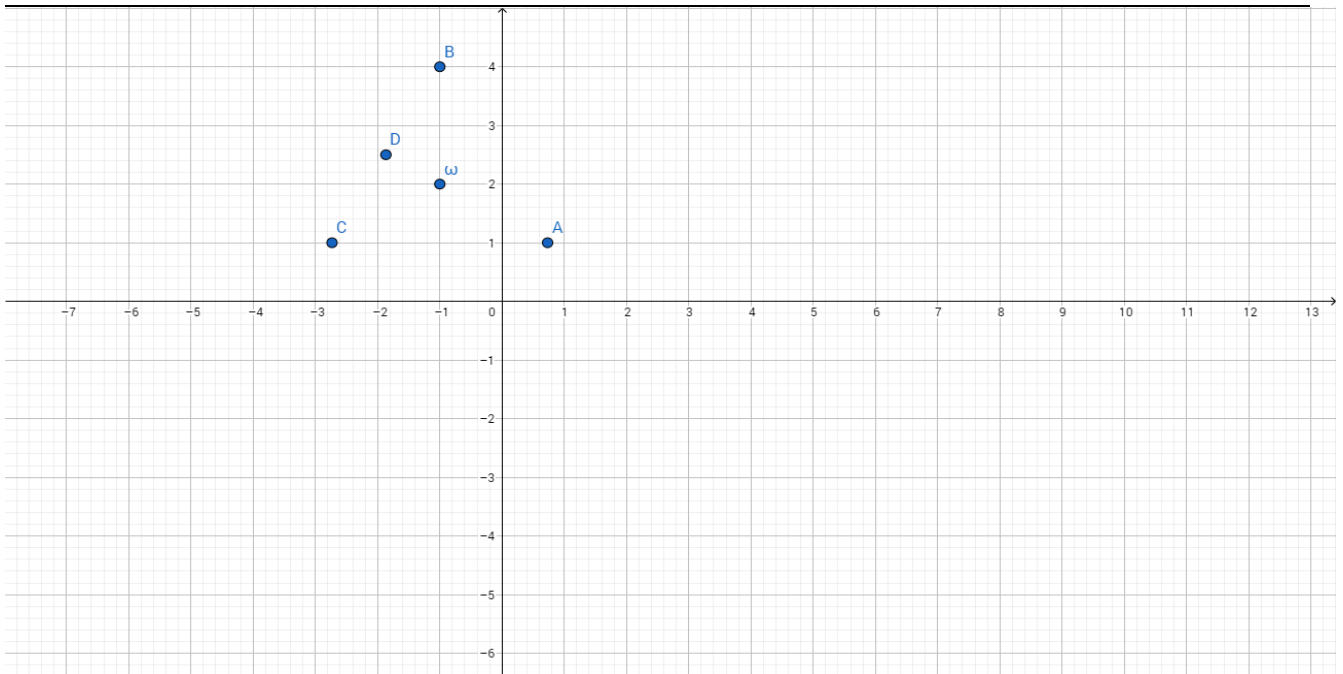
$$r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + \omega \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \Leftrightarrow z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{2\sqrt{3}-3+i(6+\sqrt{3})}{2}$$

$$z_B = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \frac{2\sqrt{3}-3+i(6+\sqrt{3})}{2} = -1 + 4i$$

$$z_C = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B + \frac{2\sqrt{3}-3+i(6+\sqrt{3})}{2} = -1 - \sqrt{3} + i$$

$$h(M) = M' \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \omega \left(1 + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}(-1 + 2i)$$

$$z_D = -\frac{1}{2}z_A + \frac{3}{2}(-1 + 2i) = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}(-1 + 2i) = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$



$$3) \quad B(b) \quad C(c) \quad \text{et} \quad D(d) \quad \frac{b-d}{a-d} = i \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Soit $M'(z')$ image de $M(z)$ par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$ alors $\overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$

$$\boxed{t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega} \Leftrightarrow z' - z = z_{\frac{1}{2}A\Omega} \quad \text{ou encore} \quad z' = z + z_{\frac{1}{2}A\Omega}}$$

$$\text{Mais } z_{\frac{1}{2}A\Omega} = \frac{\omega - a}{2} = \frac{-1 + 2i + 1 - \sqrt{3} - i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

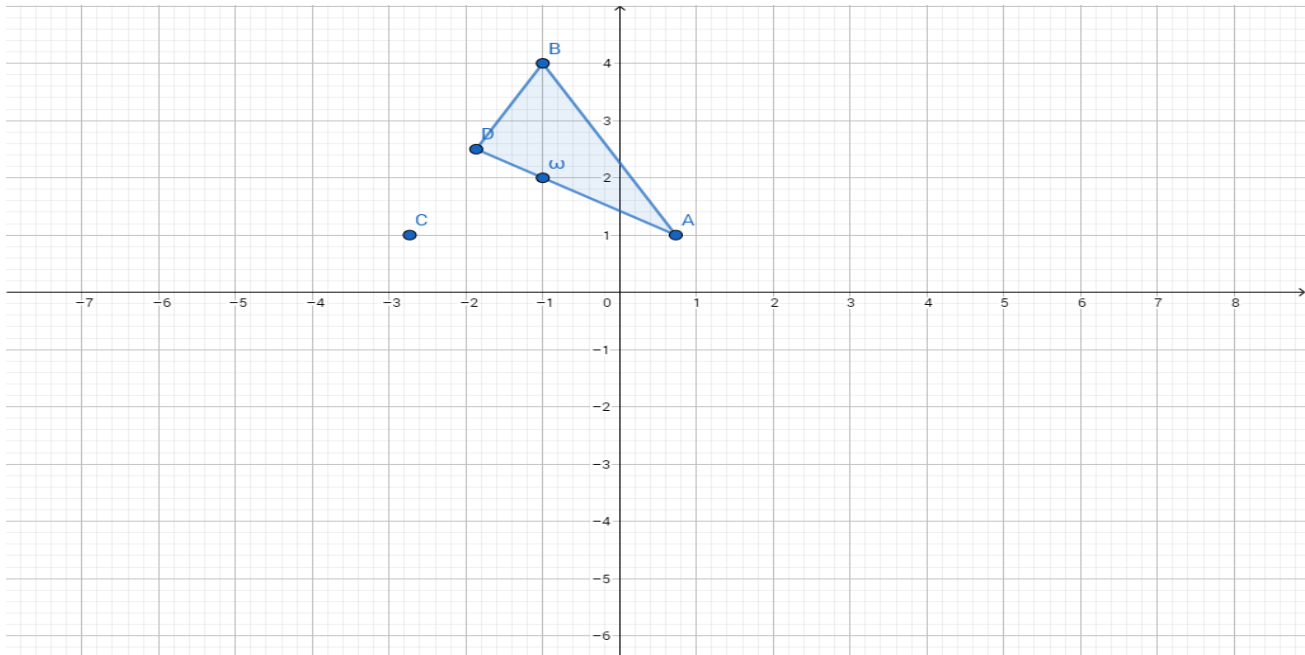
$$\text{Alors } \boxed{t(M) = M' \Leftrightarrow z' - z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{ou encore} \quad z' = z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

Dans notre cas : $z_D - z_\Omega = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou encore $z_D = z_\Omega - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ C'est à dire

$$d = \omega - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Donc on a $\omega - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i = d$ d'où D est l'image de Ω par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$

$$4) \quad \frac{b-d}{a-d} = i \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ alors le triangle } \mathbf{ABD} \text{ est rectangle en } D.$$



Partie B :

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}$$

1) Soit $z_0 = ib$ cette solution

$$P(ib) = 0 \Leftrightarrow -ib^3 + (14 - i\sqrt{2})(-b^2) + (74 - 14i\sqrt{2})(ib) - 74i\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -14b^2 + 14b\sqrt{2} = 0 \\ -b^3 + b^2\sqrt{2} + 74b - 74\sqrt{2} = 0 \end{cases} \text{ on montre facilement que } b = \sqrt{2} \text{ d'où } z_0 = i\sqrt{2}$$

2)

	1	$14 - i\sqrt{2}$	$74 - 14i\sqrt{2}$	$-74i\sqrt{2}$
$i\sqrt{2}$	↓	$i\sqrt{2}$	$14i\sqrt{2}$	$74i\sqrt{2}$
	1	14	74	0

$a = 1 ; b = 14$ et $c = 74$

3) $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + 14z + 74) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2}$ où

$z^2 + 14z + 74 = 0$

$\Delta' = b'^2 - ac = (-5i)^2$

$z_1 = -7 - 5i ; z_2 = -7 + 5i \quad S = \{i\sqrt{2}; -7 - 5i; -7 + 5i\}$

5- $z_A = -7 + 5i ; z_B = -7 - 5i$ et $z_C = i\sqrt{2}$. On prendra 1cm abscisse et 0,5cm en ordonn

EXERCICE 6

NB : Les parties **A** et **B** sont indépendantes

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique exigée à 2cm). On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = 4 + \frac{5}{2}i, \quad z_B = 4 - \frac{5}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = 2 + \frac{3}{2}i$$

- 1- Placer les points A, B et C dans la plan. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC et en déduire sa nature.
- 2- On désigne par **(E)**, l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation

$$|z - 4| = \frac{5}{2}$$
 - a- Les points A, B, C appartiennent-ils à **(E)** ?
 - b- Donner une interprétation géométrique de $|z - 4|$ en utilisant le point Ω d'affixe 4.
 - c- Quelle est la nature de **(E)** ? construire **(E)**.

Partie B

A tout point M d'affixe z , on fait correspondre par f le point M' d'affixe $z' = z - 4i$

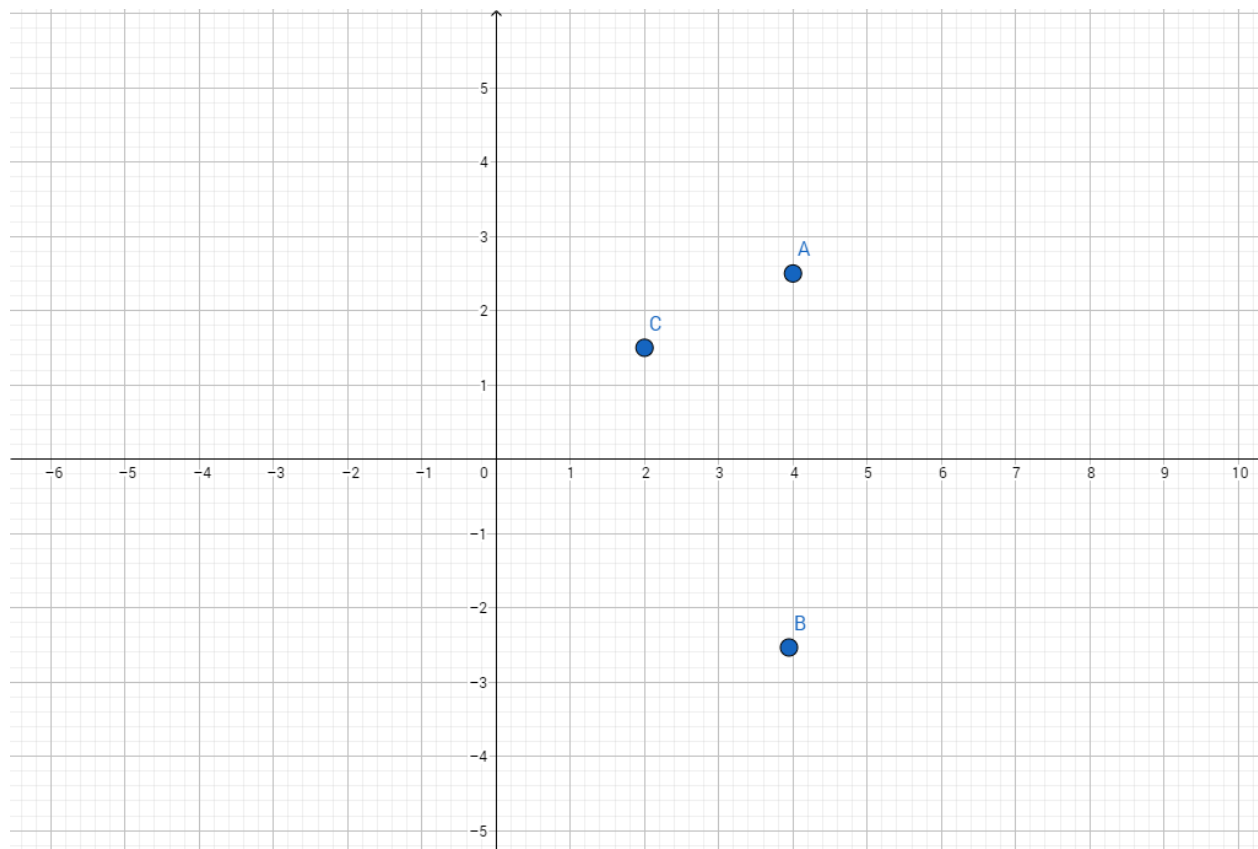
- 1- Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
 E est le point d'affixe $1 + i$ et F celui d'affixe $-2 - i$
 - a- Placer E et F sur une figure.
 - b- Déterminer les affixes des point E' et F' tels que $E' = f(E)$ et $F' = f(F)$
 - c- Placer E' et F' sur la même figure que E et F .

