LE DEMARREUR

en maths

Terminale

Specialité

- Scientifiques Mathematiques
- Sciences de l'Ingenieur

tchitcha

Edition 2025

AVANT – PROPOS

Ce fascicule propose ce qu'un élève de Terminale C se doit d'assimiler pour profiter au mieux de son année et aborder dans de bonnes conditions le Baccalauréat.

Il couvre les notions au programme de la classe, s'articule essentiellement sur les exercices de tous les chapitres au programme suivi de quelques examens blancs et des derniers sujets baccalauréats.

Chaque chapitre est constitué d'exercices types qui ressortent les savoirs et les savoirs – faire que chaque élève doit être capable de maîtriser.

Chaque séquence est ponctuée par 02 anciennes évaluations séquentielles des lycées et collèges qui permettent à l'élève de faire un bilan de compréhension de la séquence et de se préparer efficacement aux évaluations séquentielles de classe.

En fin d'ouvrage, 02 examens blancs et 02 anciens baccalauréats permettent à l'élève de se préparer efficacement à l'examen de fin d'année.

La clarté de l'exposé, la mise en valeur des notions clés, la variété et le nombre des sujets d'exercices et problèmes proposés constituent les objectifs majeurs de cet ouvrage.

Bonne utilisation.

Table des matières

ARITHMETIQUE

Exercice 1:

1) Démontrer par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.
2) Démontrer pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
3) Démontrer pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^{n} k(n-k^2) = \frac{n^2(1-n^2)}{4}$
4) Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.
5) Démontrer que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Solution 1:

1) Démontrons par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Soit la proposition P définie par : $\left\{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\right\}$

Montrons que P est vraie pour n = 1 i.e. montrons que $\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = 1(1+1)(1+2) = 6$; $\frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} = \frac{24}{4} = 6$ d'où

$\sum_{k=1}^{1} k(k+1)(k+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n i.e. supposons que $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ $+ (n+1)(n+2)(n+3) = (n+1)(n+2)(n+3)\left(1+\frac{n}{4}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4}$ donc P est vraie au rang n +1.

Conclusion : $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

2) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 1$ i.e. montrons que $\sum_{k=1}^{1} k2^{k-1} = (1-1)2^1 + 1$

$\sum_{k=1}^{1} k2^{k-1} = 1.2^{1-1} = 1$, $(1-1)2^1 + 1 = 0 + 1 = 1$ donc $\sum_{k=1}^{1} k2^{k-1} = (1-1)2^1 + 1$ d'où P est vraie au 1er rang.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n. Montrons que P est vraie au rang n+1 i.e. montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = n2^{n+1} + 1$

$\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} + (n+1)2^n = (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = 2n.2^n + 1 =$ $n2^{n+1} + 1$ d'où P est vraie au rang n+1.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$

3) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(n-k^2) = \frac{n^2(1-n^2)}{4}$

Soit la proposition P définie par : $\left\{\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(n-k^2) = \frac{n^2(1-n^2)}{4}\right\}$

Montrons que P est vraie au 1er rang i.e. montrons que P est vraie au rang $n = 1$

$\sum_{k=1}^{1} k(n-k^2) = 1(1-1^2) = 0, \quad \frac{1^2(1-1^2)}{4} = 0, \quad \sum_{k=1}^{1} k(n-k^2) = \frac{1^2(1-1^2)}{4}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k^2) = \frac{(n+1)^2(1-(n+1)^2)}{4}$

$\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k^2) = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k^2) + (n+1)(n+1-(n+1)^2)$

$\sum_{k=1}^{n} k(n-k^2) + \sum_{k=1}^{n} k - n(n+1)^2 = \frac{n^2(1-n^2)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} - n(n+1)^2 = n(n+1)[\frac{n(1-n)}{4} + \frac{1}{2} - (n+1)] = n(n+1)[\frac{n-n^2+2-4n-4}{4}] = n(n+1)\left(\frac{-n^2-3n-2}{4}\right) = -n(n+1)^2(n+2)$;

$\frac{(n+1)^2(1-(n+1)^2)}{4} = \frac{(n+1)^2(-n(n+2))}{4}$, d'où $\sum_{k=1}^{n+1} k(n+1-k^2) = \frac{(n+1)^2(1-(n+1)^2)}{4}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(n-k^2) = \frac{n^2(1-n^2)}{4}$

4) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k, k \in \mathbb{Z}$

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$

Montrons que P est vraie au 1er rang i.e. montrons que $3^1 + 2^2 = 7k$

$3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7 = 7(1)$ donc P est vraie au 1er rang.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $3^{2n+3} + 2^{n+3} = 7k'$

$3^{2n+3} + 2^{n+3} = 3^2.3^{2n+1} + 2^{n+3} = 9(7k - 2^{n+2}) + 2^{n+3} = 9 \times 7k + (-9+2).2^{n+2} = 7(9k - 2^{n+2})$ donc P est vraie au rang n +1.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k, k \in \mathbb{Z}$

Exercice 2:

On pose $n = x^2 + x - 2, x \in \mathbb{Z}$

1. Déterminer l'ensemble E_1 des entiers x tels que n soit divisible par 7.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des entiers x tels que n soit divisible par 3.
3. Déterminer l'ensemble E des entiers x tels que n soit divisible par 42.

Quel est le plus petit entier n strictement positif divisible par 42 ?

Solution 2:

On pose $n = x^2 + x - 2, x \epsilon \mathbb{Z}$

1. Déterminons $E_1 : \{x \in \mathbb{N}, tel\ que\ n = 7k, k \in \mathbb{Z}\}$

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1
$x - 2$	5	6	0	1	2	3	4
n	5	0	4	3	4	0	5

$E_1 = \{7k + 1, 7k + 5, k \in \mathbb{Z}\}$

2. Déterminons $E_1 : \{x \in \mathbb{N}, tel\ que\ n = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$

x	0	1	2
x^2	0	1	1
$x - 2$	1	2	0
n	1	0	1

Donc $E_2 = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déterminons $E_3 : \{x \in \mathbb{N}, tel\ que\ n = 42k, k \in \mathbb{Z}\}$

En s'appuyant sur le tableau ci-dessous, on constate que :

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	3	4	1
$x - 2$	4	5	0	1	2	3
n	4	0	4	4	0	4

$\begin{cases} x \equiv 1[7] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$ donc $x \equiv 1[ppcm(6;7) = 42]$

De plus $\begin{cases} x \equiv 1[7] \\ x \equiv 4[6] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[6] \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 4[6] \end{cases}$

<u>1e cas</u>

$\begin{cases} x \equiv 1[7] \\ x \equiv 4[6] \end{cases} \Rightarrow 7k - 6p = 3$ (E)

$7(3) - 6(3) = 3$ donc (3 ; 3) est solution particulière de (E)

$7k - 6p = 7(3) - 6(3) \Leftrightarrow 7(k - 3) = 6(p - 3) \Rightarrow 7/6(p - 3)$ or $(7 \wedge 6) = 1$ alors d'après Gauss, on a $7/(p - 3) \Rightarrow p = 7k' + 3$ ainsi $x = 6p + 4 = 42k' + 22, k' \in \mathbb{Z}$

2e cas :

$\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[6] \end{cases} \Rightarrow 7m - 6n = -4$ (E')

$7(-4) - 6(-4) = -4$ donc (-4 ; -4) est solution particulière de (E')

$7m - 6n = 7(-4) - 6(-4) \Leftrightarrow 7(m+4) = 6(n+4) \Leftrightarrow 6/7(m+4)$ or $(7 \wedge 6) = 1$ alors d'après Gauss $6/(m+4)$ d'où $m = 6p - 4, p \in \mathbb{Z}$ dans ce cas $x = 7m + 5 = 42p - 23, p \in \mathbb{Z}$

3e cas :

$\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 4[6] \end{cases} \Rightarrow 7k - 6p = -1$ (E)

$7(-1) - 6(-1) = -1$ donc (3 ; 3) est solution particulière de (E)

$7k - 6p = 7(-1) - 6(-1) \Leftrightarrow 7(k+1) = 6(p+1) \Rightarrow 7/6(p+1)$ or $(7 \wedge 6) = 1$ alors d'après Gauss, on a $7/(p+1) \Rightarrow p = 7k' - 1$ ainsi $x = 6p + 4 = 42k' - 2, k' \in \mathbb{Z}$

$E_3 = \{42k + 1;\ 42k + 22;\ 42k - 23; 42k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$

Déterminons le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ divisible par 42

$n = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

En prenant $x = 42k - 23$

Pour $k = 1$, on a $x = 19$ et $n = 21 \times 18 = 378$.

Exercice 3:

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de 5^n.
2. En déduire le reste de la division par 7 de 5^{136}.
3. Un nombre s'écrit $\overline{3x53}$ en base 10.
   Déterminer x pour que l'on ait : $5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0[7]$.

Solution 3:

1. Déterminons, suivant les valeurs de n, le reste de la division de 5^n par 7.

$5^1 \equiv 5[7]$, $5^2 \equiv 4[7]$, $5^3 \equiv 6[7]$, $5^4 \equiv 2[7]$, $5^5 \equiv 3[7]$, $5^6 \equiv 1[7]$,

Donc

$$\begin{cases} Si\ n = 6k + 1, 5^n = 5^{6k+1} = 5^{6k}.5^1 \equiv 5[7] \\ Si\ n = 6k + 2, 5^n = 5^{6k+2} = 5^{6k}.5^2 \equiv 4[7] \\ Si\ n = 6k + 3, 5^n = 5^{6k+3} = 5^{6k}.5^3 \equiv 6[7] \\ Si\ n = 6k + 4, 5^n = 5^{6k+4} = 5^{6k}.5^4 \equiv 2[7] \\ Si\ n = 6k + 5, 5^n = 5^{6k+5} = 5^{6k}.5^5 \equiv 3[7] \end{cases}$$

2. Déduisons le reste de la division par 7 de 5^{136}

$5^{136} = 5^{22 \times 6 + 4} \equiv 2[7]$ donc le reste c'est 2.

3. Un nombre s'écrit $\overline{3x53}$ en base 10

Déterminons x pour que l'on ait : $5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0[7]$.

$\overline{3x53} = 3 + 5 \times 10 + x \times 10^2 + 3 \times 10^3$

$10 \equiv 3[7] \Rightarrow 5 \times 10 \equiv 1[7]$, $10^2 \equiv 2[7] \Rightarrow 10^2 x \equiv 2x[7]$, $10^3 \equiv 6[7] \Rightarrow$ $3 \times 10^3 \equiv 4[7] \Rightarrow \overline{3x53} = 2x + 8[7] \equiv 2x + 1[7]$

Ainsi $5^{136} + \overline{3x53} \equiv 0[7] \Leftrightarrow 2x + 5 \equiv 0[7]$

x	0	1	2	3	4	5	6
$2x$	0	2	4	6	1	3	5
5	5	5	5	5	5	5	5
$2x + 5$	5	0	2	4	6	1	3

Donc $x = 7k + 1$ or $x \in \{0,1,\ldots,9\}$ donc pour k =1 $x = 8$.

Exercice 4:

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre N = $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Solution 4:

Déterminons, suivant les valeurs de p, le reste de la division de 5^p par 13.

$5^1 \equiv 5[13]$, $5^2 \equiv 12[13]$, $5^3 \equiv 8[13]$, $5^4 \equiv 1[13]$

$$\begin{cases} Si\ n = 4k, 5^n = 5^{4k} = (5^4)^k \equiv 1[13] \\ Si\ n = 4k+1, 5^n = 5^{4k+1} \equiv 5[13] \\ Si\ n = 4k+2, 5^n = 5^{4k+2} \equiv 12[13] \\ Si\ n = 4k+3, 5^n = 5^{4k+3} \equiv 8[13] \end{cases}$$

2. Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}, N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} = 13k$

$31 \equiv 5[13] \Rightarrow 31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1}[13] \equiv 5[13]$, $18 \equiv 5[13] \Rightarrow 18^{4n-1} = 18^{4(n-1)+3} \equiv$ $5^{4(n-1)+3}[13] \equiv 8[13]$ donc $N \equiv 5 + 8[13] \equiv 0[13]$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} =$ $13k$

Exercice 5:

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
   En déduire que, $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que, $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8.
2. Déterminer les restes de la division par 8 des puissances de 3.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre A_p défini par :
$A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$.
   a. Si p = 2n, quel est le reste de la division de A_p par 8 ?
   b. Démontrer que, si p = 2n+1, A_p est divisible par 8.
4. On considère les nombres a et b écrits dans le système « base 3 ».
   a = $\overline{1110}^3$; b = $\overline{101010100}^3$
   Les nombres a et b sont – ils divisibles par 8 ?
5. De même, on considère le nombre c = $\overline{2002002002000}^3$. Démontrer que c est divisible par 16.

<u>Rq</u> : Pour les questions 4 et 5, on raisonnera sans utiliser la valeur numérique en base dix des nombres a, b et c.

Solution 5:

1.1 Démontrons que, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8

$9 \equiv 1[8]$, $3^{2n} = (3^2)^n = 9^n \equiv 1^n[13] \Leftrightarrow 3^{2n} \equiv 1[8]$ d'où $3^{2n} - 1 \equiv 0[8]$.

1.2 déduisons que, $3^{2n+2} + 7$ est un multiple de 8 et que, $3^{2n+4} - 1$ est un multiple de 8

$3^{2n+2} + 7 \equiv 1 + 7[8] \equiv 0[8]$, $3^{2n+4} - 1 = 3^{2(n+2)} - 1 \equiv 1 - 1[8] \equiv 0[8]$ d'où

$3^{2n+2} + 7$ et $3^{2n+4} - 1$ sont tous deux multiples de 8.

2. Déterminons les restes de la division par 8 des puissances de 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n = 2k$ ou $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$

Si $n = 2k, 3^n \equiv 1[8]$, Si $n = 2k + 1, 3^n = 3^{2k+1} \equiv 3[8]$ donc les restes sont 1 et 3.

3. On considère $A_p = 3^p + 3^{2p} + 3^{3p} + 3^{4p}$

3.a) Si $p = 2n$, $A_p \equiv 1 + 1 + 1 + 1[8] \Rightarrow A_p \equiv 4[8]$

3.b) Si $p = 2n + 1$, $A_p \equiv 3 + 1 + 3 + 1[8] \equiv 0[8]$ donc A_p est divisible par 8.

4. On considère $a = \overline{1110}^3$ et $b = \overline{101010100}^3$

$a = 1 \times 3 + 1 \times 3^2 + 1 \times 3^3 \equiv 3 + 1 + 3[8] \equiv 7[8]$ donc a n'est pas divisible par 8.

$b = 1 \times 3^2 + 1 \times 3^4 + 1 \times 3^6 + 1 \times 3^8 \equiv 1 + 1 + 1 + 1[8] \equiv 4[8]$ donc b n'est pas divisible par 8.

5. Démontrons que $c = \overline{2002002002000}^3$ est divisible par 16.

$c = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^6 + 2 \times 3^9 + 2 \times 3^{12} = 2(3^3 + 3^6 + 3^9 + 3^{12})$

$3^3 + 3^6 + 3^9 + 3^{12} \equiv 3 + 1 + 3 + 1[8] \equiv 0[8]$ donc $c \equiv 2 \times 0[16]$ d'où c est divisible par 16

Exercice 6:

1. Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.

2. Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminer x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11.

Solution 6:

1. Un nombre s'écrit $\overline{x43y}$ dans le système décimal. Déterminons x et y pour qu'il soit divisible par 2 et 9.

$\overline{x43y} = y + 3 \times 10 + 4 \times 10^2 + x \times 10^3$ or $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n \equiv 0[2]$d'où $\overline{x43y} \equiv y[2]$

$\forall n \in \mathbb{N}, 10^n \equiv 1[9]$ donc $y + 3 \times 10 + 4 \times 10^2 + x \times 10^3 \equiv y + 3 + 4 + x[9] \equiv x + y + 7[9]$ donc $\overline{x43y} \equiv x + y + 7[9]$

Le tableau ci – dessous est le tableau des restes de la division de$x + y + 7$ par 9.

$y \quad x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	7	8	0	1	2	3	4	5	6
1	8	0	1	2	3	4	5	6	7

$S = \{(9k + 2, 2k); (9k + 1, 2k + 1), k \in \mathbb{Z}\}$ or $x, y \in \{0,1,2, \dots 9\}$ donc $S = \{(2; 0), (1; 1)\}$

2. Un nombre s'écrit $\overline{28x75y}$ dans le système décimal. Déterminons x et y pour qu'il soit divisible par 3 et 11

$\overline{28x75y} = y + 5 \times 10 + 7 \times 10^2 + x \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 2 \times 10^5$

$\equiv y + 5 + 7 + x + 8 + 2[3] \equiv x + y + 1[3]$

$y + 5 \times 10 + 7 \times 10^2 + x \times 10^3 + 8 \times 10^4 + 2 \times 10^5 \equiv y + 6 + 7 + x + 8 + 2[11]$

$\equiv x + y + 1[11]$

Donc $x + y + 1 \equiv 0[3]$ et $x + y + 1 \equiv 0[11] \Rightarrow x + y + 1 \equiv 0[ppcm(3; 11) = 33]$ et $x, y \in \{0,1,2, \dots 9\}$ donc $S = \emptyset$

Exercice 7:

Soit x, y et z trois entiers naturels tels que l'écriture en base x de y soit $\overline{1000}$ et que l'écriture en base x de z soit $\overline{50}$.

1. Montrer que l'on peut, sans connaître x, exprimer y^2 et yz dans le système de base 10.
2. Déterminer x pour que yz = 6480 dans le système décimal.
3. Ecrire alors $y^2 + yz$, z^4 en base x, puis comparer y^2 et z^4.

Solution 7:

$y = \overline{1000}^x = x^3, \qquad z = \overline{50}^x = 5x$

1. Exprimons y^2 et yz

$y^2 = x^6$ et $yz = 5x^4$

2. Déterminons x pour que $yz = 6480$

$5x^4 = 6480 \Leftrightarrow x^4 = 1296 = 6^4$ donc $x = 6$

3. Ecrivons $y^2 + yz$, z^4 en base x

$y^2 + yz = x^6 + 5x^4 = 53136 = \overline{1050000}^6$,

$z^4 = 625x^4 = 625 \times 1296 = 81000 = \overline{25210000}^6$

$y^2 = \overline{1000000}^6$ donc $y^2 < z^4$.

Exercice 8:

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x - 23y = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $-156x + 276y = 24$.

Solution 8:

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $13x - 23y = 1$ (E)

$23 = 13 \times 1 + 10, \quad 13 = 10 \times 1 + 3, \quad 10 = 3 \times 3 + 1.$

Ainsi $1 = 10 - 3 \times 3 = 10 - (13 - 10) \times 3 = 10 \times 4 - 13 \times 3 = (23 - 13) \times 4 - 13 \times 3$

$1 = 23 \times 4 - 13 \times 7 = 13(-7) - 23(-4)$ donc $(-7;\ -4)$ est solution particulière de (E).

$13x - 23y = 13(-7) - 23(-4) \Leftrightarrow 13(x + 7) = 23(y + 4)$ donc $13/23(y + 4)$ or pgcd (13 ; 23) =1 d'où d'après Gauss $13/(y + 4)$. Ainsi $\exists k \in \mathbb{Z}/\ y + 4 = 13k$, $\quad y = 13k - 4$. Dans ce cas $x + 7 = 23k \Rightarrow x = 23k - 7$

$S = \{(23k - 7; 13k - 4)\ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $-156x + 276y = 24$

$-156x + 276y = 24 \Leftrightarrow -13x + 23y = 2 \Leftrightarrow 13x - 23y = -2$

En se servant de la question précédente, on a

$13(23k - 7) - 23(13k - 4) = 1 \Rightarrow 13(-46k + 14) - 23(-26k + 8) = -2$ d'où

$S = \{(-46k + 14;\ -26k + 8), k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 9:

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose a = 4n+3 et b = 5n+2. On note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de *d* dans les cas suivants : n = 1, n = 11, n = 15.
2. Calculer 5a – 4b et en déduire les valeurs possibles de *d*.
3. a. Déterminer les entiers naturels *n* et *k* tels que *4n+3=7k*.
   b. Déterminer les entiers naturels *n* et *k'* tels que *5n+2=7k'*.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7. Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7. Pour quelles valeurs de r, d est – il égal à 1 ?

Solution 9:

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a = 4n+3, b = 5n+2$. on note $d = pgcd(a,b)$

1. $n = 1, d = pgcd(7;7) = 7$; $n = 11, d = pgcd(47;57) = 1$

$n = 15, d = pgcd(63;77) = 7$

2. Calculons $5a - 4b$

$5a - 4b = 5(4n+3) - 4(5n+2) = 15 - 8 = 7$

Déduisons les valeurs possibles de d.

On a $5a - 4b = 7$ donc d'après Bezout 7 est un multiple de d d'où $d = 1$ ou $d = 7$ qui sont les seuls diviseurs de d.

3.a) Déterminons n et k tels que $4n + 3 = 7k$

$4n + 3 = 7k \Leftrightarrow 4n - 7k = -3 \Leftrightarrow 7k - 4n = 3$

On a $7 - 4 = 3$ donc $7k - 4n = 7(1) - 4(1) \Leftrightarrow 7(k-1) = 4(n-1)$ $7/4(n-1)$ or pgcd (7 ; 4) = 1 d'après Gauss $7/(n-1)$ d'où $n = 7p + 1$ et $k = 4p + 1, p \in \mathbb{Z}$

3.b) Déterminons n et k' tels que $5n+2=7k'$

$5n + 2 = 7k' \Leftrightarrow 7k' - 5n = 2$ donc $7k' - 5n = 7(1) - 5(1)$ d'où $7(k'-1) = 5(n-1)$

$7/5(n-1)$ or $pgcd(5,7) = 1$ d'après Gauss $7/(n-1) \Rightarrow n = 7p + 1$ et $k' = 5p + 1, p \in \mathbb{Z}$

4. Soit r le reste de la division de n par 7. Déduisons la valeur de r pour laquelle d = 7.

D'après les questions précédentes $r = 1$. Les valeurs de r pour lesquelles d = 1 sont $r \in \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exercice 10:

1. Trouver le PGCD des nombres 1640 et 492 en utilisant la décomposition en facteurs premiers, puis en utilisant l'algorithme d'Euclide.
2. Trouver deux entiers a et b sachant que leur PGCD est 24 et leur PPCM est 1344.
3. Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels tels que : $\begin{cases} \text{PGCD}(a,b) = 42 \\ \text{PPCM}(a,b) = 1680 \end{cases}$

Solution 10:

1. Décomposition en produit de facteurs premiers

$1640 = 2^3 \times 5 \times 41$, $492 = 2^2 \times 3 \times 41$ d'où $pgcd(1640, 492) = 2^2 \times 41 = 164$

Algorithme d'Euclide.

$1640 = 492 \times 3 + 164$, $492 = 164 \times 3 + 0$ donc $pgcd(1640, 492) = 164$.

2. Déterminons deux entiers a et b tels que $\begin{cases} pgcd(a,b) = 24 \\ ppcm(a,b) = 1344 \end{cases}$

Posons $d = pgcd(a,b), a' = \frac{a}{d}, b' = \frac{b}{d}$

$pgcd(a,b) = pgcd(da',db') = d.pgcd(a',b') \Leftrightarrow pgcd(a',b') = 1$

$ppcm(a',b') = \frac{ppcm(a,b)}{d} = \frac{1344}{24} = 56$

Déterminons a' et b' tels que $\begin{cases} pgcd(a',b') = 1 \\ ppcm(a',b') = 56 \end{cases}$ donc $a' = 8$ et $b' = 7$ dans ce cas $a =$

$8 \times 24 = 192$ et $b = 7 \times 24 = 168$.

3. Déterminons les couples (a,b) d'entiers naturels tels que $\begin{cases} \mathrm{PGCD}(a,b) = 42 \\ \mathrm{PPCM}(a,b) = 1680 \end{cases}$

Posons $d = pgcd(a,b)$, $a' = \frac{a}{d}$, $b' = \frac{b}{d}$

$pgcd(a,b) = pgcd(da',db') = d.pgcd(a',b') \Leftrightarrow pgcd(a',b') = 1$

$ppcm(a',b') = \frac{ppcm(a,b)}{d} = \frac{1680}{42} = 40$

$(a',b') \in \{(1;40),(5,8)\} \Rightarrow (a,b) \in \{(42;\ 1680),(210;336\}$

Exercice 11:

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD des nombres 28 et 31.
   Trouver alors deux nombres x et y entiers relatifs tels que $31x - 28y = 1$.
2. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation 31x – 28y = 414.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
   On donne les points A(-30 ; -48) et B(82 ; 72,6). On appelle (D) la droite (AB).

a. Trouver l'ensemble des points M(x, y) de (D) dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

b. Le repère utilisé pour le graphique est gradué de -10 à +10 en abscisse et de -14 à +14 en ordonnées. Vérifiez et expliquez pourquoi il n'ya pas de point de (D) à coordonnées entières visible sur le graphique.

c. Pour remédier à l'inconvénient du 3.b, on décide d'agrandir la fenêtre à [-40 ; +40] en abscisses et à [-50 ; +10] en ordonnées. Combien y'a – t – il de points de (D) à coordonnées entières sur ce nouveau graphique ? Faire la figure.

Solution 11:

1.a) pgcd (28 ; 31) = 1

1.b) Deux nombres x et y tels que $31x - 28y = 1$ (E)

$31 = 28 \times 1 + 3$, $28 = 3 \times 9 + 1$, $3 = 1 \times 3 + 0$

$\Rightarrow 1 = 28 - 3 \times 9 = 28 - (31 - 28 \times 1) \times 9 = 31(-9) - 28(-10) = 1$ d'où (-9 ; -10) est solution particulière de (E)

2. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ $31x - 28y = 414$.

$31x-28y=1 \Leftrightarrow 31x-28y=31(-9)-28(-10) \Leftrightarrow 31(x+9)=28(y+10)$

$31/28(y+10)$ or $pgcd\ (31;28)=1$ d'après Gauss $31/y+10$ d'où $y=31k-10$ et $x=28k-9$. Ainsi $31(28k-9)-28(31k-10)=1 \Rightarrow 31(11592k-3726)-28(12834k-4140)=414$. $S=\{(11592k-3726, 12834k-4140\ ), k\in\mathbb{Z}\}$

3. Le plan est muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

A$\binom{-30}{-48}$, B$\binom{82}{726}$

3.a) Déterminons l'ensemble des points $M(x,y)$ dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs

Soit $M(x,y)\in(D)$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc $det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} x+30 & 82 \\ y+48 & 726 \end{vmatrix}=0$

D'où $726x-82y+17844=0$. Pour déterminer les points à coordonnées entières, il faut résoudre comme précédemment.

Exercice 12:

1. a) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $8x\equiv 7[5]$.
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : 336x+210y=294.
2. a) Déterminer PGCD (21590 ; 9525).
   b) Déterminer les entiers relatifs x pour lesquels on a : $34x\equiv 2[15]$.
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $21590x+9525y=1270$.
3. a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$l'équation 5p – 3q = 1.
   b) En déduire la résolution du système $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ x\equiv 1[5] \\ x\equiv 2[3] \end{cases}$

Solution 12:

1.a) Déterminons l'ensemble des entiers x tels que $8x\equiv 7[5]$

$8x\equiv 7[5] \Leftrightarrow 8x=5k+7 \Leftrightarrow 8x-7k=5$

On sait que $8(4)-5(5)=7$ donc $8x-5k=8(4)-5(5) \Leftrightarrow 8(x-4)=5(k-5)$

$5/8(x-4)$ or pgcd (5 ; 8) = 1 donc $5/(x-4)$ d'où $x=5k+4, k\in\mathbb{Z}$

1.b) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ $336x+210y=294$.

$336x+210y=294 \Leftrightarrow 8x+5y=7 \Leftrightarrow 8x-5(-y)=7$ d'après la question précédente, $x=5k+4$ et $-y=8k+5$ donc $y=-8k-5$. Ainsi $S=\{(5k+4,-8k-5), k\in\mathbb{Z}\}$

2.a) Déterminons PGCD (21590 ; 9525).

PGCD (21590 ; 9525).=635

2.b) Déterminons x tels que $34x\equiv 2[15]$.

$34x\equiv 2[15]. \Leftrightarrow 34x-15y=2$

$34 = 15 \times 2 + 4,\quad 15 = 4 \times 3 + 3,\quad 4 = 3 \times 1 + 1$ d'où

$1 = 4 - 3 \times 1 = 4 - (15 - 4 \times 3) \times 1 = 4 \times 4 - 15 \times 1 = (34 - 15 \times 2) \times 4 - 15 \times 1$

$= 34 \times 4 - 15 \times 9 = 1 \Leftrightarrow 34(8) - 15(18) = 2$ donc (8 ; 18) est solution particulière de (E).

$34x - 15y = 34(8) - 15(18) \Leftrightarrow 34(x - 8) = 15(y - 18)$

$15/34(x - 8)$ et pgcd (15 ; 34) = 1 alors $15/(x - 8)$ d'où $x = 15k + 8, k \in \mathbb{Z}$

2.c) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ $21590x + 9525y = 1270$

$21590x + 9525y = 1270 \Leftrightarrow 34x + 15y = 2 \Leftrightarrow 34x - 15(-y) = 2$ donc d'après la question précédente, $x = 15k + 8$ et $-y = 34k + 18 \Leftrightarrow y = -34k - 18$

$S = \{(15k + 8, -34k - 18), k \in \mathbb{Z}\}$

3.a) Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5p - 3q = 1$

On sait que $5(2) - 3(3) = 1$donc $5p - 3q = 5(2) - 3(3) \Leftrightarrow 5(p - 2) = 3(q - 3)$

$3/5(p - 2)$ or pgcd (3 ; 5)=1 donc $3/(p - 2) \Leftrightarrow p = 3k + 2$ et $q = 5k + 3$

$S = \{(3k + 2, 5k + 3), k \in \mathbb{Z}\}$

3.b) Déduisons la résolution de $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \equiv 1[5] \\ x \equiv 2[3] \end{cases}$

$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \equiv 1[5] \\ x \equiv 2[3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5p + 1 \\ x = 3q + 2 \end{cases} \Rightarrow 5p - 3q = 1$ donc d'après la question précédente $x =$

$5(3k + 2) + 1 = 15k + 11, k \in \mathbb{Z}$

Exercice 13:

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 2[7] \end{cases}$

Solution 13:

Amusez-vous a le faire. Vous avez assez d'exemples ci-dessus sur lesquelles vous pourrez vous inspirer pour le faire.

Exercice 14:

p et q sont des entiers naturels.

1. Démontrer que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
2. Déduisez – en que pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.
3. Prouver à l'aide d'un contre – exemple que la condition « n est premier » n'est pas suffisante pour que $2^n - 1$ soit premier.

Solution 14:

$p, q \in \mathbb{N}$

1. Démontrons que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$

Si $p = 0\ ou\ q = 0$, $2^{pq} - 1 = 1 - 1 = 0$ qui est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.

Si p et q sont non nuls, (on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$,

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1^q = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \cdots + (2^p)^1)$. donc $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$. De même $2^{pq} - 1 = (2^q)^p - 1^p = (2^q - 1)((2^q)^{p-1} + (2^q)^{p-2} + \cdots + (2^q)^1)$ donc $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^q - 1$

2. Déduisons que pour que $2^n - 1$ soit premier, il faut que n soit premier.

Supposons que $2^n - 1$ est premier et montrons que n est premier.

Raisonnons par absurde, supposons que n est non premier. Soit d un diviseur de n. $d \neq 1. \exists k \in \mathbb{N}$, tel que $n = kd$. $2^n - 1 = 2^{kd} - 1$. D'après la question précédente, $2^{kd} - 1$ est divisible par $2^d - 1$ Comme $d \neq 1$ alors $2^d - 1 \neq 1$ et $2^d - 1 \neq 2^n - 1$ d'où $2^n - 1$ n'est pas premier. Ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Exercice 15:

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n+2 divise 2n-1.
2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n – 4 divise n+2.
3. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que n+1 divise 3n-4.

Solution 15:

1. Déterminons n tels que $n + 2$ divise $2n - 1$

$2n - 1 = 2(n+2) - 5$. $n + 2$ divise $2n - 1$ et $n + 2$ divise $2(n+2)$ donc $n + 2$ divise $2n - 1 - 2(n+2)$ c'est-à-dire $n + 2$ divise -5. Donc $n + 2 \in \{-5;\ -1; 1; 5\}$ \d'où $n \in \{-7;\ -3;\ -2; 3\}$

2. Déterminons n tels que $n - 4$ divise $n + 2$

$n + 2 = n - 4 + 6$, $\quad n - 4$ divise $n + 2$ et $n - 4$ divise $n - 4$ donc $n - 4$ divise $n + 2 - (n - 4)$ i.e. $n - 4$ divise 6. Cela dit $n - 4 \in \{-6; -3;\ -2;\ -1; 1; 2; 3; 6\} \Rightarrow n \in \{-2; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 10\}$

Exercice 16:

On cherche à montrer que le seul entier $n \geq 3$ tel que 2n-1 divise (3n²-3n+1)(3n²-3n+2) est 3.
Soit un entier naturel $n \geq 3$. On pose a = 2n-1 et $u_n = (3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)$.

1. a. Montrer que $u_n = \frac{1}{16}(3a^2 + 1)(3a^2 + 5)$.

b. Montrer que si 2n-1 divise u_n, alors a divise 5.
c. En déduire que si 2n-1 divise u_n, alors n = 3.
2. Montrer que le seul entier $n \geq 3$ tel que 2n-1 divise (3n²-3n+1)(3n²-3n+2) est 3.
3. Soit m un entier relatif.
Montrer que si m est pair, $m^2 \equiv 0[8]\ ou\ m^2 \equiv 4[8]$; et si m est impair $m^2 \equiv 1[8]$.

Solution 16:

On cherche à montrer que le seul entier $n \geq 3$ tel que 2n-1 divise (3n²-3n+1)(3n²-3n+2) est 3.

Soit $n \geq 3$, $a = 2n - 1$ et $u_n = (3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)$.

1.a) Montrons que $u_n = \frac{1}{16}(3a^2 + 1)(3a^2 + 5)$

$\frac{1}{16}(3a^2 + 1)(3a^2 + 5) = \frac{1}{16}(3(2n - 1)^2 + 1)(3(2n - 1)^2 + 5) =$

$\frac{(3(4n^2-4n+1)+1)(3(4n^2-4n+1)+5)}{16} = \frac{(12n^2-12n+4)(12n^2-12n+8)}{16} = (3n^2 - 3n + 1)(3n^2 - 3n + 2)$

1.b) Montrons que si $2n - 1$ divise u_n alors $n = 3$

$u_n = \frac{1}{16}(3a^2 + 1)(3a^2 + 5)$=$16u_n = 9a^4 + 18a^2 + 5$

a divise u_n et a divise $9a^4 + 18a^2 \Rightarrow$ a divise $16u_n - 9a^4 + 18a^2$ i.e. a divise 5 donc

$a \in \{1; 5\} \Leftrightarrow n \in \{1; 3\}$ or $n \geq 3$ d'où $n = 3$.

2. La question 2 rejoint 1.c)

3. Soit $m \in \mathbb{Z}$

Montrons que si m est pair, $m^2 \equiv 0[8]\ ou\ m^2 \equiv 4[8]$

$m = 2k \Leftrightarrow m^2 = 4k^2$, si k est pair $m^2 \equiv 0[8]$ et si k est impair, k^2 est aussi impair et $m^2 \equiv 4[8]$

Montrons que si m est impair $m^2 \equiv 1[8]$

$m = 2k + 1 \Rightarrow m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$ or $k(k + 1)$ est pair d'où $4k(k + 1) \equiv 0[8]$. Donc $m^2 \equiv 1[8]$.

Exercice 17:

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n+2 divise 2n-1.
2. Démontrer que pour tout entier relatif n, les nombres $n + 2, 2n^2 + 3n - 1$ sont premiers entre eux.
3. En déduire les entiers relatifs n pour lesquels la fraction $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ est un entier relatif.

Solution 17:

1. Déterminons l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 2$ divise $2n - 1$

$2n-1=2(n+2)-5,$ $n+2$ divise 2n -1 et n+2 divise 2(n+2) donc n+2 divise 2n -1 – 2(n+2) c'est-à-dire n+2 divise -5. Donc n+2 $\in \{-5;\ -1; 1; 5\}$ d'où $n \in \{-7; -3;\ -1; 3\}$

2. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{Z},\ n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

$2n^2+3n-1=2n(n+2)-n-1, n+2=(-1)(-n-1)+1$ d'où $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux

3. Déduisons $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)} \in \mathbb{Z}$

$\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+2/(2n-1)(2n^2+3n-1)$ or $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux alors d'après Gauss $n+2$ divise $2n-1$ donc d'après 1. $n \in \{-7; -3;\ -1; 3\}$.

Pour n = -7, $A=\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}=4{,}85,$ pour n = -3, $A=8,$ pour n =-1, $A=-6,$ pour n = 3, $A=\frac{26}{7}$ donc $n\ =\ -3$ ou $n\ =\ -1.$

Exercice 18:

1) Etablir que : $\forall (a,b,q) \in \mathbb{Z}^3$, a ∧ b = b ∧ (a – bq) o-ù pgcd(a, b) = a ∧ b.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$: $(5n^3-n) \wedge (n+2)=(n+2) \wedge 38$
3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n+2 divise $5n^3-n$. Quelles sont les valeurs possibles de pgcd ($5n^3-n$; n+2).

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(5n^3-n) \wedge (n+2)=19$.

Solution 18:

1) Soit $(a,b,q) \in \mathbb{Z}^3$, montrons que a ∧ b = b ∧ (a – bq)

Soit $d=pgcd(a,b)$. d/a et d/b donc $d/(a-bq)$ d'où $d/pgcd(b,a-bq)$.

Réciproquement, soit $e=pgcd\ (b,a-bq)$.

$e/b \Rightarrow e/bq,\ \ e/a-bq, \Rightarrow e/a-bq+bq \Leftrightarrow e/a \Rightarrow e/pgcd(a,b)=d$ d'où a ∧ b = b ∧ (a – bq).

2) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(5n^3-n) \wedge (n+2)=(n+2) \wedge 38$

$5n^3-n=(5n^2-10n+19)(n+2)-38$ donc $(5n^3-n) \wedge (n+2)=(n+2) \wedge 38$

Exercice 19:

1. a est un entier naturel. Montrer que a^5-a est divisible par 10.
2. a et b sont des entiers naturels avec a ≥ b. Démontrer que si a^5-b^5 est divisible par 10 alors a^2-b^2est divisible par 20.
3. Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{N}^2$:

i) $\begin{cases} a^5-b^5 \equiv 0[10] \\ a^2-b^2=720 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} a^5-b^5 \equiv 0[10] \\ a^2-b^2=1940 \end{cases}$

Solution 19:

1. $a \in \mathbb{N}$, les restes de la division de a par 10 sont $\{0,1,\dots,9\}$

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^5	0	1	4	9	6	5	6	7	8	9
$a^5 - a$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Donc $\forall a \in \mathbb{N}$, $a^5 - a$ est divisible par 10.

2. Soit a et b sont des entiers naturels avec a ≥ b. Supposons que $a^5 - b^5$ est divisible par 10 et montrons que $a^2 - b^2$est divisible par 20.

$a^5 - b^5 = a^5 - a + a - b + b - b^5 = (a^5 - a) + (a - b) + (b - b^5) \Rightarrow$

$a - b = (a^5 - b^5) - [(a^5 - a)] + (b - b^5)$

D'apres (1), $a^5 - a$ et $b - b^5$ sont divisibles par 10, $a^5 - b^5$ est divisible par 10 donc $a - b$ est divisible par 10.

De plus, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$a + b = a - b + 2b$. $a - b$ est divisible par 10 donc divisible par 2. $2b$ est divisible par 2 donc $a + b = a - b + 2b$ est divisible par 2 comme somme de deux nombres divisibles par 2.

$a - b$ est divisible par 10 et $a + b$ est divisible par 2 alors , $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ est divisible par 20.

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1:

Dans chacun des cas suivants :

- Déterminer le module et un argument de z ;
- En déduire la forme algébrique de z.

a) $z = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$ b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

d) $z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$ e) $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$

Solution 1:

a) $z = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^3$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z .

$$|z| = \left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^3 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)^3 = 1^3 = 1$$

$$argz = arg\left[(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^3\right] = 3.arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3.\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\pi$$

- Déduisons la forme algébrique de z

$$z = 1\cos(-\pi) + i.1\sin(-\pi) = cos\pi - i.sin\pi = -1$$

b) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z

$$|z| = \left|\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|.\left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$$

$|z| = 1 \times 1 = 1.$

$$argz = arg\left[\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + (\pi - \frac{\pi}{3}) = \pi$$

- Déduisons la forme algébrique de z

$$z = 1.cos\pi + i.1.sin\pi = -1$$

c) $z = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Appliquez la même méthode que b).

d) $z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z .

$$|z| = \left|\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)}\right| = \frac{|(3-i)(1+2i)|}{|(1-3i)(2+i)|} = \frac{|3-i|.|1+2i|}{|1-3i|.|2+i|} = \frac{\sqrt{3^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-3)^2}.\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}} = 1$$

Il n'existe pas d'angle particulier qui soit $\arg(3-i)$, ni $\arg(1+2i)$. Dans ce cas, pour déterminer un argument de z, nous allons dans un premier temps développer et réduire z, ensuite calculer son argument.

$$z = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-3i)(2+i)} = \frac{3+6i-i+2}{2+i-6i+3} = \frac{5+5i}{5-5i} = \frac{1+i}{1-i}.$$

$$argz = arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = \arg(1+i) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- Déduisons la forme algébrique de z

$$z = 1.cos\frac{\pi}{2} + i.1.sin\frac{\pi}{2} = 0 + i.1 = i$$

e) $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3$

- Déterminons le module et un argument du nombre complexe z .

$$|z| = \left|\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right|^3 = \left(\frac{|\sqrt{3}-i|}{|1-i|}\right)^3 = \frac{|\sqrt{3}-i|^3}{|1-i|^3} = \frac{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}\right)^3}{\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right)^3} = \frac{(\sqrt{3+1})^3}{(\sqrt{2})^3} = 2\sqrt{2}$$

$$argz = arg\left[\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^3\right] = 3.arg\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right) = 3.\left[arg(\sqrt{3}-i) - arg(1-i)\right]$$

$$= 3\left(-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = 3\left(-\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

- Déduisons la forme algébrique de z.

$$z = 2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4} + i.2\sqrt{2}sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2i$$

Exercice 2 :

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

a) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.

b) Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

c) En déduire les valeurs de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

Solution 2 :

Soit $z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

a) Module et argument de $z_1$et z_2

$$|z_1| = \left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}+\frac{2}{4}} = \sqrt{2}$$

$$arg z_1 = arg\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right) = arg\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)\right] = arg\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

donc $arg z_1 = -\frac{\pi}{6}$

$$|z_2| = |1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\,;\, arg z_2 = \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$$

b) Ecrivons sous forme algébrique et trigonométrique le quotient $\frac{z_1}{z_2}$.

- *Forme algébrique de* $\frac{z_1}{z_2}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \text{ donc}$$

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}.(*)}$$

- *Forme trigonométrique de* $\frac{z_1}{z_2}$.

Pour cela, nous avons besoin de calculer le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

- Module de $\frac{z_1}{z_2}$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1,$$

- Argument de $\frac{z_1}{z_2}$

$$arg\frac{z_1}{z_2} = arg z_1 - arg z_2$$

$$arg\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{-2\pi+3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$

Ainsi $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = 1.\cos\frac{\pi}{12} + i.1.\sin\frac{\pi}{12}}$ **(**)**

c) Déduisons les valeurs de $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

En associant les forme algébrique et trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$, on a:

$1.\,cos\frac{\pi}{12} + i.1.\,sin\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. Ainsi, par identification, on a :

$\begin{cases} 1.\,cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ 1.\,sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ soit $\begin{cases} \boldsymbol{cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\ \boldsymbol{sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \end{cases}$ cqfd.

Exercice 3 :

Soit j = $cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$ et u = 1+j.

1. Démontrer que 1 + j + j² = 0.
2. Calculer u^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ en fonction de n.

Solution 3 :

Soit j = $cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}$ et u = 1+j.

1. Démontrons que 1 + j + j² = 0

$1 + j + j^2 = 1 + cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} + \left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)^2$

D'après la formule de Moivre($(cosx + i.sinx)^a = \cos(ax) + i.\sin(ax)$), on a :

$\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)^2 = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$. Or $\begin{cases} cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -cos\frac{\pi}{3} \\ sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$

De plus, $\begin{cases} cos\frac{2\pi}{3} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -cos\frac{\pi}{3} \\ sin\frac{2\pi}{3} = sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$ confère cercle trigonométrique.

Donc

$1 + j + j^2 = 1 + cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} + cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$= 1 - cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3} - cos\frac{\pi}{3} - i\,sin\frac{\pi}{3}$

$= 1 - 2cos\frac{\pi}{3} = 1 - 2.\frac{1}{2} = 1 - 1 = 0.$

2. Calculons u^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ en fonction de n

$u = 1 + j$ et $1 + j + j^2 = 0 \Longrightarrow u = 1 + j = -j^2$

Ainsi, $u^n = (-j^2)^n = (-1)^n.j^{2n} = (-1)^n.\left(cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3}\right)^{2n}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{u^n} = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\left(\boldsymbol{cos}\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{n\pi}}{\mathbf{3}} + \boldsymbol{isin}\frac{\mathbf{4}\boldsymbol{n\pi}}{\mathbf{3}}\right) \text{ d'après Moivre.}$$

Exercice 4 :

Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a) $(-1-i)i$

b) $(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})$

c) $\frac{i}{1-i}$

d) $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

e) $\frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

Solution 4 :

Ecrivons sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = (-1-i)i$

- Module de z_1

  $|z_1| = |(-1-i)i| = |1-i|.|i| = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}.$

- Argument de z_1

  $argz_1 = arg[(-1-i)i] = \arg(1-i) + arg\ i = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

  Donc $\boldsymbol{z_1} = \sqrt{\mathbf{2}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}}$

b) $z_2 = (\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})$

- Module de z_2

$|z_2| = \ |(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})| = \ |\sqrt{3}+i| \times |-1+i\sqrt{3}|$ or $\begin{cases} |\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2 \\ |-1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \end{cases}$

Ainsi $|z_2| = 2 \times 2 = 4$

- Argument de z_2

$argz_2 = arg[(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})] = arg(\sqrt{3}+i) + arg(-1+i\sqrt{3})$

Or $arg(\sqrt{3}+i) = \theta$ tel que $\begin{cases} cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ i.e $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $arg(-1+i\sqrt{3}) = \theta_1$ tel que

$$\begin{cases} cos\theta_1 = \frac{-1}{2} \\ sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ i.e $\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Donc $argz_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi+4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Ainsi, $\boldsymbol{z_2 = |z_2|e^{argz_2} = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}}$**.**

c) $z_3 = \frac{i}{1-i}$

- Module de z_3

$|z_3| = \left|\frac{i}{1-i}\right| = \frac{|i|}{|1-i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Argument de z_3

$\arg z_3 = arg\left(\frac{i}{1-i}\right) = \arg i - \arg(1-i) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Ainsi $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

d) $z_4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ecrivons $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$ sous sa forme exponentielle.

$\left|\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right| = \frac{|1-i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$arg\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(1-i) - \arg(1+i\sqrt{3})$

$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}$ donc $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

Ainsi, $z_4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}.e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $\boldsymbol{z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

e) $z_5 = \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

Ecrivons $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ sous sa forme exponentielle.

$|\sqrt{2} + i\sqrt{2}| = |\sqrt{2}(1+i)| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

$\arg(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \arg[\sqrt{2}(1+i)] = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ donc $\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

a) D'où $z_5 = \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{e^{-2i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{i(-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{8\pi+3\pi}{12}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

$\boldsymbol{z_5 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}}$**.**

Exercice 5 :

soit $z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}$ et $z_2 = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$.

a) Ecrire sous forme exponentielle z_1 et z_2.

b) En déduire la forme exponentielle des nombres complexes : $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$.

Solution 5 :

a) Ecrivons sous forme exponentielle z_1 et z_2.

$$|z_1| = \left|\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}\right| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{|-\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$arg z_1 = arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i}\right) = arg(\sqrt{3}+i) - arg(-\sqrt{3}+i)$$

$= \frac{\pi}{6} - \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$. Donc $\boldsymbol{z_1 = |z_1| e^{iarg z_1} = 1.e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}}$

$|z_2| = \left|\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}\right| = \frac{|4i|}{|1-i\sqrt{3}|} = \frac{4}{2} = 2$; $arg z_2 = arg\left(\frac{4i}{1-i\sqrt{3}}\right) = arg 4i - arg(1-i\sqrt{3})$

Or $\arg(4i) = \frac{\pi}{2}$ et $arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ donc $arg z_2 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$\boldsymbol{z_2 = |z_2| e^{iarg z_2} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

b) Déduisons la forme exponentielle des nombres complexes $z_1 z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$.

D'après le cours, si $z_1 = |z_1| e^{iarg z_1}$ et $z_2 = |z_2| e^{iarg z_2}$ alors

$z_1 z_2 = |z_1|.|z_2| e^{i(arg z_1 + arg z_2)} \Longrightarrow z_1 z_2 = 2 \times 1.e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$ donc $\boldsymbol{z_1 z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(arg z_1 - arg z_2)} = \frac{1}{2} e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{9\pi}{6}} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{3\pi}{2}}$ donc $\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} e^{-i\frac{3\pi}{2}}}$

$(z_1)^3 = |z_1|^3 e^{3iarg z_1} = 1^3.e^{-3i\frac{2\pi}{3}} = e^{-2i\pi}$ donc $\boldsymbol{(z_1)^3 = e^{-2i\pi}}$

Exercice 6 :

Soit n un entier naturel.

On pose A = $\sum_{k=0}^{n-1} coskx$ et B = $\sum_{k=0}^{n-1} sinkx$

1. Calculer et écrire sous forme exponentielle A + i B.

2. En déduire des expressions plus simples de A et B.

Solution 6 :

Soit n un entier naturel.

On pose A = $\sum_{k=0}^{n-1} coskx$ et B = $\sum_{k=0}^{n-1} sinkx$

1. Calculons et écrivons sous forme exponentielle A + i B.

A + i B = $\sum_{k=0}^{n-1} coskx + i(\sum_{k=0}^{n-1} sinkx) = \sum_{k=0}^{n-1} coskx + \sum_{k=0}^{n-1} i.sinkx$ car

$i(\sum_{k=0}^{n-1} sinkx) = i(sin0 + sinx + sin2x + sin3x + \cdots + \sin(n-1)\,x)$

$= i.sin0 + i.sinx + i.sin2x + i.sin3x + \cdots + i.\sin(n-1)\,x = \sum_{k=0}^{n-1} i.sinkx$

Donc

A + i B = $\sum_{k=0}^{n-1} coskx + \sum_{k=0}^{n-1} i.sinkx = \sum_{k=0}^{n-1}(coskx + i.sinkx) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx}$

= $1 + e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{i(n-1)x}$ or $e^{iax} = \left(e^{ix}\right)^a$ d'ou

A + i B = $1 + \left(e^{ix}\right)^1 + \left(e^{ix}\right)^2 + \cdots + \left(e^{ix}\right)^{n-1}$ (somme d'une suite géométrique de raison e^{ix} et de 1[er] terme 1).

A + i B = $\frac{1-\left(e^{ix}\right)^N}{1-e^{ix}}$ ou N = nombre de termes de la somme i.e. N = $n - 1 - 0 + 1 = n$

Alors A + i B = $\frac{1-\left(e^{ix}\right)^n}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{nx}{2}}.e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}.e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}.e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}.e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{e^{i\frac{nx}{2}}\left(e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)} = \frac{-2isin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2isin\left(\frac{x}{2}\right)}.e^{i\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)}$

$$\boldsymbol{A + iB = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}.e^{i\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)} = \begin{cases} \left|\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|.e^{i\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)} & si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} > 0 \\ \left|\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right|.e^{i\left[\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)+\pi\right]} & si\ \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)} \le 0 \end{cases}}$$

car le module n'est jamais négatif.

2. Déduisons les expressions de A et B.

$A + iB = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}.e^{i\left(\frac{(n-1)x}{2}\right)} = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\cos\frac{(n-1)x}{2} + i.\sin\frac{(n-1)x}{2}\right)$

Ainsi $A + iB = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\cos\frac{(n-1)x}{2} + i\left(\frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\sin\frac{(n-1)x}{2}\right)$, par identification, on a :

$\boldsymbol{A = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\cos\frac{(n-1)x}{2}}$ et $\boldsymbol{B = \frac{sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)}.\sin\frac{(n-1)x}{2}}$

Exercice 7 :

1) Calculer et écrire sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 5 - 12i$ b) $z_2 = 7 + 24i$

2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 2i)z - 8 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) sachant qu'elle admet une racine réelle z_1. On note z_0 et z_2 les autres racines, avec $Imz_0 > 0$.

3) On pose $p(z) = z^3 - (3 + 5i)z^2 - (5 - 16i)z + 7 - 11i$.

1. Montrer qu'il existe un réel z_0 tel que $p(z_0) = 0$.
2. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $p(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. On désigne par z_1 et z_2 les autres racines avec Rez_1> 0.

Solution 7 :

1. Calculons et écrivons sous forme algébrique les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 5 - 12i$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ / $z^2 = z_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z_1| \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(z_1) \\ 2xy = Im(z_1) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$. $2xy = -12 \Leftrightarrow xy = -6$ donc $xy < 0$ d'où x et y sont de signes contraires.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \ (1) \\ x^2 - y^2 = 5 \ (2) \end{cases}$ par combinaison,

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \ ou \ x = -3.$ (3)

$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 8 \Leftrightarrow y^2 = 4$ donc $y = 2 \ ou \ y = -2$ (4).

Ainsi les racines carrées de z_1 sont $\boldsymbol{a = 3 - 2i}$ et $\boldsymbol{b = -3 + 2i}$.

b) $z_2 = 7 + 24i$

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ / $z^2 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z_2| \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(z_2) \\ 2xy = Im(z_2) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{7^2 + (24)^2} \\ x^2 - y^2 = 7 \\ 2xy = 24 \end{cases}$. $2xy = 24 \Leftrightarrow xy = 12$ donc $xy > 0$ d'où x et y sont de même signe.

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \ (1) \\ x^2 - y^2 = 7 \ (2) \end{cases}$ par combinaison,

$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4 \ ou \ x = -4.$ (3)

$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9$ donc $y = 3 \ ou \ y = -3$ (4).

Ainsi les racines carrées de z_2 sont $\boldsymbol{a = 4 + 3i}$ et $\boldsymbol{b = -4 - 3i}$

2. Résolvons dans $\mathbb{C}$ (E) :$z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 2i)z - 8 = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle z_1. On note z_0 et z_2 les autres racines, avec $Imz_0 > 0$.

Posons $z_1 = a \in \mathbb{R}$, on a

$a^3 + (-5 - i)a^2 + (10 + 2i)a - 8 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 10a - 8 + i(-a^2 + 2a) = 0$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux nulles.

Ainsi, par identification, on a :

$\begin{cases} \Leftrightarrow \ a^3 - 5a^2 + 10a - 8 = 0 \ (1) \\ -5a^2 + 2a = 0 \ (2) \end{cases}$

De (2), on a $a(-a + 2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \ ou \ a = 2$

En remplaçant a par 0 dans (1), on aboutit a $-8 = 0$. Ce qui est absurde.

Remplaçons a par 2 dans (1). On a : $2^3 - 5(2)^2 + 10(2) - 8 = 8 - 20 + 20 - 8 = 0$ donc $a = 2$. D'où $z_1 = 2$.

Déterminons les autres racines z_0 et z_2.

Comme $z_1 = 2$ est racine de $z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 2i)z - 8$ alors il existe un polynôme de second degré $Q(z) = az^2 + bz + c$ (ou $a, b \ et \ c$ sont à déterminer) tel que $z^3 + (-5 - i)z^2 + (10 + 2i)z - 8 = (z - 2)\big(Q(z)\big)$.

Déterminons $Q(z)$. Procédons par identification.

$(z - 2)\big(Q(z)\big) = (z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (-2a + b)z^2 + (-2b + c)z - 2c$

On a donc $z^3 + (-5-i)z^2 + (10+2i)z - 8 \ = az^3 + (-2a+b)z^2 + (-2b+c)z - 2c$

d'où par identification $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -5 - i \\ -2c = -8 \end{cases}$ soit $a = 1, b = -3 - i \ et \ c = 4$

Donc $Q(z) = z^2 + (-3-i)z + 4$

Résolvons $Q(z) = 0$ pour trouver z_0 et z_2

$z^2 + (-3-i)z + 4 = 0$

$\Delta = (-3-i)^2 - 16 = 8 + 6i - 16 = -8 + 6i = -(8-6i) = i^2(3-i)^2 = (1+3i)^2$

$z_0 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+i+1+3i}{2} = 2 + 2i$; $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+i-1-3i}{2} = 1 - i$

L'ensemble solution de (E) est : $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}; \mathbf{2} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}; \mathbf{1} - \boldsymbol{i}\}$

3. $p(z) = z^3 - (3+5i)z^2 - (5-16i)z + 7 - 11i$.

a) Montrons qu'il existe un réel z_0 tel que $p(z_0) = 0$.

Posons $z_0 = a \in \mathbb{R}$, on a

$a^3 - (3+5i)a^2 - (5-16i)a + 7 - 11i = 0 \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 - 5a + 7 +$

$i(-5a^2 + 16a - 11) = 0$

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes deux nulles.

Ainsi, par identification, on a :

$\begin{cases} \Leftrightarrow \ a^3 - 3a^2 - 5a + 7 \ = 0 \ (1) \\ -5a^2 + 16a - 11 = 0 \ (2) \end{cases}$

De (2), on a $-5a^2 + 16a - 11 = 0 \Leftrightarrow -5(a-1)\left(a - \frac{11}{5}\right) = 0$ Donc $a = 1 \ ou \ a = \frac{11}{5}$

Remplaçons a par 1 dans (1). On a : $1^3 - 3(1)^2 - 5(1) + 7 = 1 - 3 - 5 + 7 = 0$ donc $a = 1$. D'où $\boldsymbol{z_0} = \mathbf{1}$.

b) Déterminons les nombres complexes a, b et c tels que

$p(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

$(z - z_0)(az^2 + bz + c) = (z-1)(az^2 + bz + c) = az^3 + (-a+b)z^2 + (-b+c)z - c$

$p(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow$

$z^3 - (3+5i)z^2 - (5-16i)z + 7 - 11i \ = \ az^3 + (-a+b)z^2 + (-b+c)z - c$ donc par identification, on a : $\begin{cases} a = 1 \\ -a + b = -3 - 5i \\ -c = 7 - 11i \end{cases}$ soit $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}; \boldsymbol{b} = -\mathbf{2} - \mathbf{5}\boldsymbol{i} \ \boldsymbol{et} \ \boldsymbol{c} = -\mathbf{7} + \mathbf{11}\boldsymbol{i}$

c) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $p(z) = 0$. On désigne par z_1 et z_2 les autres racines avec $\text{Re}z_1 > 0$.

$p(z) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + (-2-5i)z - 7 + 11i). = 0$

Resolvons $z^2 + (-2-5i)z - 7 + 11i = 0$

$\Delta = (-2-5i)^2 - 4(-7+11i)$

$= -21 + 20i + 28 - 44i$

$= 7 - 24i = (4-3i)^2$

Donc $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+5i-4+3i}{2} = -1 + 4i$; $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+5i+4-3i}{2} = 3 - i$

Donc $\boldsymbol{z_0 = 1,\ z_1 = 3 - i}$ et $\boldsymbol{z_2 = -1 + 4i}$

Exercice 8 :

Soit les points Ω(-2 ;1) et A(1 ;-1).

Dans chacun des cas suivants :

- Donner l'écriture complexe de la transformation.
- Déterminer l'image de A par la transformation.

a) Symétrie s de centre Ω.

b) Homothétie h de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$

c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

d) *hor ; soh.*

Solution 8 :

Soit les points Ω(-2 ;1) et A(1 ;-1).

a) Symétrie s de centre Ω.

- Ecriture complexe de s_Ω

L'écriture complexe de s_Ω est sous la forme :

$z' = e^{i\pi}z + (1 - e^{i\pi})z_\Omega$ car une symétrie centrale est aussi une rotation d'angle π .

Ainsi, on a : $z' = -z + 2z_\Omega$ or $z_\Omega = -2 + i$ d'où $\boldsymbol{s_\Omega : z' = -z - 4 + 2i.}$

- Déterminons l'image de A par s_Ω

Notons $A' = s_\Omega(A) \Leftrightarrow z_{A'} = -z_A - 4 + 2i$ i.e. $z_{A'} = -1 + i - 4 + 2i = -5 + 3i$.

$\boldsymbol{A'(z_{A'} = -5 + 3i).}$

b) Homothétie h de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$

- Ecriture complexe de h

L'écriture complexe d'une homothétie de centre Ω et de rapport k est de formule : $z' = kz + (1-k)z_{\Omega}$. En remplaçant z_{Ω} et k par leurs valeurs, on obtient :

$z' = -\frac{1}{2}z + \frac{3}{2}(-2+i)$. Donc $\boldsymbol{h: z' = -\frac{1}{2}z - 3 + \frac{3}{2}i}$**.**

– Déterminons l'image de A par h.

Notons $A' = h(A) \Leftrightarrow z_{A'} = -\frac{1}{2}z_A - 3 + \frac{3}{2}i = -\frac{1}{2}(1-i) - 3 + \frac{3}{2}i = -\frac{7}{2} + 2i$

Donc $\boldsymbol{A'\left(-\frac{7}{2} + 2i\right)}$**.**

c) Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

- Ecriture complexe de r

L'écriture complexe d'une rotation de centre Ω et d'angle θ est de formule :

$z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)z_{\Omega}$. En remplaçant z_{Ω} et θ par leurs valeurs, on a :

$z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)(-2+i) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i)$

Apres développement, on a :

$\boldsymbol{r: z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)}$

- Déterminons l'image de A par r.

Notons A' l'image de A par r. On a : $z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_A + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$ i.e.

$$z_{A'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ donc } \boldsymbol{A'\left(z_{A'} = \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

d) *hor ; soh.*

❖ Ecriture complexe de *hor*

On a $h: z' = -\frac{1}{2}z - 3 + \frac{3}{2}i$ et $r: z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)$

Alors $hor: z' = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right)\right) - 3 + \frac{3}{2}i$

$$= -\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{2-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{-1-2\sqrt{3}}{4}\right) - 3 + \frac{3}{2}i$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{-10-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\boldsymbol{hor: z' = -\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{-10-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)}$$

- Déterminons l'image de A par hor

  Notons A' l'image de A par hor

  On a $z_{A'} = -\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z_A + \frac{-10-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)$

  $= -\left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(1-i) + \frac{-10-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)$

  $= \frac{-1-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{4}\right) + \frac{-10-\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)$

  $= \frac{-11-2\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{6-3\sqrt{3}}{4}\right)$ donc $\boldsymbol{A'\left(z_{A'} = \frac{-11-2\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{6-3\sqrt{3}}{4}\right)\right)}$

- Ecriture complexe de soh

  On a : $s_\Omega: z' = -z - 4 + 2i$ et $h: z' = -\frac{1}{2}z - 3 + \frac{3}{2}i$

  $soh: z' = -\left(-\frac{1}{2}z - 3 + \frac{3}{2}i\right) - 4 + 2i$

  $= \frac{1}{2}z + 3 - \frac{3}{2}i - 4 + 2i$

  $= \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}i$ donc $\boldsymbol{soh: z' = \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}i}$

- Déterminons l'image de A par soh

  Notons A' l'image de A par soh

  On a $z_{A'} = \frac{1}{2}z_A - 1 + \frac{1}{2}i$ i.e. $z_{A'} = \frac{1}{2}(1-i) - 1 + \frac{1}{2}i$

  $\Leftrightarrow z_{A'} = -\frac{1}{2}$ d'où $\boldsymbol{A'\left(z_{A'} = -\frac{1}{2}\right)}$

Exercice 9 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont on donne l'écriture complexe.

a) $z' = \bar{z} - 4i$ b) $z' = -\bar{z} + 2i$ c) $z' = -4z + 10 - 5i$

d) $z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i.$

Solution 9 :

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation du plan.

a) $z' = \bar{z} - 4i$

Notons $s: z' = \bar{z}$ et $t; z' = z - 4i$. D'après le cours, si $t_{\vec{u}}$ est la translation de vecteur $\vec{u}(a)$ alors son ecriture complexe est sous la forme $z' = z + a$. Il en résulte donc que t est la translation de vecteur $\vec{u}(-4i)$.

D'autre part, si on pose $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, on a :

$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$ Ainsi, $z' = \bar{z} \Leftrightarrow x' + iy' = x - iy$ d'où par identification, on a $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. Ceci n'est rien d'autre que l'expression analytique de la symétrie d'axe (O_x). Pour conclure, la transformation d'écriture complexe $z' = \bar{z} - 4i$ est la transformation tos composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale.

De plus, comme le vecteur de translation est $\perp$ à l'axe de la symétrie, alors tos est elle-même une **symétrie orthogonale**. Déterminons son axe (Δ) .

On sait que t peut s'écrire comme la composée de deux symétries d'axes parallèles.

Si on pose $(D): y = -2$, alors $s_{(D)}os = t$ donc $tos = s_{(D)}osos = s_{(D)}$ car $sos = Id(\mathcal{P})$ d'où $\boldsymbol{tos = s_{(D)}}$.

b) $z' = -\bar{z} + 2i$

Notons $s: z' = -\bar{z}$ et $t: z' = z + 2i$ D'après les explications précédentes, s est la symétrie d'axe (O_y) et t est la translation de vecteur $\vec{u}(2i)$. Donc la transformation d'écriture complexe $z' = -\bar{z} + 2i$ est la transformation tos composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale. Ici $\vec{u}(2i)$ est un vecteur directeur de (O_y) donc $\boldsymbol{tos}$ **est une symétrie glissée d'axe $\boldsymbol{(O_y)}$ et de direction $\boldsymbol{\vec{u}}$**

c) $z' = -4z + 10 - 5i$

$a = -4 \in \backslash\mathbb{R}$ et $|a| = 4 \neq 1$ donc $f: z' = -4z + 10 - 5i$ est une homothétie de rapport 4. Déterminons son centre Ω.

Ω est l'unique point invariant par f i.e. $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z_\Omega = -4z_\Omega + 10 - 5i$ soit $z_\Omega = 2 - i$ donc $\boldsymbol{f}$ **est une homothetie de centre $\boldsymbol{\Omega(2 - i)}$ et de rapport 4.**

d) $g: z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 1 + \sqrt{2} - i$

$a = e^{-i\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$ donc g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe à déterminer.

Ω est l'unique point invariant par g donc $z_\Omega = e^{-i\frac{\pi}{4}} z_\Omega + 1 + \sqrt{2} - i$ d'où

$$z_\Omega = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1-e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1+\sqrt{2}-i}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2+2\sqrt{2}-2i}{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{(2+2\sqrt{2}-2i)(2-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})(2-\sqrt{2}-i\sqrt{2})}$$

$= \frac{-8i}{8-4\sqrt{2}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{6} i$ d'où **g est une rotation de centre $\Omega\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{6} i\right)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$**

Exercice 10 :

Soit les points $A(-1+i), B(-1-i), C(2i)$ et $D(2-2i)$.

1. Etudier la nature des triangles ACD et BCD.
2. Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Déterminer l'affixe du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

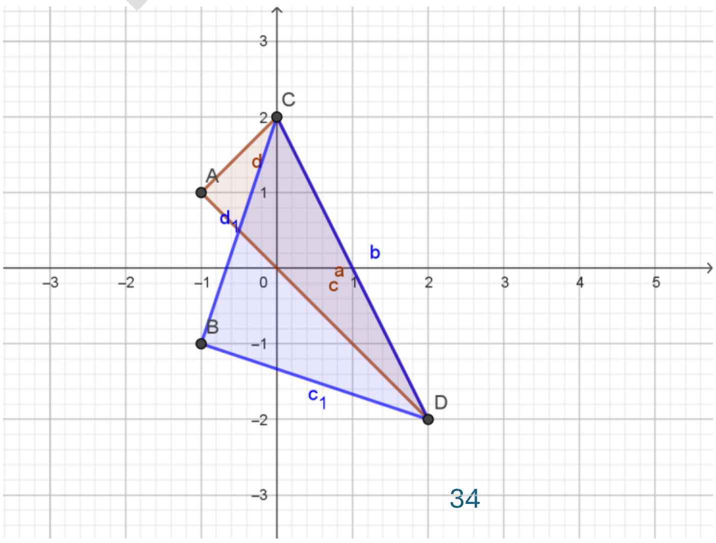
Solution 10 :

Soit les points $A(-1+i), B(-1-i), C(2i)$ et $D(2-2i)$.

1. Etudions la nature des triangles ACD et BCD.

La meilleure manière de procéder est de placer les points A, B, C et D sur le repère (O, I, J), ensuite conjecturer sur la nature des triangles ACD et BCD. Enfin, démontrer que la conjecture est vraie. C'est ce que nous ferons par la suite.

a) Plaçons les points sur le repère et conjecturons la nature des triangles.



On voit clairement que les triangles ACD et BCD semblent rectangles respectivement en A et B.

Démontrons maintenant que cette conjecture est vraie.

$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(2-2i)-(-1+i)}{2i-(-1+i)} = \frac{3-3i}{1+i} = \frac{3(1-i)^2}{2} = -3i$ donc ACD est rectangle en A.

$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{(2-2i)-(-1-i)}{2i-(-1-i)} = \frac{3-i}{3i+1} = \frac{-i(3i+1)}{3i+1} = -i$ Donc BCD est isocèle rectangle en B.

2. Démontrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Par ACD est rectangle en A il est donc inscrit dans le cercle de diamètre [CD]. De même, BCD est inscrit dans le cercle de diamètre [CD]. D'où A, B, C et D appartiennent au cercle de diamètre [CD]. Son centre I est le milieu du segment [CD] i.e. que l'affixe de I est $z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2i+2-2i}{2} = 1$ et son rayon $r = \frac{CD}{2} = \frac{|z_D - z_C|}{2} = \frac{|2-2i-2|}{2} = 1$.

