

# Mathématiques

# Les Elites

Section  
Informatique

4  
ème

**Amor jridi**  
Inspecteur principal

**Hamdi Mosbah**  
Professeur principal

Cours

Devoirs

sujets d'examens

corrigés





## **Préface**

Cet ouvrage est conforme au nouveau programme de mathématiques applicable à partir de septembre 2007, suivi du changement applicable à partir de septembre 2009.

Il s'adresse aux élèves de terminale en Tunisie section sciences informatique. L'ouvrage est formé de deux parties :

**Première partie** : Devoirs surveillés suivant la progression du programme.

**Deuxième partie** : Sujets d'examens couvrant tout le programme de mathématiques.

Les élèves de classes terminales trouveront dans cet ouvrage, un outil de consolidation des notions acquises et une préparation sérieuse pour l'examen du baccalauréat.

Les auteurs remercient tous les collègues ayant contribué à l'élaboration de ce manuel et seront attentifs à toute remarque des utilisateurs.

### **Conseils :**

- 1-Prenez soin de bien lire tout l'énoncé.
- 2-Traitez ce qui vous paraît facile.
- 3-Rédigez correctement, avec les explications appropriées, sans discours inutile.
- 4-Evitez de consulter la solution avant de traiter l'exercice.

**Les auteurs**

## **Sommaire**

<b>Contenu</b>	<b>Page</b>
<b><u>Première partie</u></b>	
<b><u>I-Premier trimestre</u></b>	
1-Rappel du cours.....	6
2-Devoirs de contrôle.....	14
3-Devoirs de synthèse .....	34
<b><u>II-Deuxième trimestre</u></b>	
1-Rappel du cours.....	57
2-Devoirs de contrôle.....	63
3-Devoirs de synthèse .....	81
<b><u>III-Troisième trimestre</u></b>	
1-Rappel du cours.....	104
2-Devoirs de contrôle.....	109
3-Devoirs de synthèse .....	128
<b><u>Deuxième partie</u></b>	
Sujets d'examens.....	142

# **Première partie: Contrôle continue**

Ne m'offre pas un poisson

mais

apprends moi à pêcher

## Premier trimestre

### A-Nombre complexes

Tout nombre complexe  $z$  s'écrit d'une manière unique :

$z = a + ib$  avec  $a$  et  $b$  deux réels

#### Théorème Propriétés de la conjugué

Pour tous nombres complexes  $Z$  et  $Z'$ , on a :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}; \overline{(-z)} = -\bar{z}; \overline{z^n} = \bar{z}^n; \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \text{ avec } z' \neq 0; \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

Module et argument d'un nombre complexe ( dans ce qui suit  $a$  et  $b$  sont des réels.) et  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est un repère orthonormé direct du plan complexe.

Définition On appelle module d'un nombre complexe  $Z = a + bi$

la quantité positive :  $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Si  $Z$  est l'affixe d'un point  $M(a; b)$ , le module de  $Z$  n'est autre que la distance  $OM$  :  $OM = |Z|$

Si  $Z$  est l'affixe d'un vecteur :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  alors  $AB = |Z|$

#### Théorème Propriétés des modules

Pour tous nombres complexes  $Z$  et  $Z'$  :

\* Module d'un produit :  $|Z \cdot Z'| = |Z| \cdot |Z'|$ . et en particulier,

si  $\alpha$  est réel  $|\alpha Z| = |\alpha| |Z|$ .

\* Module d'un quotient :  $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$  (Lorsque  $z' \neq 0$ ).

En particulier, pour tout  $Z \neq 0$  :  $\frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$

\* Inégalité triangulaire :  $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$

**ÉQUATIONS DU TYPE :  $az^2 + bz + c = 0$  où  $a, b$  et  $c$  sont des complexes**

avec  $a \neq 0$  On note  $\Delta$  le discriminant

Soit  $\delta$  un nombre complexe tel que :  $\delta^2 = \Delta$

La forme canonique permet alors de conclure :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)$$

Et en factorisant, on retrouve des formules semblables à celles connues

dans IR :  $z = \frac{-b + \delta}{2a}$  ;  $z' = \frac{-b - \delta}{2a}$

## **B-Analyse**

### **I-Limites**

#### **1) Limites des fonctions usuelles**

Les fonctions suivantes tendent vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ :

$$F(x) = x^2 ; x^n \quad n \geq 1 ; \sqrt{x}$$

Les fonctions suivantes tendent vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0

$$F(x) = x ; x^2 ; x^n \quad n > 0 ; \sin(x) ; \tan(x) \text{ et } x$$

#### **2) Limites de fonctions polynômes**

La limite d'une fonction polynôme  $P$  est donnée par :

\* la limite du terme du plus haut degré si  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

\*La quantité  $P(a)$  si  $x$  tend vers  $a$ .

#### **3) Limites de fonctions rationnelles**

Une fonction rationnelle  $f$  est un quotient de deux fonctions polynômes.

Sa limite est donnée par :

\*la limite du rapport des termes de plus haut degré si  $x$  tend vers  $+\infty$   
ou  $-\infty$

\*La quantité  $f(a)$  si  $x$  tend vers  $a$  et si  $f$  est définie en  $a$ .

#### **4) Asymptotes**

Soit  $f$  une fonction et  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère.

Si:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = L$  (resp:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = L$ ) alors la droite d'équation  $y = L$  est une asymptote horizontale à  $C_f$  en  $+\infty$  (Resp. en  $-\infty$ )

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  (ou inversement).

alors la droite  $(D) : x = a$  est une asymptote verticale à  $C_f$

On peut avoir  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

\* $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$  (resp.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ )

alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à  $C_f$  en  $+\infty$  (resp. en  $-\infty$ )

### 5) Théorèmes de comparaison

"Une fonction plus grande qu'une fonction qui tend vers  $+\infty$ , tend vers  $+\infty$ "

"Une fonction inférieure à une fonction qui tend vers  $-\infty$  tend vers  $-\infty$ "

Théorème : Soient  $f$ ;  $g$  et  $h$  trois fonctions admettant des limites en  $a$

Si pour tout  $x$  assez voisin de  $a$  on a :  $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  et que  $g$  et  $h$  admettent la même limite  $l$  en  $a$  alors  $f$  admet une limite égale à  $l$  en  $a$ .

### II-Continuité – Prolongement par continuité

**Définition 1** : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert

$I$  centré en  $a$  : On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $f$  admet une limite finie en  $a$  est égale à  $f(a)$

**Définition 2** : Soit  $I$  un intervalle et  $a \in I$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  sauf en  $a$  admettant une limite finie  $l$  en  $a$ . La fonction  $\bar{f}$  définie

par : 
$$\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ \bar{f}(a) = l \end{cases}$$
 est continue en  $a$ . Elle est appelée le

prolongement par continuité de  $f$  en  $a$

**Théorème 1** : Si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.

**Théorème des valeurs intermédiaires**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$ .

Alors, pour tout réel  $y$  intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe (au moins) un réel  $a \in I$  tel que  $f(C) = y$ .

**Théorème du point fixe** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a, b]$ . Si  $f(I) = I$ , alors  $f$  admet (au moins) un point fixe sur  $I$ . (Il existe (au moins) un réel  $x$  de  $I$  tel que  $f(x) = x$ )

**Théorème** : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Théorème** : Si une fonction  $f$  est continue sur un intervalle fermé borné  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle fermé borné.

**Corollaire** : Si  $f$  est continue sur un intervalle fermé borné  $I$ , alors  $f$  est bornée sur  $I$  et atteint ses bornes.

**III- Fonction continue strictement monotone**

**Théorème 3** : Si une fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I = [a ; b]$ , alors  $f(I) = [f(a) ; f(b)]$  (si  $f$  est strictement croissante) ou  $f(I) = [f(b) ; f(a)]$  (si  $f$  est strictement décroissante).

**Théorème de bijection** : Si une fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I = [a ; b]$ , alors  $f$  est une bijection de  $I$  sur  $[f(a) ; f(b)]$  (si  $f$  est strictement croissante) ou  $[f(b) ; f(a)]$  (si  $f$  est strictement décroissante) pour tout réel  $y$  intermédiaire entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un unique réel  $c$  de  $I$  tel que :  $f(c) = y$

**Théorème** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On a :  
Si  $f$  est strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  est bijective sur  $f(I)$

**Corollaire** : Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I = [a ; b]$ . Si  $f(a).f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $I$ .

**Théorème Continuité de la fonction réciproque**

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

I. Alors la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est :

\* Strictement monotone sur  $f(I)$ , de même sens de variation que  $f$ .

\*  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$

**IV) Dérivabilité**

**1. Dérivabilité en un point :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle

I. Soit  $x_0$  un élément de I. Lorsque :

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = l \in \mathbb{R}$  on dit que :  $f$  est dérivable en  $x_0$  Le nombre

$l$  s'appelle alors le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  et on le note  $f'(x_0)$ .

**2. Equation de la tangente T à  $C_f$  au point A d'abscisse  $x_0$  :**

Une équation de T :  $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

**Théorème** Toute fonction  $f$  dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

**3. Applications de la dérivation à l'étude de fonctions**

**3.1. Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle I.

a).  $f$  est constante sur I si et seulement si  $f'(x) = 0$  sur I.

b)  $f$  est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si  $f'(x) \geq 0$  (resp.  $f'(x) \leq 0$ ) sur I.

c).  $f$  est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si :  $f' > 0$  (respectivement :  $f' < 0$ ) sur I (sauf en un nombre fini des points où elle s'annule)

**3.2. Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si  $f$  admet un extremum local en un point  $x_0$  intérieur à I alors :

$$f'(x_0) = 0$$

**3.3. Théorème :** Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle I.

Soit  $x_0$  un point intérieur à I. Si  $f'$  s'annule en  $x_0$  en changeant de signe alors  $f$  admet un extremum local en  $x_0$

#### 4. Dérivation d'une fonction composée et applications

**4.1. Théorème :** Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Soit  $v$  une fonction dérivable sur un intervalle  $J$  contenant  $u(I)$ .

La fonction  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x$  de  $I$  :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) v'(u(x))$$

#### 4.2. Théorème Dérivation de la bijection réciproque

Soit  $f$  une bijection dérivable d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$ . On

note  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ . Soit  $x_0 \in I$  tel que  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors la

fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  et :  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

#### 5- inégalités des accroissements finis

##### 5-1 Théorème des accroissements finis

Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$  dérivable sur  $]a; b[$  alors il

existe un réel  $c$  de  $]a; b[$  tel que :  $f(b) - f(a) = (b-a).f'(c)$

##### 5.2. Théorème Inégalité des accroissements finis

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

On suppose qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $m \leq f'(x) \leq M$  sur  $I$ .

Alors, pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$  tels que  $a < b$ , on a :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

##### 5.3. Théorème inégalité des accroissements finis (bis)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

S'il existe un réel  $M$  tel que  $|f'(x)| \leq M$  sur  $I$  alors pour tous réels  $a$  et  $b$  de

$I$ , on a  $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

#### C-Arithmétique :

Identité de Bézout :  $a$  et  $b$  sont des entiers non nuls,  $d$  leur PGCD.

Il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que :  $au + bv = d$ .

Théorème de Bézout :  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls.

Dire que  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux équivaut à dire qu'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 1$ .

**THÉORÈME DE GAUSS**: Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers. Si  $a \mid bc$  et  $a$  est premier avec  $b$ , alors  $a$  divise  $c$ . Sous forme plus symbolique :

Si  $a \mid bc$  et si  $\text{PGCD}(a; b) = 1$  alors  $a \mid c$ .

**Conséquences**: Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des entiers strictement positifs.

1. Si  $a$  et  $b$  divisent un entier  $c$ , et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $ab$  divise  $c$
2. Si un nombre premier  $p$  divise un produit  $ab$ , alors  $p$  divise  $a$  ou  $b$ .
3. Si un nombre premier divise un produit de nombres premiers, alors il est égal à l'un d'entre eux.
4. La décomposition en facteurs premiers d'un entier est unique (à l'ordre près).

## **D-Suites**

### **1-Théorème de la limite monotone**

\*Toute suite croissante et majorée converge.

\*Toute suite décroissante et minorée converge

### **Comparaison Par rapport à une suite divergente**

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que :

pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_n$

\*Si  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$  alors  $(v_n)$  aussi.

\*Si  $(v_n)$  diverge vers  $-\infty$  alors  $(u_n)$  aussi.

**\*théorème** : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que :

\* Il existe un réel  $l$  tel que pour tout  $n$  :  $|u_n - l| \leq v_n$

\* La suite  $(v_n)$  converge vers 0 : Alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$ .

## **2-Suites arithmétiques et géométriques**

### **a)Suites arithmétique :**

-Expression du terme générale d'une suite arithmétique:

Si  $u$  est une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$  alors

$U_n = u_0 + nr$  et pour tout  $n$  et  $p$  de  $\mathbb{N}$  on a :  $u_n = u_p + (n-p)r$

- Somme des n premiers termes d'une suite arithmétique: Si u est une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison r alors:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n}{2} (u_0 + u_{n-1}) \text{ et dans le Cas général:}$$

$$\sum_{k=p}^q u_k = \frac{q+1-p}{2} (u_p + u_q)$$

### b)-Suite géométrique:

- Terme général: Si u est une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison q alors  $u_n = u_0 \cdot q^n$  et pour tout couple  $(n, m)$  ou a :

$$u_m = u_n \cdot q^{m-n}$$

- Somme des n premiers terme d'une suite géométrique :Si n est géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison q alors :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1-q^n}{1-q} \text{ lorsque } q \neq 1 ; \text{ si } q = 1 \text{ alors } S = n \cdot v_0$$

$$\text{et dans le cas général : } S = \sum_{k=p}^m v_k = v_p \frac{1-q^{m+1-p}}{1-q} \text{ lorsque : } q \neq 1$$

Limite d'une suite Géométrique :Soit V une suite géométrique de raison q et de premier terme  $V_0$ .

Si  $q \in ]-1;1[$  alors  $\lim V_n = 0$ .

$$\text{Si } q > 1 \text{ alors } \lim V_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } V_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } V_0 < 0 \end{cases}$$

Si  $q \leq -1$  alors V n'a pas de limite.

Si on désigne par  $S_n$  la somme des n premiers termes de la suite V alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{V_0}{1-q} \text{ si } q \in ]-1;1[ \text{ dans les autres cas : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \pm\infty \text{ ou } S_n$$

n'a pas de limite.

## Devoir de contrôle N°1

### Exercice 1 : Choisir la bonne réponse

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle ouvert  $I$  sauf peut être en  $a$  avec  $a$  est un élément de  $I$ .

1-Si  $f$  est définie continue en  $a$  alors :

- (a)  $f$  n'admet pas nécessairement une limite finie en  $a$  ;
- (b)  $f$  admet une limite finie en  $a$  différent de  $f(a)$ .
- (c)  $f$  admet une limite finie en  $a$  est égal à  $f(a)$ .

2-Si pour tout  $x$  de  $I$  on a :  $f(x) > g(x)$  alors

- (a)  $\lim_a f > \lim_a g$  ; (b)  $\lim_a f \geq \lim_a g$  ; (c)  $\lim_a f = \lim_a g$  ;

3-Soient  $b$  et  $c$  deux éléments de  $I$  tels que  $b < c$  ;  $f(b).f(c) < 0$  et  $f$  est continue sur  $[b ; c]$ . L'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $I$

- (a) au moins une solution ; (b) une solution unique ;
- (c) aucune solution .

4-Si  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[a ; b]$  et  $f([a ; b]) = [-2 ; 3]$  alors :

- (a)  $f(a) = 3$  et  $f(b) = -2$  ; (b)  $f(a) = -2$  ;  $f(b) = 3$  ; (c)  $f(a) > (-2)$

### Exercice 2

On considère la suite  $U$  de terme général :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$$

1-Montrer que :  $\frac{n}{n+n^2} \leq U_n \leq \frac{n}{1+n^2}$ .

2-En déduire que la suite  $U$  est convergente .Calculer sa limite.

3-On considère les suites de termes généraux

$$V_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n - \sin k}{k + n^2} ; W_n = \sum_{k=0}^{4n} \frac{n + 1}{k + n^2}$$

a) Donner un encadrement de chacun des deux termes.

b) Montrer que les deux suites V et W sont convergentes et calculer leurs limites.

### Exercice N°3

Dans le plan complexe P muni du repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé direct ; on considère le point M d'affixe  $z = x + iy$ . on suppose dans la suite que  $z \neq 2i$ . On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe  $2i$  et on pose  $Z = \frac{z-1}{z-2i}$

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

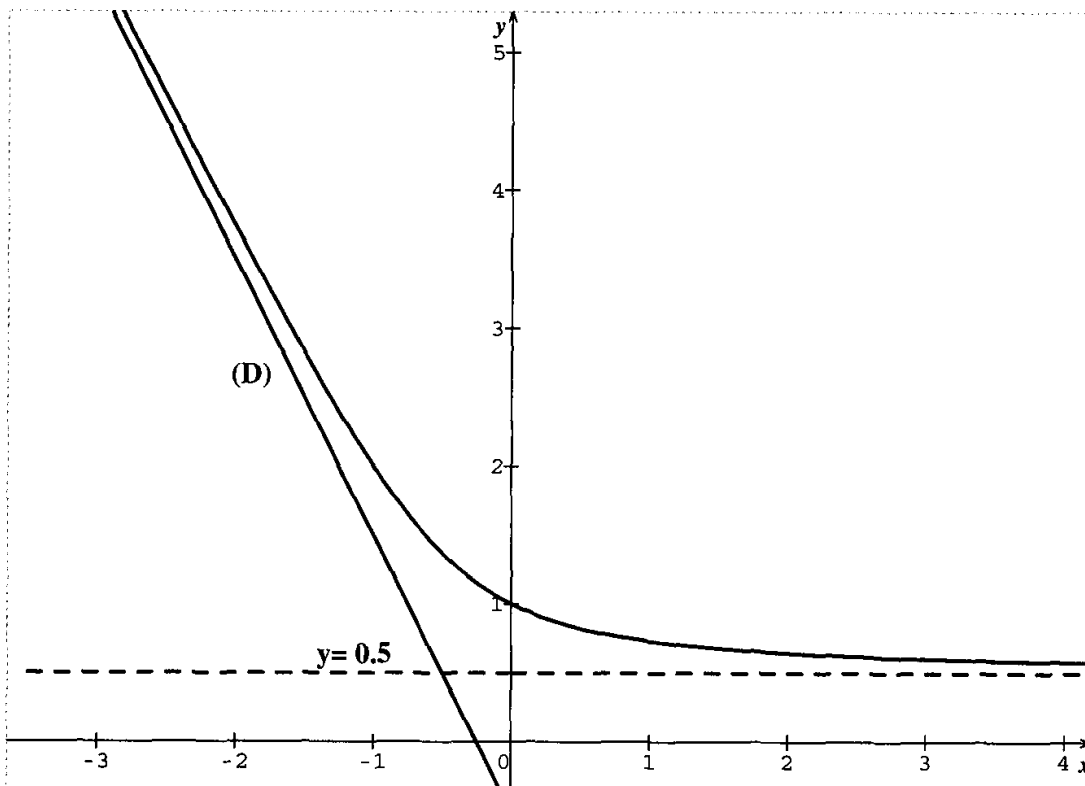
a)  $\frac{z-1}{z-2i} = i$  on appelle C le point image de la solution

b)  $\frac{z-1}{z-2i} = -1$  ; on appelle D le point image de la solution

2) Déterminer et représenter le ensemble (E) des points M tels que  $|z| = 1$

### Exercice 4

La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  :



1-a) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine.

b) Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2-Que représente la droite (D) pour la courbe (C) de  $f$ ?

3-a) Déterminer l'image de l'intervalle  $]-\infty ; +\infty [$  par  $f$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une seule solution dans  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5

1-Enoncer le lemme de Gauss

2-  $k$  est un entier naturel. Soient  $a = 6k + 5$  ; et  $b = 8k + 3$ .

a) Calculer  $4.a - 3.b$

b) Prouver qu'il n'existe que deux diviseurs positifs communs à :  $a$  et  $b$ .

### Corrigé

### Exercice 1

Numéro de la question	1	2	3	4
Réponses correcte	c	b	a	b

### Exercice N°2-

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$$

Encadrement de  $U_n$ . On a :  $n^2 + k \geq n^2 + 1$  et  $n^2 + k \leq n^2 + n$

Donc  $n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$ , Pour tout  $1 \leq k \leq n$

$$\text{D'où : } \frac{n}{n+n^2} \leq U_n \leq \frac{n}{1+n^2}$$

$$2\text{-On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{n}{n+n^2} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

3-a. Encadrement de  $V_n$ 

$$\text{Où : } n - 1 \leq n - \sin k \leq n + 1$$

$$1 + n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + 2n \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n^2 + 2n} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{1 + n^2} \Rightarrow \frac{n-1}{n^2 + 2n} \leq \frac{n - \sin k}{n^2 + k} \leq \frac{n+1}{1 + n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n(n-1)}{n^2 + 2n} \leq V_n \leq \frac{2n \cdot (n+1)}{1 + n^2}$$

Encadrement de  $W_n$  pour tout  $k \geq 0$ 

$$n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + 4n \Rightarrow$$

$$\frac{n+1}{n^2 + 4n} \leq \frac{n+1}{n^2 + k} \leq \frac{n+1}{n^2} \Rightarrow \frac{4n(n+1)}{n^2 + 4n} \leq W_n \leq \frac{4n \cdot (n+1)}{n^2}$$

$$\text{Les suites : } n \mapsto \frac{2n(n-1)}{n^2 + 2n} \text{ et } n \mapsto \frac{2n(n-1)}{1 + n^2}$$

Sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite  $L = 2$ 

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = 2$$

$$\text{Chacune des suites : } n \mapsto \frac{4n(n+1)}{n^2 + 4n} \text{ et } n \mapsto \frac{4n(n+1)}{n^2} \text{ est convergente et}$$

$$\text{qu'elle convergente vers 4 donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} W_n = 4$$

**Exercice N°3 :**  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  est un repère ortho normal direct

$$z_A = 1; z_B = 2i; z = x + iy$$

$$1^\circ - a) \frac{z-1}{z-2i} = i \Leftrightarrow z-1 = i(z-2i); z \neq 2i$$

$$\Leftrightarrow z - iz = 1 - 2i \Leftrightarrow z = \frac{1 - 2i}{1 - i} = \frac{(1 - 2i)(1 + i)}{2}$$

$$\text{Donc } z = \frac{1 + i - 2i + 2}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i; C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right); S_C = \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$$

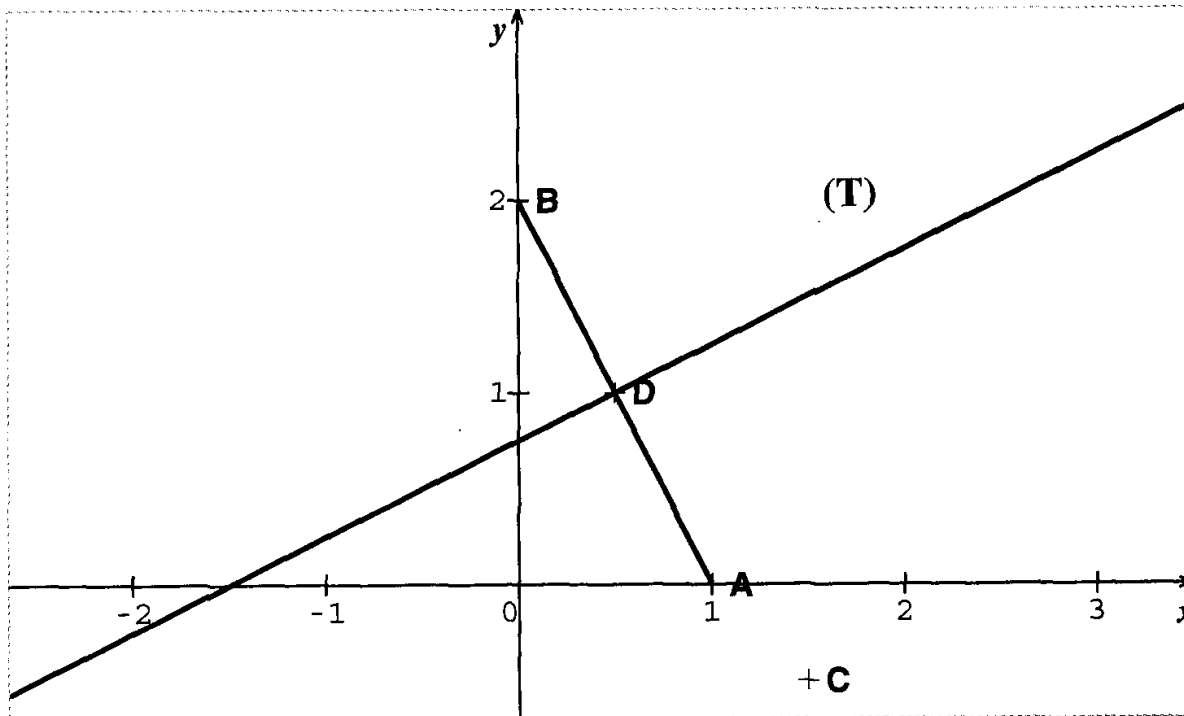
$$b) \frac{z-1}{z-2i} = -1 \Rightarrow z-1 = -z+2i \Rightarrow 2z = 1+2i$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2} + i; D\left(\frac{1}{2}, 1\right); S_C = \left\{\frac{1}{2} + i\right\}$$

2) L'ensemble cherché est définie par :

$$\left| \frac{z-1}{z-2i} \right| = 1 \Leftrightarrow MA = MB$$

Donc M décrit la médiatrice de [AB]



#### Exercice 4

1-a) En utilisant la figure on en déduit que :

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \quad ; \quad \lim_{+\infty} f = \frac{1}{2}$$

b) La courbe de (C) de f ne présente aucun saut ( elle peut être représenté sans lever la main ) donc f est continue sur IR.

2- La droite (D) est une asymptote oblique à (C) en  $-\infty$ .

La droite (D) passe par les points  $A(-\frac{1}{4}; 0)$  et  $B(0; -\frac{1}{2})$

$$\text{Donc (D) : } y = \frac{-0.5}{0.25} \cdot x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{(D) : } y = -2x - \frac{1}{2}.$$

3a) f est continue sur IR strictement décroissante .De plus on a :

$$\lim_{-\infty} f = +\infty \quad ; \quad \lim_{+\infty} f = \frac{1}{2} \quad \text{Donc } f(\text{IR}) = ] \frac{1}{2}; +\infty [.$$

b)\* f est continue sur IR strictement décroissante sur IR.

\* $f(\mathbb{R}) = ] \frac{1}{2}; +\infty [$ ; 2 est un élément de  $] \frac{1}{2}; +\infty [$ .

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel  $\alpha$  tel que  $f(\alpha) = 2$

### Exercice 5

1°/ Lemme de Gauss

Soit a et b deux entiers relatifs

Si n divise a et b alors n divise toute combinaison

Linéaire de a et b c.-à-d. n divise  $\alpha a + \beta b$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  des entiers relatifs

2°/  $a = 6k + 5$ ;  $b = 8k + 3$

$$a/ 4a - 3b = 4(6k + 5) - 3(8k + 3) \Rightarrow 4a - 3b = 11$$

b/ si n divise a et b alors n divise  $4a - 3b$

donc n divise 11 par suite  $n = 1$  ou  $11$

d'où a et b possèdent deux diviseurs commun positifs : 1 et 11

## Devoir de contrôle N°1(2)

### Exercice 1

QCM Choisir la réponse correcte.

1- Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Si  $|z| = |z'|$  alors

(a)  $z = z'$ ; (b)  $z = -z'$ ;

(c) les images de z et z' sont situés sur le même cercle.

2-)  $(1 - i)^{1990}$  est égale à :

(a)  $-2^{995}i$ ; (b)  $2^{995}i$ , (c)  $2^{995}$

3- Soit U une suite U est convergente lorsque :

(a) elle est bornée (b) elle est monotone et majorée

(c) elle est monotone bornée ;

**Exercice 2**

Soit  $u$  la suite défini par : 
$$\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

- 1-Déterminer les trois premiers termes de la suite.
- 2-représenter cette suite.
- 3-Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $0 < u_n < 2$
- 4-a) Montrer que la suite  $u$  est croissante .En déduire qu'elle est convergente.
- b) Calculer la limite de la suite  $u$ .

**Exercice 3**

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^3 - 11n + 48$  est divisible par  $(n + 3)$ .
- (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3n^2 - 9n + 16$  est un entier naturel non nul.
2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$ , l'égalité suivante est vraie :  $\text{PGCD}(a ; b) = \text{PGCD}(bc - a ; b)$ .
3. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :  
 $\text{PGCD}(3n^3 - 11n ; n + 3) = \text{PGCD}(48 ; n + 3)$ .
4. (a) Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
- (b) En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que :

$$\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \text{ soit un entier naturel}$$

**Exercice 4**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ . A ; B et C les points d'affixes respectives  $a = 1 + 2i$  ;  $b = 2 - i$  et  $c = 2 + 3i$ .

- 1/ Représenter les points A ; B et C.
- 2/ Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3/ Donner la forme algébrique de  $\frac{a-b}{a-c}$

4/ Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe Z tels que :

$$|Z - a| = |Z - b|$$

### Exercice 5

Soit f la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}$  si  $x \neq -1$  et  $f(-1) = -2$

1-Calculer :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  puis interpréter le résultat

2-a) Factoriser :  $x^2 - 2x - 3$  et  $x^3 + 1$

b) Calculer alors

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  en déduire que f est continue en  $-1$

3-On vous donne le tableau des variations de f

x	$-\infty$	0,3	6,7
f(x)	0	-4,43	0

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution dans IR puis donner un encadrement de cette solution :

### Corrigé

#### Exercice 1

Question	1	2	3
Réponse	c	a	c

#### Exercice 2

1)  $U_0 = 0.5$  ;  $U_1 \approx 1.58$  ;  $U_2 \approx 1.89$  ;  $U_3 \approx 1.97$

2) Voir figure ci-dessous.

3-On démontre l'encadrement de  $U_n$  à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

\*Pour  $U_0$  l'encadrement est évident.

\*On suppose que l'encadrement demandée est vrai jusqu'à l'ordre  $n$

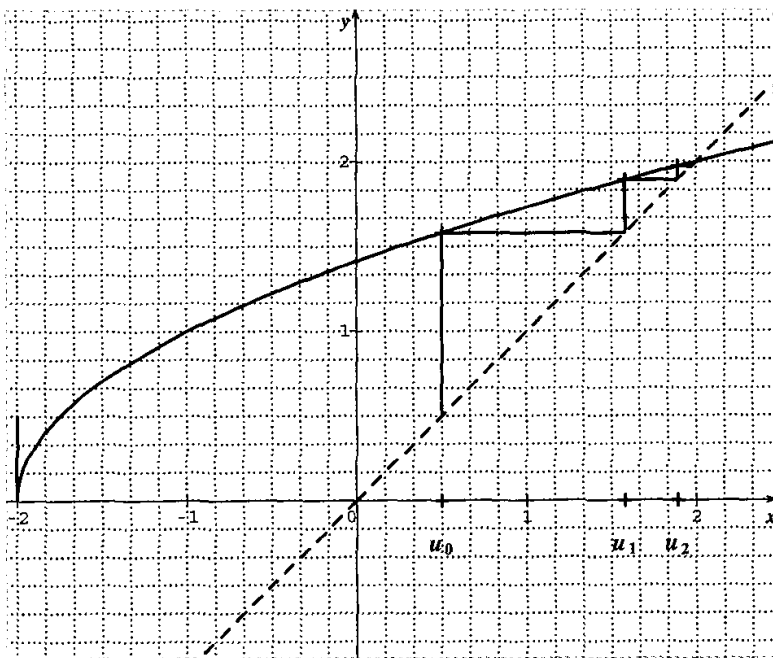
Donc  $U_{n+1} > 0$  ;  $2+U_n < 4$  donc  $U_{n+1} < 2$ .

**Conclusion :** Pour tout entier naturel  $n$  ;  $0 < U_n < 2$ .

4-a) Montrons que  $U$  est croissante.

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2+x}$  est croissante et  $U_0 < U_1$  donc  $U$  est croissante.

b)  $U$  est croissante, bornée donc elle est convergente. Sa limite est le point fixe par  $f$  c'est-à-dire 2.



