

ABC**BAC
2002****Sujets
non corrigés**

Mathématiques

STT - STI - STL - SMS

Gagnez
Un An d'Etudes
aux USA !



voir en dernière page

- Les sujets du bac 2001
- Plus de 170 exercices supplémentaires
- Les formulaires officiels du bac

NATHAN

ABC

BAC

2002

**Sujets
non corrigés**

07

Mathématiques

STT - STI - SMS - STL

Michel Poncy

Agrégé de Mathématiques

Professeur en Terminale

au lycée La Martinière Duchère, à Lyon

NATHAN

Découvrez vos **ABC BAC 2002** !

S'entraîner sur les vrais sujets, c'est le meilleur moyen de maîtriser les épreuves, et d'être tout à fait prêt le moment venu. Pour cela cet ouvrage, vous propose :

► 21 sujets complets, regroupés par séries

La quasi-totalité des sujets de séries technologiques posés en juin 2001 et septembre 2000, en France métropolitaine, dans les DOM-TOM ainsi que dans les centres étrangers, sont proposés.

► 173 exercices supplémentaires classés par thèmes

La deuxième partie propose une sélection d'exercices et problèmes de bac des années antérieures. Ils ont été parfois modifiés pour être conformes au programme, et regroupés par thèmes, pour permettre un entraînement tout au long de l'année.

SESSIONS ANTERIEURES

PROGRAMMATION LINÉAIRE

Exercice
Général (CO, IG), 2000

Un exploitant forestier dispose d'une parcelle de 40 ha sur laquelle il souhaite planter deux essences de résineux : des pins sylvestres et des douglas. Cependant, pour des considérations de nature de l'emplacement, il ne pourra pas planter plus de 30 ha de douglas.

Pour les pins sylvestres il doit obtenir 120 F par pied et pour les douglas 150 F par pied. On cherche en moyenne 2 000 pins sylvestres par ha, ainsi que pour les douglas il faut compter 1 200 pieds par ha. Enfin, il dispose d'un budget maximum de 50 000 F.

On note x le nombre d'hectares de pins sylvestres et y le nombre d'hectares de pins douglas plantés sur cette parcelle.

a. Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les conditions du problème.

b. Montrer que les contraintes du problème sont traduites par le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 40 \\ 4x + 3y \leq 150 \end{cases}$$

2. À tout couple $(x ; y)$ on associe un point M de coordonnées $(x ; y)$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm pour 4 ha).

Déterminer graphiquement l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient les contraintes. (On hachurera la zone ne convenant pas.)

3. Compte tenu des prix actuels, un exploitant peut espérer réaliser 150 000 F par ha de pins sylvestres et 200 000 F par ha pour les douglas.

a. Exprimer, en fonction de x et y la recette R que cet exploitant pourrait tirer de la parcelle.

On obtient ainsi l'équation d'une droite D_0 .

b. Tracer sur le même graphique que précédemment, la droite D_1 correspondant à une recette de 4 500 000 F.

c. Expliquer, grâce au graphique, comment on peut trouver le couple $(x_0 ; y_0)$ pour lequel la recette R est maximale.

d. Par une étude graphique, trouver ce couple $(x_0 ; y_0)$ et conclure sur la meilleure usure des surfaces à planter en pins sylvestres et en douglas.

02

N° de projet 10085502 (1) 22 (OSB 80) MCP – Août 2001
Imprimé en France par Maury-Eurolivres – 45300 Manchecourt

► Des compléments pratiques

Au début de chaque sujet, un encadré précise les notions abordées dans les différents exercices.

Un barème indicatif est précisé à droite du texte.

► Et en plus

En début d'ouvrage, vous trouverez une description des épreuves, un tableau thématique, un tableau des notions au programme des différentes séries et des conseils pratiques concernant l'épreuve.

En fin d'ouvrage se trouvent les formulaires officiels du baccalauréat pour les différentes séries.

SUJET B

8 NATIONAL, SEPTEMBRE 2000
Action et Communication Administratives, Action et Communication Commerciales

Exercice 1 (8 points)
• Statistiques à deux variables : ajustement affine
• Suites

Exercice 2 (12 points)
• Fonction polynôme
• Fonction rationnelle

EXERCICE 1

Un magasin d'électronique vend, depuis le 1^{er} janvier 1990, des aspirateurs de la marque ADPITOU. Son directeur nous a fourni les renseignements consignés dans le tableau ci-dessous, dans lequel on a également précisé le rang x_i de l'année 1992 = x_1 .

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i d'aspirateurs vendus	524	670	770	850	930	1 000

1. Représenter le nuage de points M_i de coordonnées (x_i, y_i) associé à cette série statistique dans un repère orthonormal. On prendra pour unités graphiques :
• 1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ;
• 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées en commençant la graduation à 500. (1,5 pt)

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique. (1 pt)

3. On observe l'aspect du nuage et on choisit pour ajustement affine la droite d d'équation :
$$y = 82x + 512. \quad (1 pt)$$

Tracez cette droite d .

4. En utilisant l'ajustement précédent, obtenir graphiquement, puis par le calcul, une estimation du nombre d'aspirateurs que le magasin peut espérer vendre en l'an 2000. (1,5 pt)

5. En réalité, on a constaté que, après 1995, les ventes ont progressé régulièrement de 15 % par an. (1,5 pt)

a. Montrer que le magasin a vendu 1 150 aspirateurs en 1996. (1,5 pt)

41

Et pour ne rien laisser au hasard



vosre assistant personnel de révision

- vous aide à réviser toutes les matières, avec plus de 3000 pages de cours, 550 fiches de synthèse, des tests interactifs, et des centaines de sujets corrigés ;

- vous aide à établir et à tenir votre planning de révision, grâce à l'agenda personnalisé entièrement paramétrable.

Offre d'abonnement à tarif préférentiel à découvrir en fin d'ouvrage.

SOMMAIRE

Tableau thématique	7
Conseils pratiques	8

SESSION 2001 ET REMPLACEMENT 2000

Série STT

Comptabilité et Gestion, Informatique et Gestion

1 National, juin 2001	16
2 Centres étrangers I, juin 2001	20
3 Inde, avril 2001	23
4 National, septembre 2000	27
5 Nouvelle-Calédonie, décembre 2000	30

Action et Communication Administratives, Action et Communication Commerciales

6 National, juin 2001	34
7 Centres étrangers I, juin 2001	38
8 National, septembre 2000	41
9 Nouvelle-Calédonie, décembre 2000	44

Série STI

Génie Civil, Génie Énergétique, Génie Mécanique (A et F)

10 National, juin 2001	46
11 National, septembre 2000	49

Génie Mécanique (B, C, D, E) et Génie des Matériaux

12 National, juin 2001	53
13 National, septembre 2000	55

13 Ce symbole signale que le sujet n° x est corrigé dans l'ABC BAC 2002 n° 12.

Génie Électronique, Génie Électrotechnique, Génie Optique

14 National, juin 2001 58

15 National, septembre 2000 62

Arts appliqués

16 National, juin 2001 65

Série SMS

Sciences Médico-Sociales

17 National, juin 2001 68

18 National, septembre 2000 70

Série STL

Physique de Laboratoire et de Procédés Industriels

19 National, juin 2001 72

Chimie de Laboratoire et de Procédés Industriels

20 National, juin 2001 76

Biochimie, Génie Biologique

21 National, juin 2001 72

SESSIONS ANTÉRIEURES

1 à 7	Programmation linéaire	82
8 à 9	Calculs de pourcentages	88
10 à 13	Statistiques à une variable	90
14 à 21	Statistiques : ajustement affine	93
22 à 34	Probabilités	100
35 à 42	Variables aléatoires	109
43 à 49	Suites	115
50 à 54	Fonctions : généralités	119
55 à 62	Fonctions (STT, ACA et ACC)	123
63 à 69	Fonctions (SMS).....	133
70 à 76	Fonctions polynômes.....	140
77 à 83	Fonctions rationnelles.....	146
84 à 91	Équations logarithmiques et exponentielles	156
92 à 99	Fonctions logarithmes.....	159
100 à 110	Fonctions exponentielles	170
111 à 117	Fonctions trigonométriques	181
118 à 121	Résolution approchée d'équations.....	186
122 à 127	Calcul intégral	191
128 à 132	Calculs d'aires	196
133 à 137	Calculs de volumes	200
138 à 144	Équations différentielles du 1 ^{er} ordre	206
145 à 150	Équations différentielles du 2 ^e ordre	211
151 à 159	Nombres complexes	216
160 à 171	Nombres complexes et géométrie.....	221
172 à 173	QCM	229
	Formulaires.....	233

TABLEAU THÉMATIQUE

THÈMES	N° DE SUJET ET NATURE
Programmation linéaire	1 E ₂ 3 E ₁ 5 E ₂
Statistiques à deux variables : ajustement affine	2 E ₁ 3 E ₂ 4 E ₁ 5 E ₁ 7 E 8 E ₁ 21 E ₂
Probabilités	1 E ₁ 2 E ₂ 4 E ₂ 6 E ₁ 7 P 9 E ₁ 11 E ₁ 14 E ₂ 16 E ₁ 17 E 18 E 21 E ₂
Variables aléatoires	14 E ₂ 20 E ₁
Suites	8 E ₁ 9 E ₂ 21 E ₂
Fonctions : lecture graphique	6 E ₂ 11 P 14 P 17 P 18 P 21 E ₁
Fonctions polynômes	6 E ₂ 8 E ₂ 9 E ₂
Fonctions rationnelles	6 E ₂ 7 P 8 E ₂
Fonctions logarithmes	1 P 3 P 11 P 12 P 13 P 17 P 18 P 19 P
Fonctions exponentielles	2 P 4 P 5 P 10 P 11 P 14 P 15 E ₂ 15 P 16 E ₂ 19 E ₁ 20 P 21 E ₁
Fonctions trigonométriques	15 E ₂
Trigonométrie	10 E ₂ 12 E ₂ 13 E ₁ 14 E ₁
Résolution approchée d'équations	3 P 10 P
Calcul intégral	3 P 11 P 12 E ₂ 14 E ₁ 14 P 15 E ₂ 15 P 16 E ₂
Calculs d'aires	1 P 2 P 3 P 4 P 5 P 10 P 11 P 12 P 13 P 16 E ₂ 19 P 20 P
Équations différentielles du 1 ^{er} ordre	19 E ₁
Équations différentielles du 2 ^e ordre	10 E ₂ 12 E ₂ 13 E ₁ 14 E ₁
Nombres complexes	10 E ₁ 11 E ₂ 12 E ₁ 13 E ₂ 15 E ₁ 19 E ₂ 20 E ₂
Nombres complexes et géométrie	10 E ₁ 11 E ₂ 12 E ₁ 13 E ₂ 15 E ₁ 19 E ₂

E signifie : exercice ; E₁ signifie : exercice 1 ; E₂ signifie : exercice 2 ;
P signifie : problème ; 1 signifie : sujet 1.

CONSEILS PRATIQUES

I. RÈGLEMENT D'EXAMEN

Toutes les séries des baccalauréats technologiques ont une épreuve écrite de mathématiques à l'examen.

Le tableau suivant décrit chaque épreuve selon la série :

Série	Spécialité	Coefficient	Somme des coefficients au bac	Durée
SMS		2	39	2 h
STI		4	37	4 h
STL	PL	4	38	4 h
	CL	4	36	3 h
	BGB	2	34	2 h
STT	ACA - ACC	2	39	2 h
	CG - IG	4	39	3 h

Les abréviations utilisées sont détaillées plus loin.

II. PROGRAMMES

Il y a cinq programmes différents selon les séries. Vous pouvez en général faire des exercices provenant d'une autre série que la vôtre au baccalauréat. En effet :

- un candidat STI ou STL (spécialités PL et CL) peut faire tous les sujets de l'ouvrage, exceptés ceux relatifs aux thèmes « programmation linéaire » et « statistiques » ;
- un candidat STT (spécialités CG et IG) peut faire tous les sujets, exceptés ceux relatifs aux thèmes « variables aléatoires », « fonctions trigonométriques », « calculs de volumes », « équations différentielles » et « nombres complexes » ;
- pour les candidats SMS ou STT (spécialités ACA et ACC), des thèmes spéciaux ont été dégagés dans l'ouvrage afin de couvrir la spécificité de ces séries pour les sujets relatifs aux fonctions numériques.

Dans tous les cas, reportez-vous aux tableaux thématiques et aux divers programmes des séries donnés dans les conseils pratiques.

Vous trouverez ci-après un tableau qui résume les principales notions des programmes de Première et Terminale de chaque série.

		STI STL-PL STL-CL	STL- BGB	SMS	STT- CG- STT- IG	STT- ACA- STT- ACC
ALGÈBRE Polynômes	Factorisation par $x - a$ Équation du 2 nd degré dans \mathbb{R}	• •	•		•	
	Programmation linéaire				•	ACC
Nombres complexes	Forme algébrique, conjugué Forme trigonométrique Représentation géométrique Module et distance Applications : $z \mapsto (z + a)$ et $z \mapsto e^{i\alpha}z$	• • • • STI-GE STL-PL				
	STATISTIQUES	Séries à une variable			•	•
	Séries à 2 variables : nuage de points, point moyen		•	•	•	•
PROBABILITÉS	Probabilités élémentaires Variables aléatoires	• •	•	•	•	•
GÉOMÉTRIE	Barycentre de 2, 3, 4 points Produit scalaire dans un plan Équation d'un cercle Formules dans le triangle quelconque (Al Kashi, sinus...) Calcul vectoriel dans l'espace	• • • • •				
ANALYSE Suites	Suites arithmétiques Suites géométriques Suites croissantes, décroissantes Convergence	• • • •	• •	• •	• •	• •
Limites	Limite en a Asymptote verticale Limite en $+\infty$ Asymptote horizontale Limite et ordre Asymptote oblique Courbes asymptotes	• • • • • •	• •		• • •	

CONSEILS PRATIQUES

		STI STL-PL STL-CL	STL- BGB	SMS	STT- CG- STT- IG	STT- ACA- STT- ACC
Dérivation	Nombre dérivé : limite du taux de variation Tangente à une courbe en un point Dérivée de $f + g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$, x^n ($n \in \mathbb{Z}$) Dérivée de $f \circ g$, $f(at + b)$, u^n , e^u , $\ln u$ Dérivée de u^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) Dérivée de \sqrt{x} , $\sin x$, $\cos x$	•	•		•	
	Théorèmes sur le sens de variation Théorème d'unicité pour une équation $f(x) = \lambda$	•	•	•	•	•
Fonctions usuelles	Fonction logarithme népérien Fonction exponentielle Fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) Fonctions sinus, cosinus Fonction tangente	•	•	•	•	•
	Définition, primitives usuelles Primitives de $t \mapsto f'(at + b)$, $e^u u'$, $\frac{u'}{u}$, $u^n u'$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$) Primitives de $u^\alpha u'$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$)	•	•	•	•	

Calcul intégral	Intégrale d'une fonction Relation de Chasles, linéarité, positivité Inégalité de la moyenne Valeur moyenne d'une fonction Aire d'un domaine plan Calcul de volumes	• • • • • •			• • • •	
	Équations différentielles Équation différentielle du type $y' = ay$ Équation différentielle du type $y'' + \omega^2 y = 0$	• •	•	•		
TRIGONO- MÉTRIE	Formules d'addition : $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$ Formules de duplication : $\sin 2a$, $\cos 2a$ Équations $\sin x = a$, $\cos x = a$	• • •				

Remarque

les abréviations utilisées dans cet ouvrage sont les suivantes.

SÉRIE	SPÉCIALITÉ
STI	GM : Génie Mécanique GC : Génie Civil GEN : Génie Énergétique GE : Génie Électronique GET : Génie Électrotechnique GO : Génie Optique AA : Arts Appliqués
STL	PL : Physique de Laboratoire et de procédés industriels CL : Chimie de Laboratoire et de procédés industriels BGB : Biochimie, Génie Biologique
STT	CG : Comptabilité et Gestion IG : Informatique et Gestion ACA : Action et Communication Administratives ACC : Action et Communication Commerciales

III. CONSEILS MÉTHODOLOGIQUES

Voici quelques conseils pour aborder avec efficacité l'épreuve écrite de mathématiques au baccalauréat.

1. Avant l'épreuve

Vérifiez que tout votre « matériel » est en ordre, en particulier la calculatrice (et ses piles !), les crayons, la gomme, la règle, le compas et même le rapporteur. N'oubliez pas votre montre qui vous permettra de bien gérer votre temps. Inutile de prendre des feuilles, celles-ci sont fournies par l'Administration.

2. Au début de l'épreuve

- Lisez lentement tout le sujet.
- Déterminez le temps nécessaire pour traiter chaque exercice en fonction du barème donné par l'énoncé.
- Commencez par l'exercice qui vous semble le plus facile.

3. Pendant l'épreuve

- Cherchez d'abord chaque question au brouillon, mais ne perdez pas votre temps à faire une rédaction détaillée au brouillon. Si la question vous paraît très facile, vous pouvez rédiger directement sur la copie.
- Si vous n'arrivez pas à traiter une question, ne vous obstinez pas, ne passez pas trop de temps sur la question ; laissez un blanc et poursuivez votre exercice.
- N'oubliez pas que, sauf indication de l'énoncé, les questions d'un même exercice ne sont pas indépendantes : en particulier, la réponse à la question 3 est parfois donnée (d'une façon ou d'une autre) dans l'énoncé de la question 4.

IV. PRÉSENTATION DE VOTRE COPIE

La plupart des sujets de baccalauréat sont dotés d'un préambule tel que : « La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. »

L'importance de la présentation et de la rédaction dans la notation d'une copie est soulignée par ce type de mention.

- Rédigez toute réponse dans un français correct (bien que ce soit un devoir de mathématiques), sans oublier les verbes. N'abusez pas d'abréviations. N'écrivez pas de phrases parsemées de symboles mathématiques (\forall , \Rightarrow , ...) pour « économiser » des mots de français.
- Séparez les questions, encadrez et soulignez les résultats.
- Utilisez les notations de l'énoncé, même si elles contrarient vos habitudes.
- Relisez-vous, et corrigez les fautes d'orthographe.

- S'il y a plusieurs exercices, changez de feuille quand vous changez d'exercice : cela évite de rédiger un exercice donné en plusieurs points de la copie.
- Vérifiez si possible que vos réponses ont un sens : par exemple, une aire n'est pas négative, le tableau de variations d'une fonction doit correspondre à la courbe représentative de cette fonction, une probabilité ne peut pas être supérieure à 1...
- Soignez les représentations graphiques, en utilisant le papier millimétré fourni par le centre d'examen. Il est facile de gagner quelques points à l'aide de dessins bien faits.

V. USAGE DES CALCULATRICES

Tout candidat au baccalauréat doit savoir utiliser, pour l'épreuve de mathématiques, une calculatrice soit scientifique, soit programmable (selon les séries). Les textes disent que l'emploi des calculatrices a pour objectif, « non seulement d'effectuer des calculs, mais aussi de contrôler des résultats, d'alimenter le travail de recherche et de favoriser une bonne approche de l'informatique ».

Selon les séries, les compétences requises ne sont pas les mêmes. Voici un tableau résumant ce que chaque candidat doit savoir faire avec sa calculatrice.

	STI STL-PL STL-CL	STT-CG STT-IG	STL BGB	STT ACA et ACC	SMS
Savoir utiliser une calculatrice scientifique	•	•	•	•	•
Savoir utiliser une calculatrice programmable	•	•	•	•	
Programmer les valeurs d'une fonction	•	•	•	•	
Programmer une instruction séquentielle	•	•	•		
Programmer une instruction conditionnelle	•	•			
Programmer une instruction itérative, avec test d'arrêt	•				



Session 2001

Série STT

COMPTABILITÉ ET GESTION, INFORMATIQUE ET GESTION

SUJET

1

NATIONAL, JUIN 2001

Comptabilité et Gestion, Informatique et Gestion

Exercice 1 (4 points)

- Probabilités

Exercice 2 (6 points)

- Programmation linéaire

Problème (10 points)

- Fonction logarithme
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Dans un magasin on a relevé le mode de paiement et le montant M (en euros) mentionnés sur 250 tickets de caisse.

On a constaté que :

- tous les achats strictement inférieurs à 10 euros sont payés en espèces ;
- la moitié des achats dont le montant M est tel que $10 \leq M < 20$ est payé en espèces ;
- 16 % des achats sont payés par carte de crédit ;
- 36 % des achats ne sont pas payés en espèces.

1. Recopier le tableau ci-dessous et finir de le remplir à l'aide des informations données.

Mode de paiement \ Montant	Montant			Total
	$M < 10$	$10 \leq M < 20$	$M \geq 20$	
Espèces		38		
Chèque				
Carte de Crédit		15		
Total	106			250

1 pt

2. On choisit au hasard un ticket de caisse et on considère les événements :

A : « Le ticket indique un montant supérieur à 20 euros » ;

B : « Le ticket correspond à un paiement par chèque ».

Calculer la probabilité des événements :

A, B, $A \cap B$, $A \cup B$.

2 pts

3. On choisit un ticket de caisse correspondant à un paiement par chèque.

Quelle est la probabilité qu'il indique un montant supérieur à 20 euros ?

0,5 pt

EXERCICE 2

Le mobilier d'une bibliothèque municipale doit être changé pour contenir au moins 4 400 livres de petit format et 2 600 livres de grand format.

Un premier fournisseur propose des meubles de type A pouvant contenir 110 livres de petit format et 100 livres de grand format pour un prix de 400 euros.

Un deuxième fournisseur propose des meubles de type B pouvant contenir 220 livres de petit format et 100 livres de grand format pour un prix de 600 euros.

Par ailleurs le responsable de la bibliothèque a pour consigne de ne passer aucune commande supérieure à 9 600 euros chez un même fournisseur.

1. Soit x le nombre de meubles de type A et y le nombre de meubles de type B. Traduire les contraintes que doit respecter le bibliothécaire sous forme d'un système d'inéquations portant sur x et y .

1,5 pt

2. À tout couple (x, y) de nombres réels, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
(On choisira un centimètre pour deux unités.)

a. Montrer que le système obtenu en 1. est équivalent à :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 24 \\ 0 \leq y \leq 16 \\ x + 2y \geq 40 \\ x + y \geq 26 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

0,5 pt

b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système précédent.

(On hachurera la zone qui ne convient pas).

2 pts

3. a. Exprimer en fonction de x et y la dépense d occasionnée par l'achat de x meubles du type A et y meubles du type B.

0,5 pt

b. Tracer dans le repère précédent la droite correspondant à une dépense de 15 600 euros.

0,5 pt

c. Déterminer graphiquement le nombre de meubles à commander chez chacun des fournisseurs pour que la dépense soit minimale, en précisant la méthode utilisée.

1 pt

d. Quelle est alors la dépense en euros ?

0,5 pt

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x.$$

1. a. Montrer que la dérivée g' de g est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 1}{x}.$$

0,5 pt

b. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

0,5 pt

2. a. Calculer $g(1)$.

0,25 pt

b. En déduire que $g(x) > 0$ pour $x > 1$ et que $g(x) < 0$ pour $0 < x < 1$.

1 pt

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{\ln x}{x} + x - 1.$$

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

0,5 pt

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire que la courbe C admet une asymptote que l'on précisera.

1,5 pt

2. a. Montrer que, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

En déduire, en utilisant le résultat de la dernière question de la partie A, le sens de variation de f .

1,5 pt

b. Dresser le tableau de variation de f .

0,5 pt

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 1)$ et en déduire que C admet une asymptote D dont on donnera une équation.

1 pt

4. Montrer que C est en dessous de D pour $x > 1$.

0,5 pt

Partie C

On admet que C est la courbe tracée sur le graphique ci-dessous.

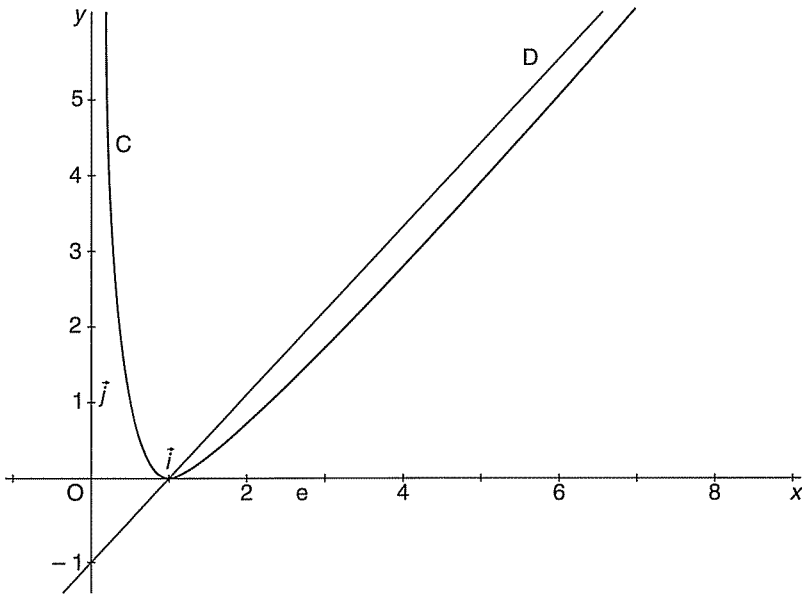
1. Hachurer sur le graphique la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. 0,25 pt

2. Montrer que la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{x^2}{2} - x$$

est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$. 1 pt

3. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie hachurée sur le graphique, puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près. 1 pt



Exercice 1 (5 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine

Exercice 2 (5 points)

- Probabilités

Problème (10 points)

- Fonction exponentielle
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Dans une entreprise créée en 1994, on étudie l'évolution annuelle de la proportion de salariés payés au SMIC, par rapport au nombre total de salariés de l'entreprise. Le tableau ci-dessous indique le nombre x d'années écoulées depuis 1994 ainsi que le pourcentage y de salariés payés au SMIC pour l'année correspondante.

Année	1994	1995	1996	1997	1998	1999
x	0	1	2	3	4	5
y	8,6	10,6	10,8	12,6	13	14,3

1. Dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, représenter le nuage des points de coordonnées (x, y) associé aux données du tableau.

Unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 % sur l'axe des ordonnées.

1 pt

2. a. Déterminer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points (abscisses respectives : 0, 1, 2) et celles du point moyen G_2 des trois autres points.

1 pt

b. Placer G_1 et G_2 sur le graphique et tracer la droite (G_1G_2) .

0,5 pt

c. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) .

1 pt

3. On réalise avec la droite (G_1G_2) un ajustement du nuage de points représenté à la question 1.

a. Utiliser le graphique pour estimer quel serait le pourcentage de salariés payés au SMIC en 2001.

0,75 pt

b. Utiliser l'équation de la droite (G_1G_2) pour estimer au cours de quelle année le pourcentage de salariés payés au SMIC serait supérieur à 20 %.

0,75 pt

EXERCICE 2

Un groupe représentatif d'une population est constitué de 1 300 personnes. Il compte 667 personnes de sexe féminin. Parmi celles-ci, 168 ont moins de 20 ans et 384 ont entre 20 et 65 ans. Parmi les personnes de sexe masculin, 176 ont moins de 20 ans et 192 ont plus de 65 ans.

1. Reproduire et remplir le tableau suivant.

	Moins de 20 ans	Entre 20 et 65 ans	Plus de 65 ans	Total
Personnes de sexe féminin				
Personnes de sexe masculin				
Total				1 300

1 pt

Dans les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis à 10^{-3} près.

2. On choisit au hasard une personne dans le groupe de 1 300 personnes.

a. Quelle est la probabilité qu'elle soit de sexe masculin (événement A) ?

0,5 pt

b. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 20 ans (événement B) ?

0,5 pt

c. Déterminer la probabilité de chacun des événements :

$$A \cap B \text{ et } A \cup B.$$

1 pt

3. On choisit à présent au hasard une personne parmi les personnes de sexe masculin du groupe.

Quelle est la probabilité qu'elle ait entre 20 et 65 ans ?

1 pt

4. On choisit au hasard dans le groupe de 1 300 personnes une personne de plus de 65 ans.

Quelle est la probabilité qu'elle soit de sexe féminin ?

1 pt

PROBLÈME

On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 16$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Les objectifs de ce problème sont d'étudier la fonction f et de tracer la courbe C , puis de calculer une aire qui lui est associée.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

1 pt

2. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = (e^x - 2)(e^x - 8)$.

0,5 pt

b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

0,5 pt

3. a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$f'(x) = 2e^x(e^x - 5).$$

1 pt

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

En déduire le tableau de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

1,5 pt

4. Déterminer les coordonnées des deux points A et B situés à l'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses. (On pourra utiliser le résultat de la question 2.a.)

1 pt

5. a. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en portant les arrondis à 10^{-1} près.

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,2
$f(x)$			12,5	7	-3,8		7,2

0,5 pt

b. Tracer C. Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1,5 pt

6. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en cm^2 , de la partie limitée sur le graphique par la courbe C, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$.

2,5 pts

Exercice 1 (6 points)

- Programmation linéaire

Exercice 2 (4 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine

Problème (10 points)

- Fonction logarithme
- Résolution approchée d'équation
- Calcul intégral
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Un assembleur en micro-informatique utilise pour le montage des ordinateurs qu'il vend :

- un processeur P_1 de haut de gamme ;
- un processeur P_2 de gamme moyenne ;
- une carte graphique G performante.

Il doit pouvoir disposer, au début du mois de décembre, de 50 processeurs P_1 , 80 processeurs P_2 et 90 cartes graphiques G.

Il commande son matériel début novembre, afin d'être livré pour le début du mois de décembre et s'adresse pour cela à un fournisseur qui propose à ses clients des lots :

- le lot L_1 composé de 5 processeurs P_1 , 5 processeurs P_2 et 5 cartes graphiques G ;
- le lot L_2 composé de 2 processeurs P_1 , 4 processeurs P_2 et 6 cartes graphiques G.

Pour bénéficier d'une remise, l'assembleur doit commander au moins 3 lots L_1 et 3 lots L_2 .

Après cette remise, le fournisseur facture à l'assembleur : 5 900 francs un processeur P_1 , 3 200 francs un processeur P_2 et 900 francs une carte graphique G.

On note x le nombre de lots L_1 et y le nombre de lots L_2 que doit commander l'assembleur début novembre, afin de satisfaire la demande pour début décembre.

1. Expliquer pourquoi les contraintes auxquelles doivent satisfaire x et y afin que l'assembleur obtienne les produits dont il a besoin, tout en profitant de la remise du fournisseur, se traduisent par le système d'inéquations ci-après.

$$(S) \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 3 \\ 5x + 2y \geq 50 \\ 5x + 4y \geq 80 \\ 5x + 6y \geq 90 \end{cases}$$

1,5 pt

2. On considère le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. Déterminer la région du plan formée des points $M(x ; y)$ dont les coordonnées vérifient le système (S).

On rayera la partie du plan formée des points dont les coordonnées **ne vérifient pas le système** (S) et on expliquera la démarche suivie pour les trois premières contraintes du système (S).

1,5 pt

3. a. À combien revient la commande d'un lot L_1 ?

Même question pour un lot L_2 .

0,25 pt

b. Montrer que la dépense D en francs, occasionnée à l'assembleur pour l'achat de x lots L_1 et de y lots L_2 s'exprime en fonction de x et y sous la forme :

$$D = 50\,000x + 30\,000y.$$

0,5 pt

c. Montrer que l'ensemble des couples $(x ; y)$ correspondant à une dépense donnée D sont les coordonnées de points situés sur une droite Δ_D dont on donnera l'équation réduite (sous la forme $y = mx + p$).

0,5 pt

d. Tracer la droite Δ_D pour $D = 900\,000$.

0,25 pt

4. a. Expliquer comment, à l'aide du graphique, on peut déterminer le couple $(x_0 ; y_0)$ correspondant à une dépense D minimale.

1 pt

b. En déduire, à l'aide du graphique, le nombre x_0 de lots L_1 et le nombre y_0 de lots L_2 que doit commander l'assembleur afin de satisfaire la demande de début décembre. Quelle est alors la dépense engagée ?

0,5 pt

EXERCICE 2

Une usine fabrique en très grand nombre des pièces métalliques.

La fabrication est vérifiée journalièrement par prélèvement de pièces produites, dont on mesure la longueur.

En fin de journée, on calcule la longueur moyenne des pièces prélevées durant la journée et le contremaître juge que la fabrication est valable lorsque cette longueur moyenne est comprise entre 7,45 cm et 7,55 cm. Dans ce cas, on considère que la machine est bien réglée, sinon on doit procéder à son réglage. Fin novembre, la machine est réglée et fabrique donc des pièces de longueur valable au début du mois de décembre.

Durant les 8 premiers jours du mois de décembre, on a obtenu, en fin de journée, les résultats suivants :

Jour x_j	1	2	3	4	5	6	7	8
Longueur moyenne y_j	7,50	7,50	7,49	7,49	7,48	7,47	7,47	7,46

1. Représenter dans un repère orthogonal, le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à la série statistique ci-dessus.

On utilisera comme unités :

- en abscisse : 1 cm pour un jour ;
- en ordonnée : 1 cm pour 0,01 en commençant à graduer l'axe à partir de 7,44.

1 pt

2. a. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point moyen G_1 associé aux 4 points du nuage ayant les plus petites abscisses.

Placer G_1 sur le graphique.

0,5 pt

b. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées du point moyen G_2 associé aux 4 points du nuage ayant les plus grandes abscisses.

Placer G_2 sur le graphique.

0,5 pt

c. Tracer la droite $d = (G_1G_2)$ sur le graphique.

Déterminer l'équation réduite (sous la forme $y = mx + p$) de la droite d . On donnera les valeurs de m et p avec 6 décimales.

1 pt

3. On admet que la droite d représente l'évolution, dans le temps, de la longueur des pièces fabriquées par la machine.

En utilisant le graphique, déterminer à partir de quel jour du mois de décembre la machine a-t-elle besoin d'un nouveau réglage.

Vérifier le résultat par calcul.

1 pt

PROBLÈME

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x + c$$

où a , b et c sont des réels fixés.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer c sachant que : $f(1) = -\frac{1}{2}$.

0,5 pt

b. En utilisant la valeur de c trouvée en a., déterminer a et b sachant que

$f(e^2) = \frac{3}{2}$ et que le point de coordonnées $(e^3 ; \frac{11}{2})$ est un point de C .

1 pt

2. On considère dans la suite la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - \frac{1}{2}.$$

a. Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$: $f(x) = \ln x(\ln x - 1) - \frac{1}{2}$.

En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

1 pt

b. Déterminer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire :

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}.$$

0,5 pt

c. Déterminer le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation. 1 pt

3. a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous, en donnant des valeurs approchées décimales à 10^{-2} près :

x	0,2	0,5	0,9	$e^{\frac{1}{2}}$	2	3	4	5	8
$f(x)$									

0,5 pt

b. Tracer C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

En utilisant la représentation graphique, expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes dans $]0 ; 5]$. 1,5 pt

c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que :

$$0,6 \leq \alpha \leq 0,7.$$

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée décimale de α à 10^{-2} près. 1 pt

4. On considère la fonction F définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = x(\ln x)^2 - 3x \ln x + \frac{5}{2}x.$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$. En déduire l'expression d'une primitive quelconque de f sur $]0 ; +\infty[$. 1 pt

b. Déterminer la primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ qui prend la valeur 3 pour $x = 1$. 0,5 pt

c. Calculer l'intégrale $I = \int_5^7 f(x) dx$.

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en cm^2 , de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x = 5$ et $x = 7$. 1,5 pt

Exercice 1 (5 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine

Exercice 2 (4 points)

- Probabilités

Problème (11 points)

- Fonction exponentielle
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Un automobiliste gravit le col le plus élevé d'une région montagneuse. Disposant d'un altimètre et d'un thermomètre, il note ses observations dans le tableau suivant :

Altitude x (en km)	0,4	0,8	1,2	1,5	1,9	2
Température y (en °C)	8,5	6,5	3	1,5	-1	-2

1. Représenter la série statistique double $(x ; y)$ ci-dessus dans un repère orthogonal. (Unités : 5 cm pour 1 km en abscisse ; 1 cm pour 1 °C en ordonnée.)

On veillera à graduer l'axe des ordonnées entre -10 °C et 10 °C.

1 pt

2. Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 correspondant respectivement aux trois premières et trois dernières observations.

0,5 pt

3. Déterminer une équation de la droite $(G_1 G_2)$.

Représenter cette droite sur le graphique en faisant figurer G_1 et G_2 d'une couleur différente de celle utilisée pour les points du nuage.

1,5 pt

4. Par lecture graphique (faire figurer la construction), estimer la température extérieure à une altitude de 2 300 mètres.

0,5 pt

5. Le véhicule est ravitaillé en gazole ordinaire, lequel se coagule lorsque la température descend en dessous de -5 °C.

Estimer, par calcul, l'altitude maximale que l'automobiliste pourra atteindre sans risque.

On donnera le résultat à cent mètres près.

1,5 pt

EXERCICE 2

Dans une enquête réalisée auprès de 300 personnes dont 60 % de femmes, la question suivante a été posée : de ces 3 loisirs « faire du sport », « regarder la télévision » et « lire un livre », quel est celui que vous préférez ?

55 % des hommes et 30 % des femmes ont répondu préférer « faire du sport ». Le nombre de femmes qui préfèrent « regarder la télévision » est le double du nombre de femmes qui préfèrent « lire un livre ».

114 personnes ont dit qu'elles préféreraient « regarder la télévision ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant (aucune justification n'est demandée) :

	Faire du sport	Regarder la télévision	Lire un livre	TOTAL
Hommes				
Femmes				
TOTAL				300

1,25 pt

2. Les résultats à cette question seront donnés sous forme de pourcentages.

On interroge une personne au hasard :

a. Soit A l'événement : « la personne préfère lire un livre ».

Donner la probabilité de l'événement A.

0,5 pt

b. Soit B l'événement : « c'est un homme ».

Donner la probabilité de l'événement B.

0,5 pt

c. Soit C l'événement : « la personne préfère regarder la télévision ».

Donner la probabilité de l'événement C.

0,5 pt

d. Calculer la probabilité de l'événement $B \cup C$.

1,25 pt

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4e^x - e^{2x} = e^x(4 - e^x)$.

On donne sa courbe représentative Γ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (Unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses ; 1 cm sur l'axe des ordonnées.)

Partie A

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. En déduire les asymptotes éventuelles de Γ .

1,5 pt

2. a. Calculer la dérivée $f'(x)$.

Justifier que $f'(x)$ est du signe de $4 - 2e^x$.

1 pt

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $4 - 2e^x \geq 0$.

1 pt

c. En déduire les variations de f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation.

1,5 pt

Partie B

1. Calculer les coordonnées des points suivants :

a. le point A, intersection de Γ avec l'axe $(O ; \vec{j})$;

0,5 pt

b. le point B, d'abscisse $\ln 2$ sur Γ ;

0,5 pt

c. le point C, intersection de Γ avec l'axe $(O ; \vec{i})$.

0,5 pt

2. a. Déterminer une équation de la droite tangente T à Γ au point A.

1 pt

b. Soit le point D, intersection de T avec l'axe $(O ; \vec{i})$.

Calculer les coordonnées de D.

0,5 pt

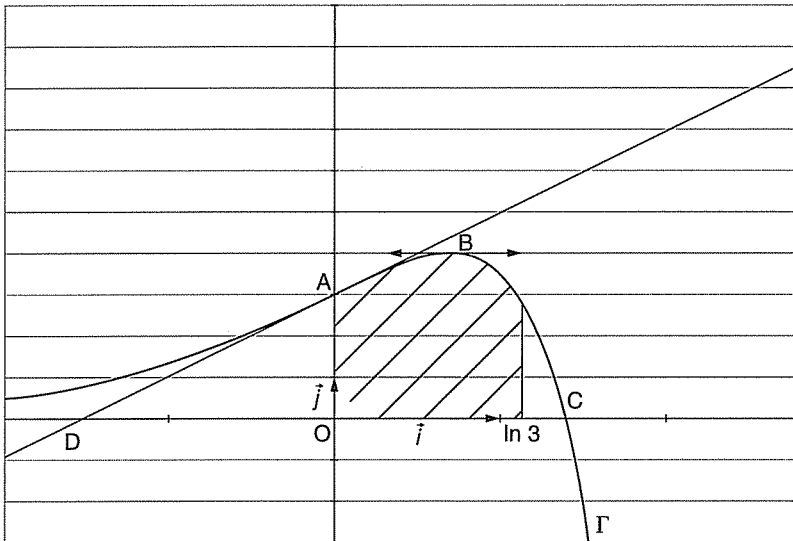
Partie C

1. Trouver une primitive F de f sur \mathbb{R} .

1,5 pt

2. Montrer que l'aire du domaine hachuré sur la figure est égale à 16 cm^2 .

1,5 pt



La figure n'est pas à l'échelle.

Exercice 1 (6 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine

Exercice 2 (6 points)

- Programmation linéaire

Problème (8 points)

- Fonction exponentielle
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Dans un supermarché, le responsable de la cafétéria souhaite ajuster le nombre de repas préparés chaque jour, à la fréquentation du magasin.

Pour cela, il a fait faire une enquête qui a duré 10 jours. Chaque jour, les enquêteurs ont déterminé le nombre de clients entrant dans le magasin, exclusivement entre 10 heures et 11 heures, ainsi que le nombre exact de repas servis à la cafétéria ce midi-là.

On note x_i le nombre de clients comptabilisés et y_i le nombre de repas servis à la cafétéria le jour de rang i .

L'ensemble des résultats est donné dans le tableau suivant :

Rang i du jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre x_i de clients comptés entre 10 H et 11 H	820	280	910	440	750	510	900	250	800	310
Nombre y_i de repas servis à midi	400	207	480	323	370	290	505	175	450	180

1. Représenter sur un graphique le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ associé à la série statistique à deux variables $(x_i ; y_i)$.

En abscisse, 2 cm représenteront 100 clients et, en ordonnée, 2 cm représenteront 100 repas servis.

1 pt

2. a. Pendant ces 10 jours, quel fut le nombre moyen de clients entrant dans le magasin entre 10 heures et 11 heures ?

0,5 pt

b. Sur la période de l'étude, combien de repas ont été servis en moyenne par jour ?

0,5 pt

c. Placer le point moyen G du nuage.

0,25 pt

3. On veut envisager un ajustement linéaire de la série.

a. Calculer les coordonnées de G_1 , point moyen associé aux cinq points :

$$M_2; M_4; M_6; M_8 \text{ et } M_{10}.$$

Calculer ensuite les coordonnées de G_2 , point moyen associé aux cinq points :

$$M_1; M_3; M_5; M_7 \text{ et } M_9.$$

1 pt

b. Tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique précédent. Déterminer, sous la forme $y = mx + p$, une équation de la droite (G_1G_2) .

Les valeurs de m et p seront arrondies à 10^{-2} près par défaut.

1,25 pt

4. Un jour, entre 10 heures et 11 heures, le responsable de la cafétéria a compté 700 personnes qui entraient dans le supermarché. Par lecture graphique, estimer combien de repas seront servis à midi ce jour.

0,5 pt

5. Le directeur du supermarché souhaite augmenter la capacité d'accueil du magasin. Pour des raisons pratiques, la cafétéria ne peut servir plus de 800 repas.

Par le calcul, estimer alors à partir de quel nombre de clients comptabilisés dans la tranche horaire de 10 heures à 11 heures, la cafétéria risque d'être saturée. Expliquer.

1 pt

EXERCICE 2

Un artisan fabrique des objets décoratifs selon deux modèles (A) ou (B). Il cherche à optimiser sa production. Pour cela, il fait une étude en fonction de contraintes qu'il a identifiées. Il en donne une représentation graphique avec le schéma ci-après à rendre avec la copie (les solutions correspondent aux points de coordonnées entières de la zone non hachurée (frontières comprises).

Le nombre d'objets du modèle (A) est noté x ; le nombre d'objets du modèle (B) est noté y .

1. La réalisation d'un objet du modèle (A) nécessite 150 francs de matière première. Celle d'un objet du modèle (B) en nécessite 350 francs. Pour une bonne gestion de son entreprise, la dépense journalière en matière première doit rester inférieure à 2 800 francs. Traduire cette contrainte par une inéquation.

Quelle droite du schéma est la frontière du demi-plan correspondant ?

Justifier.

1 pt

2. La fabrication d'un objet du modèle (A) prend 48 minutes tandis que celle d'un objet du modèle (B) prend 30 minutes. L'artisan dispose de 8 heures de travail maximum par journée. Traduire cette contrainte par une inéquation.

Quelle droite du schéma est la frontière du demi-plan correspondant ?

Justifier.

1 pt

3. Sur chaque objet du modèle (A) vendu, il réalise un bénéfice de 108 F. Sur chaque objet du modèle (B) vendu, il réalise un bénéfice de 90 F.

a. Exprimer, en fonction de x et de y , le bénéfice journalier b qu'il peut réaliser.

0,5 pt

b. Tracer, sur la feuille annexe, la droite Δ_{756} qui, correspond à un bénéfice journalier de 756 F. (On suppose que l'artisan vend toute sa production.)

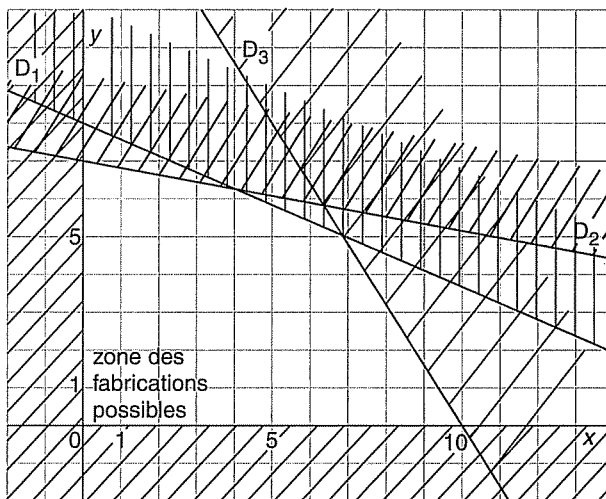
Déterminer graphiquement toutes les solutions qui conduisent à réaliser ce bénéfice de 756 F.

1 pt

4. L'artisan souhaite réaliser un bénéfice maximum. Pour cela, déterminer graphiquement le nombre d'objets du modèle (A) et le nombre d'objets du modèle (B) qu'il doit réaliser (et vendre) chaque jour. Expliquer la méthode utilisée.

Quel sera ce bénéfice maximum ?

2,5 pts



PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $[-1 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{2} + 2e^{-x}$.

C est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

Étude de f et tracé de la courbe représentative de f

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.

0,5 pt

2. Vérifier que, pour tout x de $[-1 ; +\infty[: f'(x) = \frac{e^x - 2}{e^x}$.

0,5 pt

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-1 ; +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de f .

1,5 pt

4. a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f .

1 pt

b. Étudier la position respective de la courbe C et de l'asymptote Δ .

