

Fonction irrationnelle Etude d'une suite récurrente

PROBLÈME 01

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$; (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (Δ) la droite d'équation $y = -2x$.

PARTIE A

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2.
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - b. Montrer que pour tout nombre réel x , $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3.
 - a. Montrer que pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$.
 - b. Montrer que pour tout réel x , $f(x) > 0$. En déduire le signe de $(f(x) + 2x)$
 - c. Interpréter graphiquement tous ces résultats.
4.
 - a. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$
 - b. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations
 - c. Déduire de ce qui précède que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de I .
5. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
6. Tracer (Δ) , (T) et (C) (on prendra 1cm pour unité).
7. Tracer la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que (C).

PARTIE B

1. Démontrer que $\frac{\sqrt{3}}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$
2. Démontrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$.
3. On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout entier n .
 - a. Démontrer que pour tout entier n , $U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$
 - b. Démontrer que pour tout entier n , $\left|U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$
 - c. En déduire que $\left|U_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$
 - d. Démontrer que la suite (U_n) converge et calculer sa limite.

PROBLEME 02

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x \ln x - x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement les résultats obtenus
2. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation sur $[0; +\infty[$
3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e
4. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$. On admet que $(\mathcal{C})$ est au dessus de (T)

PARTIE B

On désigne par (Γ) la courbe de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 - f(x).$$

1. Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et (Γ)
2. Sans étudier g tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$. Justifier
3. Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm² du domaine plan délimité par $(\mathcal{C})$, (Γ) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = e$
4. Calculer $\mathcal{A} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda)$ et interpréter graphiquement ce résultat

PARTIE C

1. Dresser le tableau de variation de g sur $[0; +\infty[$.

En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

2.

- a. Vérifier que α est dans l'intervalle $I = [3; 4]$

- b. Montrer pour tout réel $x > 0$; $g(x) = 0$ si et seulement si $e^{1+\frac{1}{x}} = x$.

Qu'en déduit-on ?

3. Soit Φ la fonction définie sur I par $\Phi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$

- a. Etudier les variations de Φ

- b. Montrer que pour tout x de I , $\Phi(x) \in I$

- c. Montrer que pour tout x de I , $|\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$

4. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \Phi(U_n) \end{cases}$

- a. Montrer par récurrence que pour tout entier n , U_n appartient à l'intervalle I

- b. Montrer que pour tout entier naturel n on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_n - \alpha|$.

En déduire que pour toute entier naturel n on a : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$

- c. Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite

- d. Déterminer le plus petit entier n tel que U_n soit une valeur approchée de α à 10^{-2} près

PROBLEME 03**PARTIE A**

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0 ; +\infty[$ par:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm

1. Étudier la dérivabilité de f en 0 ; que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$?
2. Montrer que pour $x > 0$; $f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)$. En déduire le sens de variations de f .
3. Étudier la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe $(\mathcal{C})$ de f ?
4. Tracer soigneusement la courbe $(\mathcal{C})$.
5. On considère le domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un réel positif.
 - a. Calculer le volume $\mathcal{V}(\lambda)$ en cm^3 du solide de révolution engendré par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.

- b. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda)$

PARTIE B

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$

1. On pose $g(x) = \ln x + 2x$
 - a. Montrer que sur $]0 ; +\infty[$, les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes.
 - b. Étudier les variations de g et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0 ; +\infty[$ que l'on notera α .
 - c. Montrer que α appartient à l'intervalle $[0,4 ; 0,5]$.
2. En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$ donner une interprétation de α
3. a. Montrer que si $x \in [0,4 ; 0,5]$ on a $f(x) \in [0,4 ; 0,5]$.
 - b. Montrer que pour $x \in [0,4 ; 0,5]$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{8}$
4. On définit la suite (U_n) par $U_0 = 0,4$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$
 - a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in [0,4 ; 0,5]$.
 - b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_n - \alpha|$
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq 0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$
 - d. En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
5. A partir de quelle valeur n_0 de n est-on sûr que U_n représente une valeur approchée de α à 10^{-5} près?

PARTIE C

Soit F la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt$

On ne cherchera pas à calculer F .

1. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \geq 0$. En déduire le sens de variation de F .
2. a. Montrer que pour $t \geq 0$ on a : $\sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$
 - b. En déduire que $F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-t} dt$
 - c. Calculer $\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) \cdot e^{-t} dt$
 - d. En déduire que $F(x) \leq \frac{5}{4}$

PROBLEME 04

Toutes les représentations graphiques demandées seront effectuées sur la même figure, dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm).

PARTIE A

On considère la fonction numérique f définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. a. Etudier la continuité de f en 0
 b. f est-elle dérivable en 0 ?
 c. Trouver la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On pourra poser $X = \frac{2}{x}$ ($x > 0$)
2. a. Pour x appartenant à $]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x) = -\frac{4}{x(x+2)^2}$
 b. Étudier le sens de variation de f' et trouver la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire le signe de $f'(x)$.
 c. Dresser le tableau des variations de f
3. On appelle (C) la représentation graphique de f dans le plan (P) rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Tracer (C) en indiquant la tangente au point O et le point A d'abscisse 2.
4. a. Pour x appartenant à $]0, +\infty[$, résouds l'équation $f(x) = x$
 b. Tracer soigneusement la courbe (C') de la réciproque f^{-1} de f sur $[0, +\infty[$

PARTIE B

Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leq 2$. On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 2$.

1. A l'aide d'une intégration par parties Calculer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de $\mathcal{D}$ en unité d'aire. On pourra remarquer que $\frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$
2. Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha)$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat

PARTIE C

Soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $u(x) = \frac{2x}{x+2}$

On se propose de déterminer l'ensemble (E) des fonctions g , définies et dérivables sur $]0, +\infty[$, et possédant la propriété (P) suivante :

$$g(x) - xg'(x) = u(x)$$

1. Vérifier que la fonction f possède la propriété (P)
2. g étant une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, on pose pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $G(x) = \frac{g(x)}{x}$.

Montrer que g possède la propriété (P) si et seulement si : pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$

3. En déduire l'ensemble (E).

Suites de fonctions exponentielles

Calcul d'aire - Etude de suites numériques

PROBLEME 05

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}$.
On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2cm). On considère en outre la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

PARTIE A

Étude de la fonction f_n

1. On suppose $n = 0$

- Étudier les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Étudier le sens de variation de f_0 puis dresser son tableau de variations.
- Montrer que le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de (C_0)
- Tracer la courbe (C_0) en précisant sa tangente en I .

2. On suppose que $n \geq 1$

- Étudier les limites de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que, pour tout x , on a :

$$f'_n(x) = \frac{-e^{-nx}(n+(n+1)e^x)}{(e^x+1)^2}.$$
- Étudier le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variations.
- Vérifier que le point I appartient à toutes les courbes (C_n) .
- Tracer (C_1) dans le même repère que (C_0) , en précisant sa tangente en I .

3. Interpréter géométriquement U_n puis démontrer que $U_0 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

On remarquera que $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

PARTIE B

Étude de la suite (U_n)

Dans cette partie, n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1. Étude d'une suite auxiliaire (V_n)

Pour tout n , on pose $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$

- Calculer V_n .
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n$

2. Comparaison de (U_n) à (V_n)

- Établir que, pour tout x appartenant à $[0; 1]$, on a : $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$.
- En déduire que, pour tout n , on a : $\frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.

3. Étude d'une suite associée à (U_n)

On pose : $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$ et $t_n = \sum_{p=1}^n V_p$

- Montrer que : $0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$. (On observera que, pour tout p , on a : $\frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$)
- En utilisant l'inégalité de la moyenne sur l'intervalle $[p; p+1]$, montrer qu'on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p} \text{ et par suite } \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}$$
- En déduire que, pour tout n , on a : $\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$
- Montrer, en utilisant a. et c. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{\ln n}$.
- Que peut-on en déduire pour S_n ?

Fonction exponentielle

Calcul d'aires - Etude d'une suite numérique

PROBLEME 06

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 1$

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
2. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
3. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $-1 < \alpha < 0$
4. Etudier le signe de $g(x)$ pour tout réel x

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 + x)e^{-2x} + 1 - x$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$
2. Démontrer que la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.
Etudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)
3. Démontrer que $f'(x) = -g(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations
4. Établir que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule. On note β cette solution. Justifier l'encadrement $1 \leq \beta \leq \frac{3}{2}$
5. Démontrer que $f(-\beta) = 0$. Que peut-on en déduire ?
6. Tracer (Δ) et $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = -0,64$ et $f(\alpha) = 2,92$

PARTIE C

Soit t un réel strictement supérieur à -1 .

On désigne par $\mathcal{A}(t)$ l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ la droite (Δ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = t$

1. Hachurée sur la figure le domaine plan dont l'aire en cm^2 est $\mathcal{A}(\beta)$
2. A l'aide d'une intégration par parties calculer $\mathcal{A}(t)$ pour tout $t > -1$
3. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t)$

PARTIE D

On considère la fonction h définie sur $I = \left[1; \frac{3}{2}\right]$ par $h(x) = (1 + x)e^{-2x} + 1$.

1. Vérifier que β est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$
2. Étudier les variations de h .
En déduire que pour tout $x \in I$ on a $h(x) \in I$
3. Montrer que pour $x \in I$ on a : $|h'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$.
En déduire que pour tout $x \in I$, $|h(x) - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$
4. On définit la suite (U_n) par $U_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$
 - a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in I$
 - b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_n - \beta|$
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{2n}$
 - d. Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
 - e. A partir de quelle valeur n_0 de n est-on sûr que U_n représente une valeur approchée de β à 10^{-3} près?

PROBLEME 07

PARTIE A

1. Soit g la fonction $x \mapsto g(x) = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$
 - a. Etudier les variations de g et préciser les asymptotes éventuelles de sa courbe
 - b. Tracer sa courbe représentative ($\mathcal{C}$) dans un repère orthonormé d'unité 2 cm
2. Tracer dans le même repère, la courbe représentative ($\mathcal{C}'$) de la fonction $x \mapsto \ln x$ (la fonction $\ln$ désigne le logarithme népérien). On tracera les tangentes à ($\mathcal{C}'$) aux points d'abscisses respectives 1 et e
3. Soit h la fonction $x \mapsto h(x) = \ln x - g(x)$.
Préciser l'ensemble de définition de h et étudier ses variations.
4. Montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que : $h(x_1) = h(x_2) = 0$
et que l'on a : $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ en fonction de x .

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f . Calculer sa dérivée f' et montrer que :

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3}$$
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ ainsi que les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeurs positives.
3. En déduire les variations de f .
4. Donner l'allure de la courbe représentative (Γ) de f .
On donne $f(x_1) \simeq -0,31$ et $f(x_2) \simeq 0,06$; unité graphique 4 cm.
5. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)}$ et en déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ définie sur $]0; +\infty[$.
6. On pose, pour $\alpha \in]0; 1[$, $J(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J(\alpha)$.
7. En déduire de $J(\alpha)$, l'aire en cm^2 du domaine limité par (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 et interpréter ce dernier résultat.

Fonction logarithme népérien
Calcul d'aire - Etude d'une suite récurrente

PROBLEME 08

PARTIE A

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\ln|x|$$

1. Etudier les variations de f (on ne demande pas sa représentation graphique, mais on précisera les limites de f aux bornes des intervalles de l'ensemble de définition)
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, une solution α tel que $3 < \alpha < 4$.
3. Dédire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[;]0; \alpha[;]\alpha; +\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de h en 0.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^* : h'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Etudier en utilisant A-3), le signe de $h'(x)$.
4. Tracer la représentation graphique (C_h) de h dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et préciser la tangente à (C_h) au point de cette courbe d'abscisse 0.
5. On appelle $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en unité d'aire du domaine limité par (C_h) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$, où λ est un élément de $]0; 1[$.
 - a) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en fonction de λ .
 - b) $\mathcal{A}(\lambda)$ admet-elle une limite lorsque λ tend vers 0 par valeurs supérieures ? Si oui, calculer cette limite.

PARTIE C

On se propose de calculer une valeur approchée 0,01 près du nombre α défini au A- 2)

1. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln|x|$
 - a. Etudier les variations de g . Montrer que l'image par g de l'intervalle $[3; 4]$ est contenu dans l'intervalle $[3; 4]$.
 - b. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$
2. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$
 - a. Démontrer que, pour tout x , on a : $3 \leq U_n \leq 4$.
 - b. Démontrer que pour tout x de $[3; 4]$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$. En déduire que pour tout x réel de $[3; 4]$, on a : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{12}|x - \alpha|$.
 - c. Montrer que, pour tout n : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|U_n - \alpha|$ et $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$.
 - d. Montrer que α est compris entre deux termes consécutifs de la suite (U_n) .
 - e. En déduire une valeur approchée de α à 0,01 près.

PROBLEME 09

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x+1}$ et on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = 1 + x - x \ln x$
 - a. Etudier les variations de g .
 - b. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique x_0 et que : $x_0 \in]3,5 ; 3,6[$.
 - c. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.

- a. Etudier les variations de f et montrer que $f(x_0) = 2 + \frac{1}{x_0}$
En déduire un encadrement de $f(x_0)$ à 10^{-2} près
- b. Etudier la position de $(\mathcal{C})$ et de la droite $(D) : y = 2$ et construire $(\mathcal{C})$.
- c. En déduire le tracé de la courbe (Γ) de la fonction $F(x) = 2 + \frac{\ln|x|}{1+|x|}$.

On tracera (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

PARTIE B

1. Pour tout réel t de $[1; +\infty[$ on pose $I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx$.
 - a. Interpréter graphiquement $I(t)$.
 - b. Calculer $J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx$ où $t \geq 1$.
 - c. Calculer $K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$ où $t \geq 1$. Etudier les variations de la fonction $t \mapsto K(t)$ sur $[1; +\infty[$ et en déduire que $\forall t \geq 1, 0 \leq K(t) \leq 1$.
2. Vérifier que pour tout $x \geq 1 ; 0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$.
En déduire que $0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$.
3. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2}$.

PARTIE C

1. Soit la fonction h définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$.
 - a. Etablir que h est décroissante sur $]x_0; +\infty[$.
 - b. Montrer que pour tout x de $[1; x_0]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$.
 - c. En déduire le sens de variation de h sur $[1; x_0]$
2.
 - a. Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1; +\infty[$ et que $2 \leq \alpha \leq 3$.
 - b. Prouver que $\forall x \in [2; 3], f(x) \in [2; 3]$
 - c. Etablir que $\forall x \in [2; 3], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{9}$.
 - d. Montre que $\forall x \in [2; 3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9} |x - \alpha|$
3. Soit la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
 - a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [2; 3]$ et $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$
 - b. Montre que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n$
 - c. Déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite.

PROBLEME 10

PARTIE A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} e^{1-x}$.

Elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa dérivée et $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif on a : $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2. Pour tout x de $]0; +\infty[$; calculer $f'(x)$.
3. Dédire des questions précédentes le tableau de variations de f .
4. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. (unité 2cm)
5. Soit $\mathcal{D}$ la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
 - a. Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.
 - b. Calculer en cm^3 le volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses. (On pourra s'aider d'une intégration par parties)

PARTIE B

On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt.$$

1. Interpréter graphiquement U_n .
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout t de l'intervalle $[n; n+1]$; on a : $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$ et que $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$.
3. En déduire que la suite (U_n) est décroissante
4. Justifier la convergence de la suite (U_n) et calculer sa limite.

PARTIE C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

1.
 - a. Que représente la fonction F pour f ?
 - b. En déduire $F'(x)$ et par suite le sens de variation de F .
2.
 - a. Démontrer que pour tout réel t positif : $(t+2) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$
(On pourra remarquer que pour tout réel t positif, $(\sqrt{t} - \sqrt{2})^2 \geq 0$).
 - b. En déduire que pour réel x de l'intervalle $[1; +\infty[$: $F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2) e^{1-t} dt$.
 - c. A l'aide d'une intégration par parties ; montrer que pour tout x de $[1; +\infty[$ on a : $\int_1^x (t+2) e^{1-t} dt = 4 - (x+3)e^{1-x}$.
 - d. En déduire que pour tout x de $[1; +\infty[$; $0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$.
3. On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$
 - a. Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale.
 - b. Montrer que la suite (S_n) est convergente.
On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$. Donner un encadrement de l

PROBLEME 11

PARTIE A

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec pour unité de longueur 5cm. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \cos x$.

1. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe opposé de $\cos x + \sin x$.
2. Montrer que $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ et étudier le sens de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Tracer la courbe représentative (Γ) de f sur cet intervalle.
 (Préciser les coefficients directeurs des tangentes à (Γ) aux points d'abscisses respectives $x = 0; x = -\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{4}; x = \frac{\pi}{2}$)
4.
 - a. Trouver deux réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (a \cos x + b \sin x)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
 - b. Calculer l'aire du domaine limité par (Γ) , les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2}$ et l'axe des abscisses. Exprimer le résultat en cm^2 .

PARTIE B

On se propose d'étudier l'intersection de la courbe (Γ) avec la droite $(\Delta) : y = x$

1. Existe-t-il de point d'intersection de (Γ) et (Δ) dont l'abscisse appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?
2. φ est la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = e^{-x} \cos x - x$
 - a. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
 - b. Etudier les variations de φ .
 - c. Dédire de ce qui précède qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$ c'est-à-dire que $f(\alpha) = \alpha$.
 - d. On pose $\beta = f(1) = e^{-1} \cos 1$. Prouver d'abord l'inégalité : $\alpha < 1$ puis en utilisant le sens de variation de f sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ montrer l'encadrement : $\beta < \alpha < 1$.
3. On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 1$ et par la relation de récurrence vérifiée pour tout naturel $n : U_{n+1} = f(U_n)$
 - a. Montrer par récurrence que : $\beta \leq U_n \leq 1$
 - b. On pose $k = |f'(\beta)|$. En étudiant le signe de f'' sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ prouver que sur cet intervalle $f'(0) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire l'inégalité stricte : $k < 1$
 - c. Prouver que pour tout réel x de $[\beta; 1] : |f'(x)| \leq k$
 - d. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout naturel $n : |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$. En déduire que : $|U_n - \alpha| \leq k^n$
 - e. Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

On donne $e^{\frac{\pi}{4}} \simeq 2,19; \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,70$.

Fonction irrationnelle Courbe associée et Calcul d'aire

PROBLEME 12

PARTIE A

Soit u la fonction de la variable réelle x définie par $u(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $u(x) = 0$.
2. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B

Soit g la fonction de la variable réelle x définie par : $g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}$.

1.
 - a. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - b. Calculer la dérivée g' de la fonction g .
 - c. En déduire le signe de $g'(x)$.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition D puis dresser le tableau de variation de g .
3.
 - a. Déterminer les équations des asymptotes à la courbe (C) de g .
 - b. Préciser la position de la courbe (C) par rapport à ses asymptotes.
4. Construire la courbe (C) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(Unité graphique 2cm)

PARTIE C

1. Déterminer la fonction numérique h telle que pour tout réel x , $h(-x) + g(x) = 0$
2. Soit (Γ) la courbe représentative de h . Montrer que $(C) \cup (\Gamma)$ est la courbe d'équation : $y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$.
3. En déduire que le point O est un centre de symétrie de la courbe $(C) \cup (\Gamma)$.
4. Construire alors (Γ) dans le repère précédent.

PARTIE D

Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

1.
 - a. Démontrer que pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} > |x|$.
 - b. En déduire l'ensemble de définition de f .
2. Calculer la dérivée f' de f puis en déduire une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer en centimètre carré l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui vérifie les inégalités $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) \leq y \leq -x$.

Fonction rationnelle et circulaire

Calcul d'aire et Etude d'une suite récurrente

PROBLEME 13

PARTIE A

Soit f la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$.

1. Pour tout x réel différent de -2 , vérifier l'égalité : $f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$.
2. Etudier les variations de f , et tracer la courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormal ainsi que ses asymptotes. (l'unité de longueur choisie étant 1cm).
3. Démontrer que la courbe (C) admet un centre de symétrie.
4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), son asymptote oblique et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.

PARTIE B

Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(t) = \frac{1-\sin^2 t}{2+\sin t}$

1. Pour tout t réel, montrer que : $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$. Expliquer comment l'étude des variations de φ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ .
2. Le but de cette question est de prouver que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet une solution notée α , dans l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
 - a. Montrer que la dérivée f' de f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$. Calculer l'image de $[-1; 1]$ par f' .
 - b. Soit φ' la dérivée de φ . Pour tout t réel, prouver l'égalité : $\varphi'(t) = f'(\sin t) \cos t$
 - c. Prouver l'existence et l'unicité de α .
 - d. Calculer les valeurs exactes de $\varphi(\alpha)$.
3.
 - a. Calculer les valeurs exactes de $\varphi(0)$; $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\varphi'(0)$.
 - b. Etudier les variations de φ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tracer la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (l'unité de longueur étant 10cm)
4. En utilisant la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(t) = \varphi(t) - t$. Prouver que l'équation $\varphi(t) = t$ admet une solution unique θ dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

PARTIE C

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \varphi(U_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$
2. Montrer que pour tout x de $[0; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$
En déduire que pour tout t de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $|\varphi'(t)| \leq \frac{2}{3}$
3. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, prouver l'inégalité :
 $|U_{n+1} - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_n - \theta|$
4. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \theta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \theta|$
En déduire que la suite (U_n) converge vers θ . On donne : $\sqrt{3} \simeq 1,73$

PROBLEME 14

PARTIE A :

On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E): $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1. Déterminer les réels a et b telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = axe^{2x} + b$ soit solution de l'équation différentielle (E).
2. On pose $y = z + g$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E') : $z' - 2z = 0$
3. Résoudre l'équation différentielle (E') et en déduire les solutions de (E).
4. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée f et étudiée dans la partie B.

PARTIE B :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra 2cm pour unité graphique.

1.
 - a. Calculer la limite de f en $-\infty$. En déduire que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote (Δ) dont on précisera l'équation.
 - b. Etudier la position relative de (C) et (Δ) et préciser les coordonnées du point A intersection de (C) et (Δ)
2. Calculer la limite de f en $+\infty$ et étudier la branche infinie si nécessaire
3. Etudier le sens de variation de f et présenter son tableau de variations.
 En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer (Δ) et (C). On prendra 2cm pour unité graphique.
5. a. Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)] dx$.
 (On pourra s'aider d'une intégration par parties)
 b. Interpréter graphiquement le résultat obtenu

PARTIE C :

1. Calculer $J = \int_{-1}^0 (2x - 1)e^{2x} dx$
2. A l'aide d'une double intégration par parties, calcul $K = \int_{-1}^0 (2x - 1)^2 e^{4x} dx$
3. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des points du plan tels que $-1 \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$. Calculer en cm^3 le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses. (On pourra exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de J et K)

PARTIE D

On considère dans le même repère que (C) la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ln t}{2} \\ y(t) = -\frac{1+\ln t}{t} + 1 \end{cases} ; t \geq 1$$

1. Déterminer une équation cartésienne de (Γ)
2. Expliquer comment on peut tracer (Γ) à partir de (C) puis tracer (Γ) en pointillées

Fonctions exponentielles – Fonctions polynômes

Calcul d'aires et de volumes

PROBLEME 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm)

PARTIE A

Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(X) = 1 + X - 2X^2$

1. Étudier le signe de $P(X)$ en fonction de X
2. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$
3. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?

PARTIE B

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Qu'en déduire pour la courbe $(\mathcal{C})$?
2. Vérifier que $f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^x - 2)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f
 - a. calculer $f'(x)$ pour tout réel x
 - b. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $(4 - e^x)$.
En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x
 - c. Dresser le tableau de variations de f .
On montrera que le maximum est un nombre rationnel.
4.
 - a. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
 - b. Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D) d'équation $y = 1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées
 - c. Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) .
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A .
6. Tracer les droites (D) ; (T_0) et (T) , puis la courbe $(\mathcal{C})$. On précisera le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $-\ln 2$.

PARTIE C

1. Calculer l'aire, en cm^2 , de la partie de plan limitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des ordonnées et la droite (D) .
2. Soit λ un réel strictement supérieur à $\ln 2$;
On pose $\mathcal{A}(\lambda) = 4 \int_{\ln 2}^{\lambda} [f(x) - 1] dx$
 - a. Donner une interprétation géométrique de $\mathcal{A}(\lambda)$
 - b. Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$. En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$
3. Calculer le volume V en unité de volume du solide de révolution obtenue par rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C})$ correspondant à $-\ln 2 \leq x \leq 0$

PROBLÈME 16

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$

1. Calculer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.
2. Déterminer la fonction dérivée g' de g et dresser le tableau de variation de g .
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0; +\infty[$ et que cette solution appartient à $[0,4 ; 0,5]$.
4. Dédire de ce qui précède, l'étude du signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.
5. On pose $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} g(x) dx$
 - a. Interpréter graphiquement I
 - b. Montrer que $I = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \ln 2$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}(3 + \ln x)$
 et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm

1.
 - a. Étudier la limite de f en 0
 - b. Établir que $f(x) = 3e^{-x} + \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x}$ pour tout $x > 0$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - c. Dédire de cette étude les asymptotes de la courbe (C)
2. Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$
3. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$ à 5×10^{-1} près
4. Dédire de l'étude faite à la question A. 4. les variations de f .
5. Déterminer le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
6. Tracer la courbe (C) .

PARTIE C

Soit h la fonction définie sur $[0,4 ; 0,5]$ par : $h(x) = \frac{1}{3 + \ln x}$

1. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$
2. Etudier les variations de h .
 En déduire que pour tout x de $[0,4 ; 0,5]$, $h(x)$ appartient à $[0,4 ; 0,5]$
3. Démontrer que pour tout x de $[0,4 ; 0,5]$, $|h'(x)| \leq \frac{3}{5}$
4. On définit la suite (U_n) par $U_0 = 0,45$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = h(U_n)$
 - a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in [0,4 ; 0,5]$
 - b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_n - \alpha|$
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$
 - d. Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
 - e. A partir de quelle valeur n_0 de n est-on sûr que U_n représente une valeur approchée de α à 10^{-5} près?

PROBLÈME 17**PARTIE A**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{-x}$

ainsi que sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. Préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
2. Calculer la dérivée de f .
3. En déduire le tableau de variation de f .
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1
5. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$. On choisira une unité graphique de 4 cm.

PARTIE B

1. Calculer $J = \int_0^1 x e^{-x} dx$
2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2x e^{-x}$
3. En déduire que : $\int_0^1 f(x) dx = 2J - f(1)$
4. Déduire des questions précédentes l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

PARTIE C

1. Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α , et appartenant à l'intervalle $I = [-1; 0]$
2. Soit g la fonction définie par sur I par : $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$
Montrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$
3. Montrer que pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I
4. Montrer que pour tout x de I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$.
5. En déduire que pour tout x de I , $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$
6. On définit la suite (U_n) par $U_0 = -0,5$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$
 - a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_n \in I$
 - b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_n - \alpha|$
 - c. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$
 - d. Montrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.
 - e. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près?

PROBLÈME 18

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

1. Dresser le tableau des variations de g
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $1,89 < \alpha < 1,90$
3. Dédire de ce qui précède le signe de $g(x)$

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$
($\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$; $\|\vec{j}\| = 10 \text{ cm}$)

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire les asymptotes à $(\mathcal{C})$
2. Dresser le tableau des variations de f
3. Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-3}
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en 1
5. Tracer (T) et $(\mathcal{C})$

PARTIE C

On considère la fonction numérique F définie sur $]0; +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et préciser $F'(x)$
En déduire le sens de variation de F .
2. Montrer que pour tout $t \geq 1$, $\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$
3. On pose $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$
 - a. A l'aide d'une intégration par parties calculer $I(x)$
 - b. A l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité $\left(\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}; t > 0\right)$; calculer $J(x)$
 - c. En déduire que pour tout $x > 1$; $\ln 2 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln x}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$
4. Soit x un réel strictement supérieur à 1.
 - a. Interpréter graphiquement $F(x)$
 - b. On pose $\mathcal{A} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. Dédire de la question 3.c que $\ln 2 \leq \mathcal{A} \leq 1$

PARTIE D

Soit G la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$$

1. Calculer $G'(x)$ pour tout $x > 0$
2. Vérifier que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$
3. Dédire de ce qui précède la limite de F en 0

PROBLÈME 19

PARTIE A

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x - e^{x-1}$$

- Étudier les variations de g (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de g).
 - Calculer $g(1)$ et montrer que pour tout réel x , $g(x) \leq 0$
 - En déduire que $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$, puis que $1 - xe^{-x} > 0$
2. On désigne par f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm

- Déterminer l'ensemble de définition de f et vérifier que pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$
 - Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations.
 - Écrire une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
 - Tracer (T) , puis $(\mathcal{C})$ (on admettra que $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (T) pour $x < 0$, et en-dessous pour $x > 0$).
- 3.
- Déterminer les images par f des intervalles $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$.
 - En déduire que pour tout x positif ou nul : $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$

PARTIE B

- Donner une interprétation géométrique du nombre : $I = \int_0^1 f(x) dx$
- Soit n un entier naturel non nul, et soit $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$
 - À l'aide d'une intégration par parties montrer que : $J_1 = 1 - \frac{2}{e}$
 - On se propose de calculer J_2 sans utiliser des intégrations par parties ; déterminer les coefficients a , b et c tels que la fonction H définie par :
 $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2 e^{-2x}$.
 En déduire que : $J_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{5}{e^2} \right)$
- Pour tout entier naturel non nul n , on pose $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$
 - Montrer que, pour tout réel x , $1 + xe^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (xe^{-x})^{n+1}}{1 - xe^{-x}}$
 - En déduire que $I - U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$
 - En utilisant A 1.c et 3.b montrer que pour tout réel x positif ou nul :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$$
 - En déduire un encadrement de $I - U_n$; étudier la convergence de la suite (U_n)
- Montrer que $U_2 \leq I \leq U_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}$

PROBLÈME 20

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

PARTIE A

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu
2.
 - a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - b. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
Interpréter les résultats graphiquement les résultats obtenus.
3. Etudier le sens de variations de f puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$ et que $2,3 < \alpha < 2,4$. Préciser l'autre point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses
5. Tracer $(\mathcal{C})$.

PARTIE B

1. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
 - a. Calculer $\mathcal{A}$
 - b. Démontrer que $\mathcal{A} = p\alpha + q + \frac{r}{\alpha}$ où p, q et r sont des entiers.
 - c. En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$ à $2 \cdot 10^{-1}$ près
2. Soit $\mathcal{D}$ le domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. Calculer le volume $\mathcal{V}$ en unité de volume du solide de révolution engendré par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses.
(On pourra faire une double intégration par parties.)

PARTIE C

On considère dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = t + 2e^t \end{cases}, t < 0$$

1. Démontrer que (Γ) est une partie de $(\mathcal{C})$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur dérivé $\vec{V}(t)$ pour $t = -\ln 2$ et représenter ce vecteur sur le graphique précédent au point $M(-\ln 2)$

PROBLÈME 21

PARTIE A

Soit la fonction numérique f de la variable x définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 .
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > -1$ et résoudre dans $] -1; +\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ et l'inéquation $f'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de f sur $[-1; +\infty[$.
3. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm.
 - a. Donner une équation des tangentes (T_0) et (T_1) à (C) aux points d'abscisses 0 et 1
 - b. Dresser le tableau de variation de f
4. Tracer (C) ainsi que les tangentes (T_0) et (T_1) et la demi-tangente à (C) en -1 .

PARTIE B

Pour tout réel $t > -1$, on pose $\mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) dx$

1. Démontrer que $\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 \ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{1}{4}(t+1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$. (On pourra s'aider d'une intégration par parties.)
2. Calculer $\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t)$. (On rappelle que $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$.)
3. On désigne par $\mathcal{A}_1$ l'aire en cm^2 de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$
 - a. Justifier l'égalité $\mathcal{A}_1 = 4 \left(\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) \right)$
 - b. Calculer $\mathcal{A}_1$

PARTIE C

On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0; +\infty[$

1. Démontrer que g est une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Tracer la courbe représentative (C') de la réciproque g^{-1} de g dans le même repère que (C) .
3. On désigne par $\mathcal{A}_2$ l'aire en cm^2 de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que

$$\begin{cases} -\ln 2 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq g^{-1}(x) \end{cases}$$

Démontrer que $\mathcal{A}_2 = 4(\mathcal{A}(-\ln 2) - \mathcal{A}(1))$

PARTIE D

On considère la courbe (Γ) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{-t} - 1 \\ y(t) = -2te^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. Démontrer que (Γ) et (C) ont un axe de symétrie qu'on précisera
2. Tracer (Γ) en pointillées dans le même repère que (C) .

PROBLÈME 22

PARTIE A

1. Soit la fonction numérique g définie pour tout nombre réel x par :

$$g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

- a. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

On ne demande pas de construire sa représentation graphique

- b. Prouver que pour tout réel x , $0 \leq g(x) \leq 2$

- c. Calculer $g''(x)$ pour tout réel x et étudier le sens de variation de g' sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

- d. En déduire que pour tout x appartenant à $[1; +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

2. Soit la fonction numérique f définie pour tout x réel positif par :

$$f(x) = 1 + \ln[g(x)]$$

- a. Étudier les variations de f

- b. Tracer avec précision la représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ayant pour unité graphique 4 cm.

- c. Prouver que, pour tout x réel positif, on a : $1 \leq f(x) \leq 1 + \ln 2 < 2$

- d. En utilisant le 1.), prouver que pour tout x de l'intervalle $[1; 2]$, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

- e. Soit m un réel quelconque.

Déterminer graphiquement, en discutant selon les valeurs de m , le nombre de solutions positives de l'équation

$$f(x) = m$$

PARTIE B

On définit une suite (U_n) de la façon suivante :

$$U_0 = \frac{1}{5} \text{ et pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = f(U_n)$$

1. Placer U_0 sur l'axe des abscisses du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puis par un procédé géométrique, représenter sur ce même axe U_1, U_2 et U_3

2. Prouver que, quel que soit l'entier naturel non nul n , on a : $1 < U_n < 2$

3. Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1; 2]$ par : $h(x) = f(x) - x$

- a. Montrer que h est une fonction décroissante.

- b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ a une seule solution α comprise entre 1 et 2.

4. Prouver que pour tout entier n non nul, on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$

En déduire que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ et que la suite (U_n) converge vers α

PROBLÈME 23

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}$

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$
2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x

PARTIE B

On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + xe^{-x}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2. Calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de f
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution notée α , puis vérifier $0 < \alpha < 1$
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) et préciser la position relative de (D) et (C) .
5. La courbe (C) admet en un point A une tangente parallèle à la droite (D) . Déterminer les coordonnées de A.
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
7. Tracer (D) , (T) et (C) ainsi que la tangente à (C) en A
8. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ où λ est un réel strictement positif. Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$

PARTIE C

1. Démontrer que, sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $\frac{e^x}{e^{x+1}} = x$
2. On appelle h la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $h(x) = \frac{e^x}{e^{x+1}}$.
 - a. Etudier les variations de h .
 - b. En déduire que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $h(x)$ appartient à $[0 ; 1]$.
3. Calculer $h''(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$; étudier le sens de variation de h' et en déduire que, pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$.
4. On définit la suite (U_n) pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , U_n appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis que la suite (U_n) converge vers α
 - d. Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-6} près de α

PROBLÈME 24

PARTIE A

On considère la fonction numérique f , de la variable réelle x , définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra 2cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées, et 4cm pour l'unité sur l'axe des abscisses.

1. Montrer que, pour tout réel x : $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et l'existence d'une asymptote pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. Montrer que la fonction dérivée f' de f vérifie : $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ pour x élément de $\mathbb{R}$
3. On étudie la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
4. Représenter la fonction f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, ainsi que les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ d'équations $y = -e^{-x}$ et $y = e^{-x}$
5. Déterminer algébriquement sur $\mathbb{R}$, puis sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, les coordonnées des points communs à :
 - a. $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses.
 - b. $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$
 - c. $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_2)$
6. Déterminer un réel α tel que, pour $x \geq \alpha$, on ait $|f(x)| \leq 10^{-2}$.

PARTIE B

Le but de cette partie est de déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4, trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.
2. En déduire qu'on peut choisir $F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$
3. On pose $I = \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx$. Montrer que $I = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$

PARTIE C

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) dx$

1. Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.
2. Montrer que, pour tout naturel n , $I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1)$
3. Prouver que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Calculer sa raison.
4. Prouver que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

PROBLÈME 25

PARTIE A

Soit la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$, qui, à tout x , associe : $g(x) = (x - 1)e^x + x^2$

1. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que α est dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}$$

1. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0; +\infty[$, et que, par suite, l'équation $f(x) = x$ admet α pour solution unique sur I
2.
 - a. Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$
 - b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - c. Dresser le tableau de variation de f
 - d. Construire la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f sur $[0; +\infty[$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4cm). On indiquera en particulier les tangentes à $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisse 0 et 1.

PARTIE C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à I , $f(x)$ appartient à I .
2. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), \quad \forall n > 1 \end{cases}$$
 - a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \in I$
 - b. Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 - c. En appliquant le théorème de l'inégalité de la moyenne, démontrer que :
pour tout $n > 1$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$
 - d. En déduire, par un raisonnement par récurrence, que :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 - e. En déduire que (U_n) converge vers α .
 - f. À priori, combien suffit-il de calculer de termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près ?

PROBLÈME 26

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2 \ln x$$

1. Étudier le sens de variation de g .
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

PARTIE B

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$
 - c. Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$
Montrer, en particulier, que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on déterminera.
3. Étudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f
4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ est parallèle à (Δ) . Préciser les coordonnées de B.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α
Justifier l'encadrement : $0,34 < \alpha < 0,35$
6. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T) .

PARTIE C

On considère la suite numérique (x_n) définie par :

$$x_n = e^{\frac{n-2}{2}} \text{ pour tout nombre entier naturel } n$$

1.
 - a. Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
 - b. Montrer que (x_n) est une suite croissante.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2} \right) dx$
 - a. Donner une interprétation géométrique de a_n
 - b. Montrer que $a_n = \frac{2n+1}{2}$ pour tout nombre entier naturel n .
En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

PROBLÈME 27

Pour tout entier n strictement positif on considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées)

PARTIE A

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$
Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_1)$?
- Étudier le sens de variation de f_1 et donner le tableau des variations de f_1
- Déterminer une équation de la tangente en $x_0 = 1$, à la courbe $(\mathcal{C}_1)$
- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$
Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_2)$?
- Calculer $f_2'(x)$ et donner le tableau des variations de f_2

PARTIE B

- Étudier le signe de $f_1(x) - f_2(x)$; en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$
- Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$

PARTIE C

n étant un entier naturel non nul, on pose : $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$

- On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculer $F'(x)$, en déduire I_1
- En utilisant une intégration par parties montrer que :

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

- Calculer I_2 puis l'aire en cm^2 du domaine compris entre les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

PARTIE D

- En utilisant la question 2. de la partie C, montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul :

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$
- En utilisant un encadrement de $\ln x$ sur $[1; e]$, montrer que, pour tout n entier naturel non nul : $0 \leq I_n \leq 1$
- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

PROBLÈME 28

PARTIE A

Soit l'équation différentielle (E): $y' + y = x - 1$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x (t - 1)e^t dt$
2. Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On pose : $f(x) = z(x)e^{-x}$
 - a. Montrer que la fonction f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = (x - 1)e^x$
 - b. À l'aide de la première question, déterminer toutes les fonctions z vérifiant, pour tout x de $\mathbb{R}$, $z'(x) = (x - 1)e^x$
3.
 - a. Dédire de la question précédente les solutions de (E)
 - b. Déterminer la solution de (E) pour laquelle l'image de 1 est 0.

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^{1-x}$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f

1.
 - a. Étudier le sens de variation de f
 - b. Préciser $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis dresser le tableau de variation de f
2.
 - a. Montrer que la droite (D) , d'équation $y = x - 2$, est asymptote à la courbe (C_f)
 - b. Préciser la position de (C_f) par rapport à (D)
3. Tracer (D) et (C_f)

PARTIE C

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. On considère le domaine limité par la courbe (C_f) , son asymptote (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$
Exprimer, à l'aide de x_0 , l'aire S_1 en unité d'aire de ce domaine.
2. On considère la fonction g , définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{1-x}$
 - a. Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentative (C_g) dans un autre repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)
 - b. Donner une interprétation, en termes d'aire, de l'intégrale ayant servi au calcul de S_1 à l'aide de la courbe (C_g) .
3. A est le point de coordonnées $(x_0; 0)$. B est le point de la courbe (C_g) d'abscisse x_0 . Soit (T) la tangente à la courbe (C_g) au point d'abscisse x_0 . C est le point d'intersection de (T) et de l'axe des abscisses.
Déterminer les coordonnées de C.
4. Calculer (en unités d'aire) l'aire S_2 du triangle ABC. Vérifier que $S_1 + 2S_2 = e$

PROBLÈME 29

PARTIE A

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par :
 $g(x) = 2x - (x - 1) \ln(x - 1)$
 - a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (On admet le résultat suivant : $\lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0$)
 - b. Calculer $g'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$
 - c. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x - 1) > 0$ d'inconnue x appartenant à l'intervalle $]1; +\infty[$
 - d. Étudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]1; +\infty[$
 - e. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α dans l'intervalle $[e + 1; e^3 + 1]$, et étudier le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]1; \alpha[$ et $]\alpha; +\infty[$
2. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{x}$
 - a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x)$ et prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$
 - b. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ est du signe de $g(x^2)$ sur l'intervalle $]1; +\infty[$
 - c. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $]1; \sqrt{\alpha}[$ et décroissante sur l'intervalle $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(e^{2x} - 1)}{e^x}$

1. Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $f(x) = \varphi(e^x)$
2. En déduire :
 - a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - b. le sens de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$
3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha - 1}$
4. Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f dans un repère orthogonal, d'unités 5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée. On prendra 10 comme valeur approchée de α . On précisera les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

PARTIE C

1. Vérifier que f est solution de l'équation différentielle : $y' + y = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$
2. On pose : $h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$; $x > 0$
 - a. Trouver une primitive H de h sur l'intervalle $]0; +\infty[$
 - b. En déduire les primitives F de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$
3. Calculer l'aire en unité d'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \ln(\sqrt{2})$ et $x = \ln(\sqrt{\alpha})$

PROBLÈME 30

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x \ln x - x + 1$ et $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm

1. Étudiez les limites de g en 0 et en $+\infty$
2. Étudiez les variations de g . En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x . On note $(\mathcal{C}')$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \ln x$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
3. Montrez que $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e et que, pour tout x élément de $[1; e]$, on a : $x \ln x - x + 1 \leq \ln x$. (On ne demande pas de représenter $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$)
4.
 - a. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale : $J = \int_1^e (x - 1) \ln x \, dx$
 - b. Soit Δ le domaine plan défini par : $\Delta = \{M(x, y); 1 \leq x \leq e \text{ et } g(x) \leq y \leq \ln x\}$
 Déterminer, en cm^2 , l'aire de Δ .

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$

1. Étudiez les limites de f en $+\infty$ et en 1 (pour l'étude de la limite en 1, on pourra utiliser un taux d'accroissement).
2. Déterminer le tableau de variation de f (on pourra remarquer que $f'(x)$ s'écrit facilement en fonction de $g(x)$).
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unité graphique 2 cm)

PARTIE C

1. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3,5 < \alpha < 3,6$
2. Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
 - a. Montrer que α est solution de l'équation $h(x) = x$
 - b. Étudier le sens de variation de h
 - c. On pose $I = [3; 4]$. Montrer que pour tout x élément de I on a $h(x)$ appartient à I et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$
3. On définit la suite (U_n) par : $U_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$, $U_{n+1} = h(U_n)$
 Justifier successivement les trois propriétés suivantes :
 - a. Pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$
 - b. Pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$
 - c. La suite (U_n) converge vers α .
4. Donner un entier naturel p , tel que des majorations précédentes on puisse déduire que U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

PROBLÈME 31

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

PARTIE A

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x + 1)$ et $g(x) = \frac{2x}{x+2}$

On notera $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f et (Γ) celle de g .

1. Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions f et g
2. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = f(x) - g(x)$
 - a. Étudier le sens de variation de h sur $[0; +\infty[$
 - b. Calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de h en $+\infty$ n'est pas demandée.)
 - c. En déduire que pour tout réel x positif ou nul,

$$(1) \quad \frac{2x}{x+2} \leq \ln(x + 1)$$
 - d. Interpréter graphiquement ce résultat
3. Construire dans le même repère les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) , et montrer qu'elles admettent en O une même tangente $(\mathfrak{D})$ que l'on tracera.

PARTIE B

1. Étudier le sens de variation de φ définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln(x + 1) - x$$
2. Étudier la limite de φ en $+\infty$ et donner la valeur de φ en 0.
 En déduire que pour tout réel x positif ou nul :

$$(2) \quad \ln(x + 1) \leq x$$
3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I = \int_0^1 \ln(x + 1) dx$
 (On remarquera éventuellement que : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$)
4. En déduire le calcul de $J = \int_0^1 (x - \ln(x + 1)) dx$ puis de

$$K = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+2} - \ln(x + 1) \right) dx$$
 (Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$)
5. Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes $(\mathcal{C})$, (Γ) et la droite $(\mathfrak{D})$ obtenues dans la partie A.

PARTIE C

1. Soit u la fonction définie sur $[0; 1]$ de la façon suivante :

$$u(0) = 1 \text{ et si } x \neq 0, u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$
 Démontrer que la fonction u est continue sur $[0; 1]$.
2. On pose : $L = \int_0^1 u(x) dx$
 En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} dx \leq L \leq 1$$
 En déduire un encadrement de L .

PROBLÈME 32

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Toutes les courbes demandées seront représentées sur un même graphique (unité graphique : 2 cm).

PARTIE A

On définit la fonction f sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
3. Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $(\mathcal{C})$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de A .
 Soit B le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse $\frac{5}{4}$; P le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O; \vec{i})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O; \vec{j})$.
 Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points B, P et H .
 Placer les points A, B, P et H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et représenter la courbe $(\mathcal{C})$

PARTIE B

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. A tout point M du plan d'affixe z , la rotation r associe le point M' d'affixe z'

1.
 - a. Donner z' en fonction de z
 - b. On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x', y' réels). Exprimer x' et y' en fonction de x et y , puis exprimer x et y en fonction de x' et y'
 - c. Déterminer les coordonnées des points A', B' et P' images respectives des points A, B et P par la rotation r
2. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-2x} + 2e^x$ et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 - a. Montrer que lorsqu'un point M appartient à $(\mathcal{C})$, son image M' par r appartient à (Γ)
 On admet que lorsque le point M décrit $(\mathcal{C})$, le point M' décrit (Γ)
 - b. Tracer sur le graphique précédent les points A', B' et P' et la courbe (Γ) (l'étude des variations de g n'est pas demandée).

PARTIE C

On rappelle que l'image d'un domaine plan par une rotation est un domaine plan de même aire.

1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x) dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.
2.
 - a. Déterminer, en unités d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan D limité par les segments $[AO]$, $[OH]$ et $[HB]$ et l'arc de courbe $(\mathcal{C})$ d'extrémités B et A .
 - b. On pose $I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx$. Trouver une relation entre $\mathcal{A}$ et I puis en déduire la valeur exacte de l'intégrale I .

PROBLÈME 33

PARTIE A

On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$

1. Déterminer les variations de h (on précisera $h(0)$ mais la limite en $+\infty$ n'est pas demandée).
2. Calculer $h\left(\frac{3}{2}\right)$. En déduire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel que $h(a) = 0$
3. Etudier le signe de $h(x)$ sur $[0; +\infty[$

PARTIE B

Soit la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$

1. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0; +\infty[$
2. Montrer que, pour tout nombre x strictement positif : $f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}$
En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$
4. Représenter l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm. On prendra $a = 1,62$; $f(a) = 1,62$ et on placera les points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses respectives 2 et 3

PARTIE C

1. Démontrer que sur $[0; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à $2(1 - e^{-x}) = x$
2. Soit la fonction g définie sur $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ par : $g(x) = 2(1 - e^{-x})$
Montrer que, pour tout x de l'intervalle I , $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$
3. Soit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier n , x_n appartient à I

- a. Démontrer que, pour tout entier n :
 $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |x_n - a|$ et $|x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$
- b. En déduire que la suite (x_n) converge vers .
- c. Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel a .

