Mon cours de Mathématiques

Terminale scientifique

Collection maths excellence
édition 2023

Chapitre 1
Suites réelles et complexes

1.1 Suites réelles

1.1.1 Suites particulières

1.1.1.1 Suite géométrique

Définition 1.1. *Suite géométrique*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $q\in\mathbb{R}^*$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si elle vérifie la relation de récurrence définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=qu_n$.

Dans ce cas, on dit que (u_n) est un suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Exemples

- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=-5u_n \end{cases}$

  (u_n) est un suite géométrique de raison -5 et de premier terme 2.
- La suite (v_n) definie par : $1; -2; 4; -8; \cdots; (-2)^n, \cdots$, $n\in\mathbb{N}$, est une suite géométrique de premierterme $v_0=1$ et de raison -2.
- La suite (w_n) definie par : $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n=\dfrac{2^n}{5^{n+1}}$ est une suite géométrique de premier terme $w_1=\dfrac{2}{25}$ et de raison $\dfrac{2}{5}$ car elle vérifie la relation: $w_1=\dfrac{2}{25}$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_{n+1}=\dfrac{2}{5}u_n$.

Proposition 1.2. *Relation entre deux termes quelconque*
Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall p\in\mathbb{N}$:

$$u_n=u_p\times q^{n-p}$$

✎**DÉMONSTRATION** :
$\Longrightarrow$
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Si (u_n) est identiquement nulle alors pour tous entiers naturels n et p :

$$u_n=q^{(n-p)}\,u_p=0$$

Supposons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$. Soient n et p deux entiers naturels. On a les égalités :

$$\begin{array}{lcl} u_{p+1} &=& qu_p \\ u_{p+2} &=& qu_{p+1} \\ \vdots &=& \vdots \\ u_{n-1} &=& qu_{n-2} \\ u_n &=& qu_{n-1} \end{array}$$

On obient $(n-1-p+1)=n-p$ égalités par suite en multipliant puis en simplifiant chacune des égalités membres à membres on obtient :
- u_n comme membre de gauche ;
- $q^{n-p}u_p$ comme membre de droite c'est-à-dire par conséquent $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall p\in\mathbb{N}$,

$$u_n=q^{(n-p)}\ u_p.$$

$\Longleftarrow$ Soit (u_n) une suite numérique tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall p\in\mathbb{N}$,$u_n=q^{(n-p)}\ u_p$.
Donc $u_{n+1}=q^{(n+1-p)}\ u_p$. En posant $p=n$, il s'ensuit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=qu_n$

On déduit la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Expression de u_n en fonction de n*
Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=q^nu_0$.

Exemples

- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=-5u_n \end{cases}$. Alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=2\times(-5)^n$.
- Soit (v_n) une suite géométrique dont le 3^{e} terme est 729 et le 8^{e} est 3.

Déterminons :
☞ le premier terme de la suite puis son terme général. Soit q la raison de cette.
On a : $v_8=q^5v_3$ c'est-à-dire $q^5=\dfrac{729}{3}=243$. Or, $243=3^5$, donc en vertu de la strictement monotonie de la fonction $x\mapsto x^5$, on en déduit que $q=3$. Ainsi, $v_0=\frac{v_3}{3^3}=\frac{729}{9}=81$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=81\times3^n=3^{n+3}$.

1.1.1.2 Sens de variation d'une suite géométrique

Sens de variation d'une suite géométrique

Proposition 1.4. *Sens de variation d'une suite géométrique*
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

- *pour $q>1$:*
  - *(u_n) est une suite strictement croissante si et seulement $u_0>0$;*
  - *(u_n) est une suite strictement décroissante si et seulement $u_0<0$;*
- *pour $0<q<1$:*
  - *(u_n) est une suite strictement décroissante si et seulement $u_0>0$;*
  - *(u_n) est une suite strictement croissante si et seulement $u_0<0$;*
- *pour $q=1$, (u_n) est une suite constante ;*
- *pour $q<1$, (u_n) est une suite alternée et n'est pas monotone.*

✎DÉMONSTRATION :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non identiquement nulle alors $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}-u_n=qu_n-u_n=(q-1)u_n=(q-1)q^nu_0$$

D'où la disjonction de cas suivants :

- Si $q>1$ alors $(q-1)q^n>0$ par conséquent (u_n) est une suite strictement croissante si et seulement $u_0>0$; (u_n) est une suite strictement croissante si et seulement $u_0<0$;
- Si $0<q<1$ alors $(q-1)q^n<0$ par conséquent (u_n) est une suite strictement décroissante si et seulement $u_0>0$;

(u_n) est une suite strictement croissante si et seulement $u_0<0$;

- Si $q=1$ alors $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n$ donc (u_n) est une suite constante.
- Si $q<0$ puisque $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=q<0$, on en déduit que u_{n+1} et u_n ont des signes opposés.
  Ainsi, la suite (u_n) est alternée.
  De plus on a $u_{n+1}-u_n=(q-1)u_n$ et $u_{n+2}-u_{n+1}=(q-1)qu_n$ donc $u_{n+1}-u_n$ et $u_{n+2}-u_{n+1}$ sont de signes opposés. Ainsi, la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exemples

• Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=-5u_n \end{cases}$.

On a vu que (u_n) est une suite géométrique de raison $q=5$ et de premier terme $u_0=2$.
En vertu de la propriété précédente, on en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

• Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=-5 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{5}{8}u_n \end{cases}$.