Soit J , le milieu du segment $[EF']$. Montrer que E', J et F sont alignés.

SOLUTION 6**Partie A :**

$$z_A = 4 + \frac{5}{2}i; \quad z_B = 4 - \frac{5}{2}i \quad \text{et} \quad z_C = 2 + \frac{3}{2}i$$

1)



$$AB = |z_B - z_A| = |5i| = 5$$

$$AC = |z_C - z_A| = |-2 - i| = \sqrt{5}$$

$$BC = |z_C - z_B| = \sqrt{20}$$

$$AB^2 = 25 ; AC^2 + BC^2 = 5 + 20 = 25 \text{ donc } AC^2 + BC^2 = AB^2$$

Ainsi le triangle **ABC** est rectangle en **C**.

Autrement :

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{i}{2} \text{ alors le triangle } \mathbf{ABC} \text{ est rectangle en } \mathbf{C}.$$

$$2) \ M(z) (E): |z - 4| = \frac{5}{2}$$

$$a) \ |z_A - 4| = \left| \frac{5}{2}i \right| = \frac{5}{2}. \text{ Alors } A \in (E)$$

$$|z_B - 4| = \left| -\frac{5}{2}i \right| = \frac{5}{2}. \text{ Alors } B \in (E)$$

$$|z_C - 4| = \left| -2 + \frac{3}{2}i \right| = \frac{5}{2}. \text{ Alors } C \in (E)$$

$$\text{b) } |z - 4| = \Omega M = d(\Omega, M)$$

$$\text{c) } (E): |z - 4| = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{5}{2} \text{ alors } (E) \text{ est le cercle de centre } \Omega \text{ et de rayon } r = \frac{5}{2}$$

Partie B :

$$z' = z - 4i \text{ par } f$$

$$1) \text{ } f \text{ est une translation de vecteur } \vec{u} \text{ d'affixe } z_{\vec{u}} = -4i$$

$$2) \text{ } z_E = 1 + i \quad z_F = -2 - i$$

a) Voir figure

$$\text{b) } f(E) = E' \Leftrightarrow z_{E'} = z_E - 4i = 1 - 3i$$

$$f(F) = F' \Leftrightarrow z_{F'} = z_F - 4i = -2 - 5i$$

c) J milieu de $[E'F']$

$$z_J = \frac{z_{E'} + z_{F'}}{2} = \frac{1 - 3i - 2 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - 2i$$

$$\frac{z_{E'} - z_F}{z_J - z_F} = \frac{1 - 3i + 2 + i}{-\frac{1}{2} - 2i + 2 + i} = 2 \in \mathbb{R}^* \text{ Alors les points } E' \text{ } F \text{ et } J \text{ sont alignés}$$

EXERCICE 7

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) on considère les points

A et B d'affixes respectives $Z_A = 1 - i$ et $Z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

1- Déterminer le module et un argument de Z_A .

2- a- Ecrivez le complexe $\frac{Z_A}{Z_B}$ sous forme algébrique et montrez que $\frac{Z_B}{Z_A} = (1 + \sqrt{3}) e^{\frac{i\pi}{3}}$

b- En-déduisez la forme exponentielle de Z_B .

3- On note B_1 l'image du point B par la rotation de centre O de d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

a- Déterminez l'affixe de B_1 . **1pts**

b- En déduisez que le point B_1 est le symétrique de B par rapport à l'axe (O, \vec{u}) .

SOLUTION 7

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

$$z_A = 1 - i \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i$$

$$1) |z_A| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$2) a) \frac{z_A}{z_B} = \frac{1 + \sqrt{3} - i\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{2(4 + 2\sqrt{3})} \Leftrightarrow \frac{z_A}{z_B} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})}$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2(1 + \sqrt{3})} \Leftrightarrow \boxed{\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$b) \text{ On a } \frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_B = (1 + \sqrt{3})z_A e^{i\frac{\pi}{3}} = (1 + \sqrt{3})\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_B = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}$$

3) $M'(z')$ image de $M(z)$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{(\sqrt{3} - i)}{2}z + 0$$

$$z_{B_1} = \frac{(\sqrt{3} - i)}{2}z_B = \frac{4 + 2\sqrt{3} - 2i}{2} = 2 + \sqrt{3} - i$$

$$[B \text{ et } B_1 \text{ sont symétrique par rapport à } (o, \vec{u})] \Leftrightarrow [z_{B_1} = \overline{z_B}]$$

or $z_{B_1} = 2 + \sqrt{3} - i = \overline{z_B}$ alors B et B_1 sont symétrique par rapport à l'axe (o, \vec{u}) .

EXERCICE 8

I- 1- Déterminez le nombre complexe t tel que
$$\begin{cases} t(1 + i) = 1 + 3i \\ it^2 = -4 + 3i \end{cases}$$

2- Pour tout nombre complexe Z on pose $f(Z) = Z^2 - (1 + 3i)Z - 4 + 3i$

a- Montrez que $f(Z)$ s'écrit sous la forme $(Z - t)(Z - it)$.

b- En déduire les solutions de $f(Z) = 0$ sous forme algébrique.

II- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) Unité graphique 2cm.

Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que

$$h(z) = z' = \frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

1- On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$

a- Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par h .

b- Placer A', B', C', A, B et C dans le plan.

2- On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

a- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de iz' en fonction de x et y .

b- Montrer que l'équation $h(z) = 0$ admet la droite $(D): y = 2x$ comme solution.

3- Montrer que pour tout complexe z : $\frac{z'-z}{z_A} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i \frac{z-\bar{z}}{3}$

En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

SOLUTION 8

$$\begin{cases} t(1+i) = 1+3i & (1) \\ it^2 = -4+3i & (2) \end{cases}$$

$$t = 2 + i$$

2) $f(z) = z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i$

a) $f(z) = (z-t)(z-it) = (z-2-i)(z-2i+1)$

$$f(z) = z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i$$

b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2+i$ où $z = -1+2i$ $S = \{2+i, -1+2i\}$

II) $h(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$

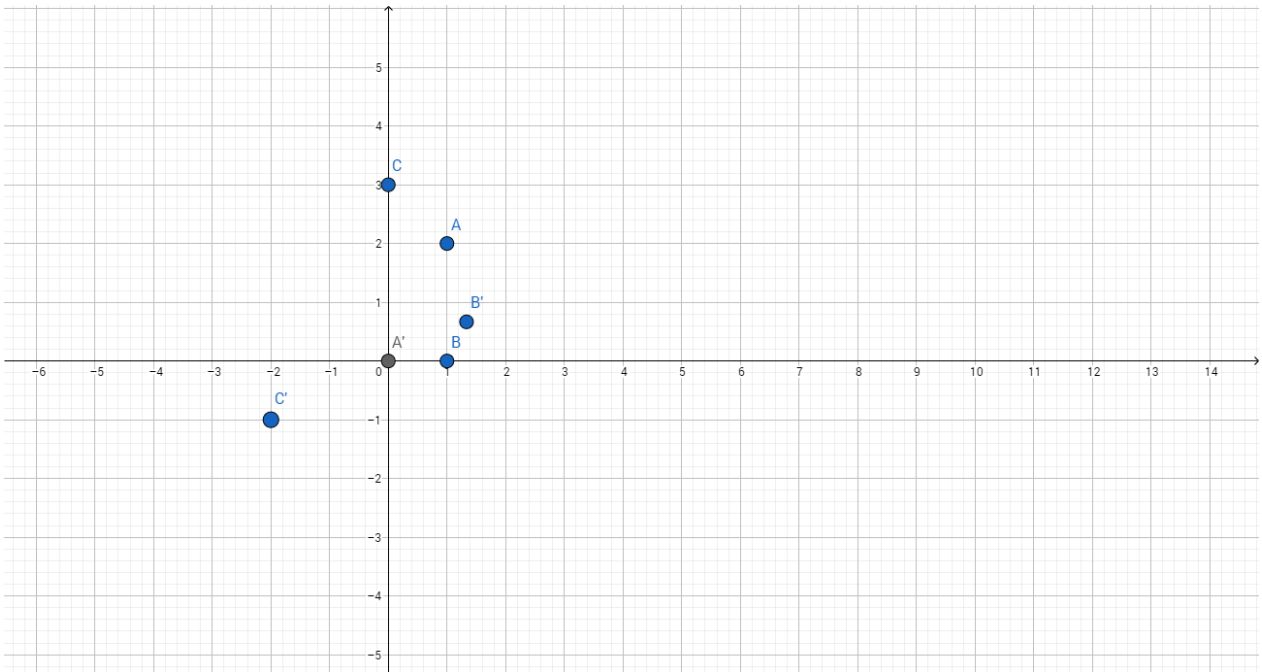
1) $z_A = 1+2i$; $z_B = 1$ et $z_C = 3i$

a) $h(A) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = \frac{(3+4i)z_A+5\bar{z}_A}{6} \Leftrightarrow \boxed{z_{A'} = 0}$ De même $\boxed{z_{B'} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i}$ $z_{C'} =$

$\boxed{-2-i}$

b)

c) Figure



2) a) $z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$iz' = i \left[\frac{(3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6} \right] = i \left[\frac{(3 + 4i)(x + iy) + 5(x - iy)}{6} \right] = \frac{-4x + 2y + i(8x - 4y)}{6}$$

b) $h(z) = 0 \Leftrightarrow ih(z) = 0 \Leftrightarrow iz' = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + y + i(4x - 2y)}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2x \end{cases}$$

Alors la droite d'équation $(D) : y = 2x$ est la solution de $h(z) = 0$

3) $\frac{z' - z}{z_A} = \frac{(-3 + 4i)z + 5\bar{z}}{6(1 + 2i)} \Leftrightarrow \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3} = \frac{z' - z}{z_A}$

Il suffit de rendre le dénominateur réel pour avoir ce résultat

Déduction :

$\forall z \in \mathbb{C} \quad z + \bar{z}$ est réel et $z - \bar{z}$ est imaginaire pure

$(z - \bar{z}) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow i(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $i(z - \bar{z})$ est un réel

$$\left. \begin{array}{l} \frac{z + \bar{z}}{6} \text{ est réel} \\ \frac{i(z - \bar{z})}{3} \text{ est réel} \end{array} \right\} \text{alors } \frac{z + \bar{z}}{6} + i \frac{z - \bar{z}}{3} \in \mathbb{R} \quad \text{c'est-à-dire } \frac{z' - z}{z_A} \in \mathbb{R}$$

EXERCICE 9

On rapporte le plan complexe au un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient les applications f et h d'inconnues complexe w et u définies par

$$f(w) = w^3 + 2 - 2i \quad \text{Et} \quad h(u) = u^3 - 4(i-1)u^2 - 2(2+7i)u - 16 + 8i$$

Partie A

- Déterminez le module et l'argument de chacun des nombres complexes vérifiant $f(w) = 0$
- Représentez les points dont les affixes sont solutions de $f(w) = 0$ et montrer que ces points sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Partie B

- Démontrez qu'il existe un et un seul réel r , (que l'on déterminera) vérifiant $h(r) = 0$.
- Déterminez les complexes a et b de façon à avoir $h(u) = (u-r)(u^2 + au + b)$.
- Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $h(u) = 0$
- Montrez que les trois points dont les affixes sont solutions de l'équation $h(u) = 0$ forment un triangle rectangle dans la plan.