PROBLÈME 34

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unités graphiques : 2 cm)

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 3)e^{-\frac{x}{2}}$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ puis en $+\infty$
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
4. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_{-3}^0 x e^{-\frac{x}{2}} dx$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine définie par les couples (x, y) tels que $0 \leq y \leq f(x)$ et $-3 \leq x \leq 0$
5.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$
 - b. Plus généralement, déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$

PARTIE B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)$

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $g(x) = x$
2. Soit g' et g'' les dérivées première et seconde de la fonction g
 - a. Calculer, pour tout réel x , $g'(x)$ et $g''(x)$. Justifier que $g'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$
 - b. Etudier le sens de variation de g' , puis celui de g .
3. On se place désormais dans l'intervalle $I = [-2; \alpha]$
 Montrer que, pour tout x appartenant à I
 - a. $g(x)$ appartient à I
 - b. $\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{3}{4}$
 - c. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I , on a :

$$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq g(\alpha) - g(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$$
4. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n , U_n appartient à l'intervalle I . Justifier que, pour tout entier n ,

$$0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n) \text{ puis que } 0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$
 - b. En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.
 - c. Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$
 Que représente U_p pour le réel α

PROBLÈME 35

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan.

1.

- a. Déterminer la limite de f en $+\infty$
 - b. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ on a :

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$$
 - c. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet comme asymptote la droite (D) d'équation
 $y = x$
 - d. Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et (D)
2. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
3. Tracer la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$

PARTIE B

Pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ on pose : $F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$

1. Soit x un réel strictement positif. En utilisant la question 1 de la partie A, donner une interprétation géométrique de $F(x)$
2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0; +\infty[$
3. Soit a un réel strictement positif.
 - a. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[1; 1 + a]$, on a :

$$\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$
 - b. En appliquant le théorème des inégalités des accroissements finis à la fonction logarithme, établir que $\frac{a}{a+1} \leq \ln(a+1) \leq a$
4. Soit x un réel strictement positif. Déduire de la question 3 :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$$
 puis

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$
5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$ existe et est un nombre réel noté ℓ
 Établir que $\frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$
6. Pour tout entier naturel n , on pose : $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$
 (On pourra utiliser le sens de variations de la fonction h , définie sur $[0; +\infty[$ par : $h(t) = \ln(1 + e^{-2t})$)
 - b. Déterminer la limite de la suite (U_n)
7. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 - a. Exprimer S_n à l'aide de F et n .
 - b. La suite (S_n) est-elle convergente ? Dans l'affirmative, donner un encadrement de sa limite.

PROBLÈME 36

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par : $g(t) = \ln(1+t) - \frac{2t}{1+t}$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1. Étudier le sens de variations de g
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en -1
3. Montrer qu'il existe un réel α et un seul dans l'intervalle $[1; +\infty[$ tel que : $g(\alpha) = 0$
 Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α
4. Tracer la tangente à $(\mathcal{C})$ en l'origine O du repère, puis la courbe $(\mathcal{C})$
5.
 - a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel t appartenant à $] -1; +\infty[$,
 $\frac{t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$
 - b. Calculer l'intégral $\int_0^x g(t)dt$ ou t appartient à $] -1; +\infty[$
 (au cours du calcul, utiliser une intégration par parties).
 - c. Montrer que l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine compris entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = 0$ et $t = \alpha$ est égale à $\frac{4\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}$
 - d. En utilisant 3. donner un encadrement de cette aire.

PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et comparer les signes de $f'(x)$ et $g(e^{2x})$
 Préciser, en fonction de α , la valeur de x pour laquelle $f'(x) = 0$
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ (on pourra poser $t = e^{2x}$).
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$
 (On pourra utiliser l'égalité $1 + e^{2x} = e^{2x}(1 + e^{-2x})$)
4. Dresser le tableau de variations de f
5. Montrer que le maximum de f est égal à $\frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$
6. Donner une valeur approchée de ce maximum en utilisant la valeur approchée par excès de α trouvée en partie A 3.
7. Tracer la courbe représentative (Γ) de f dans un autre repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 (Unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

PROBLÈME 37

PARTIE A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. Soit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln x + x + 1$
 - a. Étudier les variations de g
 - b. Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β et une seule, et que $0,27 \leq \beta \leq 0,28$.
(On ne demande pas de construire la courbe représentative de g)
3. Pour $x > 0$, exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. En déduire les variations de f . On montrera que $f(\beta) = -\beta$
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$, puis la limite de $\ln x - f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement ce dernier résultat
5. Construire les courbes représentatives $(\mathcal{C})$ de f et (Γ) de $x \mapsto \ln x$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ [unité graphique 4 cm].

PARTIE B

On se propose d'étudier l'équation $f(x) = 1$

Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule, et que $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$
Placer le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse α
2. Prouver que l'équation $f(x) = 1$ équivaut à l'équation $h(x) = x$
3. Étudier la monotonie de h
4. Prouver que pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$,
 - a. $h(x)$ appartient aussi à $[3,5; 3,7]$
 - b. $|h'(x)| \leq |h'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$
 - c. $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3}|x - \alpha|$
5. Soit (U_n) la suite d'éléments de $[3,5; 3,7]$, définie par la relation de récurrence : $U_{n+1} = h(U_n)$ et la condition initiale $U_0 = 3,5$
 - a. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|U_n - \alpha|$
 - b. En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 - c. Montrer que la suite (U_n) converge et préciser sa limite
 - d. Déterminer un entier p tel que U_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel α .

Fonctions exponentielles

Calcul d'aires et Etude d'une suite récurrente

PROBLÈME 38

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

On note (Γ) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1.

- a. Montrer que pour tout réel x , $f(-x) + f(x) = 2$
En déduire que (Γ) possède un centre de symétrie, qu'on désignera par A et dont on précisera les coordonnées.
- b. Déterminer la limite de f en $-\infty$
Déterminer la limite de f en $+\infty$. (On pourra par exemple utiliser 1.a. ou poser $X = e^x$)
En déduire que (Γ) possède deux asymptotes dont on précisera les équations.
- c. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f

2.

- a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0.
- b. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$
Montrer que, pour tout réel x , $\varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$. En déduire le sens de variation de la fonction φ puis son signe (on précisera $\varphi(0)$).
- c. Déduire de ce qui précède la position de la courbe (Γ) par rapport à la droite (T)

3. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) ainsi que la courbe (Γ) et ses asymptotes.

PARTIE B

1.

- a. Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $\varphi(x) = -1$
- b. En déduire, en utilisant les résultats de A 2. que la droite (D) d'équation $y = x$ coupe la courbe (Γ) en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3.

2.

- a. Montrer que pour tout réel x , $f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$.
En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$
- b. Exprimer, en fonction de α , l'aire du domaine limité par la courbe (Γ) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

PARTIE C : Dans cette partie on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$

1.

- a. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 4\left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2}\right)$
- b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I , $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
- c. En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

2. On définit la suite (U_n) d'éléments de l'intervalle I par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3 - \alpha|$
- b. Déterminer un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

PROBLÈME 39

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{3}{2} \text{ et } f(x) = 2x \ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} \text{ (ln désigne le logarithme népérien)}$$

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2 \ln x - x + 1$

1. Déterminer les limites en 0 et en $+\infty$ de g
 Étudier les variations de g
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ deux solutions 1 et α .
 En déduire le signe de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$
3. Vérifier que : $3,5 \leq \alpha \leq 4$

PARTIE B

1. Soit f' la fonction dérivée de f . Vérifier que $f'(x) = g(x)$ (pour $x > 0$)
 Étudier le sens de variations de f sur $]0; +\infty[$
2.
 - a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis dresser son tableau de variations
 - b. Montrer que f est continue en zéro.
 - c. Calculer la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ lorsque x tend vers zéro par valeurs strictement positives. Que peut-on en conclure ?
3.
 - a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]0; +\infty[$ deux solutions 1 et β
 - b. Justifier les inégalités : $5 \leq \beta \leq 6$
4. La tangente (D) à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse 5 a pour équation $y = h(x)$
 - a. Calculer $h(x)$ et étudier les variations de la fonction Δ définie sur $[5; +\infty[$ par $\Delta(x) = f(x) - h(x)$
 En déduire que pour tout $x \geq 5$, on a : $f(x) \leq h(x)$
 - b. Soit λ l'abscisse du point d'intersection de (D) et de l'axe (Ox) . Calculer λ et prouver que $\beta \leq \lambda$
5. Rassembler dans un tableau les résultats obtenus sur f . Tracer la droite (D) et la courbe (C) représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 centimètres.

PARTIE C

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $F(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$

1. Vérifier que F est sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la primitive de f qui s'annule au point 1.
2. On pose $\mathcal{A} = \int_1^\beta f(t)dt$
 - a. Montrer que : $F(5) \leq F(\beta)$ (1)
 - b. Montrer que : $\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\beta h(t)dt$
 Prouver que : $\int_\beta^\lambda h(t)dt \geq 0$
 En déduire l'inégalité : $\mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt$ (2)
3. Donner un encadrement de $\mathcal{A}$ à 10^{-2} près.

PROBLÈME 40

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 centimètres.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et étudier les variations de f .
2. Préciser les coordonnées du point d'intersection de $(\mathcal{C})$ avec l'axe des abscisses
3. Construire (T) et $(\mathcal{C})$
4. Soit λ un réel strictement inférieur à 0. On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine plan constitué des points dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} \lambda \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

- a. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine $\mathcal{D}$. En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$
- b. Calculer le volume $\mathcal{V}(\lambda)$ en unité de volume du solide de révolution engendré par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe des abscisses. En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(\lambda)$

PARTIE B

1. Montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet une unique solution $\beta = 2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$
 Calculer $f(\beta)$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$
 - a. Déterminer le signe de $g(\beta)$ et montrer que g est strictement monotone sur chacun des deux intervalles $]-\infty; \beta[$ et $]\beta; +\infty[$
 - b. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions a et b avec $a < 0 < \beta < b$
3. Calculer $f''(x)$ pour tout réel x et étudier les variations de f'
4. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) \geq -\frac{1}{4}$
 En déduire que pour tout $x \in]-\infty; 0]$, $-\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$
5. Soit (x_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $x_0 = \beta$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$
 - a. Montrer que pour tout $x \in]-\infty; 0]$, $f(x) \in]-\infty; 0]$.
 En déduire que $n \geq 1$, $x_n \leq 0$
 - b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} |x_n - a|$
 En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
 $|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_1 - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
 - c. Montrer que la suite (x_n) converge vers a

Fonction logarithme népérien

Etude d'une suite récurrente

PROBLÈME 41

PARTIE A

Dans cette partie le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique : 2 cm.

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans ce repère

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$
 - a. Étudier le sens de variation de g
 - b. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 - c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0; +\infty[$
 - d. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2; 3]$, on a $g(x) < \frac{1}{2}$
2.
 - a. Déterminer la limite, quand x tend vers zéro par valeurs strictement positives, de $x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ (on pourra poser $X = \frac{2}{x}$) et démontrer que f est continue en 0
 - b. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
 - c. Étudier le sens de variation de f (on vérifiera que $f'(x) = g(x)$)
3.
 - a. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$ (on pourra poser $X = \frac{2}{x}$)
 - b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - c. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
4. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite (Δ) , la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$

PARTIE B

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$

1.
 - a. Soit h la fonction définie sur I par $h(x) = f(x) - x$. Montrer que pour tout x de I , $h'(x) < 0$ (on remarquera que $h'(x) = g(x) - 1$).
 - b. En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans I ; on note α cette solution.
2.
 - a. Montrer que pour tout x de I , $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$
 - b. En déduire que, pour tout x de I , $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
3. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $U_0 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$
On admet que pour tout n de $\mathbb{N}$, U_n appartient à l'intervalle I
 - a. Établir pour tout n de $\mathbb{N}$, les inégalités suivantes :
 - (i) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$
 - (ii) $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 - b. En déduire que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?
 - c. Déterminer n_0 entier naturel tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

PROBLÈME 42

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{x-1} - 1$

PARTIE A

1. Établir le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$
2.
 - a. Justifier que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser
 - b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout élément x de J
 - c. Sans étudier f^{-1} , tracer la courbe (Γ) de f^{-1} dans le même repère que $(\mathcal{C})$
3. On pose $\varphi(x) = f(x) - x$
 - a. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
 - b. Dresser le tableau de variation de φ et démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions qu'on notera a et b ($a < b$)
 - c. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet comme seules solutions a et b et établir que $2 < b < \frac{5}{2}$
4. Calculer l'aire en cm^2 du domaine plan limité par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. On donnera le résultat uniquement en fonction de a et b

PARTIE B

Soit la fonction g définie sur $I = \left[2; \frac{5}{2}\right]$ par : $g(x) = \ln(x + 1) + 1$

1. Montrer que, sur I , l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$
2.
 - a. Démontrer que, pour tout élément x de I , $g(x)$ appartient à I .
 - b. Montrer que pour tout élément x de I : $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$
 - c. En déduire que, pour tout élément x de I : $|g(x) - b| \leq \frac{1}{3}|x - b|$
3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $w_0 = 2$ et pour tout entier $n \geq 0$, $w_{n+1} = g(w_n)$
 - a. Établir que pour tout $n \geq 0$, w_n appartient à I
 - b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|w_{n+1} - b| \leq \frac{1}{3}|w_n - b|$
 - c. En déduire que $|w_n - b| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 - d. Montrer alors que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite
 - e. Déterminer un entier q tel que w_q soit une valeur approchée de b à 10^{-2} près

PROBLÈME 43

PARTIE A

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(E): y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

1. Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$, et soit g la fonction définie par l'égalité : $f(x) = e^{2x} g(x)$
 - a. Calculer $g(0)$
 - b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$
 - c. Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
 - d. En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E)

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$

1. On pose : $h(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
 - a. Étudier la limite de h en $+\infty$
 - b. Étudier le sens de variation de h
 - c. En déduire le signe de $h(x)$ pour tout x réel.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$
3. Étudier la limite de f en $+\infty$
 Montrer que $f(x) = e^{2x}[-2x + \ln(1 + e^{2x})]$. En déduire la limite de f en $-\infty$
4. Dresser le tableau de variations de f
5. Représenter graphiquement la courbe ($\mathcal{C}$) de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ en prenant 5 cm pour unité.

PARTIE C

1. En remarquant que $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$; déterminer sur $\mathbb{R}$, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}$
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire (en unité d'aire) de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de la fonction f et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

PARTIE D

On définit la suite (U_n) pour tout entier naturel n par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

1. Montrer que pour tout élément x de $[0; 1]$, $f(x)$ appartient à $[0; 1]$. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $U_n \in [0; 1]$
2. Montrer par récurrence que la suite (U_n) est croissante. En déduire qu'elle converge
3. Soit α la limite de la suite (U_n) . Montrer que $f(\alpha) = \alpha$ et que $\alpha \in [0; 1]$

Fonctions exponentielles

Calcul Intégral et calcul d'aires

PROBLÈME 44

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

On note $(\mathcal{C})$ et (Γ) les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 4 cm).

PARTIE A

1.

- Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
Préciser les éventuelles asymptotes à $(\mathcal{C})$
- Prouver que le point Ω de coordonnées $(0; \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$
- On note (T) la tangente à $(\mathcal{C})$ au point Ω .
Déterminer le coefficient directeur de (T) .
- Représenter (T) et $(\mathcal{C})$

2.

- En observant que, pour tout nombre réel x , on a $g(x) = f(-x)$, montrer que (Γ) est l'image de $(\mathcal{C})$ par une symétrie que l'on déterminera.
- Vérifier que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) + g(x) = 1$
En déduire que (Γ) est l'image de $(\mathcal{C})$ par une autre symétrie que l'on déterminera.
- Déterminer le coefficient directeur de la tangente (T') à (Γ) au point Ω
- Représenter (T') et (Γ) sur la figure de la question 1

PARTIE B : On note $I = \int_0^1 f(t) dt$ et $J = \int_0^1 g(t) dt$

1. En utilisant l'égalité de la question A 2.b, calculer $I + J$

2.

- Montrer que, pour tout nombre réel t , $\frac{1}{1+e^{-t}}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{e^t}{e^t+1}$
- En déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$, puis la valeur de J

3. Calculer la valeur de I

4.

- Prouver que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$
- On note Δ l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

On note $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en cm^2 , du domaine Δ
Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de I et J . En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$

PARTIE C

On considère les fonctions h et H définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) \text{ et } H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

1.

- Que représente H pour h ?
- En déduire que H est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2. On note h' la fonction dérivée de h

- Vérifier que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0; +\infty[$, $h(x) = h'(x) + g(x)$
- En déduire $H(x)$ en fonction de x

Fonction logarithme népérien

Calcul d'aires et Etude d'une suite récurrente

PROBLÈME 45

PARTIE A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1$$

On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dont l'unité vaut 2 cm.

1.
 - a. Étudier sur $]0; +\infty[$ le sens de variation de la fonction g définie par :
$$g(x) = x^3 - 2 \ln x + 1$$
 - b. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0; +\infty[$
2.
 - a. Calculer $f'(x)$, et démontrer que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.
 - b. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis construire son tableau de variations.
 - c. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$
Étudier la position de (Δ) par rapport à $(\mathcal{C})$
 - d. Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1.
3. Tracer les droites (T) et (Δ) et construire la courbe $(\mathcal{C})$

PARTIE B

Soit λ un réel supérieur ou égal à 1.

1. On appelle $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en unité d'aire de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$, (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$
Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$. (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Déterminer la limite L de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$
3. Montrer que l'équation : $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{L}{2}$ est équivalente à l'équation (E) définie par $2 \ln \lambda - \lambda + 2 = 0$
4. Prouver que l'équation (E) admet une unique solution a sur $[1; +\infty[$
Vérifier que $5 < a < 6$

PARTIE C

Cette partie va permettre de déterminer une approximation de a

Pour cela, on introduit la suite (U_n) définie par $U_0 = 5$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = \varphi(U_n)$, où φ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = 2 \ln x + 2$

1.
 - a. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, U_n appartient à $[5; 6]$.
 - b. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
 - c. Montrer que la suite (U_n) est convergente
2.
 - a. Prouver que pour tout x de l'intervalle $[5; 6]$ on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$
 - b. En déduire que pour n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5} |U_n - a|$
 - c. Démontrer alors que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$
 - d. En déduire la limite de (U_n)
3. Déterminer un entier n tel que U_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.

PROBLÈME 46

PARTIE A

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x(1 - \ln x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu
2.
 - a. Calculer la dérivée f' , de f sur $]0; +\infty[$. En déduire le sens de variations de f
 - b. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$
 - c. Dresser le tableau de variations de la fonction f
3. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f
 - a. On note N le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1, R le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de l'axe des abscisses, Q le point de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 2x$. Calculer les coordonnées des points N , R , Q et donner les coefficients directeurs des tangentes à $(\mathcal{C})$, en chacun de ces points.
 - b. En adoptant 4 cm pour l'unité et en plaçant l'axe des ordonnées à 6 cm du bord gauche de la feuille, construire $(\mathcal{C})$, ainsi que les tangentes à $(\mathcal{C})$ en N , R et Q

PARTIE B

1. On note φ la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$
 - a. Démontrer que φ est une application bijective de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
 - b. Tracer la courbe $(\mathcal{C}')$ de φ dans le même repère que $(\mathcal{C})$
2. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x(\ln x - 1)$
Sans étudier g , tracer sa courbe représentative (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.
Expliquer

PARTIE C

1. Soit λ un nombre de l'intervalle $]0; e[$
Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $I(\lambda) = \int_{\lambda}^e x \ln x \, dx$
2. En déduire la valeur de $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) \, dx$
Que représente $\mathcal{A}(\lambda)$?
3. Montrer que $\mathcal{A}(\lambda)$ admet pour limite $\mathcal{A} = \frac{e^2}{2}$ quand λ tend vers zéro. On admettra que cette limite $\mathcal{A}$ représente l'aire du domaine limité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$
4. En déduire l'aire $\mathcal{A}'$ en cm^2 du domaine limité par (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$

PROBLÈME 47

PARTIE A

1. Soit g la fonction $[0; +\infty[$ définie par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$
 - a. Étudier les variations de g , déterminer sa limite en $+\infty$
(On pourra poser $X = x^2 + 1$)
 - b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; +\infty[$. Prouver que $\frac{7}{4} \leq \alpha \leq 2$
2. Préciser le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$

PARTIE B

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ unité 2 cm.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

1. Montrer que f est dérivable en 0. Interpréter graphiquement ce résultat
2. Étudier la parité de f . Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?
3. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$
4. Soit la fonction φ définie sur $] -1; +\infty[$ par : $\varphi(x) = \ln(x + 1) - x$
 - a. Étudier les variations de φ
 - b. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(x + 1) \leq x$
 - c. En déduire la position relative de (C) et de sa tangente en 0.
5. Tracer la courbe (C)
On prendra $\alpha = 1,87$ et $f(\alpha) = 0,84$

PARTIE C

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

1. Soit r un réel strictement positif fixé. Montrer que $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan. En déduire la parité de F
2. Déterminer les variations de F
3.
 - a. Montrer que $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$ en utilisant la position de (C) par rapport à sa tangente en 0
 - b. Montrer que pour tout réel t supérieur ou égal à 1, $\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$
 - c. Soit x un réel, $x \geq 1$, calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt$
En déduire les limites de $F(x)$ et de $\frac{F(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et interpréter graphiquement ces résultats
4. Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe représentative de F en prenant 0,4 pour valeur approchée de $F(1)$ dans un autre repère d'unité 1 cm

PROBLÈME 48

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$

1. Étudier les variations de g
2. Calculer $g(1)$ et étudier le signe de $g(x)$ pour tout réel x élément de $]0; +\infty[$

PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

On appelle $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de f et $(\mathcal{C}_0)$ la représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$
2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}]$. Que peut-on déduire pour $(\mathcal{C})$?
5. Préciser les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_0)$
6. Dessiner $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_0)$

PARTIE C

Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ pour tout entier $n > 0$

1. Soit $J = \int_1^2 f(x) dx$
 - a. Interpréter graphiquement J
 - b. Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$ à l'aide d'une intégration par parties
 - c. En déduire J
2. Soit k un entier naturel tel que : $0 \leq k \leq n - 1$
 En utilisant les variations de f sur $[1; +\infty[$, montrer que :

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$
3. En déduire que : $U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$
4. Montrer que $J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$
 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

PROBLÈME 49

PARTIE A

On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = (x + 1)e^{-x}, f_2(x) = -xe^{-x}, f_3(x) = (x - 1)e^{-x}$$

On appelle $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_3)$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan d'unité graphique 2cm

1.
 - a. Calculer la dérivée f_1' de f_1 et étudier son signe.
En déduire le sens de variations de f_1
 - b. Déterminer les limites de f_1 en $+\infty$, en $-\infty$
 - c. Dresser le tableau de variation de f_1
2. Etudier les variations de f_2
3.
 - a. Calculer la dérivée f_3' de f_3 et étudier son signe.
En déduire le sens de variations de f_3
 - b. Déterminer les limites de f_3 en $+\infty$, en $-\infty$
 - c. Dresser le tableau de variation de f_3
4. Étudier deux à deux les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$
5. Tracer $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ sur le même graphique

PARTIE B

Soit λ un réel strictement supérieur à -1 .

1. Montrer que f_1 est solution de l'équation différentielle : $y' + y = e^{-x}$
En déduire une primitive F_1 de f_1 sur $\mathbb{R}$
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan limité par $(\mathcal{C}_1)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = \lambda$.
En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$
3. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'aire $\mathcal{B}(\lambda)$ en cm^2 du domaine plan limité par les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et $x = \lambda$.
En déduire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(\lambda)$

PARTIE C

Pour n entier naturel non nul, on appelle M_n le point de $(\mathcal{C}_1)$ d'abscisse $n \ln 2$ et P_n son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses

On pose $f(x) = f_1(x) - f_3(x)$ pour tout x réel.

1. Calculer, en unités d'aire, l'aire U_n du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_3)$, la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et les segments $[P_n M_n]$ et $[P_{n+1} M_{n+1}]$
2. Calculer, $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ en fonction de n
En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite

PROBLÈME 50

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} \sin x$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est de 2 cm sur l'axe des abscisses et de 10 cm sur l'axe des ordonnées

PARTIE A

Dans cette partie on cherche à représenter f

1.

- a. Calculer f' et vérifier que : $f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
- b. Résoudre sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'inéquation : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$

En déduire le signe de f' sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

- c. Dresser, sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, le tableau de variations de f . Préciser les tangentes à $(\mathcal{C})$ aux deux extrémités de l'intervalle.
2. On note $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ les représentations graphiques, dans le repère choisi, des deux fonctions :
- $$x \mapsto e^{-x} \text{ et } x \mapsto -e^{-x}$$
- a. Donner les abscisses sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ des points où $(\mathcal{C})$ rencontre $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$
 - b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents, les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_1)$ d'une part, $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_2)$ d'autres parts, ont même tangente.
 - c. Représenter sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ les courbes $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$
3. Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(x) = e^{-2\pi} f(x - 2\pi)$ et on note $(\mathcal{C}')$ sa courbe dans le repère choisi. Que peut-on dire de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$?

PARTIE B

1.

- a. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$
 En déduire que $f(x) = -\frac{1}{2}(2f'(x) + f''(x))$
- b. Donner alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ en fonction de f et f'
- c. Calculer l'intégrale $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

2. On pose $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$ où k est un entier positif ou nul

Soit $S_n = B_0 + B_1 + \dots + B_n$.

- a. Exprimer S_n à l'aide de la fonction F
- b. En déduire que la suite (S_n) admet une limite que l'on précisera.

3.

- a. Donner, sans calculer l'intégrale, le signe de B_k suivant la parité de l'entier k .
- b. Calculer B_0 puis B_k pour k entier positif.
 Vérifier que $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$
- c. Calculer $T_n = |B_0| + |B_1| + \dots + |B_n|$
 Montrer que T_n admet une limite lorsque n tend vers l'infini. Préciser cette limite.
- d. On pose $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$
 Vérifier que $\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$

PROBLÈME 1**PARTIE A**

1. $D_f = \mathbb{R}$

2.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

(Γ) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

3.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+1} + x$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$$

$$\text{Or } |x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) > 0$$

En conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$

$$\begin{aligned} f(x) + 2x &= \sqrt{x^2+1} + x \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) + 2x) > 0$$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 0.$

Alors (Γ) admet une asymptote oblique d'équation $y = -2x$ au voisinage de $-\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) + 2x) > 0.$$

Alors (Γ) est au dessus de son asymptote oblique.

4.

a.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{-(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > 0.$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-f(x)$.

$$\text{Par conséquent : } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f est strictement décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$+\infty$	0

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur cet ensemble ; de plus f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I =]0; +\infty[$

Soit $y \in I$,

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x = y$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = y + x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = (y + x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = y^2 + 2xy + x^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - y^2 = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-y^2}{2y} = u^{-1}(y)$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}$$

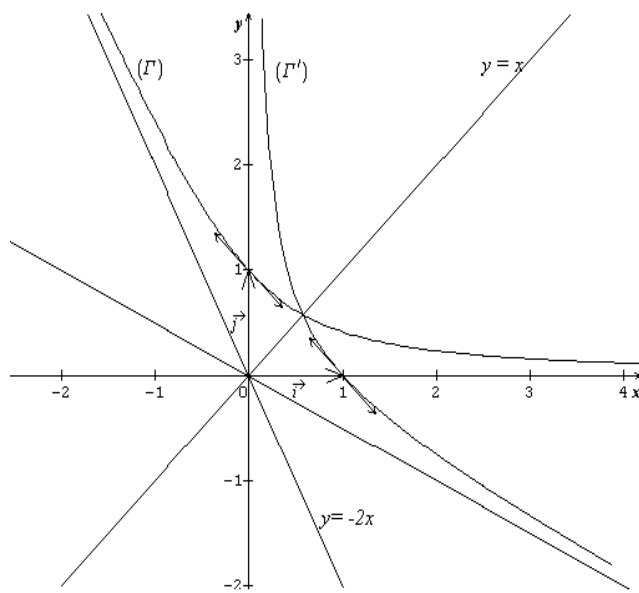
5. (T): $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$$f'(0) = 1 \text{ et } f(0) = 1$$

$$(T): y = x + 1$$

6. Voir graphique

7. Pour la construction de (Γ') on remarquera que (Γ') et (Γ) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



PARTIE B

$$\begin{aligned} 1. f(x) = x &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

On conclut donc que :

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$

$$\begin{aligned} 2. f \text{ étant décroissante,} \\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], f\left(\frac{3}{4}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4} \\ (\text{Car } \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0,61 \leq \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$$

$$f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \frac{1}{4} \leq x^2 \leq \frac{9}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq x^2 + 1 \leq \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{2} \leq \sqrt{x^2 + 1} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$(\text{Car } \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2\sqrt{5}} \leq f'(x) \leq -\frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq |f'(x)| \leq \frac{3}{2\sqrt{5}} \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], |f'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

3.

a. Par définition, $U_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ supposons que } U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

$$\text{et montrons que } U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

En effet :

$$U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow f(U_n) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

Car d'après 2.a,

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{Or } f(U_n) = U_{n+1}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] \text{ si } U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$$

b. $\frac{\sqrt{3}}{3} \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], U_n \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ et

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right], |f'(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$\left| f(U_n) - f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| U_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

$$\text{Or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et } f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N},$

$$\left| U_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| U_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

- c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$$n = 0 \Rightarrow \left| U_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

$$n = 1 \Rightarrow \left| U_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| U_1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

$$n = 3 \Rightarrow \left| U_3 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| U_2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow \left| U_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{5}} \left| U_{n-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$\left| U_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n \left| U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

$$\left| U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \simeq 0,07 \leq 1$$

$$\Rightarrow \left| U_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n \left| U_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n \times 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| U_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n = 0$ car $0 < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

On en déduit que la suite (U_n)

converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\sqrt{3}}{3}$

PROBLEME 2

$$\begin{cases} f(x) = x \ln x - x + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

PARTIE A

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x - x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 1) = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en 0
Interprétation graphique

Au point $(0; 1)$ la courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

2. $f'(x) = \ln x$

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, f$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variations de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	1	0	$+\infty$

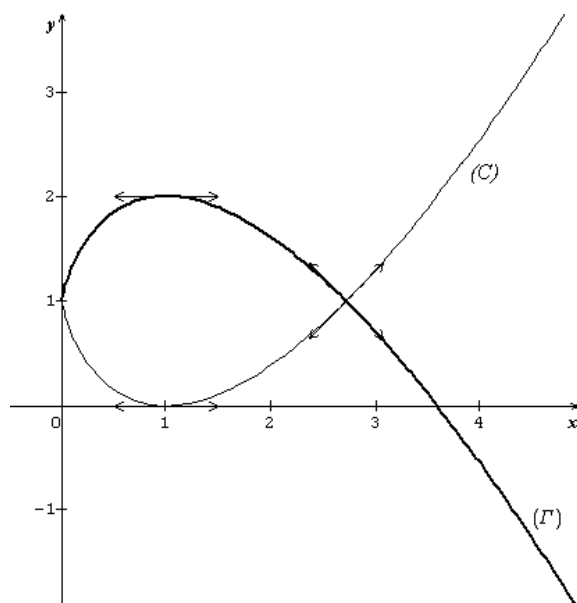
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

3. $(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$

$$(T): y = x + 1 - e$$

4. Tracer de (T) et (C) **PARTIE B**

$$g(x) = 2 - f(x)$$

- $f(x) - g(x) = 2x(\ln x - 1)$
 $\forall x \in [0; +\infty[, 2x \geq 0$ alors le signe dépend de celui de $(\ln x - 1)$
 $\ln x - 1 > 0 \Rightarrow x > e$
 $\forall x \in [0; e[, f(x) - g(x) \leq 0$
 $\forall x \in [e; +\infty[, f(x) - g(x) \geq 0$
On en déduit que :

Sur $[0; e[, (C)$ est en dessous de (Γ)
 Sur $[e; +\infty[, (C)$ est au dessus de (Γ)

- $g(x) = -f(x) + 2$
Soit (C') la courbe symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses ; la courbe (Γ) est l'image de (C') par la translation du vecteur $2\vec{j}$ (voir la figure)
- $\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_{\lambda}^e (g(x) - f(x)) dx$
 $\int_{\lambda}^e (g(x) - f(x)) dx$
 $= \int_{\lambda}^e 2x(1 - \ln x) dx$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = 1 - \ln x \\ v'(x) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{x} \\ v(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^e (g(x) - f(x)) dx &= [x^{2(1-\ln x)}]_{\lambda}^e + \int_{\lambda}^e x dx \\ &= \left[\frac{3}{2} x^2 - x^2 \ln x \right]_{\lambda}^e \end{aligned}$$

$$\int_{\lambda}^e (g(x) - f(x)) dx = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \lambda^2 + \lambda^2 \ln \lambda$$

$$ua = 4cm^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = (2e^2 - 6\lambda^2 + 4\lambda^2 \ln \lambda) cm^2$$

$$4. \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = 2e^2 \text{ car } \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 \ln \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{A} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = 2e^2$$

Interprétation graphique

$\mathcal{A}$ représente l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = e$

PARTIE C

$$1. g'(x) = -f'(x)$$

D'après PARTIE A.2

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, g$ est croissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est décroissante

Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

Sur $[0; 1], g > 0$

(Car $\forall x \in [0; 1], g(x) \in [1; 2]$)

Sur $]1; +\infty[, g$ est continue car

dérivable et est strictement

décroissante. Alors g réalise une

bijection de $]1; +\infty[$ sur $] -\infty; 2[$ et

$0 \in] -\infty; 2[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha \in]1; +\infty[$

2.

$$a. \begin{cases} g(3) = 0,70 > 0 \\ g(4) = -0,54 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } g(3) \times g(4) < 0$$

$$\text{Alors } \alpha \in I = [3; 4]$$

b. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -x \ln x + x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{1+\frac{1}{x}}$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1+\frac{1}{x}} = x$$

Déduction

On sait que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[3; 4]$.

On en déduit que α est l'unique

solution de l'équation $e^{1+\frac{1}{x}} = x$ sur $[3; 4]$

3. $\Phi(x) = e^{1+\frac{1}{x}}$; $D_\Phi = I = [3; 4]$

a. $\Phi'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}} < 0 \forall x \in [3; 4]$

On en déduit que Φ est décroissante

x	3	4
$\Phi'(x)$	—	
$\Phi(x)$	3,79	3,49

b. D'après le tableau de variation de Φ , on a :

$$\forall x \in [3; 4], 3,49 \leq \Phi(x) \leq 3,79$$

$$\text{Or } [3,49; 3,79] \subset [3; 4]$$

$$\text{D'où } \forall x \in [3; 4], \Phi(x) \in [3; 4]$$

c. $\forall x \in [3; 4], 9 \leq x^2 \leq 16$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{9} \text{ et } 3 \leq \Phi(x) \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16} \leq \frac{1}{x^2} e^{1+\frac{1}{x}} \leq \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{4}{9} \leq \Phi'(x) \leq -\frac{3}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16} \leq |\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

On conclut que :

$$\forall x \in [3; 4], |\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

4. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \Phi(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 3 \in [3; 4]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [3; 4]$

et montrons que $U_{n+1} \in [3; 4]$

$$U_n \in [3; 4] \Rightarrow \Phi(U_n) \in [3; 4]$$

Car d'après 3b),

$$\forall x \in [3; 4], \Phi(x) \in [3; 4]$$

Or par définition, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [3; 4]$ si $U_n \in [3; 4]$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$$

b. $\alpha \in [3; 4], U_n \in [3; 4]$ et

$$\forall x \in [3; 4], |\Phi'(x)| \leq \frac{4}{9}$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$|\Phi(U_n) - \Phi(\alpha)| \leq \frac{4}{9} |U_n - \alpha|$$

Or $\Phi(U_n) = U_{n+1}$ et $\Phi(\alpha) = \alpha$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_n - \alpha|$$

Déduction

En partant de l'inégalité précédente, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_2 - \alpha|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{4}{9} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités. On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$$

$$3 \leq \alpha \leq 4 \Rightarrow -1 \leq 3 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n \times 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{4}{9} < 1$

On en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

d. $\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$

$$\text{Or } \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow -n \ln \frac{9}{4} \leq -2 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10}{\ln 3 - \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 5,67$$

$$\text{Donc } |U_n - \alpha| \leq 10^{-2}, \forall n \geq 6$$

Le plus petit entier cherché est 6

PROBLEME 3

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}; D_f = [0; +\infty[$$

PARTIE A

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \times e^{-x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

Conclusion

La courbe (C) admet à l'origine O du repère une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

$$2. \forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} - \sqrt{x} \cdot e^{-x} \\ \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot e^{-x}}{2x} - \frac{2x\sqrt{x} \cdot e^{-x}}{2x} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

On conclut donc que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)$$

$\forall x \in]0; +\infty[, 2x > 0$ et $f(x) > 0$

Le signe dépend de celui de $1 - 2x$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; \frac{1}{2}[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; \frac{1}{2}[, f$ est croissante

Sur $]\frac{1}{2}; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

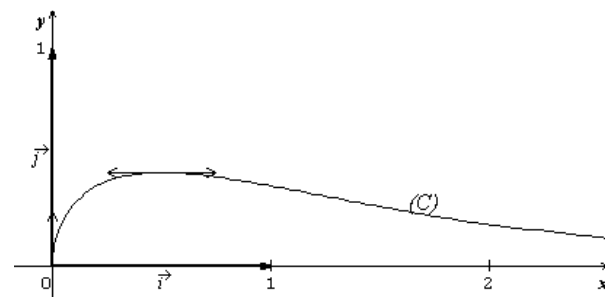
x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	0

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$$

On conclut donc que : La courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

4. Tracer de (C) **5.**

$$a. \mathcal{V}(\lambda) = uv \times \int_0^\lambda f^2(x) dx \\ \int_0^\lambda f^2(x) dx = \int_0^\lambda x e^{-2x} dx \\ \text{Intégration par parties} \\ \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

$$\int_0^\lambda f^2(x) dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^\lambda +$$

$$\int_0^\lambda \frac{1}{2} e^{-2x} dx$$

$$\int_0^\lambda f^2(x) dx = \left[\left(-\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) e^{-2x} \right]_0^\lambda$$

$$\int_0^\lambda f^2(x) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (2\lambda + 1) e^{-2\lambda}$$

$$uv = 64 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{V}(\lambda) = 16 [1 - (2\lambda + 1) e^{-2\lambda}] \text{ cm}^3$$

$$b. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(\lambda) = 16$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2\lambda e^{-2\lambda} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$$

PARTIE B

$$1. g(x) = \ln x + 2x$$

$$a. \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot e^{-x} = x$$

$$\Leftrightarrow x \cdot e^{-2x} = x^2$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x} = x$$

$$\Leftrightarrow -2x = \ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x + 2x = 0$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$$

b. $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0 \forall x \in]0; +\infty[$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[$, g est croissante

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Déduction

Sur $]0; +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante

Alors g réalise une bijection de

$]0; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$ et

$0 \in]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$

c. $\begin{cases} g(0,4) = -0,12 < 0 \\ g(0,5) = 0,30 > 0 \end{cases}$

On a : $g(0,4) \times g(0,5) < 0$

Alors $\alpha \in [0,4; 0,5]$

2. α étant aussi solution de l'équation $f(x) = x$, alors α est l'abscisse du point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $y = x$

3.

a. Sur $[0,4; 0,5]$, f est croissante

Par conséquent :

$$\forall x \in [0,4; 0,5],$$

$$f(0,4) \leq f(x) \leq f(0,5)$$

$$\Leftrightarrow 0,42 \leq f(x) \leq 0,43$$

$$\text{Or } [0,42; 0,43] \subset [0,4; 0,5]$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0,4; 0,5], f(x) \in [0,4; 0,5]$$

b. $f'(x) = \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x)$

$$\forall x \in [0,4; 0,5], \frac{4}{5} \leq 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - 2x \leq \frac{1}{5} \text{ et } 1 \leq \frac{1}{2x} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1-2x}{2x} \leq \frac{1}{4} \text{ et } 0,4 \leq f(x) \leq 0,5$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{1-2x}{2x}\right) \times f(x) \leq \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{8}$$

Donc $\forall x \in [0,4; 0,5], |f'(x)| \leq \frac{1}{8}$

4. $\begin{cases} U_0 = 0,4 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 0,4 \in [0,4; 0,5]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que

$U_n \in [0,4; 0,5]$ et montrons que

$$U_{n+1} \in [0,4; 0,5]$$

$$U_n \in [0,4; 0,5] \Rightarrow f(U_n) \in [0,4; 0,5]$$

Car d'après 3a),

$$\forall x \in [0,4; 0,5], f(x) \in [0,4; 0,5]$$

Or par définition, $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [0,4; 0,5]$ si

$$U_n \in [0,4; 0,5]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0,4; 0,5]$$

b. $\alpha \in [0,4; 0,5]; U_n \in [0,4; 0,5]$ et

$$\forall x \in [0,4; 0,5], |f'(x)| \leq \frac{1}{8}$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a :

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{8} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et } f(\alpha) = \alpha$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_n - \alpha|$$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_2 - \alpha|$$

:

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{8} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités. On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |0,4 - \alpha|$$

$$0,4 \leq \alpha \leq 0,5 \Rightarrow -0,1 \leq 0,4 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq 0,1$$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{8}\right)^n \times 0,1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq 0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{8} < 1$

On en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

5. $0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \leq 10^{-5}$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-5}$$

$$\text{Or } 0,1 \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \leq 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow -3n \ln 2 \leq -4 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{4 \ln 10}{3 \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 4,42$$

$$\text{Donc } |U_n - \alpha| \leq 10^{-5}, \forall n \geq 5$$

L'entier cherché est $n_0 = 5$

PARTIE C

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt; D_F = [0; +\infty[$$

1. F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Par conséquent :

$$F'(x) = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$$

Déduction

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \geq 0 \Leftrightarrow F'(x) \geq 0$$

On en déduit que F est croissante

2.

a. $\forall t \geq 0, \left(\sqrt{t} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow t - \sqrt{t} + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } \forall t \geq 0, \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$$

b. $\forall t \geq 0, \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} \cdot e^{-t} \leq \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt$$

$$\text{Donc } \forall t \geq 0,$$

$$F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt$$

c. Intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = t + \frac{1}{4} \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

$$\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt$$

$$= \left[-\left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} \right]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt$$

$$\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt = \left[-\left(t + \frac{5}{4}\right) e^{-t} \right]_0^x$$

$$\int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt = \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x}$$

d. $\forall x \geq 0, x + \frac{5}{4} \geq 0$ et $e^{-x} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4} - \left(x + \frac{5}{4}\right) e^{-x} \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow F(x) \leq \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}\right) e^{-t} dt \leq \frac{5}{4}$$

$$\text{Donc } \forall x \geq 0, F(x) \leq \frac{5}{4}$$

PROBLEME 4**PARTIE A**

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \\ D_f = [0; +\infty[\end{cases}$$

1.