### Exercice 3

1° a) Montrons que :  $3n^3 - 11n + 48$  est divisible par :  $n + 3$  pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $3n^3 - 11n + 48 = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16)$

Puisque  $3n^3 - 9n + 16 \in \mathbb{Z}$  donc  $3n^3 - 11n + 48$  est divisible par  $(n + 3)$

b)  $3n^2 - 9n + 16$  est un trinôme de second degré à coefficients entiers donc  $3n^2 - 9n + 16 \in \mathbb{Z}$  ; le déterminant

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times 16 < 0 ; 3 > 0 \text{ donc}$$

$$3n^2 - 9n + 16 \in \mathbb{N}^*$$

2°) on note  $d = \text{PGCD}(a, b)$  et  $d' = \text{PGCD}(bc - a, b)$

$$d/a \text{ et } d/b \Rightarrow d/bc - a \text{ et } d/b \Rightarrow d \leq d'$$

$$d'/bc - a \text{ et } d'/b \Rightarrow d'/bc - (bc - a) \Rightarrow d'/a \text{ et } d'/b$$

$$\text{Donc } d'/b \text{ et } d'/a \Rightarrow d' \leq d \text{ donc : } d = d'$$

3/ on prend  $b = n + 3$ ;  $a = 3n^3 - 11n$ ,  $c = 3n^2 - 9n + 16$

1° a) et 2° donnent  $c \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(bc - a, b) \Rightarrow$

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n, n+3) = \text{PGCD}(3n^3 - 11n + 48 - 3n^3 + 11n; n+3)$$

$$\Rightarrow \text{PGCD}(3n^3 - 11n, n+3) = \text{PGCD}(48, n+3)$$

$$4 \text{ a) } D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$b) \frac{3n^3 - 11n}{n+3} = 3n^2 - 9n + 16 - \frac{48}{n+3}$$

si  $n \geq 2$  alors  $3n^3 - 11n > 0$

$$\text{d'où } \frac{3n^3 - 11n}{n+3} \in \mathbb{N} \text{ ssi } \frac{48}{n+3} \in \mathbb{N}$$

$$\text{d'où } n+3 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$\text{donc } n \in \{-2, -1, 0, 1, 3, 5, 9, 13, 21, 45\}$$

$$\text{par suite } n \in \{0, 1, 3, 5, 9, 13, 21, 45\}; \text{ or } n \in \{3, 5, 9, 13, 21, 45\}$$

#### Exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ . A ; B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 1 + 2i; b = 2 - i \text{ et } c = 2 + 3i.$$

1/ Représentation des points A ; B et C : Voir figure en annexe

2/ Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. ABDC est un parallélogramme si :

$$Z_B - Z_A = Z_D - Z_C \text{ d'où : } Z_D = b - a + c = 2 - i - 1 - 2i + 2 + 3i = 3$$

3/ Donner la forme algébrique de  $\frac{a-b}{a-c}$

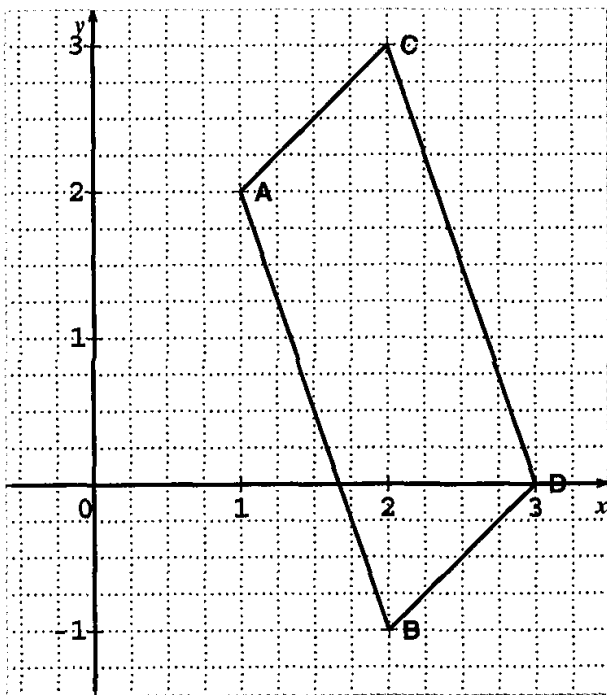
$$\begin{aligned}\frac{a-b}{a-c} &= \frac{1+2i-2+i}{1+2i-2-3i} = \frac{-1+3i}{-1-i} \\ &= \frac{(-1+3i)((-1+i))}{2} = -1-2i\end{aligned}$$

4/ Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe Z tels que :

$$|Z-a| = |Z-b|$$

L'ensemble des points M à déterminer est l'ensemble des points tels que :  $MA = MB$  donc est la médiatrice du segment  $[AB]$ .

Annexe



### Exercice 5

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^3+1}$  si  $x \neq -1$  et  $f(-1) = -2$

1 – Calcul de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et interprétation du résultat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de  $f$

2-a) Factorisation de :  $x^2 - 2x - 3$  et  $x^3 + 1$

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3); x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \text{ d'où :}$$

$$f(x) = \frac{x - 3}{x^2 - x + 1}$$

b) Calcul de  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  et continuité de  $f$  en  $(-1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 3}{x^2 - x + 1} = -1 = f(-1)$$

Donc  $f$  est continue en  $(-1)$

3-On considère le tableau des variations de  $f$

$x$	$-\infty$	$0,3$	$6,7$
$f(x)$	0	$-4,43$	0

\* $f$  est continue sur  $] -\infty ; 0,3]$  et  $f(] -\infty ; 0,3]) = ]0 ; -4,43]$  donc il n'existe aucun réel  $\alpha$  dans  $] -\infty ; 0,3]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

\*Dans l'intervalle  $[ 6,7 ; +\infty [$   $f$  est strictement décroissante et tend vers zéro quand  $x$  tend vers  $+\infty$  donc  $f(x) > 0$  pour tout  $x$  dans  $[6,7 ; +\infty [$  par suite l'équation  $f(x) = 0$  n'a aucune solution dans cet intervalle.

\*D'après ce qui précède  $f(6,7) > 0$  et on a  $f(0,3) = -4,43$ . De plus  $f$  est continue sur  $[0,3 ; 6,7]$  donc il existe un seul réel  $\alpha$  dans  $[0,3 ; 6,7]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ .

## Devoir de contrôle N°1(3)

### Exercice 1

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier :  $A = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ .

- a) Si  $p = 3n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$  par 7 ?  
 b) Démontrer que si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p$  est divisible par 7.  
 c) Etudier le cas où  $p = 3n + 2$

### Exercice N° 2

Pour chacune des questions suivantes choisir la réponse correcte.

1)  $(1 + i)^{1990}$  est égale à :

- (a)  $-2^{995}i$ ; (b)  $2^{995}i$ , (c)  $2^{995}$

2) Soit  $f$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \text{ non nul} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$f$  est continue en 0 ; (b) La limite de  $f$  en  $+\infty$  est  $+\infty$  ;

(c) La limite de  $f$  en  $+\infty$  est 0.

3) Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle ouvert  $I$  sauf peut être en  $a$  avec  $a$  est un élément de  $I$ .

A-Si  $f$  est définie continue en  $a$  signifie que:

- (a)  $f$  admet au moins une limite en  $a$  ;  
 (b)  $f$  admet au plus une limite en  $a$ .  
 (c)  $f$  admet exactement une limite finie en  $a$  est égal à  $f(a)$ .

B-Si pour tout  $x$  de  $I$  on a :  $f(x) > g(x)$  alors

- (a)  $\lim_a f > \lim_a g$  ; (b)  $\lim_a f \geq \lim_a g$ ; (c)  $\lim_a f = \lim_a g$  ;

Exercice 3 Soit la suite  $U$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

1) a\_ Montrer que  $u_n \geq 1$  pour tout entier  $n$

b\_ Etudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$

c- Etudier le sens des variations de  $u$  et sa convergence.

2) On considère la suite  $w$  définie par:  $w_n = 3 + \frac{1}{-1 + u_n}$

a) Montrer que  $w$  est arithmétique

b) Exprimer  $w_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

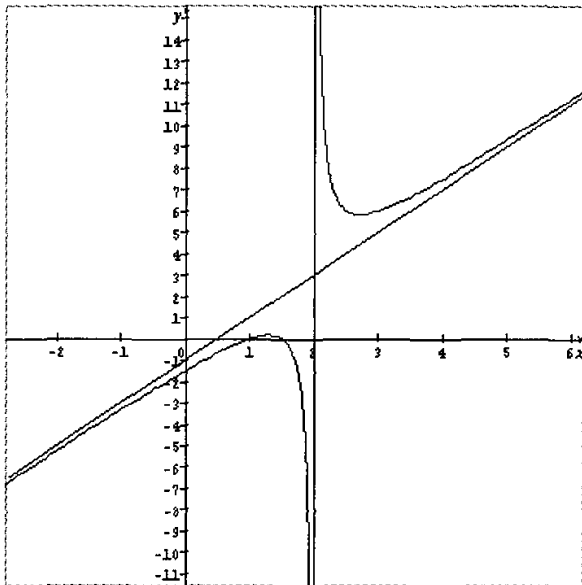
c) Calculer leurs limites.

### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $D = ]-\infty ; 2 [ \cup ] 2 ; +\infty [$ . On appelle  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère. On sait qu'il existe  $a$ ,  $b$  et  $c$  réels tels que pour tout  $x$  dans  $D$  :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$$

On sait que la droite d'équation " $y = 2x - 1$ " est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . On sait que la courbe passe par le point  $A$  de coordonnées  $(1 ; 0)$ .



1)a) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{2^+} f ; \quad \lim_{2^-} f ; \quad \lim_{-\infty} f ; \quad \lim_{+\infty} f$$

b) Quelles sont les valeurs de  $a$  et de  $b$  ? Justifier la réponse.

c) Quelle est la valeur de  $c$  ? Justifier la réponse.

2)a/ Que peut-on dire de la droite d'équation " $x = 2$ " ? Justifier

b/ Calculer la fonction dérivée de  $f$ .

c/ Déterminer les points de  $(C)$  admettant une tangente à  $(C)$  parallèle à la droite d'équation " $y = x$ ".

3) Montrer que la courbe (C) admet un centre de symétrie. On répondra à cette question en expliquant la démarche suivie pour déterminer les coordonnées de ce centre de symétrie puis on montrera que le point trouvé est bien centre de symétrie.

### Exercice 5 :

1 - Résoudre dans C l'équation :  $z^2 - (3 + 4i)z - 8 + 6i = 0$

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + 2i \text{ et } z_B = 4 + 2i.$$

a - Montrer que le triangle OAB est rectangle.

b - Déterminer l'affixe du point D pour que ABDC soit un rectangle

### Corrigé

#### Exercice N°1

1- Effectuons un raisonnement par récurrence.

Pour  $n = 0$ ,  $2^{3n} - 1 = 0$  et zéro est un multiple de 7.

Supposons que, pour un certain rang  $k$  quelconque,

$2^{3k} - 1$  soit un multiple de 7 et montrons que  $2^{3(k+1)} - 1$  est un multiple de

$$7 : 2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 2^3 - 1$$

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 8 - 1$$

$$2^{3(k+1)} - 1 = 7 \times 2^{3k} + 2^{3k} - 1.$$

Nous avons :  $7 \times 2^{3k}$  multiple de 7 et  $2^{3k} - 1$  multiple de 7, par hypothèse de récurrence. Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7.

Autre méthode :  $2^{3n} - 1 = (2^3)^n - 1$  soit  $2^{3n} - 1 = 8^n - 1$ .

$$\text{Or } 8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1)$$

$$8^n - 1 = 7 \times (8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1).$$

Donc  $2^{3n} - 1$  est bien un multiple de 7.

$$\text{Nous avons } 2^{3(n+1)} - 1 = 2^3 \cdot (2^{3n} - 1).$$

Comme  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7.

Nous avons :  $2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1)$

Comme  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.

2- Nous avons, en utilisant les résultats de la question précédente

$2^{3n} - 1 = 7k$ , avec  $k$  entier naturel, donc  $2^{3n} = 7k + 1$

$2^{3n+1} - 2 = 7k'$  donc  $2^{3n+1} = 7k' + 2$  ;

$2^{3n+2} - 4 = 7k''$  donc  $2^{3n+2} = 7k'' + 4$ .

Or tout entier naturel s'écrit sous l'une des formes  $3n$ ,  $3n + 1$ ,  $3n + 2$ .

Nous en déduisons que les restes possibles de la division par 7 des puissances de 2 sont 1 ; 2 et 4.

3. a) Nous avons  $A_{3n} = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n}$ . Chacun des exposants  $3n$ ,  $6n$  et  $9n$  étant un multiple de 3, les restes des divisions de  $2^{3n}$  ;  $2^{6n}$  ;  $2^{9n}$  par 7 sont à chaque fois égaux à 1 donc le reste de la division de  $A_p$  par 7 est, dans le cas  $p = 3n$ , égal à 3.

Nous avons  $A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$ . Or le reste de la division de  $2^{3n+1}$  par 7 est 2, le reste de la division de  $2^{6n+2}$  est 4 (Puisque  $6n + 2$  est un multiple de 3 auquel on ajoute 2) et le reste de la division de  $2^{9n+3}$  par 7 est 1 (puisque  $9n + 3$  est un multiple de 3). Le reste de la division de :

$A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$  est donc nul, car la somme des restes des divisions de chacun des termes de cette somme donne 7. Le nombre  $A_p$ , dans le cas  $p = 3n + 1$ , est divisible par 7.

Nous avons :  $A_{3n+2} = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6}$ .

Le reste de la division par 7 de  $2^{3n+2}$  est 4.

Le reste de la division par 7 de  $2^{6n+4} = 2^{3(n+1)+1}$  est 2.

Le reste de la division par 7 de  $2^{9n+6} = 2^{3(3n+2)}$  est 1.

Comme dans le cas précédent, nous en déduisons que le nombre  $A_p$ , dans le cas  $p = 3n + 2$ , est divisible par 7.

### Exercice N°2

Questions	1	2	3-A	3-B
Réponses	A	a	c	b

Exercice N°3 Soit  $U$  la suite définie par  $U_0 = 2$  ;  $U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$

1) a- Montrons que  $U_n \geq 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

$$\text{On a : } U_0 = 2 \geq 1$$

Supposons que la propriété " $U_p \geq 1$ " est vraie jusqu'à l'ordre  $n$  et

montrons que :  $U_{n+1} \geq 1$

$$U_{n+1} - 1 = 1 - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n - 1}{U_n} \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} \geq 1$$

Conclusion :  $U_n \geq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$b/ U_{n+1} - U_n = 2 - \frac{1}{U_n} - U_n = \frac{-(U_n^2 - 2U_n + 1)}{U_n} = \frac{-(U_n - 1)}{U_n} \leq 0$$

c/  $U_{n+1} - U_n \leq 0$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  donc  $U$  est décroissante

$U$  est décroissante minorée par 1 donc  $U$  est convergente

$$2^\circ / W_n = 3 + \frac{1}{-1 + U_n}$$

a/ Nature de  $W$

$$W_{n+1} = 3 + \frac{1}{-1 + U_{n+1}} = 3 + \frac{1}{-1 + 2 - \frac{1}{U_n}} = 3 + \frac{U_n}{U_n - 1}$$

$$W_{n+1} = 3 + \frac{U_n - 1 + 1}{U_n - 1} \text{ d'où : } W_{n+1} = \left(3 + \frac{1}{U_n - 1}\right) + 1 \Rightarrow$$

$W_{n+1} = W_n + 1$  donc  $W$  est une suite arithmétique de raison : 1 et de 1<sup>er</sup>

$$\text{terme : } W_0 = 3 + \frac{1}{2-1} = 4$$

$$b/ W_n = W_0 + nr = 4 + n$$

$$W_n = 3 + \frac{1}{1-U_n} \Rightarrow \frac{1}{-1+U_n} = W_n - 3 \Rightarrow$$

$$-1 + U_n = \frac{1}{W_n - 3} = \frac{1}{n+1} \text{ d'où : } U_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$c/ \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty ; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

**Exercice 4 :** Pour tout  $x$  dans  $D$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

On sait que la droite d'équation " $y = 2x - 1$ " est asymptote à (C) en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . On sait que la courbe passe par le point A de coordonnées (1 ; 0).

1)a) Calcul des limites

$$\lim_{2^+} f = +\infty ; \quad \lim_{2^-} f = -\infty ; \quad \lim_{-\infty} f = -\infty ; \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

b) Quelles sont les valeurs de  $a$  et de  $b$  ? Justifier la réponse.

Dans cette question, à faire sans aucun calcul, il faut savoir utiliser correctement la définition d'une asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction  $f$ .

On sait que la fonction  $f$  est de la forme :  $ax + b + \frac{c}{x-2}$ .

La droite d'équation " $y = 2x - 1$ " est asymptote à la courbe de  $f$  au voisinage de  $-\infty$  signifie donc que l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x + 1] = 0$$

Comme  $f(x) - (ax + b) = \frac{c}{x-2}$  et que  $\frac{c}{x-2}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ , on en déduit que (C) admet la droite d'équation

"  $y = ax + b$  " comme asymptote au voisinage de  $-\infty$ .

Du fait de l'unicité de l'asymptote oblique à (C) en  $-\infty$ , on peut dire que les droites d'équation "  $y = 2x - 1$  " et "  $y = ax + b$  " sont identiques donc que  $a = 2$  et  $b = -1$

c) On sait maintenant que  $f(x) = 2x - 1 + \frac{c}{x-2}$ .

Comme la courbe (C) passe par le point A de coordonnées (1 ; 0), on doit avoir  $f(1) = 0$ . D'où la relation :  $1 - c = 0$  et donc  $c = 1$ .

L'expression de  $f(x)$  est donc :  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-2}$

2-a) Comme la limite de  $f$  à gauche et à droite en 2 est infinie ; on en déduit que la droite d'équation "  $x = 2$  " est asymptote verticale à la courbe de  $f$ .

b) La fonction dérivée de  $f$  est :  $f'(x) = 2 - \frac{1}{(x-2)^2}$ .

c) On sait que deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

\*Le coefficient directeur de la droite d'équation "  $y = x$  " est 1.

\*Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $x$  est  $f'(x)$ . Cherchez les tangentes à (C) parallèles à la droite d'équation "  $y = x$  " revient donc à chercher les solutions de l'équation :  $f'(x) = 1$  Ceci conduit à l'équation :

$$2 - \frac{1}{(x-2)^2} = 1, \text{ ou encore } 1 = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

C'est à dire :  $(x-2)^2 = 1$ . Ce qui donne :  $x = 1$  ou  $x = 3$ .

Comme  $f(1) = 0$  et que  $f(3) = 6$ , les points de (C) admettant une parallèle à la droite d'équation "  $y = x$  " sont donc les points :

A (1 ; 0) et B (3 ; 6)

3-Si le point I (a ; b) est un centre de symétrie pour la courbe de  $f$ , alors la valeur  $a$  doit être une valeur de symétrie pour l'ensemble de

**définition de f.** La seule valeur possible est donc  $a = 2$ .

De plus, comme  $-2$  et  $6$  sont deux valeurs symétriques par rapport à  $2$ , on doit avoir :  $f(0) + f(6) = 2b$ . D'où, la seule valeur possible pour  $b$  est :  $b = 3$ . Donc, si la courbe (C) admet un centre de symétrie, c'est nécessairement par rapport au point I de coordonnées  $I(1; 3)$ .

Vérifions maintenant que pour tout  $x$  réel tel que :

$(x + 2)$  et  $(-x + 2)$  appartiennent à  $\mathbb{D}$ ,

on a :  $f(x + 2) + f(-x + 2) = 6$ .

$$f(x + 2) = 2(x + 2) - 1 + \frac{1}{2 + x - 2} = 2x + 3 + \frac{1}{x}$$

$$f(-x + 2) = 2(-x + 2) - 1 + \frac{1}{2 - x - 2} = -2x + 3 - \frac{1}{x}$$

D'où  $f(x + 2) + f(-x + 2) = 6$ .

Le point  $I(2; 3)$  est bien centre de symétrie pour la courbe de  $f$ .

### Exercice N°5

1- Résolution dans  $C$  de l'équation :

$$z^2 - (3 + 4i)z - 8 + 6i = 0$$

$\Delta = (3 + 4i)^2 - 4(-8 + 6i) = 25$  donc il existe deux solutions dans  $C$  :

$$Z_1 = \frac{3+4i-5}{2} = -1 + 2i; Z_2 = \frac{3+4i+5}{2} = 4 + 2i$$

$$S_C = \{-1 + 2i; 4 + 2i\}$$

2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A et B les points d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + 2i \text{ et } z_B = 4 + 2i.$$

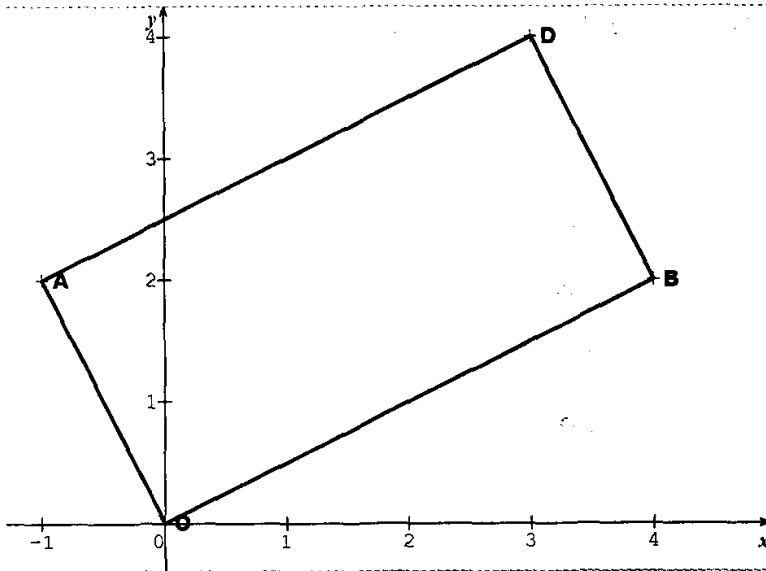
a - Montrons que le triangle OAB est rectangle.

$OA^2 = 5$  ;  $OB^2 = 20$  ;  $AB^2 = 25$  le théorème de Pythagore nous affirme que OAB est un triangle rectangle en O.

b - Déterminer l'affixe du point D pour que AOBD soit un rectangle.

Pour que AOBD soit un rectangle il suffit qu'il soit un parallélogramme.

$$\text{Donc } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} \text{ donc } Z_D = -1 + 2i + 4 + 2i = 3 + 4i.$$



## Devoir de synthèse N°1(1)

**Exercice 1: Répondez par vrai ou faux.**

1- Soit  $u$  une suite. Pour que  $u$  soit convergente :

- (a) Il faut qu'elle soit bornée.
- (b) Il suffit qu'elle soit bornée.
- (c) Il suffit qu'elle admette une limite finie.

2- Soit  $U$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{si } n > 0 \end{cases}$$

La suite  $U$  a pour limite

- (a) 0 ; (b) 1 ; (c)  $+\infty$  ; (d) elle n'a pas de limite

### Exercice 2

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :

\_ Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? \_

Pour tout entier naturel  $p > 2$ , on pose  $N_p = 111\dots1$  où 1 apparaît  $p$  fois. On rappelle que :  $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \dots + 10^0$ .

1. Les nombres  $N_2 = 11$ ;  $N_3 = 111$ ;  $N_4 = 1111$  sont-ils premiers ?

2. Prouver que  $N_p = \frac{10^p - 1}{9}$

Peut-on être certain que  $10^p - 1$  est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si  $p$  n'est pas premier, alors  $N_p$  n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel  $x$  et tout entier naturel  $n$  non nul,  $x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ :

(a) On suppose que  $p$  est pair et on pose  $p = 2q$ , où  $q$  est un entier naturel plus grand que 1. Montrer que  $N_p$  est divisible par  $N_2 = 11$ .

(b) On suppose que  $p$  est un multiple de 3 et on pose  $p = 3q$ , où  $q$  est un entier naturel plus grand que 1.

Montrer que  $N_p$  est divisible par  $N_3 = 111$ .

(c) On suppose  $p$  non premier et on pose  $p = kq$  où  $k$  et  $q$  sont des entiers naturels plus grands que 1.

En déduire que  $N_p$  est divisible par  $N_k$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  une fonction  $f'$  sa fonction dérivée. On a représenté les courbes (C) et (C') de  $f$  et  $f'$

1-Indiquer, en justifiant, quelle courbe représente la fonction  $f$  ?

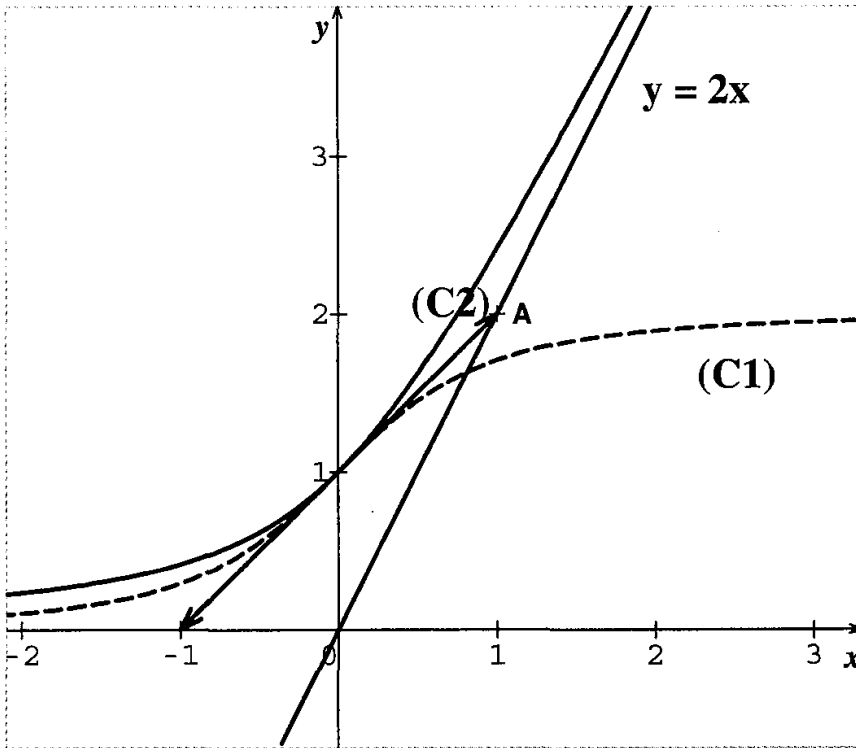
2-Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine.

3-Calculer  $f'(0)$  puis écrire une équation de la tangente à la courbe (C<sub>f</sub>) au point d'abscisse 0.

4-Soit  $f : x \mapsto x + \sqrt{1 + x^2}$

a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Donner une équation de l'asymptote oblique à (C<sub>f</sub>)



5-Montrer que :  $2x < f(x) < 2x + 1$  pour tout  $x \geq 0$

**Exercice 4 :** Soient  $u$  et  $v$  les suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ; v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1-Montrer que  $u$  est croissante ; et que  $v$  est décroissante.

2-Montrer que pour tout pour tous entiers naturels  $p$  et  $q$  on a :

$$u_p < v_q.$$

3-Montrer que  $u$  et  $v$  sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite.

**Exercice 5**

1. Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .

a. Calculer  $P(-1)$ .

b. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :  $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$ .

c. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

( $O$  ;  $\vec{u}$  ;  $\vec{v}$ ). (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par A, B, C et G les points du plan d'affixes respectives :  $Z_A = -1$ ;  $Z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ;

$$Z_C = \overline{Z_B} ; Z_G = 3$$

- Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.
- Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.
- Montrer que ABG est un triangle rectangle

### Corrigé

#### Exercice 1

1-(a) vraie ; (b) faux ; (c) vraie

2-(a) faux ; (b) vrai ; (c) faux ; (d) Faux

#### Exercice 2

$$1^\circ / P > 2 ; N_p = \underbrace{1111\dots 1}_{n \text{ fois le chiffre } 1}$$

$N_2 = 11$  est premier

$N = 111$  n'est pas premier : il est divisible par 3

$N_4 = 1111$  n'est pas premier : il est divisible par 11

$$2^\circ / N_p = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{p-1} = \frac{10^p - 1}{10 - 1} = \frac{10^p - 1}{9}$$

est la somme des p premiers termes d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme 1 et de raison 10

$$N_p \in \mathbb{IN} \Rightarrow \frac{10^p - 1}{9} \in \mathbb{IN} \Rightarrow 9 / (10^p - 1)$$

$$3^\circ / x^n - 1 = (x - 1) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

(a) soit  $p = 2q$

$$N_p = \frac{10^{2q} - 1}{9} = \frac{(10^2)^q - 1}{9}$$

$$* 10^2 \equiv 1[11] \Rightarrow 10^{2q} - 1 \equiv 0[11]$$

$\Rightarrow N_p$  est divisible par 11

$$** (10^2)^q - 1 = (10^2 - 1) [1 + 10^2 + 10^4 + \dots + (10^2)^{q-1}]$$

$$= 9 \times 11 [1 + 10^2 + (10^2)^2 + \dots + (10^2)^{q-1}]$$

$$\text{Donc } N_p = 11 [1 + 10^2 + (10^2)^2 + \dots + (10^2)^{q-1}] \in M_{11}$$

b) soit  $p = 3q$

$$N_p = \frac{10^{3q} - 1}{9} = \frac{(10^3 - 1)}{9} (1 + 10^3 + 10^6 + \dots + (10^3)^{q-1})$$

$$= 111 [1 + 10^3 + (10^3)^2 + \dots + (10^3)^{q-1}]$$

D'où  $N_{3q}$  est divisible par  $N_3$

$$c) 10^k - 1 = 9 \cdot N_k$$

$$\text{Donc } N_{kq} = \frac{(10^k - 1)}{9} \cdot (1 + 10^k + 10^{2k} + \dots + 10^{(q-1)k})$$

$$\text{D'où } : N_{k,q} = N_k (1 + 10^k + 10^{2k} + \dots + 10^{(q-1)k})$$

$$\text{Donc } N_{k,q} \in M_{N_k}$$

### Exercice 3

1-Si la courbe  $(C_1)$  représente la fonction  $f$  alors  $(C_2)$

est celle de  $f'$  ; donc  $f'(x) \geq 1$  pour tout  $x \geq 0$  (voir figure). Le théorème des inégalités des accroissements finies nous affirme que :

$f(x) - f(0) \geq x$  donc  $f(x) \geq x + 1$  (puisque les deux fonctions sont croissantes

$f(0) = f'(0) = 1$ . Or la courbe  $(C_1)$  est située au dessous de la droite

(d) :  $y = x + 1$  donc  $(C_2)$  est la courbe de  $f$ .

Ou encore : Le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de  $(C_1)$

donc  $f'(0) = 0$  et change de signe d'où  $f(0)$  est un extrema de  $f$  ce qui est en désaccord avec la courbe  $(C_2)$  on en déduit que  $(C_2)$  est celle de  $f$

2- Lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$  la courbe  $(C_2)$  se rapproche vers l'axe des abscisses. Donc  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

$$\lim_{+\infty} f = +\infty$$

3- La droite passant par  $A(1; 2)$  et le point  $B(0; 1)$  est tangente à la courbe  $(C_2)$  elle a pour coefficient directeur  $:2-1= 1$  donc  $f'(0) = 1$

Equation de la tangente à  $(C_f)$  au point  $B$  :

$$D : y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = x + 1.$$

4-a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{f(x)}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \text{ car } x^2 + 1 > x^2 \dots$$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

b) Au voisinage de  $-\infty$  il est préférable d'écrire

$$f(x) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})(-x+\sqrt{1+x^2})}{-x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{-x+\sqrt{1+x^2}} \text{ donc } f(x) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x$$

tend vers  $-\infty$  ; l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe  $(C)$  de  $f$ .

Recherche d'asymptote oblique

\*On a  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lors que  $x$  tend vers  $+\infty$ .

\*Simplifions l'expression :  $\frac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})}{x} = \frac{x(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{x} = \frac{(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})}{1}$$

Cette expression tend vers 2 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

$$\begin{aligned} * f(x) - 2x &= -x + \sqrt{1+x^2} = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})(-x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , donc la droite (D) :  $y = 2x$  est une asymptote à (C<sub>f</sub>) au voisinage de  $+\infty$ .

5) Pour tout  $x$  positif ou nul on a :  $f'(x) \leq 2$  et  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc pour tout  $x \geq 0$  on a :  $f(x) - f(0) \leq 2x$  (Théorème des inégalités de l'accroissement fini). Par suite  $f(x) \leq 2x + 1$ .

\* on a :  $x^2 + 1 \geq x^2$  donc pour  $x \geq 0$  ;  $\sqrt{1+x^2} \geq x$  donc  $f(x) \geq 2x$ .

Conclusion :  $2x \leq f(x) \leq 2x + 1$ .

#### Exercice 4

1-Monotonie de  $u$  et  $v$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$  donc  $u$  est croissante.

\*  $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right) = 2 \left( \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right) < 0$

Donc  $v$  est décroissante.