La suite (v_n) ainsi définie est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{5}{8}$ et de premier terme -5.
Comme $q<1$ et $u_0<0$, en vertu de la propriété précédente, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

1.1.1.3 Suite arithmétique

Définition 1.5. *Suite arithmétique*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $r\in\mathbb{R}$.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r si elle vérifié la relation de récurrence définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=r+u_n$.

Dans ce cas , on dit que (u_n) est un suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Exemples

• Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=-7 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-5 \end{cases}$

(u_n) est un suite arithmétique de raison -5 et de premier terme -7.
• La suite (v_n) definie par :$1;3;5;7;\cdots;2n+1,\cdots,\ n\in\mathbb{N}$, est une suite arithmétique de premier terme $v_0=1$ et de raison 2.
• La suite (w_n) definie par : $5;10;15;20;\cdots;5n,\cdots,\ n\in\mathbb{N}^*$, est une suite arithmétique de premier terme $w_1=5$ et de raison 5.

Proposition 1.6. *Relation entre deux termes quelconque*
Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall p\in\mathbb{N}$:

$$u_n=(n-p)\times r+u_p$$

✎DÉMONSTRATION :
$\Longrightarrow$
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Soient n et p deux entiers naturels.
On a les égalités :

$$\begin{aligned} u_{p+1}-u_p &= \mathrm{r} \\ \mathrm{u}_{\mathrm{p}+2}-u_{p+1} &= r \\ \vdots &= \vdots \\ u_{n-1}-u_{n-2} &= r \\ \mathrm{u_n}-u_{n-1} &= r \end{aligned}$$

On obient $(n-1-p+1)=n-p$ égalités par suite en additionnant chacune des égalités membres à membres on obtient :
• $u_n - u_p$ comme membre de gauche ;
• $(n-p)\times r$ comme membre de droite.

$\Longleftarrow$ Soit (u_n) une suite numérique tel que $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall p\in\mathbb{N}$, $u_n = u_p+(n-p)r$.
C'est-à-dire , $u_{n+1}=u_p+(n+1-p)r$ alors en particulier pour $p=n$, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$ ce qui montre que (u_n) est suite arithmétique de raison r.

On déduit la proposition suivante :

Proposition 1.7. *Expression de u_n en fonction de n*
Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = nr+u_0$.

Exemples
• Soit (u_n) est une suite arithmétique de raison $-0,5$ et si $u_2=7$, alors pour tout $n\geqslant 2$

$$u_n = 7+(n-2)\times(-0,5)$$

c'est-à-dire $u_n=-0,5n+8$.
• Soit (v_n) une suite arithmétique définie par $v_0=11$ et $v_5=\dfrac{v_9}{4}$.
Déterminons l'expression de u_n.
Soit r la raison de cette suite.
☞ D'une part on a $v_9=v_5+4r$. Or, $v_5=\dfrac{v_9}{4}$ donc $4v_5=v_5+4r$ c'est-à-dire $r=\dfrac{3}{4}v_5$.
☞ D'autre part on a $v_5=v_0+5r=v_0+\dfrac{15}{4}v_5$ donc $v_5=-\dfrac{4v_0}{11}=-4$.
Ainsi, $r=-3$, par suite $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=-3n+11$.
• La suite (w_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ w_n=5-\dfrac{3}{4}n$ est une arithmétique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $w_1=\dfrac{17}{4}$.

1.1.1.4 Sens de variation d'une suite arithmétique

Sens de variation d'une suite arithmétique

Proposition 1.8. *Sens de variation d'une suite arithmétique*
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

- *Si r>0 alors (u_n) est une suite strictement croissante ;*
- *Si r<0 alors (u_n) est une suite strictement décroissante;*
- *pour $r=0$, (u_n) est une suite constante.*

La démonstration de cette propriété est triviale.
En effet, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a l'égalite $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n=r$.
Exemples
☞ La suite de terme générale $u_n=3n+1$ est une suite arithmétique strictement croissante.
☞ Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-7\end{cases}$ est suite arithmétique strictement décroissante.

1.1.1.5 Somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique

Définition proposition

Définition 1.9. *Somme des termes de l'indice p à l'indice n*
Soit (u_n) une suite. On définit la somme des termes consécutifs de l'indice p à l'indice n par :

$$\mathcal{S}_{p,n} = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

☞ Si la somme commence par le premier terme u_0, on notera par comodité $\mathcal{S}_n$ au lieu de $\mathcal{S}_{0,n}$. Ainsi, on écrit :

$$\mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

Exercice 1.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solution. Posons $S_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$.
Ecrivons de deux façons la somme S_n on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{S_n} &= 1+2+3+\cdots+(n-1)+n \\ \mathrm{S_n} &= (n-1)+n+\cdots+1+2+3 \end{aligned}$$

En faisant la somme des deux égalités membres en membres, on obtient :
- le membre de gauche a pour expression $2S_n$;
- le membre de droite a pour expression $n(n+1)$.

Ainsi, on a $2S_n = n(n+1)$. D'où : D'où :

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 1.2. Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels pairs.

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\mathcal{T}_n$ cette somme.
On a : $\mathcal{T}_n = 2+4+\cdots+2n = 2(1+2+\cdots+n-1+n)$
Or, en vertu de la propriété précédente, il s'ensuit que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
D'où :

$$\mathcal{T}_n = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Exercice 1.3. Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs.
En déduire la somme S_{100} des 100 premiers termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2 et premier terme 1.