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x+2) - x \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+2) - \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Alors f n'est pas dérivable en 0

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$

Posons $X = \frac{2}{x}$ ($x > 0$)

Si $x \rightarrow +\infty$, alors $X \rightarrow 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} \ln(1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \frac{\ln(1+X)}{X} = 2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

2.

a. $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \times \frac{-2}{x^2} \times \frac{x}{x+2}$$

$$\text{On a donc } f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$$

D'autres parts :

$$f''(x) = \frac{-2}{x(x+2)} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$$

b. $\forall x \in]0; +\infty[, f''(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, f'$ est strictement décroissante

Tableau de variation de f'

x	0	$+\infty$
$f''(x)$		-
$f'(x)$		$\searrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$

Déduction

D'après le tableau de variation de f' ,
 $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

c. Tableau de variation de f

Sur $]0; +\infty[, f$ est croissante

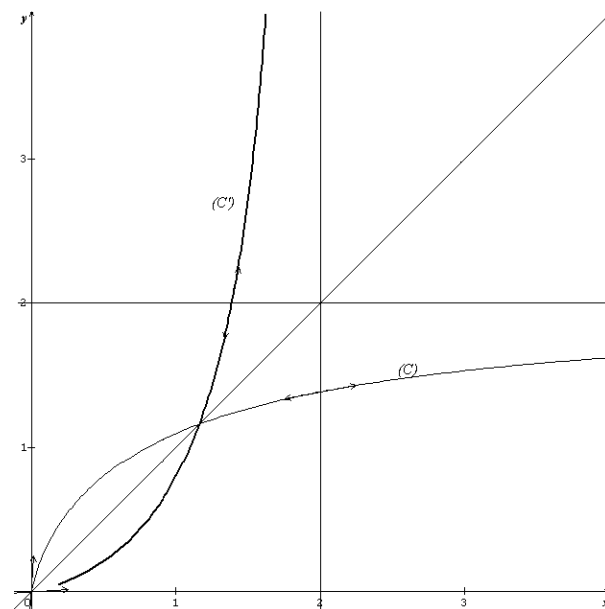
x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$-\infty$ $\nearrow$ 2

3. A l'origine O du repère la courbe $(\mathcal{C})$ admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut

Au point A d'abscisse 2,

$$(T): y = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)x + 1$$

Au voisinage de $+\infty$, $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$

**4.**

a. $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x$

$$\Leftrightarrow x \left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 1 \right) = 0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = e$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{e-1}$$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = \frac{2}{e-1}$$

- b. La courbe ($\mathcal{C}'$) de la réciproque f^{-1} de f et la courbe ($\mathcal{C}$) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (Voir figure)

PARTIE B

1. $\mathcal{A}(\alpha) = \int_{\alpha}^2 f(x) dx = \int_{\alpha}^2 x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) dx$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{-2}{x(x+2)} \\ v'(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \right]_{\alpha}^2 + \int_{\alpha}^2 \frac{x}{x+2} dx$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x - 2 \ln(x+2) \right]_{\alpha}^2$$

$$\text{Car } \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$$

On a donc :

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2 - 2 \ln 2 - \frac{1}{2}\alpha^2 \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) - \alpha + 2 \ln(\alpha+2)$$

2. $\begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^2 \ln\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right) = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha = 0 \end{cases}$

$$\text{Alors } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = 2$$

Interprétation graphique

$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = 2$ est l'aire en unité d'aire du domaine délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$

PARTIE C

$$u(x) = \frac{2x}{x+2}; D_u =]0; +\infty[$$

$$(P): g(x) - xg'(x) = u(x)$$

1. $f(x) - xf'(x)$

$$= x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \left(\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} \right)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - xf'(x)$$

$$= x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{2x}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - xf'(x) = \frac{2x}{x+2} = u(x)$$

On en déduit que :

f possède la propriété (P)

2. $G(x) = \frac{g(x)}{x}; D_g = D_G =]0; +\infty[$

Supposons que g possède la propriété (P)

$$\text{On a : } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$g(x) - xg'(x) = u(x)$$

$$\Rightarrow xG(x) - x(xG(x))' = u(x)$$

$$\Rightarrow xG(x) - xG(x) - x^2G'(x) = u(x)$$

$$\Rightarrow G'(x) = -\frac{u(x)}{x^2}$$

$$\Rightarrow G'(x) = -\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

Alors $G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ si g possède la propriété (P)

Réciproquement :

Supposons que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

$$\text{On a : } \left(\frac{g(x)}{x}\right)' = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x^2}g(x) + \frac{1}{x}g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g(x) - xg'(x) = -\frac{x^2}{x+2} + x$$

$$\Rightarrow g(x) - xg'(x) = \frac{2x}{x+2} = u(x)$$

Alors g possède la propriété (P)

$$\text{si } G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

On vient ainsi de montrer que : g possède la propriété (P) si et seulement si : pour tout x appartenant à $]0; +\infty[$,

$$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

3. Déduction

$$\forall x \in]0; +\infty[,$$

$$G'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \ln(x+2) - \ln x + K;$$

$$K \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow G(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + K; K \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or } g(x) = xG(x)$$

On en déduit que :

$$g(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + Kx; K \in \mathbb{R}$$

Les éléments de (E) sont les fonctions G définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + Kx; K \in \mathbb{R}$$

PROBLEME 5

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}; D_f = \mathbb{R} \text{ et}$$

$$U_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

PARTIE A**Étude de la fonction f_n**

1. On suppose $n = 0$

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

b. $f_0'(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f_0 est strictement décroissante

Tableau de variation de f_0

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	—	
$f_0(x)$	1	0

c. $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$f_0(2 \times 0 - x) + f_0(x)$$

$$= f_0(-x) + f_0(x)$$

$$= \frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x}{1 + e^x} + \frac{1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$$

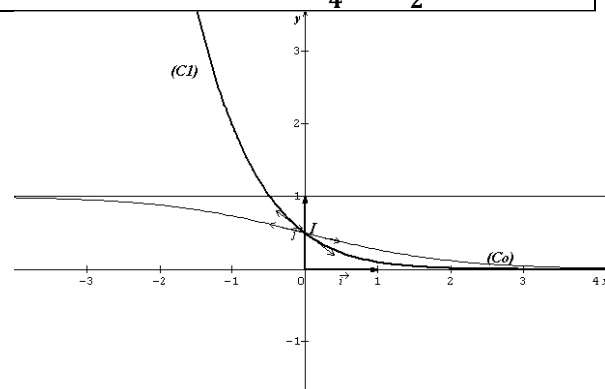
$$f_0(2 \times 0 - x) + f_0(x) = 2 \times \frac{1}{2}$$

Alors $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C_0)

d. Traçons (C_0)

Tangente en $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$(T): y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$



2. On suppose que $n \geq 1$

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + e^x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-nx} = +\infty \end{cases}$$

b. Les fonctions $x \mapsto e^{-nx}$ et

$x \mapsto e^x + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 \neq 0$ alors

$f_n: x \mapsto \frac{e^{-nx}}{e^x + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{-ne^{-nx}(e^x + 1) - e^{-(n-1)x}}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{-nx}(ne^x + n + e^x)}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

On conclut donc que : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = \frac{-e^{-nx}(n + (n+1)e^x)}{(e^x + 1)^2}$$

c. $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-nx} > 0; (e^x + 1)^2 > 0$ et

$\forall n \geq 1, (n + (n+1)e^x) > 0$ et par

suite $\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f_n est strictement décroissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_n'(x)$	—	
$f_n(x)$	$+\infty$	0

d. $f_n(0) = \frac{1}{2}$

Alors le point $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les courbes (C_n)

e. Traçons (C_1) dans le même repère que (C_0)

Tangente en $I\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$(T): y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

3. Interprétation graphique

U_n est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_n) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$$U_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$$

$$U_0 = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1$$

$$\text{Donc on a : } U_0 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

PARTIE B

Étude de la suite (U_n)

1. Étude d'une suite auxiliaire (V_n)

Pour tout n , on pose $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$

a. $V_n = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1$

$$V_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}e^{-n}$$

b. $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 \end{cases}$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

$$nV_n = 1 - e^{-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (nV_n) = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$$

2. Comparaison de (U_n) à (V_n)

a. $\forall x \in [0; 1], 1 \leq e^x \leq e$

$$\Leftrightarrow 2 \leq e^x + 1 \leq e + 1 \text{ et}$$

$$e^x + 1 \leq 2e^x \leq e^x + e$$

On conclut donc que :

$$\forall x \in [0; 1], 2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$$

b. Dédution

$$2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-(n+1)x}}{2} \leq \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} \leq \frac{e^{-nx}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(n+1)x} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-nx} dx$$

On en déduit que :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$$

c. $\forall n \geq 1, \frac{1}{2}V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2}V_n$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_{n+1} = 0$$

$$\text{D'où } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq 0$$

On conclut donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

D'autres parts :

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{2}(nV_{n+1}) \leq nU_n \leq \frac{1}{2}(nV_n)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (nV_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (nV_{n+1}) = 1$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n) \leq \frac{1}{2}$$

On conclut donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (nU_n) = \frac{1}{2}$$

3. Étude d'une suite associée à (U_n)

On pose : $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$ et

$$t_n = \sum_{p=1}^n V_p$$

a. $\forall p \geq 1, \frac{1}{p} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$

Par conséquent :

$$0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \sum_{p=1}^n e^{-p}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-1} \times \left(\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}\right)$$

$$\text{Or } \forall n \geq 1, 1 - e^{-n} \leq 1$$

$$\text{D'où } 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} \times 1$$

On a donc :

$$0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$$

b. $\forall t \in [p; p+1], \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\frac{1}{p+1}(p+1-p) \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\frac{1}{p}(p+1-p)$$

$$\text{Alors on a : } \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{p}$$

Par la suite on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq [\ln t]_p^{p+1} \leq \frac{1}{p}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln p \leq \frac{1}{p}$$

c. Dédution

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^n \ln(p+1) - \ln p \leq$$

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

Ou encore

$$\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \ln n \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

$$\text{Or } \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} = -1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

On en déduit que :

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1 \text{ et}$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

D'où on a :

$$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$$

$$\text{d. } t_n = \sum_{p=1}^n V_p = \sum_{p=1}^n \int_0^1 e^{-px} dx$$

$$t_n = \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} \right)$$

$$t_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p}$$

$$\text{Or } 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1} \text{ et}$$

$$\ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \leq \ln n + 1$$

D'où on a :

$$\ln(n+1) - \frac{1}{e-1} \leq t_n \leq \ln n + 1$$

En passant à la limite, on a :

$$+\infty \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n \leq +\infty$$

$$\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

Par ailleurs : $\forall n > 1$,

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{1}{e-1} \times \frac{1}{\ln n} \leq \frac{t_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}$$

En passant à la limite, on a :

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{\ln n} \leq 1$$

Car

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln n} \times \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{\ln n} = 1$$

$$\text{e. } \forall p \geq 1, \frac{1}{2} V_{p+1} \leq U_p \leq \frac{1}{2} V_p$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (t_{n+1} - V_1) \leq S_n \leq \frac{1}{2} t_n$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$$

PROBLEME 6**PARTIE A**

$$g(x) = (2x+1)e^{-2x} + 1; D_g = \mathbb{R}$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

$$2. g'(x) = -4xe^{-2x}$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[$, g est croissante

Sur $]0; +\infty[$, g est décroissante

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	2	1

3. Sur $]-\infty; 0[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante. Alors g réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]-\infty; 2[$ et $0 \in]-\infty; 2[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution

$$\alpha \in]-\infty; 0[$$

Sur $[0; +\infty[$, $g(x) \in]1; 2]$ donc on a $g(x) \neq 0$

Montrons que $-1 < \alpha < 0$

$$\begin{cases} g(-1) = 1 - e^2 < 0 \\ g(0) = 2 > 0 \end{cases};$$

$$\text{On a : } g(-1) \times g(0) < 0$$

Alors $-1 < \alpha < 0$

4. Signe de $g(x)$

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = (1+x)e^{-2x} + 1 - x; D_f = \mathbb{R}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}(1+x+e^{2x}-xe^{2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 1+x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty \end{cases}$$

$$2. (\Delta): y = -x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)e^{-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-2x} = 0 \end{cases}$$

Alors la droite $(\Delta): y = -x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$

Position de (C) par rapport à (Δ)

$$\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) - y < 0$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; -1[, (C)$ est en dessous de (Δ)

Sur $]-1; +\infty[, (C)$ est au dessus de (Δ)

$$3. f'(x) = e^{-2x} - 2(1+x)e^{-2x} - 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -[(2x+1)e^{-2x} + 1]$$

$$\text{Don on a : } f'(x) = -g(x)$$

Déduction

D'après PARTIE A on a :

$$\forall x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; \alpha[, f$ est croissante

Sur $]\alpha; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$

4. Sur $[0; +\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement décroissante. Alors f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $]-\infty; 2]$ et $0 \in]-\infty; 2]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une solution et une seule β .

Justification de l'encadrement

$$\begin{cases} f(1) = 0,27 > 0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = -0,37 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$$

$$\text{Alors } 1 \leq \beta \leq \frac{3}{2}$$

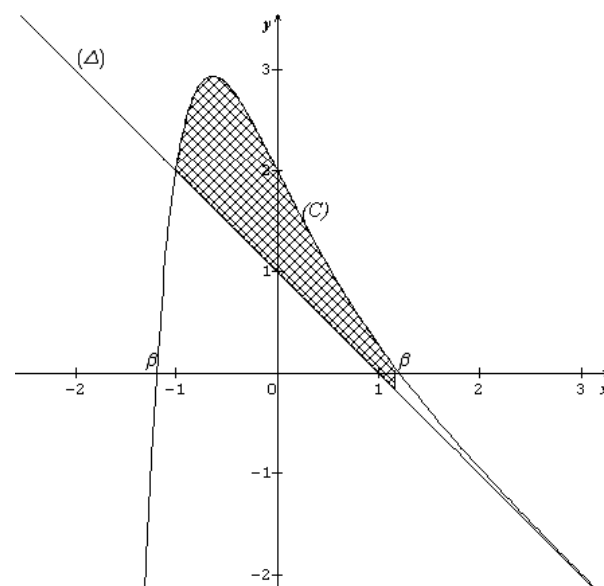
5. $f(-\beta) = (1-\beta)e^{2\beta} + 1 + \beta$
 $\Leftrightarrow f(-\beta) = e^{2\beta}[1-\beta + (1+\beta)e^{-2\beta}]$
 $\Leftrightarrow f(-\beta) = e^{2\beta}f(\beta)$
 Or $f(\beta) = 0$

$$\text{D'où on a : } f(-\beta) = 0$$

Déduction

On en déduit que $-\beta$ est solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$

6. Traçons (Δ) et (C)



PARTIE C

$$t > -1$$

1. Voir figure

$$2. \mathcal{A}(t) = ua \times \int_{-1}^t (f(x) - y) dx$$

$$\int_{-1}^t (f(x) - y) dx = \int_{-1}^t (1 + x) e^{-2x} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = 1 + x \\ v'(x) = e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^t (f(x) - y) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} (1 + x) e^{-2x} \right]_{-1}^t + \int_{-1}^t \frac{1}{2} e^{-2x} dx$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} x - \frac{3}{4} \right) e^{-2x} \right]_{-1}^t$$

$$\int_{-1}^t (f(x) - y) dx = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} (2t + 3) e^{-2t}$$

$$ua = 4cm^2$$

$$\mathcal{A}(t) = [e^2 - (2t + 3)e^{-2t}] cm^2$$

$$3. \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} 2te^{-2t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(t) = e^2$$

PARTIE D

$$h(x) = (1 + x)e^{-2x} + 1;$$

$$D_h = I = \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$1. h(x) = x$$

$$\Leftrightarrow (1 + x)e^{-2x} + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow (1 + x)e^{-2x} + 1 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

Déduction

β étant l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $\left[1; \frac{3}{2} \right]$ donc β est aussi l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

$$2. h'(x) = -(2x + 1)e^{-2x}$$

$$\forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], h'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $\left[1; \frac{3}{2} \right]$, h est décroissante

x	1	$\frac{3}{2}$
$h'(x)$	—	
$h(x)$	1,27	1,12

Déduction

$$\forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], 1,12 \leq h(x) \leq 1,27$$

$$\text{Or } [1,12; 1,27] \subset \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$\text{D'où } \forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], h(x) \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$3. \forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], 2 \leq 2x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 3 \leq 2x + 1 \leq 4 \text{ et}$$

$$e^{-3} \leq e^{-2x} \leq e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{-3} \leq (2x + 1)e^{-2x} \leq 4e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -4e^{-2} \leq h'(x) \leq -3e^{-3}$$

$$\Leftrightarrow 3e^{-3} \leq |h'(x)| \leq 4e^{-2}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], |h'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$$

Déduction

$$\forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], |h'(x)| \leq \frac{4}{e^2}$$

D'après l'inégalité de la moyenne

On a :

$$\left| \int_{\beta}^x h'(t) dt \right| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$$

$$\Leftrightarrow |[h(t)]_{\beta}^x| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$$

$$\Leftrightarrow |h(x) - h(\beta)| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$$

$$\Leftrightarrow |h(x) - h(\beta)| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$$

Or $h(\beta) = \beta$ d'après PARTIE D1.

$$\text{D'où } \forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right],$$

$$|h(x) - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$$

$$4. U_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = h(U_n)$$

$$a. U_0 = 1 \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ supposons } U_n \in \left[1; \frac{3}{2} \right] \text{ et}$$

$$\text{montrons que } U_{n+1} \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$U_n \in \left[1; \frac{3}{2} \right] \Rightarrow h(U_n) \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$\text{Car } \forall x \in \left[1; \frac{3}{2} \right], h(x) \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = h(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in \left[1; \frac{3}{2} \right] \text{ si } U_n \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[1; \frac{3}{2} \right]$$

b. On sait que :

$$\forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right], |h(x) - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |x - \beta|$$

Prenons $x = U_n$ on a :

$$|h(U_n) - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_n - \beta|$$

Par définition $U_{n+1} = h(U_n)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_n - \beta|$$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_0 - \beta|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_1 - \beta|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_2 - \beta|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \beta| \leq \frac{4}{e^2} |U_{n-1} - \beta|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités. On obtient après simplification :

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{4}{e^2}\right)^n |U_0 - \beta|$$

$$|U_0 - \beta| = |1 - \beta|$$

$$1 \leq \beta \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 1 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{e^2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left[\left(\frac{2}{e}\right)^2\right]^n$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^{2n}$$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} = 0$ car $0 < \frac{2}{e} < 1$

On en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \beta$

e. On sait que :

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{2n} \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \left(\frac{2}{e}\right)^{2n} \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -2n(1 - \ln 2) \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{2(1 - \ln 2)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 11,25$$

Donc on a : $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3} \forall n \geq 12$

C'est à partir de $n = 12$ que l'on est sûr que U_n représente une valeur approchée de β à 10^{-3} près?

PROBLEME 7

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1+x^2}{3x^2-1}$$

PARTIE A

$$1. D_g = \left[0; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} g(x) = +\infty$$

$$g'(x) = -\frac{8x}{(3x^2-1)^2}$$

$$\forall x \in D_g, (3x^2-1)^2 > 0 \text{ et } -8x \leq 0$$

Par conséquent :

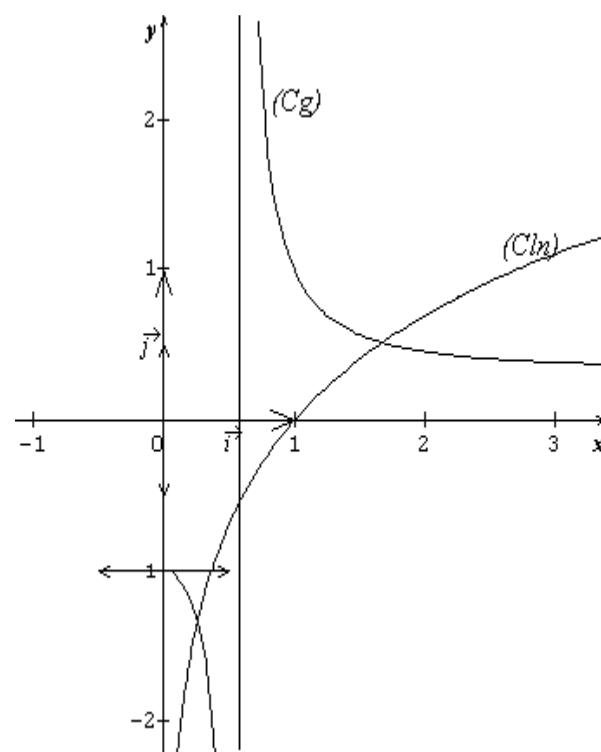
$$\forall x \in D_g, g'(x) \leq 0$$

On en déduit que :

Sur D_g , g est décroissante

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	—	—	—
$g(x)$	-1	$+\infty$	$\frac{1}{3}$

2. Tracer des courbes de g et de $\ln$



3. $h(x) = \ln x - g(x)$

$$D_h =]0; \frac{\sqrt{3}}{3} [\cup] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty [$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{8x}{(3x^2-1)^2} > 0 \quad \forall x \in D_h$$

On en déduit que :

Sur D_h , h est strictement croissante
Des limites des fonctions g et $\ln$, on déduit :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^-} h(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^+} h(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Tableau de variation de h

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$h'(x)$		+	+
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Sur chacun des intervalles $]0; \frac{\sqrt{3}}{3} [$ et $] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty [$, h est dérivable donc continue et est strictement croissante sur chacun de ces intervalles.

Alors h réalise une bijection de chacun de ces intervalles sur $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$.

Par conséquent l'équation

$h(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 \in]0; \frac{\sqrt{3}}{3} [\quad \text{et} \quad x_2 \in] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty [$$

$$\text{C'est-à-dire } 0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < x_2$$

$$\text{Montrons que } 0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$$

$$\begin{cases} h(1) = -1 < 0 \\ h(2) = \ln 2 - \frac{5}{11} > 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : }]1; 2[\subset] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty [\quad \text{et}$$

$$h(1) \times h(2) < 0, \text{ alors } 1 < x_2 < 2$$

Par conséquent :

$$0 < x_1 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < x_2 < 2$$

$$\text{Donc on a : } 0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$$

Déduction

Signe de $h(x)$

$$\forall x \in]0; x_1[, \quad h(x) < 0$$

$$\forall x \in]x_1; \frac{\sqrt{3}}{3}[, \quad h(x) > 0$$

$$\forall x \in] \frac{\sqrt{3}}{3}; x_2[, \quad h(x) < 0$$

$$\forall x \in]x_2; +\infty[, \quad h(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$$

1. $D_f =]0; +\infty [$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\ln x)(x^2+1)^2 - 4x^2(x^2+1) \ln x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{x^2+1+(1-3x^2) \ln x}{(x^2+1)^3} = \frac{(1-3x^2)\left(-\frac{x^2+1}{3x^2-1} + \ln x\right)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{(1-3x^2)h(x)}{(x^2+1)^3} \quad \text{si } x \neq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \times \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \times \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x^2+1)^2} = 1 \end{cases}$$

3. $\forall x \in D_f; (x^2+1)^3 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(1-3x^2)h(x)$

$$1-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'après PARTIE A, et la règle des signes, on a :

$$\forall x \in]0; x_1[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]x_1; x_2[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]x_2, +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que

Sur $]0; x_1[, f$ est décroissante

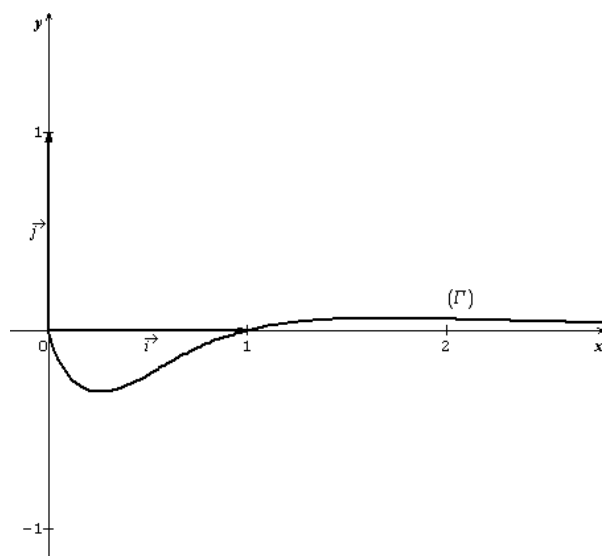
Sur $]x_1; x_2[, f$ est croissante

Sur $]x_2, +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	0 -	
$f(x)$	0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0

4. Allure de (Γ)



$$5. \forall x \in \mathbb{R}^*; \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)}$$

$$\text{Soit } \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)}$$

On en déduit que :

$x \mapsto \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)}$ sur $]0; +\infty[$

$$6. \alpha \in]0; 1[, J(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \left[\frac{-\ln x}{2(x^2+1)} \right]_{\alpha}^1 + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx \\ &= \left[\frac{-\ln x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \right]_{\alpha}^1 \\ &= -\frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln \alpha}{2(\alpha^2+1)} - \frac{1}{2} \left(\ln \alpha - \frac{1}{2} \ln(\alpha^2+1) \right) \end{aligned}$$

$$J(\alpha) = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{4} \ln(\alpha^2+1) - \frac{\alpha^2 \ln \alpha}{2(\alpha^2+1)}$$

$$7. \mathcal{A}(\alpha) = ua \times (-J(\alpha))$$

$$ua = 16 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = \left(4 \ln 2 - 4 \ln(\alpha^2+1) + \frac{8\alpha^2 \ln \alpha}{\alpha^2+1} \right) \text{ cm}^2$$

$$\text{Et on a : } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{A}(\alpha) = 4 \ln 2$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^2 = 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha^2 \ln \alpha = 0 \end{cases}$$

Cette limite est l'aire en cm^2 du domaine limité par (Γ) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

PROBLEME 8**PARTIE A**

$$f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x|$$

1. $D_f = \mathbb{R}^*$ et pour x élément de $\mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \frac{4x+1}{4x}$$

$$\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{4}[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}; 0[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur }]-\infty; -\frac{1}{4}[, f \text{ est croissante}$$

$$\text{Sur }]-\frac{1}{4}; 0[, f \text{ est décroissante}$$

$$\text{Sur }]0; +\infty[, f \text{ est croissante}$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{-17-\ln 4}{4}$		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 4 + \frac{1}{4} \ln(-x) \right)$$

Posons $X = -x$;

Si $x \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$ et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-X - 4 + \frac{1}{4} \ln X \right)$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} X \left(-1 + \frac{4}{X} - \frac{1}{4} \frac{\ln X}{X} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{4}{X} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} X = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - 4 + \frac{1}{4} \ln|x| \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \ln|x| = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{4} \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{cases}$$

2. $\forall x \in]-\infty; 0[; f(x) < 0$

Par ailleurs :

Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable donc continue et est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de

$]0; +\infty[$ sur $] -\infty ; +\infty[$ et

$0 \in] -\infty ; +\infty[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet, une solution unique α dans

$]0; +\infty[$

$$\begin{cases} f(3) = -1 + \frac{1}{4} \ln 3 < 0 \\ f(4) = \frac{1}{4} \ln 4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } f(3) \times f(4) < 0$$

$$\text{D'où } 3 < \alpha < 4$$

3. De tout ce qui précède, on déduit que :

$$\forall x \in]-\infty; 0[; f(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; \alpha[; f(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[; f(x) > 0$$

PARTIE B

$\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$h(x) = x + 1 - \frac{31}{16} x^2 - \frac{1}{8} x^2 \ln|x| \text{ et}$$

$$h(0) = 1$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

1. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln|x| = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$$

Alors la fonction h est continue en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{31}{16} x + \frac{1}{8} x \ln|x| .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = 0$$

Alors h est dérivable en 0 et

$$h'(0) = 1$$

2. $h'(x) = 1 - \frac{31}{8} x - \frac{1}{4} x \ln|x| - \frac{1}{8} x$

$$h'(x) = 1 - 4x - \frac{1}{4} x \ln|x|$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 4 - \frac{1}{4} \ln|x| \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Or } f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x} - 4 + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1}{x} \right| \\ &= \frac{1}{x} - 4 - \frac{1}{4} \ln|x| \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}^*, h'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. On sait que :

$$\frac{1}{x} \in]-\infty; 0[\Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$$

$$\frac{1}{x} \in]0; \alpha[\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{\alpha}; +\infty[$$

$$\frac{1}{x} \in]\alpha; +\infty[\Leftrightarrow x \in \left] 0; \frac{1}{\alpha} \right[$$

D'après PARTIE A3

$$\forall x \in]-\infty; 0[, x < 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$$\forall x \in \left] 0; \frac{1}{\alpha} \right[, x > 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$$\forall x \in \left] \frac{1}{\alpha}; +\infty \right[, x > 0 \text{ et } f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, h'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left] 0; \frac{1}{\alpha} \right[, h'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left] \frac{1}{\alpha}; +\infty \right[, h'(x) < 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur }]-\infty; \frac{1}{\alpha}], h \text{ est croissante}$$

$$\text{Sur } \left] \frac{1}{\alpha}; +\infty \right[, h \text{ est décroissante}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 \ln(-x)$$

$$\text{Posons } X = -x;$$

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty \text{ alors } X \rightarrow +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -X + 1 - \frac{31}{16}X^2 - \frac{1}{8}X^2 \ln X = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{31}{16} - \frac{1}{8} \ln x \right) = -\infty$$

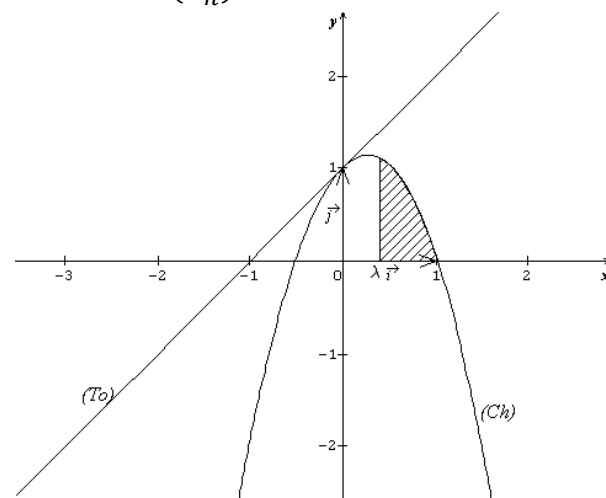
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

Tableau de variation de h

x	$-\infty$	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$-\infty$

4. $(T_0): y = x + 1$

Tracer de (C_h)



Unité : 2 cm

5.

a. $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 h(x) dx$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \left(x + 1 - \frac{31}{16}x^2 \right) dx -$$

$$\frac{1}{8} \int_{\lambda}^1 x^2 \ln|x| dx$$

$$\text{Calculons } \int_{\lambda}^1 x^2 \ln|x| dx$$

Intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x) = \ln|x| \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \text{ on a : } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$$

$$\int_{\lambda}^1 x^2 \ln|x| dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln|x| \right]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 \frac{1}{3}x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \ln|x| - \frac{1}{9}x^3 \right]_{\lambda}^1$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{91}{144}x^3 - \frac{1}{24}x^3 \ln|x| \right]_{\lambda}^1$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{125}{144} - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda + \frac{91}{144}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^3 \ln \lambda$$

b. $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda^3 \ln \lambda = 0$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{125}{144}$$

PARTIE C

1.

a. g est une fonction paire.

$$g'(x) = -\frac{1}{4x} < 0, \forall x > 0$$

Alors g est une fonction
décroissante sur $]0; +\infty[$

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

On en déduit que :

$$g([3; 4]) = [g(4); g(3)] = [3,65; 3,73]$$

$$\text{Or } [3,65; 3,73] \subset [3; 4]$$

D'où $g([3; 4]) \subset [3; 4]$ b. $g(x) = x$

$$\Leftrightarrow 4 - x - \frac{1}{4} \ln|x| = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

**α étant l'unique solution de
l'équation $f(x) = 0$, alors α est
aussi l'unique solution de
l'équation $g(x) = x$ car ces deux
équations sont équivalentes**

a. $U_0 = 3 \in [3; 4]$.

Supposons que $U_n \in [3; 4]$ pour tout
entier n puis montrons que

$$U_{n+1} \in [3; 4]$$

En effet :

$$U_n \in [3; 4] \Rightarrow g(U_n) \in [3; 4]$$

$$\text{Car } g([3; 4]) \subset [3; 4]$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = g(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in [3; 4] \text{ si } U_n \in [3; 4]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [3; 4]$$

C'est-à-dire $3 \leq U_n \leq 4$ b. $g'(x) = -\frac{1}{4x}$

$$3 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{16} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{12}$$

On déduit donc que

$$\forall x \in [3; 4], |g'(x)| \leq \frac{1}{12}$$

On sait que $\alpha \in [3; 4]$

$\forall x \in [3; 4]$, en appliquant l'inégalité
des accroissements finis à
l'intervalle de bornes $(\alpha; x)$ on a :

$$|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{12} |x - \alpha|.$$

$$\text{Or } g(\alpha) = \alpha$$

D'où $\forall x \in [3; 4]$,

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{12} |x - \alpha|$$

c. On sait que $3 \leq U_n \leq 4$.

Donc en faisant $x = U_n$ dans la
relation précédente on a :

$$|g(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{12} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or par définition : } U_{n+1} = g(U_n)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12} |U_n - \alpha|$$

Dédution :

En partant de l'inégalité précédente,
on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{12} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{12} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{12} |U_2 - \alpha|$$

:

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{12} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à
membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$$

$$3 \leq \alpha \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -\alpha \leq -3$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n \times 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{12}\right)^n$$

d. Comme g est strictementdécroissante sur $]0; +\infty[$,

$g(\alpha) = \alpha$ et $U_{n+1} = g(U_n)$, on a :

$$\begin{aligned}
 U_n < \alpha &\Rightarrow g(U_n) > \alpha \\
 &\Rightarrow U_{n+1} > \alpha \\
 &\Rightarrow U_n < \alpha < U_{n+1}
 \end{aligned}$$

D'autres parts :

$$\begin{aligned}
 U_n > \alpha &\Rightarrow g(U_n) < \alpha \\
 &\Rightarrow U_{n+1} < \alpha \\
 &\Rightarrow U_{n+1} < \alpha < U_n
 \end{aligned}$$

On conclut donc que :
 α est compris entre deux termes consécutifs de la suite (U_n)

Par ailleurs :

On pourra remarquer que

$U_0 < \alpha < U_1$ et montrer alors par récurrence que pour tout entier p :
 $U_{2p} < \alpha < U_{2p+1}$

- e. Il suffit de résoudre $\left(\frac{1}{12}\right)^n \leq \frac{1}{100}$ pour obtenir $|U_n - \alpha| \leq 10^{-2}$

On trouve que le plus petit entier n_0 à partir duquel cette inégalité est vraie est $n_0 = 2$.

D'où l'encadrement :

$$U_2 < \alpha < U_2 + 10^{-2}$$

Une calculatrice fournit $U_2 \approx 3,675$.

On peut donc prendre $\alpha \approx 3,68$ avec la précision 10^{-2} .

PROBLEME 9

PARTIE A

$$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x+1}; D_f = \mathbb{R}_+^*$$

1. $g(x) = 1 + x - x \ln x; D_g = \mathbb{R}_+^*$

a. $g'(x) = -\ln x$

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, g$ est croissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est décroissante

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x(1 - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	1	2	$-\infty$

- b. Sur $]0; 1[, g(x) \neq 0$ car

$$\forall x \in]0; 1[, g(x) \in]1; 2]$$

Sur $]1; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de

$]1; +\infty[$ sur $] -\infty; 2[$ et $0 \in] -\infty; 2[$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $x_0 \in]1; +\infty[$

$$\begin{cases} g(3,5) = 0,125 > 0 \\ g(3,6) = -0,008 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(3,5) = 0,125 > 0 \\ g(3,6) = -0,008 < 0 \end{cases}$$

On a : $g(3,5) \times g(3,6) < 0$

Alors $x_0 \in]3,5; 3,6[$

- c. Signe de $g(x)$

$$\forall x \in]0; x_0[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]x_0; +\infty[, g(x) < 0$$

2.

a. $f'(x) = \frac{x+1-x \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x(x+1)^2 > 0$$

Alors $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$.

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; x_0[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]x_0; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; x_0[, f$ est croissante

Sur $]x_0; +\infty[, f$ est décroissante

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{cases}$$

Tableau de variations de f

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_0)$	2

$$f(x_0) = 2 + \frac{\ln x_0}{x_0+1}$$

$$\text{Or } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{x_0+1}{x_0}$$

$$\text{D'où } f(x_0) = 2 + \frac{1}{x_0}$$

Encadrement de $f(x_0)$

$$3,5 \leq x_0 \leq 3,6$$

$$\Leftrightarrow 0,27 \leq \frac{1}{x_0} \leq 0,28$$

$$\Leftrightarrow 2,27 < f(x_0) < 2,28$$

b. (D) : $y = 2$

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x+1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, x+1 > 0$$

Alors le signe de $f(x) - y$ est celui de $\ln x$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$$

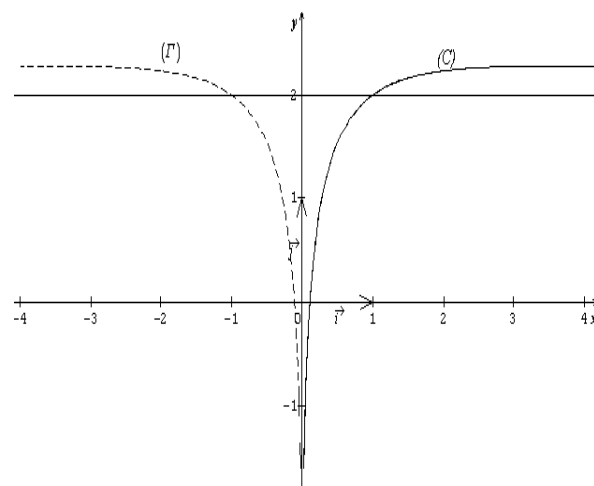
$$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, (C)$ est en dessous de (D)

Sur $]1; +\infty[, (C)$ est au dessus de (D)

Tracer de (C)



c. $\forall x \in \mathbb{R}^*, F(-x) = F(x)$

Alors F est une fonction paire

D'autre part :

$$\forall x > 0, F(x) = f(x)$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, (C) = (f)$

Sur $]-\infty; 0[, (f)$ est la symétrique de (C) par rapport à l'axe des ordonnées. (Voir figure)

$$(f) = (C) \cup \mathcal{S}_{(O; \vec{j})}((C))$$

PARTIE B

$$1. I(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx; t \geq 1$$

a. $I(t)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = t$

$$b. J(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^t$$

$$J(t) = \frac{1}{2} (\ln t)^2$$

$$c. K(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Intégration par parties :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$K(t) = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

$$K(t) = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^t$$

$$K(t) = \frac{t-1-\ln t}{t}$$

$$K'(t) = \frac{\ln t}{t^2} \geq 0 \quad \forall t \geq 1$$

On en déduit que :

Sur $[1; +\infty[$, K est croissante

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = 1$$

Tableau de variation de K

t	1	$+\infty$
$K'(t)$		+
$K(t)$	0	1

On en déduit que :

$$\forall t \geq 1, 0 \leq K(t) \leq 1$$

$$2. \forall x \geq 1, \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)} \geq 0$$

D'autres parts :

$$x \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq x$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)} \leq \frac{1}{x^2}$$

On conclut donc que :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

Déduction :

$$\forall x \geq 1, \ln x \geq 0 \text{ et}$$

$$0 \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln x}{x+1} \leq \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx - \int_1^t \frac{\ln x}{x+1} dx \leq \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{Donc on a : } 0 \leq J(t) - I(t) \leq K(t)$$

$$3. 0 \leq \frac{1}{2}(\ln t)^2 - I(t) \leq K(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{(\ln t)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{(\ln t)^2} \leq \frac{I(t)}{(\ln t)^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln t)^2} = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{(\ln t)^2} = \frac{1}{2}$$

PARTIE C

$$1. h(x) = f(x) - x; D_h = [1; +\infty[$$

$$a. h'(x) = f'(x) - 1$$

$$\forall x \in]x_0; +\infty[, f'(x) < 0 \text{ et donc}$$

$$\forall x \in]x_0; +\infty[, h'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]x_0; +\infty[$, h est décroissante

$$b. f''(x) = \frac{(x^3+2x^2+x)g'(x) - (3x^2+4x+1)g(x)}{[x^3+2x^2+x]^2}$$

$$\forall x \in [1; x_0]; g'(x) < 0 \text{ et } g(x) \geq 0$$

$$\text{Donc } (x^3 + 2x^2 + x)g'(x) < 0 \text{ et}$$

$$(3x^2 + 4x + 1)g(x) \geq 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [1; x_0], f''(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $[1; x_0]$, f' est décroissante

Par conséquent :

$$\forall x \in [1; x_0], f'(x_0) \leq f'(x) \leq f'(1)$$

$$\text{Alors } 0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$$

$$c. \forall x \in [1; x_0]; 0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2} < 0$$

$$\Rightarrow h'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $[1; x_0]$, h décroissante

2.

a. h est dérivable donc continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

Elle réalise alors une bijection de

$[1; +\infty[$ sur $h([1; +\infty[) =]-\infty; 1]$ et

$0 \in]-\infty; 1]$.

D'où l'équation $h(x) = 0$ admet

une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

$$\begin{cases} h(2) = 0,23 > 0 \\ h(3) = -0,73 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } h(2) \times h(3) < 0$$

$$\text{Alors } 2 < \alpha < 3$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$

Alors α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[1; +\infty[$ et

$$\text{on a : } 2 \leq \alpha \leq 3$$

b. f est croissante sur $[2 ; 3]$

$$\forall x \in [2 ; 3],$$

$$f(2) \leq f(x) \leq f(3)$$

$$\Leftrightarrow 2,23 \leq f(x) \leq 2,27$$

$$\text{Or } [2,23 ; 2,27] \subset [2 ; 3]$$

$$\text{D'où } 2 \leq f(x) \leq 3$$

$$\text{Donc } \forall x \in [2 ; 3], f(x) \in [2 ; 3]$$

c. $[2 ; 3] \subset [1 ; x_0]$.

Donc f' est décroissante sur $[2 ; 3]$

$$\forall x \in [2 ; 3], f'(3) \leq f'(x) \leq f'(2)$$

$$\Leftrightarrow 0,015 \leq f'(x) \leq 0,09 \leq \frac{1}{9}$$

$$\text{Donc } \forall x \in [2 ; 3], 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{9}$$

d. $\forall x \in [2 ; 3]$, en appliquant à l'intervalle de bornes $(x ; \alpha)$ l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{9} |x - \alpha|$$

$$\text{Or } f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{D'où } \forall x \in [2 ; 3],$$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9} |x - \alpha|$$

3.

a. $U_0 = 2 \in [2 ; 3]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [2 ; 3]$

et montrons que $U_{n+1} \in [2 ; 3]$

En effet :

$$U_n \in [2 ; 3] \Rightarrow f(U_n) \in [2 ; 3]$$

$$\text{Car } \forall x \in [2 ; 3], f(x) \in [2 ; 3]$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = f(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in [2 ; 3] \text{ si } U_n \in [2 ; 3]$$

On conclut alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [2 ; 3]$$

On sait aussi que :

$$\forall x \in [2 ; 3], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{9} |x - \alpha|$$

Prenons $x = U_n$

$$\text{On a : } |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = f(U_n)$$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_n - \alpha|$$

b. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_2 - \alpha|$$

:

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{9} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |2 - \alpha|$$

$$2 \leq \alpha \leq 3$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

c. $0 < \frac{1}{9} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$

On en déduit que la suite (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

PROBLEME 10**PARTIE A**

$$f(x) = \sqrt{x} e^{1-x}; D_f = [0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} 1. f(x) &= \sqrt{x} e^{1-x} \\ &= \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times e \times e^{-x} \\ &= \frac{e}{\sqrt{x}} \times x e^{-x} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}$$

On a donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{\sqrt{x}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$$

La courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$

$$\begin{aligned} 2. \forall x > 0; f'(x) &= \frac{(1-2x)}{2\sqrt{x}} e^{1-x} \\ \forall x \in]0; +\infty[, 2\sqrt{x} > 0 \text{ et } e^{1-x} > 0 \\ \text{Alors le signe de } f'(x) &\text{ dépend de celui de } 1 - 2x \\ 1 - 2x > 0 &\Rightarrow x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; \frac{1}{2}[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, f'(x) < 0$$

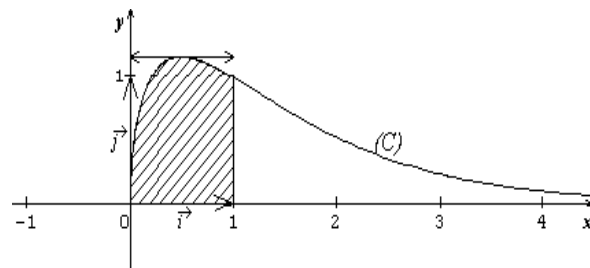
On en déduit que :

$$\text{Sur }]0; \frac{1}{2}[, f \text{ est croissante}$$

$$\text{Sur }]\frac{1}{2}; +\infty[, f \text{ est décroissante}$$

Tableau de variation de f

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\sqrt{\frac{e}{2}}$	0

3. Tracé de (C) :**4.****a. Voir figure**

$$b. \mathcal{V} = uv \times \pi \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 x e^{2-2x} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{2-2x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x e^{2-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x e^{2-2x} \right]_0^1 +$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} e^{2-2x} dx$$

$$\int_0^1 x e^{2-2x} dx = \left[-\frac{1}{4} (2x+1) e^{2-2x} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x e^{2-2x} dx = \frac{e^2-3}{4}$$

$$uv = 8\text{cm}^3$$

$$\mathcal{V} = 8\pi \left(\frac{e^2-3}{4} \right) \text{cm}^3 = 2\pi(e^2-3)\text{cm}^3$$

PARTIE B

$$U_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$$

1. U_n est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = n$ et $x = n+1$

2. f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

D'où $\forall n \geq 1$ et $\forall t, n \leq t \leq n+1$

$$\text{On a : } f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$$

En appliquant l'inégalité de la moyenne sur , on a :

$$f(n+1)[n+1-n] \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)[n+1-n]$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 1, \\ f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$$

3. On déduit de cette inégalité que :
 $f(n+2) \leq U_{n+1} \leq f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$

**C'est-à-dire $\forall n \geq 1, U_{n+1} \leq U_n$
 Ceci montre que (U_n) est une suite décroissante.**

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$

On déduit que (U_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

PARTIE C

1.
 a. F est l'unique primitive de f s'annulant pour $x = 1$
 b. On en déduit que :

$$\forall x \geq 1, F'(x) = f(x)$$

D'après l'étude de f dans PARTIE A
 $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) > 0$
Par conséquent :
 Sur $[1; +\infty[, F$ est croissante

2.
 a. $\forall t \geq 0, (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2 \geq 0$
 $\Leftrightarrow t - 2\sqrt{t}\sqrt{2} + 2 \geq 0$

$$\text{Donc } \forall t \geq 0, (t+2) \geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}$$

- b. **Déduction**

$$\begin{aligned} \forall t \geq 1, (t+2) &\geq 2\sqrt{2}\sqrt{t} \\ \Leftrightarrow (t+2)e^{1-t} &\geq 2\sqrt{2}\sqrt{t}e^{1-t} \\ \text{D'où } \forall x \geq 1, \\ \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt &\geq 2\sqrt{2} \int_1^x \sqrt{t}e^{1-t} dt \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}F(x) &\leq \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall x \geq 1, F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt$$

- c. **Intégration par parties**

$$\begin{aligned} \begin{cases} u(t) = t+2 \\ v'(t) = e^{1-t} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-t} \end{cases} \\ \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt &= [-(t+2)e^{1-t}]_1^x + \int_1^x e^{1-t} dt \\ &= [-(t+2)e^{1-t} - e^{1-t}]_1^x \\ \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt &= [-(t+3)e^{1-t}]_1^x \\ \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt &= 4 - (x+3)e^{1-x} \end{aligned}$$

Déduction

$$\begin{aligned} \forall x \in [1; +\infty[, (x+3) &> 0 ; e^{1-x} > 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)e^{1-x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -(x+3)e^{1-x} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 4 - (x+3)e^{1-x} &\leq 4 \\ \Leftrightarrow \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt &\leq 4 \\ \Leftrightarrow F(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_1^x (t+2)e^{1-t} dt &\leq \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow F(x) &\leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

D'autre part :
 $\forall t \geq 1, f(t) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \geq 0 \quad \forall x \geq 1$
 $\Leftrightarrow F(x) \geq 0$

On en déduit que :

$$\forall x \geq 1, 0 \leq F(x) \leq \sqrt{2}$$

- 3.

$$\begin{aligned} \text{a. } S_n &= U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1} \\ &= \int_1^2 f(t) dt + \int_2^3 f(t) dt + \dots + \\ &\quad \int_{n-1}^n f(t) dt \end{aligned}$$

D'après la relation de Chasles on a :

$$S_n = \int_1^n f(t) dt$$

- b. $S_n = F(n) \Leftrightarrow 0 \leq S_n \leq \sqrt{2}$
 La suite (S_n) est croissante et bornée.
 On en déduit que (S_n) est convergente
 On sait que : $0 \leq S_n \leq \sqrt{2}$
 D'où en passant à la limite, on a :
 $0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \sqrt{2}$

$$\text{Soit } 0 \leq l \leq \sqrt{2}$$

PROBLEME 11**PARTIE A**

$$f(x) = e^{-x} \cos x ; D_f = \mathbb{R}$$

$$1. f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Ceci montre bien que $f'(x)$ est du signe de $-(\cos x + \sin x)$

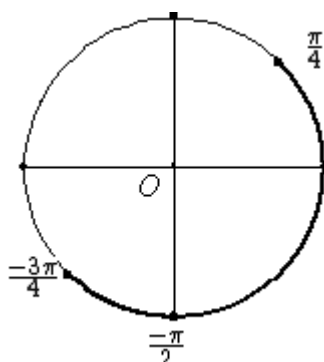
$$2. \cos x + \sin x$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$\text{Donc } \cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right], \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \in \left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right]$$



$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq -\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$f'(x) = -\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{-\pi}{4} \right], f'(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right], f'(x) \leq 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{-\pi}{4} \right], f \text{ est croissante}$$

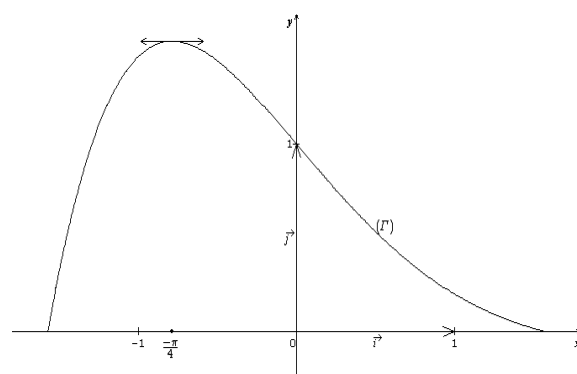
$$\text{Sur } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right], f \text{ est décroissante}$$

3. Tableau de variations

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$	0

Les coefficients directeurs des tangentes :

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$e^{\frac{\pi}{2}}$	0	-1	$-e^{-\frac{\pi}{2}}$

**4.**

$$a. F'(x) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow [(b-a) \cos x - (b+a) \sin x] e^{-x} = e^{-x} \cos x$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{2} (-\cos x + \sin x)$$

$$b. \mathcal{A} = ua \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\mathcal{A} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\mathcal{A} = 25 \left(F \left(\frac{\pi}{2} \right) - F \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) cm^2$$

$$\mathcal{A} = 25 \times \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} cm^2$$

Ou encore

$$\mathcal{A} = 25 sh \left(\frac{\pi}{2} \right) cm^2$$

PARTIE B

$$1. f\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right] = \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}\right[\\ \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[, \\ x < 0 < f(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[, f(x) \neq x$$

D'autres parts :

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -\frac{\pi}{2} \\ f(0) = 1 \Leftrightarrow f(0) \neq 0$$

On conclut donc que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[, f(x) \neq x$$

C'est-à-dire que sur l'intervalle
 $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, **il n'existe pas de point**
d'intersection de (Γ) avec la droite
 $(\Delta) : y = x$

$$2. \varphi(x) = e^{-x} \cos x - x; D_{\varphi} = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$a. \varphi(0) = 1 \text{ et } \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$b. \varphi'(x) = f'(x) - 1$$

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) < 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) < 0$$

Sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, φ est décroissante

Tableau de variation de φ

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(x)$	—	
$\varphi(x)$	1	$-\frac{\pi}{2}$

c. φ est continue car dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et est strictement décroissante sur cet intervalle. φ réalise alors une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 1\right]$ et $0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; 1\right]$.

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet
une unique solution α dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$$

$$d. \beta = f(1) = e^{-1} \cos 1$$

$$\left]0; 1\right[\subset \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 1 > 0 \\ \varphi(1) = \beta - 1 < 0 \end{cases}$$

On a : $\varphi(0) \times \varphi(1) < 0$ **D'où $\alpha \in \left]0; 1\right[$ c'est-à-dire $\alpha < 1$** **D'autres parts :**

f étant décroissante sur $\left]0; 1\right[$

On a :

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow f(1) < f(\alpha)$$

$$\text{Or } f(\alpha) = \alpha \text{ et } \beta = f(1)$$

$$\text{D'où } \beta < \alpha$$

On a : $\beta < \alpha$ et $\alpha < 1$ **Donc $\beta < \alpha < 1$**

3. On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$$

a. $U_0 = 1$ donc on a : $\beta \leq U_0 \leq 1$.