A, B, C et D appartiennent au **cercle de centre $\boldsymbol{I(1)}$ et de rayon 1.**

3. Déterminons l'affixe du point E tel que ABDE soit un parallélogramme.

ABDE parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} \Leftrightarrow z_D - z_E = z_B - z_A \Leftrightarrow z_E = z_D - z_B + z_A$

Donc $z_E = 2 - 2i - (-1 - i) + (-1 + i)$

$= 2 - 2i + 1 + i - 1 + i$

$= 2$ donc $\boldsymbol{z_E = 2}$

Exercice 11 :

Déterminer et représenter les ensembles des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

a) $|z + \bar{z} - 1| = 4$

b) $\arg(3i - z) \equiv 0[2\pi]$

c) $\arg(\bar{z} - 3 + i) \equiv \frac{\pi}{4}$

d) $|z + 5 - 2i| = |\bar{z} - 2 + i|$

Solution 11 :

Déterminons et représentons les ensembles des points M du plan dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

a) $|z+\bar{z}-1| = 4$

Posons $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$

$z+\bar{z}-1 = 2x-1$.

$|z+\bar{z}-1| = 4 \Leftrightarrow |2x-1| = 4 \Leftrightarrow 2x-1 = 4$ ou $2x-1 = -4$

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = -\frac{3}{2}$. Donc l'ensemble des points M est la réunion des droites d'équation $x = \frac{5}{2}$ et $x = -\frac{3}{2}$

b) $\arg(3i-z) \equiv 0[2\pi]$

Soit le point A d'affixe $z_A = 3i$.

$\arg(3i-z) = \arg(z_A - z) = \arg[-(z-z_A)] = arg(z-z_A)+\pi$ or

$arg(z-z_A) = mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM})$

$arg(3i-z) \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow arg(z-z_A)+\pi \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow arg(z-z_A) \equiv -\pi[2\pi]$

or $-\pi \equiv \pi[2\pi]$ d'où par transitivité, $arg(z-z_A) \equiv \pi[2\pi]$ i.e $mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}) \equiv \pi[2\pi]$

L'ensemble des points M est **la demi-droite ($\mathcal{D}$) d'extremité A parallele à l'axe des abscisses tel que $mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AM}) \equiv \pi[2\pi$.**

c) $\arg(\bar{z}-3+i) \equiv \frac{\pi}{4}$

$\bar{z}-3+i = \bar{z}-(3-i) = \bar{z}-\overline{(3+i)}$

donc $\arg(\bar{z}-3+i) = arg\left(\bar{z}-\overline{(3+i)}\right) = arg\,\overline{(z-(3+i))} = -\arg[z-(3+i)]$

Soit le point B d'affixe $z_B = 3+i$

$\arg(\bar{z}-3+i) = -\arg[z-(3+i)] = -arg(z-z_B)$

$\arg(\bar{z}-3+i) \equiv \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -arg(z-z_B) \equiv \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow arg(z-z_B) \equiv -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\frac{\pi}{4}$

L'ensemble des points M tel que $mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\frac{\pi}{4}$ est **la demi-droite ($\mathcal{L}$) d'extremité B tel que $mes(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{BM}) \equiv -\frac{\pi}{4}$.**

d) $|z+5-2i| = |\bar{z}-2+i|$

$z+5-2i = z-(-5+2i)$,

$\bar{z}-2+i = \bar{z}-(2-i) = \bar{z}-\overline{(2+i)} = \overline{z-(2+i)}$

Soit $A(-5+2i)$ et $B(2+i)$

$|\bar{z}-2+i| = |\overline{z-(2+i)}| = |z-(2+i)| = BM;$

$|z+5-2i| = |z-(-5+2i),| = AM$

$|z+5-2i| = |\bar{z}-2+i| \Leftrightarrow AM = BM$

L'ensemble des points M est donc **la médiatrice du segment [AB] privée des points A et B.**

Exercice 12 :

A tout nombre complexe z distinct de -1+ 2i, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$$

Déterminer les ensembles de points M dont l'affixe z vérifie la condition indiquée :

a) $|Z| = 1$ b) ∣Z∣ = 2 c) Z est un nombre réel.

d) Z est un nombre imaginaire pur.

Solution 12 :

A tout nombre complexe z distinct de -1+ 2i, on associe le nombre complexe Z tel que :

$$Z = \frac{z-2+4i}{z+1-2i}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminons l'ensemble des points M.

a) $|Z| = 1$

$|Z| = \left|\frac{z-2+4i}{z+1-2i}\right|$ donc $|Z| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2+4i}{z+1-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2+4i| = |z+1-2i|$

$z-2+4i = z-(2-4i)$; $z+1-2i = z-(-1+2i)$

Soit $A(2-4i)$ et $B(-1+2i)$. Alors

$z-2+4i = z-(2-4i) = z-z_A$; $z+1-2i = z-(-1+2i) = z-z_B$

D'où $|z-2+4i| = |z+1-2i| \Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B| \Leftrightarrow AM = BM.$

L'ensemble des points M tel que $AM = BM$ est **la médiatrice du segment [AB] privée des points A et B.**

b) ∣Z∣ = 2

$|Z| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-2+4i}{z+1-2i}\right| = 2 \Leftrightarrow |z-2+4i| = 2|z+1-2i|$

$\Leftrightarrow |z - z_A| = 2|z - z_B| \Leftrightarrow AM = 2BM \;\; \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 2 \neq 1$ donc l'ensemble des points M est **le cercle de diamètre** $[\boldsymbol{IJ}]$ **ou** $\boldsymbol{I = bar\{(A,1)\,;\,(B,2)\}\; et\, J =}$ $\boldsymbol{bar\{(A,1)\,;\,(B,-2)\}}$**.**

c) Z est un nombre réel.

Soit $z = x + iy$.

$\frac{z-2+4i}{z+1-2i} = \frac{x+iy-2+4i}{x+iy+1-2i} = \frac{x-2+i(y+4)}{x+1+i(y-2)} = \frac{[(x-2)+i(y+4)][(x+1)-i(y-2)]}{[(x+1)+i(y-2)][(x+1)-i(y-2)]}$

$= \frac{[(x-2)(x+1)+(y-2)(y+4)+i[(x+1)(y+4)-(x-2)(y-2)]]}{[(x+1)^2+(y-2)^2]}$

Z est un nombre réel ssi $ImZ = 0 \Leftrightarrow [(x+1)(y+4) - (x-2)(y-2)] = 0$

$\Leftrightarrow xy + 4x + y + 4 - xy + 2x + 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -2x.$

L'ensemble des points M$(z = x + iy)$ est **la droite d'équation** $\boldsymbol{y = -2x}$**.**

d) Z est un nombre imaginaire pur.

Z est un nombre imaginaire pur ssi $\mathcal{R}e(Z) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) + (y-2)(y+4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 + y^2 + 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + 2y - 10 = 0$

L'ensemble des points M est **le cercle d'equation** $\boldsymbol{x^2 + y^2 - x + 2y - 10 = 0}$

Exercice 13 :

On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i, b = 3 + 2i\; et\; c = 7 - 2i.$

1.a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a.

En déduire les valeurs de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$.

b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel.

c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

2. Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixe z tels que :

a) $|z - b| = |z - c|$ b) $2|z - b| = |a|$

3. Soit f l'application du plan dans lui – même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 5i\sqrt{3}$

a) Démontrer que f admet un seul point invariant Ω.

b) Démontrer que f est la composée d'une rotation et d'une homothétie positive de même centre Ω. Préciser l'angle de la rotation et le rapport de l'homothétie.

c) Déterminer et construire les images par f des ensembles déterminés à la question

Solution 13 :

On considère les nombres complexes : $a = -\sqrt{3} + i$, $b = 3 + 2i$ et $c = 7 - 2i$.

1.a) Déterminons de deux façons différentes les racines carrées de a puis, déduisons les valeurs de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

$a = -\sqrt{3} + i$, $|a| = \left|-\sqrt{3} + i\right| = 2$.

<u>1ere méthode</u> : *Methode algébrique*

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ / $z^2 = a$ alors $\begin{cases} x^2 + y^2 = |a| \\ x^2 - y^2 = \mathcal{R}e(a) \\ 2xy = \mathcal{I}m(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \quad (1) \\ x^2 - y^2 = -\sqrt{3} \quad (2) \\ 2xy = 1 \quad (3) \end{cases}$

De (3), on a $2xy = 1$ ce qui veut dire $xy > 0$ donc x et y sont de même signe.

$(1) + (2)$: $2x^2 = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ d'où $x = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

Or $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ Donc $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (4)

(4) dans (3), on a $y = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ou $y = -\frac{1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Ainsi les racines carrees de a sont :

$\boldsymbol{z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}$ et $\boldsymbol{z_2 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}$

<u>2e methode</u> : *Methode trigonometrique*

Determinons un argument de a.

Notons $\theta = \arg a$. On a $\begin{cases} cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Soit $z = \lambda e^{\alpha}$ / $z^2 = a$ alors $\lambda^2 e^{2\alpha} = 2e^{\frac{5\pi}{6}}$ donc par identification, on a :

$\begin{cases} \lambda^2 = 2 \\ 2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt{2} \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} k \in \{0; 1\}$

Ainsi les racines carrees de a sont

$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{12}} = \sqrt{2}cos\frac{5\pi}{12} + i\sqrt{2}sin\frac{5\pi}{12}$ et $z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{17\pi}{12}} = \sqrt{2}cos\frac{17\pi}{12} + i\sqrt{2}sin\frac{17\pi}{12}$

Deduisons les valeurs de $cos\frac{5\pi}{12}$ et $sin\frac{5\pi}{12}$

$\frac{5\pi}{12} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ donc $cos\frac{5\pi}{12} > 0$ et $sin\frac{5\pi}{12} > 0$ d'où $\sqrt{2}cos\frac{5\pi}{12} + i\sqrt{2}sin\frac{5\pi}{12} = \mathbf{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} + \boldsymbol{i}\left(\mathbf{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}\right)$

Par identification, on a $\begin{cases} \sqrt{2}cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sqrt{2}sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$ i.e $\begin{cases} \boldsymbol{cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\ \boldsymbol{sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \end{cases}$

1.b) Déterminons les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre réel

$a^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg a^n = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i.e. $\frac{5n\pi}{6} = k\pi$ soit $5n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 5n = 6k$

$\Rightarrow 6 \ / \ 5n$ or $6 \wedge 5 = 1$ donc d'apres Gauss, $6 \ / \ n$. D'où $\boldsymbol{n = 6p, p} \in \mathbb{Z}$

1.c) Déterminons les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pur.

$a^n \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg a^n = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ i.e. $\frac{5n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ soit $\frac{5n\pi}{6} = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Leftrightarrow 5n = 6k + 3$

$\Rightarrow 5n - 6k = 3$. On sait, d'apres l'algorithme d'Euclide, que $5(-3) - 6(-3) = 3$. Alors $5n - 6k = 3 \Leftrightarrow 5n - 6k = 5(-3) - 6(-3) \Leftrightarrow 5(n+3) - 6(k+3) = 0 \Leftrightarrow 5(n+3) = 6(k+3) \Rightarrow 6 \ / \ 5(n+3)$ or $6 \wedge 5 = 1$ donc d'apres Gauss, $6 \ / \ (n+3)$.

D'où $n + 3 = 6p, p \in \mathbb{Z}$ soit $\boldsymbol{n = 6p - 3, p} \in \mathbb{Z}$

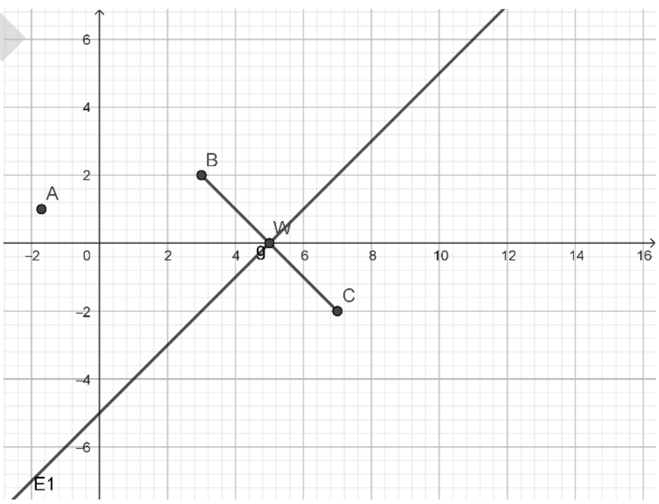
2.a) Determinons et construisons l'ensemble (E_1)des points M(z) tel que : $|z - b| = |z - c|$

Soit A le point d'affixe a, B le point d'affixe b et C le point d'affixe c

Graphiquement, $|z - b| = BM$, $|z - c| = CM$

Donc $|z - b| = |z - c|$ equivaut a $BM = CM$

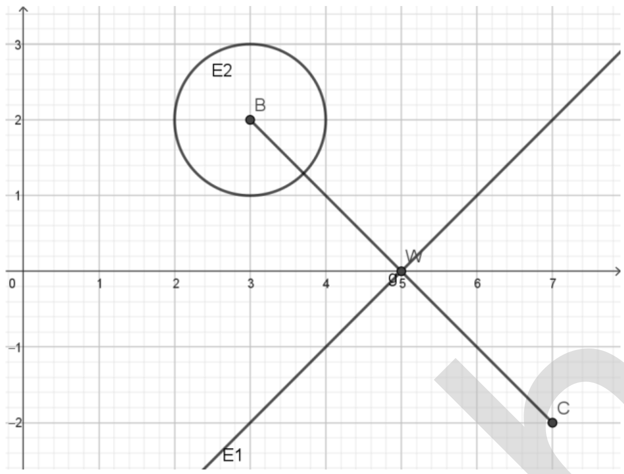
(E_1)est **la mediatrice du segment [BC]**



2.b) Determinons et construisons l'ensemble (E_2) des points M(z) tel que : $2|z-b| = |a|$

On a $|a| = 2$ donc $2|z-b| = |a| \Leftrightarrow |z-b| = 1$ i.e. graphiquement $BM = 1$

L'ensemble (E_2) des points M tel que $BM = 1$ est **le cercle de centre B et de rayon 1.**



3. Soit f l'application du plan dans lui – même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(1+i\sqrt{3}\right)z - 5i\sqrt{3}$

3.a) Demontrons que f admet un seul point invariant Ω

Soit z_Ω l'affixe de Ω. $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z_\Omega = \left(1+i\sqrt{3}\right)z_\Omega - 5i\sqrt{3} \Leftrightarrow -i\sqrt{3}z_\Omega = -5i\sqrt{3}$ donc $z_\Omega = 5$. Donc f admet un seul point invariant Ω.

$1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. $f: z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z - 5i\sqrt{3}$.

Considerons $r = \mathcal{R}(\Omega, \frac{\pi}{3})$ et $h = H(\Omega, k=2)$. Alors

$r; z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})z_\Omega$; $h: z' = 2z + (1-2)z_\Omega$ ie. $h: z' = 2z - z_\Omega$

$roh: z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(2z - z_\Omega) + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z_\Omega = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)z_\Omega$

$roh: z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z + \left(1 - 1 - i\sqrt{3}\right)5 \Leftrightarrow roh; z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}z - 5i\sqrt{3}$ d'ou $\boldsymbol{f = roh}$**.**

3.c) Determinons et construisons $f(E_1)$ et $f(E_2)$

f est une similitude directe et les similitudes directes conservent les figures. Donc

$\boldsymbol{f(E_1)}$ **est la mediatrice du segment** $[\boldsymbol{f(B)f(C)}]$

$\boldsymbol{f(E_2)}$ **est le cercle de centre** $\boldsymbol{f(B)}$ **et de rayon** $\boldsymbol{2 \times 1 = 2}$**.**

Exercice 14 :

Soit A et B les points d'affixes 1 et 2i. A tout nombre complexe z distinct de 2i, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Déterminer l'ensemble (C_1) des points M d'affixe z tel que : arg $(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
2. Déterminer l'ensemble (C_2) des points M d'affixe z tel que : |Z| = 2.
3. Démontrer que (C_1) et (C_2) ont un unique point commun dont on précisera l'affixe.

Solution 14 :

Soit A et B les points d'affixes 1 et 2i. A tout nombre complexe z ≠ 2i, on associe le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{z-1}{z-2i}$

1. Déterminons l'ensemble (C_1) des points M d'affixe z tel que : arg $(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

D'après le cours, si $A(a)$, $B(b)$, arg $\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = mes(\widehat{AM, BM})$

Dans notre cas, arg$(Z) = arg\left(\frac{z-1}{z-2i}\right) = mes(\widehat{BM, AM})$

arg $(Z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow mes(\widehat{BM, AM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ i.e. (AM) et (BM) sont perpendiculaires en M.

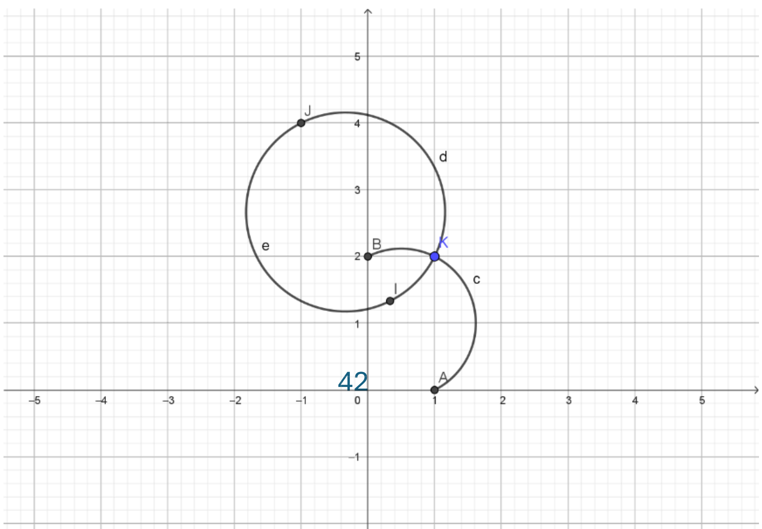
(C_1) est un demi-cercle de diamètre [AB] prive des points A et B.

2. Déterminons l'ensemble (C_2) des points M d'affixe z tel que : |Z| = 2.

$|Z| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-2i}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{|z-1|}{|z-2i|} = 2 \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = 2$

(C_2) est le cercle de diamètre [IJ] avec I = bar{(A,1) ; (B,2)} et J = bar {(A,1) ; (B,-2)}.

3. Démontrons que (C_1) et (C_2) ont un unique point commun dont on précisera



l'affixe.

Notons C et L les centres de (C_1) et (C_2) respectivement. Montrons que $CL \leq r_1 + r_2$ ou r_1 est le rayon du demi-cercle (C_1) et r_2 est le rayon du cercle (C_2).

C est milieu de [AB] donc $z_C = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{1+2i}{2}$, L est milieu de [IJ] donc $z_L = \frac{z_I+z_J}{2}$

Par ailleurs, $z_I = \frac{z_A+2z_B}{3} = \frac{1+4i}{3}$, $z_J = \frac{z_A-2z_B}{-1} = -1+4i$

Donc $z_L = \frac{\frac{1+4i}{3}+(-1+4i)}{2} = \frac{-2+16i}{6} = \frac{-1+8i}{3}$. $CL = |z_L - z_C| = \left|\frac{-1+8i}{3} - \frac{1+2i}{2}\right| = \left|\frac{-5+10i}{6}\right| = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

$r_1 = AC = |z_c - z_A| = \left|\frac{1+2i}{2} - 1\right| = \left|\frac{-1+2i}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $r_2 = IL = |z_L - z_I| = \left|\frac{-1+8i}{3} - \frac{1+4i}{3}\right| =$ $\left|\frac{-2+4i}{3}\right| = \frac{2\sqrt{5}}{3}$. $r_1 + r_2 = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7\sqrt{5}}{6} > CL$ donc (C_1) et (C_2) ont un unique point commun noté K.

K le point commun de (C_1) et (C_2) est d'affixe $z_K = 1+2i$.

$\frac{z_K-1}{z_K-2i} = \frac{2i}{1} = 2i$. $arg 2i \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc K ∈ (C_1), $|2i| = 2$ donc K ∈ (C_2).

Exercice 15 :

Partie A :

On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$.

1. a. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

   b. Démontrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z^2+1)Q(z)$.

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Partie B :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i, z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3} + 2i$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$.

   Démontrer que les quatre points appartiennent au même cercle de diamètre [CD].

2. Démontrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D.

   Calculer une valeur approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de rotation.

3. Calculer sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$.

Solution15 :

Partie A :

On considère le polynôme P de la variable complexe z définie par :

$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$.

1.a) Calculons $P(i)$ et $P(-i)$.

$P(i) = (i)^4 + 2\sqrt{3}(i)^3 + 8(i)^2 + 2\sqrt{3}i + 7 = 1 - 2i\sqrt{3} - 8 + 2i\sqrt{3} + 7 = 8 - 8 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 0$.

$P(-i) = (-i)^4 + 2\sqrt{3}(-i)^3 + 8(-i)^2 - 2\sqrt{3}i + 7 = 1 + 2i\sqrt{3} - 8 - 2i\sqrt{3} + 7 = 8 - 8 + 2i\sqrt{3} - 2i\sqrt{3} = 0$

1.b) Démontrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z^2+1)Q(z)$

Comme i et $-i$ sont racines de P alors il existe un polynôme Q du second degré tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-i)(z+i)Q(z)$ i.e. $P(z) = (z^2+1)Q(z)$

Notons a, b et $c \in \mathbb{R}$ les coefficients du polynôme Q tel que $Q(z) = az^2 + bz + c$. Déterminons a, b et c

. $P(z) = (z^2+1)(az^2+bz+c) \Leftrightarrow$

$z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7 = az^4 + bz^3 + (a+c)z^2 + bz + c$

Ainsi, par identification, on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{3} \\ c = 7 \end{cases}$ ainsi $\boldsymbol{Q(z) = z^2 + 2\sqrt{3}z + 7}$

2. Resolvons l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$

$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z^2+1)\left(z^2 + 2\sqrt{3}z + 7\right) = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z+i) = 0$ ou $z^2 + 2\sqrt{3}z + 7 = 0$

$z^2 + 2\sqrt{3}z + 7 = 0$

$\Delta = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 7 = 12 - 28 = -16 = 16i^2$

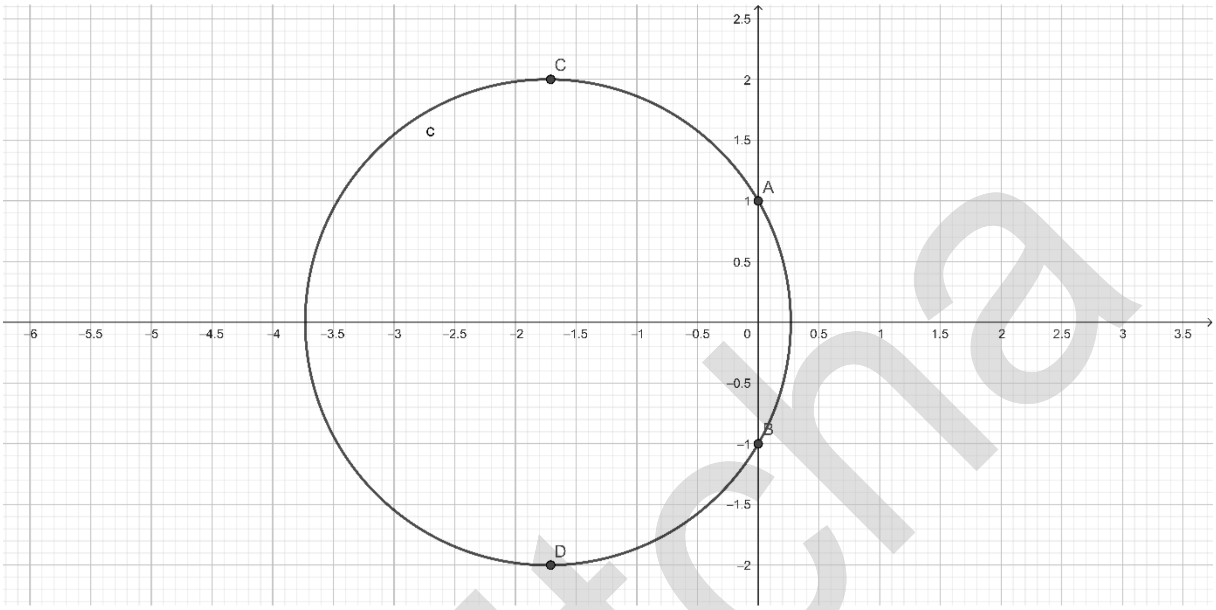
$z_3 = \frac{-2\sqrt{3}-4i}{2} = -\sqrt{3} - 2i$, $z_3 = \frac{-2\sqrt{3}+4i}{2} = -\sqrt{3} + 2i$

Donc $\boldsymbol{S} = \left\{\boldsymbol{i}, -\boldsymbol{i}, -\sqrt{\boldsymbol{3}} - \boldsymbol{2i}, -\sqrt{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{2i}\right\}$

Partie B :

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Plaçons les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i, z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3} + 2i$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$.



Démontrons que les quatre points appartiennent au même cercle de diamètre [CD] comme vu sur la figure.

$$\frac{z_B - z_C}{z_B - z_D} = \frac{-i+\sqrt{3}-2i}{-i+\sqrt{3}+2i} = \frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{3}-3i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{-4i\sqrt{3}}{4} = -i\sqrt{3}$$

$$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D} = \frac{i+\sqrt{3}-2i}{i+\sqrt{3}+2i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+3i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} = \frac{-4i\sqrt{3}}{12} = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$$

$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D} \div \frac{z_B - z_C}{z_B - z_D} = \frac{-\frac{1}{3}i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ donc **A,B, C et D ∈ au cercle de diamètre [CD].**

2. Démontrons qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D.

Il suffit de montrer que $\begin{cases} OC = OD \\ (OC)\ et\ (OD) secants. \end{cases}$

$OC = |z_C| = \left|-\sqrt{3} + 2i\right| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$; $OD = |z_D| = \left|-\sqrt{3} - 2i\right| = \sqrt{3+4} = \sqrt{7}$

De plus (OC) et (OD) se coupent en O. Donc il existe une rotation de centre O qui transforme C en D. Déterminons une valeur approchée d'une mesure de l'angle de rotation.

Soit r la rotation de centre O qui transforme C en D.

$r(C) = D \Rightarrow mes(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}) = \alpha,\ \alpha$ angle de rotation. Par définition,

$mes(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}) = arg\left(\frac{z_D}{z_C}\right) = arg\left(\frac{-\sqrt{3}-2i}{-\sqrt{3}+2i}\right) = arg\left(\frac{(-\sqrt{3}-2i)^2}{(-\sqrt{3}+2i)(-\sqrt{3}+2i)}\right) =$

$arg\left(\frac{-1+4i\sqrt{3}}{7}\right) = \mathbf{98.2^0}$

3. Calculons sous forme algébrique et sous forme trigonométrique $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$

<u>1ere méthode</u> : Sous forme algébrique

$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C} = \frac{2i}{i+\sqrt{3}-2i} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i} = \frac{2i(\sqrt{3}+i)}{2} = -1 + i\sqrt{3}$ donc $\boldsymbol{\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C} = -1 + i\sqrt{3}}$

<u>2e méthode</u> : Sous forme trigonométrique

$\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right| = \left|\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{|2i|}{|\sqrt{3}-i|} = 1$; $arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right) = arg\left(\frac{2i}{i+\sqrt{3}-2i}\right) = arg\left(\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\boldsymbol{\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C} = 1.\cos\frac{2\pi}{3} + i.1.\sin\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 16 :

Soit α ϵ]-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$[. On considère l'équation d'inconnue complexe z :

(E) : $(1 + iz)^3(1 - itan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + itan\alpha)$

1. Soit z une solution de (E) :

   Montrer que $|1 + iz| = |1 - iz|$

   En déduire que z est réel.

2. a) Exprimer $\frac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

   b) Soit z un réel, on pose z = tanθ avec θ ∈$]-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}[$.

   Montrer que (E) équivaut à une équation d'inconnue θ et la résoudre.

   Déterminer les solutions z_0, z_1 et z_2 de (E).

Solution 16 :

Soit α ϵ]-$\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$[, (E) : $(1 + iz)^3(1 - itan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + itan\alpha)$

1. Soit z une solution de (E)

1.a) Montrons que $|1 + iz| = |1 - iz|$

z une solution de (E) ⇔ $(1 + iz)^3(1 - itan\alpha) = (1 - iz)^3(1 + itan\alpha)$

$\Leftrightarrow \quad |(1+iz)^3(1-itan\alpha)| = |(1-iz)^3(1+itan\alpha)|$ or $|1-itan\alpha| = |1+itan\alpha| \neq 0$

donc $|(1+iz)^3| = |(1-iz)^3| \Leftrightarrow |1+iz|^3 = |1-iz|^3 \Leftrightarrow |1+iz| = |1-iz|$

1.b) Déduisons que z ∈ ℝ

Posons $z = x + iy$,

$1 + iz = 1 + ix - y = 1 - y + ix$, $1 - iz = 1 - ix + y = 1 + y - ix$

$|1+iz| = |1-iz| \Leftrightarrow \sqrt{(1-y)^2 + x^2} = \sqrt{(1+y)^2 + (-x)^2} \Leftrightarrow$

$(1-y)^2 + x^2 = (1+y)^2 + (-x)^2 \Leftrightarrow 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ donc z ∈ ℝ

2.

2.a) Exprimons $\frac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$

$$\frac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha} = \frac{1+i\frac{sin\alpha}{cos\alpha}}{1-i\frac{sin\alpha}{cos\alpha}} = \frac{\frac{cos\alpha+isin\alpha}{cos\alpha}}{\frac{cos\alpha-isin\alpha}{cos\alpha}} = \frac{cos\alpha+isin\alpha}{cos\alpha-sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = \boldsymbol{e^{2i\alpha}}$$

2.b) Soit z un réel, on pose z = tanθ avec θ ∈$\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Montrons que (E) équivaut à une équation d'inconnue θ et résolvons-la.

$(1+itan\theta)^3(1-itan\alpha) = (1-itan\theta)^3(1+itan\alpha) \Leftrightarrow \left(\frac{1+itan\theta}{1-itan\theta}\right)^3 = \frac{1+itan\alpha}{1-itan\alpha}$

$\Leftrightarrow \left(e^{2i\theta}\right)^3 = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow e^{6i\theta} = e^{2i\alpha} \Leftrightarrow 6\theta = 2\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}$ donc

l'ensemble solution de (E) est $\left\{\boldsymbol{z_0 = tan\frac{\alpha}{3}, z_1 = tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{3}\right), z_2 = tan\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right\}$

Exercice 17 :

Soit un plan rapporté à un repère orthonormé direct$(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère la transformation t de $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = z + 1 + i\sqrt{3}$.

1. –déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   - Déterminer la nature et l'élément caractéristique de la transformation t.
2. Soit la transformation r, qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r.
3. Soit la transformation$s = rot$ qui à tout point M(x, y) d'affixe z associe le point $M_2(x_2, y_2)$ d'affixe z_2.

Exprimer z_2 en fonction de z.

Déterminer les coordonnées de l'image C' du point C (1, -$\sqrt{3}$) par s.

4. Soit la droite $(\mathcal{D})$ dont une équation est : $x + y\sqrt{3} + 2 = 0$
   a) Montrer que le point C $\in(\mathcal{D})$.
   b) Soit $(\mathcal{D}')$ l'image de $(\mathcal{D})$ par s. déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Solution 17 :

On considère la transformation t de $\mathcal{P}$ qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M'd'affixe $z' = x' + iy'$ tel que $z' = z + 1 + i\sqrt{3}$.

1. Déterminons x' et y' en fonction de x et y.

$z' = z + 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow x' + iy' = x + iy + 1 + i\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x' + iy' = x + 1 + i(y + \sqrt{3})$ donc par identfication $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + \sqrt{3} \end{cases}$

Déterminons la nature et l'élément caractéristique de la transformation t

$t: z' = z + 1 + i\sqrt{3}$, par définition, t est la translation de vecteur $\vec{u}(1 + i\sqrt{3})$.

2. Soit la transformation r, qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r.

$a = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$ donc r est une rotation d'angle $\theta = \arg\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ et de centre O.

3. Soit la transformation $s = rot$ qui à tout point M(x, y) d'affixe z associe le point $M_2(x_2, y_2)$ d'affixe z_2. Exprimons z_2 en fonction de z.

$t: z' = z + 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

$z_2 = rot(z)$

$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z + 1 + i\sqrt{3})$

$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2$ donc $z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2$

4. Déterminons les coordonnées de l'image C' du point C $(1, -\sqrt{3})$ par s

$s: z_2 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2$ donc $z_{C'} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i\sqrt{3}) + 2$

$z_{C'} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} + 2$ donc $z_{C'} = 1 - i\sqrt{3} = z_C$ donc C est le centre de t.

5. ` Soit $(\mathcal{D}) : x + y\sqrt{3} + 2 = 0$

5.a) Montrons que C $\in(\mathcal{D})$.

$1 + (-\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ donc C $\in(\mathcal{D})$.

5.b) Soit $(\mathcal{D}')$ l'image de $(\mathcal{D})$ par s. déterminons le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

C $\in(\mathcal{D})$ et s est une application. $s(C) \in s((\mathcal{D}))$ $i.e.$ $C' \in (\mathcal{D}')$ or $C' = C$ d'où C est le point d'intersection de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Exercice 18 :

Soit f l'application de C dans C définie par : $f(z) = z^3 - 6\sqrt{3}z^2 + 12(3 + i\sqrt{3})z - 64i$.

1. a) Calculer $f(2i)$

b) Vérifier que, pour tout nombre complexe z, on a $f(z) = (z-2i)[z^2 - (6\sqrt{3} - 2i)z + 32]$.

2. Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$. On appellera a_0, a_1, a_2 les solutions trouvées : a_0 est imaginaire pur, et la partie réelle de a_1 est inférieure à la partie réelle de a_2.

3. Déterminer le module et l'argument de a_0, a_1 et a_2 et vérifier que $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$

Solution18 :

Soit f l'application de C dans C définie par : $f(z) = z^3 - 6\sqrt{3}z^2 + 12(3 + i\sqrt{3})z - 64i$.

1.a) Calculons $f(2i)$

$f(2i) = (2i)^3 - 6\sqrt{3}(2i)^2 + 12(3 + i\sqrt{3})(2i) - 64i$

$= -8i + 24\sqrt{3} + 72i - 24\sqrt{3} - 64i$

$= 72i - 72i + 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3}$

$=0$

1.b) Vérifions que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (z-2i)[z^2 - (6\sqrt{3} - 2i)z + 32]$.

$(z-2i)[z^2 - (6\sqrt{3} - 2i)z + 32] = z^3 - (6\sqrt{3} - 2i)z^2 + 32z - 2iz^2 + (4 + 12i\sqrt{3})z - 64i$

$= z^3 - 6\sqrt{3}z^2 + (36 + 12i\sqrt{3})z - 64i$

$= z^3 - 6\sqrt{3}z^2 + 12(3 + i\sqrt{3})z - 64i = f(z)$

2) Resolvons $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)[z^2 - (6\sqrt{3} - 2i)z + 32] = 0$

$\Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 - (6\sqrt{3} - 2i)z + 32 = 0$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 - (6\sqrt{3} - 2i)z + 32 = 0$

$\Delta = [-(6\sqrt{3} - 2i)]^2 - 4 \times 32 = 108 - 24i\sqrt{3} - 4 - 128$

$= -24 - 24i\sqrt{3} = = -24(1 + i\sqrt{3})$=12$(-2 - 2i\sqrt{3})$ =12$(1 - i\sqrt{3})^2$

$= [2\sqrt{3}(1 - i\sqrt{3})]^2$= $(2\sqrt{3} - 6i)^2$

$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(6\sqrt{3}-2i)-(2\sqrt{3}-6i)}{2} = \frac{4\sqrt{3}+4i}{2} = 2\sqrt{3} + 2i$

$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(6\sqrt{3}-2i)+(2\sqrt{3}-6i)}{2} = \frac{8\sqrt{3}-8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$

Donc l'ensemble solution de cette équation est

$\{a_0 = 2i, a_1 = 2\sqrt{3} + 2i, a_2 = 4\sqrt{3} - 4i\}$

3) Déterminons le module et un argument de $a_0,\ a_1, a_2$

$|a_0| = 2,\ arg a_0 = \frac{\pi}{2};\ |a_1| = |2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{16} = 4$

$arg a_1$= $arg(2\sqrt{3} + 2i) = arg[2(\sqrt{3} + i)] = arg(\sqrt{3} + i) = \frac{\pi}{6}$

$|a_2| = |4\sqrt{3} - 4i| = |4(\sqrt{3} - i)| = 4 \times 2 = 8$

$arg a_2 = arg[4(\sqrt{3} - i)] = arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$

Vérifions que $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}$

$\frac{a_1}{a_0} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right)} = \boldsymbol{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$; $\frac{a_2}{a_1} = \frac{8e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4e^{i\frac{\pi}{6}}} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)} = \boldsymbol{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ donc $\boldsymbol{\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1}}$

Exercice 19 :

On donne les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B définies par :$z_A = 6 - 3i$ et $z_B = 2 + 4i$

1) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) Déterminer l'affixe du point B' image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle de A' image de A par la rotation de centre O et d'angle -$\frac{\pi}{2}$. Faire la figure.

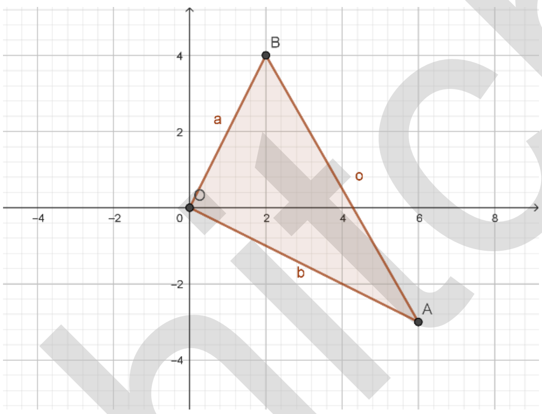
3) Calculer l'affixe du point M, milieu de $[A'B']$.

4) Vérifier que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires puis donner la nature du quadrilatère OAMB.

Exercice 19 :

On donne les points A et B d'affixes respectives z_A et z_B définies par :$z_A = 6 - 3i$ et $z_B = 2 + 4i$

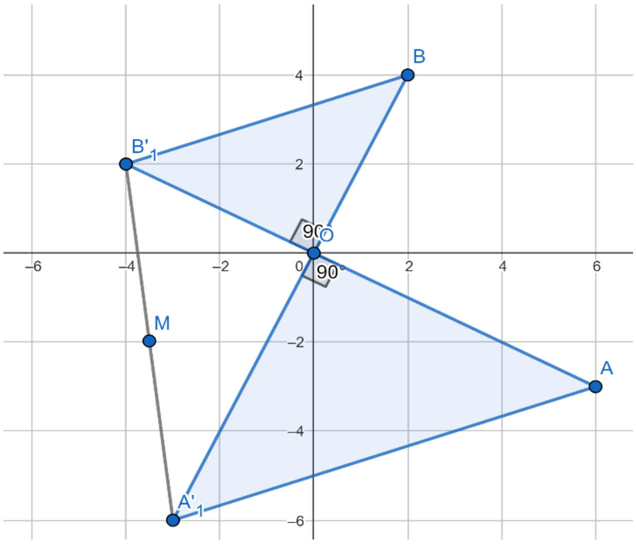
1. Déterminons la nature du triangle OAB



Selon la figure, OAB semble être un triangle rectangle en O. Démontrons cela.

$\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{2+4i}{6-3i} = \frac{2(1+2i)}{3(2-i)} = \frac{2i(2-i)}{3(2-i)} = \frac{2}{3}i$ donc OAB est rectangle en O.

2. Déterminons l'affixe du point B' image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle de A' image de A par la rotation de centre O et d'angle -$\frac{\pi}{2}$ et construisons une figure.



- Affixe de B’

$$z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_B \Leftrightarrow z_{B'} = i(2+4i) = -4+2i$$

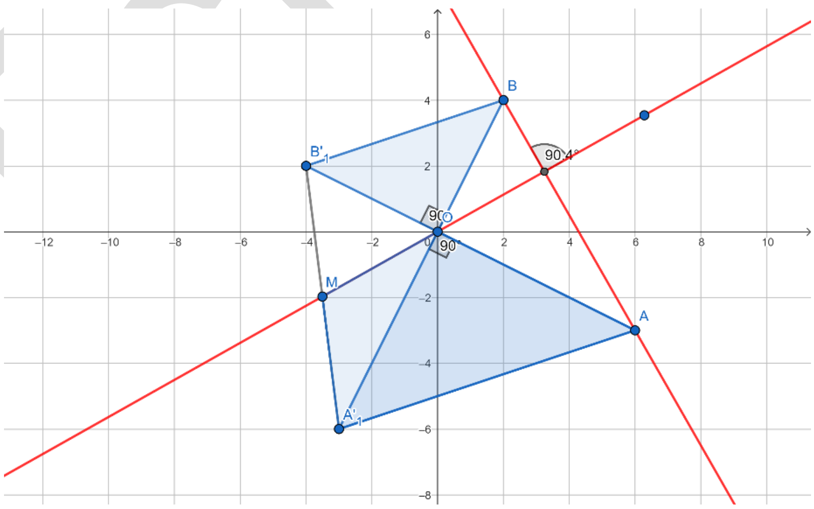
- Affixe de A’

$$z_{A'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_A \Leftrightarrow z_{A'} = -i(6-3i) = -3-6i$$

- Affixe de M

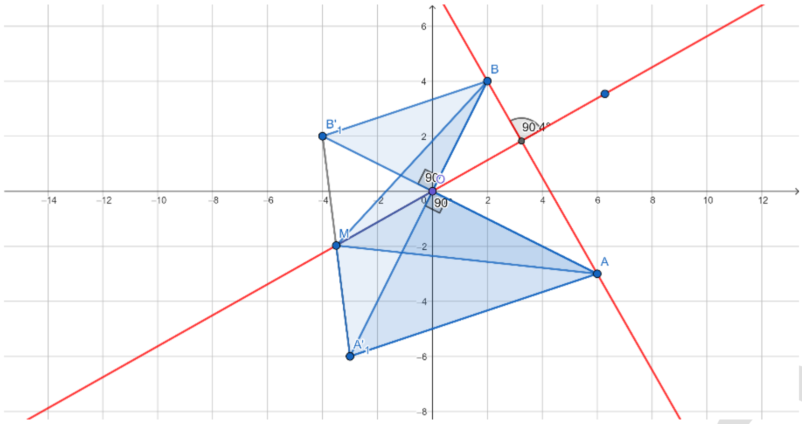
M = milieu [A’B’] donc $z_M = \frac{z_{A'}+z_{B'}}{2} = \frac{-3-6i-4+2i}{2} = \frac{-7-4i}{2} = -\frac{7}{2} - 2i$

3. Vérifions que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires puis donnons la nature du quadrilatère OAMB.



$$\frac{z_B - z_A}{z_M - z_O} = \frac{2+4i-6+3i}{-\frac{7}{2}-2i} = \frac{-4+7i}{-\frac{7}{2}-2i} = \frac{-2i(-\frac{7}{2}-2i)}{-\frac{7}{2}-2i} = -2i \text{ donc } arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_M - z_O}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

i.e $mes(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{2}$. On conclut donc que (OM) et (AB) sont perpendiculaires.



OAMB est **un losange** car ses diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 20 :

1) Quels sont les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$?

2) A) Déterminer la forme trigo du nombre complexe : 8(1-i$\sqrt{3}$)

B) Déterminer la forme trigo de chacun des nombres complexes solutions de l'équation : $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

3) a) Vérifier que $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de 8(1-i$\sqrt{3}$).

b) Utiliser 1 pour en déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes solutions de $Z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

4) Déduire de 2 et 3 les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{11\pi}{12}$.

5) Résoudre dans $[0,2\pi[$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}sinx - \sqrt{2+\sqrt{3}}cosx = -\sqrt{2}$.

Solution 20 :

1. Les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$ sont $\{1, i, -1, -i\}$

2.a) Déterminons la forme trigonométrique du nombre complexe : 8(1-i$\sqrt{3}$)

$|8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})| = 8|1 - \mathrm{i}\sqrt{3}| = 8 \times 2 = 16$; $arg[8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})] = arg(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

Donc $8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = 16\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 16isin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 16cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 16isin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

2.b) Déterminons la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ / $z^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$. On a $8\left(1 - i\sqrt{3}\right) = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\rho^4 e^{4i\theta} = 16e^{-i\frac{\pi}{3}}$ par identification, on a $\begin{cases} \rho^4 = 16 \\ 4\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{12}} = 2cos\frac{\pi}{12} - 2isin\frac{\pi}{12}$, $z_1 = 2e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2})} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = 2cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + 2isin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$z_2 = 2e^{i(-\frac{\pi}{12}+\pi)} = 2e^{i\left(\frac{11\pi}{12}\right)} = 2cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 2isin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$;

$z_3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2})} = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)} = 2cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + 2isin\left(\frac{17\pi}{12}\right)$

3.a) Vérifions que $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de 8(1-i$\sqrt{3}$).

$a^4 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^4 + 4.\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(i.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^1 + 6\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(i.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2$
$+4\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^1\left(i.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(i.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^4$

Or

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 4.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + 6.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$$

$= \frac{9}{4} - 3\sqrt{3} + \frac{9}{2} - \sqrt{3} + \frac{1}{4}$

$= \frac{28}{4} - 4\sqrt{3}$

$$\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 + 4.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1 + 6.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4.\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$$

$= \frac{9}{4} + 3\sqrt{3} + \frac{9}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{4}$

$= \frac{28}{4} + 4\sqrt{3}$

$4.\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^3\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^1 = 8 - 4\sqrt{3}$; $6\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6$; $4\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^1\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 8 + 4\sqrt{3}$

Donc $a^4 = \left(\frac{28}{4} - 4\sqrt{3}\right) + i\left(8 - 4\sqrt{3}\right) - 6 - i\left(8 + 4\sqrt{3}\right) + \frac{28}{4} + 4\sqrt{3} = 8 - 8i\sqrt{3} = 8(1 - i\sqrt{3})$.

D'où $a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ est une racine quatrième de $8(1 - i\sqrt{3})$.

3.b) Utilisons 1 pour en déduire la forme algébrique de chacun des nombres complexes solutions de $w^4 = 8(1 - i\sqrt{3})$.

$w^4 = 8(1 - i\sqrt{3}) \Leftrightarrow w^4 = a^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{a}\right)^4 = 1$ donc d'après 1

$\frac{w_0}{a} = 1 \Leftrightarrow w_0 = a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\frac{w_1}{a} = i \Leftrightarrow w_1 = i.a = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

$\frac{w}{a} = -1 \Leftrightarrow w_2 = -a = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$\frac{w_3}{a} = -i \Leftrightarrow w_3 = -i.a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

4. Déduisons de 2 et 3 les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{11\pi}{12}$

$\frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ donc $\cos\frac{11\pi}{12} < 0$ et $\sin\frac{11\pi}{12} > 0$

Ainsi $2cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 2isin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ d'où par identification

$$\begin{cases} 2cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \\ 2sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

5. Résolvons dans $[0,2\pi[$ l'équation : $\sqrt{2-\sqrt{3}}sinx - \sqrt{2+\sqrt{3}}cosx = -\sqrt{2}$

$\sqrt{2-\sqrt{3}}sinx - \sqrt{2+\sqrt{3}}cosx = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{-\sqrt{2}}sinx - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{2}}cosx = 1$

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}{2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$;

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{-\sqrt{2}}sinx - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{2}}cosx = 1 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{3}}{2}sinx + \frac{1+\sqrt{3}}{2}cosx = 1$ i.e. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1-\sqrt{3}}{2}sinx = 1$

Soit r le module. Alors $r = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2}$

Ainsi $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}cosx + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}sinx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}cosx - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}sinx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}cosx + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)cosx + sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)sinx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$cos\left(x-\frac{11\pi}{12}\right)=cos\frac{3\pi}{4}$ donc $\begin{cases} x-\frac{11\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \\ ou \\ x-\frac{11\pi}{12}=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases} k\in\mathbb{Z}$

$\boldsymbol{S}_{[0,2\pi[}=\left\{\frac{5\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice 21 :

On désigne par P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Au point M de P de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe z =x+iy, appelé affixe de M. On considère dans P les points $A_0(0,2)$; $A_1(2\sqrt{3}, 2)$; $A_2(4\sqrt{3}, -4)$.

1- Déterminer le réel m pour que le barycentre des points A_0, A_1 et A_2 affectés respectivement des coefficients m, -7 et 5 soit le point G d'affixe $z_G=\sqrt{3}-3i$

2- Vérifier que les points A_0, A_1, A_2 sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre G, dont on précisera le rayon.

Solution 21 :

On désigne par P un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Au point M de P de coordonnées (x, y), on associe le nombre complexe z =x+iy, appelé affixe de M. On considère dans P les points $A_0(0,2)$; $A_1(2\sqrt{3}, 2)$; $A_2(4\sqrt{3}, -4)$.

1. Déterminer le réel m pour que le barycentre des points A_0, A_1 et A_2 affectés respectivement des coefficients m, -7 et 5 soit le point G d'affixe $z_G=\sqrt{3}-3i$

$G=bar\{(A_0,m);(A_1,-7);(A_2,5)\}\Leftrightarrow z_G=\frac{mz_{A_0}-7z_{A_1}+5z_{A_2}}{m-2}\Leftrightarrow$

$(m-2)(\sqrt{3}-3i)=2m.i-7(2\sqrt{3}+2i)+5(4\sqrt{3}-4i)$

$(m-2)\sqrt{3}+4\sqrt{3}+i[-3(m-2)-2m+34]=0$

$(m+2)\sqrt{3}+i[-5m+40]=0$ donc par identification, on a :

$\begin{cases} m+2=0 \\ et \\ -5m+40=0 \end{cases}$ donc $m=-2$ et $m=8$ ce qui impossible. D'où $\forall m\in\mathbb{R}$, $G=bar\{(A_0,m);(A_1,-7);(A_2,5)\}$

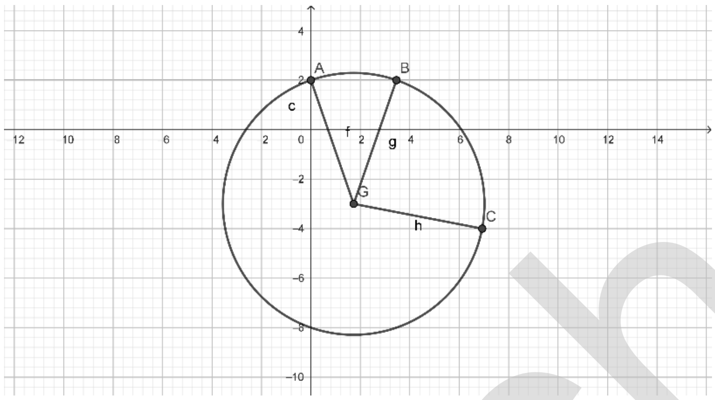
2. Vérifions que les points A_0, A_1, A_2 sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre G, dont on précisera le rayon.

$|GA_0| = |z_{A_0} - z_G| = |2i - (\sqrt{3} - 3i)| = |-\sqrt{3} + 5i| = \sqrt{3 + 25} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$|GA_1| = |z_{A_1} - z_G| = |(2\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{3} - 3i)| = |\sqrt{3} + 5i| = \sqrt{3 + 25} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$|GA_2| = |z_{A_2} - z_G| = |(4\sqrt{3} - 4i) - (\sqrt{3} - 3i)| = |3\sqrt{3} + i| = \sqrt{27 + 1} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Comme $|GA_0| = |GA_1| = |GA_2| = 2\sqrt{7}$ alors les points A_0, A_1, A_2 sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre G, de rayon $2\sqrt{7}$.



Exercice 22 :

Soit θ un réel de l'intervalle$[0, \pi[$.

1- Justifier les égalités suivantes :

$cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+cos\theta}{2}$; $sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-cos\theta}{2}$et $sin\theta = 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

2- Déduire de (1), en fonction de θ, les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes :

$z_1 = 1 + cos\theta - isin\theta$; $z_2 = 1 - cos\theta - isin\theta$; $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

Solution 22 :

Soit θ un réel de l'intervalle$[0, \pi[$

1. Justifions les égalités suivantes :

❖ Justifions que $cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+cos\theta}{2}$

En appliquant la formule $cos^2a = \frac{1+cos2a}{2}$ en prenant $a = \frac{\theta}{2}$, on obtient le résultat.

❖ Justifions que $sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-cos\theta}{2}$

On sait que $sin^2a = 1 - cos^2a = 1 - \left(\frac{1+cos2a}{2}\right) = \frac{1-cos2a}{2}$. Ainsi, en prenant $a = \frac{\theta}{2}$, on obtient le résultat.

❖ Justifions que $sin\theta = 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

On sait que $sin2a = 2sina.cosa$. Donc en prenant $a = \frac{\theta}{2}$, on obtient le résultat.

2. Déduisons de (1), en fonction de θ, les formes trigonométriques et exponentielles des nombres complexes :

❖ $z_1 = 1 + cos\theta - isin\theta$

D'après (1), $1 + cos\theta = 2cos^2\frac{\theta}{2}$; $sin\theta = 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

$z_1 = 2cos^2\frac{\theta}{2} - 2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} = 2cos\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2} - isin\frac{\theta}{2}\right) = 2cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Comme $\theta \in [0, \pi[$, $cos\frac{\theta}{2} > 0$ d'où la forme exponentielle de $z_1 = 2cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et sa forme trigonométrique est $z_1 = 2cos^2\frac{\theta}{2} - 2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$.

❖ $z_2 = 1 - cos\theta - isin\theta$

D'après (1), $1 - cos\theta = 2sin^2\frac{\theta}{2}$; $sin\theta = 2sin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$

$z_2 = 2sin^2\frac{\theta}{2} - 2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2} = 2sin\frac{\theta}{2}\left(cos\frac{\theta}{2} - isin\frac{\theta}{2}\right) = 2sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$. Comme $\theta \in [0, \pi[$, $sin\frac{\theta}{2} > 0$ d'où la forme exponentielle de $z_2 = 2sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et sa forme trigonométrique est $z_1 = 2sin^2\frac{\theta}{2} - 2isin\frac{\theta}{2}cos\frac{\theta}{2}$.

❖ $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

Forme exponentielle de z_3

$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}}{2sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{tan\frac{\theta}{2}} \in \mathbb{R}$ donc $z_3 = \frac{1}{tan\frac{\theta}{2}}e^{i0}$.

Forme trigonométrique.

$z_3 = \frac{1}{tan\frac{\theta}{2}}\ \theta \in]0, \pi[$.

Exercice 23 :

On considère l'application f de C dans C définie par :

$f(z) = z^3 + 2z^2 + 4(i-1)z + 16(i+1)$

1) Montrer qu'il existe deux nombres complexes a et b tels que :

   $f(z) = (z+4)(z^2 + az + b)$.

2) Résoudre dans C l'équation f(z)=0.

   Ecrire chaque solution sous forme trigonométrique.

3) Placer les images de ces solutions dans le plan complexe.

4) Montrer que ces images sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Solution 23 :

On considère l'application f de C dans C définie par :

$f(z) = z^3 + 2z^2 + 4(i-1)z + 16(i+1)$

1) Montrons qu'il existe deux nombres complexes a et b tels que :

   $f(z) = (z+4)(z^2 + az + b)$.

   Il suffit de vérifier que $f(-4) = 0$

$f(-4) = (-4)^3 + 2(-4)^2 + 4(i-1)(-4) + 16(i+1)$

$= -64 + 32 - 16i + 16 + 16i + 16$

$= -64 + 32 + 16 + 16 - 16i + 16i$

$= 0$

2) Résolvons dans C l'équation f(z)=0

Pour cela, déterminons d'abord a et b ∈ $\mathbb{C}$ tels que : $f(z) = (z+4)(z^2 + az + b)$.

$(z+4)(z^2 + az + b) = z^3 + (a+4)z^2 + (b+4a)z + 4b$

$f(z) = (z+4)(z^2 + az + b).\quad \Leftrightarrow \quad z^3 + 2z^2 + 4(i-1)z + 16(i+1) = z^3 + (a+4)z^2 + (b+4a)z + 4b$. Par identification, on a :

$\begin{cases} a+4=2 \\ 4b = 16(i+1) \end{cases}$ donc $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4(i+1) \end{cases}$ ainsi $f(z) = (z+4)(z^2 - 2z + 4(i+1))$.

Maintenant, résolvons l'équation f(z)=0

$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -4$ ou $z^2 - 2z + 4(i+1) = 0$

$\Delta = 4 - 16(i+1) = -16i - 12 = 4(-3-4i) = [2(1-2i)]^2 = (2-4i)^2$

$z_1 = \frac{2-(2-4i)}{2} = 2i;\ z_2 = \frac{2+(2-4i)}{2} = 2 - 2i$

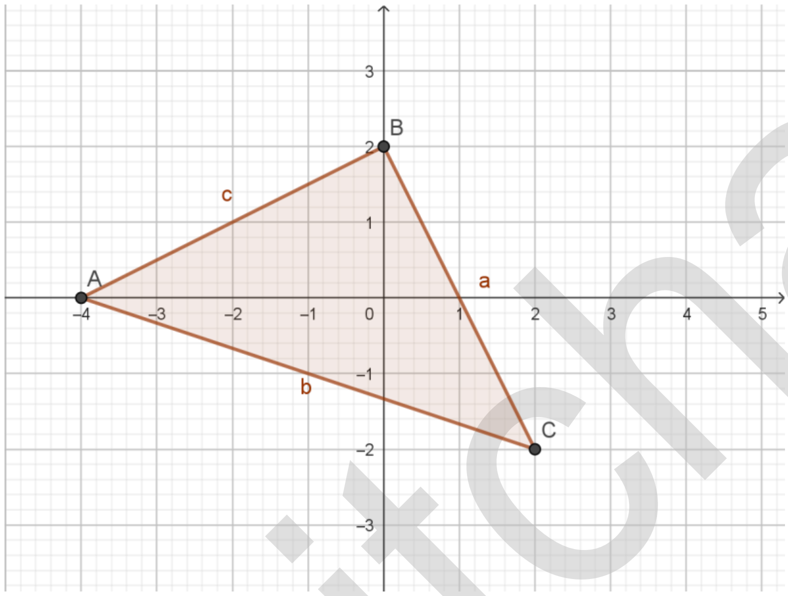
$S = \{-4; 2i; 2-2i\}$

Ecrivons chaque solution sous forme trigonométrique.

$z_0 = -4 = -4cos0 - 4isin0$; $z_1 = 2i = 2cos\frac{\pi}{2} + 2isin\frac{\pi}{2}$;

$z_2 = 2 - 2i = 2\sqrt{2}cos\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}isin\frac{\pi}{4}$

3) Plaçons les images de ces solutions dans le plan complexe.



4) Montrons que ces images sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle.

D'après la figure, on conjecture aisément que ce triangle est isocèle en B.

Démontrons-la.

$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2-2i-2i}{-4-2i} = \frac{2-4i}{-4-2i} = \frac{i(-2i-4)}{-4-2i} = i$ donc ABC est rectangle isocèle en B.

Exercice 24 :

On considère les nombres complexes :

$z_1 = \frac{-i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z = \frac{z_1}{z_2}$

a) Déterminer un module et un argument de z_1, z_2 et z.

b) Ecrire z sous forme algébrique. Puis déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

c) Ecrire z_1^{2002} sous forme algébrique.

Solution 24 :

On considère les nombres complexes :

$z_1 = \frac{-i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$; $z = \frac{z_1}{z_2}$

1. Déterminons un module et un argument de z_1, z_2 et z.

$|z_1| = \left|\frac{-i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6+2}{4}} = \sqrt{2}$

$\frac{-i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i\sqrt{3}) \Rightarrow argz_1 = arg(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

$|z_2| = |1 - i| = \sqrt{2}$; $argz_2 = \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$

$|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$; $argz = arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = argz_1 - argz_2 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$

2. Ecrivons z sous forme algébrique. Puis déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{-i\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{(1-i\sqrt{3})(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})).$

$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$z = cos\frac{\pi}{12} - isin\frac{\pi}{12}$ et $z = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ donc par identification on a :

$$\begin{cases} cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ -sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

3. Ecrivons z_1^{2002} sous forme algébrique.

$z_1 = \sqrt{2}cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2}i.sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow$ d'après Moivre,

$z_1^{2002} = (\sqrt{2})^{2002}\cos\left(-\frac{2002\pi}{3}\right) + (\sqrt{2})^{2002}i.sin\left(-\frac{2002\pi}{3}\right)$ or

$\begin{cases} \cos(-\alpha) = cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -sin\alpha \end{cases} \Rightarrow z_1^{2002} = (\sqrt{2})^{2002}\cos\left(\frac{2002\pi}{3}\right) - (\sqrt{2})^{2002}i.sin\left(\frac{2002\pi}{3}\right).$

D'autre part,

$\frac{2002\pi}{3} = \frac{2001\pi+\pi}{3} = 667\pi + \frac{\pi}{3}$ donc $\begin{cases} cos\left(\frac{2002\pi}{3}\right) = cos\left(667\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ sin\left(\frac{2002\pi}{3}\right) = sin\left(667\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$(\sqrt{2})^{2002} = 2^{1001}$

Donc $z_1^{2002} = 2^{1001} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + i\frac{2^{1001}\sqrt{3}}{2} = 2^{1000}(-1 + i\sqrt{3})$. $\boldsymbol{z_1^{2002} = 2^{1000}(-1 + i\sqrt{3})}$.

Exercice 25 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormée direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour x réel, on pose : z = $\frac{i-x}{i+x}$

a) Placer dans le plan P les points A et B d'affixes respectives i et –i puis le point M d'affixe réelle x.

b) Montrer que le module de z est égale à 1, pour tout réel x

c) Montrer que : $z = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2}$

d) Trouver x tel que la partie réelle et la partie imaginaire de z soient égales.

En déduire x tel que : $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution 25 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormée direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour x réel, on pose : z = $\frac{i-x}{i+x}$

b) Montrons que $|z| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $|i-x| = \sqrt{(-1)^2 + x^2} = \sqrt{x^2+1}$; $|i+x| = \sqrt{(1)^2 + x^2} = \sqrt{x^2+1}$

Donc $|z| = \left|\frac{i-x}{i+x}\right| = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ donc $|z| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

c) Montrer que : $z = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2}$

$$z = \frac{i-x}{i+x} = \frac{(i-x)(-i+x)}{1+x^2} = -\frac{(i-x)^2}{x^2+1} = -\frac{x^2-2ix-1}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{1+x^2} + i\frac{2x}{1+x^2}.$$

d) Trouvons x pour $\mathcal{Re}(z) = \mathcal{Im}(z)$

$\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$ $\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$; $x_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$ donc $x \in \{-1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2}\}$

e) Déduisons x tel que : $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ici $\mathcal{Re}(z) = \mathcal{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x \in \{-1-\sqrt{2};\ -1+\sqrt{2}\}$

Exercice 26 :

On considère l'équation (E) : $z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12) = 0$

1)Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.

2)Résoudre dans C l'équation (E) (on notera z_3 la troisième solution)

3)Démontrer que les points images des solutions de l'équation (E) sont alignés.

Solution 26 :

On considère l'équation (E) : $z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$

1) Démontrons que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2.

Posons $z = a$

a est une solution de (E) $\Leftrightarrow a^3 + 9ia^2 + 2(6i - 11)a - 3(4i + 12) = 0$

$\Leftrightarrow a^3 - 22a - 36 + i(9a^2 + 12a - 12) = 0.$

$\Rightarrow \begin{cases} a^3 - 22a - 36 = 0 \\ 9a^2 + 12a - 12 = 0 \end{cases}$

$9a^2 + 12a - 12 = 0 \Leftrightarrow 3a^2 + 4a - 4 = 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64 = 8^2$ donc $a_1 = \frac{-4-8}{6} = -2$ ou $a_2 = \frac{-4+8}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$(-2)^3 - 22(-2) - 36 = -8 + 44 - 36 = -44 + 44 = 0$ donc -2 est solution de (E). Ainsi $z_1 = -2.$

Déterminons $z_2 = ib$

z_2 est solution de (E) $\Leftrightarrow (ib)^3 + 9i(ib)^2 + 2(6i - 11)(ib) - 3(4i + 12) = 0$

$\Leftrightarrow -ib^3 - 9ib^2 + 2(-6 - 11i)b - 3(4i + 12) = 0$

$\Leftrightarrow -ib^3 - 9ib^2 + (-12b - 36) + i(-22b - 12) = 0$

$\Leftrightarrow -12b - 36 + i(-b^3 - 9b^2 - 22b - 12) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -12b - 36 = 0 \ (1) \\ -b^3 - 9b^2 - 22b - 12 = 0 \ (2) \end{cases}$

(1) $-12b - 36 = 0 \Leftrightarrow b = -3$

En remplaçant b par -3 dans (2), on a : $-(-3)^3 - 9(-3)^2 - 22(-3) - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 27 - 81 + 66 - 12 = 93 - 93 = 0$ donc $z_2 = -3i$ est solution de (E).

2) Resolvons (E)

(E) : $z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0$

Comme -2 et -3i sont solutions de (E) alors il existe a et b tel que :

$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = (z + 2)(z + 3i)(az + b)$

Déterminons a et b.

$(z + 2)(z + 3i)(az + b) = az^3 + (2a + b + 3ia)z^2 + (3ib + 2b + 6ia)z + 6ib$

$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = az^3 + (2a + b + 3ia)z^2 + (3ib + 2b + 6ia)z + 6ib$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b + 3ia = 9i \\ 2b + i(6a + 3b) = -22 + 12i \\ 6ib = -3(4i + 12) \end{cases}$

Donc $a = 1$ et $6ib = -12i - 36$ soit $b = -2 + 6i$

Ainsi $z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = (z + 2)(z + 3i)(z - 2 + 6i)$

$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0 \Leftrightarrow (z + 2)(z + 3i)(z - 2 + 6i) = 0$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $z = -3i$ ou $z = 2 - 6i$

$z_3 = 2 - 6i$ est solution de (E).

3) Soient $A(-2), B(-3i)$ et $C(2 - 6i)$. Démontrons que A, B et C sont alignes. Cela revient à montrer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

$\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2-6i+3i}{-2+3i} = \frac{2-3i}{-2+3i} = -1 \in \mathbb{R}$ Donc A, B et C sont alignes.

Exercice 27 :

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :

$Z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $Z_P = 3 + 2i$, et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

1) A) Déterminer l'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{w}$.

B) Calculer l'affixe Z_Q du point Q image du point B par t.

2) a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$;

b) Calculer l'affixe Z_R du point R, image du point P par h.

3) a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

b) Déterminer l'affixe Z_S du point S, image du point P par la rotation r.

4) Placer les points P, Q, R et S dans le plan.

5) a) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b) Calculer $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$

c) En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

d) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté Γ. On Calcule l'affixe Z_Ω de son centre Ω et son rayon ρ.

6) a) Quelle est la nature du triangle APΩ ?

b) Déduire la position relative de la droite (AP) et du cercle Γ.

Solution 27 :

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives :

$Z_A = \frac{3}{2} + 6i$; $Z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $Z_C = -3 - \frac{1}{4}i$; $Z_P = 3 + 2i$, et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

1.a) Ecriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{w}$.

$t: z' = z + z_{\vec{w}} \Leftrightarrow t: z' = z - 1 + \frac{5}{2}i.$

1.b) Calculons l'affixe Z_Q du point Q image du point B par t.

$Q = t(B) \Leftrightarrow Z_Q = Z_B - 1 + \frac{5}{2}i$

$\Leftrightarrow Z_Q = \frac{3}{2} - 6i - 1 + \frac{5}{2}i \Leftrightarrow Z_Q = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$

2.a) Ecriture complexe de l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$

$h: z' = -\frac{1}{3}z + \left(1 + \frac{1}{3}\right) Z_C \Leftrightarrow h: z' = -\frac{1}{3}z + \frac{4}{3}\left(-3 - \frac{1}{4}i\right) \Leftrightarrow$

$h: z' = -\frac{1}{3}z - 4 - \frac{1}{3}i$

2.b) Calculons l'affixe Z_R du point R, image du point P par h.

$R = h(P) \Leftrightarrow Z_R = -\frac{1}{3}Z_P - 4 - \frac{1}{3}i \Leftrightarrow Z_R = -\frac{1}{3}(3 + 2i) - 4 - \frac{1}{3}i$

$\Leftrightarrow Z_R = -5 - i$

3.a) Ecriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

$r = R\left(A; -\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow r: z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}z + \left(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) Z_A$

$\Leftrightarrow z' = -iz + (1 + i)(\frac{3}{2} + 6i) \Leftrightarrow z' = -iz - \frac{9}{2} + \frac{15}{2}i$

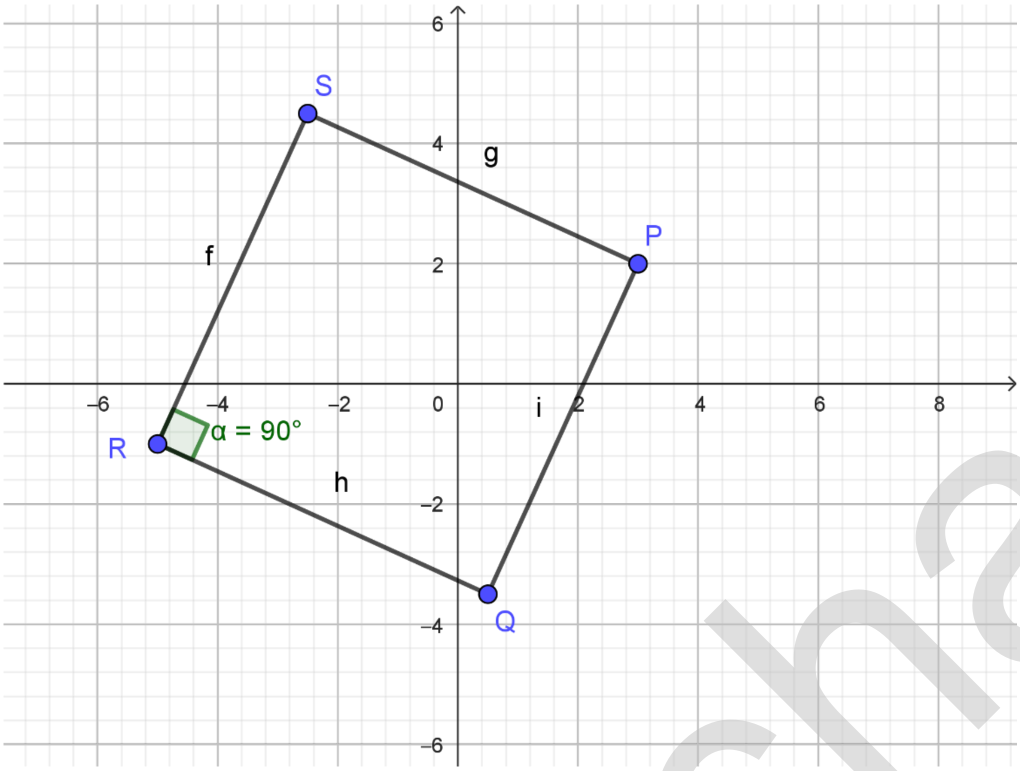
Donc $r: z' = -iz - \frac{9}{2} + \frac{15}{2}i.$

3.b) Déterminons l'affixe Z_S du point S, image du point P par la rotation r.