2-Il est évident que  $u_n < v_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

\*Si  $p = q$  évident (la définition de  $v_n$ )

\*Si  $p < q$  on a  $u$  est croissante ;  $v$  est décroissante

Donc :  $u_p < u_q < v_q$ .

\*Si  $p > q$  alors :  $u_p < v_p < v_q$ .

Conclusion : Pour tout entiers naturels  $p$  et  $q$  on a :  $u_p < v_q$ .

3-On a :  $u_0 < u_n < v_n < v_0$  ; les suites  $u$  et  $v$  sont monotone bornées donc elles sont convergentes. Par définition de  $v_n$

On a :  $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$  est une expression qui tend vers 0 lorsque  $n$

tend vers  $+\infty$ .

**Conclusion :** Les suites  $u$  et  $v$  sont convergentes et convergent vers la même limite.

### Exercice 5

1. Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ .

a. Calcul de  $P(-1)$ .

$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$  donc  $(-1)$  est une racine de  $P$ .

b. Déterminons les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$ , on ait :  $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$ .

$(-1)$  est une racine de  $P$  donc il existe deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que :  $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$  d'où :

$$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = z^3 + (1+a)z^2 + ((a+b)z + b) \text{ donc :}$$

$$1 + a = -3 ; (a + b) = 3 \text{ et } b = 7 \text{ d'où : } a = -4 \text{ et } b = 7$$

$$P(z) = (z + 1)(z^2 - 4z + 7)$$

c. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

$P(z) = 0$  si  $z = (-1)$  ou  $z^2 - 4z + 7 = 0$  le discriminant réduit est

$$(-3) = (i\sqrt{3})^2$$

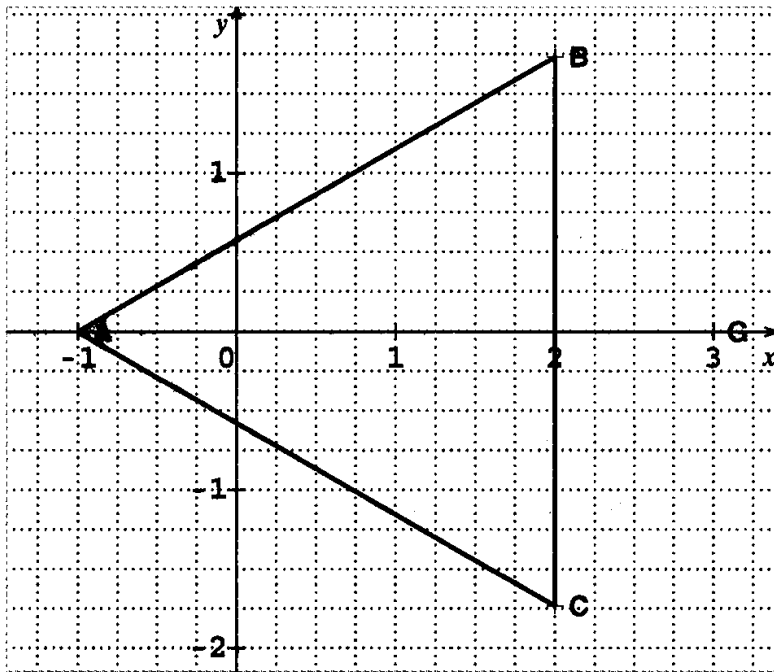
$$\text{d'où } z = 2 + i\sqrt{3} \text{ ou } z = 2 - i\sqrt{3} ; S_C = \{-1 ; 2 + i\sqrt{3} ; 2 - i\sqrt{3}\}$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé

direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par  $A, B, C$  et  $G$  les points du plan d'affixes respectives :

$$Z_A = -1 ; Z_B = 2 + i\sqrt{3} ; Z_C = \overline{Z_B} ; Z_G = 3$$

a. Réaliser une figure et placer les points  $A, B, C$  et  $G$ .



b. Calcul les distances AB, BC et AC et nature du triangle ABC.

$AB = |3 + i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$  ;  $AC = |3 - i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$  ;  $BC = |2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$  donc le triangle ABC est équilatéral.

c. Montrons que ABG est un triangle rectangle

$AB = 2\sqrt{3}$  ;  $BG = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$  ;  $AG = 4$  donc :  $AG^2 = AB^2 + BG^2$  donc ABG est un triangle rectangle en B.

## Devoir de synthèse N°1(2)

### Exercice 1

Soit U la suite définie par:

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$$

1-a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$  puis vérifier que U n'est ni géométrique ni arithmétique.

b) Représenter les premiers termes de la suite U. Conjecturer

2- Montrer par récurrence que  $U_n \in [0; 2]$

3- Montrer que la suite U est croissante. En déduire qu'elle est convergente

4-a) Montrer que :  $2 - U_n \leq \frac{2 - U_{n-1}}{2}$

b) En déduire que :  $2 - U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Calculer alors la limite de  $U_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 2

Parmi les réponses proposées une seule est correcte. Laquelle ?

1) Soit  $n$  un entier naturel si :  $(n+1)/(n^2+1)$  alors :

(a) Il existe une infinité de solutions dans  $\mathbb{N}$

(b) n'admet que 1 comme solution

(c) On peut montrer que  $(n+1)$  divise  $(n-1)$ .

2) Si  $p$  est premier,  $k > 1$  et que  $p/a^k$  alors

(a)  $p/a$  ; (b) si  $a$  est premier alors  $p = a^k$  ;

(c)  $p$  divise tout diviseur de  $a^k$

3- Soit  $A = \overline{abcde}$  un entier écrit dans la base 8. Pour que  $A$  soit divisible par 7 il suffit que :

(a)  $a + b + c + d + e \equiv 0(7)$  ; (b)  $a + b + c + d + e \equiv 1(7)$  ;

(c)  $a + b + c + d + e \equiv 2(7)$

4- Soit  $A = \overline{10256}$ (8) le reste de la division euclidienne de  $A$  par 7 est :

(a) 0 ; (b) 1 ; (c) 2

### Exercice 3 : On considère l'équation (E)

$z^3 - (1+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$  ; où  $z$  désigne un nombre complexe.

1) a. Montrer que (E) admet une solution réelle, note  $z_1$ .

b. Déterminer les deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$  on ait :

$$z^3 - (1+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - 1) [z^2 + az + b]$$

2) Résoudre (E).

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1,  $2+2i$  et  $1-i$ .

a) Représenter A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle OBC.

c) Déterminer l'affixe du point D pour que BACD soit un parallélogramme

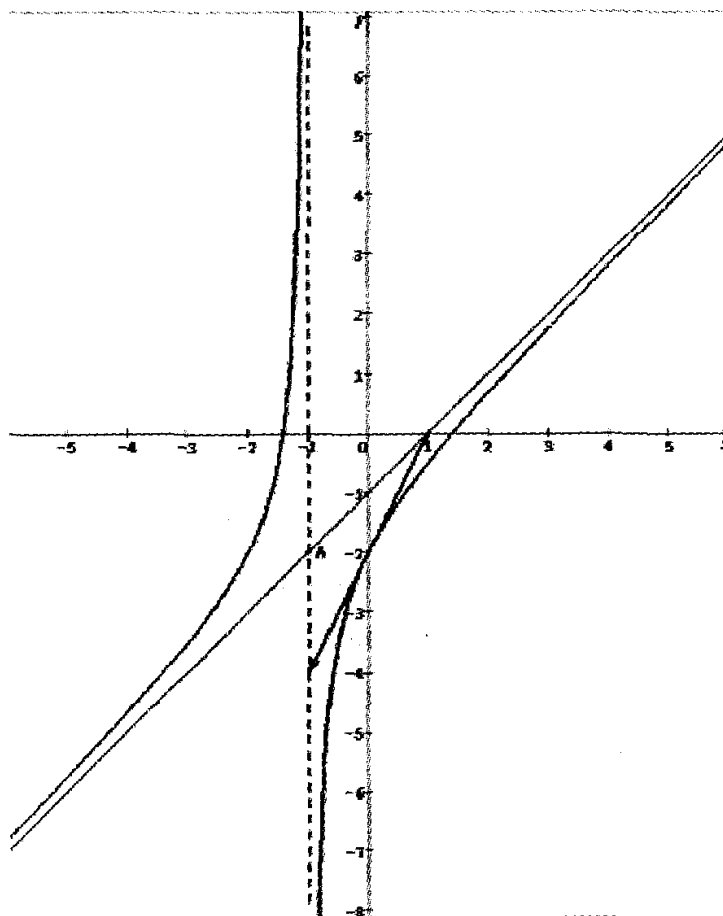
**Exercice 4 :** Soit la courbe (C) ci-dessous représentant une fonction f.

1- Calculer la limite de f en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2- Calculer la limite de f en  $-1^+$  et en  $-1^-$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3-a) Ecrire l'équation de la droite (D). Que représente (D) pour  $(C_f)$

b) Ecrire l'équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.



4-On suppose que  $f(x) = x + b + \frac{c}{x+1}$

a) En utilisant la courbe de  $f$  calculer  $b$  et  $c$

b) Soit  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  pour tout  $x \in [0; \frac{3}{2}[ \cup ]\frac{3}{2}; +\infty[$

Dresser le tableau de variation de  $g$  et tracer sa courbe.

### Exercice 5

1°) Montrer que pour tout entier relatif  $n$  les entiers :

$(14n + 3)$  et  $(5n + 1)$  sont premiers entre eux.

2°) On considère l'équation (E) :  $87x + 31y = 2$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs. Vérifier, en utilisant par exemple la question 1, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs tels que  $87u + 31v = 1$ , puis une solution  $(x_0; y_0)$  de (E).

3°) Soit (E') l'équation  $87x + 31y = 0$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

a) Démontrer l'équivalence :

$(x; y)$  est solution de (E)  $\Leftrightarrow (x - x_0; y - y_0)$  est solution de (E')

b) Résoudre l'équation (E').

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

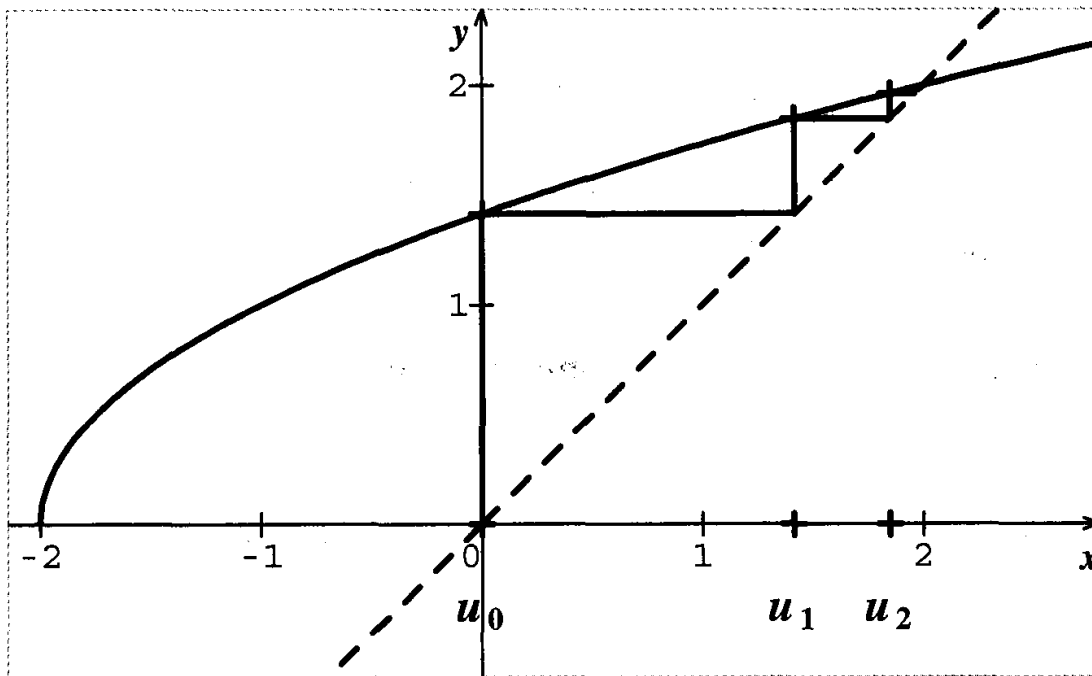
### Corrigé

Exercice 1: Soit  $U$  la suite définie par:  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1-a) Calcul des premiers termes :

$U_1 = \sqrt{2}$ ;  $U_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .  $2U_1 \neq U_0 + U_2$  et  $U_1^2 \neq U_0 \cdot U_2$  donc  $U$  n'est ni géométrique ni arithmétique

b)



2) Montrons que  $U_n \in [0 ; 2]$

On a  $U_0 = 0$  vrai

Supposons que  $U_n \in [0 ; 2]$  donc  $0 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 \leq 2 + U_n \leq 4 \Rightarrow$

$$0 \leq \sqrt{2 + U_n} \leq 2 \text{ donc } U_{n+1} \in [0 ; 2]$$

3- Montrons que la suite  $U$  est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{2 + U_n - U_n^2}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} \geq 0$$

Car  $U_n \in [0 ; 2]$  donc  $U$  est croissante

\*Convergence de la suite  $U$

$U$  est monotone bornée donc elle est convergente

4-a) Montrons que :  $2 - U_n \leq \frac{2 - U_{n-1}}{2}$

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$ ; est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2 + x}} \leq \frac{1}{2}$$

De plus  $f(2) = 2$  : le théorème des accroissements finis nous

affirme que :  $|f(2) - f(U_{n-1})| = |2 - f(U_{n-1})| \leq \frac{1}{2}|2 - U_{n-1}|$

d'après 2) on a :  $U_{n+1} \in [0 ; 2]$  donc :  $2 - U_n \leq \frac{2 - U_{n-1}}{2}$

b) En écrivant les différentes inégalités (1) de 1 à n puis multipliant membre à membre on obtient :  $2 - U_n \leq \frac{1}{2^n}(2 - U_0)$

$U_0 = 0$  d'où :  $2 - U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . les théorèmes de l'encadrement de limite

donnent :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - U_n) = 0$  donc : U est convergente et qu'elle converge vers 0

### Exercice 2

Question	1	2	3	4
Réponse	c	a	a	a

Exercice 3 : On considère l'équation (E)

$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$  ; où z désigne un nombre complexe.

1) a. Solution réelle de (E).

Soit x un réel tel que :  $x^3 - (1+i)x^2 + (7+i)x - 4 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \\ -x^2 + x = 0 \end{cases}$$

Donc :  $x = 0$  ou  $x = 1$  le réel 1 qui convient donc  $z_1 = 1$

b. Déterminons les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = (z - 1) [z^2 + az + b]$$

$$*(z - 1) [z^2 + az + b] = z^3 + (a - 1)z^2 + (b - a)z - b.$$

par identification on a :

$$\begin{cases} a - 1 = -4 - i \\ -b = -4 \\ b - a = 7 + i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - i \\ b = 4 \end{cases} \text{ donc :}$$

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4 = (z - 1) [z^2 - (3 + i)z + 4]$$

2) Résolution de (E).

$$z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z-1)[z^2 - (3+i)z + 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 1 = 0 \text{ ou } z^2 - (3+i)z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \text{ ou } z^2 - (3+i)z + 4 = 0$$

$z^2 - (3+i)z + 4 = 0$  le discriminant est :

$$(3+i)^2 - 16 = -8 + 6i = (3i)^2 + 1 + 2 \times 3i = (3i+1)^2$$

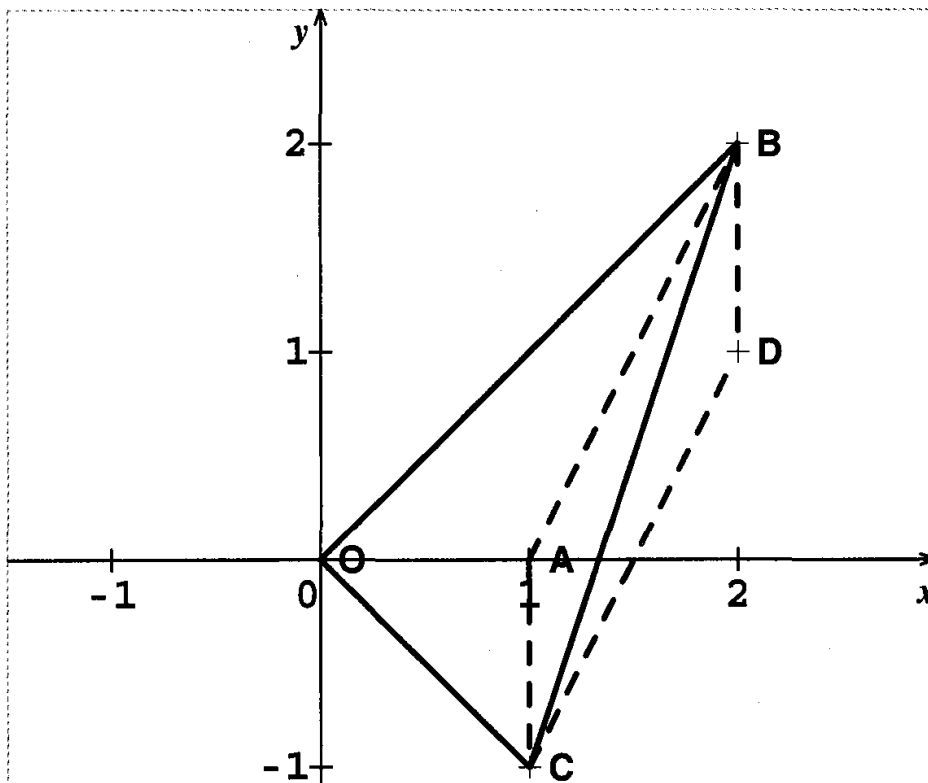
D'où il existe deux solutions

$$z_2 = \frac{3+i-3i-1}{2} = 1-i; z_3 = \frac{3+i+3i+1}{2} = 2+2i$$

$$S_c = \{1; 1-i; 2+2i\}.$$

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives 1,  $2+2i$  et  $1-i$ .

a) Représentation des points A, B et C.



b) Nature du triangle OBC.

$OB^2 = 8$  ;  $OC^2 = 2$  ;  $BC^2 = 10$  donc OBC est un triangle rectangle en O.

c) Déterminer l'affixe du point D pour que BACD soit un parallélogramme BACD est un parallélogramme si et seulement si :

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \Leftrightarrow$$

$$z_D = z_B + z_C - z_A = 2 + 2i + 1 - i - 1 = 2 + i$$

**Exercice 4 : 1-Calcul des limites de f en  $+\infty$  et en  $-\infty$** 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty$$

**2-Calcul des limites de f à gauche et à droite en (-1)**

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -1^-} f = +\infty$$

Donc la droite ( $\Delta$ ) :  $x = -1$  est une asymptote verticale à la courbe (C) de f

**3-a) Equation de la droite (D).**

La droite (D) passe par les points de coordonnées respectives (0 ; -1) et (1 ; 0) donc (D) :  $y = x - 1$

**b) Equation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0.**

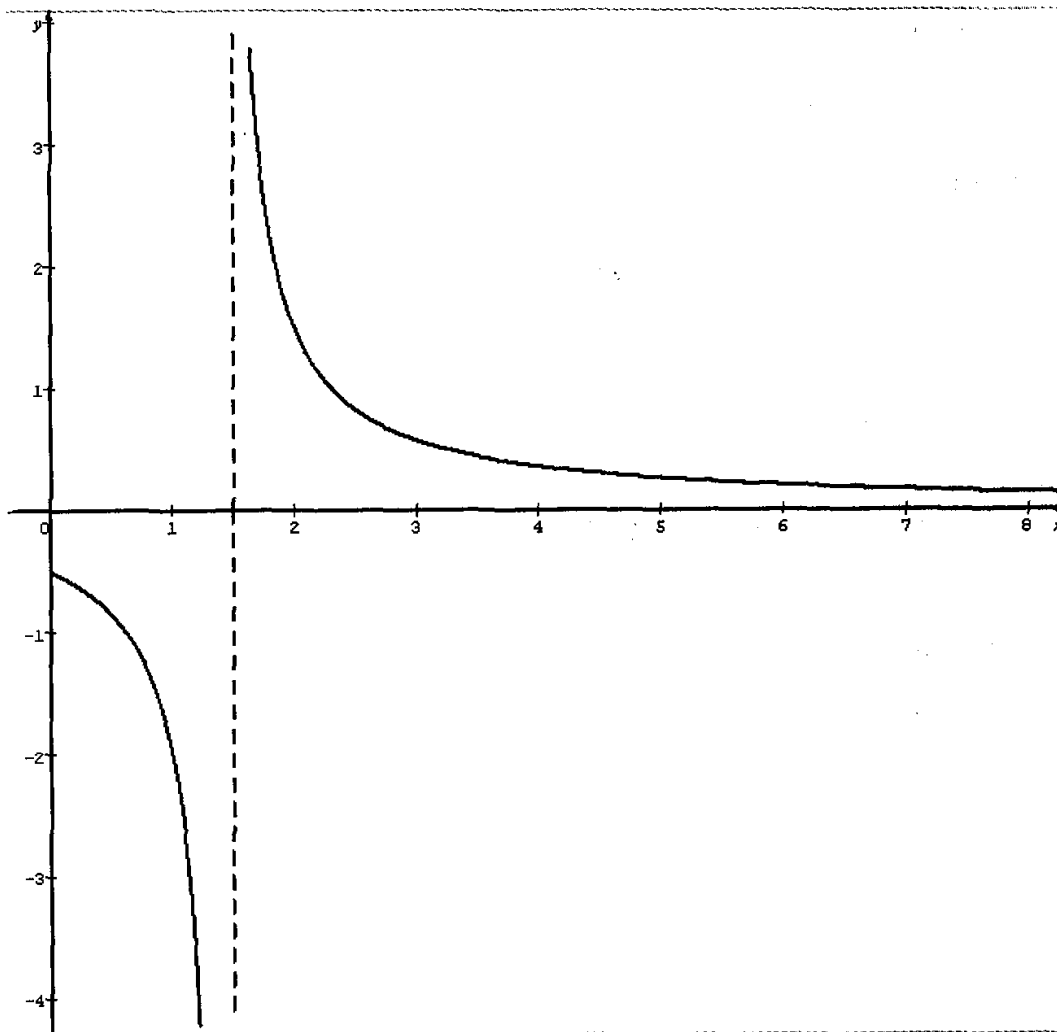
La tangente à (C) au point d'abscisse 0 a pour vecteur directeur  $\vec{u}(\frac{1}{2})$

donc  $f'(0) = 2$  donc (T) :  $y = 2x - 2$  car  $f(0) = -2$

4-a) La droite (D) :  $y = x - 1$  est une asymptote à (C) au voisinage de l'infinie et  $y = x + b$  est une asymptote à (C) au voisinage de l'infinie ; l'unicité de l'asymptote affirme que :  $b = -1$  ;  $f(0) = -2$  donc  $c = -1$  par

suite  $f(x) = x - 1 - \frac{1}{x+1}$

b) f est strictement croissante sur  $[0 ; +\infty[$  donc g est strictement décroissante sur chacun des intervalles :  $[0 ; \frac{3}{2}[$  et  $]\frac{3}{2} ; +\infty[$



### Exercice 5

1°/ soit  $n$  entier relatif

$$14n + 3 = 2x(5n + 1) + 4n + 1$$

$$5n + 1 = (4n + 1) + n$$

$$4n + 1 = 4.n + 1 \text{ d'où } 5(14n + 3) - 14(5n + 1) = 1$$

\*Le théorème de Bézout affirme que :

$14n + 3$  et  $5n + 1$  sont premiers entre eux

$$2°/ 87 = 14 \times 6 + 3 ; 5 \times 6 + 1 = 31$$

D'après la question 1°/ on prend  $n = 6$  on déduit que 87 et 31 sont premiers entre eux On utilise la question 1°/ on peut écrire

$$5 \times 87 - 14 \times 31 = 1 \text{ donc } (U, V) = (5, -14) \text{ en multipliant l'égalité}$$

$$\text{précédente par } 2 : \text{On aura : } 10 \times 87 - 28 \times 31 = 2$$

D'où  $(x_0, y_0) = (10, -28)$

3°/a) soit  $(x, y)$  est une solution de (E)

$$\text{Donc } 87x + 31y = 87x_0 + 31y_0 \Leftrightarrow 87(x - x_0) + 3(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) \text{ est une solution de (E') :}$$

b°/ Résolution de (E) :

$$87x + 31y = 0 \Leftrightarrow 87x = -31y$$

$$\begin{cases} y \in M_{87} \\ x \in M_{31} \end{cases} ; (\text{théorème de Gauss})$$

Donc il existe un entier relatif  $k$  tel que :  $y = k.87$  ;  $x = k.31$

c/ Les solutions de (E) sont de type  $x' = x + x_0$  ;  $y' = y + y_0$

avec  $(x, y)$  est une solution de (E') d'où  $x' = k.31 + 10$  ;  $y' = k.87 - 28$

### Devoir de synthèse N°1(3)

#### Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.

Laquelle ?

I- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]4 ; +\infty[$  par  $f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$  et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1- Une autre expression de  $f(x)$  est

$$(a) f(x) = -2x + 1 - \frac{2}{x-1} ; (b) f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4-x} ; (c) f(x) = \frac{2x^2 + 9x - 2}{x-4}$$

2- La courbe (C) admet pour asymptote la droite d'équation

$$(a) x = 4 \quad (b) y = 4 \quad ; (c) y = 4x$$

3- Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]4 ; +\infty[$ .  $f'(x) = :$

$$(a) -2 - \frac{8}{(x-4)^2} ; (b) 2 + \frac{8}{(x-4)^2} ; (c) -2 + \frac{8}{(x-4)^2}$$

II- Soit  $z$  un nombre complexe

1- Si  $z = 1 + 2i$  alors  $z^2$  a pour forme algébrique :

(a)  $1+4i$ ; (b)  $-3 + 4i$ ; (c)  $4 - 3i$

2- L'équation :  $z^2 - (1+i)z + i = 0$  a pour solutions:

(a)  $-1$  et  $-i$ ; (b)  $-1$  et  $i$ ; (c)  $1$  et  $i$

3-L'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que :  $|z - 1 + i| = 2$  est

(a) Un cercle ; (b) Une droite ; (c) Un cercle privé d'un point

### Exercice 2 :

Soit  $f$  une fonction dont le tableau de variations, incomplet est le suivant ; on désigne par  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

$x$	$-\infty$	$-3$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
Var de $f$	$-\infty$	$-6$	$+\infty$	$2$	$\dots\dots$	

On admet que  $f$  est définie sur  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels.}$$

- Calculer  $f'(x)$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .
- En vous aidant des informations contenues dans le tableau de variations ci-dessus, montrer que l'on a :  $a = 1$ ,  $b = -1$ ,  $c = 4$ .
- Déterminer les limites manquantes dans le tableau de variations
- Montrer que la courbe représentative  $C_f$  de la fonction  $f$  admet comme asymptote la droite  $D$  d'équation  $y = x - 1$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ .

Étudier la position relative de la courbe  $C_f$  et de son asymptote  $D$ .

Exercice 3 : On considère le polynôme  $P$  défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

- Calculer  $P(i\sqrt{3})$  et  $P(-i\sqrt{3})$  puis montrer qu'il existe un polynôme  $Q$  du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait  $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$ .

2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé

$(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3} \text{ et } z_D = \overline{z_C},$$

b) Montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.

#### Exercice 4

1) Soit  $N = 2183$  dans le système décimal. Déterminer son écriture en base 8.

2) Soit le nombre 5241, écrit dans une certaine base.

a) Peut-il être écrit en base 5 ?

b) Supposons qu'il soit écrit en base 6. Donner sa correspondance dans le système décimal.

### Corrigé

#### Exercice 1

Parties	I			II		
Questions	1	2	3	1	2	3
Réponses	b	a	c	b	c	a

#### Exercice 2 :

On admet que  $f$  est définie sur  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$  par :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels.}$$

1. Calcul de  $f'(x)$  en fonction de  $a, b$  et  $c$  :  $f'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$

2. Expression de  $f(x)$

$$\text{On a : } f'(1) = 0 \text{ donc : } a - \frac{c}{4} = 0 \text{ d'où } c = 4a \text{ (1).}$$

$$f(1) = 2 \text{ donc : } a + b + \frac{c}{2} = 2 \text{ d'après (1) } a + b + 2a = 2$$

$$\text{donc : } 3a + b = 2 \text{ (2) ; } f(-3) = -6 \text{ donc } -3a + b + \frac{4a}{-2} = -6 \text{ d'où :}$$

$$-5a + b = -6 \text{ (3) les relations (2) et (3) donnent } 8a = 8 \text{ d'où :}$$

$a = 1$  et  $b = -1$  comme  $c = 4a = 4$

3. Déterminons les limites manquantes dans le tableau de variations

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4. Equation de l'asymptote à  $C_f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ .

On a :  $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$  donc  $f(x) - x + 1 = \frac{4}{x+1}$  a pour limite 0

lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ . Donc la droite (D)  $y = x - 1$  est une asymptote à  $C_f$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$ .

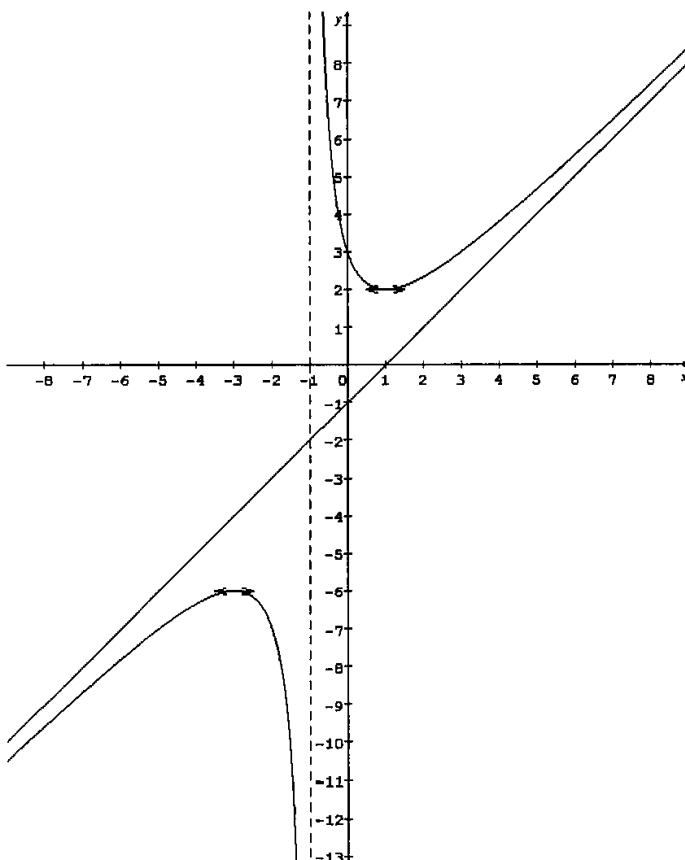
Position relative de la courbe  $C_f$  et de son asymptote D : on a

$f(x) - x + 1 = \frac{4}{x+1}$  dépend du signe de  $(x + 1)$ .

Si  $x \in ]-\infty ; -1[$  alors  $x + 1 < 0$  donc  $(C_f)$  est au dessous de (D).

Si  $x \in ]-1 ; +\infty[$  alors  $x + 1 > 0$  donc  $(C_f)$  est au dessus de (D).