Supposons $\beta \leq U_n \leq 1$ pour tout entier n puis montrons que

$$\beta \leq U_{n+1} \leq 1$$

En effet :

$$\beta \leq U_n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \beta \leq U_n \leq 1$$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(0)$$

Car f est décroissante sur $\left]0; 1\right]$

Or par définition $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $\beta \leq U_{n+1} \leq 1$ si $\beta \leq U_n \leq 1$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta \leq U_n \leq 1$$

b. On pose $k = |f'(\beta)|$

$$f''(x) = 2e^{-x} \sin x > 0 \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

On en déduit que :

Sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$, f' est croissante

Par conséquent :

$$\beta \in \left]0; 1\right[\subset \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow f'(0) < f'(\beta) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -1 < f'(\beta) \leq -e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} \leq |f'(\beta)| < 1$$

On a donc : $|f'(\beta)| < 1$ **Ce qui montre que : $k < 1$**

D'autres parts :

$\forall x \in [\beta; 1]$, on a :

$$f'(\beta) \leq f'(x) \leq f'(1) < 0$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq |f'(\beta)|$$

$$\text{Donc } \forall x \in [\beta; 1], |f'(x)| \leq k$$

- c. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à l'intervalle de bornes $(\alpha; U_n)$

On a :

$$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq k|U_n - \alpha|$$

$$\text{Or } U_{n+1} = f(U_n) \text{ et } f(\alpha) = \alpha$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \\ |U_{n+1} - \alpha| \leq k|U_n - \alpha|$$

En partant de cette inégalité, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq k|U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq k|U_1 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq k|U_2 - \alpha|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq k|U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |1 - \alpha|$$

$$0 < \alpha < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < U_0 - \alpha < 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| < 1$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq k^n |U_0 - \alpha| \leq 1 \times k^n$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq k^n$$

- d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ car $k < 1$

On n'en déduit que la suite (U_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

PROBLEME 12

PARTIE A

$$u(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}; D_u = \mathbb{R}$$

1. $u(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{1+x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 1+x^2 = 4x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

2. $u(0) = -1 < 0$ d'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$u(x)$	$-$	0	$+$

$$\forall x \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[, u(x) < 0$$

$$\forall x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[, u(x) > 0$$

PARTIE B

1. $g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2}; D_g = \mathbb{R}$

- a. Les fonctions $x \mapsto x$ et

$x \mapsto 1+x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynômes

D'autres parts :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$$

Alors la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

On conclut donc que :

$g: x \mapsto x - 2\sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

b. $g'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-2x}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{u(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

- c. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-u(x)$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left] -\infty; \frac{\sqrt{3}}{3} \right[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left] \frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty \right[, g'(x) < 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\infty$

3.

$$a. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = 3$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - 3x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 2\sqrt{1 + x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - 3x) = 0$$

Alors la droite d'équation $y = 3x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2\sqrt{1 + x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x) = 0$$

Alors la droite d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

b. $\forall x \leq 0, y = 3x$ et

$$g(x) - y = \frac{-2}{-x + \sqrt{1 + x^2}} < 0$$

On n'en déduit que :

(C) est en dessous de l'asymptote d'équation $y = 3x$.

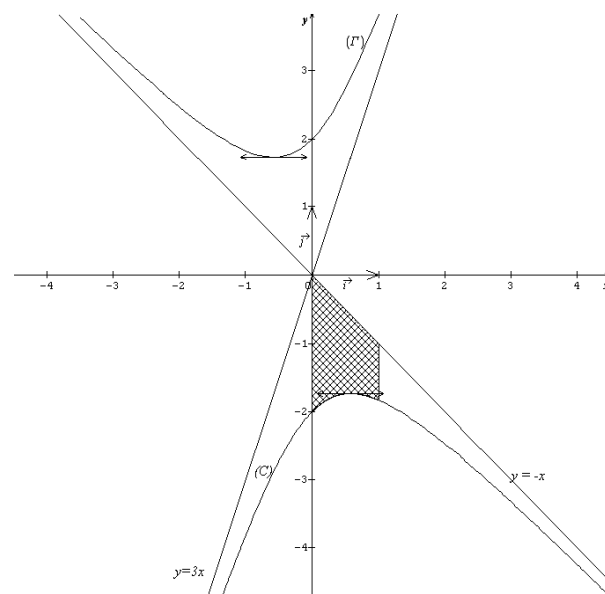
$\forall x \geq 0, y = -x$ et

$$g(x) - y = \frac{-2}{x + \sqrt{1 + x^2}} < 0$$

On en déduit que :

(C) est en dessous de l'asymptote d'équation $y = -x$

c. Représentation graphique



PARTIE C

$$1. h(-x) = -g(x)$$

$$\Leftrightarrow h(-x) = -x + 2\sqrt{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow h(-x) = -x + 2\sqrt{1 + (-x)^2}$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x + 2\sqrt{1 + x^2}$$

$$2. (C) : y = x - 2\sqrt{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow y - x = -2\sqrt{1 + x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x)^2 = 4(1 + x^2); y - x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (C) : (y - x)^2 = 4(1 + x^2); y \leq x$$

$$(\Gamma) : y = x + 2\sqrt{1 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow y - x = 2\sqrt{1 + x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y - x)^2 = 4(1 + x^2); y - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\Gamma) : (y - x)^2 = 4(1 + x^2); y \geq x$$

Or

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x \text{ ou } y \geq x\} = \mathbb{R}^2.$$

$$\text{D'où } (C) \cup (\Gamma) : (y - x)^2 = 4(1 + x^2)$$

On a donc

$$(C) \cup (\Gamma) : y^2 - 2xy - 3x^2 - 4 = 0$$

$$3. (-y)^2 - 2(-x)(-y) - 3(-x)^2 - 4 = y^2 - 2xy - 3x^2 - 4.$$

Donc si le point $M(x, y) \in (C) \cup (\Gamma)$ alors le point $M'(-x, -y) \in (C) \cup (\Gamma)$

On en déduit que :

L'origine O du repère est un centre de symétrie de $(C) \cup (\Gamma)$

4. (Γ) est donc la réunion de (C) et de sa symétrique de par rapport à l'origine O du repère.

$$(\Gamma) = (C) \cup \mathcal{S}_O((C))$$

(Voir le graphique)

PARTIE D

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

1.

a. $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > x^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$$

$$\text{Or } \sqrt{x^2} = |x|$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > |x|$$

b. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + \sqrt{1+x^2} > 0\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On en déduit que : } D_f = \mathbb{R}$$

$$2. f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x) = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$g(x) = x - 2\sqrt{1+x^2} = x - f'(x)$$

D'où une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est par exemple la fonction G définie

$$\text{par : } G(x) = \frac{1}{2}x^2 - f(x)$$

3. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^1 (-x - g(x)) dx$

$$= ua \times \left[-\frac{1}{2}x^2 - G(x) \right]_0^1$$

$$ua = 4\text{cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 4(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))\text{cm}^2$$

PROBLEME 13

PARTIE A

$$f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

1. $\forall x \in D_f,$

$$-x + 2 - \frac{3}{x+2} = \frac{-x^2+4-3}{x+2} = \frac{1-x^2}{x+2} = f(x)$$

$$\text{D'où } \forall x \in D_f, f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$$

2. $f'(x) = \frac{-(x^2+4x+1)}{(x+2)^2}$

$$\forall x \in D_f, (x+2)^2 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x^2 - 4x - 1$

$$-x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Delta' = 3$$

$$x_1 = -2 - \sqrt{3}; \quad x_2 = -2 + \sqrt{3}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; -2 - \sqrt{3}[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-2 + \sqrt{3}; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur }]-\infty; -2 - \sqrt{3}[,$$

f est décroissante

$$\text{Sur }]-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}[,$$

f est croissante

$$\text{Sur }]-2 + \sqrt{3}; +\infty[,$$

f est décroissante

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	-2	$-2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		$4 + 2\sqrt{3}$		$4 - 2\sqrt{3}$
		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-\infty$		$-\infty$

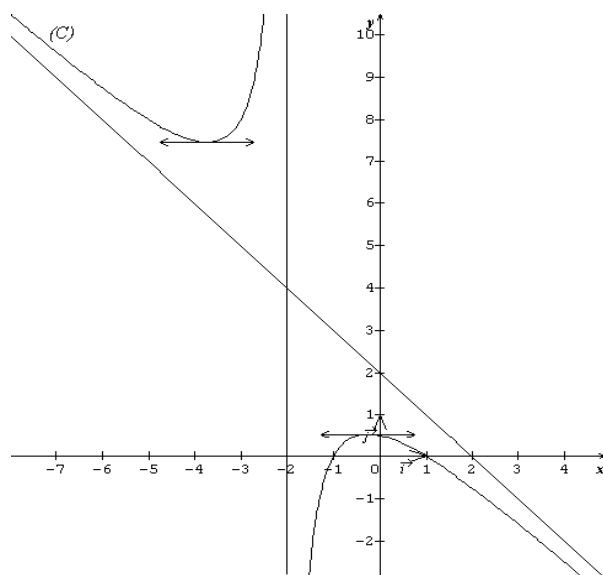
La droite d'équation $x = -2$ est une asymptote verticale à (C)

D'autres parts :

Posons $y = -x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

Alors la droite d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique de (C).
Tracer de (C)



3. Soit I le point d'intersection des 2 asymptotes :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Alors $I(-2; 4)$

$$\begin{aligned} f(2 \times (-2) - x) + f(x) &= f(-4 - x) + f(x) \\ &= x + 4 + 2 - \frac{3}{-x-2} - x + 2 - \frac{3}{x+2} = 8 \end{aligned}$$

$f(2 \times (-2) - x) + f(x) = 8 = 2 \times 4$
Alors $I(-2; 4)$ est un centre de symétrie de (C)

$$\begin{aligned} 4. \mathcal{A} &= ua \times \int_{-1}^2 (y - f(x)) dx \\ \int_{-1}^2 (y - f(x)) dx &= \int_{-1}^2 \frac{3}{x+2} dx \\ &= [3 \ln(x+2)]_{-1}^2 \\ \int_{-1}^2 (y - f(x)) dx &= 6 \ln 2 \\ ua &= 1 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 6 \ln 2 \text{ cm}^2$$

PARTIE B

$$\varphi(t) = \frac{1 - \sin^2 t}{2 + \sin t}; D_\varphi = \mathbb{R}$$

$$1. \varphi(\pi - t) = \frac{1 - \sin^2(\pi - t)}{2 + \sin(\pi - t)} = \varphi(t)$$

$$\text{Car } \sin(\pi - t) = \sin t$$

φ est périodique de période 2π donc l'étude de φ peut se faire sur un intervalle d'amplitude 2π et on complète la courbe représentative

de φ par des translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$; k étant un entier relatif.

D'autres parts :

$$\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$$

$$\text{Or } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \text{ et}$$

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]; (\pi - t) \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

D'où une étude des variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire entièrement la courbe représentative de φ

2.

$$a. f''(x) = \frac{-6}{(x+2)^3} < 0, \forall x \in]-2; +\infty[$$

Sur $] -2; +\infty[$, f' est décroissante

On en déduit que :

Sur $[-1; 1]$, f' est décroissante

$$f'([-1; 1]) = [f'(1); f'(-1)]$$

$$\text{Alors } f'([-1; 1]) = \left[-\frac{2}{3}; 2\right]$$

$$b. \varphi(t) = f(\sin t)$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(t) = \cos t \times f'(\sin t)$$

$$\text{Donc } \forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f'(\sin t) \cos t$$

$$c. f' \text{ est continue car dérivable et est strictement décroissante sur }]-1; 1[$$

Alors f' réalise une bijection de

$$]-1; 1[\text{ sur } \left]-\frac{2}{3}; 2\right[\text{ et } 0 \in \left]-\frac{2}{3}; 2\right[$$

Donc l'équation $f'(t) = 0$ admet une unique solution t_0 dans $]-1; 1[$.

$$-1 < t_0 < 1$$

$$\Leftrightarrow \exists! \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[/ \sin \alpha = t_0$$

On a donc :

$$\varphi'(\alpha) = f'(\sin \alpha) \cos \alpha$$

$$= f'(t_0) \cos \alpha$$

$$\varphi'(\alpha) = 0$$

$$\text{Car } \forall \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\cos \alpha > 0 \text{ et}$$

$$f'(t_0) = 0$$

On conclut donc que :

α est l'unique solution de

$$\text{l'équation } \varphi'(t) = 0 \text{ dans } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

d. $\varphi(\alpha) = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{2 + \sin \alpha}$

Or $\varphi'(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow f'(\sin \alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \sin \alpha = -2 + \sqrt{3}$

Car $-2 - \sqrt{3} < -1$

D'où $\varphi(\alpha) = f(-2 + \sqrt{3})$

On a donc $\varphi(\alpha) = 4 - 2\sqrt{3}$

3.

a.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\varphi(t)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4 - \sqrt{2}}{14}$	$\frac{4 - \sqrt{3}}{26}$

$\varphi'(0) = -\frac{1}{4}$

b. $\varphi'(t) = f'(\sin t) \cos t$

$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\cos t \geq 0$ et d'après les variations de f ,

$0 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow f'(\sin t) < 0$

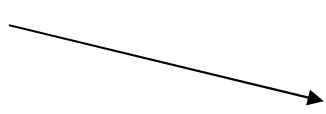
Car $[0; 1] \subset]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$

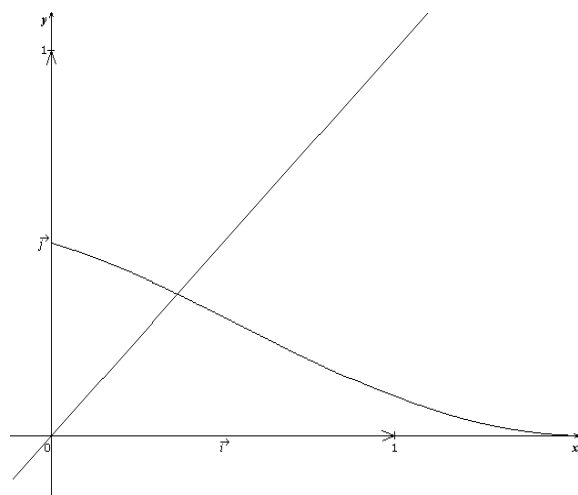
Par conséquent :

$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(t) \leq 0$

On en déduit que :

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, φ est décroissante

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$\varphi'(t)$		—
$\varphi(t)$	$\frac{1}{2}$	



4. $h(t) = \varphi(t) - t$ et $D_h = \mathbb{R}$

$h'(t) = \varphi'(t) - 1 < 0 \forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$

On en déduit que :

Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, h est décroissante

h étant continue et strictement

décroissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, alors

h réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}]$

dans $[-\frac{\pi}{2}; \frac{1}{4}]$ et $0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{1}{4}]$

Donc l'équation $h(t) = 0$ admet

une unique solution $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$h(\theta) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\theta) = \theta$

D'où θ est aussi l'unique solution de l'équation $\varphi(t) = t$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

PARTIE C

1. $U_0 = 0$ et $0 \in [0; \frac{1}{2}]$ donc $U_0 \in [0; \frac{1}{2}]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [0; \frac{1}{2}]$

puis montrons que $U_{n+1} \in [0; \frac{1}{2}]$

En effet :

$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \varphi(U_n) \leq \varphi(0)$

Car φ est décroissante

On a alors $0 \leq \varphi(U_n) \leq \frac{1}{2}$

Or par définition $\varphi(U_n) = U_{n+1}$

D'où $U_{n+1} \in [0; \frac{1}{2}]$ si $U_n \in [0; \frac{1}{2}]$

On conclut donc que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0; \frac{1}{2}]$

2. f' étant décroissante sur $]-2; +\infty[$ alors elle est décroissante sur $[0; 1]$

On a : $f'([0; 1]) = [-\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}]$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0; 1]$, $-\frac{2}{3} \leq f'(x) \leq -\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \forall x \in [0; 1]$, $\frac{1}{4} \leq |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

Donc $\forall x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

Par ailleurs :

$\varphi'(t) = \cos t \times f'(\sin t)$

$\Leftrightarrow |\varphi'(t)| \leq |f'(\sin t)|$

Car $\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \subset \left[0; \frac{\pi}{2}\right], |\cos t| \leq 1$

Or $\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \sin t \in [0; 1]$

D'où

$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], |\varphi'(t)| \leq |f'(\sin t)| \leq \frac{2}{3}$

On en déduit que :

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right], |\varphi'(t)| \leq \frac{2}{3}$$

3. $\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right]; |\varphi'(t)| \leq \frac{2}{3}$ et

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Appliquons l'inégalité des accroissements finis à l'intervalle de bornes $(\theta; U_n)$.

On a :

$$|\varphi(U_n) - \varphi(\theta)| \leq \frac{2}{3} |U_n - \theta|$$

Or $\varphi(U_n) = U_{n+1}$ et $\varphi(\theta) = \theta$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_n - \theta|$$

4. En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_0 - \theta|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_1 - \theta|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_2 - \theta|$$

:

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \theta| \leq \frac{2}{3} |U_{n-1} - \theta|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \theta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \theta|$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \text{ et } U_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_0 - \theta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \theta| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \theta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - \theta| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \theta| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\text{Car } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

On en déduit que la suite (U_n) converge vers θ

PROBLEME 14

PARTIE A

$$(E): y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$$

1. $g(x) = axe^{2x} + b$

$$g'(x) = (2ax + a)e^{2x}$$

$$g'(x) - 2g(x) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Leftrightarrow ae^{2x} - 2b = 2e^{2x} - 2$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{ et } g(x) = 2xe^{2x} + 1$$

2. $y = z + g$

Supposons que y est solution de (E)

$$\text{On a : } y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Rightarrow (z + g)' - 2(z + g) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Rightarrow z' - 2z = 2(e^{2x} - 1) - (g' - 2g)$$

$$\Rightarrow z' - 2z = 0$$

$$\text{Car } g' - 2g = 2(e^{2x} - 1)$$

Alors z est solution de (E') si y est solution de (E)

Réciproquement

Supposons que z est solution de (E')

$$\text{On a : } g' - 2z = 0$$

$$\Rightarrow z' - 2z = 0 \text{ et } g' - 2g =$$

$$2(e^{2x} - 1)$$

$$\Rightarrow z' + g' - 2(z + g) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Rightarrow (z + g)' - 2(z + g) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Rightarrow y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$$

Alors y est solution de (E) si z est solution de (E')

On vient ainsi de montrer que :
 y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E')

3. $z' - 2z = 0 \Leftrightarrow z' = 2z$

$$\text{Alors } z = ke^{2x}; k \in \mathbb{R}$$

Déduction :

Soit y une solution de (E)

$$y = z + g$$

$$\text{Alors } y = ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1; k \in \mathbb{R}$$

4. $f(x) = ke^{2x} + 2xe^{2x} + 1$ et $f(0) = 0$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow k = -1$$

$$\text{On a donc } f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$$

PARTIE B

$$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1; D_f = \mathbb{R}$$

1.

$$\text{a. } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

On en déduit que :

La courbe (C) admet une asymptote horizontale (Δ) d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$

b. (Δ): $y = 1$

$$f(x) - y = (2x - 1)e^{2x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$; alors le signe dépend de celui de $(2x - 1)$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; \frac{1}{2}[, f(x) - y < 0$$

$$\forall x \in]\frac{1}{2}; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; \frac{1}{2}[$, (C) est en dessous de (Δ)

Sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$, (C) est en dessus de (Δ)

$$(C) = (\Delta) \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ et } y = 1$$

$$\text{Alors } A\left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\text{2. } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

D'autres parts :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x}\right) = 2 \end{cases}$$

Alors la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

$$\text{3. } f'(x) = 4xe^{2x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$$

Alors le signe dépend de celui de $4x$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

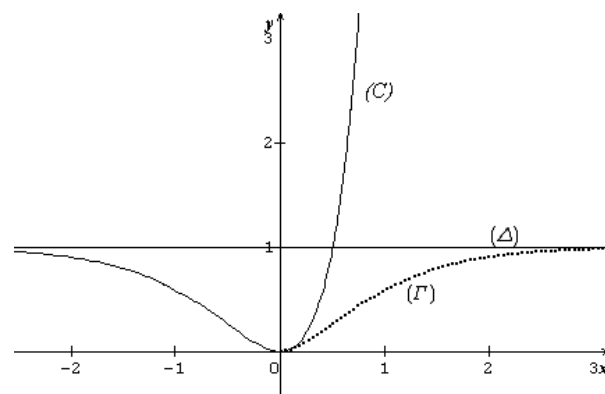
On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[$, f est décroissante

Sur $]0; +\infty[$, f est croissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	0	$+\infty$

4. Tracer de (C) et (Δ)

5.

$$\text{a. } I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - f(x)] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)e^{2x} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = 1 - 2x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = -2 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I = \left[\frac{1}{2}(1 - 2x)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx$$

$$I = [(1 - x)e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$I = \frac{e-2}{2}$$

b. I est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

PARTIE C

1. $J = \int_{-1}^0 (2x - 1)e^{2x} dx = [(x - 1)e^{2x}]_{-1}^0$
D'après PARTIE B5)

$$\text{Donc } J = 2e^{-2} - 1$$

2. $K = \int_{-1}^0 (2x - 1)^2 e^{4x} dx$

1^{ère} Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = (2x - 1)^2 \\ v'(x) = e^{4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2(2x - 1) \\ v(x) = \frac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$$

$$K = \left[\frac{1}{4} (2x - 1)^2 e^{4x} \right]_{-1}^0 -$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 (2x - 1) e^{4x} dx$$

2^{ème} Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = 2x - 1 \\ v'(x) = e^{4x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = \frac{1}{4}e^{4x} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 (2x - 1) e^{4x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} (2x - 1) e^{4x} \right]_{-1}^0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{4x} dx$$

On a donc

$$K = \left[\frac{1}{4} (2x - 1)^2 e^{4x} - \frac{1}{4} (2x - 1) e^{4x} + \frac{1}{8} e^{4x} \right]_{-1}^0$$

$$K = \left[\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{8} \right) e^{4x} \right]_{-1}^0$$

$$K = \frac{5 - 25e^{-4}}{8}$$

3. $\mathcal{V} = uv \times \pi \int_{-1}^0 f^2(x) dx$

$$\int_{-1}^0 f^2(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 [(2x - 1)^2 e^{4x} + 2(2x - 1)e^{2x} + 1] dx$$

$$= \int_{-1}^0 (2x - 1)^2 e^{4x} dx$$

$$+ 2 \int_{-1}^0 (2x - 1) e^{2x} dx + \int_{-1}^0 dx$$

$$\int_{-1}^0 f^2(x) dx = K + 2J + 1$$

$$\int_{-1}^0 f^2(x) dx = 4e^{-2} - \frac{25}{8}e^{-4} - \frac{3}{8}$$

$$uv = 8 \text{ cm}^3$$

$$\mathcal{V} = \pi(-25e^{-4} + 32e^{-2} - 3) \text{ cm}^3$$

PARTIE D

1. $x = \frac{\ln t}{2} \Leftrightarrow \ln t = 2x \text{ et } t = e^{2x}$

On en déduit que :

$$y = 1 - (2x + 1)e^{-2x}$$

D'autre part :

$$t \geq 1 \Rightarrow \ln t \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 0$$

$$(\Gamma): y = -(2x + 1)e^{-2x} + 1; x \geq 0$$

2. $(\Gamma): y = (-2x - 1)e^{-2x} + 1; x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (\Gamma): y = f(-x); x \geq 0$$

Construction

$$\forall x \geq 0; -x \leq 0$$

(Γ) est donc la symétrique de la partie de $(\mathcal{C})$ correspondant à $]-\infty; 0]$ par rapport à l'axe des ordonnées

PROBLEME 15

$$f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}; D_f = \mathbb{R}$$

PARTIE A

$$P(X) = 1 + X - 2X^2; D_p = \mathbb{R}$$

$$1. \Delta = 9$$

$$X_1 = -\frac{1}{2}; X_2 = 1$$

$$\forall X \in]-\infty; -\frac{1}{2}[, P(X) < 0$$

$$\forall X \in]-\frac{1}{2}; 1[, P(X) > 0$$

$$\forall X \in]1; +\infty[, P(X) < 0$$

$$2. P(X) = -2\left(X + \frac{1}{2}\right)(X - 1)$$

$$\Leftrightarrow P(X) = (2X + 1)(1 - X)$$

$$\text{Or } f(x) = P(e^{-x}) \text{ d'où}$$

$$f(x) = (2e^{-x} + 1)(1 - e^{-x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^{-x} + 1 > 0$$

Alors le signe de $f(x)$ dépend de celui de $1 - e^{-x}$

$$1 - e^{-x} > 0 \Rightarrow x > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$$

3. On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[$, (C) est en dessous de l'axe des abscisses

Sur $]0; +\infty[$, (C) est au dessus de l'axe des abscisses

PARTIE B

$$1. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

On en déduit que :

(C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$

$$2. f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$$

$$= e^{-2x} \left(\frac{1}{e^{-2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{-2x}} - 2 \right)$$

$$\text{Donc } f(x) = e^{-2x}(e^{2x} + e^x - 2)$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

3.

$$a. f'(x) = -e^{-x} + 4e^{-2x}$$

$$b. f'(x) = e^{-2x}(-e^x + 4)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0$$

Alors $f'(x)$ a le même signe que $(4 - e^x)$

$$4 - e^x > 0 \Rightarrow x < 2 \ln 2$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 2 \ln 2[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]2 \ln 2; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 2 \ln 2[$, f est croissante

Sur $]2 \ln 2; +\infty[$, f est décroissante

c. **Tableau de variation de f**

x	$-\infty$	$2 \ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{9}{8}$	1

$$f(2 \ln 2) = \frac{9}{8}$$

4.

$$a. (T_0): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{Alors } (T_0): y = 3x$$

$$b. (D): y = 1$$

$$(C) = (D)$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} - 2e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-2x}(e^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \text{ car } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ et } y = f(\ln 2) = 1$$

$$\text{Et donc } A(\ln 2; 1)$$

$$c. f(x) - y = e^{-2x}(e^x - 2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x} > 0$$

Alors le signe dépend de celui de $e^x - 2$

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; \ln 2[, f(x) - y < 0$$

$$\forall x \in]\ln 2; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $] -\infty; \ln 2[$, (C) est en dessous de (D)

Sur $] \ln 2; +\infty[$, (C) est au dessus de (D)

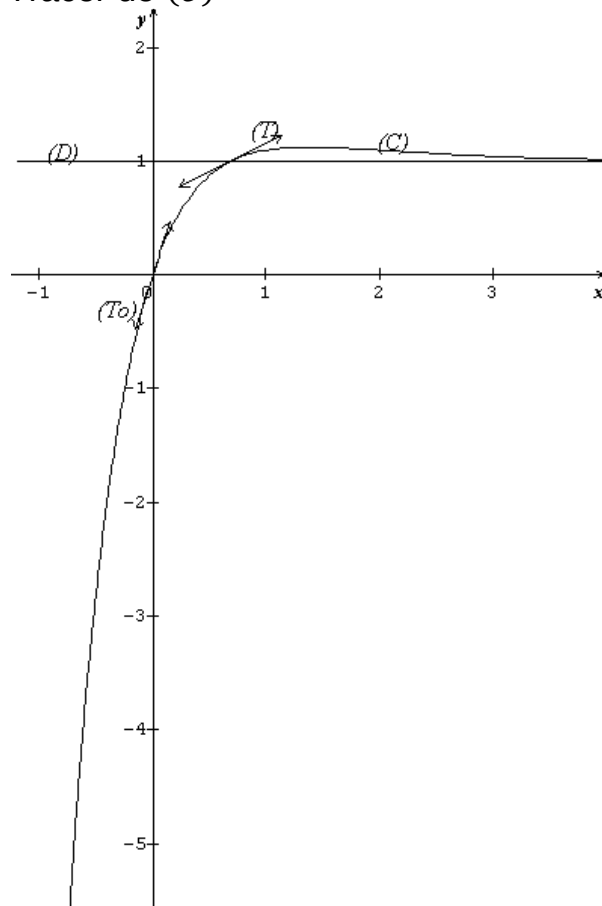
5. $(T): y = f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2)$

Donc $(T): y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\ln 2}{2}$

6. $f(-\ln 2) = -5$

(C) passe par le point de coordonnées $(-\ln 2; -5)$

Tracer de (C)



PARTIE C

1. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^{\ln 2} (1 - f(x)) dx$

$$\int_0^{\ln 2} (1 - f(x)) dx = [e^{-x} - e^{-2x}]_0^{\ln 2}$$

$$\int_0^{\ln 2} (1 - f(x)) dx = \frac{1}{4}$$

$$ua = 4cm^2$$

On a donc $\mathcal{A} = 1 cm^2$

2. $\lambda > \ln 2$; $\mathcal{A}(\lambda) = 4 \int_{\ln 2}^{\lambda} [f(x) - 1] dx$

a. $\mathcal{A}(\lambda)$ est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = \ln 2$ et $x = \lambda$

b. $\mathcal{A}(\lambda) = 4[-e^{-x} + e^{-2x}]_{\ln 2}^{\lambda}$

$\mathcal{A}(\lambda) = (1 - 4e^{-\lambda} + 4e^{-2\lambda})cm^2$

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-2\lambda} = 0 \end{cases}$$

Alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1$

3. $V = \pi \int_{-\ln 2}^0 f^2(x) dx$

$$f^2(x)$$

$$= (1 + 2e^{-x} - 3e^{-2x} - 4e^{-3x} + 4e^{-4x})dx$$

$$V = \pi \left[x - 2e^{-x} + \frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{4}{3}e^{-3x} - e^{-4x} \right]_{-\ln 2}^0$$

$V = \pi \left(\frac{19}{6} + \ln 2 \right) uv$

PROBLEME 16**PARTIE A**

$$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}; D_g =]0; +\infty[$$

$$1. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$2. g'(x) = -\frac{x+1}{x^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 > 0 \text{ et } x+1 > 0$$

$$\text{Alors } \forall x \in]0; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, g$ est décroissante

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3. Sur $]0; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de

$]0; +\infty[$ sur $]-\infty; +\infty[$ et

$0 \in]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans

$]0; +\infty[$

Montrons que $\alpha \in [0,4 ; 0,5]$

$$\begin{cases} g(0,4) = 0,4 > 0 \\ g(0,5) = -0,3 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } g(0,4) \times g(0,5) < 0$$

$$\text{Alors } \alpha \in [0,4 ; 0,5]$$

4. g est décroissante et $g(\alpha) = 0$

On en déduit que :

$$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

$$5. I = \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} g(x) dx$$

$$a. \forall x \in \left[\frac{1}{4}; \alpha\right], g(x) \geq 0$$

On en déduit que :

I est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe de g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{4}$ et $x = \alpha$

$$b. I = [-3x + \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\alpha} - \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln x dx$$

$$\text{Calculons } \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln x dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} \ln x dx = [x \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\alpha} - \int_{\frac{1}{4}}^{\alpha} dx$$

$$\text{Donc } I = [-2x + (1-x) \ln x]_{\frac{1}{4}}^{\alpha}$$

$$I = -2\alpha + (1-\alpha) \ln \alpha + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ln 2$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{D'où } I = \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \ln 2$$

PARTIE B

$$f(x) = e^{-x}(3 + \ln x); D_f =]0; +\infty[$$

1.

$$a. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$b. \begin{aligned} f(x) &= e^{-x}(3 + \ln x) \\ &= 3e^{-x} + e^{-x} \ln x \\ &= 3e^{-x} + \frac{1}{e^x} \cdot \ln x \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) = 3e^{-x} + \frac{x}{e^x} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{ca } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

c. **Dédution**

$(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

$$2. \begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(3 + \ln x) + \frac{e^{-x}}{x} \\ f'(x) &= e^{-x} \left(-3 - \ln x + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc on a : } f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$$

3. $f(\alpha) = e^{-\alpha}(3 + \ln \alpha)$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -3 + \frac{1}{\alpha}$

D'où $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha e^{\alpha}}$

Encadrement de $f(\alpha)$

$0,4 \leq \alpha \leq 0,5$

$\Leftrightarrow 1,49 \leq e^{\alpha} \leq 1,64$

$\Leftrightarrow 0,59 \leq \alpha e^{\alpha} \leq 0,82$

$\Leftrightarrow 1,21 \leq \frac{1}{\alpha e^{\alpha}} \leq 1,69$

On en déduit que :

$1,2 \leq f(\alpha) \leq 1,7$ à 5×10^{-1} près

4. $\forall x \in]0; +\infty[, e^{-x} > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]0; \alpha[, f$ est croissante

Sur $]\alpha; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

5. $f(x) = 0$

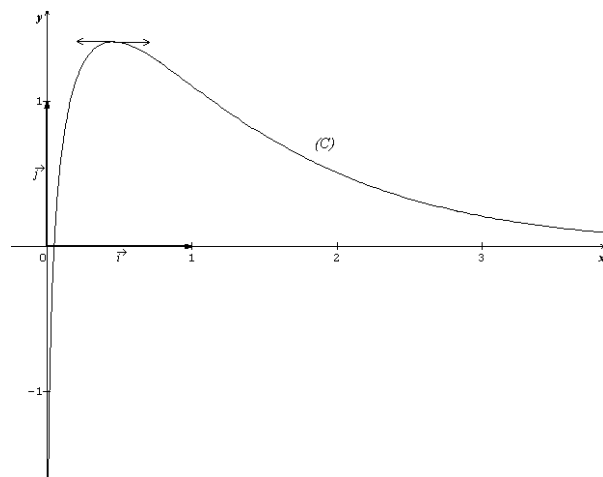
$\Leftrightarrow e^{-x}(3 + \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -3$ car $e^{-x} \neq 0$

$\Leftrightarrow x = e^{-3}$

Alors $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(e^{-3}; 0)$

6. Tracer de $(\mathcal{C})$



PARTIE C

$h(x) = \frac{1}{3 + \ln x}; D_h = [0,4; 0,5]$

1. $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow -3 - \ln x + \frac{1}{x} = 0$

$\Leftrightarrow 3 + \ln x = \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3 + \ln x} = x$

$\Leftrightarrow h(x) = x$

On en déduit que :

α est l'unique solution de l'équation

$h(x) = x$ d'après PARTIE A, α est

l'unique solution de l'équation

$g(x) = 0$

2. $h'(x) = \frac{-1}{x(3 + \ln x)^2} < 0 \forall x \in [0,4; 0,5]$

On en déduit que :

Sur $[0,4; 0,5], h$ est décroissante

x	0,4	0,5
$h'(x)$	-	
$h(x)$	0,47	0,43

Déduction

D'après les variations de h ,

$\forall x \in [0,4; 0,5], h(x) \in [0,43; 0,47]$

Or $[0,43; 0,47] \subset [0,4; 0,5]$

D'où

$\forall x \in [0,4; 0,5], h(x) \in [0,4; 0,5]$

3. $\forall x \in [0,4; 0,5], 0,4 \leq x \leq 0,5$

$\Leftrightarrow -0,91 \leq \ln x \leq -0,69$

$\Leftrightarrow 2,09 \leq 3 + \ln x \leq 2,31$

$\Leftrightarrow 4,36 \leq (3 + \ln x)^2 \leq 5,33$

$\Leftrightarrow 1,74 \leq x(3 + \ln x)^2 \leq 2,66$

$\Leftrightarrow 0,37 \leq \frac{1}{x(3 + \ln x)^2} \leq 0,57$

$\Leftrightarrow -0,57 \leq h'(x) \leq -0,37$

$\Leftrightarrow 0,37 \leq |h'(x)| \leq 0,57 \leq \frac{3}{5}$

Donc $\forall x \in [0,4; 0,5], |h'(x)| \leq \frac{3}{5}$

4. $U_0 = 0,45$ et $U_{n+1} = h(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$

a. $U_0 = 0,45 \in [0,4 ; 0,5]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que

$U_n \in [0,4 ; 0,5]$ et montrons que

$U_{n+1} \in [0,4 ; 0,5]$

$U_n \in [0,4 ; 0,5] \Rightarrow h(U_n) \in [0,4 ; 0,5]$

Car $\forall x \in [0,4 ; 0,5], h(x) \in [0,4 ; 0,5]$

Or par définition $U_{n+1} = h(U_n)$

D'où $U_{n+1} \in [0,4 ; 0,5]$ si $U_n \in [0,4 ; 0,5]$

On conclut donc que :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0,4 ; 0,5]$

b. $\alpha \in [0,4 ; 0,5] ; U_n \in [0,4 ; 0,5]$ et

On sait que

$\forall x \in [0,4 ; 0,5], |h'(x)| \leq \frac{3}{5}$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\left| \int_{\alpha}^{U_n} h'(x) dx \right| \leq \frac{3}{5} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[h(x)]_{\alpha}^{U_n}| \leq \frac{3}{5} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{3}{5} |U_n - \alpha|$$

Or $U_{n+1} = h(U_n)$ et $h(\alpha) = \alpha$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_n - \alpha|$$

c. En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_2 - \alpha|$$

$\vdots$

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{3}{5} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à

membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |0,45 - \alpha|$$

$$0,4 \leq \alpha \leq 0,5$$

$$\Leftrightarrow -0,05 \leq U_0 - \alpha \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

d. Dédution

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \text{ car } 0 < \frac{3}{5} < 1$$

On en déduit que :

La suite (U_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

e. On sait que :

$$\frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 10^{-5} \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-5}$$

$$\text{Or } \frac{1}{20} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 2 \times 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow -n \ln \left(\frac{5}{3}\right) \leq \ln 2 - 5 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{5 \ln 10 - \ln 2}{\ln 5 - \ln 3}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 21,18$$

$$\text{D'où } |U_n - \alpha| \leq 10^{-5} \forall n \geq 22$$

A partir de la valeur $n_0 = 22$ de n

on est sûr que U_n représente une valeur approchée de α à 10^{-5} près

PROBLEME 17**PARTIE A**

$$f(x) = x^2 e^{-x}; D_f = \mathbb{R}$$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$2. f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$$

$$3. \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(2x - x^2)$

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; 2[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]2; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, f$ est croissante

Sur $]0; 2[, f$ est décroissante

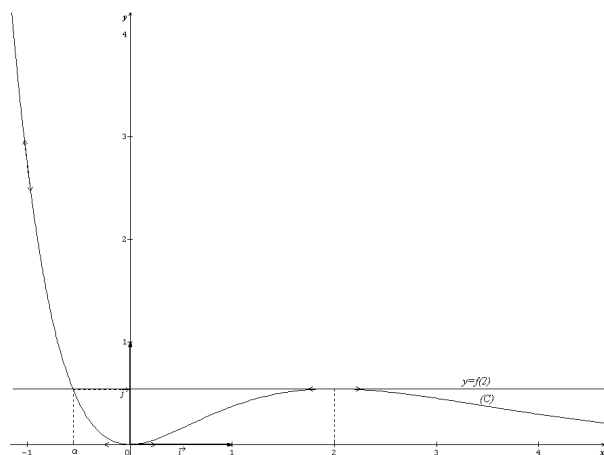
Sur $]2; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	—	0	+	0	—		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

$$4. (T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$$\text{Alors } (T): y = e(3x - 2)$$

5. Tracer de (T) et (C) **PARTIE B**

$$1. J = \int_0^1 x e^{-x} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$J = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$J = [-(x+1)e^{-x}]_0^1$$

$$J = 1 - \frac{2}{e}$$

$$2. f'(x) + f(x) = (2x - x^2)e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

$$\text{On a donc } f'(x) + f(x) = 2x e^{-x}$$

3. Dédution

$$f'(x) + f(x) = 2x e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x e^{-x} - f'(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2x e^{-x} - f'(x)) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2x e^{-x} dx -$$

$$\int_0^1 f'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 x e^{-x} dx -$$

$$[f(x)]_0^1$$

On en déduit que :

$$\int_0^1 f(x) dx = 2J - f(1)$$

$$\text{Car } f(0) = 0$$

$$4. \mathcal{A} = ua \times \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 - \frac{5}{e}$$

$$ua = 16 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 16 \left(2 - \frac{5}{e} \right) \text{ cm}^2$$

PARTIE C

1. La droite d'équation $y = f(2)$ coupe (C) en deux points d'abscisses respectives 2 et α comme l'indique le graphique et on a : $\alpha \in I = [-1; 0]$

$$2. g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}; D_g = I = [-1; 0]$$

$$g(x) = x$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}} = x$$

$$\Leftrightarrow x e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{2}{e}$$

$$\Leftrightarrow x^2 e^{-x} = \frac{4}{e^2} = 4e^{-2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(2)$$

On en déduit que :

α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ car d'après 1.), α est l'unique solution de l'équation $f(x) = f(2)$ sur I

$$3. \forall x \in [-1; 0], -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{e} \leq \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}} \leq -\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Or } \left[-\frac{2}{e}; -\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\right] \subset [-1; 0]$$

$$\text{D'où } \forall x \in [-1; 0], g(x) \in [-1; 0]$$

$$4. g'(x) = \left(-\frac{1}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$$

$$\forall x \in [-1; 0], -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{x}{2}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{e} \leq \left(-\frac{1}{e}\right) e^{\frac{x}{2}} \leq -\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} \leq |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$$

$$\text{Donc } \forall x \in [-1; 0], |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$$

5. Dédution

On sait que $\alpha \in [-1; 0]$ et

$$\forall x \in [-1; 0], |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$$

D'après l'inégalité de la moyenne, on a :

$$\left| \int_{\alpha}^x g'(t) dt \right| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[g(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$$

Or $g(\alpha) = \alpha$ d'après PARTIE C 2.)

D'où

$$\forall x \in [-1; 0], |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$$

$$6. U_0 = -0,5 \text{ et } U_{n+1} = g(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a. U_0 = -0,5 \in [-1; 0]$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [-1; 0]$

et montrons que $U_{n+1} \in [-1; 0]$

En effet :

$$U_n \in [-1; 0] \Rightarrow g(U_n) \in [-1; 0]$$

$$\text{Car } \forall x \in [-1; 0], g(x) \in [-1; 0]$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = g(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in [-1; 0] \text{ si } U_n \in [-1; 0]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [-1; 0]$$

b. On sait que :

$$\forall x \in [-1; 0], |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$$

Remplaçons x par U_n dans cette inégalité

$$\text{On a : } |g(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = g(U_n)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_n - \alpha|$$

c. En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_2 - \alpha|$$

:

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{e} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |-0,5 - \alpha|$$

$$-1 \leq \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5 \leq U_0 - \alpha \leq 0,5$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{e}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$$

$$d. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^n} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{e} < 1$$

On en déduit que :

La suite (U_n) est convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

$$e. \text{ On sait que : } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6} \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-6}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow -n \leq -6 \ln 10 + \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq 6 \ln 10 - \ln 2$$

$$\Leftrightarrow n \geq 13,12$$

$$\text{D'où } |U_n - \alpha| \leq 10^{-6} \forall n \geq 14$$

On conclut donc que :

La plus petite valeur de n cherché est donc $n_0 = 14$

PROBLEME 18**PARTIE A**

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x ;$$

$$D_g =]0; +\infty[$$

$$1. \quad g'(x) = -4x^2 \ln x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, 4x^2 > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-\ln x$

$$-\ln x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

Tableau de variations de g

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			2	
		1		$-\infty$

2. Sur $]0; 1]$, $g(x) > 0$ car $g(x) \in]1; 2]$
 Sur $]1; +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]-\infty; 2[$ et $0 \in]-\infty; 2[$.