1 pt

5. Tracer la courbe C et la droite Δ .

1,5 pt

Calcul d'une aire

1. Déterminer une primitive de f sur $[-1 ; +\infty[$.

1 pt

2. En déduire l'aire exacte, en cm^2 , de la portion de plan comprise entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

On donnera une valeur décimale, arrondie à 10^{-2} près par excès, de cette aire.

1 pt

ACTION ET COMMUNICATION ADMINISTRATIVES, ACTION ET COMMUNICATION COMMERCIALES

SUJET

6**NATIONAL, JUIN 2001**

Action et communication administratives, action et communication commerciales

Exercice 1 (8 points)

- Probabilités

Exercice 2 (12 points)

- Lectures de graphiques
- Fonction polynôme
- Fonction rationnelle

EXERCICE 1

En 1997, 2 500 personnes ont acheté, chacune, un téléviseur et certaines d'entre elles ont souscrit en même temps une assurance. Celle-ci couvre la totalité des dépenses liées à d'éventuelles pannes pouvant survenir dans les trois années qui suivent la date d'achat.

En 2000, une enquête auprès de tous ces acheteurs a fourni les résultats suivants.

- 125 téléviseurs ont eu exactement une panne ; 52 % des propriétaires de ces téléviseurs ont souscrit à l'assurance.
- 75 téléviseurs ont eu exactement deux pannes ; 48 % des propriétaires de ces téléviseurs n'ont pas souscrit à l'assurance.
- Aucun téléviseur n'a eu plus de deux pannes.
- Parmi les propriétaires des téléviseurs qui n'ont eu aucune panne, 40 % ont souscrit à l'assurance.

1. a. Montrer que 65 téléviseurs assurés ont eu exactement une panne.

0,5 pt

b. Montrer que 920 téléviseurs assurés n'ont eu aucune panne.

0,5 pt

c. Reproduire puis compléter le tableau suivant :

	Nombre de téléviseurs ayant subi une seule panne	Nombre de téléviseurs ayant subi deux pannes	Nombre de téléviseurs n'ayant subi aucune panne	Totaux
Nombre de téléviseurs assurés				
Nombre de téléviseurs non assurés				
Totaux	125	75		2 500

1,5 pt

Toutes les probabilités demandées dans les questions 2. et 3. seront données sous forme décimale exacte.

2. On téléphone, au hasard, à l'un des 2 500 propriétaires des téléviseurs, sans connaître les réponses fournies lors de l'enquête.

Soient A et B les événements suivants :

A : « le propriétaire a souscrit une assurance »

B : « le poste du propriétaire a subi exactement deux pannes ».

a. Calculer la probabilité de A, notée $p(A)$; calculer la probabilité de B, notée $p(B)$.

1 pt

b. Décrire, à l'aide d'une phrase, l'événement $A \cap B$.

Calculer la probabilité de cet événement.

1 pt

c. Déduire des questions précédentes, la probabilité de l'événement $A \cup B$.

0,5 pt

3. a. Déterminer le nombre de propriétaires de téléviseurs n'ayant pas eu de réparation à payer, pendant les trois années, pour maintenir leur poste en état de marche.

0,5 pt

b. Déduire de la question 3.a. la probabilité $p(C)$ de l'événement C :

« Le propriétaire contacté par téléphone n'a pas eu de réparation à payer pendant les trois années, pour maintenir son poste en état de marche. »

0,5 pt

4. On téléphone maintenant, au hasard, à l'un des propriétaires parmi ceux ayant souscrit une assurance lors de l'achat de leur téléviseur.

a. Combien de propriétaires sont susceptibles d'être contactés ?

0,5 pt

b. Déterminer, dans ce cas, la probabilité notée $p'(D)$, de l'événement D :

« Le propriétaire contacté reconnaît que l'assurance souscrite lui a été utile ». On donnera le résultat en arrondissant à 0,01 près.

1 pt

c. Traduire le résultat précédent par une phrase, en terme de pourcentage.

0,5 pt

EXERCICE 2

Une entreprise fabrique des machines outils. Ses capacités de production, sur un an, sont telles qu'elle peut fabriquer entre 20 et 80 machines. Soit x le nombre des machines fabriquées annuellement. Les représentations graphiques, données en annexe, sont celles de deux fonctions C et B , définies toutes deux sur l'intervalle $[20 ; 80]$. Pour tout x entier naturel, $C(x)$ est le coût de production unitaire en francs et $B(x)$ est le bénéfice en francs. *Il est à remarquer que l'axe des abscisses est commun aux deux représentations, mais que deux axes des ordonnées sont utilisés ; l'un de ceux-ci sert à la lecture de $C(x)$ et il est gradué en milliers de francs, l'autre sert à la lecture de $B(x)$ et il est aussi gradué en milliers de francs.*

Partie A – Lectures graphiques

1. a. Quel est le coût de production unitaire lorsque 25 machines sont produites? Et lorsque 70 machines sont produites? 1 pt
- b. Quelles productions correspondent à un coût unitaire de 32 500 francs? 0,5 pt
- c. Quel est le coût unitaire de production minimum? À quelle production correspond-il? 0,5 pt
2. a. Quelles productions assurent un bénéfice supérieur ou égal à 350 000 francs? 1 pt
- b. Quelle production assure un bénéfice maximum? Quel est ce bénéfice? 0,5 pt
- c. Quel bénéfice est obtenu lorsque la production vise le coût unitaire minimum? 0,5 pt

Partie B – Études de fonctions

En fait la fonction C représentée ci-après est telle que, pour tout x de l'intervalle $[20 ; 80]$, $C(x) = 400x + \frac{490\,000}{x}$.

1. a. Calculer $C'(x)$ où C' est la fonction dérivée de C . Montrer que :

$$C'(x) = \frac{400}{x^2}(x + 35)(x - 35). \quad 1 \text{ pt}$$

- b. Étudier le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[20 ; 80]$. Construire le tableau de variation de C . 1,5 pt
- c. Comparer les résultats obtenus à la question 1.c. de la **Partie A** avec ceux fournis dans le tableau de variation précédent. 0,5 pt
2. a. Montrer que le coût total de production de x machines-outils, appelé $C_t(x)$ et exprimé en francs, est égal à $400x^2 + 490\,000$. 0,5 pt
- b. Le prix de vente de chaque machine-outil est de 40 000 francs. Montrer que la fonction B représentée ci-après, est en fait définie sur l'intervalle $[20 ; 80]$ par :

$$B(x) = -400x^2 + 40\,000x - 490\,000. \quad 1 \text{ pt}$$

c. Calculer $B'(x)$ où B' est la fonction dérivée de B . Étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[20 ; 80]$. Construire le tableau de variation de B .

1,5 pt

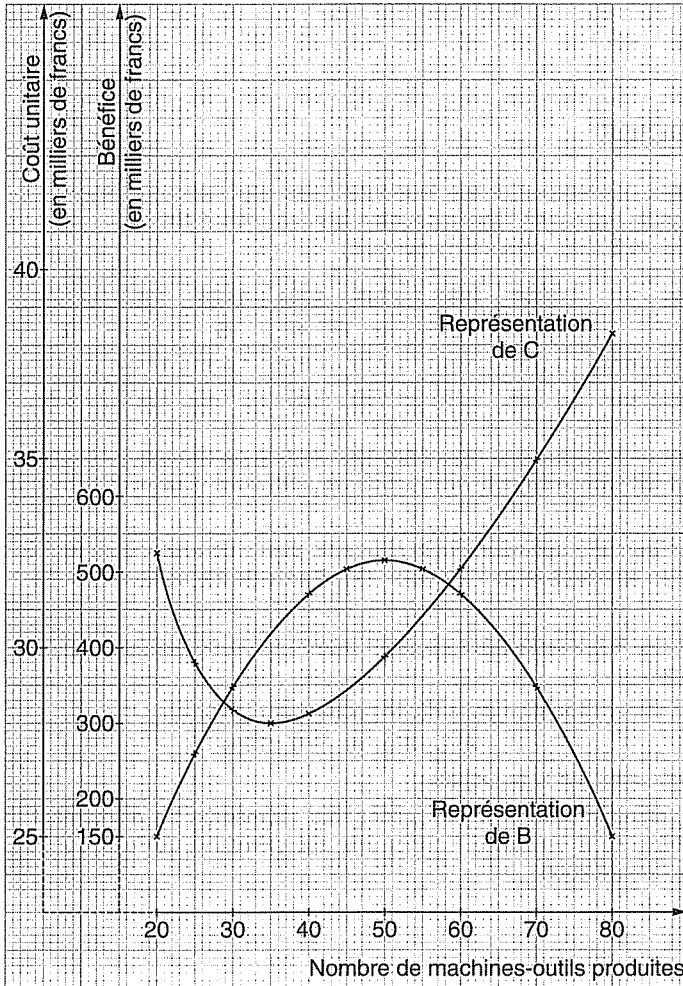
d. Comparer les résultats obtenus à la question 2.b. de la **Partie A**, avec ceux fournis par le tableau de variation précédent.

0,5 pt

e. Le chef d'entreprise décide de produire 50 machines-outils par an. Calculer le bénéfice réalisé par machine produite. Quel serait ce bénéfice par machine, si le chef d'entreprise décidait de produire seulement 35 machines-outils ?

Le bénéfice maximal pour l'entreprise et le bénéfice maximal par machine sont-ils obtenus pour la même production ?

1,5 pt



CENTRES ÉTRANGERS I, JUIN 2001

Action et communication administratives, action et communication commerciales

Exercice (8 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine

Problème (12 points)

- Probabilités
- Fonction rationnelle

EXERCICE

Le tableau ci-dessous donne le montant des importations et exportations (en milliards de francs) en France pour les années 1991 à 1998.

(Source I.N.S.E.E., comptes nationaux.)

Année	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang	1	2	3	4	5	6	7	8
Importations	1 514	1 493	1 405	1 523	1 638	1 664	1 768	1 922
Exportations	1 538	1 588	1 556	1 664	1 745	1 805	1 999	2 123

1. Créer un tableau dans lequel apparaît le rang de l'année et l'excédent commercial (différence entre le montant des exportations et celui des importations).

1 pt

2. Représenter graphiquement le nuage de points correspondant (unités : 1 cm pour 1 an en abscisse et 1 cm pour 10 milliards de francs en ordonnées).

1,5 pt

3. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Le placer sur le graphique.

1 pt

4. Déterminer l'équation de la droite passant par les points :

$$A(2 ; 85) \text{ et } B(8 ; 205).$$

La représenter sur le graphique.

3 pts

5. En admettant que la droite précédente représente un ajustement linéaire acceptable de la tendance, donner une approximation de l'excédent commercial de l'année 2000.

1,5 pt

PROBLÈME

Nous allons étudier différents aspects de la vente d'occasion automobile en France.

Partie A – Étude statistique (d'après Argus automobile)

On effectue un classement des cinq modèles de véhicules les plus vendus en France au premier trimestre 2000 et on dresse le tableau suivant, en milliers de voitures (à rendre avec la copie) :

	Moins de 1 an	De 1 à 4 ans	Plus de 4 ans	TOTAL
Renault Clio	16			78
Peugeot 205	0	3	66	69
Renault 5			60	
Renault Mégane et Scénic	21	24	0	45
Volkswagen Golf	3	9	36	48
TOTAL		60		300

1. Compléter le tableau d'effectifs précédent.

1 pt

2. On suppose qu'un client choisit sa voiture parmi les cinq modèles proposés dans le tableau.

a. Calculer la probabilité qu'il ait une voiture de moins de 1 an ?

0,5 pt

b. Calculer la probabilité qu'il ait une Renault ?

0,5 pt

c. Calculer la probabilité qu'il ait une Renault Clio ou une voiture de moins de un an ?

1 pt

On exprimera les probabilités sous forme d'une fraction puis d'un nombre décimal, arrondi au centième.

Partie B

Le prix moyen d'un véhicule d'occasion dépend du nombre d'années de son ancienneté.

Le tableau ci-dessous indique le prix moyen constaté en l'an 2000 du véhicule Biomobile en fonction du nombre d'années d'ancienneté (les véhicules sortis en 2000 ont l'ancienneté $x = 0$).

Nombre d'années d'ancienneté x	0	1	2	3		5	6
Prix (milliers de francs)	80	54	40	34		22	19

1. Représenter graphiquement le prix de la Biomobile en fonction de x , en prenant les unités suivantes pour un repère orthogonal :

- en abscisse, 1 cm pour 1 an ;
- en ordonnées, 1 cm pour 4 000 F.

1 pt

2. On pose $f(x) = \frac{80\,000}{0,5x + 1}$, pour x appartenant à l'intervalle $[0 ; 10]$.

a. Montrer, en détaillant les calculs, que :

$$f'(x) = \frac{-40\,000}{(0,5x + 1)^2}$$

pour tout x appartenant à $[0 ; 10]$.

En déduire le tableau de variation de f sur $[0 ; 10]$.

2,5 pts

b. Calculer les valeurs prises par $f(x)$ pour x entier, compris entre 0 et 10 ; présenter ces résultats sous forme de tableau. On arrondira à l'unité près.

1,5 pt

c. Représenter f sur le graphique précédent.

2 pts

d. f vous semble-t-elle une bonne approximation de la cote d'Argus ?

1 pt

e. En utilisant l'approximation précédente, donner une estimation du prix d'occasion, en l'an 2000, d'une Biomobile sortie en 1996.

1 pt

NATIONAL, SEPTEMBRE 2000

Action et Communication Administratives, Action et Communication Commerciales

Exercice 1 (8 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine
- Suites

Exercice 2 (12 points)

- Fonction polynôme
- Fonction rationnelle

EXERCICE 1

Un magasin d'électroménager vend, depuis le 1^{er} janvier 1990, des aspirateurs de la marque ASPIRTOU. Son directeur nous a fourni les renseignements consignés dans le tableau ci-dessous, dans lequel on a également précisé le rang x_j de l'année $1989 + x_j$.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Rang x_j de l'année	1	2	3	4	5	6
Nombre y_j d'aspirateurs vendu	594	670	770	830	930	1 000

1. Représenter le nuage de points M_j de coordonnées $(x_j ; y_j)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. On prendra pour unités graphiques :

- 1 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées en commençant la graduation à 500.

1,5 pt

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique.

1 pt

3. On observe l'aspect du nuage et on choisit pour ajustement affine la droite Δ d'équation :

$$y = 82x + 512.$$

1 pt

Tracer cette droite Δ .

4. En utilisant l'ajustement précédent, déterminer graphiquement, puis par le calcul, une estimation du nombre d'aspirateurs que le magasin peut espérer vendre en l'an 2000.

1,5 pt

5. En réalité, on a constaté que, après 1995, les ventes ont progressé régulièrement de 15 % par an.

a. Montrer que le magasin a vendu 1 150 aspirateurs en 1996.

0,5 pt

b. Combien en a-t-il vendu en 1997 ? 1 pt

c. Combien peut-il espérer en vendre dans ces conditions en l'an 2000 ? 1,5 pt

Les deux derniers résultats seront arrondis à l'unité près.

EXERCICE 2

Partie A – Coût marginal

L'entreprise ASPIRTOU fabrique des aspirateurs. Chaque mois, elle produit un nombre x d'aspirateurs, x étant un nombre entier compris entre 1 000 et 6 000. Le coût de production, exprimé en euros, de x aspirateurs est donné par :

$$C(x) = 0,003x^2 + 60x + 48\,000.$$

1. Quel est le coût de production exact de 1 000 aspirateurs ? De 1 001 aspirateurs ?

En déduire l'augmentation du coût entraînée par le 1 001^e aspirateur. 1,5 pt

2. On appelle coût marginal au rang x et on note $d(x)$ la différence :

$$C(x+1) - C(x).$$

Ainsi $d(x) = C(x+1) - C(x)$ représente l'augmentation de coût correspondant à la fabrication d'un aspirateur supplémentaire, sachant qu'on en a déjà fabriqué x .

a. Quel est le coût marginal $d(1\,000)$ au rang 1 000 ? 0,5 pt

b. Montrer que :

$$C(x+1) = 0,003x^2 + 60,006x + 48\,060,003$$

et

$$d(x) = 0,006x + 60,003.$$

1,5 pt

3. On considère que x est un réel de l'intervalle $[1\,000 ; 6\,000]$ et on note C' la dérivée de la fonction C définie par :

$$C(x) = 0,003x^2 + 60x + 48\,000.$$

a. Calculer $C'(x)$, puis $C'(1\,000)$. 1 pt

b. Calculer $d(1\,000) - C'(1\,000)$ et vérifier que :

$$d(x) - C'(x) = 0,003.$$

1 pt

Partie B – Étude d'une fonction

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,000 ; 6\,000]$ par :

$$f(x) = 0,003x + 60 + \frac{48\,000}{x}.$$

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $[1\,000 ; 6\,000]$:

$$f'(x) = \frac{0,003}{x^2} (x - 4\,000)(x + 4\,000).$$

1 pt

2. Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $[1\ 000 ; 6\ 000]$ et dresser le tableau de variation de f sur $[1\ 000 ; 6\ 000]$. 1,5 pt

3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000
$f(x)$		90-				

1 pt

4. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

On prendra pour unités graphiques :

- 1 cm pour 500 aspirateurs en abscisse ;
- 1 cm pour 4 euros en ordonnée, en commençant la graduation à 60. 1 pt

Partie C – Coût moyen et coût marginal

1. Tracer dans le repère précédent la droite D représentant graphiquement la fonction C' définie dans la **Partie A**. 0,5 pt

2. Le coût moyen d'un aspirateur de l'entreprise ASPIRTOU est égal au coût de production divisé par le nombre d'aspirateurs.

Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[1\ 000 ; 6\ 000]$, ce coût moyen est égal à $f(x)$. 0,5 pt

3. a. Dans la pratique, on remplace le coût marginal d par la dérivée C' .

Donner, par lecture graphique, le nombre d'aspirateurs produits pour lequel le coût moyen est égal au coût marginal. 0,5 pt

b. Calculer, pour cette valeur, le coût moyen. 0,5 pt

NOUVELLE-CALÉDONIE, DÉCEMBRE 2000

Action et Communication Administratives, Action et Communication Commerciales

Exercice 1 (8 points)

- Probabilités

Exercice 2 (12 points)

- Fonction polynôme
- Suites

EXERCICE 1

Une entreprise envisage de mettre en place un service de transport en commun. Elle a effectué, pour cela, une enquête sur le mode de transport habituel de ses salariés.

L'entreprise emploie 400 personnes, dont 74,5 % sont favorables au projet.

Parmi ces 400 personnes, 65 % viennent en voiture ; 80 % des personnes qui viennent en voiture sont favorables au projet.

Parmi les 400 personnes de l'entreprise, 18 % viennent en bus ; le sixième des personnes qui viennent en bus n'est pas favorable au projet.

Aucun piéton n'est favorable au projet et le quart des cyclistes non plus.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Voiture	Bus	Vélo	Pied	Total
Favorable					
Non favorable					
Total					400

2 pts

Dans les questions 2. et 3. les résultats seront donnés sous forme de fractions, puis sous forme décimale à 10^{-3} près.

2. On prend une personne au hasard parmi les 400.

Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « elle est venue en voiture » ;

B : « elle est favorable au projet » ;

C : « elle est venue en voiture et est favorable au projet ».

Quel est l'événement noté $A \cup B$? Calculer sa probabilité.

4,5 pts

3. On choisit une personne au hasard parmi ceux qui sont favorables au projet.

Quelle est la probabilité pour que cette personne soit venue en bus ?

1,5 pt

EXERCICE 2

Une petite entreprise fabrique des agendas. Chaque jour, elle en produit x , ce nombre x étant un nombre compris entre 0 et 50.

Le coût de production journalière de x agendas est la somme du coût de fabrication de ces x agendas et des frais fixes.

Le coût de production exprimé en francs est $f(x) = x^2 + 30x + 400$.

Partie A

1. Calculer $f(0)$; que représente le nombre trouvé ?

1 pt

2. On suppose que la production journalière est de 10 unités. Calculer l'augmentation du coût de production journalière si la production passe à 12 unités.

1,5 pt

Partie B

Chaque agenda est vendu 120 francs.

1. Calculer le bénéfice correspondant à 10 agendas, puis celui correspondant à 30 agendas.

1,5 pt

2. On désigne par $B(x)$ le bénéfice réalisé, chaque jour, par la vente de x agendas.

a. Montrer que $B(x) = -x^2 + 90x - 400$ sur $[0, 50]$.

1,5 pt

b. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe sur $[0, 50]$.

2 pts

c. En déduire le nombre d'agendas à fabriquer chaque jour pour avoir un bénéfice maximal ainsi.

1,5 pt

Partie C

L'entreprise travaille 300 jours par an et produit 45 agendas par jour. On admettra qu'ils sont tous vendus.

1. Calculer le bénéfice total réalisé.

1 pt

2. L'entreprise décide de placer à intérêts composés au taux de 4,5 % l'an, le bénéfice réalisé par la vente de la production des 100 premiers jours.

Calculer la valeur acquise en francs par cette somme au bout de 6 ans de placement (valeur arrondie à l'unité près).

2 pts

Série STI

GÉNIE CIVIL, GÉNIE ÉNERGÉTIQUE GÉNIE MÉCANIQUE

SUJET

10

NATIONAL, JUIN 2001

Génie Civil, Génie Énergétique, Génie Mécanique (A et F)

Exercice 1 (5 points)

- Nombres complexes
- Nombres complexes et géométrie

Exercice 2 (4 points)

- Équation différentielle du 2^e ordre
- Trigonométrie

Problème (11 points)

- Fonction exponentielle
- Résolution approchée d'équation
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + 3i ; z_B = 2\sqrt{3} \text{ et } z_C = 2i.$$

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe (sur papier millimétré).

0,5 pt

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_A .

0,5 pt

3. a. Calculer les modules des nombres complexes :

$$z_A - z_C, z_B - z_A \text{ et } z_B - z_C.$$

En déduire la nature du triangle ABC.

1,5 pt

b. Déterminer l'affixe du centre K du cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC ; préciser le rayon r de ce cercle.

0,75 pt

c. Montrer que le point O appartient au cercle (Γ) .

0,25 pt

4. On considère le point D, d'affixe $z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

a. Montrer, que $z_D = \sqrt{3} - i$.

0,25 pt

b. Calculer l'affixe du milieu M du segment [AD].

0,5 pt

c. Démontrer que le quadrilatère ABDC est un rectangle.

0,75 pt

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation différentielle : $4y'' + y = 0$.

0,5 pt

2. Déterminer la solution particulière de cette équation différentielle vérifiant :

$$\begin{cases} f(\pi) = \sqrt{3} \\ f'(\pi) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1,5 pt

3. Montrer que cette solution f vérifie, pour tout x réel :

$$f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

0,5 pt

4. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels l'équation d'inconnue x : $f(x) = 1$; en donner les solutions appartenant à l'intervalle $[0 ; 4\pi[$.

1,5 pt

PROBLÈME

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4.$$

Partie A – Construction de la courbe représentative de f

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

0,5 pt

b. Vérifier que $f(x) = e^{-x}(3 + 2xe^x - 4e^x)$.

Déterminer alors la limite de f en $-\infty$.

1 pt

c. Soit C la courbe représentative de f et soit D la droite d'équation :

$$y = 2x - 4.$$

Montrer que D est asymptote à C en $+\infty$ et étudier la position relative de la droite D par rapport à la courbe C.

1 pt

2. a. Calculer la dérivée de f . Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x :

$$-3e^{-x} + 2 \geq 0.$$

1,25 pt

b. Dresser le tableau de variation de f .

0,5 pt

c. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

0,5 pt

d. Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

0,75 pt

3. Tracer C, D et T dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, pour x variant de -2 à 5 (sur papier millimétré).

2 pts

Partie B – Calcul d'une aire

1. Chercher une primitive de f sur $] -\infty ; +\infty[$.

2 pts

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $]1 ; 2[$ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près.

1 pt

b. Préciser, en le justifiant, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $] \alpha ; +\infty[$.

0,5 pt

c. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 4$.

En donner une valeur approchée, en utilisant pour α la valeur approchée trouvée précédemment.

1 pt

NATIONAL, SEPTEMBRE 2000

Génie Civil, Génie Énergétique, Génie Mécanique (A et F)

Exercice 1 (4 points)

- Probabilités

Exercice 2 (4 points)

- Nombres complexes
- Nombres complexes et géométrie

Problème (12 points)

- Fonction exponentielle
- Lecture de graphique
- Fonction logarithme
- Calcul intégral
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Les trois machines A, B et C d'un atelier ont une production totale de 10 000 pièces du même type.

Elles produisent respectivement 2 000, 3 000 et 5 000 pièces.

Par ailleurs, on constate que le nombre de pièces avec défaut est de 100 pour A, de 120 pour B et de 150 pour C.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

	Machine A	Machine B	Machine C	TOTAL
Nombre de pièces sans défaut				
Nombre de pièces avec défaut			150	
TOTAL	2 000			10 000

1,5 pt

2. Une pièce est choisie au hasard dans la production totale.

Toutes les pièces ont la même probabilité d'être choisies.

a. Montrer que la probabilité p_1 pour qu'elle provienne de A est égale à 0,2.

1 pt

b. Montrer que la probabilité p_2 pour qu'elle ait un défaut est égale à 0,037.

0,5 pt

c. Calculer à 10^{-3} près la probabilité p_3 pour qu'elle provienne de B et qu'elle soit sans défaut. 0,5 pt

3. Une pièce est choisie au hasard dans l'ensemble des pièces sans défaut. Toutes ces pièces ayant la même probabilité d'être choisies, calculer à 10^{-3} près la probabilité pour qu'elle provienne de B. 0,5 pt

EXERCICE 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$(z - 4)(z^2 - 2z + 4) = 0$$

1 pt

2. On note A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = 4; \quad z_B = 1 + i\sqrt{3}; \quad z_C = 1 - i\sqrt{3}$$

a. Écrire z_B et z_C sous forme trigonométrique. 0,5 pt

b. Placer avec précision les points A, B et C dans le plan complexe. On fera le dessin sur la copie. 0,5 pt

c. Calculer $|z_B - z_A|$, $|z_C - z_B|$ et $|z_C - z_A|$. 0,5 pt

d. En déduire la nature du triangle ABC. 0,5 pt

3. On note K le point d'affixe $z_K = -\sqrt{3} + i$.

a. Placer avec précision le point K sur la figure précédente. 0,5 pt

b. Démontrer que le triangle OBK est rectangle isocèle. 0,5 pt

PROBLÈME

On se propose d'étudier, dans une première partie, quelques propriétés d'une fonction f dont la représentation graphique est donnée. On s'intéresse, dans une seconde partie, à l'une de ses primitives et, dans une troisième partie, au calcul d'une aire.

Pour tout le problème, le plan est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

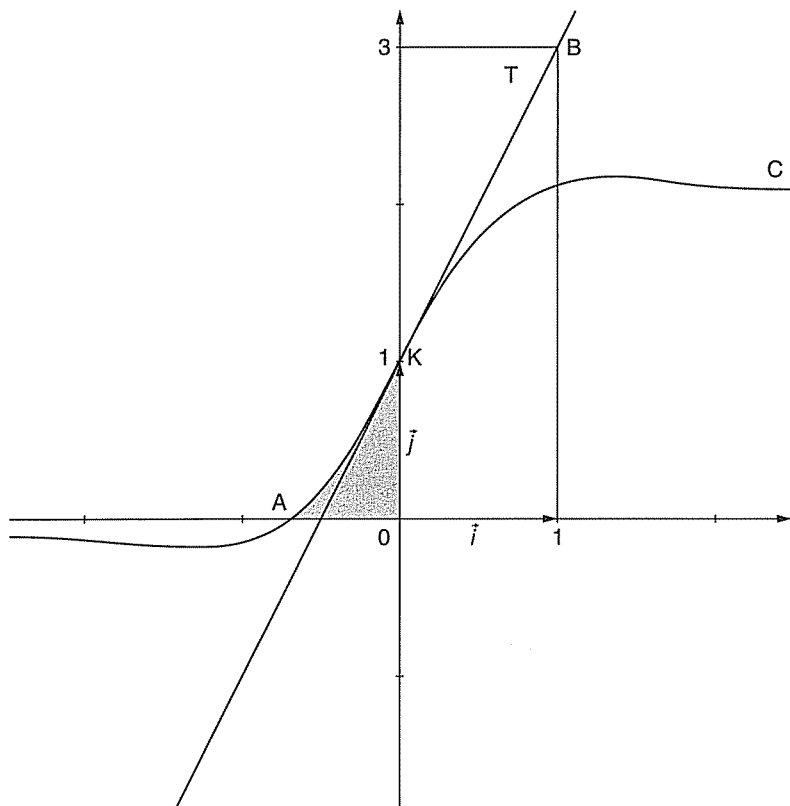
Partie A – Étude graphique d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

On trouvera sur le graphique ci-après, le tracé de la courbe C représentative de la fonction f et le tracé de la tangente T à la courbe C au point $K(0; 1)$, dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que le point K est centre de symétrie de la courbe C et que le point B(1 ; 3) appartient à la tangente T.



1. On se propose de démontrer certaines propriétés de la courbe C.

a. Étudier la limite de f en $-\infty$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

1 pt

b. On admet que pour tout réel x , $f(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

1,5 pt

c. Vérifier, par le calcul, que le point $A(-\ln 2 ; 0)$ est un point de la courbe C.

0,5 pt

2. Grâce à une lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses.

a. Déterminer la valeur de $f'(0)$.

0,5 pt

b. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

0,5 pt

Partie B – Étude d'une primitive de f sur $] -\infty ; +\infty[$

Soit F la fonction définie sur $] -\infty ; +\infty[$ par :

$$F(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

et (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier la limite de F en $-\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ) . 1 pt

2. a. Vérifier que pour tout réel x , $F(x)$ peut s'écrire :

$$F(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}).$$
 0,5 pt

b. Calculer la limite de F en $+\infty$, puis la limite de $F(x) - (2x)$ en $+\infty$.

0,5 pt

c. En déduire que la courbe (Γ) admet une droite asymptote.

0,5 pt

3. a. Démontrer que f est la fonction dérivée de F sur $] -\infty ; +\infty[$.

0,5 pt

b. Vérifier que $F(-\ln 2) = \ln \frac{3}{4}$.

0,5 pt

c. Déduire de la **Partie A** le tableau de variation de la fonction F .

0,5 pt

4. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près :

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$F(x)$									

1 pt

5. Sur la feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm, les droites d'équations respectives $y = 2x$ et $y = 0$, puis la courbe (Γ) .

1 pt

Partie C – Calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\int_{-\ln 2}^0 f(x) dx$.

1 pt

2. En déduire la valeur exacte en cm^2 de l'aire du domaine AOK (grisé sur la courbe jointe) et en donner une valeur approchée à un millimètre carré près par excès.

1 pt

GÉNIE MÉCANIQUE (B, C, D, E)

GÉNIE DES MATÉRIAUX

SUJET

12

NATIONAL, JUIN 2001

Génie Mécanique (B, C, D, E). Génie des Matériaux

Exercice 1 (5 points)

- Nombres complexes
- Nombres complexes et géométrie

Exercice 2 (4 points)

- Équation différentielle du 2^e ordre
- Trigonométrie
- Calcul intégral

Problème (11 points)

- Fonction logarithme
- Calcul d'aire

EXERCICE 11. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation en z :

$$z^2 - 6z + 13 = 0.$$

1 pt

2. a. Déterminer les réels b et c tels que pour tout complexe z :

$$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = (z - 3)(z^2 + bz + c).$$

1 pt

b. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation en z :

$$z^3 - 9z^2 + 31z - 39 = 0.$$

0,5 pt

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité : 2 cm).

Soient A, B, E et F les points d'affixes respectives :

$$z_A = 3 + 2i, \quad z_B = 3 - 2i, \quad z_E = \frac{5}{4} + i \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{et} \quad z_F = 3.$$

a. Placer les points A, B, E et F dans le plan complexe (sur papier millimétré).

0,5 pt

b. Calculer les distances FA, FB et FE. En déduire que les points A, B et E appartiennent à un cercle (Γ) de centre F.

1,5 pt

c. Quelle est la nature du triangle ABE ?

0,5 pt

EXERCICE 2

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = 0$. 0,75 pt
2. On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormal passe par le point de coordonnées $(0; 1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
- a. Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$. 0,5 pt
- b. En déduire une expression de $f(x)$ en fonction de x . 1,25 pt
- c. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 0,5 pt
3. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; \pi]$, c'est-à-dire le réel m défini par :

$$m = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$$
1 pt

PROBLÈME

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x + x \ln(x).$$

(où \ln désigne le logarithme népérien).

1. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$. 1 pt
2. Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$ l'inéquation $g(x) > 0$. 1 pt

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln(x)$.

On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. 1,5 pt
2. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la **Partie A** pour établir le tableau de variations de f . 2 pts
3. Calculer $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$. On fera apparaître le détail des calculs. 0,5 pt
4. Soit A le point d'abscisse 1 de (Γ) .
Déterminer une équation de la tangente T en A à la courbe (Γ) . 1 pt
5. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la tangente T ainsi que la partie de la courbe (Γ) relative à l'intervalle $]0; 6]$. 1,5 pt
6. Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln(x) - \frac{11}{36}x^3.$$

- a. Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$. 1 pt
- b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par la courbe (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près. 1,5 pt

Exercice 1 (4 points)

- Équation différentielle du 2^e ordre
- Trigonométrie

Exercice 2 (4 points)

- Nombres complexes
- Nombres complexes et géométrie

Problème (12 points)

- Fonction logarithme
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

On considère l'équation différentielle (E) : $16y'' + y = 0$, dans laquelle l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et y' la dérivée seconde de y .

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

1,5 pt

2. Déterminer la solution particulière g de (E) telle que :

$$g(0) = -\sqrt{3} \text{ et } g'(\pi) = \frac{\sqrt{2}}{8} (\sqrt{3} + 1).$$

1,5 pt

3. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} on a : $g(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$.

0,5 pt

4. Résoudre dans $[0 ; 8\pi[$ l'équation : $g(x) = 1$.

1 pt

EXERCICE 2

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes, l'équation :

$$z^3 - 12z^2 + 48z = 0.$$

1 pt

2. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives z_A et z_B telles que :

$$z_A = 6 + 2\sqrt{3}i \text{ et } z_B = 6 - 2\sqrt{3}i.$$

- a. Placer A et B dans le plan. 0,25 pt
- b. Calculer le module et un argument de z_A et z_B . 1 pt
- c. Démontrer que le triangle OAB est équilatéral. 0,75 pt
- d. Soit Ω le point d'affixe 4.
Démontrer que les points O, A et B se trouvent sur un cercle (Γ) de centre Ω . 1 pt

PROBLEME

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.

1. Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de I). 1,5 pt
2. En déduire que pour tout nombre réel x strictement positif :
 $g(x) > 0$. 0,5 pt

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2 cm.

1. a. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C). 1 pt
- b. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x},$$

étudier la limite de f en $+\infty$. 0,5 pt

2. a. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$. 1 pt
- b. Déduire de la **Partie A** le signe de $f'(x)$, puis le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I . 1 pt
- c. Dresser le tableau de variation de f . 0,5 pt

3. Soit (D) la droite d'équation : $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

- a. Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe (C). 0,75 pt
- b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D). 0,75 pt
- c. Sur l'intervalle I , déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D). 1 pt
4. Construire avec soin, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C). 1,5 pt

Partie C

On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

1. En remarquant que $h(x)$ est de la forme $u'(x)u(x)$, déterminer une primitive de la fonction h . 1 pt

2. On considère la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation :

$$x = \frac{1}{e} \text{ et } x = e^2.$$

Hachurer cette partie de plan, puis calculer son aire en cm^2 . 1 pt

GÉNIE ÉLECTRONIQUE, GÉNIE ÉLECTRO- TECHNIQUE, GÉNIE OPTIQUE

SUJET

14**NATIONAL, JUIN 2001**

Génie Électronique, Génie Électrotechnique, Génie Optique

Exercice 1 (4 points)

- Équation différentielle du 2^e ordre
- Trigonométrie
- Calcul intégral

Exercice 2 (4 points)

- Probabilités
- Variable aléatoire

Problème (12 points)

- Lecture de graphique
- Fonction exponentielle
- Calcul intégral

EXERCICE 1

Soit l'équation différentielle (E) :

$$4y'' + 9y = 0,$$

où y est une fonction de la variable t et y'' sa dérivée seconde.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

1 pt

2. Trouver la fonction f , solution particulière de (E), vérifiant les conditions suivantes :

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

1,5 pt

3. Vérifier que, pour tout réel t , $f(t) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

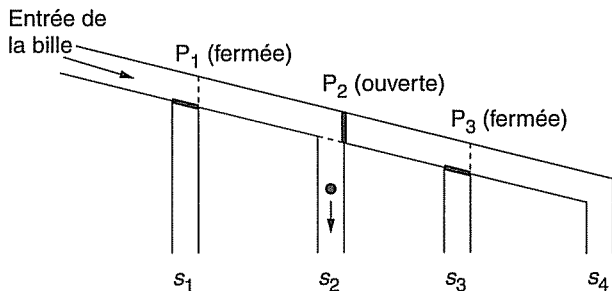
0,5 pt

4. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

1 pt

EXERCICE 2

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1 , P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles s_1 , s_2 , s_3 et s_4 . Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille.



NB : sur le schéma les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, la bille sortira par s_2 .

1. Énumérer dans un tableau comme ci-dessous, en s'aidant éventuellement d'un arbre de choix, toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

P_1	P_2	P_3	Sortie
...	...		
F	O	F	s_2
...	...		

1 pt

(Par convention on notera F une porte fermée et O une porte ouverte.)

2. On suppose que les huit événements élémentaires, trouvés à la question 1, sont équiprobables.

a. Soit A l'événement $(F ; O ; F)$. Quelle est la probabilité $p(A)$ de l'événement A ?

0,25 pt

b. Soit :

S_1 l'événement « la bille sort par s_1 » ;

S_2 l'événement « la bille sort par s_2 » ;

S_3 l'événement « la bille sort par s_3 » ;

S_4 l'événement « la bille sort par s_4 ».

Calculer les probabilités $p(S_1)$, $p(S_2)$, $p(S_3)$ et $p(S_4)$ de chacun de ces événements.

1 pt

3. Pour jouer, on doit miser 7 francs.

Si la bille sort par s_1 , on ne reçoit rien.

Si la bille sort par s_2 , on reçoit 5 francs.

Si la bille sort par s_3 , on reçoit 10 francs.

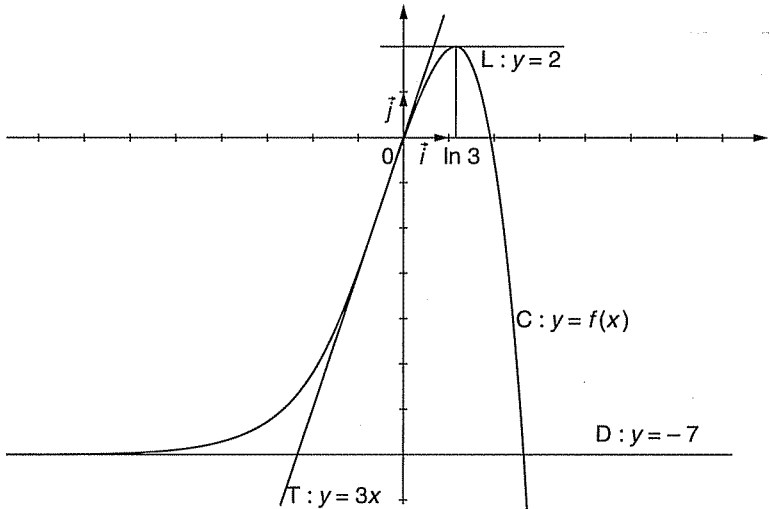
Si la bille sort par s_4 , on reçoit 20 francs.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque sortie possible, associe le gain ou la perte en francs du joueur (en tenant compte de la mise des 7 francs ; par exemple, à la sortie s_4 , X associe 13).

- a. Quelles sont les valeurs prises par X ? $0,25 \text{ pt}$
 - b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X . $0,5 \text{ pt}$
 - c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X . $0,5 \text{ pt}$
4. On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable, c'est-à-dire que $E(X)$ soit égal à zéro.
Déterminer cette nouvelle mise en justifiant la réponse. $0,5 \text{ pt}$

PROBLÈME

Sur le graphique ci-dessous, C est la courbe représentative, dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



Partie A

La droite L , d'équation $y = 2$, est tangente à C au point d'abscisse $\ln 3$.
La droite T , d'équation $y = 3x$, est tangente à C au point d'abscisse 0 .
La droite D , d'équation $y = -7$, est asymptote à C au voisinage de $-\infty$.
Déterminer, à l'aide de ces données, les réels suivants :

- 1. $f(0)$ et $f(\ln 3)$; $0,5 \text{ pt}$
- 2. $f'(0)$ et $f'(\ln 3)$; $0,5 \text{ pt}$
- 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. $0,5 \text{ pt}$

Partie B

On admet que, pour tout réel x :

$$f(x) = ae^x + b + \frac{c}{e^x + 1}$$

où a , b et c sont des constantes réelles.

1. a. Déterminer en fonction des réels a , b et c , les nombres suivants :

$$f(0) ; f(\ln 3) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

0,75 pt

b. En déduire un système d'équations vérifiées par a , b et c .

Résoudre ce système et en déduire que $f(x) = -e^x + 9 - \frac{16}{e^x + 1}$.

2 pts

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

0,5 pt

3. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x .

0,75 pt

b. Vérifier que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 5)(3 - e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

et en déduire le tableau de variation de la fonction f .

2 pts

Partie C

On rappelle que $f(x) = -e^x + 9 - \frac{16}{e^x + 1}$ pour tout réel x .

1. Vérifier que, pour tout réel x : $f(x) = -e^x - 7 + 16 \frac{e^x}{e^x + 1}$.

0,5 pt

2. a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec la droite D d'équation $y = -7$.

1 pt

b. Étudier la position de D par rapport à C.

1 pt

3. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = 16 \ln(e^x + 1) - e^x - 7x.$$

a. Montrer que F est une primitive de f .

1 pt

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 15} (f(x) + 7) dx$.

0,5 pt

c. Interpréter géométriquement l'intégrale \mathcal{A} .

0,5 pt

Exercice 1 (5 points)

- Nombres complexes
- Nombres complexes et géométrie

Exercice 2 (4 points)

- Calcul intégral
- Fonction exponentielle
- Fonctions trigonométriques

Problème (11 points)

- Fonction exponentielle
- Calcul intégral

EXERCICE 1

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 6z + 12 = 0.$$

0,75 pt

2. a. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, placer les points A et B images respectives des nombres complexes $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ et $z_B = \bar{z}_A$ où \bar{z}_A désigne le nombre complexe conjugué de z_A .

0,5 pt

b. Écrire z_A et z_B sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et θ réel.

1 pt

3. a. Calculer $\frac{z_B}{z_A}$.

0,5 pt

b. En déduire que $z_B = z_A e^{-\frac{i\pi}{3}}$ et interpréter géométriquement ce résultat.

0,75 pt

4. On pose : $z' = z - 2 + i\sqrt{3}$. On note T la transformation géométrique du plan qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe z' .

a. Caractériser cette transformation T. *la translation de vecteur $\vec{v} = -2 + i\sqrt{3}$ avec affixe $-2 + i\sqrt{3}$*

0,5 pt

b. Calculer l'affixe z_D de l'image D du point A par cette transformation.

0,25 pt

c. Calculer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.

0,5 pt

d. Compléter la figure en plaçant C et D.

0,25 pt

EXERCICE 2

Soient I et J les intégrales définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx.$$

1. Soit f et u les fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x) \quad \text{et} \quad u(x) = e^{-x} \sin x.$$

a. Montrer que u est une primitive de f .

0,75 pt

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx$.

0,75 pt

2. a. Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f .

0,75 pt

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale J.

0,75 pt

3. a. Déterminer une relation entre I, J et K.

0,5 pt

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

0,5 pt

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x^2 + x + 2)e^{\frac{x}{2}}.$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité : 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

0,5 pt

b. En remarquant que :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)x^2 e^{\frac{x}{2}},$$

et en admettant que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 e^{\frac{x}{2}}\right) = 0$, déterminer la limite de f en $-\infty$.

Que peut-on en déduire pour (C) ?

1 pt

2. a. Calculer $f'(x)$. Montrer que :

$$f'(x) = \frac{1}{2} (x^2 + 5x + 4)e^{\frac{x}{2}}.$$

1 pt

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

En déduire le tableau de variations de f .

2 pts

3. Déterminer une équation de la droite (D), tangente à (C) en son point d'abscisse -2 .

1 pt

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs :

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	1
$f(x)$										

Les valeurs de $f(x)$ seront arrondies avec deux décimales.

Représenter (D) puis (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2,5 pts

5. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{\frac{x}{2}},$$

où a , b et c sont des constantes réelles.

Calculer $g'(x)$. Déterminer les nombres a , b et c pour que g soit une primitive de f sur \mathbb{R} .

2 pts

6. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-4 ; 0]$.

1 pt

ARTS APPLIQUÉS

SUJET **16**

NATIONAL, JUIN 2001

Arts Appliqués

Exercice 1 (8 points)

- Probabilités

Exercice 2 (12 points)

- Fonction exponentielle
- Calcul intégral
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Un atelier fabrique une série d'autocollants qui peuvent être de couleur bleue ou jaune, de forme ronde ou carrée, avec ou sans liseré.

On a récapitulé les quantités produites dans deux tableaux :

FOND JAUNE		
	Ronds	Carrés
Avec liseré	800	1 200
Sans liseré	1 300	1 700

FOND BLEU		
	Ronds	Carrés
Avec liseré	1 000	1 500
Sans liseré	900	1 600

Partie A

En utilisant les données précédentes, recopier et remplir toutes les cases des tableaux ci-dessous :

FORME RONDE			
	Jaune	Bleu	Sous total
Avec liseré			
Sans liseré			
Sous total			

FORME CARRÉE			
	Jaune	Bleu	Sous total
Avec liseré			
Sans liseré			
Sous total			

3 pts

Partie B

On prélève au hasard l'un des autocollants produits. On note les événements :

R : « prélever un autocollant rond » ;

C : « prélever un autocollant carré » ;

J : « prélever un autocollant jaune » ;

B : « prélever un autocollant bleu » ;

L : « prélever un autocollant bleu avec liseré » ;

\bar{L} : « prélever un autocollant sans liseré ».

1. On appelle Ω l'ensemble des autocollants produits.

Quel est le nombre d'éléments de Ω ?

0,5 pt

2. Quel est le nombre d'éléments de R, J, L et \bar{L} ?

2 pts

3. Calculer la probabilité des événements suivants (*les résultats seront donnés, en valeur exacte, sous forme de nombres décimaux avec 2 chiffres après la virgule*) :

a. $R \cap L \cap J$;

0,5 pt

b. $R \cap \bar{L}$;

0,5 pt

c. C ;

0,5 pt

d. $C \cup B$;

0,5 pt

e. $\overline{C \cup B}$.