### Courbe de f



**Exercice 3 :**

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calcul de  $P(i\sqrt{3})$  et  $P(-i\sqrt{3})$  et factorisation de P

$P(i\sqrt{3}) = P(-i\sqrt{3}) = 0$  donc il existe un polynôme Q de degré 2 tel que :

$$P(z) = (z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}).Q(z) = (z^2 + 3)Q(z).$$

**Expression de Q(z)**

$$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = (z^2 + 3)(z^2 + az + b) \text{ donc:}$$

$$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = z^4 + az^3 + (b+3)z^2 + 3az + 3b \text{ donc:}$$

$$a = -6 ; b + 3 = 24 \text{ donc } b = 21 \text{ d'où :}$$

$$z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$$

2. Résolution dans C de l'équation  $P(z) = 0$ .

D'après 1/  $P(z) = 0$  si  $z = i\sqrt{3}$  ou  $z = -i\sqrt{3}$  ou  $z^2 - 6z + 21 = 0$  (E) le

discriminant réduit de (E) est :  $3 - 21 = -12 = (i2\sqrt{3})^2$  Donc il existe deux solutions de (E) :  $Z_1 = 3 - 2i\sqrt{3}$  ;  $Z_2 = 3 + 2i\sqrt{3}$  ;

$$S_C = \{ i\sqrt{3} ; -i\sqrt{3} ; 3 - 2i\sqrt{3} ; 3 + 2i\sqrt{3} \}$$

3.a) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé

$(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A = i\sqrt{3}, z_B = -i\sqrt{3}, z_C = 3 + i2\sqrt{3} \text{ et } z_D = \overline{z_C},$$

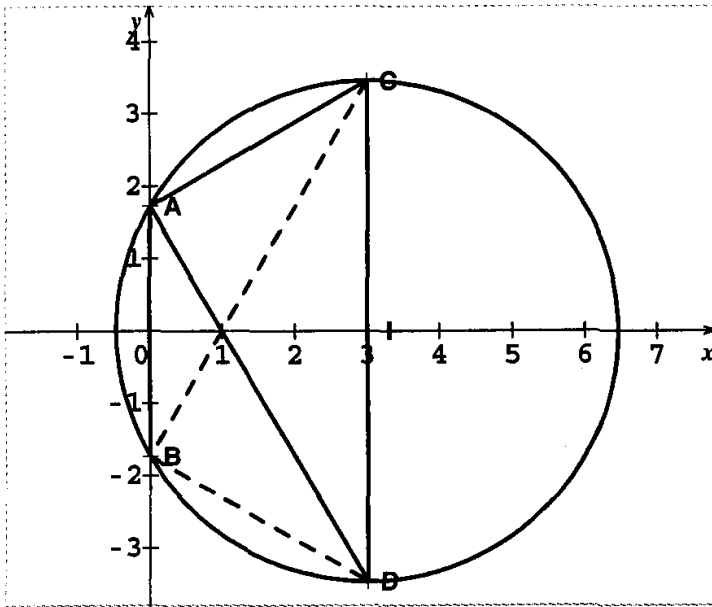
b) Les quatre points sont sur le même cercle.

$$AC^2 = 3^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 = 12 ; AD^2 = 3^2 + (2\sqrt{3} + \sqrt{3})^2 = 36 ;$$

$$CD^2 = 48$$

La réciproque du théorème de Pythagore nous affirme que : ACD est un triangle rectangle en A donc A ; D et C sont situés sur le cercle de

diamètre [CD] ; les points A et B d'une part et C et D d'autre part sont symétriques par rapport à l'axe des réels. Donc les points B ; C et D sont sur le cercle de diamètre [CD] par suite les points A ; B ; C et D sont situés sur le même cercle (C) de diamètre [CD].



#### Exercice 4

1/ Écriture de 2183 en base 8

$$2183 = 8 \cdot 272 + 7 ; 272 = 8 \cdot 34 + 0 ; 34 = 8 \cdot 4 + 2$$

$$4 = 8 \cdot 0 + 4 \Rightarrow 2183_{(10)} = 4207_{(8)}$$

$$\begin{aligned} \text{Vérification : } 4 \times 8^3 + 2 \times 8^2 + 7 &= 4 \times 512 + 2 \times 64 \times 7 \\ &= 2048 + 128 + 7 = 2183_{(10)} \end{aligned}$$

2° / Soit  $N = 5241$  (écrit dans une certaine base)

$N$  ne peut pas être écrit en base 5 car les restes de la division euclidienne par 5 sont (0, 1, 2, 3 ou 4)

$$5241_{(6)} = 5 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6^1 + 1 = 5 \times 216 + 72 + 24 + 1$$

$$N = 1171_{(10)}$$

## Deuxième trimestre

### \*Primitives

**1-Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On appelle primitive de  $f$  sur  $I$  toute fonction  $F$  dérivable sur  $I$  telle que :  $F' = f$  sur  $I$ .

**2. Théorème :** Soit  $f$  une fonction admettant des primitives sur un intervalle  $I$ . Si  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$  sur l' intervalle  $I$ .

Alors  $F$  et  $G$  diffèrent d'une constante :  $F(x) = G(x) + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) ;  $x \in I$

### 3. Tableau des primitives usuelles

Les résultats de ces tableaux s'établissent en vérifiant que l'on a bien  $F' = f$  sur l'intervalle considéré.

Fonctions : $f$	Primitives : $F$	Intervalle
$f(x) = a$ ; $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ; $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ ; $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$
$f(x) = \sqrt{x}$ ; $x \geq 0$	$F(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$	$\mathbb{R}_+$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , $x > 0$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$] 0 ; + \infty[$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$	$\mathbb{R}$

### 4. Opérations sur les primitives

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies continues et dérivables sur un domaine  $D$ . Le tableau suivant résume les différentes opérations qu'on peut rencontrer

<b>Fonction</b>	<b>Primitive</b>
$u'+v'$	$u + v$
$ku'$	$ku$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'(v'ou)$	$vou$

**Théorème:** Primitive définie par une condition initiale

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  admettant des primitives sur  $I$ . Soient  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$

Il existe une unique primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  satisfaisant la condition initiale  $F(x_0) = y_0$

### \*Fonction logarithme

**Définition :** On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 1/x$ . La fonction logarithme népérien notée  $\ln$  est la primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(1) = 0$

### Conséquences immédiates :

$$*\ln 1 = 0 ; \ln e = 1 ; *\ln(a/b) = \ln a - \ln b ; *\ln(1/b) = -\ln b$$

$$*\ln(a.b) = \ln a + \ln b ; \ln a^p = p.\ln a \text{ pour tout } p \text{ de } \mathbb{Z}$$

$$*\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a ; \ln a^{p/q} = p/q . \ln a \text{ pour tous } p \text{ et } q \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

$$*\ln(a^x) = x \ln(a) ; a > 0$$

### Limites usuelles

$$*\ln x \text{ tend vers } -\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0^+ ;$$

$$*\ln x \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.$$

$$*\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 ; \frac{\ln x}{x^n} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{\ln x^n}{x^m} \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

( avec  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$ )

\*  $x \ln x \rightarrow 0$  ;  $x^n \ln^m x \rightarrow 0$  ;  $x \ln(x^n) \rightarrow 0$  lorsque  $x$  tends vers 0 ( avec  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{N}$  )

\*  $\frac{\ln x}{x-1} \rightarrow 1$  lorsque  $x$  tend vers 1 ;  $\frac{\ln x}{x^n-1} \rightarrow \frac{1}{n}$  lorsque  $x$  tend vers 1

## II-Algèbre

### 1-Matrices et systèmes

**définition :** Soit  $K$  un ensemble de nombres (exemples,  $K = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ),  $n, p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes la données de  $np$  nombres appelés termes ou éléments ou coefficients de la matrice et rangés dans un tableau rectangulaire à  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

L'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$  est noté  $M_{n,p}(K)$ .

Si  $n = 1$ , on parle de matrice ligne à  $p$  colonnes.

Si  $p = 1$ , on parle de matrice colonne à  $n$  lignes.

Si  $n = p$ , on parle de matrice carrée. On note simplement  $M_n(K)$  au lieu de  $M_{n,n}(K)$ .

### 2-Multiplication des matrices.

**a) Définition :** Soit  $A \in M_{n,p}(K)$  et  $B \in M_{p,q}(K)$ ,  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ . On définit une matrice notée  $AB$  à  $n$  lignes et  $q$  colonnes comme la matrice de terme général

$(c_{ij})$  avec  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, q\}$ ,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

**b) Matrices inversibles. :** On ne considère que des matrices carrées.

**Définition :** On dit que  $A \in M_n(K)$  est inversible si il existe  $B \in M_n(K)$  telle que :  $AB = BA = I$  et dans ce cas on note  $B = A^{-1}$  appelée matrice inverse de  $A$ .

**Théorème :** Soit  $A$  une matrice carrée

$A \in M_n(K)$  est inversible si et seulement si le déterminant de  $A$  est non nul.

### 3-Système linéaire

#### a) Définition d'un système linéaire

**Définition 1 :** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. On appelle système d'équations linéaires de  $n$

équations aux  $p$  inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_p$  le système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_p \end{cases}$$

où  $a_{ij}$  et  $b_i$  sont des réels pour tous  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, p$ .

La matrice  $M = (a_{ij})$  ; avec  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, \dots, p$  est la matrice associée

au système  $S$  :  $M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

**Définition 2 :** Deux systèmes d'équations linéaires de même taille ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) sont dits équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions.

#### b) Opérations élémentaires sur les lignes

Notons  $L_1, L_2, \dots, L_n$  les  $n$  lignes d'un système ( $S$ ).

**Définition :** On appelle opération élémentaire sur les lignes l'une des trois opérations suivantes :

1. Échange de deux lignes :  $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplication d'une ligne par un réel  $\alpha \neq 0$  :  $L_i \leftarrow \alpha L_i$

3. Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne :  $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$  ( $\mu \in \mathbb{R}$ ). Les autres lignes non concernées doivent être réécrites dans le système sans modification.

**Théorème 1 :** Soit (S) un système d'équations linéaires. Le système (S') obtenu en effectuant des opérations élémentaires sur (S) est équivalent à (S).

### c) Nombre de solutions d'un système d'équations linéaires

**Théorème 2 :** Un système (S) d'équations linéaires admet soit aucune solution, soit une unique solution, soit une infinité de solutions.

Si la matrice M associée à (S) est une matrice carrée inversible alors :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

## III-Statistique

**Point moyen du nuage :** Est le point  $G(\bar{X}; \bar{Y})$  où

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n x_k ; \quad \bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n y_k$$

Lorsque les points du nuage sont dans une situation de proche alignement, on peut chercher une droite traduisant cet alignement

Une telle droite s'appelle "droite d'ajustement". On va voir, ci-dessous, qu'on peut déterminer plusieurs droites d'ajustement.

**Variances :**

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x - \bar{X})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x)^2 - \bar{X}^2$$

$$V(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (y - \bar{Y})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (y)^2 - \bar{Y}^2$$

**Covariance :**

On note la covariance de X et Y  $\sigma_{XY} = \frac{1}{N} \sum xy - \bar{X}\bar{Y}$

Calcul du coefficient de corrélation linéaire : r

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ avec } \sigma_x \text{ est l'écart type de X } \sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

$\sigma_y$  est l'écart type de Y ;  $\sigma_y = \sqrt{V(Y)}$

Si  $r \geq 0,95$  alors la corrélation linéaire entre X et Y est forte.

Un ajustement affine est alors justifié.

(Les points du nuage sont dans une situation de proche alignement).

Si  $r^2 = 1$ , alors, les points du nuage sont alignés.

\*Si  $r = 0$  alors les points de nuage sont situés sur un cercle.

4) Déterminer un ajustement affine dans le cas où  $r \geq 0,95$ )

a) Droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés

c'est la droite d'équation  $y = ax + b$  avec :

$$a = \frac{\delta_{xy}}{V(x)} ; b = \bar{y} - a\bar{x}$$

b) Droite de régression de x en y (peu utilisée) par la méthode des moindres carrés : c'est la droite d'équation  $x = a'y + b'$  avec :

$$a' = \frac{\delta_{xy}}{V(y)} ; b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

## Devoir de contrôle N°2(1)

**Exercice 1 :** Pour chacune des questions 1, 2, 3 et 4, parmi les quatre affirmations proposées, deux sont exactes et deux sont fausses.

Préciser ceux qui sont exactes

1) Soient A et B deux matrices telles que le produit A.B a un sens .

(a)  ${}^tA.B$  a un sens ; (b)  ${}^tB.{}^tA$  a un sens ; (c)  $A + B$  a un sens ;

(d)  ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$

2- Soit A la matrice définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) A est symétrique ; (b)  $A^2 = 2A$  ; (c) A est inversible ;

(d)  $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3- Soit  $f(x) = \ln(x^2)$  avec x est un réel non nul.

(a)  $f(x) = 2\ln x$  ; (b) la courbe  $(C_f)$  admet un centre de symétrie ;

(c)  $f(-2) = \ln 4$  ; (d) f est paire.

4- Une primitive de la fonction  $x \mapsto x\sqrt{x}$  est :

(a)  $\frac{2}{3}x^2\sqrt{x}$  ; (b)  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + 1$  ; (c)  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2$  ; (d)  $\frac{1}{2}x\sqrt{x}$

### Exercice 2

Soit f la fonction définie par :  $f(x) = x + 1 - \sqrt{1+x}$

1-a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Étudier les variations de f et étudier le comportement asymptotique

2-a) Tracer la courbe de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de  $[-\frac{3}{4}; +\infty[$  sur un intervalle ] à préciser.

3- Soit F la fonction définie par :  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - (x+1)\sqrt{1+x}$

Vérifier que F est une primitive de f.

En utilisant la courbe de f étudier les variations de F.

Tracer la courbe  $(C')$  de F.

**Exercice 3** Donner une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1-)  $f : x \mapsto x + 1 - \sqrt{x}$  pour tout  $x \geq 0$

2-)  $g : x \mapsto \frac{2x + 1}{\sqrt{1+x}}$  pour tout  $x > -1$

3-)  $h : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ .

### Exercice 4

La part des femmes élues maires de 1947 à 2001 est donnée en

Année	1947	1953	1959	1965	1971	1977	1983	1989	1995	2001
Rang $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Part $y_i$ (%)	0,7	0,8	1	1,1	1,7	2,6	4	5,5	7,6	11,3

1- Représenter le nuage de points associé à cette série statistique

$(x_i ; y_i)$  dans un repère orthonormé (unités : 1 cm).

2. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième). Tracer cette droite sur le graphique précédent.

3. En supposant que cet ajustement reste pertinent jusqu'en 2007, calculer une estimation de la part des femmes élues maires en 2007.

### Corrigé :

#### Exercice 1

Question	1	2	3	4
Réponse	b, d	a ; c	c ; d	b, c

#### Exercice 2

$$f(x) = x + 1 - \sqrt{1 + x}$$

1-a) Déterminons l'ensemble de définition de  $f : E_f = [-1 ; +\infty[$

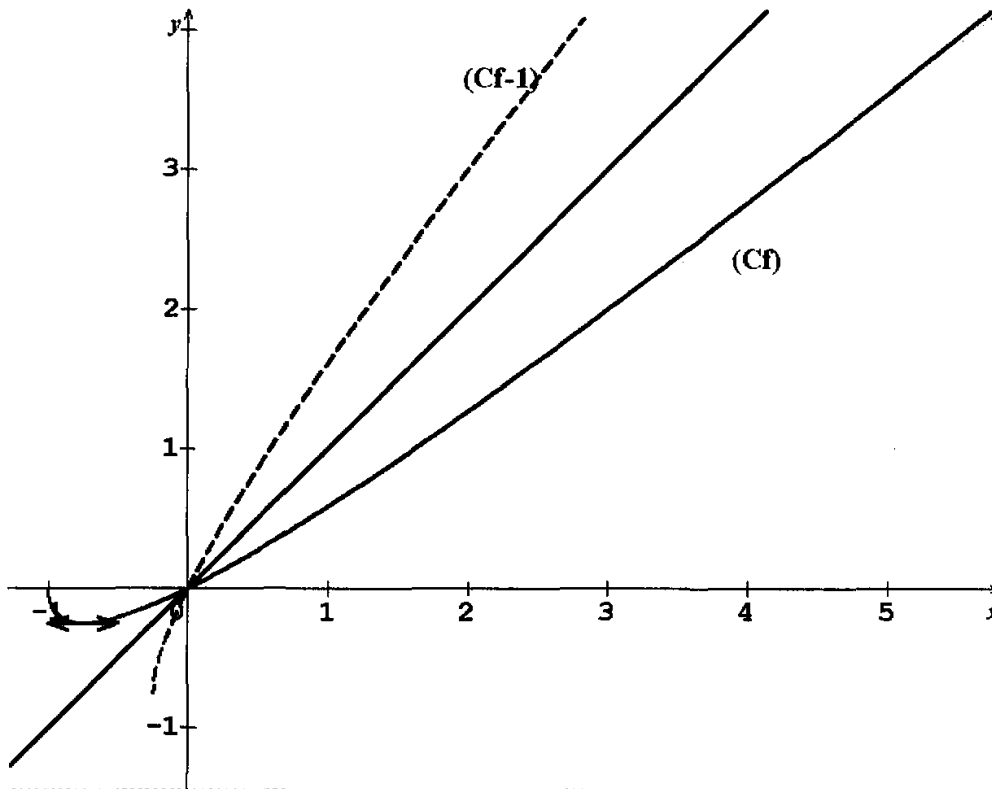
b) Etude des variations de  $f$  et étude de comportement asymptotique  
 $f$  est dérivable sur  $] -1 ; +\infty [$  et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{2\sqrt{1+x} - 1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{4(x+1) - 1}{2\sqrt{1+x}(1+2\sqrt{1+x})}$$

$$= \frac{4x + 3}{2\sqrt{1+x}(1+2\sqrt{1+x})}$$

X	-1	$-\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

2-a) Traçage de la courbe de  $f$



b).  $f$  est continue strictement croissante sur  $[-\frac{3}{4}; +\infty [$  à valeurs dans  $[-\frac{1}{4}; +\infty [$  donc elle réalise une bijection sur  $[-\frac{1}{4}; +\infty [$ .

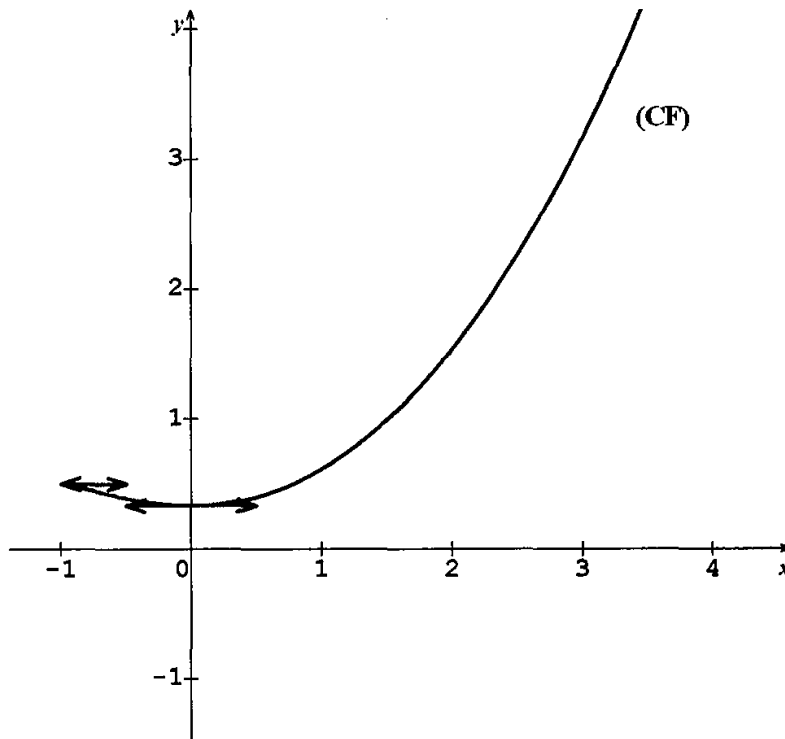
3-Soit F la fonction définie par :  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 - \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x}$

Vérifions que F est une primitive de f. F est dérivable sur  $] -1 ; +\infty [$  et  $F'(x) = f(x)$  donc F est une primitive de f.

En utilisant la courbe de f étudier les variations de F.

F est décroissante sur  $[-1 ; 0]$  ; elle est croissante sur  $[0 ; +\infty[$

Tracer la courbe (C') de F.



#### Exercice 4

Donnons une primitive de chacune des fonctions suivantes.

Fonction	Une primitive de la fonction ( c est une constante réelle)
$f: x \mapsto x + 1 - \sqrt{x}$	$F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c ; x \geq 0.$
$g: x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{1+x}}$	$g(x) = 2\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ donc $G: x \mapsto \frac{4}{3}(x+1)\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x} + c$
$h: x \mapsto 3x^2 - 2x + 1.$	$H: x \mapsto x^3 - x^2 + x + c$

**Exercice 5**

1-voir figure ci-dessous

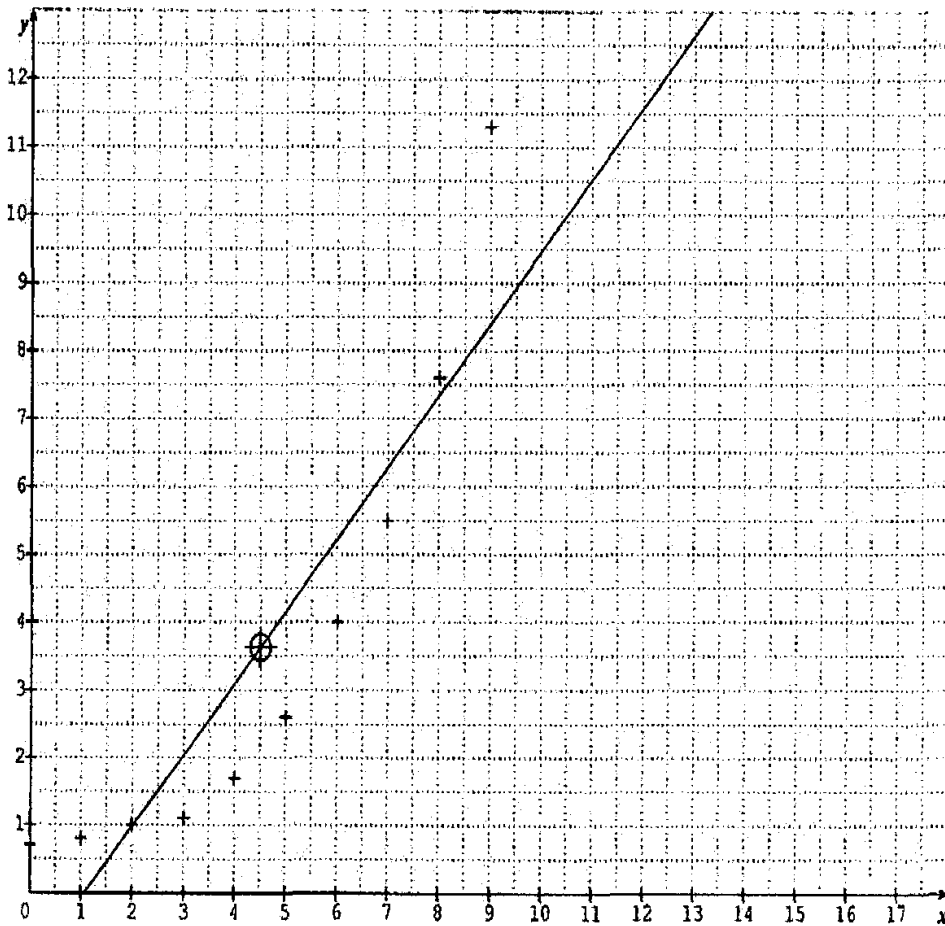
2-)  $\text{cov}(x ; y) = 8.755 ; \sigma(x) = 2.87 ; \sigma(y) = 3.36 ; G( 4.5 ; 3.63)$

Le coefficient de corrélation linéaire  $r = 0.907$  donc un ajustement affine est non satisfaisante. La droite de régression de  $y$  en  $x$  est  $D :$

$$1.061x - 1.145$$

3- L'an 2007 a pour rang 15 donc la part des femmes élues maire est :

$$1.061x 15 - 1.145 = 14.77\%$$



## Devoir de contrôle N°2 (2)

**Exercice 1 :** Pour chacune des questions choisir la réponse correcte

1- Une primitive de la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$  est la fonction  $F : x \mapsto$

(a)  $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$  ; (b)  $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 1$  ; (c)  $x^3 - x^2 + x + 1$

2- Une primitive de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$  est la fonction  $F$  définie

par :  $F(x) =$

(a)  $\frac{1}{2} + \sqrt{1+x^2}$  ; (b)  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} - 2$  ; (c)  $\sqrt{1+x^2} - 2$

3- Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  le déterminant de  $M$

est

(a) -1 ; (b) 1 ; (c) 0

4- Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  la matrice  $M$  est

inversible son inverse est :

(a)  $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  ; (b)  $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  ; (c)  $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

### Exercice 2

Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1- Calculer le déterminant de  $M$ . En déduire que  $M$  est inversible.

2- Montrer que :  $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

3- Soit  $P$  ;  $Q$  et  $R$  trois plans d'équations respectives :

$4x + 2y + z = 12$  ;  $x + y + z = -12$  et  $4x - 2y + z = 24$ .

Déterminer le point de rencontre des trois plans.

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$

1-Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

2-a) Montrer que la droite (D) :  $y = 3x + 1$  est une asymptote à la courbe (C) de  $f$ .

b) Étudier le comportement asymptotique de (C) en  $+\infty$ .

c) Étudier les variations de  $f$  puis tracer (C).

**Exercice 4**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$

On note  $C_f$  sa représentation graphique dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

1. Étudier les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

2. Calculer la dérivée  $f'(x)$  puis résoudre l'inéquation  $f'(x) \geq 0$ .

3. En déduire le tableau de variation de la fonction  $f$ . 4. Tracer la courbe  $C_f$ . (On pourra se placer sur l'intervalle  $]0 ; 2]$ )

**Exercice 5**

Le lycée Salah Eddine a décidé d'organiser un voyage en Australie pour assister aux Jeux olympiques de l'an 2000 qui se dérouleront à Sydney.

Pour réduire le coût, élèves et adultes cherchent à organiser des activités qui rapportent de l'argent. Le club poésie décide d'éditer et de vendre un recueil de textes écrits par les élèves. Pour cela il commence par réaliser une « étude de marché » auprès de la population du lycée, afin de savoir à quel prix vendre ce recueil pour avoir la plus importante rentrée d'argent.

Les résultats de cette étude figurent dans le tableau ci-dessous

$x_i$	15	20	25	30	35	40	45	50
$y_i$	1200	900	800	550	500	350	300	100

$x_i$  est le prix de vente en RS d'un recueil,  $y_i$  est le nombre de personnes prêtes à acheter le recueil au prix  $x_i$ .

1. Construire le nuage de points  $M_i(x_i; y_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point de coordonnées  $(10; 0)$ , 2 cm pour 5- francs en abscisse et 1 cm pour 100 personnes en ordonnée. Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  et le placer sur le graphique.

2. Donner une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi à  $10^{-2}$  près et l'ordonnée à l'origine à l'unité près.

Tracer cette droite sur le graphique.

3. a. Calculer alors, en fonction du prix de vente  $x$ , la somme que peut encaisser le club poésie si la réalité est conforme à la prévision. On note  $S(x)$  cette somme.

b. Etudier les variations de cette fonction  $S$  et en déduire le prix  $x_0$  pour lequel cette somme atteint son maximum ( $x_0$  sera arrondie au RS le plus proche). Quelle sera cette somme?

### Corrigé

#### Exercice 1

Question	1	2	3	4
Réponse	a	b	c	a

#### Exercice 2 :

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1-La matrice  $M$  a pour déterminant est égal à :

$$4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$\text{Det}(M) \neq 0$  donc  $M$  est inversible.

2-Inverse de M :

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} & \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} & \frac{4}{4} - \frac{2}{4} - \frac{1}{2} \\ 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} + \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} + \frac{4}{3} \\ \frac{4}{12} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6} & \frac{1}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} & \frac{4}{12} + \frac{2}{4} + \frac{1}{6} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \text{ donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3-Soit  $M(x; y; z)$  un point de l'espace M est un point commun des trois plans P ; Q et R si et seulement si  $x ; y$  et  $z$  sont des solutions du

$$\text{systeme : } \begin{cases} 4x + 2y + z = 12 \\ x + y + z = -12 \\ 4x - 2y + z = 24 \end{cases}$$

La matrice associé au système est M.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ -18 \end{pmatrix} \text{ donc le point}$$

commun des trois plans est  $\Omega(9; -3; -18)$

**Exercice 3 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$

1-Calculer limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

Le domaine  $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{-\infty} f = -\infty ; \text{ en } +\infty \text{ on écrit } \sqrt{1 + x^2} = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \text{ donc}$$

$$f(x) = x \left( 2 + \frac{1}{x} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \text{ donc } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

2-a) Montrer que la droite (D) :  $y = 3x + 1$  est une asymptote à la courbe (C) de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ .

$$f(x) - (3x + 1) = -x - \sqrt{1 + x^2} = \frac{-1}{-x + \sqrt{1+x^2}} \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } -\infty.$$

Donc : la droite (D) :  $y = 3x + 1$  est une asymptote à la courbe (C) de  $f$  au voisinage de  $-\infty$ .

b) Etudier le comportement asymptotique de (C) en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{1 + x^2} \right) = 1$$


Donc la courbe (C) de  $f$  admet la droite ( $\Delta$ ) :  $y = x + 1$  comme asymptote au voisinage de  $+\infty$ .