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]1; +\infty[$

$$\begin{cases} g(1,89) = 0,02 > 0 \\ g(1,90) = -0,02 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } g(1,89) \times g(1,90) < 0$$

$$\text{Donc } 1,89 < \alpha < 1,90$$

3. Signe de $g(x)$

$$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}; D_f =]0; +\infty[$$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2+1} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{1+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2+1} = 0 \end{cases}$$

Déduction

(C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

$$2. \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2}$$

$$\text{Alors } f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

D'après PARTIE A

$$\forall x \in]0; \alpha[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; \alpha[$, f est croissante

Sur $]\alpha; +\infty[$, f est décroissante

Tableau de variations de f

x	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$-\infty$	$f(\alpha)$	0

$$3. \quad f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2}$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$\text{D'où } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

Encadrement de $f(\alpha)$

$$1,89 < \alpha < 1,90$$

$$\Leftrightarrow 7,1442 < 2\alpha^2 < 7,22$$

$$\Leftrightarrow 0,1385 < \frac{1}{2\alpha^2} < 0,1399$$

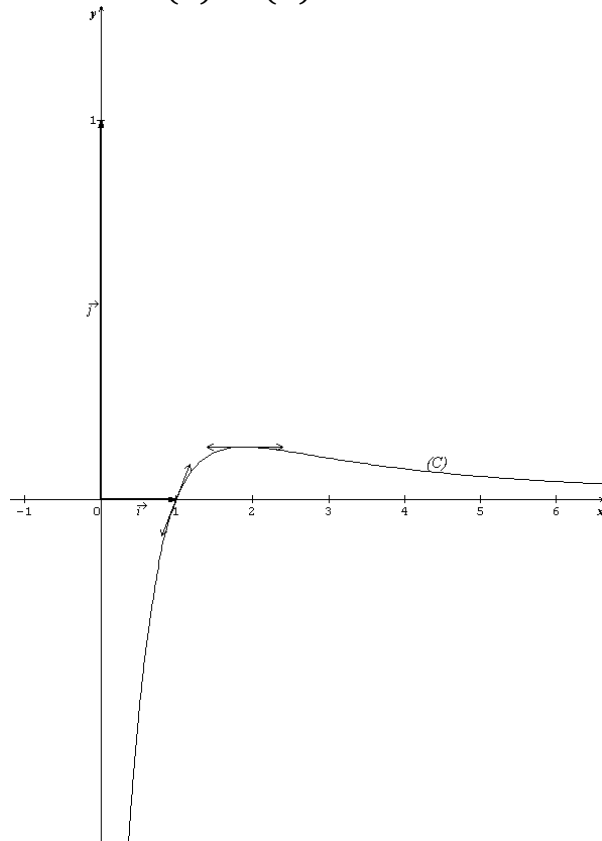
Donc à 2×10^{-3} près on a :

$$0,138 < f(\alpha) < 0,140$$

4. (T): $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Alors (T): $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

5. Tracer de (T) et (C)

**PARTIE C**

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt; D_F =]0; +\infty[$$

1. F est la primitive de f sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.

Donc F est dérivable sur $]0; +\infty[$

$$\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) = f(x)$$

2. $\forall t \geq 1, (1+t)^2 = 1 + 2t + t^2$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq 1 + t^2 \leq (1+t)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t^2}$$

$$\text{Car } \forall t \geq 1, \ln t \geq 0$$

$$\text{Donc } \forall t \geq 1, \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$$

3. $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$

a. Calcul de $I(x)$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$$

$$I(x) = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$$

$$I(x) = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t} \right]_1^x$$

$$I(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

b. Calcul de $J(x)$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = \ln t \\ v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{1+t} \end{cases}$$

$$J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t(1+t)} dt$$

$$\text{Or } \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \text{ et } t > 0$$

$$\text{D'où } J(x) = \left[-\frac{\ln t}{1+t} + \ln \left(\frac{t}{1+t} \right) \right]_1^x$$

$$J(x) = \ln 2 + \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) - \frac{\ln x}{1+x}$$

c. On sait que :

$$\forall t \geq 1, \frac{\ln t}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$$

$$\Leftrightarrow J(x) \leq F(x) \leq I(x)$$

On en déduit que : $\forall x > 1$

$$\ln 2 + \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) - \frac{\ln x}{1+x} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

4. Soit $x > 1$

a. **Interprétation graphique de $F(x)$**

$F(x)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $t = 1$ et $t = x$

b. $\mathcal{A} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

$$J(x) \leq F(x) \leq I(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = \ln 2 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{1+x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\ln 2 \leq \mathcal{A} \leq 1$$

PARTIE D

$$1. G'(x) = -\frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) - F'(x); x > 0$$

$$\Leftrightarrow G'(x) = -\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$$

$$\Leftrightarrow G'(x) = -\frac{1}{x^2}\left[f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2f(x)\right]$$

$$\text{Donc } \forall x > 0; G'(x) = 0$$

$$\text{Car } f\left(\frac{1}{x}\right) = -x^2f(x)$$

$$2. G'(x) = 0 \Leftrightarrow G(x) = K; K \in \mathbb{R}$$

$$\text{On a } G(1) = K = F(1) - F(1) = 0$$

$$\text{Donc } \forall x > 0; G(x) = 0$$

$$3. \forall x > 0; G(x) = 0 \Leftrightarrow F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x}$$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^+, X \rightarrow +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} F(X) = \mathcal{A}$$

PROBLEME 19

PARTIE A

$$g(x) = x - e^{x-1}; D_g = \mathbb{R}$$

1.

$$a. g'(x) = 1 - e^{x-1}$$

$$1 - e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[, g$ est croissanteSur $]1; +\infty[, g$ est décroissante

$$b. g(1) = 0$$

 $g(1)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq g(1) = 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$$

$$c. \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x - e^{x-1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow xe^{-x} - e^{-1} \leq 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$$

D'autres parts :

$$xe^{-x} \leq \frac{1}{e} \Leftrightarrow xe^{-x} \leq \frac{1}{e} < 1$$

$$\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, 1 - xe^{-x} > 0$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}};$$

$$a. D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - xe^{-x} \neq 0\}$$

 $1 - xe^{-x} \neq 0$ est toujours vrai car

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - xe^{-x} > 0$$

$$\text{Et donc } D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$

b. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} -x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

$$c. f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)}{(1-xe^{-x})^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0 \text{ et } (1 - xe^{-x})^2 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1 - x$

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $] -\infty; 1[$, f est croissante

Sur $] 1; +\infty[$, f est décroissante

Tableau de variation de f

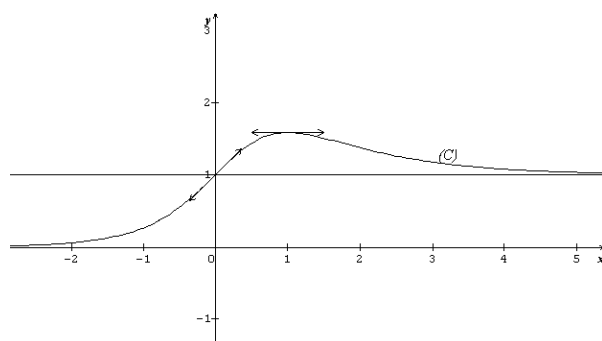
x	$-\infty$	1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{e}{e-1}$	

0 $\nearrow$ $\searrow$ 1

d. $(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

Alors $(T): y = x + 1$

e. Tracer de (T) et (C)



3.

a. Image de $[0; 1]$ et $[1; +\infty[$ par f

$$f([0; 1]) = \left[1; \frac{e}{e-1}\right]$$

$$f([1; +\infty[) = \left]1; \frac{e}{e-1}\right]$$

b. Dédution

$$\forall x \in [0; 1], 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, 1 < f(x) \leq \frac{e}{e-1}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in [0; +\infty[, 1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$$

PARTIE B

1. $I = \int_0^1 f(x) dx$

Interprétation graphique

I est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$$x = 0 \text{ et } x = 1$$

2. $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx; n$ entier non nul

a. $J_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$J_1 = [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$J_1 = [-(x+1)e^{-x}]_0^1$$

$$J_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

b. $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$

$$h(x) = x^2 e^{-2x}$$

$$H'(x) = [-2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c]e^{-2x}$$

$$H'(x) = h(x)$$

$$\Leftrightarrow -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c = x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Et $H(x) = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{-2x}$

Dédution

$$J_2 = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx = \int_0^1 h(x) dx$$

$$J_2 = [H(x)]_0^1$$

On en déduit que :

$$J_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{5}{e^2}\right)$$

3. $U_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$

a. $\forall x \in \mathbb{R},$

$$1 + x e^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = 1 + x e^{-x} + (x e^{-x})^2 + \dots + (x e^{-x})^n$$

$$\text{Or } 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},$

$$1 + x e^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (x e^{-x})^{n+1}}{1 - x e^{-x}}$$

b. Dédution

$$1 + x e^{-x} + x^2 e^{-2x} + \dots + x^n e^{-nx}$$

$$= \frac{1}{1 - x e^{-x}} - \frac{x^{n+1} e^{-(n+1)x}}{1 - x e^{-x}}$$

$$= f(x) - x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x)$$

D'après la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 dx + \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$$

$$= I - \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow U_n = I - \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$I - U_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$$

c. D'après A 1.c, on a :

$$\forall x \geq 0, 0 \leq x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^{n+1}}$$

Et D'après A 3.b, on a :

$$1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{e}{e^{n+1}(e-1)}$$

Donc $\forall x \geq 0$,

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$$

d. Dédution

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e^n(e-1)} dx$$

On en déduit que :

$$0 \leq I - U_n \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$$

Convergence de la suite (U_n)

$$0 \leq I - U_n \leq \frac{1}{e^n(e-1)}$$

$$\Leftrightarrow I - \frac{1}{e^n(e-1)} \leq U_n \leq I$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n(e-1)} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{e} < 1$$

On conclut donc que la suite (U_n) converge vers I

4. $0 \leq I - U_2 \leq \frac{1}{e^2(e-1)}$

$$\text{Alors } U_2 \leq I \leq U_2 + \frac{1}{e^2(e-1)}$$

PROBLEME 20

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)e^{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2}{x} - \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}; D_f = \mathbb{R}$$

PARTIE A

1. Continuité en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)e^{1-x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} - \ln x = 2$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

Alors f est continue en 1

Dérivabilité en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)e^{1-x} - 2}{x-1}$$

Posons $X = 1 - x$

Si $x \rightarrow 1^-$ alors $X \rightarrow 0^+$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2-X)e^X - 2}{-X} = e^X - 2 \cdot \frac{e^X - 1}{X} = -1$$

$$\text{Car } \begin{cases} e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2}{x} - \ln x - 2}{x-1}$$

Posons $X = x - 1$

Si $x \rightarrow 1^+$ alors $X \rightarrow 0^+$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - (X+1) \ln(X+1) - 2(X+1)}{X(X+1)}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} -\frac{2}{X+1} - \frac{\ln(X+1)}{X} = -3$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{2}{X+1} = 2 \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

Alors f n'est pas dérivable en 1

Interprétation graphique

Au point $(1; 2)$, (C) admet deux demi-tangentes d'équations :

$$(T_g): y = -x + 3$$

$$(T_d): y = -3x + 5$$

Le point $(1; 2)$ est donc un point anguleux pour (C)

2.

a. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

Interprétation graphique

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

3. Cas où $x < 1$

$$f'(x) = -xe^{1-x}$$

$$\forall x \in]-\infty; 1[, e^{1-x} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x$

$$-x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$$

Cas où $x > 1$

$$f'(x) = -\frac{2+x}{x^2}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, x^2 > 0 \text{ et } 2+x > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, f$ est croissante

Sur $]0; 1[, f$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	-1	-3
$f(x)$	$-\infty$	e	2	$-\infty$

4. Sur $]1; +\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors f réalise une bijection de

$]1; +\infty[$ sur $] -\infty; 2[$ et $0 \in] -\infty; 2[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]1; +\infty[$

$$\begin{cases} f(2,3) = 0,03 > 0 \\ f(2,4) = -0,04 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } f(2,3) \times f(2,4) < 0$$

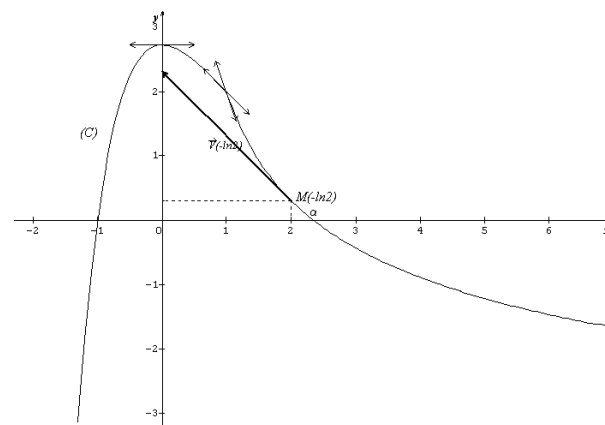
$$\text{Donc } 2,3 < \alpha < 2,4$$

D'autres parts :

Sur $]-\infty; 1[, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Donc l'autre point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses est le point de coordonnées $(-1; 0)$

5. Tracer de (C)

**PARTIE B**

1.

$$\text{a. } \mathcal{A} = \int_1^\alpha f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \int_1^\alpha \left(\frac{2}{x} - \ln x \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = \int_1^\alpha \frac{2}{x} dx - \int_1^\alpha \ln x dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\int_1^\alpha \ln x \, dx = [x \ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha dx$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} = [(2-x) \ln x + x]_1^\alpha$$

On a donc :

$$\mathcal{A} = \alpha - 1 + (2 - \alpha) \ln \alpha$$

b. On sait que :

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{2}{\alpha}$$

$$\text{D'où } \mathcal{A} = \alpha - 3 + \frac{4}{\alpha}$$

$$\text{Avec } p = 1; q = -3 \text{ et } r = 4$$

c. $2,3 < \alpha < 2,4$

$$\Leftrightarrow -0,7 < \alpha - 3 < -0,6 \text{ et}$$

$$1,66 < \frac{4}{\alpha} < 1,73$$

$$\text{Donc on a : } 0,9 < \mathcal{A} < 1,1$$

2. $\mathcal{V} = \pi \int_{-1}^0 f^2(x) dx$

$$\int_{-1}^0 f^2(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{2-2x} dx$$

1^{ère} intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = (x+1)^2 \\ v'(x) = e^{2-2x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'(x) = 2(x+1) \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{2-2x} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 f^2(x) dx = \left[-\frac{1}{2} (x+1)^2 e^{2-2x} \right]_{-1}^0 +$$

$$\int_{-1}^0 (x+1) e^{2-2x} dx$$

$$\int_{-1}^0 (x+1) e^{2-2x} dx$$

2^{ème} Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = (x+1) \\ v'(x) = e^{2-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{1}{2} e^{2-2x} \end{cases}$$

$$\int_{-1}^0 (x+1) e^{2-2x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2} (x+1) e^{2-2x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \frac{1}{2} e^{2-2x} dx$$

$$\text{Donc on a : } \int_{-1}^0 f^2(x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4} (2x^2 + 6x + 5) e^{2-2x} \right]_{-1}^0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f^2(x) dx = \frac{e^4 - 5e^2}{4}$$

$$\text{Donc : } \mathcal{V} = \frac{\pi e^2}{4} (e^2 - 5) uv$$

PARTIE C

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = t + 2e^t, t < 0 \end{cases}$$

1. $x = e^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln x$ et

$$y = -\ln x + 2e^{-\ln x} = -\ln x + \frac{2}{x}$$

Par ailleurs :

$$t < 0 \Leftrightarrow -t > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-t} > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

On a : $(\Gamma): y = f(x); x > 1$

On conclut donc que :

(Γ) est la partie de $(\mathcal{C})$

correspondant à $x > 1$

2. $\vec{V}(t) \begin{cases} x'(t) = -e^{-t} \\ y'(t) = 1 + 2e^t, t < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'(-\ln 2) = -2 \\ y'(-\ln 2) = 2 \end{cases}$$

$$\vec{V}(-\ln 2) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Représentation graphique

$$M(-\ln 2)(2; 1 - \ln 2)$$

(Voir graphique)

PROBLEME 21

$$\begin{cases} f(x) = (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) & \text{si } x > -1; \\ f(-1) = 0 \\ D_f = [-1; +\infty[\end{cases}$$

PARTIE A**1. Continuité en -1**

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Posons $X = \frac{x+1}{2}$

Si $x \rightarrow -1^+$, alors $X \rightarrow 0^+$ et

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} 2X \ln X = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

Alors f est continue en -1

Dérivabilité en -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = -\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en -1

Interprétation graphique

Au point de coordonnées $(-1; 0)$, (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

2. $\forall x > -1, f'(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) + 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{e} - 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) > -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} > e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{2}{e} - 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left]-1; \frac{2}{e} - 1\right[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in \left]\frac{2}{e} - 1; +\infty\right[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur } \left]-1; \frac{2}{e} - 1\right[, f \text{ est décroissante}$$

$$\text{Sur } \left]\frac{2}{e} - 1; +\infty\right[, f \text{ est croissante}$$

3.

$$\text{a. } (T_0): y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

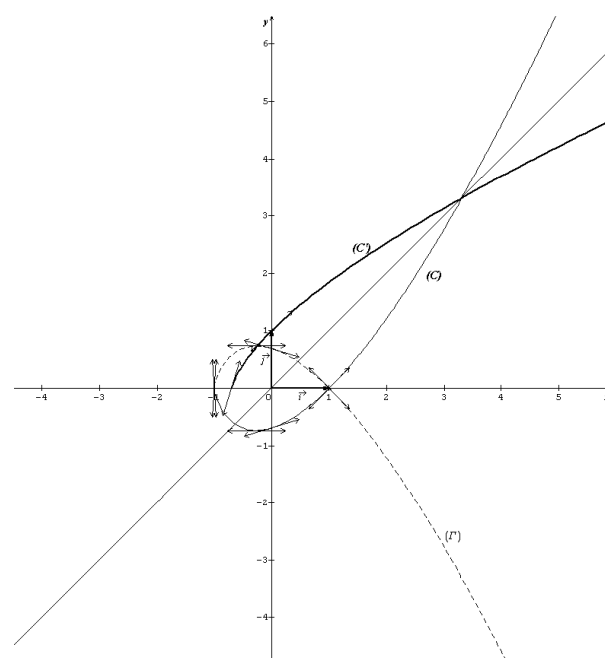
$$\text{Alors } (T_0): y = (1 - \ln 2)x - \ln 2$$

$$(T_1): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{Alors } (T_1): y = x - 1$$

b. Tableau de variation de f

x	-1	$\frac{2}{e} - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{2}{e}$	$+\infty$

4. Tracer de (C) **PARTIE B**

$\forall t > -1,$

$$\text{On pose } \mathcal{A}(t) = \int_0^t f(x) dx$$

1. Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ v'(x) = x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(t) = \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \right]_0^t -$$

$$\int_0^t \frac{1}{2}(x+1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{4}(x+1)^2 \right]_0^t$$

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}(t+1)^2 \ln\left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{1}{4}(t+1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

2. Posons $u = \frac{t+1}{2}$

Si $t \rightarrow -1^+$ alors $u \rightarrow 0^+$ et

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} 2u^2 \ln u - u^2 + \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

$$\text{Car } \lim_{u \rightarrow 0^+} u^2 \ln u = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow 0^+} u^2 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

3.

a. $\mathcal{A}_1 = ua \times \left(\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} - \int_t^1 f(x) dx \right)$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} - \int_t^1 f(x) dx$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \left(- \int_t^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \left(\int_0^t f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right)$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} (\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1))$$

$$ua = 4 \text{ cm}^2$$

Donc on a :

$$\mathcal{A}_1 = 4 \left(\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) \right)$$

b. $\lim_{\substack{t \rightarrow -1 \\ t > -1}} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$

$$\mathcal{A}(1) = -\frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{A}_1 = 4 \text{ cm}^2$$

PARTIE C

1. Sur $[0; +\infty[$, g est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $I = [-\ln 2; +\infty[$

2. (C') est la symétrique de la partie de (C) correspondant à $[0; +\infty[$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ (Voir le graphique)

3. $\mathcal{A}_2 = ua \times \int_{-\ln 2}^0 (g^{-1}(x) - f(x)) dx$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_2 = 4 \left(- \int_{-\ln 2}^0 f(x) dx + \int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x) dx \right)$$

$$\int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A}_2 = 4 \left(\int_0^{-\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x) dx \right)$$

$$\int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x) dx$$

Or par symétrie :

$$\int_{-\ln 2}^0 g^{-1}(x) dx = - \int_0^1 f(x) dx$$

D'où

$$\mathcal{A}_2 = 4 \left(\int_0^{-\ln 2} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right)$$

On a donc :

$$\mathcal{A}_2 = 4(\mathcal{A}(-\ln 2) - \mathcal{A}(1))$$

PARTIE D

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{-t} - 1 \\ y(t) = -2te^{-t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1. $x = 2e^{-t} - 1 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{x+1}{2}$ et $\Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Par conséquent :

$$y = -(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) = -f(x)$$

Par ailleurs :

$$t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{-t} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-t} - 1 > -1$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

En conclusion :

$$(\Gamma): y = -f(x); x > -1$$

(\Gamma) et (C) sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses

2. Pour la construction, voir graphique

PROBLEME 22**PARTIE A**

1. $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}; D_g = \mathbb{R}$

a. $g'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)^2 > 0$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1-x^2$

$1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Par conséquent :

$\forall x \in]-\infty; -1[, g'(x) < 0$

$\forall x \in]-1; 1[, g'(x) > 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $] -\infty; -1[, g$ est décroissante

Sur $] -1; 1[, g$ est croissante

Sur $] 1; +\infty[, g$ est décroissante

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	1		2		1

b. D'après ce tableau de variation

0 est le minimum de g sur $\mathbb{R}$

2 est le maximum de g sur $\mathbb{R}$

Par conséquent :

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq g(x) \leq 2$

c. $g''(x) = \frac{4x(x^4-2x^2-3)}{(1+x^2)^4}$

$g''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$

$\forall x \in [1; +\infty[, 4x > 0$ et

$(1+x^2)^3 > 0$

Alors le signe de $g''(x)$ dépend de celui de x^2-3

$x^2-3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Par conséquent :

$\forall x \in [1; \sqrt{3}[, g''(x) < 0$

$\forall x \in]\sqrt{3}; +\infty[, g''(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $[1; \sqrt{3}[, g'$ est décroissante

Sur $]\sqrt{3}; +\infty[, g'$ est croissante

d. Dédution

Tableau de variations de g'

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	0		0

D'après ce tableau :

$\forall x \in [1; +\infty[, -\frac{1}{4} \leq g'(x) \leq 0$

On en déduit que :

$\forall x \in [1; +\infty[, |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

2. $f(x) = 1 + \ln[g(x)]; D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

a. $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(x+1)^2}$

$\forall x \in D_f, (1+x^2) > 0$ et

$(x+1)^2 > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1-x^2$

$1-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Par conséquent :

$\forall x \in]-\infty; -1[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]-1; 1[, f'(x) > 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$

On en déduit que :

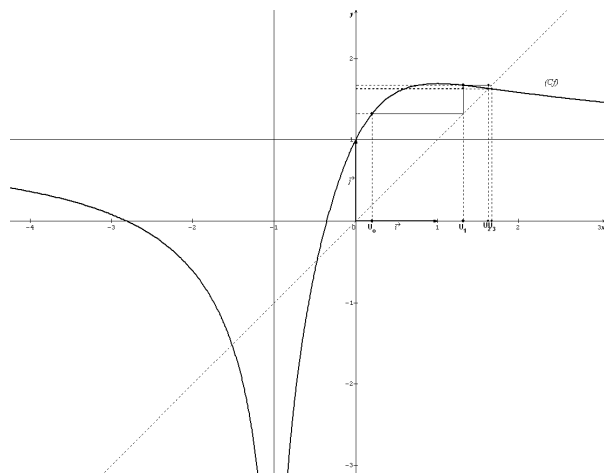
Sur $] -\infty; -1[, f$ est décroissante

Sur $] -1; 1[, f$ est croissante

Sur $] 1; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1		$1 + \ln 2$		1

b. Tracer de (C_f) 

- c. Sur $[0; +\infty[$,
1 est le minimum de f
 $1 + \ln 2$ est le maximum de f

**Donc $\forall x \in [0; +\infty[$,
 $1 \leq f(x) \leq 1 + \ln 2 < 2$
car $\ln 2 < 1$**

d. $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

D'après 1.) $\forall x \in [1; 2]$,

On a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$ et $1 \leq g(x) \leq 2$

$$\Leftrightarrow |g'(x)| \leq \frac{1}{4} \text{ et } \frac{1}{2} \leq \frac{1}{g(x)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{g'(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{1}{4}$$

Donc $\forall x \in [1; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

- e. L'équation $f(x) = m$ admet :

Deux solutions si $m \in]-\infty; 1[$

Une solution si $m = 1$

Deux solutions si $m \in]1; 1 + \ln 2[$

Une solution si $m = 1 + \ln 2$

Zéro solution si $m \in]1 + \ln 2; +\infty[$

PARTIE B

$U_0 = \frac{1}{5}$ et $U_{n+1} = f(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$

1. Voir figure

2. $U_1 = 1 + \ln\left(\frac{18}{13}\right) \approx 1,32$

On a : $1 < U_1 < 2$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $1 < U_n < 2$
et montrons que $1 < U_{n+1} < 2$

$$1 < U_n < 2 \Rightarrow 1 < f(U_n) < 2$$

Car $\forall x \in [1; 2] \subset [0; +\infty[$,

$$1 < f(x) < 2$$

Or par définition $U_{n+1} = f(U_n)$

D'où $1 < U_{n+1} < 2$ si $1 < U_n < 2$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < U_n < 2$$

3. $h(x) = f(x) - x$; $D_h = [1; 2]$

a. $h'(x) = f'(x) - 1$

$$\forall x \in [1; 2], f'(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x) - 1 < 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [1; 2], h'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $[1; 2]$, h est décroissante

- b. **Déduction**

$$f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0$$

Sur $[1; 2]$, h est continue car dérivable et est strictement décroissante

$$\begin{cases} h(1) = \ln 2 > 0 \\ h(2) = -0,4 < 0 \end{cases}$$

$$h(2) = -0,4 < 0$$

On a : $h(1) \times h(2) < 0$

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 1 et 2 ce qui montre aussi que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$

4. On sait que :

$$\forall x \in [1; 2], |f'(x)| \leq \frac{1}{4}; \alpha \in [1; 2] \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in [1; 2]$$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_{\alpha}^{U_n} f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[f(x)]_{\alpha}^{U_n}| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or } f(\alpha) = \alpha \text{ et } f(U_n) = U_{n+1}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

Déduction

En partant de cette inégalité on a :

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_2 - \alpha|$$

$$n = 3 \Rightarrow |U_4 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_3 - \alpha|$$

$\vdots$

$$n = n \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces $(n - 1)$ inégalités. On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |U_1 - \alpha|$$

$$|U_1 - \alpha| = \left|1 + \ln\left(\frac{18}{13}\right) - \alpha\right|$$

$$1 < \alpha < 2$$

$$\Leftrightarrow -1 + \ln\left(\frac{18}{13}\right) < U_1 - \alpha < \ln\left(\frac{18}{13}\right)$$

$$\Leftrightarrow -0,68 < U_1 - \alpha < 0,32 < 0,68$$

$$\Leftrightarrow |U_1 - \alpha| < 0,68 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Par ailleurs :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{4} < 1$$

Alors la suite (U_n) converge vers α et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

PROBLEME 23

PARTIE A

$$g(x) = 1 + (1 - x)e^{-x}; D_g = \mathbb{R}$$

1. $g'(x) = (x - 2)e^{-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $x - 2$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 2[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 2[, g$ est décroissante

Sur $]2; +\infty[, g$ est croissante

Tableau de variation de g

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$1 - e^{-2}$	1

Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$$

2. g décroît sur $]-\infty; 2[$ et croît sur $]2; +\infty[$ alors $g(2)$ est le minimum de g sur $\mathbb{R}$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g(2)$$

$$\text{Or } g(2) = 1 - e^{-2} > 0$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = x - 1 + xe^{-x}; D_f = \mathbb{R}$$

1. $f'(x) = g(x)$

Donc d'après PARTIE A :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}, g$ est croissante

2. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \end{cases}$$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. Sur $\mathbb{R}$, f est continue car dérivable et est strictement croissante

Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -\infty; +\infty[$ et $0 \in] -\infty; +\infty[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$

Vérification

$$\begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = e^{-1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } f(0) \times f(1) < 0$$

$$\text{Alors } 0 < \alpha < 1$$

4. (D): $y = x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

Alors la droite (D) est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

Position de (C) et (D)

$$f(x) - y = x e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f(x) - y$ dépend de celui de x

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - y < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $] -\infty; 0[$, (C) est en dessous de (D)

Sur $] 0; +\infty[$, (C) est au dessus de (D)

5. Coordonnées de A

La tangente en A à (C) a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ (D) a pour coefficient directeur 1

On a donc :

$$f'(x_A) = 1$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_A)e^{-x_A} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_A = 1 \text{ car } e^{-x_A} > 0$$

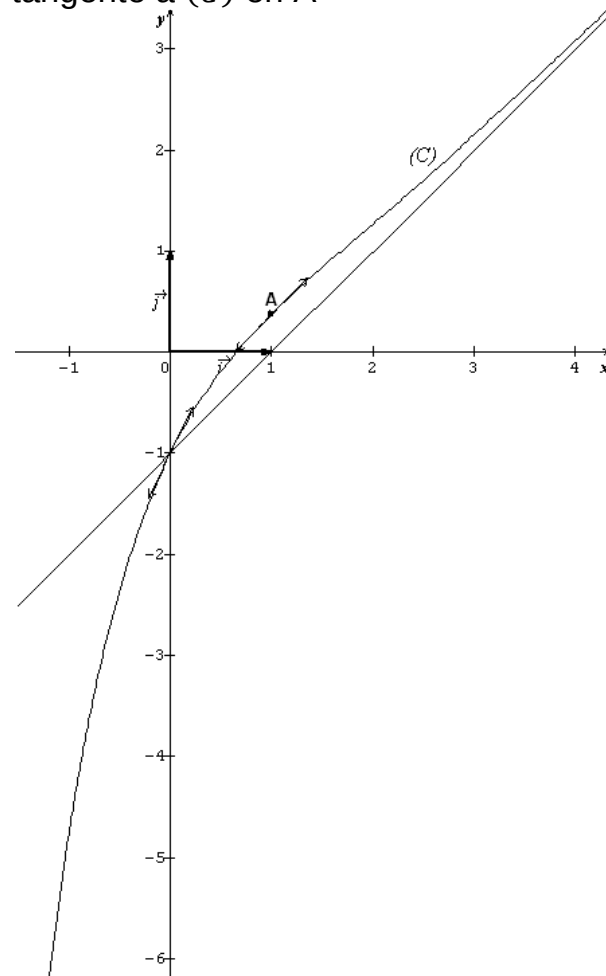
$$y_A = f(1) = e^{-1}$$

$$\text{Donc } A(1; e^{-1})$$

6. (T): $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\text{Alors (T): } y = 2x - 1$$

7. Tracer de (D), (T) et (C) ainsi que la tangente à (C) en A



8. $\mathcal{A}(\lambda) = ua \int_0^\lambda [f(x) - y] dx$

$$\int_0^\lambda [f(x) - y] dx = \int_0^\lambda x e^{-x} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_0^\lambda x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^\lambda + \int_0^\lambda e^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\lambda x e^{-x} dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^\lambda$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\lambda x e^{-x} dx = 1 - (\lambda+1)e^{-\lambda}$$

$$ua = 4cm^2$$

Donc $\mathcal{A}(\lambda) = 4[1 - (\lambda+1)e^{-\lambda}] cm^2$

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

Alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4$

PARTIE C

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 1 + x e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x e^x - e^x + x = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = x(e^x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = x$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = x$

2. $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}; D_h = [0; 1]$

a. $h'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0 \forall x \in [0; 1]$

On en déduit que :

Sur $[0; 1]$, h est croissante

x	0	1
$h'(x)$		—
$h(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{e}{e+1}$

b. Déduction

D'après ce tableau de variation,

$$\forall x \in [0; 1], h(x) \in \left[\frac{1}{2}; \frac{e}{e+1}\right]$$

$$\text{Or } \left[\frac{1}{2}; \frac{e}{e+1}\right] \subset [0; 1]$$

D'où $\forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$

3. $h''(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^x+1)^4}$

$$\forall x \in [0; 1], \frac{e^x}{(e^x+1)^4} > 0$$

$$0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq e^{2x} \leq e^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^2 \leq 1 - e^{2x} \leq 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; 1], h''(x) \leq 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; 1]$, h' est décroissante

$$\text{Et } \forall x \in [0; 1], h'(1) \leq h'(x) \leq h'(0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{e}{(e+1)^2} \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$$

Donc $\forall x \in [0; 1], 0 \leq h'(x) \leq \frac{1}{4}$

4. $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = h(U_n) \end{cases}$

a. $U_0 = 0 \in [0; 1]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [0; 1]$

et montrons que $U_{n+1} \in [0; 1]$

En effet :

$$U_n \in [0; 1] \Rightarrow h(U_n) \in [0; 1]$$

$$\text{Car } \forall x \in [0; 1], h(x) \in [0; 1]$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = h(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in [0; 1] \text{ si } U_n \in [0; 1]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$$

b. On sait que :

$$\forall x \in [1; 2], |h'(x)| \leq \frac{1}{4}; \alpha \in [0; 1] \text{ et}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0; 1]$$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_\alpha^{U_n} h'(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[h(x)]_\alpha^{U_n}| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

Or $h(\alpha) = \alpha$ d'après 1.) et

$$U_{n+1} = h(U_n)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$$

c. Déduction

En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_2 - \alpha|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |-\alpha|$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -\alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Par ailleurs :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{4} < 1$$

Alors la suite (U_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

Ceci montre que la suite (U_n) converge vers α

d. D'après ce qui précède,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^p \leq 10^{-6} \Rightarrow |U_p - \alpha| \leq 10^{-6}$$

$$\text{Or } \left(\frac{1}{4}\right)^p \leq 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow -p \ln 4 \leq -6 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 9,96$$

$$\text{Donc } |U_p - \alpha| \leq 10^{-6} \forall p \geq 10$$

Par exemple, pour $p = 10$, U_p est une valeur approchée à 10^{-6} près de α

PROBLEME 24

PARTIE A

$$f(x) = e^{-x} \sin x; D_f = \mathbb{R}$$

1. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ et } e^{-x} > 0$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

Déduction

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et la courbe

(C_f) admet une asymptote

horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$

2. $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$

$$\text{Or } \cos x - \sin x$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \sqrt{2} e^{-x} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

3. $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right], \sqrt{2} e^{-x} > 0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right], x + \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right] \text{ et}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right], f'(x) \geq 0$$

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi \right], f'(x) \leq 0$$

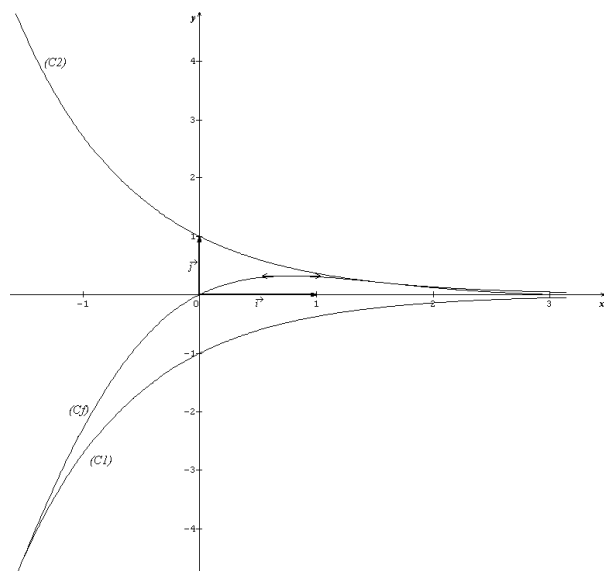
On en déduit que :

Sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} \right]$, f est croissante

Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \pi \right]$, f est décroissante

Tableau de variations de f

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-e^{\frac{\pi}{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$	0

4. Tracer des courbes (C_f) , (C_1) et (C_2) 

5.

a. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$
 $\Leftrightarrow x = k\pi$

Sur $\mathbb{R}$, les points communs de (C_f) et l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(k\pi; 0), k \in \mathbb{Z}$

Sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$, les points communs de (C_f) et l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(\pi; 0)$

b. $f(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = -1$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Sur $\mathbb{R}$, les points communs de (C_f) et (C_1) sont les points de coordonnées $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -e^{\frac{\pi}{2} - 2k\pi}), k \in \mathbb{Z}$

Sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$, le point commun de (C_f) et (C_1) est le point de coordonnées $(-\frac{\pi}{2}; -e^{\frac{\pi}{2}})$

c. $f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow \sin x = 1$
 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Sur $\mathbb{R}$, les points communs de (C_f) et (C_2) sont les points de coordonnées $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}), k \in \mathbb{Z}$

Sur $[-\frac{\pi}{2}; \pi]$, le point commun de (C_f) et (C_2) est le point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}; e^{-\frac{\pi}{2}})$

6. $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |e^{-x} \sin x| \leq e^{-x}$
 Donc $e^{-x} \leq 10^{-2} \Rightarrow |f(x)| \leq 10^{-2}$
 Or $e^{-x} \leq 10^{-2} \Leftrightarrow x \geq 2 \ln 10$

D'où $\forall x \geq 2 \ln 10, |f(x)| \leq 10^{-2}$
 On en déduit que : $\alpha = 2 \ln 10$

PARTIE B

1. $f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$
 $f''(x) = -2e^{-x} \cos x$
 $f^{(3)}(x) = 2e^{-x}(\cos x + \sin x)$
 $f^{(4)}(x) = -4e^{-x} \sin x$
 On a donc :
 $f^{(4)}(x) = -4f(x)$
 $\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x)$

2. $f(x) = -\frac{1}{4}f^{(4)}(x)$
 $\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{4}[f^{(3)}(x)]'$

On en déduit que :

$$F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$$

3. $I = \int_0^\pi e^{-x} \sin x \, dx$
 $I = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) \right]_0^\pi$

$$I = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$$

PARTIE C

$$I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) \, dx$$

1. $I_0 = \int_0^\pi f(x) \, dx = I$

Interprétation graphique

I_0 est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \pi$

2. $I_n = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) \right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$
 $I_n = \frac{e^{-(2n+1)\pi} + e^{-2n\pi}}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1)$

$$3. I_{n+1} = \frac{e^{-2(n+1)\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1)$$

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = e^{-2\pi} \Leftrightarrow I_{n+1} = e^{-2\pi} \times I_n$$

Alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $e^{-2\pi}$ et de premier terme $I_0 = \frac{e^{-\pi} + 1}{2}$

$$4. 0 < e^{-\pi} < 1$$

Alors la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

PROBLEME 25

PARTIE A

$$g(x) = (x-1)e^x + x^2; D_g = \mathbb{R}$$

$$1. g'(x) = x(e^x + 2)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 2 > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de x

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, g$ est décroissante

Sur $]0; +\infty[, g$ est croissante

Tableau de variations de g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

2. Sur $[0; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de

$[0; +\infty[$ sur $[-1; +\infty[$ et $0 \in [0; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur l'intervalle $[0; +\infty[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{1}{2}\right) = -0,57 < 0 \\ g(1) = 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } g\left(\frac{1}{2}\right) \times g(1) < 0$$

Donc α est dans l'intervalle

$$I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

3. Signe de $g(x)$

$$\forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + x}; D_f = [0; +\infty[$$

1. $\forall x \geq 0, f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + x} = x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)e^x + x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0$$

**Donc les équations $f(x) = x$
et $g(x) = 0$ sont équivalentes
sur $[0; +\infty[$**

D'après PARTIE A 2, α est la seule
solution de l'équation $g(x) = 0$ sur
 $[0; +\infty[$

Par conséquent :
 **α est aussi la seule solution de
l'équation $f(x) = x$**

2.

a. $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{(e^x+x)^2}$

$\forall x \in [0; +\infty[, e^x > 0, (e^x + x)^2 > 0$
Alors le signe de $f'(x)$ dépend de
celui de $x-1$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; 1[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) > 0$$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+xe^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$$

c. Tableau de variations de f

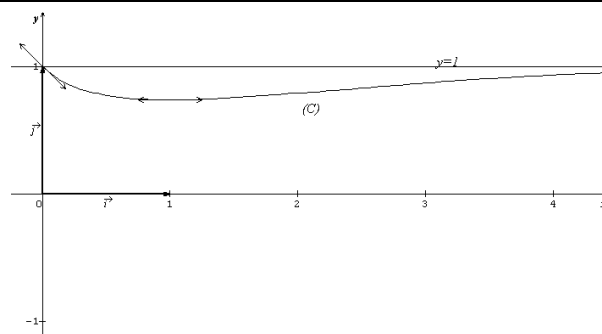
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$\searrow \frac{e}{e+1} \nearrow$	1

d. Construction de $(\mathcal{C})$

$$(T_0): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\text{Alors } (T_0): y = -x + 1$$

$$(T_1): y = \frac{e}{e+1}$$



PARTIE C

1. f décroît sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \frac{e}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{e}}{2\sqrt{e}+1}$$

$$\Leftrightarrow 0,73 \leq f(x) \leq 0,76$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in [0,73; 0,76] \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{Donc } \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

2. $\begin{cases} U_1 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n), \forall n > 1 \end{cases}$

a. $U_1 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ supposons que } U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{et montrons que } U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

En effet :

$$U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow f(U_n) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{Car } \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], f(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

$$\text{Or par définition, } U_{n+1} = f(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ si } U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

b. $f'(x) = -\frac{(1-x)e^x}{(e^x+x)^2}$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq \frac{1}{2} \text{ et } \sqrt{e} \leq e^x \leq e$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (1-x)e^x \leq \frac{e}{2}$$

Par ailleurs :

$$\frac{2\sqrt{e}+1}{2} \leq e^x + x \leq e + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{e}+1)^2}{4} \leq (e^x + x)^2 \leq (e+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(e+1)^2} \leq \frac{1}{(e^x+x)^2} \leq \frac{4}{(2\sqrt{e}+1)^2}$$

D'où on a :

$$0 \leq \frac{(1-x)e^x}{(e^x+x)^2} \leq \frac{2e}{(2\sqrt{e}+1)^2} \leq \frac{2e}{(2\sqrt{e})^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$$

$$\text{Donc } x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

c. On sait que $x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}; \alpha \in I$

$$\text{et } \forall n > 1, U_{n-1} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

D'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall n > 1$,

$$\left| \int_{\alpha}^{U_{n-1}} f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[f(x)]_{\alpha}^{U_{n-1}}| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

$$\Rightarrow |f(U_{n-1}) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ d'après PARTIE B1 et

$$U_n = f(U_{n-1})$$

$$\text{Donc } \forall n > 1,$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

d. Démonstration par récurrence

$$|U_1 - \alpha| = \left| \frac{1}{2} - \alpha \right|$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_1 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$\forall n > 1$, supposons que

$$|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ et montrons que}$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En effet :

$$|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{Or } |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha| \text{ d'où}$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ si}$$

$$|U_{n-1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

Alors la suite (U_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

Ceci montre que (U_n) converge vers α

f. On sait que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-7} \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-7}$$

$$\text{Or } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-7} \Leftrightarrow n \geq \frac{7 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 23,25$$

$$\text{Donc } |U_n - \alpha| \leq 10^{-7} \forall n \geq 24$$

A priori il suffit de calculer les 24 premiers termes de la suite pour obtenir une valeur approchée de α à 10^{-7} près

PROBLEME 26**PARTIE A**

$$g(x) = x^2 - 2 \ln x; D_g =]0; +\infty[$$

$$1. g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $x^2 - 1$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ et}$$

$$-1 \notin]0; +\infty[$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, g$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est croissante

$$2. g \text{ croît sur }]0; 1[\text{ et décroît sur }]1; +\infty[$$

Alors $g(1)$ est le minimum de g sur $]0; +\infty[$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq g(1)$$

$$\text{Or } g(1) = 1 > 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}; D_f =]0; +\infty[$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} (1 + \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

Interprétation graphique

L'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$

2.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$b. (\Delta): y = \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$$

Alors la droite (Δ) est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$

c. **Position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ)**

$$f(x) - y = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$$

Alors le signe de $f(x) - y$ dépend de celui de $1 + \ln x$

$$1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; \frac{1}{e}[, f(x) - y < 0$$

$$\forall x \in]\frac{1}{e}; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; \frac{1}{e}[, (\mathcal{C})$ est en dessous de (Δ)

Sur $]\frac{1}{e}; +\infty[, (\mathcal{C})$ est au dessus de (Δ)

$$(\mathcal{C}) = (\Delta) \Leftrightarrow f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

$$\text{Et } y = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e}$$

$$\text{Donc } A\left(\frac{1}{e}; \frac{1}{2e}\right)$$

$$3. \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{x^2 - 2 \ln x}{2x^2}$$

$$\text{Alors } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

$\forall x \in]0; +\infty[, 2x^2 > 0$ et d'après

PARTIE A, $g(x) > 0$ donc

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. La tangente (T) en B a pour coefficient directeur $f'(x_B)$
 (Δ) a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$
 $(T) // (\Delta) \Leftrightarrow f'(x_B) = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \frac{x_B^2 - 2 \ln x_B}{2x_B^2} = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \ln x_B = 0$
 $\Leftrightarrow x_B = 1$ et $y_B = f(1) = \frac{3}{2}$

Donc $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$

5. Sur $]0; +\infty[$, f est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $] -\infty; +\infty[$ et $0 \in] -\infty; +\infty[$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$

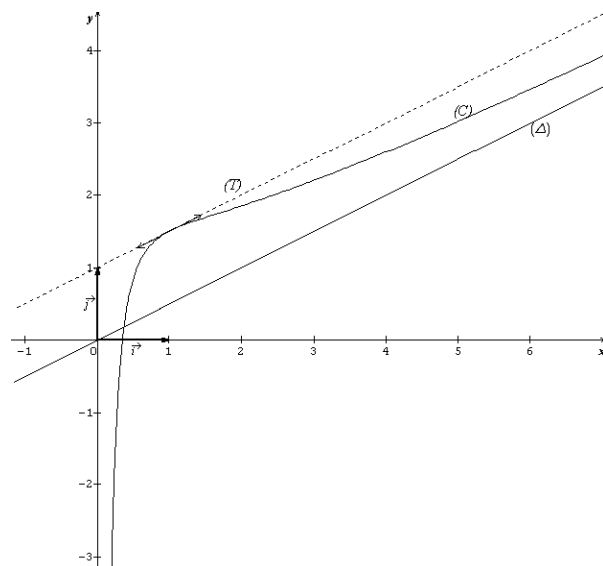
Justification de l'encadrement

$$\begin{cases} g(0,34) = -0,06 < 0 \\ g(0,35) = 0,03 > 0 \end{cases}$$

On a $g(0,34) \times g(0,35) < 0$

Donc $0,34 < \alpha < 0,35$

6. Traçons ($\mathcal{C}$) et les droites (Δ) et (T)



PARTIE C

$$x_n = e^{\frac{n-2}{2}}; n \in \mathbb{N}$$

1.

a. $x_{n+1} = e^{\frac{n-1}{2}}$
 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

**On a $x_{n+1} = x_n \sqrt{e}$
 Alors (x_n) est une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$ et de premier terme $x_0 = \frac{1}{e}$**

- b. $\sqrt{e} > 1$ alors la suite (x_n) est croissante

2. $a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx; n \in \mathbb{N}$

a. **Interprétation graphique**

a_n est l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe ($\mathcal{C}$), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$

b. $a_n = 4 \int_{e^{\frac{n-2}{2}}}^{e^{\frac{n-1}{2}}} \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx$

$$a_n = 4 \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{e^{\frac{n-2}{2}}}^{e^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$a_n = 4 \left[\left(\frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right) - \left(\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 \right) \right]$$

$$a_n = 4 \left(\frac{2n+1}{8} \right)$$

Donc $a_n = \frac{2n+1}{2}$

On en déduit que :

$$a_{n+1} - a_n = 1$$

**On a $a_{n+1} = a_n + 1$
 Alors (a_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $a_0 = \frac{1}{2}$**

PROBLEME 27

$$f_n(x) = \frac{(\ln x)^n}{x^2}; D_f =]0; +\infty[$$

PARTIE A

$$1. f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \times \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$$

On en déduit que :

L'axe des ordonnées et l'axe des abscisses sont des asymptotes à (C_1)

$$2. \forall x \in]0; +\infty[, f_1'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^3 > 0$$

Alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de celui de $1 - 2 \ln x$

$$1 - 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; \sqrt{e}[, f_1'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\sqrt{e}; +\infty[, f_1'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; \sqrt{e}[$, f_1 est croissante

Sur $]\sqrt{e}; +\infty[$, f_1 est décroissante

Tableau de variation de f_1

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

$$3. (T_1): y = f_1'(1)(x-1) + f_1(1)$$

$$\text{Alors } (T_1): y = x - 1$$

$$4. f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \times (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

On en déduit que :

L'axe des ordonnées et l'axe des abscisses sont des asymptotes à (C_2)

$$5. \forall x \in]0; +\infty[, f_2'(x) = \frac{2 \ln x (1 - \ln x)}{x^3}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^3 > 0$$

Alors le signe de $f_2'(x)$ dépend de celui de $\ln x (1 - \ln x)$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow x < e$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, f_2'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; e[, f_2'(x) > 0$$

$$\forall x \in]e; +\infty[, f_2'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[$, f_2 est décroissante

Sur $]1; e[$, f_2 est croissante

Sur $]e; +\infty[$, f_2 est décroissante

Tableau de variations de f_2

x	0	1	e	$+\infty$
$f_2'(x)$		- 0 +	0	-
$f_2(x)$	$+\infty$		$\frac{1}{e^2}$	
		$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		0		0

PARTIE B

$$1. f_1(x) - f_2(x) = \frac{\ln x (1 - \ln x)}{x^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 > 0$$

Alors le signe de $f_1(x) - f_2(x)$

dépend de celui de $\ln x (1 - \ln x)$

D'après PARTIE A5, on a :

$$\forall x \in]0; 1[, f_1(x) - f_2(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; e[, f_1(x) - f_2(x) > 0$$

$$\forall x \in]e; +\infty[, f_1(x) - f_2(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[$,

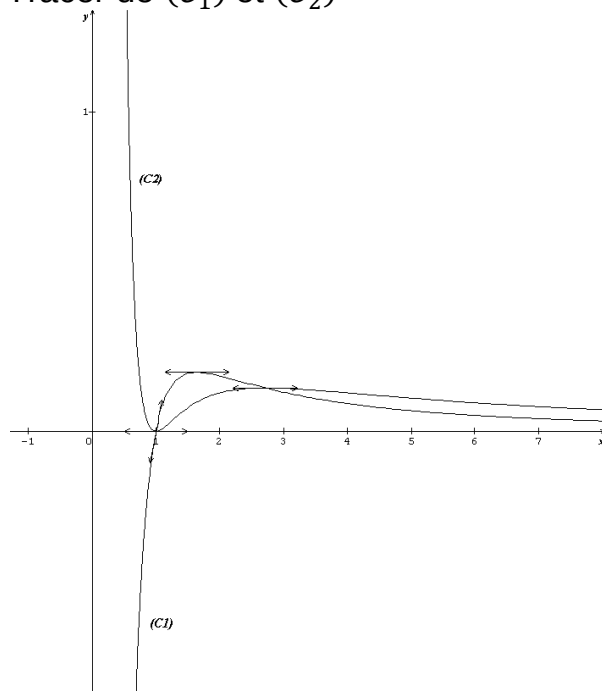
(C_1) est en dessous de (C_2)

Sur $]1; e[$,

(C_1) est au dessus de (C_2)

Sur $]e; +\infty[$,

(C_1) est en dessous de (C_2)

2. Tracer de (C_1) et (C_2) **PARTIE C**

$$I_n = \int_1^e f_n(x) dx ; n \in \mathbb{N}$$

$$1. F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$F'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

Déduction

$$I_1 = \int_1^e f_1(x) dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

D'après 1),

 $x \mapsto F(x)$ est une primitive de

$$x \mapsto -\frac{\ln x}{x^2}$$

On a donc $I_1 = -\int_1^e F'(x) dx$

$$I_1 = \left[-\frac{1+\ln x}{x} \right]_1^e$$

$$I_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$2. I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u'(x) = (n+1) \frac{(\ln x)^n}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} \right]_1^e +$$

$$(n+1) \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

$$\text{Alors } I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

$$3. I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1$$

$$\text{D'où } I_2 = 2 - \frac{5}{e}$$

$$\mathcal{A} = ua \times \int_1^e (f_1(x) - f_2(x)) dx$$

D'après la linéarité :

$$\mathcal{A} = ua \times (I_1 - I_2)$$

$$ua = 20 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 20 \left(-1 + \frac{3}{e} \right) \text{ cm}^2$$

PARTIE D**1. Démonstration par récurrence**

$$\frac{1}{1!} I_1 = I_1 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} \right)$$

 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, supposons que

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \text{ et}$$

montrons que $\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1}$

$$= 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

On sait que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ **Par conséquent :**

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\Rightarrow I_n = n! \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow (n+1)I_n = (n+1)n! \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e} + (n+1)I_n = -\frac{1}{e} + (n+1)! \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)! \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{(n+1)!} \left[1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

On conclut donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

2. $\forall x \in [1; e], 0 \leq \ln x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$\text{Or } \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$$

$$\text{D'où } 0 \leq I_n \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 1$$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq 1$$

3. $0 \leq I_n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} I_n \leq \frac{1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \leq \frac{1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow e - \frac{e}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} e - \frac{e}{n!} = e \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n!} = 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

PROBLEME 28

PARTIE A

$$(E): y' + y = x - 1$$

1. Calcul de $\int_1^x (t-1)e^t dt$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = t-1 \\ v'(t) = e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = e^t \end{cases}$$

$$\int_1^x (t-1)e^t dt$$

$$= [(t-1)e^t]_1^x - \int_1^x e^t dt$$

$$\int_1^x (t-1)e^t dt = [(t-2)e^t]_1^x$$

$$\int_1^x (t-1)e^t dt = (x-2)e^x + e$$

2.

a. $f(x) = z(x)e^{-x} \Leftrightarrow z(x) = f(x)e^x$ et $f'(x) = z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x}$

Supposons que f est solution de (E), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = x - 1$$

$$\Rightarrow z'(x)e^{-x} - z(x)e^{-x} + z(x)e^{-x} = x - 1$$

$$\Rightarrow z'(x)e^{-x} = x - 1$$

$$\Rightarrow z'(x) = (x-1)e^x$$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = (x-1)e^x$ si f est solution de (E)

Réciproquement

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$z'(x) = (x-1)e^x,$$

$$\text{On a : } [f(x)e^x]' = (x-1)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = (x-1)e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) + f(x) = x - 1$$

Alors f est solution de (E) si

$$\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = (x-1)e^x$$

En conclusion :

f est solution de (E) si, et seulement si, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$z'(x) = (x-1)e^x$$

b. D'après 1),

$$z'(x) = (x-1)e^x$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \int_1^x (t-1)e^t dt + K, K \in \mathbb{R}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$z(x) = (x-2)e^x + e + K, K \in \mathbb{R}$$

3.

a. $f(x) = z(x)e^{-x}$

On en déduit que :

$$f(x) = x - 2 + e^{1-x} + Ke^{-x}, K \in \mathbb{R}$$

b. $f(x) = x - 2 + e^{1-x} + Ke^{-x}$ et
 $f(1) = 0$
 $\Rightarrow Ke^{-1} = 0$
 $\Rightarrow K = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x - 2 + e^{1-x}$

PARTIE B

$f(x) = x - 2 + e^{1-x}; D_f = \mathbb{R}$

1.

a. $f'(x) = 1 - e^{1-x}$

$1 - e^{1-x} > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Par conséquent :

$\forall x \in]-\infty; 1[, f'(x) < 0$

$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[, f$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est croissante

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(xe^x - 2e^x + e)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \end{cases}$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

2.

a. $y = x - 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e \cdot e^{-x} = 0$

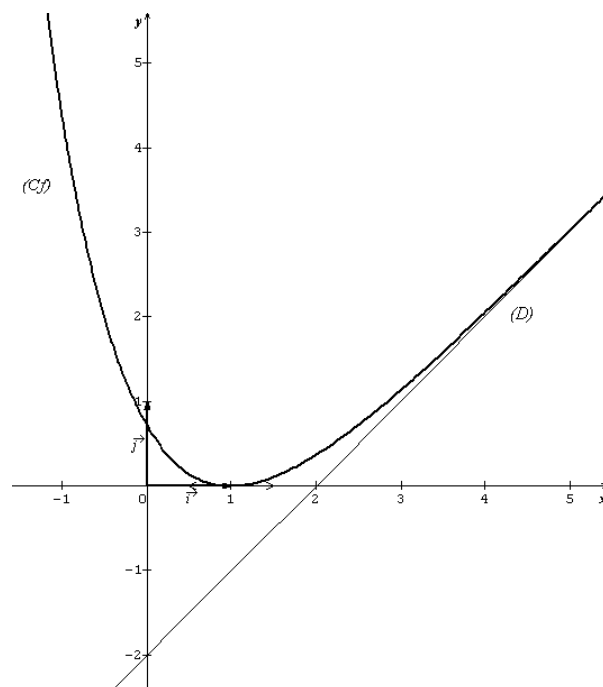
Alors la droite (D) , d'équation $y = x - 2$, est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

b. $f(x) - y = e^{1-x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}, (C_f)$ est au dessus de (D)

3. Tracer de (D) et (C_f)



PARTIE C

Soit x_0 un nombre réel strictement positif.