0,5 pt

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$ par :

$$f(x) = 4e^x - e^{2x}.$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, dont l'unité graphique est 2 cm.

Partie A – Étude de la fonction f .

1. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

En déduire que (C) admet une asymptote dont on précisera une équation.

1 pt

2. a. f' désigne la dérivée de f sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$. Montrer que :

$$f'(x) = 2e^x(2 - e^x).$$

1 pt

b. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $2 - e^x > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$

sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$.

1 pt

c. Dresser le tableau de variation de f .

1 pt

Partie B – Courbe (C) et applications.

1. Résoudre, dans $]-\infty ; \frac{3}{2}]$, l'équation $f(x) = 0$.

Interpréter graphiquement le résultat.

1,5 pt

2. Tracer (C) dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1,5 pt

3. Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

1 pt

Partie C – Calcul d'une aire et application.

On désigne par (P) la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -5$ et $x = \ln 4$.

1. a. Calculer $\int_{-5}^{\ln 4} f(x) dx$ et, à l'aide d'une calculatrice, en donner une valeur

approchée à 10^{-2} près.

2 pts

b. En déduire l'aire de (P).

1 pt

2. On désigne par (P'), le symétrique de (P) par rapport à l'axe des abscisses.

La réunion des domaines (P) et (P') représente un logo, à l'échelle $\frac{1}{8}$, pour une enseigne publicitaire.

En tenant compte du résultat précédent, calculer l'aire en cm^2 , puis en m^2 , de ce logo.

1 pt

Série SMS

SUJET

17

NATIONAL, JUIN 2001

Sciences Médico-Sociales

Exercice (8 points)

- Probabilités

Problème (12 points)

- Fonction logarithme
- Lecture de graphique

EXERCICE

Une enquête effectuée par une association de consommateurs, concernant l'hygiène alimentaire, porte sur un échantillon de 800 personnes.

Trois groupes bien différenciés apparaissent.

- Type 1 : les personnes totalement végétariennes. On en compte 34.
- Type 2 : les personnes végétariennes qui consomment cependant du poisson. On en compte 132.
- Type 3 : les personnes non végétariennes. Elles constituent le reste de l'échantillon.

On compte 55 % de femmes dans l'échantillon et, parmi celles-ci, 5 % sont totalement végétariennes.

De plus, 7,5 % des hommes de l'échantillon sont du type 2.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Type 1	Type 2	Type 3	Total
Femmes				
Hommes				
Total				800

3 pts

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 0,001 près.

2. On choisit, au hasard, une des 800 personnes de l'échantillon, chacune ayant la même probabilité d'être choisie.

a. Soit l'événement A : « la personne choisie est non végétarienne ».

Calculer la probabilité $P(A)$.

1 pt

b. Soit l'événement B : « la personne choisie est un homme ».

Calculer la probabilité $P(B)$.

1 pt

c. Définir par une phrase l'événement $C = A \cap B$ et calculer sa probabilité.

1,5 pt

d. Définir par un événement D, exprimé avec A et B, la phrase « La personne choisie est non végétarienne ou est un homme », puis calculer sa probabilité.

1,5 pt

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = 12x + 12 - 12 \ln(3x + 1).$$

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{12(3x - 2)}{3x + 1}.$$

2 pts

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

2,5 pts

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 10^{-1} près) :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$			6,8	7,4		

1 pt

4. Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. (Unités graphiques : 6 cm pour une unité en abscisse et 1 cm pour une unité en ordonnée).

2 pts

Partie B

On suppose que le taux d'anticorps (en g/L) présents dans le sang d'un nourrisson en fonction de l'âge (en années), depuis la naissance jusqu'à l'âge de 2 ans, est donné par la formule suivante :

$$f(x) = 12x + 12 - 12 \ln(3x + 1).$$

1. Calculer le taux d'anticorps à la naissance.

1 pt

2. À l'aide de la **Partie A**, déterminer l'âge, arrondi au mois le plus proche, pour lequel le taux d'anticorps est minimal.

1,5 pt

3. Déterminer graphiquement l'âge auquel le nourrisson retrouve le taux d'anticorps de sa naissance (laisser apparents les tracés utiles).

2 pts

Exercice (8 points)

- Probabilités

Problème (12 points)

- Fonction logarithme
- Lecture de graphique

EXERCICE

Dans une partie du monde, on estime que 15 % de la population est contaminée par un virus X. La stratégie de dépistage met en place un test biologique qui devrait être négatif si la personne n'est pas contaminée et positif si la personne est contaminée.

On a observé les résultats suivants :

- quand la personne est contaminée par le virus X, le test est positif dans 99,6 % des cas ;
- quand la personne n'est pas contaminée par ce virus, le test est négatif dans 97,6 % des cas.

1. En considérant une population de 10 000 personnes observées, reproduire et compléter le tableau suivant :

	Nombre de personnes contaminées	Nombre de personnes non contaminées	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			10 000

2 pts

Dans les questions suivantes les probabilités seront données à 10^{-4} près. Pour les questions 2., 3., 4. on choisit au hasard une personne de cette population, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies.

2. On considère les événements :

A : « La personne est contaminée par le virus X » ;

B : « La personne a un test positif ».

Calculer la probabilité de chacun des événements A et B.

1 pt

3. Calculer la probabilité pour que la personne soit contaminée par le virus X et ait un test positif.

1 pt

4. a. Calculer la probabilité pour que la personne ne soit pas contaminée par le virus X et ait un test positif.

1 pt

b. Calculer la probabilité pour que la personne soit contaminée par le virus X et ait un test négatif. 1 pt

c. Calculer la probabilité que le test donne un résultat faux. 1 pt

5. On choisit maintenant une personne ayant un test négatif. Quelle est la probabilité qu'elle soit contaminée par le virus X ? 1 pt

PROBLÈME

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [10 ; 110]$ par :

$$f(x) = -0,1x + 2 \ln(2x).$$

1. a. Calculer $f'(x)$. 1 pt

b. Vérifier que $f'(x) = \frac{2 - 0,1x}{x}$ et résoudre l'équation $f'(x) = 0$. 1 pt

c. Reproduire et compléter le tableau de signes suivant :

x	10	110
$2 - 0,1x$		
x		
$\frac{2 - 0,1x}{x}$		

1,5 pt

d. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle I . 1 pt

2. Reproduire et compléter le tableau suivant, en donnant des valeurs de $f(x)$ arrondies à 10^{-1} près :

x	10	15	20	30	40	50	60	70	90	110
$f(x)$		5,3	5,4		4,8		3,6			

2,5 pts

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal. Pour le graphique, on prendra :

- 1 cm en abscisses pour 10 unités ;
- 2 cm en ordonnées pour 1 unité.

Tracer la courbe représentative de la fonction f , en utilisant le tableau de valeurs de la question précédente. 2 pts

Partie B

On admet que, pour un âge x compris entre 15 ans et 60 ans, la capacité pulmonaire de l'être humain, en litres, est donnée par : $f(x) = -0,1x + 2 \ln(2x)$.

1. En utilisant la **Partie A**, préciser la capacité pulmonaire maximale et l'âge où elle est atteinte. 1 pt

2. Par lecture graphique, en faisant apparaître les tracés utiles, indiquer à quel âge, après 15 ans, la capacité pulmonaire est de 5 litres. 1 pt

3. Expliquer pourquoi la fonction f ne peut pas être utilisée pour évaluer la capacité pulmonaire d'une personne de 110 ans. 1 pt

Série STL

PHYSIQUE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS

SUJET

19**NATIONAL, JUIN 2001**

Physique de Laboratoire et de Procédés Industriels

Exercice 1 (5 points)

- Équation différentielle du 1^{er} ordre
- Fonction exponentielle

Exercice 2 (5 points)

- Nombres complexes
- Nombres complexes et géométrie

Problème (10 points)

- Fonction logarithme
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

À l'instant $t=0$, un corps dont la température est de 100° est placé dans une salle à 20° . On désigne par $\theta(t)$ la température du corps à l'instant t , l'unité de temps étant l'heure et l'unité de température le degré Celsius.

On suppose que la vitesse de refroidissement $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence de température entre la température du corps et la température de la salle (loi de Newton) (on négligera l'élévation de température de la salle) et on admettra donc qu'il existe un nombre réel k tel que :

$$\theta'(t) = k[\theta(t) - 20].$$

1. On pose $y(t) = \theta(t) - 20$.

a. Montrer que la fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = ky$, où k est défini ci-dessus.

1 pt

b. Résoudre cette équation différentielle.

1 pt

c. En déduire que $\theta(t) = Ce^{kt} + 20$ où C est un nombre réel que l'on calculera.

1 pt

2. a. Sachant qu'au bout de 20 minutes le corps s'est refroidi de 100° à 60° , montrer que :

$$\theta(t) = 80e^{(-3 \ln 2)t} + 20.$$

1 pt

b. Quelle est la température du corps, arrondie au degré, au bout de 30 minutes ?

0,5 pt

c. En combien de temps la température tombera-t-elle à de 100° à 30° ?

0,5 pt

EXERCICE 2

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. a. Vérifier que le nombre complexe $(2 + \sqrt{3}) - i$ est solution de l'équation :

$$Z^2 - 2(2 + \sqrt{3})Z + 4(2 + \sqrt{3}) = 0.$$

0,5 pt

b. Donner l'autre solution de cette équation.

0,5 pt

2. On considère les nombres complexes :

$$Z_1 = (2 + \sqrt{3}) + i \quad \text{et} \quad Z_2 = (2 + \sqrt{3}) - i.$$

a. Placer dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ le point A d'affixe Z_1 et le point B d'affixe Z_2 .

0,25 pt

b. Vérifier que $\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

0,75 pt

c. Déterminer le module et un argument du complexe $\frac{Z_2}{Z_1}$.

0,5 pt

d. Dédurre du résultat précédent l'angle de la rotation de centre O qui transforme A en B.

0,5 pt

3. a. Déterminer l'affixe Z_3 du point C milieu du segment $[AB]$.

0,5 pt

b. Quelle est la nature du triangle OCA ?

0,5 pt

4. a. Calculer $|Z_1|$ et $|Z_3|$.

0,5 pt

b. Dédurre des résultats précédents que :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

0,5 pt

PROBLÈME

Le but du problème est l'étude de la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 + 1 - \frac{\ln x}{x},$$

où $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x .

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de la fonction g . Les limites aux bornes ne sont pas demandées. 1 pt

2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . 1 pt

Partie B

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de l'intervalle $]0 ; +\infty[$. En déduire l'existence d'une droite asymptote à la courbe \mathcal{C} que l'on précisera. 1,5 pt

2. Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

En déduire le tableau de variation de la fonction f . 1,5 pt

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

Sa courbe représentative \mathcal{P} dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est donnée ci-après.

a. Déterminer la limite de $[f(x) - h(x)]$ en $+\infty$. 0,5 pt

b. Déterminer le signe de $[f(x) - h(x)]$. Que peut-on en déduire pour la position relative des deux courbes \mathcal{C} et \mathcal{P} ? 1,5 pt

4. Tracer la courbe \mathcal{C} sur la feuille ci-après (à rendre avec la copie). 1 pt

Partie C

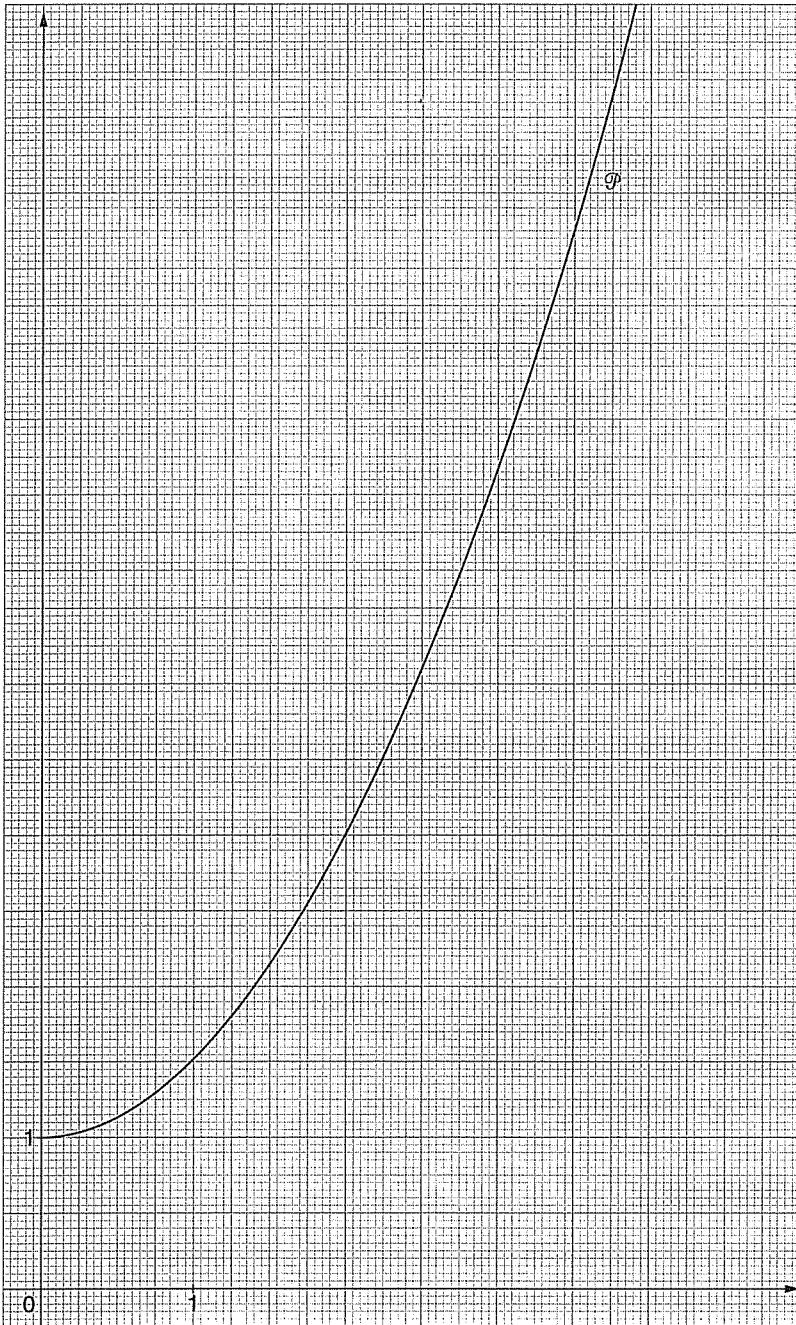
1. Déterminer une primitive de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x} \ln x$$

sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. 1 pt

2. On appelle S l'aire en cm^2 , de la partie du plan limitée par les deux courbes \mathcal{C} et \mathcal{P} et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

Donner la valeur exacte de S puis la valeur arrondie au mm^2 . 1 pt



CHIMIE DE LABORATOIRE ET DE PROCÉDÉS INDUSTRIELS

SUJET

20**NATIONAL, JUIN 2001**

Chimie de Laboratoire et de Procédés Industriels

Exercice 1 (4 points)

- Variable aléatoire

Exercice 2 (5 points)

- Nombres complexes

Problème (11 points)

- Fonction exponentielle
- Calcul d'aire

EXERCICE 1

Une urne contient trois boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 3. Un jeu consiste à extraire successivement deux boules de l'urne, la première boule étant remise avant d'extraire la seconde.

On appelle tirage, tout couple (a, b) où a est le numéro de la première boule extraite et b celui de la seconde.

On admet que tous les tirages sont équiprobables.

1. Préciser l'ensemble des neuf tirages possibles (on pourra s'aider d'un tableau). 1 pt

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage (a, b) , associe le produit ab .

a. Quelles sont les valeurs prises par X ? 0,5 pt

b. Établir la loi de probabilité de X . 2 pts

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. 0,5 pt

EXERCICE 2

On note i le nombre complexe de module 1 ayant pour argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 puis de z_2 . 1 pt

2. On considère le nombre complexe $Z = z_1 z_2^2$.

a. Écrire Z sous forme trigonométrique.

2 pts

b. Vérifier que $Z = (-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) + i(2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$.

1 pt

c. Dédire des deux résultats précédents les valeurs exactes de :

$$\cos \frac{13\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{13\pi}{12}.$$

1 pt

PROBLÈME

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} - 3e^x + x + 2.$$

et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

0,5 pt

b. Démontrer que la droite D d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} .

0,5 pt

c. Étudier les positions relatives de la courbe \mathcal{C} et de la droite D .

1 pt

2. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = e^x \left(e^x - 3 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right);$$

en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

1 pt

3. a. Calculer $f'(x)$.

0,5 pt

b. Vérifier que $f'(x) = (2e^x - 1)(e^x - 1)$.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f'(x) = 0$ puis déterminer le signe de $f'(x)$.

2 pts

c. Dresser le tableau de variation de f .

0,5 pt

4. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Que peut-on dire des droites T et D ?

1,5 pt

b. Tracer, dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les droites D , T et la courbe \mathcal{C} .

1,5 pt

5. Calculer l'aire, en cm^2 , de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , la droite D et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$.

2 pts

BIOCHIMIE, GÉNIE BIOLOGIQUE

SUJET

21

NATIONAL, JUIN 2001

Biochimie, Génie Biologique

Exercice 1 (8 points)

- Fonction exponentielle
- Lecture de graphique

Exercice 2 (12 points)

- Statistiques à deux variables : ajustement affine
- Suites
- Probabilités

EXERCICE 1

Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable. Lors d'une pollution, elle doit interrompre ses prélèvements le temps que la vague de pollution soit évacuée par le courant. On suppose qu'à partir de l'alerte, donnée à l'instant 0, la concentration en polluant P, exprimée en milligrammes par litre (mg/L), dépend du temps t , exprimé en heures, suivant la relation :

$$P(t) = 100te^{-t}$$

pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$.

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en donnant des valeurs arrondies à l'entier le plus proche :

t (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$P(t)$ (en mg/L)	0		37							5	

1 pt

2. Montrer que la dérivée P' est définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

$$P'(t) = 100e^{-t}(1 - t).$$

1 pt

3. Étudier le signe de la dérivée P' et dresser le tableau de variation de la fonction P pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$.

1,5 pt

4. Tracer la courbe représentative C_P de la fonction P dans un repère orthogonal en prenant en abscisse 2 cm pour une heure et en ordonnée 2 cm pour 5 mg/L de pollution.

1,5 pt

5. Les normes en vigueur indiquent que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/L.

a. Déterminer graphiquement à partir de quel instant t_0 la station peut reprendre son pompage sans risque pour la santé (on laissera les constructions apparentes). 1 pt

b. Entre le début de l'alerte et l'arrêt effectif du pompage, il s'est écoulé exactement 6 minutes.

Peut-on affirmer que l'eau prélevée a toujours été conforme aux normes en vigueur vis-à-vis de ce polluant ? On justifiera la réponse à l'aide d'un calcul. 2 pts

EXERCICE 2

Données scientifiques concernant le brochet

La croissance observée en centimètres suivant l'âge est indiquée dans le tableau ci-dessous :

âge du brochet en années	1	2	3	4	5
taille en centimètres	23	36	43	55	62

La longévité de l'espèce (âge maximal) est évaluée à neuf années.

Très nombreux à la naissance, les brochets se font plus rares à l'âge adulte, les spécimens très âgés devenant exceptionnels. Ainsi sur 1 000 brochets qui viennent de naître, seuls 10 parviendront à l'âge de 8 ans.

Le graphique ci-après représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.

1. Un ajustement linéaire du nuage semble-t-il justifié ? 0,5 pt

2. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 celui des deux derniers :

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique. 1,5 pt

b. Montrer que la droite (G_1G_2) admet pour équation réduite :

$$y = 9,8x + 14,4. \quad \text{1 pt}$$

c. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et montrer qu'il appartient bien à la droite (G_1G_2) .

Placer le point G sur le graphique. 1 pt

3. On admet que cette droite constitue une bonne modélisation de la taille du brochet en fonction de son âge.

a. Résoudre algébriquement l'inéquation :

$$9,8x + 14,4 > 200.$$

Est-il vraisemblable qu'un brochet dont la taille dépasse 200 centimètres puisse être observé ? 1,5 pt

b. Résoudre graphiquement l'équation $9,8x + 14,4 = 100$.

En déduire l'âge d'un brochet mesurant 100 centimètres.

(On donnera la valeur entière la plus proche et on laissera apparents les traits de construction.) 1,5 pt

4. On souhaite construire un tableau indiquant le nombre de brochets U_n présents dans un lac, en fonction de leur âge n , en adoptant comme modèle une suite géométrique décroissante de raison $q=0,565$ et de premier terme $U_0=1\ 000$.

a. Calculer les nombres U_1 et U_2 (on donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche). 1 pt

b. Recopier et compléter le tableau suivant dans lequel les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche :

Âge n en années	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Nombre total de brochets
Nombre de brochets U_n	565	319	180						6	1 291

1,5 pt

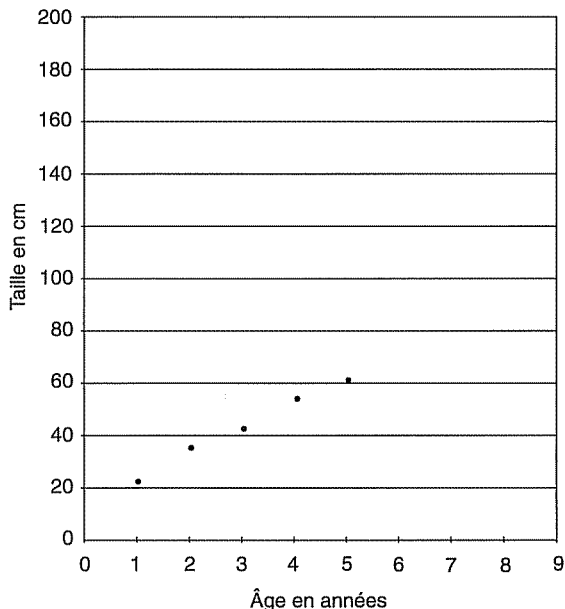
5. On pêche un des 1 291 brochets âgés de un an et plus présents dans le lac. On suppose que tous ont la même probabilité d'être capturés.

a. Pour une bonne gestion piscicole, on ne peut conserver, après capture, qu'un poisson âgé de quatre ans et plus. On capture un brochet : quelle probabilité a-t-on de pouvoir le garder ?

(On donnera un résultat à un dixième près.) 1,25 pt

b. Montrer que la probabilité de capturer un poisson dont la taille est un mètre, est d'environ 5 sur 1 000. 1,25 pt

Évolution de la taille d'un brochet en fonction de son âge



Sessions antérieures

PROGRAMMATION LINÉAIRE

1

Exercice

Série STT (CG, IG), 2000

Un exploitant forestier dispose d'une parcelle de 40 ha sur laquelle il souhaite planter deux essences de résineux : des pins sylvestres et des douglas. Cependant, pour des considérations de nature de terrain et d'orientation, il ne pourra pas planter plus de 30 ha de douglas.

Pour les pins sylvestres il doit dépenser 1,20 F par pied et pour les douglas 1,50 F par pied. On plante en moyenne 2 000 pins sylvestres par ha, alors que pour les douglas il faut compter 1 200 pieds par ha. Enfin, il dispose d'un budget maximum de 90 000 F.

On note x le nombre d'hectares de pins sylvestres et y le nombre d'hectares de pins douglas plantés sur cette parcelle.

1. a. Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les conditions du problème.
- b. Montrer que les contraintes du problème sont traduites par le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ x + y \leq 40 \\ 4x + 3y \leq 150 \end{cases}$$

2. À tout couple $(x ; y)$ on associe un point M de coordonnées $(x ; y)$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm pour 4 ha).

Déterminer graphiquement l'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient les contraintes. (On hachurera la zone ne convenant pas.)

3. Compte tenu des prix actuels, cet exploitant peut espérer obtenir 150 000 F par ha de pins sylvestres et 300 000 F par ha pour les douglas.

- a. Exprimer, en fonction de x et y , la recette \mathbb{R} que cet exploitant pourrait tirer de la parcelle.

On obtient ainsi l'équation d'une droite Δ_R .

- b. Tracer sur le même graphique que précédemment, la droite Δ_R correspondant à une recette de 4 500 000 F.

- c. Expliquer, grâce au graphique, comment on peut trouver le couple $(x_0 ; y_0)$ pour lequel la recette \mathbb{R} est maximale.

- d. Par une étude graphique, trouver ce couple $(x_0 ; y_0)$ et conclure sur le meilleur choix des surfaces à planter en pins sylvestres et en douglas.

2

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

Un club de loisirs organise une sortie à laquelle participeront cent personnes. Pour la pause du matin, le responsable de la journée prévoit d'emporter au moins deux croissants par personne, au moins deux confiseries par personne et au moins cent cinquante boissons.

Un premier fournisseur lui propose des lots A comprenant trois croissants, une confiserie et une boisson pour un prix de trente francs.

Un second fournisseur lui propose des lots B comprenant un croissant, deux confiseries et une boisson pour un prix de vingt-cinq francs.

On se propose de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B à acheter pour que le coût soit minimum.

1. Traduire les contraintes sous la forme d'inéquations portant sur x et y .

2. À tout couple (x, y) de nombres réels, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (on choisira 1 cm pour dix unités). Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 200 \\ x + 2y \geq 200 \\ x + y \geq 150 \end{cases}$$

Hachurer la partie du plan qui ne convient pas.

3. a. Exprimer en fonction de x et y la dépense occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.

b. Tracer dans le repère précédent la droite correspondant à une dépense de 4 950 francs.

c. Déterminer graphiquement le nombre de lots A et de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale. Quelle est cette dépense ?

3

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

Pour décorer sa vitrine de Noël, un commerçant a besoin d'au moins 50 boules multicolores, d'au moins 12 guirlandes et d'au moins 26 mètres de tissu argenté.

SESSIONS ANTÉRIEURES

Deux grossistes proposent :

- l'un, le lot A constitué de 10 boules multicolores, 3 guirlandes, 8 mètres de tissu argenté, pour une somme de 165 francs ;
- l'autre, le lot B constitué de 20 boules multicolores, 4 guirlandes, 2 mètres de tissu argenté, pour une somme de 110 francs.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B que le commerçant doit acheter pour que la dépense soit minimale.

1. Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes du problème.

2. On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 5 \\ 3x + 4y \geq 12 \\ 4x + y \geq 13 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan ne convenant pas.

3. a. Exprimer en fonction de x et y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.

b. Tracer dans le plan la droite Δ correspondant à une dépense D de 880 francs.

c. Déterminer graphiquement le nombre x_0 de lots A et le nombre y_0 de lots B pour lesquels la dépense est minimale.

Calculer cette dépense minimale.

4

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit.

Deux ateliers de confection, Idéa et Rénov, font des offres par lots :

- Idéa : 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 2 000 F ;
- Rénov : 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 1 500 F.

On notera x le nombre de lots Idéa achetés et y le nombre de lots Rénov achetés.

1. Montrer que les contraintes du problème portant sur x et y sont traduites par un système d'inéquations équivalent au système (S) suivant :

$$(S) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 12 \\ 2x + 3y \geq 24 \\ 2x + y \geq 16 \end{cases}$$

2. Résoudre graphiquement le système (S) dans un repère orthonormal (unité : 1 cm).

Hachurer l'ensemble des points M dont les coordonnées ne vérifient pas le système (S), en expliquant votre démarche pour l'une des inéquations.

3. a. Exprimer la dépense occasionnée par l'achat de x lots Idéa et y lots Rénov.

b. Montrer que l'ensemble des couples $(x ; y)$ occasionnant la dépense D sont les coordonnées des points d'une droite Δ_D dont on donnera une équation sous la forme $y = ax + b$.

c. Tracer la droite Δ_D dans le cas particulier où $D = 24\,000$ F.

4. Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque type à acheter pour obtenir une dépense minimale.

Calculer cette dépense minimale.

5

Exercice

Série STT (CG, IG), 2000

Pour équiper le club de bridge qu'il vient de créer, Michel a besoin de 16 tables, 72 chaises et 44 jeux de cartes.

Il s'adresse à deux boutiques spécialisées :

- la boutique A lui propose un lot de 2 tables, 8 chaises et 11 jeux de cartes pour 2 500 F ;

- la boutique B lui propose un lot de 2 tables, 10 chaises et 4 jeux de cartes pour 2 750 F.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre x de lots qu'il va acheter à la boutique A et le nombre y de lots qu'il va acheter à la boutique B pour que la dépense soit minimale.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes d'équipement.

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), résoudre graphiquement le système :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 8 \\ 4x + 5y \geq 36 \\ 11x + 4y \geq 44 \end{cases}$$

(Hachurer l'ensemble des points dont les coordonnées **ne vérifient pas le système**, en expliquant votre démarche pour la seule inéquation $4x + 5y \geq 36$).

3. a. Exprimer la dépense D occasionnée par l'achat de x lots à la boutique A et de y lots à la boutique B.

b. Les couples $(x ; y)$ correspondant à une dépense donnée D , sont les coordonnées de points de la droite Δ_D , dont on donnera une équation sous la forme $y = ax + b$.

c. Tracer la droite Δ_D , avec $D = 27\,500$ F.

4. Déterminer à l'aide du graphique, en le justifiant, le nombre x_0 de lots à acheter à la boutique A et le nombre y_0 de lots à acheter à la boutique B pour satisfaire les besoins avec une dépense minimale.

Calculer cette dépense minimale.



Exercice

Série STT (CG, IG), 1998

Le conseil municipal d'une commune décide d'améliorer son jeu d'effets lumineux en vue des fêtes de fin d'année 1998.

Il lui faudra au moins 800 m de guirlandes lumineuses pour la rue principale, 12 « étoiles des neiges » pour les carrefours stratégiques et 8 « sapins de Noël » pour les artères commerçantes.

L'entreprise Fiesta propose le lot A constitué de 100 m de guirlandes, 2 « étoiles des neiges » et 2 « sapins de Noël » au prix de 5 000 F. L'entreprise Réveillon propose le lot B constitué de 200 m de guirlandes, 2 « étoiles des neiges » et 1 « sapin de Noël » au prix de 7 000 F.

Notre objectif est d'aider ce conseil municipal en déterminant le nombre x de lots A et le nombre y de lots B à acheter pour que la dépense soit minimale. Dans la suite de l'exercice, x et y sont des nombres entiers.

1. Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes.

2. Démontrer que ce système équivaut au système suivant :

$$(S) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 8 \\ x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \end{cases}$$

À tout couple $(x ; y)$ on associe le point M de coordonnées $(x ; y)$ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

Déterminer graphiquement la région du plan contenant les points M dont les coordonnées vérifient le système (S). (On hachurera la région ne convenant pas.)

À l'aide du graphique déterminer si les commandes suivantes satisfont les contraintes :

- a. commande C_1 : 7 lots A et 1 lot B ;
- b. commande C_2 : 3 lots A et 2 lots B ;
- c. commande C_3 : 6 lots A et 1 lot B.

On justifiera par une brève phrase les trois réponses.

3. a. Exprimer en fonction de x et y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.

b. Montrer que la commande C_1 occasionne une dépense de 42 000 francs. Tracer dans le plan la droite Δ correspondant à une dépense de 42 000 francs. À l'aide du graphique, indiquer si une dépense de 42 000 francs est suffisante pour couvrir les besoins de la commune. Est-elle minimale ?

c. Expliquer comment le graphique permet de déterminer la commande à passer aux deux entreprises pour que la dépense soit minimale.

On notera I le point du graphique représentant le nombre de lots de chaque catégorie à commander pour que la dépense soit minimale. Donner les coordonnées de I et le montant de cette dépense minimale.

7 Exercice
Série STT (CG, IG), 1998

Deux services (A et B) d'une clinique se partagent l'usage de deux appareils médicaux : un scanner et une radio.

Une étude a montré que les patients du service A passent en moyenne 30 minutes au scanner et 20 minutes à la radio. Quant aux patients du service B, ils passent en moyenne 15 minutes au scanner et 20 minutes à la radio.

Le service du scanner fonctionne 9 heures par jour et celui de la radio 10 heures par jour.

Ces appareils étant coûteux, on cherche à déterminer le nombre x de patients du service A et le nombre y de patients du service B pour les utiliser au mieux chaque jour.

1. Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes.

2. À tout couple $(x ; y)$ on associe un point M de coordonnées $(x ; y)$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 0,5 cm).

a. Montrer que le système obtenu au 1. est équivalent à :

$$(C) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 36 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

SESSIONS ANTÉRIEURES

- b. Déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x ; y)$ dont les coordonnées vérifient les contraintes. (On hachurera la zone ne convenant pas.)
3. Pour la gestion des deux appareils, 30 F sont prélevés sur les frais médicaux des patients du service A et 20 F pour les patients du service B.
- a. Exprimer la somme S ainsi obtenue quotidiennement en fonction de x et de y . On obtient ainsi l'équation d'une droite Δ_S .
Tracer sur le même graphique la droite Δ_{600} .
- b. Expliquer comment, grâce au graphique, on peut trouver le couple $(x_0 ; y_0)$ pour lequel la somme S est maximale.
D'après cette étude graphique, trouver ce couple et calculer la somme maximale.

CALCUL DE POURCENTAGES

8

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 + 203x - 410 = 0$.
2. Dans un supermarché, le chef du rayon électricité effectue son bilan trimestriel. Au mois d'octobre, son chiffre d'affaires est de 20 000 F.
- a. Au mois de novembre, le chiffre d'affaires, noté $N(x)$, est en hausse de $x\%$ par rapport à celui du mois d'octobre.
Exprimer $N(x)$ en fonction de x .
- b. Le chiffre d'affaires du mois de décembre, que l'on note $D(x)$, a été en augmentation de $(x + 3)\%$ par rapport à celui du mois de novembre.
Exprimer $D(x)$ en fonction de $N(x)$, puis vérifier que :
- $$D(x) = 20\,600 + 406x + 2x^2.$$
- c. On sait qu'au mois de décembre le chiffre d'affaires est de 21 420 F. Utiliser la question 1. pour trouver x et en déduire les taux d'augmentation respectifs des chiffres d'affaires entre octobre et novembre, puis entre novembre et décembre.
3. Si les chiffres d'affaires avaient subi une même augmentation de $t\%$ entre octobre et novembre, puis entre novembre et décembre, quelle valeur approchée à 10^{-3} près par défaut faudrait-il donner à t , pour que le chiffre d'affaires de décembre soit aussi de 21 420 F, celui d'octobre étant toujours de 20 000 F ?

9

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 2000

Partie A

Monsieur Gaston téléphone actuellement tous les jours pendant une heure pour un montant de 6 euros. Il souhaite réduire le prix de la minute de communication tout en continuant à payer exactement 6 euros par jour.

Deux entreprises téléphoniques lui proposent leurs tarifs.

1. a. L'entreprise A annonce une réduction de 30 % du prix de la communication.

Calculer le nouveau prix d'une minute de communication.

b. L'entreprise B propose une augmentation de 30 % de la durée de communication pour le même prix.

Combien de temps Monsieur Gaston peut-il maintenant téléphoner pour 6 € ? Calculer le nouveau prix d'une minute de communication (on arrondira à 0,001 près.)

2. Répondre à la même question si l'entreprise A fait une réduction de 20 % du prix et l'entreprise B une augmentation de la durée de 25 %.

3. a. L'entreprise A annonce une réduction de x % du prix de la communication. Combien Monsieur Gaston paie-t-il maintenant une heure de communication ? Montrer que le prix d'une minute de communication avec l'entreprise A s'élève à :

$$\frac{1}{10} \left(1 - \frac{x}{100} \right).$$

b. L'entreprise B propose une augmentation de y % de la durée de communication pour le même prix.

Combien de temps Monsieur Gaston peut-il maintenant téléphoner pour 6 € ? Montrer que le prix d'une minute de communication avec l'entreprise B s'élève à :

$$\frac{1}{10 \left(1 + \frac{y}{100} \right)}.$$

On admet que les propositions des deux entreprises sont aussi avantageuses l'une que l'autre si :

$$y = \frac{100x}{100 - x}.$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 50]$ par :

$$f(x) = \frac{100x}{100 - x}.$$

SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 50]$.
2. Étudie le signe de $\frac{10\,000}{(100-x)^2}$ sur l'intervalle $[0 ; 50]$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 50]$.
4. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. (unité graphique : 1 cm représente 10 unités).
5. L'entreprise A propose une réduction de 20 % du prix de la communication. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la durée de la communication que doit proposer l'entreprise B pour avoir un tarif aussi avantageux que celui de A.
6. L'entreprise B propose une augmentation de 30 % de la durée de la communication. Déterminer graphiquement le pourcentage de réduction du prix de la communication que doit proposer l'entreprise A pour avoir un tarif aussi avantageux que celui de B.

STATISTIQUES À UNE VARIABLE

10

Exercice (partiel)

Série STT (ACA, ACC), 1999

Le tableau ci-dessous donne, en francs, le montant des achats effectués par 2 000 personnes dans un magasin, un jour donné.

Montant des achats	Centre de classe	Effectif
$[0 ; 100[$	50	150
$[100 ; 200[$	150	380
$[200 ; 300[$	250	800
$[300 ; 400[$	350	320
$[400 ; 500[$	450	300
$[500 ; 600[$	550	50

Calculer à 0,1 près, la moyenne \bar{x} et l'écart type σ de cette série statistique en considérant les centres des classes affectés des effectifs correspondants.

11**Exercice**Série F_4 (STI GC), 1987**Contrôle de qualité pour le génie civil**

Une machine fabrique des fers cylindriques pour le béton armé de diamètre théorique 25 mm.

On contrôle le fonctionnement de la machine en prélevant un échantillon de 100 pièces au hasard dans la fabrication.

Les mesures des diamètres ont donné les résultats suivants :

Classes par diamètre	[24,0 ; 24,2[[24,2 ; 24,4[[24,4 ; 24,6[[24,6 ; 24,8[[24,8 ; 25,0[
Effectifs	0	5	13	24	19
Classes par diamètre	[25,0 ; 25,2[[25,2 ; 25,4[[25,4 ; 25,6[[25,6 ; 25,8[[25,8 ; 26,0[
Effectifs	14	10	8	5	2

1. Calculer la moyenne arithmétique \bar{x} et l'écart-type σ de la série statistique obtenue en considérant les centres des classes affectés des effectifs correspondants. (On rappellera les formules utilisées et on présentera les calculs sous forme de tableau.)

2. La production de la machine est jugée bonne si la série des mesures de l'échantillon remplit les trois conditions suivantes :

- la moyenne \bar{x} appartient à l'intervalle $[24,9 ; 25,1]$;
- l'écart-type σ est strictement inférieur à 0,4 ;
- 90 % au moins de l'effectif figure dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$.

La production de la machine est-elle bonne ?

12**Exercice**Série F_6 (STL CL), 1992

1 000 élèves de plusieurs lycées ont mesuré la densité du laiton par la méthode du flacon.

Les résultats, arrondis au dixième, ont été regroupés dans le tableau suivant :

Densité	8	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9	9,1
Effectifs	4	20	43	100	200	250	190	113	50	19	6	5

1. Calculer la moyenne arithmétique \bar{x} et l'écart-type σ de série statistique.

2. Quel est le pourcentage de résultats qui se trouvent dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma[$?

13**Exercice**

Série SMS, 1997

L'objectif de l'exercice est d'exploiter les données statistiques fournies par le tableau et le diagramme circulaire de l'annexe, auxquels on se référera pour répondre aux questions posées.

1. À la fin de l'année 1993, les cas de sida qui ont été déclarés depuis le début de l'épidémie s'élèvent à 28 497.

Combien de cas avaient été déclarés avant 1988 ?

2. Depuis le début de l'épidémie jusqu'à la fin de l'année 1993, le nombre de personnes mortes des suites du sida est égal à 16 331.

Quel est, au cours de cette période, le pourcentage des personnes déclarées atteintes du sida qui sont mortes des suites de cette maladie ? (Arrondir le taux de pourcentage à l'entier le plus proche.)

3. Parmi les nouveaux cas de sida déclarés en 1993, calculer :

a. le pourcentage des toxicomanes ;

b. le nombre d'enfants infectés par voie materno-fœtale (arrondir à l'entier le plus proche).

4. Dans un manuel de SMS, on peut lire :

« Le nombre de nouveaux cas déclarés en France augmente chaque année. *La progression de 1991 à 1992 approche 10 %. Cependant, on observe un léger tassement de cette progression de 1992 à 1993.* »

Justifier à l'aide de calculs chaque information en italique dans le texte ci-dessus.

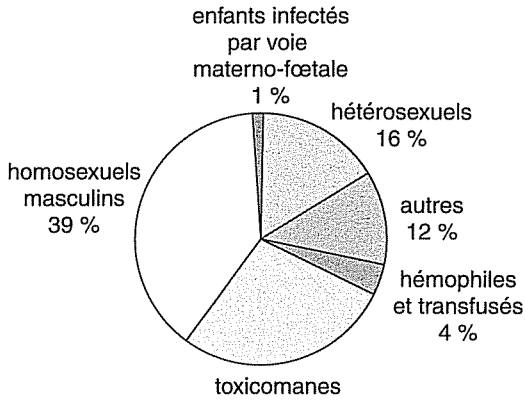
ANNEXE : LE SIDA EN FRANCE**Cas de sida déclarés chaque année en France depuis 1988**

Au 31/12/1993, le nombre de cas de sida recensés en France depuis le début de l'épidémie s'élève à 28 497.

Année	Nombre de cas nouveaux déclarés
1988	2 162
1989	3 728
1990	4 262
1991	4 775
1992	5 249
1993	5 618

(Source : BEH, réseau national de santé publique.)

Répartition des nouveaux cas de sida déclarés en France en 1993
selon le mode de transmission



(Source : *la Santé en France*, rapport du Haut Comité de la santé publique 1994.)

STATISTIQUES : AJUSTEMENT AFFINE

14

Exercice

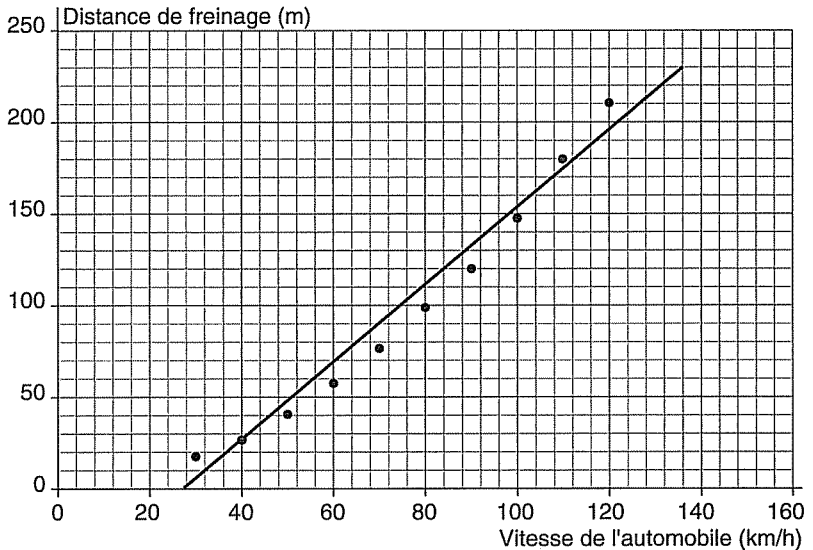
Série STT (CG, IG), 1999

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à une automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter.

Vitesse x_i de l'automobile (en km/h)	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
Distance de freinage d_i (en m)	18	26	40	58	76	98	120	148	180	212

Cette série statistique est représentée ci-après par un nuage de points, que l'on a ajusté graphiquement par une droite.

SESSIONS ANTÉRIEURES



On se propose d'améliorer cet ajustement.

Pour cela, on considère le tableau statistique suivant, où x_i désigne la vitesse de l'automobile et y_i la racine carrée de la distance de freinage :

x_i	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$y_i = \sqrt{d_i}$	4,24	5,10	6,32	7,62	8,72	9,90	10,95	12,17	13,42	14,56

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal, avec pour unités graphiques :

- en abscisse 1 cm pour 10 km/h ;
- en ordonnée 1 cm pour une unité.

2. On appelle G_1 le point moyen des 5 premiers points de ce nuage et G_2 le point moyen des 5 derniers points.

a. Déterminer les coordonnées de G_1 et de G_2 .

b. Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2) est $y = 0,116x + 0,6$.

c. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

3. a. En utilisant l'équation de la droite (G_1G_2) , déterminer une estimation de y si la vitesse de l'automobile était de 140 km/h.

En déduire la distance de freinage, à 1 m près, correspondant à cette vitesse.

b. À l'aide de la droite d'ajustement de la figure précédente, estimer graphiquement la distance de freinage à 140 km/h.

15**Exercice**

Série STT (CG, IG), 1998

Suite à une visite médicale dans 10 entreprises de service informatique, on a constaté qu'une certaine proportion du personnel travaillant devant un écran d'ordinateur souffrait régulièrement de maux de tête ou de troubles de la vision. Ces résultats sont reproduits, par entreprise, dans le tableau ci-dessous :

Entreprise	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Horaire quotidien devant un écran d'ordinateur x_j	5 h 30	5 h 30	6 h	6 h 30	6 h 30	6 h 30	6 h 45	7 h 15	7 h 15	7 h 15
Pourcentage du personnel atteint y_j	30	40	45	40	45	50	55	55	60	55

1. Construire dans un repère orthogonal le nuage de points associé à ce tableau statistique. On prendra les unités suivantes :

- en abscisse : 1 cm pour 1 heure (par exemple, 7 h 15 correspond à 7,25) ;
- en ordonnée : 1 cm pour 10 %.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

3. On considère les points A(8 ; 70) et B(8 ; 55). Construire les droites (GA) et (GB) sur le graphique précédent.

a. On se propose de faire un ajustement du nuage par l'une de ces deux droites. Quelle droite vous semble la plus appropriée ? Expliquer votre choix.

b. Déterminer une équation de la droite choisie.

4. En utilisant l'ajustement trouvé, estimer le pourcentage de personnes atteintes de maux de tête pour une utilisation journalière de 7 h.

16**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 2000

Le tableau ci-après présente l'évolution de l'emploi dans l'éducation et dans la santé en France de 1968 à 1996. Par exemple, on peut lire qu'en 1968, 4,3 % de la population active de 1968 travaille dans l'éducation.

Année	Rang x_j de l'année	Éducation		Santé et action sociale	
		(En milliers)	Part y_j de l'emploi (en %)	(En milliers)	Part z_j de l'emploi (en %)
1968	1	860	4,3	730	3,7
1975	8	1 180	5,6	1 140	5,4
1982	15	1 310	6,1	1 610	7,5
1989	22	1 550	7,0	2 050	9,2
1996	29	1 730	7,9	2 300	10,5

(Sources : Recensements, © Insee)

SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Quel est l'effectif, arrondi en millions, de la population active en France en 1968 ? en 1996 ?

2. Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.

On choisira sur l'axe des abscisses 0,2 cm pour une unité et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 1 %.

3. On note G le point moyen du nuage formé par ces cinq points.

a. Calculer les coordonnées de G et le placer sur le graphique.

b. On choisit pour ajustement affine du nuage la droite Δ de coefficient directeur 0,123 et passant par G.

Déterminer une équation de Δ et tracer la droite Δ sur le graphique.

4. a. Construire le nuage de points associé à la série statistique $(x_i ; z_i)$ dans le même repère que précédemment. On représentera les points de ce deuxième nuage d'une couleur différente du premier.

b. On choisit pour ajustement affine du nuage la droite Δ' d'équation :

$$y = 0,248x + 3,53.$$

Tracer la droite Δ' sur le graphique.

5. a. Déterminer graphiquement l'année à partir de laquelle le nombre d'emplois dans la santé dépasse celui dans l'éducation.

b. En utilisant les ajustements affines données en 3. et 4., déterminer par le calcul une estimation de l'année à partir de laquelle il y aura 1,5 fois plus d'emplois dans la santé que dans l'éducation ?

Quelles seront alors les parts de l'emploi dans la santé et dans l'éducation ?

17

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

Le tableau suivant présente l'évolution du taux de chômage, en pourcentage de la population active, au Japon, entre les années 1950 et 1996.

Année	1950	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	1996
Rang de l'année x_i	0	10	15	20	25	30	35	40	45	46
Taux y_i (en %)	1,2	1,6	1,6	1,2	1,1	2,0	2,6	2,1	3,1	3,4

(Source : *Problèmes économiques*. © La Documentation Française, Avril 1998)

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal :

- 1 cm représente cinq années sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm représente un taux de chômage de 0,5 % sur l'axe des ordonnées.

2. Déterminer les coordonnées du point moyen A de ce nuage.

Le placer sur le graphique.

3. On prend pour droite d'ajustement de ce nuage la droite \mathcal{D} passant par A et de coefficient directeur égal à 0,004.

a. Déterminer une équation de la droite \mathcal{D} .

b. Tracer la droite \mathcal{D} sur le graphique.

4. Si on utilisait l'ajustement précédent (équation déterminée à la question 2. a.) :

a. quel serait le taux de chômage prévisible au Japon pour l'année 2000 ?

b. à partir de quelle année le taux prévisible dépasserait-il à nouveau 3,2 % ?

18

Exercice

Série SMS, 1999

Lors de travaux pratiques de chimie, on décide d'étudier le pH de mélanges d'acide et de base conjugués : l'acide acétique et l'acétate de sodium.

Voici le déroulement de l'expérience : on prépare différents mélanges d'une solution d'acide acétique avec une solution d'acétate de sodium.

On appelle V_A le volume d'acide acétique et V_S le volume d'acétate de sodium mélangés. On mesure le pH de chaque mélange obtenu et on peut ainsi établir le tableau suivant de valeurs :

$x_i = \ln \left(\frac{V_S}{V_A} \right)$	-2,30	-1,84	-1,38	-0,92	0
$y_i = \text{pH}$	3,70	3,90	4,10	4,29	4,70
$x_i = \ln \left(\frac{V_S}{V_A} \right)$	0,69	1,15	1,61	2,07	2,30
$y_i = \text{pH}$	4,99	5,19	5,40	5,60	5,71

Le but de cette expérience est de mettre en évidence une relation entre le pH

de la solution et le nombre $\ln \left(\frac{V_S}{V_A} \right)$.

1. Placer les points M_i , de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

2. a. Calculer les coordonnées du point G_1 , point moyen des cinq premiers points, et de G_2 , point moyen des cinq derniers.

b. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique. Tracer la droite $(G_1 G_2)$.

c. Déterminer l'équation de la droite $(G_1 G_2)$ de la forme $y = mx + p$, où m et p seront déterminés à 10^{-2} près par défaut.

3. On admet que la droite (G_1G_2) constitue un ajustement affine satisfaisant du nuage de points M_i .

a. Déterminer par le calcul le pH de la solution lorsque $\ln \left(\frac{V_S}{V_A} \right) = -0,5$.

b. Retrouver graphiquement ce résultat en faisant apparaître les constructions utiles, et en expliquant les démarches.

4. Calculer, à 10^{-2} près par défaut, le rapport de volumes $\left(\frac{V_S}{V_A} \right)$ du mélange si le pH est de 5,5.

19

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1997

Un marchand de glaces ambulant vend, sur une plage, des glaces qu'il transporte dans un seau isotherme. Il s'aperçoit qu'à la fin de son circuit, les glaces restantes ne supportent pas le retour au fournisseur. Il décide de faire une étude statistique de ses ventes sur une saison pour un circuit sur la plage, en fonction de la température ambiante, afin d'avoir le moins de possible pertes. Il obtient :

température t en °C	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
nombre de glaces q vendues	4	9	12	16	25	32	40	49	64	72

1. Le tracé du nuage de points de coordonnées $(t ; q)$, dans un repère, ne fournit pas un alignement suffisant. Le marchand décide de poser $y = \sqrt{q}$. Recopier et compléter le tableau suivant.

x = t	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
y = \sqrt{q}	2	3	3,5			5,7	6,3			8,5

2. On choisit pour unité graphique le centimètre ; on commencera la graduation à 25 °C sur l'axe des abscisses.

Construire le nuage des points de coordonnées $(x ; y)$.

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G'_1 des cinq premiers points du nuage, puis les coordonnées du point moyen G'_2 des cinq derniers points.

4. Déterminer l'équation de la droite $(G'_1G'_2)$.

5. La météo annonce pour le lendemain une température de 38 °C ; calculer une estimation de y à deux décimales et en déduire une estimation du nombre de glaces q qu'il peut espérer vendre ce jour-là.

20**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 2000

Les cadres d'une entreprise ont reçu des primes différentes selon leur ancienneté.

Six d'entre eux comparent le montant de leur prime. Leurs observations sont reportées dans le tableau ci-dessous, où l'ancienneté x est exprimée en années et la prime p en milliers de francs.

Cadre	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	n° 6
Ancienneté x	2	8	11	17	20	26
Prime p	1,08	2,84	3,27	3,88	4,11	4,48

1. Pour cette série de données, la calculatrice leur propose la droite d'ajustement Δ d'équation $y = 0,13x + 1,42$. On ne demande aucune représentation graphique pour cette première question. En utilisant l'équation de la droite Δ , calculer :

- quelle prime recevrait un cadre ayant une ancienneté de 14 ans ?
- quelle ancienneté conduirait à l'obtention d'une prime de 1 550 francs ?

2. Peu satisfaits de l'étude précédente, les six cadres décident de poser $q = 2^p$ (où p représente la prime en milliers de francs) et d'arrondir au dixième. Ils obtiennent alors le tableau suivant :

Cadre	n° 1	n° 2	n° 3	n° 4	n° 5	n° 6
Ancienneté x	2	8	11	17	20	26
Résultat q	2,1	7,2	9,6	14,7	17,3	22,3

a. Vérifier les calculs ci-dessus et dire, pour chaque résultat, s'il correspond à un arrondi par excès ou par défaut.

b. Construire le nuage des points de coordonnées $(x ; q)$ dans un repère orthogonal. On prendra 0,5 cm par unité en abscisse et 1 cm par unité en ordonnée.

Calculer les coordonnées du point moyen G_1 des trois premiers points et du point moyen G_2 des trois derniers.

c. Tracer la droite (G_1G_2) . Montrer, en arrondissant les coefficients au centième, que la droite (G_1G_2) a pour équation $y = 0,84x + 0,40$.

d. On utilise la droite (G_1G_2) comme droite d'ajustement.

À quelle ancienneté correspond alors une prime de 1 550 francs ? Le résultat obtenu est-il plus plausible que celui de la question 1. b. ?

21**Exercice**

Série STL (BGB), 1998

À la fin de l'année 2002, tous nos déchets devront être traités par des déchetteries.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de déchetteries en Bretagne depuis 1990 :

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Nombre y_i de déchetteries	12	18	33	53	69	83	95

1. Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

- 2 cm pour 1 unité en abscisse ;
- 1 cm pour 5 unités en ordonnée.

2. a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de la série $(x_i ; y_i)$.
(On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.)

b. Placer G sur le graphique.

3. Dans le but de prévoir le nombre de déchetteries à la fin de 2002, on décide de procéder à un ajustement affine de la série.

On choisit la droite D passant par le premier point et le dernier point de la série.

a. Tracer la droite D. Semble-t-elle convenir pour un ajustement ?

b. Déterminer une équation de la droite D.

4. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le nombre de déchetteries en 2002.

5. Les experts estiment qu'il faudrait 200 déchetteries pour traiter tous les déchets de cette région.

Si l'évolution continuait à ce rythme, au cours de quelle année ce nombre serait-il atteint ?

PROBABILITÉS**22****Exercice**

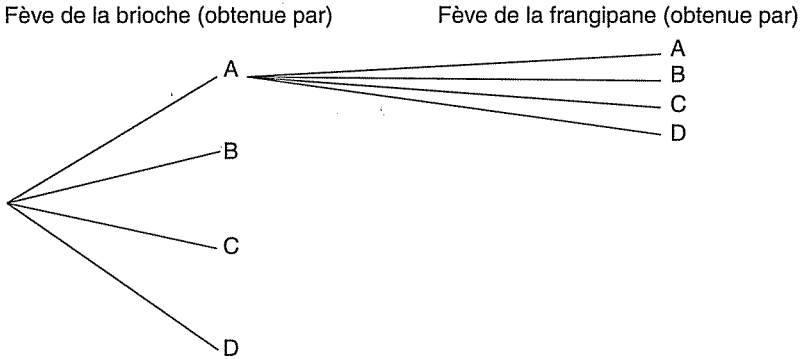
Série STT (CG, IG), 2000

En ce dimanche midi de début d'année, quatre amis A, B, C et D souhaitent tirer les rois. Pour cela, ils disposent de 2 galettes (une frangipane et une brioche) qui contiennent chacune une fève. Ils décident de couper les deux gâteaux en 4 parties égales et de manger tous une part de chaque galette.

A, C sont des filles ; B, D sont des garçons.

1. On s'intéresse à la répartition des fèves.

a. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



b. Combien y a-t-il de résultats possibles pour la répartition des 2 fèves ?

c. En supposant que les tirages sont équiprobables, déterminer la probabilité des événements ci-dessous :

E : « A a au moins un fève » ;

F : « A n'a pas de fève » ;

G : « aucun garçon n'a obtenu de fève » ;

H : « les 2 fèves ont été obtenues par la même personne ».

2. Sachant que la fève de la brioche a été obtenue par une fille, déterminer la probabilité de l'événement :

I : « la fève de la frangipane est obtenue par B ».

23

Exercice

Série STI (GM, GMA), 2000

Une enquête a été effectuée auprès de 450 jeunes titulaires d'un baccalauréat d'enseignement général ou technique, 3 ans après l'obtention de leur diplôme :

- 20 % sont titulaires d'un bac STI ;
- le tiers des 450 jeunes interrogés ont un emploi ;
- 220 continuent leurs études ; parmi eux, 15 % sont titulaires d'un bac STI ;
- 95 % de ceux qui sont au chômage sont titulaires d'un bac autre que STI.

SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

Nature du Bac \ Situation	Ont un emploi	Continuent leurs études	Sont au chômage	Total
	Bac STI	53	33	4
Autre Bac	97	187	76	360
Total	150	220	80	450

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

On choisit un jeune au hasard parmi les 450 interrogés.

a. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « le jeune a un bac STI » ;

B : « le jeune continue ses études ».

b. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$.

Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

c. Définir par une phrase l'événement $A \cup B$.

Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

d. Le jeune choisi au hasard est titulaire du bac STI.

Quelle est la probabilité p pour qu'il ait un emploi ?

24

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

Chaque probabilité sera exprimée sous forme de fraction irréductible.

Dans une boîte, un jeune enfant dispose de quatre cubes : un jaune, un rouge, un vert et un bleu, et de deux boules : une rouge et une verte.

Il prend au hasard un objet puis, sans remettre le premier tiré, il en prend un second. Il obtient ainsi un couple d'objets que l'on appellera « tirage » ; ainsi (cube bleu ; cube rouge) est un tirage possible.

1. À l'aide d'un arbre, trouver le nombre de tirages possibles.

2. Trouver la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « il a obtenu deux cubes » ;

B : « il a obtenu deux boules » ;

C : « il a obtenu soit un cube et une boule, soit une boule et un cube » ;

D : « il a obtenu deux objets de la même couleur » ;

E : « il a obtenu deux objets de couleur différente ».

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

25**Exercice**

Série SMS, 1999

Dans une entreprise pharmaceutique de dimension européenne, une étude statistique a montré que sur 10 000 clients de la communauté européenne, 82 % sont français. On sait aussi que 4 % des clients français et 10 % des clients étrangers ont eu un incident de paiement dans l'année.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant où les pourcentages ci-dessus sont respectés.

	Nombre de clients français	Nombre de clients étrangers	Total
Nombre de clients ayant eu un incident de paiement			
Nombre de clients n'ayant pas eu d'incident de paiement			
Total			10 000

2. On choisit un client au hasard parmi les 10 000. On est en situation d'équiprobabilité. On considère les événements suivants :

F : « le client choisi est français » ;

I : « le client choisi a eu un incident de paiement ».

a. Définir par une phrase les événements \bar{F} , \bar{I} et $\bar{F} \cup \bar{I}$.

b. Calculer les probabilités des événements suivants : F, \bar{F} , $F \cap I$, $F \cup I$.

c. Calculer la probabilité de l'événement :

« le client choisi est un étranger qui n'a pas eu d'incident de paiement ».

3. On choisit un client au hasard parmi ceux ayant eu un incident de paiement. Déterminer, à 10^{-2} près par défaut, la probabilité que le client soit français.

26**Exercice**

Série STT (CG, IG), 1999

Un établissement scolaire compte 240 élèves en terminale STT, parmi lesquels il y a 130 internes.

Ces élèves sont répartis entre trois spécialités : ACC, ACA, CG.

Il y a 66 élèves en ACA.

30 % des élèves sont en ACC, dont 40 internes.

25 % des élèves sont des internes de CG.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	ACA	ACC	CG	Total
Internes				130
Externes				
Total	66			240

2. Dans cette question, les réponses seront données à 10^{-3} près.

a. Un élève est choisi au hasard parmi les 240 élèves de STT. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

E_1 : « l'élève suit la spécialité ACA » ;

E_2 : « l'élève est externe » ;

E_3 : « l'élève est externe et suit la spécialité ACA » ;

E_4 : « l'élève ne suit pas la spécialité CG ».

b. Calculer $p(E_1 \cup E_2)$.

3. Au baccalauréat, parmi ces 240 élèves, 80 % des internes et 70 % des externes ont été reçus.

Quel est le pourcentage de réussite pour l'ensemble des 240 élèves ? (On donnera le résultat à 0,1 % près.)

27

Exercice

Série STT (CG, IG), 2000

Benoît sait que le congélateur de la cuisine renferme cinq bâtons de crème glacée, de cinq parfums différents (vanille, chocolat, pistache, café, praliné).

Gourmand et insomniaque, il décide de se lever en pleine nuit, sans allumer la lumière, et de prendre, à tâtons et successivement, deux bâtons dans le congélateur.

(Tous les choix sont équiprobables.)

1. À l'aide d'un arbre, déterminer le nombre de couples différents de bâtons qu'il peut ainsi obtenir.

2. Ses parfums préférés sont vanille et café.

Calculer les probabilités pour qu'il obtienne :

a. le bâton à la vanille, puis le bâton au café ;

b. les bâtons de ses parfums préférés dans un ordre quelconque ;

c. un seul de ses parfums préférés ;

d. aucun de ses parfums préférés.

28**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 1998

Une loterie comporte 300 billets qui ont tous été vendus. Chaque billet porte 3 cases à gratter :

- 200 billets font apparaître après grattage la mention PERDU ;
- les 100 autres billets sont numérotés de 001 à 100, avec un chiffre par case. Le numéro 013 gagne un vélo à 990 F ; le numéro 007 gagne un baladeur à 290 F ; les numéros terminés par le chiffre 0 gagnent 100 F ; ceux terminés par le chiffre 5 gagnent 50 F.

L'imprimeur facture 250 F la série de 100 billets numérotés et 1 F par billet marqué PERDU.

1. Donner le nombre de billets se terminant par le chiffre 0, le nombre de billets se terminant par le chiffre 5.
2. Quelle est la valeur totale des lots mis en jeu ? En déduire la dépense totale pour l'organisateur de la loterie.
3. Le prix d'un billet est fixé à 25 F. Tous les lots ont été réclamés. Quel est le bénéfice de la loterie ?
4. Pierre a acheté un billet pris au hasard parmi les 300 billets.
 - a. Quelle est la probabilité qu'il gagne un lot de valeur supérieure ou égale à 100 F ?
 - b. Il gratte la case centrale : le chiffre 0 apparaît. Il déclare alors : « J'ai maintenant 2 chances sur 10 de gagner quelque chose ». Est-ce vrai ou faux ? Justifier cette réponse en utilisant la liste possible de tous les billets avec le chiffre 0 dans la case centrale.

29**Exercice**

Série SMS, 1999

Sondage sur Internet

Voici les résultats d'un sondage effectué au début de l'année 1998 auprès de 1 000 personnes, à propos d'Internet :

- 40 % des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet ;
- 35 % des personnes interrogées ont moins de 25 ans et, parmi celles-ci, 80 % déclarent être intéressées par Internet ;
- 30 % des personnes interrogées ont plus de 50 ans et, parmi celles-ci, 85 % ne sont pas intéressées par Internet.

SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Intéressés par Internet	Non intéressés par Internet	Total
Moins de 25 ans		70	
De 25 à 50 ans			
Plus de 50 ans			
Total			1 000

2. On choisit au hasard une personne parmi les 1 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

Dans la suite, si E est un événement, on note $p(E)$ sa probabilité.

On considère les événements :

A : « la personne interrogée est intéressée par Internet » ;

B : « la personne interrogée a moins de 25 ans ».

a. Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.

b. Définir par une phrase l'événement \bar{B} , puis calculer $p(\bar{B})$.

c. Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, puis calculer $p(A \cap B)$.

En déduire $p(A \cup B)$.

d. On sait maintenant que la personne interrogée n'est pas intéressée par Internet. Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 50 ans ?

30

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1999

Une enquête vient d'être effectuée auprès des 1 800 élèves d'un lycée (comportant 850 garçons) pour savoir comment ils prévoient de fêter le passage à l'an 2000 :

- les garçons qui passeront le réveillon du 31 décembre 1999 chez leurs parents représentent 10 % des élèves du lycée ;
- 150 élèves, parmi lesquels 130 filles, iront au restaurant ;
- les $\frac{2}{3}$ des élèves passeront le réveillon chez des amis.

1. Recopier et compléter le tableau des effectifs suivant :

Réveillon	Sexe	Garçons	Filles	Total
	chez leurs parents			
chez des amis				
au restaurant			130	
Total				1 800

2. Le 1^{er} janvier 2000, on croise dans la rue un élève de ce lycée. En supposant que les prévisions de l'enquête seront respectées et que chaque élève a la même probabilité d'être rencontré, calculer les probabilités des événements suivants (arrondis au centième) :

A : « l'élève est une fille » ;

B : « l'élève a passé le réveillon chez ses parents » ;

C : « l'élève est une fille qui a passé le réveillon chez ses parents » ;

D : « l'élève est une fille ou a passé le réveillon chez ses parents ».

3. Ce même jour, on croise dans la rue un garçon de ce lycée.

Calculer la probabilité pour qu'il ait passé le réveillon chez ses parents.

31

Exercice

Série STT (CG, IG), 2000

Un client reçoit, en cadeau, un ticket d'un jeu de grattage.

Sur chaque ticket figurent trois cases à gratter.

Pour chacune des deux premières cases, il est possible d'obtenir les lettres A, B ou C.

Pour la dernière case, seules les lettres A ou B peuvent être obtenues.

Un résultat possible est une liste de trois éléments, par exemple : CAB.

1. Justifier qu'il y a 18 résultats possibles. (On pourra s'aider d'un arbre.)

2. On considère les événements suivants :

E : « obtenir 3 lettres identiques » ;

F : « obtenir au plus un A » ;

G : « obtenir 3 lettres distinctes » ;

H : « obtenir au moins un C ».

Calculer les probabilités des événements : E, F, G et H.

3. Montrer que la probabilité de l'événement $F \cap H$ est égale à $\frac{4}{9}$.

Déduire la probabilité de l'événement $F \cup H$.

Les résultats des calculs de probabilité seront présentés sous forme de fractions irréductibles.

32

Exercice

Série SMS, 2000

Dans un lycée de 1 470 élèves, 350 élèves se sont fait vacciner contre la grippe au début de l'année scolaire 1999-2000. Une épidémie de grippe a affecté la population scolaire au cours de l'hiver, et 10 % des élèves ont contracté la maladie.

Enfin, 4 % des élèves vaccinés ont eu la grippe.

SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, sans justifier les réponses :

	Nombre d'élèves vaccinés	Nombre d'élèves non vaccinés	Total
Nombre d'élèves ayant eu la grippe			
Nombre d'élèves n'ayant pas eu la grippe			
Total	350		1 470

Toutes les réponses aux questions suivantes seront arrondies à 0,01 près.

2. On choisit au hasard l'un des élèves de ce lycée, tous les élèves ayant la même probabilité d'être choisis.

a. Calculer la probabilité de chacun des événements :

A : « il a été vacciné » ;

B : « il a eu la grippe ».

b. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

3. On choisit au hasard un élève parmi ceux qui ont été vaccinés.

Calculer la probabilité de l'événement : « il a eu la grippe. »

4. On choisit au hasard un élève parmi ceux qui n'ont pas été vaccinés.

Calculer la probabilité de l'événement : « il a eu la grippe. »

5. Expliquer pourquoi ce vaccin a été efficace pour les élèves du lycée, bien qu'il ne les ait pas immunisés parfaitement.

33

Exercice

Série STT (CG, IG), 1999

On dispose d'un tapis de jeu à six cases, numérotées de 1 à 6 (voir la figure ci-contre), ainsi que de deux jetons, l'un rouge et l'autre vert.

1	2	3
4	5	6

On pose au hasard :

- le jeton rouge sur l'une des cases ;
- puis le jeton vert sur l'une des cases vides restantes.

1. a. Combien y-a-t-il de dispositions possibles de ces deux jetons sur le tapis ?

b. Quelle est la probabilité p que les deux jetons occupent des cases portant l'une un numéro pair, l'autre un numéro impair ?

c. Quelle est la probabilité q que les deux jetons occupent des cases portant des numéros pairs ?

2. a. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros des deux cases occupées soit supérieure ou égale à 8 ?

b. Quelle est la probabilité pour que la somme des numéros des deux cases occupées soit strictement inférieure à 8 ?

34**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 1999

Un magasin d'articles de jardin fait une promotion sur des tulipes et des jacinthes. Chacune de ces fleurs est de couleur blanche, rouge ou jaune.

Il met en vente 500 fleurs :

- 25 % sont des jacinthes ;
- 30 % sont des fleurs blanches ;
- il y a 250 fleurs rouges, parmi elles 20 % sont des jacinthes ;
- le quart des fleurs jaunes sont des tulipes.

1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant :

Couleur Fleur	Blanche	Rouge	Jaune	Total
Tulipes				
Jacinthes				
Total				500

Dans les questions 2. et 3. les résultats seront donnés sous forme de fractions puis sous forme décimale à 10^{-2} près.

2. On prend une fleur au hasard parmi les 500.

a. Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « on a une fleur rouge » ;

B : « on a une tulipe » ;

C : « la fleur est rouge ou est une tulipe ».

b. Vérifier que la probabilité de l'événement D : « la fleur n'est pas une jacinthe jaune » est 0,85.

3. On prend au hasard une tulipe.

Quelle est la probabilité de l'événement : « c'est une tulipe rouge » ?

VARIABLES ALÉATOIRES

35**Exercice**

Série STI (GM, GC, GEN), 1998

Un jeu est organisé de la façon suivante : on répond à deux questions notées A et B.

Pour la question A, les réponses possibles sont 1, 2 ou 3.

Seule la réponse 2 est exacte.

Pour la question B, les réponses possibles sont 1, 2, 3, 4 ou 5.

Seule la réponse 4 est exacte.

SESSIONS ANTÉRIEURES

Si la réponse à la question A est différente de 2, alors le joueur est éliminé ; si elle est égale à 2, alors le joueur gagne 5 francs et on regarde la réponse à la question B. Si celle-ci est égale à 4, alors il gagne 5 francs de plus. Les trois gains possibles sont donc : 0 F, 5 F et 10 F.

Adrien répond au hasard, de façon indépendante, à chacune des questions, sans savoir évidemment que le couple (2 ; 4) est la bonne réponse. On est donc dans une situation d'équiprobabilité sur l'ensemble des couples de réponses possibles.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque case le gain correspondant à chaque couple de réponses.

A \ B	1	2	3	4	5
1					
2		5		10	
3					0

2. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque couple de réponses associe le gain correspondant.

- Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
- Calculer son espérance mathématique.
- Adrien a-t-il intérêt à jouer souvent si la mise est de 1 F ? Justifier la réponse.

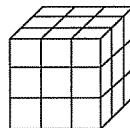
36

Exercice

Série STL (CL), 2000

Un cube de bois de 3 cm est peint puis débité, parallèlement aux faces, en cubes de 1 cm d'arête.

On place les petits cubes dans un sac.



1. a. Combien de petits cubes a-t-on placé dans le sac ?

b. Combien y-en-a-t-il ayant :

zéro face peinte, une face peinte, deux faces peintes, trois faces peintes ?

2. On tire au hasard un cube du sac.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de faces peintes obtenues. Donner la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique $E(X)$, la variance $V(X)$ puis l'écart-type $\sigma(X)$.

Un comité hippique organise une course de chevaux. Six chevaux, numérotés de 1 à 6, sont au départ de la course.

On appelle « arrivée » un couple (a, b) où a désigne le numéro du cheval qui arrive premier de la course et b le numéro du cheval qui arrive deuxième.

Par exemple, l'arrivée $(5, 3)$ signifie que le cheval arrivé premier porte le numéro 5 et que le cheval arrivé deuxième porte le numéro 3.

On suppose qu'il n'y a pas d'ex-aequo et que les différentes arrivées possibles sont équiprobables.

1. Quel est le nombre d'arrivées possibles ? Justifier. **30**

2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « l'arrivée est $(5, 3)$ » ; $P(A) = \frac{1}{30}$

B : « le cheval portant le numéro 5 est arrivé premier » ; $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

C : « le cheval portant le numéro 6 est arrivé premier ou deuxième ». $\frac{10}{30}$

3. Le cheval arrivé premier rapporte 100 000 francs à son propriétaire.

Le cheval arrivé deuxième rapporte 50 000 francs à son propriétaire.

Chacun des autres chevaux ne rapporte rien à son propriétaire.

Monsieur Gold est propriétaire des chevaux portant les numéros 2 et 6 ; les autres chevaux participant à la course ne lui appartiennent pas.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque arrivée possible, associe la somme, exprimée en francs, reçue par monsieur Gold à l'issue de la course.

a. Recopier le tableau ci-dessous sur la copie et le compléter en donnant la somme reçue par Monsieur Gold pour chacune des arrivées possibles.

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1				0		
2						
3						
4		50 000				
5						
6						

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

38**Exercice**

Série STI (GE, GET), 1999

Un moteur électrique possédant trois bornes B_1 , B_2 et B_3 doit être alimenté en électricité par trois fils F_1 , F_2 et F_3 , chaque fil étant relié à une seule borne identifiée.

Lorsque les trois fils sont convenablement branchés (F_1 avec B_1 , F_2 avec B_2 , F_3 avec B_3), le moteur tourne à 1 000 tours par minute.

Lorsqu'un seul des trois fils est branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés), le moteur tourne à 500 tours par minute.

Lorsqu'aucun fil n'est branché à la bonne borne, le moteur ne tourne pas.

On a perdu le schéma de montage et les fils sont indiscernables.

1. Déterminer la liste des montages différents possibles et en déduire leur nombre total (exemple : F_1 avec B_2 , F_2 avec B_1 , F_3 avec B_3 est l'un des montages possibles).
2. Calculer la probabilité que les trois fils soient convenablement branchés.
3. Calculer la probabilité qu'un seul des trois fils soit branché à la bonne borne (les deux autres fils étant inversés).
4. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque montage, associe la vitesse de rotation du moteur.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

39**Exercice**

Série STL (CL), 1998

Un carton contient 100 flacons de même capacité dont :

- 5 sont dosés à 10 % d'un produit ;
- 30 sont dosés à 20 % ;
- 40 sont dosés à 30 % ;
- 20 sont dosés à 40 % ;
- 5 sont dosés à 50 %.

On tire au hasard un flacon de la boîte. On admet être dans une situation d'équiprobabilité.

1. Calculer la probabilité de tirer :
 - a. un flacon dosé à 40 % ;
 - b. un flacon dosé à plus de 15 %.
2. On note X la variable aléatoire qui à tout flacon associe le pourcentage de produit dosé qu'il contient.
 - a. Quelle est la probabilité de l'événement $X = 20$?
 - b. Quelle est la probabilité de l'événement $X < 20$?
 - c. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

- d. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.
 - e. Calculer la variance $V(X)$.
3. Si l'on mélangeait le contenu des 100 flacons dans un même récipient, quel serait le dosage du mélange ainsi obtenu ?
 4. Comment obtenir $E(X) = 29,2$ en modifiant le dosage d'un seul flacon ?

40

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 2000

Un professeur organise un tournoi de football entre des équipes d'élèves de Seconde et des équipes d'élèves de Première. Voici les résultats des 8 matchs joués le premier jour du tournoi.

	Équipe de Seconde	Équipe de Première
1 ^{er} match	2 buts	1 but
2 ^e match	2 buts	0 but
3 ^e match	3 buts	3 buts
4 ^e match	1 but	3 buts
5 ^e match	0 but	1 but
6 ^e match	0 but	0 but
7 ^e match	1 but	4 buts
8 ^e match	3 buts	2 buts

On choisit un match au hasard parmi les huit matchs du premier jour du tournoi ; tous les matchs ont la même probabilité d'être choisis.

1. a. Montrer que la probabilité p_1 qu'aucun but n'ait été marqué au cours de ce match est égale à $\frac{1}{8}$.

b. Quelle est la probabilité p_2 que le match soit nul (c'est-à-dire que chaque équipe ait marqué le même nombre de buts) ?

2. Pour chaque match, on calcule la différence entre les nombres de buts marqués par les deux équipes, de façon à trouver un nombre positif ou nul. On définit ainsi une variable aléatoire X . Par exemple, pour le 5^e match, la valeur de X est égale à 1 et pour le 8^e match, elle est aussi égale à 1.

a. Donner les quatre valeurs possibles de X .

b. Déterminer la loi de probabilité de X .

c. Calculer l'espérance mathématique de X .

41**Exercice**

Série STI (GE, GET, GO), 2000

Un test d'aptitude consiste à poser à chaque candidat une série de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, deux réponses sont proposées dont une et une seule est correcte. Un candidat répond chaque fois au hasard (on suppose donc l'équiprobabilité des réponses).

1. On note V une réponse correcte et F une réponse incorrecte, exemple : VFFV signifie que la première et la quatrième réponses sont correctes et la deuxième et la troisième sont incorrectes. Établir la liste des seize résultats possibles (que l'on pourra présenter à l'aide d'un arbre).
2. Quelle est la probabilité pour que le candidat donne la bonne réponse :
 - a. à la première question posée ?
 - b. à une seule des quatre questions posées ?
 - c. aux quatre questions posées ?
3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes données par le candidat.
 - a. Donner les différentes valeurs prises par X.
 - b. Donner la loi de probabilité de X.
 - c. Calculer l'espérance mathématique de X.
4. Un candidat sera reconnu apte s'il donne au moins trois réponses correctes. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant au hasard soit reconnu apte ?

42**Exercice**

Série STI (GM, GMA), 1999

On considère l'expérience aléatoire suivante.

Une première urne contient cinq boules numérotées 0, 2, 4, 6 et 8.

Une deuxième urne contient cinq boules numérotées 1, 2, 3, 4 et 5.

On appelle « partie » le fait de tirer au hasard une boule de la première urne, puis une boule de la deuxième. Une partie a donc 25 résultats possibles, supposés équiprobables.

1. a. Recopier, puis compléter le tableau donnant la somme des deux nombres obtenus pour chacun des résultats possibles.

+	0	2	4	6	8
1					
2					
3				9	
4		6			
5					

- b. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme égale à 7 ?
- c. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme paire ?
- d. Quelle est la probabilité d'obtenir pour une partie une somme au plus égale à 6 ?
2. On considère le jeu suivant associé à chaque partie. Un joueur gagne :
- 30 francs si la somme est paire ;
 - 100 francs si la somme est treize ;
 - 10 francs si la somme est 1, 3, ou 5 ;
 - et ne gagne rien dans les autres cas.
- On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe son gain en francs.
- a. Calculer la probabilité de gagner 100 francs.
- b. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- c. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
- d. L'organisateur demande 20 francs pour obtenir le droit de jouer. Ce jeu est-il équitable ?

SUITES

43

Exercice

Série STI (GE, GET), 1997

1. On considère une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 égal à 2 et de raison -1 .
- a. Calculer u_1 et u_2 .
- b. Déterminer u_n en fonction de n , en déduire u_{15} .
- c. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Démontrer que $S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
- a. Calculer v_0 , v_1 et v_2 . Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q .
- b. Déterminer v_n en fonction de n .
3. a. En utilisant le résultat de la question 1. c., calculer $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.
- b. Déterminer la valeur de n pour laquelle $P_n = e^{-88}$.

44

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1999

M. Untel a acheté un lave-linge pour une valeur de 3 500 F et consulte son assureur. Celui-ci applique une réduction pour vétusté de 15 % par an, on obtient ainsi la valeur « remboursable » de l'année.

1. Calculer les valeurs « remboursables » par l'assurance de l'appareil les trois années suivantes.

- Justifier que : appliquer une réduction de 15 % est équivalent à utiliser un coefficient multiplicateur de 0,85.
Quelle est la nature de la suite des valeurs « remboursables » ?
- Calculer la valeur « remboursable » par l'assureur au bout de 10 ans.

45

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1997

Le 1^{er} mars 1994, l'intendant d'une usine de jouets a placé 10 000 francs à intérêts composés au taux annuel de 5 %.

Le 1^{er} mars 1997, le conseil d'administration décide de faire don des intérêts accumulés pendant ces trois années écoulées à une association d'aide à l'enfance maltraitée.

Calculer la somme, en francs, ainsi offerte par cette usine de jouets.

46

Exercice (partiel)

Série STT (ACA, ACC), 2000

Tous les 5 ans, on effectue un relevé de la population d'une ville B.

En 1970, ce relevé a donné 125 milliers d'habitants ; les relevés suivants montrent une augmentation régulière de 3 %.

Soit R_n la valeur (en milliers d'habitants) du relevé de rang n ($R_0 = 125$ en 1970, R_1 relevé en 1975 etc.).

- Calculer R_1 , R_2 et R_3 (arrondir à 10^{-1} près).
- Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n . En déduire la nature de la suite (R_n) , on précisera le premier terme et la raison.
- Exprimer R_n en fonction de n .
- Si cette évolution se poursuit, quelle population peut-on prévoir pour l'an 2000 ? Donner une valeur approchée en milliers d'habitants à 10^{-1} près de cette population.
- En utilisant la calculatrice, déterminer le rang du relevé pour lequel la population dépasse 163 milliers d'habitants. En déduire l'année correspondante.

47**Exercice**

Série STT (CG, IG), 1997

Les résultats seront donnés au franc près.

Le jour anniversaire de ses 18 ans, un jeune possédant 13 000 F d'économies décide de placer son argent. Une banque lui propose deux sortes de placement :

- placement A : la totalité du capital est placé sur le livret A au taux de 3,5 % par an à intérêts composés ;
- placement B : 10 000 F sont placés sur un livret « Jeune » au taux de 4,5 % par an à intérêts composés, et les 3 000 F restants sur un compte courant non rémunéré.

Par la suite, on suppose qu'il ne fait plus aucun retrait ni versement.

1. On note C_n le capital qu'il aura acquis au bout de n années s'il choisit le placement A.

a. Calculer C_1 et C_2 .

b. (C_n) étant une suite géométrique, exprimer C_n en fonction de n .

2. On note T_n le capital qu'il aura acquis au bout de n années s'il choisit le placement B.

a. Calculer T_1 et T_2 .

b. Exprimer T_n en fonction de n .

3. Le livret « Jeune » n'étant possible que jusqu'à l'âge de 25 ans :

a. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
C_n							
T_n							

b. En déduire, en fonction du nombre d'années, le placement le plus avantageux.

48**Exercice**

Série STT (CG, IG), 1997

1. Un capital C_0 d'un montant de 30 000 F est placé au taux annuel de 7 % à intérêts composés.

a. Calculer les valeurs acquises C_1 et C_2 de ce capital, respectivement au bout de la première année et de la deuxième année.

b. On note C_n la valeur acquise de ce placement au bout de la n -ième année. Montrer que la suite (C_n) est géométrique et que $C_n = C_0 \times (1,07)^n$.

2. Un autre capital Q_0 d'un montant de 25 000 F est placé à la même date que C_0 au taux annuel de 9 % à intérêts composés.

a. Calculer la valeur acquise Q_n de ce placement au bout de la n -ième année.

b. Déterminer le nombre n d'années à partir duquel Q_n dépassera C_n .

49**Exercice**

Série STL (PL), 1999

Le but de l'exercice est l'étude de la désintégration d'un corps radioactif : le carbone 14.

1. Soit N_0 le nombre d'atomes de carbone 14 à l'instant $t = 0$, N_1 le nombre d'atomes de carbone 14 un siècle après, N_k le nombre d'atomes de carbone 14 après k siècles (k entier). On sait que le nombre d'atomes de carbone 14 diminue très lentement au cours du temps : environ 1,24 % par siècle.

a. Donner l'expression de N_1 en fonction de N_0 , puis l'expression de N_{k+1} en fonction de N_k .

b. En déduire la nature de la suite (N_k) et l'expression de N_k en fonction de N_0 et k .

c. Donner, en le justifiant, le sens de variation de la suite (N_k) .

2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants ; à la mort de ceux-ci, l'assimilation cesse et le carbone 14 présent se désintègre.

Des archéologues ont trouvé des fragments d'os dont la teneur en carbone 14 est 40 % de celle d'un fragment d'os actuel de même masse, pris comme témoin.

Calculer l'âge de ces fragments. On arrondira le résultat au siècle près.

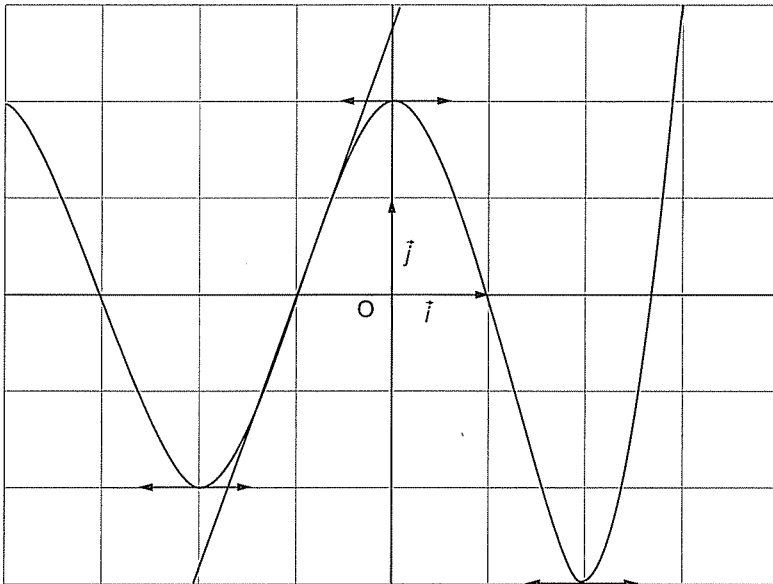
FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS

50

Exercice

Série STT (CG, IG), 1998

On considère une fonction f définie sur $[-4 ; 3]$, on note f' sa dérivée ; à l'aide de la représentation graphique ci-dessous dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm), répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le dessin. (Le schéma n'est pas à l'échelle.)



1. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x , justifier brièvement votre réponse.
2. Donner le tableau de variation de f , en déduire les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 2$, puis l'inéquation $f(x) > 2$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1 , sachant qu'elle passe par le point $(0 ; 3)$.
En déduire $f'(-1)$.

51**Problème (partiel)**

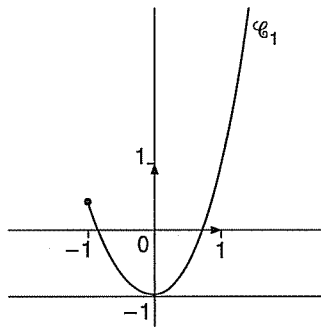
Série STT (CG, IG), 1999

Le plan est rapporté à un repère ortho-normal.

La courbe \mathcal{C}_1 , tracée ci-contre est la courbe représentative d'une fonction F définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

On admettra que :

- $F(-1) \approx 0,26$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$;
- la tangente à (\mathcal{C}_1) au point de coordonnées $(0 ; -1)$ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. En utilisant la courbe (\mathcal{C}_1) :

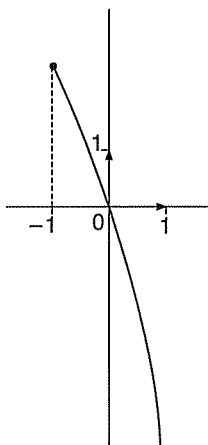
a. Déterminer $F(0)$ et $F'(0)$.

b. Dresser le tableau de variation de F sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

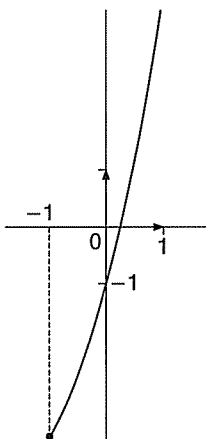
2. On se propose d'étudier la fonction dérivée f de la fonction F , sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

a. Déterminer $f(0)$.

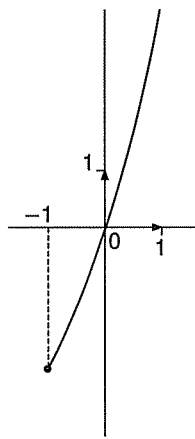
b. L'un des tracés ci-après est celui de la courbe représentative \mathcal{C}_2 de la fonction f . Déterminer lequel, en justifiant la réponse.



Graphique 1



Graphique 2



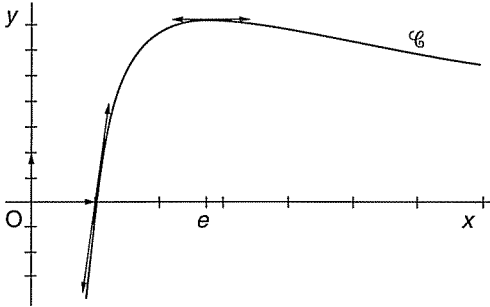
Graphique 3

52

Problème (partiel)

Série STT (CG, IG), 1998

La figure ci-dessous représente la courbe \mathcal{C} d'une fonction f définie sur $]0 ; 7]$. On note f' la dérivée de f .



1. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; 7]$. En déduire le signe de $f'(x)$, en fonction de x .
2. Sachant que l'un des graphiques représentés ci-après (numérotés de 1 à 4) représente la courbe de la fonction f' , déterminer lequel en justifiant la réponse.

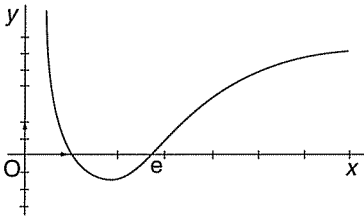


Figure 1

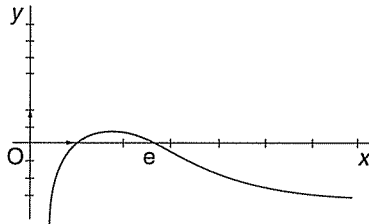


Figure 2

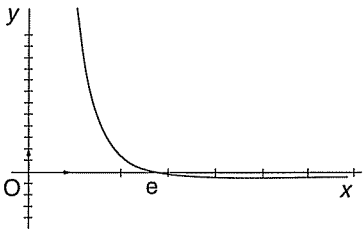


Figure 3

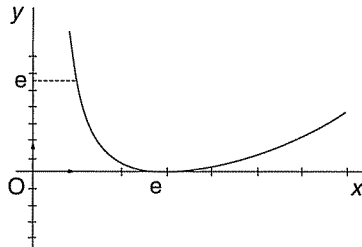


Figure 4

53**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 2000

La courbe C, donnée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1; 4]$, dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

- 2 cm sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. Résoudre graphiquement les équations suivantes :

- a. $f(x) = 0$;
- b. $f(x) = 3,5$;
- c. $f'(x) = 0$.

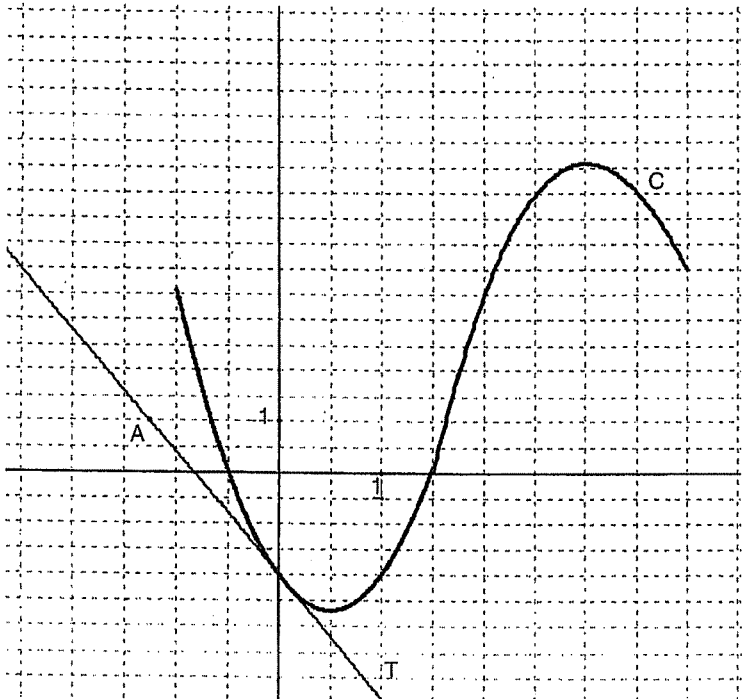
2. a. Utiliser la courbe pour donner le tableau de variations de f .

b. En déduire le signe de $f'(x)$.