$S = r(P) \Leftrightarrow Z_S = -iZ_P - \frac{9}{2} + \frac{15}{2}i \Leftrightarrow Z_S = -i(3 + 2i) - \frac{9}{2} + \frac{15}{2}i$

$Z_S = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i$

4) Plaçons les points P, Q, R et S.



5.a) Démontrons que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme. Pour cela, il suffit de montrer que $Z_{\overrightarrow{PQ}} = Z_{\overrightarrow{SR}}$

$Z_{\overrightarrow{PQ}} = Z_Q - Z_P = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}i\right) - (3 + 2i) = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$

$Z_{\overrightarrow{SR}} = Z_R - Z_S = (-5 - i) - \left(-\frac{5}{2} + \frac{9}{2}i\right) = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}i$, on voit que $Z_{\overrightarrow{PQ}} = Z_{\overrightarrow{SR}}$.

Donc PQRS est un parallélogramme.

5.b) Calculons $\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q}$

$$\frac{Z_R - Z_Q}{Z_P - Z_Q} = \frac{(-5-i)-\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i\right)}{(3+2i)-\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i\right)} = \frac{-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i}{\frac{5}{2}+\frac{11}{2}i} = \frac{-\frac{11}{2}+\frac{5}{2}i}{-i\left(\frac{5}{2}i-\frac{11}{2}\right)} = i$$

5.c) Déduisons la nature précise du parallélogramme PQRS.

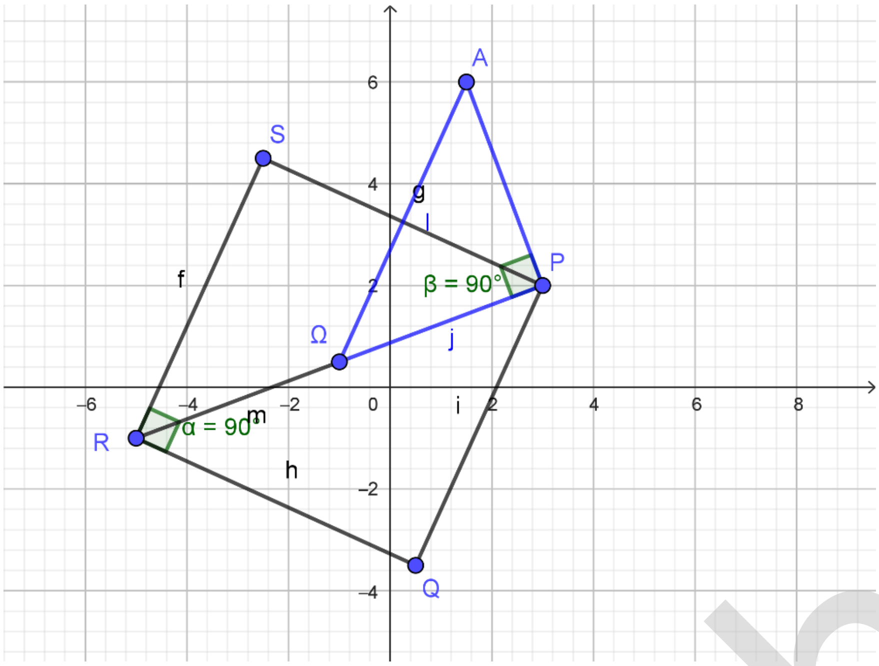
PQRS est un carré.

5.d) Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté Γ. On Calcule l'affixe Z_Ω de son centre Ω et son rayon ρ.

PQRS est un carre. Donc PQRS est inscriptible dans le cercle de centre Ω milieu du segment [PR] et de rayon $\rho = \frac{PR}{2}$

Ainsi $Z_\Omega = \frac{Z_P + Z_R}{2} = \frac{3+2i-5-i}{2} = \frac{-2+i}{2}$ et de rayon $\rho = \frac{PR}{2} = \frac{|-5-i-3-2i|}{2} = \frac{\sqrt{64+9}}{2} = \frac{\sqrt{73}}{2}$

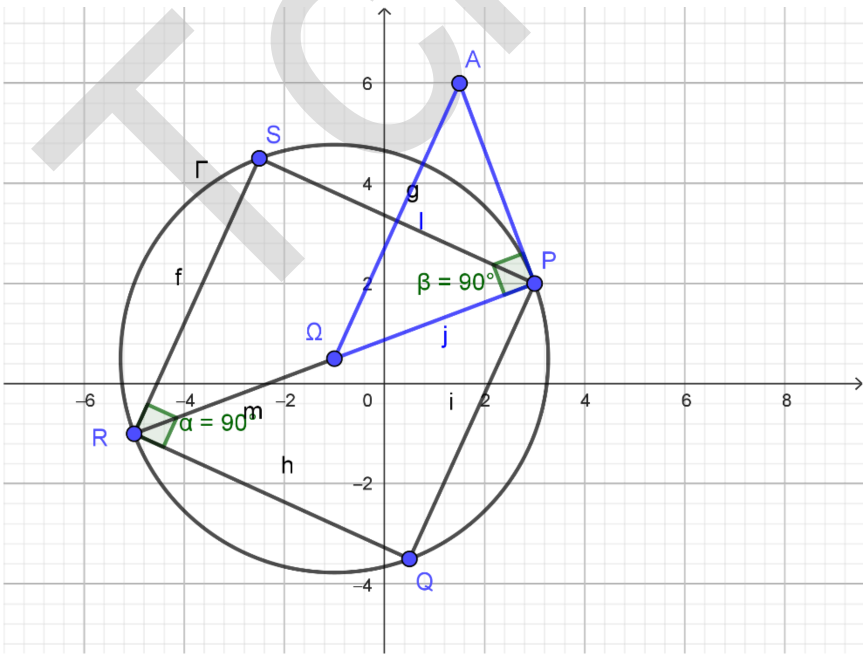
6.a) Déterminons la nature du triangle APΩ



En se basant sur le schéma, on peut conjecturer que le triangle $AP\Omega$ est isocèle rectangle en P. Démontrons que cela est vrai.

$\frac{z_\Omega - z_P}{z_A - z_P} = \frac{\left(\frac{-2+i}{2}\right)-(3+2i)}{\left(\frac{3}{2}+6i\right)-(3+2i)} = \frac{-4-\frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2}+4i} = \frac{i\left(-\frac{3}{2}+4i\right)}{-\frac{3}{2}+4i} = i$ donc $AP\Omega$ est isocèle rectangle en P.

6.b) Déduisons la position relative de la droite (AP) et du cercle Γ.



$d\big(\Omega,(AP)\big) = r$ donc la droite (AP) est tangent au cercle (Γ).

CALCULS VECTORIELS ET BARYCENTRES

Partie I : **BARYCENTRES**

Exercice 1 :

L'espace $\mathcal{E}$est muni du repère $(O, \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

On considère les points A$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du barycentre des points pondérés (A, -2), (B, 1) et (C, 4).

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :

- I et J les milieux respectifs des segments $[AD]\ et\ [BC]$;
- K et L les points tels que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ \ et\ \overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$;
- G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1), (C, 1) et (D, 2).

a) Démontrer que les points I, J et G sont alignés.
b) Démontrer que les points K, L et G sont alignés.
c) En déduire que les points I, J, K et L sont coplanaires.

Solution 1 :

L'espace $\mathcal{E}$est muni du repère $(O, \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

On considère les points A$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit G = bar $\{(A, -2); (B, 1); (C, 4)\}$. Déterminons les coordonnées de G

$$\begin{cases} x_G = \frac{-2x_A + x_B + 4x_C}{3} \\ y_G = \frac{-2y_A + y_B + 4y_C}{3} \\ z_G = \frac{-2z_A + z_B + 4z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-7}{3} \\ y_G = \frac{7}{3} \\ z_G = 0 \end{cases} \text{ donc G } \left(\frac{-7}{3};\ \frac{7}{3};\ 0\right)$$

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :

- I et J les milieux respectifs des segments $[AD]\ et\ [BC]$;
- K et L les points tels que : $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\ \ et\ \overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$;
- G le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, 1), (C, 1) et (D, 2).

a) Démontrons que I, J et G sont alignés.

I = bar $\{(A, 2); (D, 2)\}$, J = bar $\{(B, 1); (C, 1)\}$

G = bar $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1); (D, 2)\}$ = bar $\{(I, 4); (J, 1)\}$ d'où I, J et G sont alignés.

b) Démontrons que K, L et G sont alignes

K = bar $\{(A, 2); (B, 1)\}$, L = bar $\{(C, 1); (D, 2)\}$

G = bar $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1); (D, 2)\}$ = bar $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1); (D, 2)\}$ = bar $\{(K, 3); (L, 3)\}$

D'où K, L et G sont alignés.

c) Déduisons que I, J, K et L sont coplanaires.

$G = (IJ) \cap (KL)$ donc I, J, K et L sont coplanaires.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle. On désigne par :

- A' le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, -3) ;
- B' le barycentre des points pondérés (C, -3) et (A, 1).

a) Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont parallèles.

Soit C' le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Pour quelles valeurs des nombres réels a et b les droites (AA') et (CC') sont-elles parallèles ?

Solution 2 :

Soit ABC un triangle. On désigne par :

- A' le barycentre des points pondérés (B, 2) et (C, -3) ;
- B' le barycentre des points pondérés (C, -3) et (A, 1).

$-3+1+2=0$ donc (AA') et (BB') sont parallèles.

Soit C' le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b). Pour que (AA') et (CC') soient parallèles il suffit que $\begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases}$

Exercice 3:

Soit ABCD un quadrilatère.

1. Construis les points E, F, I, J, K et L tels que :

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BJ}=\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

2. Démontrer que les droites (EF), (IK) et (JL) sont concourantes.

Solution 3 :

Soit ABCD un quadrilatère

2) Démontrons que (EF), (IK) et (JL) sont concourantes.

E = bar $\{(A,1);(C,2)\}$; F = bar $\{(B,1);(D,2)\}$; I = bar $\{(A,2);(B,3))\}$

J = bar $\{(B,3);(C,4)\}$; K = bar $\{(C,2);(D,3)\}$; L = bar $\{(A,1);(D,3)\}$

Donc

E = bar $\{(A,1);(C,2)\}$ = bar $\{(A,2);(C,4)\}$; F = bar $\{(B,1);(D,2)\}$ =bar $\{(B,3);(D,6)\}$

K = bar $\{(C,2);(D,3)\}$ = bar $\{(C,4);(D,6)\}$; L = bar $\{(A,1);(D,3)\}$ =bar $\{(A,2);(D,6)\}$

Soit G = bar $\{(A,2);(B,3);(C,4);(D,6)\}$ = bar $\{(A,2);(C,4);(B,3);(D,6)\}$ = bar $\{(E,6);(F,9)\}$ donc G ∈ (EF)

G = bar $\{(A,2);(B,3);(C,4);(D,6)\}$ = bar $\{(A,2);(D,6);(B,3);(C,4)\}$ = bar $\{(L,8);(J,7)\}$ donc G ∈ (JL)

G = bar $\{(A,2);(B,3);(C,4);(D,6)\}$ = bar $\{(I,5);(K,10)\}$ donc G ∈ (IK) d'où (IK), (JL) et (EF) sont concourantes.

Exercice 4:
Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par :
I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB],[BC],[CD],[DA],[AC]$ et $[BD]$;
G_1, G_2, G_3 et G_4 Les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, ABD et ABC.
En utilisant les barycentres partiels, démontrer que les droites $(AG_1),(BG_2),(CG_3),(DG_4)(IK),(JL)$ et (MN) sont concourantes.

Solution 4 :
I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes $[AB],[BC],[CD],[DA],[AC]$ et $[BD]$;

G_1, G_2, G_3 et G_4 Les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, ABD et ABC.

I = bar {(A, 1) ; (B,1)}, J = bar {(B, 1) ; (C, 1)}, K = bar {(C,1) ; (D,1)}, L = bar {(D,1) ; (A,1)}, M = bar {(A,1) ; (C,1)}, N = bar {(B,1) ; (D,1)}.

G_1= bar {(B,1) ; (C,1) ; (D,1)}, G_2 = bar{(C,1) ; (D,1) ; (A,1)}, G_3= bar {(A,1) ; (B,1) ; (D,1)}

G_4 = bar{(A,1) ; (B,1) ; (C,1)}

Démontrons que (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Soit G = bar {(A,1) ; (B,1) ; (C,1) ; (D,1)} = bar {(I,2) ;(K,2)} donc G ∈ (IK)

G = bar {(A,1) ; (B,1) ; (C,1) ; (D,1)}= bar {(B,1) ; (C,1) ; (A,1) ;(D,1)}= bar{(J,2) ; (L,2)} d'où G ∈ (JL)

G = bar {(A,1) ; (B,1) ; (C,1) ; (D,1)} = bar {(M,2) ; (N,2)} d'où G ∈ (MN) donc (IK), (JL) et (MN) sont concourantes.

Partie 2: **LIGNES DE NIVEAU.**

Exercice 1:

Soit ABCD un carré.
1. Ecrire A comme barycentre des points B, C et D.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0.$$

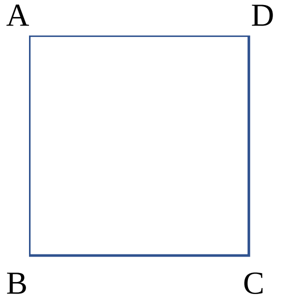
Soit ABCD un carré.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 2), (B, -1) et (C, 1).
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Soit ABC un triangle.
1. Construire le barycentre G des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 1).
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que :
$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

a) Vérifier que B appartient à (Γ).
b) Déterminer et construire (Γ).

Solution 1 :

ABCD est un carré.



1. Ecrivons A comme barycentre de B, C et D.

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ d'où A = bar $\{(B,1);(C,-1);(D,1)\}$

2. Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = 0$.

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MC}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC})$ = $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = 0$. Cet ensemble est le cercle de diamètre [AC].

ABCD est un carré.

1. G = bar {(A,2) ; (B, -1) ; (C,1)} $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2. Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG} \Rightarrow 2\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ donc l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{2}$

ABC est un triangle

1. G = bar {(A,1) ; (B, -1) ; (C, 1)} $\Rightarrow \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2.a) Vérifions que B ∈ (Γ)

$\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\|$ donc B ∈ (Γ)

2.b) Soit (Γ) l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

1-2+1 = 0 donc $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est indépendant du point M. Soit I le milieu de [AC]. Alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ d'où $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MB}\right) = 2\overrightarrow{BI}$

$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| \Leftrightarrow MG = 2BI$ donc (Γ) est le cercle de centre G et de rayon 2 BI.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que : AB =7 ; BC = 4 et AC = 5. On désigne par I le milieu du segment [BC].

1. En utilisant le théorème de la médiane, calculer AI.
2. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
   $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$.

3. On désigne par D le barycentre des points pondérés (A,-1), (B, 1) et (C, 1).
   a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?
   b) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan tels que :
      $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$.

Solution 2 :

Soit ABC un triangle tel que : AB =7 ; BC = 4 et AC = 5. On désigne par I le milieu du segment [BC].

1. Calculons AI.

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow AI^2 = \frac{2AB^2+2AC^2-BC^2}{4}$

$AI^2 = \frac{98+50-32}{4} = \frac{116}{4} = 29$ d'où $AI = \sqrt{29}$

2. Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58$

$2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MA^2 - 2MI^2 - \frac{BC^2}{2}$ donc $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 58 \Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = 29 + 4 = 33 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MI}\right) = 33 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{IA} = 33$ donc $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{IA} = \frac{33}{2}$.

Soit H le projeté orthogonale de M sur (AI). Alors, $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{HG}.\overrightarrow{IA} = \overline{HG} \times \overline{IA} = \frac{33}{2}$ donc

$\overline{HG} = \frac{33}{2\overline{IA}}$ donc (E) est la droite passant par H de vecteur normal $\overrightarrow{IA}$ tel que $\overline{HG} = \frac{33}{2\overline{IA}}$.

3. On désigne par D le barycentre des points pondérés (A,-1), (B, 1) et (C, 1).

a) Nature du quadrilatère ABDC

$D = bar\{(A,-1); (B,1); (C,1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc ABDC est un parallélogramme.

b) Déterminons l'ensemble (F) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25$

$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -MD^2 + DA^2 - DB^2 - DC^2$

$AD^2 = AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2DC^2 + 2DB^2 - BC^2$

$MA^2 - MB^2 - MC^2 = 25 \Leftrightarrow -MD^2 + DB^2 + DC^2 - BC^2 = 25$ donc

$MD = \sqrt{DB^2 + DC^2 - BC^2 + 25}$ donc (F) est le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{DB^2 + DC^2 - BC^2 + 25}$

Partie 3 : **PRODUIT VECTORIEL**

Exercice 1:

1) Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre gravité G. Calculer en fonction de a :

$$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|, \qquad \|\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{GC}\| \qquad et \qquad \|\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{BC}\|.$$

2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On pose $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$.
Calculer en fonction de $\vec{w}$:
a) $\vec{u}\wedge(2\vec{u}+\vec{v})$ b) $(3\vec{u}-\vec{v})\wedge\vec{v}$ c) $(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(2\vec{u}-\vec{v})$

2) Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$. Dans chacun des cas suivants, démontrer que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée et préciser si elle est directe ou indirecte.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

3) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, vérifier que les points A, B et C définissent un plan dont on déterminera une équation.
a) $A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ b) $A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}$

<u>Solution 1 :</u>

1) ABC un triangle équilatéral de côté a et de centre gravité G. Calculons en fonction de a.

$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\| = AB\times AC\times \sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, $\|\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{GC}\| = GB.GC\left|sin\left(\widehat{\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC}}\right)\right|$or

GB = GC = $\sqrt{\left(\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\right)^2}$ or $(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2 = 2BA^2+2BC^2-AC^2 = 3a^2$ donc

GB = GC = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ donc $\|\overrightarrow{GB}\wedge\overrightarrow{GC}\| = \frac{4}{3}a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2/$

$\|\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{BC}\| = AG\times BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2$

2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On pose $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$.

Calculons en fonction de w

a) $\vec{u}\wedge(2\vec{u}+\vec{v}) = 2(\vec{u}\wedge\vec{u})+(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{w}$;

b) $(3\vec{u}-\vec{v})\wedge\vec{v} = 3\vec{u}\wedge\vec{v}-\vec{v}\wedge\vec{v} = 3\vec{w}$

c) $(\vec{u}+2\vec{v})\wedge(2\vec{u}-\vec{v}) = 2\vec{u}\wedge\vec{u}-\vec{u}\wedge\vec{v}+4\vec{v}\wedge\vec{u}-2\vec{v}\wedge\vec{v} = -5\vec{u}\wedge\vec{v} = -5\vec{w}$

2) Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$. Dans chacun des cas suivants

Démontrons que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une base orthonormée et précisons si elle est directe ou indirecte.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$ et $\|\vec{w}\| = 1$

$\vec{u}.\vec{v} = 0$; $\quad \vec{u}.\vec{w} = 0, \quad \vec{v}.\vec{w} = 0$ et $\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = \vec{w}$ donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormé direct.

b) $\quad \vec{u}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\ \vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1, \vec{u}.\vec{v} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = 0, \quad \vec{u}.\vec{w} = -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0,$

$\vec{v}.\vec{w} = \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 0, \quad \vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{6}{9}\\-\frac{6}{9}\\-\frac{3}{9}\end{pmatrix} = -\vec{w}$ donc $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormé indirect.

3) L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

Dans chacun des cas, vérifions si A, B et C définissent un plan et déterminons son équation.

a) $\quad A\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc A, B et C définissent un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Ainsi L'équation de (ABC) est : $4x + 4y + 4z + d = 0$.

A $\in$ (ABC) $\Leftrightarrow d = -4$ ainsi (ABC) : $4x + 4y + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$

b) $\quad A\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix},\ C\begin{pmatrix}0\\5\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\-1\\2\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-7\\-19\\-27\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc A, B et C définissent un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Ainsi L'équation de (ABC) est : $-7x - 19y - 27z + d = 0$

A $\in$ (ABC) $\Leftrightarrow d = 52$ d'où (ABC) : $-7x - 19y - 27z + 52 = 0$

Exercice 2 :

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Dans chacun des cas suivants, déterminer un vecteur de la droite d'intersection des plans ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$').

a) $(\mathcal{P}) : 2x + y - z = 0 \quad et \quad (\mathcal{P}'): x - 3y + 2z + 4 = 0.$
b) $(\mathcal{P}) : x - y + z - 5 = 0 \quad et \quad (\mathcal{P}'): x + y - z + 7 = 0.$

Solution 2 :

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminons un vecteur de la droite d'intersection de ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$')

a) $(\mathcal{P}) : 2x + y - z = 0 \quad et \quad (\mathcal{P}'): x - 3y + 2z + 4 = 0.$

Notons $\vec{n}$ le vecteur normal de ($\mathcal{P}$) et $\overrightarrow{n'}$ le vecteur normal de ($\mathcal{P}$') alors $\vec{n}\wedge\overrightarrow{n'}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection.

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$, $\quad \vec{n}\wedge\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\-5\\-7\end{pmatrix}$

b) $(\mathcal{P}) : x - y + z - 5 = 0 \quad et \quad (\mathcal{P}'): x + y - z + 7 = 0.$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\quad \vec{n}\wedge\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$.

Exercice 3 :

A) Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathscr{E}$. On désigne par I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, -1) et par J le barycentre des points pondérés (B, 1), (C, 3).

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que : $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})\wedge(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

B) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit les points $A\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. Dans le plan (ABC), soit I le milieu de $[AC]$ et D l'image de B par s_I. Préciser la nature du quadrilatère ABCD et calculer son aire.

C) Soit A et B deux points de l'espace orienté $\mathscr{E}$ tels que : AB = 6.

Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = 24$.

(*On pourra utiliser l'interprétation géométrique de* $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\|$)

Solution 3 :

A) Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté $\mathcal{E}$

I = bar {(A, 2) ; (B, -1)}, J = bar {(B,1) ; (C, 3)}

Déterminons l'ensemble des points M tels que $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})\wedge(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0}$.

$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}, \quad \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MJ}$

$(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})\wedge(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MJ} = 0$ donc l'ensemble des points M est la droite [IJ].

B) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

$A\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\4\\3\end{pmatrix}$

1. Calculons l'aire du triangle ABC

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\-11\\14\end{pmatrix}$

$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{16+121+196}}{2} = \frac{\sqrt{333}}{2} U.A$

2. Nature du quadrilatère ABCD

I est milieu de [AC] et $s_I(B) = D \Leftrightarrow$ I est milieu de [BD] donc I est le milieu des diagonales du quadrilatère ABCD. Ainsi, ABCD est un parallélogramme.

Son aire $\mathcal{A}$'est le double de l'aire du triangle ABC. Ainsi $\mathcal{A}' = \sqrt{333}\ U.A$

C) Soit A et B deux points de l'espace orienté $\mathcal{E}$ tels que : AB = 6

Déterminons l'ensemble des points M tels que $\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = 24$

$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB}$. Soit H le projeté orthogonal de M sur (AB).

$\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MH + HA})\wedge\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HA}\wedge\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{HA}\wedge\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Ainsi $\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MH}\wedge\overrightarrow{AB}$

$\|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = MH.AB \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\| = 24 \Leftrightarrow MH = \frac{24}{AB} = 6$ or $MH = d(M,(AB)) = 4$

L'ensemble des points M tels que $d(M,(AB)) = 4$ est la réunion des droites distantes de AB de 4.

Exercice 4 :

Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ soit une base orthonormée directe de $\mathcal{W}$.
On désigne par I le milieu de [EF] et par J le centre du carré ADHE.

1. Vérifier que : $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$.
   En déduire l'aire du triangle IGA.
2. Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (IGA).

Exercice 5 :

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). Soient les points A (3 ;- 2 ; 2) ; B(6 ;1 ;5) ; C(6 ; -2 ;-1) ; D(0 ;4 ;-1).

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont trois points non alignés.
2. a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   b. Ecrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonal à la droite (AC) passant par A.
   c. Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.
3. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$.
   En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).
   b. Déterminer la valeur du volume V du tétraèdre ABCD

Solution 5 :

On considère l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Soient les points A (3 ;- 2 ; 2) ; B(6 ;1 ;5) ; C(6 ; -2 ;-1) ; D(0 ;4 ;-1).

1) Déterminons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduisons que A, B et C sont non alignés.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\9\\-9\end{pmatrix}$ donc A, B et C sont non alignés.

2.a) Montrons que ABC est rectangle en A.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 9 - 9 = 0$ donc ABC est un triangle rectangle en A.

2.b) Equation cartésienne de $(\mathcal{P}_1)$ orthogonal à (AC) passant par A.

$\overrightarrow{AC}$ est le vecteur normal de $(\mathcal{P}_1)$ donc $(\mathcal{P}_1)$: $3x - 3z + d = 0$

A $\in (\mathcal{P}_1) \Leftrightarrow d = -3$ donc $(\mathcal{P}_1)$:$x - z - 1 = 0$.

2.c) Vérifions que (P_2) : $x + y + z - 3 = 0$ est orthogonal à (AB) passant par A.

$\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur normal de (P_2) et $3 - 2 + 2 - 3 = 0$ d'où A $\in (P_2)$ donc (P_2) est orthogonal à (AB) passant par A.

3.a) Calculons $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = -9 + 18 - 9 = 0$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} = -9 + 9 = 0$

(AD) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ABC) donc (AD) est orthogonal à (ABC).

3.b) Déterminons le volume V de ABCD.

$V = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-9\\9\\-9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = 27 + 54 + 27 = 108$ donc

$V = \frac{108}{6} = 18\, u.v$

FONCTIONS LOGARITHMES

Exercice 1 : *Test de connaissances*

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1 et k le nombre de ses diviseurs premiers. Démontrer que $lnn \geq kln2$.

Solution 1 :

Soit $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrons que $lnn \geq kln2$.

Alors $\exists (d_1, \dots, d_k)$ un ensemble de k nombres premiers et $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $n = d_1^{\alpha_1}.d_2^{\alpha_2} \dots d_k^{\alpha_k}$. Or $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \alpha_i \geq 1 \; et \; d_i \geq 2$ donc

$n \geq \underbrace{2.2 \dots .2}_{k\,fois} \Leftrightarrow n \geq 2^k \Leftrightarrow \ln(n) \geq ln(2^k)$ car ln est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$

D'où $lnn \geq kln2$.

Exercice 2 : *Calcul des limites*

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

$a)\ f(x) = \frac{lnx-2}{2lnx+1}$ b) $f(x) = \ln(3x) - \ln(x+1)$

c) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ d) $f(x) = xln(1 + \frac{1}{x})$

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0 (éventuellement à gauche et à droite).

a) $f(x) = \frac{lnx-2}{lnx+1}$ b) $f(x) = lnx + ln^2x$

c) $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$ f) $f(x) = xln(1 + \frac{1}{x}$

g) $f(x) = \frac{\ln(1+3x)}{2x}$ h) $f(x) = x^2ln^3x$

Solution 2 : *Calcul des limites*

Dans chacun des cas suivants, calculons la limite de la fonction f en $+\infty$.

$a)\ f(x) = \frac{lnx-2}{2lnx+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx-2}{2lnx+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{2lnx+1} - \frac{2}{2lnx+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{lnx}} - \frac{2}{2lnx+1} = \frac{1}{2}$$

b) $f(x) = \ln(3x) - \ln(x+1)$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(3x) - \ln(x+1) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{3x}{x+1}\right) = \ln 3$$

c) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2lnx}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

d) $f(x) = xln(1 + \frac{1}{x})$

$$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad posons\ X = \frac{1}{x},\ quand\ x \to +\infty, X \to 0$$

On a dont : $\lim\limits_{X\to 0}\frac{ln(1+X)}{X}=1$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en 0 (éventuellement à gauche et à droite).

a) $f(x)=\frac{lnx-2}{lnx+1}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx-2}{lnx+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{lnx}{lnx+1}-\frac{2}{lnx+1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{\ln x}}-\frac{2}{lnx+1}=1$

b) $f(x)=lnx+ln^2x$

$\lim\limits_{x\to 0} lnx+ln^2x=\lim\limits_{x\to 0}(lnx)+(lnx)^2$

Posons $X=lnx,\ \ quand\ x\to 0,\ X\to-\infty$, on a dont :

$\lim\limits_{X\to-\infty} X+X^2=+\infty$? D'où $\lim\limits_{x\to 0} lnx+ln^2x=+\infty$

c) $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x}=1\times+\infty=+\infty$

d) $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$

Posons $X=x^2,\ \ quand\ x\to 0,\ X\to 0$, on a dont :

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim\limits_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$

e) $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\times x=1\times 0=0$

f) $f(x)=xln(1+\frac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to 0} xln(1+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$

$posons\ X=\frac{1}{x}, quand\ x\to 0,\ X\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} xln(1+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln(1+X)}{X}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnX+ln(1+\frac{1}{X})}{X}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnX}{X}+\frac{ln(1+\frac{1}{X})}{X}=0$

g) $f(x)=\frac{\ln(1+3x)}{2x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$

h) $f(x)=x^2ln^3x$

$\lim\limits_{x\to 0} x^2ln^3x=\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x^2}lnx\right)^3=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{2}{3}}lnx\right)^3=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}lnx^{\frac{2}{3}}\right)^3=0$

Exercice 3 : *Résolution des équations et inéquations*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations, inéquations et systèmes suivants :

a) $\ln|2x-5| - \ln|3x+2| = \ln|x+1|$.

b) $\ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$

c) $\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$

d) $ln\frac{1}{x} \geq lnx$.

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \\ lnx - lny = 2ln\frac{4}{3} \end{cases}$

Solution 3 :

Resolvons les équations, inéquations et systèmes.

a) $\ln|2x-5| - \ln|3x+2| = \ln|x+1|$.

Contraintes :

$$\begin{cases} |2x-5| > 0 \\ |3x+2| > 0 \\ |x+1| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \neq 0 \\ 3x+2 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \\ x \neq -\frac{2}{3} \\ x \neq -1 \end{cases}$$

$\ln|2x-5| - \ln|3x+2| = \ln|x+1| \Leftrightarrow ln\left|\frac{2x-5}{3x+2}\right| = ln|x+1|$

$\Leftrightarrow \left|\frac{2x-5}{3x+2}\right| = |x+1|$

$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{3x+2} = x+1$ (1) ou $\frac{2x-5}{3x+2} = -x-1$ (2)

(1) $\frac{2x-5}{3x+2} = x+1 \Leftrightarrow 2x-5 = (x+1)(3x+2)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 2x - 5$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 7 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \times 3 \times 7 < 0$ donc $S = \emptyset$

b) $\ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$

Contraintes .

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ -x-11 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -11 \\ x > -3 \end{cases} \text{ donc } S = \emptyset$$

c) $\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$

Contraintes.

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ x+4 > 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -4 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ donc } x \in \left]-\frac{2}{3}; 2\right[\ (1)$$

$\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2) \Leftrightarrow \ln(2-x)(x+4) > \ln(3x+2)$

$\Leftrightarrow (2-x)(x+4) - 3x - 2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 - 3x - 2 > 0$

$\Leftrightarrow -x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x+6)(x-1) < 0$

Donc $x \in]-6; 1[$ (2)

Ainsi l'ensemble solution est S = $]-\frac{2}{3}; 2[\cap]-6; 1[=]-\frac{2}{3}; 1[$

d) $ln\frac{1}{x} \geq lnx$

Contrainte : $x > 0$ (1)

$ln\frac{1}{x} \geq lnx \Leftrightarrow \frac{1}{x} > x \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in]-1; 1[$ (2)

Ainsi S = $]0; +\infty[\cap]-1; 1[=]0; 1[$

e) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \ (1) \\ lnx - lny = 2ln\frac{4}{3} \ (2) \end{cases}$

Contrainte : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$lnx - lny = 2ln\frac{4}{3} \Leftrightarrow ln\frac{x}{y} = ln\left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow y = \frac{9}{16}x$ (3)

Remplaçons (3) dans (1), on a $x^2 - \frac{81}{256}x^2 = 700$

$\Leftrightarrow 175x^2 = 179200 \Leftrightarrow x^2 = 1024$ donc $x = 32 \Rightarrow y = \frac{9}{16} \times 32 = 18$

$S = \{(32, 18)\}$

Exercice 4 : *Primitives*

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle K.

a) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$, $\quad K =]-\infty; -1[$

b) $f(x) = \frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$ $et\ K =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$

Soit la fonction f : $x \mapsto \frac{x^2-4x+2}{(x-3)^2}$

1. Déterminer trois nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que :
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, \qquad f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$.
2. En déduire la primitive F de f sur $]-\infty; 3[$, telle que : F(2) = 5

Solution 4

Dans chacun des cas suivants, déterminons les primitives de la fonction f sur l'intervalle K.

a) $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$, $\quad K =]-\infty; -1[$

$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ et $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c \quad c \in IR$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \ln(-x-1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \qquad c \in IR$

b) $f(x) = \frac{sinx+cosx}{sinx-cosx}$ $\qquad K =]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}[$

$F(x) = \ln |\sin x - \cos x| + c$

$F(x) = \ln(\sin x - \cos x) + c \quad c \in IR$

Soit la fonction f : $x \mapsto \frac{x^2-4x+2}{(x-3)^2}$

3. Déterminons trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}, \qquad f(x) = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2}$$

$$f(x) = a + \frac{b(x-3)^2 + c(x-3)}{(x-3)^3}$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + (b-6a)x + 9a - 3b + c}{(x-3)^3}$$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$ et $f(x) = 1 + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{(x-3)^2}$

4. En déduisons la primitive F de f sur $]-\infty; 3[$, telle que : F(2) = 5

$F(x) = x + 2\ln|x-3| + \frac{1}{x-3} + c \quad c \in IR$

$F(x) = x + 2\ln(3-x) + \frac{1}{x-3} + c \quad c \in IR$

F(2) = 5 implique $2 - 2\ln(3-2) + \frac{1}{2-3} + c = 5 \quad \rightarrow c = 4$

D'où $F(x) = x - 2\ln(3-x) + \frac{1}{x-3} + 4$

Synthèse :

Exercice 5:

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (lnx)^2, si\ x > 1 \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue et dérivable en 1.
   Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les branches infinies de la courbe représentative $(\mathcal{C})$de f.
   Etudier les variations de f.
   Démontrer que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$. Tracer $\mathcal{C}$)
2. Soit h la restriction de f à l'intervalle$]1; +\infty[$.
   Démontrer que h réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.
   En déduire que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera le sens de variation.
   Tracer la courbe représentative de h^{-1}.

Solution 5 :

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}, si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 - (lnx)^2, si\ x > 1 \end{cases}$$

1. Démontrons que f est continue et dérivable en 1.

- Continuité en 1

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x - 1 + \frac{1}{x} = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} 1 - (lnx)^2 = 1$

$f(1) = 1$, D'où f est continue en 1

- Limites aux bornes du domaine

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x - 1 + \frac{1}{x} = -\infty$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} 1 - (lnx)^2 = -\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} x - 1 + \frac{1}{x} = 1$

  $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} 1 - (lnx)^2 = 1$

- Branches infinies

  $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$

  $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to -\infty} -1 + \frac{1}{x} = -1$

  D'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x - 1$

  $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - \frac{(lnx)^2}{x} = 0$

  D'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche asymptotique parallèle à l'axe des abscisses.

- Variations de f

  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},\ \ si\ x \le 1$

  $\forall\ x \le 1, f'(x) \ge 0$ et f est croissante

  $f'(x) = 2\frac{lnx}{x},\ si\ x > 1$

  $\forall\ x > 1, f'(x) > 0\ \ et\ f\ est\ strictement\ croissante$

- Démontrons que le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

  $f''(x) = 2\frac{1}{x^2} - \frac{2lnx}{x^2}, si\ x > 1 \quad car\ e\ vérifie\ x > 1$

  $f''(x) = 0\ \ implique\ 2 - 2lnx = 0\ \ \to lnx = 1 \to x = e$

  D'où le point d'abscisse e est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

2. Soit h la restriction de f à l'intervalle$]1; +\infty[$.
   Démontrons que h réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

La fonction h est continue et strictement monotone sur $]1;\ +\infty[$, dont réalise une bijection de $]1;\ +\infty[$ vers h($]1;\ +\infty[$)=]1; -1[. Ainsi, h admet une bijection réciproque de]-1 ; 1[vers]1 ; +∞[de même sens de variation que h car la bijection réciproque conserve le sens de variation.

Traçons h^{-1}

Exercice 6 :

Le repère (O, i, J) est orthonormé.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln\ |x-1|.$$

a) Etudier f et dresser son tableau de variation.

b) Calculer f(0) ; en déduire le signe de f.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = xln|x-1|$.

a) Etudier g et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$.

b) Soit A le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OI), d'abscisse non nulle.

c) Démontrer que A est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$ et écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en A.

3. On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1; +\infty[$. Démontrer que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de h et de h^{-1}.

Solution 6 :

Le repère (O, I, J) est orthonormé.

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln\ |x-1|.$$

1.a) Etudions f et dressons son tableau de variation.

- Domaine de définition de f.

  $f(x)$ existe ssi $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ |x-1| > 0 \end{cases}$

  Ssi $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ donc $x \neq 1$

  $D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

- Dérivabilité et calcul de la dérivée.

  $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est continue et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ car fonction rationnelle.

  $x \mapsto\ \ln\ |x-1|$ est continue et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ car fonction logarithme.

  Donc f est continue et dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

  $f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{(x-1)^2}.$

- Sens de variation et tableau de variation.

  $\forall x \in]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[, (x-1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe du numérateur.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$		0	$+$	

- Ca

  $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln\ |x-1| = 1 + \infty = +\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \frac{x}{x-1} + \ln\ |x-1| = -\infty$;

  $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \frac{x}{x-1} + \ln\ |x-1| = +\infty - \infty$ $F.I$ Levons l'indétermination

$$\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{x}{x-1} + \ln\ |x-1| = \lim_{x\mapsto 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)\left[x + \underbrace{(x-1)\ln\,(x-1)}_{0}\right] = +\infty(1+0) = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1| = 1 + \infty = +\infty$$

$$f(2) = \frac{2}{2-1} + \ln(2-1) = 2 + 0 = 2$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

1.b) Calculons f (0) et déduisons le signe de f.

$f(0) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty; 0], f(x)\ \geq 0$; $\forall x \in]0,1[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]1, +\infty[, f(x) > 0$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = xln|x-1|$.

 2.a) Etudions g et traçons sa courbe représentative $(\mathcal{C})$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$

g est continue et derivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ comme produit de fonctions continues et derivables sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et on a :

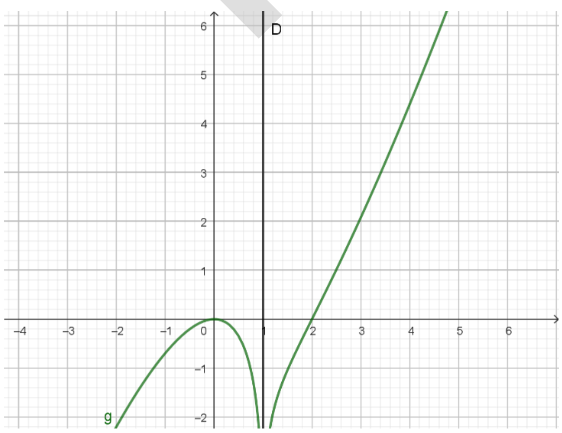
$g'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1} = f(x)$. Ce qui veut dire que le signe de $g'(x)$ est le signe de $f(x)$.

$\lim_{x\mapsto -\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto -\infty} xln|x-1| = -\infty \times +\infty = -\infty$; $\lim_{x\mapsto 1^{\pm}} xln|x-1| = 1 \times -\infty = -\infty$;

$\lim_{x\mapsto +\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} xln|x-1| = +\infty \times +\infty = +\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖	↗	$+\infty$

Traçons la courbe $(\mathcal{C})$ de g



2.b) Soit A le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et (OI), d'abscisse non nulle.

- Démontrons que A est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$

Notons $A(x_0, y_0)$, alors $x_0 \neq 0$ et $y_0 = g(x_0) = 0$. Montrons que $g''(x_0) = 0$

$g''(x) = f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$. $g''(2) = f'(2) = 0$ et $g(2) = 0$. Nous savons aussi $f'(x)$ change de signe 2. Donc $A(2,0)$ est un point d'inflexion de $(\mathcal{C})$.

- Equation de la tangente (T) a $(\mathcal{C})$ en A.

(T) : $y = g'(2)(x-2) + g(2)$ or $g'(2) = f(2) = 2$ donc

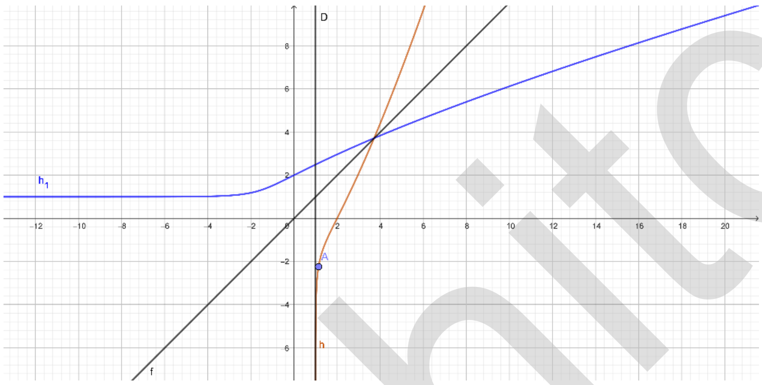
$(T): y = 2x - 4$

3. On désigne par h la restriction de g à l'intervalle $]1; +\infty[$.

- Démontrons que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

Sur $]1\,;+\infty[$, h est continue et strictement croissante. Donc h réalise une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

- Courbes de h et h^{-1}



Exercice 7 :

1. Soit la fonction $g: x \mapsto x^3 - x + 1 - 2lnx$.
   Etudier les variations de g et en déduire le signe de g(x)
2. Soit la fonction $f: x \mapsto x + 1 + \frac{x+lnx}{x^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.
   Etudier la fonction f et tracer $(\mathcal{C})$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Soit la fonction $h: x \mapsto x + lnx$.

Etudier la fonction h et en déduire que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point unique dont on déterminera l'abscisse αà 10^{-2} près

Solution 7 :

5. Soit la fonction $g: x \mapsto x^3 - x + 1 - 2lnx$.
   Étudions les variations de g et en déduisons le signe de g(x).
   La fonction g est définie sur $]0\,;+\infty[$
   $\forall\, x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x}$

$$g'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = 0$$
$$\rightarrow\; 3x^3 - x - 2 = 0$$

$\forall\, x\ \in]0\,;\,+\infty[,\ \ 3x^3 - x - 2 \geq 0$

D'où g est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

La fonction g est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ et l'équation g(x)=0 n'admet pas de solution sur $]0\,;\,+\infty[$, par conséquent g(x) est positif.

6. Soit la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \frac{x+lnx}{x^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

   Démontrons que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+lnx}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{lnx}{x^2} = 0$$

D'où la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $(\mathcal{C})$.

- Étude de la fonction g

  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + \frac{x+lnx}{x^2} = 0$

  $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x + 1 + \frac{x+lnx}{x^2} = -\infty$

  La fonction g est définie sur]0 ; +∞[

  $f'(x) = 1 + \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x+lnx)}{x^4} = 1 + \frac{1-x-2lnx}{x^3} = \frac{x^3-x+1-2lnx}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3} \geq 0\ \ car\ g(x) \geq$
  0

  La fonction g est croissante sur]0 ; +∞[.

7. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.
   La fonction f est continue et strictement monotone sur]0 ; +∞[, dont réalise une bijection de]0 ; +∞[vers]-∞ ; 0] et de plus 0 appartient à]-∞ ; 0] ,par conséquent l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice 1:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$e^{(x-4)(2x-1)} = 1$; $e^{|2x-1|} = 16$; $e^{\sqrt{2-x}} + e^{x^2-1} = 0$

$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$; $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0$; $3.5^x - 5^{1-x} - 2 = 0$

$2^{4x-5} + 2^{2x-1} = 6$; $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^2$; $2e^{2x} + 3e^{-x} = 3e^x + 2$

$e^x + \frac{m}{e^x} = 1,\ \ m \epsilon \mathbb{R}$

Solution 1 :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^{(x-4)(2x-1)} = 1 \Leftrightarrow e^{(x-4)(x-1)} = e^0$

$\Leftrightarrow (x-4)(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x - 4 = 0\ ou\ 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 4\ ou\ x = \frac{1}{2}$ donc $S = \left\{\frac{1}{2}; 4\right\}$

b) $e^{|2x-1|} = 16 \Leftrightarrow e^{|2x-1|} = e^{ln16}$

$\Leftrightarrow |2x-1| = ln16 \Leftrightarrow 2x - 1 = ln16\ ou\ 2x - 1 = -ln16$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+4ln2}{2}$ ou $x = \frac{1-4ln2}{2}$

c) $e^{\sqrt{2-x}} + e^{x^2-1} = 0$ impossible car $x \mapsto e^x$ est toujours strictement positive donc $x \mapsto e^{\sqrt{2-x}} + e^{x^2-1}$ qui est la somme de deux expressions strictement positives est strictement positive. Donc $S = \emptyset$

d) $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$

posons $X = e^x$ on a $X^2 - 8X + 15 = 0 \Rightarrow X = 3\ ou\ X = 5$;

Donc $x = ln3\ ou\ x = ln5$.

e) $e^{3x} - 6e^{2x} + 8e^x > 0 \Leftrightarrow e^x(e^{2x} - 6e^x + 8) > 0$

$e^x > 0 \Rightarrow e^x(e^{2x} - 6e^x + 8) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 8 > 0$;

Posons $X = e^x$ alors on a $X^2 - 6X + 8 > 0 \Leftrightarrow (X-2)(X-4) > 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 2)(e^x - 4) > 0$ donc $S =]-\infty; ln2[\cup]2ln2; +\infty[$;

f) $3.5^x - 5^{1-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3.5^{2x} - 5^1 - 2.5^x = 0$

$\Leftrightarrow 3.5^{2x} - 2.5^x - 5 = 0$

Posons $X = 5^x$ alors on a $3X^2 - 2X - 5 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-5) = 16 + 60 = 76$

Donc $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{19}$ ainsi $X = \frac{2-2\sqrt{19}}{6}$ ou $X = \frac{2+2\sqrt{19}}{2} \Leftrightarrow 5^x = \frac{2-2\sqrt{19}}{6} = ou\ 5^x = \frac{2+2\sqrt{19}}{2}$ or $\frac{2-2\sqrt{19}}{6} < 0$ donc $5^x = \frac{2-2\sqrt{19}}{6}$ est impossible. Ainsi $5^x = \frac{2+2\sqrt{19}}{2} \Leftrightarrow e^{xln5} = \frac{2+2\sqrt{19}}{2}$

Donc $xln5 = ln\left(\frac{2+2\sqrt{19}}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{ln\left(\frac{2+2\sqrt{19}}{2}\right)}{ln5}$

g) $2^{4x-5} + 2^{2x-1} = 6 \Leftrightarrow 2^{4x-2}2^{-3} + 2^{2x-1} - 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{2^{(2x-1)^2}}{8} + 2^{2x-1} - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2^{(2x-1)^2} + 8.2^{2x-1} - 48 = 0$

posons $X = 2^{2x-1}$

on a $X^2 + 8X - 48 = 0$

Δ = 64 – 4(1)(-48) = 64+192 = 256 donc $\sqrt{\Delta} = 16$

$X = \frac{-8-16}{2} = -12$ ou $X = \frac{-8+16}{2} = 4$

$\Leftrightarrow 2^{2x-1} = -12 \; ou \; 2^{2x-1} = 4$ or $2^{2x-1} = e^{(2x-1)ln2}$

Donc $e^{(2x-1)ln2} = 4$ d'où $(2x-1)ln2 = ln4$ or $ln4 = 2ln2 \Rightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

h) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}lnx} = e^{2ln\sqrt{x}} = e^{lnx}$

donc $\sqrt{x}lnx = lnx \Leftrightarrow lnx\left(\sqrt{x} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow lnx = 0 \; ou \; x = 1 \Rightarrow x = 1 \; S = \{1\}$.

i) $2e^{2x} + 3e^{-x} = 3e^x + 2 \Leftrightarrow 2e^{3x} - 3e^{2x} - 2e^x + 3 = 0$

posons X = e^x ; on a $2X^3 - 3X^2 - 2X + 3 = 0$

$X = 1$ est racine évidente donc $2X^3 - 3x^2 - 2X + 3$ est factorisable par $X - 1$.

Donc $2X^3 - 3x^2 - 2X + 3 = (X-1)(2X^2 - X - 3)$.

$2X^3 - 3x^2 - 2X + 3 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(2X^2 - X - 3).= 0 \Leftrightarrow X = 1 \; ou \; 2X^2 - X - 3 = 0$

Δ = 1 – 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25 $\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5$

Alors $X = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4} \; ou \; X = \frac{5}{4}$. Ainsi $x = ln1 \; ou \; x = ln\frac{5}{4} \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = ln\frac{5}{4}$. $S = \{0; ln5 - 2ln2\}$

j) $e^x + \frac{m}{e^x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - e^x + m = 0$

posons $X = e^x$, on a $X^2 - X + m = 0$

$\Delta = 1 - 4(1)(m)$ = $1 - 4m$

Si $m \in]-\infty; \frac{1}{4}[$, $\Delta > 0 \Rightarrow$ $X = \frac{1-\sqrt{1-4m}}{2} \, ou \; X = \frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$

Dans ce cas $e^x = \frac{1-\sqrt{1-4m}}{2} \; ou \; e^x = \frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$

Si $1 - \sqrt{1-4m} > 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 1 \Leftrightarrow m > 0$ alors l'équation a deux solutions réelles $x = ln\frac{1-\sqrt{1-4m}}{2}$ ou $x = ln\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$

Si $m < 0$ alors l'équation a une solution $x = ln\frac{1+\sqrt{1-4m}}{2}$

Si $m = \frac{1}{4}$, l'équation a une solution double $x = ln\frac{1}{2}$;

Si $m \in]\frac{1}{4}; +\infty[$, l'équation n'a aucune solution.

Exercice 2:

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} e^{2x} = 7e^{y+1} - 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2^{x+y} = 14 \\ 2^x + 2^y = \sqrt{18} \end{cases}$; $\qquad \begin{cases} 3x - 5y + 4 = 0 \\ 3^{5x+y}.3^{-x-5y} = 81 \end{cases}$

Solution 2 :

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$ posons $X = e^x$ et $Y = e^y$, on a : $\begin{cases} 2X - Y = 15 \\ X + 2Y = 40 \end{cases}$

Raisonnons par la méthode du déterminant.

$\Delta_S = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$; $\Delta_X = \begin{vmatrix} 15 & -1 \\ 40 & 2 \end{vmatrix} = 70$; $\Delta_Y = \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 1 & 40 \end{vmatrix} = 65$

$\Rightarrow X = \frac{\Delta_X}{\Delta_S} = \frac{70}{5} = 14$; $Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta_S} = \frac{65}{5} = 13$

$\Leftrightarrow e^x = 14$; $e^y = 13$

$\Leftrightarrow x = ln14$; $y = ln13$ donc $S = \{(ln14; ln13)\}$

b) $\begin{cases} e^{2x} = 7e^{y+1} - 10 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$x = y + 1 \Rightarrow e^{2x} - 7e^x + 10 = 0$ donc $X = e^x$ alors on a $X^2 - 7X + 10 = 0 \Leftrightarrow (X - 2)(X - 5) = 0$ donc $X = 2$ ou $X = 5$.

$\Leftrightarrow x = ln2$ ou $x = ln5$

$\Leftrightarrow y = ln2 - 1$ ou $y = -1 + ln5$ donc $S = \{(ln2\,; ln2 - 1)\,; (ln5\,; -1 + ln5)\}$

c) $\begin{cases} 2^{x+y} = 14 \\ 2^x + 2^y = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x 2^y = 14 \\ 2^x + 2^y = \sqrt{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} XY = 14 \\ X + Y = \sqrt{18} \end{cases}$ avec $X = 2^x$ et $Y = 2^y$

X et Y sont solutions de l'équation $x^2 - \sqrt{18}x + 14 = 0$. Résolvons cette équation.

$\Delta = 18 - 4(14) = -38 < 0$ donc $S = \emptyset$.

d) $\begin{cases} 3x - 5y + 4 = 0 \\ 3^{5x+y}3^{-x-5y} = 81 \end{cases}$

$3^{5x+y}3^{-x-5y} = 3^{5x-x+y-5y} = 3^{4x-4y}$

$3^{4x-4y} = 3^{4(x-y)} = 81$ or $81 = 3^4 \Rightarrow e^{4(x-y)ln3} = e^{4ln3} \Rightarrow 4(x-y)ln3 = 4ln3$

$\Rightarrow x - y = 1$. Donc

$\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ Résolvons par la méthode des combinaisons ce système.

$\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -4 \ (1) \\ -3x + 3y = -3 \ (2) \end{cases}$

(1) + (2) $\Rightarrow -2y = -7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$

$\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 5y = -4 \ (3) \\ -5x + 5y = -5 \ (4) \end{cases}$ (3) + (4) $\Rightarrow -2x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$

Donc $S = \left\{\left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)\right\}$

Exercice 3:

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble où f est dérivable et calculer sa dérivée.

1) $f(x) = \sqrt{e^x - 2}$ 2) $g(x) = \frac{e^{2x-1}}{x^2+1}$ 3) $h(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

4) $i(x) = ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$ 5) $j(x) = (x + \frac{1}{x})^x$ 6) $k(x) = 7^{\frac{x^2}{x+3}}$

Solution 3 :

Pour chacune des fonctions suivantes, précisons l'ensemble où f est dérivable et calculons sa dérivée.

1) $f(x) = \sqrt{e^x - 2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq ln2$. Donc $D_f = [ln2;\ +\infty[$

f est continue sur $[ln2;\ +\infty[$ et dérivable sur $]ln2;\ +\infty[$ et on a :

$f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-2}}$

2) $g(x) = \frac{e^{2x-1}}{x^2+1}$ $D_g = \mathbb{R}$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = \frac{2e^{2x-1}(x^2+1)-2xe^{2x-1}}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{2x-1}(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{2x-1}(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$.

3) $h(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$; $D_h = \mathbb{R}$

h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}e^{\frac{1}{x^2+1}}$

4) $i(x) = ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|$

$i(x)$ existe si et seulement si $\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| > 0$

Si et seulement si $\frac{e^x-1}{e^x+1} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 \neq 0 \\ e^x + 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \neq 0$. i est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $i'(x) = \frac{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'}{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)} = \frac{\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}}{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)} = \frac{\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$

5) $j(x) = (x+\frac{1}{x})^x = e^{xln(x+\frac{1}{x})}$. $j(x)$ existe si et seulement si $x + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$ donc $D_j =]0;\ +\infty[$

j est continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on a $j'(x) = \left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right) + \left(x+\frac{1}{x}\right)\right]e^{xln(x+\frac{1}{x})}$

$j'(x) = 2xe^{xln(x+\frac{1}{x})}$

6) $k(x) = 7^{\frac{x^2}{x+3}} = e^{\frac{x^2}{x+3}ln7}$; $D_k = \mathbb{R} - \{-3\}$

k est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ - {-3} comme composée de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ et on a $k'(x) = \frac{[2x(x+3)-x^2]}{(x+3)^2}ln7.e^{\frac{x^2}{x+3}ln7} = \frac{x^2+6x}{(x+3)^2}ln7.e^{\frac{x^2}{x+3}ln7}$

Exercice 4:

Calculer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle K :

a) $f(x) = e^{-x+1}$ K = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = sinx\ e^{cosx}$ K = $\mathbb{R}$

c) $f(x) = (1+tan^2x)e^{tanx}$ K = $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, -\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$, k ϵ $\mathbb{Z}$

d) $f(x) = \frac{1+e^x}{2x+e^{2x}}$ K = $\mathbb{R}\backslash$ $\{x\ \epsilon\ \mathbb{R}$ tel que $2x + e^{2x} \neq 0\}$

e) $f(x) = 2xe^{-3x^2+1}$ K = $\mathbb{R}$

f) $f(x) = 2^x$ K = $\mathbb{R}$

Solution 4 :

Calculons les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle K.

a) $f(x) = e^{-x+1} \Rightarrow F(x) = -e^{-x+1} + c$

b) $f(x) = sinxe^{cosx} \Rightarrow F(x) = -e^{cosx} + c$

c) $f(x) = (1 + tan^2 x)e^{tanx} \Rightarrow F(x) = e^{tanx} + c$

d) $f(x) = \frac{1+e^x}{2x+e^{2x}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}.ln\left(\frac{1}{2x+e^{2x}}\right) + c$

e) $f(x) = 2xe^{-3x^2+1} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x^2+1} + c$

f) $f(x) = 2^x = e^{xln2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{ln2}2^x + c$

Exercice 5:

Etudier les limites des fonctions suivantes, définies par f(x) aux points proposés. S'il ya lieu, préciser le comportement à gauche ou à droite.

a) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x-1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{sinx}-1}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{sinx}$

f) $\lim_{x\to -\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x-1}$

g) $\lim_{x\to 0} 2x + \frac{e^x}{e^x-1}$

h) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}e^{-x^2}$

i) $\lim_{x\to +\infty} 2^x - x^2$

j) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$

k) $\lim_{x\to +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}}$

l) $\lim_{x\to +\infty} \frac{xlnx}{(lnx)^x}$

Solution 5 :

Etudions les limites des fonctions suivantes :

a) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1} = \lim_{u\to 0} e(\frac{e^u-1}{u}) = e \times 1 = e$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}.\frac{e^x-1}{x} = 0 \times 1 = 0$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}.\frac{e^x}{x} = +\infty \times +\infty = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \times \frac{1}{x+1} = 1 \times 1 = 1$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{sinx}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} \times \frac{e^{sinx}-1}{sinx} = 1$ car $\begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{sinx}-1}{sinx} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1 \end{cases}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{sinx} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{x} \times \frac{x}{sinx} = \lim_{x\to 0} e^x.\frac{e^x-1}{x} \times \frac{x}{sinx} = 1 \times 1 \times 1 = 1$

f) $\lim_{x\to -\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x-1} = -\infty$

h) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}e^{-x^2} = 0$ (croissance comparée)

i) $\lim_{x\to +\infty} 2^x - x^2 = \lim_{x\to +\infty} e^{xln2} - e^{2lnx} = \lim_{x\to +\infty} e^{xln2}(1 - e^{2lnx-xln2}) = \lim_{x\to +\infty} e^{xln2}(1 - e^{x(2\frac{lnx}{x}-ln2)}) = +\infty \times -\infty = -\infty$

j) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+1}}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to -\infty} u\sqrt{1+\frac{1}{u}}e^u = \lim_{u\to -\infty} ue^u \times \sqrt{1+\frac{1}{u}} = 0 \times 1 = 0$

k) $\lim_{x\to +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} = +\infty - \infty \; F.I.$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - 1) = \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x}}(e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} - 1) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \times \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1)} \times \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} = +\infty \times 1 = +\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} = \lim_{u\to0} \frac{e^{u}-1}{u} = 0 \text{ en posant } = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

l) $\lim_{x\to+\infty} \frac{xlnx}{(lnx)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xlnx}{(lnx)^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xlnx}{e^{xlnx}} = \lim_{x\to+\infty} xlnxe^{-xlnx} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0$

Exercice 6:

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) : $z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$, où d est un nombre complexe donné de module 2.

1.a) Vérifier que 2i est une solution de l'équation (E).

1.b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan complexe P, on considère les points A, B, M et N d'affixes respectives $2i, -i, -i + d$ et $-i - d$;

a) Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].

b) En déduire que lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.

c) Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.

d) En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

Solution 6 :

(E) : $z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = 0$

1.a) Vérifions que 2i est solution de (E).

$(2i)^3 + (3 - d^2)(2i) + 2i(1 + d^2) = -8i + 6i - 2id^2 + 2i + 2id^2 = 0$ donc 2i est solution de (E).

b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

$z^3 + (3 - d^2)z + 2i(1 + d^2) = (z - 2i)(z^2 + 2iz - 1 - d^2)$

Résolvons $z^2 + 2iz - 1 - d^2 = 0$

Δ = -4 – 4(1)(-1-d²) = 4d² donc $\sqrt{\Delta} = 2|d| = 2 \times 2 = 4$

Ainsi $z_1 = \frac{-2i-2}{2} = -1 - i$ et $z_2 = 1 - i$ donc $S = \{-1 - i; 1 - i; 2i\}$

2) A(2i) ; B(-i) ; M(-i+d) ; N(-i-d).

a) Calculons MN et déterminons le milieu de [MN].

$MN = |z_N - z_M| = |-i - d + i - d| = |-2d| = 2|d| = 4$

Notons I le milieu de [MN], alors $z_I = \frac{z_M+z_N}{2} = \frac{-i+d-i-d}{2} = -i$

b) lorsque d varie dans $\mathbb{C}$, IM = IN = 2, donc M et N décrivent le cercle de centre I et de rayon 2.

c) Montrons que O est le centre de gravité du triangle AMN. Pour cela, il suffit de montrer l'affixe du centre de gravité de AMN est l'affixe de O.

$\frac{z_A+z_M+z_N}{2} = \frac{2i-i+d-i-d}{2} = 0 = z_O$ donc O est le centre de gravité de AMN.

d) Déduisons les valeurs de d pour lesquelles AMN est isocèle de sommet principal A.
AMN est isocèle de sommet principal de A si $|z_M - z_A| = |z_N - z_A|$
$\Leftrightarrow |-i + d - 2i| = |-i - d - 2i| \Leftrightarrow |-3i + d| = |-3i - d| \Leftrightarrow d^2 + 9 = d^2 + 9$ ce qui est toujours vrai quelque soit la valeur de d.

Exercice 7:

Soit la fonction $f: x \mapsto e^{\frac{x-1}{x^2}}$

a) Préciser le domaine de f. montrer que f admet une limite finie en 0. On notera g le prolongement par continuité de f.

b) Calculer les limites de f en +∞ et en -∞

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer sa fonction dérivée.
En déduire le sens de variation de f.

d) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ (En posant $u(x) = \frac{x-1}{x^2}, f(x) = \frac{u(x)}{x}.\frac{e^{u(x)}}{u(x)}$
montrer que g est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

e) Tracer soigneusement la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (prendre 3cm pour unité).

Solution 7 :

$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

a) $D_f = \mathbb{R}^*$

b) montrons que f admet une limite finie en 0.

$\lim_{x\to 0} e^{\frac{x-1}{x^2}} = 0$ car $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0.

b) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{x-1}{x^2}} = 1$

c) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto \frac{x-1}{x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car fonction rationnelle, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)' e^{\frac{x-1}{x^2}} = \frac{1(x^2)-2x(x-1)}{x^4} e^{\frac{x-1}{x^2}}$
$= \frac{-x^2+2x}{x^4} e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

Déduisons le sens de variation de f

- $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \; ou \; x = 2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	

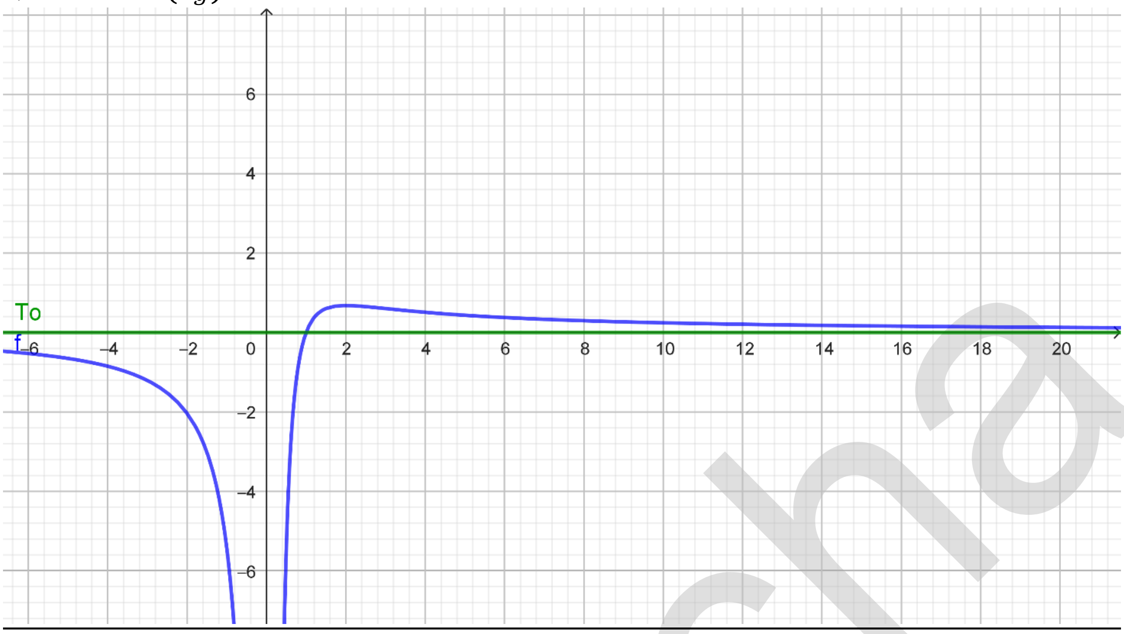
$\forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante ;
$\forall x \in [0; 2], f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

d) $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{x-1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}.e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \lim_{u\to -\infty} u.e^{u-u^2} = \lim_{u\to -\infty} u.e^{-u^2(1-\frac{1}{u})} = 0$

Montrons que g est dérivable en 0

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$ donc g est dérivable en 0. Ainsi la tangente en 0 à C_g est (T_0) : $y = 0$

e) Tracé de (C_g)



Exercice 8:

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1.a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente T_0 en 0.

c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$

2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

b) Soit g la bijection réciproque de f et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative. Montrer que pour tout x de I, $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

3. Construire dans le même graphique les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$. (On prendra 2cm comme unité sur les axes de coordonnées).

Solution 8 :

$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

1.a) Calculons $f'(x)$

$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

Dressons le tableau de variation

- Calcul des limites

  $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1} = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1} = 1$

- Sens de variation et tableau de variation

  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-1 \nearrow 1$

b) Signe de f'' et étudions la position relative de la courbe de f par rapport à la tangente (T_0).

$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2e^x(e^x+1)^2 - 4e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow \forall x \ \in]-\infty; 0[, f''(x) > 0$ donc f est convexe. Dans ce cas la courbe de f est au – dessus de toutes ses tangentes. En l'occurrence (T_0) ;

$\forall x \ \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$ donc f est concave. Dans ce cas la courbe de f est en dessous de toutes ses tangentes. En l'occurrence (T_0).

c) O est un point d'inflexion car la courbe de f traverse (T_0) en changeant de concavité.

2.a) d'après le T.V de f, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R} \rightarrow]-1 ; 1[$.

b) Soit g la bijection réciproque de f. montrons que $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Soit $y \ \in]-1 ; 1[$.,

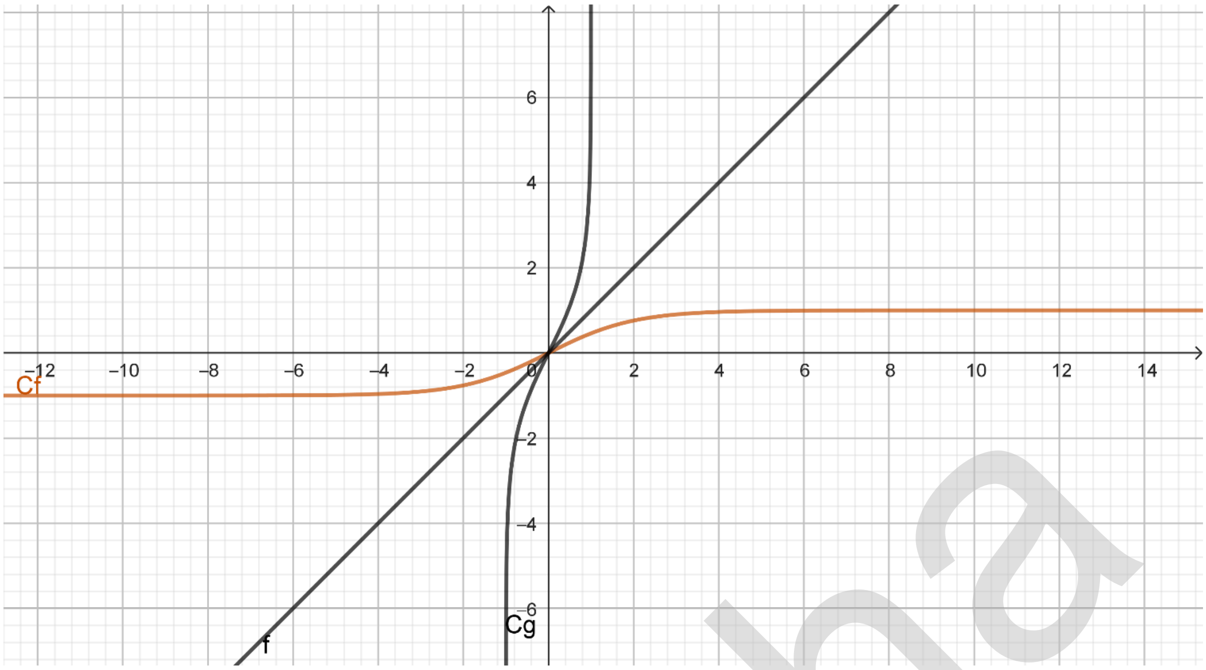
$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow y(e^x + 1) = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x(y - 1) = -y - 1$

$\Rightarrow e^x = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$; $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = g(y)$ donc $g(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$

Comme la variable est muette, alors $g(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

3. les courbes (C_f) et (C_g) sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Tracé de (C_f) et (C_g).



Exercice 9:

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit (D) la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan $(\mathcal{P})$ ont pour affixes respectives z et 1 – i.