1. $S_1 = \int_0^{x_0} (f(x) - y) dx = \int_0^{x_0} e^{1-x} dx$

$S_1 = [-e^{1-x}]_0^{x_0}$

$S_1 = e - e^{1-x_0}$

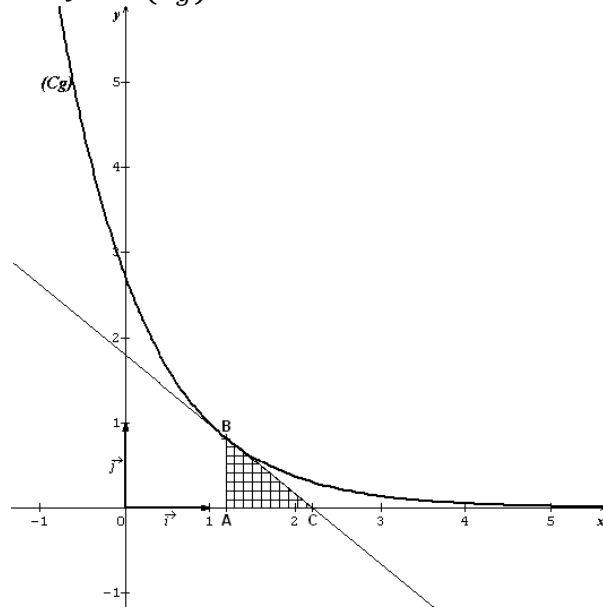
2. $g(x) = e^{1-x}; D_g = \mathbb{R}$

a. $g'(x) = -e^{1-x} < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}, g$ est décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0

Traçons (C_g) 

$$b. S_1 = \int_0^{x_0} e^{1-x} dx = \int_0^{x_0} g(x) dx$$

Interprétation géométrique

S_1 est donc l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe (C_g) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = x_0$

$$3. A(x_0; 0); B(x_0; g(x_0))$$

$$(T): y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0)$$

Coordonnées du point C

$$g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 1 + x_0$$

Donc C(1 + x_0; 0)

$$4. \text{Aire}(ABC) = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{g(x_0) \times 1}{2}$$

Car ABC est un triangle rectangle en A

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{e^{1-x_0}}{2}$$

Vérification

$$S_1 + 2S_2 = e - e^{1-x_0} + 2 \times \frac{e^{1-x_0}}{2}$$

Donc on a bien : $S_1 + 2S_2 = e$

PROBLEME 29**PARTIE A**

$$1. g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1);$$

$$D_g =]1; +\infty[$$

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - (x-1)\ln(x-1)$$

$$\text{Posons } X = x - 1$$

$$\text{Si } x \rightarrow 1^+, X \rightarrow 0^+ \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} 2X + 2 - X \ln X = 2$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 0^+} 2X + 2 = 2 \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

$$b. \forall x \in]1; +\infty[,$$

$$g'(x) = 1 - \ln(x-1)$$

$$c. 1 - \ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < e + 1$$

$$S_{]1; +\infty[} =]1; e + 1[$$

$$d. \forall x \in]1; e + 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]e + 1; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]1; e + 1[, g$ est croissante

Sur $]e + 1; +\infty[, g$ est décroissante

$$e. \text{ Sur } [e + 1; e^3 + 1], g \text{ est continue}$$

car dérivable et est strictement décroissante puis on a :

$$g(e + 1) \times g(e^3 + 1) = -e^4 < 0$$

Alors l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α dans l'intervalle $[e + 1; e^3 + 1]$

Signe de $g(x)$:

$$\forall x \in]1; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

$$2. \varphi(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}; D_\varphi =]1; +\infty[$$

$$a. \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

$$\text{Posons } X = x^2 - 1$$

$$\text{Si } x \rightarrow 1^+, X \rightarrow 0^+ \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln X}{\sqrt{X}+1} = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow 0^+} \sqrt{X} + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \times \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \varphi'(x) &= \frac{\frac{2x^2}{x^2-1} - \ln(x^2-1)}{x^2} \\ \Leftrightarrow \varphi'(x) &= \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall x \in]1; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

Et comme
 $x^2(x^2-1) > 0$

Alors $\varphi'(x)$ est du même signe que $g(x^2)$

$$\begin{aligned} \text{c. } \forall x \in]1; \sqrt{\alpha}[, x^2 \in]1; \alpha[\\ \forall x \in]\sqrt{\alpha}; +\infty[, x^2 \in]\alpha; +\infty[\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1; \sqrt{\alpha}[, \varphi'(x) &> 0 \\ \forall x \in]\sqrt{\alpha}; +\infty[, \varphi'(x) &< 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

Sur $]1; \sqrt{\alpha}[$, φ est croissante
 Sur $]\sqrt{\alpha}; +\infty[$, φ est décroissante

PARTIE B

$$f(x) = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}; D_f =]0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} \text{1. } \forall x \in]0; +\infty[, e^x \in]1; +\infty[\text{ et } \\ \varphi(e^x) = \frac{\ln((e^x)^2-1)}{e^x} = \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \varphi(e^x)$$

2. Dédution des limites

a. Posons $X = e^x$

Si $x \rightarrow 0, X \rightarrow 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \varphi(X) = -\infty$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

Si $x \rightarrow +\infty, X \rightarrow +\infty$ et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \varphi(X) = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{b. } f'(x) = e^x \varphi'(e^x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\varphi'(e^x)$

$$\forall x \in]0; \ln(\sqrt{\alpha})[, e^x \in]1; \sqrt{\alpha}[$$

$$\forall x \in]\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[, e^x \in]\sqrt{\alpha}; +\infty[$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; \ln(\sqrt{\alpha})[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; \ln(\sqrt{\alpha})[$, f est croissante

Sur $]\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[$, f est décroissante

Et comme f croît sur $]0; \ln(\sqrt{\alpha})[$ et décroît sur $]\ln(\sqrt{\alpha}); +\infty[$, alors f admet un maximum en $\ln(\sqrt{\alpha})$

3. Par suite, on a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq f(\ln(\sqrt{\alpha}))$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0; +\infty[, f(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

4. Représentation graphique de (C_f) Tableau de variations de f

x	0	$\ln(\sqrt{\alpha})$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$	0

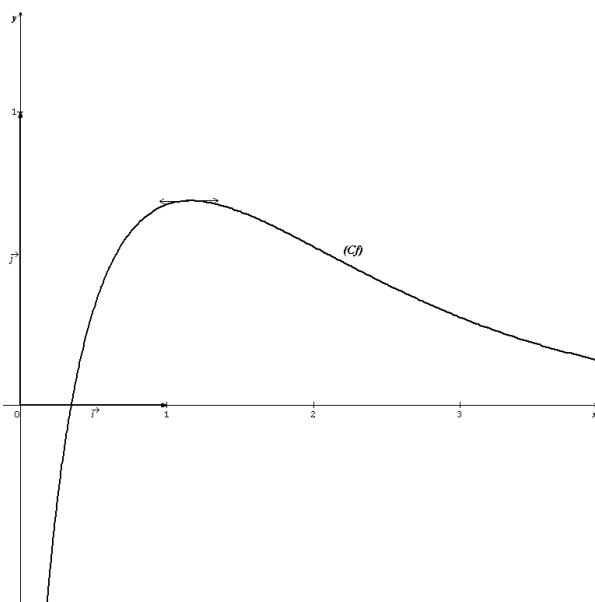
$$\alpha \simeq 10 \text{ et } f(\alpha) \simeq 0,70$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln(\sqrt{2})$$

(C_f) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\ln(\sqrt{2}); 0)$

**PARTIE C**

$$1. f'(x) + f(x) = e^x \times \frac{2e^{2x} - (e^{2x}-1)\ln(e^{2x}-1)}{e^{2x}(e^{2x}-1)} + \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$$

$$f'(x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

Or

$$\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

$$\text{D'où } f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$$

Ce qui montre bien que f est solution de l'équation

$$\text{différentielle : } y' + y = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$2. h(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1}$$

a. Une primitive H de h sur $]0; +\infty[$ est par exemple la fonction définie par :

$$H(x) = \ln(e^x - 1) - \ln(e^x + 1)$$

$$\text{Soit } H(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$$

b. **Déduction**

$$f'(x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = h(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = h(x) - f'(x)$$

On en déduit qu'une primitive F de f sur $]0; +\infty[$ est par exemple la fonction définie par :

$$F(x) = H(x) - f(x)$$

$$\text{Soit } F(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) - \frac{\ln(e^{2x}-1)}{e^x}$$

$$3. \mathcal{A} = ua \times \int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})} f(x) dx$$

$$\int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})} f(x) dx = [F(x)]_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})}$$

$$\int_{\ln(\sqrt{2})}^{\ln(\sqrt{\alpha})} f(x) dx$$

$$= \ln 3 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} + \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}\right)$$

$$\mathcal{A} = \left[\ln 3 - \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1} + \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}\right) \right] ua$$

PROBLEME 30**PARTIE A**

$$g(x) = x \ln x - x + 1; D_g =]0; +\infty[$$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} -x + 1 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\ln x - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

2. $g'(x) = \ln x$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$$

On en déduit que :Sur $]0; 1[, g$ est décroissanteSur $]1; +\infty[, g$ est croissante**Tableau de variation de g**

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	1	0	$+\infty$

DéductionD'après ce tableau de variation, g atteint son minimum en 1 et

$$g(1) = 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq 0$$

3. $(C) = (C') \Leftrightarrow g(x) = \ln x$

$$\Leftrightarrow x \ln x - x + 1 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(\ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e$$

Alors (C) et (C') ont deux points communs d'abscisses respectives 1 et e

Par ailleurs :

$$x \ln x - x + 1 \leq \ln x$$

$$\Leftrightarrow g(x) - \ln x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(\ln x - 1) \leq 0$$

Tableau de signe

x	0	1	e	$+\infty$
$x-1$		- 0 +		+
$\ln x - 1$		-	- 0 +	
$g(x) - \ln x$		+ 0 -	0 +	

D'après le tableau de signe, on a :

$$\forall x \in [1; e], x \ln x - x + 1 \leq \ln x$$

4.

$$\text{a. } J = \int_1^e (x-1) \ln x \, dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$$

$$J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x - 1 \right) dx$$

$$J = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x - \frac{1}{4}x^2 + x \right]_1^e$$

$$J = \frac{e^2 - 3}{4}$$

$$\text{b. } \text{Aire}(\Delta) = ua \times \int_1^e (\ln x - g(x)) dx$$

car sur $[1; e]$, (C) est en dessous de (C')

$$\int_1^e (\ln x - g(x)) dx$$

$$= \int_1^e -(x-1)(\ln x - 1) dx$$

$$= - \int_1^e (x-1) \ln x \, dx + \int_1^e (x-1) dx$$

$$= -J + \left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_1^e = \frac{e^2 - 4e + 5}{4}$$

$$ua = 4 \, \text{cm}^2$$

$$\text{Donc } \text{Aire}(\Delta) = (e^2 - 4e + 5) \, \text{cm}^2$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \ln x; D_f =]1; +\infty[$$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} \times \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$2. f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x \ln x}{x(x-1)^2}$$

$$f'(x) = - \frac{g(x)}{x(x-1)^2}$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, x(x-1)^2 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-g(x)$

Par conséquent :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) \leq 0$$

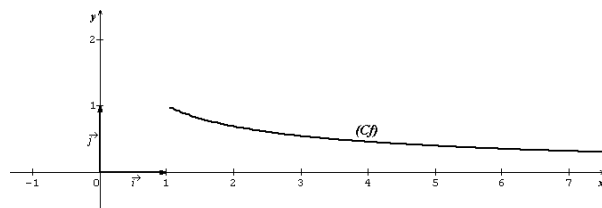
On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0

3. Tracer de la courbe ($\mathcal{C}_f$)

**PARTIE C**

1. Sur $]1; +\infty[, f$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors f réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]0; 1[$ et $\frac{1}{2} \in]0; 1[$.

Donc l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α

Montrons que $3,5 < \alpha < 3,6$

$$f([3,5; 3,6]) =]0,492; 0,501[\text{ et } \frac{1}{2} \in]0,492; 0,501[$$

Alors on a : $3,5 < \alpha < 3,6$

$$2. h(x) = \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; D_h =]1; +\infty[$$

$$a. f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + x = 0 + x$$

$$\Leftrightarrow \ln x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = x$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow h(x) = x$$

Déduction

α étant solution de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ alors } \alpha \text{ est aussi solution}$$

de l'équation $h(x) = x$ car ces deux équations sont équivalentes

$$b. h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} > 0 \forall x \in]1; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]1; +\infty[, h$ est croissante

$$c. I = [3; 4]$$

$$h([3; 4]) = [3,09; 3,88] \text{ et }$$

$$[3,09; 3,88] \subset [3; 4]$$

$$\text{Donc } \forall x \in I, h(x) \in I$$

D'autres parts :

$$3 \leq x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \leq \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq h'(x) \leq \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$$

Donc on a aussi :

$$\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$$

3. $U_0 = 3$ et pour tout $n \geq 0$,

$$U_{n+1} = h(U_n)$$

- a. On sait que :

$$\forall x \in [3; 4], |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_{\alpha}^{U_n} h'(x) dx \right| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[h(x)]_{\alpha}^{U_n}| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow |h(U_n) - h(\alpha)| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$$

Or $h(\alpha) = \alpha$ d'après 1.) et

$$U_{n+1} = h(U_n)$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_n - \alpha|$$

b. En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_2 - \alpha|$$

$\vdots$

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{5}{6} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$$

$$3 \leq \alpha \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq -\alpha \leq -3$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

c. $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0 \text{ car } 0 < \frac{5}{6} < 1$$

Alors la suite (U_n) converge et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

4. On sait que $|U_p - \alpha| \leq \left(\frac{5}{6}\right)^p$ donc

$$\left(\frac{5}{6}\right)^p \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \left(\frac{5}{6}\right)^p \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -p \ln \left(\frac{6}{5}\right) \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10}{\ln \left(\frac{6}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 37,88$$

On a donc $|U_p - \alpha| \leq 10^{-3} \forall p \geq 38$

U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près pour $p = 38$ par exemple.

PROBLEME 31

PARTIE A

$$f(x) = \ln(x+1) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{x+2};$$

$$D_f = D_g = [0; +\infty[$$

1. Variations de f

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0 \forall x \in [0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[$, f est croissante

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$+\infty$

Variations de g

$$g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \forall x \in [0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[$, g est croissante

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	2

2. $h(x) = f(x) - g(x); D_h = [0; +\infty[$

$$\text{a. } h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} \geq 0$$

$$\forall x \in [0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[$, h est croissante

b. $h(0) = 0$

c. h étant croissante sur $[0; +\infty[$ et

$$h(0) = 0 \text{ alors}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, h(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} \geq 0$$

D'où l'inégalité :

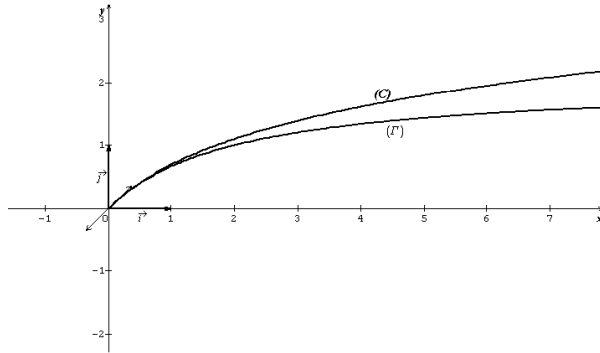
$$(1) \quad \frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \forall x \in [0; +\infty[$$

d. Interprétation graphique

Sur $[0; +\infty[$, la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de la courbe (Γ)

3. Traçons $(\mathcal{C})$ et (Γ)
 $f'(0) = g'(0) = 1$ et $f(0) = g(0) = 0$

Alors à l'origine O du repère, les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) admettent une même tangente $(\mathfrak{D})$ d'équation :
 $(\mathfrak{D}) : y = x$



PARTIE B

1. $\varphi(x) = \ln(x+1) - x$; $D_\varphi = [0; +\infty[$
 $\varphi'(x) = -\frac{x}{x+1} \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[$, φ est décroissante

2. $\varphi(x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$; $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\varphi(0) = 0$$

Déduction

φ étant décroissante sur $[0; +\infty[$ et $\varphi(0) = 0$

Alors $\forall x \in [0; +\infty[$, $\varphi(x) \leq 0$

On en déduit l'inégalité :

$$(2) \quad \ln(x+1) \leq x \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

3. $I = \int_0^1 \ln(x+1) dx$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$I = [x \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

$$\text{En remarquant que } \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{On a : } I = [(x+1) \ln(x+1) - x]_0^1$$

$$\text{Donc } I = 2 \ln 2 - 1$$

4. Déduction

$$J = \int_0^1 (x - \ln(x+1)) dx$$

$$J = \int_0^1 x dx - \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

$$J = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - I$$

$$\text{On en déduit que : } J = -2 \ln 2$$

D'autres parts :

$$K = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+2} - \ln(x+1) \right) dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{2x}{x+2} dx - \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

$$\text{En remarquant que : } \frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2}$$

$$\text{On a : } K = [2x - 4 \ln(x+2)]_0^1 - I$$

$$\text{On en déduit que : } K = 3 + \ln\left(\frac{4}{81}\right)$$

5. Interprétation géométrique de I et K

J est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la tangente $(\mathfrak{D})$ et les droites d'équations :
 $x = 0$ et $x = 1$

K est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par les courbes $(\mathcal{C})$ et (Γ) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$

PARTIE C

1. $u(0) = 1$ et si $x \neq 0$, $u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$;

$$D_u = [0; 1]$$

Continuité sur $[0; 1]$

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $] -1; +\infty[$ donc continue sur $]0; 1]$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur $]0; 1]$

On en déduit que :

La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0; 1]$ comme produit de deux fonctions continues sur $]0; 1]$

Etudions la continuité de u en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = u(0)$$

Alors u est continue en 0

La fonction u étant continue sur $]0; 1]$ et continue en 0, alors elle est continue sur $[0; 1]$

2. On pose : $L = \int_0^1 u(x) dx$

$$(1) \quad \frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1)$$

$$(2) \quad \ln(x+1) \leq x$$

De ces deux inégalités on a :

$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq x; \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x+2} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1 \quad \forall x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{2}{x+2} dx \leq \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx \leq \int_0^1 dx$$

Donc on a bien :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2} dx \leq L \leq 1$$

Déduction

$$[2 \ln(x+2)]_0^1 \leq L \leq 1$$

$$2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq L \leq 1$$

PROBLEME 32**PARTIE A**

$$f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1); \quad D_f =]0; +\infty[$$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} - 1 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x} - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = -\infty \end{cases}$$

2. Dérivée

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x}+1}{2x\sqrt{1+x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, 2x > 0 \text{ et } \sqrt{1+x} > 0$$

$$\text{Alors } \forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. Ordonnée de A

$$x_A = 3 \text{ alors } y_A = f(3) = 0$$

$$\text{Donc } A(3; 0)$$

Coordonnées de B, P et H

$$x_B = \frac{5}{4} \text{ et } y_B = f\left(\frac{5}{4}\right) = -\ln 2$$

$$\text{Donc } B\left(\frac{5}{4}; -\ln 2\right)$$

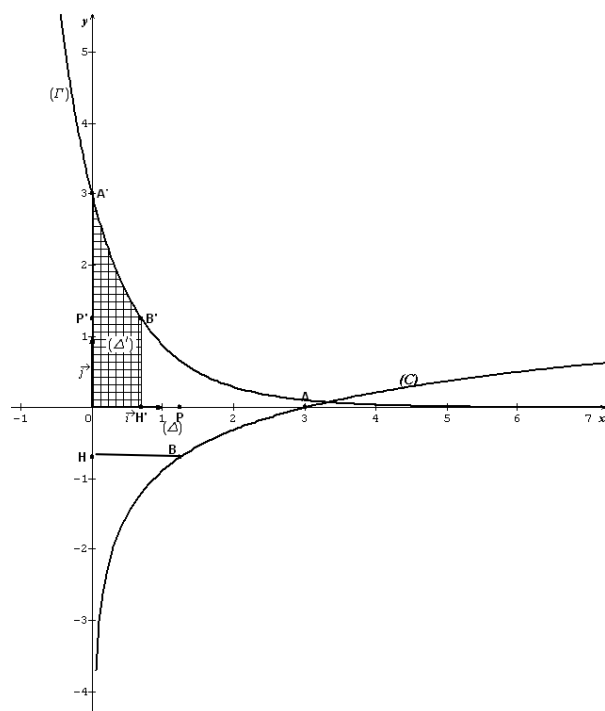
$$x_P = x_B = \frac{5}{4} \text{ et } y_P = 0$$

$$\text{Donc } P\left(\frac{5}{4}; 0\right)$$

$$x_H = 0 \text{ et } y_H = y_B = -\ln 2$$

$$\text{Donc } H(0; -\ln 2)$$

Tracer de (C)

**PARTIE B**

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$; $r(M) = M'$

1. $r(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

a. $z' = iz$

b. $x' + iy' = i(x + iy) = -y + ix$

On en déduit que :

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \text{ et par suite } \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$$

c. D'après ce qui précède :

Si $M(x; y)$ alors son image $M'(-y; x)$

Par conséquent :

$$A'(0; 3); B'(\ln 2; \frac{5}{4}); P'(0; \frac{5}{4})$$

2. $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$; $D_g = \mathbb{R}$

a. $M(x; y) \in (C)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -x' = f(y') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ -x' = \ln(\sqrt{1+y'} - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ e^{-x'} = \sqrt{1+y'} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ e^{-x'} + 1 = \sqrt{1+y'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ (e^{-x'} + 1)^2 = 1 + y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \\ y' = e^{-2x'} + 2e^{-x'} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' \in D_g = \mathbb{R} \\ y' = g(x') \end{cases}$$

$$\text{Car } e^{-2x'} + 2e^{-x'} > 0 \forall x' \in \mathbb{R}$$

Alors le point M' image de M par r appartient à la courbe (Γ) si M appartient à la courbe (C)

b. Tracer de (Γ)

(Voir figure)

PARTIE C

1. $\int_0^{\ln 2} g(x) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} \right]_0^{\ln 2}$

$$\int_0^{\ln 2} g(x) dx = \frac{11}{8}$$

2.

a. Le domaine (Δ) a même aire que le domaine plan (Δ') délimité par les segments $[A'O]$, $[OH']$ et $[H'B']$ et l'arc de courbe (Γ) d'extrémités B' et A'

On a donc :

$$\mathcal{A} = ua \int_0^{\ln 2} g(x) dx$$

$$\text{Soit } \mathcal{A} = \frac{11}{8} \times ua$$

b. $I = \int_{\frac{5}{4}}^3 \ln(\sqrt{1+x} - 1) dx = \int_{\frac{5}{4}}^3 f(x) dx$

$$\mathcal{A} = \text{Aire}(OHBP) - \int_{\frac{5}{4}}^3 f(x) dx$$

Car sur $[\frac{5}{4}; 3]$, la courbe (C) est en dessous de l'axe des abscisses

$$\mathcal{A} = OH \times OP - I$$

$$\mathcal{A} = \frac{5}{4} \ln 2 - I$$

Déduction

$$I = \frac{5}{4} \ln 2 - \mathcal{A}$$

$$\text{Donc on a : } I = \frac{10 \ln 2 - 11}{8}$$

PROBLEME 33**PARTIE A**

$$h(x) = xe^x - 2e^x + 2; D_h = [0; +\infty[$$

1. Dérivée

$$h'(x) = (x-1)e^x$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, e^x > 0$$

Alors le signe de $h'(x)$ dépend de celui de $(x-1)$

$$x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; 1[, h'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; 1[, h$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, h$ est croissante

Tableau de variation de h

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	0	$2-e$	$+\infty$

$$2. h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(4 - e^{\frac{3}{2}}\right)$$

Sur $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, h est continue car dérivable et est strictement croissante puis on a :

$$h\left(\frac{3}{2}\right) \times h(2) = 4 - e^{\frac{3}{2}} < 0$$

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution a dans $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$

C'est-à-dire qu'il existe un unique réel a appartenant à l'intervalle

$$I = \left[\frac{3}{2}; 2\right] \text{ tel que } h(a) = 0$$

3. On déduit de ce qui précède que :

$$\forall x \in [0; a[, h(x) < 0$$

$$\forall x \in]a; +\infty[, h(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \frac{e^x-1}{x^2}; D_f =]0; +\infty[$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \end{cases}$$

$$2. f'(x) = \frac{x^2 e^x - 2x e^x + 2x}{x^4}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]0; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{x e^x - 2e^x + 2}{x^3}$$

Dédution

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^3 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; a[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]a; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; a[, f$ est décroissante

Sur $]a; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variations de f

x	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)$	$+\infty$

$$3. f(a) = \frac{e^a-1}{a^2}$$

$$\text{Or } h(a) = 0 \Leftrightarrow e^a = -\frac{2}{a-2}$$

$$\text{D'où } f(a) = \frac{-\frac{2}{a-2}-1}{a^2}$$

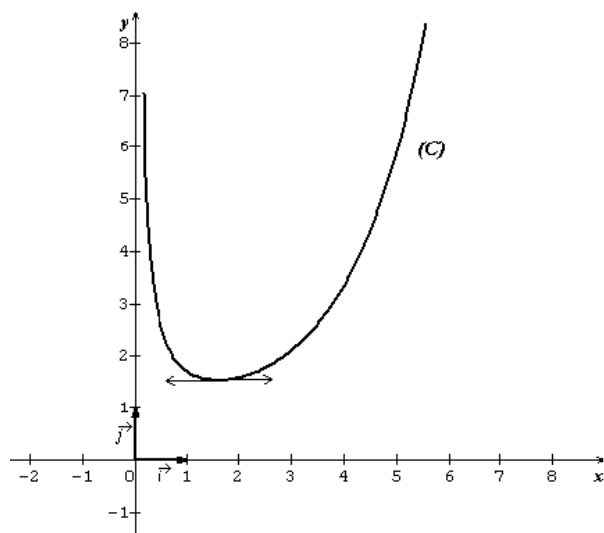
$$\text{On a donc : } f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$$

Dédution

$$a \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \text{ donc } a > 0 \text{ et } a-2 < 0$$

$$\text{On en déduit que : } f(a) > 0$$

4. Tracer de (C)



PARTIE C

1. $\forall x \in [0; +\infty[, h(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 2 = xe^x$$

$$\Leftrightarrow 2e^x(1 - e^{-x}) = xe^x$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - e^{-x}) = x$$

$$\text{Car } \forall x \in [0; +\infty[, e^x \neq 0$$

Alors $\forall x \in [0; +\infty[, h(x) = 0$ équivaut à $2(1 - e^{-x}) = x$

2. $g(x) = 2(1 - e^{-x}); D_g = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$

$$g'(x) = 2e^{-x}$$

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-2} \leq 2e^{-x} \leq 2e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0,27 \leq g'(x) \leq 0,45$$

$$\Leftrightarrow 0,27 \leq |g'(x)| \leq 0,45 \leq 0,5$$

Donc $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$

3.
$$\begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

On admet que, pour tout entier n , x_n appartient à I

a. On sait que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right], |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

D'où d'après l'inégalité de la moyenne on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \int_a^{x_n} g'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} |x_n - a|$$

$$\Rightarrow |[g(x)]_a^{x_n}| \leq \frac{1}{2} |x_n - a|$$

$$\Rightarrow |g(x_n) - g(a)| \leq \frac{1}{2} |x_n - a|$$

Or $g(a) = a$ d'après 1.) et par définition $g(x_n) = x_{n+1}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |x_n - a|$

Par ailleurs :

En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |x_1 - a| \leq \frac{1}{2} |x_0 - a|$$

$$n = 1 \Rightarrow |x_2 - a| \leq \frac{1}{2} |x_1 - a|$$

$$n = 2 \Rightarrow |x_3 - a| \leq \frac{1}{2} |x_2 - a|$$

$\vdots$

$$n = n - 1 \Rightarrow |x_n - a| \leq \frac{1}{2} |x_{n-1} - a|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - a|$$

$$|x_0 - a| = \left|\frac{3}{2} - a\right|$$

$$\frac{3}{2} \leq a \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -a \leq -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x_0 - a \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |x_0 - a| \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |x_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$

b. $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - a| \leq \frac{1}{2^n}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

Alors la suite (x_n) converge et on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$

c. On sait que $|x_p - a| \leq \frac{1}{2^p}$ donc

$$\frac{1}{2^p} \leq 10^{-3} \Rightarrow |x_p - a| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2^p} \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -p \ln 2 \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 9,96$$

On a donc :

$|x_p - a| \leq 10^{-3} \forall p \geq 10$

x_p est une valeur approchée de a à 10^{-3} près pour $p = 10$ par exemple

PROBLEME 34**PARTIE A**

$$f(x) = (x+3)e^{-\frac{x}{2}}; D_f = \mathbb{R}$$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = 0 \end{cases}$$

2. Dérivée

$$f'(x) = -(x+1)e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-\frac{x}{2}} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $-x-1$.

$$-x-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; -1[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]-1; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $] -\infty; -1[$, f est croissante

Sur $] -1; +\infty[$, f est décroissante

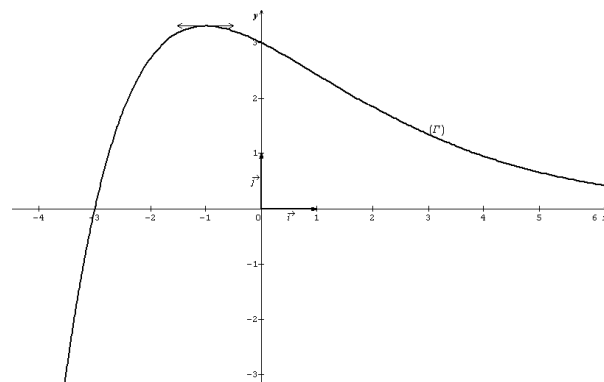
Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$2\sqrt{e}$	0

3. Construction de la courbe (Γ) de f

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$$

Alors (Γ) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-3; 0)$



$$4. I = \int_{-3}^0 xe^{-\frac{x}{2}} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$I = \left[-2xe^{-\frac{x}{2}} \right]_{-3}^0 + 2 \int_{-3}^0 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$I = \left[-2(x+2)e^{-\frac{x}{2}} \right]_{-3}^0$$

$$I = -4 - 2e^{\frac{3}{2}}$$

Déduction

$$\mathcal{A} = ua \times \int_{-3}^0 f(x) dx$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_{-3}^0 xe^{-\frac{x}{2}} dx +$$

$$3 \int_{-3}^0 e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = I + 3 \left[-2e^{-\frac{x}{2}} \right]_{-3}^0$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = 4e^{\frac{3}{2}} - 10$$

$$\mathcal{A} = \left(4e^{\frac{3}{2}} - 10 \right) \times ua$$

5.

- a. Graphiquement, la droite d'équation $y = 3$ coupe (Γ) au point d'abscisse 0 et en un deuxième point dont l'abscisse $\alpha \in]-2; -1[$

Alors l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont 0 et α

Montrons que $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} f(-2) = e \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{9}{4}} \simeq 3,17 \end{cases}$$

Comme $3 \in]e; 3,17[$

Alors on a bien : $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$

- b. Discussion suivant les valeurs de m du nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

Si $m \in]-\infty; 0]$, il y a une solution

Si $m \in]0; 2\sqrt{e}[$, il y a deux solutions

Si $m = 2\sqrt{e}$, il y a une solution

Si $m \in]2\sqrt{e}; +\infty[$, il n'y a pas de solution

PARTIE B

$$g(x) = 3\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right); D_g = \mathbb{R}$$

1. $f(x) = 3 \Leftrightarrow (x+3)e^{-\frac{x}{2}} = 3$
 $\Leftrightarrow x+3 = 3e^{\frac{x}{2}}$
 $\Leftrightarrow 3\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) = x$

$$\text{Donc } f(x) = 3 \Leftrightarrow g(x) = x$$

2. a. Dérivée première et seconde

$$g'(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}} \text{ et } g''(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{x}{2}}$$

Vérification

$$g'(\alpha) = \frac{3}{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Or } f(\alpha) = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha+3}{3}$$

$$\text{D'où } g'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$$

- b. $\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, g' est croissante

D'autres parts :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, g est croissante

3. $I = [-2; \alpha]$

- a. $g([-2; \alpha]) = [-1,9; \alpha]$

$$\text{Or } [-1,9; \alpha] \subset [-2; \alpha]$$

Donc pour tout x appartenant à I , $g(x)$ appartient à I

- b. $-2 \leq x \leq \alpha$

$$\Leftrightarrow g'(-2) \leq g'(x) \leq g'(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 0,55 \leq g'(x) \leq \frac{\alpha+3}{2}$$

$$\text{Or } -2 < \alpha < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\alpha+3}{2} \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{D'où } 0,5 \leq 0,55 \leq g'(x) \leq \frac{\alpha+3}{2} \leq \frac{3}{4}$$

On conclut donc que : pour tout x appartenant à I , $\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq \frac{3}{4}$

- c. On en déduit que : $\forall x \in [-2; \alpha]$,
 $\int_x^{\alpha} \frac{1}{2} dt \leq \int_x^{\alpha} g'(t) dt \leq \int_x^{\alpha} \frac{3}{4} dt$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}[t]_x^{\alpha} \leq [g(t)]_x^{\alpha} \leq \frac{3}{4}[t]_x^{\alpha}$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq g(\alpha) - g(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$
Or $-2 \leq x \leq \alpha$ d'où $\alpha - x \geq 0$

On a donc pour tout x de l'intervalle I ,

$$0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq g(\alpha) - g(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$$

4. $U_0 = -2$ et $U_{n+1} = g(U_n); n \in \mathbb{N}$

- a. Démonstration par récurrence

$$U_0 = -2 \in I = [-2; \alpha]$$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

et montrons que $U_{n+1} \in I$

En effet :

$$U_n \in I \Rightarrow g(U_n) \in I$$

$$\text{Or par définition } U_{n+1} = g(U_n)$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in I \text{ si } U_n \in I$$

On conclut donc que pour tout entier n , U_n appartient à l'intervalle I

Justification des inégalités :

En prenant $x = U_n$ dans l'inégalité 3c), on a :

$$0 \leq g(\alpha) - g(U_n) \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$$

$$\text{Or } U_{n+1} = g(U_n)$$

D'où pour tout entier n ,

$$0 \leq \alpha - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_n)$$

Par ailleurs :

$$n = 0 \Rightarrow 0 \leq \alpha - U_1 \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_0)$$

$$n = 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha - U_2 \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_1)$$

$$n = 2 \Rightarrow 0 \leq \alpha - U_3 \leq \frac{3}{4}(\alpha - U_2)$$

:

$$n = n-1 \Rightarrow 0 \leq \alpha - U_n \leq$$

$$\frac{3}{4}(\alpha - U_{n-1})$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (\alpha - U_0)$$

$$-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \alpha - U_0 < \frac{1}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \alpha - U_0 \leq 1$$

$$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (\alpha - U_0) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times 1$$

Donc pour tout entier n , on a :

$$0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{3}{4} < 1$

Alors la suite (U_n) est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$

c. On sait que $0 \leq \alpha - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\Leftrightarrow |\alpha - U_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{Donc } \left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2} \Rightarrow |\alpha - U_n| \leq 10^{-2}$$

$$\text{Or } \left(\frac{3}{4}\right)^p \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{-2 \ln 10}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 16,007$$

$$\text{Donc } |\alpha - U_n| \leq 10^{-2} \forall p \geq 17$$

Le plus petit entier cherché est donc $p = 17$

U_{17} représente une valeur approchée de α à 10^{-2} près

PROBLEME 35

PARTIE A

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}); D_f = [0; +\infty[$$

1.

a. $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b. $\forall x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln e^x (1 + e^{-2x}) \\ &= \ln e^x + \ln(1 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \ln e^x = x$$

D'où pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$ on a :

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$$

c. Soit (D) : $y = x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \\ \ln 1 = 0 \end{cases}$$

Alors (C) admet comme asymptote oblique la droite (D) d'équation $y = x$

d. $f(x) - y = \ln(1 + e^{-2x})$

$$\forall x \in [0; +\infty[, e^{-2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + e^{-2x} > 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0$$

$$\text{Donc } \forall x \in [0; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que sur $[0; +\infty[$, (C) est au dessus de (D)

2. Dérivée

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x + e^{-x}}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, e^x > 0 \text{ et } e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $1 - e^{-2x}$

$$1 - e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Par conséquent :

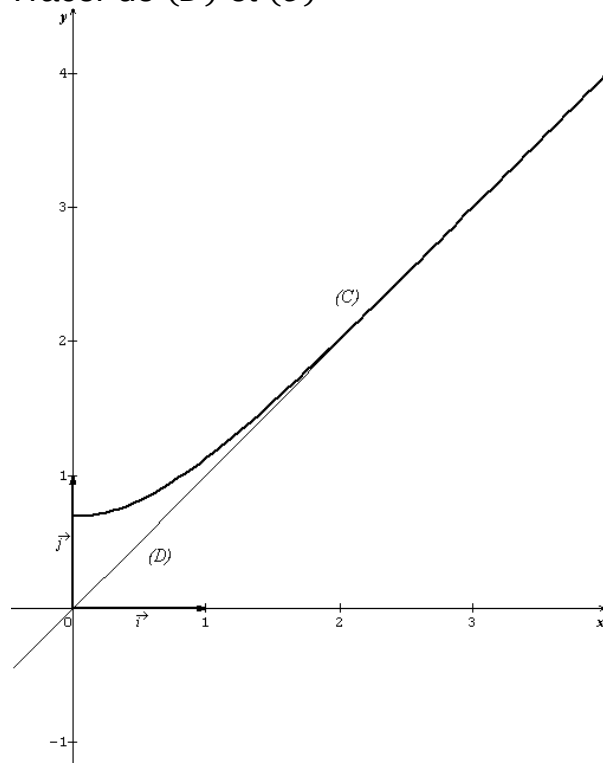
$$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) \geq 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[$, f est croissante

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

3. Tracer de (D) et (C) **PARTIE B**

$$F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt;$$

$$x \in [0; +\infty[$$

1. Interprétation géométrique de $F(x)$

$$\forall x > 0, F(x) = \int_0^x (f(t) - t) dt$$

Alors $F(x)$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $t = 0$ et $t = x$

2. Dérivée

$F'(x) = \ln(1 + e^{-2x})$ car par définition F est la primitive sur $[0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^{-2x})$ qui s'annule en 0.
 $\forall x \in [0; +\infty[, 1 + e^{-2x} > 1$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; +\infty[, F'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[, F$ est croissante

3. Soit $a > 0$

$$a. t \in [1; 1+a] \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 1+a$$

Donc pour tout t appartenant à l'intervalle $[1; 1+a]$, on a :

$$\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

b. Inégalité des accroissements finis

$$\frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{1+a} \frac{1}{a+1} dt \leq \int_1^{1+a} \frac{1}{t} dt \leq \int_1^{1+a} 1 dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+1} [t]_1^{1+a} \leq [\ln t]_1^{1+a} \leq [t]_1^{1+a}$$

$$\text{Donc on a : } \frac{a}{a+1} \leq \ln(a+1) \leq a$$

4. Soit $x > 0$

Prenons $a = e^{-2t}$ dans l'inégalité précédente, on a :

$$\frac{e^{-2t}}{e^{-2t}+1} \leq \ln(e^{-2t} + 1) \leq e^{-2t}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt \leq \int_0^x e^{-2t} dt$$

$$\text{Or } \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt = F(x)$$

$$\text{D'où } \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt$$

Et par suite :

$$\left[-\frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2t}) \right]_0^x \leq F(x) \leq$$

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \right]_0^x$$

Donc on a bien :

$$\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

5. D'après le théorème des gendarmes on a :

$$\frac{1}{2} \ln 2 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$$

6. $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt, n \in \mathbb{N}$

$$a. \text{ Soit } h(t) = \ln(1 + e^{-2t});$$

$$D_h = [0; +\infty[$$

$$h'(t) = \frac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} < 0 \forall t \in [0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $[0; +\infty[, h$ est décroissante et $h(0) = \ln 2 > 0$

$$\text{Donc } \forall t \in [0; +\infty[, h(t) > 0$$

Par conséquent :

$$\forall t \in [n; n+1],$$

$$0 \leq h(n+1) \leq h(t) \leq h(n)$$

L'inégalité de la moyenne donne :

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n)$$

$$\text{Or } \int_n^{n+1} h(t) dt = U_n$$

**D'où pour tout entier naturel n ,
on a : $0 \leq U_n \leq \ln(1 + e^{-2n})$**

b. On a en passant à la limite :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq 0$$

$$\text{Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2n}) = \ln 1 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

7. $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n, n \in \mathbb{N}$

$$\text{a. } S_n = \int_0^1 \ln(1 + e^{-2t}) dt + \int_1^2 \ln(1 + e^{-2t}) dt + \dots + \int_n^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

D'après la relation de Chasles,

$$S_n = \int_0^{n+1} \ln(1 + e^{-2t}) dt$$

$$\text{Donc on a : } S_n = F(n+1)$$

$$\text{b. } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe

Alors la suite (S_n) est convergente

Par ailleurs :

$$\text{On a } \frac{1}{2} \ln 2 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq \frac{1}{2} \text{ en}$$

passant à la limite

On en déduit que :

$$\frac{1}{2} \ln 2 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{1}{2}$$

PROBLEME 36

PARTIE A

$$g(t) = \ln(1+t) - \frac{2t}{1+t};$$

$$D_g =]-1; +\infty[$$

1. Dérivée

$$g'(t) = \frac{t-1}{(1+t)^2}$$

$$\forall t \in]-1; +\infty[, (1+t)^2 > 0$$

Alors le signe de $g'(t)$ dépend de celui de $t-1$

Par conséquent :

$$\forall t \in]-1; 1[, g'(t) < 0$$

$$\forall t \in]1; +\infty[, g'(t) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-1; 1[, g$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est croissante

2. $\lim_{t \rightarrow -1} g(t)$

$$= \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+t} ((1+t) \ln(1+t) - 2t)$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} g(t) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+t} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow -1^+} ((1+t) \ln(1+t) - 2t) = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1+t} = 2 \end{cases}$$