3. La droite T tangente à la courbe C au point B d'abscisse $x=0$ passe par le point A de coordonnées $(-\frac{5}{4}; 1)$.

a. Déterminer une équation de T par le calcul.

b. En déduire $f'(0)$.



54

Problème (partiel)

Série STT (CG, IG), 2000

Le plan est muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

La courbe C représentée ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty, 1]$.

La droite T_1 est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente T_2 est parallèle à l'axe des abscisses.

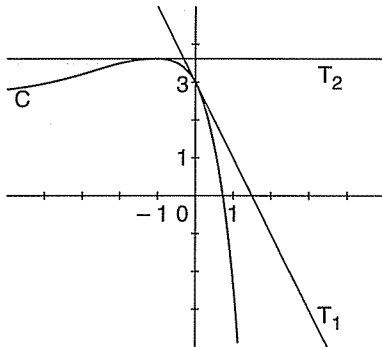
1. f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur $]-\infty; 1]$.

a. Résoudre graphiquement l'équation $f'(x) = 0$.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) < 0$.

2. a. Sachant que la tangente T_1 à la courbe C au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 1), trouver une équation de T_1 .

b. En déduire $f'(0)$.



FONCTIONS (STT, ACA ET ACC)

55

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1998

A – On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[0 ; 50]$ par :

$$P(x) = 6(-x^2 + 30x + 1\,000).$$

1. a. Calculer $P'(x)$ où P' est la dérivée de la fonction P.

b. Étudier le signe de $P'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction P.

SESSIONS ANTÉRIEURES

2. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	5	15	20	30	40	50
$P(x)$					6 000	3 600	

3. Tracer la courbe représentative C de la fonction P dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On prendra :

- 1,5 cm pour 5 unités sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm pour 500 unités sur l'axe des ordonnées.

B – Un producteur de pommes de terre peut récolter à ce jour 1 200 kg et les vendre 5 F le kg. S'il attend, sa récolte augmentera de 60 kg par jour mais le prix baissera de 0,10 F par kg et par jour.

1. Quelle somme, en francs, touchera-t-il :

- a. s'il vend sa récolte tout de suite ?
- b. s'il attend un mois (30 jours) ?

2. On suppose que ce producteur attend n jours ($0 \leq n \leq 50$).

a. Calculez en fonction de n , le nombre de kg de pommes de terre qu'il a à vendre et le prix de vente de 1 kg.

b. Montrer que le prix de vente total, appelé profit, au bout de n jours, est :

$$P(n) = 6(-n^2 + 30n + 1\,000).$$

3. En utilisant les résultats de la **Partie A** de l'exercice, déterminer graphiquement au bout de combien de jours le producteur pourra vendre sa récolte :

- a. pour avoir un profit maximum que l'on indiquera ;
- b. pour avoir un profit égal à 6 750 F.

56

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1999

Une société analyse le coût moyen unitaire de fabrication y (en F) d'un produit, en fonction de la quantité produite x , et obtient les résultats suivants :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1 000	650	600	625	680	750	828,6	912,5	1 000	1 090

Partie A

1. Représenter le nuage de points correspondant à cette série dans un repère d'unité : 1 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 50 F en ordonnée (commencer à 500 F).

2. Déterminer les coordonnées de G , point moyen de cette série. Le représenter sur le graphique.

3. On choisit comme ajustement affine de cette série, la droite passant par les points $G_1(3 ; 711)$ et $G_2(8 ; 916,22)$.
Donner une équation de la droite (G_1G_2).
4. Déterminer, en utilisant cette droite, le coût moyen de fabrication unitaire pour une production de 12 unités.

Partie B

En vue d'une 2^e approximation, une étude plus approfondie associe à cette série la fonction définie par : $f(x) = 100x + \frac{900}{x}$ pour x variant de 1 à 13.

1. Montrer que la dérivée f' de cette fonction peut s'écrire sous la forme :

$$f'(x) = \frac{100(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

2. Étudier le signe de cette dérivée et dresser le tableau de variation de f .
3. Pour quelle quantité produite le coût moyen unitaire est-il minimum ?
Quel est ce coût minimum ?
4. Déterminer le coût moyen unitaire correspondant à une production de 12 unités.

57

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1998

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par :

$$f(x) = -2x^3 + 60x^2 + 2\,000.$$

1. On note f' la dérivée de f . Calculer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0 ; 30]$.
2. Vérifier que $f'(x) = 6x(20 - x)$ pour x appartenant à $[0 ; 30]$, puis étudier le signe de f' .
Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0 ; 30]$.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	2	5	10	15	20	25	30
$f(x)$								

4. Tracer la courbe \mathcal{C} représentative de f dans un repère orthogonal d'unités graphiques : en abscisses, 1 cm pour 2 unités et en ordonnées, 1 cm pour 1 000 unités.
5. Tracer dans le même repère la droite \mathcal{D} d'équation $y = 150x + 4\,500$.
6. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} .

Partie B

Le club de théâtre du Lycée Louis XIV a loué une grande salle de spectacle et organise une représentation de *Ubu Roi* d'Alfred Jarry.

Le prix de location de la salle est 4 500 F.

Il espère avoir un maximum de spectateurs parmi la population des environs, aussi il décide de faire passer des messages publicitaires sur la radio locale.

Soit x le nombre de jours de publicité. Pour x compris entre 0 et 20, la recette prévue est donnée par $f(x)$ où f est la fonction définie dans la **Partie A**.

Chaque jour de publicité est facturé 150 F.

1. On fait un calcul sur 20 jours de publicité.
 - a. Quelle est la recette prévisible ?
 - b. Calculer les frais engagés : publicité et location.
 - c. Calculer le bénéfice dans le cas où la recette est conforme à la prévision.
2. Quel est le bénéfice si on prévoit 5 jours de publicité ?
3. Établir la formule donnant, en fonction du nombre x de jours de publicité, le montant total des frais engagés $C(x)$.
4. Combien de jours de publicité au minimum faut-il envisager pour que le bénéfice prévisible soit positif ou nul ?

58

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 2000

Partie A

Une entreprise souhaite promouvoir un nouveau produit. Elle estime que la probabilité qu'une personne prise au hasard en connaisse le nom après x semaines de publicité s'exprime par :

$$p(x) = \frac{3x}{4x+3}.$$

1. Calculer $p(3)$. Déduire la probabilité qu'une personne prise au hasard **ignore** le nom du produit après trois semaines de publicité.
2. Résoudre l'équation $p(x) = \frac{1}{2}$. Interpréter le résultat obtenu.
3. La formule donnant $p(x)$ permet-elle de confirmer les affirmations ci-dessous ?
 - a. Avant le lancement de l'opération, personne ne connaît le nom du produit. Justifier.
 - b. Au bout de douze semaines de publicité, tout le monde connaît le nom du produit. Justifier.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 18]$ par :

$$f(x) = \frac{3x}{4x+3}$$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous. On arrondira au centième.

x	0	0,5	1	3	6	12	18
$f(x)$				0,6			

2. Vérifier que pour tout x de $[0 ; 18]$:

$$f'(x) = \frac{9}{(4x+3)^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de f .

3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour x élément de $[0 ; 18]$.

En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 18]$.

4. On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f .

On considère la droite \mathcal{D} tangente à \mathcal{C} en son point d'abscisse 3. Montrer que \mathcal{D} a pour équation :

$$y = 0,04x + 0,48$$

5. Tracer \mathcal{D} puis \mathcal{C} dans un repère orthogonal.

On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

1. Compléter le graphique de la partie B en traçant la droite d'équation $y = 0,66$.

2. Graphiquement :

a. déterminer la durée nécessaire pour que la probabilité exprimée en **Partie A** passe de 0,6 à 0,66 ;

b. déterminer la durée nécessaire pour que la probabilité exprimée en **Partie A** passe de 0,66 à 0,72.

3. Cette étude explique-t-elle pourquoi l'entreprise a prévu une campagne publicitaire de cinq semaines et demie ?

59**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 1999

Partie A

Dans cette partie on fait une étude graphique.

Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots.

On admet que le coût de fabrication en francs d'un nombre x de lots, x appartenant à l'intervalle $[0 ; 18]$, est donné par la fonction dont la courbe C est jointe.

Chaque lot est vendu 125 F.

La recette est donc donnée par $R(x) = 125x$.

- Tracer la droite D d'équation $y = 125x$ dans le même repère que C (Voir graphique ci-après).
- L'entreprise ne vend que des nombres entiers de lots.
Déterminer graphiquement les valeurs du nombre x de lots pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice. Justifier la réponse.
- On appelle M le point d'abscisse 8 qui est sur C . Donner une valeur approchée de son ordonnée.
 - On appelle N le point d'abscisse 8 qui est sur D . Calculer son ordonnée.
 - Mesurer sur le graphique la longueur MN . Que représente-t-elle ?
- En s'inspirant de la méthode graphique qui précède, donner en le justifiant, le nombre de lots à vendre pour réaliser le bénéfice maximal.

Partie B

L'entreprise désire faire une étude plus précise de son bénéfice.

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 18]$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x + 100.$$

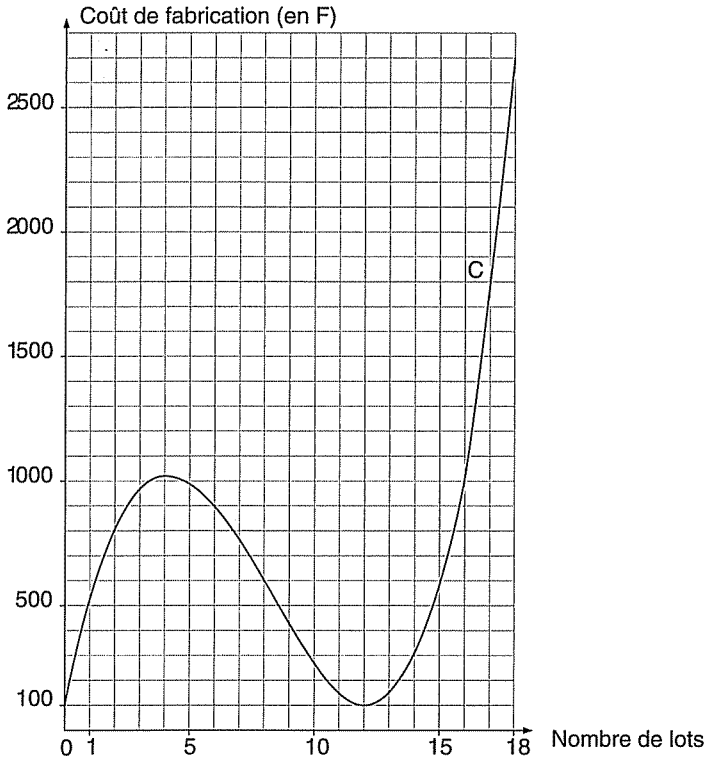
- Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
- Vérifier, en développant et en détaillant les calculs, que pour tout x de $[0 ; 18]$:

$$f'(x) = 12(x - 4)(x - 12).$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ pour x élément de $[0 ; 18]$.
- Établir le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 18]$.
La fonction f a pour représentation graphique la courbe C .
- Recopier et compléter le tableau suivant :

x	12	13	14
$R(x) - f(x)$			

- Que représente la différence $R(x) - f(x)$?
- Les résultats obtenus dans le tableau de la question 5. sont-ils conformes à ce qui a été constaté graphiquement à la question 4. de la **Partie A** ?



60

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1999

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 80]$ par :

$$f(x) = -0,02x^3 + 2,1x^2 - 36x - 80.$$

1. a. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = (-0,06x + 0,6)(x - 60)$
 - b. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 80]$.
 - c. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 80]$.
2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$f(x)$	-80	-250					1 000	830	240

3. Représenter graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal, avec, sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 et sur l'axe des ordonnées, 1 cm pour 100.

Partie B

Une petite entreprise fabrique et vend des calculettes spéciales servant uniquement à effectuer des conversions entre francs et euros : elle peut en fabriquer jusqu'à 80 par jour et lorsqu'elle en fabrique q exemplaires, le coût de production journalier correspondant est donné par :

$$C(q) = 0,02q^3 - 2,1q^2 + 74q + 80$$

exprimé en francs, pour q dans l'intervalle $[0 ; 80]$.

De plus, cette entreprise vend chaque calculette au prix de 38 francs.

1. Si cette entreprise fabrique et vend 40 calculettes en une journée, calculer le coût de production, la recette et le bénéfice correspondants.

2. a. Déterminer, en fonction de q , la recette journalière exprimée en francs lorsque l'entreprise vend q calculettes.

b. En déduire que le bénéfice journalier, pour la fabrication et la vente de q calculettes, est donné par $f(q)$, exprimé en francs, où f est la fonction définie dans la **Partie A**.

3. Déduire de la **Partie A** combien de calculettes doit fabriquer et vendre cette entreprise pour que son bénéfice journalier soit maximal.

Que vaut alors ce bénéfice en francs ?

61

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1999

Le tableau ci-dessous donne le bénéfice réalisé par un hebdomadaire en fonction du nombre d'exemplaires mis en vente :

Nombre x_i d'exemplaires mis en vente	5 000	15 000	30 000	45 000	55 000	60 000
Bénéfice y_i	55 000	165 000	235 000	220 000	155 000	105 000

1. Représenter par un nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ la série statistique dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$:

- en abscisse : 1 cm représente 5 000 unités ;
- en ordonnée : 1 cm représente 10 000 francs.

2. Un ajustement affine vous paraît-il justifié ?

3. L'observation du graphique conduit à tester un ajustement par une fonction f définie par :

$$f(x) = -0,0002x^2 + 14x - 5\,000.$$

où x représente le nombre d'exemplaires mis en vente et $f(x)$ le bénéfice réalisé en francs.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre x d'exemplaires mis en vente	5 000	15 000	30 000	45 000	55 000	60 000
Bénéfice $f(x)$						

b. Calculer la fonction dérivée f' et déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\ 000 ; 60\ 000]$.

d. Représenter la fonction f dans le repère défini à la question 1.

e. Quel doit être le nombre d'exemplaires mis en vente pour pouvoir réaliser un bénéfice maximum ?

62

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1999

Une entreprise fabrique des ordinateurs. Lorsqu'elle produit x ordinateurs ($1 \leq x \leq 10$) on sait que :

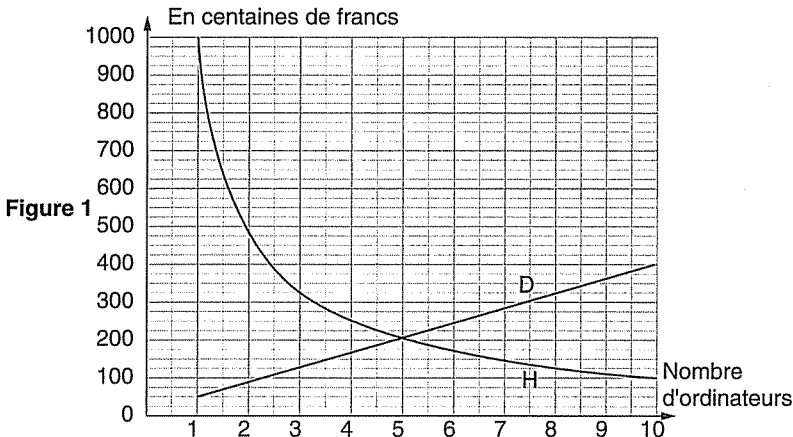
- le coût de fabrication comprenant la main d'œuvre et la matière première est $40x$ (en centaines de francs) ;
- le coût d'étude est $\frac{1\ 000}{x}$ (en centaines de francs) ;
- le coût total est la somme des coûts de fabrication et d'étude.

Pour étudier le coût total, on introduit les fonctions g et h définies sur l'intervalle $[1 ; 10]$ par :

$$g(x) = 40x \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1\ 000}{x}$$

On note D la courbe représentative de g et H celle de h . D et H sont représentées sur la figure 1.

Le bénéfice (ou la perte) réalisé, exprimé en centaines de francs, est représenté par la courbe B donnée à la figure 2.



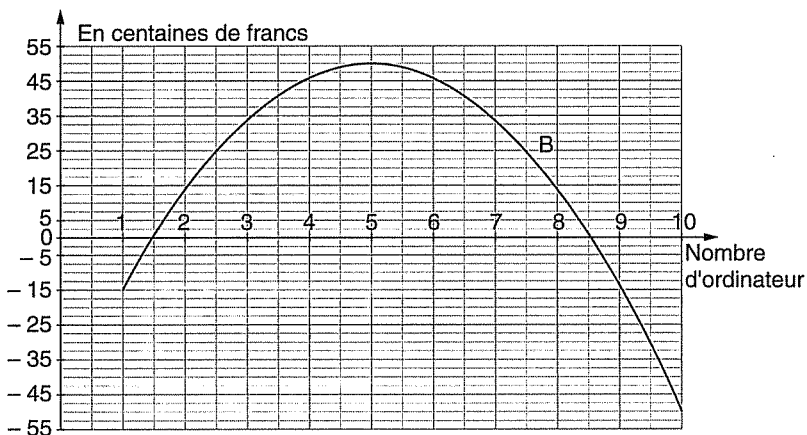


Figure 2

Partie A – Étude graphique

Dans cette partie, les résultats seront lus graphiquement.

1. Compléter le tableau suivant (en centaines de francs) après l'avoir recopié.

x	1	5	10
Coût de fabrication			
Coût d'étude			
Coût total			

- Donner la valeur de x pour laquelle les deux coûts sont identiques. (Justifier)
- Combien doit-on produire d'ordinateurs pour que le coût d'étude devienne inférieur strictement à celui de fabrication ? Justifier.
- Combien doit-on produire d'ordinateurs pour que l'entreprise réalise un bénéfice ? Justifier.
- Donner l'intervalle sur lequel le bénéfice est décroissant.

Partie B – Recherche d'un coût total minimum

On introduit la fonction f définie sur $[1, 10]$ par :

$$f(x) = 40x + \frac{1\,000}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{40(x-5)(x+5)}{x^2}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[1, 10]$.

3. Compléter le tableau de valeurs après l'avoir recopié.

x	1	2	4	5	6	8	10
$f(x)$							

4. Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthogonal tel que :

- 1 cm représente une unité sur l'axe des abscisses ;
- 1 cm représente 100 unités sur l'axe des ordonnées.

5. Pour combien d'ordinateurs fabriqués le coût total est-il minimum ?

FONCTIONS (SMS)

63

Problème

Série SMS, 2000

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 4]$ par :

$$f(t) = 1 + e^{1-t}.$$

1. Calculer $f'(t)$.

2. a. Étudier le signe de $f'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; 4]$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Le compléter avec les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(4)$.

3. a. Reproduire et compléter le tableau suivant de valeurs numériques (arrondies à 0,1 près) :

t	0	0,5	1	2	2,5	3	4
$f(t)$		2,6		1,4		1,1	

b. Tracer la courbe C représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

Prendre pour unité graphique 5 cm pour une unité sur chaque axe.

Partie B

Une équipe d'une organisation humanitaire circule dans le désert.

En mesurant la pression des pneus de leur véhicule tout terrain, ils s'aperçoivent que l'un des pneus a une fuite. Malheureusement, la roue de secours est inutilisable.

Ils partent aussitôt vers le village le plus proche situé à une heure trente minutes de route.

On admet que l'expression :

$$f(t) = 1 + e^{1-t}$$

donne la pression du pneu percé, exprimée en km/cm^2 , à l'instant t , exprimé en heures.

L'origine du temps est le moment où le véhicule se met en route.

1. Utiliser le graphique précédent, en faisant apparaître les constructions utiles, pour répondre aux questions suivantes :

- a. Quelle est la pression du pneu percé au moment où l'équipe se met en route ?
 - b. Quelle sera la pression de ce pneu 45 minutes plus tard ?
 - c. Pour rejoindre le village, le véhicule doit emprunter une piste caillouteuse sur laquelle la pression du pneu percé ne doit pas être inférieure à $1,5 \text{ km/cm}^2$. L'équipe pourra-t-elle rejoindre ce village en voiture ? (Justifier la réponse)
2. Déterminer par le calcul combien de temps le véhicule aurait pu rouler jusqu'à ce que la pression du pneu soit égale à $1,5 \text{ km/cm}^2$.

64**Problème**

Série SMS, 1999

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$ par :

$$f(x) = 8,68 \ln x + 93,98 .$$

On appelle C sa courbe représentative.

1. a. Calculer $f'(x)$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$.
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 25]$.
2. Reproduire et compléter le tableau de valeurs numériques suivant, en faisant figurer les valeurs arrondies à l'entier le plus proche.

x	0,5	1	2	5	10	16	25
f(x)	88			108			122

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal. Pour le tracé, on prendra 1 cm pour 2 unités, en abscisses et en ordonnées. De plus, on graduera l'axe des ordonnées à partir de 86.
Tracer la courbe C.

Partie B – Application

Quand l'oreille d'une personne normale est soumise à une pression acoustique x , exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8,68 \ln x + 93,98 .$$

1. Déterminer l'intensité sonore, en décibels, correspondant à une pression acoustique de 14 bars :

a. graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles sur le graphique de la **Partie A** ;

b. par le calcul.

2. Une personne normale ne peut supporter un bruit d'intensité supérieure à 120 décibels. Déterminer la pression, en bars, que l'oreille de la personne subit si elle est soumise à une intensité sonore de 120 décibels :

a. graphiquement, en faisant apparaître les constructions utiles sur le graphique de la **Partie A** ;

b. en résolvant par le calcul l'équation $f(x) = 120$.

65

Problème

Série SMS, 2000

Partie A

Soit f la fonction définie par $f(t) = 3te^{-1,25t}$ sur l'intervalle $I = [0 ; 4]$.

1. Montrer que $f'(t)$ peut s'écrire : $f'(t) = 3(1 - 1,25t)e^{-1,25t}$.

2. Reproduire et compléter le tableau de signes suivant :

t	0	0,8	4
$e^{-1,25t}$			
$1 - 1,25t$		0	
$f'(t)$			

3. Établir le tableau de variations de f sur l'intervalle I .

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à 0,01 près) :

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	4
$f(t)$	0			0,88		0,69			0,21	

5. Tracer la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Placer l'axe des abscisses sur un grand côté de la feuille.

Prendre 6 cm pour 1 unité en abscisses et 10 cm pour 1 unité en ordonnées.

Partie B

Dans cette partie, f est la fonction étudiée dans la **Partie A**.

On considère que $f(t)$ représente une bonne approximation du taux d'alcoolémie (quantité d'alcool dans le sang, en g/L) en fonction du temps t écoulé après absorption (exprimé en heures), pour un homme de 70 kg, ayant bu deux verres d'alcool à l'instant $t = 0$.

1. Cet homme est-il en infraction avec la loi s'il conduit une automobile dès après l'absorption ?

(Taux maximum toléré : 0,5 g/L).

Pour les questions suivantes, faire apparaître les tracés utiles sur le graphique.

2. Déterminer graphiquement son taux d'alcoolémie maximum et l'instant où il a lieu.

3. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel il ne doit pas conduire.

66

Problème

Série SMS, 1999

Partie A – Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [0 ; 45]$ par :

$$f(t) = 45t^2 - t^3.$$

1. a. Montrer que $f'(t) = 3t(30 - t)$.

b. Reproduire et compléter le tableau de signes ci-dessous :

t	0	45
$3t$		
$30 - t$		
$3t(30 - t)$		

c. Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle I .

2. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

t	0	10	20	25	30	35	40	45
$f(t)$			10 000			12 250		

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal ; pour le graphique, on prendra :

- 2 cm en abscisses pour 10 unités ;
- 1 cm en ordonnées pour 1 000 unités.

Tracer la courbe représentative de la fonction f , en utilisant le tableau de valeurs de la question précédente.

Tracer sur le dessin les tangentes aux points d'abscisses $t = 0$ et $t = 30$.

Partie B – Application

À la suite d'une épidémie dans une région, on a constaté que le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est donné par :

$$f(t) = 45t^2 - t^3,$$

pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; 45]$.

1. En utilisant la **Partie A**, déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours et préciser le nombre de personnes malades ce jour-là.
2. Déterminer graphiquement la période pendant laquelle le nombre de personnes malades est supérieur ou égal à 10 000 (faire apparaître sur le dessin les traits de construction utiles).

67

Problème

Série SMS, 1999

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = [0 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)},$$

et sa courbe représentative C dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 5 cm.

1. a. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f .
- b. Résoudre sur l'intervalle I l'inéquation : $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)} \geq 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur I .

- c. Établir le tableau de variations de la fonction f .

2. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (valeur décimale approchée à 10^{-2} près par défaut).

x	0	1	2	3	4
$f(x)$			1,60		

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie B – Application

On admet que la fonction f de la **Partie A** représente le prix de revient des composants électroniques fabriqués par l'entreprise RAMSA : x étant le nombre de centaines de composants électroniques fabriqués, leur prix de revient, en milliers de francs, est exprimé par $f(x)$.

D'autre part on désigne par $p(x)$, en milliers de francs, le prix de vente de ces composants électroniques. Un composant étant vendu 6 F pièce, on a donc :

$$p(x) = 0,6x.$$

1. Tracer sur le graphique de la **Partie A** la droite D représentant la fonction p .
2. On appelle H le point d'intersection de la droite D et de la courbe C. À partir du graphique, déterminer un encadrement à 10^{-1} près de l'abscisse x_H du point H.
3. On appelle $g(x)$ la différence entre le prix de vente des composants et leur prix de revient (en milliers de francs).
Justifier que la solution de l'équation $g(x) = 0$ est l'abscisse du point H.

4. a. Vérifier que $g(x) = 0,1x - e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)}$.

b. Donner les valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut de $g(3,24)$ et $g(3,25)$.

c. En déduire la quantité minimale de composants électroniques qui doit être vendue pour que l'entreprise fasse des bénéfices, c'est-à-dire pour que $g(x)$ soit positif.

68

Exercice

Série SMS, 1998

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle (E) :

$$Y' + 0,018Y = 0,$$

où Y est une fonction dérivable de la variable réelle t .

2. Déterminer la solution particulière de (E) qui vérifie $Y(0) = 2$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 50]$ par $f(t) = 2e^{-0,018t}$.

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On note C la courbe de la fonction f dans ce repère qui est tel que les unités graphiques vérifient :

- 0,5 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
- 5 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

1. a. Déterminer f' , la fonction dérivée de la fonction f .
- b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 50]$.

2. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 1,5$. On donnera la valeur exacte de la solution, puis une valeur approchée arrondie à l'unité près.

3. a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près) :

t	0	2	5	8	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$f(t)$													

b. Tracer la courbe C.

Partie C

Le taux de glycémie (de glucose dans le sang) doit rester stable. Cet équilibre est assuré par un processus appelé homéostasie.

Quand un changement se produit, le cerveau le décèle et envoie des messages pour le corriger.

À l'instant t , exprimé en minutes, le taux de glycémie, exprimé en g/L, est donné par :

$$f(t) = 2e^{-0,018t}$$

1. En utilisant les résultats de la **Partie B**, déterminer :

a. le taux de glycémie pour $t = 8$;

b. la durée pendant laquelle le taux de glycémie demeure supérieur ou égal à 1,5 g/L ;

2. On considère qu'un patient a un taux de glycémie normal lorsque celui-ci est inférieur à 1,1 g/L (sachant qu'il reste supérieur à 0,8 g/L sur l'intervalle $[0 ; 50]$).

En utilisant le graphique de la **Partie B**, déterminer la durée nécessaire pour que le taux de glycémie devienne normal. On fera apparaître les constructions utiles.

69

Problème

Série SMS, 1999

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1950 ; 2000]$ par :

$$f(x) = -5\,430\,718 + 722\,457 \ln x,$$

et on appelle C sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Après avoir déterminé le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1950 ; 2000]$.

Préciser dans ce tableau de variations les valeurs de $f(x)$, arrondies à l'entier le plus proche, aux extrémités de l'intervalle d'étude.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les résultats à l'entier le plus proche) :

x	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
$f(x)$	44 166		47 852	49 688			55 168	56 986	

4. Le plan est muni d'un repère orthogonal ; on prendra pour le tracé :

- 2 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses ;
- 5 cm pour 10 000 unités sur l'axe des ordonnées.

De plus, on graduera l'axe des abscisses à partir de 1950 et l'axe des ordonnées à partir de 40 000.

Tracer la courbe C.

Partie B – Évolution de la population française

On suppose que l'évolution de la population française entre 1950 et 2000 obéit à la formule suivante :

$$f(x) = -5\,430\,718 + 722\,457 \ln x,$$

où x représente l'année et $f(x)$ le nombre d'habitants en milliers (d'après données INED, 1995).

Dans les deux questions suivantes, on fera apparaître les traits de construction utiles sur le graphique de la question A. 4.

1. Déterminer graphiquement le nombre d'habitants en France en 1962.
2. Déterminer graphiquement l'année en laquelle il y avait en France 53 711 000 habitants.
3. Retrouver le résultat de la question précédente par le calcul.

FONCTIONS POLYNÔMES

70

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1997

Une usine fabrique et vend des boîtes de jeu pour enfants.

Après la fabrication et la vente de x centaines de boîtes de ce jeu, le bénéfice net réalisé en un mois s'exprime, en centaines de francs, par :

$$B(x) = -x^2 + 90x - 261,$$

pour x compris entre 3 et 60.

1. Calculer $B'(x)$.
2. a. Étudier le signe de $B'(x)$, puis en déduire les variations de la fonction B sur l'intervalle $[3 ; 60]$.
b. Dresser le tableau complet des variations de B sur l'intervalle $[3 ; 60]$.
c. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	30	50	60
$B(x)$				

3. Pour quel nombre de boîtes de jeu fabriquées et vendues, le bénéfice réalisé par cette usine est-il maximal ? Préciser la valeur, en francs, du bénéfice mensuel maximal.

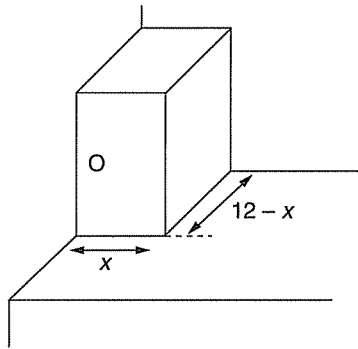
71

Exercice

Série Hôtellerie, 1997

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail (figure ci-contre), un placard ayant la forme d'un parallélépipède droit.

Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x , sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur. (Les distances sont exprimées en dm.)



1. Vérifier que le volume $V(x)$ de ce placard est :

$$V(x) = x^3 - 24x^2 + 144x .$$

2. a. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 12]$ par :

$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x .$$

b. Tracer la courbe \mathcal{C} représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (1 cm représente 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 25 unités sur l'axe des ordonnées).

On précisera la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 8.

3. À l'aide de l'étude précédente, déterminer la largeur ℓ pour laquelle le volume est maximal.

Quel est ce volume ?

4. En utilisant une lecture graphique, indiquer pour quelle(s) valeur(s) de la largeur le placard aura un volume égal à 175 dm^3 .

(On donnera les résultats à 10^{-1} près.)

72

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1998

Un terrain de jeu est formé d'un rectangle ABCD et de deux demi-disques de diamètres respectifs [AD] et [BC].

On note x le rayon de chaque demi-disque et ℓ la longueur AB, mesurés en mètres.

1. Calculer le périmètre du terrain, en fonction de x et de ℓ .

2. Dans toute la suite de l'exercice, le périmètre du terrain est de 400 mètres.

a. Exprimer ℓ en fonction de x .

b. Montrer que l'aire, en m^2 , du terrain peut s'écrire $400x - \pi x^2$.

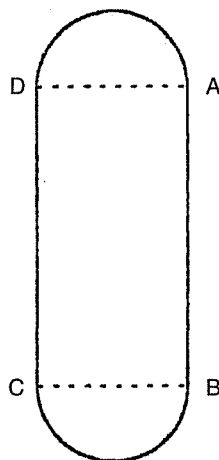
3. Pour $x \geq 0$, on pose $f(x) = 400x - \pi x^2$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f .

b. En déduire la valeur exacte de x pour laquelle l'aire du terrain est maximale, puis calculer la valeur de ℓ correspondante.

Que constate-t-on ?

c. Calculer la valeur exacte de cette aire maximale, puis en donner une valeur approchée à une unité près par défaut.



73

Exercice

Séries STI (AA), 1999

Partie A

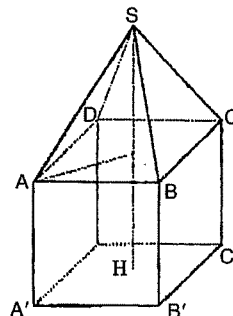
Une lanterne a la forme d'une pyramide régulière, SABCD, à base carrée reposant sur un cube ABCDA'B'C'D'.

La hauteur SH de la lanterne est de 30 cm. Soit h , en cm, la hauteur SO de la pyramide et x , en cm, la longueur de l'arête du cube.

On admet que $0 \leq x \leq 30$.

1. Exprimer en fonction de x la hauteur h de la pyramide.

2. Exprimer en fonction de x le volume V de la lanterne.



(On rappelle que le volume d'une pyramide est : $\frac{\text{surface de base} \times \text{hauteur}}{3}$).

Partie B

1. Soit la fonction numérique définie dans l'intervalle $[0 ; 30]$ par $f(x) = \frac{1}{3} (30x^2 + 2x^3)$ et soit \mathcal{C} , sa courbe représentative dans le plan muni du

repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (1 cm représente 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 1 500 unités sur l'axe des ordonnées).

- a. Calculer la dérivée f' de f .
- b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f .

2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :
(donner les valeurs de $f(x)$ arrondies à la centaine près)

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

- b. Construire \mathcal{C} .
- 3. Déterminer, à l'aide de la représentation graphique, la valeur de x pour laquelle $f(x) = 15\ 000$.

Partie C

La longueur de l'arête du cube est de 24 cm. Déterminer alors :

- 1. le volume de la lanterne ;
- 2. la hauteur h de la pyramide ;
- 3. la longueur SA.

74 Exercice
Série STT (ACA, ACC), 1997

Soit la fonction définie sur $[-2,5 ; 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$ et C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1. a. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[-2,5 ; 2]$, $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$.
- b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2,5 ; 2]$ (on pourra s'aider d'un tableau de signes).
- c. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près) :

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$										

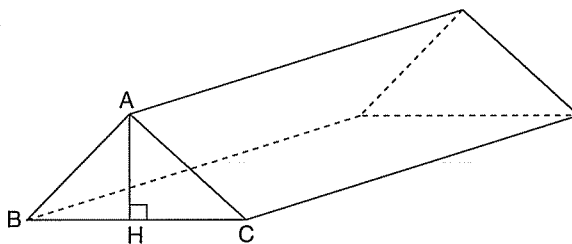
- d. Donner le tableau de variations de f sur $[-2,5 ; 2]$.
- 2. a. Construire C dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Unités graphiques :
 - 3 cm en abscisse ;
 - 2 cm en ordonnée.
- b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

75**Exercice**Série F₁₂ (STI AA), 1996

Un couloir entre deux bâtiments a la forme d'un prisme droit dont deux des faces sont deux immenses baies vitrées rectangulaires de 20 mètres de long sur 5 mètres de large (voir figure suivante).

Une section de ce prisme par un plan perpendiculaire à sa base est le triangle isocèle ABC dont chacun des côtés de même longueur mesure 5 mètres. La longueur BC représente l'écartement à la base des deux baies vitrées, elles sera notée x .

Le but du problème est de déterminer x tel que le volume de ce couloir prismatique soit le plus grand possible.

**Partie A – Modélisation**

1. Entre quelles valeurs extrêmes l'inconnue x peut-elle varier ?
2. Si on appelle H la projection de A sur le segment $[BC]$, calculer AH en fonction de x .
3. Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de x . En déduire le volume V de ce prisme en fonction de x .

Partie B – Étude de la fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 (100 - x^2).$$

1. Démontrer que la fonction dérivée est définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$f'(x) = 4x (50 - x^2).$$

2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Pour quelle valeur de x cette fonction f admet-elle un maximum ?
4. Construire la courbe représentative C_f de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques convenablement choisies.

Partie C – Conclusion

1. Montrer que $V(x) = 5\sqrt{f(x)}$, pour tout x de $[0 ; 10]$.
2. En admettant que les fonctions V et f ont le même sens de variation, déduire des questions précédentes la valeur exacte de BC qui rend maximal le volume V de ce couloir. On donnera aussi une valeur approchée du résultat au centième près.
3. Déterminer alors, la valeur exacte de ce volume V ainsi que la valeur exacte de AH. On donnera une valeur approchée de AH au centième près.

76

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1998

Le but de ce problème est d'étudier le bénéfice réalisé chaque jour par un artisan en fonction de la production.

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan. On choisira sur l'axe des abscisses 1 cm pour 1 unité, en commençant la graduation à 10. Sur l'axe des ordonnées 1 cm représente 100 francs.

Partie A

Soit B la fonction définie sur l'intervalle $[10 ; 25]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée B' de la fonction B . Vérifier que :

$$B'(x) = 3(x - 3)(17 - x).$$

2. Étudier le signe de la fonction B' sur l'intervalle $[10 ; 25]$. En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[10 ; 25]$.
3. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	15	20	23	25
$B(x)$					

Placer dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ les points correspondant à ce tableau puis tracer la courbe représentative de la fonction B .

Partie B

Un artisan a observé que pour un produit donné, le coût total C , en francs, de sa production varie en fonction de la quantité x de pièces produites chaque jour, de la façon suivante :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x,$$

où x est un entier compris entre 10 et 25.

L'artisan vend les pièces fabriquées au prix unitaire de 247 francs.

1. Quel est le prix de vente de x pièces ?

2. Montrer que le bénéfice réalisé pour x pièces fabriquées et vendues est $B(x)$, où B est la fonction étudiée dans la **partie A**.
3. Pour combien de pièces fabriquées et vendues l'artisan réalise-t-il un bénéfice maximal ?
4. Quel est ce bénéfice maximum ? Quel est le bénéfice réalisé alors sur une pièce vendue ?
5. Par lecture graphique, déterminer le nombre de pièces que doit vendre l'artisan s'il veut gagner au moins 1 000 F.

FONCTIONS RATIONNELLES

77

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 2000

Partie A

Un artisan fabrique des objets en bois qu'il propose ensuite aux touristes de passage. Pour chaque semaine, il estime que le coût de production de x objets est donné par :

$$C(x) = x^2 + 60x + 121, \quad x \text{ étant compris entre } 1 \text{ et } 30.$$

Le coût moyen de production d'un objet est donné par $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ où x appartient à $[1 ; 30]$.

1. Montrer que $f(x) = x + 60 + \frac{121}{x}$.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{(x-11)(x+11)}{x^2}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1 ; 30]$.
4. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous ; on arrondira à 10^{-1} près.

x	1	2	4	8	11	15	20	25	30
$f(x)$						83,1		89,8	

5. Construire la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :
 - 1 cm pour 2 objets sur l'axe des abscisses ;
 - 1 cm pour 10 F sur l'axe des ordonnées.

Partie B

L'artisan vend chaque objet 110 F.

1. Montrer que le bénéfice réalisé après la fabrication et la vente de x objets est donné par : $B(x) = -x^2 + 50x - 121$ où x est pris dans $[1 ; 30]$.
2. Calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction B et en déduire le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour faire un bénéfice maximal. Donner ce bénéfice maximal.

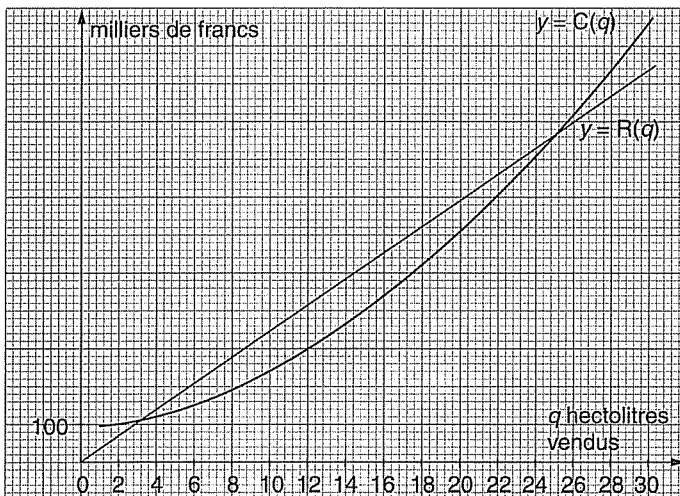
78

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1997

Partie A

Le comptable d'une usine de produits chimiques estime que pour fabriquer q hectolitres d'un certain produit, q compris entre 1 et 30, le coût total en milliers de francs est donné par la fonction C représentée ci-après. On suppose que toute la production est vendue. La recette, en milliers de francs, réalisée par la vente de q hectolitres de ce produit est donnée par la fonction R représentée sur le graphique par un segment de droite.



SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Recopier le tableau et le compléter à l'aide du graphique.

Quantité produite q en hectolitres	4		
Coût total de la production en milliers de francs		375	
Recette en milliers de francs			840

2. a. Déterminer le prix de vente d'un hectolitre de ce produit. Justifier votre réponse.
 b. Établir la formule qui donne la recette R en fonction du nombre q d'hectolitres vendus.
3. a. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de q l'usine est bénéficiaire.
 b. Quel est le bénéfice réalisé par la vente de 14 hectolitres ?

Partie B

Le coût total, en milliers de francs, en fonction du nombre q d'hectolitres produits est donné par :

$$C(q) = q^2 + 7q + 81 \quad (q \text{ variant dans l'intervalle } [1 ; 30]).$$

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

Quantité q en hectolitres	1	5	10	15	20	30
Coût total $C(q)$ en milliers de francs						
Coût moyen par hectolitre						

2. Soit $f(q) = \frac{C(q)}{q}$ le coût moyen par hectolitre pour la production de q hectolitres.

a. Montrer que, sur $[1 ; 30]$, $f(q) = q + 7 + \frac{81}{q}$

b. Calculer $f'(q)$ et vérifier que : $f'(q) = \frac{(q-9)(q+9)}{q^2}$

c. Préciser le signe de $f'(q)$ sur $[1 ; 30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f .

3. a. Recopier et compléter le tableau suivant.

q	1	5	9	15	18	20	25	30
$f(q)$								

b. Construire la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. Unités graphiques :

- 0,5 cm sur l'axe des abscisses ;
- 0,1 cm sur l'axe des ordonnées.

c. Quelle est la production qui assure un coût moyen par hectolitre minimal ? Quel est ce coût moyen minimal ?

79

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1996

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1, +\infty[$. On donne ci-dessous son tableau de variations.

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	2,5	$+\infty$

De plus on admet que, pour tout x élément de $]1, +\infty[$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$, où a, b, c , sont trois nombres réels (avec a et b non nuls) que l'on se propose de déterminer à partir des indications fournies par le tableau de variations de f .

On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. a. Utiliser le tableau de variations pour justifier l'existence d'une droite D asymptote à \mathcal{C} . Donner une équation de D.

b. En déduire la valeur de c .

Pour les questions suivantes, on prendra $c = 1$. On a donc :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-1}$$

2. Le tableau de variations nous fournit les coordonnées d'un point particulier de \mathcal{C} .

En déduire une relation entre les nombres réels a et b .

3. Calculer la dérivée f' de la fonction f (on rappelle que a et b sont des constantes).

Utiliser le tableau de variation pour trouver une deuxième relation entre a et b .

4. Déterminer les nombres réels a et b à partir des deux questions précédentes.

Partie B

On admet pour les parties **B** et **C** que la fonction f de la partie **A** est définie par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$$

1. Montrer que la droite D' d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à \mathcal{C} .

2. a. Résoudre, par le calcul, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 3$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]1, +\infty[$, l'inéquation $f(x) > 3$ (on précisera la méthode utilisée).

3. Quelle est la dérivée de la fonction f ?

Écrire une équation de la droite T_1 tangente à \mathcal{C} au point M d'abscisse 2, et une équation de la droite T_2 tangente à \mathcal{C} au point N d'abscisse 5.

4. Construire les droites D , D' , T_1 et T_2 et la courbe \mathcal{C} .

5. Calculer les coordonnées du point d'intersection P de T_1 et T_2 .

6. Calculer l'aire du triangle MNP. On donnera le résultat en cm^2 .

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2. On appelle \mathcal{A} l'aire (en cm^2) de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 5 \\ f(x) \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Calculer la valeur exacte de \mathcal{A} , puis son arrondi à 1 mm^2 .

3. Justifier, par le calcul, que \mathcal{A} représente moins des $3/4$ de l'aire du triangle MNP.

80

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1998

Partie A – Lecture graphique

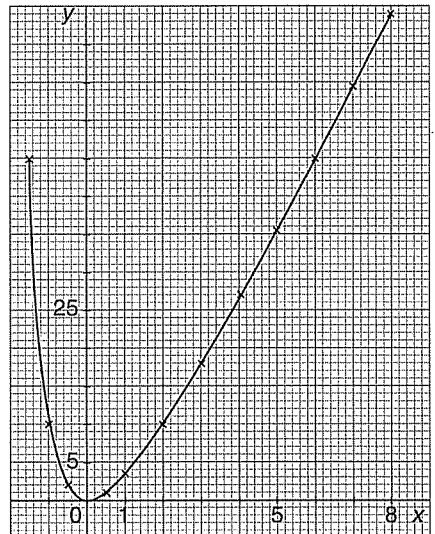
On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-1,5 ; 8]$.

1. Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-1,5 ; 8]$; on précisera dans ce tableau le signe de la dérivée et les images de $-1,5$ et 8.

2. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1,5 ; 8]$:

a. $f(x) = 10$

b. $f(x) = 54$



Partie B – Étude de f

La fonction f précédente est définie par $f(x) = \frac{10x^2}{x+2}$.

On se propose d'étudier f sur l'intervalle $[-1,5 ; 1\ 000]$.

1. On appelle f' la fonction dérivée de f . Montrer que $f'(x) = \frac{10x(x+4)}{(x+2)^2}$.
2. Étudier le signe de $x(x+4)$ sur $[-1,5 ; 1\ 000]$. En déduire celui de $f'(x)$.
3. Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-1,5 ; 1\ 000]$.

Partie C – Application

Une entreprise fabrique et vend des objets.

Le bénéfice réalisé par cette entreprise est égal à $f(x)$, où f est la fonction étudiée dans la partie B et x le nombre d'objets vendus.

1. Justifier, pour x compris entre 0 et 1 000, que le bénéfice est positif.
2. L'entreprise décide de placer à intérêts composés, au taux de 6 % l'an, le bénéfice correspondant à la vente de 1 000 objets. On désigne par C_0 ce bénéfice exprimé en francs arrondi à l'unité et par C_n la valeur acquise au bout de n années.
 - a. Justifier que $C_0 = 9\ 980$.
 - b. Calculer C_1 et C_2 .
 - c. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . Préciser la nature de cette suite.
 - d. Déterminer, en arrondissant à l'unité, la valeur acquise obtenue au bout de 10 ans.