Solution. Soit $\mathcal{W}_n = 1+3+5+\cdots+2n+1$, $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\mathcal{W}_n$
Par définition on a $\mathcal{W}_n = \mathcal{T}_n + n + 1$.
En effet, donc $\mathcal{W}_n = 1+(1+2)+(4+1)+\cdots+(2n+1) = (2+4+\cdots+2n)+(1+1+\cdots+1)$
Or, $1+1+\cdots+1$ est la somme de $n+1$ termes tous égaux à 1, donc elle est égale à $n+1$.
Ainsi, $\mathcal{W}_n = n(n+1)+n+1 = (n+1)^2$ d'où :

$$1+3+5+\cdots+2n+1 = (n+1)^2$$

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et premier terme 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n+1$ par suite $u_0 + u_1 + \cdots + u_{99} = S_{100}$.
Or, $S_{100} = (99+1)^2 = 100^2 = 10000$ donc $1+3+\cdots+199 = 10000$.

Exercice 1.4.
Soient a et b deux nombres réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par pour tout entier naturel non n :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = n(an+b)$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
2. Calculer le premier terme et la raison de cette suite.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ on a :

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & S_n - S_{n-1} \\ u_n & = & n(an+b) - (n-1)[a(n-1)+b] \\ u_n & = & an^2 + bn - a(n-1)^2 - bn + b \\ u_n & = & 2an - a + b \end{array}$$

d'après la **proposition 1.7** de la page 6 on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $u_{n+1} - u_n = 2a(n+1) - a + b - (2an - a + b) = 2a$. De plus, $S_1 = u_0 = a + b$ par suite, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = a + b$ et de raison $2a$.

Exercice 1.5. Soit u_n le terme générale d'une aritmétique de raison r et de premier ter u_0.
Exprimer la somme $\mathcal{S}_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ en fonction u_0, u_n et de n.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On a $u_n = nr + u_0$.
Donc $\mathcal{S}_n = u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + \cdots + nr + u_0 = (n+1)u_0 + (1+2+\cdots+n)r$. Or, en vertu de l'exercice 1.1 précédent, il s'ensuit que $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ d'où :

$$\mathcal{S}_n = (n+1)u_0 + r \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2u_0+nr)}{2} = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

Proposition 1.10. *Somme des termes d'une suite arithmétique*
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

1.1.1.6 Somme de puissances d'un réel q

Proposition 1.11. *Somme de $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$*
Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier naturel n :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

✎**DÉMONSTRATION** : Soit $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (1+q^1+q^2+\cdots+q^n)(1-q) & = & (1+q^1+q^2+\cdots+q^n) - (q^1+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}) \\ (1+q^1+q^2+\cdots+q^n)(1-q) & = & 1 + (q-q) + (q^2-q^2) + \cdots + (q^n-q^n) - q^{n+1} \\ (1+q^1+q^2+\cdots+q^n)(1-q) & = & 1 - q^{n+1} \end{array}$$

Or, $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ alors on peut diviser chaque membre par $1-q$, ce qui permet d'obtenir :

$$1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple

- Calculons $1 - 2 + 4 - 8 + \cdots - 128$

Posons $\mathcal{S}$ cette somme. On remarque que $(-2)^7 = -128$ donc on a :

$$\mathcal{S} = 1 + (-2)^1 + (-2)^2 + \cdots + (-2)^7$$

Ainsi, en vertude la propriété précédente on en déduit que :

$$\mathcal{S} = \frac{1-(-2)^8}{1+2} = \frac{1}{3}(1-256) = -85$$

Exercice 1.6. Jeux télévisé

M.Ndong a été selectionné pour participer à un jeu télévisé. Chaque mois on lui verse, pendant une durée maximale de douze mois, une somme d'agrent dont le montant initial est de 600 000 fcfa le premier mois. Le versement augmente, sur le modèle des intérêts composés, de 3% chaque mois.

Ainsi, le 2^e mois M.Ndong touchera 618 6000 fcfa, etc.

On désigne par u_n le montant, exprimé en fcfa, versé à M.Ndong le $n-i$ème mois. Ainsi, $u_1 = 600\ 000$.

☞ *On arrondira éventuellement les résulats à l'unité.*

1. Calculer la somme exacte que M.Ndong touchera le 3^e mois.
2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer la somme que M.Ndong touchera le dernier mois.
4. M.Ndong veut calculer la somme totale qu'il a gagnée durant ces 12 mois. On pose $\mathcal{S} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{12}$. Déterminer la somme $\mathcal{S}$.

Solution.

1. La somme exacte que M.Ndong touchera le 3^e mois correspond à u_3. On a :

$$u_3 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)u_2 = 1,03 \times 6186000 = 6371580$$

Ainsi, le 3^e mois M.Ndong touchera la somme de 6371580 fcfa.

2. On a l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 1,03 u_n$. Ainsi, (u_n) est une suite gométrique de raison 1,03 et de premier terme 600 000 donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1,03^n \times 600000$.
3. La somme gagnée par M.Ndong le 12^e mois représente u_{12} on a $u_{12} = 1,03^{12} \times 600000 \approx 855457$. Ainsi, la somme gagnée par M.Ndong le 12^e mois est de 855457 fcfa.
4. On a: $\mathcal{S} = u_1 + 1,03u_1 + \cdots + 1,03^{12}u_1 = (1 + 1,03 + \cdots + 1,03^{12})u_1$ or,

$$1 + 1,03 + \cdots + 1,03^{12} = \frac{1 - 1,03^{13}}{1 - 1,03} = \frac{100}{3}(1,03^{13} - 1)$$

Donc on en déduit que :

$$\mathcal{S} = \frac{100u_1}{3}(1,03^{13} - 1) = \frac{100}{3} \times 600000 \times (1,03^{13} - 1) \approx 9370674$$

Ainsi, la somme totale gagnée par M.Ndong ces 12 mois est de 9370674 fcfa.