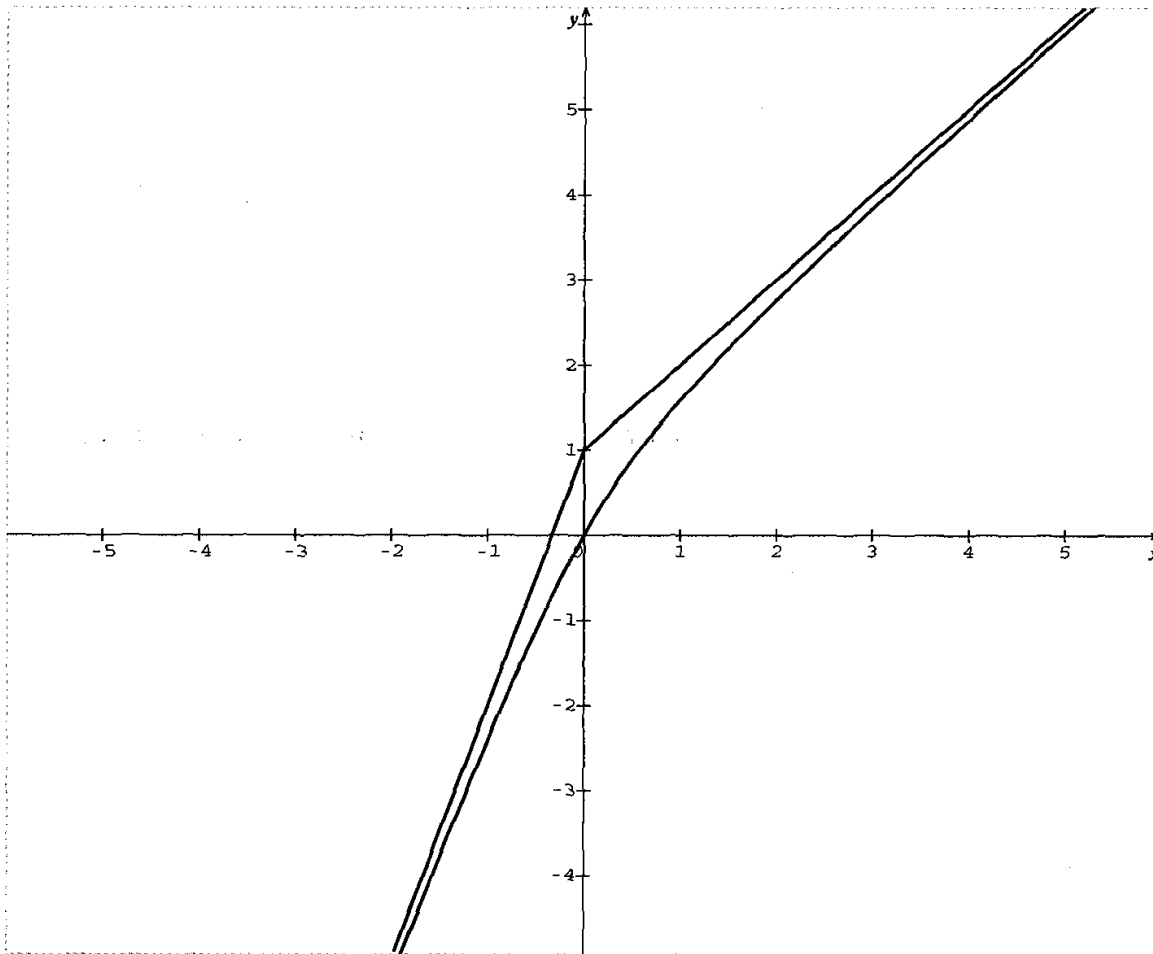
c) Etudier les variations de  $f$  puis tracer (C).

la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$f'(x) = 2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \in ]-1; 1[ \text{ d'où } f'(x) > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$





#### Exercice 4

$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$  ;  $C_f$  est sa courbe représentative

1- limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ D'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

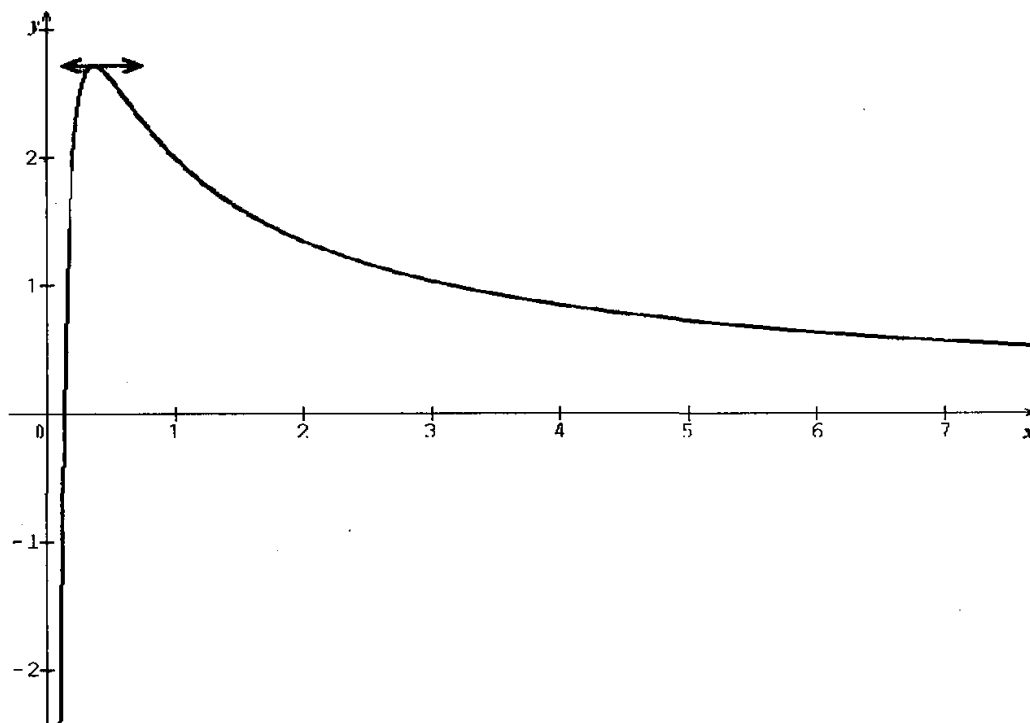
2 -  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x - 2}{x^2} = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -1 - \ln(x) \geq 0 \Rightarrow 1 + \ln(x) \leq 0 \Rightarrow \ln(x) \leq -1 \Rightarrow x \leq e^{-1}$$

## 3) variation de f

<b>x</b>	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$		
<b>f'(x)</b>		+	0	-	
<b>Var de f</b>	$-\infty$	$\rightarrow$	e	$\rightarrow$	0

4)

**Exercice 5**

1-Nuage des points (voir figure ci-dessous)

Le point moyen G a pour coordonnées (32.5 ; 587.5 )

2-cov(x; y) = -3781.5 ; r = -0.981 ;

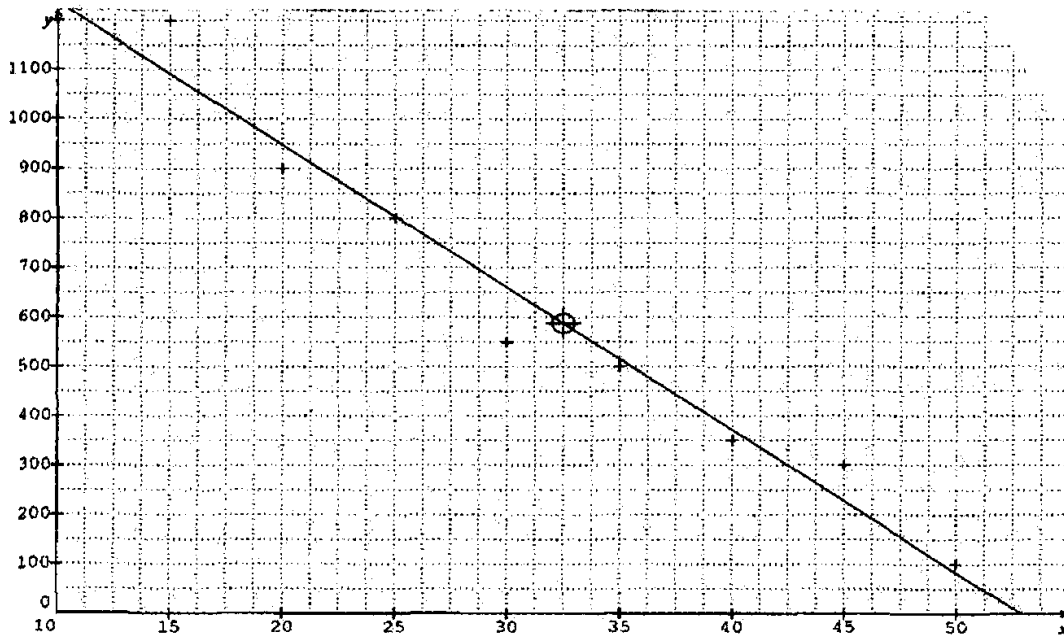
 $\sigma(x) = 11.456$   $\sigma(y) = 336.108$  d'où  $y = -28.81 x + 1523.81$ 

Remarque :  $|r| > 0.95$  donc il s'agit d'une forte corrélation linéaire entre x et y se qui affirme qu'un ajustement affine est justifié.

3-a)  $S(x) = y \cdot x = -28.81 x^2 + 1523.81 x$

b)  $S'(x) = -57.62x + 1523.81$  donc  $S$  est maximal lorsque  $x$  prend la valeur  $x_0 = 26.44$

on prend  $x_0 = 26$  donc  $S$  est très proche de : 20149 RS



## Devoir de contrôle N°2(3)

### Exercice 1

Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1-Calculer  $M^2$

2-Déduire que :  $M^3 = 0$  (La matrice nulle ).

3- $M$  est-elle inversible ?

### Exercice 2

Le but du problème est d'étudier la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty [$  par:

$$f(x) = (x^2 + 1 - \ln x) \cdot \frac{1}{x} \text{ et de construire sa courbe } (C),$$

**Étude d'une fonction auxiliaire.**

1- Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $10; +\infty[$  par:  $g(x) = x^2 + \ln x -$

2.

a) Étudier le sens de variation de  $g$  et ses limites en  $0$  et  $+\infty$ . (On ne demande pas la représentation graphique de  $g$ .)

b) En déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  et une seule et que :  $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$ .

c) Étudier le signe de  $g(x)$ .

**2- Étude de  $f$ .**

a) Étudier les limites de  $f$  en  $0$  et  $+\infty$

b) Exprimer  $f'(x)$  à l'aide de  $g(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f$

3°) Le plan est rapporté au repère ortho normal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . a) Montrer que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  est une asymptote en  $+\infty$  à la courbe (C).

b) Déterminer le point d'intersection B de (C) et  $\Delta$  ; préciser la position de (C) par rapport à  $\Delta$ .

c) Construire la courbe (C) et la droite  $\Delta$ , en précisant la tangente à (C) en B.

**Exercice 3**

Un hôpital est composé de trois services : service de soins A, service de soins B, service de soins C. On s'intéresse aux prises de sang effectuées dans cet hôpital dans le service de soins A. Dans le tableau suivant figure le nombre de prises de sang effectuées dans le service de soins A lors des premiers mois de l'année 2006.

mois	janvier	février	mars	avril	mai
rang du mois $x_i$	1	2	3	4	5
nombre de prises de sang effectuées $y_i$	51	49	48	46	44

1. En utilisant la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés.
2. Avec cet ajustement, quel nombre de prises de sang peut-on prévoir pour le mois de décembre 2006 ? (arrondir à l'unité).

**Exercice 4 :** Répondre par vrai ou faux.

- 1-Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive unique sur cet intervalle.
- 2-Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  ;  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$  alors  $f$  admet une primitive unique  $F$  sur  $I$  telle que  $F(x_0) = y_0$ .
- 3-Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$  :  $\ln(x^2) = 2\ln(x)$
- 4-Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R} \setminus \{ -1 ; 1 \}$  on a :  

$$\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) = \ln(1+x) - \ln(x-1).$$
- 5-Soit  $M$  et  $N$  deux matrices le produit  $M.N$  est toujours a un sens.
- 6-L'équation :  $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 0$  admet dans  $\mathbb{R}^*_+$  deux solutions

### Corrigé

#### Exercice 1

$$1) M^2 = \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3)  $\text{Dét}(M^3) = 0$  donc  $M$  n'est pas inversible

#### Exercice 2

1° a) Etude de la fonction  $g$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*_+$  et sa dérivée

$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$  est strictement positive. De plus, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ donc: } \lim_{+\infty} g = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ donc } \lim_{0^+} g = -\infty$$

<b>x</b>	0	$+\infty$
<b>g'(x)</b>	+	
<b>g(x)</b>	$-\infty$	$+\infty$

b) Etude de l'équation  $g(x) = 0$ .

La fonction  $g$  continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ , (puisque'elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ )  
strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  et vérifiant

$$\lim_{0^+} g = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} g = +\infty$$

donc  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ ; donc l'équation  $g(x) = 0$   
admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comme on a, par  
ailleurs,

$$g(1,30) \approx -0,0476 (< 0) \text{ et } g(1,35) \approx 0,1226 (> 0)$$

il en résulte immédiatement que l'on a :  $1,30 \leq \alpha \leq 1,35$ .

c) Signe de  $g(x)$ .

Il résulte de l'étude précédente que l'on a  $g(x) > 0$  pour  
 $x \in ]\alpha ; +\infty[$ ;  $g(x) = 0$  pour  $x = \alpha$ ;  $g(x) < 0$  pour  $x \in ]0, \alpha[$

2° a) Etude des limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .

$$\text{On a: } f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \ln x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ donc: } \lim_{0^+} f = +\infty$$

$$* f(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \text{ donc } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

b) Sens de variation de  $f$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée

$$f'(x) = \frac{\left(2x - \frac{1}{x}\right) \cdot x - x^2 - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

est du signe de  $g(x)$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

**Remarque :**

$$g(\alpha) = 0 \text{ donc } \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$$

$$\text{D'où } f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha} \text{ et en prenant } \alpha = 1,32 \text{ donc : } f(\alpha) \approx 1,88.$$

3° a) La droite  $(\Delta)$ , d'équation  $y = x$ , est asymptote à  $(C)$ .

En effet, on a :

$$f(x) - x = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$$

ce qui signifie précisément que la courbe  $(C)$  représentative de  $f$  admet la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  comme asymptote quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

b) Position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

Les points d'intersection de  $(C)$  et  $(\Delta)$  sont les points de coordonnées  $(x, y)$  solutions du système :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 1 - \ln x = 0 \end{cases}$$

d'où  $x = e$ . Par suite la courbe  $(C)$  et la droite  $(\Delta)$  se coupent en un point unique le point  $B(e, e)$ .

Enfin, la position de  $(C)$  et

$(\Delta)$  est donnée par l'étude du signe de  $f(x) - x$ ; or on a

$$f(x) - x = \frac{1 - \ln x}{x} \text{ est du signe de } 1 - \ln x$$

on obtient donc les résultats suivants :

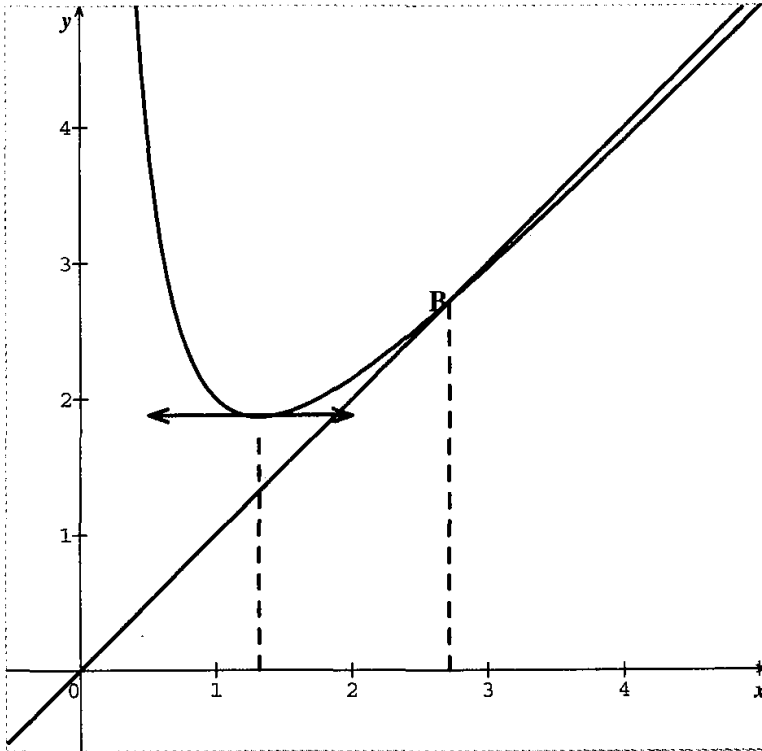
\* si  $x > e$  :  $1 - \ln x < 0$  et  $(C)$  est au-dessous de  $(\Delta)$ ;

\* si  $0 < x < e$  :  $1 - \ln x > 0$  et  $(C)$  est au-dessus de  $(\Delta)$ .

Construction de (C) et ( $\Delta$ ).

La courbe (C) admet ( $\Delta$ ) et l'axe des y comme asymptotes ; de plus, elle coupe ( $\Delta$ ) en B(e, e) et la tangente en B a (C) a pour

coefficient directeur :  $f'(e) = \frac{e^2 - 1}{e^2} \approx 0,86$



### Exercice 3

1-)  $\text{cov}(x; y) = -3.4$

$\sigma(x) = 1.41$  ;  $\sigma(y) = 2.42$  ;  $r = -0.995$  ; D :  $y = -1.7x + 52.7$

2-) Le mois de décembre est de rang 12 donc le nombre des prises du sang est  $y = -1.7x12 + 52.7$  on prend  $y = 33$

### Exercice 4

Question	1	2	3	4	5	6
Réponse	F	V	F	F	F	V

## Devoir de synthèse N°2(1)

**Exercice 1:** Pour chacune des questions choisir la réponse exacte.

1-Pour tout réel  $x$  non nul ;  $\ln(x^4) =$

(a)  $4\ln(x)$ ; (b)  $2\ln(x^2)$  ; (c)  $\frac{1}{4}\ln(x)$

2-L'équation :  $\ln^2(x) - 3\ln x + 2 = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$

(a) Deux solutions ; (b) Une seule solution ; (c) Aucune solution

3-Le système : 
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 6 \\ -3x + 4y + 6z = 7 \\ 2x + y - z = -2 \end{cases}$$
 admet dans  $\mathbb{R}^3$  :

(a) Une solution unique ; (b) Une infinité des solution ; (c) Aucune solution

4-Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D$  symétrique par rapport à  $a$ . Le point  $\Omega(a ; b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  si :

(a)  $f(2a + x) - f(x) = b$ ; (b)  $f(a - x) = f(a + x)$  ; (c)  $f(x+a) + f(a-x) = 2b$

**Exercice 2 :** Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1-a) Calculer le déterminant de  $M$

b) Déduire que  $M$  est inversible

2-Montrer que :  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

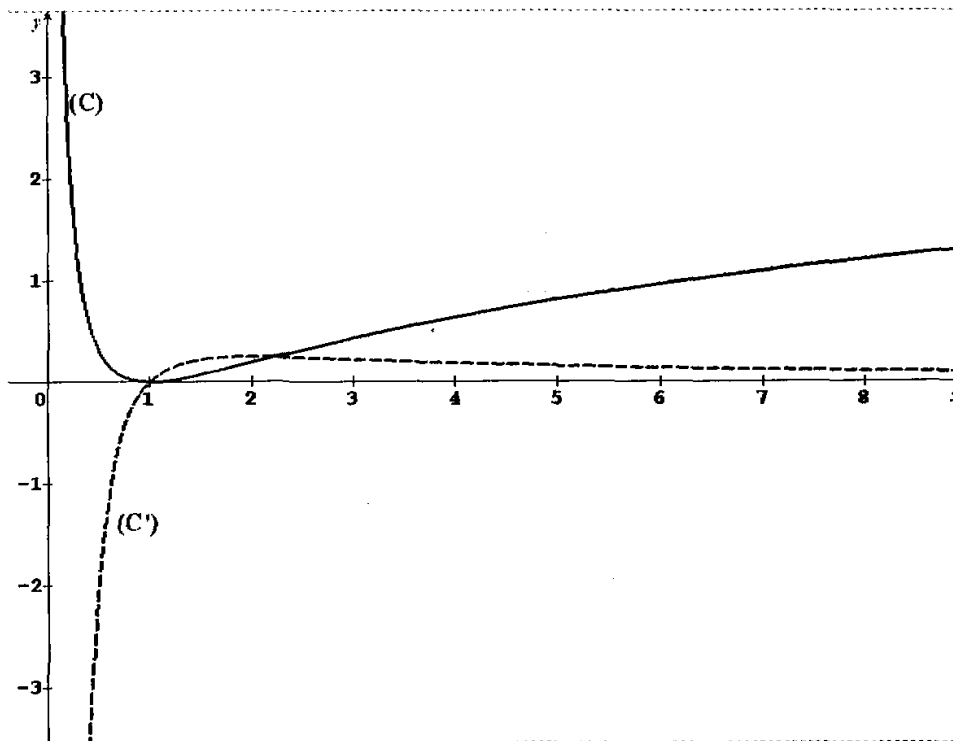
3-Résoudre alors le système : 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

**Exercice 3 :** Dans la figure ci-dessous on a représenté une fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$ .

1-Déterminer la courbe de  $f$ .

2-a) Déterminer l'ensemble de définition  $E$  de  $f$ .

b) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition



3-On suppose que  $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$  pour tout  $x > 0$ .

a) Calculer  $f'(x)$  ; puis montrer que  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$  pour tout  $x \geq 1$ .

b) Montrer alors que :  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x - 1)$  pour tout  $x \geq 1$ .

c) Calculer la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter le résultat.

d) Montrer que le point  $I(2 ; f(2))$  est un point d'inflexion.

e) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe de  $f$  en I.

**Exercice 4 :** Le tableau ci-dessous donne une estimation du montant des achats en ligne des ménages français, en millions d'euros, de 1998 à 2004.

Année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année: $x_i$	0	1	2	3	4	5	6
Montant	75	260	820	1650	2300	4000	5300

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses, 2 cm pour 1 000 millions d'euros sur l'axe des ordonnées).
2. Dans cette question, les calculs, effectués à la machine, ne seront pas justifiés et seront arrondis à l'unité.
  - a) Donner une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.
  - b) Représenter cette droite dans le repère précédent.
3. On propose un deuxième ajustement de cette série statistique par la fonction f définie, pour tout réel positif x, par :

$$f(x) = 130.x^2 + 100.x + 68.$$

- a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)							

- b) Construire la courbe représentative de la fonction f dans le repère précédent.
4. Le montant des achats en ligne en 2005 a été de 7 700 millions d'euros. Lequel de ces deux ajustements vous paraît-il le plus conforme à la réalité ? Justifier votre réponse.

## Corrigé

### Exercice 1

Question	1	2	3	4
Réponse	b	a	a	c

### Exercice 2

Soit M la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1-a) Calculer le déterminant de M

$$\det \left( \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \right) = -1$$

b) Dédurre que M est inversible :  $\det(M) \neq 0$  donc M est inversible

2-Montrons que :  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

3-Résolution du système : 
$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

On a : 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$S_{\mathbb{R}^3} = \{(2; 3; 4)\}$$

### Exercice 3

1-La courbe (C) est celle d'une fonction positif donc sa primitive est une fonction croissante sur son domaine ; or la courbe (C') est celle d'une fonction décroissante sur  $]2; +\infty[$ . La courbe (C') est située au dessous de l'axe des abscisses sur  $]0; 1]$  donc toute primitive de la fonction représentée par (C') est décroissante sur  $]0; 1]$  ; donc la courbe de (C) est celle de f.

2-a) L'ensemble de définition de f  $E = ]0; +\infty[$ .

b) f admet la même limite aux bornes de son ensemble cette limite est :  $+\infty$ .

3-a)  $f(x) = \frac{1}{x} - 1 + \ln x$  pour tout  $x > 0$ .

$f$  est dérivable sur  $E$  et  $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$ .

$$\frac{x-1}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2 + 2x - 2}{2x^2}.$$

Donc  $f'(x) - \frac{1}{2}$  a le même signe que :  $-x^2 + 2x - 2$  ce trinôme a pour

discriminant  $(-4)$  donc  $-x^2 + 2x - 2 < 0$  donc  $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

pour tout  $x \geq 1$ .

b) Le théorème des inégalités des accroissements finies appliqué à la fonction  $f$  nous affirme que :

$$0 \leq f(x) - f(1) \leq \frac{1}{2}(x-1) \text{ or } f(1) = 0 \text{ donc } 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}(x-1)$$

c) On a :  $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$  chacun des trois termes du second terme

de l'égalité tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ; donc  $\frac{f(x)}{x}$  tend vers 0

en  $+\infty$ . Donc la courbe  $(C)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$ .

$$d) f''(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{x-2x+2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}; f''(x) = 0 \text{ lorsque } x = 2 \text{ donc le}$$

point  $I(2; f(2))$  est un point d'inflexion de la courbe  $(C)$ .

$$e) f'(2) = \frac{1}{4}; f(2) = \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ donc } (T): y = \frac{1}{4}(x-2) + \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } (T): y = \frac{1}{4}x + \ln 2 - 1$$

#### Exercice 4

1) Voir figure ci dessous

2)  $\text{Cov}(X; Y) = 3519,29$  ; le coefficient de corrélation linéaire

$r = 0,966$  :  $r$  est fort donc une ajustement linéaire satisfaisante est

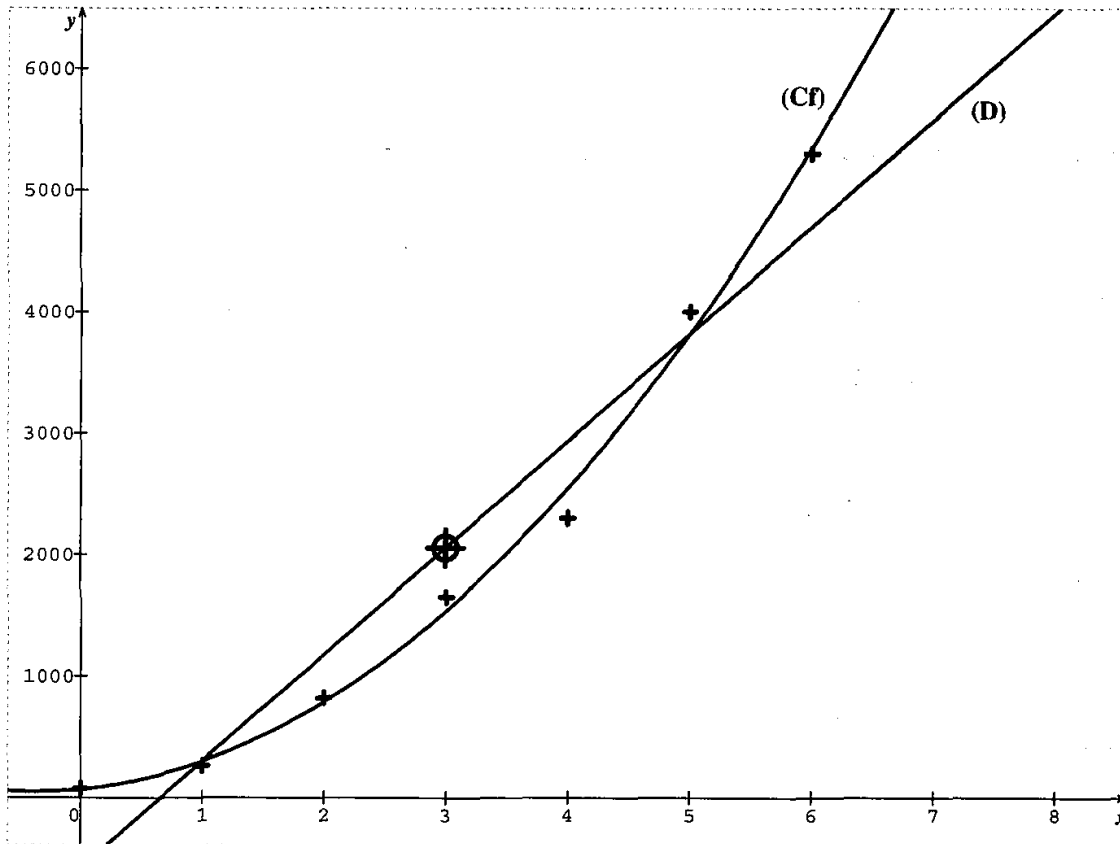
justifiée. La droite de régression de  $y$  en  $x$  est :  $(D) : 879,82.x - 581,61$

3. On propose un deuxième ajustement de cette série statistique par la fonction  $f$  définie, pour tout réel positif  $x$ , par :  $f(x) = 130.x^2 + 100.x + 68$ .

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	68	298	788	1538	2548	3818	5348

b) Voir figure ci-dessous.



4. Le montant des achats en ligne en 2005 a été de 7 700 millions d'euros. Lequel de ces deux ajustements vous paraît-il le plus conforme à la réalité ? Justifier votre réponse.

L'année 2005 est du rang 7 : pour le premier ajustement : le montant des achats est :  $879,82 \times 7 - 581,61 = 5577,13$  millions d'euros

pour le deuxième ajustement : le montant des achats est :  $130 \times 49 + 700 + 68 = 7138$  millions d'euros

7138 est plus proche à 7700 que 5577.13 donc le second ajustement est le plus conforme à la réalité.

## Devoir de synthèse N°2 (2)

**Exercice 1:** Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1-Calculer le déterminant de  $M$

2-a) Montrer que  $M$  est inversible et que  $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$

b) En déduire la solution commune aux trois équations:  $3x + z = 6$  ;

$3x + 2y = 6$  et  $x + y + z = 4$ .

### Exercice 2

1- Soit  $g$  la fonction définie par:  $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*_+$ .

a) Etudier les variations de  $g$ .

b) Calculer  $g(1)$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur son domaine.

2- Soit  $f(x) = 2 - x + \frac{\ln(x)}{x}$  et  $(C)$  sa courbe dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*_+$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$

3- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $a$  et  $b$  et que:

$$0 < a < 1 \text{ et } 2 < b < 2,5.$$

4-a) Montrer que la droite  $(D): y = -x + 2$  est une asymptote à  $(C)$ .

b) Etudier la position de  $(C)$  et  $(D)$  et Tracer  $(C)$  et  $(D)$ .

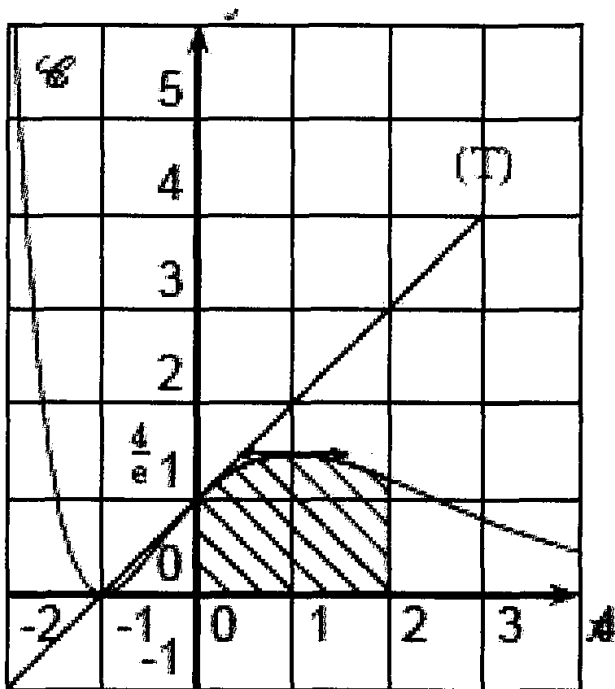
5- Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*_+$  qui s'annule en 1.

**Exercice 3**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Sur le graphique ci-dessous, la courbe (C) représente une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La droite (T) est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.

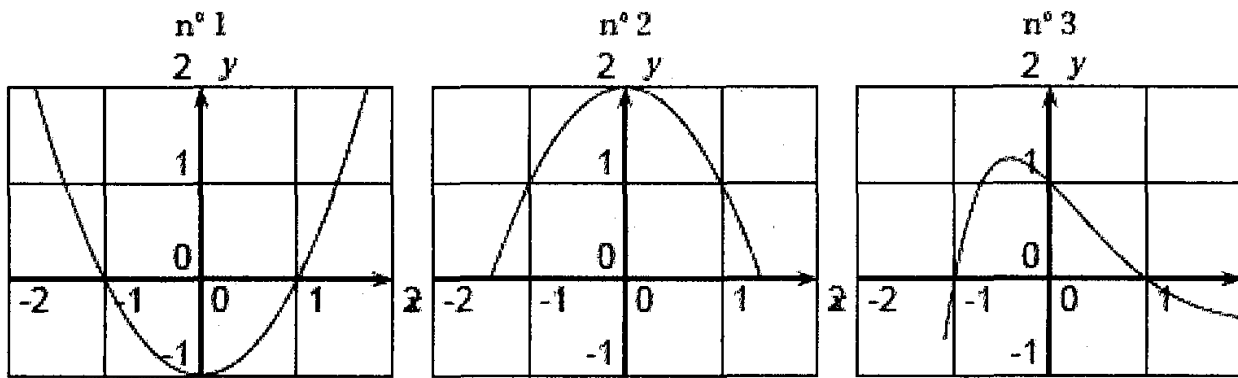
1. À partir du graphique, reproduire et compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
f(x)			
f'(x)			



Justifier les valeurs de  $f'(-1)$  et  $f'(0)$ .

2. La fonction  $f$  a pour dérivée une fonction  $f'$  dont la courbe est l'une des trois suivantes. Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.



3. Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de la partie hachurée ,  
 exprimée en unités d'aire, est un nombre compris entre 2 et  $\frac{8}{e}$ .

#### Exercice 4

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la

Clinique	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$	$C_8$	$C_9$	$C_{10}$	$C_{11}$
Nombre lits $X$	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes $Y$	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  correspondant à cette série statistique. Unités graphiques : en abscisse : 1 cm pour 10 lits ; en ordonnée : 1 cm pour 20 postes.

2. Calculer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage et le placer sur le graphique.

3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $r$ . Un ajustement affine est-il justifié ?

4. Déterminer une équation de la droite de régression  $D$  de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. Tracer la droite  $D$  sur le graphique.

(Marquer les points utilisés pour tracer  $D$ )

5. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul, le nombre de postes de personnel non médical ? Illustrer sur le graphique

### Corrigé

**Exercice 1 :** Soit M la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$1) \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 7$$

2)  $\text{Dét}(M) = 7$  donc M est inversible et

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

b) Solution commune au trois équations :  $3x + z = 6$  ;  $3x + 2y = 6$  et  $x + y + z = 4$ .

Soit  $(x, y, z)$  une solution commune des trois équations. Les réels  $x$  ;  $y$

et  $z$  vérifient le système (S) :  $\begin{cases} 3x + z = 6 \\ 3x + 2y = 6 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$  équivalent à :  $M \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\text{donc : } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

**Exercice 2**

1- Soit  $g$  la fonction définie par:  $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*_+$ .

a) Etude des variations de  $g$ .

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*_+$  et  $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^*_+$ .

b) Calculer  $g(1)$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur son domaine.

$g(1) = 0$ ;  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^*_+$  donc :

$g(x) < 0$ , pour tout  $x \in ]0; 1[$  et  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in ]1; +\infty[$

2- Soit  $f(x) = 2 - x + \frac{\ln(x)}{x}$  et (C) sa courbe dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Montrer que  $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$  pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*_+$ .

$f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*_+$  (somme de deux fonctions dérivables). et pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = -1 + \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

b)

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

3- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $a$  et  $b$  et que:

$$0 < a < 1 \text{ et } 2 < b < 2,5.$$

$f$  est continue dérivable sur  $\mathbb{R}^*_+$ . Le signe de  $f'(x)$  dépend du signe de  $g(x)$ .

Or on a :  $g(x) < 0$ , pour tout  $x \in ]0; 1[$  et  $g(x) > 0$  pour tout  $x \in ]1; +\infty[$

\*f est continue, strictement croissante sur  $]0 ; 1[$  et

$f(]0 ; 1[) = ]-\infty ; 1[$  : f réalise donc une bijection et la solution  $f(x) = 0$  admet une solution unique a dans  $]0 ; 1[$ .

\* f est continue, strictement croissante sur  $]1 ; +\infty[$  et

$f(]1 ; +\infty[) = ]-\infty ; 1[$  : f réalise donc une bijection et la solution  $f(x) = 0$  admet une solution unique b dans  $]1 ; +\infty[$  ;  $f(2).f(2.5) < 0$  donc le théorème des valeurs intermédiaires nous affirme que :

$$2 < b < 2.5$$

4-a) Montrer que la droite (D): $y = -x + 2$  est une asymptote à (C).