Partie C

- A et C d'affixes respectives $3 + i$ et $1 + 3i$ sont deux sommets opposés d'un carré. Déterminer les affixes de B et D , les deux autres sommets de ce carré.
- Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés A, B et C de charges respectives $2, -1$ et 3 .

SOLUTION 9

$$f(w) = w^3 + 2 - 2i \quad h(u) = u^3 - 4(i-1)u^2 - 2(2+7i)u - 16 + 8i$$

Partie A :

$$1) f(w) = 0 \Leftrightarrow w^3 = -2 + 2i \quad \text{les racines cubiques de } -2 + 2i$$

$$\text{Soit } w = re^{i\theta}; \quad -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$w^3 = -2 + 2i \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Par identification} \begin{cases} r^3 = 2\sqrt{2} \\ 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{3\pi+8k\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}; \quad k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$$

Alors les solutions sont sous la forme $w_k = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})}; \quad k \in \{0; 1; 2\}$

Pour $k = 0$ alors $|w_0| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(w_0) = \frac{\pi}{4}$

Pour $k = 1$ alors $|w_1| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(w_1) = \frac{11\pi}{12}$

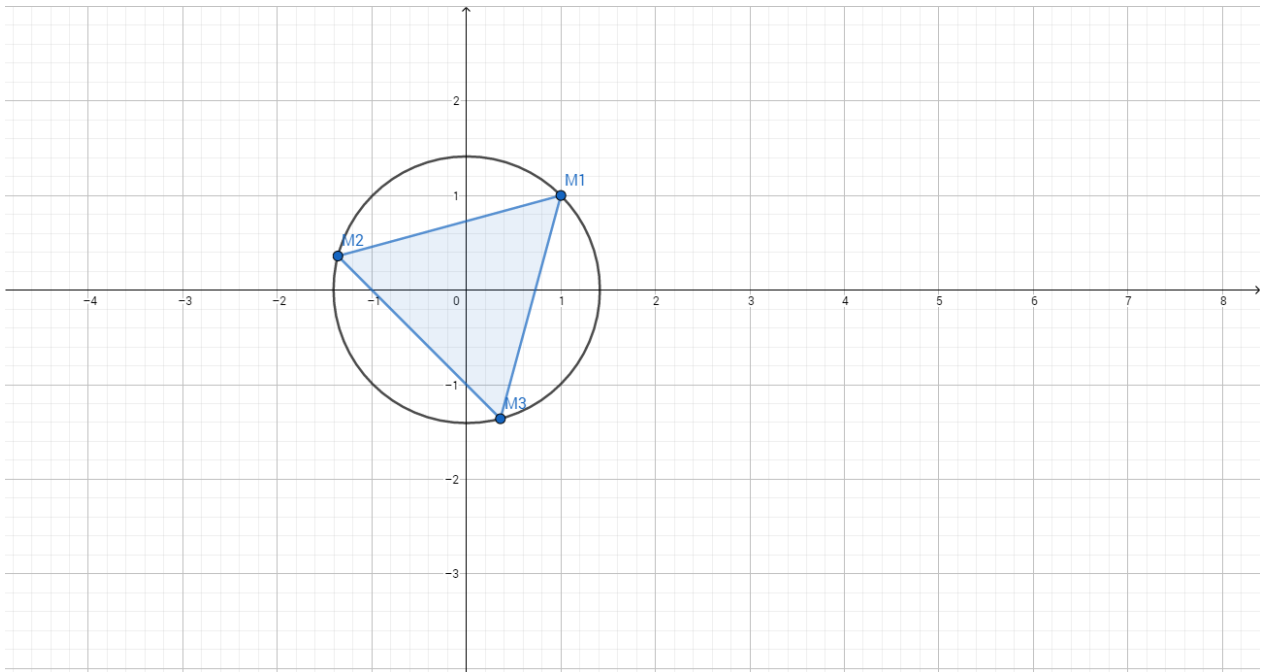
Pour $k = 2$ alors $|w_2| = \sqrt{2}$ et $\text{Arg}(w_2) = \frac{19\pi}{12}$

2) Soit $M_0(w_0)$; $M_1(w_1)$ et $M_2(w_2)$

M_0 ; M_1 et M_2 sont situés sur un cercle dont le rayon $R = \sqrt{2} = |w_i|$ avec $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$

La position de chaque point M_i sur le cercle est définie par l'argument du nombre complexe w_i $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$

NB : M_0 ; M_1 et M_2 forment un triangle équilatéral.



M_0 ; M_1 et M_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si

$$\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ ou } \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} = \frac{e^{i\frac{19\pi}{12}} - e^{i\frac{3\pi}{12}}}{e^{i\frac{11\pi}{12}} - e^{i\frac{3\pi}{12}}} = 1 + e^{i\frac{8\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ Il suffit de s'inspirer de la Proposition 7 de l'exercice 1.}$$

Ainsi $M_0; M_1$ et M_2 sont les sommets d'un triangle équilatéral.

Partie B :

1) $h(r) = r^3 - 4(i-1)r^2 - 2(2+7i)r - 16 + 8i = 0 \Leftrightarrow$

$$r^3 + 4r^2 - 4r - 16 + i(-4r^2 - 14r + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 + 4r^2 - 4r - 16 = 0 & (E_1) \\ -4r^2 - 14r + 8 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Posons $-4r^2 - 14r + 8 = 0 \Leftrightarrow 2r^2 + 7r - 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 \quad r_1 = -4 \text{ et } r_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{r = -4 \text{ vérifie } (E_1) \text{ et } (E_2)}$$

2)

	1	4-4i	-4-14i	-16+8i
-4	↓	-4	16i	16-8i
	1	-4i	-4+2i	0

$$h(u) = (u+4)(u^2 - 4iu - 4 + 2i)$$

3) $h(u) = 0 \Leftrightarrow \boxed{u = u_0 = -4}$ ou $u^2 - 4iu - 4 + 2i = 0$

$$\Delta' = -2i = (1-i)^2 \quad \boxed{u_1 = -1 + 3i} \text{ et } \boxed{u_2 = 1 + i} \quad \boxed{S = \{-4; -1 + 3i; 1 + i\}}$$

4) $\frac{u_0 - u_1}{u_2 - u_1} = \frac{-4 - (-1 + 3i)}{1 + i - (-1 + 3i)} = -\frac{3}{4}i$ alors les points images des solutions de $h(u) = 0$ forment

un triangle rectangle dans le plan.

Autre méthode

En prenant $A(-4); B(-1 + 3i)$ et $C(1 + i)$ on montre facilement que

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ (Théorème de Pythagore)}$$

Partie C :

1) On donne $A(3; 1)$ $B(1; 3)$

Le triangle **ABC** est rectangle et isocèle en **B** $\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \pm i \right)$.

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i \Leftrightarrow z_A - z_B = i(z_C - z_B) \Leftrightarrow z_B = \frac{z_A - iz_C}{1 - i} = 3 + 3i$$

De même on trouve $z_D = 1 + i$ vice versa $z_D = 3 + 3i$ et $z_B = 1 + i$

2) **G** barycentre du système $\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$

G a pour affixe $z_G = \frac{2z_A - z_B + z_C}{4}$ car $2 - 1 + 3 = 4 \neq 0$

$$\frac{2z_A - z_B + z_C}{4} = \frac{6 + 2i - 3 - 3i + 3 + 9i}{4} = \frac{3}{2} + 2i \quad \boxed{z_G = \frac{3}{2} + 2i \text{ alors } G\left(\frac{3}{2}; 2\right)}$$

EXERCICE 10

A- Soit $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

1- Ecrivez la valeur de $z_1 \times z_2$ sous trois formes différentes.

2- a- Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$

b- déduisez-en la résolution de $(E) : x \in \mathbb{R}; \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos x + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin x = 0$

B- 1- Résolvez dans \mathbb{C} l'équation $(G) : z^2 + (2\sqrt{3})z + 4 = 0$

2- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On désigne par **I** et **J** les points du plan d'affixes respectives $-\sqrt{3} - i$ et $-\sqrt{3} + i$

a- Placez les points **I** et **J** dans le plan.

b- Montrez par calcul que le point **J** est image de **I** par la rotation de centre **O** et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

3- Déduisez-en la nature du triangle **OIJ**

4- Soit **B** milieu du segment **[OI]**

Déterminez l'affixe de **B** et placez-le dans le même repère que précédemment.

5- Soit **A** le point du plan défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$

a- Déterminez l'affixe du point **A**.

b- Déterminez l'affixe du point **A'** image de **A** par la translation du vecteur \overrightarrow{IJ} .

SOLUTION 10

A) $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$

1) $z_1 \times z_2 = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$ est la forme algébrique

$$|z_1 \times z_2| = 2\sqrt{2} \text{ et } \text{Arg}(z_1 \times z_2) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$
 forme exponentielle

$$z_1 \times z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$
 sa forme trigonométrique

2) a) En égalisant les formes algébrique et trigonométrique on montre que
$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

b)
$$\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \cos x + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{12} \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

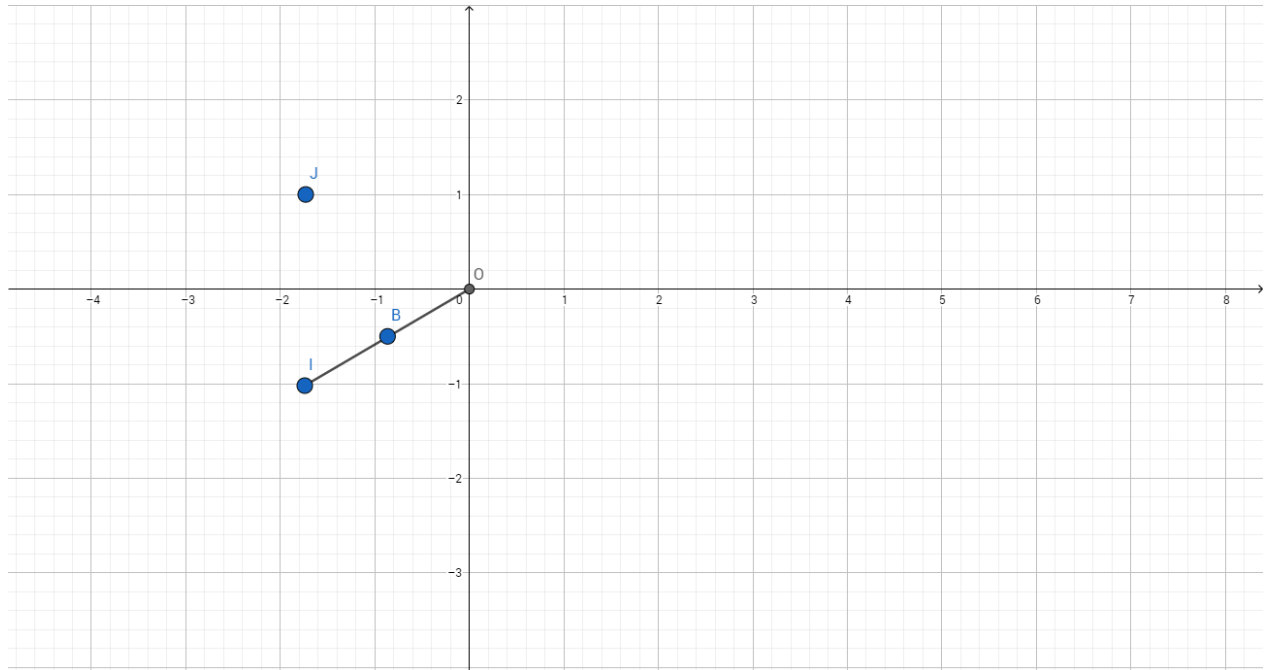
$$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi; -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right\}; k \in \mathbb{Z}$$

B) (G): $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

1) $\Delta = i^2$ donc $z \in \{-\sqrt{3} - i; -\sqrt{3} + i\}$

2) Soit les complexes $I(-\sqrt{3} - i)$ et $J(-\sqrt{3} + i)$

a)



b) $\left[M'(z') \text{ image de } M(z) \text{ par } r\left(O, -\frac{\pi}{3}\right) \right] \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

$z_J = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_I = -\sqrt{3} + i$ alors **J** est image de **I** par $r\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)$

c) $OI = OJ = IJ = |z_I| = |z_J| = |z_I - z_J| = 2$

D'où le triangle **OIJ** est équilatéral.