1) Exprimer en fonction de z, la distance de M à la droite $(\mathcal{D})$.

2) On suppose $z + \bar{z} - 4 \neq 0$. pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'affixe z est solution de l'équation (E_m) suivante :$|z - 1 + i| - m|\bar{z} + z - 4| = 0$.

   a) Déterminer suivant les valeurs de m la nature de (Γ_m).
   b) Pour m = 1, donner les éléments caractéristiques de (Γ_1).

Solution 9 :

Le plan est muni du repère orthonormé.

(D) est la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F ont pour affixes z et 1-i.

1) Exprimons $d\big(M,(D)\big)$

$d\big(M,(D)\big) = \frac{|x-2|}{1} = |x - 2| = \frac{|z+\bar{z}-4|}{2}$

2) On suppose $z + \bar{z} - 4 \neq 0$, on note $(\Gamma_m) = \{M(z) \in \mathcal{P} / \ |z - 1 + i| - m|\bar{z} + z - 4| = 0\}$

a) Nature de (Γ_m)

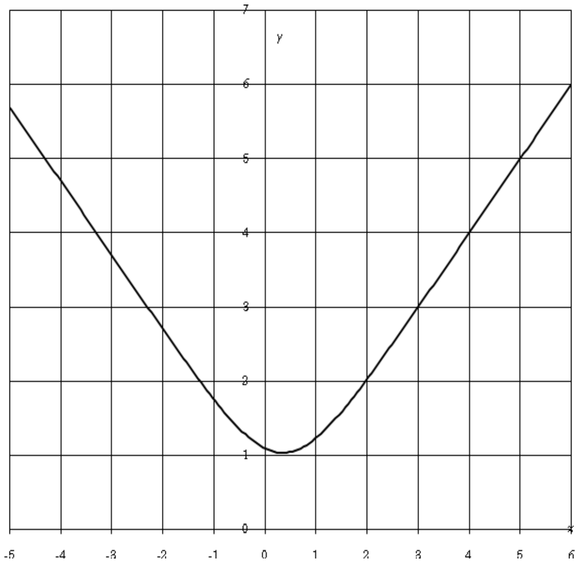
on a $|z - 1 + i| - m|\bar{z} + z - 4| = 0 \Leftrightarrow |z - 1 + i| = m|\bar{z} + z - 4|$

$\Leftrightarrow |z - z_F| - m|\bar{z} + z - 4| \Leftrightarrow FM = 2m.d(M,(D))$

Problème 1:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci – dessous.



Partie A : *Etude de la fonction f.*

1. Montrer que, pour tout réel, $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

Etudier la position relative de (C) et (D).

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D') d'équation $y = -x + ln2$ est asymptote à (C).

4. Etudier les variations de la fonction f. Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2} ln2$.

5. Tracer les droites (D) et (D') sur la figure.

Solution Problème 1 :

$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$

Partie A :

1. Montrons que $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = ln(e^x(1 + 2e^{-2x})) = lne^x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = +\infty$

Montrons que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x + \ln(2 + e^{2x}) = +\infty$

Montrons que la droite (D’) d’équation $y = -x + ln2$ est asymptote à (C).

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-x + ln2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x + \ln(2 + e^{2x}) - (-x + ln2) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(2\left(1 + \frac{e^{2x}}{2}\right)\right) - ln2 = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \frac{e^{2x}}{2}\right) = 0$ donc la droite (D’) d’équation $y = -x + ln2$ est asymptote à (C).

4. Etudions les variations de f.

$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x = ln2 \Leftrightarrow x = \frac{ln2}{2}$

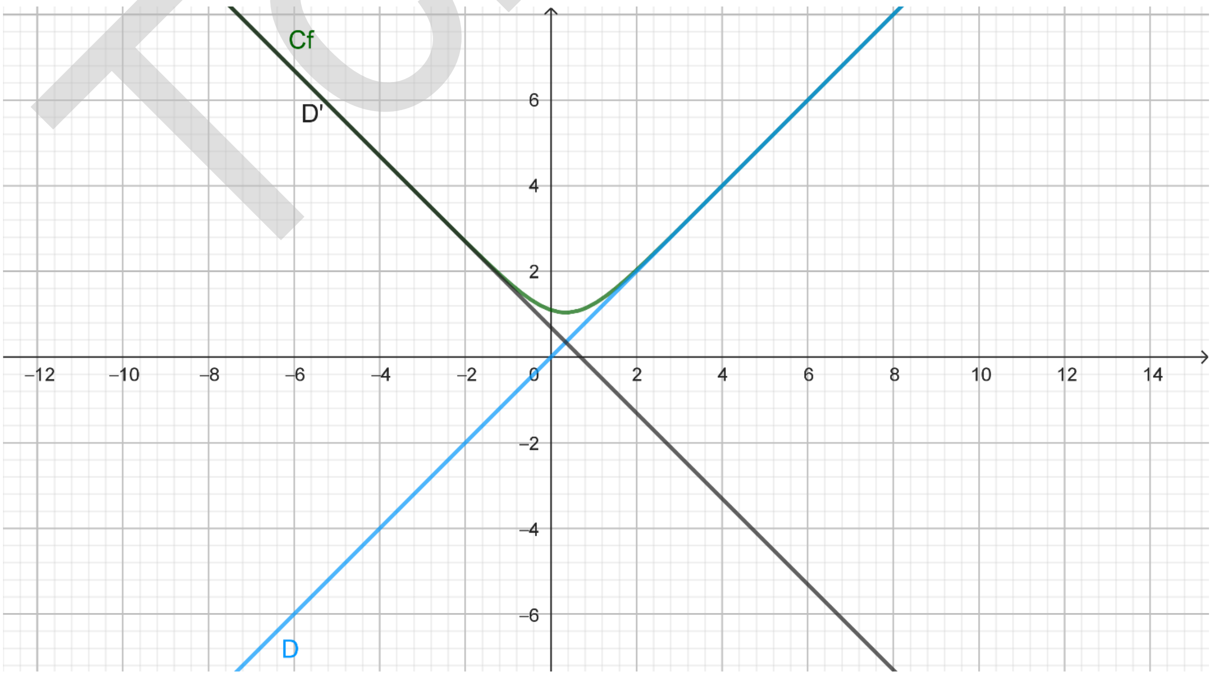
Sens de variations et tableau de variation.

$f\left(\frac{ln2}{2}\right) = \ln\left(e^{ln\sqrt{2}} + 2e^{-ln\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) = ln4 - ln\sqrt{2} = 2ln2 - \frac{1}{2}ln2 = \frac{3}{2}ln2.$

x	$-\infty$		$\frac{ln2}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}ln2$	$\nearrow$	$+\infty$

Donc $\frac{3}{2}ln2$ est le minimum de f .

5. Tracé des droites (D) et (D’).



Problème 2 :

Partie A :

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x + \frac{2lnx}{x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) (unité graphique : 1cm).

1. Etude de la fonction auxiliaire g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx$.
   a. Etudier le sens de variation de g et calculer g(1).
   b. En déduire le signe de g(x) pour tout x de]0 ; +∞[.
2. a. Calculer les limites de f en 0 et en +∞.
   b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ.
   d. Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente parallèle à Δ.
   e. Tracer (C), Δ dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B :

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0.

On désigne par h la fonction définie sur]0 ; +∞[par $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.
2. On note I l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$. Montrer que, pour tout x appartenant à I, h(x) appartient aussi à I.
3. a. Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h.
   b. Etudier les variations de h' sur I.
   c. En déduire que, pour tout x de I, on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.
4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de ℕ.
   a. Montrer par récurrence que, pour tout n de ℕ : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$
   b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de ℕ , $|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$
   c. En déduire que, pour tout n de ℕ : $|u_n - x_0| \leq e^{-\frac{n}{2}}$
5. a. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$.

b. Montrer que $|u_{n_0} - x_0| \leq 2.10^{-2}$. Que représente u_{n_0}relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 2.10^{-2} près par défaut.

Solution Problème 2 :

Partie A :

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = x + \frac{2lnx}{x}$.

1. Etude de la fonction auxiliaire g définie sur]0 ; +∞[par $g(x) = x^2 + 2 - 2lnx$.

   a) Etudions le sens de variation de g.

   - Dérivée : $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x}$
   - Signe de la dérivée : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ ou\ x = -1$ or $-1 \notin]0\,;\ +\infty[$
   - Sens de variation :$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$; $\forall x \in]1;\ +\infty[, g'(x) > 0$.

   Calculons g(1) : $g(1) = 3$

   b) Signe de g

   Pour cela, il faut déterminer le T.V de g.

   - Calcul des limites aux bornes du domaine :

     $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
   - T.V. de g

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

D'après le T.V. de g on constate que $g(x) > 0, \forall x \in]0;\ +\infty[$.

2.a. Calculons les limites de f en 0 et en $+\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x + \frac{2lnx}{x} = -\infty$; $\lim_{x \to} x + \frac{2lnx}{x} = +\infty$.

b) Etudions les variations de f et dressons son T.V

- Dérivée :

f est continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$ comme somme de deux fonctions continues et dérivables sur $]0;\ +\infty[$ et on a :

$f'^{(x)} = 1 + 2\left(\frac{1-lnx}{x^2}\right) = \frac{x^2+2-2lnx}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

- Signe de la dérivée : le signe de f' dépend du signe de g. Donc, comme g >0 alors f' > 0.
- Sens de variation : f est strictement croissante sur $]0;\ +\infty[$.
- T.V de f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

c. Montrons que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudions la position de (C) par rapport à Δ.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\frac{lnx}{x} = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

Posons $h(x) = f(x) - x \Leftrightarrow h(x) = 2\frac{lnx}{x}$

On a $h(1) = 0$

x	0 1 $+\infty$
$h(x)$	$-$ 0 $+$

$\forall x \in]0; 1[, h(x) < 0$ donc $f(x) < x \Rightarrow$ (C) est en dessous de Δ ;
$\forall x \in]1; +\infty[, h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > x$ donc (C) est au – dessus de Δ.

d. Déterminons les coordonnées de A (x_A, y_A) de (C) sachant que (C) admet en A une tangente parallèle à Δ.

(C) admet en A une tangente parallèle à $\Delta \Leftrightarrow f'(x_A) = 1$.

Or $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ donc $f'(x_A) = 1 \Leftrightarrow \frac{g(x_A)}{{x_A}^2} = 1 \Leftrightarrow g(x_A) = {x_A}^2 \Leftrightarrow 2 - 2lnx_A = 0 \Leftrightarrow x_A = e$.

$y_A = f(x_A) = e + \frac{2}{e}$ donc A(e, $e + \frac{2}{e}$).

e. Tracé de (C), Δ.

3. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty < 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0 \end{cases}$ alors, d'après le T.V.I $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - ln2 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ donc $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

<u>Partie B :</u>

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0.

$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

1. Montrons que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

On sait que $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 + 2\frac{lnx_0}{x_0} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 2lnx_0 = 0 \Leftrightarrow lnx_0 = -\frac{{x_0}^2}{2}$ donc $x_0 = e^{-\frac{{x_0}^2}{2}}$.

Alors x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2. I $=[\frac{1}{2}; 1]$. Montrons que $\forall x \in I, h(x) \in I$.

Soit $x \in I, \frac{1}{2} < x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} < \frac{x^2}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{x^2}{2} < -\frac{1}{8} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} < h(x) < e^{-\frac{1}{8}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}} < h(x) < e^{-\frac{1}{8}} < 1$ donc $h(x) \in I$.

3.a) calculons $h'(x) et\ h''(x)$

$h'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -x.h(x) \Rightarrow h''(x) = -h(x) - xh'(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = -e^{-\frac{x^2}{2}}(1 - x^2)$

b) Etudions les variations de h' sur I.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Calcul des limites

$h'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{8}}$; $h'(1) = e^{-\frac{1}{2}}$

x	$\frac{1}{2}$	1
$h''(x)$	-	
$h'(x)$	$e^{-\frac{1}{8}}$ ↘	$e^{-\frac{1}{2}}$

Donc $\forall x \in I, e^{-\frac{1}{2}} < h'(x) < e^{-\frac{1}{8}} \Rightarrow \forall x \in I, |h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

a. Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1\}$.

- Montrons que P est vrai au 1er rang.
  $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2} \leq 1 \leq 1$ donc $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$. D'où P est vrai au 1er rang.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n. Montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$
  On a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$. Cela veut dire $u_n \in I$. Or d'après la question 2 $h(u_n) \in I$ i.e. $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$ d'où P est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrons que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$

h est continue et dérivable sur I, $x_0 \in$ I et $\forall x \in I, |h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

alors, en appliquant l'I.A.F. sur $[u_n, x_0]$ on a $|h(u_n) - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0| \Leftrightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0|$

c. Déduisons que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leq e^{-\frac{n}{2}}$

Raisonnons par récurrence

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq e^{-\frac{n}{2}}\}$

- Montrons que P est vraie pour $n = 0$

$u_0 = 1$ et $\frac{1}{2} < x_0 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x_0 < \frac{1}{2}$ et $e^{-\frac{0}{2}} = 1$ donc $|u_0 - x_0| \leq e^{-\frac{0}{2}}$

D'où P est vraie pour n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang n+1 i.e. montrons que $|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{n+1}{2}}$

On a $|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}|u_n - x_0| \Leftrightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{n}{2}}\right) \Leftrightarrow |u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{n+1}{2}}$.

5.a Déterminons le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$.

$\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2} \Rightarrow e^{-\frac{n}{2}} < 2.10^{-2} \Leftrightarrow -\frac{n}{2} < \ln(2.10^{-2}) \Leftrightarrow n > 2\ln(2.10^{-2})$. Prendre $n_0 = E(2\ln(2.10^{-2})) + 1$.

b. Montrons que $|u_{n_0} - x_0| \leq 10^{-2}$

d'après la question 4.c, $|u_{n_0} - x_0| \leq e^{-\frac{n_0}{2}}$ or d'après la question précédente, $e^{-\frac{n_0}{2}} < 2.10^{-2}$, il s'en suit donc que $|u_{n_0} - x_0| \leq 2.10^{-2}$

u_{n_0} représente une valeur approchée de x_0 à 2.10^{-2} près.

CALCULS INTEGRALS

Exercice 1:

1ère partie : *Techniques de calcul d'intégrales*

a) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$ b) $\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x}}dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2x\,dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxsin2xdx$

e) $\int_2^{-1} |1-x|^3dx$ f) $\int_0^1 (2x+1)\sqrt{2x+1}\,dx$ g) $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3} \frac{1}{xlnx}dx$

2e partie: *Intégrations par parties*

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)cosxdx$ b) $\int_0^2 (2x+1)e^{2x}\,dx$ c) $\int_1^{e^2}\sqrt{x}lnxdx$

d) $\int_2^3 ln\frac{x^2-1}{x^2}dx$ e) $\int_{-1}^0 (x+1)^2e^{-x}dx$ f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos3xe^{2x}dx$

3e partie : *Changement de variable.*

a) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ b) $\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}dx$ c) $\int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^2}dx$

Solution 1:

1ère partie: *Techniques de calcul d'intégrales*

a) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{3}{2}[-\frac{1}{x^2+1}]_0^1 = -\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

b) $\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{9-x}}dx = -\int_{-2}^1 \frac{9-x+9}{\sqrt{9-x}}dx = -\int_{-2}^1 \sqrt{9-x} + \frac{9}{\sqrt{9-x}}dx = -\int_{-2}^1 \sqrt{9-x}\,dx +$
$9\int_{-2}^1 \frac{-1}{\sqrt{9-x}}dx$
$= [\frac{2(9-x)\sqrt{9-x}}{3}]_{-2}^1 + 18[\sqrt{9-x}]_{-2}^1 = \left[\frac{16\sqrt{8}+22\sqrt{11}}{2}\right] + 18(\sqrt{8}+\sqrt{11})$

c) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tan^2x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+tan^2x-1)dx = [tanx - x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = [\left(1-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-1+\frac{\pi}{4}\right)] = 2-\frac{\pi}{2}$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sinxsin2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sin3x}{2} + \frac{sinx}{2}dx = \left[-\frac{cos3x}{6} - \frac{cosx}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[-\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right) + (\frac{1}{6}+\frac{1}{2})\right] = \frac{1}{3}$

e) $\int_2^{-1}|1-x|^3dx = -\int_{-1}^2|1-x|^3dx = -(\int_{-1}^1|1-x|^3dx + \int_1^2|1-x|^3dx) = -\int_{-1}^1(1-x)^3dx$ - $\int_1^2(-1+x)^3dx =$
$[\frac{(1-x)^4}{4}]_{-1}^1 - [\frac{(x-1)^4}{4}]_1^2 = -4 - \frac{1}{4} = -\frac{17}{4}$

f) $\int_0^1(2x+1)\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2(2x+1)^2\sqrt{2x+1}}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5}(3\sqrt{3}-1)$

g) $\int_{\frac{1}{e}}^{e^3}\frac{1}{xlnx}dx = [\ln\,|lnx|]_{\frac{1}{e}}^{e^2} = ln2$

2e partie: *Intégrations par parties*

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)cosxdx$

posons $u = 2x+1$ et $v = cosx \Rightarrow u' = 2$ et $v = sinx$ donc

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2x+1)cosxdx = [(2x+1)sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2sinxdx = \pi + 1 + 2[cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 1.$

b) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}lnxdx$

posons $u = lnx \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ et $v' = \sqrt{x} \Rightarrow v = -2\sqrt{x}$

c) $\int_1^{e^2} \sqrt{x}lnxdx = \left[-2\sqrt{x}lnx\right]_1^{e^2} + 2\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = -4e - 4\left[\sqrt{x}\right]_1^{e^2} = -4e - 4e + 4 = -8e +$
1

d) $\int_2^3 ln\frac{x^2-1}{x^2}dx = \int_2^3 \ln(1 - \frac{1}{x^2})dx$

posons $u' = 1 \Rightarrow u = x$ et $v = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow v' = \frac{\frac{2}{x^3}}{(1-\frac{1}{x^2})^2} = \frac{2}{x^3} \times \frac{x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

$\int_2^3 \ln(1 - \frac{1}{x^2})dx = \left[xln(1 - \frac{1}{x^2})\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{(x^2-1)^2}dx$

Or $\int_2^3 \frac{2x^2}{(x^2-1)^2}dx = \int_2^3 \frac{2(x^2-1)+2}{(x^2-1)^2}dx = \int_2^3 2 + \frac{2}{(x^2-1)^2}dx = [2x]_2^3 + \int_2^3 2(\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2})\,dx$

$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$ déterminons a, b c et d.

En multipliant les deux membres par $(x-1)^2$ et en remplaçant x par 1 on a: $b = \frac{1}{4}$

En multipliant les deux membres par $(x+1)^2$ et en remplaçant x par -1. On a $d = \frac{1}{4}$

En multipliant les deux membres par x et en faisant tendre vers l'infinif,on a: $a + c = 0 \Rightarrow c = -a$

En remplaçant x dans les deux membres par 0, on a: $-a + b + c + d = 1 \Rightarrow 2c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{4}$ et $a = -\frac{1}{4}$

Donc $I = \int_2^3 2(\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2})\,dx = 2\int_2^3 \frac{-\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{1}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}dx = 2\left[-\frac{1}{4}\ln|x - 1| - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4(x+1)}\right]_2^3 = \frac{1}{4}(-ln2 - \frac{1}{2} + ln4 - \frac{1}{4} + ln1 - 1 + ln3 - \frac{1}{3})$

Alors $\int_2^3 \ln(1 - \frac{1}{x^2})dx = \left[xln(1 - \frac{1}{x^2})\right]_2^3 - [2x]_2^3 + \frac{1}{4}(-ln2 - \frac{1}{2} + ln4 - \frac{1}{4} + ln1 - 1 + ln3 - \frac{1}{3})$

f) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos3xe^{2x}dx$

posons $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos3xe^{2x}dx$; $u = cos3x \Rightarrow u' = -3sin3x$

$v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$I = \left[\frac{1}{2}cos3x.e^{2x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x.e^{2x}dx$ posons $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x.e^{2x}dx$

Posons $u = sin3x \Rightarrow u' = 3cos3x$ et $v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$J = \left[\frac{1}{2}sin3x.e^{2x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2}I = \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{-4} - \frac{3}{2}I$ donc $I = \left[\frac{1}{2}cos3x.e^{2x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\left(\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{-4} - \frac{3}{2}I\right) \Rightarrow$
$\frac{13}{4}I = \frac{3}{2}\left(\frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{-4}\right) \Rightarrow I = -\frac{3}{13}(e^{\pi} + e^{-\pi})$

3e partie: *Changement de variable*

a) $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ posons $u = x+1 \Rightarrow x = u-1$ quand $x = 0$, u =1; quand x= 1, u =2; $du = dx$

$\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx = \int_1^2 (u-1)\sqrt{u}du = \int_1^2 (u\sqrt{u} - \sqrt{u})du = \left[\frac{2}{5}u^2\sqrt{u} - \frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_1^2 = \frac{2}{5}.\left(4\sqrt{2} - 1\right) - \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

b) $\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}dx$ posons $u = 1-x \Rightarrow x = 1-u$ quand $x = -8$, $u = 9$; quand $x = -3$, $u = 4$; $dx = -du$

$\int_{-8}^{-3} x\sqrt{1-x}dx = \int_9^4 (1-u)\sqrt{u}(-du) = \int_4^9 \left(\sqrt{u} - u\sqrt{u}\right)du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - \frac{2}{5}u^2\sqrt{u}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left(9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}\right) - \frac{2}{5}\left(243 - 4\sqrt{4}\right) = \frac{38}{3} - 94$

c) $\int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^2}dx$. Posons $u = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{u+4}{3}$. Quand $x = \frac{5}{3}, u = 1$; quand $x = 2, u = 2$; $dx = \frac{1}{3}du$

$\int_{\frac{5}{3}}^2 \frac{x^2}{(3x-4)^2}dx = \int_1^2 \frac{\frac{u^2+8u+16}{9}}{u^2}.\frac{1}{3}du = \frac{1}{27}\int_1^2 \left(1 + \frac{8}{u} + \frac{16}{u^2}\right)du = \frac{1}{27}\left[u + 8\ln|u| - \frac{16}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{27}(9 + 8ln2)$.

Exercice 2: **QCM**

Q1 : Soit f la fonction définie par $\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$.

a. f est définie sur]-1 ; 1[
b. f est croissante sur]-1 ; 1[
c. f(0) = 1.
d. f est une fonction paire.
e. En écrivant que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})$, on obtient $f(x) = \ln(\sqrt{1-x^2})$

Q2 : *Répondre par vrai ou faux*

On rappelle que 2 < e < 3. Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x+1)e^{2x}$

Pour α réel, on pose $I(\alpha) = \int_\alpha^{-1} f(x)dx$

a. Pour tout réel α, on a : I(α) = $-\frac{1}{4\alpha^2} - \frac{2\alpha+1}{4}e^{2\alpha}$
b. $\lim_{\alpha \to -\infty} I(\alpha) = +\infty$

Q3 : Répondre par vrai ou faux.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2tdt = \frac{1}{2}$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2tdt = \frac{1}{2}$

c) $\int_1^e lntdt = 1$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sint}{cos^2t}dt = 1$

e) $\int_0^1 te^t dt = 1$

Solution 2: **QCM**

Q1: Soit la fonction f définie par: $\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$

$t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est continue sur]-1; 1[donc intégrable. De plus ∀ t ∈]-1; 1[, $\frac{1}{1-t^2} > 0$ alors $f: x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$ qui est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-t^2}$ est croissante sur]-1; 1[. $f(0) =$

$\int_0^0 \frac{1}{1-t^2} dt = 0 \neq 1$ et $f(-x) = -f(x)$. De plus $\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{2}(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})dt = \frac{1}{2}\int_0^x (\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t})dt = \frac{1}{2}[-\ln|1-t| + \ln\ |1+t|]_0^x = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
Donc a et b sont vraies, le reste est faux.

Q2: $f(x) = (x+1)e^{2x}$. Pour α réel, on pose $I(\alpha) = \int_\alpha^{-1} f(x)dx$
$I(\alpha) = \int_\alpha^{-1} f(x)dx$. Par intégration par parties, posons $u = x+1\ et\ v' = e^{2x}$ alors $u' = 1\ et\ v = \frac{1}{2}e^{2x}$
$I(\alpha) = \left[(x+1).\frac{1}{2}e^{2x}\right]_\alpha^{-1} - \frac{1}{4}[e^{2x}]_\alpha^{-1} = -\frac{\alpha+1}{2}e^{2\alpha} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-2\alpha}$
$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = +\infty$
Donc a. est faux et b est vraie.

Q3: Répondre par vrai ou faux.
a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2t\ dt = \left[\frac{sin2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$ donc a est vrai.
b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2t\ dt = \left[-\frac{cos2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$ donc b est vrai.
c) $\int_1^e lnt\ dt = [tlnt - t]_1^e = 1$ donc c est vrai.
d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sint}{cos^2t}\ dt = \left[-\frac{1}{cost}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -1$ donc d est faux.
e) $\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - [e^t]_0^1 = e - e + 1 = 1$ donc e est vrai.

Exercice 3:

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle]1 ;+∞[par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

a. Déterminer les réels a, b, c tels que l'on ait, pour tout x > 1 : $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle]1 ; +∞[.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle]1 ;+∞[par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle]1 ; +∞[.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer I = $\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnxdx$. On donnera le résultat sous la forme $pln2 + qln3$ avec p et q rationnels.

Solution 3:

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle]1 ;+∞[par $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$

a. Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout x > 1 : $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x-1)}$

après calcul; $a = -1$; $b = \frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{2}$.

b. Une primitive G de g sur]1 ;+∞[est $G(x) = -\ln|x| + \frac{1}{2}(\ln|x+1| + \ln\ |x-1|)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle]1 ;+∞[par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Une primitive F de f sur]1 ;+∞[est $F(x) = -\frac{1}{x^2-1}$.

3. I $= \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} lnxdx$. Par intégration par parties, posons $u' = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$ et $v = lnx$ alors $u = -\frac{1}{x^2-1}$ $et\ v' = \frac{1}{x}$

I $= \left[-\frac{lnx}{x^2-1}\right]_2^3 + \int_2^3 \frac{1}{x(x^2-1)} dx = \left[-\frac{lnx}{x^2-1}\right]_2^3 + \left[-\ln|x| + \frac{1}{2}(\ln|x+1| + \ln\ |x-1|).\right]_2^3 =$
$\left(\frac{1}{3}+1\right) ln2 + \left(-\frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{2}\right) ln3 = \frac{4}{3} ln2 - \frac{13}{8} ln3.$

Exercice 4:

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$.
2. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$
3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{cos^3x}{1-2sinx} dx$

Solution 4 :

1 Déterminons les réels a, b et c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$.
$\frac{u^2-1}{2u-1} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2u-1)}$

2. Calculons $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$

$\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4(2x-1)}\right) \mathrm{dx} = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} - \frac{3}{8}\ln\ |2x-1|\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} ln3 =$
$\frac{3}{8} ln3$

3. Calculons $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{cos^3x}{1-2sinx} dx$

$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{cos^3x}{1-2sinx} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{cosx.(1-sin^2x)}{1-2sinx} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} cosx(\frac{1}{2}sinx + \frac{1}{4} + \frac{3}{4(1-2sinx)})dx$
$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{1}{2} sinxcosx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{1}{4} cosx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{3cosx}{4(1-2sinx)} dx = \left[\frac{sin^2x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \left[\frac{sinx}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} + \left[-\frac{3}{8}\ln\ |1-2sinx|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8} ln2 = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} ln2$

Exercice 5:

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

Partie A : *Calcul d'une primitive*

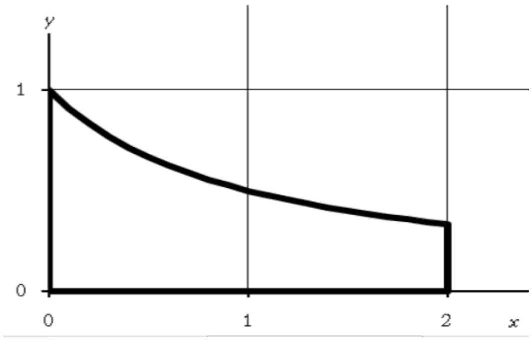
On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ;2] par $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0,2]$, $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$
2. En déduire une primitive de g sur [0 ;2].

Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène.

On note f la fonction définie sur [0,2] par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points M(x,y) du plan dont les coordonnées vérifient les relations :$0 \le x \le 2$ et $0 \le y \le f(x)$. (voir schéma ci – dessous).



1. Soit S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculer S.
2. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées (X, Y) de G sont données par les formules suivantes : $X = \frac{1}{2}\int_0^2 xf(x)dx$ et $Y = \frac{1}{2S}\int_0^2 [f(x)]^2 dx$
   a. Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième près.
   b. Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.

<u>Solution 5:</u>

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$)

<u>Partie A</u> : *Calcul d'une primitive*

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ;2] par $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0,2]$, $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$

$g(x) = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ donc $a = 1$ et $b = -1$

2. Déduisons une primitive de g sur [0 ;2].

$G(x) = x - \ln\ |x+1|$

<u>Partie B</u> : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène.

On note f la fonction définie sur [0,2] par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

1. S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Calculons S.

S = $\int_0^2 f(x)dx$ = $[\ln\ |x+1|]_0^2$ = $ln3$.

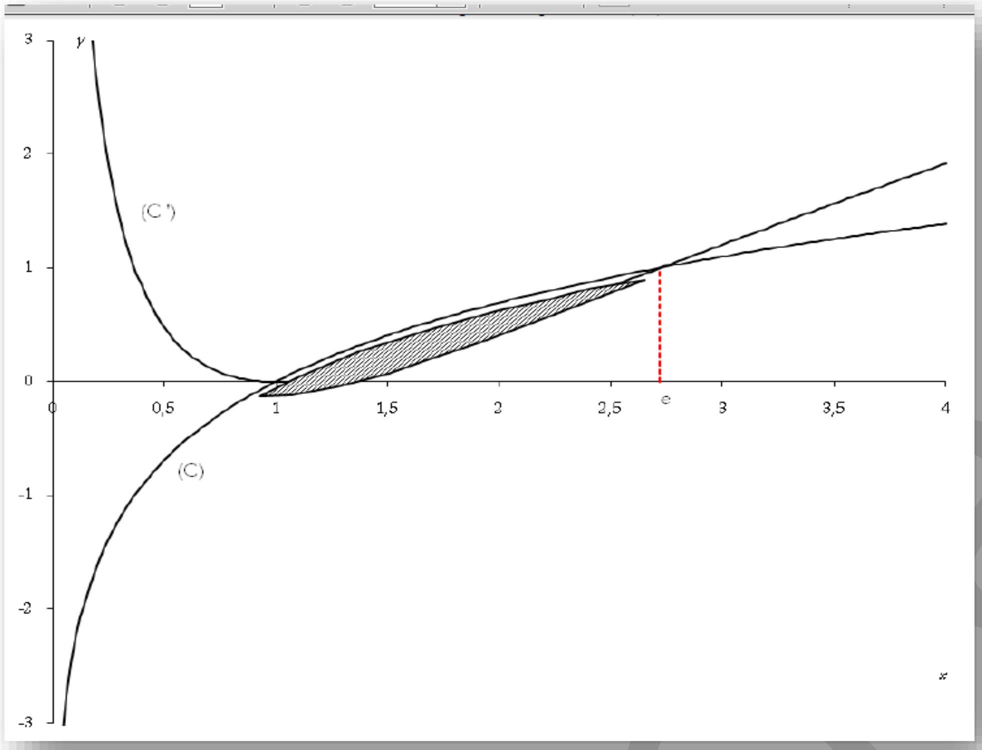
2. a. Calculons $X = \frac{1}{2}\int_0^2 xf(x)dx$

$X = \frac{1}{2}\int_0^2 g(x)\, dx = \frac{1}{2}[x - \ln\ |x+1|]_0^2 = \frac{1}{2}(2 - ln3)$;

b. $Y = \frac{1}{2S}\int_0^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2S}\left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^2 = \frac{1}{2ln3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3ln3}$.

<u>Exercice 6:</u>

Les courbes (C) et (C') sont données ci – dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), les fonctions f et g définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = lnx$ et $g(x) = (lnx)^2$.



1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée. On note I $= \int_1^e lnxdx$ et J = $\int_1^e (lnx)^2 dx$.

   a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $F(x) = xlnx - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I.

   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que J = e – 2I.

   c. En déduire J.

   d. Donner la valeur de A.

Pour x appartenant à [1, e], on note M le point de la courbe (C) d'abscisse x et N le point de la courbe (C') de même abscisse.

Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? calculer la valeur maximale de MN.

Solution 6:

$f(x) = lnx$ et $g(x) = (lnx)^2$

a. Vérifions que la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $F(x) = xlnx - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

$F'(x) = lnx + 1 - 1 = lnx$ donc $F'(x) = lnx.$

Déduisons I

I = $\int_1^e lnxdx = [xlnx - x]_1^e = 1$

b. Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que J = e – 2I.

J = $\int_1^e (lnx)^2 dx$ Posons $u = (lnx)^2 \Rightarrow u' = \frac{2lnx}{x}$ et $v' = 1 \Rightarrow v = x$

J = $[x(lnx)^2]_1^e - \int_1^e 2lnx\ \ dx = e - 2I.$

c. déduisons J

J = e -2.

d. donnons la valeur de A.

$A = I - J = 1 - e + 2 = 3 - e$.

e. déterminons x pour que la distance MN est maximale.

$M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, N\begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}\ MN = \sqrt{(x-x)^2 + \big(f(x) - g(x)\big)^2} = |f(x) - g(x)| = |lnx - ln^2x| = h(x)$

MN est maximale en a si $h'(a) = 0$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-2lnx}{x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$

La valeur maximale de MN est $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

PROBABILITES

Exercice 1 :

Soient A et B deux évènements tels que p(A) = $\frac{1}{5}$ et p(A∪B) = $\frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer p(B).
2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer p(B).
3. Calculer p(B) en supposant que l'évènement A ne peut être réalisé que si l'évènement B est réalisé.

Solution 1:

Soient A et B deux évènements tels que p(A) = $\frac{1}{5}$ et p(A∪B) = $\frac{1}{2}$.

1. Supposons que A et B soient incompatibles. Calculer p(B).

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, A et B incompatibles $\Leftrightarrow p(A \cap B) = 0$ donc $p(A \cap B) = p(A \cup B) - p(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

2. Supposons que A et B soient indépendants. Calculer p(B).

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) \Rightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{3}{10} \times \frac{5}{1} = \frac{3}{2}$

Exercice 2 :

On lance deux fois un dé pipé tel que p(1) = p(3) = p(4) = $\frac{1}{2}$ et p(2) = p(6) = $\frac{1}{4}$. Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus soit supérieure à 10(strictement) sachant que :

1. un des résultats est 6.
2. le premier résultat est 6.

Solution 2:

On lance deux fois un dé pipé tel que p(1) = p(3) = p(4) = $\frac{1}{6}$ et p(2) = p(5) = p(6) = $\frac{1}{3}$.

1. $P_1 = p(5) \times p(6) + p(6) \times p(5) + p(6) \times p(6)$ donc $P_1 = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$
2. $P_2 = p(6) \times p(5) + p(6) \times p(6) = \frac{2}{9}$

Exercice 3 :

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules dans la boîte et on suppose que les tirages sont équiprobables.

Calculer la probabilité d'obtenir :

a. Deux boules de la même couleur.
b. Deux boules de couleurs différentes.

Solution 3:

Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules vertes et 7 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules dans la boîte et on suppose que les tirages sont équiprobables.

a. Soit P_1 la probabilité d'obtenir deux boules de même couleur.

$P_1 = \frac{C_4^2 \times C_3^2 \times C_7^2}{C_{14}^2}$

b. Soit P_2 la probabilité d'obtenir deux boules de couleur différente :

$P_2 = \frac{C_4^1 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_7^1 + C_3^1 \times C_7^1}{C_{14}^2}$

Exercice 4 :

Une enquête effectuée auprès de1500 personnes adultes (habitants d'une ville) portant sur les jeux d'argent indique que :

- 1182 jouent à la loterie (A).
- 310 vont au casino (B)
- 190 jouent autant à la loterie qu'au casino.

a. Si une personne adulte (de la ville) est choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle joue à la loterie ou au casino ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle joue uniquement au casino ?

Solution 4:

$N = 1500; N_A = 1182; N_B = 310; N_{A\cap B} = 190$

a. calculons p(A∪B)

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{N_A + N_B - N_{A\cap B}}{N} = \frac{1182+310-190}{1500} = \frac{1302}{1500}$

b. calculons p(B\(A∩B))

$P(B\backslash(A\cap B)) = p(B) - p(A\cap B) = \frac{N_B - N_{A\cap B}}{N} = \frac{310-190}{1500} = \frac{120}{1500} = \frac{6}{75}$

Exercice 5 :

deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- Pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10% n'ont pas survécu, 75% deviennent rouges et les 15% restant deviennent gris.
- Pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5% n'ont pas survécu, 65% deviennent rouges et les 30% restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60% au premier éleveur, 40% au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est – à – dire à l'âge de deux mois.

   a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

   b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

   c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du 1er élevage ?

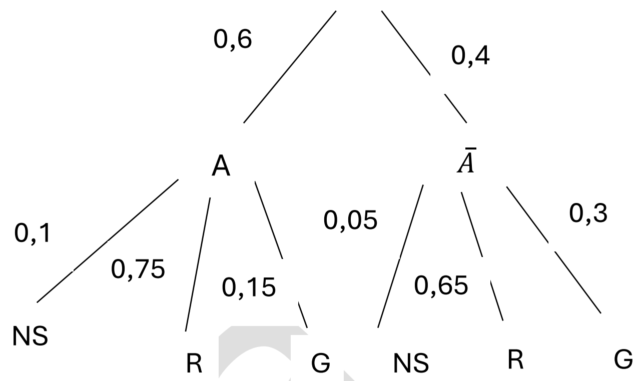
2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? on donnera une valeur approchée à 10^{-2}près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1euro si le poisson est rouge, 0,25 euro si le poisson est gris et 0,1 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centième.

Solution 5:

A: Alevin du premier élevage; $\bar{A}$: Alevin du deuxième élevage.
NS: Non survécu; R: rouge; G: gris



$p(A) = 0{,}6; p(\bar{A}) = 0{,}4;$

a. $P(\overline{NS}) = 1 - p(NS)$

$p(NS) = p(NS \cap A) + p(NS \cap \bar{A})$

$= 0{,}6 \times 0{,}1 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}06 + 0{,}02 = 0{,}08$

$p(\overline{NS}) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

b. calculons p(R)

$p(R) = p(R \cap A) + p(R \cap \bar{A})$

$p(R) = 0{,}75 \times 0{,}6 + 0{,}65 \times 0{,}4$

$= 0{,}45 + 0{,}26 = 0{,}71$

c. $P(A/G) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)}$

or $p(A \cap G) = 0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09$

$p(G) = p(G \cap A) + p(G \cap \bar{A})$

$= 0{,}6 \times 0{,}15 + 0{,}4 \times 0{,}3$

$= 0{,}09 + 0{,}12 = 0{,}21$

Donc $p(A/G) = \frac{0{,}09}{0{,}21} = 0{,}43$

2. $P = C_5^2 p(NS)^2(1 - p(NS))^3 = 10 \times 0{,}08^2 \times 0{,}92^3 = 0{,}05$

3. déterminons la loi de probabilité de X.

X	1	0,25	0,1
P(X=k)	P(R)	P(G)	P(NS)

Calculons E(X)

$E(X) = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + x_3.p(x_3) = 1 \times 0{,}08 + 0{,}25 \times 0{,}71 + 0{,}1 \times 0{,}21 = 0{,}28$

Exercice 6 :

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A :

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement : « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que p(R) =0,15.
2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est – elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B :

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est – à – dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs 2x, x – 2 et - 4.

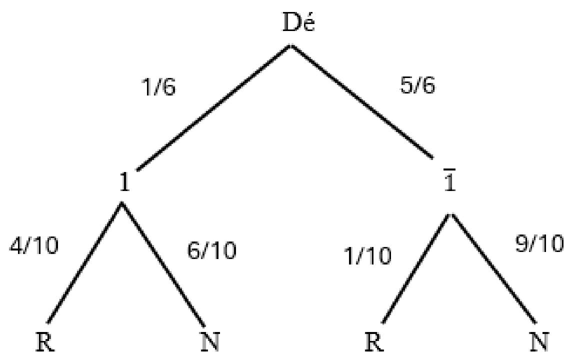
1. Déterminer la loi de probabilité de G.
2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a – t – on E(G) > 0 ?

Solution 6 :

A$\{4R, 6N\}$, B$\{1R, 9N\}$

Partie A :

1. Montrons que P(R)=0,15.
   P(R)= $\frac{1}{6} \times \frac{C_4^1}{C_{10}^1} + \frac{5}{6} \times \frac{C_1^1}{C_{10}^1} = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = 0{,}15$
2. Déterminons si P(A/R) ≥ P(B/R)



P(A/R) = $\frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{4}{10}}{0{,}15}$; P(B/R) = $\frac{\frac{5}{6}\times\frac{9}{10}}{0{,}15}$ A partir de ceci, on voit bien P(B/R) ≥ P(A/R)

Partie B :

1. Déterminons la loi de probabilité de G.

G est une loi binomiale de paramètre n = 2 et $p = P(R)$. Son univers image est associe au gain en euros.

P(2x) = $C_2^2 \times p^2 \times (1-p)^0 = 0{,}15^2 = 0{,}0225$

P(x-2) = $C_2^1 \times p^1 \times (1-p)^1 = 2 \times 0{,}15 \times 0{,}85 = 0{,}255$

P(-4) = $C_2^0 \times p^0 \times (1-p)^2$ = $0{,}85^2 = 0{,}7225$

2. Exprimons l'espérance E(G) en fonction de x.
   $E(G) = \sum x.P(x)$ = $2x \times 0{,}0225 + (x-2) \times 0{,}255 - 4 \times 0{,}7225$
   E(G) = $0{,}3x - 3{,}34$

3. Valeurs de x pour que E(G) > 0.

$E(G) > 0 \Rightarrow 0{,}3x - 3{,}34 > 0 \Rightarrow x > 11{,}13.$

Exercice 7 :

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne.

On note A_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire ».
On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire ».
On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».
Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$; $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

Solution 7 :

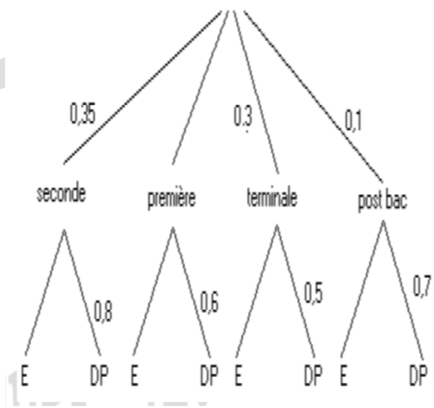
4 boules rouges et 2 boules noires
Montrer que $p(A_0) = \frac{6}{15}$; $p(A_1) = \frac{8}{15}$; en déduire $p(A_2)$.

$p(A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{6}{15}$; $\quad p(A_1) = \frac{C_4^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$; $p(A_2) = 1 - p(A_1) - p(A_0) \Rightarrow p(A_2) = \frac{1}{15}$

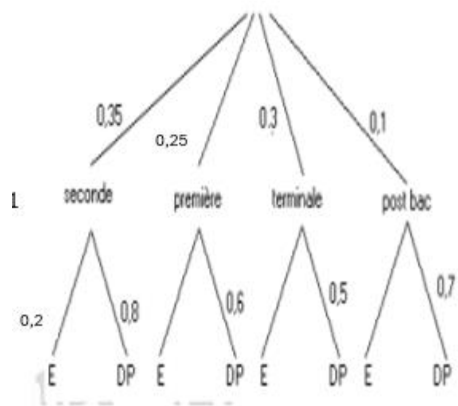
Exercice 8 :

Dans un lycée, quel que soit le niveau, un élève peut – être externe ou demi – pensionnaire.
L'arbre ci – contre indique la répartition selon le niveau et la qualité de l'élève (E : externe ; DP : demi-pensionnaire).

1) Recopier et compléter cet arbre.
2) a) Déterminer le pourcentage d'élèves dans ce lycée.
   b) Déterminer la part des Terminales parmi les externes.



Solution 8 :



2.a) Déterminons le pourcentage d'élèves dans ce lycée.

% post bac = 10% donc % élèves = $(100 - 10)$% = 90%

2.b) Déterminons la part des Terminales parmi les externes.

$P(Tle/E) = \frac{P(Tle \cap E)}{P(E)}$ or

$$\begin{cases} P(E) = 0{,}2 \times 0{,}35 + 0{,}25 \times 0{,}4 + 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}35 \\ P(Tle \cap E) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15 \end{cases}$$

Donc P(Tle/E) = $\frac{0{,}15}{0{,}35}$ = 0,49 = 49%.

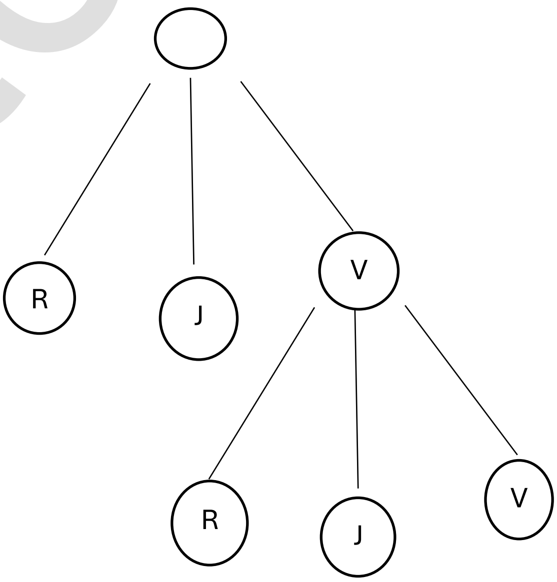
Exercice 9 :

Une urne contient 7 boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 100F, si elle est jaune, il perd 5F, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8F, sinon il perd 4F.

1) Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2) Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
   a) Etablir la loi de probabilité de la variable X.
   b) Calculer l'espérance de X.
3) Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de X soit nulle.

Solution 9 :

1) Arbre pondéré



2.a) La loi de probabilité de X

x	100	8	-4	-5
$p(x)$	$\frac{C_1^1}{C_7^1}$	$\frac{C_4^1}{C_7^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1}$	$\frac{C_4^1}{C_7^1} \times \frac{C_5^1}{C_6^1}$	$\frac{C_2^1}{C_7^1}$
$p(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{2}{7}$

b) Calculons $E(X)$

$E(x) = \frac{600}{42} + \frac{32}{42} - \frac{80}{42} - \frac{60}{42} = \frac{492}{42} = \frac{82}{7}$.

3) Dans ce cas

x	100	x	-4	-5
$p(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{20}{42}$	$\frac{2}{7}$

Déterminons x pour que $E(X) = 0$

$E(x) = \frac{460+4x}{42} \Rightarrow x = -\frac{460}{4} = -115$ donc il faut perdre 115F pour que $E(X) = 0$

Exercice 10 :

On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés.

Le dé rouge comporte : 2 faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 ; deux faces numérotées 1.

Le dé vert comporte : une face numérotée 0 ; trois faces numérotées 1 ; deux faces numérotées 2.

On lance simultanément les deux dés. On note X la somme des points obtenus.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Définir F, fonction de répartition de X et construire sa représentation graphique.

Solution 10 :

1) La loi de probabilité de X

$X(\Omega) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

x	-1	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{C_2^1 \times C_1^1}{6^2}$	$\frac{C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C_1^1}{6^2}$	$\frac{C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_3^1 + C_2^1 \times C}{6^2}$	$\frac{C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_3}{6^2}$	$\frac{C_2^1 \times C_2^1}{6^2}$
$p(x)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$

2) Fonction de répartition de X

x	-1	0	1	2	3
$p(x)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$
$F(x)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{22}{36}$	$\frac{32}{36}$	1

Exercice 11:

On utilise deux pièces de monnaie : l'une pipée de sorte que lorsque l'on la lance, la probabilité d'obtenir pile soit $\frac{1}{4}$. ; l'autre normale dont la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{2}$ à chaque lancer.

1) On prend une pièce au hasard (chacune des deux pièces a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'être prise).

   a) Quelle est la probabilité d'obtenir pile ?

   b) On a obtenu pile : quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce pipée ?

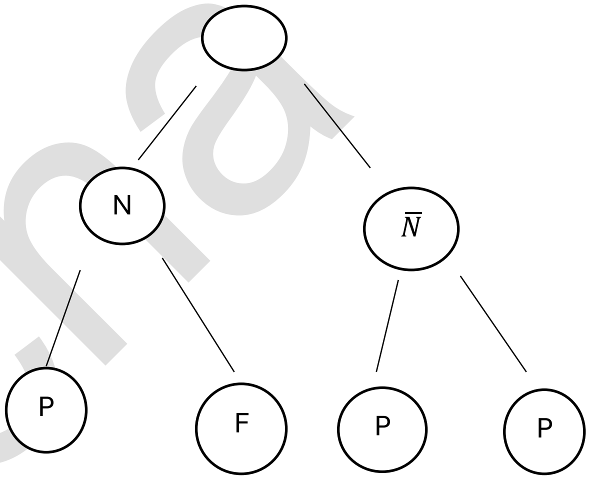
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile en faisant trois lancers avec la pièce choisie ?

2) Trois fois on choisit l'une des pièces au hasard qu'on lance (chacune des deux pièces a donc à chaque fois une probabilité $\frac{1}{2}$ d'êtr lancée). Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois pile.

3) On lance les deux pièces ensembles : quelle est la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces ?

Solution 11 :

On note P: "pile"; F: "face"; N:" pièce normale".



1.a) probabilité d'obtenir pile.

$p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

b) Calculons $p(\overline{N}/P)$

$p(\overline{N}/P) = \frac{p(P \cap \overline{N})}{p(P)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$

c) Notons P_1 la probabilité d'obtenir au moins une fois pile au cours des 3 lancers. $P_1 = 1 - p(X = 0)$

or $p(X = 0) = (1 - p)^3 = \left(\frac{5}{8}\right)^3$ donc $P = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3$

2) Calculons la probabilité P_2 d'obtenir au moins une fois pile.

$P_2 = 1 - p(X = 0)$ or

$p(X = 0) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{8}\right)^3$ donc $P_2 = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^3$

3) Notons P_3 la probabilité d'obtenir le même résultat pour les deux pièces.

$P_3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Exercice 12 :

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions. Ils doivent choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte. Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard. On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1) Quelle est la loi de probabilité de X ?

2) Calculer la probabilité pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.

Solution 12:

$X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	$C_{10}^{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}$ (	$C_{10}^{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2}$ (	$C_{10}^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}$ (	$C_{10}^{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{4}$ (	$C_{10}^{5}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}$ (	$C_{10}^{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}$ (				

Donc $\forall\ k \in \{0, 1; \dots; 10\}\ p(X = k) = C_{10}^{k}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$

2) Calculons la probabilité P pour qu'il fournisse au moins 8 bonnes réponses.

$P = p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10)$

Exercice 13 :

Un sondage est effectué dans un conservatoire de musique. 60% des élèves pratiquent un instrument à cordes (C). 45% des élèves pratiquent un instrument à vent(V), 10% pratiquent un instrument à cordes et vent.

1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.

a) Quelle est la probabilité de l'évènement ≪ Cet élève pratique au moins un des instruments considérés≫.

b) Quelle est la probabilité de l'évènement ≪ Cet élève pratique un et un seul des instruments considérés≫.

2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V ?

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves. On suppose que le nombre d'élèves du conservatoire est suffisamment grand pour que la probabilité de rencontre d'un instrumentiste du type donné soit constante au cours du sondage.

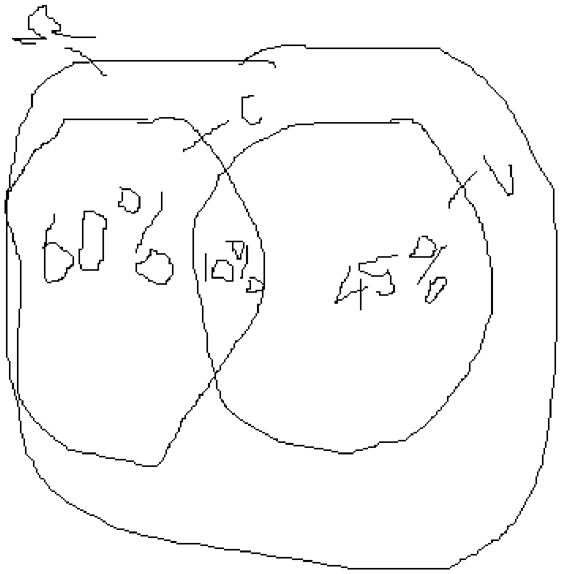
a) Quelle est la probabilité P_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C ?

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0{,}99$.

Solution 13

On note C l'évènement : « l'élève pratique un instrument à cordes »

V l'évènement : « l'élève pratique un instrument à vent »



1) On choisit un élève au hasard dans le conservatoire.

1.a) Calculons la probabilité de l'évènement ≪ Cet élève pratique au moins un des instruments considérés≫.

Notons D l'évènement « Cet élève pratique au moins un des instruments considérés »

P(D) = P(C ∪ V) = P(C) + P(V) – P(C ∩ V)

Donc $P(D) \ = \ 60 + 45 - 10 \ = \ 95\%$.

1.b) Calculons la probabilité de l'évènement « Cet élève pratique un et un seul des instruments considéré ».

Notons E l'évènement : « Cet élève pratique un et un seul des instruments considéré »

P(E) = P(C\V) + P(V\C)

P(E) = P(C) – P(C ∩ V) + P(V) – P(V∩ C)

P(E) = P(C) + P(V) – 2 P(C ∩ V)

Donc $P(E) \ = \ 60 + 45 - 20 \ = \ 85\%$.

2) On choisit au hasard un élève pratiquant un instrument C. Déterminons la probabilité pour que cet élève pratique un instrument V. Autrement dit, déterminons P(V/C).

P(V/C) = $\frac{P(V \cap C)}{P(C)}$

Donc P(V/C) = $\frac{0{,}1}{0{,}6} = 0{,}17 = 17\%$

3) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard n élèves.

Définissons X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves pratiquant un instrument C parmi les n élèves. X suit une loi binomiale de paramètre n et p = P(C). L'univers image X(Ω) = {0, 1, 2, …, n}

3.a) Calculons la probabilité P_n qu'au moins un des élèves choisis pratique un instrument C.

$P_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ or $P(X = 0) = C_n^0 p^0.(1-p)^n = (1-p)^n$

Donc $P_n = 1 - (1-p)^n = 1 - 0{,}4^n$.

3.b) Déterminons le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0{,}99$

$P_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}4^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}4^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow ln(0{,}4^n) \leq ln(0{,}01)$

$\Leftrightarrow n.ln(4 \times 10^{-1}) \leq ln(10^{-2})$ donc $n \geq \frac{-2ln10}{\ln(4\times10^{-1})}$ car $ln(4 \times 10^{-1}) < 0$.

Ainsi le plus petit entier n tel que $P_n \geq 0{,}99$ est $n_0 = E(\frac{-2ln10}{\ln(4\times10^{-1})}) + 1 = 6$.

CONIQUES

Exercice 1:

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{u}, \vec{v}$). Soit g l'application du plan dans lui – même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x'; y') tel que : $\begin{cases} 2\sqrt{2}x' = x - y \\ 2\sqrt{2}y' = x + y \end{cases}$. On note $(\mathcal{E}_1)$ la courbe d'équation $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, $(\mathcal{E}_2)$ la courbe d'équation $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 32 = 0$ et F le point d'affixe $i\sqrt{3}$.

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{E}_1)$ (centre, sommets, foyers, excentricité). 1,25pts

2) Construire avec précision $(\mathcal{E}_1)$. 1pt

3) Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes à $(\mathcal{E}_1)$ ayant pour coefficient directeur 2. 1pt

4) a) Déterminer l'écriture complexe de g.

 b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g. 0,75pt

 c) Déterminer une équation cartésienne de la courbe $(\mathcal{E}_3)$, image de $(\mathcal{E}_2)$ par g.

 d) Que peut on dire de $(\mathcal{E}_3)$ et $(\mathcal{E}_1)$?

 e) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{E}_2)$ (centre, sommets, foyers, excentricité).

 f) Tracer $(\mathcal{E}_2)$ dans le même graphique que $(\mathcal{E}_1)$

5. a) Démontrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z - \bar{z} - \frac{8i}{\sqrt{3}} = 0$ est une droite (D).

 b) Démontrer que pour tout point M d'affixe z, $d\big(M, (D)\big) = \frac{1}{2}\left|z - \bar{z} - \frac{8i}{\sqrt{3}}\right|$.

 c) Donner la nature et les éléments caractéristiques (un foyer, une directrice et l'excentricité) de l'ensemble (Γ) des points M tels que $\left|\frac{z - i\sqrt{3}}{z - \bar{z} - \frac{8i}{\sqrt{3}}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

6) Soit θ un réel de l'intervalle]0; π[. On considère l'équation d'inconnue z:

(E): $z^2 - 2cos\theta z + 1 + 3sin^2\theta = 0$.

 a) Résoudre l'équation (E) dans ℂ;

 On note z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et M_1 son image dans le plan complexe.

 b) Montrer que lorsque θ varie, M_1 se déplace sur une ellipse ($\mathscr{E}$) dont on déterminera une équation.

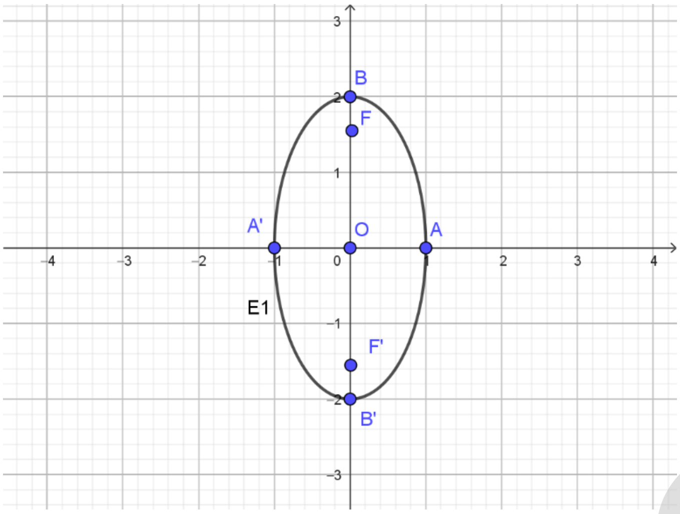
Solution 1 :

Soit g l'application du plan dans lui – même qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x'; y') tel que : $\begin{cases} 2\sqrt{2}x' = x - y \\ 2\sqrt{2}y' = x + y \end{cases}$. On note $(\mathcal{E}_1)$ la courbe d'équation $4x^2 + y^2 - 4 = 0$, $(\mathcal{E}_2)$ la courbe d'équation $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 32 = 0$ et F le point d'affixe $i\sqrt{3}$.

1) Nature et éléments caractéristiques de $(\mathcal{E}_1)$ (centre, foyers, sommets et excentricité).

$4x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ donc $(\mathcal{E}_1)$ est une ellipse de centre O de sommets A(1 ; 0), A'(-1 ; 0), B(0 ; 2), B'(0 ; -2), de foyers F(0, $\sqrt{3}$), F'(0 ; $-\sqrt{3}$) et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Tracé de $(\mathcal{E}_1)$



3) Equation cartésienne de la tangente à $(\mathcal{E}_1)$ ayant pour coefficient directeur 2.

Soit M$\binom{a}{b} \in (\mathcal{E}_1)$, la tangente à $(\mathcal{E}_1)$ en M a pour équation : $4ax^\circ + by = 4 \Leftrightarrow y = -\frac{4a}{b}x + \frac{4}{b}$. Le coefficient directeur est 2 $\Leftrightarrow -\frac{4a}{b} = 2 \Leftrightarrow a = -\frac{b}{2}$ donc une équation est donnée pour $b = 1$ par $y = 2x + 4$.

4.a) Ecriture complexe de g.

$g: M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ tel que $\begin{cases} 2\sqrt{2}x' = x - y \\ 2\sqrt{2}y' = x + y \end{cases}$.

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$z' = x' + iy' = \frac{x-y}{2\sqrt{2}} + i\frac{x+y}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x + iy) + \frac{i}{2\sqrt{2}}(x + iy) = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}z$.

4.b) Nature et éléments caractéristiques de g.

$\frac{1+i}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ et $\left|\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2} \neq 1$ donc g est une similitude directe de centre O de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

4.c) Equation cartésienne de $(\mathcal{E}_3)$ image de $(\mathcal{E}_2)$ par g.

$(\mathcal{E}_2)$: $5\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{y}^2 - 6\mathrm{xy} - 32 = 0$, $\begin{cases} 2\sqrt{2}x' = x - y \ (1) \\ 2\sqrt{2}y' = x + y \ (2) \end{cases}$

(1)+(2)$\Rightarrow x = \sqrt{2}(x' + y')$, (2)-(1) $\Rightarrow y = \sqrt{2}(y' - x')$

$5\left(\sqrt{2}(x' + y')\right)^2 + 5\left(\sqrt{2}(y' - x')\right)^2 - 6(\sqrt{2}(x' + y')\sqrt{2}(y' - x') - 32 = 0 \Leftrightarrow$

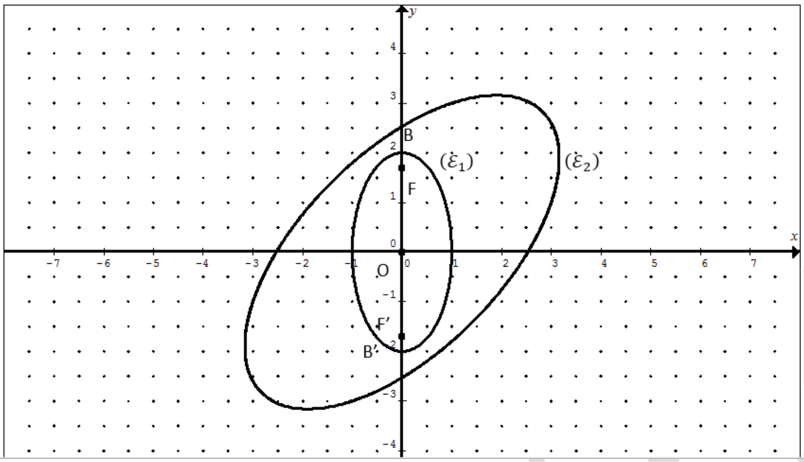
$10(x'^2 + 2x'y' + y'^2) + 10(y'^2 - 2x'y' + x'^2) - 12(y'^2 - x'^2) - 32 = 0 \Leftrightarrow$

$(10+10+12)x'^2+(10+10-12)y'^2-32=0 \Leftrightarrow 32x'^2+8y'^2-32=0 \Leftrightarrow$
$4x'^2+y'^2=4$ d'où $(\mathcal{E}_3)=(\mathcal{E}_1)$.

e) Nature et éléments caractéristiques de $(\mathcal{E}_2)$ (centre, foyers, sommets, excentricité)

$(\mathcal{E}_2)$ est une éllipse image de $(\mathcal{E}_1)$ par g^{-1}. Ainsi son centre O' est l'image de O par g^{-1}, ses éléments caractéristiques sont les images des éléments caractéristiques de $(\mathcal{E}_1)$ par g^{-1}.

4.f) Tracé de $(\mathcal{E}_2)$



5.a) Démontrons que l'ensemble des points M d'affixe z tel que $z-\bar{z}-\frac{8i}{\sqrt{3}}=0$ est une droite (D).

Posons $z=a+ib$, $\bar{z}=a-ib$

$z-\bar{z}-\frac{8i}{\sqrt{3}}=2ib-\frac{8i}{\sqrt{3}}=i\left(2b-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)=0 \Leftrightarrow b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. L'ensemble des points M est la droite (D) : $y=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

5.b) Démontrons que pour tout point M d'affixe z, $d\big(M,(D)\big)=\frac{1}{2}\left|z-\bar{z}-\frac{8i}{\sqrt{3}}\right|$.

$d\big(M,(D)\big)=\frac{\left|y-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{1^2}}=\frac{1}{2}\left|z-\bar{z}-\frac{8i}{\sqrt{3}}\right|$

5.c) Nature et éléments caractéristiques (foyer, directrice et excentricité) de l'ensemble (Γ) des points M tels que $\left|\frac{z-i\sqrt{3}}{z-\bar{z}-\frac{8i}{\sqrt{3}}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$\left|\frac{z-i\sqrt{3}}{z-\bar{z}-\frac{8i}{\sqrt{3}}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M,(D))}=\frac{\sqrt{3}}{4}<1$ donc (Γ) est une ellipse de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $e=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6) Soit θ un réel de l'intervalle]0; π[. On considère l'équation d'inconnue z :

(E): $z^2-2cos\theta z+1+3sin^2\theta=0$.

6.a) Résolvons l'équation (E) dans ℂ

$\Delta=4cos^2\theta-4(1+3sin^2\theta)=-4sin^2\theta-12sin^2\theta=-16sin^2\theta=(4isin\theta)^2$

$z_2 = \frac{2cos\theta - 4isin\theta}{2} = cos\theta - 2isin\theta, z_1 = \frac{2cos\theta + 4isin\theta}{2} = cos\theta + 2isin\theta$

6.b) Soit M_1 le point d'affixe z_1. Montrons que lorsque θ varie, M_1 se déplace sur une ellipse ($\mathscr{E}$)

Posons $z_1 = x + iy$, par identification, on a :

$\begin{cases} x = cos\theta \\ y = 2sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = cos\theta \\ \frac{y}{2} = sin\theta \end{cases}$ donc $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ donc ($\mathscr{E}$) est une ellipse de centre O de sommets

A(1 ; 0), A'(-1 ; 0), B(0 ; 2), B'(0 ;-2), de foyers F(0 ; $\sqrt{3}$) et F'(0 ; $-\sqrt{3}$) et d'excentricité $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$). On note F(0; 5) et F'(0; -5). Soit f l'ensemble des points M(x, y) du plan dont les coordonnées vérifient:$7x^2 + 5y^2 - 2xy\sqrt{3} = 16$ et ($\mathscr{L}$) l'ensemble des points M(x, y) du plan dont les coordonnées vérifient: $|MF - MF'| = 8$.

1. Donner une équation cartésienne de ($\mathscr{L}$) et le représenter dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) avec les unités graphiques $\|i\| = \|j\| = 0{,}5cm$
2. Soient θ ∈ [0; $\frac{\pi}{2}$], $k \in \mathbb{R}^*{}_+$ et (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) le repère image du repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) par la similitude directe de centre O, d'angle θ et de rapport k, M(X, Y) dans (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)
   a) Exprimer x et y en fonction de X et Y;
   b) Déterminer θ et k pour que l'équation de (f) dans le repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) soit: $16X^2 + 32Y^2 = 16$.
   c) En déduire la nature de (f) et ses éléments caractéristiques dans le repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Solution 2 :

F(0; 5) et F'(0; -5). Soit f l'ensemble des points M(x, y) du plan dont les coordonnées vérifient:$7x^2 + 5y^2 - 2xy\sqrt{3} = 16$ et ($\mathscr{L}$) l'ensemble des points M(x, y) du plan dont les coordonnées vérifient: $|MF - MF'| = 8$.

1. Equation cartésienne de ($\mathscr{L}$)

$|MF - MF'| = 8 \Leftrightarrow (MF - MF')^2 = 64 \Leftrightarrow MF^2 + MF'^2 - 2MF.MF' = 64$

$\Leftrightarrow MF^2 + MF'^2 - 64 = 2MF.MF' \Leftrightarrow x^2 + (y-5)^2 + x^2 + (y+5)^2 - 64 =$

$2\sqrt{(x^2 + (y-5)^2)(x^2 + (y+5)^2)} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 14 =$

$2\sqrt{(x^2 + (y-5)^2)(x^2 + (y+5)^2)} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 7 = \sqrt{(x^2 + (y-5)^2)(x^2 + (y+5)^2)} \Leftrightarrow$

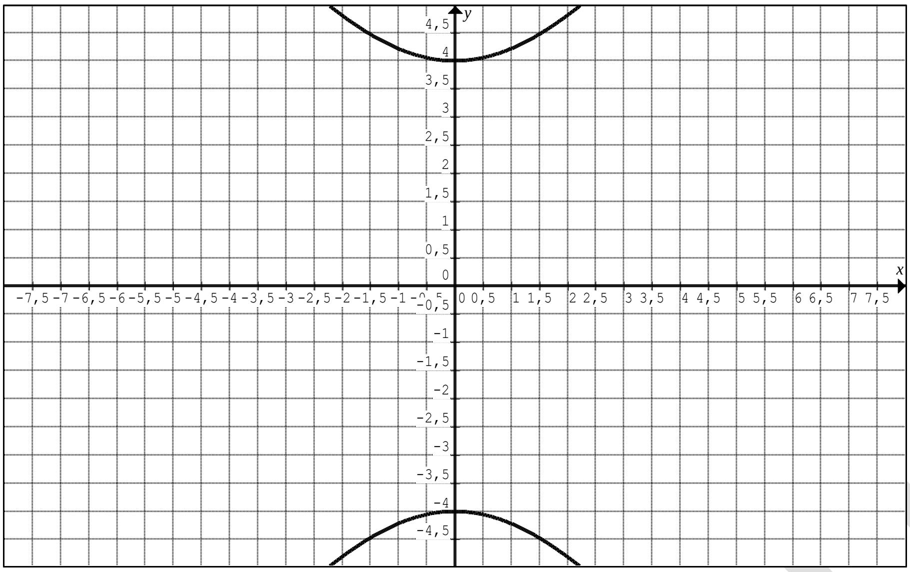
$(x^2 + y^2 - 7)^2 = x^4 + x^2(y+5)^2 + x^2(y-5)^2 + (y-5)^2(y+5)^2 \Leftrightarrow$

$x^4 + x^2y^2 - 7x^2 + x^2y^2 + y^4 - 7y^2 - 7x^2 - 7y^2 + 49 = x^4 + x^2y^2 + 10yx^2 + 25x^2 +$

$x^2y^2 - 10x^2y + 25x^2 + y^4 - 50y^2 + 625 \Leftrightarrow$

$x^4 + y^4 - 14x^2 - 14y^2 + 2x^2y^2 + 49 = x^4 + y^4 + 50x^2 - 50y^2 + 2x^2y^2 + 625 \Leftrightarrow$

$64x^2 - 36y^2 + 576 = 0 \Leftrightarrow -16x^2 + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$



2. Soient $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{R}^*{}_+$ et $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le repère image du repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par la similitude directe de centre O, d'angle θ et de rapport k, M(X, Y) dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$

2.a) Exprimons x et y en fonction de X et Y.