81

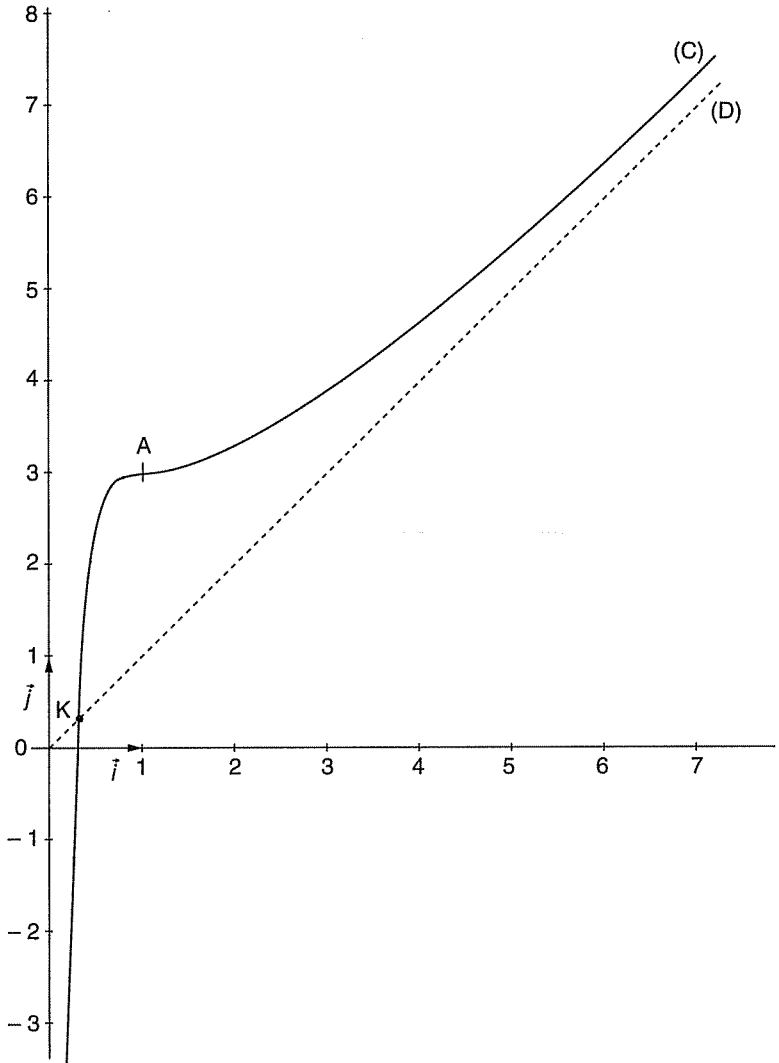
Problème

Série STT (CG, IG), 1996

On considère une fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ dont la courbe représentative (C) est donnée ci-après dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unités : 1 cm en abscisse, 1 cm en ordonnée).

La droite (D) d'équation $y = x$ a également été représentée dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Représentation de f et de son asymptote oblique (D)



Le but du problème est, dans une première partie, de déterminer graphiquement certaines propriétés de la fonction, f , puis de les prouver dans une deuxième partie.

Partie A – Exploitation du graphique

1. On suppose que l'axe des ordonnées et la droite D sont asymptotes à la courbe C. À partir de cette hypothèse, donner $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Le point $K\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ est le point commun à C et D.

D'après la représentation graphique, quelle est en fonction de x , la position de la courbe C par rapport à la droite D ?

3. D'après la représentation graphique, quel est le sens de variation de f ?

Partie B – Justification des observations graphiques et calcul d'aire

La fonction f est définie par : $f(x) = x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$ pour $x > 0$.

1. a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ et justifier le fait que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. En étudiant le signe de $f(x) - x$, retrouver les résultats de la question A. 2.

2. a. Montrer que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x - 1}{x^2}.$$

b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et justifier le fait que l'axe des ordonnées est asymptote à C.

3. a. Calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$ pour $x > 0$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et donner le tableau de variations de la fonction f .

c. Calculer une équation de la droite T tangente au point A d'abscisse 1 de C.

4. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée à 10^{-1} près par excès, en cm^2 , de l'aire de la surface limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \frac{1}{3}$ et $x = 3$.

82

Exercice

Série SMS, 1995

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-3; 3]$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Partie A – Reconnaissance de la courbe représentative de f

1. a. Démontrer que pour tout x de l'intervalle I , la fonction dérivée f' de f est définie par :

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

b. Étudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$.

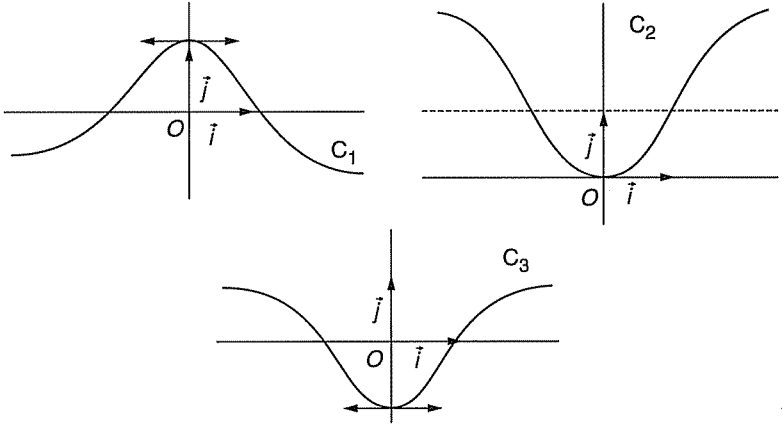
c. Donner le tableau de variations de f .

2. Dédurre de la question précédente, en justifiant votre réponse, que les courbes C_1 et C_2 ci-dessous ne peuvent pas représenter f .

On admettra que la courbe représentative de f est C_3 .

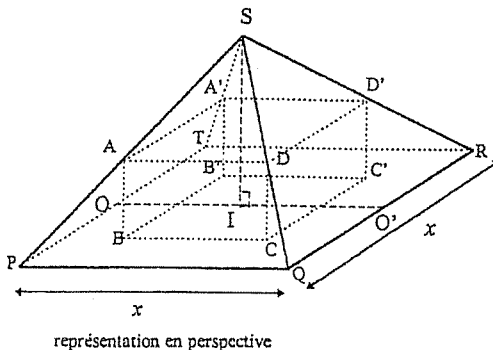
Partie B – Exploitation de la fonction f et de la courbe C_3

1. Montrer que la fonction f est paire. Comment cette propriété se traduit-elle sur la représentation graphique de f ?
2. a. Calculer $f(3)$.
b. Donner l'intervalle décrit par $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $[-3 ; 3]$.
3. a. Par le calcul, résoudre dans I l'équation $f(x) = 0$.
b. Par lecture graphique, résoudre dans I l'inéquation : $f(x) \leq 0$.



83 **Exercice**
Série STI (AA), 1999

Un fabricant veut commercialiser un produit qui a la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée, dans un emballage qui a la forme d'une pyramide régulière à base carrée (voir la représentation en perspective cavalière). Les carrés PQRT et BCC'B' ont le même centre I et leurs côtés sont deux à deux parallèles.

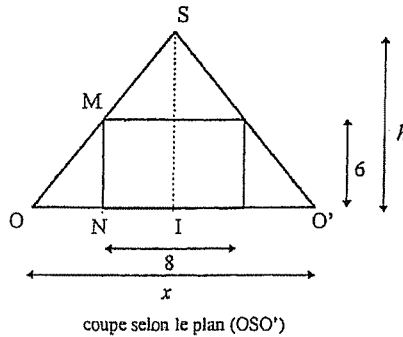


Le but du problème est de trouver les dimensions de la pyramide de sorte que son volume soit minimal.

Le fabricant ne veut pas que la longueur PQ du côté de la base de la pyramide soit supérieure à 20 cm.

Les dimensions du parallélépipède sont 8 cm pour le côté [BC] de la base carrée et 6 cm pour la hauteur [BA].

On désigne par x la longueur du côté [PQ] de la base de la pyramide et par h la longueur de sa hauteur [IS], où S est le sommet de la pyramide.



Partie A – Modélisation

On rappelle que le volume d'une pyramide est $V = \frac{1}{3} (B \times h)$ où B est l'aire de la base et h sa hauteur.

1. Entre quelles valeurs extrêmes le nombre x peut-il varier ?
2. Exprimer h en fonction de x . (On pourra se placer dans le plan (OSO').)
3. En déduire une expression du volume $V(x)$ de la pyramide.

Partie B – Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]8 ; 20]$ par : $f(x) = \frac{x^3}{x-8}$.

1. Démontrer que, sur l'intervalle $]8 ; 20]$, la dérivée est définie par :

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-12)}{(x-8)^2}.$$

2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Construire la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques 1 cm pour 1 cm en abscisse, 2 cm pour 100 cm³ en ordonnée).

Partie C – Conclusion

1. Montrer que, pour $x \in]8 ; 20]$, $V(x) = 2f(x)$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la pyramide est minimum.
3. Quel est alors ce volume ? Quelle est la hauteur de la pyramide ? Quel est alors le volume à remplir entre le produit et l'emballage ?

ÉQUATIONS LOGARITHMIQUES ET EXPONENTIELLES

84**Exercice**

Série STT (CG, IG), 1998

Soit P la fonction polynôme, définie sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6.$$

1. Montrer que $P(x) = (2x + 1)(x^2 + x - 6)$.Résoudre l'équation $P(x) = 0$.2. Résoudre dans \mathbb{R} les équations :

a. $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 11(\ln x) - 6 = 0$.

b. $2e^{2x} + 3e^x - 11 - 6e^{-x} = 0$.

85**Exercice**Série F₁₁, 19941. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , l'équation :

$$3x^2 + x - 10 = 0.$$

2. En déduire les solutions, dans \mathbb{R} , des équations (on donnera la valeur exacte de chaque solution, puis sa valeur approchée arrondie au centième) :

a. $\ln(x + 1) + \ln(3x - 2) = 3 \ln 2$;

b. $e^x - 10 = -3e^{2x}$;

c. $3e^{3x} + e^{2x} - 10e^x = 0$.

86**Exercice**

Série STL (CL), 1995

On considère le polynôme défini sur \mathbb{R} par :

$$P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1.$$

1. Calculer $P(1)$. Déterminer les nombres réels a , b , c tels que, pour tout x appartenant à \mathbb{R} on ait :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.

3. En déduire la résolution des équations suivantes :

a. $6e^{3x} - 5e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$;

b. $\ln(6x - 3) + \ln(x + 1) = \ln(2x - 2)$

(ln désigne la fonction logarithme népérien).

87**Exercice**

Série STI (GM, GC, GEN), 1999

La durée de vie T d'un outil s'exprime en fonction de la vitesse de coupe V par la relation (1) suivante :

$$(1) \quad T = C \cdot 10^6 \cdot V^k$$

T est donnée en minutes et V en mètres par minute.

C est un coefficient positif, non nul, lié au matériau usiné.

k est un autre coefficient, négatif, lié au type d'outil utilisé.

1. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation (2).

$$(2) \quad \ln T = 6 \ln 10 + \ln C + k \cdot \ln V,$$

où \ln désigne le logarithme népérien.

2. Détermination expérimentale de C et de k .

Des essais avec un outil ont abouti aux données suivantes :

V en m/min	100	50
T en mn	10	70

a. À l'aide de la relation (2), traduire ces données par un système linéaire de deux équations à deux inconnues k et $\ln C$. (On pourra poser $x = k$ et $y = \ln C$)

b. Déterminer alors k et $\ln C$.

c. En déduire une valeur approchée de k et une valeur approchée de C , à 10^{-3} près.

3. Application.

On considère que la durée de vie T de cet outil est donnée dans ces conditions par :

$$T = 4 \cdot 118 \cdot 10^6 \cdot V^{-2,807}$$

Calculer, à 10^{-1} près, la durée de vie en minutes de l'outil pour une vitesse de coupe égale à 120 mètres par minute.

88**Exercice**

Série STL (CL), 1998

Résolution d'équations

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$.

1. Calculer $P(1)$.

2. Déterminer a, b, c réels tels que, pour tout x réel, on ait :

$$P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c).$$

3. En déduire la résolution de $P(x) = 0$ dans \mathbb{R} .
4. Résoudre en utilisant les résultats précédents :
 - a. $(\ln x)^3 - 5(\ln x)^2 - \ln x + 5 = 0$, où $\ln x$ est le logarithme népérien de x .
 - b. $e^{3x} - 5e^{2x} - e^x + 5 = 0$.

89

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1996

On considère le polynôme de la variable réelle x :

$$P(x) = (2x + 1)(x^2 - 1).$$

Il peut aussi s'écrire :

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

1. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $P(x) = 0$.
- b. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $P(x) < 0$.
2. Résoudre chacune des équations suivantes sur l'intervalle indiqué :
 - a. $2(\ln t)^3 + (\ln t)^2 - (2 \ln t) - 1 = 0$ sur $]0 ; +\infty[$
(\ln désigne la fonction logarithme népérien) ;
 - b. $2e^t + 1 - 2e^{-t} - e^{-2t} = 0$ sur \mathbb{R} .

Remarque : On pourra effectuer le changement d'inconnue $\ln t = x$ pour
a. et $e^t = x$ pour b..

90

Exercice

Série F₁₀ (STI, GO), 1997

1. On considère la fonction P définie pour tout x réel par :

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3.$$

Calculer $P(-1)$, en déduire que $P(x)$ peut s'écrire :

$$P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c),$$

où a , b , et c sont trois réels que l'on déterminera.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.
3. En déduire la résolution dans \mathbb{R} de chacune des équations suivantes :
 - a. $2e^{6x} + 7e^{4x} + 2e^{2x} - 3 = 0$.
 - b. $\ln(4 - x^2) + \ln(2x + 7) = \ln(10x + 25)$
(\ln désignant le logarithme népérien).

91

ExerciceSérie G₂-G₃ (STT CG), 1993

1. Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{R} , l'équation $2x^2 + x - 105 = 0$.
2. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $2e^{2x} + e^x - 105 = 0$.
3. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $\ln(1-x) + \ln(-3-2x) = \ln 102$.
(\ln signifie : logarithme népérien.)

FONCTIONS LOGARITHMES

92

Problème

Série STT (CG, IG), 1999

On considère la fonction f , définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

On appelle (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
Interpréter graphiquement ce résultat.
3. a. Démontrer que, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$.
En déduire le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (\mathcal{C}) avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe (\mathcal{C}) .
6. Soit F la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2$.
a. Montrer que F est une primitive de f .
b. Calculer $I = \int_1^4 f(x) dx$ (on donnera la valeur exacte de I en fonction de $\ln 2$).
En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 4]$.

93

Problème

Série STI (GM, GC, GEN), 2000

Le but du problème est d'étudier la position relative d'une courbe et d'une tangente à cette courbe en un point, et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

Sur la figure ci-après a été tracée la courbe représentative C de la fonction f , définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} + \ln x.$$

Partie A – Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $]0; 6]$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x} + \ln x.$$

1. Calculer la limite de f en zéro. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = \frac{x+2+x \ln x}{x}.$$

2. Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(e)$, $f(4)$ et $f(6)$.

3. a. Vérifier que, pour tout x dans l'intervalle $]0; 6]$, on a : $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; 6]$.

c. Établir le tableau de variations de f sur $]0; 6]$.

Partie B – Position de la courbe par rapport à une tangente

1. Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe C au point A d'abscisses 4 est :

$$y = \frac{x}{8} + 1 + \ln 4.$$

2. On considère la fonction g définie sur $]0; 6]$ par : $g(x) = f(x) - \left(\frac{x}{8} + 1 + \ln 4\right)$.

a. Vérifier que pour tout x de $]0; 6]$: $g(x) = \ln x - \ln 4 + \frac{2}{x} - \frac{x}{8}$.

b. Montrer que pour tout x de $]0; 6]$: $g'(x) = \frac{-x^2 + 8x - 16}{8x^2}$.

c. Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $]0; 6]$.

d. Préciser le sens de variation de g sur $]0; 6]$ (on ne demande pas les limites aux bornes du domaine de définition).

e. Calculer $g(4)$ et en déduire le signe de g sur $]0; 6]$.

3. En déduire la position relative de C et T.

4. Tracer la droite T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de la figure.

Partie C – Calcul d'une aire

1. Soit la fonction H définie sur $]0 ; 6]$ par :

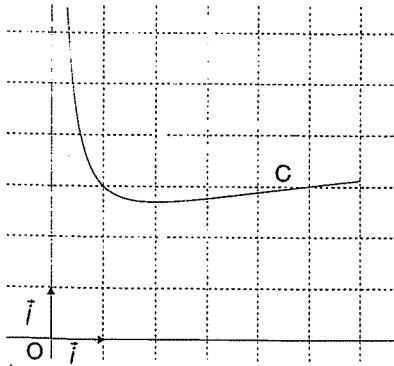
$$H(x) = (2 + x) \ln x .$$

Calculer $H'(x)$.

2. On considère la partie du plan comprise entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=e$. On appelle A l'aire, exprimée en cm^2 , de cette partie du plan.

a. Hachurer cette partie sur la figure.

b. Donner la valeur exacte de A puis sa valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.



94

Problème

Série STI (GM, GC, GEN), 1998

Les parties **C** et **D** étant indépendantes l'une de l'autre, le candidat pourra les traiter dans l'ordre qui lui convient.

Partie A

- Factoriser le polynôme $-x^2 + 6x + 16$.
- Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $-x^2 + 6x + 16 > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2 ; 8[$ par :

$$f(x) = \ln \left[\frac{1}{16} (-x^2 + 6x + 16) \right] .$$

Sur le graphique suivant sont tracées la courbe C , représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $x=3$. Les unités graphiques sont 2 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.

- a. Quels sont les signes, sur l'intervalle $]-2 ; 8[$, de $x+2$ et de $-x+8$?
 b. Vérifier que, sur cet intervalle, $f(x)$ s'écrit aussi :

$$\ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16 .$$

2. a. Montrer que la dérivée f' de la fonction f est définie, sur l'intervalle $]-2 ; 8[$, par :

$$f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)} .$$

b. Il semble que, sur la représentation graphique, la courbe C admette un sommet d'abscisse 3. Le démontrer.

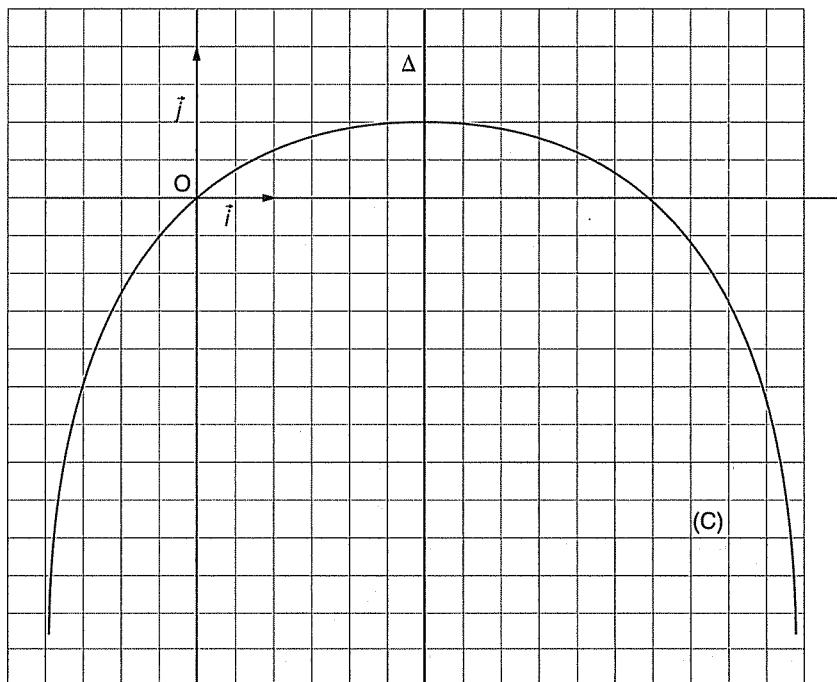
- c. Tracer, sur la feuille-réponse jointe, la tangente à C au point d'abscisse 3.
3. a. Déterminer par le calcul $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
- b. Calculer $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$.
- c. Interpréter géométriquement ces résultats et compléter le graphique donné ci-dessous.
4. Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2 ; 8[$.
5. Retrouver, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

Partie C

Sur le graphique donné ci-après, la droite Δ d'équation $x = 3$ semble être un axe de symétrie de la courbe C. L'objet de cette partie est de montrer que tout point de la courbe C a un symétrique par rapport à la droite Δ , qui appartient lui aussi à la courbe C. On rappelle que deux points, situés sur une perpendiculaire à une droite D, sont symétriques par rapport à D lorsque leur milieu appartient à D.

Pour tout réel x de l'intervalle $]-2 ; 8[$, on considère le point M de la courbe C de coordonnées $(x ; f(x))$. Soit M' le point du plan de coordonnées $(6 - x ; f(x))$.

1. Montrer que les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite Δ .
2. Montrer que le point M' appartient à la courbe C. On pourra démontrer que $f(6 - x) = f(x)$.



Partie D

L'objet de cette partie est le calcul d'une aire.

1. Hachurer, sur le graphique, la partie du plan limitée par la courbe C et l'axe des abscisses.

2. Soit F la fonction définie sur l'intervalle]-2 ; 8[par :

$$F(x) = (x + 2) \ln(x + 2) + (x - 8) \ln(-x + 8) - 2x - x \ln 16.$$

Montrer que F est une primitive de f.

3. a. Calculer $\int_0^6 f(x) dx$.

b. Exprimer le résultat sous la forme $a \ln 2 + b$, où a et b sont des nombres entiers à déterminer.

4. En déduire la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} , exprimée en cm^2 , de la partie hachurée.

En donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut.

95

Problème

Série STT (GC, IG), 2000

Soit f la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{3}{2} - \ln x \right)$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A – Étude de f et tracé de C

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. a. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f'(x) = x(1 - \ln x).$$

b. Résoudre dans $[1 ; +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x > 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1 ; +\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de f sur $[1 ; +\infty[$.

3. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous : on donnera des valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)							

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 1.

5. a. Résoudre dans $[1 ; +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

b. En déduire les coordonnées du point D , point d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses (O, \vec{i}) . $\boxed{0,5 \text{ pt}}$

6. Tracer la tangente T et la courbe C . (Faire apparaître le point D .)

Partie B – Calcul d'aire

1. Soit G la fonction définie sur $[1 ; +\infty[$ par : $G(x) = \frac{1}{3} x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right)$.

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \ln x$.

2. En remarquant que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \frac{3}{4} x^2 - \frac{1}{2} g(x)$, en déduire une primitive F de f sur $[1 ; +\infty[$.

3. Déterminer l'aire \mathcal{A} , en cm^2 , de la région délimitée sur le graphique par la courbe C , l'axe des abscisses (O, \vec{i}) et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$. (On donnera la valeur exacte de cette aire, puis sa valeur décimale arrondie à 10^{-2}).

96

Problème

Série STT (CG, IG), 1999

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$ dont on donne ci-après la représentation graphique.

Par lecture graphique :

a. donner le tableau de variations de g ,

b. déterminer le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

3. a. Calculer la dérivée f' de f .

b. Vérifier que pour tout x de $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

c. En déduire le signe de f' , puis le tableau de variations de f .

4. Tracer C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

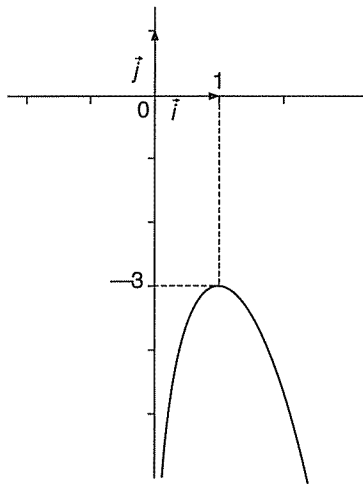
On précisera les valeurs décimales approchées de $f(x)$ à 0,01 près pour les valeurs entières de x allant de 1 à 10 inclus.

5. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

Calculer la dérivée de h . En déduire une primitive F de f sur $]0, +\infty[$.

6. Mettre en évidence sur le dessin la partie E du plan limitée par la courbe C , les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$, et l'axe des abscisses.

Calculer l'aire de E en cm^2 . On donnera sa valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près.



97

Problème

Série STI (GE, GET), 1998

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x \ln x - 2x + 3.$$

1. a. Déterminer la limite de g en 0. (On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.)

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$ (on pourra mettre x en facteur).

2. Déterminer à l'aide de la dérivée g' , le sens de variation de la fonction g . Dresser le tableau de variations de g .
3. Calculer $g(e)$. En déduire que, pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ayant pour unités graphiques :

- 2 cm en abscisse,
- 1 cm en ordonnée.

1. Soit x appartenant à $]0, +\infty[$. Montrer que $f'(x) = 4g(x)$.
2. a. Déterminer la limite de f en 0.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f .
4. a. Déterminer une équation de la tangente T_1 à \mathcal{C} en son point I d'abscisse 1.
b. Déterminer une équation de la tangente T_2 à \mathcal{C} en son point K d'abscisse e .
5. Tracer T_1 , T_2 et \mathcal{C} .

Partie C

1. Soit H la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $H(x) = \frac{1}{3} x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right)$ et h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^2 \ln x$.
Vérifier que H est une primitive de h sur $]0, +\infty[$.
2. Soit \mathcal{D} la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$, l'axe des abscisses et la courbe \mathcal{C} . Calculer l'aire A , exprimée en unités d'aire, de la partie \mathcal{D} . On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

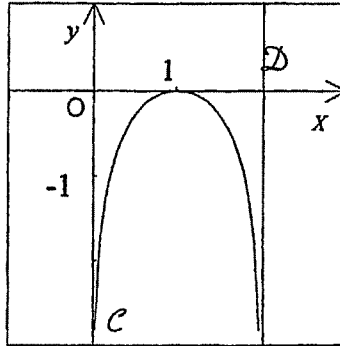
98

Problème

Série STL (CL), 2000

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; 2[$, dont la courbe représentative \mathcal{C} dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, est présentée ci-contre :

La droite \mathcal{D} a pour équation $x = 2$.



Partie A

Le but de cette partie est de déterminer f , sachant que $f(x)$ est de la forme $\ln(ax^2 + bx)$, où a et b sont des nombres réels non nuls.

1. Montrer que $f'(x) = \frac{2ax + b}{ax^2 + bx}$.
2. Sachant que la courbe \mathcal{C} passe par le point A de coordonnées $(1 ; 0)$ où elle admet une tangente horizontale, déterminer a et b .

Partie B – Étude de la fonction f

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -x^2 + 2x$ et f la fonction définie sur $]0 ; 2[$ par $f(x) = \ln g(x)$.

1.
 - a. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
 - b. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0, puis la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
 - c. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 2, puis la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2.
 - d. En déduire les équations des asymptotes à la courbe \mathcal{C} .
2. Calculer $g'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \frac{-2x + 2}{g(x)}$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .

Partie C – Calcul d'aire

1. Soit F la fonction définie sur $]0 ; 2[$ par $F(x) = x \ln x + (x - 2) \ln (2 - x) - 2x$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]0 ; 2[$.

2. Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha$ et $x = 1$; ($0 < \alpha < 1$).
En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$, puis son arrondi d'ordre 2.

99

Problème

Série STT (CG, IG), 1999

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm) on considère la courbe C représentant une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ construite ci-après.

1. Lire $f(1)$; $f(e)$; $f'(1)$.
2. Lire le sens de variation de f .
Faire son tableau de variations.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ puis l'équation $f(x) = 4$.
4. Donner, à l'aide du graphique, une valeur approchée à 0,5 près de la solution α de l'équation $f(x) = 0$
En déduire, selon les valeurs de x , le signe de $f(x)$.
5. Hachurer l'ensemble délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
Donner, en unité d'aire, une valeur approchée à une unité près, de l'aire de cet ensemble.

Partie B

L'étude de cette partie consiste à vérifier par le calcul certains résultats de la partie précédente.

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ par : $f(x) = 2x(1 - \ln x) + 1$

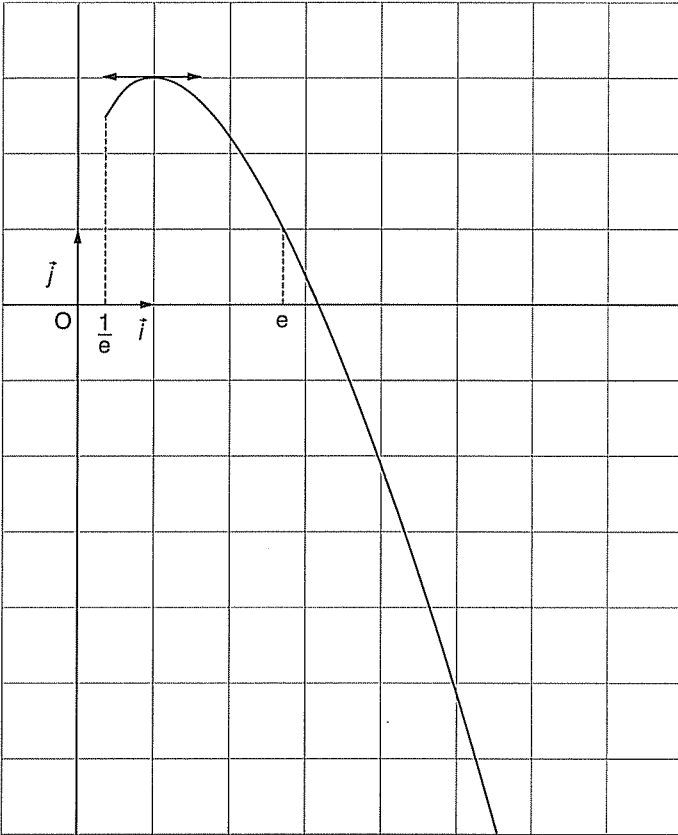
et représentée par la courbe C donnée dans la partie A.

1. Donner la valeur exacte de $f(1)$; $f(e)$; $f\left(\frac{1}{e}\right)$; $f(e^2)$.
2. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la dérivée de f et étudier son signe.
4. Établir le tableau de variations de f .
5. Trouver une équation de la tangente à C au point d'abscisse e et construire cette tangente sur le graphique.
6. Résoudre sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$, par le calcul, l'équation $f(x) = 1$.

7. a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ par :

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + x.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.



b. Calculer l'aire exacte, exprimée en unité d'aire, de la partie de plan délimitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. Exprimer cette aire en cm^2 puis en donner une valeur approchée à 0,1 près (en cm^2).

FONCTIONS EXPONENTIELLES

100**Problème**

Série STT (CG, IG), 2000

Partie A – Lecture graphique

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

La courbe C représentée ci-contre représente une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ae^{2x} + be^{-x},$$

où a et b sont deux réels à déterminer.

On sait que C passe par $A(0; 3)$ et qu'en ce point, la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

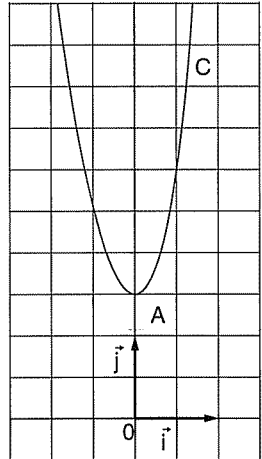
1. À l'aide du graphique, déterminer le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .

2. Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 6$, et un encadrement de chacune de ces solutions par deux entiers consécutifs.

3. En justifiant brièvement, résoudre graphiquement :

a. l'équation $f'(x) = 0$;

b. l'inéquation $f'(x) \leq 0$; (f' désigne la fonction dérivée de f .)

**Partie B – Détermination des réels a et b**

1. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction des réels a et b .

2. Lire sur le graphique $f(0)$ et $f'(0)$.

3. En déduire un système de 2 équations à 2 inconnues.

Calculer les valeurs de a et de b .

Partie C – Étude d'une fonction et calcul d'une aire

On suppose que f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$ et que la courbe C donnée dans la partie A, est effectivement sa représentation graphique.

1. Déterminer en justifiant :

a. la limite de f en $+\infty$.

b. la limite de f en $-\infty$.

2. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $e^{3x} - 1 \geq 0$.

b. Montrer que : $f'(x) = 2e^{-x}(e^{3x} - 1)$.

- c. En déduire le signe de $f'(x)$.
 d. En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
 3. a. Calculer une primitive de f .
 b. Montrer que :

$$\int_0^{\ln 2} f(x) dx = \frac{5}{2}.$$

101

Exercice

Série STL (BGB), 2000

Après absorption, l'alcool se répartit dans les liquides du corps, en particulier dans le sang, où il est dégradé et évacué.

À l'instant t , on note $q(t)$ la quantité d'alcool encore présente dans les liquides du corps, avec t exprimé en minutes et $q(t)$ en moles d'alcool.

On admet que sur l'intervalle $[0 ; 400]$, l'expression de $q(t)$ en fonction de t est :

$$q(t) = 1,2 - 2,9 \cdot 10^{-3}t - 1,2e^{-0,17t}.$$

1. Vérifier que $q(0) = 0$.
 2. a. Montrer que la fonction q' dérivée de q vérifie

$$q'(t) = 0,204e^{-0,17t} - 2,9 \cdot 10^{-3}.$$

b. Montrer que l'équation $q'(t) = 0$ admet une unique solution t_0 .
 Calculer une valeur approchée, au centième près, de t_0 et de $q(t_0)$.

c. Résoudre sur l'intervalle $[0 ; 400]$ l'inéquation $q'(t) \geq 0$.

En déduire les variations de la fonction q sur cet intervalle et dresser son tableau de variations.

3. Tracer, dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction q
 Unités graphiques :

- 1 cm pour 20 minutes sur l'axe des abscisses ;
- 10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

4. Déterminer graphiquement l'instant t_1 à partir duquel la quantité d'alcool redevient inférieure à 0,44 mole (cette quantité correspond pour cette personne à un taux d'alcoolémie de 0,5 g d'alcool par litre).

102

Problème

Série STT (CG, IG), 1998

Partie A

Soit le polynôme $P(X) = (X - 3)^2$.

1. Développer $P(X)$.
 2. En déduire :
 a. la résolution dans \mathbb{R} de $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$;
 b. le signe de $e^{2x} - 6e^x + 9$.

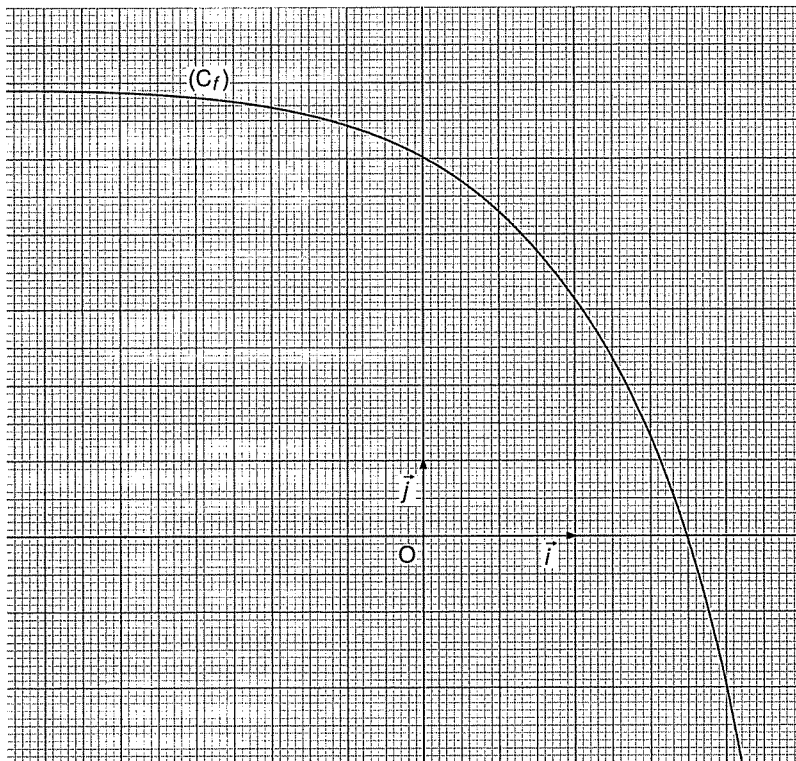
Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 6 - e^x$ et g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 9e^{-x}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :

- 2 cm sur l'axe des abscisses,
- 1 cm sur l'axe des ordonnées.

La courbe C_f est donnée ci-après.



- Déterminer la limite de g en $-\infty$.
 - Déterminer la limite de g en $+\infty$. En déduire que C_g admet une asymptote.
 - Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g .
Étudier le signe de $g'(x)$ et dresser le tableau de variations de g .
- Démontrer que, pour tout réel x , $g(x) - f(x) = \frac{e^{2x} - 6e^x + 9}{e^x}$.
 - À l'aide de la partie A, démontrer que les courbes C_f et C_g se coupent au point I de coordonnées $(\ln 3 ; 3)$.
 - À l'aide de la partie A, déterminer la position relative de C_f et C_g .

3. Démontrer qu'au point I les deux courbes C_f et C_g ont la même tangente T.
 4. Tracer la droite T ainsi que C_g sur le graphique contenant déjà la courbe C_f .
 5. a. Déterminer la valeur exacte, en cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 3$.
 - b. Déterminer la valeur exacte en cm^2 , de l'aire de la partie du plan limitée par C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations en $x = 0$ et $x = \ln 3$.
 - c. En déduire la valeur exacte cm^2 de l'aire de la partie du plan limitée par C_f et C_g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 3$.
- Donner une valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près.

103

Problème

Série STI (GE, GET, GO), 2000

Dans ce problème :

- I désigne l'intervalle $]0 ; +\infty[$;
- f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1} ;$$

- f' désigne la fonction dérivée de la fonction f ;
- \mathcal{C}_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I : $f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.

b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe \mathcal{C}_f .

2. a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I : $f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$.

b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de $f'(x)$.

En déduire le sens de variations de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, $f(x) > 0$.

3. a. Résoudre, dans l'intervalle I, l'équation, d'inconnue x , $f(x) = \frac{9}{2}$.

b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite dont une

équation est $y = \frac{9}{2}$.

(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

Partie B

Soit la fonction g définie, pour tout x de l'intervalle I , par : $g(x) = e^x + 1$.

On note \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy) .

\mathcal{C}_g est donnée sur le graphique ci-après.

On note h la fonction définie, pour tout x de l'intervalle I , par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

1. a. Étudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de $h(x)$; en déduire la position de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la courbe \mathcal{C}_g .

b. Résoudre dans l'intervalle I , l'inéquation, d'inconnue x , $h(x) \leq 0,05$.

On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.

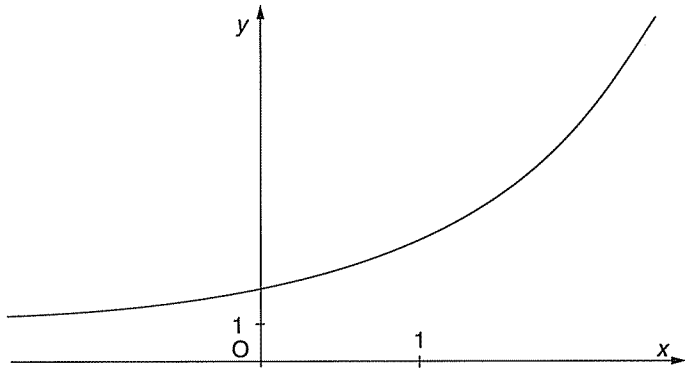
Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g sont indiscernables.

c. Tracer, avec soin, la courbe \mathcal{C}_f sur le graphique ci-après.

2. Montrer que, pour tout x de I : $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$;

en déduire une fonction primitive de h sur I .

3. Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C}_f , la courbe \mathcal{C}_g et les droites d'équations respectives $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$. (Exprimer le résultat en cm^2 .)



104

Problème

Série STI (GO), 1999

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} - 4e^x.$$

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité :

- 5 cm sur l'axe des abscisses,
- 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Pour établir la limite en $+\infty$, on pourra transformer l'expression de $f(x)$ en la factorisant par e^x .
- b. Dédire de la question précédente que C admet une asymptote D que l'on précisera.
2. a. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} . Dresser le tableau de variations de f .
- b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes du repère ; on notera A le point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
- c. Établir une équation de la tangente T à C au point A .
- d. Tracer C , D et T .
3. a. Résoudre l'équation $f(x) = -3$.
- b. Soit m un nombre réel. Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.
- c. Résoudre graphiquement, en rédigeant la méthode, l'inéquation : $f(x) > -3$.
4. a. Déterminer une primitive F de f .
- b. On admet que sur $[-2 ; 0]$ C est située en-dessous de D . En déduire l'expression de l'aire s de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$, par la courbe C , et par la droite D , puis calculer s en cm^2 .

105

Problème

Série STT (CG, IG), 1998

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 2}$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1. Calculer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?

2. Montrer que $f(x) = 2 - \frac{6}{e^x + 2}$.

Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que $f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 2)^2}$.

En déduire son signe. Établir le tableau de variations de f .

4. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5. Tracer \mathcal{C} et ses asymptotes.

6. a. Calculer la dérivée g' de la fonction g définie par $g(x) = \ln(e^x + 2)$.

b. Montrer que $f(x) = 3g'(x) - 1$ et en déduire une primitive F de f sur \mathbb{R} .

c. Calculer en cm^2 la valeur exacte de l'aire \mathcal{A} de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$, l'axe des abscisses et \mathcal{C} . En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

106**Exercice**

Série STL (BGB), 1999

Lors de la diffusion d'une substance S entre deux milieux non isolés A et B, séparés par une membrane poreuse, la quantité Q (en cg) de substance S présente dans le milieu A varie en fonction du temps t (en h) suivant une expression de la forme :

$$Q(t) = 10(e^{-t} - e^{-5t}).$$

1. Calculer la limite de la fonction Q lorsque t tend vers $+\infty$.
2. On appelle C la courbe représentative de la fonction Q dans un repère orthogonal. Unités graphiques :
 - 4 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
 - 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.
 C admet-elle une asymptote ? Si oui, préciser son équation.
3. a. Montrer que la fonction Q' dérivée de Q vérifie :

$$Q'(t) = 10e^{-5t}(5 - e^{4t}).$$

- b. Déterminer le réel α tel que $Q'(\alpha) = 0$.
Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée au centième le plus proche, de $Q(\alpha)$.
- c. Résoudre dans $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $Q'(t) \geq 0$. En déduire le tableau de variations de la fonction Q.
4. Construire la courbe C sur l'intervalle $[0 ; 10]$.
5. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps durant lequel $Q(t) \geq 4$.

107**Exercice**

Série STL (GM, GC, GEN), 1999

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On note H le point de coordonnées $(\ln 3 ; \ln 3)$.

Partie A

Soient a et b deux nombres réels. On désigne par g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

1. Calculer $g'(x)$.
2. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de la fonction g passe par le point H et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B

On se propose d'étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$.

1. Vérifier que, pour tout réel x , on a : $f(x) = x - 2 + \frac{12}{e^x + 3}$.
2. En utilisant l'une des deux écritures de $f(x)$, déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Démontrer que les droites D_1 d'équation $y = x - 2$ et D_2 d'équation $y = x + 2$, sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de la fonction f .
Préciser la position de C par rapport à chacune des droites D_1 et D_2 .
4. Calculer $f'(x)$; montrer que, pour tout réel x , $f'(x) \geq 0$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
5. Construire les droites D_1 , D_2 et la courbe (C) .

Partie C

1. Déterminer une primitive de la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}.$$

2. En déduire la primitive de la fonction f qui prend la valeur 2 pour $x = 0$.

108

Problème

Série STT (CG, IG), 1998

Le plan est muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm).

La courbe C représentée ci-après est la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

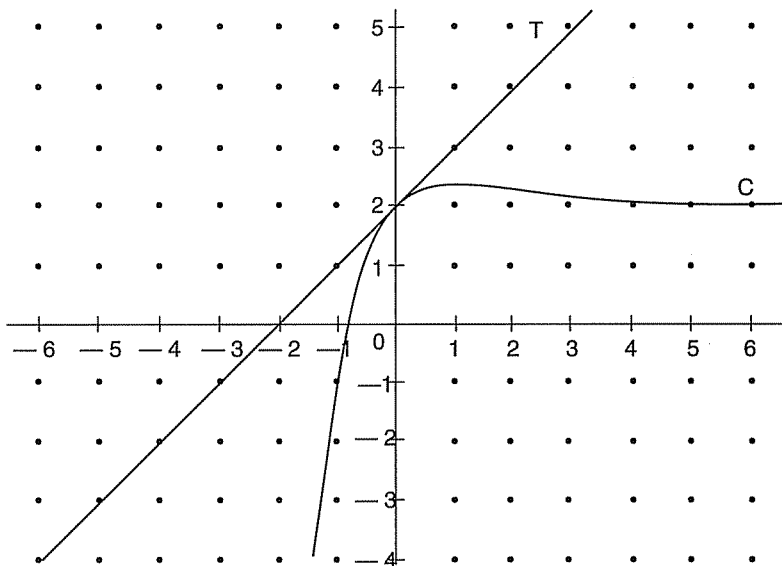
$$f(x) = a + bxe^{-x} ;$$

où a et b sont deux réels.

La droite T est la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

A – Expression de f

1. Calculer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b .
2. Lire sur le graphique $f(0)$ et $f'(0)$.
3. Déduire de 1 et 2 la valeur de a et celle de b .
Dans la suite du problème on prend $f(x) = 2 + xe^{-x}$.



La partie A est, dans une large mesure, indépendante de la partie B.

B – Variation de f

1. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}(1-x)$.
Étudier le signe de $f'(x)$. En déduire les variations de f .
2. Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de f en $-\infty$.
3. Déterminer, en justifiant vos calculs, la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

(On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$.)

4. Donner le tableau de variations de f .

C – Calcul d'une aire

1. Démontrer que la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = -(x+1)e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^{-x}$.
En déduire une primitive de f sur \mathbb{R} .
2. Déterminer l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=2$. On donnera d'abord la valeur exacte de cette aire, puis une valeur arrondie à deux décimales.

109

Problème

Série STI (GM, GMA), 1999

Partie A – Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x^2 + x - 1)e^{-x}.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. En développant l'expression $f(x)$, calculer la limite de f en $+\infty$. (On rappelle que, si $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$.)

b. En déduire que \mathcal{C} admet une asymptote dont on précisera une équation.

2. a. Montrer que la fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par : $f'(x) = -2(x-2)\left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$.

b. Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe \mathcal{C} et l'axe des abscisses.

4. Tracer les tangentes à \mathcal{C} aux points de \mathcal{C} d'abscisses $-\frac{1}{2}$ et 2 de la courbe \mathcal{C} .

Partie B – Calcul d'aire

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$ par :

$$F(x) = (-2x^2 - 5x - 4)e^{-x}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-1 ; +\infty[$.