1.1.1.7 Somme des termes d'une suite géométrique

Soit u_n le terme générale d'une géométrique de raison q et de premier ter u_0.

Notons par S_n la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$. On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0$ donc

$$\mathcal{S}_n = u_0 + qu_0 + q^2u_0 + \cdots + q^n u_0 = (1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n)u_0$$

or, en vertu de la propriété précédente, il s'ensuit que $1 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

D'où :

$$\mathcal{S}_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \times u_0$$

Plus généralement, on en déduit la propriété suivante :

Proposition 1.12. *Somme des termes d'une suite géométrique*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $q \neq 1$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n = \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \times u_0$$

1.1.1.8 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Définition proposition

Définition 1.13. *Suite récurrente linéaire d'ordre 1*
Soient a et b deux nombres complexes. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 1 toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1}=a u_n+b$ avec $a\neq 0$

☞ Lorsque $a=1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison b.
☞ Lorsque $b=0$ et $a\neq 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Proposition 1.14. *Expression explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1.*
Soient a et b deux nombres complexes et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par définie par u_0 et la relation de récurrence pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=a u_n+b$ avec $a\neq 1$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\frac{(u_1-u_0)a^n-b}{a-1}$$

✎ DÉMONSTRATION

Montrons d'abord par récurrence la propriété $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: $u_n=a^n u_0+b\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}$
pour $n=1$ on a $u_1=a u_0+b$ donc $u_1=a^1u_0+b\sum_{k=1}^{1}a^{1-k}$ ainsi pour $n=1$ $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée (c'est même la définition de u_1), on peut aussi remarqué que la propriété $\mathcal{P}(n)$ pour $n=2$ et $n=3$ est également vérifiée. Montrer que $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= a u_n+b\\
u_{n+1} &= a\left(a^n u_0+b\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}\right)+b\\
u_{n+1} &= a(a^n u_0+b(a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1))+b\\
u_{n+1} &= a^{n+1}u_0+(a^{n+1}+a^n+\cdots+a^2+a)b+b\\
u_{n+1} &= a^{n+1}u_0+(a^{n+1}+a^n+\cdots+a^2+a+1)b\\
u_{n+1} &= a^{n+1}u_0+b\sum_{k=1}^{n+1}a^{n+1-k}
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ par suite pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n=a^n u_0+b\sum_{k=1}^{n}a^{n-k}$.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}a^{n-k} = a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1=\frac{a^n-1}{a-1}$$

donc on en déduit que pour tout $n\geq 1$:

$$\begin{aligned}
u_n=a^n u_0+b\sum_{k=1}^{n}a^{n-k} &= a^n u_0+b\frac{a^n-1}{a-1}\\
u_n &= \frac{(a-1)a^n u_0+b(a^n-1)}{a-1}\\
u_n &= \frac{(u_1-u_0)a^n-b}{a-1}
\end{aligned}$$

Exercice 1.7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+1$.

1. Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
2. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}+1$.

1. D'après la **proposition 1.14** on en déduit que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$u_n=\frac{(u_1-u_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$
2. $u_{n+1}-u_n=2-\frac{1}{2^n}-2+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}>0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

1.1.1.9 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition proposition

Définition 1.15. *Suite récurrente linéaire d'ordre 2*
Soient a et b deux nombres complexes. On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et u_1 et la relation de récurrence : $u_{n+2}=a\,u_{n+1}+\mathrm{b}u_n$ avec $b\neq 0$.

☞ Lorsque $a=1$ et $b=0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.
☞ Lorsque $b=0$ et $a\neq 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison a.

Proposition 1.16. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas complexe)*
Soient $(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0,u_1)\in\mathbb{C}^2$ et :
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=a\,u_{n+1}+b\,u_n$$
L'equation $r^2-a\,r-b=0$ est appelée l'equation caractéristique.

- *Si l'equation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors :*
$$\exists!(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$$
- *Si l'equation caractéristique admet une solution double r, alors :*
$$\exists!(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda r^n+\mu\, n\, r^n$$

Remarque 1.17. L'hypothèse $b\neq 0$ assure qu'il s'agit bien d'une relation de récurrence d'ordre 2. En particulier, 0 n'est pas solution de l'equation caractéristique.

✎DÉMONSTRATION :
Supposons d'abord que l'equation admette deux solutions r_1 et r_2.
Analyse - Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$. On cherche $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\begin{cases}\lambda+\mu=u_0\\ \lambda r_1+\mu r_2=u_1\end{cases}$. Ce syst'eme admet une unique solution $(\lambda,\mu)=\left(\frac{u_1-r_2u_0}{r_1-r_2},\frac{u_1-r_1u_0}{r_1-r_2}\right)$. Ainsi, si (λ,μ) conviennent, alors leurs valeurs sont données par la résolution de ce système et donc le couple (λ,μ) sera unique.
Synthèse -Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$.