Autre méthode :

$$\frac{z_I - z_O}{z_J - z_O} = \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + i} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ Alors le triangle } \mathbf{OIJ} \text{ est équilatéral.}$$

3) **B** milieu du $[OI]$ $z_B = \frac{z_I}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ voir figure

4) $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$

a) $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{BA}} = -\frac{z_{OJ}}{2} \Leftrightarrow z_A - z_B = -\frac{z_J}{2}$ On montre après calcul que $\boxed{z_A = -i}$

b) $z_{A'} = z_A + z_{\overrightarrow{IJ}} \Leftrightarrow z_{A'} = z_A + z_J - z_I$

On montre que $\boxed{z_{A'} = i}$

EXERCICE 11

A- L'objectif de l'exercice est de résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^6 + 1 = 0$

1- Résolvez dans \mathbb{C} les deux équations : $(E) : z^2 + z\sqrt{3} + 1 = 0$ et $(F) : z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$

2- On appelle z_1 la solution d'une des équations (E) et (F) dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives. Exprimez les autres solutions en fonction de z_1 .

3- Trouvez le nombre réel a tels pour tout nombre complexe z , on ait :

$$z^6 + 1 = (z^2 + 1)(z^2 - az + 1)(z^2 + az + 1)$$

4- Déduisez-en, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^6 + 1 = 0$

5- Montrez que le produit des six solutions de $z^6 + 1 = 0$ est un carré parfait réel.

B- Mettre les complexes $a = 1 + i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique.

Déduisez-en l'écriture trigonométrique de $(ab)^{2004}$

SOLUTION 11

A) L'objectif c'est de résoudre $z^6 + 1 = 0$

$$1) (E) : z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \text{ et } (F) : z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$S_{(E)} = \{-\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i\} \text{ et } S_{(F)} = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i\}$$

$$2) \begin{matrix} \text{Re}(z_1) > 0 \\ \text{Im}(z_1) > 0 \end{matrix} z_1 = \sqrt{3} + i$$

$$-\sqrt{3} - i = -z_1, \quad \sqrt{3} - i = \bar{z}_1 \text{ et } -\sqrt{3} + i = -\bar{z}_1$$

$$3) z^6 + 1 = (z^2 + az + 1)(z^2 - az + 1)(z^2 + 1) = z^6 + (3 - a)z^4 + (3 - a^2)z^2 + 1$$

$$\text{Par identification : } 3 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{3} \text{ ou } a = -\sqrt{3}$$

$$\text{Alors } z^6 + 1 = (z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{3}z + 1)(z^2 - \sqrt{3}z + 1)$$

$$4) z^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$$

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -i$$

On en déduit les autres solutions des équations (E) et (F) d'où

$$S = \{-i; i; z_1; -z_1; \bar{z}_1; -\bar{z}_1\}$$

$$5) -i \times i \times z_1 \times (-z_1) \times \bar{z}_1 \times (-\bar{z}_1) = z_1^2 \times \bar{z}_1^2 = (z_1 \bar{z}_1)^2 = (|z_1|^2)^2 = 4^2 \text{ cqfd}$$

$$\mathbf{B) } a = 1 + i \quad b = 1 - i\sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{et } b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$ab = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{12}} \Leftrightarrow (ab)^{2004} = (2\sqrt{2})^{2004} e^{-i\frac{2004\pi}{12}} = 2^{3007} e^{i\pi}$$

$$(ab)^{2004} = 2^{3007} (\cos \pi + i \sin \pi)$$

EXERCICE 12

Soit $z = x + iy$ un complexe. On pose $u = \left(\frac{z}{1-i} \right)^2$

- 1- Pour quelle valeur de u , z vaut $1 + i$?
- 2- Pour quelles valeurs de z , u vaut 4 ?
- 3- Précisez la partie réelle et la partie imaginaire de u .
- 4- Déterminez les complexes z de parties réelles 5 tel que u soit réel.
- 5- Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) soit le point $M(z)$.
Déterminez et construisez l'ensemble des points M du plan pour que :
 - a- u soit réel.
 - b- u soit imaginaire pur.
 - c- La racine carrée du module de u soit égale à 1 .

SOLUTION 12

$$z = x + iy \quad u = \left(\frac{z}{1-i} \right)^2$$

$$1) \quad z = 1 + i$$

$$u = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2 = \frac{(2i)^2}{4} = -1 \quad \boxed{u = -1}$$

$$2) \quad u = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1-i} \right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{1-i} = 2 \quad \text{ou} \quad \frac{z}{1-i} = -2$$

$$\Leftrightarrow z = 2 - 2i \quad \text{ou} \quad z = -2 + 2i$$

$$3) \quad u = \left(\frac{x+iy}{1-i} \right)^2 = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{-2i} \Rightarrow u = -xy + i \frac{(x^2 - y^2)}{2}$$

$$4) \quad [x = 5 \text{ et } u \text{ est réel}] \Leftrightarrow [x = 5 \text{ et } \text{Im}(u) = 0] \Leftrightarrow$$

$$\left[x = 5 \text{ et } \frac{(x^2 - y^2)}{2} = 0 \right] \Leftrightarrow \frac{25 - y^2}{2} = 0 \Rightarrow y = 5 \quad \text{ou} \quad y = -5 \quad \text{d'où } z = 5 + 5i \quad \text{ou} \quad z = 5 - 5i$$

5) a) u réel $\Leftrightarrow \text{Im}(u) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ où $x = -y$ l'ensemble des points $M(z)$ est soit la première bissectrice (D): $y = x$, soit la deuxième bissectrice (D'): $y = -x$

b) $u \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(u) = 0 \Leftrightarrow -xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ où $y = 0$ l'ensemble des points $M(z)$ est soit l'axe réel (ox): $x = 0$ soit l'axe imaginaire (oy): $y = 0$

c) $\sqrt{|u|} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\left|\frac{z}{1-i}\right|^2} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z}{1-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z| = |1-i| = \sqrt{2}$

$|z| = \sqrt{2}$ alors $OM = \sqrt{2}$ alors l'ensemble des points $M(z)$ est le cercle de centre O et de rayon $r = \sqrt{2}$.

EXERCICE 13

I- Le but de cet exercice, est de trouver toutes les solutions de (E): $A^5 + 1 = 0$, $A \in \mathbb{C}$

1- Déterminez les racines 5^e de l'unité sous forme algébrique.

2- Soit $t = e^{i\frac{\pi}{5}}$. Mettez t^5 sous forme algébrique.

3- Montrez que l'équation (E): $A^5 + 1 = 0$ est équivalente à (E'): $\left(\frac{A}{t}\right)^5 = 1$

4- Déduisez des questions précédentes, toutes les solutions de l'équation (E): $A^5 + 1 = 0$ sous formes exponentielles.

II- Soit f la fonction complexe à deux variables définies par : $f(z_1, z_2) = 2i \frac{z_1 \times z_2}{z_1}$

1- Calculer $f(1+i, 2-2i)$ et mettez-le sous forme algébrique.

2- Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $f(i, z_2) = \frac{1}{2-i}$ d'inconnue z_2 et donnez la solution sous forme $z_2 = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , déterminez et construisez l'ensemble des points $M(z_2 = x + iy)$ pour que le module de $f(z_1, z_2)$ soit égal à 4.

SOLUTION 13

(E): $A^5 + 1 = 0$

1) Les racines cinquièmes de l'unité sont de la forme

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{5}}; k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Pour $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $z_k \in \left\{1; e^{i\frac{2\pi}{5}}; e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{6\pi}{5}}; e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$

2) $t = e^{i\frac{\pi}{5}}$

$$t^5 = \left(e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^5 = -1$$

3) Supposons $A^5 + 1 = 0$

$$A^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow A^5 = -1 = t^5 \Leftrightarrow \left(\frac{A}{t}\right)^5 = 1 \text{ vice versa}$$

4) $A^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{A}{t}\right)^5 = 1 \Leftrightarrow \frac{A}{t}$ est la racine 5^{ème} de l'unité

- $\frac{A}{t} = 1 \Leftrightarrow A = t = e^{i\frac{\pi}{5}}$
- $\frac{A}{t} = e^{i\frac{2\pi}{5}} \Leftrightarrow A = te^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{\pi}{5}}e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{3\pi}{5}}$
- $\frac{A}{t} = e^{i\frac{4\pi}{5}} \Leftrightarrow A = e^{i\pi}$
- $\frac{A}{t} = e^{i\frac{6\pi}{5}} \Leftrightarrow A = e^{i\frac{7\pi}{5}}$
- $\frac{A}{t} = e^{i\frac{8\pi}{5}} \Leftrightarrow A = e^{i\frac{9\pi}{5}}$

$$S = \left\{e^{i\frac{\pi}{5}}, e^{i\frac{3\pi}{5}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{7\pi}{5}}, e^{i\frac{9\pi}{5}}\right\}$$

II) $f(z_1, z_2) = 2i \frac{z_1 \times z_2}{z_1}$

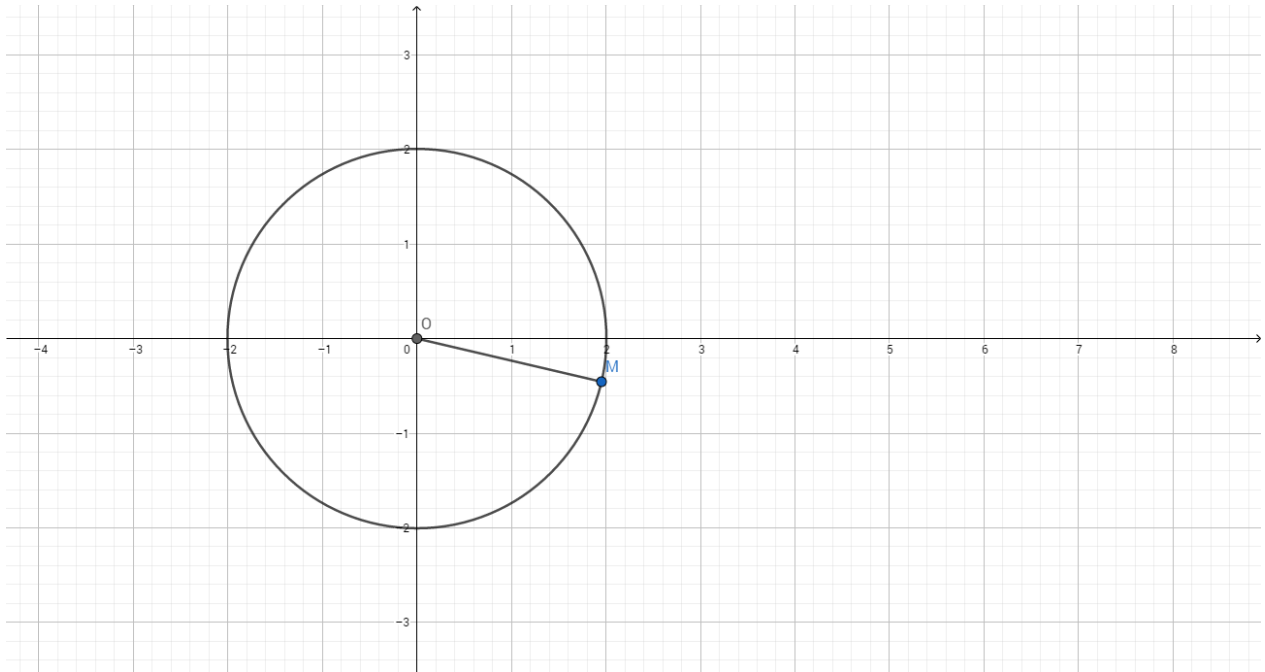
1) $f(1+i; 2-2i) = 2i \frac{(1+i)(2-2i)}{1-i} = -4 + 4i$

$$f(1+i; 2-2i) = -4 + 4i$$

2) $f(i; z_2) = \frac{1}{2-i} \Leftrightarrow 2i \frac{i \times z_2}{2-i} = \frac{1}{2-i} \Leftrightarrow z_2 = -\frac{1}{10} + \frac{i}{5}$

$$|f(z_1, z_2)| = 4 \Leftrightarrow |2i| \left| \frac{z_1}{z_1} \right| |z| = 4 \Leftrightarrow |z| = 2 \Leftrightarrow OM = 2 \text{ l'ensemble des points } M(z) \text{ est le}$$

cercle de centre **O** et de rayon **2**.