$z' = ke^{i\theta}z$, $z_{\vec{u}} = ke^{i\theta}(1) \Leftrightarrow \vec{u} = kcos\theta + kisin\theta$; $z_{\vec{v}} = ke^{i\theta}(i) = -ksin\theta + kicos\theta$

$\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X(kcos\theta + kisin\theta)\vec{\imath} + Y(-ksin\theta + kicos\theta)\vec{\jmath}$ par identification, on a :

$\begin{cases} x = kcos\theta.X - ksin\theta.Y \\ y = ksin\theta.X + kcos\theta.Y \end{cases}$

2.b) Déterminons θ et k pour que l'équation de (f) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ soit: $16X^2 + 32Y^2 = 16$.

$7x^2 + 5y^2 - 2xy\sqrt{3} = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 7(kcos\theta.X - ksin\theta.Y)^2 + 5(ksin\theta.X + kcos\theta.Y)^2 - 2(kcos\theta.X - ksin\theta.Y)(ksin\theta.X + kcos\theta.Y)\sqrt{3} = 16 \Leftrightarrow$

$\left(7k^2cos^2\theta + 5k^2sin^2\theta + 2\sqrt{3}k^2cos\theta sin\theta\right)X^2 + \left(7k^2sin^2\theta + 5k^2cos^2\theta - 2\sqrt{3}k^2sin\theta cos\theta\right)Y^2 + \left(-14k^2\cos\theta\sin\theta + 10k^2\cos\theta\sin\theta + 2\sqrt{3}k^2cos^2\theta - 2\sqrt{3}k^2sin^2\theta\right)XY = 16$ par identification, on a :

- $2\sqrt{3}k^2(cos^2\theta - sin^2\theta) - 4k^2sin\theta cos\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{3}cos2\theta - 2sin2\theta = 0 \quad \Leftrightarrow$ $\sqrt{3}cos2\theta - sin2\theta = 0 \Leftrightarrow cos\frac{\pi}{6}cos2\theta - sin\frac{\pi}{6}sin2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2\theta\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6}$

- $7k^2cos^2\theta + 5k^2sin^2\theta + 2\sqrt{3}k^2cos\theta sin\theta = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{21k^2}{4} + \frac{5k^2}{4} + \frac{6k^2}{4} = \frac{32k^2}{4} = 16 \Leftrightarrow$ $k^2 = 2$ donc $k = \sqrt{2}$.

2.c) Déduisons la nature de (f) et ses éléments caractéristiques dans (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

$16X^2 + 32Y^2 = 16 \Leftrightarrow X^2 + 2Y^2 = 1$

$$\begin{cases} x = kcos\theta.X - ksin\theta.Y \\ y = ksin\theta.X + kcos\theta.Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{6}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{6}}{2}Y \end{cases}$$

(f) est une ellipse de centre O de sommets A(1 ; 0), A'(-1 ; 0), B(0 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$), B'(0 ; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) dans (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). L'image de A est $A_1(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$, l'image de A' est $A_2(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$, l'image de B est $B_1(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ et l'image de B' est $B_2(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$.

Exercice 3:

Le plan est muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

On se propose de déterminer la nature, puis de construire l'ensemble (Γ) des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $x^2 + 11y^2 - 10xy\sqrt{3} + 16 = 0$

1. On désigne par (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) l'image du repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et par (X, Y) les coordonnées du point M dans le repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).
   a) Exprimer x et y en fonction de X et Y.
   b) Montrer que dans le repère (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$), (Γ) a pour équation $16X^2 - 4Y^2 + 16 = 0$
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) et construire (Γ)

Solution 3 :

Même raisonnement que l'exercice précédent.

Exercice 4:

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan complexe rapporté au repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et f l'application de ℂ dans ℂ définie par $f(z) = z^2 - 2(cos\theta + sin\theta)z - sin\theta(sin\theta - icos\theta)$ où θ ∈ [0; 2π[.

1.1 Soit $z = x + iy$. Calculer la partie réelle de $f(z)$ en fonction de x et de y.

1.2 Quel est l'ensemble (C_θ) des points M(z) tel que $f(z)$ soit imaginaire pur? Montrer que (C_θ) est une conique dont on précisera le centre Ω_θ et la nature

1.3 Quel est l'ensemble $\mathcal{T}_\theta$ des centres Ω_θ lorsque θ décrit [0; 2π[.

1.4…Déterminer les éléments caractéristiques de (C_θ) pour θ = $\frac{3\pi}{4}$ et représenter cette courbe.

2. A(2; 1; 3) et B(-3; -1; 7) désignent deux points de l'espace muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$. On considère l'ensemble X des points M de l'espace tels que MA²+MB²=45.

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de X.

b) S_D le demi – tour d'axe (D). Donner la nature et les éléments caractéristiques de Γ image de X par S_D.

Solution 4 :

1. f l'application de ℂ dans ℂ définie par $f(z) = z^2 - 2(cos\theta + sin\theta)z - sin\theta(sin\theta - icos\theta)$ où θ ∈ [0; 2π[.

1.1 Soit $z = x + iy$. Calculer la partie réelle de $f(z)$ en fonction de x et de y.

$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy - 2(cos\theta + isin\theta)(x + iy) - sin\theta(sin\theta - icos\theta) = x^2 - y^2 - 2cos\theta x + 2sin\theta y - sin^2\theta + i(2xy - 2cos\theta y - 2sin\theta x + sin\theta cos\theta)$. Ainsi

$\begin{cases} \mathcal{R}e(f(z) = x^2 - y^2 - 2cos\theta x + 2sin\theta y - sin^2\theta \\ \mathcal{I}mf(z) = 2xy - 2cos\theta y - 2sin\theta x + sin\theta cos\theta \end{cases}$

1.2 Déterminons l'ensemble (C_θ) des points M(z) tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

$f(z)$ imaginaire pure si $\mathcal{R}ef(z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2cos\theta x + 2sin\theta y - sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow (x - cos\theta)^2 - cos^2\theta - (y - sin\theta)^2 + sin^2\theta - sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow (x - cos\theta)^2 - (y - sin\theta)^2 = cos^2\theta$ donc (C_θ) est une hyperbole équilatère de centre $\Omega_\theta(cos\theta, sin\theta)$.

1.3 Déterminons l'ensemble des centres Ω_θ lorsque θ décrit [0 ; 2π[

$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ donc Ω_θ appartient au cercle de centre O et de rayon 1. Ainsi, lorsque θ décrit [0 ; 2π[, $\mathcal{T}_\theta$ décrit un cercle de centre O et de rayon 1.

1.4 Déterminons les éléments caractéristiques pour θ = $\frac{3\pi}{4}$

$(C_\theta) : \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. Les sommets A($\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0), A'($-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 0), de foyers F(1 ; 0) et $F(-1{:}\,0)$ de directrices (D) : $y = x$ et (D') : $y = -x$ dans le repère $(\Omega_{\frac{3\pi}{4}}, \vec{u}, \vec{v})$.

2. A(2; 1; 3) et B(-3; -1; 7) désignent deux points de l'espace muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). Soit (D) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$. On considère l'ensemble X des points M de l'espace tels que MA²+MB²=45.

2.a) Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de X.

$MA^2 + MB^2 = 45 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 45$

$AB^2 = 25 + 4 + 16 = 45$ donc $2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 45 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{45}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ d'où X est une sphère de centre I et de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ avec I milieu de [AB].

2.b) Nature et éléments caractéristiques de Γ image de X par S_D

Γ est une sphère de centre J = $S_D(I)$ et de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 5:

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). Soit f l'affinité orthogonale de rapport 2 et d'axe (Δ) d'équation $y = x$ et (C) un cercle de centre A(1; 1) et de rayon 2.
   a) Déterminer l'expression analytique de f.
   b) Montrer que l'image du cercle (C) par f est une conique dont on déterminera l'équation réduite et l'excentricité.
2. θ est un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

   On considère l'équation différentielle (E): $(1 + cos2\theta)y'' - (2sin2\theta)y' + 2y = 0$.
   a) Résoudre dans l'ensemble ℂ des nombres complexes l'équation :
      $(1 + cos2\theta)Z^2 - (2sin2\theta)Z + 2 = 0$.
   b) Ecrire chaque solution sous forme exponentielle.
   c) Déterminer la solution ϕ de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = x + 1$

Solution 5 :

1. Soit f l'affinité orthogonale de rapport 2 et d'axe (Δ) d'équation $y = x$ et (C) un cercle de centre A(1; 1) et de rayon 2.

1.a) Déterminons l'expression analytique de f.

Soit $M\binom{x}{y}$, $M'\binom{x'}{y'}$ deux points du plan. $M' = f(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur (Δ). Déterminons les coordonnées de H

$\overrightarrow{HM}.\vec{u} = 0$ où $\vec{u}$ est le vecteur directeur de (D). $\Leftrightarrow \binom{x-a}{y-b}.\binom{1}{1} = 0 \Leftrightarrow x - a + y - b = 0$. H ∈ (Δ) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = t \\ b = t \end{cases}$ donc $x + y = 2t \Leftrightarrow t = \frac{x+y}{2}$ donc $\begin{cases} a = \frac{x+y}{2} \\ b = \frac{x+y}{2} \end{cases}$

$$\overrightarrow{HM'} = 2\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - \frac{x+y}{2} = 2(x - \frac{x+y}{2}) \\ y' - \frac{x+y}{2} = 2(y - \frac{x+y}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x - x - y + \frac{x+y}{2} \\ y' = 2y - x - y + \frac{x+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{3x-y}{2} \\ y' = \frac{-x+3y}{2} \end{cases}$$

1.b) Montrons que l'image de (C) par f est une conique.

$$\begin{cases} 2x' = 3x - y \ (1) \\ 2y' = -x + 3y \ (2) \end{cases}$$

(1) + 3.(2) $\Rightarrow 2x' + 6y' = 8y \Leftrightarrow y = \frac{x'+3y'}{4}$, 3.(1)+(2) $\Leftrightarrow$ $6x' + 2y' = 8x \Leftrightarrow x = \frac{3x'+y'}{4}$. (C) est le cercle de centre A et de rayon 2. Alors $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{3x'+y'}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{x'+3y'}{4} - 1\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (3x + y - 4)^2 + (x + 3y - 4)^2 = 64 \Leftrightarrow 9x^2 + 3xy - 12x + 3xy + y^2 - 4y - 12x - 4y + 16 + x^2 + 6xy - 8x + 9y^2 - 24y + 16 = 64 \Leftrightarrow$ $10x^2 + 10y^2 + 12xy - 32x - 32y - 32 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 6xy - 16x - 16y - 16 = 0$

2. θ est un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

On considère l'équation différentielle (E): $(1 + cos2\theta)y" - (2sin2\theta)y' + 2y = 0$

2.a) Résolvons l'équation $(1 + cos2\theta)Z^2 - (2sin2\theta)Z + 2 = 0$.

$\Delta = (2sin2\theta)^2 - 4(1 + cos2\theta)(2) = 4sin^2 2\theta - 8(1 + cos2\theta) = 4(1 - cos^2 2\theta) - 8(1 + cos2\theta) = 4 - 4cos^2 2\theta - 8 - 8cos2\theta = -4(cos^2 2\theta + 2cos2\theta + 1) = -4(1 + cos2\theta)^2 = (2i(1 + cos2\theta))^2$

Donc $Z_1 = \frac{2sin2\theta - 2i(1+cos2\theta)}{2(1+cos2\theta)} = \frac{sin2\theta - i(1+cos2\theta)}{1+cos2\theta}$; $Z_2 = \frac{2sin2\theta + 2i(1+cos2\theta)}{1+cos2\theta} = \frac{sin2\theta + i(1+cos2\theta)}{1+cos2\theta}$

2.b) Ecrire sous forme exponentielle

$Z_1 = \frac{2sin\theta cos\theta}{2cos^2\theta} - i = tan\theta - i = \frac{sin\theta - icos\theta}{cos\theta} = -i\frac{e^{i\theta}}{cos\theta} = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}}{cos\theta}$;

$Z_2 = \frac{sin2\theta + i(1+cos2\theta)}{1+cos2\theta} = \frac{2sin\theta cos\theta}{2cos^2\theta} + i = \frac{sin\theta + icos\theta}{cos\theta} = \frac{e^{i(-\theta + \frac{\pi}{2})}}{cos\theta}$

2.c) Déterminons ϕ tel que $\phi'(0) = 1$ et $\phi(0) = 1$

La solution générale de (E) est sous la forme :

$y(x) = e^{tan\theta x}(Acosx + Bsinx)$, A, B ∈ ℝ

$\phi(x) = e^{tan\theta x}(Acosx + Bsinx) \Rightarrow \phi'(x) = tan\theta e^{tan\theta x}(Acosx + Bsinx) + e^{tan\theta x}(-Asinx + Bcosx) = e^{tan\theta x}((Atan\theta + B)cosx + (-A + Btan\theta)sinx)$

$\phi(0) = 1 \Leftrightarrow A = 1$, $\phi'(0) = 1 \Leftrightarrow Atan\theta + B = 1 \Rightarrow B = 1 - tan\theta$. Ainsi

$\phi(x) = e^{tan\theta x}(cosx + (1 - tan\theta)sinx)$

Exercice 6:

Partie A:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$). On considère l'équation différentielle (E): $y" + 6y' + 13y = 0$

1. a) Déterminer la solution générale de (E).

 b) Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0; 1) et la tangente à ce point a pour coefficient directeur -3.

2. Soit h la fonction de la variable réelle x définie sur $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ tel que $h(x) = e^{-3x}cos2x$ et (C_h) sa courbe représentative.

   a. Ecrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C_h) au point d'abscisse 0.

   b. Donner le signe de h sur son ensemble de définition.

3. Soit (Δ) le domaine du plan délimité par la courbe (C_h), l'axe des abscisses, les droites d'équation: $x = 0$ et $x = -\frac{\pi}{4}$. Calculer l'aire de (Δ)

Partie B:

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

1. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M de (P), de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation: $(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-14)x + m + 3 = 0$.
   a. Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de (E_m).
   b. Préciser les éléments caractéristiques de (E_1)
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que $x^4 - 16(y^2-2y)^2 = 0$
   a. Montrer que (Γ) est la réunion d'une ellipse (Γ_1) et d'une hyperbole (Γ_2) dont on donnera les équations réduites respectives.
   b. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à l'ellipse (Γ_1) au point I $(\sqrt{3};\frac{3}{2})$.
   c. Construire (Γ) dans le repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

Solution 6 :

Partie A :

On considère l'équation différentielle (E): $y" + 6y' + 13y = 0$

1.a) Déterminons la solution générale de (E)

Equation caractéristique : $r^2 + 6r + 13 = 0$

$\Delta = 36 - 4(13) = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$

$r_1 = \frac{-6-4i}{2} = -3 - 2i,\qquad r_2 = \frac{-6+4i}{2} = -3 + 2i$

$y(x) = e^{-3x}(Acos2x + Bsin2x)$,A, B $\in \mathbb{R}$

1.b) Déterminons f solution de (E) telle que $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -3 \end{cases}$

$f'(x) = e^{-3x}(-3Acos2x - 3Bsin2x) + e^{-3x}(-2Asin2x + 2Bcosx) = e^{3x}((-3A + 2B)cos2x + (-3B - 2A)sin2x$

$f'(0) = -3 \Leftrightarrow -3A + 2B = -3, \quad f(0) = 1 \Leftrightarrow A = 1$ donc $B = 0$

$f(x) = e^{-3x}cos2x$

2. Soit h la fonction de la variable réelle x définie sur $[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$ tel que $h(x) = e^{-3x}cos2x$ et (C_h) sa courbe représentative.

2.a) Equation cartésienne de la tangente à (C_h) au point d'abscisse 0.

$h'(x) = e^{-3x}(-3cos2x - 2sin2x)$, $h'(0) = -3$ et $h(0) = 1$

$T_0: y = -3x + 1$

2.b) Signe de h.

$\forall x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$, $cos2x \geq 0$ donc $h(x) \geq 0$

3. Soit (Δ) le domaine du plan délimité par (C_h), l'axe des abscisses, les droites $x = 0$ et $x = -\frac{\pi}{4}$. Calculons l'aire de (Δ)

$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} h(x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}cos2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} - \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^{-3x}sin2x\,dx =$

$-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(\left[-\frac{1}{3}e^{-3x}sin2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} e^{-3x}cos2x\,dx) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(-\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{2}{3}\mathcal{A})$

$\mathcal{A} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{4}{9}\mathcal{A} \Leftrightarrow \frac{13}{9}\mathcal{A} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{9}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow \mathcal{A} = -\frac{3}{13} + \frac{2}{13}e^{\frac{3\pi}{4}}$ U.A

Partie B :

$(E_m): (m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-14)x + m + 3 = 0$

1.a) Déterminons, suivant les valeurs de m, la nature de (E_m)

Si $m - 1 = 0 ou\ m = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (E_m) est une parabole.

Si $m - 1 \neq 0$ et $m - 1 = 3m$, (E_m) est un cercle

Si $m - 1 \neq 0$, $m - 1 \neq 3m$, $m - 1$ et $3m$ sont de même signe, (E_m) est une ellipse.

Si $m - 1 \neq 0$, $m - 1 \neq 3m$, $m - 1$ et $3m$ sont de signes contraires, alors (E_m) est une hyperbole.

1.b) Eléments caractéristiques de (E_1)

$3y^2 - 26x + 4 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 = 2(13)\left(x - \frac{2}{13}\right) \Leftrightarrow y^2 = 2(\frac{13}{3})(x - \frac{2}{13})$

2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que $x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$

2.a) Montrons que (Γ) est la réunion d'une ellipse (Γ_1) et d'une hyperbole (Γ_2) dont on donnera les équations réduites respectives.

$x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 4(y^2 - 2y)\right)\left(x^2 + 4(y^2 - 2y)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4((y-1)^2 - 1) = 0$ ou $x^2 + 4((y-1)^2 - 1) = 0$

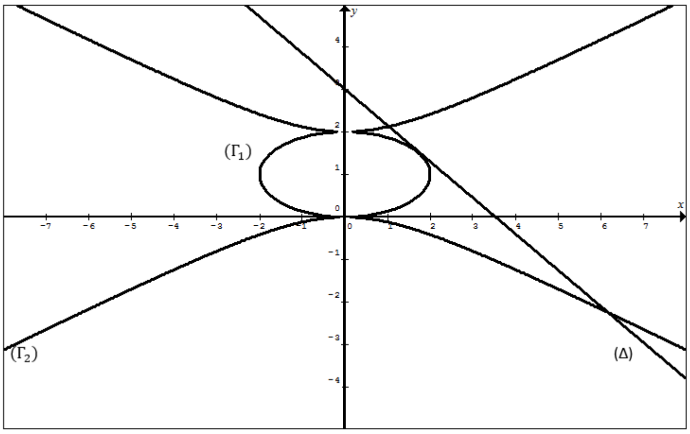
$x^2 - 4(y-1)^2 = -4$ ou $x^2 + 4(y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$ ou $\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

(Γ) est la réunion de $(\Gamma_1) : \frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$ et de $(\Gamma_2) : -\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 = 1$

2.b) Déterminons l'équation de la tangente (Δ) au point I $(\sqrt{3}; \frac{3}{2})$

$(\Delta) : \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}(y-1) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$ donc (Δ): $\sqrt{3}x + 2y = 6$

2.c) Construction de (Γ).



Exercice 7:

Soient A$(1; 2\sqrt{2} - 1)$, B$(2; -1 - \sqrt{5})$; C(1; -1) et (D) la droite d'équation $y = \sqrt{2} - 1$. On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA = \sqrt{2}MH$. Où H est le projeté orthogonal du point M sur (D).

a. Montrer que (Γ) est une conique dont on donnera une équation réduite et les éléments caractéristiques (Foyers et asymptotes).

b. Déterminer une équation de la tangente (T) à la conique (Γ) au point B.

c. Construire (Γ) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

d. On donne $\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{e_2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

   i. Montrer que $(C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan.

   ii. Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(C, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$

Solution 7 :

A(1; $2\sqrt{2}-1$), B(2; $-1-\sqrt{5}$); C(1; -1) et (D) la droite d'équation $y=\sqrt{2}-1$. On considère l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MA=\sqrt{2}MH$. Où H est le projeté orthogonal du point M sur (D).

a) Montrons que (Γ) est une conique

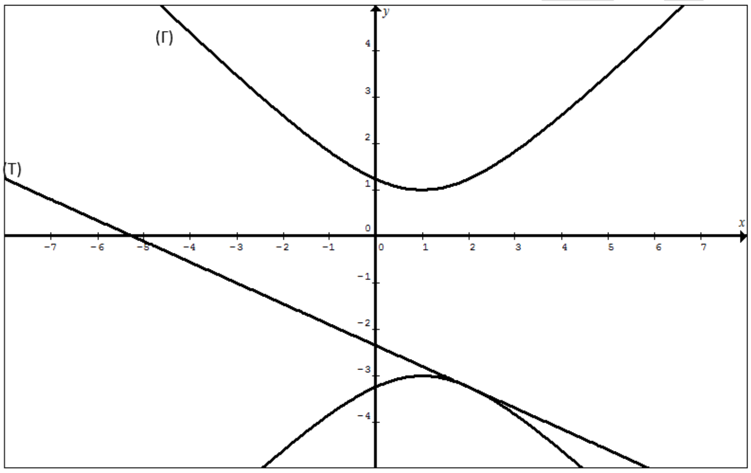
$MA=\sqrt{2}MH \Leftrightarrow MA^2=2MH^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(y-2\sqrt{2}+1\right)^2=2(y-\sqrt{2}+1)^2 \Leftrightarrow$ $(x-1)^2+\left(y-2\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}y-2+\sqrt{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2-4\sqrt{2}(y+1)+8-2(y+1)^2+4\sqrt{2}(y+1)-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-(y+1)^2+4=0 \Leftrightarrow$ $-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$ (Γ) est une hyperbole équilatère de centre C de foyers $F\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $F'\begin{pmatrix}0\\-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et de directrices (L) : $y=x$ et (L') : $y=-x$ dans le repère (C, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$).

b) Déterminons une équation de la tangente (T) au point B.

$-\frac{x-1}{4}+\frac{-\sqrt{5}(y+1)}{4}=1 \Leftrightarrow -x+1-\sqrt{5}y-\sqrt{5}=4 \Leftrightarrow x+\sqrt{5}y=-3-\sqrt{5}$ donc

$(T): x+\sqrt{5}y+3+\sqrt{5}=0$

c) Construction de (Γ)



d) On donne $\overrightarrow{e_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ et $\overrightarrow{e_2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$

i. Montrons que (C, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$) est un repère orthonormé du plan.

$\|\overrightarrow{e_1}\|=1$, $\|\overrightarrow{e_2}\|=1$, $\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ donc (C, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$) est un repère orthonormé du plan.

ii. Equation de (Γ) dans (C, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$)

Soit $M(x,y)$ dans (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$) et de coordonnées (X,Y) dans (C, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$)

$\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{CM}=X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2}=X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})\right)+Y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})\right)=\frac{X\sqrt{2}-Y\sqrt{2}}{2}\vec{\imath}+\frac{X\sqrt{2}+Y\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \frac{X\sqrt{2}-Y\sqrt{2}+1}{2}\vec{\imath} + \frac{X\sqrt{2}+Y\sqrt{2}-1}{2}\vec{\jmath}$ par identification, on a :

$$\begin{cases} x = \frac{X\sqrt{2}-Y\sqrt{2}+1}{2} \\ y = \frac{X\sqrt{2}+Y\sqrt{2}-1}{2} \end{cases} \qquad -\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow -\frac{(\frac{X\sqrt{2}-Y\sqrt{2}+1}{2}-1)^2}{4} + \frac{(\frac{X\sqrt{2}+Y\sqrt{2}-1}{2}+1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$-\frac{(X\sqrt{2}-Y\sqrt{2}-1)^2}{4} + \frac{(X\sqrt{2}+Y\sqrt{2}+1)^2}{4} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad -\left(2(X-Y)^2 - 2\sqrt{2}(X-Y)+1\right) + \left(2(X+Y)^2 + 2\sqrt{2}(X+Y)+1\right) = 16 \Leftrightarrow -2(X-Y)^2 + 2(X+Y)^2 + 4\sqrt{2}(X-Y+X+Y) = 16 \Leftrightarrow$

$-2X^2 + 4XY - 2Y^2 + 2X^2 + 4XY + 2Y^2 + 8\sqrt{2}X = 16 \Leftrightarrow 8XY + 8X\sqrt{2} = 16 \Leftrightarrow$

$XY + X\sqrt{2} = 2$

Exercice 8:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). On pose $Z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$. On note A_n le point d'affixe Z_n. On définit la suite (U_n) par $U_n = |Z_n|$.

1. Donner le nom et les éléments caractéristiques de l'application affine qui transforme A_n en A_{n+1}.
2. a) Démontrer que (U_n) est une suite géométrique puis exprimer U_n en fonction de n.

   b) A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent – ils au disque de centre O et de rayon 0,1?
3. a) Etablir que pour tout entier naturel n, $\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$

   b) En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}
4. On donne $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$. Exprimer L_n en fonction de n puis étudier la convergence de (L_n)

Solution 8 :

On pose $Z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$. On note A_n le point d'affixe Z_n. On définit la suite (U_n) par $U_n = |Z_n|$.

1. f est une similitude de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2.a) Démontrons que (U_n) est géométrique et exprimons U_n en fonction de n.

$|Z_{n+1}| = \left|\frac{1+i}{2}\right| |Z_n| \Leftrightarrow U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_n$, donc (U_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de 1er terme $U_0 = 2$

2.b) Déterminons n_0 *tel que* $\forall n > n_0,\ |Z_n| \leq 0{,}1$

$|Z_n| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |Z_0|$, Pour que $|Z_n| \leq 0{,}1$, il suffit que $2.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leq 0{,}05 \Leftrightarrow$

$nln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq \ln(0{,}05) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \Leftrightarrow n \geq 8{,}64$. Prendre $n_0 = 9$.

3.a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$

$Z_{n+1} - Z_n = \frac{1+i}{2}Z_n - Z_n = \frac{-1+i}{2}Z_n = i\left(\frac{1+i}{2}Z_n\right) = iZ_{n+1} \Leftrightarrow \frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$

3.b) Déduisons la nature de OA_nA_{n+1}

$\frac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_{n+1}} = i$ donc OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle isocèle en A_{n+1}.

4. On donne $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$,exprimons L_n en fonction de n.

$L_n = |Z_1 - Z_0| + |Z_2 - Z_1| + \cdots + |Z_n - Z_{n-1}| = |iZ_1| + |iZ_2| + \cdots + |iZ_n| = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \sqrt{2}.\left(\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$, $\lim_{n\to+\infty} L_n = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}-1}$

Exercice 9:

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$). Unité graphique : 1cm. soit f la transformation du plan qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que:

$$\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1. a) Déterminer l'écriture complexe de f.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
2. Soit (Γ) l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que: $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ') son image par f.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ')
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (Γ')
   c) En déduire que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité.
   d) Construire (Γ) et (Γ') dans le plan.

Solution 9 :

f la transformation du plan qui à tout point M(x, y) associe le point M'(x', y') tel que:

$$\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$$

1.a) Ecriture complexe de f.

Soit $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$,

$4z' = 4x' + i4y' = x - \sqrt{3}y + i(\sqrt{3}x + y) = x + iy + i\sqrt{3}(x + iy) = (1 + i\sqrt{3})(x + iy)$

Donc $f: z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{4}z$

1.b) Nature et éléments caractéristiques de f.

f est une similitude directe de centre O de rapport $k = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right| = \frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Soit (Γ) : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et (Γ') son image par f.

2.a) Déterminons une équation cartésienne de (Γ')

$$\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y (1) \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \ (2) \end{cases}$$

$-\sqrt{3}.(1) + (2) \Rightarrow -4\sqrt{3}x' + 4y' = 4y \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x' + y'$

$(1) + \sqrt{3}.(2) \Rightarrow 4x' + 4\sqrt{3}y' = 4x \Rightarrow x = x' + \sqrt{3}y'$

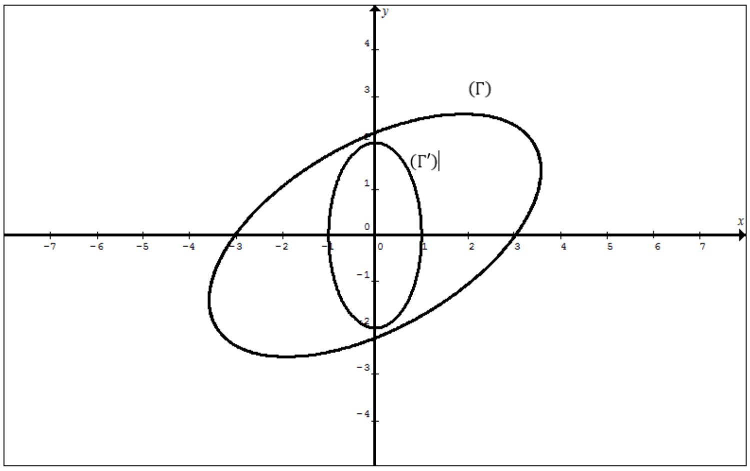
$7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64 \Leftrightarrow 7(x' + \sqrt{3}y')^2 + 13(-\sqrt{3}x' + y')^2 - 6\sqrt{3}(x' + \sqrt{3}y')(-\sqrt{3}x' + y') = 64 \Leftrightarrow 7(x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2) + 13(3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2) -6\sqrt{3}(-\sqrt{3}x'^2 + \sqrt{3}y'^2 - 2x'y') = 64 \Leftrightarrow (7 + 39 + 18)x'^2 + (21 + 13 - 18)y'^2 + \sqrt{3}(14 - 26 + 12)x'y' = 16 \Leftrightarrow 64x'^2 + 16y'^2 = 64 \Leftrightarrow x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$ donc l'équation de (Γ) : $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

2.b) Nature et éléments caractéristiques de (Γ')

(Γ') est une ellipse de centre O de sommets A(1 ; 0), A' (-1 ; 0),B(0 ; 2) et B'(0 ; -2) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = f(\vec{\imath})$ et $\vec{v} = f(\vec{\jmath})$.

2.c) f est une similitude de centre O, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc f^{-1} est une similitude de centre O, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. $f^{-1}(\Gamma') = (\Gamma)$ et f^{-1} conserve les figures donc (Γ) est une ellipse dont les éléments caractéristiques sont les images des éléments caractéristiques de (Γ') par f^{-1}.

2.d) Construction de (Γ) et (Γ')



Exercice 10

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par:

$U_0 = 5$, $U_1 = 31$ et $U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n$; $V_0 = -1$; $V_1 = -11$; $V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n$

On pose $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n - V_n$

1) Démontrer par récurrence sur n que (X_n) est une suite géométrique de raison 5 et exprimer X_n en fonction de n.
2) Démontrer par récurrence sur n que (Y_n) est une suite géométrique de raison 7 et exprimer Y_n en fonction de n.
3) Exprimer U_n et V_n en fonction de n
4) On admet que $U_n = 2 \times 5^n + 3 \times 7^n$
   a) Vérifier que $U_{n+1} - 5U_n = 2 \times 3 \times 7^n$ et $7U_n - U_{n+1} = 2^2 \times 5^n$
   b) En déduire que les valeurs possibles du PGCD de U_n et U_{n+1} sont 1 et 2.

c) U_n et U_{n+1} sont – ils premiers entre eux ?

Solution 10 :

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$U_0 = 5$, $U_1 = 31$ et $U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n$; $V_0 = -1$; $V_1 = -11$; $V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n$

On pose $X_n = U_n + V_n$ et $Y_n = U_n - V_n$

1) Démontrons par récurrence que (X_n) est une suite géométrique de raison 5

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = 5X_n\}$

Montrons que P est vraie pour n = 0.

$X_1 = U_1 + V_1 = 31 - 11 = 20 = 5(5 - 1) = 5(U_0 + V_0) = 5X_0$ donc P est vraie au rang n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang n+1 i.e. montrons que $X_{n+2} = 5X_{n+1}$

$X_{n+2} = U_{n+2} + V_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n + 12V_{n+1} - 35V_n = 12(U_{n+1} + V_{n+1}) - 35(U_n + V_n)$

$X_{n+2} = 12X_{n+1} - 35X_n$ or $X_n = \frac{1}{5}X_{n+1}$. Il s'en suit que $X_{n+2} = 12X_{n+1} - 7X_{n+1} = 5X_{n+1}$

P est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = 5X_n$

Exprimons X_n en fonction de n.

$X_n = 5^n.X_0 = 4.5^n$

2) Démontrons que (Y_n) est une suite géométrique de raison 7

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = 7Y_n\}$

Montrons que P est vraie pour n = 0.

$Y_1 = U_1 - V_1 = 31 + 11 = 42 = 7(5+1) = 5(U_0 - V_0) = 5Y_0$ donc P est vraie au rang n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang n+1 i.e. montrons que $Y_{n+2} = 7Y_{n+1}$

$Y_{n+2} = U_{n+2} - V_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n - 12V_{n+1} + 35V_n = 12(U_{n+1} - V_{n+1}) - 35(U_n - V_n)$

$Y_{n+2} = 12Y_{n+1} - 35Y_n$ or $Y_n = \frac{1}{7}Y_{n+1}$. Il s'en suit que $Y_{n+2} = 12Y_{n+1} - 5Y_{n+1} = 7Y_{n+1}$

P est donc vraie au rang n+1.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = 7Y_n$

Exprimons Y_n en fonction de n.

$Y_n = 7^n.Y_0 = 6.7^n$

3) Exprimons U_n et V_n en fonction de n

$$\begin{cases} U_n + V_n = 4.5^n \\ U_n - V_n = 6.7^n \end{cases}$$

$2.U_n = 4.5^n + 6.7^n \Leftrightarrow U_n = 2.5^n + 3.7^n$, $\quad 2V_n = 4.5^n - 6.7^n \Leftrightarrow V_n = 2.5^n - 3.7^n$

4.a) Vérifions que $U_{n+1} - 5U_n = 2 \times 3 \times 7^n$ et $7U_n - U_{n+1} = 2^2 \times 5^n$

$U_{n+1} - 5U_n = 2.5^{n+1} + 3.7^{n+1} - 5(2.5^n + 3.7^n) = 3.7^{n+1} - 15.7^n = (21-15).7^n = 2 \times 3 \times 7^n$, $\quad 7U_n - U_{n+1} = 7(2.5^n + 3.7^n) - (2.5^{n+1} + 3.7^{n+1}) = (14-10).5^n = 2^2 \times 5^n$

4.b) Notons $d = pgcd(U_n, U_{n+1})$

D'après BEZOUT d divise $2 \times 3 \times 7^n$ et d divise $2^2 \times 5^n$ donc d divise 2 d'où $d \in \{1, 2\}$

4.c) Supposons que $d = 2$. Alors 2 divise U_n or U_n est la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair. U_n est donc impair. Ce qui contredit le fait que 2 divise U_n. D'où $d = 1$ donc U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 1:

Dans le plan orienté, on considère deux cercles (C_1) et (C_2), de même rayon R>0 et tangents extérieurement en A. on note Δ = med$[O_1O_2]$, t = $t_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, r = r$(O_2, \frac{\pi}{3})$ et s = S_Δ

1) On pose f = rot
   a) Préciser f(O_1) et en déduire l'image de (C_1) par f.
   b) Déterminer et construire A' = f(A) et montrer que Δ' = f(Δ) est tangente à (C_2) en A'.
2) Soit I l'intersection de Δ et Δ' et J le symétrique de O_2 par rapport à Δ'.
   a) Montrer que le triangle IAA' est équilatéral et IO_1O_2J est un losange.
   b) En déduire que f fixe le point I, caractériser alors f.
3) On pose g = sof
   a) Déterminer g(I) et g(O_1) et en déduire la nature de l'isométrie g.
   b) On note K le milieu de [MN] avec N = g(M), déterminer l'ensemble des points K lorsque M décrit (C_1)

Solution 1 :

Dans le plan orienté, on considère deux cercles (C_1) et (C_2), de même rayon R>0 et tangents extérieurement en A. on note Δ = med$[O_1O_2]$, t = $t_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, r = r$(O_2, \frac{\pi}{3})$ et s = S_Δ

1) On pose f = rot

a) $f(O_1) = rot(O_1) = r(O_2) = O_2$. f est la composée de deux isométries donc f est une isométrie. Elle conserve donc les figures. Ainsi $f(C_1)$ est le cercle de centre $f(O_1) = O_2$ et de même rayon R c'est-à-dire $f(C_1) = (C_2)$

b) Déterminons A'= f(A) et montrons que Δ' = f(Δ) est tangente à (C_2) en A'.

$f(A) = rot(A) = r(A_1) = A'$ avec $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{O_1O_2}$ et $\begin{cases} O_2A' = O_2A_1 \\ mes\ \left(\widehat{\overrightarrow{O_2A_1}, \overrightarrow{O_2A'}}\right) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Δ est la tangente à (C_1) en A et f conserve le contact donc Δ' est la tangente $f(C_1) = (C_2)$ en $f(A) = A'$.

2) Soit I = Δ ∩ Δ' et J le symétrique de O_2 par rapport à Δ'

2.a) Montrons que IAA' est équilatéral et que IO_1O_2J est un losange.

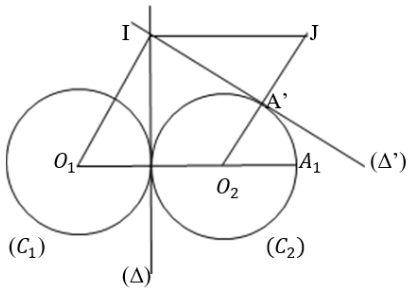
Δ et Δ' sont les tangentes à (C_2) respectivement en A et A' donc mes $\widehat{IAA'}$ = mes $\widehat{IA'A}$ = $\frac{1}{2}mes\widehat{AO_2A'}$ d'où IAA' est isocèle car possède deux angles de même mesure. De plus

$\widehat{A'AA_1}$est l'angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{A'O_2A_1}$ donc $mes\widehat{A'AA_1} = \frac{1}{2}mes\widehat{A'O_2A_1}$

Or $mes\widehat{A'O_2A_1} = \frac{\pi}{3}$ d'où $mes\widehat{A'AA_1} = \frac{\pi}{6}$ ainsi $mes\widehat{AO_2A'} = \pi - \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Ainsi mes $\widehat{IAA'}$ = mes $\widehat{IA'A} = \frac{\pi}{3}$ d'où IAA' est équilatéral. Montrons que IO_1O_2J est un losange

$O_1O_2 = 2R, \quad S_{\Delta'}(O_2) = J$ donc $O_2J = 2O_2A' = 2R$.

Δ est la médiatrice de $[O_1O_2]$ et I $\in \Delta$ donc IO_1O_2 est isocèle en I d'où IO_1 = IO_2. De même IJ = O_2J d'où IJ = IO_1. D'après Pythagore sur le triangle IO_1A, $IO_1^2 = IA^2 + R^2$ or IA = AA'. D'après le théorème d'Alkashi, $AA'^2 = O_2A^2 + O_2A'^2 - 2O_2A.O_2A'.cos\left(\widehat{\overrightarrow{O_2A}, \overrightarrow{O_2A'}}\right)$ donc $AA'^2 = 2R^2 + R^2 = 3R^2$ ainsi $IO_1^2 = 3R^2 + R^2 = 4R^2$ ainsi $IO_1 = 2R$ d'où $IO_1 = O_1O_2 = O_2J = IJ = 2R$ donc IO_1O_2J est un losange.



b) Déduisons que f fixe le point I i.e. que f(I)=I

IAA' est équilatéral et (IO_2) est la médiatrice de [AA'], (Δ) est la médiatrice de $[O_1O_2]$.

De plus, f(A) = A' et f(O_1) = O_2, f est une rotation donc le centre de f est le point d'intersection des médiatrices des segments [AA'] et $[O_1O_2]$ c'est-à-dire I. donc f(I) = I.

Caractérisons f

f est une rotation de centre I et d'angle θ. $f(A) = A' \Rightarrow mes\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}}\right) = \frac{\pi}{3}$

3) On pose g = sof

a) Déterminons g(I) et g(O_1) et déduisons la nature de g.

g(I) = sof(I) = s(I) = I, g(O_1) = sof(O_1) = s(O_2) = O_1. g est la composée d'un antidéplacement et d'un déplacement donc g est un antidéplacement ayant deux points invariants. $g = s_{(IO_1)}$.

b) On note K = mil[MN] avec $g(M) = N$. Lorsque M décrit (C_1), K décrit le diamètre de (C_1) dont le support est la droite (IO_1).

Exercice 2:

Dans le plan orienté, on considère une triangle ABC rectangle isocèle en A tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Soit (C) le cercle de diamètre [AB], r la rotation qui envoie B sur C et de centre A, soit (C') l'image de (C) par r. On désigne par O le centre de (C) et O' le centre de (C'). Soit M un point de (C), M' = r(M) son image.

1.a) Construire (C) et (C'). on note I le second point d'intersection de (C) et (C') autre que A.

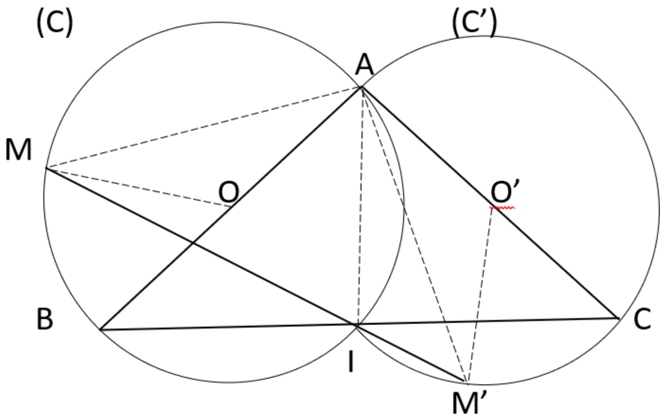
b) Montrer que $\forall M \in (C)$, on a I, M et M' sont alignés.

2. Soit $r_1 = R(O, \frac{\pi}{2})$ et $r_2 = R(O', \frac{\pi}{2})$

   a) Préciser l'image de B par f = $r_2 o r_1$ et g = $r_2^{-1} o r_1$

   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications f, g, $foS_{(AB)}$ et $goS_{(BC)}$

<u>Solution 2 :</u>



1.b) Montrons que $\forall M \in (C)$, I, M et M' sont alignés.

$r(M) = M'$ donc AM = AM'. O et O' les centres respectifs des cercles (C) et (C') qui sont de même rayon car AB = AC. Donc $mes\widehat{AOM} = mes\widehat{AO'M'}$. L'angle $\widehat{AIM}$ est un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{AM}$alors $mes\widehat{AIM} = \frac{1}{2} mes\widehat{AOM}$. De même l'angle $\widehat{AIM'}$ est inscrit dans (C') et intercepte l'arc $\widehat{AM'}$ donc $mes\widehat{AIM'} = \pi - \frac{1}{2} mes\widehat{AO'M'}$. Il résulte donc $mes\widehat{AIM} + mes\widehat{AIM'} = \pi$ d'où M, I et M' sont alignés.

2. Soit $r_1 = R(O, \frac{\pi}{2})$ et $r_2 = R(O', \frac{\pi}{2})$

2.a) $f(B) = r_2 o r_1(B) = r_2(I) = C,$ $g(B) = r_2{}^{-1} o r_1(B) = r_2^{-1}(I) = A.$

2.b) Nature et éléments caractéristiques de f, g, $foS_{(AB)}$ et $goS_{(BC)}$

f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc f est une symétrie centrale dont le centre est le milieu de [BC], soit I. g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$, soit g est une translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

, $foS_{(AB)}$ est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc f est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissée. Or f n'a pas de point invariant. Donc f est une symétrie glissée.

$foS_{(AB)} = S_{(OI)} o S_{(O'I)} o S_{(AB)} = S_{(OI)} o t_{\overrightarrow{AC}}$. $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de (OI) donc l'axe est la droite (OI) et le vecteur est $\overrightarrow{AC}$.

$goS_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BA}}oS_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BI}}ot_{\overrightarrow{IA}}oS_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BI}}oS_{(OO')}$. Comme $\overrightarrow{BI}$ est vecteur directeur de (OO'), alors l'axe est (OO') et de vecteur $\overrightarrow{BI}$.

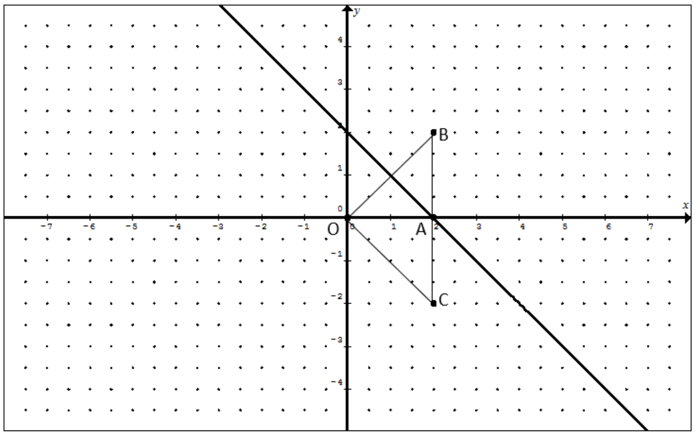
Exercice 3:

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct les points A(2; 0), B(2; 2) et C(2; -2). On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, par r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre B.

1. Caractériser f = r'os o r et construire f(C).
2. Soit (D) la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D), caractériser $S_{(D)}of$.
3. Soient I(1, 0) et J(0, 1), on considère les rotations r_I et r_J de centres respectifs I et J d'angles $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$; caractériser $h = r_I or_J$

Solution 3 :

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct les points A(2; 0), B(2; 2) et C(2; -2). On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, par r' la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre B



1. Caractérisons $f = r'os\ o\ r$

$f = r'osor = R\left(A,\frac{\pi}{2}\right) o\ R(B,\pi)o\ R(O,\frac{\pi}{2})$, f est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ d'où f est une translation ou l'application identique. $f(C) = r'osor(C) = r'os(B) = r'(B) = O$. Donc Le centre de f est la translation de vecteur $\overrightarrow{CO}$.

2. Soit (D) la droite d'équation $x + y - 2 = 0$ et $S_{(D)}$ la symétrie orthogonale d'axe (D), Caractérisons $S_{(D)}of$

$\overrightarrow{CO}$ est un vecteur directeur de la droite (D). donc $S_{(D)}of$ est une symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur $\overrightarrow{CO}$

3. Soient I(1, 0) et J(0, 1). on considère les rotations r_I et r_J de centres respectifs I et J d'angles $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Caractérisons $h = r_I o r_J$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, donc h est une rotation d'angle π donc une symétrie centrale et h(O) = O d'où $h = s_O$

Exercice 4:

Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC non isocèle tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; à tout point M de la droite (AB), on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans le même demi-plan de bord (BC) et BM = CN

1.a) Montrer qu'il existe une unique rotation r tel que pour tout point $M \in (AB)$ on a: $r(M) = N$ et $r(B) = C$

b) Préciser son angle et construire son centre Ω.

2) Soit O le milieu de [BC], on désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OΩ), on pose $f = S_{(O\Omega)} o r$

a) Déterminer f(B) et f(Ω)

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

3) On considère l'application $g = S_{(AB)} o S_{(AC)} o S_{(BC)}$

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AB)} o S_{(AC)}$

b) En décomposant S_A symétrie centrale de centre A en deux symétries orthogonales d'axes convenablement choisis, montrer que g est symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Solution 4 :

1.a) Montrons qu'il existe une unique rotation r tel que pour tout point M ∈ (AB) on r(M) = N et r(B) = C.

On sait BM = CN et les droites (BM) et (CN) se coupent en A donc il existe une unique rotation r tel que $\begin{cases} r(M) = N \\ r(B) = C \end{cases}$

b) Son angle θ = $mes(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CN}}) = \frac{\pi}{2}$. Son centre Ω est le point d'intersection des médiatrices de [MN] et [BC].

2) Soit O le milieu de [BC], on désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OΩ), on pose $f = S_{(O\Omega)} o r$

a) Déterminons $f(B)$ et $f(\Omega)$

$f(\Omega) = \Omega$ et $f(B) = S_{(O\Omega)}(C) = B$

b) Nature et éléments caractéristiques de f.

$f = S_{(O\Omega)} o r$ est un antidéplacement ayant deux points invariants donc $f = S_{((B\Omega)}$.

3) On considère l'application $g = S_{(AB)} o S_{(AC)} o S_{(BC)}$

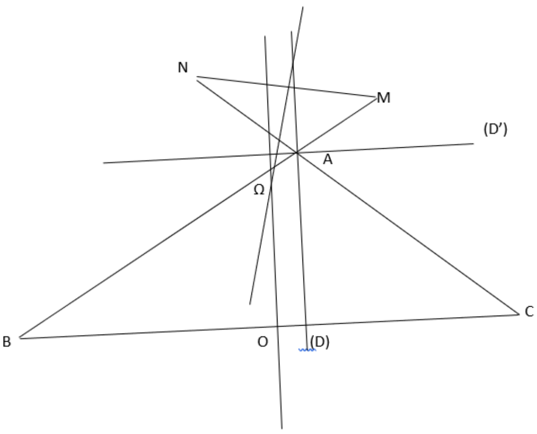
a) Nature et éléments caractéristiques de $S_{(AB)} o S_{(AC)}$

$S_{(AB)} o S_{(AC)} = R\left(A, 2mes(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})\right) = R(A, -\pi) = S_A$

b) Montrons que g est une symétrie glissée.

$g = S_{(AB)} o S_{(AC)} o S_{(BC)} = S_A o S_{(BC)}$. Soit (D) la hauteur issue de A dans le triangle ABC et (D') la perpendiculaire à (D) passant par A. Alors $S_A = S_{(D)} o S_{(D')}$.

Ainsi $g = S_{(D)} o S_{(D')} o S_{(BC)} = S_{(D)} o t_{\overrightarrow{2HA}}$ où H est le pied de la hauteur issue de A sur [BC]. Comme $\overrightarrow{HA}$ est un vecteur directeur de la droite (D), alors g est une symétrie glissée d'axe (D) et de vecteur $\overrightarrow{HA}$.



Exercice 5:

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD]. On note (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de [AB] et [CD].

1- a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme A en B et D en C.
   b) Prouver que f n'est pas une symétrie orthogonale.

2- Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
   a) Montrer que $f = RoS$
   b) Déterminer $f(B)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f.

3- On pose $g = fo\sigma$, σ étant la symétrie orthogonale d'axe (Δ'). Déterminer g(C) et donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

4- On pose $h = g^{-1} oR$
   a) Prouver que h est une translation que l'on caractérisera
   b) La droite (BC) coupe (Δ) en un point M. On pose $M_1 = R^{-1}(M)$ et $M_2 = g^{-1}(M)$

Montrer que les points M, M_1 et M_2 sont alignés.

Solution 5 :

1.a) Montrons qu'il existe un unique antidéplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = B \\ f(D) = C \end{cases}$

ABCD est un losange donc AD = BC d'où ∃! Antidéplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = B \\ f(D) = C \end{cases}$

1.b) Prouvons que f n'est pas une symétrie orthogonale.

Par absurde, supposons que f est une symétrie orthogonale. Notons (D) son axe.

(AB) // (DC) donc (D) = (Δ) = (Δ'). Ce qui est absurde car (Δ) et (Δ') ne sont pas confondus. D'où f n'est pas une symétrie orthogonale.

2. Soit S la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

2.a) Montrons que $f = RoS$

RoS est un antidéplacement, $RoS(A) = R(B) = B$, $RoS(D) = R(D)$ D ∈ (Δ), $R(D) = C$. Comme f est unique, alors $f = RoS$

2.b) Déterminons $f(B)$

$f(B) = RoS(B) = R(A) = D$ Déduisons la nature et les éléments caractéristiques de f.

f est une symétrie glissée.

$R = S_{(\Delta')}oS_{(BC)} = S_{(BD)}oS_{(\Delta')}$, $\quad RoS = S_{(BD)}oS_{(\Delta')}oS_{(\Delta)} = S_{(BD)}ot_{\overrightarrow{AB}} = S_{(BD)}ot_{\overrightarrow{AO}}ot_{\overrightarrow{OB}}$

$t_{\overrightarrow{AO}} = S_{(BD)}oS_{(IL)}$, $\Rightarrow RoS = S_{(BD)}oS_{(BD)}oS_{(IL)}ot_{\overrightarrow{OB}} = S_{(IL)}ot_{\overrightarrow{OB}}$, $\overrightarrow{OB}$ est un vecteur directeur de (IL) donc f est une symétrie glissée d'axe (IL) et de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

3. On pose $g = fo\sigma$, σ étant la symétrie orthogonale d'axe (Δ').

Déterminons $g(C)$

$g(C) = fo\sigma(C) = f(D) = C$ donc g est un déplacement qui possède un point invariant donc g est une rotation de centre C. De plus, $g(B) = fo\sigma(B) = f(B) = D$ donc l'angle de la rotation θ = $mes\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right) = -\frac{\pi}{3}$ d'où g est une rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

4. On pose $h = g^{-1}oR$

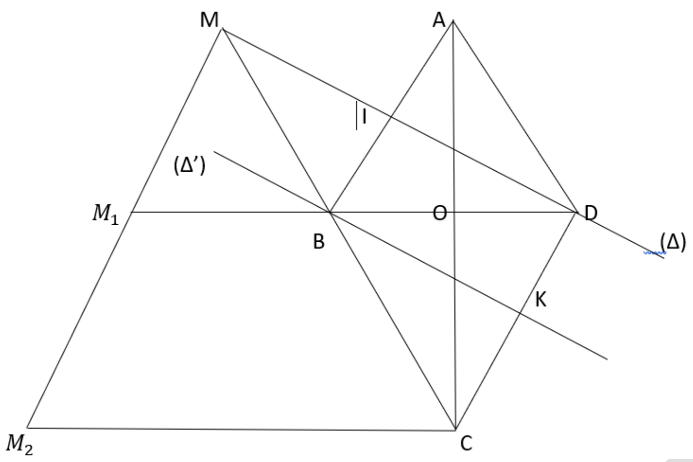
a) Prouvons que h est une translation.

h est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$ et $h(C) = g^{-1}oR(C) = g^{-1}(D) = B$ donc $h = t_{\overrightarrow{CB}}$

b) La droite (BC) coupe (Δ) en un point M. On pose $M_1 = R^{-1}(M)$ et $M_2 = g^{-1}(M)$

Montrons que M, M_1 et M_2 sont alignés.

M, B et C sont alignés, $M_1 = R^{-1}(M)$ et $M_2 = g^{-1}(M)$ donc MBM_1 et MCM_2 sont des triangles équilatéraux donc M, M_1 et M_2 sont alignés.



Exercice 6 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) On désigne par r_A, r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B, C et d’angles $\frac{\pi}{3}$
   a) Etudier l’application $f = r_A o r_B$
   b) Etudier l’application $g = r_C o r_B o r_A$
2) Soit la transformation $h = S_{(CA)} o S_{(AB)} o S_{(BC)}$
   a) Montrer que h est une isométrie
   b) Soit (D) la droite parallèle à (AC) et passant par B. Montrer que $S_{(AB)} o S_{(BC)} = S_{(D)} o S_{(AB)}$
   c) Soit B’ le milieu de [AC], H le projeté orthogonal de B’ sur (AB). Montrer que h = $t_{\overrightarrow{2BB'}} o S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{2BH}} o S_{(D')}$ où (D’) est une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BH}$, que l’on précisera.

Solution 6 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1) On désigne par r_A, r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B, C et d’angles $\frac{\pi}{3}$
   a) Etudions l’application $f = r_A o r_B$

f est une rotation d’angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre Ω = med[BC]∩med[AC] = O qui est le centre de gravité de ABC.

   b) Etudions l’application $g = r_C o r_B o r_A$

g est une rotation d’angle π donc g est une symétrie centrale. $g(B) = r_C o r_B o r_A(B) = r_C o r_B(C) = r_C(A) = B$ donc g est une symétrie centrale de centre B.

2) Soit la transformation $h = S_{(CA)} o S_{(AB)} o S_{(BC)}$
   a) Montrons que h est une isométrie.

h est la composée de trois isométries donc h est une isométrie.

b) Soit (D) la droite parallèle à (AC) et passant par B. montrons que $S_{(AB)}oS_{(BC)} = S_{(D)}oS_{(AB)}$

$S_{(AB)}oS_{(BC)} = R\left(B, 2mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}}\right)\right) = R(B, -\frac{4\pi}{3})$, $S_{(D)}oS_{(AB)} = R\left(B, 2mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\vec{D}}\right)\right) = R(B, -\frac{4\pi}{3})$ d'où $S_{(AB)}oS_{(BC)} = S_{(D)}oS_{(AB)}$

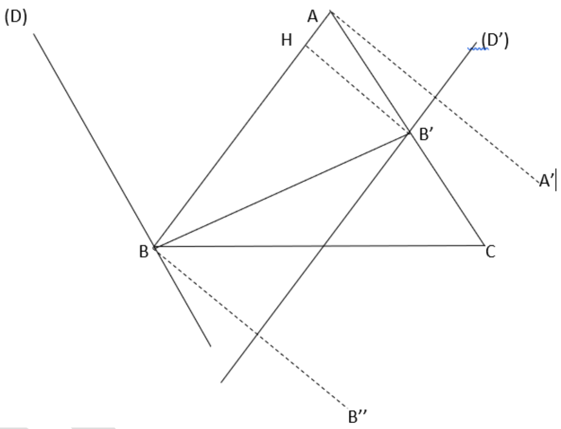
c) Soit B' le milieu de [AC], H le projeté orthogonal de B' sur (AB). Montrons que h $= t_{\overrightarrow{2BB'}}oS_{(AB)} = t_{\overrightarrow{2BH}}oS_{(D')}$ où (D') est une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BH}$.

$h = S_{(CA)}oS_{(AB)}oS_{(BC)} = S_{(CA)}oS_{(D)}oS_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{BB'}}oS_{(AB)} = t_{2(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HB'})}oS_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{BH}}ot_{2\overrightarrow{HB'}}oS_{(AB)}$

(HB') et (AB) sont perpendiculaires donc $t_{2\overrightarrow{HB'}}oS_{(AB)} = S_{(D')}$. Déterminons (D')

$t_{2\overrightarrow{HB'}}oS_{(AB)}(A) = A'$, $t_{2\overrightarrow{HB'}}oS_{(AB)}(B) = B''$ donc (D') est la médiatrice commune des segments [AA'] et [BB''] i.e. (D') est la parallèle à (AB) passant par B'. (D') est ainsi dirigée par $\overrightarrow{BH}$.

Ainsi $h = t_{2\overrightarrow{BH}}oS_{(D')}$.



Exercice 7:

Dans le plan orienté, on considère un triangle EFG équilatéral de sens indirect et soient les points A, B et C milieux respectifs des segments [FG], [FE] et [EG].

1.a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en E et F en C.

b) Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle.

2.a) Déterminer $S_{(BC)}oS_{(BA)}(A)$ et $S_{(BC)}oS_{(BA)}(F)$, en déduire que $f = S_{(BC)}oS_{(BA)}$ puis le centre de f.

b) Déterminer la droite (Δ) pour que $f = S_{(\Delta)}oS_{(BC)}$

3. Soit H le projeté orthogonal de G sur (BC); I et J les milieux respectifs des segments [GH] et [GB]. Soit I' = $S_{(BC)}(I)$. On pose $g = t_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)}$. Déterminer g(I), en déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

4. Soit $h = S_{(CA)}of$

a) Caractériser $S_{(CA)}oS_{(\Delta)}$

b) Déduire que h est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

Solution 7 :

1.a) Montrons qu'il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = E \\ f(F) = C \end{cases}$

EFG est équilatéral donc AF = EC d'où il existe un unique déplacement f tel que $\begin{cases} f(A) = E \\ f(F) = C \end{cases}$

1.b) Montrons que f est une rotation.

(AF) et (EC) sont sécantes donc f est une rotation d'angle $mes(\widehat{\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EC}}) = -\frac{2\pi}{3}$

2.a) Déterminons $S_{(BC)}oS_{(BA)}(A)$ et $S_{(BC)}oS_{(BA)}(F)$

$S_{(BC)}oS_{(BA)}(A) = S_{(BC)}(A) = E,\quad S_{(BC)}oS_{(BA)}(F) = S_{(BC)}(C) = C$

Déterminons $f = S_{(BC)}oS_{(BA)}$

f est une rotation de centre B et d'angle $\theta = 2mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = -\frac{2\pi}{3}$.

b) Déterminons (Δ) pour que $f = S_{(\Delta)}oS_{(BC)}$

On a $f = R\left(B, -\frac{2\pi}{3}\right) = S_{(BE)}oS_{(BC)}$ d'où (Δ) = (BE).

3. Soit H le projeté orthogonal de G sur (BC); I et J les milieux respectifs des segments [GH] et [GB]. Soit I' = $S_{(BC)}(I)$. On pose $g = t_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)}$.

Déterminons g(I) et déduisons la nature et les éléments caractéristiques de g.

$g(I) = t_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)}(I) = t_{\overrightarrow{HG}}(I') = I$. (HG) ⊥ (BC) donc g est une symétrie orthogonale. De plus $g(H) = G$ d'où $g = S_{(D)}$ où (D) est la parallèle à (BC) passant par I.

4. Soit $h = S_{(CA)}of$

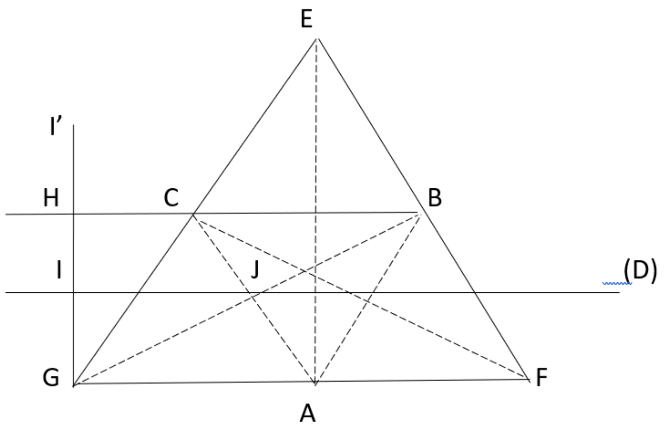
4.a) Caractérisons $S_{(CA)}oS_{(\Delta)}$

$S_{(CA)}oS_{(\Delta)} = S_{(CA)}oS_{(\mathrm{BE})} = t_{\overrightarrow{BG}}$

4.b) Déduisons que h est une symétrie glissée.

$h = S_{(CA)}of = S_{(CA)}oS_{(\Delta)}oS_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BG}}oS_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BH}}ot_{\overrightarrow{HG}}oS_{(BC)} = t_{\overrightarrow{BH}}oS_{(D)}$

d'où h est une symétrie glissée d'axe (D) dirigée par $\overrightarrow{BH}$.



Exercice 8:

ABC est un triangle isocèle rectangle en A et direct.

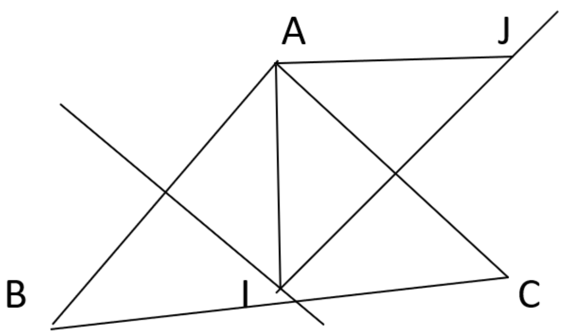
On désigne par $r_A = R(A,\frac{\pi}{2})$, $r_B = R(B,\frac{\pi}{4})$, $r_C = R(C,,\frac{\pi}{4})$,

1) Soit A' = $r_C(A)$
   a) Montrer que A' ∈ (BC)
   b) En déduire l'image de la droite (AC) par la rotation r_c
   c) Donner l'image de (BC) par r_B et celle de (AB) par r_A
2) On pose f = $r_A o r_B o r_C$
   a) Montrer que f est une rotation;
   b) Soit M le centre de f. Montrer que M ∈ (AC)
3) Soit I le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC et J = $r_A(I)$
   a) Caractériser $r_B o r_c$
   b) Montrer que M est le milieu de [IJ].
4) Soit N = $r_A^{-1}(M)$
   a) Montrer qu'il existe un seul déplacement g telle que $g(M) = N$ et g(J) = I
   b) Caractériser g
   c) Déterminer l'image par g de (AC).

Solution 8 :

ABC est un triangle isocèle rectangle en A et direct.

On désigne par $r_A = R(A,\frac{\pi}{2})$, $r_B = R(B,\frac{\pi}{4})$, $r_C = R(C,,\frac{\pi}{4})$,



1) Soit A' = $r_C(A)$

1.a) Montrons que A’ ∈ (BC)

$A' = r_C(A)$ donc $mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}}) = \frac{\pi}{4}$ d’où A’ ∈ (BC).

1.b) $r_C(AC) = (A'C)$

1.c) $r_B(BC) = (BA)$, $r_A(AB) = (AC)$

2) On pose $f = r_A o r_B o r_C$

2.a) Montrons que f est une rotation.

f est la composée de trois rotations donc es tune rotation d’angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi$

2.b) Soit M le centre de f. Montrons que M ∈ (AC)

$f(C) = r_A o r_B o r_C(C) = r_A o r_B(C) = r_A(A) = A$ d’où M ∈ (AC)

3) Soit I le point d’intersection des médiatrices du triangle ABC et J = $r_A(I)$

3.a) Caractérisons $r_B o r_c$

$r_B o r_c$ est une rotation d’angle $\frac{\pi}{2}$. De plus $r_B o r_c(C) = r_B(C) = A$ et $r_B o r_c(A) = r_B(B) = B$.

Ainsi le centre de $r_B o r_c$ est le point d’intersection des médiatrices de [CA] et [AB], soit I.

3.b) Montrons que M est milieu [IJ]

$f(I) = r_A o r_B o r_C(I) = r_A(I) = J$ or f est une symétrie de centre M d’où M est milieu de [IJ].

4. Soit N = $r_A^{-1}(M)$

4.a) On a $r_A(N) = M$ et J = $r_A(I)$ d’où IN = MJ d’où il existe un unique déplacement g

$\begin{cases} g(M) = N \\ g(J) = I \end{cases}$ et $g = r_A^{-1}$.

4.c) Déterminons $g(AC)$

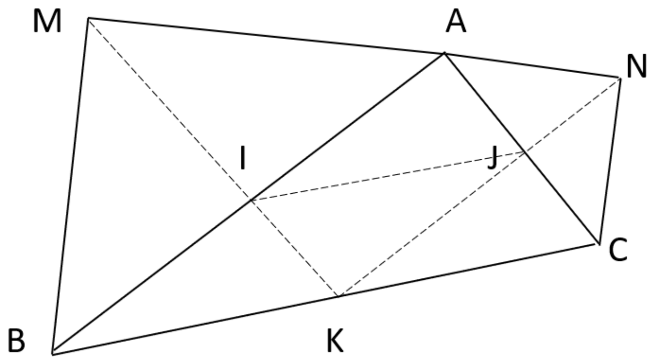
$r_A^{-1}(C) = B$ d’où $g(AC) = (AB)$

Exercice 9:

ABC est un triangle direct. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC]. On construit extérieurement à ce triangle les triangles ABM et CAN rectangles et isocèles en M et N.

1) a) Montrer qu’il existe un unique déplacement f tel que f(I) =J et f(M) = K
   b) Déterminer l’angle de f
   c) Montrer que f(K) = N
   d) Déduire que le centre O de f est le milieu de [MN]

Solution 9 :



1.a) Montrons qu'il existe un unique déplacement f tel $que\ f(I) = J$ et $f(M) = K$

ABM est rectangle isocèle en M donc AM = BM. Notons $AM = BM = a$ alors $AB = a\sqrt{2}$

De la formule de l'aire du triangle ABM, on déduit que $IM \times AB = AM \times BM$ d'où

$IM = \frac{AM \times BM}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $JK = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ donc $IM = JK$ par conséquent, il existe un unique déplacement f tel que $f(I) = J$ et $f(M) = K$

1.b) Déterminons l'angle

Notons θ = l'angle de la rotation. $\theta = mes\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{JK}}\right) = \frac{\pi}{2}$

1.c) Montrons que f(K) = N

On a MK = MI + IK, or IK = $\frac{AC}{2}$

ACN est rectangle isocèle en N donc AN = CN. Notons $AN = CN = b$. AC = $b\sqrt{2}$ d'où

$IK = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. D'autre part, KN = JK + JN or par analogie à la question 1.a), $JN = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Il s'en suit donc que IM = JK et IK = JN donc MK = KN. De plus $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{KN}}\right) = \frac{\pi}{2}$ d'où $f(K) = N$.

1.d) Déduisons que le centre O de f est le milieu de [MN].

f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc fof est la rotation de centre O et d'angle π, Soit la symétrie centrale de centre O. De plus $fof(M) = f(K) = N$ d'où O est le milieu de [MN].

APPLICATIONS DE L'ESPACE

Exercice 1 :

Soit le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x-2y+z=1$ et la droite (D) de représentation paramétrique :
$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1-2\lambda , \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2+\lambda \end{cases}$ et le point A(2 ; -3 ; 1).

1. Démontrer que (D) est orthogonale à $(\mathcal{P})$ en un point I dont on précisera les coordonnées.
2. Déterminer les images respectives A_1 et A_2 de A par les projections orthogonales sur $(\mathcal{P})$ et (D).
3. Vérifier AA_1IA_2 est un rectangle.

Solution 1 :

Soit le plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x-2y+z=1$ et la droite (D) de représentation paramétrique :

$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1-2\lambda , \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2+\lambda \end{cases}$ et le point A(2 ; -3 ; 1).

1. Démontrons que (D) est orthogonale à $(\mathcal{P})$.

Notons $\vec{n}$ est le vecteur normal de $(\mathcal{P})$, $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il est également le vecteur directeur de (D)

donc (D) est orthogonale à $(\mathcal{P})$.

