MATHEMATIQUES TERMINALE S2

MARTINGALE DU BAC

Fomesoutra.com
ça soutra!

MARTINGALE –MATHEMATIQUES TS2

EXERCICES DE MATHEMATIQUES AU PROGRAMME

TERMINALE S2

(Sciences Expérimentales)

Compilation

Professeurs du lycée
keur massar

MATHEMATIQUES POST-BAC

PREP@BAC

CONSEILS POUR REUSSIR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

❖ **Se préparer pendant l'année scolaire**

Le baccalauréat, comme tout examen, se prépare tout au long de l'année scalaire.
Votre préparation commence en cours :

- Habituez – vous à participer activement, à aller au tableau. Vous sortirez ainsi beaucoup de vos lacunes, au lieu d'attendre le devoir pour les sortir.
- Si vous avez une compréhension lente, prenez clairement vos cours et chaque soir, mettez vos notes au clair : soulignez les titres, mettez le plan en évidence, les éventuels points à vous faire expliquer.
- A la fin de chaque chapitre, faite une fiche de synthèse en mettant en évidence les résultats à retenir et les méthodes à connaître.
- Etablissez des fiches transversales de méthodes dans lesquelles vous indiquerez les outils dont vous disposez pour résoudre un certain type de questions (par exemple, comment démontrer que des points sont alignés ? comment lever une indétermination dans un calcul de limite ?).
- **Faire des « feed-back » :** le feed-back est le conseil le plus important et le plus utilisé par ceux qui réussissent brillamment leurs études. Il consiste à contrôler systématiquement *sans s'aider de notes, ce que l'on vient d'apprendre (*exercices et cours). Ce contrôle peut se faire mentalement oralement par écrit.
  Dans les transports, essayez de vous rappeler mentalement et sans vous aider de vos notes, le cours et les exercices vus en classe *(feed-back mental)*.
  Après avoir relu votre cours le soir, essayer de retrouver par écrit les principaux paragraphes et démonstrations sans regarder votre leçon *(feed- back écrit).*
  Après avoir résolu un exercice prenez cinq minutes pour contrôler par écrit que vous vous rappeler clairement de la démarche de résolution et non des résultats trouvés (*feed-back écrit).*
  Expliquez à des amis la leçon que vous venez d'apprendre ou l'exercice que vous venez de résoudre : c'est un excellent feed-back oral.
  Choisissez le type de feed-back qui vous convient le mieux et faites en le plus régulièrement possible(après chaque cours et chaque série d'exercices).
- **Miser sur la qualité :** Une tendance très rependue consiste à abattre une grande quantité d'exercices, à la chaîne, mais superficiellement, en espérant que le jour du contrôle, l'on aura déjà vu ce type de problème et que l'on saura s'en souvenir. Cette méthode est absolument inefficaces car la seule manière de se souvenir d'un exercice de mathématique, c'est de l'avoir assimiler. De nombreux témoignages démontrent que pour obtenir de bons résultats, il est préférable de faire un nombre limités, mais plus approfondis, que d'en survoler une grande quantité à piètre qualité.
- Entraînez vous régulièrement sur des sujets de baccalauréat en respectant les conditions de l'examen au niveau du temps.
- Chaque fois que votre professeur vous remet un devoir, au lieu de vous focaliser sur la note, analysez vos erreurs et n'hésitez pas à lui poser des questions si vous ne comprenez pas où se situe votre erreur. Ne laisser rien passer qui ne soit compris.
- Pour chaque devoir, rédiger une petite fiche indiquant les points qui n'ont pas été maîtrisés.
- **Méthode des « couches successives »:** cette méthode très utile pour les étudiants préparant des examens ou des révisions, peut également être utilisée dés le lycée.

PREP@BAC

On observe que pour apprendre un gros volume de cours, rien n'est plus inefficace de l'attaquer de front. La bonne manière consiste d'abord à survoler l'ensemble, en ne retenant que la structure, c'est-à-dire les grandes titres, ainsi que les nom de paragraphes (*première couche,* étape pouvant durer cinq minutes*)* . Dans l'étape suivante (*deuxième couche,*d'une durée de 10mn), on reprend son cours au début en retenant cette fois ci également les théorèmes et résultats importants. Après cette deuxième couche on a une idée claire de la structure de l'ensemble du cours. On peut alors aborder la dernière étape (*troisième couche* : on reprend son cours au début, pour cette fois ci, l'étudier en profondeur en apprenant le détail des démonstrations.

- Avant chaque contrôle, revoyez ces fiches pour vous assurer que les points qui y sont mentionnés sont maintenant assimilés.
- En mai , au moment des révisions définitives, vous aurez ainsi tous les éléments pour travailler efficacement : fiches de synthèse sur chaque chapitre, fiche de méthode fiche de suivi des devoirs. Vous saurez ainsi directement sur quoi doivent porter vos efforts.
- **La rapidité :** pour acquérir la rapidité trois voies sont possibles :
    - Prenez l'habitude, en travaillant chez vous, de vous concentrer sur une seule chose à la fois, c'est-à-dire ne pas attaquer un problème en rêvassant à ce que vous pourriez trouvez à manger ou en écoutant de la musique.
    - Prenez l'habitude de travailler chez vous dans les mêmes conditions qu'en *devoirs surveillés.* Cependant, cela ne devrait pas, une fois la résolution faite, vous empêcher d'y réfléchir plus calmement afin de vérifier la bonne assimilation du problème. Si les seuls moments où vous vous pressez sont les contrôles écrits, vous ne serez jamais rapide.
    - Essayez de contenir tout votre travail à la maison dans une plage horaire serrée. En gagez vous à travailler chez vous par exemple tous les jours entre 18h et 20h et efforcez-vous de ne jamais déborder (quelque soit votre charge de travail). En effet, si l'on ne donne pas de limite de temps pour accomplir un travail, l'on a naturellement tendance à le laisser traîner en longueur et à rêvasser. l'étroitesse de la plage horaire vous obligera à ne pas vous endormir et à devenir efficace.

❖ **Le jour de l'épreuve :**

Abordez l'épreuve de mathématique avec confiance : si vous avez travailler régulièrement toute l'année en suivant les conseil du paragraphe précédent, vous n'avez rien à craindre. Les sujets actuels sont conçus de manière à ce qu'un élève sérieux et travailleur ait toutes les chances de réussir.

- **Adopter la bonne démarche :** lisez attentivement le sujet.
  Commencez par une première lecture rapide du sujet entier pour avoir une vue d'ensemble.
  Reprenez ensuite votre lecture pas à pas : repérez les questions indépendantes et celles qui sont liées. Il peut arriver l'une d'entre d'elles vous donne des indications précieuses pour résoudre une question antérieur. Sur le sujet repérez les questions auxquelles vous savez répondre.
  Tout le temps que vous aurez consacré à vous appropriez le sujet n'est pas du temps perdu. Bien au contraire, c'est un bon investissement pour la suite de l'épreuve.
  Le mieux est de prendre une copie par exercice. Cela facilitera la tâche du correcteur.
  N'oubliez pas que les réponses doivent être justifié. Cependant, ne confondez pas démonstration et bavardage.

PREP@BAC

Pensez à trois points essentiels :

- Si l'énoncé de la consigne commence par « déduire », vous devez impérativement faire reposer votre démonstration sur un résultat établi dans une question antérieure. Tout autre méthode sera considérée comme incorrecte et non validée.
- N'anticipez pas les questions. Si l'on vous demande d'étudier le sens de variation d'une fonction à la question 2 et que le tableau de variation est ensuite demandé à la question 4, vous ne devez le donnez à la question 2 et « sautez » la question 4 sous prétexte que vous y avez déjà répondu avant. vous perdez ainsi des points.
- Vérifiez que vos résultats sont vraisemblables : trouvez une fonction qui croît vers – l'infini, ou décroît vers + l'infini, une probabilité qui n'est pas comprise entre 0 et 1….

- **Gérez le temps imparti :** vous ne pouvez espérer avoir une note correcte si vous renoncer à traiter l'un des exercice : il est donc impératif que vous répartissez bien votre temps sur l'ensemble du sujet (pour avoir un ordre d'idée, vous pouvez compter un peu plus de 45mn pour un exercice noté sur 5 points).
  Prévoyez environ 20mn pour relire posément et procédez à d'éventuels derniers rectificatifs.
  Evitez de « séchez » plus de 10mn sur une question sauf si celle-ci est indispensable pour pouvoir continuer l'exercice.
  Si vous n'arrivez pas à établir un résultat donné par l'énoncé, admettez le provisoirement, laissez un blanc dans votre copie- à compléter éventuellement à la fin de l'épreuve- et continuez l'exercice en, utilisant donné.
- **Soignez la rédaction et la présentation**

N'oubliez pas qu'une copie propre, claire et bien rédigée est un atout. Commencez donc toujours par réfléchir avant d'écrire et ne travaillez sur votre copie qu'après une petite recherche au brouillon, quand vous êtes sûr de vous. Sinon, vous risquez de commencer de multiples calculs qui n'aboutissent pas, ou d'abuser de l'effaceur et du Blanco.
Vous devez aussi éviter de recourir abusivement aux symboles logiques. Les formules mathématiques doivent être intégrées à des phrases correctement rédigées.

Conseils du Professeur Maissa FALL

PREP@BAC

I. SERIES D'EXERCICES ET PROBLEME DE SYNTHESES

II. RESUMES DES COURS

PREP@BAC

LIMITES CONTINUITE DERIVABILITE ET APPLICATIONS

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2-5}$; 2°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x+1}{x^2+3}$; 3°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{-3x^2+7x+1}$; 4°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+7}{x^4+3x-2}$;

5°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2}{|-2x+6|}$; 6°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{|-3x+6|}$; 7°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$; 8°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)$;

9°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)$; 10°) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+4x^2+5x+2}$; 11°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-5x-6}{2x^2-3x-2}$;

12°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$; 13°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-7x+5}{x-1}$; 14°) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+5x-12}{(x-2)(x+3)}$; 15°) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{|x^2-4|}$

16°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{|x^2-1|}$; 17°) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x+3}$; 17°) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; 19°) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$;

20°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$; 21°) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{4-x}$; 22°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; 23°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}}$

Exercice 2

Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$ dans chacun des cas suivants

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{3x-1}$; b) $f(x)=x+2+\sqrt{x^2-3x+1}$; c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}+5x}{3x-1}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$; e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{4x^2+3}}$; f) $f(x)=\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$

EXERCICE :03

Calculer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$; 2°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}\right)$; 3°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin^3 x}{x^2}\right)$; 4°) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x+\tan x}{x}\right)$;

5°) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 6°) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$; 7°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\cos x}{3+\cos x}\right)$; 8°) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{x\sin x}{1-\cos x})$;

9°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x\cos x}$; 10°) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$; 11°) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\frac{1}{\cos^2 x}-2tgx}{\cos(2x)}\right)$;12°) $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x})$

PREP@BAC

T^{erm} S

EXERCICE :04

Pour chacune des fonctions suivantes donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis calculer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

1°) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$; 2°) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+1}$; 3°) $f(x)=\dfrac{4-5x}{x^2+2x-3}$

4°) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$; 5°) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$; 6°) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{-x+2}$

7°) $f(x)=\dfrac{6x-2}{-2x+8}$; 8°) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{-x^2-x+2}$; 9°) $f(x)=-3x^3+5x^2-7x+1$

EXERCICE : 05

A-/ Soit la fonction *f* définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$; où *a ; b et c* sont des réels.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les réels a, b, c sachant que *f* admet 1 pour extremum en x = 0 et -3 pour extremum en x = 2.

3°) Étudier la fonction *f*. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans [–1 ; 0] ; une solution unique β dans [0 ; 1] ; une solution unique λ dans [2 ; 3].

4°) Tracer la courbe (C_f) de *f*.

B-/ Soit la fonction f définie par $f(x)=x^3-4x^2+x-5$

1°) Montrer que f est continue sur ℝ

2°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in[4\,,\,5]$

3°) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.

PREP@BAC

EXERCICE : 07

Soit f la fonction dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f a pour formule explicite : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°) Calculer $f'(x)$.

3°) Déterminer les réels a ; b ; et c en utilisant les données du tableau de f.

4°) Montrer que la restriction g de f à $[0 ; +\infty[$ est une bijection de $[0 ; +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5°) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α.
Montrer que α est compris entre 1 et 2. Donner un encadrement de à 10^{-2} près (on précisera la méthode).

6°) Donner une équation de la tangente (T_0) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.

EXERCICE : 08

A-/ 1°) aux trois réels a ; b ; c on associe la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}.$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Déterminer les constantes a ; b ; c pour que $(\mathcal{C})$ passe par les points A(1 ; 8) ; B(– 4;–2) ; et admette au point E d'abscisse –2 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

a) Etudier f et construire sa courbe $(\mathcal{C})$. Montrer que $(\mathcal{C})$ admet un centre de symétrie dont on précisera.

b) Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $x^2 + (3 - m)x + 4 = 0$

PREP@BAC

Exercice 09

A/ Soit la fonction g définie par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1-/ Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation ;

2-/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que

$$2{,}19 < \alpha < 2{,}20.$$

3-/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$.

1-/ Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2-/ Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ on a : $f'(x) = \dfrac{x\, g(x)}{(x^2 - 1)^2}$

3-/ Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation f .

4-/ Montrer que la droite (D) d'équation y = x + 2 est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au voisinage de $+\infty$.

5-/ Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (D).

6-/ Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

7-/ Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exercice 10

1. Soit g la fonction définie par : $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$.
   a) Dresser le tableau de variations de g .
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α que l'on déterminera.
   c) En déduire le signe de g sur IR.
2. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2\sqrt{1 + x^2} - x$ et les droites $(D) : y = -3x$ et $(D') : y = x$.
   a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   b) Dresser le tableau de variations de f .Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1}.
   c) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) + 3x \right]$.Qu'en déduire ?
   d) Montrer que la droite (D') est asymptote à (Cf) en $+\infty$.
   e) Construire (Cf) .
   f) f^{-1} est-elle dérivable en -1 ? Si oui, déterminer $\left(f^{-1}\right)'(-1)$.

PREP@BAC

Exercice 11

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1} & si\ x \prec -1 \\ f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} & si\ x \geq -1 \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Df de f puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Etudier la continuité de f sur Df.
3. Etudier la dérivabilité de f sur Df puis calculer la dérivée de f sur les intervalles où elle est dérivable, étudier ensuite les variations de f.
4. Dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité :2 cm).Construire la courbe Cf de f .On précisera les équations des asymptotes à Cf ainsi que la tangente à Cf au point d'abscisse zéro.
5. Soit g la restriction de f à $[-1;+\infty[$.
   a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera les variations.
   b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.
   c) Tracer Cg^{-1}.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie sur ℝ, par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité 2cm)

A. Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie par $g(x)=x^3-3x-4$.

1) Dresser le tableau de variation de g.
2) Montrer qu'il existe un réel α unique solution de l'équation $g(\alpha)=0$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2}, prés.
3) Etudier le signe de g sur ℝ.

B. Etude de la fonction f

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de Df.

2) Montrer que, pour tout $x \in ℝ-\{-1,1\}$ $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$. En déduire le tableau de variations de la fonction f/

3) a) Montrer que, pour tout x de Df on a $f(x)=x+2+\dfrac{x+2}{x^2-1}$

b) En déduire que, la courbe de f admet une asymptote oblique D ; puis étudier la position de Cf par rapport à D.

4) Tracer la courbe Cf et la droite D.

5) Déterminer les coordonnées des points de la courbe Cf où la tangente est parallèle à la droite d'équation y=x+2.

EXERCICE 13 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1} & si\ x \prec 0 \end{cases}$.

Soit Cf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Unité 4 cm.

1. Déterminer le domaine de définition de f puis calculer les limites aux bornes du domaine.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en 1.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0; 1\}$ et calculer f ' (x) dans les intervalles où f est dérivable.
4. Résoudre dans $]0;1[$, l'inéquation $2\sqrt{x - x^2} + 1 - 2x \geq 0$. En déduire le signe de f ' (x) sur $]0;1[$.
5. Etudier le signe de f ' (x) sur les autres intervalles.
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Montrer que Cf admet une asymptote oblique Δ en + ∞ dont on donnera une équation.
8. Etudier la position de Cf par rapport à Δ sur $]1;+\infty[$.
9. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) La réciproque g^{-1} est – elle dérivable sur J ?

c) Calculer $(g^{-1})'(2)$.

10. Construire Cf et la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère ainsi que les demi-tangentes à Cf aux points d'abscisses 0 et 1.

EXERCICE 14

Soit *f* la fonction définie par : $f(x) = |x+2| + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$ et *Cf* sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1°) Donner son ensemble de définition *Df* puis écrire *f(x)* sans symbole valeur absolue. On appellera f_1 la restriction de *f* à $]-2;2[\cup]2;+\infty[$ et f_2 la restriction de *f* à $]-\infty;-2[$.

2°) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.

3°) a- Montrer que *Cf* admet deux asymptotes obliques D_1 et D_2 que l'on déterminera.

b- Etudier la position relative de chacune d'elle par rapport à *Cf.*

4°) Donner une équation de la tangente *T* à Cf au point d'abscisse 0 puis étudier la position relative de *Cf* et *T.*

5°) Tracer *Cf* , *T* , D_1 et D_2 dans un repère orthonormé

6°) a- Montrer que *Cf* rencontre l'axe des abscisses du repère en deux points A et B d'abscisses α et β $(\alpha \langle \beta)$

b- Montrer que α est racine de l'équation $x^3 + 2x^2 - 8 = 0$ et que $1{,}5 \langle \alpha \langle 1{,}6$.

7°) a- Justifier l'existence de f_2^{-1}.

b- Justifier que f_2^{-1} est dérivable en 2 puis calculer $(f_2^{-1})'(2)$.

c- Tracer la courbe de f_2^{-1} dans le même repère.

PREP@BAC

T erm S

EXERCICE 15

1°) Soit u la fonction définie par $u(x)=2x^3-3x^2-1$.

a- Etudier les variations de u.

b- Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution réelle, et une seule, α , et que $\alpha \in]1,6\ ;\ 1,7[$

2°) Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x^3}$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé (*unité 4 cm*).

a- Etudier les variations de f.

b- Donner un équation de chacune des tangentes D et D' aux points d'abscisses 0 et 1.

c- Etudier la position de la courbe par rapport à sa tangente D au point d'abscisse 0.

d- Tracer Cf.

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie pour tout x réel par :

$$f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

1°) Etudier les variations de f.

2°)a- Donner une équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 0.

c- Etudier la position de la courbe par rapport à la tangente T.

d- Montrer que le point A(0 ; 1) est centre de symétrie de Cf.

3°) Tracer Cf.

4°) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]1;2[$.(On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction g telle que $g(x) = f(x) - x$.)

5°)a- Montrer que f est une bijection de ℝ sur un intervalle de ℝ que l'on déterminera .

b- Définir sa fonction réciproque f^{-1} en donnant son ensemble de définition, son ensemble d'arrivée et $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

6°) Tracer la courbe de f^{-1}.

EXERCICE 17

On considère la fonction f définie par : f(x)= $\begin{cases} x+1-\dfrac{1}{x+1} \cdots si\ x \prec o \\ \sqrt{|x^2+x|} \cdots si\ x \geq o \end{cases}$

1) Justifier que f est définie sur IR $-\{-1\}$
2) Ecrire la fonction sans le symbole de la valeur absolue.
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1. Interpréter les résultats
4) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
5) Etudier les branches infinies de Cf en l'infini
6) Dresser le tableau de variations de f
7) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm.

PREP@BAC

EXERCICE 18

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x+2}, si\, x\leq 1\\ x-1-3\sqrt{x^2-1}, si\, x\succ 1\end{cases}$

1) Déterminer D_f et les limites aux bornes de D_f
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1 puis interpréter les résultats
3) Etudier les branches infinies de f en $+\infty\, et\, en -\infty$
4) Calculer f'(x) sur chaque intervalle ou f est dérivable

EXERCICE 19

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{3(2x\text{-}1)}{2x^2\text{-}2x+5}$ et (C) sa représentation graphique.

1. Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f.
2. Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que le point $A\left(\dfrac{1}{2};0\right)$ est centre de symétrie de (C).
4. Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point A.
5. Tracer la tangente (T), les asymptotes puis la courbe (C).

EXERCICE 20 :

1. Soit la fonction g définie sur IR par : $g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$.

   Déterminer le sens de variation de la fonction g.

2. Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$, et Cf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

   On note D et D' les droites d'équations respectives : y = -3x et y = x.

   a. Etudier les limites de f en + ∞ et en - ∞ .
   b. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.
   c. Déterminer la limite en -∞ de f(x) – (- 3x). Quelle conséquence graphique peut-on déduire de ce résultat ?
   d. Montrer que la droite D' est asymptote à la courbe Cf en $+\infty$.
   e. Etudier la position de Cf par rapport aux droites D et D'.

PREP@BAC

T^erm S

EXERCICE 21 :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \, si \, x < -1 \\ f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \, si \, x \geq -1 \end{cases}$

1) Donner le domaine de définition de f et calculer les limites à ses bornes.
2) Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition D_f.
3) Etudier la dérivabilité de f sur D_f , puis calculer les dérivées de f où elle est dérivable, puis dresser le tableau de variation de f
4) Dans un repère orthonormé (unité 2 cm), construire la courbe C_f. On précisera les équations des asymptotes à C_f ainsi que la tangente au point d'abscisse $x_0=0$
5) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[-1;+\infty[$
   a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on déterminera les variations.
   b) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique dans l'intervalle $[-1;+\infty[$
   c) Calculer $g^{-1}(1)$
   d) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $(g^{-1})'(1)$.
   e) Construire la courbe de $C_{g^{-1}}$ de g^{-1} dans le même repère que C_f.