On a P(0) et P(1) vérifiées par définition de (λ,μ). Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$ et $u_{n+1}=\lambda r_1^{n+1}+\mu r_2^{n+1}$ donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1}+bu_n \\ u_{n+2} & = & a(\lambda r_1^{n+1}+\mu r_2^{n+1})+b(\lambda r_1^n+\mu r_2^n) \\ u_{n+2} & = & \lambda r_1^{n+2}+\mu r_2^{n+2} \end{array}$$

car ${r_1}^2=ar_1+b$ et ${r_2}^2=ar_2+b$. Ainsi on a $P(n+2)$ vraie. En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.
Supposons maintenant que l'equation admette une solution double $r\neq 0$
Analyse-Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\lambda r^n+\mu n r^n$. On cherche $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ satisfaisant cette relation. Pour $n=0$ et $n=1$, on obtient $\left\{\begin{array}{l}\lambda=u_0\\ \lambda r_1+\mu r_2=u_1\end{array}\right.$. Ce syst'eme admet une unique solution $(\lambda,\mu)=\left(u_0,\frac{u_1-ru_0}{r}\right)$. Ainsi, le couple (λ,μ) est unique.
Synthèse-Montrons alors par récurrence d'ordre 2 sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété $P(n)$: $u_n=\lambda r^n+\mu n r^n$. On a P(0) et P(1) vérifiées par définition de (λ,μ). Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies. Par hypothèse de récurrence, $u_n=\lambda r^n+\mu n r^n$ et $u_{n+1}=\lambda r^{n+1}+\mu(n+1)\,r^{n+1}$ donc

$$\begin{array}{rcl} u_{n+2} & = & a u_{n+1}+bu_n \\ u_{n+2} & = & a(\lambda r^{n+1}+\mu(n+1)\,r^{n+1})+b(\lambda r^n+\mu n r^n) \\ u_{n+2} & = & \lambda r^{n+2}+\mu(n+2)\,r^{n+2} \end{array}$$

car $r^2=ar+b$ et $r=\frac{a}{2}$. Ainsi on a $P(n+2)$ vraie. En conclusion, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Proposition 1.18. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Cas réel)*
Soient $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0,u_1)\in\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=a u_{n+1}+bu_n$$

L'equation $r^2-ar-b=0$ est appelée l'equation caractéristique.

- *Si l'equation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors :*

$$\exists!(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$$

- *Si l'equation caractéristique admet une solution double r, alors :*

$$\exists!(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\lambda r^n+\mu n r^n$$

- *Si l'quation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1=re^{i\theta}$ et $r_2=re^{-i\theta}$ (avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$), alors :*

$$\exists!(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \text{ tels que } \forall n\in\mathbb{N}, u_n=r^n(\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta))$$

✎**DÉMONSTRATION** :
Les deux premiers cas s'obtiennent comme dans le cas complexe. Les scalaires (λ,μ) déterminés en résolvant les systèmes introduits dans la preuve seront cette fois réels.
Supposons que l'équation admette deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1=re^{i\theta}$ et $r_2=re^{-i\theta}$. D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{C}^2$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=A r^n\, e^{in\theta}+\mathrm{B}r^n e^{-in\theta}$. Montrons que $B=\overline{A}$: On sait que :

$$\left\{\begin{array}{l} A+B=u_0\\ Ar_1+\bar{r}_1B=u_1\end{array}\right.$$

Puisque $r_1 \neq \bar{r}_1$ car $r_1 \notin \mathbb{R}$ alors on en déduit que

$$A = \frac{u_1 - \bar{r}_1 u_0}{r_1 - \bar{r}_1} \text{ et } B = \frac{u_1 - r_1 u_0}{\bar{r}_1 - r_1} = \bar{A}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= A r^n e^{in\theta} + \bar{A} r^n e^{-in\theta} \\ u_n &= 2\mathrm{Re}(A e^{in\theta}) r^n \\ u_n &= (2\mathrm{Re}(A)\cos(n\theta) - 2\mathrm{Im}(A)\sin(n\theta)) r^n \end{aligned}$$

Exercice 1.8. Suite récurrente
Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

1. $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$
2. $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$

Solution. On utilise **les propositions 1.17 et 1.18** ci-dessus.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$.
   L'équation caractéristique $x^2 - 5x + 4 = 0$ admet pour solutions :
   $$r_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$
   Par suite, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \lambda 4^n + \mu$$
   avec $(\lambda, \mu) = \left(\frac{u_1 - u_0}{3}, \frac{u_1 - 4u_0}{3}\right)$ donc :
   - si $\lambda = \frac{u_1 - u_0}{3} = 0$ c'est-à-dire si $u_1 = u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mu = -u_0$.
   - si $\lambda = \frac{u_1 - u_0}{3} > 0$ c'est-à-dire si $u_1 > u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $+\infty$.
   - si $\lambda = \frac{u_1 - u_0}{3} < 0$ c'est-à-dire si $u_1 < u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $-\infty$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$.
   L'équation caractéristique $x^2 + x + 1 = 0$ admet pour solutions :
   $$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{i\frac{2\pi}{3}n} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = e^{-i\frac{2\pi}{3}n}$$
   Par suite, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \lambda \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \mu \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$
   avec $\lambda = u_0$ et $\mu = \frac{u_1 + \frac{u_0}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2u_1 + u_0}{\sqrt{3}}$.
   - si $\lambda = \mu = 0$ c'est-à-dire que $u_1 = u_0 = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   - Si $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$ c'est-à-dire que $u_0 \neq 0$ ou $2u_1 + u_0 \neq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

1.1.2 Convergence d'une suite

1.1.2.1 Représentation graphique d'une suite de nombres réels

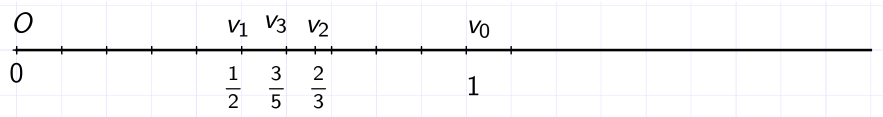
Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{1}{1 + v_n} \end{cases}$

☞ Représentation sur un axe graduée

Le tableau ci-dessous affiche les 4 premiers termes de la suite (v_n).

n	0	1	2	3
v_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$

On en déduit une représentation graphique sur un axe $(O; I)$.