EXERCICE 14

I- θ désigne un nombre réel appartenant à $[0; 2\pi[$

1- Résolvez dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $(F) \quad z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$

2- Donnez chaque solution de (F) sous forme trigonométrique et exponentielle.

3- Dans le plan complexe muni du repère $(0, \vec{u}, \vec{v})$, les points A et B ont pour affixes les solutions de l'équation (F) . Déterminez θ de manière à ce que $0AB$ soit un triangle équilatéral.

II- Soit l'équation $(G): z^5 = 1$.

1- Résolvez dans \mathbb{C} l'équation (G) et donnez les solutions sous forme exponentielle.

2- a- Démontrez que la somme des solutions de (G) est nulle.

b- Déduisez-en que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$

Déduisez de la question 2-) b-) que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$ et précisez la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$

SOLUTION 14

$$\theta \in [0; 2\pi[$$

1) $(F): z^2 - (2^{\theta+1} \cos \theta)z + 2^{2\theta} = 0$

$$\Delta' = 2^{2\theta} \cos^2 \theta - 2^{2\theta} = 2^{2\theta} (\cos^2 \theta - 1) = (2^\theta i \sin \theta)^2$$

$$z_1 = 2^\theta (\cos \theta - i \sin \theta) \text{ et } z_2 = 2^\theta (\cos \theta + i \sin \theta)$$

2) $\boxed{z_1 = 2^\theta e^{-i\theta} \text{ et } z_2 = 2^\theta e^{i\theta}}$ **Forme exponentielle**

$$\boxed{S = \{2^\theta e^{-i\theta}; 2^\theta e^{i\theta}\}}$$

$\boxed{z_1 = 2^\theta (\cos \theta - i \sin \theta) \text{ ou } z_2 = 2^\theta (\cos \theta + i \sin \theta)}$ **Forme trigonométrique**

3) $A(z_1) B(z_2)$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

II) (G): $z^5 = 1$

1) $z \in \left\{1; e^{i\frac{2\pi}{5}}; e^{i\frac{4\pi}{5}}; e^{i\frac{6\pi}{5}}; e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$ **voir exercice 13**

2) a) $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^2 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3 + \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4$

Posons $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ on aura $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1-z^5}{1-z} = \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5}{1-e^{i\frac{2\pi}{5}}} = 0$ d'où la somme des solutions est nulle.

b) On sait que $e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}}$ et $e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}$.

Alors $1 + e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = 0 \Leftrightarrow 1 + \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}}}_{2 \cos \frac{2\pi}{5}} + \underbrace{e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}}}_{2 \cos \frac{4\pi}{5}} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2} \text{ cqfd}$$

3)

$$4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1 = 0$$

Posons $X = \cos \frac{2\pi}{5}$, $X > 0$

$$4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos^2 \frac{2\pi}{5} - 1 = 0 \text{ devient } 4X^2 + 2X - 1 = 0$$

$$\Delta' = 5 \quad X = \frac{-2-\sqrt{5}}{8} < 0 \text{ (À rejeter) ou } X = \frac{-2+\sqrt{5}}{8}$$

Donc on a $\boxed{\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-2+\sqrt{5}}{8}}$

EXERCICE 15

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Pour réaliser la figure, on prendra comme unité graphique **1 cm**.

Soit Ω le point d'affixe $\omega = 5$ et (Γ) le cercle de centre Ω et de rayon 5.

Soient **A**, **B** et **C** les points d'affixes respectives $a = 5 + 5i$, $b = 1 + 3i$ et $c = 8 - 4i$

1- Pointez **A**, **B** et **C** dans le repère.

2- Montrez par calcul que **A**, **B** et **C** sont des points du cercle (Γ) .

3- Soit **D** le point d'affixe $d = 2 + 2i$.

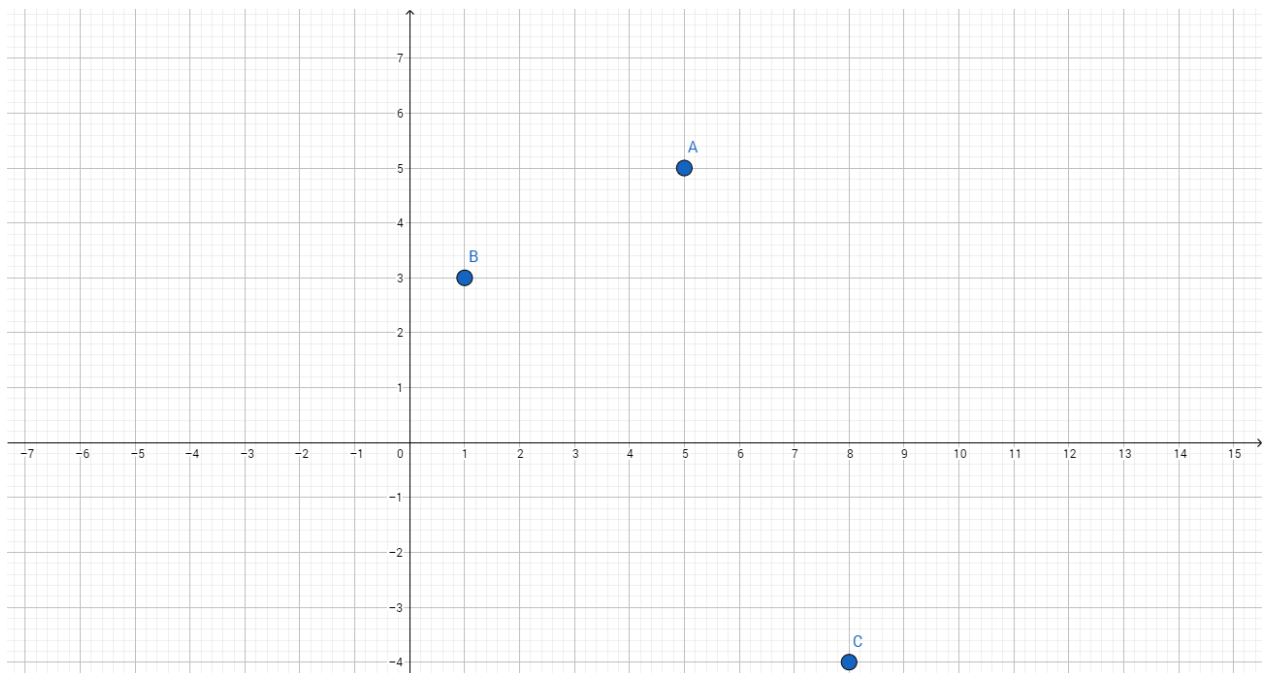
a- Démontrez que **D** est sur la droite **(BC)**.

c- Déduisez-en que **D** est le projeté orthogonal de **O** sur la droite **(BC)**.

SOLUTION 15

$$\Omega(\omega = 5) \quad \forall M(z) \quad (\Gamma): |z - 5| = 5 \quad A(5 + 5i) \quad B(1 + 3i) \quad C(8 - 4i)$$

1)



2) $|z_A - 5| = |z_B - 5| = |z_C - 5| = 5$ il suffit de calculer. Alors on conclut que les points **A**, **B** et **C** appartiennent à (Γ)

3) $D(2 + 2i)$

- a) $\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D} = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R}^*$ alors les points **B, C et D** sont alignés. Donc $D \in (BC)$
- b) $D \in (BC)$ si D est le projeté orthogonale de O sur (BC) alors le triangle ODB est rectangle en D . Il suffit de montrer que $\frac{z_B - z_D}{z_O - z_D} = -i$

EXERCICE 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

À tout point $M(z)$ du plan différent de O , on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{20}{\bar{z}}$

où \bar{z} désigne le nombre conjugué de z

1- Justifiez que $\frac{z}{z'}$ est un nombre réel et déduisez-en la nature de la figure formée par les points O, M et M'

2- Soit (Δ) la droite d'équation $x = 2$ et $M(z)$ un point de (Δ) .

On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M .

a- Démontrez que $z + \bar{z} = 4$.

b- Soit (E) l'ensemble des points $M(z)$ vérifiant $|z - 5| = 5$

Démontrez que le point M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et de l'ensemble (E)

c- Placez sur la figure un point M de (Δ) et construisez le point M' correspondant.

SOLUTION 16

$$z' = \frac{20}{\bar{z}}$$

$$1) \frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}}{20} = \frac{|z|^2}{20} \in \mathbb{R}_+$$

$$\frac{z}{z'} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z-0}{z'-0} = \frac{z-z_0}{z'-z_0} \in \mathbb{R} \text{ alors les points } M, M' \text{ et } O \text{ sont alignés}$$

2) $(\Delta): x = 2 \quad M(z) \in (\Delta)$

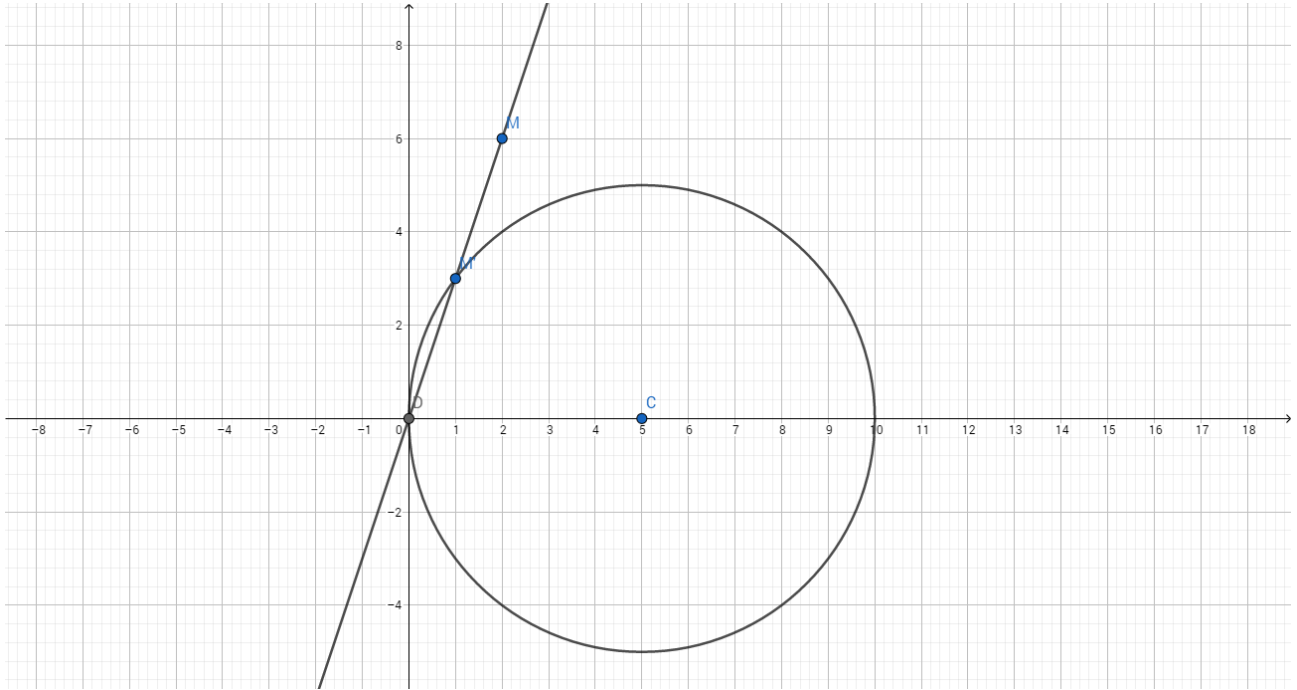
a) $M(z) \in (\Delta)$ alors $z = 2 + iy, y \in \mathbb{R}$

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 2 \times 2 = 4 \text{ cqfd}$$

b) (E): $|z - 5| = 5$

$$M' \in (OM) \cap (E) \Leftrightarrow \begin{cases} OMM' \text{ sont alignés et} \\ |z' - 5| = 5 \end{cases} \text{ à démontrer}$$

- D'après 1) O, M et M' sont alignés
- $|z' - 5| = \left| \frac{20}{\bar{z}} - 5 \right| = 5 \left| \frac{4}{\bar{z}} - 1 \right| = 5 \left| \frac{z+\bar{z}}{\bar{z}} - 1 \right| = 5 \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = 5 \left| \frac{z}{z} \right| = 5$ d'où $M \in (OM) \cap (E)$



EXERCICE 17

1- Ecrivez chacun des complexes ci-dessous sous la forme $\mathbf{re^{i\theta}}$, $\mathbf{r > 0}$ et $\mathbf{\theta \in \mathbb{R}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{A} = -\cos \frac{x}{2} - i \sin \frac{x}{2}, \quad \mathbf{B} = -i\sqrt{2} e^{-i3x} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sin x - i \cos x}$$

2- On considère les complexes : $\mathbf{z_1 = a - ia}$ et $\mathbf{z_2 = 3b + ib\sqrt{3}}$ où $\mathbf{a < 0}$ et $\mathbf{b > 0}$

a- Déterminez le module et un argument des complexes $\mathbf{z_1}$ et $\mathbf{z_2}$

b- On pose $\mathbf{Z = z_1 \times z_2}$

i- Ecrivez \mathbf{Z} sous forme algébrique.

ii- Trouvez le module et un argument de \mathbf{Z} puis écrivez-le sous forme trigonométrique

- iii- Déduisez des questions précédentes que les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$ sont indépendantes de **a et b**.