EXERCICE 22 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} \; si \; x \geq 0 \\ x + 1 + \tan x \; si \; x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[\end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats.
4) Déterminer les limites aux bornes de f et étudier les branches infinies
5) Dresser le tableau de variations de f
6) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2};0\right[$ puis vérifier que $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{6};-\dfrac{\pi}{12}\right[$
7) Soit g la restriction de f à $[0;+\infty[$
   a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition et ses variations
   b) Etudier la dérivabilité de g^{-1}. Calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$
   c) Exprimer $g^{-1}(x)$
   d) Tracer Cf et Cg^{-1} dans le même repère

PREP@BAC

EXERCICE 23 :

Soit $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \ si\ x\leq 0 \\ |1-x|\sqrt{x^2+1} \ si\ x>0 \end{cases}$

1) Ecrire f(x) sans valeur absolue
2) Etudier continuité de f en 0
3) Etudier dérivabilité de f en 0 et 1. interpréter les résultats.
4) Etudier les branches infinies
5) Dresser le tableau de variations de f
6) Montrer que l'équation f(x)=x admet une unique solution $\alpha\in[0;1]$ puis vérifier que $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$
7) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

EXERCICE 24 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{\cos^3 x}$

1) Trouver la limite de f en $\frac{\pi}{2}$
2) Montrer que $f'(x)=\dfrac{3\cos 2x}{\cos^4 x}$ et dresser le tableau de variation de f
3) Tracer Cf

EXERCICE 25 :

Soit f définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $par\ f(x)=\tan x$

1) Etudier les variations de f
2) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{1} dont précisera son ensemble de définition
3) Etudier la dérivabilité de f^{1} puis montrer que $\forall x\in IR\ \left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
4) Soit $g(x)=f^{-1}(x)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   a) Montrer que g est une fonction constante
   b) En déduire que $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ g(x)=-\frac{\pi}{2}$ et que $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ g(x)=\frac{\pi}{2}$

PREP@BAC

T^{erm}S

EXERCICE 26 :

On considère la fonction f *définie par* $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x^2+x|} & si\ x<0\\ x+1-\dfrac{1}{x+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$

8) Justifier que f est définie sur IR
9) Ecrire la fonction sans le symbole de la valeur absolue.
10) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats
11) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter les résultats
12) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
13) Etudier les branches infinies de Cf en l'infini
14) Dresser le tableau de variations de f
15) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm
16) Soit g la restriction de f à $[0;+\infty[$
    a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition et ses variations.
    b) Etudier la dérivabilité de g^{-1}. Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$
    c) Tracer Cg^{-1} dans le même repère

EXERCICE 27 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}x+2-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} & si\ x<0\\ \dfrac{x+1}{\sqrt{|x^2-2x|+1}} & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) justifier que la fonction est définie sur IR
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats
4) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter les résultats.
5) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
6) Etudier les branches infinies de Cf
7) Etablir le tableau de variations de f
8) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2 cm
9) Soit g la restriction de f à $[2;+\infty[$

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition et ses variations.
b) Etudier la dérivabilité de g^{-1}
c) Calculer $\left(g^{-1}\right)'(2)$
d) Expliciter $g^{-1}(x)$
e) Tracer Cg^{-1}

EXERCICE 28 :

Soit $f(x)=\dfrac{-1-\cos x}{2\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction
2) Justifier le choix de $[0,\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ comme intervalle d'étude
3) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ puis tracer Cf sur $]-\pi,\pi]-\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$

EXERCICE 29 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\cos 3x+1}{\cos^3 x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction
2) Déterminer le choix de $[0,\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$ comme intervalle d'étude
3) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$
4) Tracer Cf sur $[-\pi,\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{-\pi}{2}\right\}$

EXERCICE 30 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x^2+4} & si\ x<0 \\ \sqrt{|x^2-4|} & si\ x\geq 0 \end{cases}$

1) Ecrire f(x) sans valeur absolue
2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 2 puis interpréter les résultats.

.

3) Etudier les branches infinies en l'infini

4) Montrer qu'il existe un unique $\alpha\in[0;2]$ solution de l'équation f(x)=x.Vérifier que $\alpha\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$

. Que représente graphiquement α .

6) Tracer soigneusement Cf dans un repère orthonormé.

PREP@BAC

8) a) Montrer que $\forall x \in \left[1;\frac{3}{2}\right] |f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}$

b) En déduire que $|f(x)-\alpha| \leq \frac{3\sqrt{7}}{7}|x-\alpha|$

EXERCICE 31 :

Soit $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x + 2\cos x$

1) Justifier le choix de $[0,\pi]$ comme intervalle d'étude
1) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$ puis tracer sur $]-\pi,\pi]$

EXERCICE 32 :

Soit $f(x)=\frac{1+\cos x}{2\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction
2) Justifier le choix de $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ comme intervalle d'étude
3) Etudier les variations de f sur $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ puis tracer Cf sur $]-\pi,\pi]-\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$

EXERCICE 33 :

Soit f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{\sin 3x}{\cos^3 x}$

1) Déterminer la limite de f en $\frac{\pi}{2}$
2) Dresser le tableau de variations de la fonction puis tracer la courbe

EXERCICE 34 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1} \ si \ x \geq 0 \\ x+1+\tan x \ si \ x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter les résultats.
4) Déterminer les limites aux bornes de f et étudier les branches infinies
5) Dresser le tableau de variations de f
6) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$ puis vérifier que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{6};-\frac{\pi}{12}\right[$
7) Soit g la restriction de f à $[0;+\infty[$

PREP@BAC

a) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera son ensemble de définition et ses variations

b) Etudier la dérivabilité de g^{-1}. Calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

c) Exprimer $g^{-1}(x)$

d) Tracer Cf et Cg^{-1} dans le même repère

PREP@BAC

FONCTIONS LOGARITHMES

EXERCICE 1

A Exprimer à l'aide de ln 2 et ln 3 les nombres $A = \ln 12$ $B = \ln\frac{1}{36}$ $C = \ln\sqrt{72}$ $D = \ln 0{,}75$

$E = \ln(2e^2) - \ln(9e)$ $F = \ln 6e - \ln 2e$

B Soit f et g les fonctions définies par $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x-3)$ et $g(x) = \ln(x-1)(x-3)$.

1- Préciser Df et Dg.
2- Résoudre dans IR les équations $f(x) = \ln 3 + 3\ln 2$ et $g(x) = \ln 3 + 3\ln 2$
3- Résoudre dans IR les inéquations $f(x) \geq \ln 3 + 3\ln 2$ et $g(x) \geq= \ln 3 + 3\ln 2$.
4- On considère $P(x) = 3x^3 - 8x^2 - x + 10$ Calculer P (2) puis mettre (x – 2) en facteur dans P
Résoudre alors $3(\ln x)^3 - 8(\ln x)^2 - (\ln x) + 10 = 0$

C a) Résoudre $\ln(x+1) + \ln(2x+1) = 0$, b) démontrer que si $x \geq \sqrt{2}$; alors $x + \ln(x^2 - 1) \geq x$

c) Résoudre $2\ln(x+1) - \ln(x+3) = 0$ d) Résoudre $(\ln x)^2 - 3\ln x + 4 \leq 0$

e) Résoudre $(\ln x)^2 - \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$, e) En utilisant log trouver le plus petit n tel que $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n \geq 0{,}99$

EXERCICE 2

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

- $\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln|x-4|$; $\ln^2 x - \ln(\frac{1}{x}) = 2$; $\ln(\ln x) > 0$.
- $\ln x - 3 > \frac{4}{\ln x}$; $\ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \geq \frac{1}{2}$; $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) < 0$.

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases}(\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3\end{cases}$$

EXERCICE 3

Calcul de limites

1- Etudier la limite en 0 et en $+\infty$ de f(x) :

$f(x) = \sqrt{x}\ln x$; $f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}$; $f(x) = x\ln(x^2)$.

Déterminer les limites suivantes :

$$a)\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right);b)\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x);c)\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}};d)\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2};e)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)}{x}$$

PREP@BAC

$f)\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$; $g)\lim_{x\to -1}(x-1)\ln(x-1)$; $h)\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x-1}$; $i)\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right)$; $j)\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$

2- calculer les limites de f en $+\infty$.

$f(x)=\ln x-x$; $f(x)=\ln(x-1)-\ln x$; $f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$; $f(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x}$.

3- Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.

a- Donner Df
b- Calculer les limites de f aux bornes de Df.

EXERCICE 4

1- Préciser l'ensemble de dérivabilité de f puis donner la fonction dérivée de f.

$f(x)=x^2\ln(x-1)$; $f(x)=x\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$; $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$; $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

$f_1(x)=\frac{x}{\ln x}$ définie sur $]1;+\infty[$ $f_2(x)=\frac{1}{x}+\ln x$ définie sur $]0;+\infty[$ $f_3(x)=\ln(x^2+x+1)$

$f_4(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ $f_5(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ définie sur $]-1;+\infty[$

2- Etudier les variations de f définie par :

$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$; $f(x)=\frac{1}{x^2\ln x}$; $f(x)=\frac{\ln x+2}{\ln x-1}$

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x)=x\ln x-x & si\quad x\succ 0\\ f(0)=0 \end{cases}$$

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0
2- Etudier les variations de f.
3- Tracer la courbe de f

EXERCICE 6

On étudie $g(x)=-8\ln x+x^2+4$ définie sur $]0;+\infty[$

1°) Calculer g '(x) et établir le tableau des variations de g. En déduire le signe de g.

2°) On considère $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2}\ln x$. Calculer f '(x) et démontrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

3°) Démontrer que l'équation f (x) = 1 admet une solution unique dans l'intervalle [1 ; e] et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4°) Démontrer (sans calcul) que $g(\alpha)=\frac{\alpha^4+16}{\alpha^2+4}$

PREP@BAC

PROBLEME 1

Soit f la fonction définie par $f(x)=2x+(1-2x)\ln x$.

1°) On considère la fonction g définie par : $g(x)=\frac{1}{x}-2\ln x$.

- a- Etudier les variations de g.
- b- Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α. Donner un encadrement à 10^{-2} prés de α.
- c- Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

2°) a- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. Donner le tableau de variations de f.

- b- Montrer que $\ln\alpha=\frac{1}{2\alpha}$ et que $f(\alpha)=2\alpha-1+\frac{1}{2\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
- c- Construire *Cf* courbe de *f*.

PROBLEME 2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

1°) Etudier les variations de *f*.

2°) Montrer que le point A (1 ; –1) est centre de symétrie de *Cf* courbe de *f*.

3°) Tracer *Cf* dans un repère orthonormé *(unité 2cm)*

4°) Montrer que pour tout $x \rangle 1$, $f(x)=-1-\frac{1}{x-1}-\frac{\ln(x-1)}{x-1}$. En déduire l'aire A(D) du domaine: $D=\{M(x,y);2\le x\le\alpha \text{ et } f(x)\le y\le -1\};\alpha\ge 2$

5°) Calculer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}$ A(D).

PROBLEME 3

A- Soit g la fonction définie par : $g(x)=1-x^2-x^2\ln x$.

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2°)a- Calculer $g(1)$. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on déterminera.

- b- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B- Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$.

1°)a- Montrer que $f'(x)=-g(x)$.

- b- Dresser le tableau de variations de *f*.
- c- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions distinctes 1 et α tel que $2,2\langle\alpha\langle 2,3$.

d- Tracer Cf courbe de *f* dans un repère orthonormé du plan. On placera les points d'intersection de Cf avec la droite $y = x$.

2°) Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$.

a- Justifier l'existence de h^{-1} .

b- h^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

c- Tracer la courbe Ch^{-1} de h^{-1}

3°) a- Calculer l'aire A (D) du domaine D délimité par la courbe Cf, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

b- En déduire l'aire du domaine délimité par Ch, Ch^{-1} ,les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

PROBLEME 4

Partie A

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$

1°) Etudier les variations de h. Calculer *h (0)* et *h (–2)*

2°) En déduire le signe de *h(x)* pour $x \in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie par : $f(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{x+1} - x$.

1°) Montrer pour tout réel x de *Df*, $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ .En déduire le signe de *f'(x)*.

2°) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition *Df*.
Dresser le tableau de variation de *f*.

3°) Montrer que la droite *D* d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe *Cf* de *f*.
Etudier la position relative de *Cf* et *D*.

4°) Montrer que le point *I (–1 ; 1)* est un centre de symétrie de *Cf*.

5°) Tracer la courbe *Cf* dans un repère orthonormé **unité 1 cm**.

6°) Soit α un réel positif, on note A (α) l'aire du domaine délimitée par la courbe, la droite *D* et les droites d'équations $x = 0$, $x = \alpha$.

Calculer en fonction de α A (α)

Calculer la limite de A (α) lorsque α tend vers $+\infty$.

PROBLEME 5

A)

Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x} - 2 - \ln x$.

1) Etudier les variations de g .

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,+\infty[$. Vérifier que $0,6 < \alpha < 0,7$.

2) En déduire le signe de $g(x)$.

B)

Soit $$f(x) = \begin{cases} (1-x)(1+\ln x) & si \quad x \geq 1 \\ (1-x)\ln(1-x) & si \quad x < 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Etudier la continuité de f en 1.
3) Etudier la dérivabilité de f en 1.
4) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
5) Etudier les branches infinies de f.
6) Dresser le tableau de variations de f.
7) Tracer C_f dans un repère orthonormé unité 2cm
8) Soit h la restriction de f à l'ensemble $[1,+\infty[$
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.
   b) Résoudre $h^{-1}(x)=e$ puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(2-2e)$.
   c) Tracer la courbe de h^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 6

A- Soit g la fonction définie par : $g(x)=1-x^2-x^2\ln x$.

1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

2°) a- Calculer $g(1)$. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on déterminera.

c- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B- Soit *f* la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$.

1°) a- Montrer que $f'(x)=-g(x)$.

e- Dresser le tableau de variations de *f*.

f- Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet deux solutions distinctes 1 et α tel que $2,2\langle\alpha\langle 2,3$.

g- Tracer Cf courbe de *f* dans un repère orthonormé du plan. On placera les points d'intersection de Cf avec la droite y = x.

2°) Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$.

d- Justifier l'existence de h^{-1}.

e- h^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

f- Tracer la courbe Ch^{-1} de h^{-1}.

PROBLEME 7

PARTIE A

Soit g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$

1) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.(on pourra poser $X=x+1$ pour la limite à droite en -1)
2) Dresser le tableau de variations de g
3) Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $3,8<\alpha<4$
4) Préciser suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$

PARTIE B

PREP@BAC

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Montrer que $\forall x>0,\quad f'(t)=\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}g(t)$
3) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4) Dresser le tableau de variation de f
5) Construire Cf dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité : 1cm sur $(x'x)$ et 5cm sur $(y'y)$.

PROBLEME 8

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right) & si\ x\succ 0\\ f(0)=0\end{cases}$.

1. f est- elle dérivable en 0 ?
2. Préciser la dérivée de f pour $x\succ 0$; dresser le tableau de variation de f.
3. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

   a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A d'abscisse 1.Etudier la position relative de (C) et de T. A cet effet, on précisera le signe de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$ en étudiant sa dérivée h' et sa dérivée h''.

   b) Construire la courbe (C), la tangente T, ainsi les tangentes aux points où (C) rencontre l'axe des abscisses.

COMPLEMENTS FONCTION LOGARITHME

Exercice 1 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f de ℝ vers ℝ définie par :

$(1)\colon f(x)=\ln(2-3x)$ $\qquad(2)\colon f(x)=\ln|2-3x|$

$(3)\colon f(x)=\ln[(x+5)^2]$ $\qquad(4)\colon f(x)=\ln\sqrt{x+5}$

$(5)\colon f(x)=\ln(2x+5)+\ln(5x-2)$ $\qquad(6)\colon f(x)=\ln\left(\frac{2x-3}{5x-2}\right)$

$(7)\colon f(x)=\ln\left|\frac{2x-3}{5x-2}\right|$

Exercice 2 :

Calculer la valeur exacte de chacun des nombres suivants :

(1) $\ln(e^2)$ (2) $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ (3) $\ln(\sqrt{e})$

(4) $\ln\left(\frac{e^4}{\sqrt{e}}\right)$ (5) $\ln e^2\sqrt{e}$ (6) $\ln(\sqrt{e})^3$

Exercice 3 :

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

PREP@BAC

$(1)\ \ln(5-2x)=0$ $(2)\ \ln(x-3)=\ln(2+x)$ $(3)\ \ln(x^2-4)=\ln(1-4x)$
$(4)\ \ln(x^2-2x+2)=1$; $(5)\ \ln(x-1)+\ln(x+1)=\ln(2+x)$
$(6)\ \ln(5x+2)-\ln(x+2)=\ln(x-2)$

Exercice4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$(1)\ \ln(2x-3)+2\ln(x+1)=\ln(x-1)$

$(2)\ 3\ln(x+1)=1$; $(3):\ \ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$

$(4):\ \ln\left|\frac{1}{2}+x\right|=\ln|x|$ $(5): \ln|x-1|+\ln|2x+1|=0$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(1)\ \ln(\ln x)>0$; $(2)\ \ln x<3\ln 2$
$(3)\ \ln(x^3-x+1)\geq\ln(2-x)$; $(4)\ (1-\ln x)(3+\ln x)\geq 0$
$(5)(\ln x^2)\leq 1$ $(6)\ \ln(x^2-9)\leq 0$

Exercice 6 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$(1)\ \begin{cases} x-y=-2 \\ \ln x+\ln y=\ln 2\end{cases}$ $(2)\ \begin{cases} 2\ln x+\ln y=1 \\ 5\ln x+3\ln y=4\end{cases}$

$(3)\ \begin{cases} (\ln x)(\ln y)=-15 \\ \ln(xy)=-2\end{cases}$ $(4)\ \begin{cases} x^2+y^2=29 \\ \ln x+\ln y=\ln 10\end{cases}$

Exercice 7 :

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de la fonction f pour les valeurs indiquées :

$(1)\ f: x\longmapsto\frac{1}{x}-\ln x,$ en 0 et en $+\infty$

$(2)\ f: x\to\frac{1}{\ln x}$ en 1 et en $+\infty$

$(3)\ f: x\to\frac{1-\ln x}{x}$ en 0 et en $+\infty$

$(4)\ f: x\to x(1-\ln x),$ en 0 et en $+\infty$

Exercice 8 :

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de la fonction f pour les valeurs indiquées :

$(1)\ f: x\longmapsto\ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right)$ en 5 et en $+\infty$

$(2)\ f: x\longmapsto\ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$ en 1 et en 2.

$(3)\ f:\ x\longmapsto(x-2)\ln(x-2)$, en 2 et $+\infty$

Exercice 9 :

Calculer les limites suivantes :

$(1)\ \lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$; $(2)\ \lim_{x\to-\infty}(x+\ln|x|)$

$(3)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{3x+2}$; $(4)\ \lim_{x\to+\infty}(5x+3-4\ln x)$

$(5)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; $(6)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+3}{\ln x+1}$

$(7)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$; $(8)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$

Exercice 10 :

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to 0} x^3 \ln x$; (2) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$; (3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$

Exercice 11 :

Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$ (2) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{x-1}$

(3) $\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$ (4) $\lim_{x\to e}\frac{x\ln x-e}{x-e}$

Exercice 12 :

Pour chacune des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies ci-dessous :

1. Déterminer l'ensemble de définition de D_f.
2. Justifier que f est dérivable en tout élément de D_f et calculer $f'(x)$.

(1) $f(x) = \ln(x^2-2x+1)$; (2) $f(x) = \ln(|1-3x|)$

(3) $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$; (4) $f(x) = \frac{\ln x+1}{\ln x-1}$

(5) $f(x) = \sqrt{\ln x} + 3x$; (6) $f(x) = \ln\sqrt{x} - 5x$.

Exercice 13 :

1. Déterminer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par :
$f(x) = (x+1)[2\ln(x+1)+3]$.
2. Démontrer que : pour tout x de $]1\,;+\infty[$, $(x+1)f'(x) - f(x) = 2(x+1)$.

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1

Exercice 15 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur de la fonction f.

(1)$f: x \mapsto \frac{3}{2-x}$, avec $K =]2\,;+\infty[$

(2) $f: x \mapsto \frac{-4x-2}{x^2+x+1}$, avec $K = \mathbb{R}$.

(3) $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, avec $K =]0\,;+\infty[$.

(4) $f: x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$, avec $K =]1\,;+\infty[$.

Exercice16 :

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\ln x$.

Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

En déduire une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction ln.

Exercice 17 :

On donne une fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{3x^2+2x-2}{3x-1}$.

Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{3x+1}$.

Déterminer une primitive sur $]-\infty\,;\frac{1}{3}[$ et une primitive sur $\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$ de la fonction f.

PREP@BAC

Exercice 18 :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par: $f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$.

1. Déterminer les nombres réels a et b tels que : pour tout x distinct de $-\frac{1}{2}$.

$$f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$$

2. En déduire les primitives de sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

3. Déterminer la primitive F de f sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ vérifiant $F(0) = 1$.

Exercice19 :

1) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \; si \; x < 1 \\ f(x) = \ln x \; si \; x \geq 1 \end{cases}$

a)Montrer que f est continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1.Interpréter ce résultat obtenu graphiquement.

2) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = 3x^2 + 2x + 1 \; si \; x < 0 \\ f(x) = x + 1 + \ln(x+1) \; si \; x \geq 0 \end{cases}$

a)Montrer que g est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de g en 0.Interpréter ce résultat obtenu graphiquement.

Exercice 20 :

Soit $g(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

1) Démontrer que g est impaire.
2) Etudier les variations de g.
3) Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion
4) Tracer C_g

Exercice 21:

Soit φ la fonction définie sur R vers R par : $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

1) a)Etudier les variations deφ .

   b) Tracer C courbe représentative de ψ^{-1}dans un repère.

2) Soit ψ la restriction de ψ à l'intervalle $]-1; 1[$

a) Démontrer sans calcul que ψ admet une bijection réciproque ψ^{-1}.En préciser l'ensemble de définition

b) Déterminer $\psi^{-1}(x)$

3) a)Soit x et $\frac{1}{x}$ les éléments de l'ensemble de définition de ψ .Calculer $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $\varphi(x)$

   b) Déterminer $\psi^{-1} \circ \varphi$

Exercice 22:

Soit $P(x) = 3x^3 - 9x^2 - 39x + 45$

1) a)Vérifier que 5 est racine de P..

b) Résoudre dans R l'équation $P(x)=0$

c)Résoudre l'inéquation $P(x)\geq 0$

2) En déduire les solutions dans R de : $a)\ln\left(\dfrac{3x^3+45}{x}\right)=\ln(9x+39)$

$b)3(\ln x)^3-9(\ln x)^2-39\ln x+45=0$

Exercice 23:

Partie :A Dans cette partie, on étudie le signe de la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. a. Calculer g(1) et g(2).
   Montrer que l'équation $g(x)=0$ à une solution unique α dans $]0;+\infty[$.
   b. Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}..
3. Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Partie : B L'objet de cette partie est l'étude de la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2+x}$.

On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

(Unités : 2cm sur (xx') ,4cmsur (yy')).

1. Etudier les limites de f en 0 et $+\infty$.Interpréter géométriquement ces limites.
2. a. Montrer que, pour tout $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}.g(x)$.
   b. En déduire les variations de f .
   c. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variation de f
3. Construire.

Exercice 24:

Soit f la fonction définie sur [0; +∞[par $f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\ si\ x\succ 0\ et\ f(0)=\dfrac{1}{2}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

(Unité 1 cm).

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle]0; +∞[par :

PREP@BAC

$g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{4}$.

a) Donner le sens de variation de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et en déduire le signe de g (x).

b) Montrer que pour tout x de $[2;3]$, $g(x)<\frac{1}{2}$.

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Etudier les variations de f.

d) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et tracer (C) et(Δ) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Soit $I=[2;3]$, et h la fonction définie sur I par $h(x)=f(x)-x$.

a) Déterminer le sens de variation de f sur I.

b) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique $\alpha\in I$.