Soit $I(a,b,c)$ (D)$\cap$ $(\mathcal{P})$ alors $\begin{cases} a=3+\lambda \\ b=-1-2\lambda \\ c=2+\lambda \\ a-2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 3+\lambda-2(-1-2\lambda)+2+\lambda=1 \Leftrightarrow$

$6\lambda+7=1 \Leftrightarrow \lambda=-1$ d'où $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$ $I(2;1;1)$

2. Déterminons les projections orthogonales A_1, A_2 de A sur $(\mathcal{P})$ et (D)

On a : $\begin{cases} \overrightarrow{AA_1}=\lambda\vec{n} \\ A_1 \in (\mathcal{P}) \end{cases}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

$\overrightarrow{AA_1}=\lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-3-2\lambda, \\ z=1+\lambda \end{cases}$ $A_1 \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow 2+\lambda-2(-3-2\lambda)+1+\lambda=1 \Leftrightarrow$

$6\lambda+9=1 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{4}{3}$ donc $A_1\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On a $\begin{cases} A_2 \in (D) \\ \overrightarrow{AA_2}.\vec{u}=0 \end{cases}$ où $\vec{u}$ est le vecteur directeur de (D).

$A_2 \in (D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda, \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ $\overrightarrow{AA_2}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y+3 \\ z-1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2) - 2(y+3) + z -$
$1 = 0 \Leftrightarrow (3 + \lambda - 2) - 2(-1 - 2\lambda + 3) + 2 + \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\lambda - 2 = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{3}$ d'où

$\begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases}$ donc $A_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$

3. Vérifions que AA_1IA$_2$ est un rectangle. Il suffit de vérifier que $\begin{cases} \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_2I} \\ \overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{A_1I} = 0 \end{cases}$

$\overrightarrow{AA_1}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{A_2I}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_2I}$ donc AA_1IA$_2$ est un parallélogramme.

De plus, $\overrightarrow{A_1I}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{A_1I} = -\frac{-16+32-16}{9} = 0$ d'où AA_1IA$_2$ est un rectangle.

Exercice 2 :

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $x + y + z = 3$.
Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$.

Solution 2 :

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $x + y + z = 3$.

Déterminons l'expression analytique de la projection orthogonale sur $(\mathcal{P})$.

Soit $M(x, y, z) \in (\mathcal{P})$, H$(x', y', z')$ le projeté orthogonale de M sur $(\mathcal{P})$. $\vec{n}(1, 1, 1)$ le vecteur normal de $(\mathcal{P})$.

On a $\overrightarrow{MH} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = \lambda \\ y' - y = \lambda \\ z' - z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda + x \\ y = \lambda + y \\ z = \lambda + z \end{cases}$

H$\in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \lambda + x + \lambda + y + \lambda + z = 3 \Leftrightarrow 3\lambda = 3 - (x + y + z) \Leftrightarrow \lambda = 1 - \frac{x+y+z}{3}$

D'où $\begin{cases} x' = 1 - \frac{x+y+z}{3} + x \\ y' = 1 - \frac{x+y+z}{3} + y \\ z' = 1 - \frac{x+y+z}{3} + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{2x-y-z+3}{3} \\ y' = \frac{-x+2y-z+3}{3} \\ z' = \frac{-x-y+2z+3}{3} \end{cases}$

Exercice 3 :

Soit les plans ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$') d'équations respectives : $2x + 3y + z + 2 = 0$ et $2x + 3y + z - 2 = 0$.

1. Vérifier que ces deux plans sont parallèles.
2. En déduire qu'il existe une translation dont on déterminera le vecteur qui transforme ($\mathcal{P}$) en ($\mathcal{P}$').

Solution 3 :

Soit les plans ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$') d'équations respectives : $2x + 3y + z + 2 = 0$ et $2x + 3y + z - 2 = 0$.

1. Vérifions que ces deux plans sont parallèles.

Les deux plans ont le même vecteur normal et le point (-1 ; -1 ; 3) ∈ ($\mathcal{P}$) et ∉ ($\mathcal{P}$') d'où ($\mathcal{P}$) et ($\mathcal{P}$') sont strictement parallèles.

2. Déduisons qu'il existe une translation t de vecteur $\vec{v}$ à déterminer tel que t($\mathcal{P}$)= ($\mathcal{P}$')

$\vec{v}(a, b, c)$ l'expression analytique de t est : $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$

($\mathcal{P}$) : $2x + 3y + z + 2 = 0$ et $(\mathcal{P}'): 2x' + 3y' + z' - 2 = 0$

$2x' + 3y' + z' - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x + a) + 3(y + b) + z + c - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + z + 2a + 3b + c - 2 = 0 \Leftrightarrow -2 + 2a + 3b + c - 2 = 0$ donc $2a + 3b + c = 4$ prendre $a = 1; b = 1 \; et \; c = -1$ d'où $\vec{v}(1; 1; \, -1)$.

Exercice 4 :

ABCD est un tétraèdre.

Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport 2.

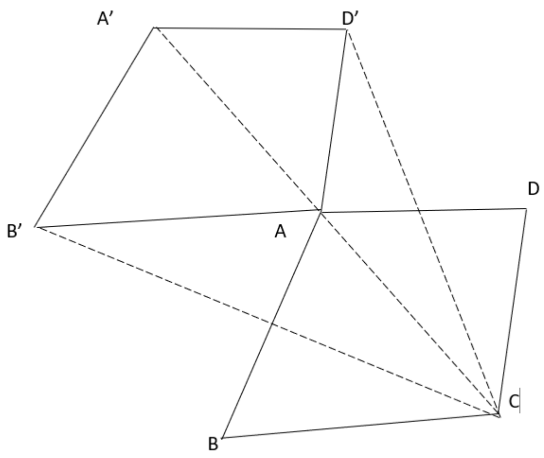
1. Construire l'image de ABCD par $h_2 o h_1$.
2. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $h_2 o h_1$.

Solution 4 :

ABCD est un tétraèdre.

Soit h_1 l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport 2.

1. Construisons l'image de ABCD par $h_2 o h_1$



2. Nature et éléments caractéristiques de $h_2 o h_1$

$k_2 \times k_1 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ et $h_2oh_1(C) = A$ donc h_2oh_1 est la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$.

Exercice 5 :

Soit (Π) le plan d'équation $2x + y - z = 3$ et (Δ) la droite orthogonale à (Π) passant par O.

1. Déterminer l'expression analytique des transformations suivantes :
   a) réflexion s_Π
   b) demi – tour s_Δ
   c) $s_\Delta o s_\Pi$
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s_\Delta o s_\Pi$.

Solution 5 :

Soit (Π) le plan d'équation $2x + y - z = 3$ et (Δ) la droite orthogonale à (Π) passant par O.

1.a) Déterminons l'expression analytique de la réflexion s_Π.

Soit $M(x, y, z) \in (\mathscr{E})$, $M'(x', y', z')$ son image par s_Π

On a : $\begin{cases} (MM') \perp (\pi) \\ I\ mil[MM'] \in (\pi) \end{cases}$

$$(MM') \perp (\pi) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2\lambda \\ y' - y = \lambda \\ z' - z = -\lambda \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x' = x + 2\lambda \\ y' = y + \lambda \\ z' = z - \lambda \end{cases}$$

$$\text{I} \in (\pi) \Leftrightarrow 2\left(\frac{x+x'}{2}\right) + \left(\frac{y+y'}{2}\right) - \left(\frac{z+z'}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow 2x' + y' - z' + 2x + y - z = 6 \Leftrightarrow$$

$$2x + 4\lambda + y + \lambda - z + \lambda + 2x + y - z = 6 \Leftrightarrow 6\lambda + 4x + 2y - 2z = 6 \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{-2x-y+z+3}{3} \text{ donc } \begin{cases} x' = x + 2\left(\frac{-2x-y+z+3}{3}\right) \\ y' = y + \frac{-2x-y+z+3}{3} \\ z' = z - \frac{-2x-y+z+3}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{-x-2y+2z+6}{3} \\ y' = \frac{-2x+2y+z+3}{3} \\ z' = \frac{2x+y+2z-3}{3} \end{cases}$$

1.b) Expression analytique du demi – tour s_Δ

Soit $M(x, y, z) \in (\mathscr{E})$, $M'(x', y', z')$ son image par s_Δ

On a : $\begin{cases} (MM') \perp (\Delta) \\ I = mil[MM'] \in (\Delta) \end{cases}$

$(MM') \perp (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}.\vec{u} = 0$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (Δ). (Δ)⊥ (Π) donc $\vec{u} = \vec{n}$

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{u} = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2(x' - x) + y' - y - z' + z = 0$$

$$\text{I} \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 2\lambda \\ \frac{y+y'}{2} = \lambda \\ \frac{z+z'}{2} = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4\lambda - x \\ y' = 2\lambda - y \\ z' = -\lambda - z \end{cases}$$

$2(4\lambda - 2x) + 2\lambda - 2y + \lambda + 2z = 0 \Leftrightarrow 11\lambda = 4x + 2y - 2z \Leftrightarrow \lambda = \frac{4x+2y-2z}{11}$ d'où

$$\begin{cases} x' = \frac{5x+8y-8z}{11} \\ y' = \frac{8x-7y-4z}{11} \\ z' = \frac{-4x-2y-9z}{11} \end{cases}$$

1.c) Expression analytique de $s_\Delta o s_\Pi$

$$s_\Pi \begin{cases} x' = \frac{-x-2y+2z+6}{3} \\ y' = \frac{-2x+2y+z+3}{3}, \\ z' = \frac{2x+y+2z-3}{3} \end{cases} \qquad s_\Delta \begin{cases} x' = \frac{5x+8y-8z}{11} \\ y' = \frac{8x-7y-4z}{11} \\ z' = \frac{-4x-2y-9z}{11} \end{cases}$$

$$s_\Delta o s_\Pi \begin{cases} x' = \frac{5\left(\frac{-x-2y+2z+6}{3}\right)+8\left(\frac{-2x+2y+z+3}{3}\right)-8\left(\frac{2x+y+2z-3}{3}\right)}{11} \\ y' = \frac{8\left(\frac{-x-2y+2z+6}{3}\right)-7\left(\frac{-2x+2y+z+3}{3}\right)-4\left(\frac{2x+y+2z-3}{3}\right)}{11} \\ z' = \frac{-4\left(\frac{-x-2y+2z+6}{3}\right)-2\left(\frac{-2x+2y+z+3}{3}\right)-9\left(\frac{2x+y+2z-3}{3}\right)}{11} \end{cases} \Leftrightarrow s_\Delta o s_\Pi \begin{cases} x' = \frac{-37x-2y+2z+78}{33} \\ y' = \frac{-2x-34y+z+39}{33} \\ z' = \frac{-10x-5y-28z-3}{33} \end{cases}$$

Exercice 6 :

Soit ABCDEFGH un cube de centre O, I le centre de gravité du triangle BCG.
On se propose de déterminer et construire les points d'intersection de la droite (OI) avec les plans des faces du cube.
1. Démontrer que le point d'intersection de la droite (OI) avec le plan (ADH) est le centre de gravité J du triangle AEH. Placer le point J.
2. a) Démontrer que $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{CI}$.
 b) En déduire que les droites (CD) et (IJ) sont sécantes en un point K que l'on précisera. Placer le point K.
 c) Démontrer de même que les droites (EF) et (IJ) sont sécantes en un point I', que l'on précisera. Placer le point I'.

Solution 6 :

1. Démontrons que $J = (OI) \cap (ADH)$ est le centre de gravité du triangle (AEH).

Soit S_O la symétrie de centre O.

$\begin{cases} S_O(B) = H \\ S_O(C) = E \\ S_O(G) = A \end{cases}$ Comme I est centre de gravité de BCG et que la symétrie centrale conserve le barycentre, $S_O(I)$ est le centre de gravité de AEH soit $S_O(I) = J$. Il résulte aussi de ce fait que $J \in (OI)$ d'où le résultat.

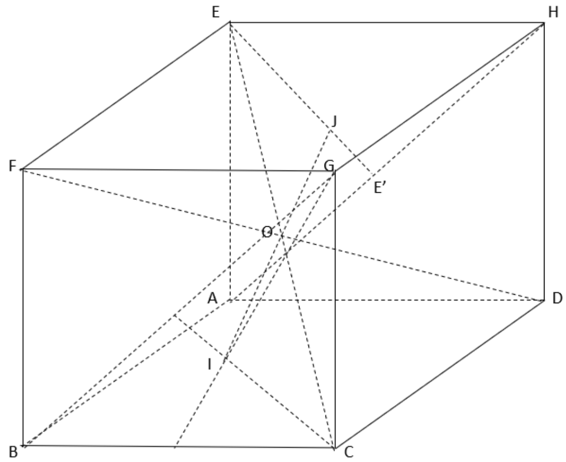
2.a) Démontrons que $\overrightarrow{DJ} = 2\overrightarrow{CI}$

Notons C' le milieu de [BG] et E' celui de [AH].

$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ et S_O conserve les distances donc $\overrightarrow{S_O(CI)} = \frac{2}{3}\overrightarrow{S_O(CC')}$ soit $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EE'}$ or $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DE'} + \overrightarrow{E'J}$ et $\overrightarrow{DE'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{E'J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$ d'om $\overrightarrow{DJ} = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CI}$.

2.b) $\overrightarrow{CI} \neq \overrightarrow{DJ}$ donc (CI) et (DJ) sont sécantes en K.

2.c) De manière analogue $\overrightarrow{FI} = 2\overrightarrow{EJ}$ donc (EF) et (IJ) sont sécantes en un point I'.



EPREUVES DE SEQUENCE 1

EPREUVE 1 :LYCEE DE BAHOUAN

Exercice 1 : 4,5points

1. Démontrer que pour tout entier naturel n$\geq 5, on\ a :$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ puis déduire le calcul $A = \sum_{k=100}^{2015} k^2$. 1,25pt
2. Soit n in entier naturel.
   a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division euclidienne de 3^n par 5. 0,5pt
   b) Déduire le reste de la division euclidienne de 3^{2035} par 5. 0,5pt
3. Démontrer par récurrence que $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11. 0,5pt
4. Déterminer l'entier naturel x tel que $\overline{53}^{base\ x} + \overline{46}^{base\ x} = \overline{132}^{base\ x}$. 0,5pt
5. Écrire $\overline{1112}^{base\ 3}$ en base 7. 0,5pt
6. Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système suivant : $\begin{cases} PGCD(a;\ b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$ 0,75pt

Solution 1 :

1. Démontrons que $\forall n \geq 5, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Raisonnons par récurrence, soit la proposition P : $\left\{\forall n \geq 5, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 5$

$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55,$

$\frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6} = 5(11) = 55$ donc $\sum_{k=1}^{5} k^2 = \frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n. montrons que P est vraie au rang n+1.

$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}) =$

$\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Donc P est vraie au rang n+1.

Conclusion : $\forall n \geq 5, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

A = $\sum_{k=100}^{2015} k^2 = \sum_{k=1}^{2015} k^2 - \sum_{k=1}^{99} k^2 = \frac{2015(2016)(4031)}{6} - \frac{99(100)(199)}{6} = 2015 \times 336 \times 4031 - 33 \times 50 \times 199 = 2\,728\,819\,890$

2.a) Déterminons, suivant les valeurs de n, le reste de la division de 3^n par 5 :

$3 \equiv 3[5]$, $3^2 \equiv 4[5]$, $3^3 \equiv 2[5]$, $3^4 \equiv 1[5]$

Si $n = 4k, 3^n \equiv 1[5]$, Si $n = 4k + 1, 3^n \equiv 3[5]$, Si $n = 4k + 2, 3^n \equiv 4[5]$

Si $n = 4k + 3, 3^n \equiv 2[5]$.

2.b) Déduisons le reste de la division de 3^{2035} par 5.

$3^{2035} = 3^{508\times4+3} \equiv 2[5]$ donc le reste est 2.

3. Démontrons par récurrence que $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, 9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11k\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 0$

$9^1 + 2^1 = 11 = 11(1)$ d'où P est vraie au rang n = 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n. Montrons que P est vraie au rang $n + 1$

$9^{n+2} + 2^{6n+7} = 9.9^{n+1} + 2^6.2^{6n+1} = 9.9^{n+1} + 64.(11k - 9^{n+1}) = 64.11k +$

$(-64 + 9).9^{n+1} = 11(64k - 5.9^{n+1}) = 11k'$ d'où P est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

4. Déterminons x tel que $\overline{53}^{base\ x} + \overline{46}^{base\ x} = \overline{132}^{base\ x}$.

$\overline{53}^x = 3 + 5x,\qquad \overline{46}^x = 6 + 4x,\qquad \overline{132}^x = 2 + 3x + x^2$

$\overline{53}^{base\ x} + \overline{46}^{base\ x} = \overline{132}^{base\ x} \Leftrightarrow 3 + 5x + 6 + 4x = 2 + 3x + x^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1) = 0$ or $x > 6\ donc\ x = 7$

5. Ecrivons $\overline{1112}^3$ en base 7.

$\overline{1112}^3 = 2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 2 + 2 + 4 + 8 = 16 = \overline{22}^7$.

6. Résolvons dans $\mathbb{N}$ le système suivant : $\begin{cases} PGCD(a;\ b) = 354 \\ a + b = 5664 \end{cases}$

Posons $a = d.a'$, $b = d.b'$ où $d = pgcd(a, b)$

$a' + b' = \frac{5664}{354} = 16 \Rightarrow \begin{cases} a' + b' = 16 \\ pgcd(a', b') = 1 \end{cases}$ $d'où\ a' = 16\ et\ b' = 1$ et vice versa.

$$S_{\mathbb{N}} = \{(5664, 354); (354, 5664)\}$$

Exercice 2 : 4,5points

1. Un nombre C s'écrit $\overline{a12}^5$ en base 5
   a) Quels sont les valeurs possibles de a? 0,5pt
   b) Déterminer la valeur de a pour que C soit divisible par 3. 0,5pt
   c) On suppose a = 4. Écrire $\overline{412}^5$ en base 10 puis dans le système hexadécimal. 1pt
2. Un entier naturel A s'écrit $\overline{55}^x$ en base x et $\overline{37}^y$ en base y.

   a) Quelles sont les valeurs possibles de x ? 0,5pt

   b) Sachant de plus qu'il existe un entier naturel B qui s'écrit 121 en base x et 59 en base y, montrer que x et y vérifient le système : S $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x^2 + 2x - 5y = 8 \end{cases}$ 0,5pt

   c) Résoudre le système S. 1pt

   d) Écrire alors A et B dans le système décimal. 0,5pt

Solution 2 :

1. $C = \overline{a12}^5$

a) $a \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

b) Valeur de a pour que $C \equiv 0[3]$

$C = 2 + 5 + 25a = 25a + 7$

$25 \equiv 1[3]$, $7 \equiv 2[3]$ donc $C \equiv a + 2[3]$

$C \equiv 0[3] \Leftrightarrow a + 2 \equiv 0[3]$ donc $a \in \{1; 4\}$

c) On suppose que $a = 4$

Ecrivons $\overline{412}^5$ en base 10.

$\overline{412}^5 = 100 + 5 + 2 = 107$

Ecrivons $\overline{412}^5$ en base 16

$107 = 16 \times 6 + 11$ donc $\overline{412}^5 = \overline{6B}^{16}$

2.a) Les valeurs possibles de x.

$x \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

2.b) Montrons que x et y vérifient S : $\begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ x^2 + 2x - 5y = 8 \end{cases}$

$\overline{55}^x = \overline{37}^y \Leftrightarrow 5 + 5x = 7 + 3y \Leftrightarrow 5x - 3y = 2$

$\overline{121}^x = \overline{59}^y \Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 = 9 + 5y \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5y = 8$ d'où le résultat.

1.c) Résolvons S

$5x - 3y = 2 \Leftrightarrow 3y = 5x - 2 \Leftrightarrow y = \frac{5x-2}{3}$

$x^2 + 2x - 5y = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5\left(\frac{5x-2}{3}\right) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 25x + 10 = 24 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 19x - 14 = 0$

$\Delta = 361 + 4(3)(14) = 361 + 168 = 529$

Donc $x_1 = \frac{19-\sqrt{529}}{6} = -\frac{2}{3}$ et $x_2 = \frac{19+\sqrt{529}}{6} = 7$

Or $x \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ donc $x = 7$, $\quad y = \frac{5(7)-2}{3} = 11$ d'ù $S = \{(7; 11)\}$

d) Ecrivons A et B dans le système décimal

$A = 5 + 5x = 40, \quad B = (x + 1)^2 = 64$

PROBLEME : 11points

Les parties A et B sont indépendantes. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A : 5points

1. Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.
   a) Dresser rapidement le tableau de variation de f. 0,5pt
   b) Montrer que f est bijective de [0 ; +∞[vers un intervalle J que l'on précisera. 0,5pt
   c) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une unique solution $\alpha \epsilon [0; 1]$ dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près. 1pt
2. Tracer la courbe représentative de f et déduire le signe de f suivant les valeurs de x. 1,5pt
3. Tracer sur J et dans le même repère, la courbe de la bijection réciproque f^{-1} de f. 0,5pt
4. Déduire de f le tableau de variation de la fonction définie sur ℝ par $F(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x + 1$. 1pt

<u>PARTIE B</u> : 6points

1. Soit la fonction φ définie sur ℝ par $\varphi\,(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.
   a) Démontrer que pour tout t $\epsilon \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\varphi\,(\tan t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2}$. 0,5pt
   b) En déduire le signe de $\varphi\,(x)$ pour tout x ∈ ℝ. 0,5pt
2. Soit la fonction g définie sur ℝ par $g(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$ et (Cg) sa courbe représentative.
   a) Calculer les limites en −∞ et en +∞ de puis interpréter le résultat en +∞. 1pt
   b) Calculer la dérivée g′ de g ; déduire de la question 1b) le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. 1,5pt
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$ puis déduire l'asymptote oblique à (Cg). 1pt
   d) Donner la position de (Cg) par rapport à son asymptote. 0,5pt
   e) Tracer soigneusement (Cg). 1pt

<u>Solution Problème :</u>

Partie A :

1. Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$

1.a) Dressons le T.V de f

$D_f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

f st continue et dérivable sur ℝ et on a :

$f'(x) = 6x^2 + 2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = -\frac{1}{3}$

$f(0) = -1$ et $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{27} + \frac{1}{9} - 1 = \frac{-2+3-27}{27} = -\frac{26}{27}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue et strictement croissante de [0 ; +∞[donc réalise une bijection de [0 ; +∞[vers [-1 ; +∞[.

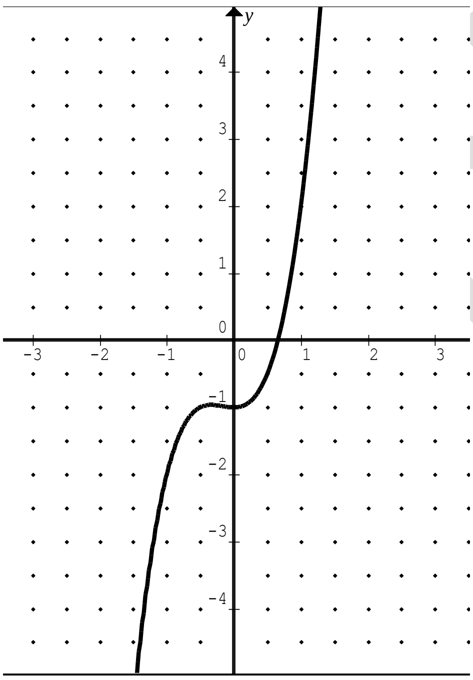
1.c) Subséquemment à la question précédente et $f(0) \times f(1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

$f(0{,}5) = -0{,}5$; $f(1) = 2$, $f(0{,}7) = 0{,}176$; $f(0{,}6) = -0{,}2$ donc $0{,}6 \leq \alpha \leq 0{,}7$

<u>Signe de f</u>

$\forall x \in]-\infty; \alpha[, f(x) < 0$ et $\forall x \in [\alpha; +\infty[, f(x) \geq 0$

Tracé de (C_f)



4. Déduisons le tableau de variation de F

$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)$		$-$	|	$+$	
$F(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$F(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B :

1. Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi\,(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

1.a) Démontrons que $\forall t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \varphi\,(\tan t) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin t}{2}$.

$\varphi(tant) = -\frac{1}{2} + \frac{tant}{2\sqrt{1+tan^2t}} = -\frac{1}{2} + \frac{tant}{2\left(\frac{1}{cost}\right)} = -\frac{1}{2} + \frac{sint}{2}$

1.b) Etudions le signe de $\varphi(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[, \varphi(tant) \leq 0$

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

2.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty + \infty\ (F.I)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{4}(x^2+1)-\frac{x^2}{4}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{5}{4}+\sqrt{x^2+1}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{2}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{4x})}{\frac{x}{2}\left(\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ donc la droite $y = \frac{4}{3}$ est asymptote horizontale à (C_g)

2.b) $g'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = \varphi(x) \leq 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$

2.c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2} + \frac{1}{x} + \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x} = -1$

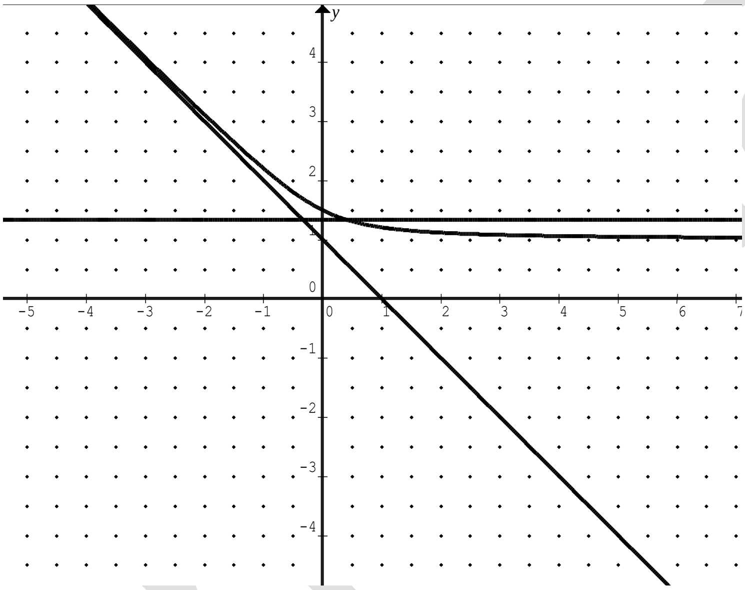
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) + x = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2} + 1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2} = -\infty + \infty$ F.I

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2-\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}\right)^2}{\frac{x}{2}+1-\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{4}+x+1-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}}{x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{3}{4x}\right)}{x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2}\right)} = 1$$ donc la droite $y=-x+1$ est asymptote oblique à (C_g).

2.d) Position de (C_g)par rapport à son asymptote.

$g(x)-(-x+1) = -\frac{x}{2}+1+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+x-1 = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2} \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc (C_g) est au-dessus de son asymptote.

2.e) Tracé de (C_g)



EPREUVE 2 : LYCEE CLASSIQUE DE BAFOUSSAM

Exercice 1

1. Montrer par récurrence sur n, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n} p(p!) = (n+1)! - 1$. (0.5pt)
2. Soit $x \in IR\backslash\{-\frac{5}{3}\}$. Montrer par l'absurde que $\frac{-5x+7}{3x-5} \in IR\backslash\{-\frac{5}{3}\}$. (0.25pt)
3. Montrer par congruence que : $\forall n \in N$, $17^{4n+1} - 2 \times 3^{2n+1}$ est un multiple de 11. Puis, en déduire que $\forall n \in N$, $17^{4n+1} + 3^{2n+3}$ est divisible par 11. (0.75pt)
4. Soit un entier naturel non nul.
   (a) Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair. (0.5pt)
   (b) Montrer que si n^2 est impair, alors n est impair. (0.25pt)
5. Soit p et q deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$.
   (a) Démontrer que p est impair. (0.25pt)
   (b) Démontrer que q est pair. (0.25pt)
6. Soit un entier naturel M s'écrivant $\overline{xyzzyx}$ dans le système décimal.
   (a) Démontrer que 11 est un diviseur de M. (0.25pt)
   (b) i. Déterminer x et z pour que M soit divisible par 5 et 7. (0.5pt)
   ii. En déduire que M est un multiple de 35. (0.25pt)
   iii. Déterminer y pour que 3 soit diviseur de M. (0,5pt)

Solution 1 :

1. Montrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n} p(p!) = (n+1)! - 1$

Soit la proposition P définie par : $\left\{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n} p(p!) = (n+1)! - 1\right\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 1$

$\sum_{p=1}^{1} p(p!) = 1(1!) = 1, \quad (1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ d'où $\sum_{p=1}^{1} 1! = (1+1)! - 1$

P est vraie pour n = 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $\sum_{p=1}^{n+1} p(p!) = (n+2)! - 1$

$\sum_{p=1}^{n+1} p(p!) = \sum_{p=1}^{n} p(p!) + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$

$= (n+1+1)(n+1)! - 1 = (n+2)(n+1)! - 1$ d'où le résultat. P est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^{n} p(p!) = (n+1)! - 1$

2. Soit $x \in IR\backslash\{-\frac{5}{3}\}$. Montrons par l'absurde que $\frac{-5x+7}{3x-5} \in IR\backslash\{-\frac{5}{3}\}$

Par l'absurde, supposons que $\frac{-5x+7}{3x-5} \notin IR\backslash\{-\frac{5}{3}\} \Leftrightarrow \frac{-5x+7}{3x-5} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 3(-5x+7) = -5(3x-5) \Leftrightarrow$

$-15x + 21 = -15x + 25 \Leftrightarrow 21 = 25$ (ce qui est absurde).

3. Montrons par congruence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $17^{4n+1} - 2 \times 3^{2n+1}$ est un multiple de 11

$17 \equiv 6[11]$, $17^2 \equiv 3[11]$, $17^3 \equiv 7[11]$, $17^4 \equiv 9[11] \equiv 3^2[11]$

$17^{4n+1} = 17^{4n} \times 17 \equiv 3^{2n} \times 6[11]$ or $3^{2n} \times 6 = 3^{2n} \times 2 \times 3 = 2 \times 3^{2n+1}$

$17^{4n+1} \equiv 2 \times 3^{2n+1}[11] \Leftrightarrow 17^{4n+1} - 2 \times 3^{2n+1} \equiv 0[11]$.

Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $17^{4n+1} + 3^{2n+3}$ est divisible par 11

$3^{2n+3} = 3^{2n+1} \times 9$

$17^{4n+1} + 3^{2n+3} \equiv 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 3^{2n+1}[11] \equiv 11 \times 3^{2n+1}[11] \equiv 0[11]$ donc $\forall$ x $\in \mathbb{N}$,

$17^{4n+1} + 3^{2n+3} \equiv 0[11]$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$

4.a) Montrons que si n^2 est pair alors n est pair.

Par absurde, supposons que n est impair c'est-à-dire que $n = 2k + 1$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ donc n^2 est impair. Ce qui contredit l'hypothèse d'où n est pair.

4.b) Montrons que si n^2 impair alors n est impair.

Par absurde, supposons que n est pair. Alors $n = 2k \Leftrightarrow n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2k'$ donc n^2 est pair. Ce qui est absurde. Donc n est impair.

5. Soit p et q deux entiers naturels tels que $p^2 - 2q^2 = 1$.

5.a) Démontrons que p est impair.

$p^2 - 2q^2 = 1 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2 + 1$ donc p^2 est impair et d'après la question précédente p est impair.

5.b) Démontrons que q est pair.

$p^2 - 2q^2 = 1 \Leftrightarrow q^2 = \frac{p^2-1}{2}$,

p impair $\Leftrightarrow p = 2k + 1 \Leftrightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc $q^2 = \frac{4k^2+4k}{2} = 2k^2 + 2k$ donc

$q^2 est\ pair \Leftrightarrow q\ est\ pair$

6. Soit M = $\overline{xyzzyx}$

6.a) Démontrons que 11 est un diviseur de M.

M = $\overline{xyzzyx} = x + 10y + 100z + 1000z + 10000y + 100000x$

On sait que si n est pair $10^n \equiv 1[11]$ et si n est impair, $10^n \equiv 10[11]$ d'où $M \equiv x + 10y + z + 10z + y + 10x \equiv 11(x + y + z)[11] \equiv 0[11]$ donc 11 est un diviseur de M.

6i) Déterminons x et z pour que M soit divisible par 5 et 7.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, 10^n \equiv 0[5]$ donc $M \equiv x[5]$

$10^1 \equiv 3[7]$, $10^2 \equiv 2[7]$, $10^3 \equiv 6[7]$, $10^4 \equiv 4[7]$, $10^5 \equiv 5[7]$

$M \equiv x + 3y + 2z + 6z + 4y + 5x[7] \equiv 6x + 7y + 8z \equiv 6x + z[7]$

$\begin{cases} M \equiv x[5] \\ M \equiv 6x + z[7] \end{cases}$ donc $\begin{cases} M = x + 5k \\ M = 6x + z + 7k' \end{cases}$

$\begin{cases} M \equiv 0[5] \\ M \equiv 0[7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 0[5] \\ 6x + z \equiv 0[7] \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
$z\backslash 6x$	0	6	5	4	3	2	1
0	0	6	5	4	3	2	1
1	1	0	6	5	4	3	2
2	2	1	0	6	5	4	3
3	3	2	1	0	6	5	4
4	4	3	2	1	0	6	5
5	5	4	3	2	1	0	6
6	6	5	4	3	2	1	0

$6x + z \equiv 0[7] \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv r[7] \\ z \equiv r[7] \end{cases}$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$x \equiv 0[5]$ et $0 \leq x, y \leq 9 \Rightarrow x = z = 0$

6.ii) Déduisons que M est un multiple de 35.

M = $10y + 10000y = 10010y$

$10010 \equiv 0[7]$ et $10010 \equiv 0[5]$, $(5\Lambda 7) = 1$ donc $10010 \equiv 0[35]$

6.iii) Déterminons y pour que 3 divise M

$10010 \equiv 2[3] \Leftrightarrow M \equiv 2y[3]$

$M \equiv 0[3] \Leftrightarrow 2y \equiv 0[3] \Leftrightarrow 3/2y$ or $(2\Lambda 3) = 1$ d'après Gauss, $3/y$ soit y soit multiple de 3.

Or $y \in \{1, \ldots, 9\}$ donc $y \in \{3; 6; 9\}$

Exercice 2

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. On donne $u = -8(1 + i\sqrt{3})$
   a. Montrer que $z = \sqrt{3} - i$ est une racine quatrième de u. (0.5pt)
   b. Résoudre dans C l'équation (E) : $z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$. (1pt)

c. Donner le module et un argument de chacune des solutions de E. (1pt)

2. On considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'.

a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\bar{z}) = 0$. (0,5pt)

b. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $Im(z'\bar{z}) = 0$. (0,5pt)

c. Soit N le point d'affixe $z^2 - 1$. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit orthogonaux. (0.5pt)

d. On suppose z non nul et on considère le point P d'affixe $\frac{1}{z^2} - 1$.

i. Montrer que $(\frac{1}{z^2} - 1)\,\overline{z^2 - 1} = -\overline{z^2}|\frac{1}{z^2} - 1|^2$. (0,5pt)

ii. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que O, N et P soient alignés. (0,5pt)

3. Linéariser $\cos^3(2x)\sin x$.(0.75pt)

Solution 2 :

Le plan est muni du repère orthonormal $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

1. On donne $u = -8(1 + i\sqrt{3})$

1.a) Montrons que $z = \sqrt{3} - i$ est une racine quatrième de u.

$z^4 = (\sqrt{3} - i)^4 = (\sqrt{3})^4 + 4(\sqrt{3})^3(-i) + 6(\sqrt{3})^2(-i)^2 + 4\sqrt{3}(-i)^3 + (-i)^4$

$= 9 - 12i\sqrt{3} - 18 + 4i\sqrt{3} + 1 = -8(1 + i\sqrt{3})$

1.b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$

$z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$ $z^4 = -8(1 + i\sqrt{3}) \Leftrightarrow z^4 = (\sqrt{3} - i)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{3}-i}\right)^4 = 1$

$\frac{z}{\sqrt{3}-i} = i$ ou $\frac{z}{\sqrt{3}-i} = 1$ ou $\frac{z}{\sqrt{3}-i} = -1$ ou $\frac{z}{\sqrt{3}-i} = -i$

$z_1 = i(\sqrt{3} - i)$ ou $z_0 = \sqrt{3} - i$ ou $z_2 = -\sqrt{3} + i$ ou $z_3 = -i(\sqrt{3} - i) = -1 - i\sqrt{3}$

1.c) Module et un argument de chacune des solutions de (E)

$|z_0| = |z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$;

$\arg(z_0) = -\frac{\pi}{6}$; $\arg(z_1) = \frac{\pi}{3}$; $\arg(z_2) = \frac{5\pi}{6}$; $\arg(z_3) = \frac{7\pi}{6}$

2. On considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'.

2.a) Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\bar{z}) = 0$

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0 \Leftrightarrow x'x + y'y = 0$ $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$ est d'affixe

$z'\bar{z} = (x' + iy')(x - iy) = x'x + y'y + i(xy' - x'y)$

Donc $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 0 \Leftrightarrow Re(z'z) = 0$

2.b) Montrons que O, M et M' sont alignés si et seulement si $Im(z'\bar{z}) = 0$

O, M et M' sont alignés si et seulement $Im\left(\frac{z'}{z}\right) = 0$

$\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2}$ donc $Im\left(\frac{z'}{z}\right) = Im\left(\frac{z'\bar{z}}{|z|^2}\right) = \frac{1}{|z|^2} Im(z'\bar{z}) = 0$ d'où $Im(z'\bar{z}) = 0$

2.c) Soit N le point d'affixe z^2-1. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit orthogonaux.

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit orthogonaux $\Leftrightarrow z\left(\overline{z^2-1}\right)=0 \Leftrightarrow z(\bar{z}^2-1)=0 \Leftrightarrow (x+iy)(x^2-y^2-2ixy-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-xy^2-x+2xy^2=0 \\ x^2y-y^3-y-2x^2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2+y^2-1)=0 \\ y(-x^2-y^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \; ou \; x^2+y^2=1 \\ \quad y=0 \end{cases}$ donc

$A\binom{0}{0}$, $B\binom{1}{0}$, $C\binom{-1}{0}$

2.d) On suppose z non nul et on considère le point P d'affixe $\frac{1}{z^2}-1$.

i) Montrons que $(\frac{1}{z^2}-1)\,\overline{z^2-1}=-\bar{z}^2|\frac{1}{z^2}-1|^2$

$(\frac{1}{z^2}-1)\,\overline{z^2-1}=\left(\frac{1}{z^2}-1\right)(\bar{z}^2-1)=\frac{\bar{z}^2}{z^2}-\frac{1}{z^2}-\bar{z}^2+1$

$-\bar{z}^2|\frac{1}{z^2}-1|^2=-\bar{z}^2.\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{\frac{1}{z^2}-1}\right)=-\bar{z}^2.\left(\frac{1}{z^2.\bar{z}^2}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{\bar{z}^2}+1\right)=-\frac{1}{z^2}+\frac{\bar{z}^2}{z^2}+1-\bar{z}^2$ d'où le résultat.

ii) Déduisons l'ensemble des points M d'affixe z tels que O, N et P soient alignés.

O, N et P soient alignés $\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{z^2}-1}{z^2-1}\in\mathbb{R}$

$\frac{\frac{1}{z^2}-1}{z^2-1}=\frac{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\left(\overline{z^2-1}\right)}{(z^2-1)\left(\overline{z^2-1}\right)}=\frac{-\bar{z}^2|\frac{1}{z^2}-1|^2}{|z^2-1|^2}=\frac{-\bar{z}^2}{|z|^4}=-\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2=k\Leftrightarrow xy=0$ donc l'ensemble des points M est la réunions des droites $x=0$ et $y=0$

3. Linéarisons $\cos^3(2x)\sin x$

$\cos^3(2x)\sin x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)=\left(\frac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)=\frac{e^{i4x}+3e^{i2x}+3+e^{-2ix}-e^{i2x}-3-3e^{-2ix}-e^{-4ix}}{16i}=\frac{e^{i4x}-e^{-i4x}+2(e^{i2x}-e^{-2ix})}{16i}=\frac{\sin 4x+2\sin x}{8}$

Probleme

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives non nulles a et b.

1. a) Démontrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $\bar{a}b$ est un nombre réel. (0.5pt)

   b) Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}\in IR \;\Leftrightarrow\; \bar{a}b\in IR \; ou \; |a|=|b|$. (0,75pt)

   2. On suppose que $\bar{a}b\notin IR$ et $|a|=|b|=1$.

Démontrer que $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel strictement positif. (0,75pt)

3. Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

a. Calculer en fonction de z_1 et z_2, l'affixe z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_1|) ; (M_2, |z_2|)\}$. (0,5pt)

b. Démontrer que $\frac{z^2}{z_1 z_2}$ est un nombre réel. (0.5pt)

c. En déduire que la droite (OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{M_1OM_2}$. (0,75pt)

PARTIE B

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points $A(1;6;4)$, $B(2;5;3)$, $C(3;1;1)$ et $D(8;1;7)$. On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. a) Déterminer les coordonnées de $\vec{N}$. (0,5pt)
   b) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier votre réponse. (0,5pt)
   c) Déterminer l'aire du triangle ABC. (0,5pt)
   d) Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$. (0,5pt)

2. Soit (Δ) la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}\,(2;-1;3)$.
   a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonal au plan (ABC). (0,5pt)
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (0,5pt)
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ). (0,5pt)
   d) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de (Δ) et du plan (ABC). (0,5pt)

3. Soit (P_1) le plan d'équation $x + y + z - 6 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.
   a) Démontrer que les plan (P_1) et (P_2) sont sécants. (0,5pt)

   b) Vérifier que la droite (d) intersection de (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases} \quad \text{si } t \in IR$$

   c) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ? (0,5pt)

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. (0,5pt)

Solution Problème

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives non nulles a et b.

1.a) Démontrons que O, A et B sont alignés si et seulement si $\bar{a}b$ est un nombre réel

O, A et B sont alignés $\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{b.\bar{a}}{a.\bar{a}} = \frac{b.\bar{a}}{|a|^2} \in \mathbb{R}$ d'où $b.\bar{a} \in \mathbb{R}$

1.b) Démontrons que $\frac{(a+b)^2}{ab} \in IR \Leftrightarrow \bar{a}b \in IR \text{ ou } |a| = |b|$

$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = \frac{a.\bar{b}}{|b|^2} + \frac{b.\bar{a}}{|a|^2} + 2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a.\bar{b}}{|b|^2} + \frac{b.\bar{a}}{|a|^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{a}b \in IR \text{ ou } |a| = |b|$

2. On suppose que $\bar{a}b \notin IR$ et $|a| = |b| = 1$

Démontrons que $\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}^*{}_+$

$$\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a.\bar{b}}{|b|^2} + \frac{b.\bar{a}}{|a|^2} + 2 = a.\bar{b} + b.\bar{a} + 2 = a.\bar{b} + \overline{a.\bar{b}} + 2 = 2Re\left(a.\bar{b}\right) + 2 \in \mathbb{R}$$

Or $\left|Re\left(a.\bar{b}\right)\right| \leq \left|a.\bar{b}\right| = |a|.|b| \Leftrightarrow Re\left(a.\bar{b}\right) \leq 1$ donc $2Re\left(a.\bar{b}\right) + 2 > 0$ donc $\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}^*{}_+$

3. Soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 tels que les points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

3.a) Calculons en fonction de z_1 et z_2, l'affixe Z du barycentre I du système $\{(M_1, |z_1|) ; (M_2, |z_2|)\}$.

$Z = \frac{|z_1|z_1+|z_2|z_2}{|z_1|+|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_1|+|z_2|}z_1 + \frac{|z_2|}{|z_1|+|z_2|}z_2$

3.b) Démontrons que $\frac{z^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$

$\frac{z^2}{z_1z_2} = \frac{\left(\frac{|z_1|z_1+|z_2|z_2}{|z_1|+|z_2|}\right)^2}{z_1z_2} = \frac{\frac{|z_1|^2z_1^2+2|z_1||z_2|z_1z_2+|z_2|^2z_2^2}{(|z_1|+|z_2|)^2}}{z_1z_2} = \frac{|z_1|^2z_1}{z_2(|z_1|+|z_2|)^2} + \frac{|z_2|^2z_2}{z_1(|z_1|+|z_2|)^2} + 2\frac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$

$= \frac{|z_1|^2}{(|z_1|+|z_2|)^2}\frac{z_1}{z_2} + \frac{|z_2|^2}{(|z_1|+|z_2|)^2}\frac{z_2}{z_1} + 2\frac{|z_1||z_2|}{(|z_1|+|z_2|)^2}$

Partie B :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.. On considère les points $A(1;6;4)$, $B(2;5;3)$, $C(3;1;1)$ et $D(8;1;7)$. On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1.a) Coordonnées de $\vec{N}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{N} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$

1.b) $\vec{N} \neq \vec{0}$ donc A, B et C sont non alignés.

1.c) Déterminons l'aire du triangle ABC

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\vec{N}\right\| = \frac{\sqrt{4+1+9}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}U.A$

1.d) Déterminons le volume du tétraèdre ABCD

$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.\vec{N}\right| = \frac{1}{6}|-14-5-9| = \frac{28}{6}u.v$

2. Soit (Δ) la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}\ (2; -1; 3)$.

2.a) Démontrons que $(\Delta) \perp$ (ABC)

$\vec{u} = -\vec{N}$ donc $(\Delta) \perp$ (ABC).

2.b) Equation cartésienne du plan (ABC)

$\vec{N}$ est vecteur normal de (ABC)

$ABC: -2x + y - 3z + d = 0, \qquad A \in (ABC) \Leftrightarrow -2(1) + 6 - 3(4) + d = 0 \Leftrightarrow$

$d = 2 - 6 + 12 = 8$ d'où $(ABC): -2x + y - 3z + 8 = 0$

2.c) Représentation paramétrique de(Δ)

$(\Delta): \begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = 1 - t \, , t \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 3t \end{cases}$

2.d) Coordonnées de $K = (\Delta) \cap (ABC)$

Soit (a, b, c) les coordonnées de K.

On a $\begin{cases} a = 8 + 2t \\ b = 1 - t \\ c = 7 + 3t \end{cases}$ et $-2a + b - 3c + 8 = 0$

$\Rightarrow -2(8 + 2t) + 1 - t - 3(7 + 3t) + 8 = 0 \Leftrightarrow (-4 - 1 - 9)t - 16 + 1 - 21 + 8 = 0$

$t = \frac{-28}{-14} = 2$ d'où $K\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$

3. Soit $(P_1) : x + y + z - 6 = 0$ et $(P_2) : x + 4y - 7 = 0$.

3.a) Démontrons que (P_1) et (P_2) sont sécants.

$\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur normal de (P_1) et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ celui de (P_2)

$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc (P_1) et(P_2)sont sécants.

3.b) Vérifions que $(d) = (P_1) \cap (P_2)$ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$

$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est vecteur directeur de (d). De plus, $-1 + 2 + 5 - 6 = 0$, $-1 + 8 - 7 = 0$ donc le point I$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in (d)$ d'où le résultat.

3.c) $(\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}).\vec{N} = 8 + 1 - 9 = 0$ et $-2(8) + 1 - 3(7) + 8 = -16 - 21 + 9 = -28 \neq 0$ donc (d) et (ABC) sont strictement parallèles.

4. Nature et éléments caractéristiques de la sphère (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + z^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = (3)^2$ donc (S) est une sphère de centre $E\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 3.

EPREUVES DE SEQUENCE 2

EPREUVE 1 : DELEGATION DU LITTORAL

Exercice 1 : (5 points) / Série C uniquement

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n+1} + 2 \text{ x } 4^{3n+1}$ est divisible par 11. 1,5pt

2.a) Soit l'ensemble H = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}

Déterminer toutes les paires {a, b} d'éléments de H telles que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1. 1pt

2.b) Démontrer que si n ∈ IN et n ≥ 3, alors (n+1) ! + 1 est impair. 0,75pt

2.c) Démontrer que l'entier (15–1) ! + 1 n'est pas divisible par 15. 0,75pt

2.d) Déduire de 2.a) que l'entier (11 – 1) ! + 1 est divisible par 11. 1pt

Solution 1 : série (C)

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$

Soit la proposition P définie par $\{\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]\}$

Montrons que P est vraie pour $n = 0$

$3^1 + 2 \times 4^1 = 11 \equiv 0[11]$ donc P est vraie au rang $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n + 1$ i.e. montrons que $3^{2n+3} + 2 \times 4^{3n+4} \equiv 0[11]$

$3^{2n+3} + 2 \times 4^{3n+4} = 9.3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+4} = 9(11k - 2 \times 4^{3n+1}) + 2 \times 4^{3n+4} =$

$9 \times 11k + (128 - 18)4^{3n+1} = 11(9k - 10 \times 4^{3n+1})$ d'où P est vraie au rang $n + 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n+1} + 2 \times 4^{3n+1} \equiv 0[11]$

a) Soit l'ensemble H = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10}

$(a, b) \in \{(2,6); (3,4); (5,9); (7,8)\}$

1.b) Démontrons que si n est pair et $n \geq 3$ alors $(n + 1)! + 1$ impair

$n\, pair \Leftrightarrow n = 2k \Rightarrow (n + 1)! + 1 = (2k + 1)! + 1$

$(2k + 1)!$ Est le produit d'au moins un nombre pair avec un nombre impair alors $(2k + 1)!$ est pair. D'où $(n + 1)! + 1 = (2k + 1)! + 1$ est impair.

c) Démontrons que $(15 - 1)! + 1$ n'est pas divisible par 15.

On sait que $14! \equiv 0[3]$ et $14! \equiv 0[5]$ or $(5\Lambda 3) = 1 \Rightarrow 14! = (15 - 1)! \equiv 0[15]$ d'où $(15 - 1)! + 1 \equiv 1[15]$. Cqfd.

2.d) Déduisons que $(11 - 1)! + 1 \equiv 0[11]$

$10! = (3 \times 4).(2 \times 6).(5 \times 9).(7 \times 8).(1 \times 10) \equiv 10[11] \Leftrightarrow (11 - 1)! + 1 = 10! + 1 \equiv 0[11]$.

Exercice 1 : (5 points) / Série E uniquement

Soit g la fonction définie sur IR par g(x) = $x^3 - 3x + 1$

Étudier les variations de g. 1,5pt

Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet trois solutions distinctes. 0,75pt

Soit a un nombre réel. Calculer $cos3a$ en fonction de $cos\ a$. 0,75pt

En posant x = 2cosα, déduire des questions précédentes les trois solutions de l'équation g(x) = 0. 2pts

Solution 1 : série (E)

Soit $g: x \mapsto x^3 - 3x + 1$

Variations de g.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

Etude du signe de $g'(x)$

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1\ ou\ x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	|	$-$	|	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

Respectivement sur]-∞ ; -1[, [-1 ; 1] et]1 ; +∞[, g est continue et strictement monotone. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \times g(-1) < 0$; $g(-1) \times g(1) < 0$ et $g(1) \times \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 0$. Alors d'après le T.V.I., l'équation g(x)=0 admet trois solutions distinctes chacune sur chacune des intervalles cités ci-dessus.

Soit $a \in \mathbb{R}$, calculons $cos3a$ en fonction de $cosa$

$cos3a = \cos(2a + a) = cos2a.cosa - sin2a.sina = (2cos^2a - 1)cosa - 2cosa.sin^2a = (2cos^2a - 1)cosa - 2cosa(1 - cos^2a) = 4cos^3a - 3cosa$

Résolvons l'équation $g(x) = 0$

On pose $x = 2cosa$

$x^3 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 8cos^3a - 6cosa + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(4cos^3a - 3cosa) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.cos3a = -1 \Leftrightarrow cos3a = -\frac{1}{2} = cos\frac{2\pi}{3}$ d'où $\begin{cases} 3a = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 3a = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ a = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

Les mesures principales de $\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ sont $\left\{-\frac{4\pi}{9};\frac{2\pi}{9};\frac{8\pi}{9}\right\}$

Les mesures principales de $-\frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ sont $\left\{-\frac{8\pi}{9};-\frac{2\pi}{9};\frac{4\pi}{9}\right\}$

Comme $\cos(-a)=cosa$ alors les trois solutions sont

$x_0=2cos\frac{4\pi}{9}$, $x_1=2cos\frac{2\pi}{9}$ et $x_2=2cos\frac{8\pi}{9}$.

Exercice 2 : (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{e_1},\vec{e_2})$

Linéariser l'expression $\sin 3x.\cos^3 x$ où x ∈ IR. 1,5pt

En posant z = x + yi où (x , y) ∈ IR², résoudre dans ℂ l'équation : $z^2+2i\bar{z}-6=0$. 1,5pt

Pour tout z ∈ Z, on pose : $z'=\frac{1-3z}{3-iz}$

Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan, d'affixe z tels que z' soit réel. 1pt

Déterminer l'ensemble (F) des points M du plan, d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur. 1pt

Solution 2 :

Linéarisons $sin3xcos^3x$

On sait que $cos3x=4cos^3x-3cosx$ donc $cos^3x=\frac{1}{4}(cos3x+3cosx)$

$sin3xcos^3x=\frac{sin3x(cos3x+3cosx)}{4}$

$z=x+iy$, résolvons dans ℂ $z^2+2i\bar{z}-6=0$

On appelle $(x+iy)^2+2i(x-iy)-6=0$

$x^2-y^2+2ixy+2ix+2y-6=0\Leftrightarrow x^2-y^2+2y-6+i(2x+2xy)=0\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x^2-y^2+2y-6=0\\ 2x+2xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-(y-1)^2-5=0\\ x(2+2y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{y-1}{\sqrt{5}}\right)^2=1\\ x=0\ ou\ y=-1\end{cases}$

$x=0\Rightarrow y-1=\sqrt{5}\ ou\ y-1=-\sqrt{5}\Leftrightarrow y=1+\sqrt{5}\ ou\ y=1-\sqrt{5}$

Si $y=-1\Rightarrow x^2-4-5=0\Leftrightarrow x=3\ ou\ x=-3$

$S=\{(0;1+\sqrt{5});\ (0;1-\sqrt{5});\ (3;\ -1);\ (-3;\ -1)\}$

Pour tout $z\in\mathbb{C}, z'=\frac{1-3z}{3-iz}$

$z=x+iy$, $z'=x'+iy'$

$\frac{1-3z}{3-iz}=\frac{1-3(x+iy)}{3-i(x+iy)}=\frac{1-3x-3iy}{3+y-ix}=\frac{(1-3x-3iy)(3+y+ix)}{(3+y)^2+x^2}=\frac{(1-3x)(3+y)+3xy}{x^2+(3+y)^2}+i\,\frac{x(-3x-1)-9y}{x^2+(y+3)^2}$

$z'\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x(-3x-1)-9y=0\Leftrightarrow 9y=-3x^2-x$ (E) est une parabole

$z'\in i\mathbb{R}^*\Leftrightarrow(1-3x)(3+y)+3xy=0\Leftrightarrow-9x+y+3=0$ (F) est la droite d'équation

$-9x+y+3=0$.

Problème (10 points)

Ce problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et soit k un réel de l'intervalle [-1 ;1]

On note G_k le barycentre du système pondéré $\{(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)\}$ Soit I le milieu du segment [BC].

Représenter les points A, B, C et I et construire les points G_1 et G_{-1}. 1,5pt

a) Pour tout réel k de l'intervalle [-1 ; 1], exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG_k}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{G_{-1}G_1}$. 1pt

b) Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-1 ; 1] par $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$, Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation. 1,5pt

c) Déduire de 2°) b) l'ensemble des points G_k lorsque k décrit l'intervalle [-1 ; 1]. 1pt

Partie B

Soit la fonction h définie sur [0 ; +∞[par : $h(x) = x^2 - 32\sqrt{x} + 31$

En posant $q(x) = \frac{h(x)}{x^2}$, calculer la limite de q en +∞, puis la limite de h en +∞. 1pt

Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation. 1,75pt

Démontrer que l'équation h(x) = 0 admet deux solutions et deux seulement, Dont l'une est entière et évidente et l'autre notée x_0 est telle que $x_0 \in [7{,}5 ; 7{,}6]$. 1,75pt

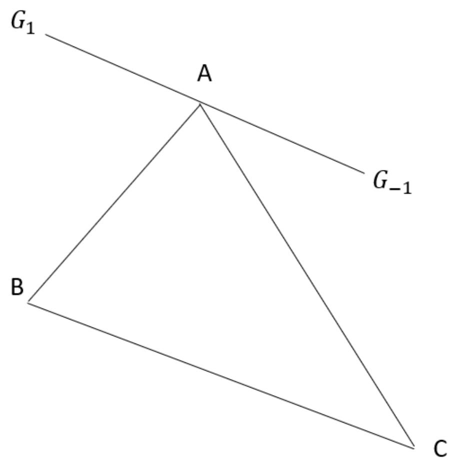
Résoudre dans IR l'inéquation h(x) ≤ O. 0,75pt

Solution Problème :

Partie A :

Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace et soit k un réel de l'intervalle [-1 ;1]

$G_k = bar\{(A, k^2+1), (B, k), (C, -k)\}$; $I = bar\{(B, 1); (C, 1)\}$



$2\overrightarrow{AG_{-1}} - \overrightarrow{BG_{-1}} + \overrightarrow{CG_{-1}} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG_{-1}} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{AG_{-1}} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AG_{-1}}$ donc $\overrightarrow{G_{-1}G_1} = \overrightarrow{CB}$

a) Exprimons $\overrightarrow{AG_k}$ en fonction de $\overrightarrow{G_{-1}G_1}$

$\overrightarrow{AG_k} = \frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{AB} + \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{AC} = \frac{-k}{k^2+1}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{G_{-1}G_1}$

b) Soit la fonction f définie sur l'intervalle [-1 ; 1] par $f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$

Etudions les variations de f et dressons son T.V

$f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = -\frac{1}{2}$

f est continue et dérivable sur [-1 ; 1] car fonction rationnelle. Et on a :

$f'(x) = \frac{-(x^2+1)-2x(-x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$ $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1$

x	-1		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

Quand k décrite [-1 ; 1, G_k décrit $[G_{-1}G_1]$

Partie B :

Soit la fonction h définie sur [0 ; +∞[par : : $h(x) = x^2 - 32\sqrt{x} + 31$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{32}{x\sqrt{x}} + \frac{31}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Etudions les variations de h et le T.V

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 31$

h est continue et dérivable sur [0 ; +∞[et on a :

$h'(x) = 2x - \frac{16}{\sqrt{x}}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\sqrt{x} = 16 \Leftrightarrow x = 2$, $\qquad h(2) = 4 - 32\sqrt{2} + 31 = 35 - 32\sqrt{2}$

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	31	$\searrow$	$35 - 32\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Démontrons que $h(x) = 0$ admet deux solutions et deux seulement.

$h(1) = 0$ et h est continue et strictement croissante sur [2 ; +∞[et $h(2) \times \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < 0$

d'après le T.V.I, $\exists! \, \alpha \in [2; +\infty[\; tel \; que \; h(\alpha) = 0$

donc l'équation $h(x) = 0$ a deux solutions dont l'une évidente.

$h(7{,}5) \times h(7{,}6) \leq 0$ et h continue sur [7,5 ; 7,6] donc α ∈ [7,5 ; 7,6].

Résolvons $h(x) \leq 0$

$S = [1; \; \alpha]$

EPREUVE 2 : LYCEE DE NKOLNDA

NB *: L'épreuve comporte trois exercices et un problème. La clarté de la copie et la précision dans la rédaction seront prises en compte*

Exercice 1 : (3points)

1. Résoudre dans R l'équation :$12x^2 + 3600x - 37200 = 0$ (*). 0,75pt
2. Monsieur X doit rembourser une somme de 397200F en trois tranches. Le premier versement est de 120000F ; le deuxième versement correspond au premier versement augmenté de t% ; le troisième versement correspond au deuxième versement augmenté de t%.
   a) Montrer que t vérifie l'équation (*) ci-dessus et calculer t. 1,5pt
   b) En déduire le montant des deux derniers versements. 0,75pt

Solution 1 :

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $12x^2 + 3600x - 37200 = 0$

$x^2 + 300x - 3100 = 0$

$\Delta = 90000 + 4 \times 3100 = 102400,$ $\sqrt{102400} = 320$

$x_0 = \frac{-300-320}{2} = -310,$ $x_1 = \frac{-300+320}{2} = 10$

$S = \{-310; 10\}$

2. a) Montrons que t vérifie l'équation (*)

Soit x_0 le 1er versement, x_1 le 2e versement et x_2 le 3e versement.

$x_1 = x_0 + x_0 \times t\% = x_0(1 + t\%) = (1{,}0t)x_0,$ $x_2 = (1{,}0t)^2 x_0$

$x_0 + x_1 + x_2 = 397200 \Leftrightarrow x_0 + (1{,}0t)x_0 + (1,0t)^{2x_0} = 397200$

$x_0(1 + (1{,}0t) + (1{,}0t)^2) = 397200 \Leftrightarrow x_0\left(\frac{1-(1{,}0t)^3}{1-1{,}0t}\right) = 397200 \Leftrightarrow$

$\left(1 - \left(\frac{100+t}{100}\right)^3\right) = -\frac{3972t}{x_0} \Leftrightarrow 10^6 - (10^6 + 3 \times 10^4 t + 300t^2 + t^3) = -\frac{3972t \times 10^6}{x_0}$

$t^2 + 300t + 3 \times 10^4 = 331 \times 10^2 \Leftrightarrow t^2 + 300t - 3100 = 0$

D'après la question précédente, $t = 10$

b) Montant de x_1 et x_2

$x_1 = 1{,}1x_0 = 1{,}1 \times 120000 = 132000,$ $x_2 = (1{,}1)^2 . x_0 = 1{,}21 \times 120000 = 145200$

Exercice 2 : (5points)

I) Pour ouvrir un coffre-fort, on doit composer un code secret de quatre chiffres sur un tableau informatique de dix chiffres : 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.

1. Déterminer le nombre de code possibles. 0.5pt
2. Combien y a-t-il de codes commençant par 2 ? 0.75pt
3. Combien y a-t-il de codes ne contenant pas 0 ? 0.75pt

II) Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire 4 boules de cette urne.

1. Combien peut-on obtenir de nombre distincts de 4 chiffres (dont le 1er est non nul)
   a) Si les quatre boules sont tirées successivement et sans remise; 0,75pt
   b) Si les 4 boules sont tirées successivement avec remise. 0.75pt
2. On tire simultanément 4 boules.
   a) Combien de tirages différents peut-on réaliser ? 0.75pt
   b) Avec chacun des tirages, combien de nombres de 4 chiffres peut-on former ? 0.75pt

Solution 2 :

I.1) N = 10^4 codes possibles

I.2) $N_2 = 10^3$ codes

I.3) $N_3 = 9^4$codes

II.1.a) $N_4 = A_9^1 \times A_9^3$

II.1.b) $N_5 = 9 \times 10^3$

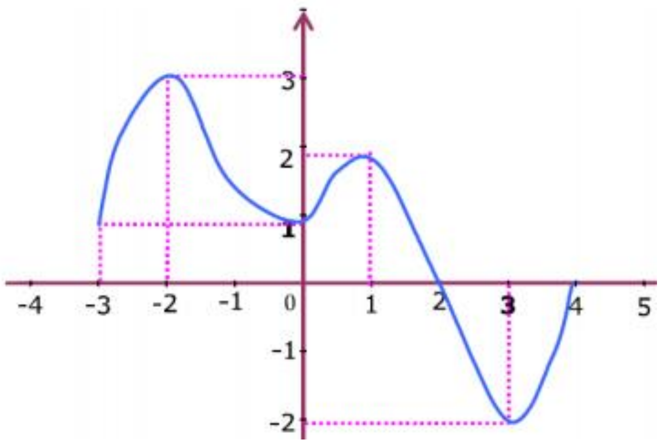
II.2.a) $N_6 = C_{10}^4$ tirages

II.2.b) $N_7 = 4!$ Nombres

Exercice 3 : (2,5points)

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[-3, 4]$. On définit les fonctions g1 et g2 par : $g_1(x) = f(x-1) - 1$ et $g_2(x) = -f(x)$.

1. Construire distinctement les courbes Cg_1 et Cg_2. 1.5pt+1pt



Problème (9.5 points)

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A [5.5 points]

ABC est un triangle tel que : AB = 5 cm ; AC = 3 cm et BC = 4 cm. On désigne par G le barycentre des points (A,−2) ; (B, 1) ; (C, 3). I est le symétrique de B par rapport à A. J et K sont les points tels que : $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

1. a) Construire le triangle ABC et les points I, J, K, G. 2pt
   b) Exprimer le point I comme barycentre des points A et B ; puis J comme barycentre des points A et C ; puis K comme barycentre des points B et C. 0.75pt
   c) Démontrer que les droites (AK), (B J) et (C I) sont concourantes. 1pt

2. Soit L l'ensemble des points M du plan tel que : $MB^2 + 3MC^2 = 48$

a) Démontrer que pour tout point M du plan, $MB^2 + 3MC^2 = 4MK^2 + \frac{3}{4}BC^2$. 1pt

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de L. 0.75pt

PARTIE B [4 points]

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soient E (1; −3) et F (1; 3) du points du plan

1. Déterminer les coordonnées du point J tel que E soit le symétrique de F par rapport à J 0,5pt
2. a) Montrer que pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = MJ^2 - \frac{EF^2}{4}$. 0,75pt

   b) En déduire la nature de (Γ), ensemble des points du plan tels que : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 7$ 0,75pt
   c) Construire (Γ) dans (O, I, J). 0.5pt

3. a) Donner une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, I, J). 0.5pt

   b) Donner une représentation paramétrique de (Γ). 0.5p

Solution Problème :

Partie A :

ABC est un triangle tel que : AB = 5 cm ; AC = 3 cm et BC = 4 cm,

$G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\}$, $A = bar\{(I,1);(B,1)\}$, $J = bar\{(A,-2);(C,3)\}$,

$K = bar\{(B,1);(C,3)\}$

1.c) Démontrons que (AK), (BJ) et (CI) sont concourantes.

$I = bar\{(A,2);(B,-1)\} = bar\{(A,-2);(B,1)\}$

$G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\} = bar\{(I,-1);(C,3)\}$ donc $G \in (CI)$

$G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\} = bar\{(B,1);(J,1)\}$ donc $G \in (BJ)$

$G = bar\{(A,-2);(B,1);(C,3)\} = bar\{(1,-2);(K,4)\}$, donc $G \in (AK)$

2. Soit (L) l'ensemble des points M tel que $MB^2 + 3MC^2 = 48$

2.a) Démontrons que $MB^2 + 3MC^2 = 4MK^2 + \frac{3}{4}BC^2$

$K = bar\{(B,1);(C,3)\}$ donc $MB^2 + 3MC^2 = 4MK^2 + 2\overrightarrow{MK}.\left(\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}\right) + KB^2 + 3KC^2$

$\overrightarrow{BK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ d'où $KB^2 + 3KC^2 = \frac{12}{16}BC^2 = \frac{3}{4}BC^2$ et $\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$MB^2 + 3MC^2 = 4MK^2 + \frac{3}{4}BC^2$

2.b) Nature et éléments caractéristiques de (L)

$MB^2 + 3MC^2 = 48 \Leftrightarrow 4MK^2 + \frac{3}{4}BC^2 = 48 \Leftrightarrow 4MK^2 = 36 \Leftrightarrow MK^2 = 9$

(L) est le cercle de centre K et de rayon 3.

Partie B :

E(1 ; -3), F(1 ; 3) deux points du plan.

1. Déterminons les coordonnées de J

J est milieu de [EF] donc $J\binom{1}{0}$

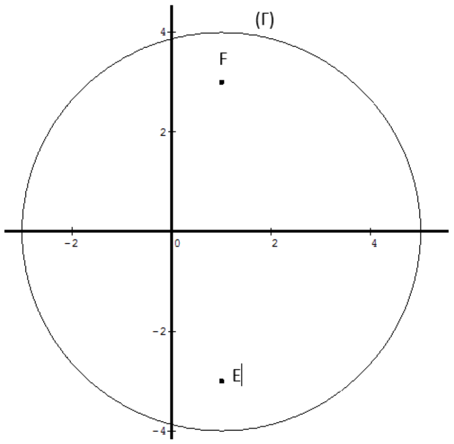
2.a) Montrons que $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = MJ^2 - \frac{EF^2}{4}$

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JE}\right).\left(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JF}\right) = MJ^2 + \overrightarrow{MJ}.\left(\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JF}\right) + \overrightarrow{JE}.\overrightarrow{JF} = MJ^2 - \frac{EF^2}{4}$

2.b) Nature de (Γ)

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 7 \Leftrightarrow MJ^2 - \frac{3}{2} = 7 \Leftrightarrow MJ^2 = 7 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow MJ = \sqrt{\frac{17}{2}}$ donc (Γ) est le cercle de centre J et de rayon $\sqrt{\frac{17}{2}}$

2.c) Construction de (Γ)



3.a) Equation cartésienne de (Γ)

$\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 7 \Leftrightarrow \binom{x-1}{y+3}.\binom{x-1}{y-3} = 7 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)(y-3) = 7$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 16$

3.b) Représentation paramétrique de (Γ)

$(\Gamma)\begin{cases} x = 1 + 4cos\theta \\ y = 4sin\theta \end{cases} \theta \in \mathbb{R}$

EPREUVES DE SEQUENCE 3

EPREUVE 1 : LYCEE DE MAROUA

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (4points) Fonctions logarithme et exponentielle

Répondre par Vrai ou Faux. (*Bonne réponse :* 0.5pt *; Mauvaise réponse ou pas de réponse :* 0pt)

1. f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$, (C) est sa courbe représentative.
   a) f est définie et dérivable sur R, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.
   b) La limite de f en $+\infty$ est nulle.
   c) L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
   d) La droite d'équation $y = 1 + x$, est asymptote à C.
2. f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$, (C) est sa courbe représentative.
   a) f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]\frac{e^3}{27};+\infty[$.
   b) La droite Δ d'équation $x = 3$ est un axe de symétrie de C.
   c) C admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses.
   d) La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -2ex - e$.

Solution 1 :

Répondre par vrai ou faux.

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$

a) $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \ln(1+e^x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions définies et dérivables. D'où f est définie et dérivable comme somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$ donc c'est faux.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) = -\infty$ donc c'est faux.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) = 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution. C'est vrai.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) - (1+x) = -\infty$ donc $y = 1 + x$ n'est pas asymptote.

2. f est la fonction définie sur]0;+∞[par $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$

2.a) f est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a $f'(x) = \frac{e^x.x^3 - 3x^2.e^x}{x^6} = \frac{e^x(x-3)}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ d'où f n'est pas monotone ; par conséquent f est non injective donc non bijective sur]0 ; +∞[.