3. Sur $[1; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de

$[1; +\infty[$ sur $[\ln 2 - 1; +\infty[$ et

$$0 \in [\ln 2 - 1; +\infty[$$

Donc l'équation $g(t) = 0$ admet une unique solution α dans

$$[1; +\infty[$$

C'est-à-dire qu'il existe un réel α et un seul dans l'intervalle

$$[1; +\infty[\text{ tel que : } g(\alpha) = 0$$

Encadrement de α

$$g(3) = -0,1 < 0$$

$$g(4) = 0,009 > 0$$

$$\text{On a } g(3) \times g(4) < 0$$

$$\text{Alors } 3 < \alpha < 4$$

$$\begin{cases} g(3,9) = -0,002 < 0 \\ g(4,0) = 0,009 > 0 \end{cases}$$

On a $g(3,9) \times g(4,0) < 0$
Alors à 10^{-1} près, $3,9 < \alpha < 4,0$

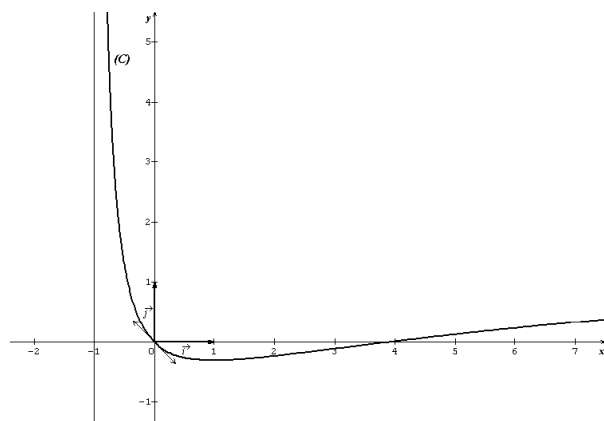
4. Tangente à (C) en l'origine O du repère

$$(T): y = g'(0)(t - 0) + g(0)$$

$$(T): y = -t$$

Tableau de variation de g

t	-1	1	$+\infty$
$g'(t)$		- 0 +	
$g(t)$	$+\infty$	$\ln 2 - 1$	$+\infty$



5.

a. $\frac{t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t} \Leftrightarrow \frac{t}{1+t} = \frac{at+a+b}{1+t}$
 $\forall t \in]-1; +\infty[$, on a : $t = at + a + b$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Donc $a = 1, b = -1$ et $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$

b. $\int_0^x g(t) dt$
 $= \int_0^x \ln(1+t) dt - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$

Calculons $\int_0^x \ln(1+t) dt$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = \ln(1+t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t} \\ v(t) = 1+t \end{cases}$$

$$\int_0^x \ln(1+t) dt = [(1+t) \ln(1+t)]_0^x - \int_0^x dt$$

Donc $\int_0^x \ln(1+t) dt$

$$= [(1+t) \ln(1+t) - t]_0^x$$

Par suite :

$$\int_0^x g(t) dt = [(3+t) \ln(1+t) - 3t]_0^x$$

$$\int_0^x g(t) dt = (3+x) \ln(1+x) - 3x$$

c. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^\alpha -g(t) dt$

$$\int_0^\alpha -g(t) dt = -\int_0^\alpha g(t) dt$$

$$\int_0^\alpha -g(t) dt = 3\alpha - (3+\alpha) \ln(1+\alpha)$$

$$ua = 4 \text{ cm}^2$$

Donc

$$\mathcal{A} = 4[3\alpha - (3+\alpha) \ln(1+\alpha)] \text{ cm}^2$$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$

D'où $\mathcal{A} = 4 \left[3\alpha - (3+\alpha) \times \frac{2\alpha}{1+\alpha} \right]$

On a donc bien : $\mathcal{A} = \frac{4\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}$

- d. **Encadrement de $\mathcal{A}$**

$$3,9 < \alpha < 4,0$$

$$\Leftrightarrow 0,9 < \alpha - 3 < 1 \text{ et}$$

$$15,6 < 4\alpha < 16$$

$$\Leftrightarrow 14,04 < 4\alpha(\alpha-3) < 16$$

D'autres parts :

$$4,9 < \alpha + 1 < 5,0$$

$$\Leftrightarrow 0,2 < \frac{1}{\alpha+1} < 0,204$$

On a donc : $2,8 < \mathcal{A} < 3,2$

PARTIE B

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x}); D_f = \mathbb{R}$$

1. La fonction $x \mapsto \ln(1 + e^{2x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto 1 + e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{2x} > 0$. On sait par ailleurs que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \left[\ln(1 + e^{2x}) - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} \right]$$

$$f'(x) = -e^{-x} g(e^{2x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0,$$

Alors $f'(x)$ et $g(e^{2x})$ sont de signes opposés

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(e^{2x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \alpha$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \sqrt{\alpha}$$

2. Posons $t = e^{2x}$

Si $x \mapsto -\infty, t \mapsto 0$ et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \times \frac{\ln(1+t)}{t} = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln e^{2x} (1 + e^{-2x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln e^{2x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-2x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

4. D'après PARTIE A,

$$\forall t \in]0; \alpha[, g(t) < 0$$

$$\forall t \in]\alpha; +\infty[, g(t) > 0$$

$$\text{Or } e^{2x} \in]0; \alpha[\Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln \sqrt{\alpha}[\text{ et }$$

$$e^{2x} \in]\alpha; +\infty[\Leftrightarrow x \in]\ln \sqrt{\alpha}; +\infty[$$

Par conséquent :

$$x \in]-\infty; \ln \sqrt{\alpha}[, f'(x) > 0$$

$$x \in]\ln \sqrt{\alpha}; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur }]-\infty; \ln \sqrt{\alpha}[, f \text{ est croissante}$$

$$\text{Sur }]\ln \sqrt{\alpha}; +\infty[, f \text{ est décroissante}$$

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	$\ln \sqrt{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\ln \sqrt{\alpha})$	
	0		0

5. f atteint son maximum pour $\ln \sqrt{\alpha}$ et ce maximum est

$$f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$$

Or d'après PARTIE A5,

$$\ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

$$\text{D'où } f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)\sqrt{\alpha}}$$

$$\text{On a bien } f(\ln \sqrt{\alpha}) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

$$6. 3,9 < \alpha < 4,0$$

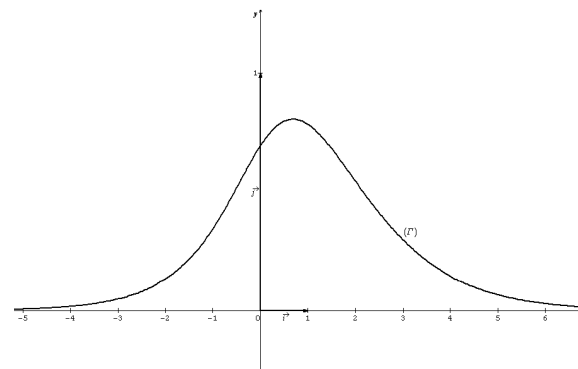
$$\Leftrightarrow 0,2 < \frac{1}{\alpha+1} < 0,204 \text{ et}$$

$$1,9 < \sqrt{\alpha} < 2,0$$

$$\Leftrightarrow 0,7 < \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} < 0,8$$

Alors une valeur approchée de ce maximum par excès est donc 0,8

7. Tracer de (Γ)



PROBLEME 37**PARTIE A**

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x+1} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0;$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

1. Continuité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x+1} = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

$$2. g(x) = \ln x + x + 1; D_g =]0; +\infty[$$

a. Dérivée

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \forall x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, g$ est croissante

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- b. Sur $]0; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur $] -\infty; +\infty[$ et $0 \in] -\infty; +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution β et une seule dans $]0; +\infty[$

$$g(0,27) = -0,03 < 0$$

$$g(0,28) = 0,007 > 0$$

On a $g(0,27) \times g(0,28) < 0$

Alors $0,27 \leq \beta \leq 0,28$

3. Dérivée

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{(\ln x + 1)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$$

$$\text{Donc } \forall x > 0, f'(x) = \frac{g'(x)}{(x+1)^2}$$

Déduction

$$\forall x > 0, (x+1)^2 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g'(x)$

D'après 2b)

Sur $]0; +\infty[, g$ croît et $g(\beta) = 0$

On a donc :

$$\forall x \in]0; \beta[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in]\beta; +\infty[, g(x) > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; \beta[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]\beta; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; \beta[, f$ est décroissante

Sur $]\beta; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variations de g

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\beta$	$+\infty$

$$f(\beta) = \frac{\beta \ln \beta}{\beta+1}$$

$$\text{Or } g(\beta) = 0 \Leftrightarrow \ln \beta = -\beta - 1$$

$$\text{D'où } f(\beta) = \frac{-\beta(\beta+1)}{\beta+1}$$

$$\text{On a bien } f(\beta) = -\beta$$

4. Limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln x - f(x)] = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

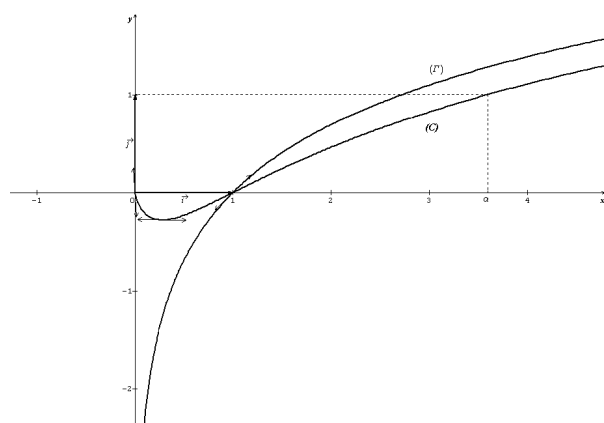
Interprétation graphique

(C) et (Γ) sont asymptotes au voisinage de $+\infty$

5. Traçons (C) et (Γ)

Tableau de $x \mapsto \ln x$

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln(x)$		$+\infty$

**PARTIE B**

$h(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$; $D_h =]0; +\infty[$

1. Sur $[0; \beta]$, $f(x) \in [-\beta; 0]$ donc $f(x) \neq 1$

Sur $] \beta; +\infty[$, f est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de $] \beta; +\infty[$ sur $] -\beta; +\infty[$ et

$1 \in] -\beta; +\infty[$

Donc l'équation $f(x) = 1$ admet une solution α et une seule dans

$[0; +\infty[$ et $\alpha \in] \beta; +\infty[$

$f([3,5; 3,7]) = [0,97; 1,02]$

On a $1 \in [0,97; 1,02]$

D'où $3,5 \leq \alpha \leq 3,7$

Pour la représentation du point d'abscisse α , voir le graphique

2. $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{x+1} = 1$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = \ln x$$

$$\Leftrightarrow e^{1+\frac{1}{x}} = e \cdot e^{\frac{1}{x}} = x$$

$$\Leftrightarrow h(x) = x$$

Donc les équations $f(x) = 1$ et $h(x) = x$ sont équivalentes

3. $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times h(x) < 0$

$$\forall x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[$, h est décroissante

4. Pour tout élément x de $[3,5; 3,7]$,

a. $h(x) \in [h(3,7); h(3,5)] = [3,56; 3,61]$

Or $[3,56; 3,61] \subset [3,5; 3,7]$

Donc $h(x)$ appartient aussi à $[3,5; 3,7]$

b. $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \times h(x)$

$$h''(x) = \frac{2x+1}{x^4} \times h(x) > 0$$

On en déduit que h' est croissante

Par conséquent :

$$h'(3,5) \leq h'(x) \leq h'(3,7) < 0$$

$$\Leftrightarrow |h'(3,7)| \leq |h'(x)| \leq |h'(3,5)|$$

$$\text{Or } |h'(3,5)| = 0,29 \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{D'où } |h'(x)| \leq |h'(3,5)| \leq \frac{1}{3}$$

c. On sait que $|h'(x)| \leq \frac{1}{3}$ et

$$\alpha \in [3,5; 3,7]$$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\left| \int_{\alpha}^x h'(t) dt \right| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[h(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |h(x) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$$

Or $h(\alpha) = \alpha$ d'après 2)

$$\text{D'où } |h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |x - \alpha|$$

5. $U_{n+1} = h(U_n)$ et $U_0 = 3,5$

a. Pour tout $n \geq 0$, prenons $x = U_n$ dans l'inégalité 4c)

$$\text{On a : } |h(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$$

Or $h(U_n) = U_{n+1}$

D'où pour tout entier $n \geq 0$,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$$

b. En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_2 - \alpha|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$|U_0 - \alpha| = |3,5 - \alpha|$$

$$3,5 \leq \alpha \leq 3,7$$

$$\Leftrightarrow -3,7 \leq -\alpha \leq -3,5$$

$$\Leftrightarrow -0,2 \leq U_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq 0,2 = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{5}$$

On en déduit donc que pour tout

$$\text{entier } n \geq 0, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$

Alors la suite (U_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

d. On sait que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Donc

$$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^p \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^p \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -\ln 5 - p \ln 3 \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10 + \ln 5}{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 7,75$$

$$\text{Donc } |U_p - \alpha| \leq 10^{-3} \forall p \geq 8$$

On en déduit que U_p est une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel α pour $p = 8$ par exemple

PROBLEME 38

$$f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}; D_f = \mathbb{R}$$

PARTIE A

1.

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) + f(x)$

$$= \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) + f(x) = 2$$

Déduction

$$f(-x) + f(x) = 2$$

$$f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$$

On n'en déduit que le point $A(0; 1)$ est un centre de symétrie de (Γ)

b. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+1} = 3 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x+1} = 3$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

c. Dérivée

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f est croissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	3

2.

a. (T): $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\text{Alors (T): } y = x + 1$$

b. $\varphi(x) = f(x) - (x + 1); D_\varphi = \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = f'(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{-e^{2x} - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2} = -\frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

Donc on a bien :

$$\varphi'(x) = - \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) \leq 0$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, φ est croissante

$$\varphi(0) = 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, \varphi(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi(x) > 0$$

c. (T): $y = x + 1$ et $f(x) - y = \varphi(x)$

D'après ce qui précède :

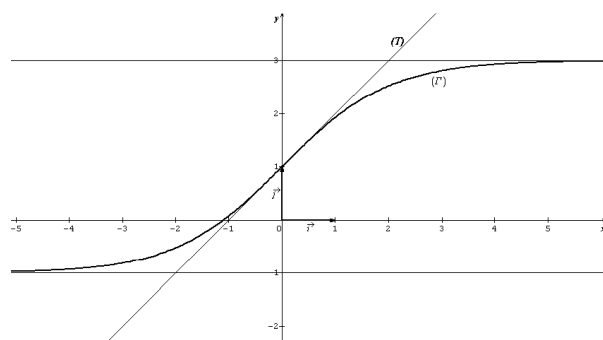
Sur $]-\infty; 0[$,

(Γ) est en dessous de (T)

Sur $]0; +\infty[$,

(Γ) est au dessus de (T)

3. Tracer de (T) et (Γ)



PARTIE B

1.

a. $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) - x - 1 = -1$$

$$\Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = -1$$

$$\text{Or } \varphi(x) = f(x) - (x + 1)$$

D'où $f(x) = x$ si et seulement si $\varphi(x) = -1$

b. Sur $\mathbb{R}$, φ est continue car dérivable et est strictement décroissante. Alors φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \right[=]-\infty; +\infty[$ et $-1 \in]-\infty; +\infty[$

Donc l'équation $\varphi(x) = -1$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et par équivalence α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$

$$\varphi(]2; 3]) =]-0,47; -1, 18[\text{ et } -1 \in]-0,47; -1, 18[$$

D'où $\alpha \in]2; 3[$

Tout ceci montre bien que la droite (D) d'équation $y = x$ coupe la courbe (Γ) en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3

2.

a. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{4e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$

On en déduit qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est par exemple la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = -x + 4 \ln(e^x + 1)$$

b. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^\alpha (f(x) - y) dx$ car sur $[0; \alpha]$, (Γ) est au dessus de (D)

$$\int_0^\alpha (f(x) - y) dx$$

$$= \left[-x - \frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(e^x + 1) \right]_0^\alpha$$

$$\int_0^\alpha (f(x) - y) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha - 4 \ln 2 + 4 \ln(e^\alpha + 1)$$

$$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1+\alpha}{3-\alpha}$$

Donc

$$\mathcal{A} = \left[4 \ln 2 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha - 4 \ln(3 - \alpha) \right] ua$$

PARTIE C

$$I = [2; 3]$$

1.

a. $\forall x \in \mathbb{R},$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{a}{e^x + 1} + \frac{b}{(e^x + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ae^x + a + b}{(e^x + 1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow ae^x + a + b = 4e^x$$

Ce qui donne par identification :

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \end{cases}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},$

$$f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$$

b. **Déduction**

$$2 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow e^2 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 0,04 \leq \frac{1}{e^x + 1} \leq 0,12 \text{ et }$$

$$-0,0144 \leq -\frac{1}{(e^x + 1)^2} \leq -0,0016$$

$$\Leftrightarrow 0,025 \leq \frac{1}{e^{x+1}} - \frac{1}{(e^{x+1})^2} \leq 0,118$$

$$\Leftrightarrow 0,1 \leq f'(x) \leq 0,47$$

$$\Leftrightarrow |f'(x)| \leq 0,47 \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

- c. On sait que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et $\alpha \in I$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a : $\forall x \in I,$

$$\left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[f(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ d'après PARTIE B1)

D'où $\forall x \in I,$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

2. $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- a. Pour tout entier naturel n , prenons $x = U_n$ dans l'inégalité précédente

$$\text{On a : } |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or } f(U_n) = U_{n+1}$$

D'où pour tout entier naturel n ,

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_n - \alpha|$$

En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_2 - \alpha|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

Donc pour tout entier naturel n ,

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} |3 - \alpha|$$

- b. $2 \leq \alpha \leq 3$

$$\Rightarrow 0 \leq 3 - \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow |3 - \alpha| \leq 1$$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} |3 - \alpha| \leq \frac{1}{3^n} \times 1$$

On en déduit que pour tout entier

$$\text{naturel } n, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{3^n}$$

$$\text{On sait que } |U_p - \alpha| \leq \frac{1}{2^p}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2^p} \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_p - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2^p} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow -p \ln 2 \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow p \geq 9,96$$

$$\text{D'où on a } |U_p - \alpha| \leq 10^{-3} \forall p \geq 10$$

U_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près pour $p = 10$ par exemple

PROBLEME 39

$$f(0) = \frac{3}{2} \text{ et}$$

$$f(x) = 2x \ln x - \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2};$$

$$D_f =]0; +\infty[$$

PARTIE A

$$g(x) = 2 \ln x - x + 1; D_g =]0; +\infty[$$

1. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

Dérivée

$$g'(x) = \frac{2-x}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $2 - x$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 2[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]2; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 2[, g$ est croissante

Sur $]2; +\infty[, g$ est décroissante

Tableau de variation de g

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	$-\infty$	$-1 + 2 \ln 2$	$-\infty$

2. Sur $]0; 2[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $]0; 2[$ sur $] -\infty; -1 + 2 \ln 2[$ et $0 \in] -\infty; -1 + 2 \ln 2[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0; 2[$ $1 \in]0; 2[$ et $g(1) = 0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $]0; 2[$

Par ailleurs :

Sur $[2; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de $[2; +\infty[$ sur $] -\infty; -1 + 2 \ln 2]$ et $0 \in] -\infty; -1 + 2 \ln 2]$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[2; +\infty[$

Déduction

$g(1) = g(\alpha) = 0$ d'où d'après le tableau de variation de g , on a :

$$\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

$$3. \begin{cases} g(3,5) = 0,005 > 0 \\ g(4) = -0,227 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a } g(3,5) \times g(4) < 0$$

$$\text{Alors } 3,5 \leq \alpha \leq 4$$

PARTIE B

$$1. \forall x > 0, f'(x) = 2 \ln x + 2 - x - 1$$

$$\text{Alors } \forall x > 0, f'(x) = g(x)$$

D'après PARTIE A 2)

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; \alpha[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, f$ est décroissante

Sur $]1; \alpha[, f$ est croissante

Sur $]\alpha; +\infty[, f$ est décroissante

2.

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \ln x - \frac{x}{2} - 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Conclusion :

La courbe (C) de f admet au point de coordonnées $(0; \frac{3}{2})$ une demi-tangente verticale dirigée vers le bas

3.

a. $f(\alpha) = 2\alpha \ln \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha + \frac{3}{2}$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{\alpha-1}{2}$

D'où $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 4\alpha + 3)$

Et donc $f(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha - 1)(\alpha - 3)$

$3,5 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow \frac{5}{8} \leq f(\alpha) \leq \frac{3}{2}$

Sur $]0; \alpha], f(x) \in [0; \frac{3}{2}]$ et $f(1) = 0$

Donc 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0; \alpha]$

Par ailleurs :

Sur $]\alpha; +\infty[$, f est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors f réalise une bijection de $]\alpha; +\infty[$ sur $]-\infty; f(\alpha)[$ et $0 \in]-\infty; f(\alpha)[$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\alpha; +\infty[$

b. $\begin{cases} f(5) = 0,09 > 0 \\ f(6) = -0,9 < 0 \end{cases}$

On a $f(5) \times f(6) < 0$

D'où $5 \leq \beta \leq 6$

4.

a. (D): $y = h(x) = (2 \ln 5 - 4)x + 4$

$\Delta(x) = f(x) - h(x)$; $D_\Delta = [5; +\infty[$

$\Delta'(x) = f'(x) - f'(5) = g(x) - g(5)$

$\forall x \in [5; +\infty[, \Delta'(x) < 0$

Car sur $[5; +\infty[$, g est décroissante

On en déduit que :

Sur $[5; +\infty[$, Δ est décroissante

Par conséquent :

Pour tout $x \geq 5$, $\Delta(x) \leq \Delta(5)$

$\Leftrightarrow f(x) - h(x) \leq 0$

Donc pour tout $x \geq 5$, $f(x) \leq h(x)$

b. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2 - \ln 5}$

Alors (D) coupe l'axe (Ox) au point d'abscisse $\lambda = \frac{2}{2 - \ln 5}$

D'après ce qui précède :

Sur $[5; +\infty[$, (C) est en dessous de (D)

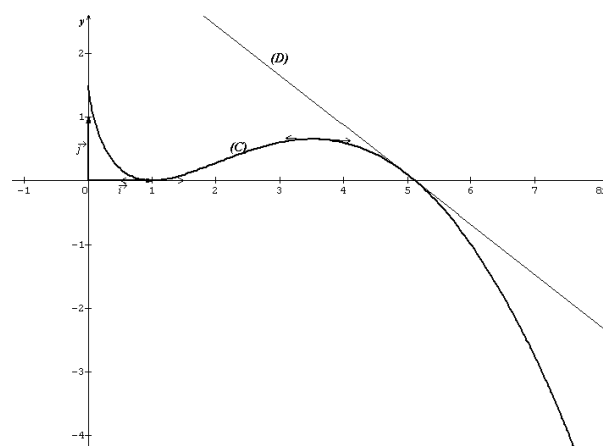
Et par ailleurs :

(C) et (D) coupent l'axe (Ox) respectivement aux points d'abscisses β et λ .

Donc on a bien $\beta \leq \lambda$

5. Tableau de variation de f

x	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\frac{3}{2}$			$f(\alpha)$	
			0		$-\infty$



PARTIE C

$F(x) = x^2 \ln x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}$

$D_F =]0; +\infty[$

1. $F'(x) = 2x \ln x + x - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$

$\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) = f(x)$ et

$F(1) = 0$

Donc F est sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la primitive de f qui s'annule au point 1

C'est-à-dire que $\forall x \in]0; +\infty[$,

$F(x) = \int_1^x f(t) dt$

2. On pose $\mathcal{A} = \int_1^\beta f(t) dt$

a. $F'(x) = f(x) \geq 0 \forall x \in [5; \beta]$

On en déduit que :

Sur $[5; \beta]$, F est croissante

Par conséquent :

$$F(5) \leq F(\beta) \quad (1)$$

b. $\mathcal{A} = \int_1^\beta f(t)dt$

D'après la relation de Chasles, on a :

$$\mathcal{A} = \int_1^5 f(t)dt + \int_5^\beta f(t)dt$$

Or $\int_1^5 f(x)dx = F(5)$ par définition et

$$\int_5^\beta f(t)dt \leq \int_5^\beta h(t)dt \text{ d'après}$$

PARTIE B 4a)

$$\text{D'où } \mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\beta h(t)dt$$

D'autres parts :

$\beta \leq \lambda$ et sur $[\beta; \lambda]$, (D) est au dessus de l'axe (Ox)

$$\text{Alors } \int_\beta^\lambda h(t)dt \geq 0 \text{ car c'est une aire}$$

Déduction

$$\int_5^\lambda h(t)dt = \int_5^\beta h(t)dt + \int_\beta^\lambda h(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \int_5^\lambda h(t)dt \geq \int_5^\beta h(t)dt$$

$$\text{Car } \int_\beta^\lambda h(t)dt \geq 0$$

On a alors :

$$F(5) + \int_5^\beta h(t)dt \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt$$

$$\text{Or } \mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\beta h(t)dt$$

$$\text{D'où } \mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt \quad (2)$$

3. Les inégalités (1) et (2) montrent que

$$F(5) \leq \mathcal{A} \leq F(5) + \int_5^\lambda h(t)dt$$

$$\text{Car } F(\beta) = \int_1^\beta f(t)dt = \mathcal{A}$$

$$\int_5^\lambda h(t)dt = [(\ln 5 - 2)x^2 + 4x]_5^{2-\ln 5}$$

$$\int_5^\lambda h(t)dt = \frac{4}{2-\ln 5} - 25 \ln 5 + 30$$

$$F(5) = 25 \ln 5 - \frac{116}{3}$$

Donc on a :

$$25 \ln 5 - \frac{116}{3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{4}{2-\ln 5} - \frac{26}{3}$$

Ce qui donne :

$$1,56 \leq \mathcal{A} \leq 1,57 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

PROBLEME 40

PARTIE A

$$f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}; D_f = \mathbb{R}$$

1. Dérivée

$$f'(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $e^{\frac{x}{2}} - 1$

$$e^{\frac{x}{2}} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, f$ est décroissante

Sur $]0; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} = +\infty$$

$$2. f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} \neq 0 \text{ et } e^{\frac{x}{2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \ln 2$$

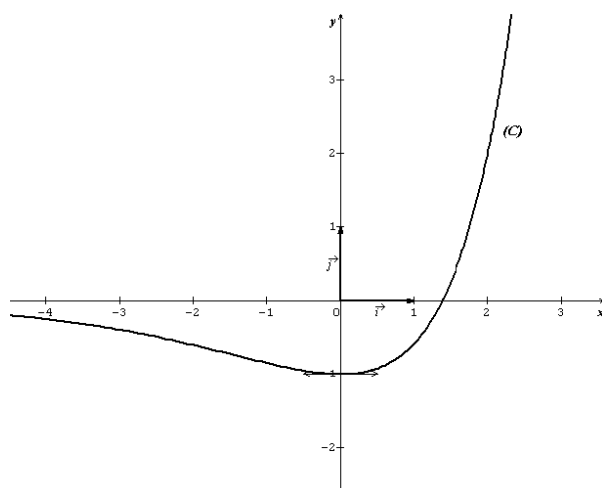
Alors $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(2 \ln 2; 0)$

Par ailleurs :

$$f(0) = -1$$

Alors $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -1)$

3. Tracer de (C)

4. Soit $\lambda < 0$

a. $\mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_{\lambda}^0 -f(x)dx$

$$\int_{\lambda}^0 -f(x)dx = \left[-e^x + 4e^{\frac{x}{2}} \right]_{\lambda}^0$$

$$\int_{\lambda}^0 -f(x)dx = 4 + e^{\lambda} - 4e^{\frac{\lambda}{2}}$$

$$ua = 4 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4 \left(4 + e^{\lambda} - 4e^{\frac{\lambda}{2}} \right) \text{ cm}^2$$

Dédution

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\frac{\lambda}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 16$$

b. $\mathcal{V}(\lambda) = uv \times \pi \int_{\lambda}^0 f^2(x) dx$

$$\int_{\lambda}^0 f^2(x) dx$$

$$= \int_{\lambda}^0 \left(e^{2x} - 4e^{\frac{3x}{2}} + 4e^x \right) dx$$

$$\int_{\lambda}^0 f^2(x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{8}{3} e^{\frac{3x}{2}} + 4e^x \right]_{\lambda}^0$$

$$\int_{\lambda}^0 f^2(x) dx$$

$$= \frac{11}{3} - \left(\frac{1}{2} e^{2\lambda} - \frac{8}{3} e^{\frac{3\lambda}{2}} + 4e^{\lambda} \right)$$

$$\mathcal{V}(\lambda) = \pi \left[\frac{11}{3} - \left(\frac{1}{2} e^{2\lambda} - \frac{8}{3} e^{\frac{3\lambda}{2}} + 4e^{\lambda} \right) \right] uv$$

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{2\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\frac{3\lambda}{2}} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} e^{\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \mathcal{V}(\lambda) = \frac{11\pi}{3}$$

PARTIE B

1. $f'(x) = 1 \Leftrightarrow e^x - e^{\frac{x}{2}} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{x}{2}} > 0 \\ X^2 - X - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 5$$

$$X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0; X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$$

$$e^{\frac{x}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

Donc $\beta = 2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 1$

$$f(\beta) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - 2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\text{D'où on a : } f(\beta) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

2.

a. $g(x) = f(x) - x; D_g = \mathbb{R}$

$$g(\beta) = f(\beta) - \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) < 0$$

On en déduit que : $g(\beta) < 0$

$$g'(x) = f'(x) - 1$$

D'après la question 1)

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \beta$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; \beta[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in]\beta; +\infty[, g'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; \beta[, g$ est décroissanteSur $]\beta; +\infty[, g$ est croissanteb. Sur $]-\infty; \beta[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.Alors g réalise une bijection de
$$]-\infty; \beta[\text{ sur }]g(\beta); +\infty[\text{ et } 0 \in]g(\beta); +\infty[$$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a dans $]-\infty; \beta[$
 $g(0) = -1 < g(a) = 0 \Leftrightarrow a < 0$

Par ailleurs :

Sur $]\beta; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors g réalise une bijection de $] \beta; +\infty[$ sur $]g(\beta); +\infty[$ et $0 \in]g(\beta); +\infty[$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution b dans $] \beta; +\infty[$
 $g(\beta) < 0 = g(b) \Leftrightarrow \beta < b$

Conclusion :

Les équations $g(x) = 0$ et $f(x) = x$ étant équivalentes, alors l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions a et b avec $a < 0 < \beta < b$

3. Dérivée seconde

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{\frac{x}{2}} > 0$

Alors le signe de $f''(x)$ dépend de celui de $e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$

$$e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow x > -2 \ln 2$$

Par conséquent :

$\forall x \in]-\infty; -2 \ln 2[, f''(x) < 0$

$\forall x \in]-2 \ln 2; +\infty[, f''(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $] -\infty; -2 \ln 2[$,

f' est décroissante

Sur $] -2 \ln 2; +\infty[$,

f' est croissante

Tableau de variation de f'

x	$-\infty$	$-2 \ln 2$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

4. D'après le tableau précédent, f' atteint son minimum pour $x = -2 \ln 2$ et $f'(-2 \ln 2) = -\frac{1}{4}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq -\frac{1}{4}$

Déduction

D'après PARTIE A,

$\forall x \in]-\infty; 0], f'(x) \leq 0$

On en déduit que :

$$\forall x \in]-\infty; 0], -\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq 0$$

5. $x_0 = \beta$ et $x_{n+1} = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$

- a. D'après PARTIE A,

$$\forall x \in]-\infty; 0], f(x) \in]-1; 0]$$

$$\text{Or }]-1; 0] \subset]-\infty; 0]$$

D'où $\forall x \in]-\infty; 0], f(x) \in]-\infty; 0]$

Déduction

$$x_1 = f(x_0) = f(\beta) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq 0$$

Supposons que $\forall n \geq 1, x_n \leq 0$ et montrons que $x_{n+1} \leq 0$

En effet :

$$x_n \leq 0 \Rightarrow f(x_n) \leq 0$$

$$\text{Car } \forall x \in]-\infty; 0], f(x) \in]-\infty; 0]$$

$$\text{Or } x_{n+1} = f(x_n) \text{ par définition}$$

$$\text{D'où } x_{n+1} \leq 0 \text{ si } x_n \leq 0$$

On peut donc conclure que :

$$\forall n \geq 1, x_n \leq 0$$

- b. On sait que $\forall x \in]-\infty; 0]$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}; a < 0 \text{ et } \forall n \geq 1, x_n \leq 0$$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\forall n \geq 1, \left| \int_a^{x_n} f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{4} |x_n - a|$$

$$\Rightarrow |[f(t)]_a^{x_n}| \leq \frac{1}{4} |x_n - a|$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \leq \frac{1}{4} |x_n - a|$$

$$\text{Or } f(a) = a \text{ et } f(x_n) = x_{n+1}$$

D'où $\forall n \geq 1$,

$$|x_{n+1} - a| \leq \frac{1}{4} |x_n - a|$$

Déduction

En partant de cette inégalité, on a :

$$n = 1 \Rightarrow |x_2 - a| \leq \frac{1}{4} |x_1 - a|$$

$$n = 2 \Rightarrow |x_3 - a| \leq \frac{1}{4} |x_2 - a|$$

$$n = 3 \Rightarrow |x_4 - a| \leq \frac{1}{4} |x_3 - a|$$

$\vdots$

$$n = n - 1 \Rightarrow |x_n - a| \leq \frac{1}{4} |x_{n-1} - a|$$

Faisons le produit membre à membre de ces $(n - 1)$ inégalités.

On obtient après simplification :

$$|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} |x_1 - a|$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a < 0$$

$$\Leftrightarrow -a > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x_1 - a < 0$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - a| < \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right|$$

$$\Leftrightarrow |x_1 - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Donc $\forall n \geq 1$,

$$|x_n - a| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_1 - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

c. $\forall n \geq 1, |x_n - a| \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{4} < 1$$

Donc la suite $(|x_n - a|)$ converge vers 0 et par conséquent, la suite (x_n) converge vers a

PROBLEME 41

PARTIE A

$$f(x) = x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0$$

$$\text{et } f(0) = \frac{1}{2}; D_f = [0; +\infty[$$

**1. $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$;
 $D_g =]0; +\infty[$**

a. Dérivée

$$g'(x) = -\frac{4}{(x+2)^2} < 0 \forall x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[$, g est décroissante

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \ln x - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+2} = 0 \end{cases}$$

c. $g(]0; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right[$

$$g(]0; +\infty[) = \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

d. $g([2; 3]) = [g(3); g(2)]$

$$g([2; 3]) = [0,36; 0,44]$$

Par conséquent : $\forall x \in [2; 3]$,

$$0,36 \leq g(x) \leq 0,44$$

$$\text{Or } 0,44 < \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$$

2.

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)$

$$\text{Posons } X = \frac{2}{x}$$

Si $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow +\infty$ et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2}{X} \ln(1+X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2(X+1)}{X} \cdot \frac{\ln(1+X)}{1+X} = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2(X+1)}{X} = 2 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+X)}{1+X} = 0 \end{cases}$$

On conclut que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$

On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Et par suite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique

La courbe (C) de f admet au point $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ une demi-tangente dirigée vers le haut

$$\text{c. } f'(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \left[\frac{-2}{x(x+2)} \right] + \frac{1}{4}$$

$$f'(x) = g(x) > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[$, f est croissante

3.

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Posons $X = \frac{2}{x}$

Si $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow 0$ et

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2}{X} \ln(1+X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(1+X)}{X} = 2$$

$$\text{Car } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

On conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$

b. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{c. } (\Delta): y = \frac{x}{4} + \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = 0$$

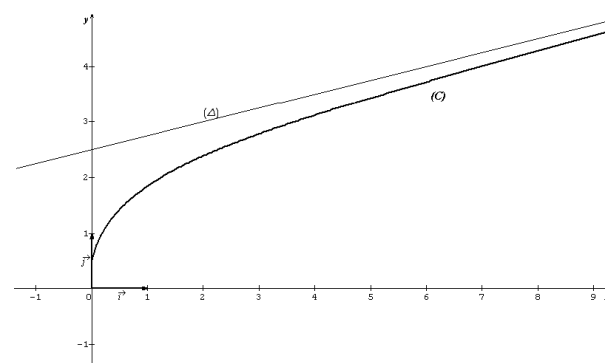
$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2$$

Alors la droite (Δ) est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

4. Tracer de (C)

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$



PARTIE B

$$I = [2; 3]$$

1.

$$\text{a. } h(x) = f(x) - x; D_h = I$$

$$h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1$$

$$\text{Car } f'(x) = g(x)$$

$$\text{On sait que : } \forall x \in [2; 3], g(x) < \frac{1}{2}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [2; 3], h'(x) < -\frac{1}{2} < 0$$

b. On en déduit que :

Sur $[2; 3]$, h est décroissante

h étant continue car dérivable et strictement décroissante telle que $h(2) \times h(3) = -0,08 < 0$

Alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans I

2.

$$\text{a. On sait que } \forall x \in [2; 3], 0 < g(x) < \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } f'(x) = g(x)$$

$$\text{D'où } \forall x \in I, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$$

b. On sait que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ et

$\alpha \in I$

Alors d'après l'inégalité de la

moyenne on a : $\forall x \in I,$

$$\left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |[f(t)]_{\alpha}^x| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

Or $f(\alpha) = \alpha$ d'après 1b)

D'où $\forall x \in I,$

$$|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

3. $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a. Par hypothèse, $U_n \in I \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Prenons $\forall n \in \mathbb{N}, x = U_n$ dans

l'inégalité précédente

$$\text{On a : } |f(U_n) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or } U_{n+1} = f(U_n)$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \quad (1)$$

En partant de cette inégalité, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_2 - \alpha|$$

$\vdots$

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

Faisons le produit membre à

membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$2 \leq \alpha \leq 3$$

$$\Rightarrow -1 \leq 2 - \alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow |2 - \alpha| \leq 1$$

$$\Rightarrow |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 1$$

On en déduit que pour tout entier

$$\text{naturel } n, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (2)$$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$

Alors la suite $(|U_n - \alpha|)$ converge vers 0 et par conséquent, la suite

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

c. On sait que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\text{Donc } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-3} \Leftrightarrow -n \ln 2 \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 9,96$$

$$\text{D'où on a } |U_n - \alpha| \leq 10^{-3} \quad \forall n \geq 10$$

U_{n_0} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près pour $n_0 = 10$ par exemple

PROBLEME 42

$$f(x) = e^{x-1} - 1; D_f = \mathbb{R}$$

PARTIE A**1. Dérivée**

$$f'(x) = e^{x-1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

On en déduit que :

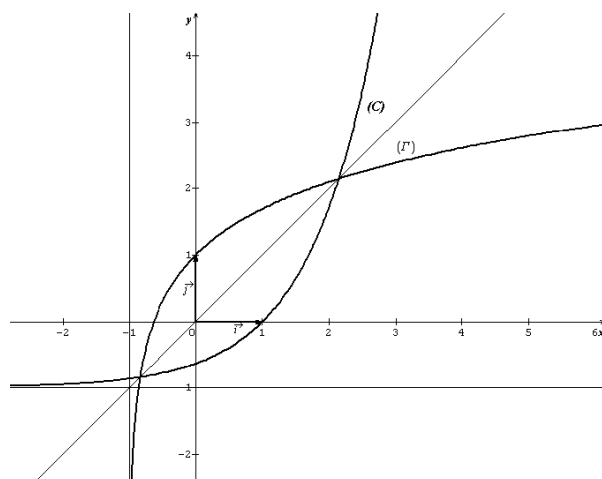
Sur $\mathbb{R}$, f est croissante

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$$

Tracer de la courbe (C) de f **2.**

- a. Sur $\mathbb{R}$, f est continue car dérivable et est strictement croissante.

Alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J =]-1; +\infty[$

- b. $\forall y \in]-1; +\infty[, f(x) = y$
 $\Leftrightarrow e^{x-1} = y + 1$
 $\Leftrightarrow x = 1 + \ln(y + 1) = f^{-1}(y)$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = 1 + \ln(x + 1); x > -1$$

- c. Tracer la courbe (Γ) de f^{-1}
 (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
 (Voir le graphique)

3. $\varphi(x) = f(x) - x$

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(e^{-1} - e^{-x} - xe^{-x})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$

b. $\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$
 $e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 1[, \varphi'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, \varphi'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[$, φ est décroissante

Sur $]1; +\infty[$, φ est croissante

Tableau de variation de φ

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

D'après ce tableau :

Sur $\mathbb{R}$, φ est continue car dérivable et est strictement monotone sur chacun des intervalles $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$

Alors φ réalise une bijection de chacun de ces deux intervalles sur $]-1; +\infty[$ et $0 \in]-1; +\infty[$

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions telles que $a \in]-\infty; 1[$ et $b \in]1; +\infty[$.
 On a bien $a < b$

c. Dédution

Les deux équations $\varphi(x) = 0$ et $f(x) = x$ étant équivalentes, on déduit de ce qui précède que a et b sont les seules solutions de l'équation $f(x) = x$

$$\begin{cases} \varphi(2) = -0,28 < 0 \\ \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = 0,98 > 0 \end{cases}$$

$$\text{On a } \varphi(2) \times \varphi\left(\frac{5}{2}\right) < 0 \text{ donc } 2 < b < \frac{5}{2}$$

4. $\mathcal{A} = ua \times \int_a^b (f^{-1}(x) - f(x)) dx$ ou encore $\mathcal{A} = 2ua \times \int_a^b (x - f(x)) dx$ à cause de la symétrie du domaine par rapport à la droite d'équation $y = x$

$$\int_a^b (x - f(x)) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - e^{x-1} + x \right]_a^b$$

$$\int_a^b (x - f(x)) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + b - a + e^{a-1} - e^{b-1}$$

Or $\begin{cases} f(a) = a \\ f(b) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{a-1} = a + 1 \\ e^{b-1} = b + 1 \end{cases}$

D'où $\int_a^b (x - f(x)) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

$$ua = 4 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 4(b^2 - a^2) \text{ cm}^2$$

PARTIE B

$$g(x) = \ln(x+1) + 1; x \in I = \left[2; \frac{5}{2}\right]$$

1. $\forall x \in I, f(x) = x$
 $\Leftrightarrow e^{x-1} = x + 1$
 $\Leftrightarrow x = \ln(x+1) + 1$
 $\Leftrightarrow g(x) = x$

Alors sur I , l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $g(x) = x$

2.

a. $2 \leq x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3 \leq x+1 \leq \frac{7}{2}$
 $\Leftrightarrow 1,09 \leq \ln(x+1) \leq 1,25$
 $\Leftrightarrow 2,09 \leq g(x) \leq 2,25$
Or $[2,09; 2,25] \subset \left[2; \frac{5}{2}\right]$

$$\text{D'où } \forall x \in I, g(x) \in I$$

b. $\forall x \in I, g'(x) = \frac{1}{x+1}$
 $2 \leq x \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 3 \leq x+1 \leq \frac{7}{2}$
 $\Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{7} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$

$$\text{Donc } \forall x \in I, 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$$

c. On sait que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ et $b \in I$
Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a : $\forall x \in I,$
 $\left| \int_b^x g'(t) dt \right| \leq \frac{1}{2} |x - b|$

$$\Rightarrow |[g(t)]_b^x| \leq \frac{1}{2} |x - b|$$

$$\Rightarrow |g(x) - g(b)| \leq \frac{1}{2} |x - b|$$

$$\text{Or } g(b) = b \text{ d'après 1)}$$

$$\text{D'où } \forall x \in I,$$

$$|g(x) - b| \leq \frac{1}{2} |x - b|$$

3. $w_0 = 2$ et $w_{n+1} = g(w_n) \forall n \geq 0$

a. $w_0 = 2 \in I$

$\forall n \geq 0$, supposons que $w_n \in I$ et montrons que $w_{n+1} \in I$

En effet :

$$w_n \in I \Rightarrow g(w_n) \in I$$

$$\text{Car } \forall x \in I, g(x) \in I$$

$$\text{Or } w_{n+1} = g(w_n) \text{ par définition}$$

$$\text{D'où } w_{n+1} \in I \text{ si } w_n \in I$$

On peut donc conclure que

$$\forall n \geq 0, w_n \in I$$

b. Prenons $x = w_n \forall n \geq 0$ dans l'inégalité 2c)

$$\text{On a : } |g(w_n) - b| \leq \frac{1}{2} |w_n - b|$$

$$\text{Or } w_{n+1} = g(w_n)$$

$$\text{D'où } \forall n \geq 0,$$

$$|w_{n+1} - b| \leq \frac{1}{3} |w_n - b|$$

c. En partant de l'inégalité précédente, on a :

$$n = 0 \Rightarrow |w_1 - b| \leq \frac{1}{3} |w_0 - b|$$

$$n = 1 \Rightarrow |w_2 - b| \leq \frac{1}{3} |w_1 - b|$$

$$n = 2 \Rightarrow |w_3 - b| \leq \frac{1}{3} |w_2 - b|$$

:

$$n = n - 1 \Rightarrow |w_n - b| \leq \frac{1}{3} |w_{n-1} - b|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|w_n - b| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |w_0 - b|$$

$$2 \leq b \leq \frac{5}{2} \text{ et } w_0 = 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq w_0 - b \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |w_0 - b| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |w_n - b| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |w_0 - b| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 0,$$

$$|w_n - b| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{3} < 1$

Alors la suite $(|w_n - b|)$ converge vers 0 et par conséquent la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = b$

e. On sait que $|w_q - b| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q$ et par conséquent :

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q \leq 10^{-2} \Rightarrow |w_q - b| \leq 10^{-2}$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^q \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -\ln 2 - q \ln 3 \leq -2 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow q \geq \frac{2 \ln 10 + \ln 2}{\ln 3}$$

$$\Leftrightarrow q \geq 4,82$$

$$\text{D'où } |w_q - b| \leq 10^{-2} \quad \forall q \geq 5$$

Par exemple pour $q = 5$, w_q est une valeur approchée de b à 10^{-2} près

PROBLEME 43

PARTIE A

$$(E): y' - 2y = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

1. $y' - 2y = 0$

$$\Leftrightarrow y' = 2y$$

$$\Leftrightarrow y = ke^{2x}; k \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

Donc la solution de l'équation

$y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$

par : $y = e^{2x}$

2. $f(x) = e^{2x}g(x); D_f = \mathbb{R}$

$$\text{et } f(0) = \ln 2$$

a. $g(x) = e^{-2x}f(x)$

$$g(0) = f(0) = \ln 2$$

b. $f'(x) = 2e^{2x}g(x) + e^{2x}g'(x)$

$$\text{Donc } f'(x) = e^{2x}[g'(x) + 2g(x)]$$

c. f est solution de (E)

$$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}[g'(x) + 2g(x)] - 2e^{2x}g(x)$$

$$= \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}g'(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

Alors f est solution de (E) si, et

seulement si $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

d. Dédution

$$g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\text{Avec } u(x) = 1 + e^{-2x}$$

Par conséquent :

$$g(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + K; K \in \mathbb{R}$$

$$g(0) = \ln 2 \Leftrightarrow K = 0$$

$$\text{Et donc } g(x) = \ln(1 + e^{-2x})$$

D'autres parts :

$$f(x) = e^{2x}g(x)$$

$$\text{Alors } f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$$

PARTIE B

$$f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x}); D_f = \mathbb{R}$$

1. $h(x) = \ln(1 + e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

a. Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

b. Dérivée

$$h'(x) = -\frac{2e^{-4x}}{(1+e^{-2x})^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, h est décroissantec. On déduit du sens de variation h

$$h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right[$$

$$h(\mathbb{R}) = \left] 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right[$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) > 0$$

$$2. f'(x) = 2e^{2x} \left[\ln(1 + e^{-2x}) - \frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \right]$$

$$f'(x) = 2e^{2x} h(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2e^{2x} > 0$$

Alors $f'(x)$ est du même signe que $h(x)$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}$$

$$\text{Posons } X = e^{-2x}$$

$$\text{Si } x \rightarrow +\infty, X \rightarrow 0 \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\text{On conclut donc que } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

D'autres parts :

$$f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-2x})$$

$$= e^{2x} \ln e^{-2x} (e^{2x} + 1)$$

$$= e^{2x} [\ln e^{-2x} + \ln(e^{2x} + 1)]$$

$$f(x) = e^{2x} [-2x + \ln(1 + e^{2x})]$$

Dédution

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -2xe^{2x} + e^{2x} \ln(1 + e^{2x})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 \end{cases}$$

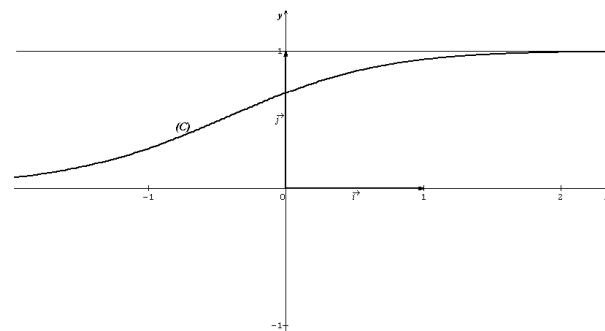
4. Tableau de variation de f Sur $\mathbb{R}$, f est croissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	1