4) a) Montrer que quel que soit $x\in I$, $0<f'(x)<\frac{1}{2}$.

b) En déduire que quel que soit $x\in I$, $|f(x)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

5) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(u_n)=u_{n+1}$.

a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ $2<u_n<3$.

b) Etablir que :

i) $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

ii) $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c)En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

d) Déterminer l'entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} prés .Et en déduire une approximation de α à 10^{-3} prés.

e)Calculer l'aire du domaine $D=\left\{M(x;y)/1\leq x\leq e \text{ et } f(x)\leq y\leq\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}\right\}$

Dans chacun des cas ci-dessous étudier et représenter graphiquement la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = \ln(2x+1)$ (2) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

(3) $f(x) = \ln(1-x^2)$ (4) $f(x) = x\ln x - x$.

(5) $f(x) = \ln(|x+1|)$ (6) $f(x) = x - \ln x$.

Exercice 20:

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x\ln(1+\frac{1}{x^2}) si\, x \succ 0 \\ 0 si\, x = 0 \end{cases}$

C est la courbe représentative de f dans un repère ortho normal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 5cm).

A. Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$g(x) = \ln(1+\frac{1}{x^2}) - \frac{2}{x^2+1}$

1. a. Déterminer la fonction dérivée de g.

b. Etudier le signe de g'(x) selon les valeurs de x.

2. Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.

3. a. Dresser le tableau de variation de g.

b. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha \succ 0$ tel que $g(\alpha) = 0$ .Vérifier que $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$.

4. Déterminer le signe de g(x) sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

B. Etude de la fonction

1. Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = g(x)$ .En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

2. a. Etudier la limite de $xf(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.(On pourra poser $h = \frac{1}{x^2}$).

b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

3. **Etude de f en 0**

a. Montrer que pour $x \succ 0, f(x) = x\ln(x^2+1) - 2x\ln x$.

b. En admettant le résultat $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$,expliquer pourquoi la fonction f est continue en 0.

c. Etudier la dérivabilité de f en 0.Préciser la tangente à la courbe (C) au point O.

PREP@BAC

4.a) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$.

b.) Obtenir un encadrement de $f(\alpha)$ à partir de l'encadrement .de $0.5 \prec \alpha \prec 0.6$.

5. Dresser le tableau de variation de f .Tracer la courbe (C).

Exercice 23:

f est la fonction définie sur]0 ; $+\infty$ [par $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout réel x de]0 ; +∞ [, $f'(x)=\dfrac{x+1+\ln x}{(x+1)^2}$.

2. La fonction φ est définie sur]0 ; $+\infty$ [par $\varphi(x)=x+1+\ln x$. Etudier ses variations, en déduire que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une solution unique β. Etudier le signe de φ.

3. En déduire les variations de f, étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

4. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'équation $f(x)=n$ admet une solution unique que l'on notera α_n. On cherche maintenant à étudier la suite (α_n).

5. Montrer que, pour tout entier n > 0, $f(e^n)<n$. En déduire que $\alpha_n > e^n$ et la limite de (α_n)

6. Prouver que la relation $f(\alpha_n)=n$ peut se mettre sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right)=\dfrac{n}{\alpha_n}$.

En déduire la limite de $\dfrac{\alpha_n}{e^n}$.

EXRERCICE 24

On considère la fonction numérique g définie sur $I=\left[-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par

$$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

1°) Démontrer que $g'(t)=\dfrac{-t^3}{1+t} \quad \forall t\in I$

2°) Déduire de 1°) que $\forall\, t\in I$ on a $\begin{cases}-2t^3\le g'(t)\le 0 \;si\; t\ge 0\\ 0\le g'(t)\le -2t^3 \;si\; \dfrac{-1}{2}\le t\le 0\end{cases}$

En déduire que $\forall\, t\in I \; -\dfrac{1}{2}x^4\le g(x)\le 0$

PREP@BAC

3°) On considère la fonction numérique f définie (par) sur $\left]-1\,;+\infty\right[$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2} & si\, x\neq 0 \\ f(o)=\dfrac{1}{2} & \end{cases}$$

On note C_k sa courbe représentative

a) vérifier que $\forall\ x\geq -\frac{1}{2}$ et $x\neq 0$, on a $f(x)=-\frac{g(x)}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{x}{3}$

b) En utilisant l'inégalité trouvée au 2°) démontrer que f dérivable en 0 et déterminer une équation de la tangente (T) à C_f au point d'abscisse 0

c) f est elle continue eu 0 ? Justifier votre réponse

4°) Soit h la fonction définie (par) sur $\left]-1,+\infty\right[$ par h(x) = $\frac{-x^2-2x}{1+x}+\ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variation de h

b) Calculer h (0) et en déduire le signe h sur $\left]-1,+\infty\right[$

e) démontrer que $\forall x\in\left]-1,0\right[\cup\left]o,+\infty\right[$ on a f'(x) = $\frac{h(x)}{x^3}$

d) Dresser le tableau de variation de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition

c) Construire dans un on repère CF et (T)

PREP@BAC

FONCTION EXPONENETIELLE

EXERCICE 1 :

Simplifier les expressions algébriques suivantes :

$$\frac{2e^2}{\sqrt{e}} \;,\; \frac{\sqrt{e}}{e.e^{-2}} \;,\; \frac{3e^{-3}}{\left(\sqrt{e}\right)^3}e^{-2} \;,\; e-\frac{1}{1-\frac{1}{e+\frac{1}{1-e}}} \;,\; \frac{\left(3e^{1,5}.\left(-2e^{-2}\right)\right)^3}{2\left(3e^{-2}\right)^2} \;,\; e^{-10x+3}\left(e^{-x-2}\right)^{-2}\left(e^{3x-2}\right)^3$$

EXERCICE 2 :

Montrer que, pour tout réel x, on a :

a) $\dfrac{e^{-x}+1}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^x+1}{e^{2x}-1}$ b) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$

EXERCICE 3 :

Soit la fonction $f:x\mapsto\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition .

2. Etudier la parité de cette fonction.

EXERCICE 4 :

On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2}{e^x+1}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur IR.

2. Montrer que, pour tout réel x , on a : $f(-x)+f(x)=2$.

3. Quelle conséquence graphique, doit-on en tirer ?

EXERCICE 5 :

On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{2e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition Df .

PREP@BAC

Tle S

2. Montrer que, pour tout $x \in Df$, on a : $f(x) = \dfrac{e^{2x}+2}{1-e^{2x}}$.

3.Pour tout $x \in Df$, évaluer la quantité : $f(-x)+f(x)$.

Quelle conséquence graphique, doit-on en tirer ?

EXERCICE 6 :

Soit $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

a) Calculer $p(1)$ en déduire une factorisation complète de $p(x)$
b) Résoudre $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$ puis $2e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$
c) Résoudre $p(x) > 0$
d) Résoudre $2(\ln x)^3 - 3(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 > 0$ puis $2e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^{x} + 2 \geq 0$.

Soit $f(x) = (1-x)(1+e^{x})$

1) Etudier les limites aux bornes de D_f . Etudier les branches infinies.. Etudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
2) Tracer la courbe de f.

EXERCICE 8 :

1) Soit $f(x) = (2-x)e^{-x} + 1$. Dresser le tableau de variations puis en déduire le signe de $f(x)$.
2) Soit $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}(1+\ln x) \ si \ x \geq 1 \\ (x-1)e^{-x} + x \ si \ x < 1 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 1.

b) Dresser le tableau de variations.

c) Tracer C_g dans un repère orthonormé unité 2cm.

EXERCICE 9 :

1) Soit $f(x) = x - 1 - \ln x$. Etudier les variations de f. Calculer $f(1)$ puis en déduire le signe de la fonction.
2) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \ si \ x < 0 \\ x(x - 2\ln x) \ si \ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0

b) Etudier les branches infinies.
c) Dresser le tableau de variations de la fonction.
d) Tracer la courbe de la fonction

EXERCICE 10:

Soit g définie par $g(x)=(1-x)e^{-x}-1$

1) Dresser le tableau de variations de g
2) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$

Soit f définie par $f(x)=\begin{cases}1-x+xe^{-x} \; si \; x\leq 0\\ x(\ln x)^2+x+1 \;\; si \; x>0\\ f(0)=1\end{cases}$

1) Justifier que f est définie sur IR
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 .Interpréter les résultats.
4) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
5) Etudier les branches infinies de Cf
6) Dresser le tableau de variations de f
7) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placer le point d'abscisse 1).

JE M'ENTRAINE ENCORE

Exercice 1 :

1. Soit x un réel, développer l'expression $P(x)=(x+1)(x-2)(2x-1)$.
2. En déduire les solutions de l'équation et de l'inéquation suivantes :

a) $\dfrac{2e^{3x}-3e^{2x}}{3e^{x}-2}=1$, b) $2e^{3x}-3e^{2x}-3e^{x}+2\geq 0$.

Exercice 2 :

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition, étudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée dans l'ensemble où elle est dérivable :

$f(x)=\dfrac{e^{x^2}-2e^{-x}}{e^{x}+1}$; $g(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{x}$; $h(x)=(e^{x}-1)^{\frac{1}{x}}$

PROBLEME 1

A) Soit la fonction h définie par $h(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

1) déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
2) Dresser le tableau de variation de h
3) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]0,1[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés
4) En déduire le signe de $h(x)$

PREP@BAC

T^{erm}S

B)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & si\ x<0\\ x-1+\left(x^2+2\right)e^{-x} & si\ x\geq 0\end{cases}$

1) justifier que f est définie sur IR
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
4) Déterminer les limites aux bornes de Df
5) Etudier les branches infinies de Cf
6) Dresser le tableau de variation de f .
7) Montrer que $f(\alpha)=\alpha\left(1+2e^{-\alpha}\right)$
8) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

C)

Soit g la restriction de f à $\left]-\infty,-1\right]$

1) Prouver l'existence de g^{-1} . Etudier la dérivabilité de g^{-1}
2) Résoudre $g^{-1}(x)=-2$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{2-e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$
3) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 2

1) Soit $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$. Dresser le tableau de variation de g puis en déduire le signe de $g(x)$

2) Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ x<0\\ x(1-\ln x)^2 & si\ x>0\\ f(0)=0 & \end{cases}$

a) Préciser l'ensemble de définition puis étudier la continuité de f et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.

b) Etudier les branches infinies de Cf . On montrera que la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}$

c) Résoudre l'équation $(\ln x)^2-1\geq 0$

d) Dresser le tableau de variation de f puis tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

3) Soit h la restriction de f à $\left[e;+\infty\right[$

PREP@BAC

a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera son ensemble de définition. Etudier la dérivabilité de h^{-1} .

b) Calculer $h(e^2)$. En déduire $(h^{-1})'(e^2)$

c) Tracer Ch^{-1}

PROBLEME 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - e^{2x-2}$

PARTIE A

1) Déterminer la limite de $f \text{ en } -\infty$
2) Vérifier que pour tout réel x non nul $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$.En déduire la limite en $+\infty$
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que la droite $D : y = x$ est asymptote en $-\infty$.Etudier la position relative de $Cf \text{ et } D$
5) Etudier la branche infinie de Cf en $+\infty$
6) On A le point de la courbe d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente T en A
7) On note $I = [0; 0{,}5]$ démontrer que $f(x) = 0$ admet dans I une solution unique a.Donner une valeur approchée à 10^{-1} prés de a
8) Construire Cf, D et T

PROBLEME 4

1) Soit $h(x) = (1-x)e^x - 1$. Dresser le tableau de variation de h et en déduire le signe de $h(x)$
2) $f(x) = \begin{cases} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) & si\ x < 0 \\ -x + x\ln x\ si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   a) Préciser l'ensemble de définition puis étudier la continuité et la dérivabilité en 0. Interpréter les résultats.

   b) Etudier les branches infinies de Cf

   c) Montrer que si $x \in]-\infty,0[$ $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ et préciser alors le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,0[$

   d) Dresser le tableau de variations de f puis tracer Cf
3) Soit k la restriction de f à $[1,+\infty[$

   a) Justifier l'existence de k^{-1}.Etudier sa dérivabilité

   b) Résoudre $k^{-1}(x) = e$ puis calculer $(k^{-1})'(0)$

   c) Tracer la courbe de k^{-1}

PROBLEME 5

Soit la fonction définie sur IR par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x réel
2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
3) Dresser le tableau de variations de g
4) Donner le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(\ ) = e^{-2x}\ln\left(1+2e^{x}\right)$

1) Montrer que $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$
2) Déterminer
   a) La limite de $f\ en -\infty$
   b) La limite de $f\ en +\infty$. On pourra remarquer que si on pose

$$X = 1+2e^{x},\ f(x)\ s'écrit\ 4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}$$

3) Dresser le tableau de variations de f
4) Tracer Cf dans un repère orthonormé
5) Soit α un réel strictement positif.

Vérifier que pour tout réel x, $\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}} = e^{-x} - 2\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right)$ en déduire la valeur de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

LORSQUE EXPO ET LN DINENT ENSEMBLE, QUI PAIE LA NOTE ?

PROBLEME I

PARTIE A

$$Soit\ g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

1) Etudier les variations de g
2) Calculer g(1) puis en déduire le signe de g(x).

PARTIE B

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x-1-\dfrac{\ln x}{x} \ si\ x>1 \\ \sqrt{1-x}\,e^{x}\ si\ x \le 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 1.
2) Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter les résultats.
3) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4) Etudier les branches infinies de f en l'infini
5) Dresser le tableau de variations de f
6) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé unité 4cm

PARTIE C

Soit h la restriction de f à $\left[\frac{1}{2},1\right]$

1) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ solution de l'équation h(x)=x. Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés
2) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle à préciser
3) Tracer la courbe de h^{-1}

PROBLEME II

PARTIE A

On considère la fonction définie g définie par $g(x) = \ln x + 1 - e^{-x}$

1) Etudier les variations de g
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a *tel que* $0,6 \leq a \leq 0,7$
3) En déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

On considère la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x + e^{-x} \quad si\ x > 0 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\left|x^2 - 1\right|} \quad si\ x \leq 0 \end{cases}$$

1) Justifier que f est définie sur $IR - \{-1\}$
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudier la continuité et la dérivabilité en 0(on pourra montrer que si $x \in \left]-1,0\right]$,
$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{-\frac{1}{2}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{\frac{1}{2}x}\right) - x}{x^2 - 1} \quad)$$
4) Déterminer les limites aux bornes puis étudier les branches infinies.
5) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que $f(a) = (a+1)\ln a + 1$
6) Soit h la restriction de f à $[a,+\infty[$
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser .h^{-1} est-elle dérivable sur J ? justifier.
   b) Calculer h(1) puis $\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{1}{e}\right)$

PREP@BAC

7) Tracer Cf et Ch^{-1} dans le même repère orthonormé unité 2cm

PROBLEME 1

Soit g définie par $g(x)=(1-x)e^{-x}-1$

3) Dresser le tableau de variations de g
4) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f définie par $f(x)=\begin{cases} 1-x+xe^{-x} & si\ x\leq 0 \\ x(\ln x)^2+x+1 & si\ x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

8) Justifier que f est définie sur IR
9) Etudier la continuité de f en 0
10) Etudier la dérivabilité de f en 0 .Interpréter les résultats.
11) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
12) Etudier les branches infinies de Cf
13) Dresser le tableau de variations de f
14) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placer le point d'abscisse 1)

PARTIE B

Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$

1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle à préciser.
2) Etudier la dérivabilité de h^{-1}
3) Calculer $(h^{-1})'(2)$
4) Tracer la courbe de h^{-1}

PROBLEME 2

Soit la fonction définie sur IR par $g(x)=\dfrac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$

5) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x réel
6) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
7) Dresser le tableau de variations de g
8) Donner le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(\ )=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

PREP@BAC

6) Montrer que $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$
7) Déterminer
   a) La limite de f $en -\infty$
   b) La limite de f $en +\infty$. On pourra remarquer que si on pose $X=1+2e^{x}$, $f(x)$ $s'écrit$ $4\dfrac{X}{(X-1)^{2}}\dfrac{\ln X}{X}$
8) Dresser le tableau de variations de f
9) Tracer Cf dans un repère orthonormé
10) Soit α un réel strictement positif.
   a) Vérifier que pour tout réel x, $\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}=e^{-x}-2\left(\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right)$ en déduire la valeur de $I(\alpha)=\displaystyle\int_{0}^{\alpha}\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}dx$
   b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire de la partie du plan limitée par Cf, $x'x$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$

PARTIE C

On considère l'équation différentielle $(E): y'+2y=2\left(\dfrac{e^{-x}}{1+2e^{x}}\right)$

1) Vérifier que f est solution de (E)
2) Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h-f$ est solution de $(E'): y'+2y=0$
3) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)

PROBLEME 3

Soit g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$

5) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.(on pourra poser $X=x+1$ pour la limite à droite en -1)
6) Dresser le tableau de variations de g
7) Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]1,+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $3{,}8<\alpha<4$
8) Préciser suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & si\ x>0\\ f(0)=0\end{cases}$

6) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
7) Montrer que $\forall x>0,\quad f'(t)=\dfrac{1}{2t\sqrt{t}}g(t)$
8) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

9) Dresser le tableau de variation de f

10) Construire Cf dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité : 1cm sur $(x'x)$ et 5cm sur $(y'y)$.

PARTIE C

L'objectif de cette partie est de calculer l'aire A en unité d'aire de la partie limitée par $Cf, (x'x)$ *et les droites d'équations* $x = 0,\ x = 1$

1) Soient f_1 *et* f_2 définies sur $[0,+\infty[$ par $f_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$ et $f_2(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

   a) Montrer que f_1 est dérivable en 0.

   b) Montrer que f_2 est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $f_2'(x) = f(x)$

   c) En déduire que $A = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$

2) Soit h définies sur $[0,+\infty[$ *par* $h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}dt$ et k définie sur $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $k(x) = \tan^2 x$

   a) Calculer $(hok)(0)$. Prouver que $(hok)'(x) = 4\tan^2 x$ pour tout x *de* I

   b) En écrivant $\tan^2 x = (1+\tan^2 x) - 1$ déterminer l'ensemble des primitives de $(hok)'$ puis donner une expression de (hok)

   c) Calculer $h(1)$ (on remarquera $h(1) = (hok)\left(\frac{\pi}{4}\right)$)

   d) En déduire la valeur exacte de A

PROBLEME 4

On considère l'équation différentielle $(E): y'' + 2y' + y = -2e^{-x}$

1) Montrer que la fonction h *telle que* $h(x) = -x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
2) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = 0$ puis en déduire la solution générale de (E).
3) Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = 0$

PARTIE B

On considère la fonction g *définie par* $g(x) = \begin{cases} x\ln|x| - x + 1 \text{ si } x < 0 \\ e^{-x}(-x^2 + x + 1) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0. Interpréter les résultats.
2) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g
3) Etudier les branches infinies
4) Dresser le tableau de variations de g
5) a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$ dans $[0,+\infty[$

   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α *dans* $]-\infty,0[$. Prouver que $-4 < \alpha < -3$

6) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité :1cm

PARTIE C

1) En utilisant le fait que f $telle\ que$ $f(x)=e^{-x}(-x^2+x+1)$ est solution de (E) montrer que $\forall x\in IR,\ f(x)=-2e^{-x}-2f'(x)-f''(x)$.
2) En déduire une primitive G de g sur $[0,+\infty[$
3) Calculer l'aire en cm^2 de la partie limitée par Cf , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=1

PROBLEME5

Soit la fonction u définie par $u(x)=x^2-2\ln x$

1) Dresser le tableau de variations de u
2) En déduire le signe de $u(x)$

PARTIE B

Soit f définie par $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{2+2\ln x}{x} & si\ x>0 \\ (1-2x)e^{2x} & si\ x\leq 0\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 0. Interpréter géométriquement la limite à droite en 0.
2) Etudier la dérivabilité de f en 0 à gauche. Interpréter le résultat.
3) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4) Etudier les branches infinies de Cf
5) Etudier la position de Cf par rapport à $\Delta : y=x$ pour $x\in]0,+\infty[$
6) Dresser le tableau de variations de f
7) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\beta\in]0,+\infty[$ et vérifier que $e^{-2}<\beta<e^{-1}$
8) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

PARTIE C

1) Soit $\alpha\leq 0$. On note $A(\alpha)$ l'aire du domaine limité par Cf , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0\ et\ x=\alpha$. Déterminer cette aire en utilisant une intégration par parties.
2) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ en $-\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat.
3) Déterminer les réels $a, b\ et\ c$ tels que $F(x)=(ax^2+bx+c)e^{4x}$ soit une primitive de $f^2(x)$
4) En déduire le calcul de $v(\alpha)$ le volume engendré par le domaine défini au 1) autour de l'axe des abscisses.

PROBLEME 6

On considère la fonction définie g définie par $g(x)=\ln x+1-e^{-x}$

4) Etudier les variations de g
5) Montrer que l'équation g $(x)=0$ admet une solution unique $a\ tel\ que\ 0{,}6\leq a\leq 0{,}7$
6) En déduire le signe de $g(x)$

PREP@BAC

PARTIE B

On considère la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x+e^{-x} \ si \ x>0 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{\left|x^2-1\right|} \ si \ x\leq 0 \end{cases}$$

8) Justifier que f est définie sur $IR-\{-1\}$
9) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
10) Etudier la continuité et la dérivabilité en 0(on pourra montrer que si $x\in\left]-1,0\right]$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-\frac{1}{2}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{\frac{1}{2}x}\right)-x}{x^2-1}$$)

11) Déterminer les limites aux bornes puis étudier les branches infinies.
12) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que $f(a)=(a+1)\ln a+1$
13) Soit h la restriction de f $à$ $[a,+\infty[$
    a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser .h^{-1} est-elle dérivable sur J ? justifier.
    b) Calculer h(1) puis $\left(h^{-1}\right)'\left(\frac{1}{e}\right)$
14) Tracer Cf et Ch^{-1} dans le même repère orthonormé unité 2cm
15) Soit $\lambda>1$ et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine limité par Ch , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x= λ

Calculer $A(\lambda)$ et sa limite en $+\infty$

PROBLEME 7

PARTIE A

Soit la fonction numérique f définie par : $f(x)=\begin{cases} x+2+\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|, & si \ \ x\prec 0 \\ (2+x)e^{-x}, \ si \ \ x\geq 0 \end{cases}$.

1°) Montrer que f est définie sur ℝ \ {— 1}.

2°) a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. Préciser les asymptotes parallèles aux axesde coordonnées.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}$ [f(x) — (x + 2)]. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=-1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x}=-1$.

c) En déduire que f est dérivable à gauche et à droite en 0. f est-elle dérivable en 0 ?

4°) Calculer f '(x) pour **a)** $x \in]0\,;+\infty[$ **b)** $x \in]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[$.