☞ Représentation dans le plan

Le plan est muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+1}$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

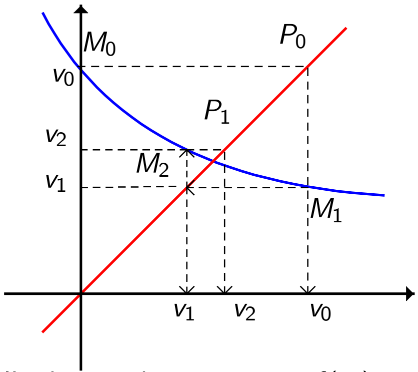
Contruction de v_1

Soit M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $v_0 = 1$;

l'ordonnée de M_0 est $v_1 = f(v_0)$.

Soit P_0 le point de (Δ) d'ordonnée v_1;

l'abscisse de P_0 est v_1.



Contruction de v_2

Soit M_1 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $v_1 = 1$; l'ordonnée de M_1 est $v_2 = f(v_1)$.

Soit P_1 le point de (Δ) d'ordonnée v_2; l''abscisse de P_1 est v_2.

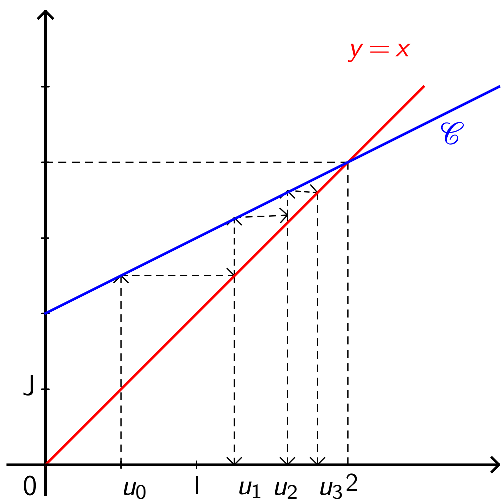
1.1.2.2 Limite d'une suite

Suites Convergentes

Le plan est muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la repésentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x + 2$ et (Δ) la droite d'équation $y = x$.

Le graphique permet de conjecturer que lorsque n prendre des valeurs « de plus en plus grandes » les termes de la suite se rapprochent de 4.



On dit que u_n tend vers 4 lorsque n tend vers $+\infty$ ou que la suite (u_n) a pour limite 4.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$

Suites divergentes

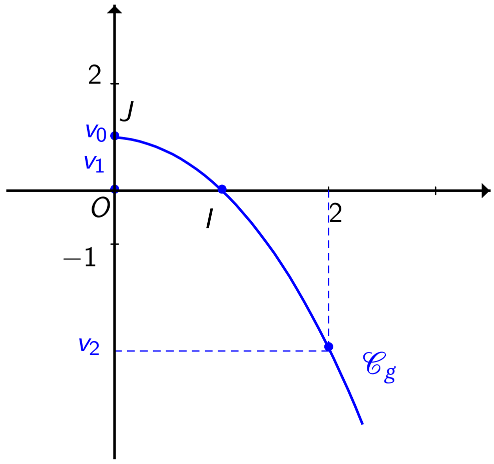
• Soit (v_n) la suite définie par $v_n = -n^2 + 1$

Le plan est muni du repère $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. On désigne par $\mathscr{C}_g$ la représentation de la fonction g

définie par : $g(x) = -x^2 + 1$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

On admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$



• Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_n = (-1)^n$
Pour tout nombre entier naturel pair, on a : $w_n = 1$.
Pour tout nombre entier naturel impair, on a : $w_n = -1$.
On admet que cette suite n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Définition proposition

Définition 1.19. *On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout n suffisamment grand.*
On dit la suite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle a une limite finie.
On dit la suite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente si elle n'est pas convergente.

☞ Toute suite constante est convergente.
☞ Les suites de terme générale $(-1)^n$, $\sin(n)$ et $\cos(n)$ sont divergentes.

Proposition 1.20. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par $u_n = f(n)$, où f est fonction numérique. Si f a une limite en $+\infty$, alors u_n a une limite et on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f(n)$$

Remarque 1.21.
• Les règles de calculs sur les limites de fonctions s'appliquent aux suites.
• On admet que si une suite admet une limite, cette limite est unique.
• Si la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$, on ne peut rien conclure sur l'éventuelle limite de (u_n).

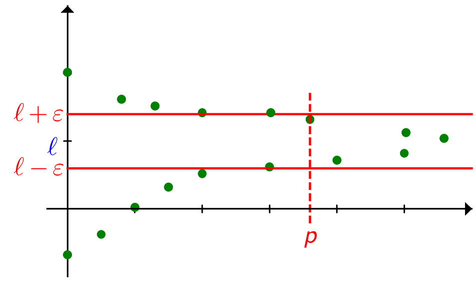
Exemples

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 + 5$. On a pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + 5$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n^2 + 5) = +\infty$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   ☞ Ainsi, la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Soit (v_n) la suite de terme générale $v_n = \dfrac{7-2n}{n+4}$. On a pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{7-2x}{x+4}$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7-2n}{n+4}\right) = -2$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$.
   ☞ Ainsi, la suite (v_n) converge vers -2.