2.b) $\forall x \in]0;\, +\infty[, 6 - x \in] - \infty; 6[\neq]0;\, +\infty[$ et $f(6-x) = \frac{e^{6-x}}{(6-x)^3} \notin f(x)$ donc la droite (Δ) est axe de symétrie de (C).

2.c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ et $f(3) = \frac{e^3}{27}$ donc (T) : $y = \frac{e^3}{27}$ est la tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2.d) $f'(1) = -2e$ et $f(1) = e$ d'où la tangente en 1 est $y = -2e(x-1) + e \Leftrightarrow$

$y = -2ex + 3e$ d'où c'est faux.

Exercice 2 : (5points) PPCM, PGCD, nombres premiers

On se propose de résoudre le système suivant dont l'inconnue est le couple (*x*, *y*) d'entiers naturels non nuls tels que $x > y$ $\begin{cases} (x-y)^2 = x + y \ \ (1) \\ PPCM(x, y) = 105 \ \ (2) \end{cases}$

1. (Résolution de (1)).
   On pose *z* = *x* – *y* et on considère comme nouvelle inconnue le couple (*z*, *y*).
   a) Quelle relation vérifie *z* et *y* ? **0.5pt**
   b) En déduire que 2*y* est un produit de deux entiers consécutifs. **0,5pt**
   c) En déduire que les solutions de l'équation (1) sont de l'une des formes suivantes : $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}*$ ou bien $\begin{cases} x = (k+1)(2k+1) \\ y = k(2k+1) \end{cases}$ **1pt**
2. (Résolution du système)
   On suppose que les solutions du système sont sous la forme : $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}*$
   a. Donner en fonction de *k*, le PGCD de *x* et *y*. **1pt**
   b. En déduire le PPCM de *x* et *y* en fonction de *k*. **0,5pt**
   c. Montrer que le double de ce PPCM est le produit de 3 entiers consécutifs. **0.5pt**
   d. Résoudre dans ce cas le système. **1pt**

Solution 2 :

1. On pose $z = x - y \Rightarrow x = z + y$

$(x-y)^2 = x + y \Leftrightarrow z^2 = z + 2y$, $PPCM(x, y) = 495 \Leftrightarrow ppcm(z + y, y) = ppcm(y, z) =$ 495 donc le système devient $\begin{cases} z^2 = z + 2y \\ ppcm(y, z) = 495 \end{cases}$

1.b) Déduisons que $2y$ est un produit de deux entiers consécutifs

$z^2 = z + 2y \Leftrightarrow 2y = z(z-1)$ d'où 2y est le produit de deux entiers consécutifs.

1.c) Déduisons que les solutions de (1) sont sous l'une des formes suivantes :

$\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{N}*$ ou bien $\begin{cases} x = (k+1)(2k+1) \\ y = k(2k+1) \end{cases}$

2 divise $z(z-1) \Leftrightarrow$ 2 divise z ou 2 divise $z-1$

Si 2 divise $z \Leftrightarrow z = 2k$ ainsi $2y = 2k(2k-1) \Leftrightarrow y = k(2k-1)$ d'où

$x = 2k + k(2k-1) = k(2k+1)$ donc $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$

Si 2 divise $z - 1 \Leftrightarrow z - 1 = 2k \Leftrightarrow z = 2k+1$ donc $2y = 2k(2k+1) \Leftrightarrow y = k(2k+1)$

Ainsi $x = 2k + 1 + k(2k+1) = (k+1)(2k+1)$ donc $\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$

2) Résolution

$\begin{cases} x = k(2k+1) \\ y = k(2k-1) \end{cases}$

2.a) $pgcd(x,y) = pgcd\big(k(2k+1), k(2k-1)\big) = k \times pgcd(2k+1, 2k-1) = k$

2.b) $pgcd(x,y) \times ppcm(x,y) = k^2(2k+1)(2k-1) \Leftrightarrow k \times ppcm(x,y) = k^2(4k^2-1)$

donc $ppcm(x,y) = k(4k^2-1)$

2.c) $2.\,ppcm(x,y) = 2k(2k-1)(2k+1)$ d'où le résultat.

2.d) Résolvons le système.

$2.\,ppcm(x,y) = 210 = 5 \times 6 \times 7$ donc $x = 3 \times 7 = 21$ et $y = 3 \times 5 = 15$

PROBLEME (11points)

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{\ln x}{x}$. (C) est sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique 2 cm.

PARTIE A

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$.

1. Étudier les variations de u. 1,5pt
2. Justifier que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $u(x) > 0$. **0,5pt**

PARTIE B

1. Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat. **2 X 0,25pt**

2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$. **0,25pt**

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{4}x - 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$. **0,5pt**

3. a) Vérifier que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{u(x)}{4x^2}$. **0,5pt**

b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. **1pt**

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α tel que $1 < \alpha < e$. **0,5pt**

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de α. **0,5pt**

5. a) Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à la droite (D). **0,5pt**

   b) Donner les coordonnées du point A. **0,5pt**

6. a) Étudier la position relative de (D) par rapport à (C). **0,5pt**

   b) Construire (T), (D) et (C). **1,5pt**

PARTIE C (Extraire Bac C 2008 Cameroun)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $12x - 5y = 3$. **0,75pt**
2. On considère la suite de nombres complexes z_n définie par : $\begin{cases} z_o = i \\ z_{n+1} = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)z_n \end{cases}$ pour $n \geq 0$.

   On désigne par M_n le point image de z_n dans le plan complexe d'origine O.

   a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$. **1pt**

   b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels Mn appartient à la demi-droite $[Ox)$. **0,5pt**

Solution Problème :

On considère la fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

Partie A :

On considère la fonction u dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et définie par : $u(x) = x^2 + 4 - 4\ln x$.

1. Etudions les variations de u

$\lim\limits_{x\to 0} u(x) = +\infty, \qquad \lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = +\infty$

u est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a $u'(x) = 2x - \frac{4}{x} = \frac{2x^2-4}{x}$

$u'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}\ ou\ x = -\sqrt{2}$

$u\left(\sqrt{2}\right) = 2 + 4 - 2ln2 = 6 - 2ln2,$

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$u'(x)$	$-$		$+$
$u(x)$	$+\infty$ ↘	$6 - 2ln2$	↗ $+\infty$

2. D'après le T.V. $\forall x \in]0;\ +\infty[, u(x) > 0$

Partie B :

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{4}x - 1 + \frac{lnx}{x} = -\infty$ donc la droite $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

2.a. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

2.b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (\frac{1}{4}x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$ donc la droite $y = \frac{1}{4}x - 1$ est asymptote oblique à la courbe de f.

3.a) $f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1-lnx}{x^2} = \frac{x^2+4-4lnx}{4x^2} = \frac{u(x)}{4x^2}$

3.b) Déduisons le sens de variation et le T.V. de f.

Le signe de f'dépend du signe de u car le dénominateur est positif.

$\forall x \in]0;\ +\infty[, u(x) > 0$ donc $f' > 0$. Il en résulte que f est strictement croissante.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4.a) f est continue et strictement croissante sur]0 ; +∞[et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \times \lim\limits_{x\to 0} f(x) < 0$

d'après le T.V.I, il existe un unique α ∈]0 ; +∞[tel que $f(\alpha) = 0$

$f(1) = -\frac{3}{4} < 0,$ $\quad f(e) = \frac{1}{4}e - 1 + \frac{1}{e} = \frac{e^2-4e+4}{4e} = \frac{(e-2)^2}{4e}$>0 donc 1 < α < e

4.b) Valeur approchée de α à 10^{-1}près.

$f(2) = -0{,}15$, $f(2{,}5) = -0{,}008 < 0,$ $\quad f(2{,}6) = 0{,}017$ donc $2{,}5 < \alpha < 2{,}6$ prendre α = 2,5.

5.a) $f'(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow u(x) = x^2 \Leftrightarrow 4 - 4lnx = 0 \Leftrightarrow x = e$ l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution. D'où il existe un unique point A de (C) dont la courbe est parallèle à la droite (D).

5.b) Coordonnées de A

$A(e;\ \frac{(e-2)^2}{4e})$

6) Position relative de (D) et (C)

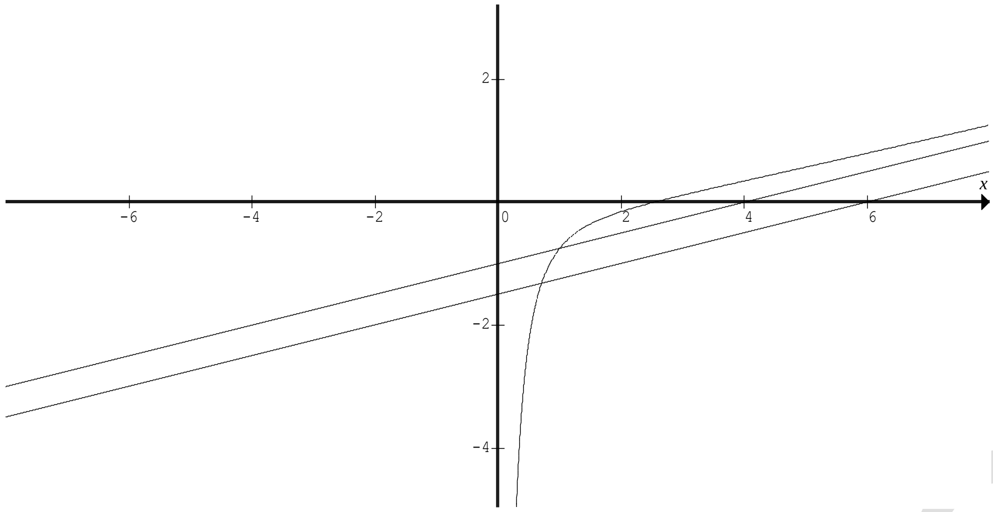
$\forall x \in]0; 1[, \frac{lnx}{x} < 0 \Leftrightarrow f(x) < y$ donc (C) est en dessous de (D).

$\forall x \in]1; +\infty[, \frac{lnx}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > y$ donc (C) est au-dessus de (D).

6.b) Construire

Equation de la tangente (T) en A à (C).

$y = f'(e)(x-e) + f(e) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x-e) + \frac{(e-2)^2}{4e} = \frac{1}{4}x + \frac{e^2-5e+4}{4e}$



Partie C :

1. Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation $12x - 5y = 3$

$12(-1) - 5(-3) = -12 + 15 = 3$

$12x - 5y = 12(-1) - 5(-3) \Leftrightarrow 12(x+1) - 5(y+3) = 0 \Leftrightarrow 12(x+1) = 5(y+3)$

$5/12(x+1)$ or $(5\Lambda 12) = 1$ alors d'après Gauss $5/(x+1)$ donc $x = 5k - 1$ et $y = 12k - 3$ d'où $S = \{(5k-1; 12k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

2. On considère la suite de nombres complexes z_n définie par $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_n \end{cases}$ pour $n \geq 0$

2.a) Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$

Soit la proposition P définie par : $\left\{\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}\right\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 0$

$z_0 = i$ et $e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ d'où P est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la proposition P est vraie au rang n, montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $z_{n+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$

$z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_n = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n = e^{i\frac{5\pi}{6}} e^{i\frac{5n\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\left(\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}$

D'où P est vraie au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$

2.b) Déterminons l'ensemble des entiers n pour lesquels $M_n \in [Ox)$

$M_n \in [Ox) \Leftrightarrow arg z_n = 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{5(n)\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow \frac{5(n)}{6} = 2k - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5(n) = 12k - 3 \Leftrightarrow$ $5n - 12k = -3$ d'après la question 1) $n = 5k - 1, k \in \mathbb{N}$.

EPREUVE 2 : LYCEE DE NKOLNDA-NSIMALEN

Exercice 1 3,5 points

On considère les suites (In) et (Jn) définies sur N par : ∀ n ∈ N, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$

1. Calculer I_0 et J_0. 0,5pt
2. On suppose que n ≥ 1.
   a) En utilisant une intégration par partie, montrer que $I_n + nJ_n = 1$ et $-nI_n + J_n = e^{\frac{-nx}{2}}$. 1,5pt
   b) Déduire de 2.a l'expression de I_n et J_n en fonction de l'entier naturel n. 1pt
3. Les suites (In) et (Jn) sont-elles convergentes ? 0,5pt

Solution 1 :

∀ n ∈ N, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$

1. Calculons I_0 et J_0

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx \, dx = [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, $J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cosx \, dx = [sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2. On suppose que $n \geq 1$

2.a) Montrons que $I_n + nJ_n = 1$ et $-nI_n + J_n = e^{\frac{-nx}{2}}$.

Intégrons par parties I_n

Posons $u = e^{-nx}$ et $v' = sinx$ alors $u' = -ne^{-nx}$ et $v = -cosx$

$$I_n = [-cosx. e^{-nx}]_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} cosx \, dx = 1 - nJ_n \Leftrightarrow I_n + nJ_n = 1$$

Intégrons par parties J_n

Posons $u = e^{-nx}$ et $v' = cosx$ alors $u' = -ne^{-nx}$ et $v = sinx$

$$J_n = [e^{-nx} sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} sinx \, dx = e^{-\frac{n\pi}{2}} + nI_n \Leftrightarrow -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}}$$

2.b) Déduisons l'expression de I_n et J_n en fonction de n

$$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \ (1) \\ -nI_n + J_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \ (2) \end{cases}$$

$$n.(1) + (2) \Leftrightarrow (n^2+1)J_n = n + e^{-\frac{n\pi}{2}} \Leftrightarrow J_n = \frac{n + e^{-\frac{n\pi}{2}}}{n^2+1}$$

$$(1) - n.(2) \Leftrightarrow (n^2+1)I_n = 1 - ne^{-\frac{n\pi}{2}} \Leftrightarrow I_n = \frac{1 - ne^{-\frac{n\pi}{2}}}{n^2+1}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-ne^{-\frac{n\pi}{2}}}{n^2+1} = 0,$ $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+e^{-\frac{n\pi}{2}}}{n^2+1} = 0$

Exercice 2 5 points

I. Répondre aux questions suivantes :

1. Résoudre dans IR : 1pt
   a) $\ln(x^2+4x-5) = \ln(x+1)$
   b) $2.8^x - 9.4^x + 3.2^x + 4 = 0$
2. Ecrire le nombre 2012 dans le système de numération de base 8. 0,5 pt
3. Effectuer l'opération suivante :$\overline{133}^5 \times \overline{2431}^5$. 0,5pt
4. Soit θ un réel tel que 0 < θ <$\frac{\pi}{2}$. Déterminer le module et l'argument de Z = 1−i tanθ. 1 pt

II. Soit z un nombre complexe distinct de 4. Soit Z un nombre complexe tel que $z = \frac{iz-4}{z-4}$.

1. On pose z = x +iy. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. 1pt
2. Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel que Z soit réel. Reconnaître la nature de (C) et caractériser cet ensemble. 0,5pt
3. Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tel que Z soit imaginaire pur. 0,5 pt

Solution 2 :

I.1) a) Résolvons dans $\mathbb{R}$

$\ln(x^2+4x-5) = \ln(x+1)$

Contraintes : $\begin{cases} x^2+4x-5>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x-1)>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty;\ -5[\cup]1;\ +\infty[\\ x \in]-1;\ +\infty[\end{cases}$

Donc $D_v =]1;\ +\infty[$

$x^2+4x-5 = x+1 \Leftrightarrow x^2+3x-6=0$

$\Delta = 9-4(-6)(1) = 9+24 = 33$

$x_1 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}$ donc $S = \left\{\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\right\}$

1.b) $2.8^x - 9.4^x + 3.2^x + 4 = 0$

$2.8^x - 9.4^x + 3.2^x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2.2^{3x} - 9.2^{2x} + 3.2^x + 4 = 0$

Posons $X = 2^x$

$2.X^3 - 9.X^2 + 3.X + 4 = 0$

$2.X^3 - 9.X^2 + 3.X + 4 = 2(X-1)\left(X+\frac{1}{2}\right)(X-4) = 0$ donc

$X = 1$ ou $X = -\frac{1}{2}$ ou $X = 4$

$2^x = 1 \Leftrightarrow e^{xln2} = e^0 \Leftrightarrow x = 0, \quad 2^x = -\frac{1}{2}\ (imp), \quad 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Donc $S = \{0; 2\}$

2. 2012 en base 8

$2012 = \overline{3734}^8$

3. Effectuons $\overline{133}^{\,5} \times \overline{2431}^{\,5}$

$\overline{133}^{\,5} \times \overline{2431}^{\,5} = (43)(366) = 15738$

4. Soit θ un réel tel que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, Z = 1−i tanθ.

$|Z| = \sqrt{1 + tan^2\theta} = \frac{1}{cos\theta}$, Notons $\alpha = argZ$

On a $\begin{cases} cos\alpha = \frac{1}{\frac{1}{cos\theta}} = cos\theta \\ sin\alpha = \frac{tan\theta}{\frac{1}{cos\theta}} = sin\theta \end{cases}$ d'où $\alpha = \theta$

I. Soit z un nombre complexe distinct de 4. Soit Z un nombre complexe tel que $Z = \frac{iz-4}{z-4}$.

1. $z = x + iy, \quad Z = \frac{i(x+iy)-4}{x-4+iy} = \frac{((-y-4)+ix)((x-4)-iy)}{(x-4)^2+y^2} = \frac{-(x-4)(y+4)+xy+i(x(x-4)+y(y+4))}{(x-4)^2+y^2}$

$\begin{cases} Re(Z) = \frac{-4x+4y+16}{(x-4)^2+y^2} \\ Im(Z) = \frac{x^2-4x+y^2+4y}{(x-4)^2+y^2} \end{cases}$

2. (C) = $\{M \in \mathcal{P} / Z \in \mathbb{R}\}$

$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 = 0$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = (2\sqrt{2})^2$ donc (C) est le cercle de centre A (2 ; -2) et de rayon $r = 2\sqrt{2}$.

3. $(D) = \{M \in \mathcal{P} / Z \in i\mathbb{R}^*\}$

$Z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow Re(Z) = 0 \Leftrightarrow -x + y + 4 = 0$ donc (D) est la droite d'équation $x - y - 4 = 0$

Exercice 3 3,5 points

A et B sont deux points distincts du plan orienté. On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Soit M un point du plan M_1 son image par r_A et M_2 son image par r_B.

1. Montrer que, le milieu J du segment [M1M2] est fixe par $r_B \circ r^{-1}_A$. 0,5 pt
2. Montrer que J appartient au cercle de diamètre [AB]. 0,75 pt
3. On suppose que M est distinct des points A et B.

a) Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}})$ en fonction de $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$. 0,5 pt

b) Montrer que les points M, M_1 et M_2 sont alignés ssi, $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k ∈ Z. 1 pt

c) Déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, M_1 et M_2 sont alignés. 0,75 pt

Solution 3 :

A et B sont deux points du plan orienté.

$r_A = R(A, -\frac{\pi}{3})$, $\quad r_B = R(B, \frac{2\pi}{3})$, $\quad M_1 = r_A(M)$, $M_2 = r_B(M)$

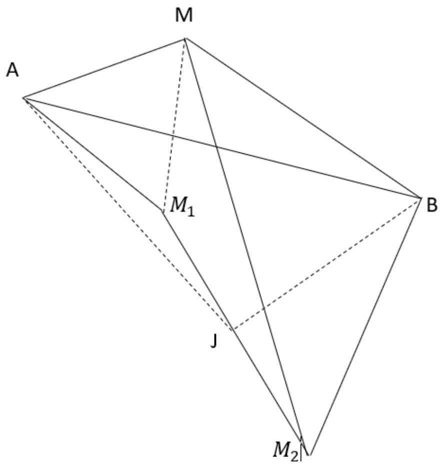
1. Montrons que $r_B o r_A^{-1}(J) = J$

$r_B o r_A^{-1}(M_1) = r_B(M) = M_2$ or $r_B o r_A^{-1}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$ donc une symétrie centrale de centre le milieu de $[M_1M_2] = J$

2. Montrons que J ∈ $(C)_{[AB]}$

3. On suppose que M est distinct des points A et B.

   a) Exprimons $(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}})$ en fonction de $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$.



$\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM_1}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MB}}\right)$ où $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM_1}}\right) = \frac{\pi}{3}$ car MAM_1 est un triangle isocèle ayant un angle de 60° donc est équilatéral. De plus, $\left(\widehat{\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{6}$ car MBM_2 est un triangle isocèle de sommet B. donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ d'où $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + mes\left(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}}\right) = \frac{\pi}{2} + mes\left(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}}\right)$

   b) Montrons que les points M, M_1 et M_2 sont alignés ssi, $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, k ∈ Z

M, M_1 et M_2 sont alignés ⇔ $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}}\right) = k\pi$ donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) L'ensemble (Γ) est le cercle de diamètre [AB].

PROBLEME 8 points

Le problème comporte trois parties A, B et C.

Partie A :

1. Soit la fonction h1 définie par : $h_1(x) = x - \ln x$.
   a) Dresser le tableau des variations de h_1. 0,5 pt
   b) En déduire le signe de h_1. 0,75 pt

2. On définit la fonction f_1 par : $f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}$
   Dresser le tableau des variations de f_1.   0,5pt

Partie B : Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle]0 ; +∞[par :

$$f(x) = \ln x \quad et \quad g(x) = (\ln x)^2.$$

On note (C) et (C ′) les courbes représentatives respectives de f et g dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de g.
2. a) Étudier le signe de (ln x)(1−ln x) sur]0 ; +∞[.
   b) En déduire la position relative des deux courbes (C) et (C′) sur]0 ; +∞[.

   c) Tracer (C) et (C′) les courbes représentatives respectives de f et g dans un même repère orthogonal.

3. Pour x appartenant à]0 ; +∞[, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C ′ de même abscisse.

a) Soit h la fonction définie sur]0 ; +∞[par h(x) = f (x)− g (x).

Étudier les variations de la fonction h sur]0 ; +∞[.

b)En déduire que sur l'intervalle [1 ; e], la valeur maximale de la distance MN est obtenue pour x = $\sqrt{e}$.

c) Résoudre dans]0 ; +∞[l'équation $(ln\, x)^2 - ln\, x = 1$.

d) En déduire que, sur]0;1[∪]e ; +∞[, il existe deux réels a et b (a < b) pour lesquels la distance MN est égale à 1.

4. a) **Restitution organisée de connaissances**

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle [a ; b].

b)À l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout réel x > 0, $\int_1^x \ln t\, dt$. En déduire une primitive sur]0;+∞[de la fonction logarithme népérien.

c) À l'aide d'une intégration par parties, et en utilisant le résultat précédent, calculer pour tout réel x > 0, $\int_1^x \ln t \times \ln t\ dt$.

d) On considère la partie du plan délimitée par les courbes (C), (C′) et les droites d'équations x = 1 et x = e.

Déterminer l'aire A en unités d'aire de cette partie du plan.

Solution Problème :

Partie A :

1. $h_1(x) = x - lnx$

   a) T.V. de h_1

$D_{h_1} =]0; +\infty[$

h_1 est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a $h_1'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

$h_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ h_1(1) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} x - lnx = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x - lnx = +\infty$

x	0	1	$+\infty$
$h_1'(x)$	-	|	+
$h_1(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

1.b) Déduisons le signe de h_1

$\forall x \in]0; +\infty[, h_1(x) > 0$

2. $f_1(x) = \frac{x}{x - \ln x}$. Dressons le T.V de f_1

$D_{f_1} =]0; +\infty[$, f_1 est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a : $f_1'(x) = \frac{x - lnx - x + 1}{(x-lnx)^2} = \frac{1 - lnx}{(x-lnx)^2}$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{0}{x - lnx} = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x - lnx} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{lnx}{x}} = 1,\ f_1(e) = \frac{e}{e-1}$

x	0	e	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	|	-
$f_1(x)$	0 ↗	$\frac{e}{e-1}$	↘ 1

Partie B :

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle]0 ; +∞[par :

$f(x) = \ln x \quad et \quad g(x) = (\ln x)^2$.

1. Etudions les variations de g.

g est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a : $g'(x) = \frac{2lnx}{x}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} (lnx)^2 = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} (lnx)^2 = +\infty, \quad g(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	|	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.a) Etudions le signe de (ln x)(1−ln x) sur]0 ; +∞[

$lnx(1 - lnx) = 0 \Leftrightarrow lnx = 0 \; ou \; 1 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = e$

$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]e;\; +\infty[, lnx(1 - lnx) < 0, \qquad \forall x \in [1; e], lnx(1 - lnx) \geq 0$

2.b) Position relative entre (C) et (C').

$f(x) - g(x) = lnx - (lnx)^2 = lnx(1 - lnx)$ donc

$\forall x \in]-\infty; 1[\cup]e;\; +\infty[, (C')$ est au-dessus de (C) et $\forall x \in [1; e]$, (C') est en-dessous de (C).

2.c) Tracé de (C') et (C).

3. Pour x appartenant à]0 ; +∞[, M est le point de C d'abscisse x et N est le point de C ′ de même abscisse.

3.a) Soit h la fonction définie par $h(x) = f(x) - g(x)$

Etudions les variations de la fonction h sur]0 ; +∞[

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} lnx(1 - lnx) = -\infty \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} lnx(1 - lnx) = -\infty$

h est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a :

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{1 - 2lnx}{x}$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}, \qquad h\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$		+	|	-	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

b) $MN = \sqrt{(x - x)^2 + (g(x) - f(x)^2} = |g(x) - f(x)| = f(x) - g(x) = h(x)$ sur [1 ; e]

MN est maximal au point où $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.

c) Résolvons dans]0 ; +∞[$(ln\,x)^2 - ln\,x = 1$

$(lnx)^2 - lnx = 1 \Leftrightarrow h(x) = -1$

L'équation $h(x) = -1$ admet deux solutions $\alpha \in [\sqrt{e};\ +\infty[$ et $\beta \in]0;\ \sqrt{e}$ (On le démontre avec le T.V.I)

d) Déduisons que, sur]0;1[∪]e ; +∞[, il existe deux réels a et b (a < b) pour lesquels la distance MN est égale à 1

$MN = |f(x) - g(x)| = g(x) - f(x)$ sur]0 ; 1[∪]e ; +∞[

$MN = 1 \Leftrightarrow (lnx)^2 - lnx = 1 \Leftrightarrow h(x) = -1$ donc d'après la question précédente, prendre $a = \alpha$ et $b = \beta$

4.a) Restitution organisée des connaissances

Soit f et g deux fonctions continues, dérivables et à dérivées continues sur [a, b]

$(f.g)' = f' \times g + g' \times f \Leftrightarrow g' \times f = (f.g)' - f' \times g$ donc

$\int_a^b g'.f = [f.g]_a^b - \int_a^b f' \times g$

4.b) Calculons $\int_1^x lnt\,dt$

$\int_1^x lnt\,dt = [tlnt]_1^x - \int_1^x 1\,dt = xlnx - x + 1$. Donc la fonction $x \mapsto xlnx - x + 1$ est une primitive de lnx

4.c) $\int_1^x \ln t \times \ln t\ \ dt = [lnt(tlnt - t + 1)]_1^x - \int_1^x \frac{tlnt-t+1}{t} dt = xln^2x - xlnx + lnx -$ $\int_1^x \left(lnt - 1 + \frac{1}{t}\right) dt = xln^2x - xlnx + lnx - [tlnt - t + 1 - t + lnt]_1^x = xln^2x - xlnx +$ $lnx - (xlnx - x + 1 - x + lnx + 1) = xln^2x - 2xlnx + 2x + 2.$

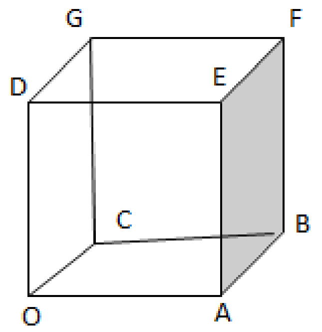
d) $\mathcal{A} = \int_1^e f(x) - g(x)\,dx = elne - e + 1 -\ eln^2e + 2elne - 2e + 2 = 3 - e$ u.a

EPREUVES DE SEQUENCE 4

EPREUVE 1 : LYCEE DE NDOM

Exercice 1 : 5points

Soit le cube OABCDEFG représenté par la figure ci-contre. L'espace est orienté par le repère orthonormal direct (O; $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$). On désigne par a un réel strictement positif.

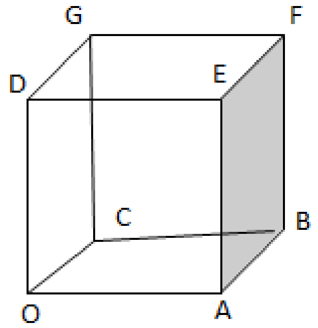


L, M et K sont des points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1. a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$. 0,5pt
   b) En déduire l'aire du triangle DLM. 0,5pt
   c) Démontrer que la droite (OK) est orthogonal au plan (DLM). 0,5pt
2. On note H le projeté orthogonal de K sur le plan (DLM)
   a) Démontrer que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$ 0,5pt
   b) Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{OK}$.
   Démontre que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$. 0,5pt
   En déduire que H appartient au segment [OK]. 0,25pt
   c) Déterminer les coordonnées de H. 0,5pt
   d) Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$. 0,75pt
3. A l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre DLMK en fonction de a. 0,5pt
4. Soit (II) le plan d'équation $2x + y - z = 3$. Déterminer l'expression analytique de la réflexion de plan S_{II}. 0,5pt

Solution 1 :

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct (O; $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$).



L, M et K sont des points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1.a) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$

$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DL}\begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$

1.b) Déduisons l'aire $\mathcal{A}$ du triangle DLM

$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}\right\| = \frac{a\sqrt{a^2+2}}{2}$

1.c) Démontrons que (OK) ⊥ (DLM). Il suffit de voir si $\overrightarrow{OK} = \lambda\, \overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$

$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + a\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OK}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{a}\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$ d'où (OK) ⊥ (DLM).

2.a) Démontrons que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}).\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OK}$ or (HM) $\subseteq (DLM)$ donc $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{OK} = 0$

D'où $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK}$.

2.b) Démontrons que $\lambda = \frac{a}{a^2+2}$

On a $\overrightarrow{OH} = \lambda\, \overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OK} = \lambda OK^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OK} = \lambda OK^2 \Leftrightarrow a = \lambda(a^2 + 2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{a}{a^2+2}$

Déduisons que H ∈ [OK]

$\lambda = \frac{a}{a^2+2} \in]0;1[$ donc H ∈ [OK].

2.c) Coordonnées de H

$\overrightarrow{OH} = \frac{a}{a^2+2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+2} \\ \frac{a}{a^2+2} \\ \frac{a^2}{a^2+2} \end{pmatrix}$ d'où H $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+2} \\ \frac{a}{a^2+2} \\ \frac{a^2}{a^2+2} \end{pmatrix}$

1.d) Exprimons $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HK} = \lambda\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{HK} \Leftrightarrow \overrightarrow{HK} = (1-\lambda)\overrightarrow{OK}$.

Déduisons que $HK = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$

$HK = |1-\lambda|OK = \frac{a^2-a+2}{a^2+2}\sqrt{a^2+2} = \frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}$

3. Déterminons, en fonction de a, le volume de DLMK.

$\mathcal{V} = \frac{HK\times\mathcal{A}}{3} = \frac{1}{3}.\left(\frac{a^2-a+2}{\sqrt{a^2+2}}\right).\left(\frac{a\sqrt{a^2+2}}{2}\right) = \frac{a(a^2-a+2)}{6}$ u.v

4. Soit (Π) le plan d'équation $2x+y-z=3$, déterminons l'expression analytique de la réflexion de plan s_Π

Soit $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ tel que $M' = s_\Pi(M)$ alors $\begin{cases}(MM')\perp(\Pi)\\ I\ mil\ [MM']\in(\Pi)\end{cases}$

Notons $\vec{n}$ le vecteur normal de $(\Pi) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases}x'-x=2\lambda\\ y'-y=\lambda\\ z'-z=-\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x' = x+2\lambda\\ y' = y+\lambda\\ z' = z-\lambda\end{cases}$

$I\in(\Pi) \Leftrightarrow 2\left(\frac{x+x'}{2}\right)+\left(\frac{y+y'}{2}\right)-\left(\frac{z+z'}{2}\right) = 3 \Leftrightarrow 2x+2\lambda+y+\frac{\lambda}{2}-z+\frac{\lambda}{2} = 3 \Leftrightarrow$

$3\lambda+2x+y-z = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2x-y+z+3}{3}$ donc $\begin{cases}x' = x+2\left(\frac{-2x-y+z+3}{3}\right)\\ y' = y+\left(\frac{-2x-y+z+3}{3}\right)\\ z' = z-\left(\frac{-2x-y+z+3}{3}\right)\end{cases}$ donc

$(\Pi): \begin{cases}x' = \frac{-x-2y+2z+6}{3}\\ y' = \frac{-2x+2y+z+3}{3}\\ z' = \frac{2x+y+2z-3}{3}\end{cases}$

Exercice 2 : 4points

1. On pose que pour tout entier naturel n, non nul : $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}\ dx$.
   a) A l'aide d'une intégration par partie, calculer I_1. 0,5pt
   b) Prouver que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le I_n \le \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\ dx$. 0,75pt
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$. 0,25pt
   c) Montrer en utilisant une intégration par parties, que pour tout entier naturel, on a : $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$. 1pt
2. On considère la suite (a_n) $n \in$ IN* définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.
   a) Démontrer que $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$. 1pt
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. 0,5pt

Solution 2 :

1. On pose $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{-x}\ dx$.

1.a) Calculons I_1

$I_1 = \int_0^1 (1-x)e^{-x}\,dx$

Posons $u = 1-x \Rightarrow u' = -1$ et $v' = e^{-x} \Leftrightarrow v = -e^{-x}$

$I_1 = [-(1-x)e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}\,dx = [(-1+x+1)e^{-x}]_0^1 = e^{-1}$

1.b) Prouvons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\;dx$

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x)^n \leq 1$ donc $0 \leq (1-x)^n e^{-x} \leq e^{-x}$

$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$

Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

1.c) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} - I_n$

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{-x}\,dx$

Posons $u = (1-x)^{n+1} \Leftrightarrow u' = (n+1)(1-x)^n$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left([-(1-x)^{n+1}e^{-x}]_0^1 + (n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx\right) =$

$\frac{1}{(n+1)!}\left(1-(n+1)\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx\right) = \frac{1}{(n+1)!} - I_n.$

2. On considère la suite (a_n) $n \in$ IN* définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.a) Démontrons que $a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$

Raisonnons par récurrence. Soit la proposition P définie par $P\colon\left\{\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n\right\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 0$ i.e. montrons que $a_0 = \frac{1}{e} + (-1)^0 I_0$

$\frac{1}{e} + (-1)^0 I_0 = \frac{1}{e} + \int_0^1 e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + [-e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1$ et $a_0 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $a_{n+1} = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$

$a_{n+1} = a_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{e} + (-1)^n\left(I_n - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{e} + (-1)^{n+1} I_{n+1}$

Donc P est vraie au rang $n+1$

<u>Conclusion</u> : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{e} + (-1)^n I_n$.

b) Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{e} + (-1)^n I_n = \frac{1}{e}$

Problème

Partie A : 6points

1. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
   a) Montrer que f est paire. 0,25pt
   b) Étudier les variations de la fonction f sur]0, +∞[. 0,5pt
   c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. 0,5pt
2. On pose pour tout réel x, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
   a) Justifier que F est définie et dérivable sur IR. 0,25pt
   b) Montrer que F est impaire. 0,25pt
   c) Montrer que pour tout réel x: $\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$. 0,25pt
   d) En déduire que F(x) tend vers +∞ quand tend vers +∞. 0,5pt
3. Soit x un réel quelconque. On pose $G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$.
   a) Montrer que G est dérivable sur IR. 0,5pt
   b) Étudier le sens de variations de G sur IR 0,5pt
   c) En déduire, pour tout réel $G(x) \leq \ln 2$. 0,5pt
   d) Montrer que G est une fonction impaire. 0,25pt
4. Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$
   a) Justifier que, pour tout x, $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   b) Montrer que φ est une primitive de f. 0,5pt
   c) En déduire une écriture de G(x). 0,25pt
   d) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} G(x)$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} G(x)$. 0,5pt

Partie B : 7points

On considère dans le plan l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$

1. Déterminer $f \circ f$. 1pt
2. a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ dont on donnera les coordonnées dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. 0,5pt
   b) Déterminer l'ensemble des points invariants de f. 0,5pt
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristique de f. 0,5pt
3. On considère la conique (Γ) définie par $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$
   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) (centre, foyer, excentricité, directrice). 1pt
   b) Soit (Γ') l'image de (Γ) par f. Écrire une équation cartésienne de (Γ'). 1pt

Construire (Γ). 0,5pt

Solution Problème :

Partie A :

1. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.a) Justifions que f est paire

Soit $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$ donc f est paire.

1.b) Etudions les variations de la fonction f sur]0 ; +∞[

f est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a : $f'(x) = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0$ donc f est strictement décroissante sur]0 ; +∞[

1.c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ comme f est paire alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. On pose pour tout réel x, $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.

2.a) Justifions que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

2.b) Montrons que F est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\, dt = \int_0^x f(-u)\,(-du)$ (changement de variable en posant t =-u)

$F(-x) = -\int_0^x f(-u)\, du = -\int_O^x f(u) du = -F(x)$ donc F est impaire.

2.c) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$

$(1+t)^2 - (t^2+1) = 2t \geq 0$

$1 + t \geq \sqrt{t^2+1}$ d'où $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ d'où $\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$

2.d) Déduisons F(x) tend vers +∞ quand tend vers +∞

$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(x+1)$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$ d'après la propriété de comparaison on a donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

3. Soit x un réel quelconque. On pose $G(x) = \int_x^{2x} f(t)\, dt$.

3.a) Montrons que G est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto F(2x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto G(x) = F(2x) - F(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3.b) Etudions le sens de variation de G sur $\mathbb{R}$ et déduisons que $\forall x \in \mathbb{R}, G(x) \leq ln2$

$G'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{4x^2+1}}{(\sqrt{4x^2+1})(\sqrt{x^2+1})} = \frac{4(x^2+1)-(4x^2+1)}{(\sqrt{4x^2+1})(\sqrt{x^2+1})(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1})} = \frac{3}{(\sqrt{4x^2+1})(\sqrt{x^2+1})(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{4x^2+1})} > 0$ donc G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De plus $t \leq \sqrt{t^2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$ donc $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow G(x) \leq ln2$.

3.c) Montrons que G est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $G(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\,dt = \int_{x}^{2x} f(-u)\,(-du) = -\int_{x}^{2x} f(u)\,du = -G(x)$

donc G est impaire.

4. Soit φ la fonction définie sur IR par : $\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

a) Justifions que $\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2+1} > 0$

Si $x > 0, x + \sqrt{x^2+1} > 0$, Si $x \le 0$, $x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > -x \Leftrightarrow$ $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

b) Justifions que φ est une primitive de f.

$\varphi'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$ donc φ est une primitive de f.

c) Déduisons une écriture de G.

$$G(x) = \varphi(2x) - \varphi(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = ln2,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ln\left(\frac{-1(x-\sqrt{x^2+1})}{(2x-\sqrt{4x^2+1})(-1)}\right) =$

$$\lim_{x\to-\infty} ln\left(\frac{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2x+2x\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}}\right) = \lim_{x\to-\infty} ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)}\right) = ln\frac{1}{2} = -ln2.$$

Partie B :

On considère dans le plan l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M\binom{x}{y}$ associe le point $M'\binom{x'}{y'}$ tel que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} \end{cases}$

1. Déterminons fof

$M''\binom{x''}{y''} = f(M') = fof(M)$

$$\begin{cases} x'' = \frac{1}{4}x' + \frac{\sqrt{3}}{4}y' - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x' + \frac{3}{4}y' + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} x'' = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4} = x' \\ y'' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} = y' \end{cases}$ d'où $fof = f$

2. $\overrightarrow{MM'}\binom{x'-x}{y'-y} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{4}y+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}x-y+1) \\ \frac{1}{4}(\sqrt{3}x-y+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x - y + 1\right)\binom{-\sqrt{3}}{1} = \lambda_{x,y}\vec{u}$

avec $\lambda_{x,y} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}x - y + 1\right)$ et $\vec{u}\binom{-\sqrt{3}}{1}$.

2.b) Déterminons l'ensemble des points invariants de f.

$M' = M \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y + 1 = 0$ L'ensemble des points M est la droite (D) d'équation $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$

2.c) Nature et éléments caractéristiques de f

f est la projection sur la droite (D) suivant la direction du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

3. On considère la conique (Γ) définie par $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

3.a) Nature et éléments caractéristiques de (Γ)

(Γ) est une ellipse de centre O de foyer F$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et F'$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, de directrices (D) : $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et (D') : $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'excentricité $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

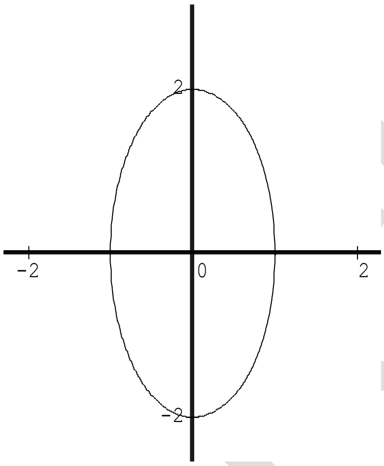
3.b) Equation cartésienne de (Γ') = f(Γ)

$x' = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (1)

$y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{4}$ (2)

(Γ′) est le segment [CC'] où C = f(B) et C' = f(B'), B et B' étant les sommets de l'ellipse.

3.c) Construction de (Γ)



EPREUVE 2 : LYCEE DE NKOLNDA

Exercice 1 : 3points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, [unité graphique : 6 cm]. On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = ze^{\frac{5i\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (Mn) de la manière suivante : M_0 a pour affixe $z_0 = e^{\frac{i\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$. On appelle Z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. **0,5pt**
   Placer les points M_0, M_1, M_2. **0,5 pt**
2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité $Z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$. **0,5 pt**
3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, (n – p) est multiple de 12. **0,5 pt**
4. **a)** On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple (4 ; 9) est solution, résoudre l'équation (E). **0,5 pt**
   b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tel que Mn appartienne à la demi-droite [Ox). **0,5pt**

Solution 1 :

$f : M(z) \to M'(z')$ tel que $z' = ze^{\frac{5i\pi}{6}}$

1. Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de f

f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{5i\pi}{6}$.

2. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$.

Raisonnons par récurrence. Soit la proposition P définie par $\left\{\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}.\right\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 0$

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $\quad e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{0}{2}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(0)\pi}{6})}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n + 1$ i.e. montrons que $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$

$z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} z_n = e^{i\frac{5\pi}{6}} . e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6})}$ donc P est vraie au rang n+1.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})}$

3. Soient deux entiers n et p tels que $n \geq p$. Montrons que M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, (n – p) est multiple de 12

M_n et M_p sont confondus $\Leftrightarrow z_n = z_p \Leftrightarrow e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{5p\pi}{6})} \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{6} \equiv \frac{5p\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{6} \equiv \frac{5p\pi}{6} [2\pi]$ donc $\frac{5n\pi}{6} - \frac{5p\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow 5\pi(n-p) = 12k\pi \Leftrightarrow 5(n-p) = 12k$ or $(5 \wedge 12) = 1$

Donc $12/(n-p)$ donc $n-p$ est multiple de 12.

4.a) On considère (E) : $12x - 5y = 3$

$12(4) - 5(9) = 48 - 45 = 3$ d'où (4 ; 9) est solution de (E). Résolvons (E)

$12x - 5y = 12(4) - 5(9) \Leftrightarrow 12(x-4) = 5(y-9)$ donc $5/12(x-4)$ or (5 Λ 12) =1 donc

$5/(x-4)$ d'où $x - 4 = 5k \Leftrightarrow x = 5k+4, k \in \mathbb{Z}$ et $y = 12k + 9$

$S = \{(5k+4, 12k+9), k \in \mathbb{Z}\}$

4.b) Déduisons n tel que $M_n \in [Ox)$

$M_n \in [Ox) \Leftrightarrow argz_n \equiv 0[2\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow 5n + 3 = 12k \Leftrightarrow 5n - 12k = 3$ donc

$12(-k) - 5(-n) = 3$ d'après la question précédente $-n = 12p + 9 \Leftrightarrow n = -12p - 9 =$

$12(-p) - 9$, p∈ (-ℕ).

Exercice 2 : 3points

On considère les suites numériques (U_n), (V_n) et (W_n) définies par : pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2 \times \sqrt[3]{u_n}$ avec $U_0 = 7$; $V_n = \ln(U_n)$ et $W_n = \ln(V_n - \frac{3\ln 2}{2})$.

1. Montrer que la suite (W_n) est une suite arithmétique, préciser sa raison et son premier terme puis déduire l'expression de V_n en fonction de n. **0,75pt**
2. Montrer que la suite (V_n) est convergente en déterminant sa limite. **0,75pt**
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. **0,5pt**
4. En déduire que la suite (Un) est convergente en précisant sa limite l. **0,5 pt**
5. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que U_n est une valeur approchée de l à 0.01 près. **0,5 pt**

Solution 2 :

On considère les suites numériques (U_n), (V_n) et (W_n) définies par : pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2 \times \sqrt[3]{u_n}$ avec $U_0 = 7$; $Vn = ln(Un)$ et $Wn = ln(Vn - \frac{3\ln 2}{2})$.

1. Montrons que la suite (W_n) est arithmétique, précisons sa raison et son 1er terme.

$W_{n+1} = ln\left(V_{n+1} - \frac{3ln2}{2}\right) = ln\left(ln(u_{n+1}) - \frac{3ln2}{2}\right) = \ln\left(ln\left(2 \times \sqrt[3]{u_n}\right) - \frac{3ln2}{2}\right) =$

$ln\left(ln2 + \frac{1}{3}lnu_n - \frac{3ln2}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}lnu_n - \frac{ln2}{2}\right) = \ln\left[\frac{1}{3}\left(lnu_n - \frac{3ln2}{2}\right)\right] = = -ln3 +$

$\ln\left(V_n - \frac{3ln2}{2}\right) = W_n - ln3$ donc (W_n) est une suite arithmétique de raison $-ln3$.

Précisons sa raison $k = -ln3$, déduisons l'expression de V_n en fonction de n

$W_n = W_0 - nln3 = \ln\left(ln7 - \frac{3ln2}{2}\right) - nln3 \Leftrightarrow V_n - \frac{3ln2}{2} = e^{\left(\ln\left(ln7 - \frac{3ln2}{2}\right) - nln3\right)} =$

$e^{\left(\ln\left(ln7 - \frac{3ln2}{2}\right)\right)} e^{ln\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(ln7 - \frac{3ln2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftrightarrow V_n = \left(ln7 - \frac{3ln2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3ln2}{2}$

2. Montrons que la suite (V_n) est convergente et déterminons sa limite.

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\left(ln7 - \frac{3ln2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3ln2}{2} = \frac{3ln2}{2}$$

3. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n, montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e

montrons que $u_{n+1} = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$

$U_{n+1} = 2 \times \sqrt[3]{u_n} = 2 \times \left(2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \times \left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} =$

$2 \times \left(\left(\sqrt{2}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 2\sqrt{2} \times \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}$ d'où P est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

4. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 2\sqrt{2}$

5. Déterminons n tel que $|u_n - l| \leq 10^{-2}$ près

$u_n - l = 2\sqrt{2}\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - 1\right) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} - 1\right) \leq$

$\frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} \leq 1 + \frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n ln\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right) \leq ln\left(1 + \frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{ln\left(1+\frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}}\right)}{ln\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)}$

Donc $-nln3 \leq ln\left(\frac{ln\left(1+\frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}}\right)}{ln\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)}\right)$ donc $n \geq \frac{ln\left(\frac{ln\left(1+\frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}}\right)}{ln\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)}\right)}{-ln3}$

Prendre $n = E\left(\frac{ln\left(\frac{ln\left(1+\frac{10^{-2}}{2\sqrt{2}}\right)}{ln\left(\frac{7\sqrt{2}}{4}\right)}\right)}{-ln3}\right) + 1$

EXERCICE 3 : 4points

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On désigne par m un nombre réel et par (E_m) l'ensemble des points M du plan (P), de coordonnées (x ; y) vérifiant l'équation : $(m - 1)x^2 + 3my^2 + 2(m - 14)x + m + 3 = 0$.

a. Déterminer suivants les valeurs de m la nature de (E_m). **1 pt**

b. Préciser les éléments caractéristiques (sommet et foyer) de (E_1). **0,5 pt**

2. Soit (Γ) l'ensemble des points M (x ; y) du plan tels que $x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$.

a. Montrer que (Γ) est la réunion d'une ellipse (Γ_1) et d'une hyperbole (Γ2) dont on donnera les équations réduites respectives. **0,75 pt**

b. Déterminer une équation de la tangente (Δ) à l'ellipse (Γ1) au point $I(-\sqrt{3}\ ;\ \frac{3}{2})$. **0,5 pt**

c. Construire (Γ) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **0,5 pt**

3. On donne G(0; 1), $\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$.

Déterminer une équation cartésienne de (Γ_2) dans le repère $(G, \vec{u}, \vec{v})$. **0,75 pt**

Solution 3 :

1. $(E_m): (m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-14)x + m + 3 = 0$

1.a) Déterminons, suivant les valeurs de m, la nature de (E_m)

Si $m = 1$ on a $(E_1): 3y^2 - 26x + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2\left(\frac{13}{3}\right)x - \frac{4}{3}$ donc (E_1) est une parabole

Si $m - 1 = 3m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$, on a

$\left(E_{-\frac{1}{2}}\right): -\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 29x + \frac{5}{2} = 0$, $\left(E_{-\frac{1}{2}}\right)$ est un cercle.

m	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
$3m(m-1)$	+ − +

Si $m \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[-\{-\frac{1}{2}\}$, (E_m) est une ellipse.

Si $m \in [0; 1[$, (E_m) est une hyperbole.

1.b) Les éléments caractéristiques de (E_1) (évident)

2. Soit $(\Gamma): x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = 0$

$x^4 - 16(y^2 - 2y)^2 = \left(x^2 - 4(y^2 - 4y)\right)\left(x^2 + 4(y^2 - 4y)\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4((y-2)^2 - 4) = 0$ ou $x^2 + 4((y-2)^2 - 4) = 0$

$x^2 - 4(y-2)^2 = -16$ ou $x^2 + 4(y-2)^2 = 16$

$-\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ ou $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Ainsi, (Γ) est la réunion d'une ellipse (Γ_1): $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ et d'une hyperbole (Γ_2): $-\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

2.b) Déterminons une équation de la tangente (Δ) à (Γ_1)

$(\Delta): -\frac{x\sqrt{3}}{16} - \frac{(y-2)}{8} = 1 \Leftrightarrow y - 2 = 8(-\frac{x\sqrt{3}}{16} - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - 6.$

3. Une équation de (Γ_2): $-\frac{x^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ dans le repère $(G, \vec{u}, \vec{v})$

$G(0;1)$, $\vec{u}=\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v}=\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}$

Soit M le point de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et de coordonnées (X, Y) dans $(G, \vec{u}, \vec{v})$

On a $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{GM}=X\vec{u}+Y\vec{v}$

$$\overrightarrow{GM}=X\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\right)+Y\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{\imath}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{\jmath}\right)=\left(\frac{2X+2Y}{\sqrt{5}}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{-X+Y}{\sqrt{5}}\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM}=\vec{\jmath}+\left(\frac{2X+2Y}{\sqrt{5}}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{-X+Y}{\sqrt{5}}\right)\vec{\jmath}=\left(\frac{2X+2Y}{\sqrt{5}}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{-X+Y+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)\vec{\jmath}$$

Or $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ par identification, on a :

$$\begin{cases} x=\frac{2X+2Y}{\sqrt{5}} \\ y=\frac{-X+Y+\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

En remplaçant dans (Γ_2), on a :

$$-\frac{\left(\frac{2X+2Y}{\sqrt{5}}\right)^2}{16}+\frac{\left(\frac{-X+Y+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-2\right)^2}{4}=1 \Leftrightarrow -\frac{(X^2+2XY+Y^2)}{20}+\frac{(X^2+Y^2+5-2XY+2X\sqrt{5}-2Y\sqrt{5})}{20}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(-1+1)X^2+(-1+1)Y^2-4XY+2X\sqrt{5}-2Y\sqrt{5}}{20}=1 \Leftrightarrow -2XY+X\sqrt{5}-Y\sqrt{5}=10$$

Probleme

Partie A : 2points

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). Soit (C) l'ensemble des point M (x ; y) du plan tel que : $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ et (Δ) la droite d'équation : $y-3=0$.

1. Déterminer l'expression analytique de l'affinité orthogonale t d'axe (Δ) et de rapport $\frac{1}{3}$. **0,75 pt**
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de (C). **0,5 pt**
3. Montrer que l'image (C') de (C) par t est une conique dont on précisera l'équation réduite et l'excentricité. **0,75pt**

Partie B : 8points

I- Soit la fonction g, définie sur IR, qui, à tout x, associe : $g(x)=e^x(x-1)+x^2$.

1. a) Étudier les variations de g sur R. **0,5 pt**
   b) Dresser le tableau de variation de g sur R. **0,75 pt**
2. Montrer que l'équation g (x) = 0 admet une solution α et une seule sur l'intervalle [0 ; +∞ [. Montrer que α est dans l'intervalle $I=[\frac{1}{3}\,;1]$. **0,75 pt**

II- Soit la fonction f définie sur [0; +∞[par : $\frac{e^x}{e^x+x}$.

1. Montrer que les équations f (x) = x et g (x) = 0 sont équivalentes sur [0 ; +∞ [, et que, par suite, l'équation f (x) = x admet α pour solution unique sur I.

2. a) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞ [. **0,75 pt**
   b) Dresser le tableau de variation de f. **0,5 pt**
   c) Construire la courbe représentative (C) de f sur [0 ; +∞[dans un repère orthonormé (unité 2 cm). On indiquera en particulier les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 1. **1pt**
3. Montrer que, pour tout x appartenant à I, f (x) appartient à I. **0,5 pt**

III- Soit la suite $(Un)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n ∈ IN

1. Montrer que, pour tout n ∈ N, Un ∈ I. **0,5pt**
2. Montrer que, pour tout x ∈ I, |f'(x)| $\leq \frac{1}{2}$. **0,5 pt**
3. En appliquant le théorème de l'inégalité des accroissements finis, démontrer que : ∀n ∈ N, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$. **0,5pt**
4. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que : ∀n ∈ N, $|Un - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$. **0,5 pt**
5. En déduire que (U_n) converge vers α. **0,25 pt**
6. A priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7}près ? **0,5pt**
7. En utilisant la décroissance de f, montrer que α est compris entre deux termes consécutifs quelconques de la suite. En déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}. **0,5pt**

Solution Problème :

Partie A :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J). Soit (C) l'ensemble des point M (x ; y) du plan tel que : $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ et (Δ) la droite d'équation : $y - 3 = 0$.

1. Déterminons l'expressions analytique de l'affinité orthogonale t d'axe (Δ) et de rapport $\frac{1}{3}$

Soit $M(x, y)$ un point du plan, $M'(x', y')$ son image par t, on a :

$$t(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x_H \\ y'-y_H \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x-x_H \\ y-y_H \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x_H \\ y' = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}y_H \end{cases}$$

(MH)⊥ (Δ) donc $\overrightarrow{MH} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H - x = 0 \\ y_H - y = \lambda \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_H = x \\ y_H = y + \lambda \end{cases}$

H ∈ (Δ) ⇔ $y_H - 3 = 0 \Leftrightarrow y_H = 3$ donc

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}(-y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{3}y + 2 \end{cases} \text{ donc } t: \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{3}y + 2 \end{cases}$$

2. Nature et éléments caractéristiques de (C).

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ donc (C) est le cercle de centre A(2 ; 3) et de rayon 2.

3. Montrons que (C') image de (C) est une conique

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{3}y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = 3y' - 6 \end{cases}$$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x'-2)^2 + (3y'-6)^2 = 4 \Leftrightarrow (x'-2)^2 + 9(y'-2)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\frac{(x'-2)^2}{4} + \frac{(y'-2)^2}{\frac{4}{9}} = 1$ donc (C') est une ellipse de centre B (2 ; 2) et de sommets A(2 ; 0), A'(-2 ; 0), B(0; $\frac{2}{3}$) et B'$\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ dans le repère (B, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Partie B :

I. $g(x) = e^x(x-1) + x^2$

1.a) Etudions les variations de g sur $\mathbb{R}$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = e^x(x-1) + e^x + 2x = x(e^x + 2)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $\forall x \in]-\infty; 0], g'(x) \leq 0$ g est décroissante et $\forall x \in$ $]0; +\infty[, g'(x) > 0$ g est strictement croissante.

1.b) Dressons le tableau de variation de g

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	|	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. g est continue et strictement croissante sur [0 ; +∞[donc réalise une bijection de [0 ; +∞[→]-1 ; +∞[, de plus $g\left(\frac{1}{3}\right) \times g(1) \leq 0$ d'après le T.V.I l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans [$\frac{1}{3}$; 1]

II. Soit la fonction f définie sur [0; +∞[par : $\frac{e^x}{e^x + x}$

II.1) Montrons que $g(x) = 0$ et $f(x) = x$ sont équivalentes

$g(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-1) + x^2 = 0 \Leftrightarrow xe^x + x^2 = e^x \Leftrightarrow x(e^x + x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = x$

Comme $g(x) = 0$ a une unique solution α sur I, il en est de même de $f(x) = x$

II.2) Calculons $f'(x)$ et déduisons le sens de variation de f sur [0 ; +∞[

$f'(x) = \frac{e^x(e^x+x) - e^x(e^x+1)}{(e^x+x)^2} = \frac{e^x(x-1)}{(e^x+x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

$\forall x \in [1;\ +\infty[, f'(x) \geq 0$ f est croissante.

2.b) Dressons le tableau de variation de f

$f(0) = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \qquad f(1) = \frac{e}{e+1}$

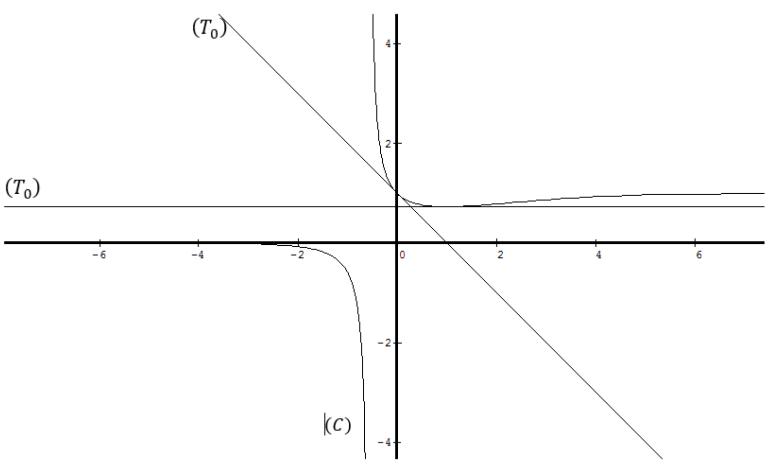
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$1 \searrow$	$\frac{e}{e+1}$	$\nearrow 1$

Déterminons les tangentes à (C) en 0 et en 1.

$f'(0) = -1, f'(1) = 0,$

$(T_0): y = -x + 1, \qquad (T_1): y = \frac{e}{e+1}$

Construction de (C), de (T_1) et (T_0)



3. Montrons que $\forall x \in I, f(x) \in I$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}} = 0{,}80,\ f(1) = 0{,}73$ et f est continue et strictement monotone sur I d'où $\forall x \in$

$I, f(x) \in I.$

III. Soit la suite $(Un)_{n \in \mathbb{N}*}$ définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout n ∈ IN

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

Soit la proposition P : $\{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I\}$

Montrons que P est vraie pour $n = 0$

$u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} \in I$ donc $u_0 \in I$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n, montrons que P est vraie au rang $n + 1$ i.e. montrons que $u_{n+1} \in I$

$u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \in I$ d'après la question 3, $u_{n+1} \in I$
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

2. Montrons que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3. Démontrons que $\forall n \in N$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$

$\forall n \in I, u_n \in I, \alpha \in I$, f est continue et dérivable sur I et $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors en appliquant l'I.A.F sur $[\alpha, u_n]$, on a :
$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

4. Déduisons que : $\forall n \in N$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$.

Soit la proposition P définie par : {: $\forall n \in N$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$}
Montrons que P est vraie pour n = 0 i.e montrons que $|u_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^0$
$|u_0 - \alpha| = \left|\frac{1}{2} - \alpha\right| \leq 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $|u_0 - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^0$ d'où P est vraie pour n = 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n + 1$
On a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}.(\frac{1}{2})^n$ d'où P est vraie au rang n + 1.
Conclusion : $\forall n \in N$, $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$

5. $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| \leq \lim\limits_{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to} u_n = \alpha$

6. a est valeur approchée de α à 10^{-7} près si $|a - \alpha| \leq 10^{-7}$

Pour que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-7}$, il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-7} \Leftrightarrow -nln2 \leq -7ln10 \Leftrightarrow n \geq \frac{7ln10}{ln2}$
Prendre $n = E\left(\frac{ln10}{ln2}\right) + 1$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \leq \alpha$, f étant décroissante sur I, on a $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(\alpha)$ soit $u_n \leq \alpha \leq u_{n+1}$

Un encadrement de α à 10^{-1}
$u_{E\left(\frac{ln10}{ln2}\right)+1} \leq \alpha \leq u_{E\left(\frac{ln10}{ln2}\right)+2}$

EPREUVES DE BACCALAUREAT BLANC

EPREUVE 1 : LYCEE DE BAKASSA-BANSOA

Exercice 1 / 5pts

I On considère l'équation : (E) (x,y)ϵ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; 19x+9y=3.

1. Montrer que si (x,y) est une solution de (E) alors x est un multiple de 3. **0.5pt**
2. Résoudre l'équation (E). **0.75pt**
3. Déterminer les couples (x ,y) solutions de l'équation (E) tels que le PGCD se x et y soit maximum. **0.75pt**

II Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$, on considère les points A(1 ;-1,0) ; B(3 ;0 ;1) C(1 ;2,1) et D(1 ;0 ;0).

1. Démontrer que les points A,B,C et D ne sont pas coplanaires. **0.5pt**

2(a). Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC) **0.5pt**

(b). Calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0.75pt**

(c). Déterminer l'expression analytique de la reflexion f par rapport au plan (ABC). **0.75pt**

3. Soit (S) la sphère de centre D passant par B . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image (S') de (S) par f. **0.5pt**

Solution 1 :

I. On considère l'équation (E) : $19x + 9y = 3$

I.1 Montrons que (x, y) est solution de (E) si et seulement si x est multiple de 3.

(x, y) solution de (E)$\Leftrightarrow$ $19x = 3 - 9y \Leftrightarrow 19x = 3(1 - 3y)$ donc 3/ $19x$ or $(19\Lambda 3) = 1 \Rightarrow$ $3/\ x$ d'où x est multiple de 3.

I.2. Résolvons (E)

$19(3) + 9(-6) = 3$ donc (3, -6) est solution particulière de (E).

$19x + 9y = 3 \Leftrightarrow 19x + 9y = 19(3) + 9(-6) \Leftrightarrow 19(x - 3) = 9(-y - 6)$. 9 divise $19(x - 3)$ or $(9\Lambda 19) = 1$ donc 9 divise x – 3 d'où $x = 9k + 3$ et $-y - 6 = 19k \Leftrightarrow y = -19k - 6$.

$S = \{(9k + 3, -19k - 6), k \in \mathbb{Z}\}$

I.3. Déterminons les couples dont le pgcd (x, y) est max.

Soit $d = (x\Lambda y)$, (x, y) est solution de (E) $\Leftrightarrow 19x + 9y = 3$, ainsi d'après Bezout d divise 3 donc d = 1 ou d = 3. Or d est max donc d = 3.

Ainsi $y = -19k - 6 = 3p \Leftrightarrow 19k + 3p = -6$ d'après la 1ere question, il en résulte donc que k est multiple de 3. Donc $S' = \{(9k + 3, -19k - 6), k \in 3\mathbb{Z}\}$

II. On considère les points A(1 ;-1,0) ; B(3 ;0 ;1) C(1 ;2,1) et D(1 ;0 ;0).

II.1. Démontrons que A, B, C et D sont non coplanaires

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = -2 \neq 0$ donc A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

II.2.a Equation cartésienne du plan (ABC)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de (ABC). Donc son équation est : $-2x - 2y + 6z + d = 0$.

$A \in (ABC) \Leftrightarrow d = 0$ donc (ABC) : $x + y - 3z = 0$

II.2.b Volume du tétraèdre ABCD

$V = \frac{\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{3} = \frac{2}{3}u.v$

II.2.c Equation cartésienne de la réflexion f par rapport au plan (ABC)

Soit M (x, y, z) un point de l'espace. M'(x', y', z') son image par f alors

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n} \\ I\ mil[MM'] \in (ABC) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -2\lambda \\ y' - y = -2\lambda \\ z' - z = 6\lambda \end{cases}$$

I = mil[MM']∈ (ABC) $\Leftrightarrow -2\left(\frac{x+x'}{2}\right) - 2\left(\frac{y+y'}{2}\right) + 6\left(\frac{z+z^4}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4\lambda - 2y + 4\lambda$

+6z+18λ =0 $\Leftrightarrow 26\lambda = 2x + 2y - 6z \Leftrightarrow \lambda = \frac{x+y-3z}{13}$ donc

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2x+2y-6z}{13} = \frac{11x-2y-6z}{13} \\ y' = y - \frac{2x+2y-6z}{13} = \frac{-2x+11y-6z}{13} \end{cases}$$

3. (S) est la sphère de centre D passant par B. Nature et éléments caractéristiques de (S') image de (S) par f.

La réflexion conserve les figures donc l'image de (S) est une sphère de centre S(D) et passant par S(B).

Exercice2 /5,5pts

1(a). Montrer que $\forall\, x \in IR_+^*, \ln x \leq x - 1$. Et en déduire que $\forall\, k \in IN^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\frac{x}{k}\, dx \leq 0$ 2×0.5pt.

(b) Prouver alors que : $\forall\, k \in IN^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\ \, dx - \ln(n!) \leq 0$ **0.75pt**

(c) Montrer que $\forall\, k \in IN^*, \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) - ln\sqrt{2} \geq 0.$ **0.5pt**

2. Soit g et f les fonctions numériques définies sur I= [0,1[par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{1-x^2} \\ f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\ si\ x \neq 0\ et\ f(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Dresser le tableau de variations de g. **0.5pt**

(b) Montrer que $\forall\, x \in\,]0;1[\,;\, 1 \leq f(x) \leq g(x)$. (On pourra au besoin appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $h: u \mapsto \int_0^u g(t)dt$ dans l'intervalle [0,x] ou utiliser la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle [0,x].) f est-elle continue en 0 ? **0.5+0.25pt**
qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall\, t \in I, g(t) = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$. En déduire que
$\forall\, x \in\,]0,1[\,, f(x) = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$. **2×0.25pt.**

3.Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n$.
(a) Vérifier que $\forall\, n \in IN^*$, $u_{n+1} - u_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n). **0.5+0.25pt**
(b) Montrer que $\forall\, n \in IN^*$, $u_n \geq ln\sqrt{2}$. **0.5pt**
(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. **0.25pt**

Solution 2 :

1.a) Montrons que $\forall\, x \in IR_+^*, \ln x \leq x - 1$.

Considérons la fonction $x \mapsto h(x) = lnx - (x-1)$, étudions son signe.

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\lim_{x \to 0^>} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty, h(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	|	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après le tableau de variations, on constate que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) \leq 0$ donc $lnx \leq x - 1$

Déduisons que $\forall\, k \in IN^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\frac{x}{k}\; dx \leq 0$

1.b) Prouvons que $\forall\, k \in IN^*, \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\;\; dx - \ln(n!) \leq 0$

$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} lnx\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} lnx\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(k.\frac{x}{k})\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (\ln k + \ln\left(\frac{x}{k}\right))\, dx$

$= \sum_{k=1}^{n} lnk(k + \frac{1}{2} - k + \frac{1}{2}) + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\left(\frac{x}{k}\right) dx = \ln(n!) + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\left(\frac{x}{k}\right) dx$

$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\;\; dx - \ln(n!) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\left(\frac{x}{k}\right) dx$ or $\forall\, k \in IN^*, \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} ln\frac{x}{k}\; dx \leq 0$ d'où le résultat.

1.c) Montrons que $\forall\, k \in IN^*, \ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - ln\sqrt{2} \geq 0$

$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} lnx\, dx = [xlnx - x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}ln2 + \frac{1}{2} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + ln\sqrt{2}$ or $\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln x\ dx - \ln(n!) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + ln\sqrt{2} - \ln(n!) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(n!) + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - ln\sqrt{2} \geq 0$

2. Soit g et f les fonctions numériques définies sur I= [0,1[par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{1-x^2} \\ f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\ si\ x \neq 0\ et\ f(0) = 1 \end{cases}$$

2.a) Dressons le tableau de variation de g.

g est continue et dérivable sur I et on a : $g'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \geq 0$ sur I donc g est croissante.

$g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1^<} g(x) = +\infty$ donc

x	0 1
$g'(x)$	+
$g(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

b) Démontrons que $\forall\, x \in\,]0;1[\,;\ 1 \leq f(x) \leq g(x)$.

On sait que $\forall\, x \in\,]0;1[\,,\ 1 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow g(x) \geq 1$ d'où $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt \geq \frac{1}{x}\int_0^x dt \Leftrightarrow$ $f(x) \geq 1$

$h: u \mapsto \int_0^u g(t)dt$ est continue et dérivable sur]0 ;1[. Alors, d'après le théorème des accroissements finis appliqué sur [0, x], il existe $c \in]0, x[\, \subseteq]0,1[$ tel que $h(x) - h(0) = h'(c)(x-0) \Leftrightarrow h(x) - h(0) = g(c)x \leq g(x).x$ car g est croissante. Or $h(0) = 0$

Donc $h(x) \leq g(x).x \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$

Ainsi $\forall\, x \in\,]0;1[\,;\ 1 \leq f(x) \leq g(x)$.

On a $\forall\, x \in\,]0;1[\,;\ 1 \leq f(x) \leq g(x)$ donc $1 \leq \lim\limits_{x\to 0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$

1.c) $g(t) = \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}$ donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$, déduisons que $\forall\, x \in\,]0,1[\,, f(x) = \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}\right) dt = \frac{1}{2x}[\ln(1+t) - \ln(1-t)]_0^x = \frac{1}{2x} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n$

3.a) Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1}) \leq 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

$u_{n+1} - u_n = \ln\big((n+1)!\big) + n + 1 - \left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - \ln(n!) - n + \left(n + \frac{1}{2}\right) lnn$

$= ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) + 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - lnn) - \ln(n+1) = 1 - \left(\frac{2n+1}{2}\right) ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$.