5°) Etudier le signe de f '(x) pour $x \in]0\,;+\infty[$ et $x \in]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;0[$.

6°) Dresser le tableau de variation de f.

7°) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α appartenant à

$]-3;-2[$.

8°) Tracer **C** f, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) d' unité : 1 cm. On mettra en évidence l'allure de **C** f au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes.

PARTIE B

Soit g la restriction de f à $]-\infty\,;-1[$.

1°) Montrer que g définit une bijection de $]-\infty\,;-1[$ sur un intervalle J à préciser.

2°) On note g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Calculer g(– 2).Montrer que g^{-1} est dérivable en ln 3.

b) Calculer g^{-1} '(ln 3).

C) Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

PROBLEME 7 :

I. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : g(x) = 1 + x + ln x.

1°) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation g(x) = 0.

Vérifier que $\alpha \in \left]0,2;0,3\right[$.

3°) En déduire le signe de g sur $\left]0;+\infty\right[$.

4°) Etablir la relation ln(α) = – 1 – α.

II. On considère la fonction f définie par : f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} \; si\; x \succ 0 \\ 0 \; si \; x=0 \end{cases}$

1°) Montrer que f est continue en 0 puis sur $\left]0;+\infty\right[$.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3°) Déterminer la limite de f en + ∞.

4°) Montrer que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$.

En déduire le signe de f '(x) sur $]0;+\infty[$.

5°) Montrer que f(α) = — α.

6°) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

7°) Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique: 5 cm. Prendre α ≈ 0,3.

PROBLEME 8

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité = 2 cm.

A- Soit u :]0 ; +∞[→ ℝ

$$x \mapsto \ln x + 1 - e^{-x}$$

1°) Dresser le tableau de variation de u.

2°) Montrer en utilisant la calculatrice que l'équation u(x) = 0 admet une unique solution α élément de l'intervalle]0,6 ; 0,7[.

3°) En déduire le signe de u(x) sur l'intervalle]0 ; +∞[.

B- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x\ln x + e^{-x} & si\ x \succ 0 \\ \dfrac{e^x}{x^2+1} & si\ x \leq 0 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour x < 0, $\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} - 1}{x} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1}$.

b) Etudier la dérivablité de f en 0.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que pour tout élément x de]0 ; +∞[, f ' (x) = u(x).

b) Calculer f ' (x) pour x < 0.

c) Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis l'interpréter graphiquement.

5°) Soit h la restriction de f à l'intervalle [1 ; +∞[.

a) Etablir que h admet une bijection réciproque notée h^{-1} définie sur in intervalle J à préciser.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J.

6°) Tracer la courbe $\mathbf{C}_f$ de f. On prendra $\alpha \approx 0,6$.

PROBLEME 9 :

I. On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = x(1 + e^{2-x})$.

On note C sa corbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1°) Soit h la fonction définie sur R par : $h(x) = 1 + (1 - x)e^{2-x}$.

a) Etudier les variations de h (on ne déterminera pas de limites aux bornes de D_h).

b) En déduire le signe de h (x) sur R .

2°) a) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Préciser la nature de la branche infinie de f en $-\infty$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter le résultat obtenu.

d) Préciser la position de C par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} définie sur R .

c) f^{-1} est-elle dérivable en 4 ?

d) Etudier la position de C par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

e) Construire C (on tracera la tangente à C au point d'abscisse 2).

f) Construire C ' courbe de f^{-1} dans le repère précédent.

PROBLEME 9

PARTIE A

On considère la fonction $u : [0 ;+\infty[\to R$

$$x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2x}{x^2-1}$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de u ; Calculer u (0) et $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)$.

PREP@BAC

2°) Etudier les variations de u.

Dresser son tableau de variations (il n'est pas nécessaire de calculer la limite de u en 1).

3°) Déduire des résultats précédents que :

a) $\forall\ x \in [0\ ;1\ [\ ,\ u\ (x) \geq 0$.

b) $\forall\ x \in\ ]\ 1\ ;\ ;+\infty\ [\ ,\ u\ (x) < 0$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie par : $g : [0\ ;+\infty\ [\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - 1 .$$

1°) Déterminer D_g (le domaine de définition de g) ; puis étudier la limite de g en 1 .

2°) **a)** Vérifier que : $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x-1)}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 1$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} g\ (x) = 1$.

Interpréter géométriquement ce résultat.

c) Dresser le tableau de variations de g .

d) Montrer qu'il existe un réel α unique appartenant à] 0 ;1 [tel que g (α) = 0.

Donner un encadrement d'ordre 1 de α .

3°) Tracer la courbe C g de g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité = 2 cm) .

PARTIE C

Soit $f : [0\ ;\ 1\ [\to \mathbb{R}$, la fonction définie par : $f\ (x) = (x^2 - 1) \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$

1°) Montrer que f est derivable sur [0 ; 1 [et que : $f\ '\ (x) = g\ (x)$, $\forall\ x \in [0\ ;1\ [$.

2°) Déterminer l'aire du domaine plan limité par la courbe C g , l'axe des abscisses et la droite d'équation x = α .

PROBLEME

A. On considère la fonction g définie sur R + \{1} par :

PREP@BAC

$g(x) = \frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x}$ pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$; $g(0) = 0$.

1. Montrer que g est continue à droite en zéro.
2. Etudier les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

   Dresser le tableau de variation de g.

   En déduire le signe de g(x) en fonction de x.

B. ON CONSIDERE LA FONCTION F DEFINIE SUR R +\ {1} PAR :

$F(X) = \frac{-X}{\ln X}$ SI $X > 0$ ET $X \neq 1$; $F(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue à droite et dérivable à droite au point O. En déduire l'existence d'une demi-tangente à la courbe représentative **C** de f au point d'abscisse 0.
2. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Comparer f ' (x) et g(x). En déduire les variations de f et son tableau de variations.
4. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe **C** au point d'abscisse e^2.
5. Soit M le point de C d'abscisse x et N le point de D de même abscisse x. On pose $\varphi(x) = \overline{NM}$.

   Montrer que : $\varphi(x) = f(x) + \frac{x + e^2}{4}$.

Déduire de A) le tableau de variations de $\varphi'(x)$ puis le signe de $\varphi'(x)$ sur $]1 ;+\infty[$.

En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $]1 ;+\infty[$ et la position de **C** par rapport à D pour les points d'abscisse $x > 1$.

6. Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé la courbe **C** et la droite D (unité 2 cm).

PROBLEME 10

I — On considère la fonction g définie par : $g(x) = 1 - x e^{-x}$.

1°) Etudier les variations de g.

2°) En déduire le signe de g (x) suivant les valeurs de x .

II — On considère la fonction f définie par :

PREP@BAC

$$\begin{cases} f(x) = \ln(-x) \text{ si } x < -1. \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) \text{ si } x \geq -1. \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan.

(unité 2 cm) .

1°) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur R .

b) Etudier les variations de f, puis dresser le tableau de variations de f.

(On utilisera I. 2) .

2°) a) Montrer que la droite D d'équation y = x + 1 est asymptote à la courbe C en + ∞ .

b) Etudier la position relative de C et D sur [— 1 ; + ∞ [.

3°) Montrer qu'il existe un unique point de la courbe C dont on précisera les coordonnées,où la tangente (T) est parallèle à la droite D .

4°) Tracer la courbe C , l'asymptote D et la tangente (T),on précisera la tangente ou les demi-tangentes à C au point d'abscisse — 1 .

5°) a) Montrer que f est une bijection de [— 1 ; + ∞ [sur un ensemble J que l'on précisera.

c) Construire la courbe C ' de f^{-1} sur le même graphique que la courbe C .

PROBLEME 11

Soit la fonction de R dans R définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) (unité graphique 2 cm)

On désigne par (C) la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation y = x.

Partie A

1°) a) Montrer que f est continue en $x_0 = 0$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour $x < 0$, $f'(x) > 0$.

b) Etudier les variations de f' sur $[0 ;+\infty[$.

En déduire que pour $x > 0$, $f'(x) > 0$.

c) Donner le tableau de variation de f.

3°) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ (on pourra poser $u = \frac{1}{x}$).

b) Montrer que (D) : $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$. On admettra que (C) est en dessous de (D).

4°) a) Construire (C), on préciser les coordonnées de **I**, point d'intersection de (C) et (Δ) pour $x > 0$

b) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe (C) en $+\infty$.

Partie B

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}_+$: $\dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2°) En déduire au moyen d'une intégration par partie que la fonction F telle que :

$$F(x) = \frac{(x^2 - 1)\ln(1 + x)}{2} - \frac{1}{4}(x^2 - 2x)$$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$

3°) Calculer l'aire A en cm² de la partie du plan limitée par (Δ), (C) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e - 1$.

Partie C

1°) a) Montrer que f admet une bijection réciproque notée f^{-1} .

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0 ? Préciser la nature de la tangente en 0 à la courbe représentative de f^{-1} .

2°) Construire (C ') courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PROBLEME 12

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur R par :

PREP@BAC

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \in \,]-\infty\,;\,0\,[\,. \\ f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| & \text{si } x \in [0\,;\,1\,[\,\cup\,]\,1\,;\,+\infty\,[\,. \end{cases}$$

Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique: 2 cm) .

1°) Etudier la continuité de f en 0 .

2°) **a)** Montrer que pour tout $x \in \,]\,0\,;\,1\,[$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0.

c) En déduire que C admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations .

3°) Etudier les variations de f .

4°) Tracer la courbe C .

Partie B

Soit g la restriction de f à $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

1°) Montrer que g est une bijection de $]\,1\,;\,+\infty\,[$ sur un intervalle J à préciser .

On notera g^{-1} la bijection réciproque de g .

2°) Montrer que l'équation $g(x) = -e$ admet une solution α sur l'intervalle $]\,1\,;\,+\infty\,[$

(on ne demande pas de calculer α).

3°) Montrer que pour tout $x \in J$, $g^{-1}(x) = 1 - \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

4°) Tracer dans un nouveau repère orthonormal $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les représentations graphiques des bijections g et g^{-1} (on notera ces dernières C_g et $C_{g^{-1}}$) .

on prendra 2cm pour unité du repère, on indiquera en annexe la nature et l'équation de chacune des asymptotes à C_g et $C_{g^{-1}}$.

PREP@BAC

PROBLEME 13

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité = 2 cm.

A- Soit $u :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x + 1 - e^{-x}$$

1°) Dresser le tableau de variation de u.

2°) Montrer en utilisant la calculatrice que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α élément de l'intervalle $]0{,}6\,;0{,}7[$.

3°) En déduire le signe de $u(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

B- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x\ln x + e^{-x} & si\ x \succ 0 \\ \dfrac{e^{x}}{x^2+1} & si\ x \leq 0 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité de f en 0.

2°) a) Montrer que pour $x < 0$, $\dfrac{f(x)-1}{x} = \dfrac{e^{-x}-1}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}$.

b) Etudier la dérivablité de f en 0.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3°) a) Montrer que pour tout élément x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = u(x)$.

b) Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$.

c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis l'interpréter graphiquement.

5°) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

a) Etablir que h admet une bijection réciproque notée h^{-1} définie sur in intervalle J à préciser.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J.

6°) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de f. On prendra $\alpha \approx 0{,}6$.

7°) Calculer l'aire en cm² du domaine plan délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x = 1 et x = 3.

PROBLEME (10 *points*).

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -2\ln(x+1) + \dfrac{x}{x+1}$.

1. a. Déterminer Dg, puis calculer les limites de g aux bornes de Dg. $0,75$ *pt*

b. Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g. 1 *pt*

2. a. Calculer $g(0)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une que l'on désigne $\alpha \in]-0,72, -0,71[$. $0,25 + 0,5$ *pt*

b. Déterminer le signe de $g(x)$. $0,5$ *pt*

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{ln(x+1)} & \text{si} \quad x > -1 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Montrer que $Df = \mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes de Df. $0,75$ *pt*

b. Etudier la nature des branches infinies. $0,5$ *pt*

2. a. Etudier la continuité de f en -1 et en 0. $0,5$ *pt*

b. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats. 1 *pt*

3. a. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$ et $x \neq 0$ on a $f'(x) = \dfrac{-xg(x)}{\ln^2(x+1)}$ et calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, -1[$. $0,5$ *pt*

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 1 *pt*

4. Soit h la restriction de f à $[0, +\infty[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser. $0,25$ *pt*

b. Donner le sens de variation de h^{-1}. $0,25$ *pt*

c. Construire Cf et Ch^{-1}. $1,25$ *pt*

Partie C

Soit m la fonction définie par $m(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. a. Déterminer les fonctions u et v telles que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $m(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. $0,25$ *pt*

b. En déduire la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ telle que $H'(x) = m(x)$ puis calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{f(x)}dx$. $0,75$ *pt*

PREP@BAC

NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDE

EXERCICE 1 :

1) **Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants** :

a) $z_1 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$; b) $z_2 = \dfrac{(2-3i)(1+i)}{(3+5i)^2}$ c) $z_3 = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)} + \dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z=(2+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)$
2. $z=(2+5i)^2$
3. $z=\left(\frac{1}{2}-4i\right)^2$
4. $z=(2+5i)(2-5i)$
5. $z=(2+i)(5-8i)(1-i)$
6. $z=(2+i)^2(3+4i)$
7. $z=(2+i)^2(3+4i)$
8. $z=(-1+2i)^3$
9. $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}-i}$
10. $z=\dfrac{3-3i}{1+i}$
11. $z=\left(\dfrac{1+i}{2-i}\right)^2$
12. $z=\dfrac{1}{2i-5}-\dfrac{1-i}{5+2i}$

2) Mettre chacun des complexes suivants sous forme trigonométrique.

a) $z_1 = \dfrac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$; $b)\ z_2 = \cos\dfrac{\pi}{5} - i\sin\dfrac{\pi}{5}$ **c)** $z_3 = \sin\dfrac{\pi}{2} + i\cos\dfrac{\pi}{2}$; $d)\ z_4 = 1 - i\tan\dfrac{\pi}{10}$ **e)** $z_5 = \dfrac{1-\cos\theta - i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}; \theta \in IR$ **;f) z=** $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3$

3)On pose $j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **; calculer** j^2 **. En déduire le calcul de :** $1+j+j^2$; j^3; $\dfrac{1}{j}$

4) a) Déterminer le module et un argument de :

$z_1 = -1+i\sqrt{3}$; $z_2 = 1+i$; $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ $et \sin\dfrac{5\pi}{12}$

PREP@BAC

$T^{erm}S$

EXERCICE 2

1) Résoudre dans C

a) $(3+5i)z = 2i - z$; $b)\ \dfrac{z+1}{z-1} = 2i$; c) $z-(1+i)\bar{z}+3-2i=0$; $d)\ \dfrac{iz}{\overline{z-2i}} = 3$ e) $z+3\bar{z} = (2+i\sqrt{3}).|z|$ f)= $\overline{(1+i)\bar{z}-1+i} = \bar{z}-i$; g) $iz^2 - 2\bar{z} + 2 - i = 0$

2)On considère les la fonction f de la variable complexe z définie par :

$f(z) = z^3 - 2(\sqrt{3+i})z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

a) Montrer qu'elle admet une solution imaginaire pure

b) Résoudre f(z)=0

c) Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique

3) Résoudre **dans C les équations** :

$z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$

$z+\dfrac{1}{z}=1;\ z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{2}$

Soit $p(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$

a) Exprimer $\dfrac{p(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z+\dfrac{1}{z}$
b) Résoudre P(z)=0

4) Soit l'équation d'inconnue z $\in C : z^2 + 2z + 4 = 0$

Soit $\alpha\, et \beta\ avec\ \mathrm{Im}(\alpha) > 0$ les solutions de cette équation

a) Donner la forme algébrique de $\alpha\, et\, \beta$
b) Mettre $\alpha\, et\, \beta$ sous forme trigonométrique et placer leurs images dans le plan complexe.
c) Déterminer $\dfrac{\alpha^3}{\beta^2}$ $en\ fonction\ de\ \beta.$ Q'en déduire pour $\alpha^3\ et\ \beta^3$?
d) Mettre β^{24} sous forme algébrique.

PREP@BAC

Term S

EXERCICE 3

a) Déterminer le module et un argument de $4\sqrt{3}+4i$

b) Résoudre dans C ,l'équation $(E) = z^2 = 4\sqrt{3}+4i.$

⊕ en écrivant z sous la forme z=x+iy (x,y) €IR (on pourra utiliser l'égalité $4+2\sqrt{3}=(\sqrt{3}+1)^2$)

⊕ *En écrivant z sous la forme* $z = re^{i\theta}$ $r \in IR_{+,}$ $\theta \in IR$

c) En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

d) Résoudre l'équation d'inconnue $x \in IR : (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$

EXERCICE4 BAC 2001

Le plan complexe (P) est muni d'un repère ortho normal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

Soit f l'application de $C-\{2i\}$ vers C définie par $f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}$

1) Résoudre dans C f(z)=z .Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

2) Calculer $z_1^4+z_2^4$

3) Soit M(z) un point de (P)

Soit (Γ) l'ensemble des points M(z) tels que f(z) soit imaginaire pur ,donner une équation cartésienne de (Γ) ,Tracer (Γ).

4) Monter que $/z/=1 \Leftrightarrow /f(z)/=1$

EXERCICE 5 BAC 1995

On considère le polynôme P de variable complexe Z définie par $f(Z)=Z^3+iZ^2-3Z+5i$

1) Calculer P(i) puis déterminer toutes les racines de P(z) on notera Z_1 la racine dont la partie réelle est négative et Z_2 l'autre racine.

PREP@BAC

2 a) Ecrire sous forme trigonométrique que le nombre complexe $\frac{Z_1 - i}{Z_2 - i}$

b) Dans le plan complexe de repère $(o,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A(i), B (Z_1) et C(Z_2)

Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC.

3) On considère A(i), B(-i) et M(z) on pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$

a) Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble © des points M(z) tel Z soit imaginaire pur 4 a) Interprétez géométriquement les modules de $z-i$ et z+i

Montrer que /Z/=1si et seulement si z est réel

b) Soit $n \in IN^*$ et $a \in \left]o,\frac{\Pi}{2}\right[$ déduire de la question précédente que l'équation (E) : $(\frac{z-i}{z+i})^2 = \cos 4a + i\sin 4a$ n'admet que des solutions réelles.

(on ne demande pas de les calculer).

c) Résoudre l'équation Z^2 = cos 4a+isin4a .En déduire les solutions de (E).

<u>EXERCICE 5 BAC 1999</u>

On considère l'équation $(E): z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0$

1. a) Vérifier que (E) admet une solution réelle

b) Achever la résolution de (E)

2) Dans le plan complexe on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1.; z_B = -2+i \quad z_C = i$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$

b) En déduire la nature du triangle ABC

EXERCICE 6

1) soit z un nombre complexe et M le point du plan d'affixe z. On pose z'= $\dfrac{4-(z+\bar{z})i}{1-i+1/2\,(z-\bar{z})}$ Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M (z) du plan tels que z'soit réel

2) On considère l'application $f : C \to C$ définie par $f(z) = z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45$

a) Montrer que l'équation $f(z) = o$ admet une solution réelle unique a et une solution imaginaire pure b que l'on déterminera

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = o$.

Pour Aller plus Loin

EXERCICE 1

Soit le nombre complexe $z = \dfrac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$.

1°) Calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et un argument de z.

2°) Calculer le module et un argument de : $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{i}{z}$ et $\dfrac{1+i}{z}$.

EXERCICE 2

On donne les complexes : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $z_2 = 2(1-i)$, $z_3 = \dfrac{z_1^2}{z_2}$.

1°) Calculer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes.

2°) Mettre z_3 sous forme algébrique puis en déduire $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$ en valeurs exactes.

PREP@BAC

EXERCICE 3

On donne les nombres complexes $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1°) Ecrire sous forme algébrique puis trigonométrique le complexe $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

2°) En déduire en valeurs exactes $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

3°) Donner, sous forme algébrique, Z^6 et Z^{24}.

EXERCICE 4

Déterminer en fonction de θ le module et un argument des complexes suivants :

$$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta \;;\; z_2 = \sin\theta + i\cos\theta \;;\; z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z_4 = \frac{1 + e^{-i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \;;\; z_5 = \frac{i - e^{i\theta}}{i + e^{-i\theta}} ;\; z_6 = \cos\theta + + i\left(1 + \sin\theta\right)$$

EXERCICE 5

On donne le complexe $u = \sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

1°) Calculer u^2 et u^4 sous forme algébrique.

En déduire le module et un argument de *u*.

2°) Soit M le point d'affixe *z*, $z \in \mathbb{C}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que : $|uz| = 8$.

EXERCICE 6

On considère le nombre complexe $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$.

1°) On pose : $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$. Démontrer que S et T sont conjugués et que et la partie imaginaire de S est positive.

PREP@BAC

2°) Calculer $S+T$ et ST. En déduire S et T.

EXERCICE 7

Déterminer les ensembles de points M d'affixes z , $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1°)a- $z+\dfrac{1}{z}$ est réel. b- $z+\dfrac{1}{z}$ est imaginaire pur.

2°)a- $(z-1)(\overline{z}+2i)$ est réel. b- $(z-1)(\overline{z}+2i)$ est imaginaire pur.

3°)a- $|iz-4+2i| = |3i-\overline{z}|$ b- $\left|\dfrac{2iz-4+2i}{z-3+i}\right| = 2$

4°)a- $z^2-(1+i)^2 = \overline{z}^2-(1-i)^2$ b- $\left[z-(1+i)\right]\left[\overline{z}-(1-i)\right] = 8$

EXERCICE 8

On considère le complexe u : $u = 4\sqrt{2}(-1+i)$.

1°) Calculer le module et un argument de u.

2°) Déterminer sous forme algébrique puis trigonométrique les nombres complexes z tels que : $z^3 = u$.

EXERCICE 9

On désigne par z_1 le nombre complexe $1-i$.

1°) Calculer $z_1^{\,3}$.

2°) En déduire les racines cubiques dans $\mathbb{C}$ de $-2(1+i)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + 2 + 2i = 0$.

PREP@BAC

EXERCICE 10

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+(1-2i)z^2-2i=0$.

On pourra poser $Z=z^2$. Les solutions seront données sous formes algébriques.

EXERCICE 11

1°) Résoudre l'équation $z^5=-i$ puis représenter les solution sur le cercle trigonométrique.

2°) En déduire les solutions de l'équation $1+iz-z^2-iz^3+z^4=0$.

(pour cela se ramener à une somme de la forme $1+k+k^2+k^3+k^4$)

EXERCICE 12

1°) Calculer le module et un argument du complexe $u=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire ses racines carrées.

2°)a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+\left(\sqrt{3}-7i\right)z-4\left(3+i\sqrt{3}\right)=0$. On désignera par z_1 et z_2 les racines avec z_1 imaginaire pur.

b- Vérifier que $z_2-2i=u(z_1-2i)$.