$f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$  lorsque x tend vers plus l'infinie donc la droite

(D): $y = -x + 2$  est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$

b) Etudier la position de (C) et (D) et Tracer (C) et (D).

$$f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$	-	0	+
Position de (C) par rapport à (D)	(C) est au dessous de (D)	(C) est au dessus de (D)	

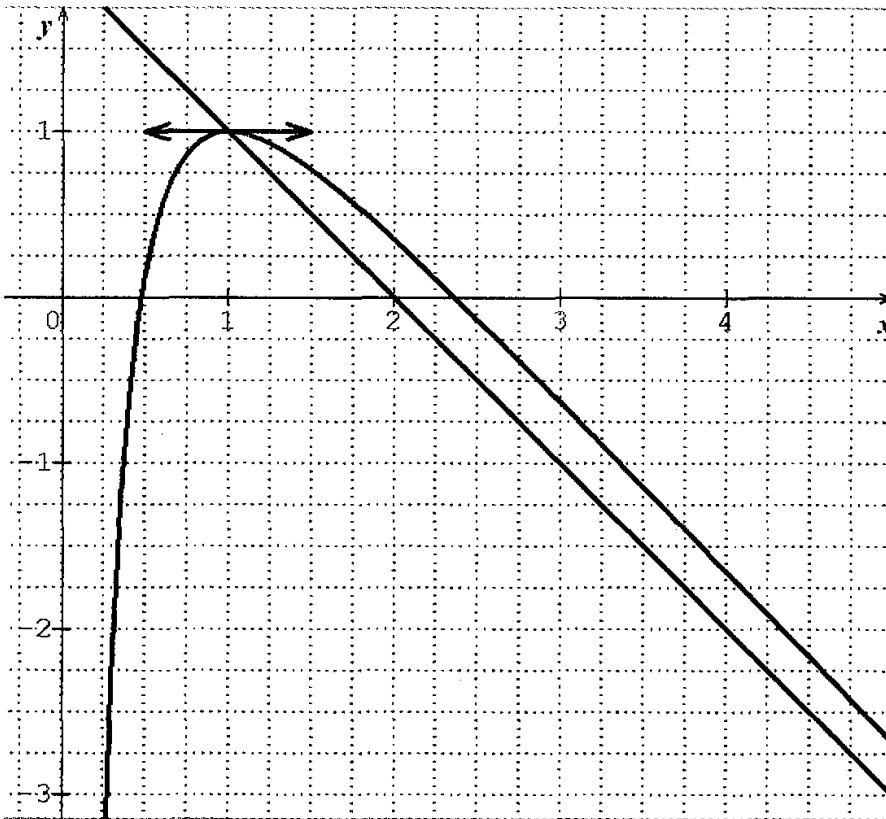
b) Courbe voir figure si dessous :

5) Une primitive de f est la fonction F définie par :

$F(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\ln^2(x) + k$ , où k est un réel la fonction f est définie

par la condition initiale  $F(1) = 0$  d'où :  $2 - 0.5 + k = 0$  donc  $k = -\frac{3}{2}$  ; par

suite  $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln^2(x)$ .



**Exercice 3** Le plan est rapporté à un repère orthonormé. Sur le graphique ci-dessous, la courbe (C) représente une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . La droite (T) est la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0.

### 1. Lecture graphique

$x$	-1	0	1
$f(x)$	0	1	$\frac{4}{e}$
$f'(x)$	0	1	0

Justifier les valeurs de  $f'(-1)$  et  $f'(0)$ .

Par hypothèse  $f$  est dérivable en  $(-1)$ . Puisque  $f$  est décroissante sur

$]-2 ; -1]$  donc  $f'_g(-1) \leq 0$  ;  $f$  est croissante sur  $[-1 ; 0]$  donc

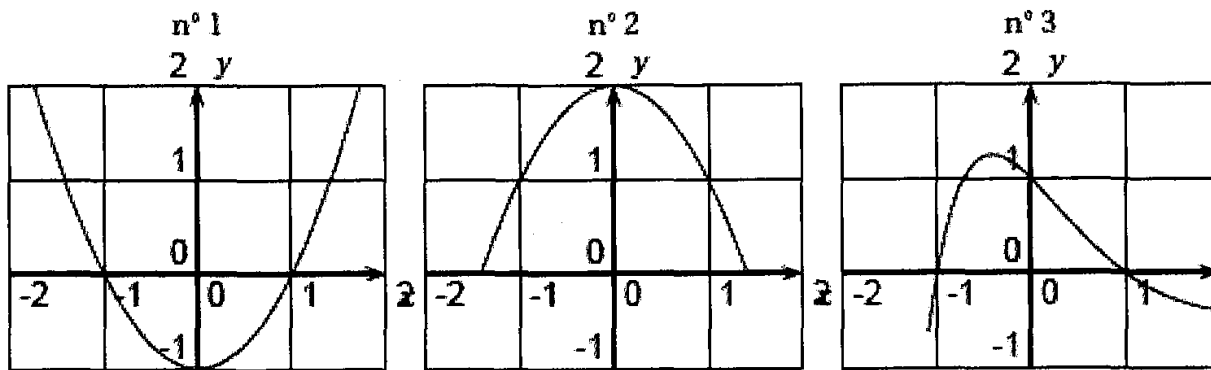
$f'_d(-1) \geq 0$  or  $f'_g(-1) = f'_d(-1)$  or ces deux valeurs ont des signes opposés

donc :  $f'_g(-1) = f'_d(-1) = f'(-1) = 0$

un vecteur directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc  $f'(0) = 1$

2. La fonction  $f$  a pour dérivée une fonction  $f'$  dont la courbe est l'une des trois suivantes. Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.



La courbe n°3 est celle de la fonction  $f'$  car les autres courbes ne conviennent pas :

Pour la première courbe la fonction correspondant est décroissante sur  $[-1 ; 1]$  ce qui est en désaccord avec la fonction  $f$ . La courbe n°2  $f(-1) \neq 0$  donc il ne convient pas.

3. Expliquer graphiquement pourquoi l'aire de la partie hachurée, exprimée en unités d'aire, est un nombre compris entre 2 et  $\frac{8}{e}$ .

l'aire de la partie hachurée, exprimée en unités d'aire, comprise entre les aires des rectangles :  $R_1$  est le rectangle de longueur 2 et de largeur 1 et le rectangle  $R_2$  de longueur 2 et de largeur  $\frac{4}{e}$ . par suite elle est comprise entre 2 et  $\frac{8}{e}$ .

#### Exercice 4

1-Voir figure ci dessous

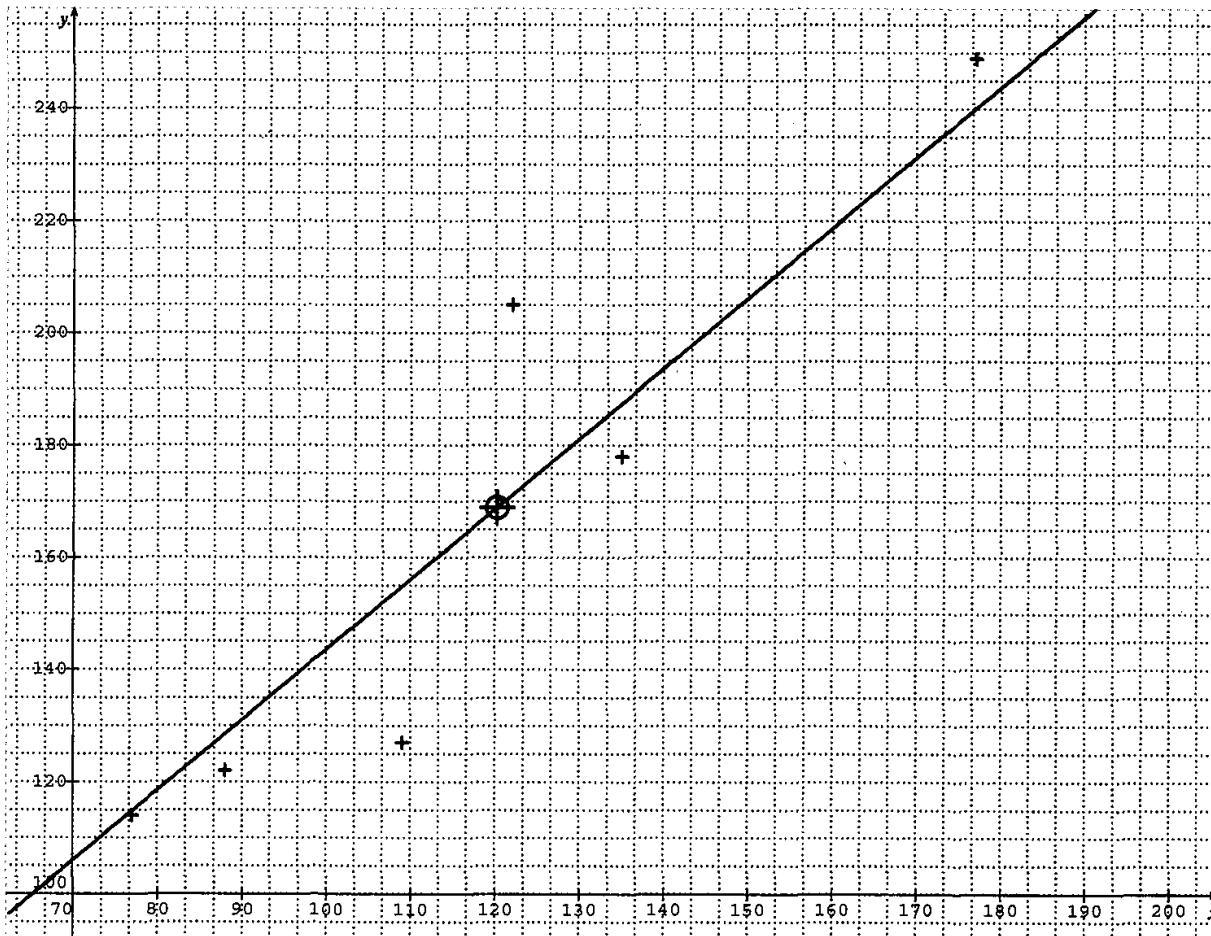
2-le point G a pour coordonnées (126.09 ; 175.545 )

$\text{Cov}(X;Y) = 1258.77$  ;  $\sigma(X) = 32.2334$  ;  $\sigma(Y) = 42.6708$

le coefficient de corrélation linéaire  $r = 0,9152$   $r < 0,95$  donc il n'y a pas d'ajustement affine satisfaisant.

4-D :  $y = 1.21. x + 22.78$

5-si  $x = 25$  alors :  $y = 53$



### Devoir de synthèse N°2 (3 )

#### **Exercice 1 : Choisir la bonne réponse**

1--Pour tout  $x$  non nul ;  $\ln(x^2) =$

(a)  $2\ln(x)$  ; (b)  $2\ln|x|$  ; (c)  $\ln^2(x)$

2- L'équation:  $\ln^2(x) + 2\ln(x) - 3 = 0$  avec  $x > 0$  admet dans  $\mathbb{R}$

(a) une seule solution ; (b) Deux solutions distincts ; (c) Aucune solution

3- Une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}^*_+$  par

(a)  $F(x) = x \ln x - x$  ; (b)  $F(x) = x \ln x + x$  ; (c)  $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2(x)$

4- Pour tous couple de réel  $(x ; y)$  avec  $x.y > 0$  , on a  $\ln(x.y) =$

(a)  $\ln x + \ln y$  ; (b)  $\ln x - \ln y$  ; (c)  $\ln|x| + \ln|y|$

### Exercice 2

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*_+$  dont le tableau de variation est le suivant :

x	0	1	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	-1	0

1-Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$ .

2-Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ce résultat.

3-Donner une allure approximative de la courbe (C) de  $f$  dans un repère orthonormé.

4-a) Soit  $F$  une primitive de  $f$ . L'une des courbes suivante est celle de  $F$  ; laquelle ?

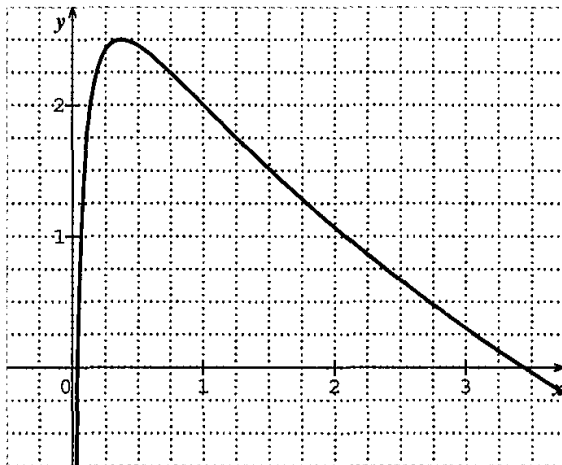


Figure 1

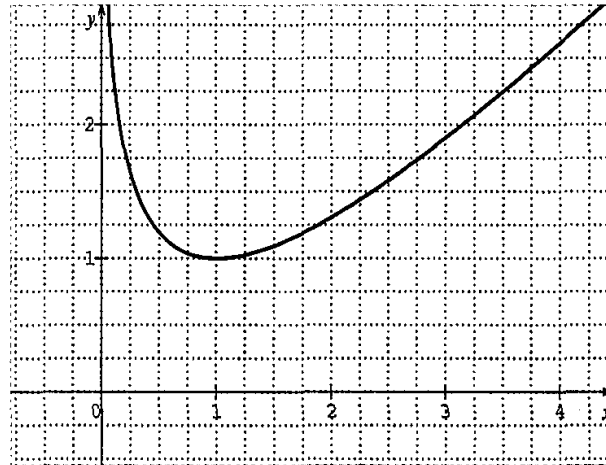


Figure 2

b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

### Exercice 3

Le lycée Salah Eddine a décidé d'organiser un voyage en Australie pour assister aux Jeux olympiques de l'an 2000 qui se dérouleront A Sydney.

Pour réduire le coût, élèves et adultes cherchent à organiser des

activités qui rapportent de l'argent. Le club poésie décide d'éditer et de vendre un recueil de textes écrits par les élèves. Pour cela il commence par réaliser une « étude de marché » auprès de la population du lycée, afin de savoir à quel prix vendre ce recueil pour avoir la plus importante rentrée d'argent.

Les résultats de cette étude figurent dans le tableau ci-dessous

$x_i$	15	20	25	30	35	40	45	50
$y_i$	1200	900	800	550	500	350	300	100

$x_i$  est le prix de vente en RS d'un recueil,  $y_i$  est le nombre de personnes prêtes à acheter le recueil au prix  $x_i$ .

1. Construire le nuage de points  $M_i(x_i ; y_i)$  dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra pour origine le point de coordonnées (10 ; 0), 2 cm pour 5- francs en abscisse et 1 cm pour 100 personnes en ordonnée. Déterminer les coordonnées du point moyen G et le placer sur le graphique.

2. Donner une équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi à  $10^{-2}$  près et l'ordonnée à l'origine à l'unité près. Tracer cette droite sur le graphique précédent

3. a. Calculer alors, en fonction du prix de vente  $x$ , la somme que peut encaisser le club poésie si la réalité est conforme à la prévision. On note  $S(x)$  cette somme.

b. Etudier les variations de cette fonction  $S$  et en déduire le prix  $x_0$  pour lequel cette somme atteint son maximum ( $x_0$  sera arrondie au franc le plus proche). Quelle sera cette somme?

#### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = x \ln x - x$ , pour  $x > 0$

1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.

2) Etudier les variations de  $f$ . Puis déterminer le signe de  $f(x)$ .

II- Soit  $g$  la fonction définie par: 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{2} \left( \ln x - \frac{3}{2} \right) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1-a) Montrer que  $g$  est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0. Puis interpréter graphiquement le résultat.

2- Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau.

3-a) Ecrire une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\Gamma$  de  $g$  au point  $A$  d'abscisse 1

b) Construire  $(T)$ ,  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  [En admettant que  $(T)$  est au dessous de  $\Gamma$  lorsque  $x \in ]0 ; 1]$

4-a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[e, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

b) Construire la courbe  $\Gamma'$  de  $g^{-1}$ .

### Corrigé

#### Exercice 1

Questions	1	2	3	4
Réponses	b	b	a	c

#### Exercice 2

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^*_+$  dont le tableau de variation est le suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	0

1- Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$ .

D'après le tableau de variation de  $f$  on a :  $f(x) < 0$  si  $x > 1$  donc

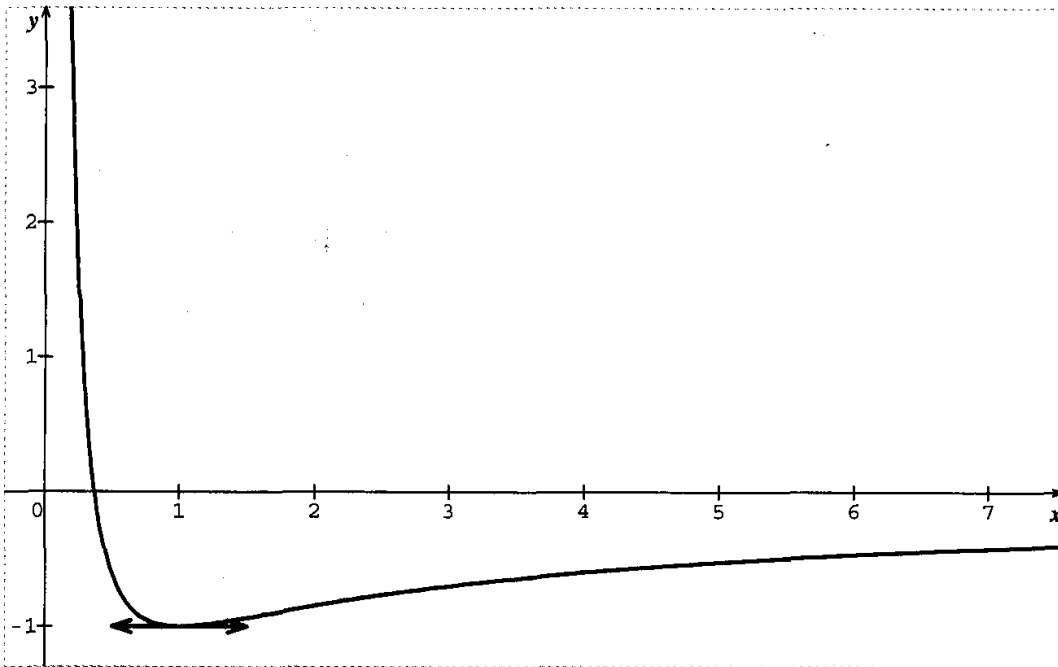
l'équation  $f(x) = 0$  n'a aucune solution dans l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

Sur l'intervalle  $]0 ; 1]$   $f$  est continue et strictement décroissante et

$f(] 0 ; 1 [) = [- 1 ; + \infty [$  [ donc  $f$  réalise une bijection de  $] 0 ; 1 [$  sur  $[- 1 ; + \infty [$  et par suite l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$ .

2-Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$ ? Interpréter graphiquement ce résultat :  $\lim_{+\infty} f = 0$  : Donc la courbe  $(C)$  admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de  $+\infty$  :

3-Donner une allure approximative de la courbe  $(C)$  de  $f$  dans un repère orthonormé.



4-a) Soit  $F$  une primitive de  $f$ . L'une des courbes suivante est celle de  $F$  ; laquelle ?

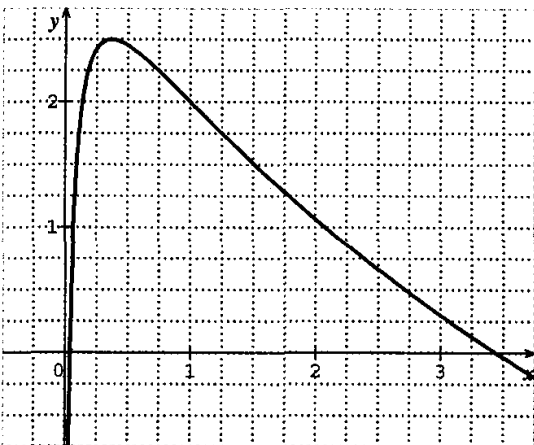


Figure 1

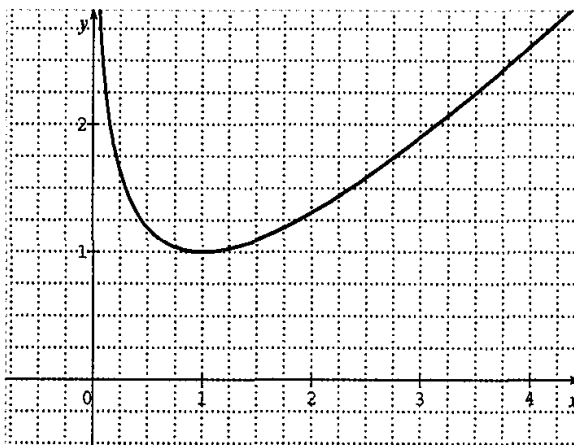


Figure 2

La courbe de la figure 2 ne convient pas car F est strictement décroissante sur  $[1 ; + \infty [$  par contre la figure 2 est celle d'une fonction strictement croissante sur  $[1 ; + \infty [$ .

b) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$$

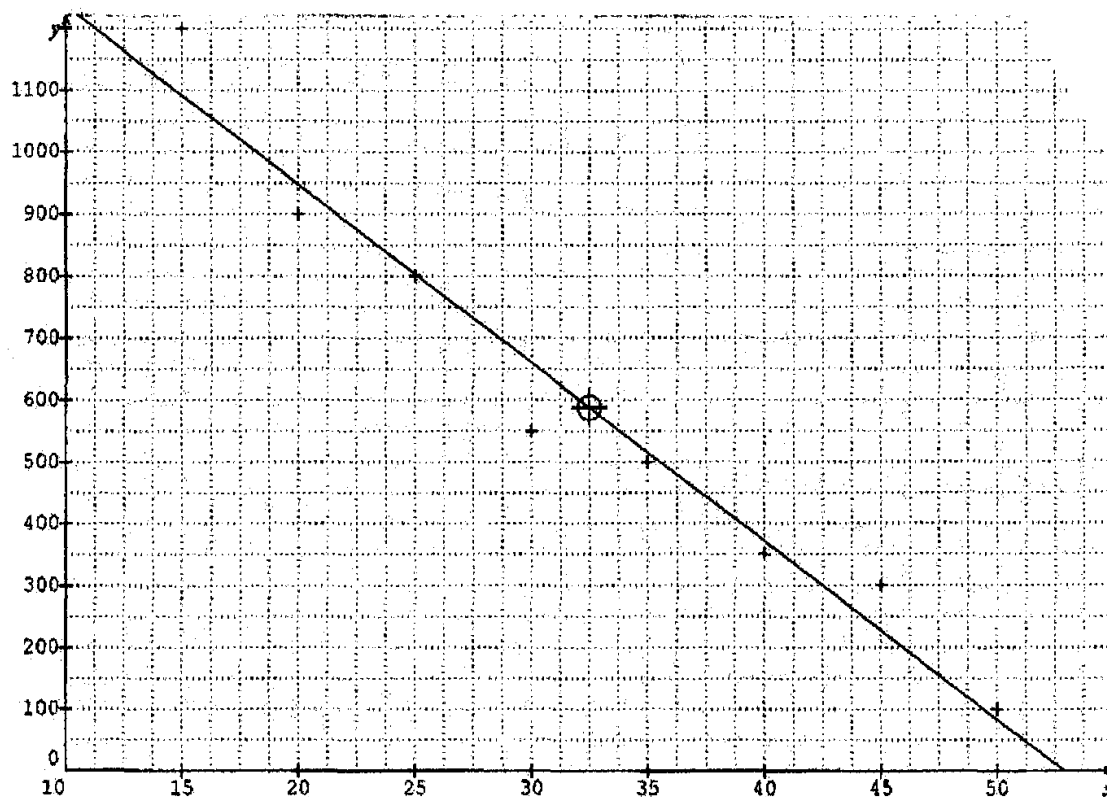
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1}$  est par définition le nombre dérivé de F en 1

c'est à dire :  $f'(1) = -1$

### Exercice 3

1-Nuage des points (voir figure ci-dessous)

Le point moyen G a pour coordonnées (32.5 ; 587.5 )



$$2\text{-cov}(x; y) = -3781.5 ; r = -0.981 ;$$

$$\sigma(x) = 11.456 \quad \sigma(y) = 336.108 \text{ d'où } y = -28.81 x + 1523.81$$

Remarque :  $|r| > 0.95$  donc il s'agit d'une forte corrélation linéaire entre  $x$  et  $y$  se qui affirme qu'un ajustement affine est justifié.

3-a)  $S(x) = y \cdot x = -28.81 x^2 + 1523.81 x$

b)  $S'(x) = -57.62x + 1523.81$  donc  $S$  est maximal lorsque  $x$  prend la valeur  $x_0 = 26.44$ . On prend  $x_0 = 26$  donc  $S$  est très proche de : 20149 RS

#### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = x \ln x - x$ , pour  $x > 0$

1) Calcul des limites de  $f$  aux bornes de son domaine de définition.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ donc } \lim_{0^+} f = 0$$

$f(x) = x(\ln x - 1)$  donc la limite de  $f$  en  $+\infty$  est  $+\infty$ .

2) Etude de variation de  $f$ ; et signe de  $f(x)$ .

$f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f'(x) = \ln x$

$x$	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	0		+
$f(x)$	0		0	$+\infty$

Signe de  $f(x)$

Si  $x < e$  alors  $f(x) < 0$ ;  $f(e) = 0$ ; si  $x > e$  alors  $f(x) > 0$

II- Soit  $g$  la fonction définie par: 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{3}{2}) & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1-a) Montrons que  $g$  est continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = 0 \text{ donc } \lim_{0^+} g = 0 = g(0)$$

donc  $g$  est continue à droite en 0

b) Dérivabilité de  $g$  en  $0$ . Et interprétation graphiquement du résultat.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{2} \ln x - \frac{3}{4}x \right) = 0$$

donc  $g$  est dérivable à droite en  $0$ . La courbe  $(\Gamma)$  de  $g$  admet une demi-tangente horizontale à l'origine.

2-Etude de variation de  $g$  et tableau de variation.

$g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  et  $g'(x) = x \ln x - x = f(x)$

$x$	$0$	$e$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$0$ $+$
$g(x)$	$0$	$\frac{-e^2}{4}$	$+\infty$

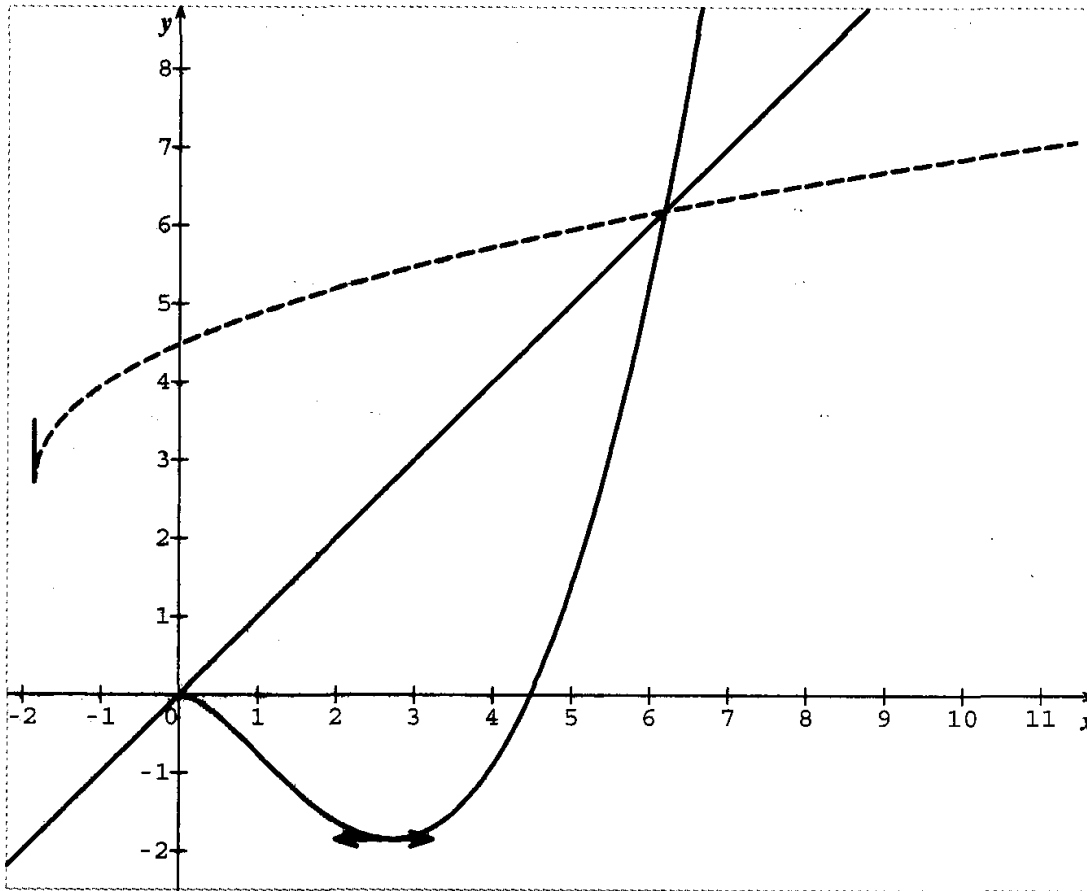
3-a) Ecrire une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\Gamma$  de  $g$  au point  $A$  d'abscisse  $1$

$g'(1) = f(1) = -1$  donc la tangente  $(T)$  au point  $A$  est

$$(T) : y = -1(x - 1) + g(1) \text{ d'où } (T) : y = -x + \frac{1}{4}.$$

b) Construire  $(T)$ ,  $\Gamma$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  [En

admettant que  $(T)$  est au dessous de  $\Gamma$  lorsque  $x \in ]0 ; 1 [$  remarquez que  $A$  est un point d'inflexion pour la courbe  $(\Gamma)$



#### 4-a) Bijection réciproque

$G$  est continue et strictement croissante sur  $[e, +\infty[$  et

$g([e, +\infty[) = [\frac{e^2}{4}; +\infty[$  donc  $g$  réalise une bijection de  $[e, +\infty[$

sur  $[\frac{e^2}{4}; +\infty[$

b) Construction de la courbe  $\Gamma'$  de  $g^{-1}$ .

la courbe  $\Gamma'$  est la symétrique de  $\Gamma$  par rapport à la droite

(D) :  $y = x$ . Voir figure

## Troisième trimestre

### I-Analyse

#### Fonctions exponentielle

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y ; e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} ; e^0 = 1,$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{\ln x} = x \quad (x > 0) ;$$

$$\ln(e^x) = x ; (e^x)^y = e^{x \cdot y}$$

$$\text{Pour } a > 0 ; a^x = e^{x \ln a}$$

#### -Limites usuelles

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$* x e^x \rightarrow 0 ; x^n e^x \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } -\infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

$$* \frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty \text{ et } \frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

$$* \frac{e^x - 1}{x} \rightarrow 1 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0$$

#### Opérations sur les dérivées

$$(u+v)' = u' + v' ; (u \cdot v)' = (u' \cdot v) + (u \cdot v') ; (u/v)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} ; (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} ; (e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} ; (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} ; (e^u)' = u' \cdot e^u$$

### 2-Calcul intégral

**Définition :** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé borné  $I$ .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels dans  $I$ . Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

On appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$  le nombre réel noté :  $\int_a^b f(t) dt$

définit par :  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

**\*Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. Alors**

$$\int_a^a f(t)dt = 0 ; \int_b^a f(t)dt = - \int_a^b f(t)dt ; \int_a^b dt = b - a$$

**\*Relation de Chasles : pour tous réels a, b et c de I :**

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

**Linéarité :** 
$$\int_a^b [ f(t) + g(t) ] dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

$$\int_a^b k.f(t)dt = k. \int_a^b f(t)dt$$

**Positivité :** Si f est continue et positive sur [a ; b] avec  $a \leq b$ , alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

**Compatibilité avec l'ordre (intégration d'une inégalité) :** Si f et g sont continues sur [a ; b] avec  $a \leq b$  et si  $f \leq g$  sur [a ; b] alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

**Inégalité triangulaire :** Si f est continue sur [a ; b] avec  $a \leq b$ , alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

**\*Si f est paire alors** 
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt$$

**\* Si f est impaire alors :** 
$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0$$

**Théorème 3 (Périodicité)**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $T$ -périodique. Alors,

$$\text{pour tout réel } a : \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^T f(t)dt$$

**Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne****Définition**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a ; b]$ .