2. Calculer l'aire, exprimée en cm^2 , de la partie du plan délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = 4$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur décimale approchée à 1 mm^2 près par défaut.

110

Problème

Série STT (CG, IG), 2000

Partie A

L'objectif de cette partie est l'étude du signe d'un polynôme du second degré.

1. Pour tout nombre réel x , on pose $P(x) = x^2 + 4x + 3$.

Résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

2. a. Vérifier que $P(x) = (x + 1)(x + 3)$.

b. Déterminer, en fonction de x , le signe de $P(x)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude d'une fonction. Seule la question **B2.b.** dépend de la partie **A**.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f(x) = (x+3)^2 e^{-x}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$

b. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{6x}{e^x} + \frac{9}{e^x}$.

c. Donner $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$, puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. a. Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x) = -P(x)e^{-x}$.

b. À partir du signe de $P(x)$ trouvé en partie **A**, étudier le signe de $-P(x)e^{-x}$. En déduire le tableau de variations de f .

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2}):

x	-3,5	-3	-2	-1	0	1	2	3	3,5
$f(x)$									

4. Tracer la courbe représentative C de f , dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $I = [-3,5; 3,5]$. (Unité graphique : 1 cm).

Partie C

L'objectif de cette partie est l'étude d'une aire liée à la fonction étudiée en partie **B**.

1. On considère la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (-x^2 - 8x - 17)e^{-x}$. Montrer que F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2. a. Hachurer sur le graphique de la question **B.4.** le domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=3$.

b. Calculer l'aire \mathcal{A} , exprimée en cm^2 , de la partie hachurée. On donnera la valeur exacte de \mathcal{A} et sa valeur décimale arrondie à 10^{-1} .

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

111

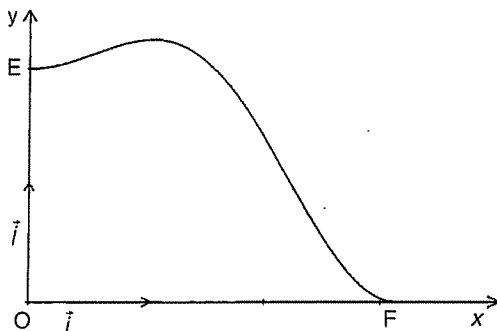
Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1996

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique : 2 cm.
L'arc EF ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur

l'intervalle $[0 ; \pi]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$.

Les points E et F ont pour coordonnées : E(0, 2) et F(π , 0).



1. a. Déterminer la dérivée f' de f et montrer que $f'(x) = (\sin x)(2 \cos x - 1)$.
- b. Résoudre, dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, l'équation :

$$(\sin x)(2 \cos x - 1) = 0.$$

Quelles sont les solutions de cette équation dans l'intervalle $[0 ; \pi]$?

- c. Interpréter géométriquement les résultats obtenus en a. et b.

2. a. Déterminer une primitive de f .

- b. On appelle S l'aire exprimée en cm^2 du domaine plan limité par l'arc EF, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte de S puis en donner l'arrondi au mm^2 .

112

Exercice

Série STL (PL), 1997

1. Soit a et b deux nombres réels.

En utilisant les formules d'addition relatives à $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$, montrer que :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

2. La différence de potentiel, exprimée en volts, entre deux points d'un circuit est donnée en fonction du temps, exprimé en secondes, par :

$$u(t) = 60 \sin \left(100\pi t + \frac{\pi}{6} \right).$$

L'intensité, exprimée en ampères, est donnée par :

$$i(t) = 5 \sin (100\pi t).$$

La puissance instantanée consommée dans le circuit, exprimée en watts, est donnée par :

$$p(t) = u(t) i(t).$$

a. Montrer que les fonctions u et i sont périodiques de période $T = \frac{1}{50}$.

b. Transformer l'écriture de $p(t)$ à l'aide de la question 1.

c. Calculer la valeur moyenne de la fonction p sur l'intervalle $[0, T]$.

En donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-1} près, en watts.

113**Exercice**

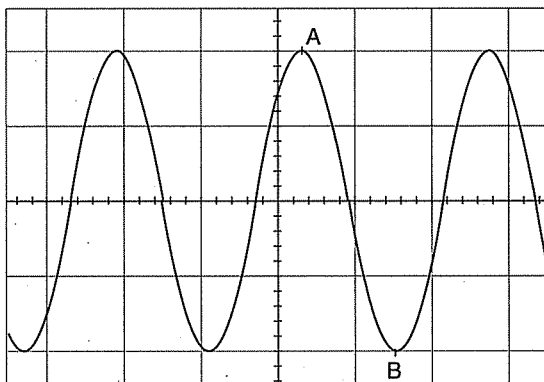
Série STI (GE, GET), 1996

Les deux questions de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

1. La figure ci-dessous schématise l'écran d'un oscilloscope que l'on a connecté à un générateur de tension périodique dont les caractéristiques sont inconnues. On veut déterminer la fonction U qui donne la tension $U(t)$ à l'instant t (t réel), sachant qu'elle est de la forme : $U(t) = a \sin(\omega t + \varphi)$, où a et ω sont des nombres réels strictement positifs et φ est un élément de $]-\pi, \pi[$.

On rappelle que la période T de U est égale à $\frac{2\pi}{\omega}$.

$U(t)$ est exprimée en volts et t en millisecondes.



L'oscilloscope est réglé de la manière suivante :

- sensibilité horizontale : 1 ms par centimètre ;
- sensibilité verticale : 1 V par centimètre.

Sur l'écran, on mesure les coordonnées des points A et B (voir ci-dessus) :

A(0,3 ; 2) et B(1,5 ; -2).

La fonction U est donc maximale pour $t = 0,3$ et minimale pour $t = 1,5$.

À l'aide des coordonnées des points A et B, déterminer le coefficient a, la période T et la valeur de φ .

Donner l'expression de $U(t)$ avec les valeurs ainsi trouvées.

2. On considère maintenant la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(t) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right).$$

a. Calculer la valeur moyenne U_m de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1,2]$.

b. Calculer la valeur moyenne J de la fonction f^2 , carré de la fonction f , sur l'intervalle $[0 ; 1,2]$.

Calculer la tension efficace $U_{eff} = \sqrt{J}$.

114 Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1995

Un triangle ABC isocèle, de sommet principal A, est inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. H est le pied de la hauteur issue de A.

Soit α la mesure de l'angle en radians \widehat{HOB} ; on suppose $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

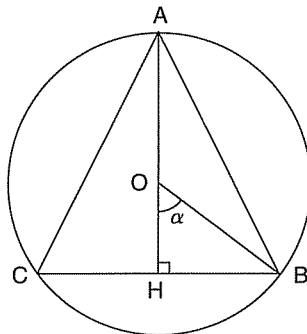
1. a. Exprimer BC et AH en fonction de α .
- b. En déduire, en fonction de α , l'aire du triangle ABC.

2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(\alpha) = \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Calculer la dérivée f' de f et montrer que, pour tout réel α appartenant à

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f'(\alpha) = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1$.



3. a. Vérifier l'égalité :

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = (2 \cos \alpha - 1) (\cos \alpha + 1)$$

b. Déterminer le signe de $\cos \alpha - \frac{1}{2}$ suivant les valeurs de α , pour α appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire le signe de $f'(\alpha)$ suivant les valeurs de α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$).

d. Établir le tableau de variations de la fonction f .

4. Montrer qu'il existe une valeur de α , que l'on déterminera, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale. Préciser ce maximum.

Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

115

Exercice

Série F₁₀ (STI GO), 1995

Le but de l'exercice est de rechercher le volume maximal d'un cylindre inscrit dans une demi-sphère.

Dans l'exercice, l'unité utilisée est le mètre.

Les figures sont représentées à l'échelle $\frac{3}{100}$ (3 cm pour 1 m).

On considère un cylindre droit de hauteur h inscrit dans une demi-sphère de rayon $R = 1$ (voir figures). Le cylindre et la demi-sphère ont même plan de base P, même axe de symétrie (Oy) ; la demi-sphère et le cylindre se coupent selon un cercle (C) de rayon r .

Soit M un point de ce cercle (C) et H la projection orthogonale de M sur P.

On désigne par α la mesure en radians de l'angle \widehat{HOM} , $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. Exprimer la hauteur h et le rayon du cylindre en fonction de α .

2. Démontrer que le volume du cylindre inscrit dans cette demi-sphère s'exprime à l'aide de α par la fonction f définie sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

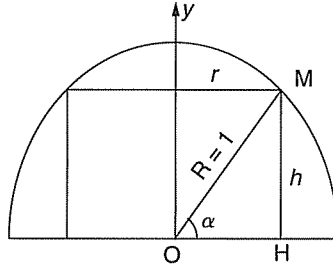
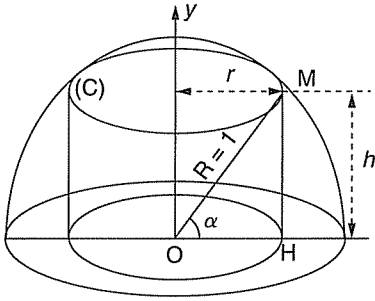
$$f(\alpha) = \pi (\sin \alpha - \sin^3 \alpha).$$

3. a. Calculer la dérivée f' de f .

b. Montrer qu'il existe une valeur α_0 de α pour laquelle f admet un maximum et

que $\sin \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. En déduire les dimensions h et r du cylindre de plus grand volume inscrit dans cette demi-sphère, et calculer la valeur exacte en m³ de son volume.



116

Exercice

Série F₉ (STI, GEN), 1993

1. Étude dans $[0, \pi]$ de l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ (1).

a. Soient Γ et Δ les courbes représentatives respectives des fonctions $[0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \frac{x}{2}$, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ que l'on choisira. Dessiner soigneusement Γ et Δ .

En examinant les deux courbes, expliquer brièvement pourquoi l'équation (1) possède deux solutions dont l'une est le réel 0.

b. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$.

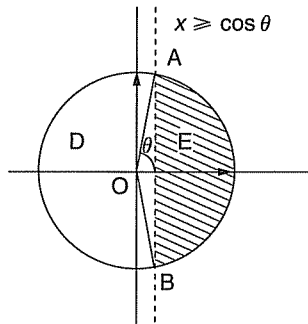
Calculer $f'(x)$ et donner son signe. Dresser le tableau de variations de f .

c. En énonçant le théorème utilisé, montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet dans l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ une unique solution, x_0 . Donner un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2} .

2. Application

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm). Les angles seront exprimés en radians, et les aires en cm^2 .

Soient $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, A et B les points de coordonnées respectives $(\cos \theta, \sin \theta)$ et $(\cos \theta, -\sin \theta)$, D le disque de centre O et de rayon 1, et E l'ensemble des points de D d'abscisse supérieure ou égale à $\cos \theta$.



a. Calculer, en fonction de θ , l'aire T du triangle BOA.

b. Calculer, en fonction de θ , l'aire S de E (on pourra d'abord calculer $S + T$).

c. On pose $\eta = 2\theta$. Pour quelle valeur de η a-t-on $S = T$?

117**Exercice**Série F₁₀ (STI GO), 1997

1. Démontrer, grâce aux formules d'Euler, l'égalité :

$$\sin x \sin 2x = \frac{1}{2} (\cos x - \cos 3x).$$

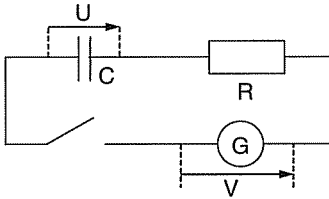
2. En déduire une primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \sin x \sin 2x,$$

puis la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx$.

RÉSOLUTION APPROCHÉE D'ÉQUATIONS**118****Exercice**

Série STI (GE, GET), 1997



Le circuit ci-contre est constitué d'un condensateur de capacité C, d'un résistor de résistance R, d'un générateur G et d'un interrupteur.

On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$ et le générateur G délivre alors une tension V. La tension U aux bornes du condensateur est alors solution, sur l'intervalle $[0, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$U(t) + RC U'(t) = V(t). \quad (1)$$

Dans toute la suite, on prend :

$C = 75 \cdot 10^{-6}$ farads, $R = 2 \cdot 10^4$ ohms, $V(t) = 6e^{-\frac{2}{3}t}$ où t est exprimé en secondes.

De plus, la charge initiale du condensateur impose la condition :

$$U(0) = \frac{1}{3} V(0). \quad (2)$$

L'objet de l'exercice est de montrer que la fonction U définie sur l'intervalle

$[0; +\infty[$, par $U(t) = (4t + 2) e^{-\frac{2}{3}t}$ vérifie les deux conditions (1) et (2), et d'utiliser ce résultat.

1. Calculer $U(0)$ et vérifier que U satisfait la condition (2).

2. On désigne par U' la fonction dérivée de U.

a. Démontrer que $U'(t) = \frac{8}{3} (1 - t) e^{-\frac{2}{3}t}$.

b. Prouver que la fonction U est une solution de l'équation différentielle (1).

3. On donne le tableau de variations de U :

t	0	1	$+\infty$	
$U'(t)$		+	0	-
$U(t)$	2	$6e^{-\frac{2}{3}}$		0

a. Démontrer que l'équation $U(t) = 10^{-3}$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 20[$. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude une seconde.

b. L'appareil mesurant $U(t)$ ne détecte pas les tensions inférieures à 10^{-3} volts. Pour quelles valeurs de t ne détecte-t-il plus la tension $U(t)$?

119

Problème (partiel)

Série STL (PL), 2000

Partie A

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = -2 \ln x + ax^2 + bx, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Sachant que la courbe \mathcal{C} passe par le point $A\left(1 ; -\frac{13}{2}\right)$ et que le coefficient directeur de la tangente en A est égal à -6 , déterminer les valeurs des nombres a et b .

2. Pour la suite du problème, on prendra $f(x) = -2 \ln x + \frac{5}{2}x^2 - 9x$.

a. Déterminer la limite en 0 de la fonction f .

Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?

b. Vérifier que l'on peut écrire :

$$f(x) = x^2 \left(-2 \frac{\ln x}{x^2} + \frac{5}{2} - \frac{9}{x} \right).$$

En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f .

Partie B

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. a. Démontrer que, dans l'intervalle $[3 ; 4]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée x_0 .
- b. Donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 0,01 de x_0 .
3. Déterminer une équation de la droite \mathcal{D} tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
4. Tracer dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ la droite \mathcal{D} et la courbe \mathcal{C} .

120

Problème

Série STI (GM, GC, GEN), 1997

On appelle f la fonction numérique de la variable réelle définie sur $]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{2(x+2)}.$$

On note C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A – Étude de la fonction f

1. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 .
En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C .
Donner une équation de cette asymptote.
2. a. Étudier la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- b. Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que, pour tout x élément de $]-2, +\infty[$, on ait :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}.$$

- c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe C .
Étudier la position relative de la courbe C et de la droite Δ .
3. a. Montrer que la dérivée f' de la fonction f peut s'écrire de la façon suivante :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

- b. En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de cette fonction sur $]-2, +\infty[$.
4. Représenter sur un même graphique les asymptotes D et Δ et la courbe C .

Partie B – Résolution de l'équation $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

1. a. Représenter avec précision sur le même graphique la courbe représentative H de la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{l'étude de la fonction } h \text{ n'est pas demandée}).$$

b. Déterminer graphiquement une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de l'équation $f(x) = h(x)$.

2. a. Démontrer que, sur $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = h(x)$ est équivalente à $x^3 + 4x^2 - 4 = 0$.

b. On appelle g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 + 4x^2 - 4.$$

Calculer la dérivée g' de la fonction g . En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[0,5; 1]$. (La représentation graphique de la fonction g n'est pas demandée.)

c. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près par défaut.

Partie C – Encadrement de la valeur d'une intégrale par lecture graphique

1. On note $J = \int_0^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^2 h(x) dx$.

Hachurer sur le graphique la partie du plan dont le nombre J mesure l'aire, en unités d'aire.

2. Parmi les intervalles proposés ci-dessous, indiquer après lecture graphique et sans justification celui qui contient le nombre J :

$$\left[0, \frac{1}{2}[, \quad [1, 2[, \quad [2, 5[, \quad [5, 10[.$$

121

Problème (partiel)

Série STI (GE, GET, GO), 2000

Partie A – Exploitation d'un graphique

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$, dont la représentation graphique C obtenue sur l'écran d'une calculatrice est donnée sur la figure 1 ci-après. On précise que la courbe C ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite Δ qui est parallèle à l'axe des abscisses comme asymptotes.

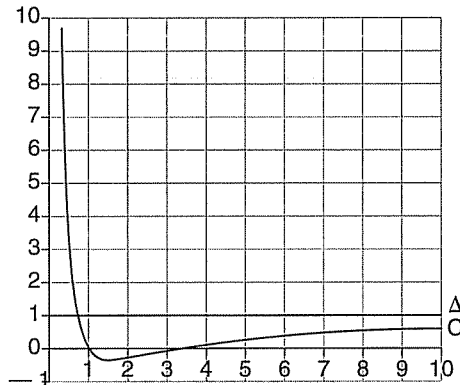


Figure 1

1. À partir de cette représentation graphique, déterminer :
 - a. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0 ;
 - b. la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
2. dresser un tableau donnant le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On admet que : $g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2}$

où a , b et c sont trois nombres réels.

3. En calculant la limite de $\frac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ lorsque x tend vers l'infini, montrer que : $a = 1$.
4. Lire $g(1)$ et $g(3)$ sur le graphique et en déduire un système de deux équations permettant d'obtenir b et c .
5. Résoudre ce système et exprimer $g(x)$ en remplaçant a , b et c par leurs valeurs.

Partie B – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = -\frac{3}{x} - 4 \ln x + x$.

1. a. En mettant x en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$.
- b. En mettant $\frac{1}{x}$ en facteur dans l'expression de $f(x)$, montrer que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à $-\infty$. (On rappelle que $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = 0$.)
2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = g(x)$.
- b. Utiliser les résultats de la partie A pour en déduire le tableau de variations de f .
- c. Calculer les valeurs exactes de $f(1)$ et $f(3)$.

3. En utilisant le tableau de variations de f , justifier que l'équation $f(x) = 0$:
- n'admet pas de solution dans l'intervalle $]0 ; 3[$;
 - admet une solution unique, notée x_0 , dans l'intervalle $[3 ; 10]$;
 - n'admet pas de solution dans l'intervalle $]10 ; +\infty[$.
4. Compléter le tableau ci-dessous et en déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0 .

x	9,15	9,16	9,17	9,18	9,19	9,20	9,21	9,22	9,23	9,24	9,25
$f(x)$											

On donnera des valeurs arrondies de $f(x)$ au millième près.

CALCUL INTÉGRAL

122

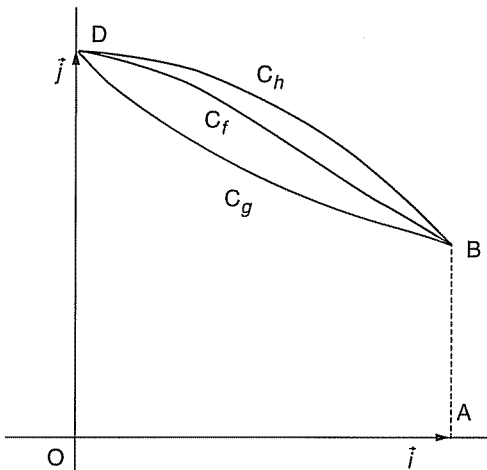
Exercice

Série STT (CG, IG), 1997

f , g et h sont trois fonctions définies sur le même intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} ; \quad g(x) = \frac{1}{1+x} ; \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1.$$

On appelle C_f , C_g et C_h les courbes représentatives respectives des fonctions f , g et h . Ces courbes sont données ci-dessous dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 5 cm.



1. Par lecture graphique, comparer $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ pour x élément de $[0 ; 1]$.

2. a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale J : $J = \int_0^1 g(x) dx$.

b. Calculer la valeur exacte de l'intégrale K : $K = \int_0^1 h(x) dx$.

3. Utiliser les résultats de la question 1. pour trouver un encadrement de l'intégrale I :

$$I = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ne pas chercher à calculer I .

4. a. Calculer l'approximation à 10^{-3} près par défaut de la moyenne arithmétique I_1 des deux nombres J et K .

b. Calculer l'aire T du trapèze $OABD$.

c. Sachant que la valeur exacte de I est $\frac{\pi}{4}$, quelle est, de I_1 et de T , la meilleure approximation de I ?

123

Exercice

Série STI (GE, GET), 1997

Soit $i(t) = 5 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ une intensité de courant variable en fonction du temps t .

1. Quelle est la période T de la fonction i ?

2. Résoudre, dans l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{50}\right]$, l'équation $i(t) = 0$.

3. Déterminer la valeur moyenne de i sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{50}\right]$.

4. Calculer la valeur efficace I_e de i . On utilisera la formule :

$$I_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt.$$

124

Problème

Série STT (CG, IG), 2000

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On désigne par I l'intervalle $[-4 ; 1]$. Toutes les représentations graphiques se feront dans ce repère.

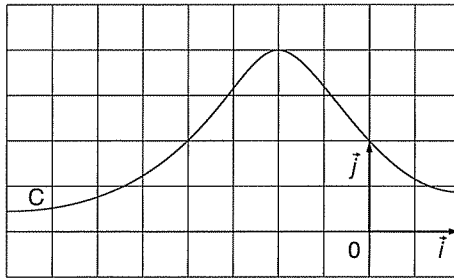
Partie A

On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2 + 1}$.

Résoudre dans I l'inéquation $f(x) \leq 2$, d'inconnue x .

En déduire que 2 est maximum de f sur I .

On donne sur le graphique ci-dessous la courbe représentative de f , notée C , dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.



Partie B

On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = e^{x+1} - x$, et on note Γ sa courbe représentative dans $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Résoudre dans I l'inéquation :

$$e^{x+1} - 1 > 0,$$

d'inconnue x .

2. Calculer $g'(x)$.

En déduire le sens de variation de la fonction g .

3. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse 0.

4. Représenter Γ .

5. Déterminer les primitives de g sur I .

Partie C

1. Déduire des deux études précédentes (partie A et partie B) que $g(x) \geq f(x)$ pour tout réel x de I .

2. On considère les intégrales :

$$A_1 = \int_{-4}^1 f(x) dx \quad \text{et} \quad A_2 = \int_{-4}^1 g(x) dx.$$

a. Calculer A_2 .

b. Comparer A_1 et A_2 sans calculer A_1 .

125**Exercice**

Série STI (GM, GC, GEN), 2000

Le but de l'exercice est de calculer les valeurs des intégrales I et J définies par :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x) \cos(2x) dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x) \cos(2x) dx.$$

1. Montrer que : $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx$ et $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(2x) dx$.

2. a. Calculer la valeur de $I + J$.

b. Justifier l'égalité $\cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4x))$ puis :

- déterminer une fonction primitive de la fonction f définie, pour tout x de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par $f(x) = \cos^2(2x)$;
- calculer la valeur de $I - J$.

3. En utilisant les résultats obtenus à la question 2., calculer les valeurs des intégrales I et J .

126**Problème**

Série STI (GM, GMA), 1997

La plan P est rapporté à un repère orthogonal $(Ox ; Oy)$ d'unités graphiques :

- 4 cm sur l'axe des abscisses,
- 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Tracer, sur une feuille de papier millimétré, dans le plan P rapporté au repère $(Ox ; Oy)$, sans étude préalable, mais avec grand soin, la courbe Γ d'équation :

$$y = e^x + 1.$$

Partie B

On considère la fonction f de la variable x définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}.$$

On note C sa courbe représentative dans le plan P .

1. a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^{-x}}$.

En déduire la valeur de la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Déterminer pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$ le signe de la différence $f(x) - (e^x + 1)$.

En déduire la position de la courbe C par rapport à la courbe Γ .

c. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. En déduire une équation d'une droite asymptote à la courbe C .

2. a. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$.
Vérifier que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $(e^x - 2)$.
- b. Établir le tableau de variations de f .
3. Sur la feuille de papier millimétré, tracer la courbe C dans le plan P rapporté au repère $(Ox; Oy)$.

Partie C

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - 1} dx ; \quad J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1} dx ; \quad K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx .$$

1. Montrer que $J = \ln 2$.
2. a. Calculer $J - I$, puis, en utilisant le résultat de la question C.1., en déduire la valeur de I (on donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}).
- b. Exprimer l'aire \mathcal{A} , en cm^2 , de la portion du plan P limitée par les deux courbes C et Γ , et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \ln 3$ (on donnera la valeur exacte).
3. a. Calculer $K - J$ puis, en utilisant le résultat de la question C.1., en déduire la valeur de K (on donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10^{-2}).
- b. Donner la valeur moyenne de f sur $[\ln 2; \ln 3]$ (on donnera la valeur exacte).

127

Exercice

Série STI (GE, GET), 1996

Le but de cet exercice est de trouver une valeur approchée de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx .$$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal.

1. Développer $(1+x^2)(1-x^2+x^4)$.

En déduire que pour tout réel x : $(1+x^2)(1-x^2+x^4) \geq 1$ et donc que :

$$1 - x^2 + x^4 \geq \frac{1}{1+x^2} .$$

2. On note A et B les points de la courbe C d'abscisses respectives 0 et $\frac{1}{2}$.

Vérifier qu'une équation de la droite (AB) est $y = 1 - \frac{2}{5}x$.

On admettra que sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ la courbe C est située au-dessus du

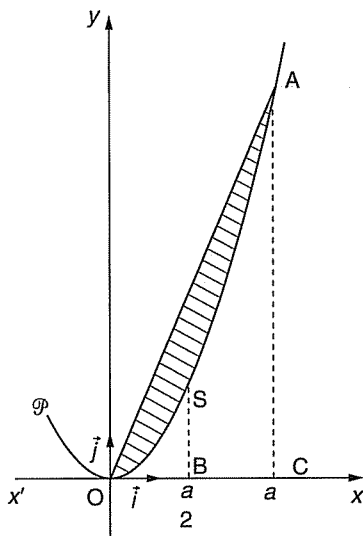
segment $[AB]$, c'est-à-dire que $\frac{1}{1+x^2} \geq 1 - \frac{2}{5}x$, pour tout x dans l'intervalle

$\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3. Soit $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^2 + x^4) dx$ et $K = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2}{5}x\right) dx$.

- Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que $K \leq I \leq J$.
- Déterminer la valeur exacte de J et la valeur exacte de K .
- Déterminer une valeur décimale approchée de I à 10^{-2} près.

CALCULS D'AIRES

128**Exercice**Série F₂-F₃ (STI GE, GET), 1993

\mathcal{P} est la parabole d'équation $y = x^2$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note A le point de \mathcal{P} d'abscisse a , a réel strictement positif, S le point de \mathcal{P} d'abscisse $\frac{a}{2}$.

On note \mathcal{A} l'aire de Γ_A , ensemble des points du plan limité par l'arc de parabole \widehat{OSA} et le segment $[OA]$. (Sur la figure on a hachuré Γ_A .)
On note \mathcal{B} l'aire du triangle OSA .

Le but de l'exercice est de montrer que le rapport $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ est constant lorsque le réel a varie dans $]0, +\infty[$.

1. Quelle est l'équation de la droite (OA) ?
2. Soit C la projection orthogonale de A sur $(x'x)$.
Soit B la projection orthogonale de S sur $(x'x)$.
Quelle est, en fonction de a , l'aire du triangle OCA ? L'aire du triangle OBS ?
L'aire du trapèze BCAS ?
En déduire \mathcal{B} en fonction de a .
3. Calculer en fonction de a l'aire \mathcal{A} .
4. Montrer la propriété cherchée.

129

Exercice

Série STT (CG, IG), 1997

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2}(x - e^x) + 3$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques :

- 1 cm sur l'axe des abscisses,
- 2 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.
- b. Montrer que la droite D d'équation $y = \frac{1}{2}x + 3$ est une asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.
- c. En écrivant, pour tout x réel non nul, $x - e^x = x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right)$, déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. a. Calculer la dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$.
- b. Dresser le tableau de variations de f .
3. Recopier et compléter le tableau suivant, en donnant pour chaque valeur de x une valeur décimale approchée de $f(x)$ à 10^{-2} près.

x	-4	-1	0	1	3
$f(x)$					

4. Soit la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x$.
 - a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de Δ et de C.
 - b. Étudier la position relative de Δ et C.
5. Tracer D, Δ , et C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
6. a. Calculer, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 6$.
b. En déduire, en cm^2 , une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des ordonnées et la droite Δ .

130**Exercice**Série F₁₂ (STI AA), 1993Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = e^x$.Soit g la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm, tracer les représentations graphiques C_1 et C_2 des fonctions f et g .2. Soit α l'abscisse du point d'intersection de C_1 et C_2 .On appelle E la portion du plan limitée par C_1 et C_2 , l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.Calculer en fonction de α l'aire A , exprimée en cm^2 , de E .On admet qu'une valeur approchée à 10^{-2} près de α est 0,57.Donner un arrondi de A à deux chiffres après la virgule.**131****Problème**Série F₁₂ (STI AA), 1998**Partie A**On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 20$$

a. Déterminer, en les justifiant, les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = -x^3 h(x)$.b. Étudier les variations de la fonction f . Dresser son tableau de variations.c. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.d. Calculer l'intégrale $I_1 = \int_0^5 f(x) dx$.**Partie B**On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b, c sont des nombres réels donnés.a. Déterminer les réels a, b et c pour que la parabole représentant la fonction g ait pour sommet le point $S(0; 10)$ et passe par le point $A(5; 0)$.b. Calculer l'intégrale $I_2 = \int_0^5 \left(-\frac{2}{5}x^2 + 10\right) dx$. (On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près.)**Partie C**Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, avec pour unités graphiques :

- 2 cm sur l'axe des abscisses,

• 0,5 cm sur l'axe des ordonnées. On tracera l'axe des abscisses dans la plus grande largeur de la feuille de papier millimétré.
 On appelle C_1 la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5]$, C_2 l'image de C_1 par la symétrie orthogonale d'axe $(O ; \vec{i})$ et P la parabole représentant la fonction g sur l'intervalle $[-5 ; +5]$.
 Tracer avec soin les courbes C_1 , C_2 et P .

Partie D

On souhaite réaliser un prospectus pour une association. Le prospectus est la région du plan limitée par les courbes C_1 et C_2 et par l'axe des abscisses. La partie située entre la parabole P et l'axe des abscisses est blanche et le reste du prospectus a un fond bleu.

En justifiant vos calculs, déterminer au mm^2 près :

- a. l'aire A_1 du prospectus,
- b. l'aire A_2 de la partie blanche,
- c. l'aire A_3 du fond bleu.

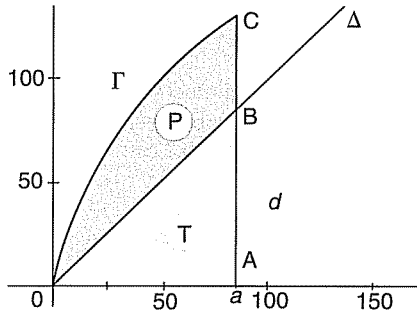
132 **Problème**
 Série STI (GE GET), 1999

La figure ci-contre représente la voile d'un bateau constituée par la réunion des parties P et T . Les distances sont exprimées en dm et le repère est orthonormal.

La courbe Γ représente la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x + \frac{5\,000x}{x^2 + 2\,500}$$

La droite Δ a pour équation $y = x$.



a étant un nombre appartenant à l'intervalle $[50 ; 100]$:

- P est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \leq x \leq a$ et $x \leq y \leq g(x)$;
- T est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq x$. La droite d d'équation $x = a$ coupe l'axe des abscisses, la droite Δ et la courbe Γ respectivement aux points A , B et C .

Le but du problème est de déterminer, si elle existe, la valeur de a pour laquelle les aires de P et de T sont égales.

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = g(x) - x$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction h . Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?
2. En utilisant le signe de $h(x)$ étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite Δ .

Partie B

On rappelle que la fonction h est définie par : $h(x) = \frac{5\,000x}{x^2 + 2\,500}$.

- Déterminer une primitive H de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- Montrer que l'aire $A(a)$ de la partie P est :

$$A(a) = 2\,500[\ln(a^2 + 2\,500) - \ln 2\,500].$$

- Calculer, en fonction de a , l'aire $B(a)$ de la partie T.

Partie C

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 2\,500 \ln(x^2 + 2\,500) - 2\,500 \ln 2\,500 - \frac{1}{2}x^2.$$

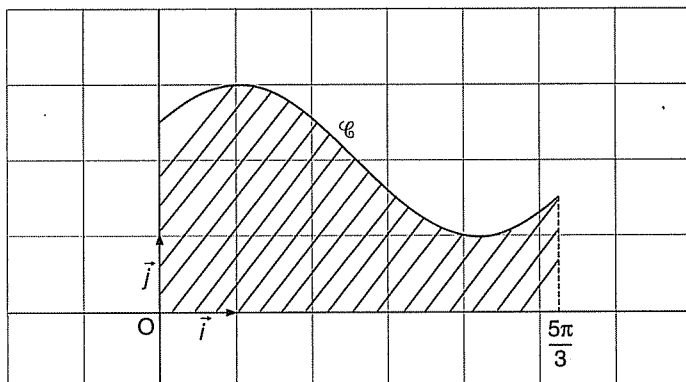
- Déterminer la fonction dérivée f' de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f (on admettra que la limite en $+\infty$ de f est $-\infty$.)
 - Dans le repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 1 cm pour 10 dm sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 dm² sur l'axe des ordonnées), construire la représentation graphique de la fonction f .
- Montrer que sur l'intervalle $[50 ; 100]$ l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution, notée α . Déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-1} contenant le réel α .
 - Quelle est l'interprétation géométrique de ce nombre α ?
 - Déterminer alors une valeur décimale approchée de l'aire de chacune des parties P et T en prenant 79,3 comme valeur décimale approchée de α .

CALCULS DE VOLUMES

133

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1999



\mathcal{C} est la courbe représentative, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique : 1 cm), de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{5\pi}{3}\right]$ par : $f(x) = 2 + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

1. a. Calculer $f'(x)$.

b. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

2. a. Soit g la fonction définie par $g(x) = [f(x)]^2$. Calculer $g(x)$.

b. Démontrer que $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$.

c. Déterminer alors une primitive G de g sur $\left[0 ; \frac{5\pi}{3}\right]$.

3. Calculer la valeur exacte de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{5\pi}{3}} \left[\frac{9}{2} + 4 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \right] dx.$$

4. La valeur exacte, en unités de volume, du volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine plan hachuré autour de l'axe des abscisses est $V = \pi \int_0^{\frac{5\pi}{3}} [f(x)]^2 dx$. Donner la valeur exacte, en cm^3 , de ce volume, puis sa valeur décimale arrondie à 1 mm^3 près par défaut.

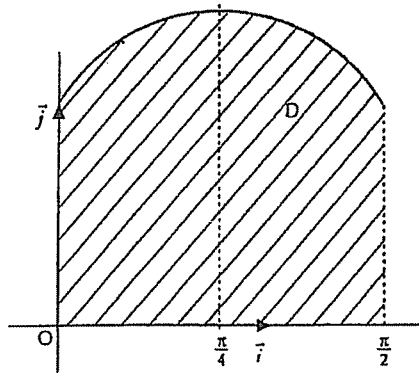
134 Exercice

Série STI (GE, GET, GO), 2000

1. a. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$, où y désigne une fonction définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} et où y'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction y .

b. Déterminer la solution particulière f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. (f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .)

2. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité graphique 4 cm.



Le but de cette question est de calculer le volume V engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, du domaine D hachuré sur le dessin ci-dessous. Dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ le domaine D est limité par :

- la courbe représentative de la fonction f trouvée à la question précédente ;
- l'axe des abscisses ;
- l'axe des ordonnées ;
- la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2} ; 0)$.

a. Montrer que, pour tout x réel : $[f(x)]^2 = 1 + \sin(2x)$.

b. Sachant que :

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)]^2 dx,$$

calculer la valeur exacte de V en unité de volume.

c. Donner la valeur de V arrondie au mm^3 . (Exprimer le résultat en cm^3 .)

135**Exercice**Série F₄ (STI, GC), 1994

Dans l'aménagement d'un carrefour, un terre-plein central de hauteur 1 m se compose d'une construction extérieure en béton et d'un volume intérieur cylindrique rempli de terre (cf. fig. 1).

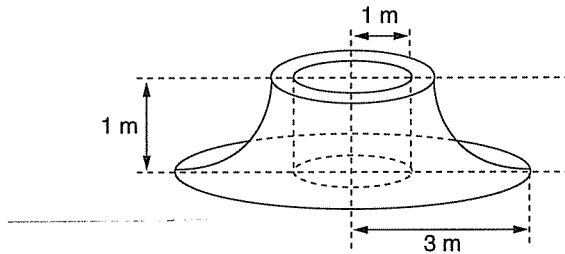


Figure 1

L'objectif de l'exercice est de calculer le volume V de béton nécessaire à la construction de ce terre-plein. Chaque volume sera donné en m^3 , en valeur exacte, puis en valeur approchée à 10^{-3} près.

1. Calculer le volume V_1 de terre nécessaire au remplissage du terre-plein.
2. Le volume total V_2 de l'édifice peut être considéré comme le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $(x'Ox)$ du domaine plan hachuré limité par une courbe C représentative d'une fonction f définie par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, par les axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$ et par la droite d'équation $x = 1$.

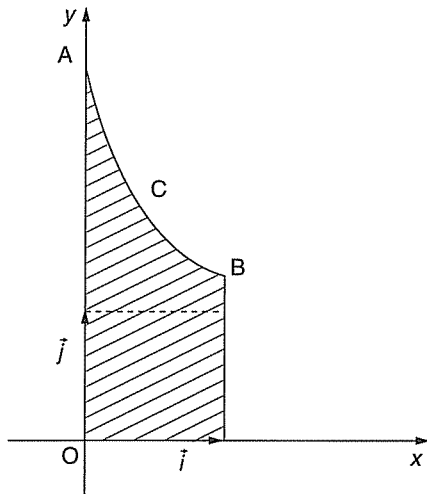
On rappelle que : $V_2 = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx$.

a. Déterminer a et b afin que la courbe C vérifie les conditions suivantes :

- C passe par le point $A(0 ; 3)$;
- la tangente à C en A a pour coefficient directeur $-\frac{5}{2}$.

b. Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9\right) e^{-2x}.$$



Vérifier que $g(x) = [f(x)]^2$, puis que la fonction G définie sur $[0, 1]$ par :

$$G(x) = \left(-\frac{1}{8}x^2 - \frac{13}{8}x - \frac{85}{16}\right) e^{-2x}$$

est une primitive de g .

c. En déduire le calcul de V_2 .

3. Calculer alors le volume V de béton nécessaire à la construction de ce terre-plein.

136**Exercice**

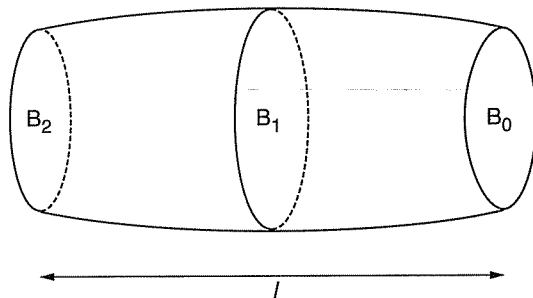
Série STI (GM, GC, GEN), 1998

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ par : $f(x) = 2 \cos\left(\frac{1}{5}x\right)$.

On appelle \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. a. Montrer que la fonction f est paire. Qu'en déduit-on pour la courbe \mathcal{C} ?
- b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $[0 ; \pi]$.
- c. Tracer la courbe \mathcal{C} .

2. La partie comprise sur le graphique entre la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\pi$ et $x = \pi$, est assimilée à une plaque. Cette plaque, en tournant autour de l'axe des abscisses, engendre un solide qui ressemble à un tonnelet.



On désigne par V le volume, en cm^3 , de ce solide.

Le mathématicien Képler a donné une formule permettant de calculer une valeur approchée de V :

$$V \approx \frac{l}{6} (B_0 + 4B_1 + B_2),$$

où l est la longueur du tonnelet, B_0 et B_2 les aires respectives des fonds, B_1 l'aire de la section à mi-longueur.

Calculer, à l'aide de cette formule, une valeur approchée du volume V (on donnera une valeur entière par excès, en cm^3).

Rappel : l'aire d'un disque de rayon R est $A = \pi R^2$.

3. La valeur exacte, en unité de volume, du volume de ce solide de révolution est :

$$V = \pi \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx.$$

a. En utilisant la formule $\cos^2 \theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$, linéariser $(f(x))^2$, puis calculer

la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_0^{\pi} (f(x))^2 dx$.

b. En déduire la valeur exacte, en cm^3 , de V .

En donner une valeur approchée au cm^3 par excès.

137

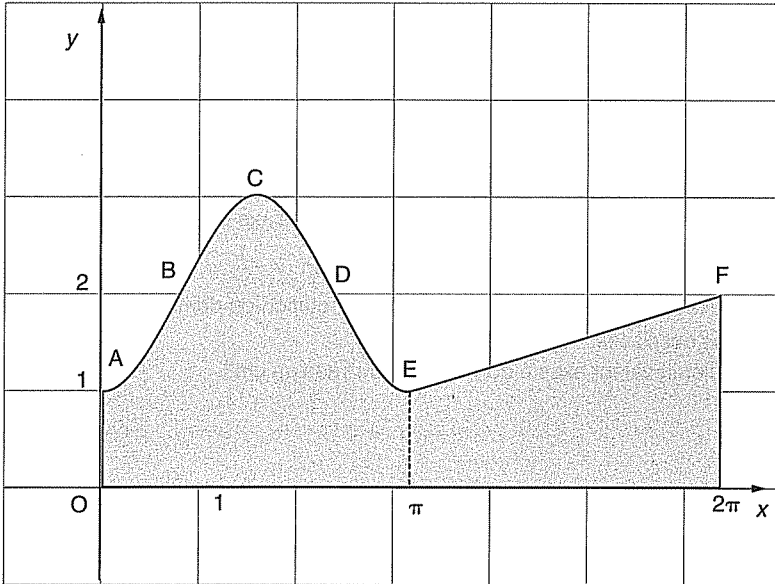
Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1998

Le but de l'exercice est de calculer le volume d'un vase.

Le vase est le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D, colorié sur le graphique ci-dessous, autour de l'axe des abscisses et vidé de son intérieur.

Le graphique a été réalisé dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 2 cm.



1. Soit f_1 la fonction définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par :

$$f_1(x) = 2 - \cos 2x .$$

a. Calculer $f_1'(x)$.

b. Reporter le tableau ci-après sur votre copie et le compléter pour déterminer les variations de f_1 .

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2x$			
$f_1'(x)$			
$f_1(x)$			

On admet que la courbe représentative de la fonction f_1 est la courbe C_1 passant par les points A, B, C, D, E du graphique ci-dessus dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Soit f_2 la fonction définie sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ et dont la courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est le segment de droite $[EF]$ du graphique ci-dessus. Calculer $f_2(x)$.

3. Le domaine D colorié sur le graphique est la réunion de D_1 et D_2 où :

- D_1 est le domaine limité par la courbe C_1 , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$,
- D_2 est le domaine limité par le segment $[EF]$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\pi$ et $x=2\pi$.

On rappelle que, si h est une fonction dérivable et positive sur $[a, b]$ et si E est le domaine limité par la courbe représentative de h , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ dans un repère orthonormé, alors le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de E autour de l'axe des abscisses est, en unités de volume :

$$V = \pi \int_a^b [h(x)]^2 dx.$$

a. Linéariser $(\cos 2x)^2$. En déduire en cm^3 la valeur exacte du volume V_1 engendré par la rotation du domaine D_1 autour de l'axe des abscisses.

b. Sachant que la droite (EF) a pour équation $y = \frac{1}{\pi} x$, calculer en cm^3 la valeur exacte du volume V_2 engendré par la rotation du domaine D_2 autour de l'axe des abscisses.

c. Calculer la valeur exacte du volume V du vase en cm^3 .

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 1^{er} ORDRE

138

Exercice

Série STL (CL), 1999

Soit $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t (t est exprimé en jours).

On admet que la fonction N de la variable positive t est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$, où λ est une constante réelle positive.

1. Déterminer $N(t)$ en fonction de λ , sachant que $N(0) = 10^9$.
2. Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié. Calculer la valeur exacte de λ .
3. Au bout de combien de jours le nombre de noyaux deviendra-t-il inférieur à 10^2 ?

139**Exercice**

Série STI (GE, GET), 1998

Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes. On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps ($t=0$) et, à cet instant, la température du conducteur est égale à 0°C . Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : \theta'(t) + 0,1\theta(t) = 2.$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = \theta(t) - 20$.

Montrer que f est une solution de l'équation différentielle : $(E_2) : y' + 0,1y = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E_2) .

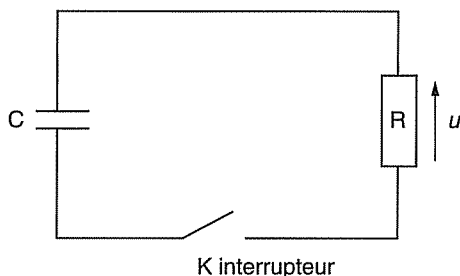
c. À l'aide des questions précédentes et sachant que $\theta(0) = 0$, montrer que : $\theta(t) = 20(1 - e^{-0,1t})$.

2. Calculer au bout de combien de temps la température du conducteur atteint 19°C .

3. Déterminer la limite de $\theta(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.

140**Exercice**

Série STL (PL), 1998



Un condensateur de capacité C , initialement chargé à une tension $u_0 = 10$ volts, se décharge à partir de l'instant $t_0 = 0$ à travers un circuit de résistance R .

Pour $t \geq 0$, on sait que la tension u est une fonction du temps, exprimé en secondes, solution de l'équation différentielle (E) :

$$RCu'(t) + u(t) = 0.$$

On prendra $C = 15 \cdot 10^{-5}$ farads et $R = 2 \cdot 10^4$ ohms.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).

b. Déterminer la fonction u solution de (E) vérifiant la condition initiale :

$$u(t_0) = u_0 = 10 \text{ volts.}$$

2. À partir de quel instant t_1 la tension $u(t)$ vérifiera $u(t) \leq \frac{1}{10} u_0$?

On donnera la valeur exacte de t_1 , puis sa valeur arrondie au dixième de seconde.

3. Calculer la valeur moyenne de la fonction u entre les instants t_0 et t_1 .

On en donnera la valeur exacte, puis une valeur arrondie au dixième de volt.

141**Exercice**

Série STI (GM, GC, GEN), 1998

On considère les équations différentielles suivantes :

$$y' + 2y = 0 \quad (E_1)$$

$$y' - 2y = 6 \quad (E_2),$$

où y est une fonction numérique de la variable x , définie et dérivable sur \mathbb{R} et y' est la dérivée de y .