3°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 et A le point d'affixes *2i*. Quelle est la nature du triangle AM_1M_2 ?

EXERCICE 13

On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$z^2-2(1+\cos u)z+2(1+\cos u)=0$ où u désigne un paramètre réel de $]-\pi;\pi[$.

1°) Résoudre cette équation.

2°) Déterminer un module et un argument de chacune des solutions.

PREP@BAC

EXERCICE 14

I Démontrer que les polynômes suivants admettent un zéro réel et résoudre l'équation P(z) = 0.

1°) $P(z)=z^3-(11+2i)z^2-2(17+7i)z-42$

2°) $P(z)=z^3-2(1+i)z^2+5(i-2)z+3(7+i)$

3°) $P(z)=(1-2i)z^3-(3+4i)z^2+(9+17i)z+38+34i$

II Démontrer que les polynômes suivants admettent un zéro imaginaire pur et résoudre l'équation

P(z) = 0.

1°) $P(z)=z^3+2iz^2+16i$

2°) $P(z)=iz^3+(2+i)z^2+(-2-5i)z+8-i$

3°) $P(z)=(1+i)z^3+2z^2+(5i-1)z+10(1+i)$

EXERCICE 15

On donne le polynôme $P(z)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26$.

1°) Montrer que si *z* est racine de *P(z)* alors $\bar{z}$ est aussi racine de *P(z)*. (comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$).

2°) Vérifier que *1 + i* est racine de *P(z)*. En déduire une autre racine.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation *P(z) = 0.*

EXERCICE 16

On définit les complexes Z_n de la manière suivante $Z_0=1$ et pour tout entier n strictement positif $Z_{n+1}=\frac{1}{3}Z_n+\frac{2}{3}i$.

1°) On pose, pour tout entier n , $U_n=Z_n-i$.

a- Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.

b- Montrer que pour tout entier naturel n $U_n=(1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2°) a- Exprimer, en fonction de n, la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de U_n.

c- On note A_n le point du plan d'affixe U_n et B_n le point d'affixe Z_n. Calculer le module et un argument de U_n. Montrer que les points A_n sont alignés. Montrer que les points B_n sont alignés.

EXERCICE 17

Trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sont tels que :

- leurs modules forment une progression géométrique de raison 2.
- leurs arguments forment une progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$.
- leur produit $z_1 z_2 z_3 = 4\left(1+i\sqrt{3}\right)$ et qu'un argument de z_1 appartient à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

Trouver ces trois nombres complexes. (sous forme trigonométrique)

EXERCICE 18

L'écriture complexe d'une transformation f dans un repère orthonormal est donnée.
Reconnaître f préciser ces éléments caractéristiques.

1°) $z' = (4+4i)z + 4 - 2i$

2°) $z' = \dfrac{1+i}{1-i}z + 2i$

3°) $z' = 5z - 3i$

4°) $z' = z - 5i$

5°) $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + 2i$

6°) $z' = \left(\sqrt{3}+i\right)(z-i)+i$

EXERCICE 19

Dans le plan muni d'un repère orthonormal on donne les points $A(1 + i)$, $B(2 - i)$, $C(-2 + i)$ et $D(-4 + 4i)$.

1°) Montrer qu'il existe une unique similitude S transformant A en C et B en D.

2°) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

EXERCICE 20

Le plan complexe set muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On note A le point d'affixe 2. Soit φ l'application qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :
$z' = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

PREP@BAC

1°) Déterminer

a- l'affixe de A' image de A par φ.
b- L'affixe de P tel que φ (P) =O.

2°) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ.

3°) Lorsque le point M est distinct du point A :

a- Démontrer que le triangle AMM', $M' = \varphi(M)$ est rectangle en M'.
b- Le point M et le milieu du segment étant donné , donner une construction au compas de M'.

EXERCICE 21

f est la transformation plane dont l'écriture complexe est donnée par : $z' = u^2 z + u + 1$, $u \in \mathbb{C}$

1°) Déterminer l'ensemble des complexes u pour lesquels :

a- f est une translation. Caractériser f.
b- f est rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Caractériser f.
c- f est une homothétie de rapport –2. Caractériser f.

2°) On pose $u = 1 - i$. Déterminer alors la nature de f et ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 22

Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et f_a l'application plane qui au point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + i\tan a)z - i\tan a.$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a.

REVISION SUR COMPLEXES ET SIMILITUDES

EXERCICE

Soit $p(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (1-6i)z - 4 - i$

1) Montrer que $p(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure.

PREP@BAC

2) Achever la résolution de l'équation. On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire pure est positive et z_2 l'autre solution.
3) Résoudre l'équation $z^2 = \frac{z_1+1}{2}$
4) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{9\pi}{8}$ *et* $\sin\frac{9\pi}{8}$

EXERCICE 2

α est un réel de $[0,\pi[\cup]\pi,2\pi[$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 *et* z_2 vérifiant les conditions suivantes.

$$(1) z_1+z_2 = 2+2\cos\alpha$$
$$(2) z_1 z_2 = 2+2\cos\alpha$$

2) Déterminer le module et un argument de z_1 *et* z_2

EXERCICE3

Soit $(z_n), n\in IN$ la suite géométrique de premier terme $z_0=1$ et de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$. Soit le point $M_n(z_n)$

1) Exprimer z_n en fonction de n
2) Quelle est la transformation qui permet de passer de $M_n(z_n)$ *à* $M_{n+1}(z_{n+1})$. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_4 (on prendra 6cm pour unité graphique).
3) Soit $(u_n), n\in IN$ la suite définie par $u_n=|z_n|$. Etudier le sens de variation et la limite de (u_n).
4) Soit $(\theta_n), n\in IN$ la suite définie par $\theta_n = Arg(z_n)$, (où Arg *désigne l'argument principal de* z_n). Démontrer que (θ_n) est une suite périodique.
5) Démontrer que $\forall n\in IN$, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle.

EXERCICE 4

1) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe i
2) Développer $(z+i)^3$. En déduire la forme algébrique des solutions de l'équation $z^3+3iz^2-3z-2i=0$

PREP@BAC

3) Dans le plan complexe on donne les points Ω, A, B d'affixes respectives $-2i, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe S_1 de centre Ω et transformant A en B

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane S_2 d'écriture complexe $z' = (1+i)z-2$

c) Caractériser géométriquement S tel que $S=S_1 0 S_2$

d) En utilisant S en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}; \sin\frac{7\pi}{12}$

EXERCICE5

Soit $S = \cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}$

1) En remarquant que $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$

a) calculer $\cos\frac{3\pi}{5}$ en fonction de $\cos\frac{\pi}{5}$

b) en déduire que $1+S = 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1$

2) Soit $S' = \sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{6\pi}{5}+\sin\frac{8\pi}{5}$

a) Calculer $S+iS'$ en déduire que 1+S=0

b) Calculer $\cos\frac{\pi}{5}$

EXERCICE 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives $\sqrt{3}+i, 4i, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, -2\sqrt{3}+2i$

1) Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes :

T : translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$

R : rotation de centre A et d'angle - $\frac{\pi}{2}$

H : homothétie de centre B et de rapport - $\sqrt{3}$

F : Similitude plane directe de centre A et qui transforme C en B

2) Donner la nature du triangle ABC et déterminer l'image du triangle ABC par R

EXERCICE 7

Soient $I(2)\ et\ \Omega(3+i)$ deux points dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.Soient H l'homothétie de centre Ω et de rapport -2, S la similitude de centre Ω de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et T la translation de vecteur $\vec{u}(2+i)$

Soit $B = H(I),\ C = T(I),\ D = S(C)\ et\ A$ le barycentre de $(B,1)\ (D,1)\ et\ (C,-1)$

1) Donner une écriture complexe de chacune des transformations $H,\ S\ et\ T$
2) Déterminer les affixes des points $B, C, D\ et\ A$
3) Montrer que $ABCD$ est un carré
4) Caractériser la similitude S' qui transforme $B\ en\ B\ et\ C\ en\ D$
5) Pour quelle valeurs de n, $(S')^n$ est-elle une homothétie.

EXERCICE 8

1) Soit l'équation (E) : $z^2 - (i\tan\alpha)z - 1 + i\tan\alpha = 0$ Vérifier que 1 est une racine puis déterminer l'autre racine b.

2) Déterminer le module et un argument de -1+itanα avec $\alpha \in [0,\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

3) On suppose $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation plane h d'écriture $z' = (-1+i\tan\alpha)z + 2 - i\tan\alpha$. Pour quelle valeur de α h est une homothétie.

EXERCICE 1 BAC 2007

On considère dans **C** l'équation $z^3 - (3+2i)z^2 + (1+4i)z + +1 - 2i = 0$

1) Déterminer la solution réelle de cette équation
2) Montrer que i est une solution de cette équation
3) déterminer la troisième solution de cette équation
4) Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et 2+i

PREP@BAC

Term S

a) déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
b) En déduire la nature du triangle ABC
c) Déterminer l'affixe point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I(1+i) et de rayon r à déterminer.

EXERCICE 2 BAC 2008 épreuve de remplacement

1) On considère l'équation $(E): z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z + 9 - 45i = 0$
   a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation.
   b) Achever la résolution de (E) (on appellera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 la troisième solution)
2) Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$; On considère les points A, B et C d'affixes respectives 3i, 3+3i et 3-2i.
   a) placer les points A, B et C dans le repère
   b) Calculer $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature du triangle ABC
3) Soit f la similitude plane directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.
   a) Donner une écriture complexe de f
   b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de f

EXERCICE 3 BAC 2008 épreuve initiale

Soit le complexe $a = -1 - i$ et $(z_n)\ n \in IN$ la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \text{ et } z_1 = i \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1} \quad \forall n \in IN^* \end{cases}$$

1) déterminer z_2 et z_3 sous forme algébrique.
2) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = z_{n+1} - z_n \quad n \in IN$
   a) déterminer u_0 et u_1 sous forme algébrique.
   b) Démontrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$
   c) Exprimer u_n en fonction de n et de a
3) Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de z_n. En déduire $z_n = -1 + (1+i)^n$
4) a) Déterminer le module et un argument de a.

PREP@BAC

c) Donner la forme algébrique de z_{19}

4) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé on désigne par A_0 le point d'affixe z_0 , par A_1 le point d'affixe z_1 et par A_2 le point d'affixe z_2

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme $A_0 \text{ en } A_1 \text{ et } A_1 \text{ en } A_2$

EXERCICE 4 BAC 2000

On considère les points $A_1(z_1 = 1),\ A_2\left(z_2 = 1 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) et\ A_3\left(z_3 = \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{4}\right)$

1) Donner une écriture trigonométrique des complexes $z_2 - z_1 \ et\ z_3 - z_2$
2) Donner une écriture algébrique et trigonométrique de $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) et \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
4) Soit S la similitude plane directe transformant $A_1 \text{ en } A_1 \text{ et } A_2 \text{ en } A_3$

   a) Donner les éléments caractéristiques de S
   b) On désigne par $M'(z')$ l'image par S du point $M(z)$.Exprimer z' en fonction de z ; en déduire l'image par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

EXERCICE5

On considère l'équation $z^3 - (2+5i)z^2 + (-7+7i)z + 6 + 2i = 0$

1) Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure à préciser puis achever la résolution.
2) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe qui f laisse A(1+i) invariant et transforme B(1+2i) en C(2i).
3) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit g la transformation qui a tout point M(x,y) associe le point M' (x', y') par $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 1 \\ y' = 2x + 2y - 3 \end{cases}$. Déterminer l'affixe $z' \text{ de } M'$ en fonction de z affixe de M puis donner la nature et les éléments caractéristiques de g.
4) Donner la nature et les éléments caractéristiques de fog

PREP@BAC

Term S

EXERCICE6

Soit les transformations planes f et g d'écriture complexe :
$f : z' = (1-i)z + 3 + i, \quad g : z' = cz + d, c \text{ et } d$ étant des complexes avec c non nul

1) déterminer une écriture complexe de fog
2) déterminer les complexes c et d tels que fog soit l'homothétie de centre O et de rapport 2
3) déterminer c et d tels que fog soit la translation de vecteur d'affixe 2+i
4) Déterminer c et d tels que fog soit une rotation de centre D(1+i) et d'angle $\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 7 BAC 2003

Soit l'équation (E) : $z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure à déterminer.

b) montrer que 1+2i et -2+3i sont solutions de l'équation.

c) Donner l'ensemble des solutions de l'équation.

2) Dans le plan rapporté a un repère orthonormé on considère les points A, B, C d'affixes respectives 1+2i, 3i, -2+3i. Soit G barycentre des points pondérés (A, 2)

(B, -2) et (C, 1)

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, 2i, 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique, déterminer la raison.

b) En déduire qu'il existe une similitude plane directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 8

Soit $(E) : z^3 - (4+5i)z^2 - (3-12i)z + 8 - i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure z_0 à déterminer puis achever la résolution de l'équation.
2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $\Omega(i),\ A(2+i) \text{ et } B(2+3i)$.Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude plane directe f qui laisse Ω invariant et transforme $A \text{ en } B$
3) Déterminer une écriture complexe et analytique de la transformation f^{-1}
4) Donner une équation cartésienne de l'image de la droite d'équation $y = x \text{ par } f$

PREP@BAC

5) Soit $M(z)$ un point du plan différent de Ω. Démontrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle en M où $M' = f(M)$

Complexe au BAC

EXERCICE 1 (5 points)

1°) On considère l'équation (E) : $z^3 + (-6-4i)z^2 + (12+21i)z + 9 - 45i = 0$.

a) Déterminer la solution imaginaire pure z_0 de l'équation (E).

b) Achever la résolution de (E) (on appellera z_1 la soluton dont la partie imaginaire est positive et z_2 lza troisième solution).

2°) Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 3i, 3 + 3i et 3 − 2i.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. En déduire la nature de ABC.

3°) Soit f la similitude directe qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

a) Donner une écriture complexe de f.

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de f.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit le complexe $a = -1 - i$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \ \ et\ \ z_1 = i \\ z_{n+1} = (1-a)z_n + az_{n-1} \end{cases}$$

1°) Déterminer z_2 et z_3 sous forme algébrique.

2°) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = z_{n+1} - z_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer U_0 et U_1 sous forme algébrique.

b) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $-a$.

c) Exprimer U_n en fonction de n et a.

3°) Soit $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$.

Exprimer S_n en fonction de z_n. En déduire que $z_n = -1 + (1+i)^n$.

4°) a) Déterminer le module et un argument de a.

b) Donner la forme algébrique de z_{19}.

5°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A_0 le point d'affixe z_0, A_1 le point d'affixe z_1, A_2 le point d'affixe z_2.

Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui transforme A_0 en A_1 et A_1 en A_2.

EXERCICE 3 (4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 - (3 + 2i)z + 1 - 2i = 0$.

1°) a) Déterminer la solution réelle de cette équation.

b) Montrer que i est une solution de cette équation.

c) Déterminer la troisième solution de cette équation.

2°) Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et 2 + i.

a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I(1 + i) et de rayon r à déterminer.

EXERCICE 4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$(E) : z^3 + (1 - 8i)z^2 - (23 + 4i)z - 3 + 4i = 0$

1°) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

b) Montrer que $1 + 2i$ et $-2 + 3i$ sont solutions de (E) .

c) Donner l'ensemble des solutions de (E) .

2°) Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit les points A, B et C d'affixes respectives $1 + 2i$, $3i$, $-2 + 3i$.

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2, et 1

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, 2i et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite.

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C.

Donner les éléments caractéristiques de cette similitude .

EXERCICE 5

On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $- z^3 + 6z - 20i = 0$ (E)

sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure a .

2°) Notons b et c les autres solutions de (E) , b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points de P d'affixes respectives a, b, c. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3°) Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad ; et f l'application qui à tout point M de P d'affixe $z \neq i - \sqrt{3}$ associe le point M ' d'affixe z ' définie par :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} + i}$$

a) Donner l'écriture complexe de r puis l'affixe du point A ' = r (A) .

b) Déterminer l'ensemble des points M de P dont les images par f ont pour affixe un réel négatif. On notera E cet ensemble.

c) Déterminer l'ensemble F des points M de P dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 7

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z telle que : (E) $iz^2 + (1 - 5i)z + 6i - 2 = 0$.

a) Montrer que cette équation possède une solution réelle notée z_1 . Déterminer l'autre solution z_2 de (E) .

b) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$) , on note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe z_2 .

Déterminer l'affixe du point C de l'axe (O, $\vec{e_1}$) équidistant de M_1 et M_2 .

c) Soit la rotation R_1 de centre C telle que $R_1(M_1) = M_2$.

α) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R_1 .

β) Déterminer l'affixe du point O ' image de O par R_1 .

d) Soit la rotation R_2 de centre O et d'angle orienté θ tel que Mes $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad .

α) Quelle est la nature de la composée $R_2 \circ R_1$? Justifier votre réponse .

β) Soit B d'affixe 3i. Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle BOC par $R_2 \circ R_1$. Justifier votre réponse .

PREP@BAC

TermS

SUITES NUMERIQUES

EXERCICE1

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \le u_n \le 2$
2) Montrer que (u_n) est croissante
3) En déduire que (u_n) converge vers un réel l à déterminer.
4) Démontrer que $\forall n \in IN, |u_{n+1} - 2| \le \frac{1}{2}|u_n - 2|$ *puis* $|u_n - 2| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$
5) Retrouver les résultats de la troisième question

EXERCICE 2

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \end{cases}$

1) Montrer pour tout entier naturel $u_n \ge -\frac{1}{2}$
2) Etudier les variations de (u_n)
3) En déduire que (u_n) admet une limite à déterminer
4) Soit (v_n) définie par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 1}$. Démontre que (v_n) est une suite géométrique.

   Exprimer u_n en fonction de n et étudier la convergence de (u_n)

EXERCICE 3

Soit $\begin{cases} u_0 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{n+2}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Soit (v_n) définie par $v_n = u_n\sqrt{2} - n$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. Etudier la convergence de (u_n)
4) $S_n = u_0 + u_1 + \dots\dots\dots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n puis déterminer sa limite

EXERCICE 4

Soit $\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - n - \dfrac{4}{3} \end{cases}$

$V_n = u_n + an + b$

1) Déterminer les nombres réels a et b sachant que (v_n) soit une suite géométrique. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
2) $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$
   $T_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$

Calculer S_n et T_n en fonction de n

EXERCICE 5

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) $w_n = v_n - u_n$ pour tout n non nul. Démontrer que (W_n) est une suite géométrique convergente.
2) Exprimer w_n en fonction de n.
3) Démontrer que (u_n) décroissante et (v_n) croissante.
4) Démontrer que pour tout entier non nul n, $u_n \geq v_n$ et en déduire que $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$
5) Conclure
6) $T_n = 3u_n + 8v_n$ avec n entier naturel non nul. Montrer que (T_n) est une suite constante puis déterminer les limites de (u_n) et (v_n)

EXERCICE 6

Soit la fonction f définie sur IR par f(x)=2x-sinx

1) Montrer que f réalise une bijection de IR vers IR. On désigne par x_0 l'unique solution de l'équation f(x)=4
2) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=1/2(4+sinx)
   a) Montrer que $\forall x \in IR,\ f(x) = 4 \Leftrightarrow g(x) = x$
   b) Montrer que $\forall x \in IR,\ |g'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$
3) Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 \in IR$ *et* $\forall n \in IN\ u_{n+1} = g(u_n)$
   a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que
      $\forall n \in IN,\ |u_{n+1} - x_0| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - x_0|$, en déduire que
      $\forall n \in IN\ |u_n - x_0| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_0 - x_0|$
   b) En déduire la limite de la suite (u_n)

PREP@BAC

$T^{erm}S$

SERIE N°2 : Suites numériques

EXERCICE 1

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in IN \; 0 \le u_n \le 1$
2) Montrer que (u_n) est croissante
3) (u_n) est-elle convergente ? justifier
4) Soit (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique convergente
   b) Exprimer u_n en fonction de n puis en déduire la limite de (u_n)

EXERCICE 2

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{20 + u_n} \end{cases}$

1) Démontrer que $\forall n \in IN \; 0 \le u_n \le 5$
2) Etudier le sens de variation de (u_n)
3) En déduire que (u_n) converge vers un réel à déterminer.
4) Démontrer que $\forall n \in IN \; |u_{n+1} - 5| \le \dfrac{1}{5}|u_n - 5|$
5) En déduire que $\forall n \in IN \; |u_n - 5| \le \left(\dfrac{1}{5}\right)^n |u_0 - 5|$
6) Retrouver les résultats du 3)

EXERCICE 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - \dfrac{1}{3}n - \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1) calculer u_1, u_2
2) Soit (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2u_n + n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3) Exprimer u_n en fonction de n puis préciser sa limite en $+\infty$
4) Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ...+ u_n$ en fonction de n puis déterminer sa limite en $+\infty$

EXERCICE 4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

7) $w_n = v_n - u_n$ pour tout n non nul. Démontrer que (W_n) est une suite géométrique convergente.
8) Exprimer w_n en fonction de n.
9) Démontrer que (u_n) décroissante et (v_n) croissante.
10) Démontrer que pour tout entier non nul n, $u_n \geq v_n$ et en déduire que $v_1 \leq v_n \leq u_n \leq u_1$
11) Conclure
12) $T_n = 3u_n + 8v_n$ avec n entier naturel non nul. Montrer que (T_n) est une suite constante puis déterminer les limites de (u_n) et (v_n)

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]0,6;0,7[$
2) Montrer que $\forall x \in [0;1] \, |f'(x)| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
3) Soit (u_n) *définie par* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a) Montrer que $\forall n \in IN \; 0 \leq u_n \leq 1$
   b) Montrer que pour tout $n \in IN \; |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{\sqrt{2}}{4}|u_n - \alpha|$
   c) En déduire que $\forall n \in IN \; |u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ puis (u_n) converge vers $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

EXERCICE 6

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in IN^*$ par
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}$$

PREP@BAC

1) Démontrer que pour tout entier naturel k vérifiant $1 \leq k \leq n$ on a $\frac{1}{\sqrt{2n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$
2) En déduire un encadrement de u_n puis sa limite en $+\infty$

Blaise Diagne

EXERCICE 2

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right) \end{cases}$

1) Déterminer u_2, u_3
2) Démontrer que $\forall n \in IN^*$ $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$
3) Montrer que si (u_n) converge sa limite est $\sqrt{3}$
4) Soit (t_n) définie sur IN^* par $t_n = u_n - \sqrt{3}$
   a) Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(u_n - \sqrt{3})^2}{2u_n}$ pour tout entier non nul n
   b) En déduire que $u_n \geq \sqrt{3}$ pour tout entier naturel n non nul
   c) Démontrer que $\forall n \in IN^*$ $0 \leq t_n \leq \frac{1}{2}$
   d) En déduire que $\forall n \in IN^*$ $0 \leq t_{n+1} \leq \frac{1}{6} t_n$ puis $0 \leq t_n \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} t_1$. En déduire la limite de (t_n) *et* (u_n)

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$ puis vérifier que $\alpha \in]0,6;0,7[$
5) Montrer que $\forall x \in [0;1]$ $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$
6) Soit (u_n) *dèfinie par* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a) Montrer que $\forall n \in IN$ $0 \leq u_n \leq 1$

PREP@BAC

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{\sqrt{2}}{4}|u_n - \alpha|$

c) En déduire que $\forall n \in IN$ $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$ puis (u_n) converge vers $\sqrt{\sqrt{2}-1}$

EXERCICE 5

L'objectif de l'exercice est la détermination d'une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = x$; où f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{2x}}$

1) a) Etudier les variations de f *sur* $]0;+\infty[$ puis en déduire le sens de variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ *par* $g(x) = f(x) - x$

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$

2) a) Prouver que pour tout $x \in \left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$ on a $\frac{5}{4} \le f(x) \le \frac{3}{2}$

b) Démontrer que pour tout $x \in \left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$; $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$ (on remarquera que $|f'(x)| = \frac{1}{2x^2}f(x)$)

3) On considère la suite (u_n) *d'éléments de* $\left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$ définie par $u_0 = \frac{5}{4}$ et pour tout $n \in IN; u_{n+1} = f(u_n)$

a) Démontrer que $\forall n \in IN, |u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) En déduire que $\forall n \in IN, |u_n - \alpha| \le \frac{1}{2^{n+2}}$

c) Déterminer le plus petit entier n tel que u_n *soit une valeur approchée de* α *à* 10^{-3} *prés* . Calculer alors cette valeur

EXERCICE 6

On définit les complexes Z_n de la manière suivante $Z_0 = 1$ et pour tout entier n strictement positif $Z_{n+1} = \frac{1}{3}Z_n + \frac{2}{3}i$.