5. Représentation de $(\mathcal{C})$

Tangente à l'origine du repère

$$(T): y = (2 \ln 2 - 1)x + \ln 2$$



PARTIE C

1. On remarque que :

$$\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{1}{e^{-2x}(1+e^{-2x})} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\text{Avec } u(x) = 1 + e^{2x}$$

D'où une primitive sur $\mathbb{R}$, de lafonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}$ est parexemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x})$

$$\mathcal{A} = ua \times \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$\text{On sait que } f'(x) - 2f(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1}{2} f'(x) - \frac{1}{1+e^{-2x}}$$

Par conséquent :

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \left[\frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) \right]_{-1}^0$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = 1 - \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \ln(1 + e^2)$$

$$ua = 25 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A} = 25 \left[1 - \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) \ln(1 + e^2) \right] \text{ cm}^2$$

PARTIE D

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$1. f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = [\ln 2; 0,93]$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; 1], f(x) \in [\ln 2; 0,93]$$

$$\text{Or } [\ln 2; 0,93] \subset [0; 1]$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$$

Dédution

$$U_0 = 0 \in [0; 1]$$

$\forall n \geq 0$, supposons que $U_n \in [0; 1]$
et montrons que $U_{n+1} \in [0; 1]$

On déduit de ce qui précède que :

$$U_n \in [0; 1] \Rightarrow f(U_n) \in [0; 1]$$

$$\text{Or } f(U_n) = U_{n+1}$$

$$\text{D'où } U_{n+1} \in [0; 1] \text{ si } U_n \in [0; 1]$$

On peut donc conclure que :

$$\forall n \geq 0, U_n \in [0; 1]$$

2. Démonstration par récurrence

$$U_0 = 0 \text{ et } U_1 = f(U_0) = \ln 2$$

$$\text{On a donc } U_1 > U_0$$

$\forall n \geq 0$, supposons que $U_{n+1} > U_n$

et montrons que $U_{n+2} > U_{n+1}$

On déduit du sens de variation de f que :

$$U_{n+1} > U_n \Rightarrow f(U_{n+1}) > f(U_n)$$

$$\text{Or } f(U_{n+1}) = U_{n+2} \text{ et } f(U_n) = U_{n+1}$$

$$\text{D'où } U_{n+2} > U_{n+1} \text{ si } U_{n+1} > U_n$$

On peut donc conclure que :

$\forall n \geq 0, U_{n+1} > U_n$ et que la suite (U_n) est croissante

Dédution

On sait que $\forall n \geq 0, U_n \in [0; 1]$

(U_n) étant croissante et majorée, par exemple par 1, alors elle converge

$$3. \text{ Soit } \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

On a :

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n)$$

Car f est continue sur $\mathbb{R}$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

$$\text{D'où } f(\alpha) = \alpha$$

D'autres parts :

$$\forall n \geq 0, 0 \leq U_n \leq 1$$

En passant à la limite, on a :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq 1$$

C'est-à-dire que $\alpha \in [0; 1]$

PROBLEME 44

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

PARTIE A

1.

a. Dérivée

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On en déduit que :

Sur $\mathbb{R}$, f est décroissante

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

On déduit de ces résultats que :

(C) admet deux asymptotes horizontales d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$

$$c. \Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$f(2 \times 0 - x) + f(x) = f(-x) + f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x} = 1$$

$$f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2}$$

Alors $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de (C)

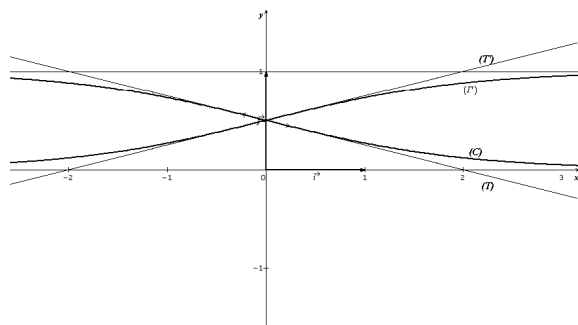
d. On note (T) la tangente à (C) au point $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$

Le coefficient directeur de (T) est

$$f'(0) = -\frac{1}{4}$$

e. Tracer de (T) et (C) **Tableau de variation de f**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	1	0



2.

a. $g(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ et $f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

Donc $g(x) = f(-x)$

On en déduit que :

La courbe (Γ) de g est l'image de la courbe (C) de f par rapport à la symétrie orthogonale d'axe $(O; \vec{j})$

b. $f(x) + g(x) = f(x) + f(-x) = 1$
d'après 1c)

On a : $\frac{f(x)+g(x)}{2} = \frac{1}{2}$

Alors la courbe (Γ) de g est l'image de la courbe (C) de f par la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

c. (T') est la tangente à (Γ) au point $\Omega\left(0; \frac{1}{2}\right)$

On a $g'(x) = -f'(x)$

Donc le coefficient directeur de (T') est : $g'(0) = -f'(0) = \frac{1}{4}$

d. Représentation de (T') et (Γ)
(Voir la figure)

PARTIE B

On note $I = \int_0^1 f(t) dt$ et

$$J = \int_0^1 g(t) dt$$

1. $I + J = \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt$

$$I + J = \int_0^1 (f(t) + g(t)) dt = \int_0^1 1 dt$$

Donc on a : $I + J = 1$

2.

a. $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{1}{e^{-t}\left(\frac{1}{e^{-t}} + 1\right)}$

Or $\frac{1}{e^{-t}} = e^t$ d'où $\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t + 1}$

b. $\frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{e^t}{e^t + 1} = \frac{u'(t)}{u(t)}$

Avec $u(t) = e^t + 1$

On en déduit qu'une primitive de g sur $\mathbb{R}$, est par exemple la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = \ln(e^t + 1)$

Par conséquent :

$$J = \int_0^1 g(t) dt = [\ln(e^t + 1)]_0^1$$

$$J = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$$

3. On sait que $I + J = 1$

D'où $I = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

4.

a. $\forall x \in [0; +\infty[, -x \leq 0 \leq x$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq e^x$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + e^{-x} \leq 1 + e^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Donc $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) \leq g(x)$

b. $\mathcal{A} = ua \times \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx$$

$$= \int_0^1 g(x) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = J - I$$

$$ua = 16 \text{ cm}^2$$

Donc $\mathcal{A} = 16(J - I) \text{ cm}^2$

On en déduit que :

$$\mathcal{A} = 16 \left[-1 + 2 \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \right] \text{ cm}^2$$

PARTIE C

$$h(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$$

$$\text{et } H(x) = \int_0^x h(t) dt$$

$$D_h = D_H =]0; +\infty[$$

1.

a. H est la primitive de h sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 0

b. On en déduit que :

$$H'(x) = h(x)$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, e^x > 0 \text{ et}$$

$$1 + e^{-x} > 1 \Leftrightarrow \ln(1 + e^{-x}) > 0$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; +\infty[, H'(x) = h(x) > 0$$

On en déduit que :

Alors sur $]0; +\infty[, H$ est croissante

2.

a. $h'(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^x \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$$h'(x) = h(x) - \frac{1}{1+e^{-x}} = h(x) - g(x)$$

$$\text{Donc } h(x) = h'(x) + g(x)$$

b. $H(x) = \int_0^x h(t) dt$

$$H(x) = \int_0^x (h'(t) + g(t)) dt$$

$$H(x) = [h(t) + G(t)]_0^x$$

Don on a :

$$H(x) = (e^x + 1) \ln(e^x + 1) - xe^x - 2 \ln 2$$

PROBLEME 45**PARTIE A**

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} + x - 1; D_f =]0; +\infty[$$

1. $g(x) = x^3 - 2 \ln x + 1; D_g =]0; +\infty[$

a. Dérivée

$$g'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - 2}{x}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $3x^3 - 2$

$$3x^3 - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \left]0; \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right[, g'(x) < 0$$

$$\forall x \in \left[\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; +\infty\right[, g'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $\left]0; \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right[, g$ est décroissante

Sur $\left[\sqrt[3]{\frac{2}{3}}; +\infty\right[, g$ est croissante

b. On déduit de ce qui précède que g atteint son minimum pour $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\text{Or } g\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3} \left(1 - \ln \frac{2}{3}\right) + 1 > 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$$

2.

a. $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} + 1$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 2 \ln x + 1}{x^3}$$

$$\text{On a donc } f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^3 > 0$$

Alors $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe

b. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \end{cases}$$

Tableau de variation de f

D'après 1), $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) > 0$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, f$ est croissante

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

c. $(\Delta): y = x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Alors la droite $(\Delta): y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$

Position de (C) et (Δ)

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 > 0$$

Alors le signe de $f(x) - y$ dépend de celui de $\ln x$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, f(x) - y < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - y > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[,$

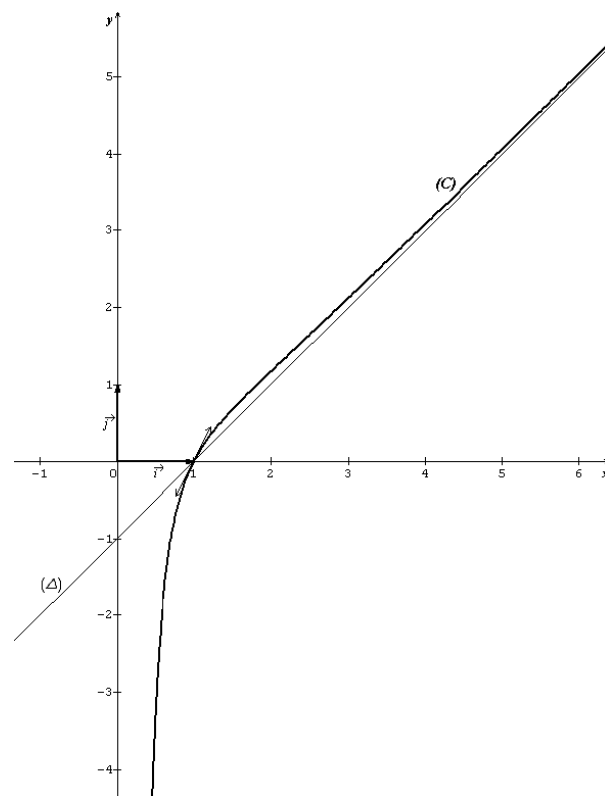
(C) est en dessous de (Δ)

Sur $]1; +\infty[,$

(C) est au dessus de (Δ)

d. $(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\text{D'où } (T): y = 2x - 2$$

3. Tracer de (T) et (Δ) puis (C) **PARTIE B**

Soit $\lambda > 1$

$$1. \mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_1^\lambda (f(x) - y) dx$$

$$\int_1^\lambda (f(x) - y) dx = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int_1^\lambda (f(x) - y) dx = \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int_1^\lambda (f(x) - y) dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_1^\lambda$$

$$\int_1^\lambda (f(x) - y) dx = 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left(1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) ua$$

$$2. \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln \lambda}{\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 1$$

$$\text{Et donc } L = 1$$

$$3. \mathcal{A}(\lambda) = \frac{L}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln \lambda}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda - 2 \ln \lambda - 2 = \lambda$$

$$\Leftrightarrow -2 \ln \lambda + \lambda - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln \lambda - \lambda + 2 = 0 \quad (E)$$

Donc l'équation : $\mathcal{A}(\lambda) = \frac{\lambda}{2}$ est équivalente à l'équation (E)

4. Soit h la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par : $h(\lambda) = 2 \ln \lambda - \lambda + 2$

$$h'(\lambda) = \frac{2}{\lambda} - 1 = \frac{2-\lambda}{\lambda}$$

$$\forall \lambda \in [1; +\infty[, \lambda > 0$$

Alors le signe de $h'(\lambda)$ dépend de celui de $2 - \lambda$

$$2 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$$

Par conséquent :

$$\forall \lambda \in [1; 2[, h'(\lambda) > 0$$

$$\forall \lambda \in]2; +\infty[, h'(\lambda) < 0$$

On en déduit que :

Sur $[1; 2]$, h est croissante

Sur $]2; +\infty[$, h est décroissante

Tableau de variation de h

λ	1	2	$+\infty$
$h'(\lambda)$	+	0	-
$h(\lambda)$	1	$2 \ln 2$	$-\infty$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} h(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left(2 \frac{\ln \lambda}{\lambda} - 1 + \frac{2}{\lambda} \right)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} h(\lambda) = -\infty$$

Sur $[1; 2]$, $h(\lambda) \in [1; 2 \ln 2]$ donc $h(\lambda) \neq 0$

Sur $]2; +\infty[$, h est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors h réalise une bijection de

$]2; +\infty[$ sur $] -\infty; 2 \ln 2[$ et

$0 \in] -\infty; 2 \ln 2[$

Donc l'équation $h(\lambda) = 0$ admet une unique solution a dans $]2; +\infty[$

On conclut alors que a est l'unique solution sur $[1; +\infty[$ de l'équation (E)

$$\begin{cases} h(5) = 0,21 > 0 \\ h(6) = -0,41 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a } h(5) \times h(6) < 0$$

$$\text{Alors } 5 < a < 6$$

PARTIE C

$U_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \varphi(U_n)$ où $\varphi(x) = 2 \ln x + 2$; $D_\varphi =]0; +\infty[$

1.

- a. $U_0 = 5 \in [5; 6]$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \in [5; 6]$

et montrons que $U_{n+1} \in [5; 6]$

$$U_n \in [5; 6] \Rightarrow 5 \leq U_n \leq 6$$

$$\Rightarrow 2 \ln 5 + 2 \leq 2 \ln U_n + 2 \leq 2 \ln 6 + 2$$

$$\Rightarrow 5,21 \leq \varphi(U_n) \leq 5,58$$

Or $\varphi(U_n) = U_{n+1}$ et

$$[5,21; 5,58] \subset [5; 6]$$

D'où $U_{n+1} \in [5; 6]$ si $U_n \in [5; 6]$

On conclut donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [5; 6]$$

- b. $\varphi'(x) = \frac{2}{x} > 0 \forall x \in]0; +\infty[$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[$, φ est croissante

$$U_0 = 5; U_1 = \varphi(U_0) = 5,21$$

On a donc $U_1 > U_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_{n+1} > U_n$

et montrons que $U_{n+2} > U_{n+1}$

$$U_{n+1} > U_n \Rightarrow \varphi(U_{n+1}) > \varphi(U_n)$$

Or $\varphi(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $\varphi(U_n) = U_{n+1}$

D'où $U_{n+2} > U_{n+1}$ si $U_{n+1} > U_n$

On conclut donc que :

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$ et par conséquent la suite (U_n) est croissante

- c. La suite (U_n) étant croissante et majorée par exemple par 6, alors elle est convergente

2.

- a. $\forall x \in [5; 6], \frac{2}{6} \leq \frac{2}{x} \leq \frac{2}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \varphi'(x) \leq \frac{2}{5}$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [5; 6], |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{5}$$

- b. On sait que $a \in [5; 6]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [5; 6]$$

Alors d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_a^{U_n} \varphi'(t) dt \right| \leq \frac{2}{5} |U_n - a|$$

$$\Rightarrow |[\varphi(t)]_a^{U_n}| \leq \frac{2}{5} |U_n - a|$$

$$\Rightarrow |\varphi(U_n) - \varphi(a)| \leq \frac{2}{5} |U_n - a|$$

Or $\varphi(a) = a$ car les équations $\varphi(x) = x$ et (E) sont équivalentes et $\varphi(U_n) = U_{n+1}$

$$\text{D'où } \forall n \in \mathbb{N}, \\ |U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{5} |U_n - a|$$

c. En partant de cette inégalité on a :

$$n = 0 \Rightarrow |U_1 - a| \leq \frac{2}{5} |U_0 - a|$$

$$n = 1 \Rightarrow |U_2 - a| \leq \frac{2}{5} |U_1 - a|$$

$$n = 2 \Rightarrow |U_3 - a| \leq \frac{2}{5} |U_2 - a|$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow |U_n - a| \leq \frac{2}{5} |U_{n-1} - a|$$

Faisons le produit membre à membre de ces n inégalités.

On obtient après simplification :

$$|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n |U_0 - a|$$

$$5 \leq a \leq 6$$

$$\Rightarrow -1 \leq U_0 - a \leq 0$$

$$\Rightarrow |U_0 - a| \leq 1$$

$$\Rightarrow |U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n |U_0 - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n \times 1$$

On en déduit que pour tout entier naturel n , $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{2}{5} < 1$

Alors la suite $(|U_n - a|)$ converge vers 0 et par conséquent, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a

3. On sait que $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

Donc

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-3} \Rightarrow |U_n - a| \leq 10^{-3}$$

$$\text{Or } \left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -n \ln \left(\frac{5}{2}\right) \leq -3 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln \left(\frac{5}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 7,53$$

D'où on a $|U_n - a| \leq 10^{-3} \forall n \geq 8$

U_n est une valeur approchée de a à 10^{-3} près pour $n = 10$ par exemple

PROBLEME 46

PARTIE A

$$\begin{cases} f(x) = 2x(1 - \ln x) \text{ pour } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

1. Continuité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Alors f est continue en 0

Dérivabilité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en 0

Interprétation graphique

A l'origine O du repère, (C) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut

2.

a. Dérivée

$$f'(x) = -\ln x$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, -\ln x > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, f$ est croissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est décroissante

b. $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

c. Tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0	2	$-\infty$

3.

a. Coordonnées de N

$$x_N = 1; y_N = f(1) = 2$$

Donc $N(1; 2)$ et la tangente à (C) au point N a pour coefficient directeur $f'(1) = 0$

Coordonnée de R

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e$$

Donc $R(e; 0)$ et la tangente à (C) au point R a pour coefficient directeur $f'(e) = -1$

Coordonnées de Q

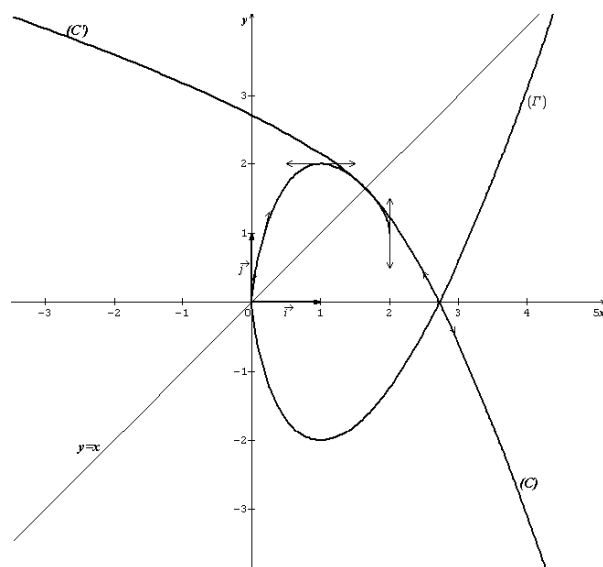
$$f'(x_Q) = 2$$

$$\Leftrightarrow -\ln x_Q = 2$$

$$\Leftrightarrow x_Q = e^{-2} \text{ et } y_Q = 6e^{-2}$$

Donc $Q(e^{-2}; 6e^{-2})$ et la tangente à (C) au point Q a pour coefficient directeur $f'(e^{-2}) = 2$

b. Tracer de (C)



PARTIE B

1. $\varphi(x) = f(x); D_\varphi = [1; +\infty[$

a. D'après les variations de f :
Sur $[1; +\infty[$, φ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors φ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $J =]-\infty; 2]$

b. (C') et la partie de (C) correspondant à $[1; +\infty[$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$
(Voir le graphique)

2. $g(x) = 2x(\ln x - 1); D_g = [0; +\infty[$
 $g(x) = -f(x)$ et $D_f = D_g$

Alors (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Voir le graphique)

PARTIE C

1. Soit $\lambda \in]0; e[$

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^e x \ln x \, dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$$I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_{\lambda}^e - \int_{\lambda}^e \frac{1}{2}x \, dx$$

$$I(\lambda) = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_{\lambda}^e$$

$$I(\lambda) = \frac{e^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{1}{2}\lambda^2 \ln \lambda$$

2. Dédudons $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^e f(x) \, dx$

$$\mathcal{A}(\lambda) = 2 \int_{\lambda}^e x \, dx - 2 \int_{\lambda}^e x \ln x \, dx$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = [x^2]_{\lambda}^e - 2I$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda^2 \ln \lambda$$

Interprétation géométrique

$\mathcal{A}(\lambda)$ représente l'aire en unité d'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = e$

3. $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{A}(\lambda) = \frac{e^2}{2}$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 \ln a = 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0^+} a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathcal{A} = \frac{e^2}{2}$$

4. Déduduction

(C) et (Γ) étant symétrique, on a :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' \text{ en unité d'aire}$$

$$\text{Or } ua = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où } \mathcal{A}' = 2e^2 \text{ cm}^2$$

PROBLEME 47**PARTIE A**

$$1. g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1);$$

$$D_g = [0; +\infty[$$

a. Dérivée

$$g'(x) = \frac{2x(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x \in [0; +\infty[, 2x \geq 0; (x^2 + 1)^2 > 0$$

$$\text{et } 1 + x > 0$$

Alors le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $1 - x$

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; 1[, g'(x) > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; 1[, g$ est croissante

Sur $]1; +\infty[, g$ est décroissante

Tableau de variation de g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$	0	$1 - \ln 2$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$$

b. Sur $[1; +\infty[, g$ est continue car dérivable et est strictement décroissante.

Alors g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $] -\infty; 1 - \ln 2]$ et $0 \in] -\infty; 1 - \ln 2]$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; +\infty[$

$$\begin{cases} g\left(\frac{7}{4}\right) = 0,105 > 0 \\ g(2) = -0,009 < 0 \end{cases}$$

$$\text{On a : } g\left(\frac{7}{4}\right) \times g(2) < 0$$

$$\text{Alors } \frac{7}{4} \leq \alpha \leq 2$$

2. D'après le tableau de variation de g , on a :

$$\forall x \in [0; \alpha[, g(x) > 0$$

$$\forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) < 0$$

PARTIE B

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1 \end{cases}$$

Alors f est dérivable en 0 et

$$f'(0) = 1$$

Interprétation graphique

A l'origine O du repère, (C) admet une tangente d'équation de coefficient directeur $f'(0) = 1$ et d'équation $y = x$

$$2. f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors f est une fonction impaire

Déduction

La courbe (C) de f est symétrique par rapport à l'origine du repère

$$3. \forall x \in [0; +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f'(0) = 1$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, x^2 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$$\forall x \in [0; \alpha[, f'(x) > 0$$

$$\forall x \in [\alpha; +\infty[, f'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $[0; \alpha[, f$ est croissante

Sur $[\alpha; +\infty[, f$ est décroissante

Tableau de variation de f

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \times \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \times \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \end{cases}$

4. $\varphi(x) = \ln(x+1) - x$;

$D_\varphi =]-1; +\infty[$

a. $\varphi'(x) = \frac{-x}{x+1}$

$\forall x \in]-1; +\infty[, x+1 > 0$

Alors le signe de $\varphi'(x)$ dépend de celui de $-x$

Par conséquent :

$\forall x \in]-1; 0[, \varphi'(x) > 0$

$\forall x \in]0; +\infty[, \varphi'(x) < 0$

On en déduit que :

Sur $]-1; 0[, \varphi$ est croissante

Sur $]0; +\infty[, \varphi$ est décroissante

Tableau de variations de φ

x	-1	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
$\varphi(x)$		0	
	$-\infty$		$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \varphi(x) = -\infty$$

Car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

Car

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \end{cases}$$

- b. On déduit de ce qui précède que :
 φ atteint son maximum en 0 et
 $\varphi(0) = 0$

Donc $\forall x \in]-1; +\infty[, \varphi(x) \leq 0$

Ceci montre bien que :

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$$

- c. La tangente en 0 a pour équation

$$y = x$$

$$f(x) - y = \frac{\ln(x^2+1) - x^2}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 > -1$$

Alors $\ln(1+x^2) \leq x^2$ d'après 4b)

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) - y > 0$$

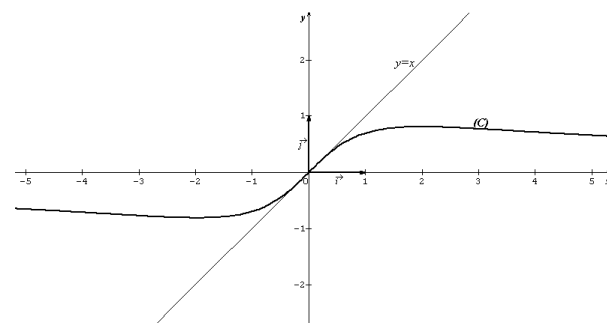
$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) - y < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, (C)$ est au dessus de sa tangente en 0

Sur $]0; +\infty[, (C)$ est en dessous de sa tangente en 0

5. Tracer de (C)



PARTIE C

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt ; D_F = \mathbb{R}$$

1. Soit $r > 0$

$F(r) = \int_0^r f(t) dt$ est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = r$

Par ailleurs :

$$F(-r) = \int_0^{-r} f(t) dt = - \int_{-r}^0 f(t) dt$$

est l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -r$ et $x = 0$

Or ces deux domaines sont symétriques par rapport à l'origine du repère

D'où $F(r)$ et $F(-r)$ sont les aires de domaines isométriques du plan

Déduction

Deux domaines isométriques du plan ont même aire.

D'où $F(-r) = F(r)$

On en déduit que F est une fonction paire

2. F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$$

Et d'après les variations de f :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, F'(x) < 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, F'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[, F$ est décroissante

Sur $]0; +\infty[, F$ est croissante

3.

- a. $\forall x \in [0; 1], 0 \leq f(x) \leq x$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 x dx$$

$$\text{Or } \int_0^1 f(x) dx = F(1) \text{ et}$$

$$\int_0^1 x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où on a bien : } 0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$$

- b. $\forall t \geq 1$, on a : $t^2 \geq 1$ et donc :

$$t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 \leq t^2 + 1 \leq 2t^2$$

$$\Leftrightarrow \ln(t^2) \leq \ln(t^2 + 1) \leq \ln(2t^2)$$

$$\text{Donc } \forall t \geq 1, \frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(t^2+1)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$$

- c. $\forall x \geq 1, \int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^x$

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

Déduction : $\forall t \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\ln(t^2+1)}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt \leq \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$$

$$\text{Or } \int_1^x f(t) dt = \int_1^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= - \int_0^1 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$= F(x) - F(1)$$

D'où on a $\forall t \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt \leq F(x) - F(1) \leq \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt$$

Posons

$$\begin{cases} u = t^2 \\ v = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2t dt = 2\sqrt{u} dt \\ dv = 4t dt = 2\sqrt{2}\sqrt{v} dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dt = \frac{du}{2\sqrt{u}} \\ dt = \frac{\sqrt{2}dv}{2\sqrt{v}} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\ln(u)}{u} du = \frac{1}{16} (\ln x)^2$$

$$\text{Et } \int_1^x \frac{\ln(2t^2)}{t} dt = \int_1^{\sqrt{2x}} \frac{\ln(v)}{v} dv = \frac{1}{8} (\ln x)^2$$

Et par conséquent : $\forall x \geq 1$,

$$F(1) + \frac{1}{16} (\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) + \frac{1}{8} (\ln x)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } 0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

D'autres parts : $\forall x \geq 1$,

$$\frac{F(1)}{x} + \frac{1}{16} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} + \frac{1}{8} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

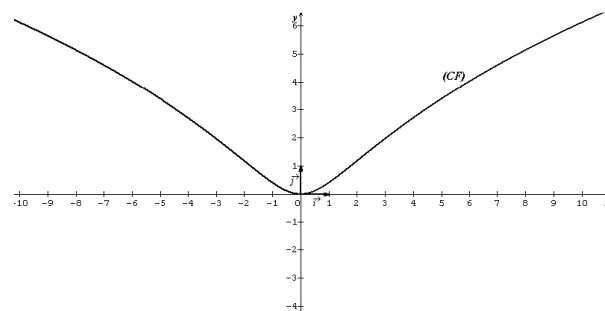
Interprétation graphique

La courbe de F admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

4. Tableau de variations de F

x	0	$+\infty$
$F'(x)$		+
$F(x)$	0	$+\infty$

F étant une fonction paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées



PROBLEME 48**PARTIE A**

$$g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}; D_g =]0; +\infty[$$

1. Dérivée

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2x} > 0 \quad \forall x \in]0; +\infty[$$

On en déduit que :

Sur $]0; +\infty[, g$ est croissante

Tableau de variation de g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$2. g(1) = 0$$

Déduction :

g étant croissante et $g(1) = 0$ alors :

$$\forall x \in]0; 1[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, g(x) > 0$$

PARTIE B

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}; D_f =]0; +\infty[$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \end{cases}$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \ln x}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}} = \frac{x - 1 + \frac{\ln x}{2}}{2x\sqrt{x}}$$

$$\text{Or } g(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{2}$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

$$3. \forall x \in]0; +\infty[, 2x\sqrt{x} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $g(x)$

Par conséquent :

$$\forall x \in]0; 1[, f'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, f$ est décroissante

Sur $]1; +\infty[, f$ est croissante

Tableau de variation de f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \sqrt{x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = 0$$

Déduction

Au voisinage de $+\infty$, $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}_0)$ sont asymptotes

$$5. f(x) - \sqrt{x} = -\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, 2\sqrt{x} > 0$$

Alors le signe de $f(x) - \sqrt{x}$ dépend de celui de $-\ln x$.

$$-\ln x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Par conséquent :

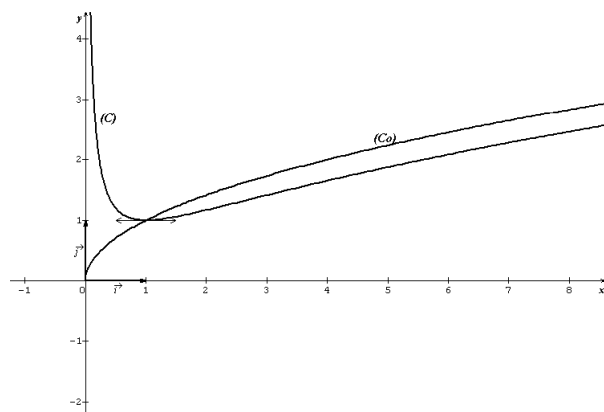
$$\forall x \in]0; 1[, f(x) - \sqrt{x} > 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) - \sqrt{x} < 0$$

On en déduit que :

Sur $]0; 1[, (\mathcal{C})$ est au dessus de $(\mathcal{C}_0)$

Sur $]1; +\infty[, (\mathcal{C})$ est en dessous de $(\mathcal{C}_0)$

6. Tracer de (C) et (C_0) 

PARTIE C

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right); n > 0$$

$$1. J = \int_1^2 f(x) dx$$

a. Interprétation géométrique

J est l'aire en unité d'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

$$b. \text{ Calcul de } \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x} \ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = [\sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x}]_1^2$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \ln 2$$

$$c. J = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 \sqrt{x} dx - \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$$

$$J = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx$$

$$J = \frac{10\sqrt{2}-8}{3} - \sqrt{2} \ln 2$$

2. Démonstration par récurrence

Soit $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1$

On sait que f est croissante sur $[1; +\infty[$

Vérifions la propriété au rang 1

Pour $n = 1, k = 0$ et on a :

$$\forall x \in [1; 2], f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

Et d'après l'inégalité de la moyenne on a :

$$f(1) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(2)$$

Par conséquent :

$$f\left(1 + \frac{0}{1}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{1}{1}\right)$$

$\forall n > 0$, supposons que $\forall k$,

$$0 \leq k \leq n-1,$$

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

et montrons que $\forall k, 0 \leq k \leq n$

$$f\left(1 + \frac{k}{n+1}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n+1}\right)$$

En effet : $\forall k, 0 \leq k \leq n$

Si $0 \leq k \leq n-1$, on a par hypothèse

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\text{Or } 1 \leq 1 + \frac{k}{n+1} \leq 1 + \frac{k}{n}$$

D'où l'inégalité (1) :

$$f\left(1 + \frac{k}{n+1}\right) \leq f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx$$

D'autres parts :

Si $1 \leq k \leq n$, alors $0 \leq k-1 \leq n-1$

et on a par hypothèse

$$f\left(1 + \frac{k-1}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

$$\text{Or } 1 \leq 1 + \frac{k}{n} \leq 1 + \frac{k+1}{n+1}$$

D'où l'inégalité (2) :

$$\int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n+1}\right)$$

Les inégalités (1) et (2) montrent que

$\forall k, 0 \leq k \leq n$,

$$f\left(1 + \frac{k}{n+1}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n+1}\right)$$

Si $\forall k, 0 \leq k \leq n-1$,

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

On peut donc conclure que :

$\forall n > 0$ et $\forall k, 0 \leq k \leq n-1$,

$$f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_1^2 f(x) dx \leq f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

3. On déduit de ce qui précède que :

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq n \times \frac{1}{n} \int_1^2 f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\text{Or } U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) +$$

$$\frac{1}{n} f\left(1 + \frac{n}{n}\right); \int_1^2 f(x) dx = J \text{ et}$$

$$U_n = \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{0}{n}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

D'où on a bien :

$$U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$$

$$4. \quad U_n - \frac{f(2)}{n} \leq J \leq U_n - \frac{f(1)}{n}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{f(2)}{n} \leq J - U_n \leq -\frac{f(1)}{n}$$

$$\Leftrightarrow -J - \frac{f(2)}{n} \leq -U_n \leq -J - \frac{f(1)}{n}$$

$$\text{Donc } J + \frac{f(1)}{n} \leq U_n \leq J + \frac{f(2)}{n}$$

Déduction

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2)}{n} = 0$$

Alors en passant à la limite, on a :

$$J \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq J$$

$$\text{On en déduit que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = J$$

PROBLEME 49

PARTIE A

$$f_1(x) = (x+1)e^{-x},$$

$$f_2(x) = -xe^{-x},$$

$$f_3(x) = (x-1)e^{-x}$$

$$D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = \mathbb{R}$$

1.

a. Dérivée

$$f_1'(x) = -xe^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f_1'(x)$ dépend de celui de $-x$.

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 0[, f_1'(x) > 0$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f_1'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 0[$, f_1 est croissante

Sur $]0; +\infty[$, f_1 est décroissante

b. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \end{cases}$$

c. Tableau de variations de f_1

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0
$f_1(x)$		1	0

2. Dérivée

$$f_2'(x) = (x-1)e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f_2'(x)$ dépend de celui de $x-1$.

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 1[, f_2'(x) < 0$$

$$\forall x \in]1; +\infty[, f_2'(x) > 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[$, f_2 est décroissante

Sur $]1; +\infty[$, f_2 est croissante

Tableau de variation de f_2

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_2'(x)$	-	0	+
$f_2(x)$	$+\infty$	e^{-1}	0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

3.

a. Dérivée

$$f_3'(x) = (2 - x)e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f_3'(x)$ dépend de celui de $2 - x$.

Par conséquent :

$$\forall x \in]-\infty; 2[, f_3'(x) > 0$$

$$\forall x \in]2; +\infty[, f_3'(x) < 0$$

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 2[$, f_3 est croissante

Sur $]2; +\infty[$, f_3 est décroissante

b. Calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = 0$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \end{cases}$$

c. **Tableau de variation de f_3**

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f_3'(x)$	+	0	-
$f_3(x)$	$-\infty$	e^{-2}	0

4. **Position de (C_1) et (C_2)**

$$f_1(x) - f_2(x) = (2x + 1)e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f_1(x) - f_2(x)$ dépend de celui de $2x + 1$.

Par conséquent :

$$\forall x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[, f_1(x) - f_2(x) < 0$$

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[, f_1(x) - f_2(x) > 0$$

On en déduit que :

$$\text{Sur } \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[,$$

(C_1) est en dessous de (C_2)

$$\text{Sur } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[,$$

(C_1) est au dessus de (C_3)

Positions de (C_1) et (C_3)

$$f_1(x) - f_3(x) = 2e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Alors sur $\mathbb{R}$,

(C_1) est au dessus de (C_3)

Positions de (C_2) et (C_3)

$$f_2(x) - f_3(x) = (1 - 2x)e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f_2(x) - f_3(x)$ dépend de celui de $1 - 2x$.

Par conséquent :

$$\forall x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[, f_2(x) - f_3(x) > 0$$

$$\forall x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[, f_2(x) - f_3(x) < 0$$

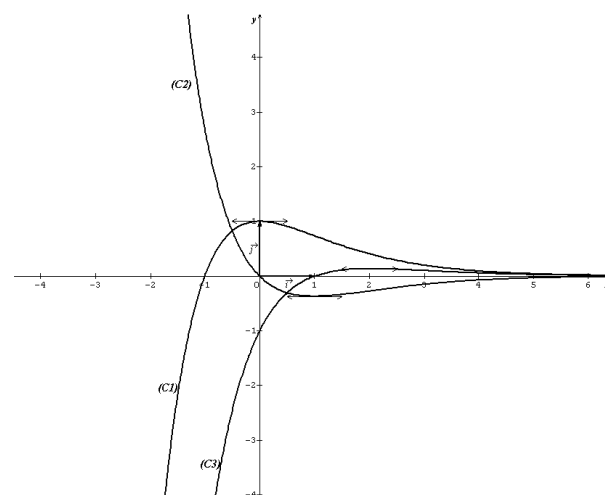
On en déduit que :

$$\text{Sur } \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[,$$

(C_2) est au dessus de (C_3)

$$\text{Sur } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[,$$

(C_2) est en dessous de (C_3)

5. Tracer de (C_1) , (C_2) et (C_3) 

PARTIE BSoit $\lambda > -1$

$$1. f_1'(x) + f_1(x) = -xe^{-x} + (x+1)e^{-x}$$

$$f_1'(x) + f_1(x) = e^{-x}$$

Alors f_1 est une solution de l'équation différentielle

$$y' + y = e^{-x}$$

Déduction

$$f_1(x) = e^{-x} - f_1'(x)$$

On en déduit qu'une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$ est par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_1(x) = -e^{-x} - f_1(x) = -(x+2)e^{-x}$$

$$2. \mathcal{A}(\lambda) = ua \times \int_{-1}^{\lambda} f_1(x) dx$$

$$\int_{-1}^{\lambda} f_1(x) dx = [-(x+2)e^{-x}]_{-1}^{\lambda}$$

$$\int_{-1}^{\lambda} f_1(x) dx = e - (\lambda+2)e^{-\lambda}$$

$$ua = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}(\lambda) = 4[e - (\lambda+2)e^{-\lambda}] \text{ cm}^2$$

Déduction

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = 4e$$

$$3. \mathcal{B}(\lambda) = ua \times \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} (f_3(x) - f_2(x)) dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} (f_3(x) - f_2(x)) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} (2x-1)e^{-x} dx$$

Intégration par parties

$$\begin{cases} u(x) = 2x-1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} (f_3(x) - f_2(x)) dx$$

$$= [-(2x-1)e^{-x}]_{\frac{1}{2}}^{\lambda} + 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} e^{-x} dx$$

$$= [-(2x+1)e^{-x}]_{\frac{1}{2}}^{\lambda}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\lambda} (f_3(x) - f_2(x)) dx$$

$$= 2e^{-\frac{1}{2}} - (2\lambda+1)e^{-\lambda}$$

$$ua = 4 \text{ cm}^2$$

Donc

$$\mathcal{B}(\lambda) = 4 \left[2e^{-\frac{1}{2}} - (2\lambda+1)e^{-\lambda} \right] \text{ cm}^2$$

Déduction

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0 \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{B}(\lambda) = 8e^{-\frac{1}{2}}$$

PARTIE C

$$f(x) = f_1(x) - f_3(x) = 2e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1. U_n = \int_{n \ln 2}^{(n+1) \ln 2} f(x) dx$$

$$U_n = [-2e^{-x}]_{n \ln 2}^{(n+1) \ln 2}$$

$$U_n = \frac{1}{2^n}$$

$$2. S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

En passant à la limite, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$$

$$\text{Car } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Alors la suite (S_n) converge vers 1

PROBLEME 50

$$f(x) = e^{-x} \sin x; D_f = \mathbb{R}$$

PARTIE A

1.

a. Dérivée

$$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$$

Vérification

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{2}e^{-x} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \\ &= \sqrt{2}e^{-x} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{b. } x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} \right]$$

Par conséquent :

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4}$$

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) > 0 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi \right]$$

Déduction

$$\forall x \in [0; 2\pi], \sqrt{2}e^{-x} > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

D'après ce qui précède :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4} \right], f'(x) > 0$$

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right], f'(x) < 0$$

$$\forall x \in \left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi \right], f'(x) > 0$$

c. Tableau de variation de f sur $[0; 2\pi]$

Sur $\left[0; \frac{\pi}{4} \right]$ et sur $\left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi \right]$,

f est croissante

Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right]$, f est décroissante

Tableau de variation de f

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$		0	
	0		$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$		

Tangente à (C) en 0 et 2π

$$(T_0): y = x$$

$$(T_{2\pi}): y = e^{-2\pi}(x - 2\pi)$$

2.

a. Points de rencontre de (C) et (C_1)

$$(C) = (C_1)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Alors sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, (C) rencontre (C_1) aux points d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

Points de rencontre de (C) et (C_2)

$$(C) = (C_2)$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Alors sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, (C) rencontre (C_2) au point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

$$\text{b. } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}} \cos \frac{3\pi}{4} = -e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Alors (C) et (C_1) ont une même tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

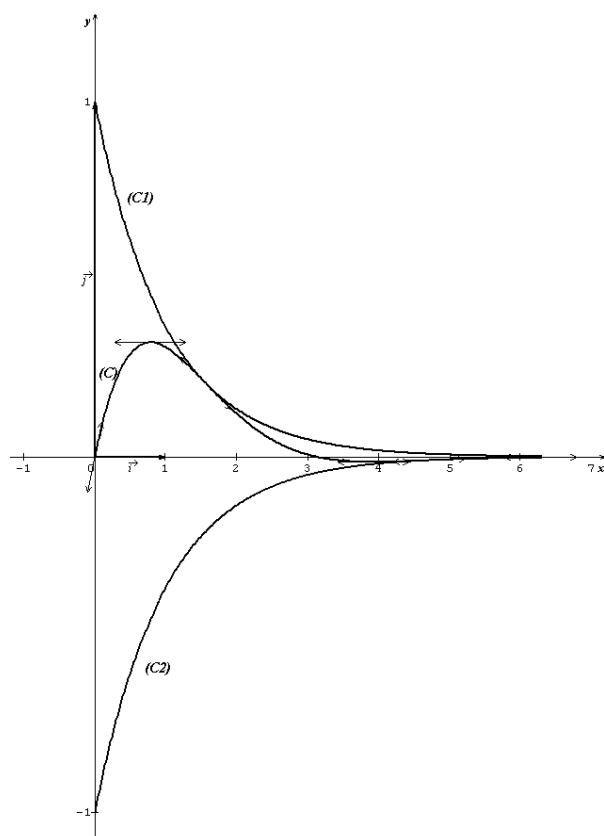
D'autres parts

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{2}} \cos \frac{7\pi}{4} = e^{-\frac{3\pi}{2}} \text{ et } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}} \sin \frac{3\pi}{2} = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{-\frac{3\pi}{2}} \text{ et } f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -e^{-\frac{3\pi}{2}}$$

Alors (C) et (C_2) ont une même tangente au point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

c. Représentons $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ 

3. $\Phi(x) = e^{-2\pi} f(x - 2\pi)$; $D_\Phi = \mathbb{R}$
 $= e^{-2\pi} [e^{-x+2\pi} \sin(x - 2\pi)]$
 $= e^{-x} \sin(x - 2\pi)$
 $\Phi(x) = e^{-x} \sin x$
 Car $\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

On a donc $\Phi(x) = f(x)$ et $D_\Phi = D_f$
Alors les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$
coïncident

PARTIE B

1.
 a. On sait que :
 $f''(x) = -2e^{-x} \cos x$
 $f'(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$
 $f(x) = e^{-x} \sin x$
Par conséquent :
 $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

On conclut donc que f est
solution de l'équation
différentielle : $y'' + 2y' + 2y = 0$

Dédution

$$2f(x) = -2f'(x) - f''(x)$$

$$\text{D'où } f(x) = -\frac{1}{2}(2f'(x) + f''(x))$$

- b. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est par exemple la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto -\frac{1}{2}(2f(x) + f'(x))$

c. $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{2}(2f(t) + f'(t)) \right]_0^x$$

$$F(x) = \left[-\frac{e^{-t}}{2} (\cos t + \sin t) \right]_0^x$$

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x)$$

2. $B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt$; $k \in \mathbb{N}$
 Soit $S_n = B_0 + B_1 + \dots + B_n$
 a. $S_n = \int_0^\pi f(t) dt + \int_\pi^{2\pi} f(t) dt + \dots + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) dt$
D'après la relation de Chasles :
 $S_n = \int_0^{(n+1)\pi} f(t) dt$
 Or $\int_0^x f(t) dt = F(x)$

$$\text{D'où } S_n = F((n+1)\pi)$$

b. Dédution

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{e^{-(n+1)\pi}}{2} (\cos(n+1)\pi + \sin(n+1)\pi)$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{1}{2} + (-1)^n \frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}$$

Car $\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1} = -(-1)^n$

$$\Leftrightarrow \left| S_n - \frac{1}{2} \right| = \frac{e^{-(n+1)\pi}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left| S_n - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{e^{-n\pi}}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n\pi}}{2} = 0 \text{ car } 0 < e^{-\pi} < 1$$

Alors la suite (S_n) admet une
limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$

3.
 a. $f(t) = e^{-t} \sin t$
 $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} > 0$
 Alors le signe de $f(t)$ dépend de celui de $\sin t$
 $\sin t \geq 0$
 $\Leftrightarrow t \in [2k\pi; (2k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$
 $\sin t \leq 0$
 $\Leftrightarrow t \in [(2k+1)\pi; 2(k+1)\pi], k \in \mathbb{Z}$
 Par conséquent :
 $\forall t \in [k\pi; (k+1)\pi]$
 On a : $f(t) \geq 0$ si k est pair
 $\Rightarrow \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t) dt \geq 0$
 $\Rightarrow B_k \geq 0$

Et on a : $f(t) \leq 0$ si k est impair

$$\Rightarrow \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt \leq 0$$

$$\Rightarrow B_k \leq 0$$

On conclut donc que :

$B_k \geq 0$, si k est pair

$B_k \leq 0$, si k est impair

b. $B_0 = \int_0^\pi f(t)dt = F(\pi)$

$$B_0 = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

$$B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)dt$$

$$= \int_0^{(k+1)\pi} f(t)dt - \int_0^{k\pi} f(t)dt$$

$$= F((k+1)\pi) - F(k\pi)$$

$$= (-1)^k \frac{e^{-(k+1)\pi}}{2} + (-1)^k \frac{e^{-k\pi}}{2}$$

$$B_k = (-1)^k e^{-k\pi} \left(\frac{1 + e^{-\pi}}{2} \right)$$

On a bien : $B_k = (-1)^k e^{-k\pi} B_0$

c. $T_n = |B_0| + |B_1| + \dots + |B_n|$

On sait que :

$$|B_k| = e^{-k\pi} B_0 \text{ car } |(-1)^k| = 1$$

Par conséquent :

$$T_n = B_0 + e^{-\pi} B_0 + \dots + e^{-n\pi} B_0$$

$$= B_0(1 + e^{-\pi} + \dots + e^{-n\pi})$$

$$= B_0 \times \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}$$

Donc

$$T_n = \frac{B_0}{1 - e^{-\pi}} (1 - e^{-(n+1)\pi})$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(n+1)\pi} = 0 \text{ car } 0 < e^{-\pi} < 1$$

Alors T_n admet une limite lorsque n tend vers l'infini et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{B_0}{1 - e^{-\pi}} = \frac{1 + e^{-\pi}}{2(1 - e^{-\pi})}$$

d. $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

Vérification

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = 2 + \frac{2(1 - e^{-\pi})}{1 + e^{-\pi}} = \frac{4}{1 + e^{-\pi}}$$

$$\text{Or } B_0 = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

D'où on a bien :

$$\frac{1}{S} + \frac{1}{T} = \frac{2}{B_0}$$