SOLUTION 17

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \quad A = -\cos \frac{x}{2} - i \sin \frac{x}{2} \Leftrightarrow A = -\left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2}\right) = e^{i\pi} e^{i\frac{x}{2}} = e^{i\left(\pi + \frac{x}{2}\right)}$$

$$A = e^{i\left(\pi + \frac{x}{2}\right)} \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad \theta = \pi + \frac{x}{2}$$

$$B = -i\sqrt{2}e^{-3ix} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-3ix} = \sqrt{2}e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)} \quad r = \sqrt{2} \quad \theta = -\frac{\pi}{2} - 3x$$

$$C = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{\sin x - i \cos x} = \frac{\sqrt{2}^2 e^{i\frac{\pi}{4}}}{-i(\cos x + i \sin x)} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{ix}} = 2e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)}$$

$$C = 2e^{-i\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)} \quad r = 2 \quad ; \quad \theta = \frac{3\pi}{4} - x$$

$$2) \quad z_1 = a - ia \text{ et } z_2 = -3b + ib\sqrt{3} \quad b > 0 \quad a < 0$$

$$a) \quad |z_1| = -a\sqrt{2} \quad \arg(z_1) = \arg(a) + \arg(1 - i) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_1) = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$|z_2| = 2b\sqrt{3} \quad \arg(z_2) = \arg(3 + i\sqrt{3}) + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \quad Z = z_1 \times z_2$$

$$i) \quad Z = ab[3 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)]$$

$$ii) \quad |Z| = -2ab\sqrt{6} \quad \arg(Z) = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$Z = -2ab\sqrt{6} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

En égalisant les formes trigonométriques et algébriques, on montre que :

$$\begin{cases} \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

EXERCICE 18

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) L'unité graphique est 1 cm.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.

On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distinct de i , associe son

Image M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

1- Soit le point **D** d'affixe $z_D = 1 - i$. On désigne par **D'** l'image du point **D** par **f**.

Déterminez $z_{D'}$, sous forme algébrique.

2- Montrez qu'il existe un unique point, noté **E**, dont l'image par l'application **f** est le point d'affixe $2i$.

3- Démontrez que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AE} sont colinéaires

4- On pose $z = x + iy$. Ecrivez z' sous forme algébrique.

5- Déterminez et construisez les ensembles respectifs (**E**) et (**F**) des points **M**(**z**) du plan pour que :

a- $\text{Arg}(z') \equiv \frac{\pi}{2} [k\pi]$

b- $\text{Arg}(z') \equiv 0 [k\pi]$

c- Module de z' soit égal à l'unité réelle.

SOLUTION 18

$$z_A = 2 - 3i \quad z_B = i \quad \text{et} \quad z_A = 6 - i \quad f(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$$

1) $z_{D'} = \frac{i(z_D-2+3i)}{z_D-i} = -i$

2) $z'_E = 2i \Leftrightarrow \frac{i(z_E-2+3i)}{z_E-i} = 2i$. Après calcul on obtient $z_E = -2 + 5i$

3) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AE} \Leftrightarrow \frac{z_A-z_E}{z_B-z_E} \in \mathbb{R}^*$. Après opération on obtient $\frac{z_A-z_E}{z_B-z_E} = 2 \in \mathbb{R}^*$

4) $z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i} \Leftrightarrow z' = \frac{2-4x-2y}{x^2+(y-1)^2} + \frac{i(y^2+2y+x^2-2x-3)}{x^2+(y-1)^2}$$

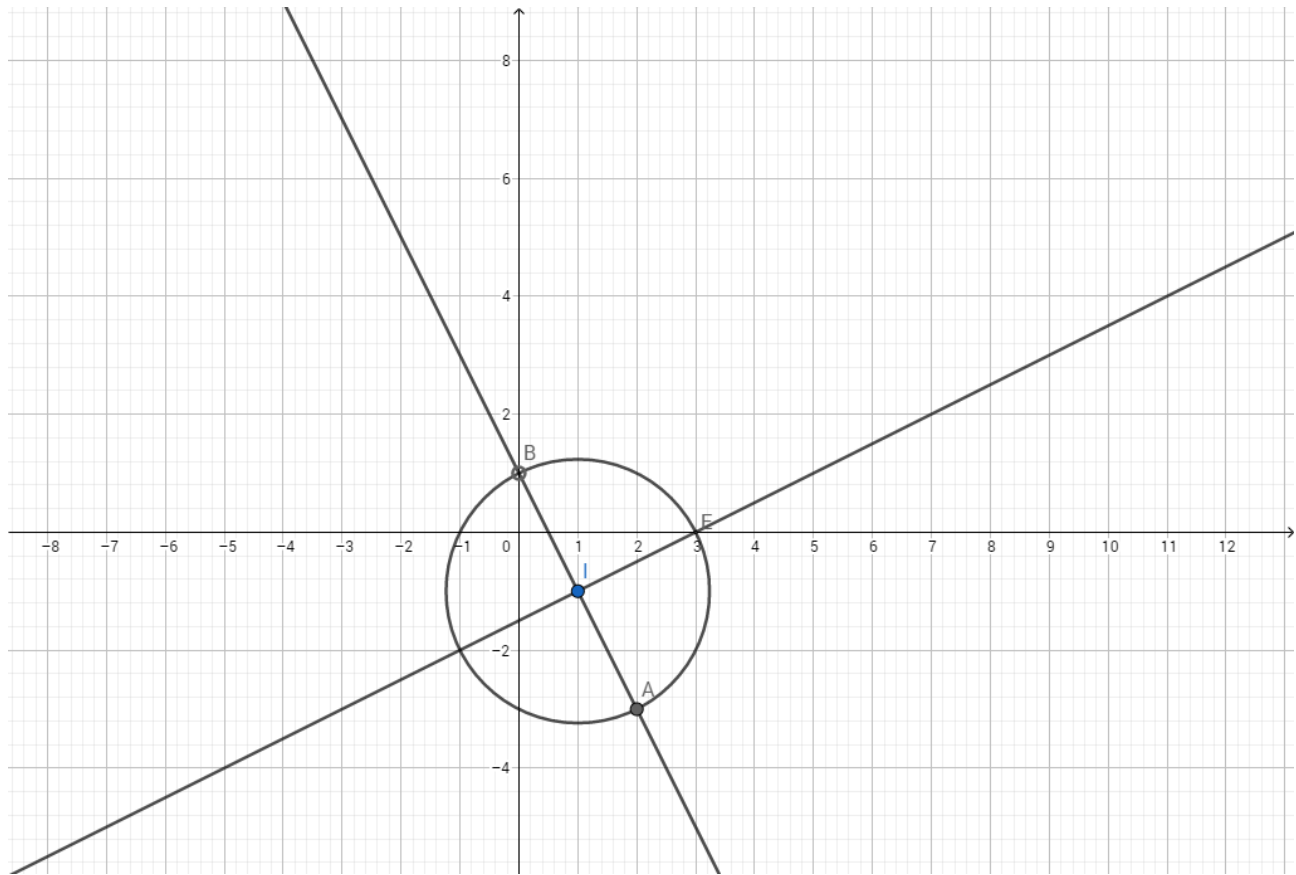
5) a) (**E**): $\text{Arg}(z') \equiv \frac{\pi}{2} [k\pi]; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (z' \text{ est imaginaire pur}) \Leftrightarrow \text{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x \neq 0 \text{ et } y \neq 1 \end{cases} \text{ l'ensemble (E) est la droite (D) : } 2x + y - 1 = 0 \text{ privée du point } B(0; 1).$$

b) (**F**): $\text{Arg}(z') \equiv 0 [k\pi] \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{5})^2 \\ x \neq 0 \text{ et } y \neq 1 \end{cases}, \text{ l'ensemble (F) est le cercle de centre } I(1; -1) \text{ et de}$$

rayon $r = \sqrt{5}$ privée de **B**



c) $|z'| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{i(z-2+3i)}{z-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B|$ alors **(G)** est la médiatrice du segment $[AB]$ avec $z_A = 2 - 3i$ et $z_B = i$

EXERCICE 19

On considère les points **A, B, C** et **D** d'affixes respectives $z_A = 4 + i$, $z_B = 1 + i$

$$z_C = 5i \text{ et } z_D = -3 - i$$

1- Placez ces points sur une figure.

2- Soit **f**, l'application du plan **P** dans lui-même qui à tout point **M** d'affixe z associe son point transformé **M'** d'affixe z' tel que : $z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$

a- Précisez les images des points **A** et **B** par **f**

b- Montrez que **f** admet un unique point invariant Ω dont on précisera l'affixe ω

NB : Un point est dit invariant par une application, si son point transformé par **f** est lui-même c'est-à-dire $f(M) = M$

3- a- Montrez que pour tout complexe z on a : $z' - z = -2i(2 - i - z)$

b- En déduire pour tout point $M(z)$ différent du point $\Omega(\omega)$ la valeur de $\frac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure

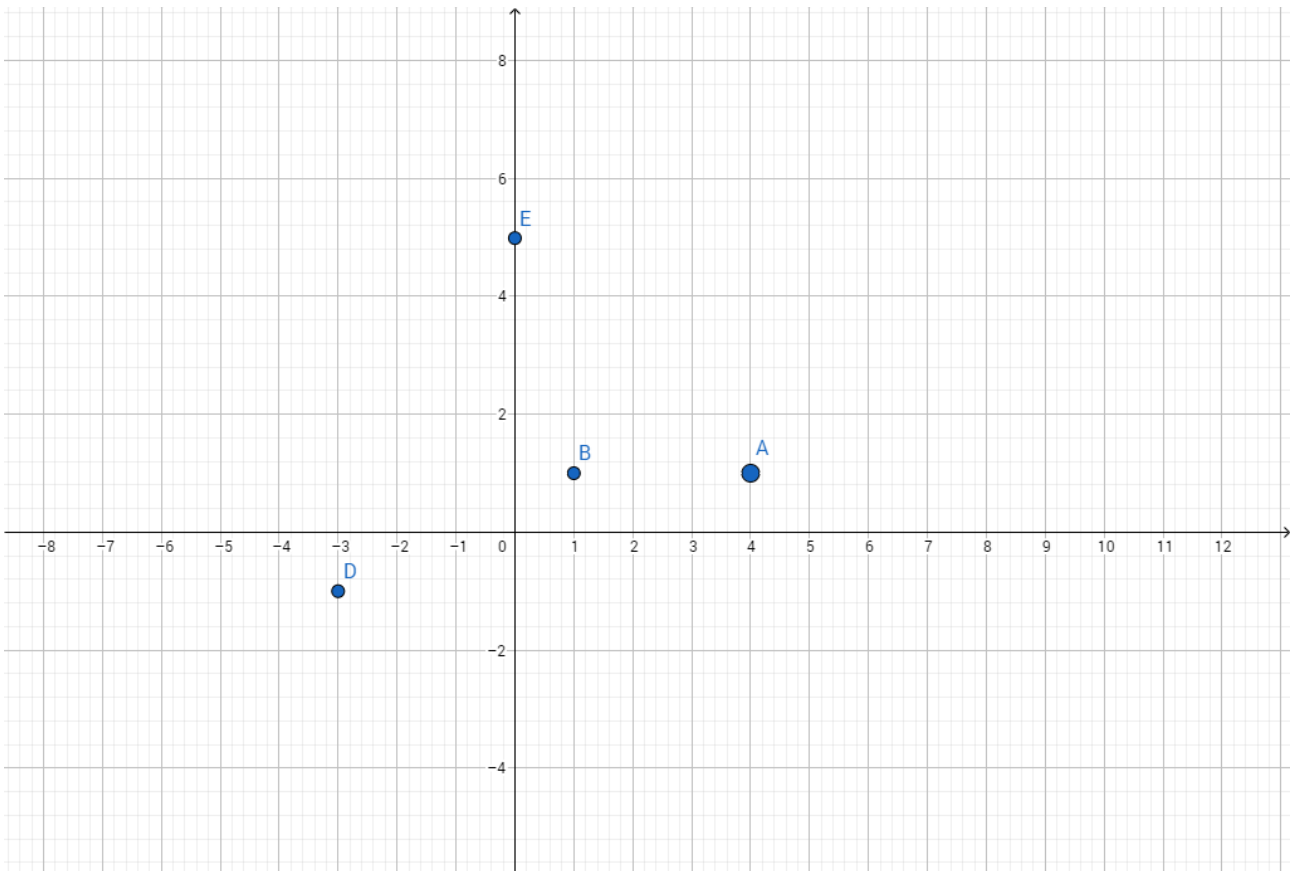
en radians de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$

c- Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?

SOLUTION 19

$$z_A = 4 + i \quad z_B = 1 + i \quad z_C = 5i \quad z_D = -3 - i$$

1)



2) $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = (1 + 2i)z - 2 - 4i$

a) $z_{A'} = (1 + 2i)z_A - 2 - 4i = 5i \quad z_{B'} = (1 + 2i)z_B - 2 - 4i = -3 - i$

b) $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow (1 + 2i)z - 2 - 4i = z \Leftrightarrow z = 2 - i \quad \omega = 2 - i$

3) a) $z' - z = 2iz - 2 - 4i \Leftrightarrow z' - z = 2i(2 - i - z)$ **cqfd**

b) **On a** $z' - z = 2i(2 - i - z) \Leftrightarrow \frac{z' - z}{2 - i - z} = 2i \Leftrightarrow \frac{z' - z}{\omega - z} = 2i$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z' - z}{\omega - z} \right| = |2i| \quad \Leftrightarrow \frac{MM'}{\Omega M} = 2$$

$$\text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}) = \text{Arg}\left(\frac{z' - z}{\omega - z}\right) \Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{MM'}) = -\frac{\pi}{2}$$

c) $\text{mes}(\widehat{M}) = -\frac{\pi}{2}$. Alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M.

EXERCICE 20

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère l'équation (E) : $Z^3 + (-8 + i)Z^2 + (17 - 8i)Z + 17i = 0$

- 1- Montrez que l'équation (E) admet une solution de la forme $z_0 = iy$ où y est un réel à déterminer
- 2- En déduire une forme factorisée du polynôme $Z^3 + (-8 + i)Z^2 + (17 - 8i)Z + 17i$
- 3- Finalisez alors la résolution de l'équation (E) dans \mathbb{C} .
- 4- On appelle **A, B et C** les points d'affixes respectives $4 + i$, $4 - i$ et $-i$
 - a- Soit **D** le point d'affixe **2**. On appelle **S** le point tel que le triangle **DAS** soit rectangle isocèle direct en **D**. Calculez l'affixe de **S**.
 - b- Démontrez que les points **B, A, S, C** appartiennent à un même cercle **C** dont on déterminera le centre et le rayon. Tracez **C**.

SOLUTION 20

$$(E): z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

- 1) $z_0 = -i$ est solution de (E).
- 2) On peut utiliser la division euclidienne soit le tableau d'Hörner soit la méthode des coefficients indéterminées

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i & z + i \\
 \hline
 -z^3 & \\
 \quad -iz^2 & \\
 \quad \quad -8z^2 + (17 - 8i)z & \\
 \quad \quad \quad 17z + 17i & \\
 \quad \quad \quad \quad -17z - 17i & \\
 \hline
 & 0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 z^2 - 8z + 17
 \end{array}$$

$$(E): (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$1) (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \Leftrightarrow \boxed{z \in \{-i; 4 - i; 4 + i\}}$$

2) $A(4 - i) B(4 + i) C(-i)$

a) $D(2) \frac{z_S - z_D}{z_A - z_D} = i \Leftrightarrow \boxed{z_S = iz_A + (1 - i)z_D = 1 + 2i}$

b) Supposons que k soit le centre de ce cercle ; alors k est à égale distance des points A, S, C et B . Posons $z_K = x + iy$

$$\begin{cases} AK = BK \\ SK = CK \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_K - z_A| = |z_K - z_B| \\ |z_K - z_S| = |z_K - z_C| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 4 + i(y - 1)| = |x - 4 + i(y + 1)| \\ |x - 1 + i(y - 2)| = |x + i(y + 1)| \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(x - 4)^2 + (y + 1)^2} \\ \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{z_K = 2 = z_D}$$

EXERCICE 21

Soit $\theta \in [-\pi, \pi]$, on pose les complexes $z = \frac{1}{2} [\sin \theta + i(1 - \cos \theta)]$ et $t = 4i z^2$

1- Déterminez le module et un argument de z en fonction de θ .

a- En déduire le module et un argument de t .

b- Déduire toujours de 1) la valeur de θ pour qu'on ait $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2}$

2- Dans cette partie $\theta \in]0, \pi[$

a- Ecrivez $z - i$ et $\frac{z}{z - i}$ sous forme trigonométrique (avec $z = \frac{1}{2} [\sin \theta + i(1 - \cos \theta)]$)

b- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , On considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z - i}$

Déterminez et construisez les ensembles décrits respectivement par les points M et N , lorsque θ parcourt $]0, \pi[$

SOLUTION 21

$$\theta \in [-\pi; \pi] \quad z = \frac{1}{2} [\sin \theta + i(1 - \cos \theta)]$$

1) a) $z = \frac{1}{2} [\sin \theta + i(1 - \cos \theta)] = z = \frac{1}{2} \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + i \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \Leftrightarrow$

$$z = \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) i = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} \Leftrightarrow \boxed{z = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}}$$

Mais $-\pi \leq \theta \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos \frac{\theta}{2} > 0$.

Alors $|z| = \cos \frac{\theta}{2}$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

b) $|t| = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$

$$\arg(t) = \frac{\pi}{2} + 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} - \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(t) = \frac{3\pi}{2} - \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

c) $z = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z = z \Leftrightarrow \cos \frac{\theta}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

2) $\theta \in]0; \pi[$ alors $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$

a) $z - i = \frac{1}{2} [\sin \theta + i(1 - \cos \theta)] - i = \frac{1}{2} [\sin \theta + i(-1 - \cos \theta)]$

$$\Leftrightarrow z - i = \frac{1}{2} \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - i \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z - i = \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)} \text{ avec } \sin \frac{\theta}{2} > 0$$

$$\left| \frac{z}{z-i} \right| = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = \cotg \frac{\theta}{2} \quad \text{Arg} \left(\frac{z}{z-i} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

D'où $\frac{z}{z-i} = \cotg \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

b) $H(z-i)$ et $N\left(\frac{z}{z-i}\right)$

$$z - i = \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad 0 < \theta < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq 0$$

Le point $M(z-i)$ parcourt le quatrième quadrant du centre O et de rayon $r = \sin \frac{\theta}{2}$.

$\frac{z}{z-i} = \frac{\cotg \frac{\theta}{2}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = i \cotg \frac{\theta}{2}$ Mais $\cotg \frac{\theta}{2} > 0$ ainsi le point N parcourt la partie positive de l'axe imaginaire

EXERCICE 22

On considère l'équation $(K) : z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$

- 1- Démontre que l'équation (K) admet une solution $z_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$
- 2- Détermine les complexes b et c tels

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - x)(z - 2 - 2i)(az + b)$$

- 3- Achève la résolution de l'équation (K) dans \mathbb{C}

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) L'unité graphique est 2 cm.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives les trois solutions de l'équation (K) telles que z_A soit réel, $\operatorname{Re}(z_B) = \operatorname{Im}(z_B)$.

- 1- Ecris z_C^{14} sous forme trigonométrique et algébrique.
- 2- a- Détermine le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$
- b- Quelle est la nature du triangle OBC ?
- 3- Soit D le point tel que le triangle COD soit rectangle isocèle indirect en C . Déterminer l'affixe de D .
- 4- Détermine l'affixe du point E pour que le quadrilatère $CABE$ dans cet ordre soit un parallélogramme.

SOLUTION 22

Partie A :

$$(K): z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = 0$$

1) $z = 1$

2) $z = 1$ où $z = 2 + 2i$ sont solution de (K) , on peut alors enchaîner 2 tableaux d'Horner

	1	$-4 - i$	$7 + i$	-4
1	↓	1	$-3 - i$	4
	1	$-3 - i$	4	0
$2 + 2i$	↓	$2 + 2i$	-4	
	1	$-1 + i$	0	

$$(K): (z - 1)(z - 2 - 2i)(-1 + i) = 0 \quad a = 1; b = -1 + i$$

$$3) z = 1 \text{ où } z = 2 + 2i \text{ où } z = 1 - i$$

Partie B :

$$1) z_A = 1 \quad z_B = 2 + 2i \quad z_C = 1 - i$$

$$z_C = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_C^{14} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{14} = 2^7 e^{-i\frac{7\pi}{2}}$$

$$z_C = 128 \left(\cos \frac{7\pi}{2} - i \sin \frac{7\pi}{2} \right)$$

$$2) \frac{2+2i}{1-i} = 2i$$

$$a) \left| \frac{2+2i}{1-i} \right| = 2 \text{ et } \arg\left(\frac{2+2i}{1-i}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \frac{2+2i}{1-i} = \frac{z_B}{z_C} = 2i \text{ alors le triangle } OBC \text{ est rectangle en } O.$$

$$3) \frac{z_O - z_B}{z_C - z_D} = i \Leftrightarrow \boxed{z_D = 1 + i} \text{ Il suffit de calculer}$$

4) $CABE$ est un parallélogramme si et seulement si

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{EB} \Leftrightarrow z_A - z_C = z_B - z_E \Leftrightarrow z_E = 2 + i$$

EXERCICE 23

- 1- a- Résous dans \mathbb{C} l'équation (E) : $Z^4 = 1$
 b- Comment appelle-t-on les solutions de (E) ?
- 2- a- Détermine sous forme trigonométrique les solutions de l'équation (F) : $u^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$
 b- Place les points images des solutions de (F) sur un cercle dont tu préciseras le rayon.
- 3- a- Vérifie que $c = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8 - 8i\sqrt{3}$
 b- Déduis-en la forme algébrique de toutes les solutions de l'équation (F).
- c- Déduis des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

SOLUTION 23

1) (E): $z^4 = 1 \Leftrightarrow (z^2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) = 0$
 $\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z = -i \text{ ou } z = i \quad \boxed{S = \{-1; -i; i; 1\}}$

b) Les solutions de (E) sont les racines 4^{ème} de l'unité

2)a) (F) : $z^4 = 8 - 8i\sqrt{3}$

$|8 - 8i\sqrt{3}| = 16$ et $\text{Arg}(8 - 8i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Les solutions de (F) sont de la forme

$$z_k = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)}; k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

Pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$ respectivement on a $z_k \in \left\{2e^{-i\frac{\pi}{12}}; 2e^{i\frac{5\pi}{12}}; 2e^{i\frac{11\pi}{12}}; 2e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$

b) Soient $M_0; M_1; M_2$ et M_3 les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3 . $M_0; M_1; M_2$ et M_3 sont sur le cercle de centre O et de rayon 2.