PREP@BAC

1°) On pose, pour tout entier n, $U_n = Z_n - i$.

d- Calculer U_{n+1} en fonction de U_n.

e- Montrer que pour tout entier naturel n $U_n = (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2°) a- Exprimer, en fonction de n, la partie réelle X_n et la partie imaginaire Y_n de U_n.

f- On note A_n le point du plan d'affixe U_n et B_n le point d'affixe Z_n. Calculer le module et un argument de U_n. Montrer que les points A_n sont alignés. Montrer que les points B_n sont alignés.

EXERCICE 7

Trois nombres complexes z_1, z_2 et z_3 sont tels que :

- leurs modules forment une progression géométrique de raison 2.
- leurs arguments forment une progression arithmétique de raison $\frac{2\pi}{3}$.
- leur produit $z_1 z_2 z_3 = 4\left(1+i\sqrt{3}\right)$ et qu'un argument de z_1 appartient à $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Trouver ces trois nombres complexes. (Sous forme trigonométrique)

EXERCICE 8

Soit f la fonction sur]0; +∞[par $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2} lnx$

1- Prouver que l'équation $g(x)$ admet une solution unique l dans l'intervalle I = [1; 2].
2- Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 - \frac{1}{2} lnx$.
   a- Vérifier que l est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.
   b- Etudier les variations de f et montrer que, pour tout x de I, on a f(x) appartient à I.
   c- Montrer que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
3- Soit (Un) la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout n: $U_{n+1} = f(u_n)$
   a- Montrer par récurrence que pour tout n : $U_n \in I$.
   b- Montrer que pour tout n, $|U_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|U_n - l|$
   c- En déduire que pour tout n, $|U_n - l| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
   d- Montrer alors que (Un) converge vers l.
   e- Trouver le plus petit entier naturel m Um soit une valeur approché de l à 10^{-2} près.

PREP@BAC

f- Donner un encadrement de l d'amplitude10^{-2}.

EXERCICE 9

Soit le complexe $a=-1-i$ et (z_n) $n\in IN$ la suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} z_0=0 \text{ et } z_1=i \\ z_{n+1}=(1-a)z_n+az_{n-1} \quad \forall n\in IN^* \end{cases}$$

5) déterminer z_2 et z_3 sous forme algébrique.
6) Soit (u_n) la suite définie par $u_n=z_{n+1}-z_n \quad n\in IN$
   a) déterminer u_0 et u_1 sous forme algébrique.
   b) Démontrer que (u_n) est géométrique de raison $-a$
   c) Exprimer u_n en fonction de n et de a
7) Soit $S_n=u_0+u_1+........+u_{n-1}$. Exprimer S_n en fonction de z_n. En déduire $z_n=-1+(1+i)^n$
8) a) Déterminer le module et un argument de a.

EXERCICE 10

Soit (z_n), $n\in IN$ la suite géométrique de premier terme $z_0=1$ et de raison $q=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$. Soit le point $M_n(z_n)$

6) Exprimer z_n en fonction de n
7) Quelle est la transformation qui permet de passer de $M_n(z_n)$ à $M_{n+1}(z_{n+1})$. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_4 (on prendra 6cm pour unité graphique).
8) Soit (u_n), $n\in IN$ la suite définie par $u_n=|z_n|$. Etudier le sens de variation et la limite de (u_n).
9) Soit (θ_n), $n\in IN$ la suite définie par $\theta_n=Arg(z_n)$, (où *Arg désigne l'argument principal de* z_n). Démontrer que (θ_n) est une suite périodique.
10) Démontrer que $\forall n\in IN$, le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle.

EXERCICE 11

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=e \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n} \end{cases}$, et la suite (v_n) *définie par* : $v_n=\ln u_n$

1) a)Montrer que (v_n) est une suite géométrique, préciser la raison et le premier terme
   b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n

PREP@BAC

2) On pose $S_n = v_o + v_1 + ------ + v_n \; et \; T_n = u_0 \times u_1 \times ---- \times u_n$

a) Montrer que $T_n = e^{S_n}$

b) Exprimer $S_n, puis \, T_n$ en fonction de n

c) Etudier la convergence des suites $(S_n) \, et \, (T_n)$

Plus LOIN

Exercice un :

(U_n) est une suite arithmétique de raison a et on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

1°) a = 5 et U_0 = 1 Calculer U_4 et S_{10}

2°) a = – 4 et U_3 = 20 Calculer S_{15}

3°) U_5 = 8 et U_{10} = 28 Calculer S_{15}

4°) Calculer U_4 et U_5 sachant que U_0 = 2 et que $U_4 \times U_5 = 18$

5°) Calculer U_0 et a sachant que S_{10} = 88 et que S_{12} = 143

6°) a = 3 et U_0 = – 10 Déterminer n tel que S_n = 200

Exercice deux

(U_n) est une suite géométrique de raison b et on note $s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

1°) b = – 5 et U_0 = 3 calculer U_3 et S_3

2°) U_2 = 5 et U_3 = 7 Calculer U_4 et S_4

Exercice trois :

On donne (U_n) définie par U_1 =1 et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1}$ calculer les premiers termes et conjecturer une expression de U_n en fonction de n et démontrer que votre formule est bonne par récurrence.

PREP@BAC

Exercice quatre :

Soit la suite (V_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = 2\,V_n - 1$

1°) Démontrer que la suite (U_n) définie par $U_n = V_n - 1$ est géométrique

2°) Déterminer l'expression de U_n puis celle de V_n et étudier leurs limites.

Exercice cinq :

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$; $U_1 = 3$ et si $n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+2} = \frac{1}{2} a^2\, U_{n+1} + (a - 3)\, U_n$ et on introduit (V_n) par $V_n = U_{n+1} - U_n$

1°) On pose a = 2

a) Démontrer que (V_n) est une suite constante.

b) En déduire que (U_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Exprimer, en fonction de n, U_n et $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} U_i$ en déduire la somme des entiers naturels impairs inférieurs à 100

2°) On pose a = – 4

a) Vérifier que (V_n) est géométrique et exprimer V_n en fonction de n.

b) Calculer la somme $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} V_i$ en fonction de n

c) Démontrer que $S_n = U_{n+1} - 1$

Exercice six :

Soient les suites numériques (V_n) et (W_n) définie par $V_0 = -\frac{3}{2}$ et $V_{n+1} = \frac{2}{3} V_n - 1$

et $W_n = 2\,V_n + 6$

1°) Démontrer que (W_n) est géométrique et donner les expressions en fonction de n de W_n et V_n.

2°) Calculer $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k \quad s'_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$

Exercice sept

PREP@BAC

Term S

On considère $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ définie sur $[0\ ;1]$

1°) Résoudre $f(x) = x$

2°) Démontrer que si $x \in [0\ ;1]$ alors $f(x) \in [0, 1]$

3°) Démontrer que $f(x) - 1 = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}+1\right)}(x-1)$ et en déduire que $1 - f(x) \leq \dfrac{3}{10}(1-x)$ dans $[0; 1]$

4°) On définit (U_n) par $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

a) Pourquoi U_n est-il toujours dans $[0\ ;1]$?

b) Justifier que $1 - U_{n+1} \leq \dfrac{3}{10}(1 - U_n)$

c) Démontrer par récurrence que $1 - U_n \leq \dfrac{1}{2} \times 0{,}3^n$ et en déduire la limite de (U_n)

<u>Exercice huit :</u>

A] On considère $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ définie sur $[0\ ; +\infty[$

1°) Démontrer que si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) \leq 1$

2°) Démontrer que $f(x) - x = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{2\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{2}}+x\right)}$ et étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0\ ;1]$

B] On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$

1°) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $0 \leq U_n \leq 1$

2°) Etudier le sens de variation de (U_n)

3°) On rappelle la formule très connue $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

a) Démontrer que l'on a $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ pour $x \in [0\ ;\pi]$

b) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $U_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

c) Conclure pour la limite de (U_n)

PREP@BAC

Exercice neuf :

(U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison -1

1°) On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ .Démontrer que $S_n = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$

2°) On pose $V_n = e^{U_n}$

a) Démontrer que (V_n) est géométrique.

b) On pose $P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots\ldots \times V_n$,

Déterminer l'expression de P_n en fonction de n et déterminer n pour que $P_n = e^{-88}$

Exercice dix :

Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1°) Démontrer que, pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 1$

On peut donc définir la suite (Un) par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

2°) On considère les suites (Vn) et (W_n) telles que pour tout n

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n} \qquad \text{et} \qquad W_n = \ln V_n$$

a) Vérifier que (Vn) et (Wn) sont bien définies.

b) Démontrer que (Wn) est géométrique.

c) Exprimer en fonction de n, W_n puis V_n et en déduire que $U_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.Quelle est la limite de $(U_n$).

Exercice onze :

1°) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2 + \ln x - 2$.

a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique a dans I = [1,30 ; 1,35].

c) Montrer que l'équation g(x) = 0 est équivalente à l'équation f (x) = x où $f(x) = \sqrt{2 - \ln x}$

2°) On étudie f sur I = [1,30 ; 1,35].

a) Déterminer le sens de variation de f sur I et montrer que I est stable par f.

C'EST A DIRE QUE SI X $\in$ I ALORS F (X) $\in$ I.

PREP@BAC

b) Démontrer que pour x dans I on a $| f'(x) | \leq \frac{1}{3}$.

c) Démontrer que: pour tout x de I on a : $| f(x) - a | \leq \frac{1}{3} | x - a |$.

3°) Soit (Un) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ et

la condition initiale $U_0 = 1,3$.

a) Démontrer que pour tout n $U_n \in I$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $| U_{n+1} - a | \leq \frac{1}{3} |U_n - a |$.

c) Démontrer par récurrence que l'on a : $|U_n - a | \leq \frac{5}{100}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

d) Déterminer la limite de la suite (Un) et préciser un entier n_0 tel que $|U_n - a | \leq 10^{-6}$.

Donner une valeur approchée de U_{n_0} .

PREP@BAC

Term S

PROBABILITE ET VARIABLES ALEATOIRES

Exercice 1

On lance un dé parfait et on considère les événements suivants :
A = "le nombre obtenu est divisible par 2"
B = "le nombre obtenu est divisible par 3"
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 2

Soient 6 jetons numérotés de 1 à 6. On en choisit 3 au hasard.
Quelle est la probabilité que la somme des numéros des trois jetons choisis dépasse (strictement) celle des jetons restants ?

Exercice 3

On lance un dé (bien équilibré) six fois de suite. On note S l'événement "obtenir au moins un 6 lors des six
lancers".
1. Décrire $\hat{S}$.
2. Calculer p(S).

Exercice 4

Une urne U_1 contient deux boules noires et une boule blanche.
Une urne U_2 contient deux boules blanches et une boule noire.
On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire une boule dans cette urne.
1. Faire un arbre.
2. Calculer la probabilité de choisir l'urne U_1 et de tirer une boule blanche.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule blanche.
4. On a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne U_1 ?

Exercice 5

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches.
Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches.
On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage" et B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"
Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 6

Un automobiliste effectue un parcours sur lequel se trouvent dix feux tricolores. Ces feux fonctionnent de manière autonome et indépendante et possèdent chacun le même cycle : *vert* 25 secondes, *orange* 5 secondes, *rouge* 30 secondes.

PREP@BAC

1. Étant donné un feu tricolore, on note S l'événement "l'automobiliste passe au feu vert". Calculer $P(S)$.
2. Quelle est la probabilité que sur son parcours (comportant dix feux tricolores) l'automobiliste rencontre exactement six feux verts ?
3. Quelle est la probabilité que sur son parcours l'automobiliste ne rencontre que des feux verts ?
4. Calculer le nombre moyen de feux verts que l'automobiliste rencontre sur son parcours.

Exercice 7

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O.
Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur *Rhésus*. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit de Rhésus positif (noté Rh+) ; s'il ne possède pas ce facteur, il est dit de Rhésus négatif (noté Rh-).Sur une population Φ les groupes sanguins se répartissent de la manière suivante :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe, la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit ainsi

GROUPE	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

Un individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé donneur universel.
On choisit un individu au hasard dans la population . Calculer la probabilité des événements suivants :
1. O = "l'individu a un sang du groupe O"
2. DU = "l'individu est un donneur universel"
3. Rh- ="l'individu a un sang de Rhésus négatif"
4. On suppose dans cette question que l'individu a du sang de Rhésus négatif. Quelle est la probabilité que cet individu soit du groupe O ?

Exercice 8

On considère le jeu suivant : une urne contient six boules blanches et une boule rouge. Le joueur tire successivement et sans remise une boule jusqu'à tirer la boule rouge. On note k le rang du tirage de la boule rouge.
On suppose que, à chaque tirage, chaque boule a autant de chance d'être tirée. Le joueur gagne k euros si k est pair et perd k euros si k est impair. Soit X La variable aléatoire qui correspondant t en euros au gain du joueur
1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer son espérance mathématique.
3. Ce jeu est-il intéressant pour le joueur ?
4. Sachant que la première boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?

Exercice 9

On place dans une urne six boules numérotées de 0 à 5, indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer simultanément trois boules.
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les trois boules tirées.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique ainsi que son écart-type.
   b) Calculer la probabilité que X prenne une valeur strictement supérieure à 3.

Exercice 10

Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1, M_2 et M_3. La moitié des appareils de son stock provient de M_1, un huitième de M_2, et trois huitièmes de M_3.
Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 sont rouge, que 5% des appareils de la marque M_2 sont rouges et que 10% des appareils de la marque M_3 le sont aussi. On donnera les résultats sous forme de fractions.
On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste :
1. Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 ?
3. Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?
4. Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

Exercice 11

Un dé est truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir chaque numéro de 1 à 6 soit proportionnelle à ce numéro. Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.

Exercice 12

Une urne contient 1 jeton numéroté (1), 2 jetons numérotés (2) et 3 jetons numérotés (3).
On tire, au hasard, successivement deux jetons sans remise.
1. Faire un arbre (avec probabilités).
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons identiques ?
3. On note X la somme des chiffres des deux jetons tirés.
   a) Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ?
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance E(X) et l'écart type δ(X).

Exercice 12

A, B et C sont trois événements. On sait que :

$p(A) = 0{,}5$ $p(B) = 0{,}1$ $p(C) = 0{,}7$ $p(B \cup C) = 0{,}8$ $p(A \cap B) = 0{,}3$

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?
2. Les événements B et C sont-ils incompatibles ? Sont-ils indépendants ?
3. Les événements A et C sont-ils incompatibles ?

Exercice 14

On considère un dé, non truqué, à six faces non numérotées mais coloriées :Il y a deux faces rouges, deux faces vertes et deux faces oranges.

On lance le dé une fois. On gagne à tous les coups, sauf si la face obtenue est rouge.

1. Expliquer brièvement pourquoi on a **1 chance sur 3** de perdre.
2. On suppose que l'on reçoit 5 euros lorsqu' on gagne et qu'on donne deux fois plus lorsqu' on perte. Ce jeu est - il équitable ?

Exercice 15

Une urne contient 2 jetons numérotés (1) et 3 jetons numérotés (2).

On tire, au hasard, successivement deux jetons sans remise.

1. Faire un arbre (avec probabilités).
2. On note X la somme des chiffres des deux jetons tirés.

a) Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ?

b) Donner la loi de probabilité de X.

c) Calculer l'espérance E(X) et l'écart type $\delta(X)$.

Exercice: 9

1. On lance deux fois de suite un dé bien équilibre , dont les faces numérotés de 1 à 6. On effectue ensuite le total des numérotés apparus. Quelle est le total qui a la plus forte probabilité d' être obtenue. ?

Même question en supposant que les faces sont numérotés 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4.

Exercice 16

Un dé est truqué de telle sorte que $p(1) = p(2) = p(3) = \frac{1}{10}$.

On sait d'autre part que $p(4) = p(5) = p(6)$.

1. Calculer $p(4)$, $p(5)$ et $p(6)$.
2. On note X la variable aléatoire correspondant au résultat affiché par ce dé lorsqu'on le lance une fois. Calculer l'espérance E(X).

Exercice 17

Lorsqu'un joueur de tennis effectue une mise en jeu, il a droit à deux tentatives : un premier service, suivi, s'il n'est pas réussi d'un second service. Les statistiques du joueur Jean-Marc DÉSAISSE sont les suivantes :

- la probabilité que le premier service réussisse est égale à $\frac{2}{3}$
- s'il a échoué, la probabilité que le deuxième service réussisse est égale à $\frac{4}{5}$

PREP@BAC

Lorsque les deux services échouent, on dit qu'il y a "double faute", sinon, la mise en jeu est réussie. Calculer :

1. la probabilité que Jean-Marc fasse une double faute.
2. La probabilité que Jean-Marc réussisse sa mise en jeu.

Exercice 18

Un problème posé à Blaise PASCAL par le chevalier de Méré : Quel est l'événement le plus probable : A = "Obtenir au moins un "6" en lançant un dé quatre fois"

B = "Obtenir au moins un double "6" en lançant deux dés vingt quatre fois"

Indication : formuler les événements contraires de A et de B puis calculer leur probabilité ...

Exercice 19

On considère un jeu de 32 cartes. On tire simultanément huit cartes du jeu. Quelle est la probabilité des événements suivants :

A = "obtenir exactement un valet" ; B = "obtenir exactement trois cœurs"

C = "obtenir exactement un valet et trois sœurs" ; D = "obtenir au moins un as"

E = "obtenir deux valets, trois dames, un roi et deux as".

Exercice 22

Un restaurant universitaire possède 1500 assiettes. Un étudiant mange, au cours d'une année scolaire, 100 fois dans ce restaurant. Quelle est la probabilité que cet étudiant mange, au cours d'une année scolaire, au moins deux fois dans la même assiette ?

(On supposera qu'à chaque repas, chacune des 1500 assiettes a autant de chance de lui être attribuée)

Exercice 20

Un sondage effectué auprès des automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes V et V' montre que 60 % des automobilistes transportent des enfants et que, parmi ceux-ci, 85 % se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet, alors que 70 % des automobilistes voyageant sans enfant ne sont pas arrêtés. On interroge au hasard un automobiliste. On note :

A l'événement "l'automobiliste interrogé s'est arrêté au moins une fois"

E l'événement "l'automobiliste interrogé transporte des enfants"

1. Préciser les probabilités suivantes : p(E), p(A|E) et p(A| $\overline{E}$).

(A|E désigne l'événement A sachant que E est réalisé et $\overline{E}$ est l'événement contraire de E)

2. Calculer les probabilités $p(A \cap E)$ et p(A).
3. Calculer la probabilité qu'un automobiliste transporte des enfants sachant qu'il ne s'est pas arrêté.

Exercice 21

Un grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

PREP@BAC

1. On tire simultanément et au hasard cinq cartes de l'enveloppe.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de rois obtenus.
Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage au hasard d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe.
Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.
Déterminer la loi de probabilité de Y.
3. Calculer les espérances mathématiques de X et de Y.

Exercice 25

On lance simultanément deux dés (non truqués et numérotés de 1 à 6).
On note X la somme des chiffres obtenus et
Y le produit des chiffres obtenus.
On s'intéresse à la variable aléatoire Z définie par Z = Y – 2X.
Par exemple, si les dés affichent 4 et 6, on a : X = 10, Y = 24 et Z = 4.
Calculer la probabilité des événements suivants :
1) A = "Z est un nombre positif (ou nul)"
2) B = "Z est un nombre impair"
3) C = "Z est un nombre positif (ou nul) ou un nombre impair"

Exercice 23

On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne.
1. Calculer la probabilité des événements suivants :
J = "tirer une boule jaune" ; B = "tirer une boule bleue" ; R = "tirer une boule rouge"
2. En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :

- rouge on gagne 10F
- vert on gagne 2 F
- jaune ou bleu on gagne 3F

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.
a) Déduire de la question 1) : P(X = 2), P(X = 3) et P(X = 10).
b) Calculer l'espérance mathématique de X, sa variance puis son écart–type.
(On arrondira l'écart–type à 10^{-2} près)
3. Maintenant on gagne 10F si la boule tirée est rouge, 2F si elle est vert , 3F si elle est jaune et m F si elle est bleue , m désigne un réel positif. Calculer m pour que le gain moyen espère soit égale à 4,5.

PREP@BAC

Exercice 24

Une urne contient n boules blanches (n non nul), deux boules noires et trois boules rouges. On extrait au hasard
une boule de l'urne, on regarde sa couleur puis on la replace dans l'urne.
On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

1) a) Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir une boule blanche, la probabilité p_2 d'obtenir une boule noire et la probabilité p_3 d'obtenir une boule rouge.

b) Déterminer n pour que $p_2 = \frac{2}{11}$

c) Déterminer n pour que $p_2 = \frac{1}{5}$

2) On suppose dans cette question que n = 5. On défini une variable aléatoire X en associant à chaque couleur un nombre de points, comme cela est précisé dans le tableau.

Couleur de la boule	Nombre de points
Noir	7
rouge	2
blanche	3

a) Définir la loi de probabilité de X.
b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart–type de la variable aléatoire X.