Les questions 1 et 2 de cet exercice peuvent se résoudre de façon indépendante.

1. a. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E_1) telle que $f(0) = -2$.

b. Soit g la solution définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2x} - 3$.
Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E_2) .

2. On appelle C la courbe d'équation : $y = -2e^{-2x}$.

On appelle C' la courbe d'équation : $y = e^{2x} - 3$.

(On ne demande pas de tracer les courbes C et C' .)

a. Montrer que les abscisses des points d'intersection des courbes C et C' sont solutions de l'équation :

$$e^{4x} - 3e^{2x} + 2 = 0 \quad (E).$$

b. En posant $X = e^{2x}$, résoudre l'équation (E) .

c. En déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection des courbes C et C' .

142**Exercice**

Série STL (BGB), 1997

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

La destruction de cellules bactériennes par la chaleur peut être mise en évidence en chauffant à une température donnée, pendant des durées variables, une suspension de telles cellules et en dénombrant les survivants.

On désigne par $N(t)$ le nombre de survivants à l'instant t (exprimé en minutes).
On admet que N est une solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$X'(t) = ax(t),$$

où a est une constante qui dépend de la température de chauffage.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Préciser la solution $N(t)$ de (E) vérifiant les conditions suivantes :

$$N(0) = 10^5 \quad \text{et} \quad N(60) = 5\,000.$$

(On arrondira au centième la valeur trouvée pour a .)

Partie B

On suppose désormais que pour t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$

$$N(t) = 10^5 e^{-0,05t}.$$

On note C la courbe représentative de la fonction N dans le plan rapporté à un repère orthogonal avec pour unités graphiques :

- 1 cm pour 10 minutes sur l'axe des abscisses ;
- 2 cm pour 10^4 survivants sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de N sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on donnera des valeurs approchées à l'unité près) :

t	0	15	30	45	60	75	90	120
N(t)								

4. Construire C lorsque t varie de 0 à 120.
5. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de temps on peut estimer que le nombre de survivants est égal au dixième de la population initiale, qui était de 10^5 bactéries. Retrouver graphiquement ce résultat.

143**Exercice**

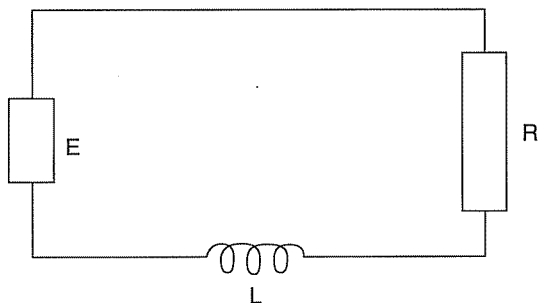
Série STI (GE, GET), 1999

Un circuit comprend en série un générateur de force électromotrice E , une bobine d'inductance L et une résistance R .

L'intensité du courant électrique i , exprimée en ampères, est fonction du temps t , exprimé en secondes, et est solution de l'équation différentielle (1) :

$$L i'(t) + R i(t) = E.$$

On donne $L = 0,2 \text{ H}$; $R = 100 \Omega$; $E = 10 \text{ V}$.



1. Écrire l'équation différentielle (1) en remplaçant L , R et E par leurs valeurs.

2. Résoudre l'équation différentielle (2) : $\frac{1}{5} y' + 100y = 0$.

3. Vérifier que la fonction i définie sur \mathbb{R} par $i(t) = -\frac{1}{10} e^{-500t} + \frac{1}{10}$ est solution de l'équation différentielle (1).

4. Étudier sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ les variations de la fonction i définie à la question 3.

Dresser le tableau de variations de i sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$; préciser la limite de i en $+\infty$.

5. Déterminer par le calcul l'instant t_1 à partir duquel l'intensité $i(t)$ sera supérieure à $0,095 \text{ A}$.

En donner la valeur exacte puis la valeur décimale approchée à 10^{-3} près par excès.

144**Exercice**

Série STL (BGB), 2000

Après la prise d'une boisson alcoolisée par une personne, on procède à l'étude de l'évolution de la quantité d'alcool présente dans son tube digestif

À l'instant t , on note $u(t)$ la quantité d'alcool encore présente dans le tube digestif avec t exprimé en minutes et $u(t)$ en moles d'alcool.

On a relevé les résultats suivants :

t_j (en min)	0	1,5	4,5	9	15	18
$u_j = u(t_j)$ (en mole)	1,2	0,94	0,56	0,26	0,10	0,06

On pose $v_j = \ln(u_j)$.

1. Recopier et compléter, avec des valeurs arrondies à 10^{-2} près, le tableau suivant :

t_j	0	1,5	4,5	9	15	18
v_j						

2. Représenter le nuage de points $M_j(t_j, v_j)$ dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

- 1 cm sur l'axe des abscisses,
- 4 cm sur l'axe des ordonnées.

Que remarque-t-on ?

3. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et par G_2 celui des trois derniers.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et de G_2 et tracer la droite (G_1G_2) sur le graphique.

b. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $v = mt + p$.

On admet que cette droite constitue un bon ajustement du nuage de points M_j .

4. À partir de cet ajustement, déterminer la quantité d'alcool encore présente dans le tube digestif de cette personne à l'instant $t = 20$.

5. On admet désormais que la fonction u est dérivable et vérifie l'équation différentielle :

$$u' = -0,17u,$$

avec

$$u(0) = 1,2.$$

a. Résoudre sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ cette équation différentielle.

b. Calculer $u(20)$ et comparer avec le résultat obtenu expérimentalement à la question 4. précédente.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU 2^e ORDRE

145

Exercice

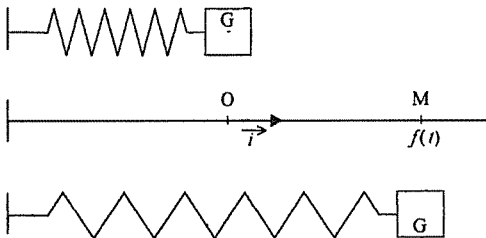
Série STL (PL), 2000

Les unités physiques utilisées sont le mètre (m) et le kilogramme (kg).

Un mobile de masse 16 kg, guidé rectilignement sur un banc à coussin d'air, est attaché à un ressort dont la constante de raideur vaut $k = 1$.

Si l'on écarte le centre d'inertie G du solide de sa position d'équilibre O, alors G effectue des oscillations autour de celle-ci.

À l'instant t , la position de G est repérée par le point M d'abscisse $f(t)$ dans le repère (O, \vec{i}) .



On admettra que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : 16y'' + y = 0$$

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).
- b. On suppose qu'à l'instant $t=0$ le mobile est au point d'abscisse $f(0) = 0,5$ m et a une vitesse égale à $f'(0) = 0,125$ m · s⁻¹.

Montrer que la fonction f est définie par : $f(t) = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{t}{4} + \sin \frac{t}{4} \right]$.

- c. Vérifier que, pour tout réel t : $f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left[\frac{1}{4} (t - \pi) \right]$.

2. Montrer que pour tout réel t , on a : $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(t) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. a. Donner la valeur positive t_0 de t pour laquelle le point M se trouve pour la première fois en O.
- b. Combien de fois le point M se trouve-t-il en O dans l'intervalle de temps $[0 ; 35]$?

146

Exercice

Série STI (GC, GEN, GM), 1997

Les deux parties A et B sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

1. Soit (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et y' sa fonction dérivée seconde.

Résoudre (E).

2. a. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie :

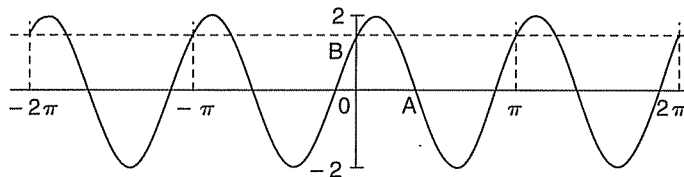
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}.$$

b. Vérifier que, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Partie B

La figure ci-après représente la courbe représentative C de la fonction f définie sur $[-2\pi ; 2\pi]$ par $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.



1. Par simple lecture graphique, indiquer le nombre de solutions dans $[-2\pi ; 2\pi]$ de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer, par le calcul, l'ordonnée du point d'intersection B de la courbe C avec l'axe des ordonnées.
Déterminer, par le calcul, l'abscisse a du point d'intersection A de la courbe C avec l'axe des abscisses telle que $0 < a < \frac{\pi}{2}$ (voir le point A sur la figure ci-dessus).

147 Exercice

Série STI (GO), 1999

1. Résoudre l'équation différentielle suivante, où y est une fonction de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} :

$$9y'' + 16y = 0.$$

2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie :

$$f(3\pi) = 3\sqrt{3} \quad \text{et} \quad f'(0) = 4.$$

3. Montrer que, pour tout réel t :

$$f(t) = 6 \cos\left(\frac{4}{3}t - \frac{\pi}{6}\right).$$

4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$f(t) = 3\sqrt{3}.$$

5. Représenter sur le cercle trigonométrique les solutions de l'équation précédente.

148**Exercice**

Série STI (GE, GET), 1999

Soient L et C deux nombres réels strictement positifs tels que $L=0,2$ et

$C=8 \cdot 10^{-5}$. On note (E) l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{LC} y = 0$ où :

- y désigne une fonction de la variable t définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} ;
- y'' désigne la fonction dérivée seconde de y .

1. Déterminer la solution q de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions :

$$q(0) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ et } q'(0) = 0.$$

(q' désigne la fonction dérivée de la fonction q).

2. On considère la fonction e définie pour tout t réel par $e(t) = \frac{1}{2C} (q(t))^2$.

a. Vérifier que la valeur moyenne M de la fonction e sur l'intervalle $[0 ; 0,04]$

est égale à $\frac{5}{8} \int_0^{0,04} \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) dt$.

b. Calculer la valeur exacte de M .

c. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} de M .

149**Exercice**

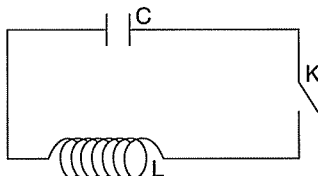
Série STI (GE, GET), 1996

Les deux questions de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Le circuit représenté ci-dessous comprend un condensateur de capacité C , une bobine d'inductance L , ainsi qu'un interrupteur K . À l'instant initial $t=0$, on ferme l'interrupteur K . Le circuit est parcouru par un courant.

On note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t , où $q(t)$ est exprimée en Coulombs et t en secondes.

On définit ainsi, sur $[0 ; +\infty[$, une fonction q deux fois dérivable.



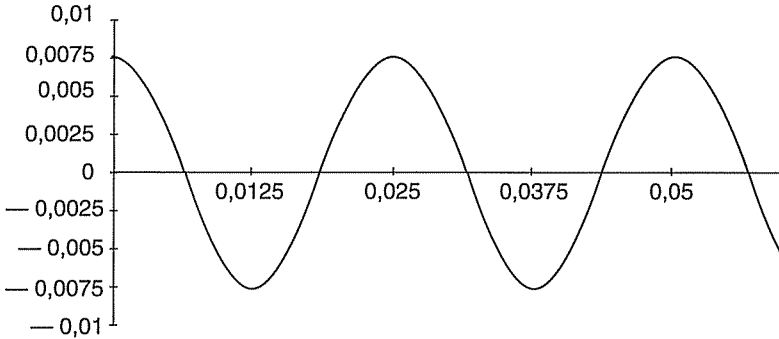
1. Détermination expérimentale de la fonction q .

On est amené à écrire $q(t)$ sous la forme :

$$q(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

où A , ω et φ sont des réels tels que : $A > 0$, $\varphi \in [-\pi ; \pi]$.

La courbe ci-dessous, obtenue expérimentalement, représente les variations de la fonction q .



À l'aide du graphique, déterminer les valeurs obtenues expérimentalement de A , de ω , de la période T de la fonction q , ainsi que $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

2. Détermination théorique de la fonction q .

On considère maintenant que $L = 2,5 \cdot 10^{-1}$ H ; $C = 6,4 \cdot 10^{-5}$ F.

À l'instant $t=0$, la charge du condensateur vaut $7,5 \times 10^{-3}$ coulombs et l'intensité du courant est nulle, on a donc : $q(0) = 7,5 \cdot 10^{-3}$ et $q'(0) = 0$.

a. On admet que la charge variable q du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$q''(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0.$$

Déterminer la solution q de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales indiquées ci-dessus.

b. L'énergie E dissipée aux bornes du condensateur est une fonction du temps :

$$E(t) = \frac{1}{2C} [q(t)]^2,$$

où $E(t)$ est exprimée en joules.

Calculer la valeur moyenne E_m de cette énergie, en joules, entre les instants $t=0$ et $t=0,02$.

(On donnera l'approximation décimale de E_m à 10^{-2} près par excès.)

150**Exercice**

Série STI (GM, GMA), 1999

On donne l'équation différentielle : $y'' + 36y = 0$.

1. Donner la forme des solutions de cette équation différentielle.
2. Déterminer la fonction f solution de cette équation différentielle satisfaisant aux conditions suivantes :
 - la courbe représentative de f passe par le point G de coordonnées $(0 ; \sqrt{3})$;
 - la droite tangente à cette courbe au point G a pour coefficient directeur 6.
3. Vérifier que pour tout réel x :

$$f(x) = 2 \sin\left(6x + \frac{\pi}{3}\right).$$

4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right]$.

NOMBRES COMPLEXES**151****Exercice**

Série STL (CL), 1997

Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 + 2(1 - \sqrt{3})z^2 + 4(1 - \sqrt{3})z + 8.$$

1. a. Montrer que :

$$P(z) = (z + 2)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4).$$

- b. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$P(z) = 0.$$

2. On considère les nombres complexes :

$$z_0 = -2 ; \quad z_1 = \sqrt{3} - i ; \quad z_2 = \sqrt{3} + i.$$

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_0 ; \quad z_1 ; \quad z_2 ; \quad z_1^9 ; \quad \frac{z_2^{1997}}{z_0 z_1}.$$

(On donnera pour chaque nombre complexe son argument principal, c'est-à-dire l'argument élément de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.)

On écrira les modules sous la forme : a^n avec n entier naturel et a réel positif.

152

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1996

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1^3 z_2$.

1. a. Mettre z_1^3 sous forme algébrique (on pourra utiliser une identité remarquable).
- b. Mettre Z sous forme algébrique.
2. a. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_1 , puis le module et un argument du nombre complexe z_1^3 .
- b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe z_2 .
- c. Dédire des questions précédentes une écriture trigonométrique de Z .
3. En comparant les écritures algébrique et trigonométrique de Z , déterminer les valeurs exactes de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$.

153

Exercice

Série STI (GE, GET), 1996

On note i le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

Soient a et b les nombres complexes définis par :

$$a = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \quad \text{et} \quad b = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

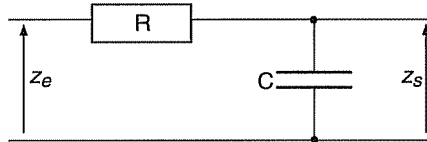
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$; l'unité de longueur est 2 cm.

1. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes a et b .
2. Placer les points A et B, images respectives des nombres complexes a et b .
3. a. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $q = \frac{b}{a}$.
- b. Calculer le module et un argument du nombre complexe $q = \frac{b}{a}$.
- c. Dédire des résultats précédents la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

154**Exercice**

Série STI (GE, GET), 1999

Le quadripôle représenté ci-dessous est constitué d'un résistor de résistance R exprimée en Ω et d'un condensateur de capacité C exprimée en μF .



On associe respectivement à la tension d'entrée et à la tension de sortie les nombres complexes z_e et z_s .

On appelle transmittance le nombre complexe Z défini par : $Z = \frac{z_s}{z_e}$.

On admet que :

$$Z = \frac{1}{1 + iRC\omega},$$

où ω désigne la pulsation exprimée en radians par seconde et i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Dans tout l'exercice, on suppose que $R = 50 \Omega$, $C = 2 \mu\text{F}$ et $\omega = \frac{1}{100} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Vérifier que :

$$Z = \frac{1}{1+i}.$$

Écrire le nombre complexe Z sous forme algébrique puis déterminer le module et un argument de Z .

2. Le module de z_s peut-il être le double de celui de z_e ? Justifier la réponse fournie.

3. Dans cette question seulement, on suppose qu'un argument de z_s est $\frac{\pi}{2}$; déterminer alors un argument de z_e .

4. On suppose dans cette question que $z_e = 150(-\sqrt{3} + i)$.

a. Déterminer l'écriture du nombre complexe z_e sous la forme exponentielle $re^{i\alpha}$.

b. Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe z_s correspondant.

c. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ de telle manière qu'un centimètre représente 100 unités. Placer les points M_e et M_s images respectives des nombres complexes z_e et z_s .

155**Exercice**

Série STL (PL), 1998

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On considère les nombres complexes

$$Z_A = 1 + i\sqrt{3}, \quad Z_B = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad Z = \frac{(Z_A)^2}{Z_B}.$$

- Écrire Z sous forme algébrique.
- Écrire Z_A , Z_B et Z sous forme trigonométrique.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x.$$

a. Démontrer que l'on peut écrire, pour tout réel x :

$$f(x) = 4 \cos \left(x - \frac{5\pi}{12} \right).$$

b. Résoudre l'équation $f(x) = 2\sqrt{2}$ dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

156**Exercice**

Série STL (CL), 1999

On désigne par \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

1. Résoudre dans \mathbb{C} chacune des équations suivantes, en donnant les solutions sous forme algébrique :

a. $z^2 + z + 1 = 0$.

b. $2z - i\bar{z} = 6 - 6i$ où \bar{z} désigne le conjugué de z .

2. On considère les deux nombres complexes :

$$z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 2 - 2i.$$

- Calculer le produit $z_1 z_2$ sous forme algébrique.
- Calculer le module et un argument, appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, des nombres complexes z_1 , z_2 et $z_1 z_2$.
- En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$.

157**Exercice**

Série STI (GM, GC, GEN), 2000

1. i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère les nombres complexes suivants :

$$a = \sqrt{3} + i$$

$$b = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Déterminer le module et un argument de a , b et $\frac{a}{b}$.

2. Soit $z = \cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}$. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) avec 4 cm comme unité graphique. On considère les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 d'affixes respectives z , z^2 , z^3 et z^4 .

a. Déterminer le module et un argument de z , z^2 , z^3 et z^4 .

b. En laissant vos traits de construction sur la copie, placer les points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 dans le plan complexe.

158**Exercice**

Série STI (GE, GET), 1998

Le nombre i est le nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer le module et un argument du nombre complexe Z égal à $8\sqrt{2}(1+i)$.

2. On considère le nombre complexe z_0 tel que :

$$z_0 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - \sqrt{2}.$$

Vérifier que $z_0^2 = Z$.

3. Dédurre des résultats obtenus aux questions précédentes :

a. le module et un argument de z_0 ;

b. les valeurs numériques exactes de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

159

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 1998

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^4 - 12z^3 + 64z^2 - 104z + 84.$$

1. a. Déterminer les deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z ,

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + b).$$

b. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation :

$$P(z) = 0.$$

2. On considère les nombres complexes $1+i$, $1-i$, $5-i\sqrt{17}$, $5+i\sqrt{17}$ et on désigne par A, B, C et D leurs images respectives dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

a. Placer les points A, B, C et D.

b. Démontrer que le triangle ADC est rectangle.

c. Prouver que le point B appartient au cercle circonscrit au triangle ADC.

d. Démontrer que le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

160

Exercice

Série STI (GE, GET), 1999

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ direct. L'unité graphique sera égale à 4 cm.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

On désigne par z_1 et z_2 les solutions, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.

Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Soit A le point d'affixe z_1 et B celui d'affixe z_2 .

Placer A et B et démontrer que le triangle AOB est équilatéral.

3. Soit E le point d'affixe $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et F son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'affixe du point F et montrer que F est le milieu du segment [OB].

4. Soit D l'image de E par la translation de vecteur $2\vec{v}$. Déterminer l'affixe de D et montrer que $OD = DB$.

En déduire que la droite (AD) est la médiatrice de [OB].

161**Exercice**

Série STI (GE, GET, GO), 2000

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les nombres complexes $z_A = 5 - 5i$ et z_B de module égal à

$5\sqrt{2}$ et d'argument égal à $\frac{-7\pi}{12}$, d'images respectives A et B.

1. a. Placer le point A
b. Calculer le module et un argument de z_A .
2. Soit la fonction f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par $f(z) = ze^{\frac{-i\pi}{3}}$.
a. Quelle est la transformation géométrique associée à f ?
b. Montrer par le calcul que $f(z_A) = z_B$.
c. En déduire la construction de B (on laissera les traits de la construction).
3. a. Exprimer $e^{\frac{-i\pi}{3}}$ sous forme algébrique.
b. Calculer $f(z_A)$ sous forme algébrique.
c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{-7\pi}{12}$ et $\sin\frac{-7\pi}{12}$.

162**Exercice**

Série STI (GM, GMA), 1999

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation d'inconnue z suivante :

$$z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0.$$

2. Soit les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_4 = \bar{z}_3$.
a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2 .
b. Montrer que $z_4 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.
3. Les nombres complexes z_1 , z_2 , z_3 et z_4 sont les affixes respectives des points A, B, C et D dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
a. Placer les points A, B, C et D.
b. Justifier que les droites (AB) et (CD) sont parallèles et démontrer que $AC = BD$.
c. Justifier que les points A, B, C et D sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

163

Exercice

Série F₁₀ (STI GO), 1998

Soit i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Vérifier que les nombres complexes $(3 + i)$ et $(1 - i)$ sont des solutions de l'équation :

$$z^2 - 4z + 4 - 2i = 0.$$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

On donnera les solutions sous la forme $a + ib$ et sous la forme $re^{i\theta}$ (avec les valeurs exactes pour a, b, r ($r > 0$), et une valeur approchée à 10^{-2} près pour θ).

3. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$3 + i, 1 - i, 2 + i\sqrt{2} \text{ et } 2 - i\sqrt{2}.$$

4. Démontrer que le quadrilatère DACB est un rectangle.

164

Exercice

Série STI (GM, GC, GEN), 2000

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; on rappelle que $i^2 = -1$.

On considère les points A(4 ; 0) et C($-2\sqrt{3}$; -2) d'affixes respectives $z_A = 4$ et $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$, et les points B et D d'affixes respectives $z_B = iz_A$ et $z_D = iz_C$.

1. a. Calculer les modules des nombres complexes z_A et z_C .

b. En déduire les modules des nombres complexes z_B et z_D .

c. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2. a. Montrer que les coordonnées de B et D sont respectivement (0 ; 4) et (2 ; $-2\sqrt{3}$).

b. Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

3. a. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

b. Montrer que les diagonales du quadrilatère ABCD sont perpendiculaires.

165**Exercice**

Série STI (GE, GET), 1999

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2 cm. On considère les nombres complexes suivants :

$$z_0 = 4 ; \quad z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 ; \quad z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 ; \quad z_3 = \frac{1+i}{2} z_2$$

et M_0, M_1, M_2, M_3 les images respectives de ces nombres.

1. a. Déterminer la forme algébrique puis trigonométrique de chacun des nombres complexes z_0, z_1, z_2 et z_3 .

b. Construire les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .

2. On pose :

$$d_0 = |z_0 - z_1| ; \quad d_1 = |z_1 - z_2| ; \quad d_2 = |z_2 - z_3|.$$

a. Interpréter géométriquement chacun des nombres d_0, d_1 et d_2 .

b. Montrer que d_0, d_1 et d_2 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. Calculer la longueur en centimètres de la ligne brisée $M_0M_1M_2M_3$.

166**Exercice**

Série STL (PL), 1999

Soit le plan complexe muni du repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm) ; i désigne le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

a. Placer les points A et B dans le plan complexe.

b. Calculer le module et un argument de z_A et z_B .

c. Calculer le module et un argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

d. Écrire le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique.

e. Montrer qu'il existe une rotation de centre O, d'angle à préciser qui transforme A en B.

3. a. Soit C le symétrique de A par rapport à O.

Déterminer l'affixe z_C du point C.

b. Soit T la translation de vecteur \overrightarrow{BC} d'affixe $-4\sqrt{3}$.

Déterminer l'affixe z_D de l'image D du point A par la translation T.

4. Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

167

Exercice

Série STL (PL), 1997

1. a. On considère la suite géométrique (r_n) de premier terme r_0 strictement positif, et de raison 2.

Exprimer r_n en fonction de r_0 et de n .

b. On considère la suite arithmétique (θ_n) de premier terme θ_0 appartenant à

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n .

2. Pour tout entier naturel n , on considère le nombre complexe z_n de module r_n et d'argument θ_n .

a. Exprimer le module du produit $z_0 z_1 z_2$ en fonction de r_0 et un argument en fonction de θ_0 .

b. On suppose que $z_0 z_1 z_2 = 64i$.

Déterminer r_0 et θ_0 .

Donner, dans ce cas, le module et un argument de z_1 et z_2 , ainsi que la forme algébrique de chacun des trois complexes z_0 , z_1 et z_2 .

3. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.

a. Représenter les points $M_0(\sqrt{3}; 1)$; $M_1(-2\sqrt{3}; 2)$; $M_2(0; -8)$.

Quelles sont les affixes respectives des points M_0 , M_1 et M_2 ?

b. Montrer que le triangle $M_0 M_1 M_2$ est rectangle.

168

Exercice

Série STI (GE, GET), 1998

Partie A

On considère le polynôme $P(z) = z^3 + 8$ où z est un nombre complexe.

On se propose de résoudre dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

1. Calculer $P(-2)$.

- Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$.
- Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), on donne les points M, N et P d'affixes respectives :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_2 = -2$$

$$z_3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

- Calculer le module et un argument des nombres z_1, z_2 et z_3 .
- Placer ces trois points dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
- Calculer $\frac{z_1}{z_3}$ et $\frac{z_2}{z_1}$. On donnera les résultats en notation exponentielle.
- En déduire l'angle de la rotation de centre O qui transforme P en M.
 - Déterminer les images de M et N par cette rotation.

169

Exercice

Série STL (GM, GMA), 2000

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On désigne par A le point d'affixe $z_A = 2 + i\sqrt{2}$.

- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + 2\sqrt{2}z + 6 = 0$$

On appelle z_B la solution de cette équation dont la partie imaginaire est positive.

Placer dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B .

- Montrer que les points A et B appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.

- Soient I, J et K les points d'affixes respectives z_I, z_J et z_K telles que :

- $z_I = 2i$;
- z_J est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$;
- $z_K = -z_J$.

- Donner la forme algébrique de z_J .

- Placer les points I, J et K dans le plan complexe.

Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

Donner le rayon du cercle (C') circonscrit au triangle IJK.

4. Soit E l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2 < |z| < \sqrt{6}.$$

a. Tracer les cercles (C) et (C').

b. Représenter l'ensemble E sur le graphique précédent à l'aide de hachures. Justifier.

170

Exercice

Série STI (GO), 1999

1. Soit le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - z^2 + 4z + 48.$$

a. Montrer que -3 est une racine de P.

b. En déduire une factorisation de P.

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonomé (O ; \vec{u}, \vec{v}) d'unité 1 cm. Les points A et B sont sur le cercle de centre O et de rayon 4, leurs affixes respectives z_1 et z_2 ont pour arguments : $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$.

Le point C a pour affixe $z_3 = -3$.

a. Placer ces trois points.

b. Donner, sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique, les affixes de A et B.

c. Calculer $|z_1 - z_3|$.

d. Calculer alors, en arrondissant au degré près, l'angle \widehat{OAC} .

On rappelle la formule suivante, dans un triangle PQR :

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 - 2PR \times RQ \cos \widehat{R}.$$

171

Exercice

Série STL (PL), 2000

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ; \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique 10 cm).

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe $z_n = e^{i \frac{2\pi}{3}} \cdot i^n$ où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. (Par convention, pour $n=0$, $i^0 = 1$.)

SESSIONS ANTÉRIEURES

1. Déterminer la forme algébrique ainsi que le module et un argument de chacun des nombres complexes z_0 , z_1 , z_2 et z_3 .

Placer dans le plan les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 .

2. Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n . En déduire que M_{n+1} est l'image de M_n par une rotation r de centre O . Préciser une mesure de l'angle de cette rotation.

3. a. Exprimer un argument de z_n en fonction de n .

b. Déterminer les entiers naturels n tels que M_n soit confondu avec M_0 .

4. Pour tout entier naturel n , on note Q_n le point d'affixe $\omega_n = e^{i \frac{2\pi}{3}} \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^n$, (par

convention, pour $n=0$, $\left(\frac{i}{2}\right)^0 = 1$).

a. Montrer que pour tout entier naturel n , les points O , M_n et Q_n sont alignés.

b. Placer les points Q_0 , Q_1 , Q_2 et Q_3 dans le plan.

QCM

172

Exercice

Série STT (ACA, ACC), 1995

Dans les 6 questions suivantes, **au moins** une réponse est exacte. Entourer cette (ou ces) réponse(s) exacte(s).

Soit f la fonction définie sur $I = [1, 5]$ par $f(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$ alors :	$f'(x) = -\frac{2}{3}$	$f'(x) = \frac{5}{(1-3x)^2}$	$f'(x) = \frac{-5}{(1-3x)^2}$
Dans un jeu de 32 cartes, on en tire une au hasard. La probabilité d'obtenir un as ou un coeur est :	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{32}$
Si $3^x = \frac{1}{243}$, alors :	$x = 5$	$x = -5$	$x = 81$
Un dé pipé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 est tel que les probabilités d'apparition des faces sont : $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\})$ $= p(\{4\}) = p(\{5\})$ $= \frac{1}{7}$ alors $p(\{6\})$ est égal à :	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{12}{7}, \frac{8}{7}, \frac{16}{21}$ sont les termes consécutifs d'une suite :	arithmétique		géométrique
Dans une suite géométrique, le premier terme est 2, le cinquième terme est 32. La raison est :	-2	$\frac{1}{2}$	2

173**Exercice**

Série STT (ACA, ACC), 1996

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère trois disques compacts notés a , b , c et leurs boîtes de rangement respectives A , B , C .

On range au hasard chaque disque dans une boîte.

On considère les événements :

E : « exactement un disque est bien rangé » ;

F : « tous les disques sont bien rangés » ;

G : « au moins un disque est bien rangé ».

Les probabilités des événements E , F et G sont égales à :

a.

$p(E) =$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
Réponse	A	B	C	D

b.

$p(F) =$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
Réponse	A	B	C	D

c.

$p(G) =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
Réponse	A	B	C	D

2. On place un capital de 60 000 F à intérêts composés au taux annuel de 5 %. Donner le capital obtenu au bout de 3 ans.

Capital au bout de 3 ans	66 150 F	69 000 F	202 500 F	69 457,5 F
Réponse	A	B	C	D

3. Soit la fonction f définie sur $[-5 ; 0]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$$

Sa dérivée f' est définie par :

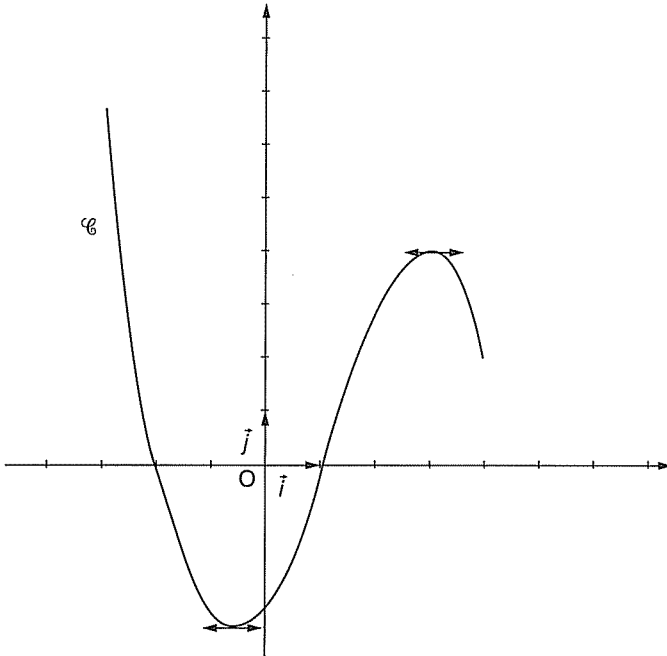
$f'(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-11}{(3x-1)^2}$	$\frac{12x+7}{(3x-1)^2}$	$\frac{11}{(3x-1)^2}$
Réponse	A	B	C	D

4. Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

L'équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est donnée par :

Équation de T	$y = 8x + 5$	$y = 5x - 2$	$y = 2x + 1$	$y = 8x - 11$
Réponse	A	B	C	D

5. À partir de la représentation graphique \mathcal{C} d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$, répondre aux questions a. et b.



a.

le tableau de variation de f est	x	-3	-2	4	x	-3	-1/2	3	4	x	-3	1	3	4
	$f'(x)$	+ 0 - 0 +			$f'(x)$	- 0 + 0 -				$f'(x)$	- 0 + 0 -			
	$f(x)$	7 ↘ 0 ↗ 1			$f(x)$	7 ↘ -3 ↗ 4 ↘ 2				$f(x)$	5 ↘ -3 ↗ 3 ↘ 2			
Réponse	A				B					C				

b.

L'équation $f(x) = 3$ a :	une solution	aucune solution	deux solutions	trois solutions
Réponse	A	B	C	D

Formulaires

SÉRIE STT

Spécialités Comptabilité et Gestion, Informatique et Gestion

SÉRIE STL

Spécialité Biochimie, Génie Biologique

Statistiques

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2;$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}.$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Probabilités

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\Omega) = 1$; $P(\emptyset) = 0$.

Dans le cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$.

Algèbre

A – Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b u_n$; $u_n = u_0 b^n$.

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$.

B – Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

C – Équation du second degré

Soient a, b, c des nombres réels, $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$$

- si $\Delta < 0$, aucune solution réelle ;

- si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Analyse

A – Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[, \\ y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y \end{array} \right.$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad e^0 = 1$$

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0) \quad \ln a^x = x \ln a \quad (a > 0).$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0) \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^0 = 1 \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$,

$$y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n.$$

B - Limites usuelles de fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } a > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = +\infty; \quad \text{si } a < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^a = 0.$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0; \quad \text{si } \alpha < 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty.$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad n \text{ entier naturel.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad n \text{ entier naturel non nul.}$$

C – Dérivées et primitives

(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives.)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité
k	0	$] - \infty, + \infty[$
x	1	$] - \infty, + \infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$] - \infty, + \infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] - \infty, 0[\cup] 0, + \infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] - \infty, 0[\cup] 0, + \infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, + \infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$] 0, + \infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0, + \infty[$
e^x	e^x	$] - \infty, + \infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$] - \infty, + \infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$] - \infty, + \infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (ku)' = ku';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u';$$

$$(e^u)' = e^u u'; \quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'.$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives.}$$

D – Calcul intégral (séries STT)

Formule fondamentale

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Formule de Chasles

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

E – Équations différentielles (série STL)

Équation	Solutions sur $]-\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$

SÉRIE STT

Spécialités Action et Communication Administratives,
Action et Communication Commerciales

Statistiques

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}.$$

Dans le cas d'un regroupement en classes

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i$$

$$V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Probabilités

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); \quad P(\Omega) = 1; \quad P(\emptyset) = 0.$$

Dans le cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$.

Algèbre

A – Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = bu_n$; $u_n = u_0b^n$.

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$.

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$.

B - Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

$$a^{x+y} = a^x a^y.$$

Analyse

A - Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité
k	0	$] - \infty, + \infty[$
x	1	$] - \infty, + \infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$] - \infty, + \infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] - \infty, 0[\cup] 0, + \infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] - \infty, 0[\cup] 0, + \infty[$

B - Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (ku)' = ku'; \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Séries STI

Toutes spécialités

Séries STL

**Spécialité Physique de Laboratoire
et de procédés industriels**

Spécialité Chimie de Laboratoire et de procédés industriels

Probabilités

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); \quad P(\Omega) = 1; \quad P(\emptyset) = 0.$$

Dans le cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$.

Variable aléatoire

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$.

Espérance mathématique : $E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$.

Variance : $V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$.

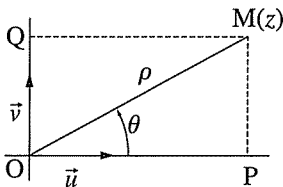
Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Algèbre

A – Nombres complexes

Forme algébrique : $z = x + iy$.

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta} \quad (\rho > 0)$.



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

$$\overline{OP} = x = \operatorname{Re}(z) = \rho \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = y = \operatorname{Im}(z) = \rho \sin \theta$$

$$OM = \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Opérations algébriques

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$$

$$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Conjugué

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}; \quad \bar{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}); \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'; \quad \bar{\bar{z}} = z; \quad \bar{z}z = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}.$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$$zz' = (\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'}) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$$

$$|zz'| = |z| |z'|$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \frac{\rho}{\rho'} e^{i(\theta - \theta')}; \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$z^n = (\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Inégalité triangulaire

$$|z| - |z'| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

B - Identités remarquables

(valables sur \mathbb{C} et donc sur \mathbb{R})

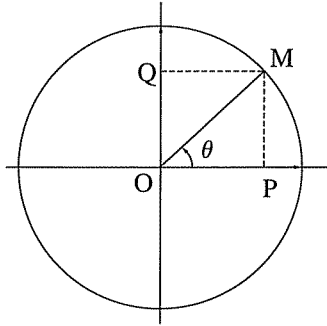
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib).$$

C - Trigonométrie



$$\overline{OP} = \cos \theta$$

$$\overline{OQ} = \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

Formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}); \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

Analyse

A - Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[, \\ y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y \\ e^0 = 1 \end{array} \right.$$

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

$$(e^a)^b = e^{ab}$$

$$\ln a^x = x \ln a \quad (a > 0).$$

2. Fonctions puissances

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0) \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$$

$$x^0 = 1 \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, +\infty[\text{ et } y \in [0, +\infty[, \\ y = \sqrt[n]{x} \text{ équivaut à } x = y^n. \end{array} \right.$$

B - Limites usuelles de fonctions et de suites

1. Fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty; \text{ si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0.$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0; \text{ si } \alpha < 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = +\infty.$$

Comportement à l'origine de $\ln(1+x)$, e^x , $\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

2. Suites

(séries STI, spécialités Génie Électronique et Génie Électrotechnique, STL, spécialité Physique de laboratoire et de procédés industriels)

Si $k > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = +\infty$; si $0 < k < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$.

C – Dérivées et primitives

(Les formules ci-après peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives.)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité
k	0	$] -\infty, +\infty[$
x	1	$] -\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$] -\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$] 0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0, +\infty[$
e^x	e^x	$] -\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$] -\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$] -\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (ku)' = ku'; \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = (v' \circ u)u';$$

$$(e^u)' = e^u u'; \quad (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

D – Calcul intégral

Si F est une primitive de f , alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Formule de Chasles

$$\int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

Linéarité

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt.$$

Positivité

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.

Intégration d'une inégalité

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.

Valeur moyenne de f sur $[a, b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

E – Équations différentielles

Équations	Solutions sur $] -\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$
$y'' + \omega^2 y = 0$	$f(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$

SÉRIE SMS

Statistiques

Moyenne, variance, écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2; \quad \sigma_x = \sqrt{V(x)}.$$

Dans le cas d'un regroupement en classes :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i; \quad V(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p n_i x_i^2 - (\bar{x})^2.$$

Probabilités

Si A et B sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); \quad P(\Omega) = 1; \quad P(\emptyset) = 0.$$

Dans le cas d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{Nombre d'éléments de } A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$.

Algèbre

A – Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = u_n + a$; $u_n = u_0 + na$.

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; $u_{n+1} = b u_n$; $u_n = u_0 b^n$.

$$\text{Si } b \neq 1, S_n = 1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}.$$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$.

B – Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Analyse

A – Propriétés algébriques des fonctions usuelles

$$\ln 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in]-\infty, +\infty[\text{ et } y \in]0, +\infty[, \\ y = \exp x = e^x \text{ équivaut à } x = \ln y \end{array} \right.$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad e^0 = 1$$

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad e^{a+b} = e^a e^b$$

$$(a > 0 \text{ et } b > 0)$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad (e^a)^b = e^{ab}$$

$$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0) \quad \ln a^x = x \ln a \quad (a > 0).$$

B – Limites usuelles de fonctions

Comportement à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad n \text{ entier naturel non nul.}$$

Comportement à l'origine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty.$$

Croissances comparées à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \quad n \text{ entier naturel.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad n \text{ entier naturel non nul.}$$

C – Dérivées et primitives

(Les formules ci-après peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives.)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine de validité
k	0	$] -\infty, +\infty[$
x	1	$] -\infty, +\infty[$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$] -\infty, +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0, +\infty[$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0, +\infty[$
e^x	e^x	$] -\infty, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$] -\infty, +\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$] -\infty, +\infty[$

2. Opérations sur les dérivées

$$(u + v)' = u' + v'; \quad (ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \circ u)' = (v' \circ u)u'$$

$$(e^u)' = e^u u'; \quad (u^n)' = nu^{n-1} u'$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad u \text{ à valeurs strictement positives}$$

D - Équations différentielles

Équation	Solutions sur $] -\infty, +\infty[$
$y' - ay = 0$	$f(x) = ke^{ax}$

**2 bonnes
raisons
d'essayer**

abc bac.com

1 offre d'essai gratuite

**pour vous permettre de tester
les potentialités du site en direct**

2 réduction de 20%*

**si vous choisissez de vous abonner,
quelle que soit la formule retenue**

Comment bénéficier de cette offre

Rendez-vous sur :

<http://www.abcbac.com>

Cliquez sur :

Offre spéciale Nathan

Entrez le code suivant :

SUJETS BAC

Puis laissez vous guider...

* Offre valable du 1^{er} septembre 2001 au 1^{er} août 2002

NATHAN

abc bac.com

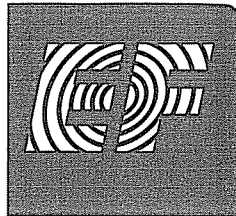
**Votre assistant personnel
de réussite**

Un site Nathan diffusé par www.education.com

Soif de langues !

Participez à notre

Grand Concours Nathan !



Cher étudiant,

EF Education, dans le cadre du lancement de son partenariat avec les éditions Nathan, a le plaisir de vous présenter son Grand Concours de la rentrée.

Que diriez-vous de partir étudier l'anglais quelques semaines à l'étranger ou une année aux Etats-Unis ? Une occasion unique de progresser efficacement en langues !

Pour cela, **rien de plus simple**, il vous suffit de tourner cette page et de répondre à 3 questions !

EF Education, leader mondial des séjours éducatifs et linguistiques à l'étranger vous permettra peut-être de réaliser vos rêves ...

Mors, tous à vos stylos !

Et gagnez

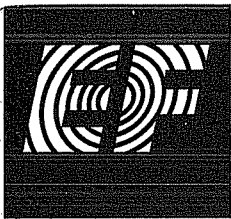
1er Prix : Un An d'Etudes aux USA ! (valeur : 11815 Euro)

2ème prix : Séjour de 3 semaines aux USA ! (valeur : 1949 Euro)

3ème prix : Séjour de 2 semaines à Malte ! (valeur : 790 Euro)

Ces séjours auront lieu dans l'un des Centres Internationaux EF aux USA ou à Malte.
Règlement complet disponible auprès de Maître Call (voir au verso)





Comment participer à notre Grand Concours ?

- 1 - Remplissez lisiblement le bordereau ci-dessous
- 2 - Répondez aux 3 questions ci-après
- 3 - Retournez-le nous avant le 30/04/02 minuit à : EF Education
Concours Nathan Etudiants - 4 rue Duphot - 75001 Paris (cachet de la poste faisant foi)
- 4 - Le tirage au sort sera effectué par Maître Caill le 06/05/02
- 5 - Les gagnants seront prévenus par lettre recommandée avant le 31/05/02
- 6 - Le règlement complet du concours et le descriptif des séjours à gagner est à votre disposition sur simple demande auprès de Maître Caill - 2, rue Duphot 75001 Paris
- 7 - Concours ouvert aux étudiants de 16 à 28 ans

Pour vous aider, consultez notre site www.ef.com

Coupon à retourner sous enveloppe affranchie au tarif en vigueur à :
EF Education - Concours Nathan Etudiants - 4 rue Duphot - 75001 PARIS

Madame Monsieur Mademoiselle
Nom : Prénom : Age :
Adresse :
Code Postal : Ville :
Tél : Email :

Oui, je souhaite recevoir votre documentation gratuite :

- EF Centres Internationaux de Langues
 EF Un An d'Etudes à l'Etranger

Oui, je souhaite participer à votre concours

1 - A quelle date la société EF a-t-elle été fondée et dans combien de pays sommes-nous présents ?

Réponse _____

2 - Quel évènement sportif américain très médiatisé est suivi par les étudiants au printemps ?

Réponse _____

3 - Quelle île du bassin méditerranéen a comme langue officielle l'anglais, du fait de son histoire ?

Réponse _____

Dans cet ouvrage :

- 21 sujets complets de juin 2001 et septembre 2000 classés par série.
- Plus de 170 exercices supplémentaires classés par thème et couvrant l'ensemble du programme.
- Un barème détaillé pour chaque sujet.
- Les formulaires officiels du baccalauréat pour les différentes séries.

Dans la même collection :

non corrigés

- N°1 Maths ES (obl & spé)
- N°2 Maths S (obl & spé)
- N°3 Maths STT - STI - STL - SMS
- N°4 Physique-Chimie S (obl & spé)
- N°5 Sciences de la Vie et de la Terre S (obl & spé)

- N°6 Français 1^{re} Toute séries
- N°7 Anglais LV1 - LV2 Toutes séries
- N°8 Allemand LV1 - LV2 Toutes séries

corrigés

- N° 9 Maths ES (obl & spé)
- N°10 Maths S (obl)
- N°11 Maths S (obl & spé)
- N°12 Maths STT - STI - STL - SMS
- N°13 Mathématiques - Informatique Enseignement scientifique 1^{re} L
- N°14 Physique S (obl & spé)
- N°15 Chimie S (obl & spé)
- N°16 Sciences de la Vie et de la Terre S (obl & spé)
- N°17 Histoire-Géographie L - ES - S
- N°18 Sciences Économiques et Sociales ES (obl & spé)

- N°19 Philosophie L - ES - S
- N°20 Philosophie STT - STI - STL - SMS
- N°21 Français 1^{re} L - ES - S
- N°22 Anglais LV1 - LV2 Toutes séries
- N°23 Français 1^{re} STT - STI - STL - SMS
- N°24 Allemand LV1 - LV2 Toutes séries
- N°25 Espagnol LV1 - LV2 Toutes séries

ISBN : 209 184 302 4



9 782091 843025

035 2001
9 910350 035007
F 35,00
€ 5,34
Nathan
La France



NATHAN