On appelle valeur moyenne de  $f$  sur l'intervalle  $I$  le nombre réel  $\mu$

$$\text{défini par } \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \text{ On note souvent } \bar{f} \text{ au lieu de } \mu$$

**Inégalité de la moyenne :** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I = [a ; b]$ . Soit  $m$  et  $M$  des réels tels que :  $m \leq f \leq M$  ; Alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

**Intégration par parties**

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dont leurs dérivées sont continues sur  $[a ;$

$$b], \text{ alors : } \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t)dt$$

**II-Probabilité**

**Propriété 1 :** la probabilité de la réunion de deux événements est

$$\text{donnée par : } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Propriété 2 :**

la probabilité de l'événement contraire  $\bar{A}$  de  $A$  est

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \text{ En particulier, La probabilité}$$

d'un événement impossible (par exemple : "obtenir 7 en lançant un dé") est nulle :  $P(\emptyset) = 0$ .

- Si  $A \subset B$  alors  $P(A) \leq P(B)$  ("croissance" de la probabilité)
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

## 2-Probabilités conditionnelles

"A est réalisé" sachant que B l'est. On note aussi  $P(A|B)$  eu lieu de  $P_B(A)$ .

On a ainsi :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

## 3-Indépendance de deux événements

**Théorème 1** : Deux événements A et B sont P- indépendants

si et seulement si  $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

## 4-) Formule des probabilités totales

**Théorème 3** : Si des parties (non vides)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  constituent une partition d'un univers  $\Omega$  muni d'une probabilité P, alors pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^n P(A/B_k) \cdot P(B_k)$$

## V- Variable aléatoire

### 1 Espérance et écart-type d'une variable aléatoire

#### Définition

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le nombre, noté  $E(X)$ , défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

#### Théorème 5

La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

### 3) Fonction de répartition

**Définition** : Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition F associée à X est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = P(X \leq x)$

## VI- Loi de probabilité continue

### 1.2. Définition :Loi de probabilité

Soit  $f$  une densité de probabilité sur un intervalle  $I$ .

L'application  $P$  qui, à tout sous-intervalle  $[a, b]$  de  $I$  associe la quantité

$P([a, b]) = \int_a^b f(t)dt$  est appelée loi de probabilité sur  $I$ .

### 2. Variables aléatoires continues. Loi uniforme, loi exponentielle

Sont dites continues les variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle  $I$ .

#### 2.1. Définition Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit  $P$  une loi de probabilité sur un intervalle  $I$  de densité  $f$

On dit qu'une variable aléatoire  $X$ , à valeurs dans  $I$ , suit une loi de probabilité  $P$  lorsque pour tout sous intervalle  $[a, b]$  de  $I$ , on a :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)dt$$

#### 2.2. Définition Fonction de répartition

Soit  $X$  une variable aléatoire, à valeurs dans un intervalle  $I$  de la forme  $[a, b]$  (ou de la forme  $[a ; +\infty[$ ), qui suit une loi de probabilité  $P$ .

On appelle fonction de répartition de  $X$ , la fonction  $F$  définie pour tout réel  $x$  de  $I$  par :  $F(x) = (P(X \leq x) = \int_a^x f(t)dt$

Loi exponentielle : On dit qu'une variable aléatoire  $T$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\omega$  si sa densité  $f$  est  $f(t) = \omega e^{-\omega t}$

Si  $f$  est constante sur  $I$  on dit que  $T$  suit une loi uniforme

### 3-Espérance d'une variable aléatoire continue

#### Définition Espérance d'une variable aléatoire continue

Soit  $X$  une variable aléatoire continue prenant ses valeurs dans un intervalle  $I$ . On appelle espérance de  $X$  la quantité :  $E(X) = \int tf(t)dt$

## Devoir de contrôle N°3 (1)

### Exercice 1 : Choisir la réponse correcte

1- Soient A et B deux évènements d'un univers  $\Omega$  et p est une probabilité sur  $P(\Omega)$  ;  $P(A/B) =$

(a)  $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  ; (b)  $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  ; (c)  $\frac{P(A)}{P(B)}$

2- On s'intéresse aux timbres postaux à 2 dinars : 80 % d'entre eux comportent deux bandes vertes, l'une à gauche et l'autre à droite ; les 20 % restants ont une seule bande verte, 10 % parmi ceux-ci à gauche et les autres à droite.

a) La probabilité pour qu'un timbre à 2 dinars (choisi au hasard) ait une bande verte à droite est  $p_1 = 0,98$ .

Une machine détecte sur un timbre à 2 dinars une bande verte à droite.

b) La probabilité que le timbre ait deux bandes vertes est  $p_2 = \frac{4}{49}$

Sur une enveloppe, on a colle trois timbres à 2 dinars, choisis au hasard et de manière indépendante.

c) La probabilité d'avoir sur l'enveloppe un total de 5 bandes vertes est :  $p_3 = 0,128$ .

3- La limite de la fonction  $x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{x}$  lorsque x tend vers 0 est

(a)  $\frac{1}{2}$  ; (b) 2 ; (c) 0

### Exercice 2 :

Les résultats seront donnés, dans cet exercice, sous la forme d'une fraction. Un club a organisé en l'an 2000, à l'intention de ses adhérents, trois voyages différents.

Deux contrats sont proposés (à l'exclusion de toute autre possibilité)

- un contrat (A) avec l'obligation d'effectuer au plus deux voyages

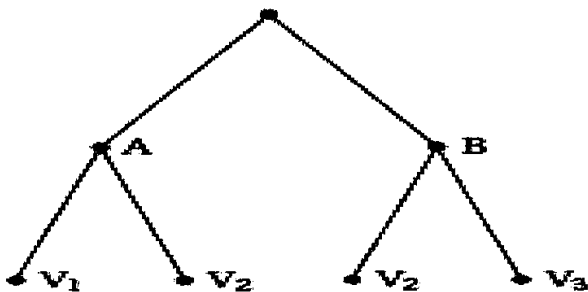
- on contrat (B) avec l'obligation d'effectuer au moins deux voyages.

1 200 membres ont participé à au moins l'un de ces trois voyages et 800 ont choisi le contrat de type (A). On choisit au hasard un des participants. On note :

- A l'évènement : « A choisi un contrat de type (A) » ;
- B l'évènement : « A choisi un contrat de type (B) » ;
- $V_1$  l'évènement : « A effectué exactement 1 voyage » ;
- $V_2$  l'évènement « A effectué exactement 2 voyages » ;
- $V_3$  l'évènement : « A effectué exactement 3 voyages » ;
- $p(E)$  la probabilité de l'évènement E ;
- $p_F(E)$  la probabilité de l'évènement E sachant que F est réalisé.

On sait de plus que  $p_A(V_1) = 0.75$ ; et  $p_{V_2}(A) = \frac{2}{3}$

Pour répondre aux questions suivantes on pourra s'aider de l'arbre ci-dessous (en le complétant au fur et à mesure)



1. a. Déterminer  $p(A)$  et  $p(B)$ .
- b. Déterminer  $p(A \cap V_1)$  et en déduire que  $p(V_1) = \frac{1}{2}$ .
- c. Déterminer  $p(A \cap V_2)$  et en déduire que  $p(V_2) = \frac{1}{4}$ .
- d. Calculer  $p(V_3)$ .
- e. Déterminer  $p_B(V_2)$ . À quoi correspond ce nombre ?
2. On répète 5 fois, de façon indépendante, le choix au hasard d'un des participants.
  - a. Déterminer la probabilité de réaliser  $V_2$  aucune fois.
  - b. Déterminer la probabilité de réaliser  $V_2$  au moins deux fois.

c. Déterminer la probabilité de réaliser  $V_2$  au plus deux fois.

### Exercice 3

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $g(x) = e^x - x - 1$ .

a. Montrer que pour tout  $x > 0$ , on a  $g'(x) > 0$ . En déduire le sens de variation de  $g$  sur  $[0, +\infty[$ .

b. Calculer  $g(0)$ . En déduire que, pour tout  $x > 0$ , on a  $g(x) > 0$ .

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par:  $h(x) = (2-x)e^x - 1$

a) Étudier la fonction  $h$  et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution et une seule  $\alpha$ ; et que l'on a :  $\alpha > 1$ .

c) Vérifier la double inégalité  $1,84 < \alpha < 1,85$ .

d) Tracer la courbe  $(C)$  de  $h$  dans un repère orthonormé.

### Exercice 4

$n$  et  $p$  désignent des entiers naturels non nul

$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n$$

1- calculer  $I_{p,0}$  et  $I_{p,1}$

2- Calculer  $I_{0,n}$  et en déduire  $I_{1,n}$

3- Établir pour  $n \geq 1$  la relation :  $I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$

4- Exprimer  $I_{p,n}$  en fonction de  $p$  et  $n$

### Corrigé

#### Exercice 1

Question	1	2	3
Réponse	b	a	b

**Exercice 2**

1. a. Probabilité des évènements A et B :  $p(A)$  et  $p(B)$ .

$$p(A) = \frac{800}{1200} = \frac{2}{3} ; \quad p(B) = 1 - p(A) = \frac{1}{3}$$

b. Probabilité des évènements  $(A \cap V_1)$  et  $V_1$  :  $p(A \cap V_1)$  et  $p(V_1)$ .

$$\text{On a : } p_A(V_1) = \frac{3}{4};$$

$$p(A \cap V_1) = p(A) \cdot p(V_1/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} ; \quad p(V_1/B) = 0 \text{ donc } p(V_1) = \frac{1}{2}$$

c. Déterminer  $p(A \cap V_2)$  et en déduire que  $p(V_2) = \frac{1}{4}$

$$p(A \cap V_2) = p(A) \cdot p(V_2/A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \text{ car : } p(V_2/A) = 1 - p(V_1/A)$$

$$p(A/V_2) = \frac{p(A \cap V_2)}{p(V_2)} = \frac{2}{3} \text{ (donnée) donc } p(V_2) = \frac{p(A \cap V_2)}{p(A/V_2)}$$

d. Calcul de  $p(V_3)$ .

$$p(V_3) = 1 - p(V_1) - p(V_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

e. Déterminons  $p_B(V_2)$ . À quoi correspond ce nombre ?

$$p(V_2) = \frac{p(B \cap V_2)}{p(B)} = \frac{p(V_2) - p(A \cap V_2)}{p(B)} = \frac{1}{4} \text{ ce nombre est}$$

le pourcentage des participants qui font 2 voyages et ont choisi le contrat B.

2. On répète 5 fois, de façon indépendante, le choix au hasard d'un des participants : Il ya deux cas qui se présentent  $V_2$  est réalisé ou  $V_2$  n'est pas réalisé. Les épreuves sont répétées de façons indépendantes donc il s'agit d'une loi binomiale de paramètre :  $n = 5$  et  $p = \frac{1}{4}$

Déterminons la probabilité de réaliser  $V_2$  aucune fois :  $C_5^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5$

b. Déterminons la probabilité de réaliser  $V_2$  au moins deux fois.

La probabilité demandée est :  $1 - p_1 - p_0 = 1 - C_5^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 - C_5^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{1}{4}$ ;

où  $p_1$  et  $p_0$  sont les probabilités des événements «  $V_2$  est réalisé une seule fois » et «  $V_2$  est réalisé aucune fois ».

c. Déterminer la probabilité de réaliser  $V_2$  au plus deux fois.

La probabilité demandée est

$$p_2 + p_1 + p_0 = C_5^0 \left(\frac{3}{4}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \frac{1}{4} + C_5^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

### Exercice 3

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $g(x) = e^x - x - 1$ .

Montrons que pour tout  $x > 0$  on a :  $g'(x) > 0$

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions dérivables et

l'on a :  $g'(x) = e^x - 1$ .

La fonction  $x \rightarrow e^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$

donc pour  $x > 0$  ;  $e^x - 1 > 0$ .

Conclusion : Pour  $x > 0$  on a  $g'(x) > 0$

Sens de variation de  $g$  sur  $[0, +\infty[$

Sur  $[0, +\infty[$  nous avons  $g'(x) > 0$  donc  $g$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

b) Etudions le signe de  $g(x)$

$$g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$$

Sur  $[0, +\infty[$   $g$  est strictement croissante et  $g(0) = 0$  ; nous en

déduisons que  $g(x)$  est positif ou nul pour tout  $x \geq 0$

2. Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $h(x) = (2 - x)e^x - 1$ .

Etudions les variations de  $h$

$h$  est dérivable, comme somme et produit de fonctions dérivables

sur  $[0, +\infty[$  et l'on a :  $h'(x) = (2 - x)e^x - e^x = (1 - x)e^x$ .

$e^x$  étant toujours positif donc  $h'(x)$  a le signe de  $(1 - x)$ .

Etudions la limite de  $h$  en  $+\infty$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x e^x = +\infty$

Il en résulte que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$  d'après les théorèmes sur les limites.

Tableau de variation de h :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	1	$e - 1$	$-\infty$

### Résolution de l'équation $h(x) = 0$

Sur l'intervalle  $[0, 1]$  h est croissante et  $h(0) = 1$  donne  $h(x)$  est supérieur à 1. L'équation  $h(x) = 0$  n'a pas de solution sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

Sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  h est strictement décroissante, h est continue, comme produit de fonctions continues

$h(]1, +\infty[ = ]-\infty ; e-1[$ ; h est alors est une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]-\infty ; e - 1 [$ .

Or  $e - 1 > 0$  donc  $0 \in ]-\infty ; e - 1 [$ , il existe alors un unique  $\alpha \in ]1 ; +\infty[$  tel que  $h(\alpha) = 0$ .

### Conclusion :

L'équation  $h(x) = 0$  admet une solution et une seule  $\alpha$  sur  $[0, +\infty[$  et  $\alpha > 1$

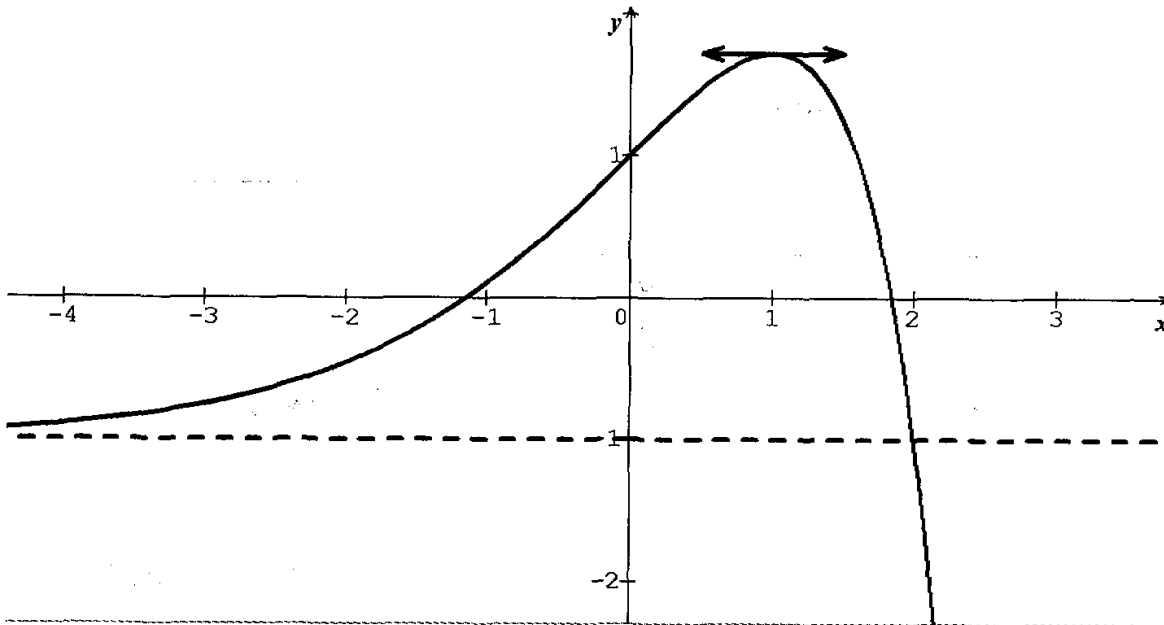
c. Nous avons :  $h(1,84) \approx 0,007$  et  $h(1,85) \approx -0,046$

donc :  $h(1,85) < 0 = h(\alpha) < h(1,84)$ .

h étant décroissante sur  $]1, +\infty[$  nous en déduisons que :

$1,84 < \alpha < 1,85 ; \alpha \in ]1,84 ; 1,85 [$

d)

**Exercise 4**

$$I_{(p,n)} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$$

$$1) I_{(p,0)} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

$$I_{(p,1)} = \int_0^1 x^p (1-x) dx = \int_0^1 x^p dx - \int_0^1 x^{p+1} dx$$

$$I_{(p,1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2} = \frac{1}{(p+1)(p+2)}$$

$$2) I_{(0,n)} = \int_0^1 (1-x)^n dx = \left[ -\frac{1}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 \Rightarrow$$

$$I_{(0,n)} = \frac{1}{n+1}$$

$$I_{(1,n)} = \int_0^1 x(1-x)^n dx = \left[ -\frac{x}{n+1} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 (1-x)^{n+1} dx$$

$$I_{(1,n)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$3- I_{(p,n)} = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$$

$$\text{On pose : } U'(x) = x^p \Rightarrow U(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1}$$

$$V(x) = (1-x)^n \Rightarrow V'(x) = -n(1-x)^{n-1}$$

$$\text{D'où } I_{(p,n)} = \left[ -\frac{1}{p+1} x^{p+1} (1-x)^n \right]_0^1 + \frac{n}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{n-1} dx$$

$$I_{(p,n)} = \frac{n}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{n}{p+1} I_{(p+1,n-1)}$$

4-d'après 3.

$$I_{(p,n)} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$$

$$I_{p+1,n-1} = \frac{n-1}{p+2} I_{p+2,n-2}$$

.

.

.

$$I_{p+(n-1),1} = \frac{1}{p+n} I_{p+n,0}$$

$$I_{p+n,0} = \frac{1}{p+n+1}$$

On multiplie membre à membre on obtient

$$I_{(p,n)} = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)\dots(p+1)} \cdot \frac{1}{(p+n+1)} = \frac{n! p!}{(p+n+1)!}$$

## Devoir de contrôle N°3(2)

### Exercice 1

Pour chacune des questions de ce QCM une seule, des trois propositions a, b ou c est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires. Dans les questions 1- et 2- On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne

1..La probabilité de tirer 3 boules noires est :

(a)  $\frac{1}{56}$    (b)  $\frac{3}{8}$    (c)  $\frac{1}{120}$

2 La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

(a)  $\frac{11}{56}$  ; (b)  $\frac{8}{56}$  ; (c)  $\frac{15}{120}$

Dans les questions 3- et 4- on tire au hasard une boule dans l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne ; on procède ainsi à 5 tirages successifs et deux à deux indépendants.

3-La probabilité d'obtenir 5 fois une boule noire est :

(a)  $\left(\frac{5}{8}\right)^5$    (b)  $\left(\frac{3}{5}\right)^5$    (c)  $\left(\frac{3}{8}\right)^5$

4- La probabilité d'obtenir 2 boules noires et 3 boules rouges est :

(a)  $\left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3$    (b)  $\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^3$    (c)  $10 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3$

### Exercice 2

On considère une fonction f définie, sur IR par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

On note C sa représentation graphique dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

On sait que :  $f'(-1) = f'(-2) = 0$  et que  $f'(0) = 2$

1-Déterminer les coefficients a, b et c.

2- Etudier les variations de f

3- Tracer la courbe C de f ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.

4- a) Déterminer une primitive de  $f$  de la forme  $(\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \mu)e^{-x}$

b) Calculer  $\int_0^3 f(x) dx$

### Exercice 3

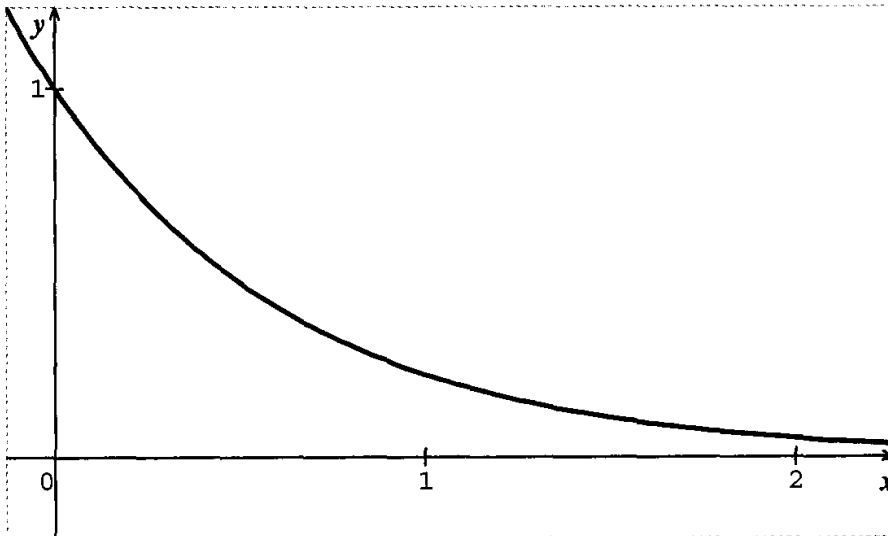
Soit  $X$  une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle

de paramètre  $\lambda$ . On rappelle que  $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$ .

### Partie A

La courbe ci-dessous représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité  $P(X \leq 1)$ .
2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre  $\lambda$ .



### Partie B

On pose  $\lambda = 1,5$ .

1. Calculer  $P(X \leq 1)$ , en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-3}$  près par excès.
2. Calculer  $P(X > 2)$ .
3. Dédire des calculs précédents l'égalité suivante :  $P(1 \leq X \leq 2) = 0,173$  à  $10^{-3}$  près.
4. Calculer l'intégrale  $F(x) = \int_0^x 1,5t \cdot e^{-1,5t} dt$

Déterminer la limite quand  $x$  tend vers  $+\infty$  de  $F(x)$  ; En déduire l'espérance mathématique de la variable  $X$ .

#### Exercice 4

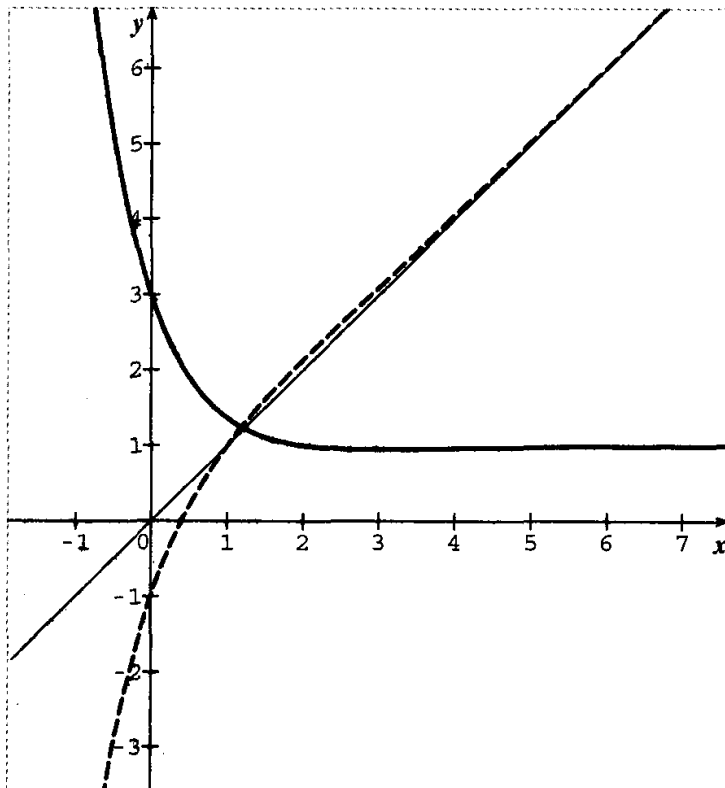
Dans la figure ci-dessous on a représenté graphiquement une fonction  $f$  et sa dérivée  $f'$ .

1-Préciser quelle est la courbe de  $f$  ?

2-Calculer :  $f(0)$  ;  $f'(0)$  ; puis les limites de  $f$  aux bornes de son domaine.

3-Dresser le tableau des variations de  $f$ .

4- On pose  $f(x) = x + (b + ax)e^{-x}$ . Déterminer l'expression de  $f(x)$ .



CorrigéExercice 1

Questions	1	2	3	4
Réponses	a	a	c	c

Exercice 2

$$f(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$$

$$1^\circ / f'(x) = (2ax+b) e^{-x} - (ax^2 + bx + c) e^{-x}$$

$$f'(x) = [-ax^2 + (-b + 2a)x + b - c] e^{-x}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -3a + 2b - c = 0$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 3b - c = 0$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow b - c = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + 2b - c = 0 \\ -8a + 3b - c = 0 \\ b - c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3a + 2b - c = 0 \\ 5a - b = 0 \\ -3a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a + 2b - c = 0 \\ b = 5a \\ 2a = -2 \end{cases} \quad \text{d'ou} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 \\ c = -7 \end{cases}$$

Conclusion:

$$f(x) = (-x^2 - 5x - 7) e^{-x}$$

$$2^\circ / f'(x) = (x^2 + 3x + 2) e^{-x}$$

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$-e^2$	$-3e$	0	

3°/  $f(0) = 2$  donc la tangente au point A ( 0 , -7) a pour équation

$$y = 2x - 7$$

4/ a) Soit  $F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \mu) e^{-x}$  une primitive de  $f$

$$\text{Donc } (2\alpha x + \beta - \alpha x^2 - \beta x - \mu) e^{-x} = f(x)$$

$$\text{D'où } \begin{cases} -\alpha x^2 = -x^2 \\ 2\alpha - \beta = -5 \\ \beta - \mu = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2\alpha + 5 = 7 \\ \mu = \beta + 7 = 14 \end{cases}$$

$$f(x) = (x^2 + 7x + 14) e^{-x}$$

$$b^\circ / I = \int_0^3 f(x) dx = F(x) - F(0) = \frac{9 + 21 + 14}{e^3} - 14 = \frac{34 - 14e^3}{e^3}$$

### Exercice 3

### Partie : A

#### Partie : A

1-/  $P(X \leq 1) = \int_0^1 f(t) dt$  est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de  $f$  ; les droites d'équation  $x = 0$ ,  $x = 1$  et l'axe des abscisses

2 /  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  ;  $f(0) = \lambda$  sur le graphique  $f(0) = 1,5 = \lambda$

#### Partie B-

On prend  $\lambda = 1,5$

$$1-) P(x \leq 1) = \int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-1,5t}]_0^1 = 1 - e^{-1,5} \approx 0.777$$

$$2-/ P(X > 2) = 1 - \int_0^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-3} \approx 0.05$$

$$3) P(1 \leq x \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = e^{-1,5} - e^{-3} \approx 0.173$$

$$4^\circ) \text{ Soit } F(X) = \int_0^x t f(t) dt$$

$$T = v(t) \rightarrow v'(t) = 1; \quad 1,5 \cdot e^{-1,5t} = u'(t) \text{ et } u(t) = -e^{-1,5t}$$

$$\text{D'où } F(x) = [-te^{-1,5t}]_0^x + \int_0^x e^{-1,5t} dt = -xe^{-1,5x} - \frac{2}{3}e^{-1,5x} + \frac{2}{3}$$

$$\lim_{+\infty} F = \frac{2}{3} \text{ Donc } E(x) = \frac{2}{3}$$

**Exercice 4**

1-La courbe de  $f$  est celle représentée en trait interrompue si non la fonction  $f$  sera positive sur  $[1 ; +\infty[$  par suite  $f$  sera croissante sur cette intervalle or la seconde courbe est celle d'une fonction strictement croissante.

2-La courbe de  $f$  passe par le point  $A(0 ; -1)$  donc :  $f(0) = -1$ .

La courbe de  $f$  passe par le point  $B(0 ; 3)$  donc :  $f'(0) = 3$ .

\*La courbe de  $f$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en  $-\infty$  et prend des valeurs négatives si  $x < 0$  donc  $f(x)$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

\*la courbe de  $f$  admet une asymptote oblique au en  $+\infty$  cet asymptote a pour coefficient directeur positif donc  $f(x)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$

3-

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4-On a :  $f(0) = -1$  donc  $0 + (b + 0)x1 = -1$  donc  $b = -1$

$f'(x) = 1 + (a - b - ax)e^{-x}$  ;  $f'(0) = 3$  donc :

$1 + a - b = 3$  d'où :  $a = 1$ . par suite  $f(x) = x + (x - 1)e^{-x}$

**Devoir de contrôle N°3(3)****Exercice 1**

Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties. Quand un client se présente, il achète au plus une nappe et un lot de serviettes.

La probabilité pour qu'un client achète la nappe est 0,2. La probabilité pour qu'un client achète le lot de serviettes quand il a acheté la nappe

est 0,7 et la probabilité qu'il achète le lot de serviettes quand il n'a pas acheté la nappe est 0,1.

On note N l'évènement « un client achète la nappe ».

On note S l'évènement : « un client achète le lot de serviettes.

1-a) Déterminer:  $p(S/N)$ ;  $p(S/\bar{N})$

b) Montrer que :  $p(S \cap N) = 0,14$

c) Calculer  $p(S \cap \bar{N})$  en déduire  $p(S)$

d.) Calculer la probabilité pour qu'un client achète au moins l'un des deux articles.

2) La nappe est vendue 12,5 d et le lot de serviettes 4,5 d. X est la variable aléatoire qui prend pour valeur les dépenses en dinar d'un client.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance de X.

c) représenter la fonction de répartition F de X.

## Exercice 2

Pour chacune des questions suivantes choisir la réponse correcte.

1- Soit F la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{1+e^t} dt ; \text{ l'expression de } f(x) \text{ est:}$$

(a)  $\ln\left(\frac{1+e^x}{e}\right)$  ; (b)  $\ln(1+e^x) - \ln(1+e)$  ; (c)  $\ln(1+e^x) + \ln(1+e)$

2- La durée de vie X, exprimée en années, d'une machine automatique suit une loi exponentielle de paramètre 0,4. La probabilité que la machine ne tombe pas en panne avant 10 ans est égale à

(a)  $e^{-4}$ ; (b)  $1 - 0.4e^{-4}$ ; (c)  $1 - e^{-4}$

**Exercice 3**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1.$$

1. Déterminer le sens de variation de  $g$ . Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

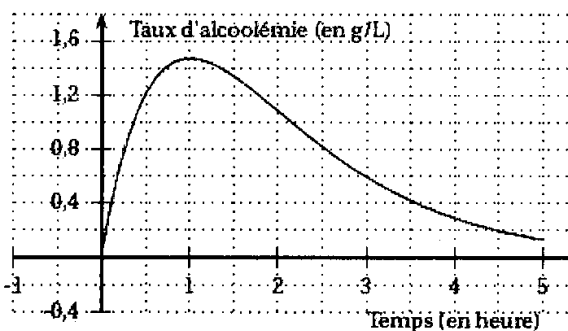
2. a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $1 - g(x) \geq 0$ .

b. Calculer l'intégrale :  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx$ .

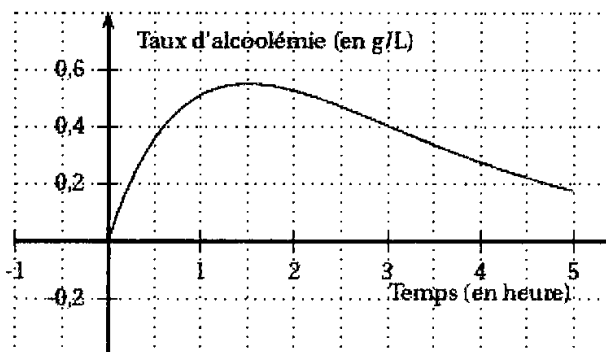
c. Interpréter graphiquement les résultats des questions a) et b)

**Exercice 4**

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'une certaine personne (exprimé en grammes par litre de sang) pendant les cinq heures suivant l'absorption d'une certaine quantité d'alcool. On donne ci-dessous, la courbe  $C_1$  représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé à jeun (graphique n° 1) et la courbe  $C_2$  représentant le taux d'alcoolémie lorsque l'alcool est absorbé après ingestion d'aliments (graphique n° 2).



Graphique n° 1 : courbe  $\mathcal{C}_1$



Graphique n° 2 : courbe  $\mathcal{C}_2$

À l'aide des deux graphiques précédents, répondre aux questions suivantes :

1. Dans chacun des deux cas, donner une approximation du taux d'alcoolémie maximal et du temps au bout duquel il est atteint.