Exercice 26

On lance successivement deux fois un dé parfait dont les six faces sont numérotées de 1 à 6 et on note les numéros obtenus dans l'ordre de leur apparition. Chaque face à la même probabilité d'apparition.

1. Écrire toutes les éventualités ; on pourra, par exemple, utiliser un tableau.
Une éventualité sera notée par exemple : (2 ; 5).
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque éventualité (a ; b) associe le plus grand des deux nombres a ou b.

Exemples : à l'éventualité (2 ; 5) , X fait correspondre 5 ; à l'éventualité (3 ; 3) , X fait correspondre 3.

a) Définir la loi de probabilité de X à l'aide d'un tableau.
b) Calculer l'espérance mathématique de X.
3. Deux joueurs A et B conviennent que :
- A gagne lorsque le plus grand des deux nombres tirés est : 5 ou 6.
- B gagne dans les autres cas.

Quelle est la probabilité que :
a) le joueur A gagne ?
b) le joueur B gagne ?

Exercice 27

1. Sur le quadrillage ci-contre (9×4), combien y a-t-il de chemins allant de A à B (on se déplace uniquement vers la droite ou vers le bas) ?

PREP@BAC

A						C		
								B

Indication : on pourra dénombrer le nombre de mots de 13 lettres qui contiennent 9 fois la lettre D et 4 fois la lettre B.

2. On choisit l'un de ces chemins au hasard. Calculer la probabilité de passer par le point C.

Indication : on pourra dénombrer les chemins allant de A à C puis ceux allant de C à B.

Exercice 29

Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.

1. On achète 2 billets. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un billet gagnant ?
2. On achète maintenant n billets. Calculer en fonction de n la probabilité qu'il y ait au moins un billet gagnant.
3. Combien de billets faut-il acheter pour être sûr à 50% d'avoir au moins un billet gagnant ?

Exercice 28

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. Le but du problème est de savoir si le vaccin est efficace. On choisit un individu au hasard dans cette population et on note :M = "l'individu est malade" et V = "l'individu est vacciné".

1. Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.
2. Calculer p(M). En déduire la proportion des malades dans la population.
3. Calculer la probabilité que l'individu soit malade sachant qu'il n'est pas vacciné.
4. En déduire que $p(M|\overline{V}) > p(M|V)$. Ce vaccin est-il efficace ?

Exercice 30

On lance deux dés non truqués. Un rouge et un vert. Leurs faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les événements :
A = "les deux dés donnent le même chiffre" .
B = "on obtient au moins un six". C = "le dé rouge donne un 6"

1. Calculer p(A), p(B) et p(C).
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

Exercice 31

Dans cet exercice, n est un entier vérifiant $n > 4$. On place n jetons dans une urne : un jaune et des blancs. À chaque fois que l'on choisit, au hasard, un jeton de l'urne on note :
J = "le jeton obtenu est jaune" B = "le jeton obtenu est blanc"

1) On suppose que l'on choisit juste un jeton (au hasard).

Exprimer en fonction de n les probabilités p(J) et p(B).

2) on considère maintenant le jeu suivante. On choisie successivement deux jetons avec remise on gagne 16F si l'on obtient deux fois le jeton jaune ; on gagne 1F si l'on obtient deux fois un jeton blanc sinon on perd 5F

On note X le gain algébrique en euros (+16 ; 1 ou 5)

a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.

b) Déterminer la loi de probabilité de X (en fonction de n)

c) Exprimer E(X) en fonction de n.

d) Comment choisir n pour avoir E(X) = 0 ?

Exercice : 39

On joue avec deux dés ordinaires.

1. Si la somme des points obtenus est strictement supérieur à 7, vous gagner, sinon c'est l'adversaire qui gagne. Qui est favorisé ?

2 : Appliquons une nouvelle règle : Si la différence entre les points obtenus est 1ou 2 , vous gagnez , sinon c'est votre adversaire qui gagne. Qui est favorisé ?

Exercice 32

Un fournisseur livre deux catégories de câbles C_1 et C_2. Dans chaque livraison figurent 20% de câbles C_1 et 80% de câbles C_2. Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, aucun calcul approché n'est demandé. On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 1000 câbles.

1) Préciser la probabilité de l'événement E = "les 4 câbles sont du type C_1"

2) Préciser la probabilité de l'événement F ="1 câble est du type C_1 et 3 câbles sont du type C_2"

3) Préciser la probabilité de l'événement G = "au moins un câble est du type C_1"

Partie B

Dans cette partie, on prélève un câble dans une livraison, on note son type et on le remet dans le lot. On réalise n fois cette expérience £ et on note X le nombre de câbles C_1 obtenus.

1) On suppose que n = 4. Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

a) Calculer la probabilité d'obtenir 2 câbles du type C_1.

b) Calculer la probabilité d'obtenir au moins un câble de type C_1.

c) Calculer l'espérance E(X).

2) Dans cette question n est inconnu.

a) Exprimer $P(X > 1)$ en fonction de n.

b) Combien de fois faut-il réaliser l'expérience £ pour être sûr à 90% d'obtenir au moins un câble C_1 ?

Exercice 36

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40%

exactement deux places de cinéma. On note p(A|B) la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.
1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :
G = "le client achète une tablette gagnante"
U = "le client gagne exactement une place de cinéma"
D = "le client gagne exactement deux places de cinéma"
a) Donner p(G), p(U|G) et p(D|G)
b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

Exercice 37

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.
1. Calculer la probabilité de l'événement A : "les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts"
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique. Interpréter

Exercice 34

Dans un lycée de 810 élèves, les effectifs par niveaux sont :

- 280 élèves en seconde
- 240 élèves en première
- 220 élèves en terminale
- 70 élèves en BTS.

On a décidé d'interroger, chaque jour, un groupe de 5 élèves choisis au hasard pour connaître leur opinion concernant les menus à la cantine.

Partie A - Pour une journée

Dans cette partie, on ne demande aucun calcul approché et on ne cherchera pas à simplifier les résultats obtenus.
1. Calculer la probabilité que les 5 élèves interrogés soient des élèves de seconde.
2. Calculer la probabilité que parmi les 5 élèves interrogés, un, exactement, soit un élève de première.
3. Calculer la probabilité p pour qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

Partie B - On répète l'opération pendant 6 jours de manière indépendante

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10-5 près.
Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où au moins un élève de BTS est interrogé.
Dans tous les calculs, on prendra 0,3643 comme valeur de la probabilité qu' au moins un élève de BTS soit interrogé.
1. Calculer la probabilité pour que l'événement "au moins un élève de BTS est interrogé" se produise 4 fois exactement au cours de ces 6 jours.
2. Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 6 jours, aucun élève de BTS ne soit interrogé.

Exercice: 10

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une rouge , une verte et une bleue. On tire au hasard et successivement deux boules , on note les couleurs obtenues dans l' ordre des tirages, la première boule étant replacée dans l' urne avant le second tirage.

1. Déterminer la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire
2. On instaure la règle suivante : le tirage d' une boule rouge rapporte un point, celui d' une verte deux points et celui d 'une bleue fait perdre trois points. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T définie par la somme des points marqués dans l' expérience précédente

Calculer la loi de probabilité pour un joueur de perdre la partie, c' est a dire d' avoir un total négatif.

Exercice: 40

Dans une course , 18 chevaux sont partants.

1. Quelle est la probabilité de gagner le tiercé dans l'ordre ?

2. Le tiercé gagnant est par exemple le suivant : premier le 9 , puis le 17 et enfin le 13.

Quelle est la probabilité de gagner dans le désordre

Exercice 35

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note p(A|B) la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

G = "le client achète une tablette gagnante"

U = "le client gagne exactement une place de cinéma"

D = "le client gagne exactement deux places de cinéma"

a) Donner p(G), p(U|G) et p(D|G)

b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

Exercice : 38

On considère deux jeux de 32 cartes. On les note 1 et 2.

1. On tire au hasard une carte dans chacun des jeux 1et 2. Décrire l'univers des possibles .

On note A l'événement « obtenir 2 as ». et B l'événement « obtenir au moins un as ».

Calculer P(A) et P(B).

2. On mélange les cartes des deux jeux et on tire successivement et sans remise deux cartes au hasard parmi les 64.
Décrire l'univers des possibles et calculer P(A) et P(B).

Exercice : 41

Une boîte contient 4 jetons portant les numéros 0, 1 , 1 et 2.
1. On tire successivement 2 jetons et on fait la somme des numéros obtenus.
Tous les tirages de deux jetons sont supposés équiprobables.
   (a) Quels sont les différents totaux possible ?
   (b) Donner pour chaque total la probabilité correspondante.

2 . Mêmes questions qu'au 1.,
Si on remet le premier jeton dans la boîte avant de tirer le second.

Exercice:6

Deux lignes téléphoniques. L_1et L_2 aboutissent à un standard. Soit A l'événement « la ligne L_1est occupée » Soit B l'événement « la ligne L_2 est occupée »
On donne les probabilités suivant : $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}5$; $P(A \cap B) = 0{,}3$.
Calculer les probabilités des événements suivant :

1. E : « la ligne L1 est libre »
2. F : « une ligne au moins est occupée ».
3. G : « les deux lignes sont libres » .
4. H : « une ligne seulement est occupée ».
5. I : « une ligne au moins est libre ».

Exercice: 7

Les faces d'un dé cubique sont numérotées de 1 à 6. On lance trois fois de suite le dé.
1. Combien y a-t-il de triplets résultats possibles ?
2. Tous les triplets sont supposés équiprobables.
Quelles sont les probabilités des événement suivant ?
   (a) Le premier lancer donne un 6.
   (b) Il y' a exactement un 6 sur les trois lancers
   (c) Il y' a exactement deux 6 sur les trois lancers
   (d) On a obtenu trois fois le chiffre 6
   (e) On a jamais obtenu le chiffre 6

Exercice: 8

Une boite contient 5 jetons Portant les lettres A,B,C,D et E.On forme un mot de 5 lettres en tirant successivement ces 5 jetons (par « mot »,on désigne un groupe de cinq lettres ayant ou non un sens).

1. Combien y' a t-il de mots en tout ?
2. Tous les mots sont équitables. Quelles sont les probabilités que le mot formé :
   (a) commence par un voyelle ?
   (b) finisse par une voyelle ?
   (c) commence et finisse par une voyelle ?
   (d) commence ou finisse par une voyelle ?
3. Quelle est la probabilité que le mot formé ne commence pas par DB (dans cet ordre) ?

PREP@BAC

Exercice 11

On jette simultanément deux dés (à 6 faces, chaque face étant numérotée de 1à 6). On suppose que ces deux dés sont bien équilibrés. On note X le nombre de six obtenus.

1. Quelles sont les différentes valeurs possibles de X.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   a. $p(X = 0)$ (C'est-à-dire, la probabilité de n'obtenir aucun six)
   b. $p(X = 2)$ (C'est-à-dire, la probabilité d'obtenir exactement deux six)
   c. $p(X = 1)$ (C'est-à-dire, la probabilité d'obtenir exactement un six)
3. En moyenne, combien de six obtient-on ?

Exercice 12

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules,
avec remise, dans l'urne choisie.

1. Faire un arbre illustrant cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

A = "Obtenir aucune boule blanche"
B = "Obtenir au moins une boule blanche"
C = "Obtenir deux boules de même couleur"
D = "Obtenir deux boules blanches sachant que l'urne U_1 a été choisie"

Variables aléatoires et Probabilités conditionnelles

Exercice 1

Dans un jeu de 32 cartes on a quatre « couleurs » : pique, trèfle, carreau et cœur ; chaque « couleur » comprend huit cartes dont une carte as.

1) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes bien battu.Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « les trois cartes sont des as »

B : « il y a au moins 2 couleurs parmi ces 3 cartes »

C : « il n'y a pas d'as parmi les 3 cartes »

2) On tire successivement avec remise 3 cartes du jeu de 32 cartes. Le nombre de coeurs tiré définit une variable aléatoire X. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et son écart- type

Exercice 2

1. On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.

On extrait simultanément deux boules de cette urne, on considère que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité P_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité P_2 que les deux boules tirées soient noires ?
c. Quelle est la probabilité P_3 que les deus boules tirées soient de même couleur ?
d. Quelle est la probabilité P_3 que les deus boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.

On tire simultanément deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants.

R « les trois boules tirées sont rouges »

D « les trois boules tirées ne sont pas toute de même couleur. »

B « la boule tirée dans l'urneU_2 est rouge »

a. Calculer P(R).

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

<u>Exercice3</u>

Pour un examen dix examinateurs ont prépare chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans des enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidats ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note **A_1** l'événement : « les deux sujets obtenus par le premier candidat provienne du même examinateur » et **A_2** « les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement A_1 est égale à $\frac{1}{19}$.

2. **a.** Calculer directement la probabilité conditionnelle P (A_2 / A_1).
b. Montrer que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est $\frac{1}{323}$

3) a. Calculer $P\left(A_2 / \overline{A_1}\right)$ **b.** En remarquant que $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup \left(A_2 \cap \overline{A_1}\right)$. Calculer P (A_2) puis en déduire que $P\left(A_2 \cup A_1\right) = \frac{33}{323}$

PREP@BAC

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui ont choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. La variable aléatoire X prend donc les deux valeurs 0,1 ou 2.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice4

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : Quatre boules grises et deux boules jaunes.

1. On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules grises tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

2. On tire au hasard deux fois de suite deux boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C, D les événements suivants :
A « aucune boule grise n'est tirée au cours du premier tirage de deux boules »

B « une boule grise et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de deux boules »

C « deux boules grises sont tirées au cours du premier tirage de deux boules »

D « une boule grise et une boule jaune sont tirée au cours du deuxième tirage de deux boules »

a. Calculer P (D/A) ; P (D/B) ; P (D/C)

b. En déduire les probabilités des événements $D \cap A$; $D \cap B$; $D \cap C$

c. Calculer la probabilité de l'événement D.

Exercice5

1. Un industriel produit des balances dans deux usines A et B. Pour une période donnée, l'usine A fabrique 2400 balances dont 6% présentent des défauts, l'usine B fabrique 4000 balances dont 7% présentent des défauts. Ces deux productions sont stockées au centre d'expédition. On prélève au hasard l'une de ces balances.

b. Quelle est la probabilité que la balance présente un défaut.
c. Quelle est la probabilité que la balance ne soit pas défectueuse?
d. Sachant que la balance est défectueuse qu'elle est la probabilité qu'elle soit de l'usine A ? de l'usine B ?

3. Des tests effectues sur les balances vendues ont montre que 90% de ces balances fonctionnaient encore parfaitement à la fin de la garantie d'un an.
4. Un hôtelier en achète six. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de balances qui fonctionnent parfaitement au bout de d'un an.
   a. Expliquer pourquoi la loi de probabilité de X est une loi binomiale.

b. Quelle est la probabilité qu'au bout d'un an :

- Toutes les balances fonctionnent
- Aucune balance ne fonctionne
- Au moins la moitie des balances fonctionnent.
- Au plus la moitie des balances fonctionnent.

Exercice6

Une maladie atteint 7%de la population. On dispose d'un test biologique pour la détecter. Ce test donne les résultats suivants :

- Chez les biens portants, 4% des réponses positives et 96% des réponses négatives.
- Chez les malades, 92% des réponses positives et 8% des réponses négatives.

On décide d'hospitaliser tous les individus positifs.

On pose **M** l'événement : « être malade »

T l'événement : « avoir le test positif »

a. Traduire les trois probabilités d'en haut.

b. Déterminer P (T)

On décide d'hospitaliser tous les individus positifs.

c. Déterminer le pourcentage de bien portants parmi les individus hospitalisés et le pourcentage d'individus malades parmi ceux qui ne sont pas hospitalisés.

Exercice 7

Une urne contient 10 boules : 1boule porte le chiffre 0 ; trois boules portent le chiffre 1 et six boules portent le chiffre 2. On extrait simultanément 3boules de l'urne ; on suppose que les boules ont la même chance d'être prélevées.

1) a- quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule portant le chiffre 2 ?

b) quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules portant le même chiffre

2) on désigne par X la somme des chiffres portés par les trois boules.

a) Déterminer la loi de probabilité de X ; son espérance mathématique.

b) définir et représenter sa fonction de répartition F

PREP@BAC

INTEGRATION

EXERCICE 1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}\,dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x\cos x\,dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x+\tan^2 x)\,dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\sin 2x\,dx$ 5) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x\,dx$ 6) $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

7) $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+3}\,dx$ 8) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$ 9) $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^4 x\,dx$ 11) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\cos 2x\,dx$

EXERCICE 2 : 1) Soit $f(x)=\frac{2x+5}{(x+1)^2}$. Déterminer deux réels a et b tels que :

$\forall x\in \mathbb{R}-\{-1\}$, $f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}$. En déduire le calcul de $\int_0^3 \frac{2x+5}{(x+1)^2}\,dx$

2) Soit $g(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall x\in \mathbb{R}^*$, $f(x)=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+1}$.

En déduire le calcul de $\int_1^3 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx$

3) Soit $h(x)=\frac{e^x-2}{e^x-1}$. Déterminer a et b tels que $f(x)=a+\frac{be^x}{e^x-1}$, puis calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$

EXERCICE 3 : Soit les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

1) Justifier l'existence de I et de J.

2) Calculer $I+J$, $J-I$ puis I et J

EXERCICE 4 : 1) Calculer à l'aide d'une intégration par parties :

a) $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1)\cos x\,dx$ c) $\int_0^2 (x-2)\,e^{2x+1}dx$ d) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

PREP@BAC

c) $\int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$

2) Calculer à l'aide de deux intégrations par parties :

a) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ b) $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x dx$ d) $\int_{-1}^0 (1+x)^2 e^x dx$

EXERCICE 5 : Soit la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx$

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$. En déduire $I_{n+2} - I_n$

2) Calculer I_1 , puis I_3 et I_5

3) a) Soit f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \ln\left[\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

Montrer que f est une primitive de g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{\cos x}$

b) En déduire le calcul de I_0 , puis I_2 et I_4

EXERCICE 6 : Soit la suite (I_n) de terme général $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}

2) Calculer I_0

3) En déduire I_n

EXERCICE 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \cos t dt$

1) Exprimer u_n en fonction de n 2) Montrer que (u_n) est une suite géométrique

3) On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer s_n. Montrer que la suite (s_n) converge. Préciser sa limite.

4) Montrer qu'il est possible , en utilisant une propriété des intégrales de retrouver l'expression de s_n en fonction de n

EXERCICE 8 : Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = x\ln|x| \text{ , si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

PREP@BAC

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f

b) Etudier f et tracer la courbe $\left(C_f\right)$

2) Calculer l'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, $\left(x'x\right)$ et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=1$

<u>EXERCICE 9</u> : A- Soit la fonction $h(x)=(x-1)e^{-x}+2$

1) Dresser le tableau de variations de h

2) Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]-1,0\right[$ et donner le signe de h sur $\mathbb{R}$

B- Soit $f(x)=2x+1-xe^{-x}$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm

1) Dresser le tableau de variation de f

2) Démontrer que la droite $(D): y=2x+1$ est asymptote à $\left(C_f\right)$, puis préciser la position de $\left(C_f\right)$ par rapport à (D)

3) Déterminer l'équation de la tangente (Δ) à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 0, puis celle de la tangente (Δ') à $\left(C_f\right)$ au point d'abscisse 1

4) Tracer (D), (Δ), (Δ') et $\left(C_f\right)$

5) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_0^{\lambda} xe^{-x}dx$ où $\lambda \succ 0$

6) Déterminer, en cm^2, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par $\left(C_f\right)$, (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$ $(\lambda \succ 0)$

7) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$. Interpréter le résultat.

PREP@BAC

SERIE D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES :CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1

Calculer les intégrales suivantes

$\int_0^1 \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$; $\int_2^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$; $\int_{-1}^1 le^x - 1ldx$; $\int_0^{\Pi/3} \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; $\int_0^{\Pi/2} \sin x \cos dx$; $\int_0^{\Pi/6} \sin^3 x dx$;

$\int_0^1 (\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2})dx$; $\int_0^{\Pi/2} \cos^2 x \sin^4 x dx$

EXERCICE 2

On pose $I = \int_0^{\Pi/8} e^{-2t}\cos^2 t dt$ et $J = \int_0^{\pi/8} e^{-2t}\sin^2 t dt$

1°) En intégrant successivement deux fois pat parties Calculer $K = \int_0^{\Pi/8} e^{-2t}\cos(2t)dt$

En déduire I- J

2°) Calculer I+J ; 3°) Déduire des questions précédentes I et J.

EXERCICE 3

1°) *Déterminer les réels a et b tels que* $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$

2°) Calculer $\int_2^4 \frac{1}{x(x^2-1)}dx$

3°) A l'aide d'une intégration par parties Calculer $\int_2^4 \frac{x\ln x}{(x^2-1)^2}dx$

EXERCICE 4 : Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{2x-3}{/x^2 - 3x/+4}$

1°) Calculer $\int_0^b f(x)dx$ *où b est un réel positif*

2°) Donner la valeur moyenne de f dans l'intervalle [1,4]

PREP@BAC

<u>EXERCICE 5</u> : On pose $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{e^t+1}dt$ et pour tout entier naturel n $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{e^t+1}dt$

1°) Calculer I_n; I_0+I_1. En déduire I_0

2°) Calculer I_n et I_{n+1} ;En déduire I_2 et I_3

3°) Pour tout réel t de l'intervalle [0,1] Comparer e^{nt} et $e^{(n+1)t}$

. En déduire la variation de la suite (I_n) n∈N

<u>EXERCICE 6</u> 1°) Calculer $I = \int_0^{\Pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx$

2°) Soit la fonction f définie par $\frac{\sin x}{\cos^3 x}$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; calculer f'(x).

3°) On pose J= $\int_0^{\Pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}dx$ -a) Déduire de 2°) une relation entre I et J.

b) Calculer J.

<u>EXERCICE 7</u> :Pour tout n∈ IN , on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1°) Calculer I_1 et I_2 ;2°) En intégrant par parties trouver une relation entre I_n et I_{n-1}

3°) calculer I_3 et I_4.

<u>EXERCICE 8</u> : 1°) Démonter que pour tout réel x on a : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$

2°) On pose $J = \int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\,dx$. En intégrant par partie ,calculer J.