3)a) (C est racine 4^{ème} de $8 - 8i\sqrt{3}$) $\Leftrightarrow c^4 = 8 - 8i\sqrt{3} = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^4$ bon courage pour le calcul

b) $u^4 = 8 - 8i\sqrt{3} \Leftrightarrow u^4 = c^4 \Leftrightarrow \left(\frac{u}{c}\right)^4 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{c} \in \{-1; -i; i; 1\} \Leftrightarrow u \in \{c; -c; ic; -ic\}$$

Forme algébrique de u

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

$$C = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$-C = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$iC = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$-iC = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- c) L'angle $\frac{11\pi}{12}$ se trouve dans le quadrant 2 où cosinus est négatif et le sinus positif alors il ne peut s'agir que de iC

$$4- \begin{cases} \cos \frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

EXERCICE 24

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . unité graphique 2 cm.

1- Résolvez dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$

On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$

Ecrivez a et b sous forme exponentielle et placez les points A et B d'affixes respectives a et b

2- Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-3}{2}$

a- Calculez sous forme algébrique l'affixe a' du point A' image du point A par r .

b- Calculez sous forme algébrique l'affixe a' du point B' image du point B par h .

c- Placez A' et B' sur la figure précédente.

3- Soit C d'affixe c le centre du cercle circonscrit au triangle $OA'B'$ et R le rayon de ce cercle.

a- Justifiez les égalités suivantes : $c\bar{c} = R^2$, $(c - 2i)(\bar{c} + 2i) = R^2$,

$$\left(c - \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) \left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right) = R^2$$

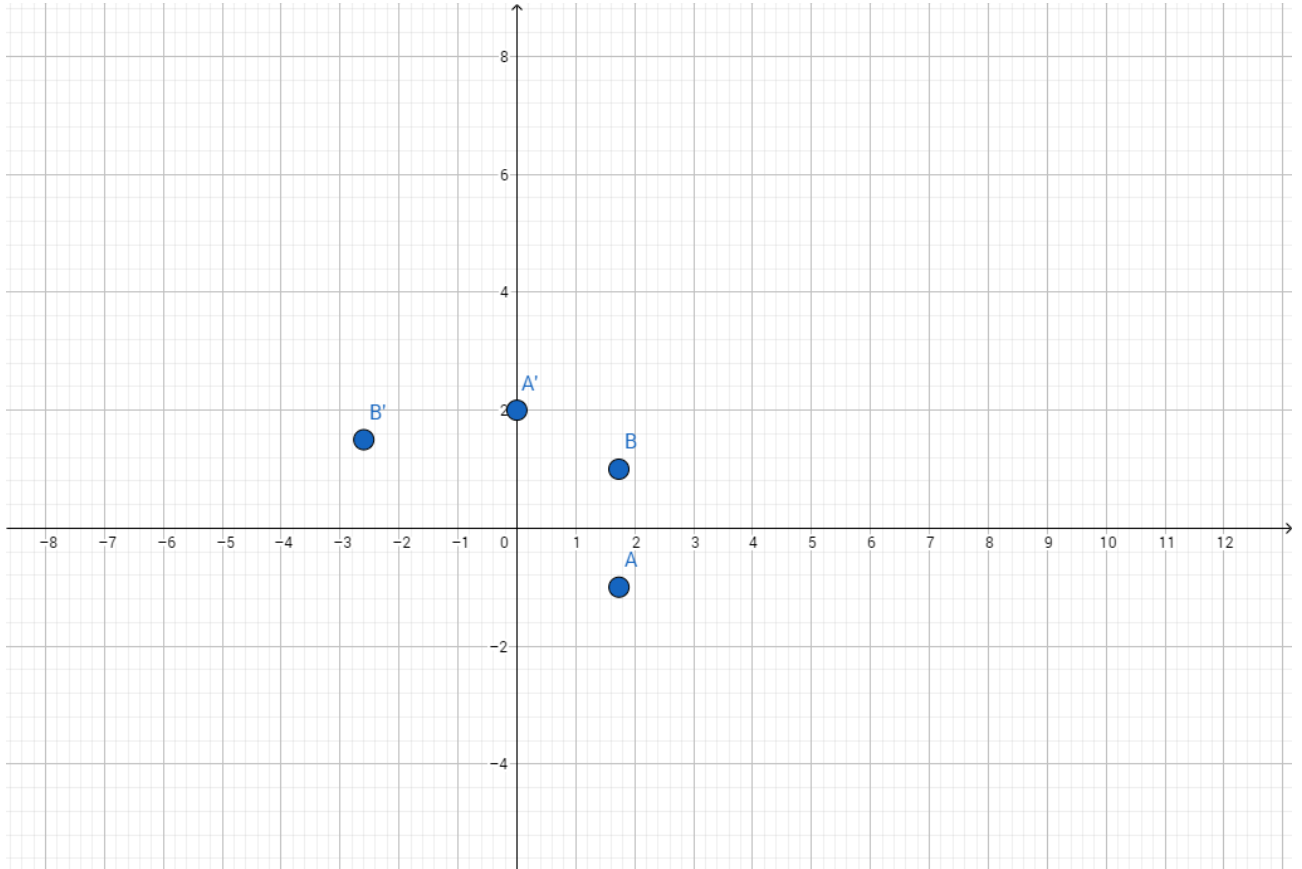
b- En déduire que $c - \bar{c} = 2i$ et $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$

c- En déduire la valeur de c et celle de R

SOLUTION 24

$$1) z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad \text{alors} \quad S = \{\sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i\}$$

$$a = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; b = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$



$$2) a) r\left(0, \frac{\pi}{3}\right) M'(z') \text{ image de } M(z) \text{ par } r z' = ze^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_{A'} = z_A e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow a e^{i\frac{\pi}{3}} = a' = 2e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow a' = 2i$$

$$b) z' = -\frac{3}{2}z_B \Leftrightarrow h(M) = M'$$

$$b' = -\frac{3}{2}b = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

c) Voir figure en a)

$$3) a) M \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow OC = CA' = CB' = R$$

$$\Leftrightarrow |C| = |a' - C| = |b' - C| = R$$

$$= |a' - C| = |C - b'| = R$$

- $C\bar{C} = |C|^2 = R^2$ car $|C| = R$

- $(C - 2i)(\bar{C} + 2i) = (C - 2i)(\overline{C + 2i}) = |C - 2i|^2 = |C - a'|^2 = R^2$ **cqfd**

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

$$\bullet \left(C + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) \left(\bar{C} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) = \left(C + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) \overline{\left(C + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right)}$$

$$= \left| C + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right|^2 = |C - b'|^2 = R^2 \quad \text{cqfd.}$$

b) D'après a)

$$R^2 = C\bar{C} = (C - 2i)(\bar{C} + 2i) \Leftrightarrow C - \bar{C} = 2i$$

$$\text{D'autre part } R^2 = (C - 2i)(\bar{C} + 2i) = \left(C + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right) \left(\bar{C} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \right) \text{ En développant et}$$

$$\text{simplifiant } C + \bar{C} = -\frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } \begin{cases} C - \bar{C} = 2i \\ C + \bar{C} = -\frac{4\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$C = -\frac{2\sqrt{3}}{2} + i$$

$$C\bar{C} = |c|^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{12}{9} + 1 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

EXERCICE 25

Pour tout entier naturel n , on pose $A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$

1- Calculez et écrire $A + iB$ sous forme exponentielle.

2- Déduisez-en des expressions plus simples de A et B

SOLUTION 25

$$\forall n \in \mathbb{N}; A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx \text{ et } B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$$

$$1) A + iB = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx$$

$$= 1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x + i(0 + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin(n-1)x)$$

$$= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + [\cos(n-1)x + i \sin(n-1)x] \Leftrightarrow$$

$$A + iB = 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^{n-1}$$

Posons $z = \cos x + i \sin x$

$$\forall n \in \mathbb{N}; z^n = (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

$$\text{Alors } A + iB = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z}$$

$$\text{Mais } 1 - z^n = 1 - \cos nx - i \sin nx = 2 \cos^2 \frac{nx}{2} - 2i \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{nx}{2} = 2 \cos \frac{nx}{2} \left(\cos \frac{nx}{2} - i \sin \frac{nx}{2} \right)$$

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

$$1 - z^n = 2 \cos \frac{nx}{2} e^{-i \frac{nx}{2}}$$

Pour $n = 1$; $1 - z = 2 \cos \frac{x}{2} e^{-i \frac{x}{2}}$

$$\text{D'où } A + iB = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{2 \cos \frac{nx}{2} e^{-i \frac{nx}{2}}}{2 \cos \frac{x}{2} e^{-i \frac{x}{2}}} \Leftrightarrow A + iB = \frac{\cos \frac{nx}{2} e^{i(\frac{x}{2} - \frac{nx}{2})}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$2) A = \sum_{k=0}^{n-1} \cos kx = \frac{\cos \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos \left[\frac{x(1-n)}{2} \right] \Leftrightarrow A = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(\frac{x}{2} - nx \right)}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

$$\text{De même } B = \sum_{k=0}^{n-1} \sin kx = \frac{\cos \frac{nx}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \sin \left[\frac{x(1-n)}{2} \right] \Leftrightarrow B = \frac{\sin \frac{x}{2} - \sin \left(\frac{x}{2} - nx \right)}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

Car $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

EXERCICE 26

Soit dans \mathbb{C} le polynôme $p(z) = z^4 + 4$

- 1- Montrez que si le complexe z_0 est solution de $p(z) = 0$ alors $-z_0$, \bar{z}_0 , $-\bar{z}_0$ en sont également solution.
- 2- En déduire que $p(z)$ peut s'écrire comme produit de deux facteurs.
- 3- Déterminez la solution z_0 dont les parties réelles et imaginaires sont égales.
- 4- En déduire toutes les solutions de $p(z) = 0$
- 5- Montrez que les points images des quatre solutions de l'équation $p(z) = 0$ sont les sommets d'un carré dans un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v})

SOLUTION 26

$$P(z) = z^4 + 4$$

- 1) Soit z_0 est solution de $P(z) = 0$
 - $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_0^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow (-z_0)^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow P(-z_0) = 0$ d'où z_0 est solution de $P(z) = 0$
 - $z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow \overline{z^4 + 4} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{z^4} - 4 = 0 \Leftrightarrow P(\bar{z}_0) = 0$ d'où \bar{z}_0 est une solution de $P(z) = 0$
 - De même $-\bar{z}_0$ en est aussi solution

2) z_0 ; $-z_0$; $-\bar{z}_0$ et \bar{z}_0 sont toute solution de $P(z) = 0$.

« Ce n'est pas parce que les mathématiques sont difficiles qu'on n'ose pas les faire, c'est parce qu'on n'ose pas les faire que c'est difficile »

alors $P(z) = (z - z_0)(z + z_0)(z - \bar{z}_0)(z + \bar{z}_0) \Leftrightarrow P(z) = (z^2 - z_0^2)(z^2 - \bar{z}_0^2)$ **cqfd.**

3) Soit $z_0 = x + xi$; $x \in \mathbb{R}$

$$P(z_0) = z_0^4 + 4 = (x + xi)^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4(1 + i)^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Alors $z_0 = 1 + i$

4) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 + i$ où $z = -1 - i$ où $z = 1 - i$ où $z = -1 + i$

$$\boxed{S = \{1 + i; -1 - i; -1 + i; 1 - i\}}$$

5) Soit $M_0(1 + i)$; $M_1(1 - i)$; $M_2(-1 - i)$; $M_3(-1 + i)$ $\frac{z_0 - \bar{z}_0}{z_0 - (-z_0)} = \frac{1+i-1+i}{1+i+1-i} = i$

Le triangle $M_0M_1M_2M_3$ est rectangle et isocèle en M_2 .

Alors les points $M_0M_1M_2$ et M_3 sont les sommets d'un carré car on vient de montrer que deux sommets opposés M_0 et M_2 sont des angles droits et deux côtés opposés ont même mesure.