3.b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq ln\sqrt{2}$

Raisonnons par récurrence. Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq ln\sqrt{2}\}$

Montrons que P est vraie pour $n = 1$ i.e. montrons que $u_1 \geq ln\sqrt{2}$

$u_1 = 1$ et $ln(\sqrt{2}) \leq 1$ donc $u_1 \geq ln\sqrt{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P soit vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $u_{n+1} \geq ln\sqrt{2}$

$u_{n+1} - u_n = 1 - f(\frac{1}{2n+1})$ $\quad u_{n+1} = u_n + 1 - f(\frac{1}{2n+1}) \geq ln\sqrt{2}$ d'où P est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq ln\sqrt{2}$

(u_n) est décroissante et minorée par $ln\sqrt{2}$ donc (u_n) converge.

Problème : 9,5 pts

Les trois parties A, B et C sont dépendantes.

Partie A

On se propose de déterminer les racines quatrièmes du nombre complexe $a = -7 - 24i$.

1. Vérifier que $a = (1+2i)^4$. **0.5pt**
2. Justifier que si z est une racine quatrième de a, alors $(\frac{z}{1+2i})^4 = 1$ **0.5pt**
3. Utiliser les racines quatrièmes de 1 pour déterminer sous la forme algébrique les racines quatrièmes de a. **1pt**

Partie B

Le plan (P) est un muni repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Soit a un paramètre réel et l'application f_a du plan (P) dans lui-même qui à tout point M de coordonnées (x,y) associe le point M' de coordonnées (x',y') telle que : $\begin{cases} x' = \left(\frac{a+1}{2}\right)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right) \\ y' = \left(\frac{a-1}{2}\right)x + \left(\frac{a+1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right) \end{cases}$.

1. Justifier que f_a est une application affine.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles f_a est une transformation du plan.

0.5pt

3.a) Démontrer que si a$\neq$ 1, alors l'ensemble des points invariants par f_a est la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$. **0.5pt**

b) Préciser la nature de f_1 **0.25pt**

4. On suppose que a ϵ IR-{0,1}

a) Démontrer que pour tout M de (P) n'appartenant pas à (D), d'image M' par f_a, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. **0.5pt**

b) Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (D). Exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction $\overrightarrow{HM}$. **0.5pt**

c) En déduire que f_a est une affinité orthogonale d'axe (D) dont on précisera le rapport.

<u>Partie C :</u>

Dans cette partie, on suppose que $IR_+^* -\{1\}$. Soit (C) le cercle de centre Ω(-2 ;1) et passant par A(0 ;3) . On pose $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

1. (a) Vérifier que $(\Omega, \vec{u})$ est un repère de (D) . **0.25pt**

   (b) Démontrer que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé de (P). **0.75pt**

2. On désigne par (X,Y) les coordonnées d'un point quelconque M dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ et par (X',Y') celle de l'image M' par f_a dans le même repère.

(a) Démontrer que dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, f_a a pour expression analytique :

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = aY + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-1) \end{cases}$$ **1pt**

(b) Déterminer dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

i. Une équation cartésienne du cercle (C). **0.5pt**

ii. Une équation cartésienne de l'image (Γ_a) de (C) par f_a . **0.5pt**

(c) En déduire la nature de (Γ_a). **0.5pt**

3. Construire $(\Gamma_{\frac{1}{2}})$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **1pt**

<u>Solution Problème :</u>

Partie A :

2.1 Vérifions que $a = (1 + 2i)^4$

$(1 + 2i)^4 = 1 + 4.1.2i - 6.1.2^2 - 4.1.2^3 i + 2^4 = 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = -7 - 24i$

2.2 z est une racine quatrième de a, alors $(\frac{z}{1+2i})^4 = 1$

z est une racine quatrième de a$\Leftrightarrow z^4 = a \Leftrightarrow z^4 = (1 + 2i)^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1+2i}\right)^4 = 1$

2.3 Forme algébrique des racines quatrièmes de a.

$\frac{z_k}{1+2i} = e^{i\frac{2k\pi}{4}} \Leftrightarrow z_k = e^{i\frac{k\pi}{2}}(1 + 2i), k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$z_0 = 1 + 2i, z_1 = i(1 + 2i) = -2 + i;\ z_2 = -1 - 2i;\ z_3 = -i(1 + 2i) = 2 - i$

Partie B :

$$f_a:\begin{cases}x' = \left(\frac{a+1}{2}\right)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right)\\ y' = \left(\frac{a-1}{2}\right)x + \left(\frac{a+1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right)\end{cases}.$$

1. f_a est une application affine car son expression analytique est sous la forme $\begin{cases}x' = ax + by + c\\ y' = a'x + b'y + c'\end{cases}$

2. $a \in \mathbb{R}$

3.a) $a \neq 1$

$f_a(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases}x = \left(\frac{a+1}{2}\right)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right)\\ y = \left(\frac{a-1}{2}\right)x + \left(\frac{a+1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \quad x + y + 1 = 0$ donc l'ensemble des points invariants est la droite d'équation $x + y + 1 = 0$

3.b) Nature de f_1

$f_1:\begin{cases}x' = x\\ y' = y\end{cases} f_1 = Id_{\mathcal{P}}$

4. On suppose que a ϵ IR-{0,1}

4.a) Démontrons que $\forall M \in (\mathcal{P}), \overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe.

$\overrightarrow{MM'}\binom{x'-x}{y'-y} = \left(\frac{a-1}{2}\right)(x + y + 1)\binom{1}{1}$ donc $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe. Celle de $\vec{u}\binom{1}{1}$

4.b) Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (D). Exprimons $\overrightarrow{MM'}$ en fonction $\overrightarrow{HM}$

On a $H(a, b)$ et $\begin{cases}H \in (D)\\ \overrightarrow{MH} = \lambda\vec{n}\end{cases}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal de (D)

$\overrightarrow{HM} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases}x - a = \lambda\\ y - b = \lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a = x - \lambda\\ b = y - \lambda\end{cases}$

H $\in$ (D) $\Leftrightarrow a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{x+y+1}{2}$

Donc $\begin{cases}a = x - \lambda = x - \frac{x+y+1}{2} = \frac{x-y-1}{2}\\ b = y - \lambda = y - \frac{x+y+1}{2} = \frac{-x+y-1}{2}\end{cases}$

$\overrightarrow{HM}\binom{x-a}{y-b} = \frac{x+y+1}{2}\binom{1}{1}$, $\qquad \overrightarrow{MM'} = \left(\frac{a-1}{2}\right)(x + y + 1)\binom{1}{1}$ donc $\overrightarrow{MM'} = (a-1)\overrightarrow{HM}$.

4.c) $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HM'} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = (a-1)\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM} = a\overrightarrow{HM}$

f_a est l'affinité orthogonale d'axe (D) et de rapport $k = a$.

Partie C :

Dans cette partie, on suppose que $IR_+^* -\{1\}$. Soit (C) le cercle de centre Ω(-2 ;1) et passant par A(0 ;3) . On pose $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.

1.a) Vérifions que $(\Omega, \vec{u})$ est un repère de (D)

$-2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow \Omega \in (D)$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D).

1.b) Démontrons que $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé de (P)

$\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u}.\vec{v} = 0$ donc $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé de (P)

2.a) Démontrons que dans dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$, f_a a pour expression analytique

$$\begin{cases} X' = X \\ Y' = aY + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X\left(\frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}\right) + Y\left(\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}$$

Par identification, on a $\begin{cases} x = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-X+Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ et $\begin{cases} x' = \frac{X'+Y'}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{-X'+Y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = \left(\frac{a+1}{2}\right)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right) \\ y' = \left(\frac{a-1}{2}\right)x + \left(\frac{a+1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X'+Y'}{\sqrt{2}} = \left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{a-1}{2}\right) \\ \frac{-X'+Y'}{\sqrt{2}} = \left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{a-1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} X' + Y' = X + aY + \frac{a-1}{\sqrt{2}} \ (1) \\ -X' + Y' = -X + aY + \frac{a-1}{\sqrt{2}} \ (2) \end{cases}$$

(1) – (2) $\Rightarrow 2X' = 2X \Leftrightarrow X' = X$, (1)+(2)$\Rightarrow$ $2Y' = 2aY + \sqrt{2}(a-1) \Leftrightarrow Y' = aY + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-1)$

2.b) Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$

2.b.i) Déterminons une équation cartésienne de (C).

$(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

$$\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{u} + Y\vec{v} = X\left(\frac{\vec{\imath}-\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}\right) + Y\left(\frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath} = \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}} - 2\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}} + 1\right)\vec{\jmath}$$

$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{X+Y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-X+Y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\vec{\jmath}$ par identification, on a :

$$\begin{cases} x = \frac{X+Y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{-X+Y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{X+Y-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2\right)^2 + \left(\frac{-X+Y+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 1\right)^2 = 8$$

$\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + X^2 + Y^2 = 16 \Leftrightarrow X^2 + Y^2 = 8$ donc $(C): X^2 + Y^2 = 8$

2.b.ii) Déterminons une équation cartésienne de l'image (Γ_a) de (C) par f_a

$$f_a:\begin{cases} x' = \left(\frac{a+1}{2}\right)x + \left(\frac{a-1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right) \ (1) \\ y' = \left(\frac{a-1}{2}\right)x + \left(\frac{a+1}{2}\right)y + \left(\frac{a-1}{2}\right) \ (2) \end{cases}$$

$$\left(\frac{a-1}{2}\right)x' - \left(\frac{a+1}{2}\right)y' = \left[\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2\right]y + \left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$-ay - \frac{a-1}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)x' - \left(\frac{a+1}{2}\right)y' \Leftrightarrow y = -\frac{a-1}{2a}x' + \frac{a+1}{2a}y' - \frac{a-1}{2a}$$

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)x' - \left(\frac{a-1}{2}\right)y' = \left[\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right]x + \left(\frac{a-1}{2}\right)\left(\frac{a+1}{2} - \frac{a-1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)x' - \left(\frac{a-1}{2}\right)y' = ax + \frac{a-1}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{a+1}{2a}\right)x' - \left(\frac{a-1}{2a}\right)y' - \frac{a-1}{2a}$$

$(C): (x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 \Leftrightarrow$

$$\left(\left(\frac{a+1}{2a}\right)x' - \left(\frac{a-1}{2a}\right)y' - \frac{a-1}{2a} + 2\right)^2 + \left(-\frac{a-1}{2a}x' + \frac{a+1}{2a}y' - \frac{a-1}{2a} - 1\right)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \left((a+1)x' - (a-1)y' + 3a + 1\right)^2 + \left((-a+1)x' + (a+1)y' - 3a + 1\right)^2 = 32a^2$$

$\Leftrightarrow \quad (a+1)^2x'^2 + (a-1)^2y'^2 + (3a+1)^2 - 2(a^2-1)x'y' + 2(a+1)(3a+1)x' -$
$2(a-1)(3a+1)y' + (a-1)^2x'^2 + (a+1)^2y'^2 + (-3a+1)^2 - 2(a^2-1)x'y' +$
$2(a-1)(3a-1)x' - 2(a+1)(3a-1)y' = 32a^2$

$\Leftrightarrow \quad (2a^2+2)x'^2 + (2a^2+2)y'^2 + 9a^2 + 1 - 4(a^2-1)x'y' + 2(3a^2+1)x' \quad +2(3a^2 -$
$1)y' = 32a^2$

EPREUVE 2 : LYCEE DE NKOLNDA

Exercice 1 : 5points

I. Soit a la suite numérique définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et, $\forall^n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$.

1. Calculer le P.G.C.D. de 4^5-1 et de 4^6-1. **0,25 pt**
2. Calculer les termes a_2, a_3 et a_4 de la suite a. **0,5 pt**
3. a) Montrer que la suite a vérifie, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 4a_n + 1$. **0,25 pt**
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un entier naturel. **0,5 pt**
   c) En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de a_n et a_{n+1}. **0,5 pt**
4. Soit b la suite définie pour tout entier naturel n par $b_n = a_n + \frac{1}{3}$.

a) Montrer que b est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme b_0. **0,5 pt**

b) Exprimer b_n puis a_n en fonction de n. **0,5 pt**

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$. **0,5 pt**

II. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $48x + 35y = 28$. **0,5 pt**

Solution 1 :

I. Soit a la suite numérique définie par : $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et, $\forall^n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$

1. Calculons $pgcd(4^5 - 1, 4^6 - 1)$

$4^6 - 1 = 4.4^5 - 1 = 4.(4^5 - 1) + 4 - 1 = 4.(4^5 - 1) + 3$ donc $pgcd(4^5 - 1, 4^6 - 1) = 3$

2. Calculons a_2, a_3, a_4

$a_2 = 5a_1 - 4a_0 = 5, a_3 = 5a_2 - 4a_1 = 25 - 4 = 21,\quad a_4 = 5a_3 - 4a_2 = 105 - 20 = 85.$

3.a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 4a_n + 1$

Soit la proposition P :$\{a_{n+1} = 4a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$

Montrons que P est vraie au rang $n = 0$ i.e. montrons que $a_1 = 4a_0 + 1$

$a_1 = 1$, et $4a_0 + 1 = 1$ d'où le résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n + 1$ i.e. montrons que $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 1$

$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n = 5(4a_n + 1) - 4a_n = 16a_n + 5 = 4(4a_n + 1) + 1 = 4a_{n+1} + 1$ d'où P est vraie au rang $n + 1$

Conclusion :$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 4a_n + 1$

3.b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$

Par récurrence, $a_0 = 0 \in \mathbb{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_n \in \mathbb{N}$, montrons que $a_{n+1} \in \mathbb{N}$

$a_n \in \mathbb{N}$ donc $4a_n + 1 \in \mathbb{N}$ c'est – à – dire que $a_{n+1} \in \mathbb{N}$

Conclusion : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ $a_n \in \mathbb{N}$

3.c) On a $a_{n+1} = 4a_n + 1$ alors d'après Bezout $(a_{n+1}\Lambda a_n) = 1$

4. $b_n = a_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

4.a) Montrons que *b* est une suite géométrique.

$b_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3} = 4a_n + 1 + \frac{1}{3} = 4a_n + \frac{4}{3} = 4\left(a_n + \frac{1}{3}\right) = 4b_n$ donc b est géométrique de raison 4 et de 1^er^ terme $b_0 = \frac{1}{3}$.

4.b) Exprimons a_n et b_n en fonction de n.

$b_n = b_0.q^n = \frac{4^n}{3}$, $a_n = b_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

4.c) Déterminons $(4^{n+1} - 1\Lambda 4^n - 1)$

$(4^{n+1} - 1\Lambda 4^n - 1) = (3a_{n+1}\Lambda 3a_n) = 3(a_{n+1}\Lambda a_n) = 3$

II. Résolvons $48x + 35y = 28$

$48 = 35 \times 1 + 13$, 35 = 13×2 + 9,

13 = 9 × 1 +4, 9 = 4×2 +1

Ainsi, 1 = 9 – 4×2 = 9 – (13 – 9×1)×2 = 9 × 3 – 13×2 = (35 – 13×2)×3 – 13 × 2 = 35 × 3 – 13 × 5 = 35 × 3 – (48 – 35 × 1) × 5 = 35 × 8 – 48 × 5 = 48 (-5) + 35 (8) = 1

D'où $48(-140) + 35(224) = 28$

$48x + 35y = 28 \Leftrightarrow 48x + 35y = 48(-140) + 35(224) \Leftrightarrow 48(x + 140) = 35(224 - y)$

Donc $48/35(224 - y)$ or $(48\Lambda 35) = 1$ alors $48/(224 - y) \Leftrightarrow 224 - y = 48k \Leftrightarrow y = 224 - 48k$ et $x + 140 = 35k \Leftrightarrow x = 35k - 140$.

Dans ce cas $S = \{35k - 140, -48k + 224), k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 2 : 3,25points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, A, A′, B, B′ sont les points d'affixes respectives 1, −1, i, −i. À tout point *M* d'affixe *z*, distinct des points O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec $(\overrightarrow{M_1A}, \overrightarrow{M_1A})$. **On se propose dans cette question de déterminer les points *M* pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.**

1. a. Justifier que $z - z_1 = i\,(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i\,(z - z_2)$. **0,5 pt**
   b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z + 1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z + i)$. **0,5pt**
2. a. Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z + 1| = |z + i|$. **0,25 pt**
   En déduire l'ensemble (Δ) des points *M* tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure. **0,5 pt**
   b. Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut $|z + 1|^2 = 2|z|^2$. **0,25 pt**

c. Montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$. **0,25 pt**

d. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$. **0,5 pt**

3. En déduire les affixes des deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral. **0,5 pt**

Solution 2 :

A(1) ; A'(-1) ; B(i) ; B'(-i), les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles avec $(\overrightarrow{M_2A}, \overrightarrow{M_1A})$ direct.

1.a) Justifions que $z - z_1 = i\,(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i\,(z - z_2)$.

BMM_1 rectangle isocèle en $M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} MM_1 = BM_1 \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{MM_1}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ soit $z - z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}(i - z_1)$

$\Leftrightarrow z - z_1 = i(i - z_1)$

AMM_2 rectangle et isocèle en $M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} MM_2 = AM_2 \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{AM_2}}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$1 - z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_2) \Leftrightarrow 1 - z_2 = i(z - z_2)$

1.b) Vérifions que : $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ et $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$

$z - z_1 = i(i - z_1) \Leftrightarrow z - z_1 = -1 - iz_1 \Leftrightarrow z_1(1-i) = z + 1 \Leftrightarrow$

$z_1 = \frac{1}{1-i}(z+1) = \frac{1+i}{2}(z+1) \Leftrightarrow z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$

$1 - z_2 = i(z - z_2) \Leftrightarrow 1 - iz = (1-i)z_2 \Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{1}{1-i}\right)(1 - iz) =$

$\frac{-i}{1-i}(z+i) = \frac{-i(1+i)}{2}(z+i) = \frac{(1-i)}{2}(z+i)$

2.a) Montrons que $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$.

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \left|\frac{1+i}{2}(z+1)\right| = \left|\frac{(1-i)}{2}(z+i)\right| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}|z+1| = \frac{\sqrt{2}}{2}|z+i|$

$\Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$.

Déduisons l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1 = OM_2$

(Δ) est la médiatrice de [A'B'].

2.b) Montrons que $OM_1 = M_1M_2$ équivaut $|z+1|^2 = 2|z|^2$

$OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2 - z_1| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}|z+1| = \left|\frac{(1-i)}{2}(z+i) - \frac{1+i}{2}(z+1)\right| =$

$\left|\frac{(1-i-1-i)}{2}z + \frac{1+i-1-i}{2}\right| = |-iz| = |z| \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}|z+1|\right)^2 = |z|^2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$

2.c) Montrons que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$

$|z+1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (z+1)(\bar{z}+1) = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} + 1 = 2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 - z - \bar{z} + 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2$

2.d) Déduisons l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$

D'après la question précédente, (Γ) est le cercle de centre A (1) et de rayon $\sqrt{2}$.

3. OM_1M_2 équilatéral $\Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 = M_1M_2 \\ OM_1 = OM_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\Delta) \\ M \in (\Gamma) \end{cases}$

Déterminons les équations cartésiennes de (Δ) et (Γ)

Soit M $(x, y) \in (\Delta) \Leftrightarrow |z+1| = |z+i| \Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 1 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow x = y$

$M(x, y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2$

$y = x \Rightarrow (x-1)^2 + x^2 = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4(-1)(2) = 12 = (2\sqrt{3})^2$

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ou $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ donc les points sont $A\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3 : 2,75points

I- Soit E et F deux points d'affixes respectives 1 et 2i. A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M'd'affixe Z tel que : $Z = \frac{z-1}{z-2i}$.

1. Déterminer l'ensemble (Δ) des points M(z) tels que : $\arg(Z) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. **0,5pt**
2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M(z) tels que : |Z|= 2. **0,5 pt**
3. Montrer que (Δ) et (Γ) sont sécants en deux points dont on précisera les affixes. **0,75pt**

II- x est un nombre réel. Linéariser cos[5] x puis calculer l'intégrale $A = 32\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\, dx$. **1pt**

Solution 3 :

I. Soit E et F deux points d'affixes respectives 1 et 2i. A tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M'd'affixe Z tel que : $Z = \frac{z-1}{z-2i}$.

I.1) Déterminons (Δ)

$\arg(Z) = \arg\left(\frac{z-1}{z-2i}\right) = mes\left(\widehat{\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{EM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, (Δ) est le demi-cercle de diamètre [EF] privé des points E et F.

I.2) Déterminons (Γ)

$|Z| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z-2i}\right| = 2 \Leftrightarrow \frac{ME}{MF} = 2$ donc (Γ) est le cercle de diamètre [KJ] où $K = bar\{(E,1);(F,2)\}$ et $J = bar\{(E,1);(F,-2)\}$

3. Montrons que (Δ) et (Γ) ont un unique point commun dont on précisera l'affixe.

Cherchons les éléments caractéristiques de (Δ)

Soit H le milieu de [EF], on a $h = \frac{1+2i}{2}$, H est le centre de (Δ) et le rayon r = EH = $\left|\frac{1+2i}{2} - 1\right|$ =

$\left|\frac{-1+2i}{2}\right| = \frac{\sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Cherchons les éléments caractéristiques de (Γ)

Soit D le milieu de [KJ], $k = \frac{1+2(2i)}{3} = \frac{1+4i}{3}$, $j = \frac{1-2(2i)}{-1} = -1+4i$ d'où $d = \frac{\frac{1+4i}{3}-1+4i}{2} = \frac{-2+16i}{6}$, D est le centre de (Γ) et le rayon r' = KD = $\left|\frac{-2+16i}{6} - \frac{1+4i}{3}\right| = \left|\frac{-2+16i-2-8i}{6}\right| = \left|\frac{-4+8i}{6}\right| = \frac{2}{3}|-1+2i| = \frac{2\sqrt{5}}{3}$

(Δ) et (Γ) sont tangents si HD = r + r'

HD = $\left|\frac{-2+16i}{6} - \frac{1+2i}{2}\right| = \left|\frac{-2+16i-3-6i}{6}\right| = \left|\frac{-5+10i}{6}\right| = \frac{5}{6}|-1+2i| = \frac{5\sqrt{5}}{6}$

$r + r' = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{(3+4)\sqrt{5}}{6} = \frac{7\sqrt{5}}{6}$ donc HD < r + r' d'où (Δ) et (Γ) se coupent en deux points.

Notons A et B les points d'intersection. Déterminons leurs affixes.

Equation cartésienne de (Δ) : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$

Equation cartésienne de (Γ) : $(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = \frac{20}{9}$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

$(x + \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{8}{3})^2 = \frac{20}{9} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}y + \frac{65}{9} = \frac{20}{9} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{16}{3}y = -5$

Donc en réunissant les deux équations on a :

$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + 2y \\ x^2 + y^2 = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}y - 5 \end{cases}$ après résolution, on obtient $a = \frac{-3+6i}{5}$ et $b = 1 + 2i$

II. Linéarisons $cos^5 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{e^{i5x}+5e^{i4x}.e^{-ix}+10e^{i3x}.e^{-i2x}+10e^{i2x}.e^{-i3x}+5e^{ix}.e^{-i4x}+e^{-i5x}}{32}$

$cos^5 x = \frac{cos5x+5cos3x+10.cosx}{16}$. Calculons $A = 32\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\, dx$.

$A = 32\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\, dx = 32\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos5x+5cos3x+10.cosx}{16} dx = 2\left[\frac{sin5x}{5} + \frac{5sin3x}{3} + 10sinx\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{10} + 5\sqrt{3}\right) = \frac{49\sqrt{3}}{5} u.a$

PROBLEME

Partie A :

1. Dresser le tableau de variations de la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J). **0,75pt**
2. Soit g la fonction définie sur R par tout réel x, $g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$
   a) Justifier que g est dérivable sur IR. **0,5 pt**
   b) Calculer la dérivée g' de g et déduire le sens des variations de g. **0,5 pt**
   c) Montrer que g est impaire. **0,5 pt**
   d) Montrer que, pour tout x > 0, $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.
   Déduire la limite de g(x) lorsque x tend vers +∞. **0,5 pt**
3. Soit G la fonction définie par : ∀x ∈ IR, G(x) = g(2x) − g(x).
   a. Montrer que G est dérivable sur IR et étudier ses variations. **0,5pt**
   b. Justifier que : pour tout réel non nul x > 0, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$. **0,25 pt**
   c. Déduire de a. et b. que : ∀x ∈ IR ; G(x) ≤ ln 2. **0,5pt**
   On pourra écrire G(x) à l'aide d'une seule intégrale.
   d. Déduire de a. et c. que G(x) admet une limite finie l lorsque x tend vers +∞. **0,25pt**
   e. Montrer que G est une fonction impaire. **0,5pt**
   f. Déduire de d. et e. que G(x) admet une limite finie lorsque x tend vers −∞. Exprimer cette limite en fonction de l. **0,5pt**

Partie B :

On considère la fonction numérique h définie par : $h(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

1. **a.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h. **0,25 pt**
   b. Calculer h'(x) et montrer que les fonctions g et h sont égales. **0,5 pt**
   c. Déduire de b. une nouvelle écriture de G, introduite au 3. Partie A et de la valeur du réel l de la question 3.d. Partie A. **0,25pt**
2. On s'intéresse à la courbe représentative (C) de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
   a. Montrer que pour tout x ϵ]0; +∞[, $g(x) = \ln 2x + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) - \ln 2$. **0,5pt**
   b. Étudier les branches infinies de (C) et préciser les asymptotes de la courbe (C). **0,5pt**
   c. Étudier la position relative de (C) par rapport à la tangente à l'origine. **0,5 pt**
   d. Tracer la courbe de (C). **0,75pt**

Partie C :

Soit la suite (Un)n∈N définie pour tout n ∈ N par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(Un)$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n ∈ N, Un > 0. **0,5pt**
2. Montrer que la suite (Un) est décroissante. **0,5pt**

En déduire que la suite (Un) converge. Préciser sa limite. **0,5pt**

Solution Problème :

Partie A :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

1. Tableau de variations de f

$D_f = \mathbb{R}$, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

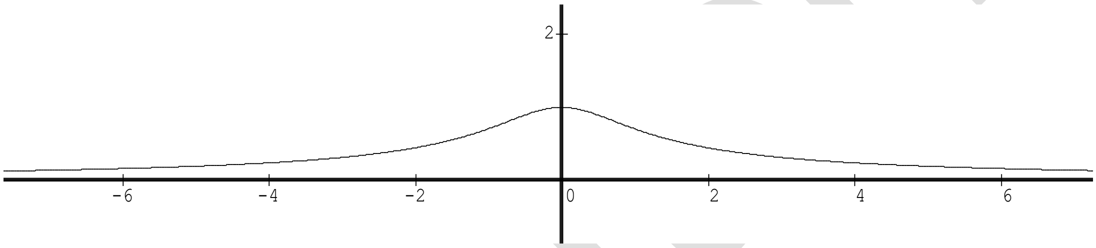
$f'(x) = -\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	|	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	1	$\nearrow$	0

Tracé de C_f



2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$

2.a) Justifions que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc g existe et est dérivable sur $\mathbb{R}$

2.b) $g'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

Déduisons le sens de variation de g.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f(x) \geq 0$ donc g est croissante.

2.c) Montrons que g est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et on a $g(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}} (-du) = -\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = -g(x)$ donc g est impaire.

2.d) Montrons que pour tout x > 0, $\int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

$(1+t)^2 = 1 + t^2 + 2t \geq 1 + t^2, \forall t \geq 0$ donc $\frac{1}{\sqrt{(1+t)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt$.

$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(x+1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

3. Soit G la fonction définie par : ∀x ∈ IR, G(x) = g(2x) − g(x).

3.a) Etudions les variations de G

G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$G'(x) = 2g'(2x) - g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}}$

$= \frac{4(1+x^2)-(1+4x^2)}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}\left(2\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+4x^2}\right)} = \frac{3}{\sqrt{1+4x^2}\sqrt{1+x^2}\left(2\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+4x^2}\right)} > 0$

Donc G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

3.b) Justifions que $\forall x > 0, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x}$

Soit $x > 0$, on a $1 + x^2 > x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x}$

3.c) Déduisons que $G(x) \leq ln2$

On a $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \Leftrightarrow G(x) \leq ln2$

3.d) Déduisons que G a une limite finie.

G est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to+\infty} G(x) \leq ln2$ donc G a une limite finie l en $+\infty$

3.e) Montrons que G est une fonction impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $G(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)dt = \int_x^{2x} f(-u)(-du) = -\int_x^{2x} f(u)\,du = -G(x)$
(on obtient cela en posant $t = -u$, comme f est paire).

3.f) Puisque G est impaire et que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = l$, alors $\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{u\to+\infty} G(-u) = -\lim_{u\to+\infty} G(u) = -l$

Partie B :

On considère la fonction $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

1.a) Déterminons D_h

On sait que si $x \geq 0, x + \sqrt{1+x^2} > 0$ et si $x < 0, \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > -x \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0$ donc $D_h = \mathbb{R}$

1.b) Calculons $h'(x)$ et montrons que G et h sont égales.

$h'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = f(x)$ donc $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt = g(x)$

1.c) $G(x) = g(2x) - g(x) = \ln\left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right) - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = ln\left(\frac{2x+\sqrt{1+4x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln \left(\frac{2x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{4x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}\right) = ln2$ donc $l = ln2.$

2.a) Montrons que $g(x) = \ln 2x + \ln\left(x + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) - \ln 2.$

$\ln 2x + \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) - ln2 = ln\left(\frac{2x}{2}\right) + ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = lnx + \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$

$= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = g(x)$

2.b) Branches infinies de (C)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) - \ln(2x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) - ln2 = 0$ donc la courbe d'équation $y =$ $\ln(2x)$ est asymptote à la courbe (C).

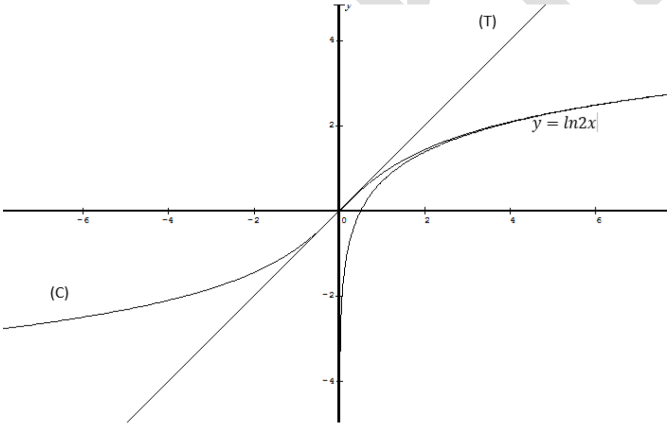
2.c) Position relative de (C) par rapport à la tangente (T) en 0.

$g'(0) = f(0) = 1, g(0) = 0$ donc $(T): y = x$

Posons $k(x) = g(x) - x$

$k'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 < 0$ donc k est strictement décroissante. Ainsi $\forall x \geq 0, k(x) \leq k(0) \Leftrightarrow k(x) \leq 0$ donc (C) est en dessous de (T) et $\forall x < 0, k(-x) = -k(x) < -k(0) \Leftrightarrow k(x) > 0$. D'où (C) est au dessus de (T).

2.d) Tracé de (C), (T) et les asymptotes.



Partie C :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

1. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0\}$

Montrons que P est vraie pour n = 0 i.e. montrons que $u_0 > 0$

$u_0 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_0 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $u_{n+1} > 0$

$u_n > 0 \Rightarrow g(u_n) > g(0)$ car g est croissante et $g(0) = 0$ donc $u_{n+1} > 0$

2. Montrons que (u_n) est décroissante.

Soit la proposition P définie par :$\{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n\}$

Montrons que P est vraie au rang n = 0 i.e. montrons que $u_1 \leq u_0$

$u_1 = ln2 + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - ln2 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) < 1 \Rightarrow u_1 < u_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que P est vraie au rang n et montrons que P est vraie au rang $n+1$ i.e. montrons que $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$u_{n+1} \leq u_n$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $g(u_{n+1}) \leq g(u_n) \Leftrightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}$ d'où P est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$

3. Déduisons que la suite (u_n) converge.

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) converge. Elle converge vers le point fixe de la fonction g. or g(0)=0 et g est monotone d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

EPREUVES DE BACCALAUREATS OFFICIELS

EPREUVE 1 : BACC 2018

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

Exercice 1: Série C uniquement (5 points)

Soit p un entier relatif. On pose $a = 14p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans $\mathbb{Z}$. On désigne par (D) la droite d'équation $87x - 31y = 2$ dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

1.a) En utilisant l'égalité de Bezout, démontrer que a et b sont premiers entre eux. 1pt

b) En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux. 0,75pt

c) Trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tel que $87u_0$+$31v_0$=2. 0,75pt

2. Utiliser les questions précédentes pour résoudre (E). 1,25pt

3. Déterminer les points de (D) dont les coordonnées (x, y) vérifient les deux conditions suivantes:

i. x et y sont des entiers naturels;
ii. $0 \leq x \leq 100$. 1,25pt

Indication: On pourra remarquer que $M(x, y)$ appartient à (D) si et seulement si $(x, -y)$ est solution de (E).

Solution 1 : Série C (uniquement)

Soit p un entier relatif. On pose $a = 14p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans $\mathbb{Z}$. On désigne par (D) la droite d'équation $87x - 31y = 2$ dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

1.a) Démontrons que $(a \wedge b) = 1$

$5a - 14b = 70p + 15 - 70p - 14 = 1$, d'après Bezout, a et b sont premiers entre eux.

1.b) Déduisons que 87 et 31 sont premiers entre eux.

$87 = 14 \times 6 + 3$; $31 = 5 \times 6 + 1$, alors d'après la question 1.a), 87 et 31 sont premiers entre eux.

1.c) Trouvons $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2, 87u_0 + 31v_0 = 2$

$10 \times 87 - 28 \times 31 = 870 - 868 = 2$ donc prendre $(u_0, v_0) = (10, 28)$

2. Résolvons (E)

$87x + 31y = 2 \Leftrightarrow 87x + 31y = 87(10) + 31(28) \Leftrightarrow 87(x - 10) = 31(28 - y)$

87 divise $31(28 - y)$ or 87 et 31 sont premiers entre eux d'où d'après Gauss, 87 divise 28 – y. ainsi, y = $28 - 87k, k \in \mathbb{Z}$. Il s'en suit que $x = 31k + 10$ donc

S = $\{(31k + 10, -87k + 28), k \in \mathbb{Z}\}$

3. Déterminons les points de (D) tels que $x, y \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq 100$

$(x, y) \in D \Leftrightarrow (x, -y)$ est solution de (E). donc $x = 31k + 10$ et $y = 87k - 28$

$0 \leq x \leq 100 \Leftrightarrow -10 \leq 31k \leq 90 \Leftrightarrow -0{,}2 \leq k \leq 2,..$ donc $k \in \{1; 2\}$

Les points de (D) sont $\{(41, 59);\ (72, 146)\}$

Exercice 1 série E uniquement: (5 points)

Un test de recrutement dans une entreprise est constitué de 5 questions. Pour chaque candidat, on attribue +2 points pour une réponse juste et -2 points pour une réponse fausse ou non donnée. On note n le nombre de réponses justes données par un candidat.

1.a) Montrer que la note N d'un candidat à la fin du test est N = 4n – 10 1pt

b) En déduire l'ensemble des notes possibles qu'un candidat à ce test peut avoir. 1pt

2. Le candidat Eya trouve les réponses exactes des deux premières questions. Il répond au hasard aux trois dernières questions. On admet que sa réponse est juste avec la probabilité de $\frac{1}{3}$. Pour tout autre candidat la probabilité de donner une réponse juste à une des cinq questions est de $\frac{1}{2}$

a) Déterminer l'ensemble des notes que Eya peut avoir à la fin du test; 1pt

b) Pour être admis à l'école, un candidat doit obtenir à l'issue du test une note supérieure ou égale à 6. Quelle est la probabilité pour que:

A: " Eya réussisse au test". 1pt

B: " Un candidat autre que Eya réussisse au test". 1pt

<u>Solution 1</u> : Série (E) uniquement

1.a) Montrons que N = 4n – 10

N est le nombre de réponses justes, donc 5 – n est le nombre de réponses fausses. Aussi la note N = $+2n - 2(5 - n) = 4n - 10$

1.b) L'ensemble des notes qu'on peut avoir est {-10 ; -6 ; -2 ; 2 ; 6 ; 10}

2.a) L'ensemble des notes de Eya $\{-2\ ;\ 2\ ;\ 6\ ;\ 10\}$

2.b) Calculons p(A)

$$P(A) = p(6) + p(10) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 . \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$$

$$P(B) = C_5^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 . \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{32}$$

Exercice 2: (5points)

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points A(2, 0, 1); B(3; -2; 0) et C(2, 8, -4).

1. Soit M(x, y, z) un point. Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$ 1pt
2. Résoudre le système. 1pt

$$\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11 \\ \ \ 2x+y-z=8 \end{cases}$$

On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.

3. Démontrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de N. 1pt
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $v = \frac{1}{3}B \times H$ où B représente l'aire d'une base et H la hauteur relative à cette base.
   a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\frac{1}{6}CN^2$ 1pt
   b) Calculer l'aire du triangle ABC. 0,5pt
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC). 0,5pt

Solution 2 :

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). On donne les points A(2, 0, 1); B(3; -2; 0) et C(2, 8, -4).

1. Exprimons $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -z-x+3 \\ y+2x-4 \end{pmatrix}$$

2. Résolvons le système $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \ (1) \\ -x-y-z=-11 \ (2) \\ \ \ 2x+y-z=8 \ (3) \end{cases}$

Désignons (1) comme 1er pivot. Eliminons z sur (2) et (3) à l'aide de (1)

(1) – 2× (2) ⇒ $x+3y=18\ (2')$; $(1)-2\times(2) \Rightarrow -5x-y=-20\ (3')$

Le système devient $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \ (1) \\ \ \ x+3y=18 \ (2') \\ -5x-y=-20 \ (3') \end{cases}$

Désignons (2') comme 2^{e} pivot. Eliminons y dans (3') à l'aide de (2')

$(2')+3\times(3') \Rightarrow -14x=-42\ (3'')$

Le système devient $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \ \ (1) \\ \ \ x+3y=18 \ \ (2') \\ \ \ -14x=-42 \ \ (3') \end{cases}$

De (3') on a : $x=3$ (4)

(4) dans (2') ⇒ $3+3y=18 \Leftrightarrow y=5$ (5) ; (4) et (5) dans (1) ⇔ $-3+5-2z=-4 \Leftrightarrow z=3$ donc S = $\{(3;5;3)\}$

3. Démontrons qu'il existe un point N tel que $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y-2z+2\\ -z-x+3\\ y+2x-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-2\\ y-8\\ z+4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2z+2=x-2\\ -x-z+3=y-8\\ 2x+y-4=z+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=4\\ x+y+z=11\\ 2x+y-z=8\end{cases}$ d'après la question précédente on a N (3 ; 5 ; 3).

4.a) Montrons que le volume de ABCN est $\frac{1}{6}CN^2$

$\mathcal{V}_{ABCN} = \frac{B\times H}{3}$ or $B = \frac{\|\overrightarrow{AN}\wedge\overrightarrow{BN}\|}{2} = \frac{\|\overrightarrow{CN}\|}{2}$ et H = CN donc $\mathcal{V}_{ABCN} = \frac{CN^2}{6}$

4.b) Calculer l'aire de ABC

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\ 8\\ -5\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}18\\ 5\\ 8\end{pmatrix}$

$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{324+25+64}}{2} = \frac{\sqrt{413}}{2}u.a$

4.c) Déduisons la distance d du point N à (ABC)

$d = \frac{3\mathcal{V}_{ABCN}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{CN^2}{\sqrt{413}} = \frac{1^2+(-3)^2+7^2}{\sqrt{413}} = \frac{1+9+49}{\sqrt{413}} = \frac{59}{\sqrt{413}}u.m$

Problème (10 points)

Partie A:

1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2-3z+4=0$ 0,75pt

b) Déterminer le module de chaque racine de cette équation. 0,5pt

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$). z désigne un nombre complexe non nul de partie imaginaire positive. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et z² et on note S le système de points ponndérés {(A,4); (B, -3); (C,1)}. Ce système est tel que O est son barycentre.

2.a) Démontrer que z est solution de (E). 0,5pt

b) En déduire les coordonnées de B et C. 0,5pt

3.a) k désignant un nombre réel, on pose: $z=\frac{3+i\sqrt{7}}{2}$. Préciser suivant les valeurs de k l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que: $4MA^2-3MB^2+MC^2=k.$ 1pt

b) On suppose k = 89. Donner alors une équation cartésienne de (Γ), puis tracer (Γ) 0,75pt

Partie B

On considère l'équation différentielle (E'):$y''+4y'+4y=0$ et les fonctions f et g de la variable réelle x définies respectivement par:

$f(x)=xe^{-2x}+x-\frac{5}{4}ln2$ et $g(x)=1+(-2x+1)e^{-2x}$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) (unité de longueur sur les axes: 2cm).

1.a) Dresser le tableau de variation de g. 0,5pt

b) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x. 0,25pt

2.a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis la dérivée de f. 0,75pt

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,5pt

3.a) Calculer $f(ln2)$ 0,25pt

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{5}{4}ln2$ est asymptote à (C_f). Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D).

Tracer (D) et (C_f). 1,25pts

4.a) Déterminer la forme générale des solutions de (E'). 0,5pt

b) Déterminer la solution de (E') dont la courbe admet une tangente en O parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$ 0,5pt

c) Démontrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle:

$y" + 4y' + 4y = 4x - 5ln2 + 4$

5. Soit λ un réel strictement positif et (D_λ) la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$, $y = x - \frac{5}{4}ln2$ et la courbe (C_f).

a) En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm², l'aire de (D_λ) en fonction de λ 1,5pts

b) Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers +∞ 0,5pt

Solution Problème :

Partie A :

1.a) Résolvons dans ℂ $z^2 - 3z + 4 = 0$

$\Delta = 9 - 4(4) = 9 - 16 = -7 = 7i^2$ d'où $z_1 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$

1.b) Déterminons les modules de chaque racine

$|z_1| = \frac{\sqrt{9+7}}{2} = 4 = |z_2|$

2.a) Démontrons que z est solution de (E).

$O = bar\{(A,4);(B,-3);(C,1)\} \Leftrightarrow 0 = \frac{4-3z+z^2}{2} \Leftrightarrow z^2 - 3z + 4 = 0$ donc z est solution de (E).

2.b) Déduisons les coordonnées de B et C.

$z_B = z = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$; $z_C = z^2 = \left(\frac{3+i\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{2+6i\sqrt{7}}{4} = \frac{1+3i\sqrt{7}}{2}$.

3.a) Déterminons l'ensemble (Γ)

$4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + 4OA^2 - 3OB^2 + OC^2 = k$

$OA = 1; OB = 2; OC = 4 \Rightarrow 2MO^2 + 4 - 12 + 16 = k \Leftrightarrow 2OM^2 = k - 8 \Leftrightarrow OM^2 = \frac{k-8}{2}$

Si $k = 8$ alors (Γ) = {O}

Si $k > 8$ alors (Γ) est le cercle de centre O et de rayon r = $\sqrt{\frac{k-8}{2}}$

3.b) Déterminons une équation cartésienne de (Γ)

$OM^2 = \frac{81}{2} \Leftrightarrow OM = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{81}{2}$

Partie B :

On considère l'équation différentielle (E'): $y" + 4y' + 4y = 0$ et les fonctions f et g de la variable réelle x définies respectivement par:

$f(x) = xe^{-2x} + x - \frac{5}{4}ln2$ et $g(x) = 1 + (-2x + 1)e^{-2x}$

1.a) Dressons le tableau de variation de g.

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = -2e^{-2x} - 2(-2x + 1)e^{-2x} = (4x - 4)e^{-2x}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$; $g(1) = 1 - e^{-2} > 0$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1 - e^{-2}$	$\nearrow$	1

1.b) $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

2.a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

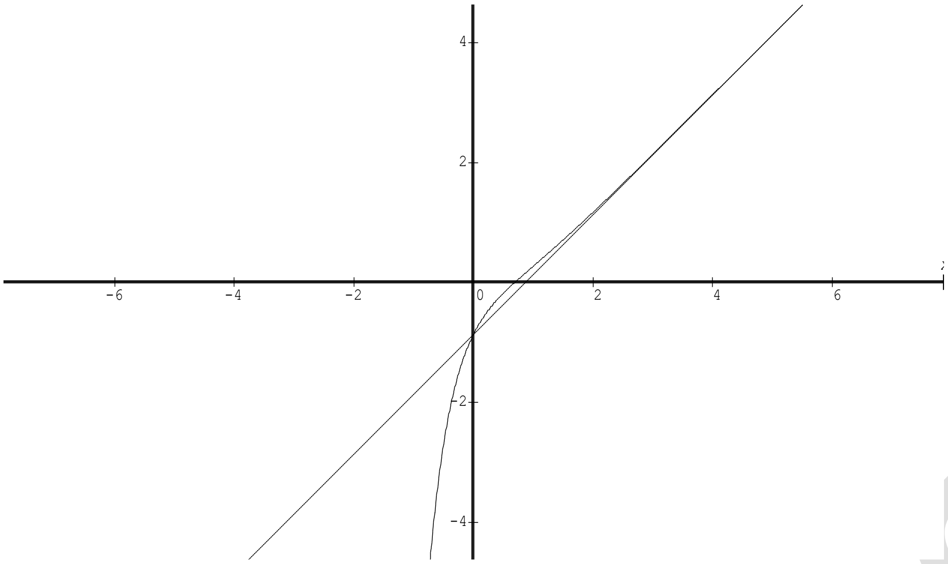
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x} + 1 = (-2x + 1)e^{-2x} + 1$
$\Leftrightarrow f'(x) = g(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.b) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3.a) $f(ln2) = ln2e^{-2ln2} + ln2 - \frac{5}{4}ln2 = 0$

3.b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (x - \frac{5}{4}ln2) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-2x} = 0$ donc la droite (D) : $y = x - \frac{5}{4}ln2$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$. De plus $xe^{-2x} > 0, \forall x > 0$ et $xe^{-2x} \leq 0, \forall x \leq 0$ donc (C_f) est au dessus de (D) sur les x positif et (C_f) est en dessous sur les x négatif.



4.a) Déterminons la forme générale des solutions de (E').

Equation caractéristique (E_c): $r^2 + 4r + 4 = 0 \Leftrightarrow (r+2)^2 = 0$ donc

$Y_{(E')}(x) = (Ax + B)e^{-2x}$

4.b) Soit f la solution de (E') telle que $\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ on a $f(x) = (ax + b)e^{-2x}$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow b = 1$; $f'(x) = (-2ax + a - 2b)e^{-2x}$, $f'(0) = 1 \Leftrightarrow a - 2b = 1 \Leftrightarrow a = 3$

d'où $f(x) = (3x + 1)e^{-2x}$

4.c) Démontrons que f est une solution de l'équation différentielle:
$y'' + 4y' + 4y = 4x - 5ln2 + 4$

$f'(x) = g(x) = (4x - 4)e^{-2x}$; $f''(x) = 4e^{-2x} - 2(4x - 4)e^{-2x} = (-8x + 12)e^{-2x}$

$f''(x) + 4f'(x) + 4f(x) = (-8x + 12 + 16x - 16 - 8x + 4)e^{-2x} + 4x - 5ln2 + 4$

$= = 4x - 5ln2 + 4$. Donc f est solution de $y'' + 4y' + 4y = 4x - 5ln2 + 4$

5.a) Calculons l'aire de (D_λ)

$\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda (f(x) - (x - \frac{5}{4}ln2))dx = \int_0^\lambda xe^{-2x}\,dx = \left[-\frac{xe^{-2x}}{2}\right]_0^\lambda + \left\{-\frac{e^{-2x}}{4}\right\}_0^\lambda$

$= \frac{-(2\lambda+1)e^{-2\lambda}+1}{4} u.a$

5.b) $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda = \frac{1}{4}$.

EPREUVE 2 : BACC 2017

Exercice 1 :

1. a) Vérifier que le couple $(5;-7)$ est une solution de l'équation (E) $13x + 7y = 16$.
   b) Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x;y)$ vérifiant l'équation (E).

2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^{2n} \equiv 1[5]$.

   b) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2014^{2015} par 5.

3. p désigne un entier naturel supérieur ou égale à 1. Une urne contient $2p$ boules numérotées de 1 à $2p$, toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement, sans remise 2 boules de l'urne.

   a) Quel est le nombre de résultats possibles ?

Si les boules tirées portent les numéros pairs, il gagne 800 FCFA. Si les tirées sont de parités différentes, il gagne 400FCFA et il perd 800 FCFA si elles portent les numéros impairs. On désigne par X le gain algébrique à l'issue de chaque épreuve.

   b) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de p.

   c) Calculer l'espérance mathématiques de X en fonction de p.

   d) Calculer p pour que l'espérance mathématique de ce gain soit de 240 FCFA.

Solution 1 :

1.a) Vérifions que $(5;-7)$ est une solution de (E) : $13x + 7y = 16$

$13(5) + 7(-7) = 65 - 49 = 16$ donc $(5;-7)$ est solution de (E).

1.b) Déterminons les couples solutions de (E).

$13x + 7y = 16 \Leftrightarrow 13x + 7y = 13(5) + 7(-7) \Leftrightarrow 13(x-5) = 7(-y-7)$ donc

13 divise $7(-y-7)$ et $(13 \Lambda 7) = 1$ d'après Gauss, 13 divise $-y-7$ soit $y = -13k - 7$ et

$x = 7k + 5$ donc $S = \{(7k+5, -13k-7), k \in \mathbb{Z}\}$

2.a) Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^{2n} \equiv 1[5]$

$4^2 = 16 \equiv 1[5] \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 4^{2n} \equiv 1[5]$

2.b) Déterminons le reste de 2014^{2015} par 5

2015 = 4× 503 + 3 ; $2014 \equiv 4[5]$ donc $2014^{2015} \equiv 4^{2015}[5]$ or

$4^{2015} = 4^{2\times1007+1} \equiv 1 \times 4[5]$ d'où $2014^{2015} \equiv 4[5]$ son reste est donc 4.

3.a) le nombre de résultats possibles est N = A_{2p}^2

3.b) Déterminons la loi de probabilité de X

$p(X = 800) = \frac{A_p^2}{A_{2p}^2} \frac{p(p-1)}{2p(2p-1)}$; $p(X = 400) = 2\frac{A_p^1 \times A_p^1}{A_{2p}^2} = \frac{2p^2}{2p(2p-1)}$; $p(X = -800) = \frac{A_p^2}{A_{2p}^2} =$

$\frac{p(p-1)}{2p(2p-1)}$

3.c) Déterminons l'espérance mathématique E(X)

$E(X) = \frac{800p^2}{2p(2p-1)}$

3.d) déterminons p pour que $E(X) = 240$

$800p^2 = 480p(2p-1) \Leftrightarrow 800p^2 = 960p^2 - 480p \Leftrightarrow 160p^2 - 480p = 0 \Leftrightarrow p(p-3) = 0 \Leftrightarrow$

$p = 0 ou\ p = 3$ or p>1 donc p = 3.

Exercice 2 :

E est un espace vectoriel sur IR dont une base est $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ associe le vecteur $f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{\imath} + (2x - y + z)\vec{\jmath} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base B.
2. a) Déterminer le noyau de $kerf$ et on donnera une base de $kerf$.
   b) En déduire la dimension de Imf.
   c) f est-elle bijective ? Justifier votre réponse.
3. On considère les vecteurs $\vec{e_1}=2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\vec{e_2} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$; $\vec{e_3} = \vec{\imath} - \vec{k}$.
   a) Démontrer que la famille $B' = (\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ est une base de E.
   b) Déterminer la matrice de f dans la base B'.

Solution 2 :

$f(\vec{u}) = (-x - y + 2z)\vec{\imath} + (2x - y + z)\vec{\jmath} + (x - 2y + 3z)\vec{k}$.

1. Déterminons la matrice de f dans la base B.

Soit A la matrice de f, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

2.a) Déterminons le noyau de f et sa base.

Soit $\vec{u} \in Kerf$, alors $f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = 0(1) \\ 2x - y + z = 0\ (2) \\ x - 2y + 3z = 0\ (3) \end{cases}$

Désignons par (1) comme la ligne pivot.

Eliminons x de (2) et (3) à l'aide de (1).

$(2) + 2.(1) \Rightarrow\ -3y - 3z = 0, (3) + (1) \Rightarrow\ -3y + 5z = 0$

Le système dévient $\begin{cases} -x-y+2z=0(1) \\ -3y-3z=0\ (2') \\ -3y+5z=0\ (3') \end{cases}$

Désignons (2') comme 2e ligne pivot. Eliminons y dans (3') à l'aide de (2'. On a :

$(3')-(2') \Leftrightarrow 8z=0 \Leftrightarrow z=0$ donc $x=y=z=0$ d'où $Kerf=\{\vec{0}\}$

2.b) $dimImf + dimKerf = 3 \Leftrightarrow dimImf = 3-0=3$

2.c) $f\ est\ injective$ car f est une application linéaire et $Kerf=\{\vec{0}\}$; f est surjective car $Imf=\mathbb{R}^3$. f injective et surjective est donc bijective.

3. On considère les vecteurs $\vec{e_1}=2\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{e_2}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; $\vec{e_3}=\vec{i}-\vec{k}$

3.a) Montrons que $B'=(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ est une base de E.

$\begin{cases} \vec{e_1}=2\vec{j}-\vec{k}\ (1) \\ \vec{e_2}=3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\ (2) \\ \vec{e_3}=\vec{i}-\vec{k}\ (3) \end{cases}$ Désignons (1) comme ligne pivot.

Eliminons $\vec{k}$ sur (2) et (3) à l'aide de (1).

$(2)+(1) \Leftrightarrow \vec{e_1}+\vec{e_2}=3\vec{i}+3\vec{j}$, $(3)+(2) \Leftrightarrow \vec{e_2}+\vec{e_3}=4\vec{i}+\vec{j}$

Le système devient $\begin{cases} \vec{e_1}=2\vec{j}-\vec{k}\ (1) \\ \vec{e_1}+\vec{e_2}=3\vec{i}+3\vec{j}\ (2') \\ \vec{e_2}+\vec{e_3}=4\vec{i}+\vec{j}\ (3') \end{cases}$. Désignons (2') comme 2e ligne pivot et

éliminons $\vec{j}$ dans (3'). On a :3.(3')-(2')⇔ $-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}=9\vec{i} \Leftrightarrow \vec{i}=\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}}{9}$ (3'')

(3'') dans (2'), on a : $\vec{e_1}+\vec{e_2}=3\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}}{9}\right)+3\vec{j} \Leftrightarrow 3\vec{j}=\frac{4\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3}}{3} \Leftrightarrow \vec{j}=\frac{4\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3}}{9}$

(2'')

(2'') et (3'') dans (1) $\Rightarrow \vec{k}=2\vec{j}-\vec{e_1}=\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}-6\vec{e_3}}{9}$

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}}{9}\right)+y\left(\frac{4\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3}}{9}\right)+z\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}-6\vec{e_3}}{9}\right)$

$=\left(\frac{-x+4y-z}{9}\right)\vec{e_1}+\left(\frac{2x+y+2z}{9}\right)\vec{e_2}+\left(\frac{3x-3y-6z}{9}\right)\vec{e_3}$ d'où B' engendre E. de plus B' forme une famille libre de vecteurs de E.

3.b) Matrice de f dans la base B'

$f(\vec{e_1})=2f(\vec{j})-f(\vec{k})=2(-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k})-(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})=-4\vec{i}-3\vec{j}-7\vec{k}$

$=-4\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}}{9}\right)-3\left(\frac{4\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3}}{9}\right)-7\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}-6\vec{e_3}}{9}\right)=\frac{-\vec{e_1}-25\vec{e_2}+39\vec{e_3}}{9}$

$f(\vec{e_2})=3f(\vec{i})+f(\vec{j})+f(\vec{k})=3(-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})+(-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k})+(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})=-2\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$

$=-2\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}+3\vec{e_3}}{9}\right)+6\left(\frac{4\vec{e_1}+\vec{e_2}-3\vec{e_3}}{9}\right)+4\left(\frac{-\vec{e_1}+2\vec{e_2}-6\vec{e_3}}{9}\right)=\frac{22\vec{e_1}+10\vec{e_2}-48\vec{e_3}}{9}$

$f(\overrightarrow{e_3}) = f(\vec{\imath}) - f(\vec{k}) = (-\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}) - (2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}) = -3\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k} =$

$$-3\left(\frac{\overrightarrow{-e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}}{9}\right) + \left(\frac{4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}}{9}\right) - 2\left(\frac{-\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} - 6\overrightarrow{e_3}}{9}\right) = \frac{9\overrightarrow{e_1} - 9\overrightarrow{e_2}}{9}$$

$$= \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$$

Donc la matrice de f dans la base B' est $\begin{bmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{22}{9} & 1 \\ \frac{-25}{9} & \frac{10}{9} & -1 \\ \frac{39}{9} & \frac{-48}{9} & 0 \end{bmatrix}$

EXERCICE 3 :

Soit ABCD un carré de sens direct et de centre I. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et S la symétrie de centre C c'est-à-dire r=R(A ;$\frac{\pi}{2}$), t=$t_{\overrightarrow{AC}}$ et S=S_C

A. 1. a) Déterminer la droite (Δ) telle que r=$S_\Delta \circ S_{(AD)}$.

b) Donner la nature et les éléments caractéristique de t∘r.

2. a) Déterminer $(S \circ t \circ r)(A)$ et $(S \circ t \circ r)(D)$

b) Donner la nature et éléments caractéristiques de S∘t∘r.

B. Soient M un point de la droite (DC), N le point d'intersection de la droite (BC) avec la perpendiculaire à la droite (AM) passant par A, J le milieu du segment [MN]. r' est la rotation de centre A telle que B=r'(D) ; S' la similitude direct de centre A telle que I=S'(D).

1. Montrer que N=r'(M). En déduire la nature du triangle AMN

2. a) Déterminer l'image de C par S'.

b) Démontrer que J =S'(M).

c) Déduire le lieu géométrique des points J, lorsque M décrit la droite (DC).

3. a) Donner la nature de l'ensemble (T) des points M du plan tels que d (M,C)=$\frac{1}{\sqrt{2}}$ d(M,(BD))

b) Donner la nature, l'excentricité, une direction et le foyer de l'image (t') de (T) par S'.

Solution 3 :

A. 1.a) (Δ) est la perpendiculaire à (AC) passant par A.

1.b) tor est la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2.a) $Sotor(A) = S(C) = C,$ $Sotor(D) = S(D) = D'$ ou C est le milieu de [DD'].

2.b) $Sotor$ est une rotation d'angle $\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ et donc le centre est le point d'intersection des médiatrices de [AC] et [DD'] soit B.

B.1 Montrons que r'(M) = N

M = (AM)∩(DC), l'image de (AM) par r' est la perpendiculaire à (AM) passant par A i.e (AN). L'image de (DC) est la perpendiculaire à (DC) passant par r'(D) qui est (BC). Comme r' conserve le contact et que N = (AN)∩(BC) alors r'(M) = N'.

$r'(M) = N$ donc AMN est un triangle rectangle isocèle en A.

B.2.a) Déterminons S'(C)

S'(C) = B car S' est la similitude de centre A, de rapport $k = \frac{AI}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle

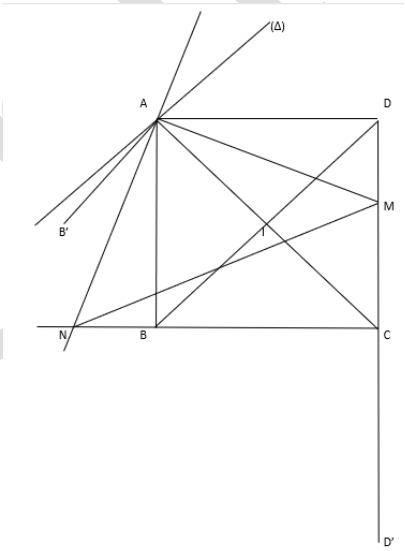
$\theta = mes\,(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}}) = -\frac{\pi}{4}$

B.2.b) AMN est rectangle isocèle en A donc par définition S'(M) = J

B.2.c) La similitude conserve les figures. Lorsque M décrit [DC], J décrit [IB].

3.a) $e = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc (T) est une ellipse de foyer C et de directrice (BD).

3.b) (t') est une ellipse de foyer S'(C) = B, de directrice S'(BD) = (IB') où B' = S'(B) et d'excentricité e' $= \frac{1}{2}$



PROBLEME

PARTIE A :

On se place dans l'espace (ε) muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{u};\ \vec{v};\ \vec{w})$. On considère les points A(1;6;4), B(2;5;3), C(3;1;1) et D(8;1;7). On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. a) Déterminer les coordonnées de $\vec{N}$. En déduire que les points A,B et C ne sont pas alignés.

b) Déterminer l'aire du triangle ABC.

2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$(2 ;-1 ;3).

a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonal au plan (ABC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

d) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan(ABC)

a) On pose $\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{N}$. Calculer α.

b) En déduire la distance DH et le volume du tétraèdre (ABCD).

4. Soit (P_1) le plan d'équation x+y+z-6= 0 et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.

a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b) Vérifier que la droite (d) d'intersection des plans (P_1) et (P_2) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$; t ϵ IR

c) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

5. Démontrer que l'ensemble (S) d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 = 0$ est une sphère de (ε) dont on précisera les éléments caractéristiques.

PARTIE B

Soit (P) le plan de l'espace (ε) d'equation z=0, rapporté au repère orthonormé (O ;$\vec{u}$; $\vec{v}$).

Soit la $f(x) = 2lnx - \frac{3}{x} + 3$ définie sur]0 ;+∞ [

1. a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   b) Etudier les variations de f et en déduire son signe.

   c) Tracer la courbe (C_f) de f dans le repère orthonormé (O ;$\vec{u}$; $\vec{v}$).

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Calculer les trois premiers termes après u_0. On donnera le résultat à l'arrondi d'ordre 2.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

   c) Démontrer que pour tout entier naturel n : 2≤ $u_n \leq 6{,}5$.

   d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Soient les équations différentielles (E) : $y'' + y' = 0$ et (E') : $y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^3}$.

a) Montrer que f est solution sur]0 ;+∞[de (E').

b) Résoudre (E) sur]0 ;+∞[.

c) Montrer qu'une fonction g est solution de (E') si et seulement si g-f est solution de (E).

d) Résoudre alors (E') sur]0 ;+∞[.

Solution Problème :

Partie A :

On considère les points A(1;6;4), B(2;5;3), C(3;1;1) et D(8;1;7). On pose $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1.a) Coordonnées de $\vec{N}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc A, B et C ne sont pas alignés.

1.b) Déterminons l'aire du triangle ABC

$\mathcal{A} = \frac{\|\vec{N}\|}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2} u.a$

2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}$(2 ;-1 ;3).

2.a) Montrons que (Δ) ⊥ (ABC)

$\vec{u} = -\vec{N}$ donc (Δ) ⊥ (ABC).

2.b) Equation cartésienne de (ABC)

$\vec{N}$ est vecteur normal de (ABC) donc (ABC) :$-2x + y - 3z + d = 0$

A ∈ (ABC)⇔ $-8 + d = 0 \Leftrightarrow d = 8$ donc (ABC) :$-2x + y - 3z + 8 = 0$

2.c) Représentation paramétrique de la droite (Δ)

$$(\Delta)\begin{cases} x = 2\lambda + 8 \\ y = -\lambda + 1, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3\lambda + 7 \end{cases}$$

2.d) Coordonnées du point K = (Δ)∩(ABC)

Soit K$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} a = 2\lambda + 8 \\ b = -\lambda + 1 \text{ et } -2a + b - 3c + 8 = 0 \\ c = 3\lambda + 7 \end{cases}$

$-2(2\lambda + 8) - \lambda + 1 - 3(3\lambda + 7) + 8 = 0 \Leftrightarrow -14\lambda - 28 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$ ainsi

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)

3.a) Calculons α

$\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{N} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = -2\alpha \\ y - 1 = \alpha \\ z - 7 = -3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha + 8 \\ y = \alpha + 1 \\ z = -3\alpha + 7 \end{cases}$

$H \in (ABC) \Leftrightarrow -2(-2\alpha + 8) + \alpha + 1 - 3(-3\alpha + 7) + 8 = 0 \Leftrightarrow 14\alpha - 28 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$

3.b) Déduisons la distance DH

$\overrightarrow{DH} = \alpha\vec{N} \Leftrightarrow DH = 2\sqrt{14}u.m$

Le volume du tétraèdre ABCD est $\mathcal{V} = \frac{DH \times \mathcal{A}}{3} = \frac{28}{3}\ u.v$

4. Soit (P_1) le plan d'équation x+y+z-6= 0 et (P_2) le plan d'équation $x + 4y - 7 = 0$.

4.a) Démontrons que (P_1) et (P_2) sont sécants.

Notons $\overrightarrow{n_1}$ le vecteur normal de (P_1), on a : $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc (P_1) et (P_2) sont non colinéaires. D'où sont sécantes.

4.b) Vérifions que (d) : $\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$; t ϵ IR

$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est vecteur directeur à la droite (d).

De plus $-1 + 2 + 5 - 6 = 7 - 7 = 0\ et\ -1 + 4(2) - 7 = 8 - 8 =$ $0\ d'où\ (-1\ ;\ 2\ ;\ 5) \in (d)$ donc $\begin{cases} x = -4t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = 3t + 5 \end{cases}$ est bel et bien une représentation paramétrique de (d).

4.c) $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$; $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 8 + 1 - 9 = 0$ donc (d) et (ABC) sont parallèles.

5. $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + z^2 = 0 \Leftrightarrow$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = (\sqrt{5})^2$ donc (S) est la sphère de centre A (1 ; 2 ; 0) et de rayon $\sqrt{5}$.

<u>Partie B</u> :

Soit (P) le plan de l'espace (ε) d'equation z=0, rapporté au repère orthonormé (O ;$\vec{u}$; $\vec{v}$).

Soit la $f(x) = 2lnx - \frac{3}{x} + 3$ définie sur]0 ;+∞ [

1.a) Déterminons les limites de f aux bornes de son D_f

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 2lnx - \frac{3}{x} + 3 = -\infty,\qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

1.b) Etudions les variations de f et déduisons son signe

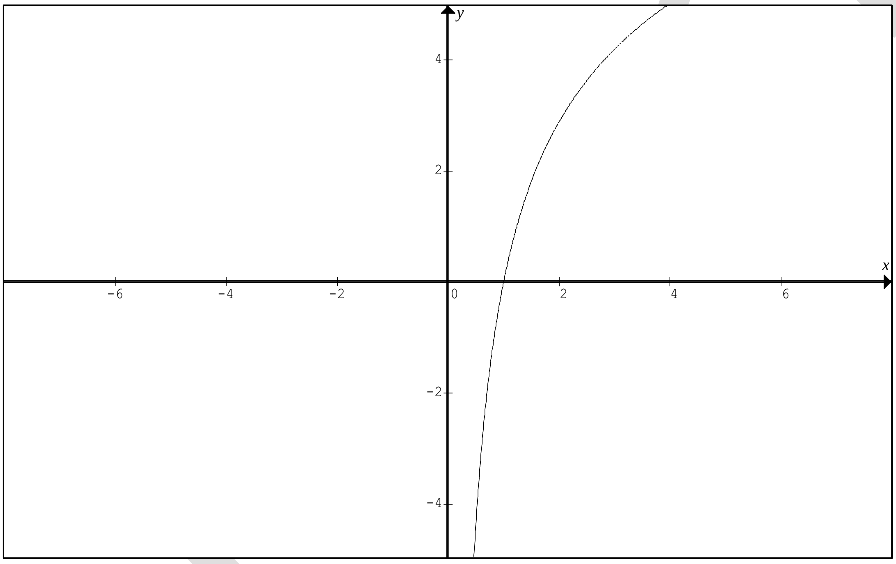
f est continue et dérivable sur]0 ; +∞[et on a :

$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} > 0, \forall x \in]0;\ +\infty\{$ donc f est strictement croissante.

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

f est continue et strictement monotone sur]0 ; +∞[donc réalise une bijection. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty > 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α ∈]0 ; +∞[tel que $f(\alpha) = 0$. Dans ce cas, $\forall x \in]0; \alpha[, f(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha;\ +\infty[, f(x) > 0$

1.c) Traçons la courbe (C_f) de f.



2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

2.a) Calculons l'arrondi d'ordre 2.

$u_1 = f(u_0) = f(2) = 2ln2 + 1{,}5 = 2{,}88$; $u_2 = f(u_1) = 4{,}07$; $u_3 = f(u_2) = 5{,}07$

2.b) Démontrons que (u_n) est strictement croissante

Raisonnons par récurrence. Soit la proposition P définie par : $\{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}\}$

Montrons que P est vraie pour n = 0

$u_0 = 2$ et $u_1 = 2{,}88$, $u_0 < u_1$ donc P est vraie pour n = 0.

Soit n ∈ ℕ, supposons que P est vraie au rang n. montrons que P est vraie au rang n + 1.

Par hypothèse de récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$, f est croissante donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$ d'où (u_n) est strictement croissante.

2.c) Par récurrence, on montre aisément que cela est vrai.

2.d) (u_n) est croissante et majorée par 6,5 donc (u_n) converge.

3. Soient les équations différentielles (E) : $y'' + y' = 0$ et (E') : $y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^3}$.

3.a) Montrons que f est solution de (E').

$f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$, $\qquad f''(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}$

$f''(x) + f'(x) = -\frac{6}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2x^2+x-6}{x^3} = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^3}$ d'où f est solution de (E').

3.b) Résolvons (E)

Equation caractéristique : $r^2 + r = 0 \Leftrightarrow r = -1 \; ou \; r = 0$

Solution générale : $y(x) = A + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}$

3.c) Montrons que g est solution de (E') si et seulement si g-f est solution de (E)

g solution de (E') $\Leftrightarrow g'' + g' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^3} \Leftrightarrow g'' + g' = f'' + f' \Leftrightarrow (g-f)'' + (g-f) = 0 \Leftrightarrow$ f est solution de (E).

d) Résolvons (E').

$y_{(E')}(x) = A + Be^{-x} + 2lnx - \frac{3}{x} + 3$