<u>EXERCICE 9</u> I°/ Soit f la fonction définie $f(x) = xe^{1-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 4cm)

1°) Etudier les variations de f

2°) Tracer la courbe (C)

3°) Soit a un réel structure positif, exprimer en cm^2 l'aire A(a) du domaine plan limité par (C) l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = o$ et $x = a$. Calculer $\lim_{a \to +\infty} A(a)$

PREP@BAC

II°/ Pour tout n ϵ IN*, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1°) A l'aide d'une intégration par parties démontrer que $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$. En déduire I_2 et I_3

2°) On pose $J_n = \int_0^1 x^n dx$

a) Calculer J_n en fonction de n

b) Montrer que pour tout x ϵ [0, 1] ; $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$

c) En déduire un encadrement de I_n et $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE 10 : Soit la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2+e^x}{1-e^x}$, (C) la courbe représentative de g dans un repère orthonormal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ $(//\vec{i}// = //\vec{j}// = 1cm)$

1°) Déterminer le domaine de définition de g

Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ à $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2°) Etudier les variations de g

3°) Tracer la courbe (C)

4°) a) D'montrer que $g(x) = -1 - \dfrac{3e^{-x}}{1+e^{-x}}$ pour tout x≠o

b) Soit α un réel supérieur à ln2. On note par E_α la portion du plan comprise entre la courbe (C) et les droites d'équations $x = \ln 2$, $x = \alpha$, $y = -1$

c) Représenter graphiquement E_2

Calculer A(α) l'aire de E_α et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$

PREP@BAC

Term S

CALCUL INTEGRAL SUITE ET FIN

EXERCICE 1 Calculer les intégrales suivantes :

$I=\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$; $J=\int_2^3 \frac{2}{\sqrt{u}}du$; $K=\int_{-1}^2 (x+1)(x^2+2x-7)dx$;

$L=\int_1^3 \frac{dt}{t+1}$; $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin x\ dx$; $N=\int_{-3}^3 xe^2dx$;

EXERCICE 2 Calculer les intégrales suivantes :

1°) $\int_0^5 (x^4-x^2)dx$ 2°) $\int_1^2 (2x^2+5x-1)dx$ 3°) $\int_0^4 (2x^5+2x^3-1)dx$ 4°) $J=\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

5°) $\int_1^2 (x+5)^4 dx$ 6°) $\int_1^5 \left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx$ 7°) $\int_0^1 \left(2x^2-1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$;

8°) $\int_{-1}^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ 9°) $\int_{-1}^2 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$ 10°) $\int_{-1}^2 (x^3-5x^2+1)^4(3x^2-10)\,dx$

11°) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-3\cos x+1)\,dx$ 12°) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x+\cos 3x)\,dx$ 13°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

14°) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^2 x\,dx$ 15°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$ 16°) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x+\cos x-1)\sin x\,dx$

17°) $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$, x > 0 18°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x+\tan^3 x)\ dx$ 19°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\ dx$

20°) $\int_0^3 \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}dx$ 21°) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^4 x}\ dx$ 22°) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{2x}\ dx$

23°) $\int_0^2 \sqrt{x}\,dx$ 24°) $\int_1^2 \sqrt{3x-1}\,dx$ 25°) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ dx$

26°) $\int_{-1}^4 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+7)^3}dx$ 27°) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x+x\sin x}{x^2}dx$

EXERCICE 3 Déterminer les réels a, b et c puis calculer I.

1°) f (x) = $\frac{x+1}{x+2}$ = a + $\frac{b}{x+2}$ I = $\int_1^2 f(x)dx$

PREP@BAC

2°) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-3} = ax + b + \dfrac{c}{x-3}$ $I = \int_0^1 f(x)dx$

3°) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-5x+4} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-4}$ $I = \int_2^3 f(x)dx$

4°) $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$ $I = \int_{-1}^0 f(x)dx$

5°) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$ $I = \int_1^t \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$

6°) $f(x) = \dfrac{e^x-2}{e^x+1} = a + \dfrac{b\,e^{-x}}{1+e^{-x}}$ $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$

EXERCICE 6 Calculer les intégrales suivantes après linéarisation: **1°)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

2°) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x\, dx$ **3°)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\, dt$ **4°)** $\int_0^{\pi} \sin^2 u \cos^2 u\, du$ **5°)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x \cos 3x \cos 5x\, dx$ **6°)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin^3 x\, dx$

EXERCICE 8 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieurs intégrations par parties

1°) $\int_e^{2e} x^3 \ln x\, dx$ **2°)** $\int_1^e x^2 \ln x^2\, dx$ **3°)** $\int_e^{2e} x\,(\ln x)^2\, dx$ **4°)** $\int_0^1 xe^x dx$ **5°)** $\int_1^2 x^2 e^x dx$

6°) $\int_0^1 (x-3)e^{2x} dx$ **7°)** $\int_0^2 (t^2+1)e^t dt$ **8°)** $\int_0^{\pi} (x+2)\sin x\, dx$ **9°)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \cos x\, dx$

PREP@BAC

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICE 1 Déterminer la solution f de chacune des équations différentielles suivantes :

1°) $-3y' + 2y = 0.$ **2°)** $3y' + 6y = 0.$ 3°) $5y' + y = 0,$ **4°)** $2y - 5y' = 0,$

5°) $2y'' - 3y' - 2y = 0,$ **6°)** $y'' + y' + y = 0$ **7°)** $4y'' - 4y' + y = 0,$ **8°)** $y'' - 5y' + 6y = 0,$

EXERCICE 2 On considère l'équation différentielle (E) : $y'+2y = e^{-2x}$.

1. Vérifier que la fonction $g : x \to (x+1)e^{-2x}$ est solution sur IR de (E).
2. Démontrer qu'une fonction $f+g$ est solution de l'équation de (E) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'+2y=0$.
3. En déduire les solutions sur IR de (E).

EXERCICE 3 Soit θ un réel tel que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

1) Résoudre dans **C :** $z^2 \cos^2\theta - 2z\sin\theta\cos\theta + 1 = 0$. Déterminer module et argument des solutions.

2) Résoudre $(1+\cos 2\theta)y'' - (2\sin 2\theta)y' + 2y = 0$

EXERCICE 4 On se propose de résoudre $(E) : y' - 2y = -\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminer la solution de $(E_0) : y' - 2y = 0$ prenant la valeur 1 en 0
2) Soit f dérivable sur IR telle que f(0)=ln2 et g définie par $f(x) = e^{2x}g(x)$.Calculer $g(0)$, $f'(x)$ *en fonction de* $g'(x)$ *et* $g(x)$
3) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. En déduire l'expression de g(x) puis celle de f'(x) de telle sorte que f soit solution de (E).

EXERCICE 5

1) Résoudre (E) $y'' + 2y' + 5y = 0$. Déterminer la solution f telle que f(0)=1, $f'(0 = -1)$
2) $F(x) = -\dfrac{1}{5}(f'(x) + 2f(x))$. Démontrer que F est une primitive de f sur IR. Expliciter F(x). En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

EXERCICE 6 BAC 2009

1) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' + y = 0$

PREP@BAC

2) Soit $(E'): y''+2y'+y=x+3$ déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x)=ax+b$ soit solution de (E')

3) a) démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g-h$ est solution de (E)
   b) Résoudre alors (E')
   c) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=2$ et $f'(0)=-1$

4) Soit $k(x)=(x+2)e^{-x}$
   a) Etudier les variations de k
   b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de k au point d'abscisse 0
   c) Démontrer que le point I(0 ;2) est un point d'inflexion de la courbe
   d) Tracer la courbe et la tangente

EXERCICE 7 BAC 2008

1) Soient les équations différentielles $(E_0): y'+y=0$ *et* $(E); y'+y=e^{-x}\cos x$

a) Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x)=(a\cos x+b\sin x)e^{-x}$ soit solution de (E)

b) démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-h$ est solution de (E_0)

c) résoudre (E_0)

d) Déduire des questions précédentes la solution générale de (E)

e) Déterminer la solution g de (E) telle que $g(0)=0$

3) Soit $l(x)=e^{-x}\sin x$

a) Exprimer $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ *et* $\sin x$

b) Etudier les variations de l *sur* $[0;2\pi[$

c) Calculer $\int_0^{2\pi} l(x)\,dx$

EXERCICE 8 Soit la fonction définie sur IR par $g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$

9) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x réel
10) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
11) Dresser le tableau de variations de g
12) Donner le signe de $g(x)$

PARTIE B Soit f la fonction définie sur IR par $f(\ )=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

11) Montrer que $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$

PREP@BAC

12) Déterminer
   a) La limite de f $en -\infty$
   b) La limite de f $en +\infty$. On pourra remarquer que si on pose $X = 1+2e^x$, $f(x)$ $s'écrit$ $4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}$
13) Dresser le tableau de variations de f
14) Tracer Cf dans un repère orthonormé
15) Soit α un réel strictement positif.
   a) Vérifier que pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right)$ en déduire la valeur de $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x}dx$
   b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'aire de la partie du plan limitée par Cf, $x'x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE C

On considère l'équation différentielle $(E): y' + 2y = 2\left(\frac{e^{-x}}{1+2e^x}\right)$

4) Vérifier que f est solution de (E)
5) Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si et seulement si $h - f$ est solution de $(E'): y' + 2y = 0$
6) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E)

PREP@BAC

STATISTIQUES

EXERCICE 1

Déterminer la droite de régression de y en x avec les données suivantes :

x	0,7	1,3	1,8	2,4	2,9	3,5
y	4	5,1	6,3	8,6	9,4	11,6

On donne :

$\sum x = 12,6; \ \sum y = 45; \ \sum x^2 = 31,84; \ \sum xy = 109,27.$

EXERCICE 2

Déterminer la droite de régression de y en x avec les données suivantes :

x	39	60	30	19	0	29	31	27	44	51	21	25	34
y	28	31	34	2	− 14	35	− 6	7	80	74	2	4	17

Réponse : y = 1,383x − 19,843.

EXERCICE 3

Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson, x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1°) Représenter le nuage de points associé à cette série.

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire des caractères x et y.

3°) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite sur le graphique.

4°) Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours après sa naissance.

EXERCICE 4

PREP@BAC

On considère la série statistique double ci-après :

x	35	40	35	65	65	85	90	k
y	3	4	5	10	8	13	14	15

1°) Déterminer l'entier naturel k sachant que la droite de régression de y par rapport à x passe par le point moyen G d'abscisse 65.

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire des caractères x et y.

3°) Déterminer une équation de la droite de régression de x par rapport à y.

EXERCICE 5

Le tableau suivant donne la tension artérielle T en fonction de l'âge A d'une population.

A	36	42	48	54	60	66
T	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1°) Représenter le nuage de points associé à cette série.

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de T en A et une équation de la droite de régression de A en T. Tracer ces deux droites.

3°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire. La corrélation est-elle forte ?

4°) Estimer la tension artérielle d'un individu âgé de 70 ans.

EXERCICE 6

Une étude sur le nombre d'années d'exercice X, des ouvriers d'une entreprise et leur salaire_mensuel Y en milliers de francs, a donné les résultats indiqués dans le tableau ci-dessous avec_des données manquantes désignées par a et b.

X / y	2	6	10	14	18	22
75	A	5	0	0	0	0
125	0	7	1	0	2	0
175	2	0	9	8	15	4
225	0	1	0	3	b	1

PREP@BAC

Term S

1) Déterminer a et b pour que la moyenne de la série marginale de X soit égale à 596/59 et celle de la série marginale de Y soit 8450/59.

2) Dans la suite, on suppose que a = 40 et b = 20. A chaque valeur xi de X on associe la moyenne mi de la série conditionnelle : Y/X = xi. On obtient ainsi la série double (X, M) définie par le tableau ci-dessous. Les calculs se feront à deux chiffres après la virgule.

X	2	6	10	14	18	22
M	80	113	170	189	199	185

a) Calculer le coefficient de corrélation de X et M puis interpréter le résultat.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de M en X.

c) Quelle serait le salaire moyen d'un ouvrier de l'entreprise si son ancienneté était 30 ans, si cette tendance se poursuit.

Le classement d'un certain nombre-+ d'individus selon leur âge A et leur taille T a donné le tableau à double entrée suivant :

A / T	$40 \leq A < 45$	$45 \leq A < 50$	$50 \leq A < 55$	$55 \leq A < 60$
$150 \leq T < 155$	20	9	1	0
$155 \leq T < 160$	2	18	4	1
$160 \leq T < 165$	0	5	12	6
$165 \leq T < 170$	0	1	7	14

On demande :

1°) de représenter graphiquement cette série par un nuage de points.

2°) de calculer le coefficient de corrélation.

3°) de calculer par la méthode des moindres carrés l'équation de chacune des deux droites de régression.

4°) de construire les droites de régression sur le graphique précédent.

PREP@BAC

T^erm S

EXERCICE 8 Le tableau suivant donne la répartition d'un échantillon de 100 candidats bacheliers suivant leurs notes d'histoire (H) et de sciences économiques et sociales (S.E.S) On ne dispose pas d'observation individuelle. Les notes ont été regroupées par classe.

H(x) / S(y)	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 14[	[14 ; 18[
[0 ; 4[	2	1	0	0	0
[4 ; 8[	2	15	5	0	0
[8 ; 12[	0	4	40	10	0
[12 ; 14[	0	0	5	6	5
[14 ; 18[	0	0	0	4	1

On note x_i les centres de classe des notes d'histoire et y_i les centres de classe des notes de S.E.S.

1°) Calculer la moyenne $\overline{x}$ des notes d'histoire et la moyenne $\overline{y}$ des notes de S.E.S.

2°) Pour chaque classe de centre x_i, calculer la moyenne $\overline{y_i}$ des notes de S.E.S. Dans un repère bien choisi, représenter la série (x_i, $\overline{y_i}$). Donne rune équation de la droite de régression de $\overline{y}$ en x, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $\overline{y} = ax + b$. La tracer.

3°) Pour chaque classe de centre y_i, calculer la moyenne $\overline{x_i}$ des notes d'histoire. Avec le même repère que ci-dessus, représenter la série ($\overline{x_i}$, y_i). Donner une équation de la droite de régression de $\overline{x}$ en y, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $\overline{x} = a'\, y + b'$. La tracer.

4°) Pour mesurer l'intensité de la corrélation linéaire entre les variables x et y, on calcule le coefficient de corrélation linéaire r tel que $r^2 = a\,a'$, r étant positif si a et a ' sont positifs.

Calculer r. La corrélation linéaire semble-t-elle bonne ?

PREP@BAC

EXERCICE 9

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle d'un groupe de femmes.

X	36	42	48	54	60	69
Y	11,8	14	12,6	15	15,5	15,1

1°) Représenter graphiquement le nuage de points dans un plan muni du repère orthogonal (O, I, J) (0,5 cm pour 1 an et 3 cm pour l'unité de tension artérielle).

2°) Calculer la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux variables X et Y.

3°) a) Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.

b) Trouver une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.

c) Représenter ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X et Y.

5°) Une personne de 70 ans a une tension maximale de 16,2 .Cela vous paraît-il normal ?

EXERCICE 10 (1998 Remplacement) Dans un pays A, on a évalué le nombre de personnes travaillant dans l'agriculture en fonction de l'année.

X année	1954	1962	1968	1975	1982	1990
Y nombre d'actifs agricoles en milliers	3 984	3 011	2 460	1 652	1 448	982

On note Z le rang de l'année $\begin{cases} 1954 \text{ a pour rang } Z = 0 \\ 1990 \text{ a pour rang } Z = 36 \end{cases}$

1°) Construire le nuage de points associé à cette série statistique (Z , Y) .

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r de cette série. Peut-on envisager une forte corrélation linéaire entre Z et Y ?

3°) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en z.

PREP@BAC

EXERCICE 11 (1999 1er groupe)

L'étude du poids P de la larve d'un insecte mesuré en fonction de l'âge x a conduit au tableau suivant :

X (mois)	1	2	3	4	5
P (mg)	7	13	25	47	88

1°) On pose y = ln P ou ln désigne le logarithme népérien.

a) Calculer les différentes valeurs prises par y à 10^{-5} près.

b) Tracer le nuage de points représentant les couples (X, Y) dans un système d'axes orthonormés (unité 2 cm) : y placer le barycentre G du nuage.

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.

3°) Si l'évolution se poursuit dans les mêmes conditions, quel sera le poids de la larve au bout de six mois ?

EXERCICE 12 (1999 Remplacement)

Afin de mieux gérer ses stocks, une entreprise décide d'estimer son besoin en matières premières par l'intermédiaire d'une grandeur dont la valeur peut être connue rapidement (chiffre d'affaires ou total des salaires). on note X la quantité, en tonnes de matières premières ; Y le chiffre d'affaires en milliers de francs. Dans tout l'exercice on pourra donner directement les résultats fournis par la calculatrice. Le relevé des mopis précédents est le suivant :

Numéro du mois	1	2	3	4	5	6
X	0,9	1,2	0,6	0,5	1,4	1
Y	37	40	33	33	41	35
Z	3,9	3,7	3,2	3,3	3,6	3,7

1°) a) Calculer les coefficients de corrélation linéaire r_1 entre X et Y et r_2 entre X et Z.

b) Est-ce un ajustement entre Y et X ou entre Z et X qui permettra la meilleure estimation de X ?

PREP@BAC

2°) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X et en déduire une estimation du besoin en matières premières pour Y = 39.

EXERCICE 13 (2001 2ème groupe)

Les relevés de l'intensité (x_i) du travail fourni exprimée en kilojoules par minute et la fréquence cardiaque (y_i) (nombre de battements par minute) de 8 personnes sont consignés dans le tableau suivant :

x_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

1°) Représentez le nuage de points M_i (x_i ; y_i).

2°) Déterminez les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$, les variances V(x) et V(y) de x et y . On précisera les formules utilisées.

3°) Déterminez la droite de régression de y en x ; la tracer.

EXERCICE 14 (2002 1er groupe) 1

63 candidats se sont présentés au baccalauréat comportant une épreuve de Maths et une épreuve de Sciences Physiques : SP.

Le tableau statistique suivant donne le nombre de candidats ayant obtenu un couple de notes donné.

Note de Math / Note de SP	2	6	10	14	18	Totaux
6	4	2	1	0	0	7
8	2	5	2	0	0	9
10	1	6	16	5	1	29
12	0	2	3	6	2	13

PREP@BAC

14	0	1	0	1	3	5
Totaux	7	16	22	12	6	63

On appelle X = (x_i) la série statistique des notes de Sciences Physiques et Y = (y_i) la série statistique des notes de Mathématiques.

1. Déterminer pour chaque x_i la moyenne z_i de la série conditionnelle $y/\ z_i$.

2. On considère la série double ($x_{i,}$ z_i)

   a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé construire le nuage de points

M (x_i, z_i).

   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre la série X = (x_i) et Z = (Z_i).

   c) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de Z et X par la méthode des moindres carrés.

   d) Tracer cette droite.

<u>EXERCICE 15</u> (2004 Remplacement)

Une étude faite sur l'effectif X des familles d'une cité et la quantité Y de sucre en Kilogrammes consommée par mois dans chaque famille, a donné les résultats ci-dessous :

X / Y	[5 ; 7]	[8 ; 10]	[11 ; 13]	[14 ; 18]
[10 ; 15]	1	3	0	0
[1 5 ; 25]	5	9	8	3
[25 ; 35]	0	7	5	9

1°) Calculer la moyenne et l'écart-type des séries marginales X et Y.

2°) A chaque centre x_i de classe de la série de X on associe la moyenne z_i de Y sachant que X = x_i.

PREP@BAC

3°) Dans la suite on considère la série (x, z) définie par le tableau suivant :

x_i	6	9	12	16
z_i	18,75	22,5	23,85	27,5

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z.

Un ajustement affine est-il justifié ? (justifier la réponse).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

c) Estimer la quantité moyenne de sucre consommée par mois pour une famille d'effectif égal à 20.

EXERCICE 16 (2005 1er groupe)

Une entreprise a mis au point un nouveau produit et cherche à en fixer le prix de vente. Une enquête est réalisée auprès des clients potentiels ; les résultats sont donnés dans le tableau suivant où y_i représente le nombre d'exemplaires du produit que les clients sont disposés à acheter si le prix de vente, exprimé en milliers de francs, est x_i.

x_i	60	80	10	120	140	160	180	200
y_i	952	805	630	522	510	324	205	84

On appelle x la variable statistique dont les valeurs sont x_i et y celle dont les valeurs sont les y_i .

1°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de y et x. La valeur trouvée justifie-t-elle la recherche d'un ajustement linéaire ?

2°) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x .

3°) Les frais de conception du produit se sont élevés à 28 millions de francs. Le prix de fabrication de chaque produit est de 25 000 francs.

a) Déduire de la question précédente que le bénéfice z en fonction du prix de vente x est donné par l'égalité : $z = - 5{,}95\,x^2 + 1426{,}25\,x - 59937{,}5$, où x et z sont exprimés en milliers de francs.

b) Déterminer le prix de vente x permettant de réaliser un bénéfice maximum et calculer ce bénéfice.

N .B Prendre 2 chiffres après la virgule sans arrondir.

Rappel : Bénéfice = Prix de vente — Prix de revient.

PREP@BAC

T^{erm} S

EXERCICE 17 (2008 1er groupe 1er sujet)

Dans une maternité, on a relevé pour chacune des 20 naissances d'une journée, l'âge x de la mère (en années) et le poids y du nouveau-né (en kilogrammes). Les résultats sont regroupés dans le tableau à double entrée ci-dessous :

y \ x	16	18	20	22	26	Totaux
2,6	0	0	0	0	1	1
2,8	1	1	0	3	0	5
3	0	2	0	2	2	6
3,2	0	0	3	1	0	4
3,4	0	2	0	0	0	2
3,6	0	0	1	0	1	2
Totaux	1	5	4	6	4	20

Donner les formules avant d'effectuer les calculs puis les réponses à 10^{-2} près par défaut.

1°) a) Déterminer les séries marginales associées aux caractères x et y.

b) Déterminer les moyennes respectives de ces séries marginales.

c) Déterminer le coefficient de corrélation de x et y. La corrélation est-elle bonne ?

2°) A la fin de la journée, une équipe de journalistes de passage pour les besoins d'un reportage désire prendre en photo un bébé. On suppose que les bébés ont tous les mêmes chances d'être choisis pour la photo. Soient les événements :

A « Le bébé choisi pèse 3,2 kilogrammes »

PREP@BAC

B « Le bébé choisi a une maman de 22 ans »

A « Le bébé choisi pèse 2,8 kilogrammes »

a) Déterminer les probabilités des événements A ; B et $A \cap B$. En déduire la probabilité $p(A \cup B)$.

Justifier les résultats.

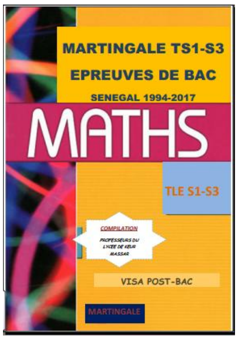
b) Déterminer la probabilité $p(C \mid \overline{B})$. Justifier.

PREP@BAC

COLLECTION MARTINGALE MATHEMATIQUES

DU MEME LYCEE

Martingale mathématiques TS1 Spéciale Arithmétique



Martingale mathématiques TS1 Synthèse BAC

14/5659/9
ISBN : 978-2-0118-11-2