Définition 1.22. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout n suffisamment grand et $\ell\in\mathbb{R}$.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

Interprétation graphique - si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p, tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équations $y=\ell-\varepsilon$ et $y=\ell+\varepsilon$

Les termes de cette suite semblent se resserrer autour de ℓ pour des valeurs de n qui dépassent un certain rang p.



1.1.3 Suites majorées, minorées et bornées

Définition - Vocabulaire

Définition 1.23. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles.*

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***majorée*** *s'il existe un réel M tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq M$.*
   On dit dans ce cas, on dit que M est un ***majorant*** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
2. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***minorée*** *s'il existe un réel m tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq m$.*
   On dit dans ce cas, on dit que m est un ***minorant*** *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

☞ Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre complexe, on dit qu'elle est bornée si et seulement si, il existe un réel M positif tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\leq M$.

Exemples

- Les suites (u_n) de terme général $\sin(n)$, $\cos(n)$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par -1, donc elles sont bornées.
- La suite de terme général $u_n=\cos(n)+i\sin(n)$ est bornée. En effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$|u_n|=\sqrt{\cos^2(n)+\sin^2(n)}=\sqrt{1}=1$$

- La suite de nombres complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0\in\mathbb{C}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{2}$$

est bornée. En effet, tout nombre complexe z s'écrit sous la forme algébrique $z=a+ib$ où $a\in\mathbb{R}$ est la partie réelle de z et $b\in\mathbb{R}$ sa partie imaginaire. Or, on pour tous réels a et b : $a^2\leq a^2+b^2$, avec égalité lorsque b est nul, soit $|a|\leq\sqrt{a^2+b^2}$. De plus, $a\leq|a|$ donc, $a\leq|a|\leq\sqrt{a^2+b^2}$. Pour tout nombre complexe z, $\operatorname{Re} z\leq|\operatorname{Re} z|\leq|z|$ ainsi, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|z_{n+1}|=\frac{|z_n+|z_n||}{2}\leq\frac{|z_n|+|z_n|}{2}=|z_n|$$

donc la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante par suite, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|\mathrm{re}(z_n)|\leq|z_n|\leq|z_0|$, ce qui prouve que la suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

☞ • Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
☞ • Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

Proposition 1.24. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de* ***nombres réels*** *croissante et admettant pour limite $\ell\in\mathbb{R}$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par ℓ.*

✎**Démonstration**
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $u_p>\ell$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n\geq p$, $u_n\geq\ell>\ell-1$ donc l'intervalle $I=]\ell-1;u_p[$ est un intervalle ouvert contenant ℓ. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui contredit le fait que pour tout $n\geq p$, $u_n\geq u_p$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq\ell$.

1.1.3.1 Théorème de la convergence des suites monotones

Théorème 1.25. *Soit (u_n) une suite de* ***nombres réels****.*

1. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante est majorée, alors elle est convergente.*
2. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante est minorée, alors elle est convergente.*

Exercice 1.9. Suite bornée
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout naturel n par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n-\dfrac{1}{3}(u_n)^2$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0;1]$.
2. Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Solution. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie pour tout naturel n par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n-\dfrac{1}{3}(u_n)^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x-\dfrac{1}{3}x^2$ et pour tout $x\in[0;1]$, $(x)=-\dfrac{x}{3}(x-3)$

   Pour $x\in[0;1]$, $x-3<0$ et $-x\leq 0$ donc $f(x)=-\dfrac{x}{3}(x-3)\geq 0$ par suite pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)\geq 0$.
   De plus, pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\leq\dfrac{3}{4}$ donc pour tout $x\in[0;1]$, $f(x)\in[0;1]$.
   Considérons la proposition pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: $u_n\in[0;1]$. Pour $n=1$ on a $u_0=1$ donc $u_0\in[0;1]$ par suite $\mathcal{P}(0)$ est vérifié. Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$ donc d'après la fonction f on en déduit que $u_{n+1}=f(u_n)\in[0;1]$ par conséquent on a $\mathcal{P}(n+1)$.
   Conclusion : On a vérifié $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(n)$ implique $\mathcal{P}(n+1)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $\mathcal{P}(n)$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{3}(u_n)^2$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n\leq 0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge d'après **le théorème 1.25**. De plus, si on pose $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ alors ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$ car f est continue. On a :
$$f(x)=x\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^2=0\Leftrightarrow x=0$$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Exercice 1.10. Suite des racines d'un polynôme
n désigne un entier strictement positif. Soit (E_n) l'équation d'inconnu $x\in\mathbb{R}$ définie par $x^3+nx=1$.
On suppose que (E_n) admet une unique solution x_n dans $[0;1]$.

1. Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par pour tout $x\in[0;1]$, $f_n(x)=x^3+nx-1$ et on note $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Etudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_n)$ et $(\mathcal{C}_{n+1})$.
   b) En déduire que le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis préciser sa limite.

Solution. n désigne un entier strictement positif. Soit (E_n) l'équation d'inconnu $x\in\mathbb{R}$ définie par $x^3+nx=1$.

On suppose que (E_n) admet une unique solution x_n dans $[0;1]$.

1. a) Pour $x \in [0;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^3 + (n+1)x - 1 - x^3 - nx + 1 = x \geq 0$ donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ c'est-à-dire que la courbe $(\mathcal{C}_n)$ est située en dessous de la courbe $(\mathcal{C}_{n+1})$ sur l'intervalle $[0;1]$ ainsi, $f_{n+1}(x_n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b) De ce qui précède, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n)$ et on a l'inégalité,$f_{n+1}(x_n) \geq 0$ donc par suite, $f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n)$ et par croissance de la fonction f_n, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \leq x_n$ donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est valeur dans $[0;1]$ donc elle est minorée par 0 et d'après la question 1b, elle est également décroissante donc par le théorème de la convergence des suites monotone, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 1 - \dfrac{x_n^3}{n}$ donc $|x_n - 1| = \left|-\dfrac{x_n^3}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ et par le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 1.11. Suites et intégrales

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, une fonction continue, positive et décroissante.

On pose : $u_n = f(n)$, puis : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_0^n f(x)dx$. Montrer que la suite (v_n) est monotone, puis qu'elle converge.

Application : En considérant la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$, étudier la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

Exercice 1.12. Suites de radicaux

a désigne un nombre réel positf.

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = \sqrt{a}$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + a}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, à termes positifs.
2. a) Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{a+x}$ pour les x positifs.
   b) En déduire la convergence de la suite de terme général v_n définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$v_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}}_{\text{l'expression comporte n radicaux}}$$

Exercice 1.13. Détermination des solutions exactes d'une équation $f(x) = k$.

n étant un entier naturel, f_n désigne la fonction numérique définie sur $]-\infty;1]$ par

$$\forall x \in]-\infty;1], f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$$

Partie A : Etude des variations de f_n.

1. a) Dresser le tableau des variations de f_n, pour $n \geq 1$, suivant la parité de n.
   b) Déterminer l'unique réel α_n de $]0;1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$ pour $n \geq 1$.
2. Représenter dans le même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1 et f_2.

Partie B : Détermination des valeurs des solutions de l'équation $f_1(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

1. Etudier suivant les valeurs du réel k, le nombre des solutions de l'équation $f_1(x) = k$.
2. Montrer que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0, \qquad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{3} < x_3 < 1$$

3. Pour $i \in \{1,2,3\}$, on pose alors $u_i = \dfrac{3}{2}\left(x_1 - \dfrac{1}{3}\right)$. Montrer qu'il existe unique réel θ_i dans l'intervalle $[0;\pi]$, tel que $u_i = \cos(\theta_i)$.
4. Montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont solutions de l'équation $\cos(3\theta) = \dfrac{1}{2}$, avec $\theta \in [0;\pi]$.
5. Donner alors les valeurs exactes de x_1, x_2 et x_3.

Exercice 1.14. Etude d'une limite

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polyôme P_n tel que pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$P_n(\text{cotan}^2(t)) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1}t}$$

2. a) Montrer que pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\text{cotan}^2 t \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \text{cotan}^2 t$.

   b) En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Solution. n désigne un entier naturel.

1. D'après la formule de Moive on a :

$$e^{i(2n+1)t} = (\cos(t) + i\sin(t))^{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}(i)^k \sin^k(t)\cos^{n-k}(t)$$

Or pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(2n+1)t$ est la partie imaginaire du nombre complexe $e^{i(2n+1)t}$ d'où

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t &= \text{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k}(i)^k \sin^k(t)\cos^{2n+1-k}(t)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k \sin^{2k+1}(t)\cos^{2(n-k)}(t)\end{aligned}$$

par suite on obtient pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1}t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k \sin^{2k+1}(t)\cos^{2(n-k)}(t)}{\sin^{2n+1}t} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k \text{cotan}^{2(n-k)}(t)$$

En pose $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{n-k}(t)$ alors P_n est un polynôme de degré n vérifiant : pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$P_n(\text{cotan}^2(t)) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1}t}$$

d'où l'existence.

Montrons l'unicité :

Supposons qu'il existe un autre polynôme Q_n vérifiant pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $Q_n(\text{cotan}^2(t)) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1}t}$ donc le polyôme $P_n - Q_n$ vérifie pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $(P_n - Q_n)(\text{cotan}^2(t)) = 0$ du fait son degré est au plus n, on en déduit que la polyôme $P_n - Q_n$ est nul d'où $P_n = Q_n$ par suite on a l'unicité.

2. Pour $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $P_n(\text{cotan}^2(t)) = 0 \Leftrightarrow \sin(2n+1)t = 0 \Leftrightarrow (2n+1)t = k\pi \Leftrightarrow t = \dfrac{k\pi}{2n+1}$ avec $k \in [\![1; n]\!]$.

   par suite les racines de P_n sont réels x_k définie par $x_k = \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ avec $k \in [\![1; n]\!]$.

   a) Pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leq \sin(t) \leq t \leq \tan(t)$ donc par croissante de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit $0 \leq \sin^2(t) \leq t^2 \leq \tan^2(t)$ puis $\text{cotan}^2 t \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + \text{cotan}^2 t$ pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

   b) Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $x_k \leq \left(\frac{2(n+1)}{\pi}\right)^2 \times \frac{1}{k^2} \leq 1 + x_k$ par suite $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{(2n+1)}{\pi}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} x_k + 1$ or d'après la relation coefficient-racines on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -\frac{-C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

par suite :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{n(2n-1)}{3} \times \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}$$

donc par le théorème des gendarmes on en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_n$ converge et :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$