2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux maximum d'alcoolémie autorisé au volant est 0,5 g/L. Dans chacun des deux cas, indiquer si la personne aura respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures

### Corrigé

#### Exercice 1

1°/a/  $P(S/N) = 0,7$

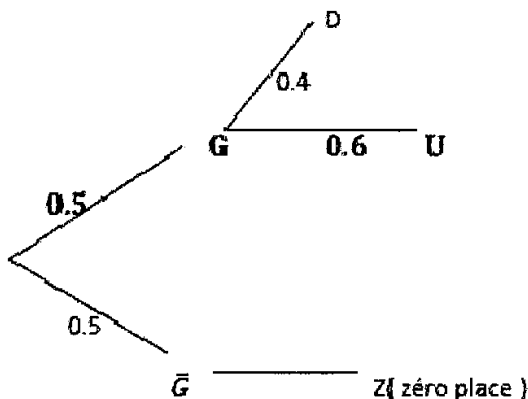
$P(S/\bar{N}) = 0,1$

b/  $P(S \cap N) = P(N) \cdot P(S/N) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$

c/  $P(S \cap \bar{N}) = P(\bar{N}) \cdot P(S/\bar{N}) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$

$P(S) = P(S \cap N) + P(S \cap \bar{N}) = 0,14 + 0,08 = 0,22$

On représente les différentes possibilités par un arbre :



d/ la probabilité demandée est

$P(S \cup N) = P(S) + P(N) - P(S \cap N) = 0,22 + 0,2 - 0,14 = 0,28$

$X(\Omega) = \{0; 4,5; 12,5; 17\}$

$x_i$	0	4.5	12.5	17	Somme
$P_i$	0,72	0,08	0,06	0,14	1
$x_i P_i$	0	0.36	7.5	2.38	3.41

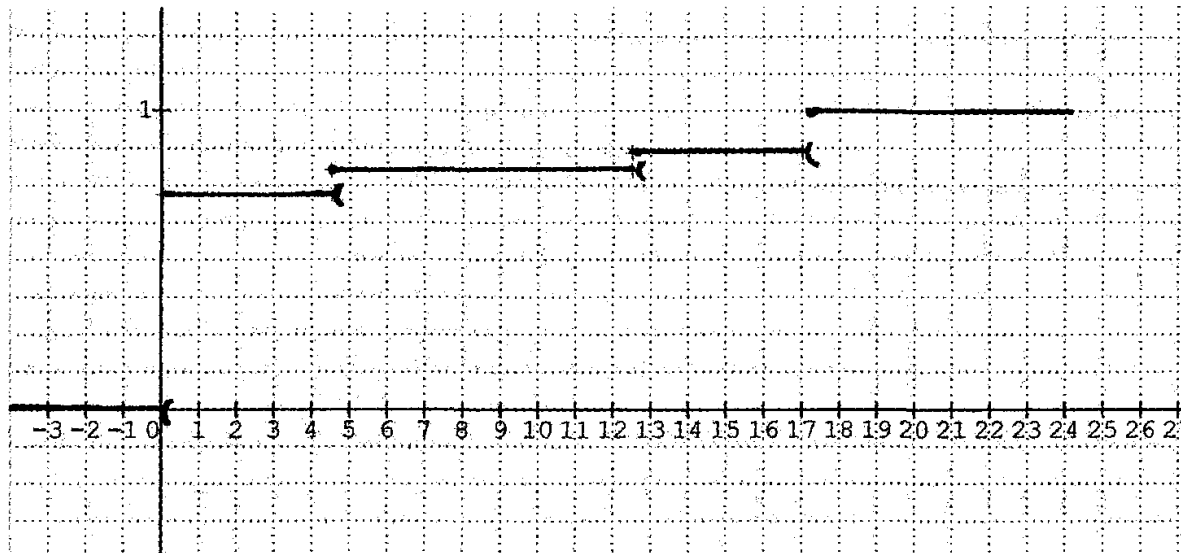
Si  $x < 0$  alors  $F(x) = 0$

Si  $x \in [0 ; 4.5[$  alors  $F(x) = 0,72$

Si  $x \in [4.5 ; 12.5 [$  alors  $F(x) = 0,8$

Si  $x \in [12.5 ; 17[$  alors  $F(x) = 0,86$

Si  $x \geq 17$  alors  $F(x) = 1$



### Exercice 2

Question	1	2	3
Réponse	b	c	

### Exercice 3

$$g(x) = e^{2x}(2x - 1) + 1$$

Sens de variation de  $g$

$$g'(x) = 2e^{2x} + 2(2x - 1)e^{2x} = e^{2x}(4x - 2 + 2) \text{ d'où } g'(x) = 4xe^{2x}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	0	$+\infty$

$g$  admet un minimum 0 en 0 donc  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

2-a) Résolution de l'inéquation  $1 - g(x) \geq 0$

$$1 - g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \leq 1 \Rightarrow (2x - 1)e^{2x} \leq 0 \Rightarrow 2x - 1 \leq 0$$

$$\text{donc : } x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{b) Calcul de } \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)e^{2x} dx = \left[ (1 - x)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^{2 \cdot \frac{1}{2}} - 1 = \frac{e - 2}{2}$$

$$\text{c) d'après 2/a) } 1 - g(x) \geq 0 \Rightarrow x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$$

Ce qui s'explique par : Pour tout  $x \leq \frac{1}{2}$  la courbe  $(C_g)$  est située au

dessous de la droite  $\Delta : y = 1$

d) L'intégral  $I$  est la valeur (en unité d'air) de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_g)$  ; la droite  $\Delta : y = 1$  ; les droites d'équations :

$$x = 0, x = \frac{1}{2}$$

#### Exercice 4 1. Lecture graphique

\*Dans le premier cas la fonction  $f_1$  atteint son maximum au bout d'une heure ; le taux d'alcoolémie est à l'ordre de 1.47.

\*Dans le second cas la fonction  $f_2$  atteint son maximum au bout d'une heure 30mn; le taux d'alcoolémie est à l'ordre de 0.55.

2. Depuis le 15 septembre 1995, le taux maximum d'alcoolémie autorisé au volant est 0,5 g/L.

\*Dans le premier cas :  $f_1(3) \approx 0.6 > 0.5$  donc la personne n'a pas respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

\* Dans le second cas :  $f_2(3) \approx 0.4 < 0.5$  donc la personne a respecté la législation en prenant le volant au bout de trois heures.

## Devoir de synthèse N°3(1)

### Exercice 1

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$ .

a. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

b. Calculer  $f'(x)$  et montrer que  $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x}$ .

c. Dresser le tableau de variations de  $f$ .

d. Tracer la courbe  $(C)$  représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique : 1 cm).

2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$ .

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2,  $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$

Déterminer  $I_2$  et  $I_3$ .

c. Soit  $A$  l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $(C)$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Calculer  $A$ .

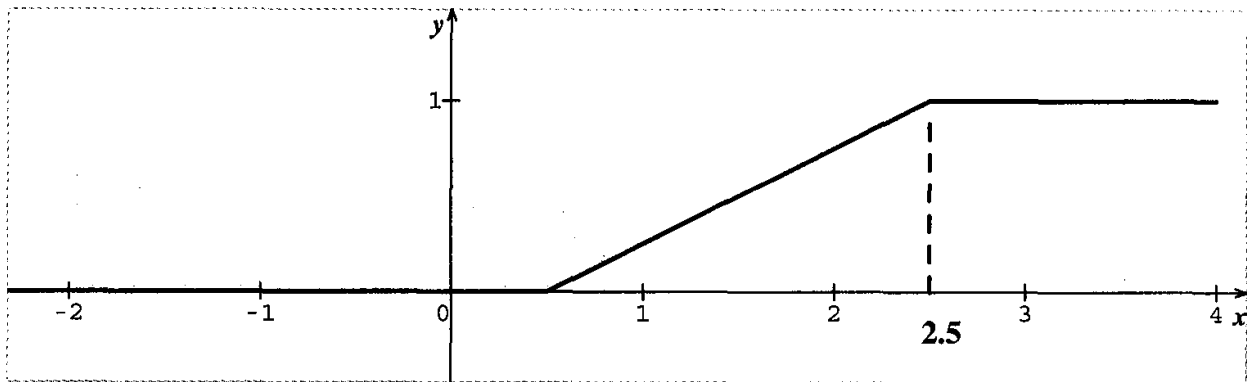
### Exercice 2

Choisir la bonne réponse

1- La limite de la fonction  $x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{x}$  lorsque  $x$  tend vers 0 est

(a)  $\frac{1}{2}$ ; (b) 2 ; (c) 0

2- Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité uniforme dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous :



La densité de X est

(a)  $f(x) = 0.5$  ; (b)  $f(x) = 2$  ; (c)  $f(x) = 1$

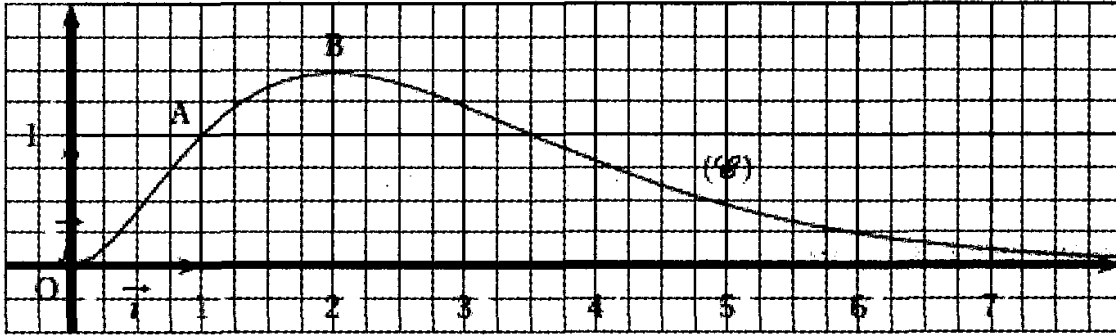
3 – La valeur de l'intégrale  $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$  est comprise entre :

(a) 0 et 0.5 ; (b) 0.5 et 1 ; (c) 1 et 2

### Exercice 3

La courbe (C) donnée ci-dessous représente dans un repère Orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  à valeurs strictement positives sur  $[0; +\infty[$ . On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ . On sait que :

- La fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; 2]$  et strictement décroissante sur l'intervalle  $[2; +\infty[$ .
- La courbe (C) passe par les points O, A et B.
- Le point A a pour coordonnées  $(1; 1)$  ; la droite (OA) est tangente à la courbe (C) au point A.
- Le point B a pour coordonnées  $(2; \frac{4}{e})$  au point B, la courbe (C) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est asymptote à la courbe (C).



### PARTIE A

1. a. Donner  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis  $f'(1)$  et  $f'(2)$  (justifier)
- b. Montrer que, dans l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = 1$  admet exactement deux solutions dont l'une est le nombre 1 ; l'autre solution est notée  $\alpha$ .

2-On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \ln[f(x)].$$

Déterminer le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

### Exercice 4

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée  $X$  qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ )

Toutes les probabilités seront données à  $10^{-3}$  près

1. Sachant que  $p(X > 10) = 0,286$ , montrer qu'une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $\lambda$  est 0,125.

On prendra 0,125 pour valeur de  $\lambda$  dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes.

Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans?

### Corrigé

#### Exercice 1

1- Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$ .

Rappel :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \cdot e^{-mx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \cdot e^{mx} = 0$

avec  $m$  et  $n$  deux entiers positifs

D'où la limite de  $f$  est 0 en  $+\infty$  et la limite de  $f$  est  $-\infty$  en  $-\infty$ .

b)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (Produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ ).

$$f'(x) = (6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2)e^{-x} = (-2x^3 + 10x^2 - 8x)e^{-x}$$

ce qui donne :  $f'(x) = 2x(-x^2 + 5x - 4)e^{-x} = -2x(x-1)(x-4)e^{-x}$ .

c) Tableau de variation de  $f$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$4$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$-\frac{2}{e}$	$-64e^{-4}$	$0$

2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $I_1$ .

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 + [-e^{-x}]_0^1 = \frac{-1}{e} + 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e}$$

b. A l'aide d'une intégration par partie montrer que, pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2,  $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$

$$I_n = [-x^n e^{-x}]_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx = \frac{-1}{e} + n I_{n-1}$$

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e} \text{ et } I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = \frac{-16}{e} + 6$$

c. Soit A l'aire, exprimée en  $\text{cm}^2$ , du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ .

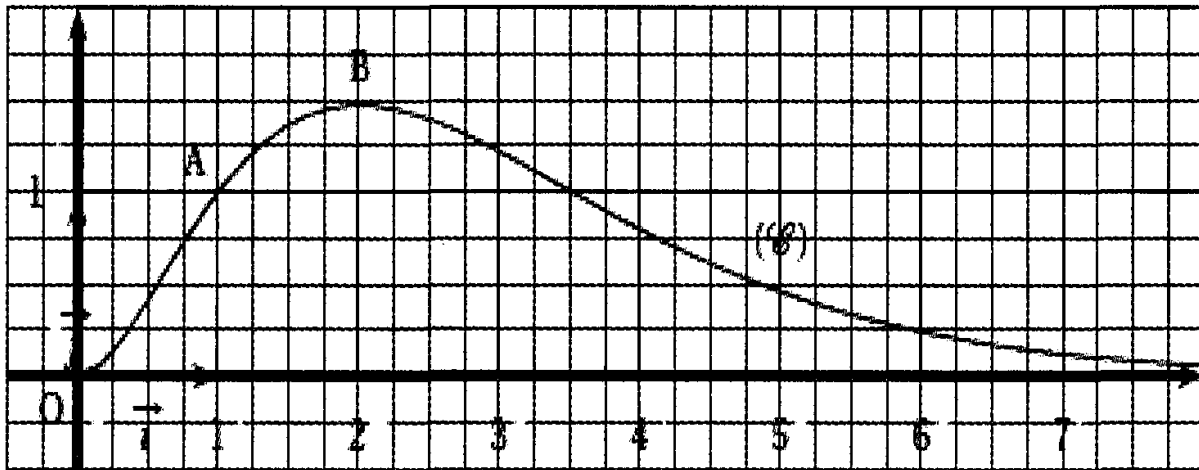
Calcul de A.

$$A = - (2I_3 - 4I_2) = -12 + 8 + \frac{32}{e} - \frac{20}{e} = \frac{12-4e}{e}$$

### Exercice 2

Question	1	2	3
Réponse	b	a	b

### Exercice 3



#### Partie A

1-a) L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe

(C) : Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

(OA) est la tangente à (C) au point A(1 ; 1) donc : le coefficient directeur de la tangente en ce point est : 1 ; le vecteur directeur de (OA)

est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc :  $f'(1) = 1$

$f'(2) = 0$  : au point B  $(2 ; \frac{4}{e})$  (C) admet une tangente horizontale.

b) f est continue sur l'intervalle  $[2 ; +\infty[$  elle strictement décroissante sur cet intervalle  $f([2 ; +\infty[ = ] 0 ; \frac{4}{e}]$  donc il existe un seul réel  $\alpha$  dans  $] 2 ; +\infty[$  tel que :  $f(\alpha) = 1$

de même dans l'intervalle  $[0 ; 2]$   $f(x) = 1$  admet une seule solution :  $x_0 = 1$

2- Soit  $g(x) = \ln[f(x)]$

G est la composée de deux fonction dérivables sur  $] 0 ; +\infty[$  donc elle

est dérivable et pour tout  $x > 0$   $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  donc g a les mêmes

variations que f car  $f(x) > 0$  pour tout  $x > 0$ .

#### Exercice 4

Rappelons que :  $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt$

$$1^\circ / P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$P(X > 10) = 1 + [e^{-\lambda t}]_0^{10} = 0.286 = e^{-10\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot (-10) = \ln(0.286) \text{ donc } \lambda = \frac{\ln(0.286)}{-10} = \frac{1}{8}$$

$$2) P(X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-0.5\lambda} = 1 - e^{-0.0625}$$

$$3) P_{(X>8)}(X > 10) = \frac{P(X>10)}{P(X>8)} = \frac{e^{-10\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0.25}$$

4/ or  $P(X < 10) = 0.286$

Soit A " au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans "

$$P(A) = 1 - (1 - 0,286)^{15} = 1 - (0,714)^{15}$$

### Devoir de synthèse N°3(2)

#### Exercice 1

Choisir la bonne réponse.

-Soit  $\Omega$  un univers et p une probabilité, A et B sont deux événements.

1- On dit que A et B sont indépendants si :

(a)  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$  ; (b)  $p(A \cap B) = p(A) - p(B)$  ;

(c)  $p(A \cap B) = \frac{p(A)}{p(B)}$

2-La probabilité de l'événement « A ou B » est :

(a)  $p(A) + p(B)$  ; (b)  $p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)$  ;

(c)  $p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ .

3-La limite de  $\frac{e^{2x} - 1}{x}$  lorsque x tend vers 0 est :

(a) 0 ; (b) 1 ; (c) 2

4- Soit u une fonction dérivable sur IR la dérivée de  $e^{u(x)}$  est :

(a)  $e^{u(x)}$  ; (b)  $u'(x) \cdot e^{u(x)}$  ; (c)  $u(x) e^{u(x)}$

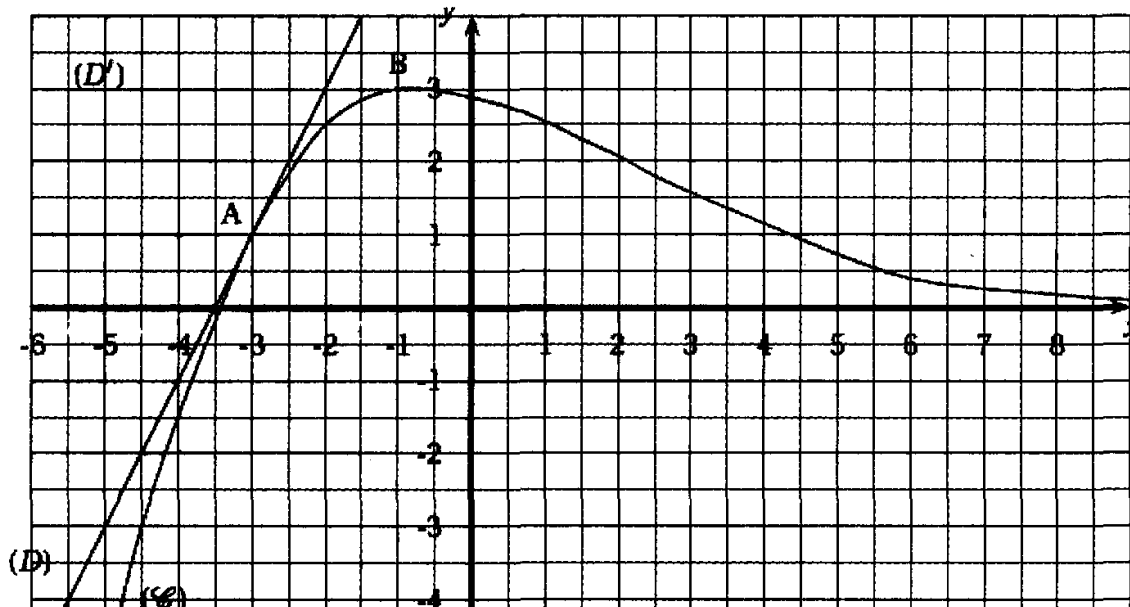
#### Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur IR. On donne son tableau de variations.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	3	0

Diagram description: The table shows a function f(x) with a local maximum at x = -1, f(-1) = 3. The function increases from  $-\infty$  at  $x = -\infty$  to 3 at x = -1, and then decreases to 0 at  $x = +\infty$ . Arrows indicate the direction of the function's path between these points.

La courbe (C) donnée ci-dessous représente la fonction  $f$  dans un repère orthonormé du plan. Cette courbe passe par les points  $A(-3 ; 1)$  et  $B(-1 ; 3)$ . Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.



1. Déterminer graphiquement  $f'(-3)$  et  $f'(-1)$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{f(x)}$ . On admet que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - a. Justifier que  $f$  et  $g$  ont les mêmes variations.
  - b. Déterminer (on justifiera les résultats).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

- c. Calculer  $g'(-3)$ .
3. Soit  $h$  la fonction définie sur  $]-3, 1 ; +\infty[$  par  $h(x) = \ln[f(x)]$ . On admet que  $h$  est dérivable sur l'intervalle  $]-3, 1 ; +\infty[$ .
  - a. Déterminer (on justifiera le résultat)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

- b. Calculer  $h'(-3)$ .

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = \frac{x-4}{x} e^x$

On note  $(C)$  sa représentation graphique dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$ ,  $0^+$ ,  $0^-$  et  $+\infty$ .
2. Calculer la dérivée  $f'$  de  $f$  et préciser son signe.
3. En déduire le tableau de  $f$ . (4. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe au point d'abscisse  $x_0 = 2$ .)
5. Tracer la courbe  $C_f$ . (On pourra se placer sur l'union  $[2; 0[ \cup ]0; 5]$ )

**Exercice 4 :** On modélise le temps d'attente entre deux clients à un guichet comme une variable aléatoire  $X$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . La probabilité pour un client d'attendre moins de  $t$  min est définie par :

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt$$

Le temps moyen d'attente est donné par :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

1-a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, en fonction de  $x$ ,

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

b. En déduire que le temps moyen est

2. Le temps moyen d'attente étant de 5 min, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 min ? plus de 5 min ?

3. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 min, sachant qu'on a déjà attendu 10 min ? Comment expliquez-vous ce résultat ?

### Corrigé

#### Exercice 1

Question	1	2	3	4
Réponse	a	c	c	b

**Exercice 2**

1. Lecture graphique :  $f'(-3)$  et  $f'(-1)$ .

$f'(-3)$  est le coefficient de la droite (D) passant par : A(-3 ; 1) et

C(-2 ; 3) donc  $f'(-3) = \frac{3-1}{-2+3} = 2$  ;  $f'(-1) = 0$  ( la droite (D') est tangente

à (C) en B ,elle est parallèle à l'axe des abscisses.

2. Soit g la fonction définie sur IR par  $g(x) = e^{f(x)}$ .

On admet que g est dérivable sur IR.

a. Justifier que f et g ont les mêmes variations.

$g'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)}$  :  $g'(x)$  a le même signe que  $f'(x)$  donc f et g ont les mêmes variations.

b. calcul des limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

Car : la fonction exp est continue en 0 et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

c) Calcul de  $g'(-3)$ .

$$g'(-3) = f'(-3) \cdot e^{f(-3)} = 2 \cdot e$$

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle  $] -3, 1 ; +\infty [$  par

$$h(x) = \ln[f(x)].$$

On admet que h est dérivable sur  $] -3, 1 ; +\infty [$ .

a. Déterminons (on justifiera le résultat)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty \text{ car } f(x) \text{ tend vers } 0 \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

$$b. \text{ Calcul de } h'(-3) ; h'(-3) = \frac{f'(-3)}{f(-3)} = 2$$

**Exercice 3**

$$f(x) = \frac{x-4}{x} e^x ; C_f \text{ est sa courbe représentative}$$

1- / limites de f en :  $-\infty$  ;  $0^-$  ;  $0^+$  ;  $+\infty$

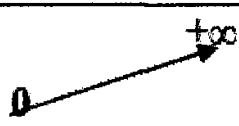
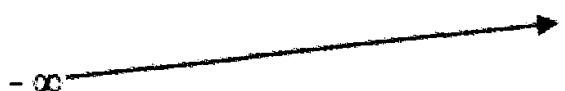
$$\lim_{-\infty} f = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-4}{x} = 1$$

$$\lim_{0^-} f = +\infty; \lim_{0^+} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty$$

$$2) \frac{x-4}{x} e^x = \left(1 - \frac{4}{x}\right) \cdot e^x \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{x^2} e^x + e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right)$$

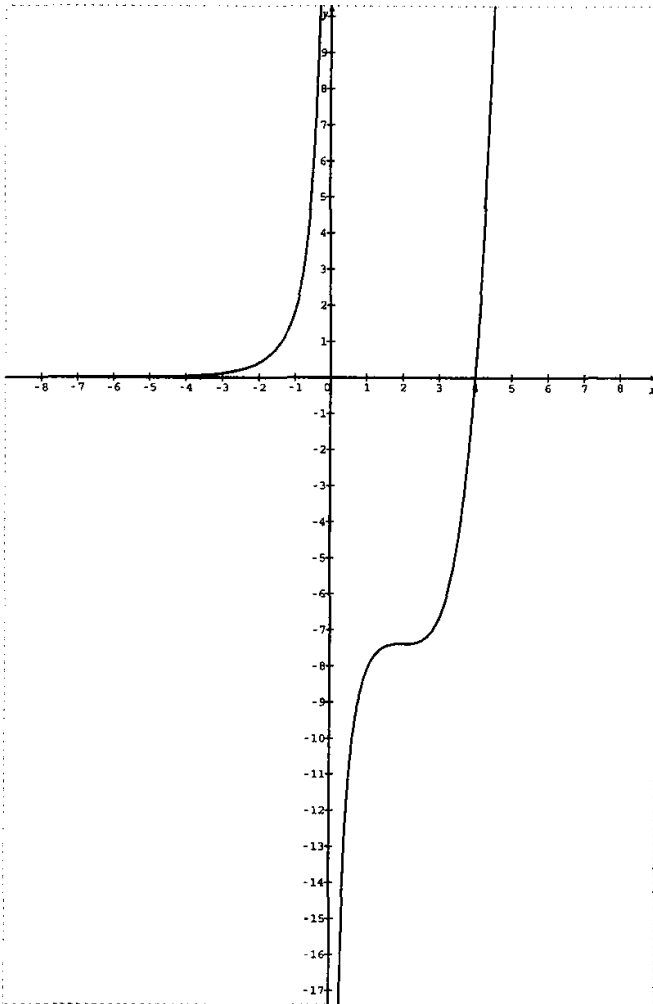
$$\Rightarrow f'(x) = e^x \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = e^x \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2}\right)$$

$$\text{soit : } f(x) = \frac{e^x}{x^2} (x-2)^2 \geq 0$$

<b>x</b>	$-\infty$	<b>0</b>	<b>2</b>	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	+	+	0	+
<b>Var f</b>				

$$4 -/ T : y = f'(2) (x-2) + f(2) \Rightarrow T : y = -e^2$$

5 -/ fig



### Exercice 4

1-a. À l'aide d'une intégration par parties, calculons en fonction de  $x$

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$$

1. a. On intègre par parties entre 0 et  $t \geq 0$  en posant :

$$u(t) = \lambda t; \quad u'(t) = \lambda$$

$$v'(t) = e^{-\lambda t}; \quad v(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}$$

$u$  et  $v$  étant dérivables et  $u'$  et  $v'$  continues sur  $[0; x]$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \left[ -t e^{-\lambda t} \right]_0^x + \int_0^x e^{-\lambda t} dt \\ &= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

b.) Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t = 0$  e, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

2. Si le temps moyen d'attente est égal à 5 minutes, alors

$$\frac{1}{\lambda} = 5 \text{ donc } \lambda = 0.2$$

La probabilité d'attendre plus de 10 minutes est :

$$1 - p(X \leq 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-2}$$

De même la probabilité d'attendre plus de 5 minutes est :

$$1 - p(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-1} (0,368 \text{ au millième près})$$

3. Il faut calculer  $p(X \geq 15)$  sachant que  $X \geq 10$ . Or

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 15) = \frac{P(X > 15)}{P(X > 10)} = \frac{e^{-3}}{e^{-2}} = e^{-1}$$

On a  $P_{(X \geq 10)}(X \geq 15) = P(X \geq 5)$ . Donc la probabilité est celle du temps supplémentaire d'attente. La loi exponentielle est une loi sans vieillissement

# **Deuxième partie**

# **Sujets d'examens**

Un pas à l'université

## Sujet N°1

**Exercice 1** : Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et, pour tout entier naturel  $n, u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$ .

**Proposition 1** : « Pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq 7$  ».

**Proposition 2** : La suite  $(u_n)$  est convergente et converge vers 7

2- Soit  $z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$ .

**Proposition 3** :  $|z| = \sqrt{5}$

**Proposition 4** : Le point  $M$  d'affixe  $z$  appartient au cercle  $(C)$  de centre  $A(\sqrt{2}; 0)$  et de rayon 3.

**Exercice 2** :

$$\text{On pose } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$$

1) Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .

2-a) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et à termes positifs. En déduire qu'elle est convergente.

b) Trouver une relation entre  $I_n$  et  $I_{n+2}$ .

3-a) Exprimer  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  en fonction de  $n$ .

b) On admet que  $I_{2n}$  et  $I_{2n+1}$  ont la même limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Exprimer :  $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$  en fonction de  $n$ .

c) Montrer que  $\frac{\pi}{2}$  est la limite d'une suite réelle à déterminer.

**Exercice 3**

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.

2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

a. Définir la loi de  $X$ .

b. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ . Quel est le sens de ce nombre ?

3. a. Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A. Calculer, à  $10^{-3}$  près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieur à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre  $n$  d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = 0,0007e^{-0,0007x}$ .

Calculer la probabilité, à  $10^{-3}$  près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

### Exercice4

1-On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$ .

Déterminer le sens de variation de  $g$ . Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

2-On considère la fonction numérique  $f$  définie pour  $x$  réel non nul

$$\text{par : } f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

a) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$ , en 0 et en  $+\infty$ .

b) En déduire que la courbe représentative de  $f$  admet une asymptote que l'on précisera.

c) Déterminer le sens de variation de  $f$  et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la question 1).

3) Soit  $f_1$  la fonction définie par :  $f_1(x) = f(x)$  pour  $x \neq 0$  et  $f_1(0) = 2$ . Soit

$C$  la courbe représentative de  $f_1$  dans le repère orthogonal

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ ; en prenant pour unités :

4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées

a) Montrer que la fonction  $f_1$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

b) Construire la courbe  $(C)$ .

c) En supposant que  $f_1$  est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé  $f_1'(0)$ ; faire cette lecture graphique. Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer ?

4) On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale :

$$J = \int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x} - 1}{x} dx$$

a-Montrer que pour tout  $x$  de  $[-2; -1]$  on a :  $-\frac{0.86}{x} \leq f(x) \leq \frac{-0.99}{x}$

b- En déduire un encadrement de  $J$  d'amplitude 0,1.

## Corrigé

### Exercice 1

1- Proposition 1 : Vraie : « Par récurrence »

-Proposition 2 : Vraie : La suite  $(U_n)$  est croissante majorée sa limite  $l$  vérifie l'équation :  $l(l - 7) = 0$  donc  $l = 7$  car  $l \geq 2$ .

2- Proposition 3 : vraie ... (calcul simple)

-Proposition 4 : Fausse :  $AM^2 = 3$  non pas  $AM = 3$

### Exercice 2

1-Calcul de  $I_0$  et de  $I_1$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$$

$$\text{Pour } n = 0; I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Pour } n = 1; I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2-a) Monotonie de  $(I_n)$

On a  $0 \leq \sin x \leq 1$  donc  $0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$  ce qui donne par

passage à l'intégrale que :  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$  donc la suite  $(I_n)$  est

décroissante à termes positifs ce qui affirme qu'elle est convergente

b) Relation entre  $I_{n-2}$  et  $I_n$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cdot \sin^2(x) dx \text{ donc}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) [1 - \cos^2(x)] dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx$$

On intègre par partie le second terme en posant

$$\sin^{n-2}(x) \cdot \cos(x) = u'(x) \text{ et } u(x) = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1}(x)$$

$$\cos(x) = v(x) \text{ et } v'(x) = -\sin(x) \text{ donc}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx = \left[ \frac{1}{n-1} \sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n-1} I_n$$

$$\text{d'où } I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n \Rightarrow I_n \left( 1 + \frac{1}{n-1} \right) = I_{n-2}$$

$$\text{Par suite } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$3\text{-a) } I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

$$I_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4}$$

·  
·  
·

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \text{ puisque tous les termes sont non nuls alors en multipliant}$$

membre à membre et après simplification on aura :

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \dots 3 \times 1}{2n \times (2n-2) \times (2n-4) \times \dots \times 4 \times 2} \cdot I_0$$

$$\text{Donc } I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \dots 3 \times 1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Soit

$$I_{2n} = \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot 2n)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{d'où } I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$$

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3}$$

·  
·  
·

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}$$

On multiplie membre à membre et on simplifie on obtient :

$$I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4.2}{(2n+1).(2n-1)(2n-3)\dots 5.3}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2^n \cdot n!}{3.5.7\dots(2n-3).(2n-1)(2n+1)}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2^n n! [2.4.6\dots(2n-2).(2n)]}{2.3.4.5.6\dots(2n-3)(2n-2)(2n-1).2n.(2n+1)}$$

$$\text{d'où } I_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$\text{b) } \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{2^{2n} (n!)^2 \cdot 2}{(2n)! \pi} = \frac{2^{4n} (n!)^4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot [(2n)!]^2}$$

c) On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)! \cdot [(2n)!]^2} = 1 \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)! \cdot [(2n)!]^2}$$

ce qui donne  $\frac{\pi}{2}$  est la limite de la suite V définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : V_n = \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n+1)! \cdot [(2n)!]^2}$$

**Exercice 3**

Soit  $D$  l'événement « l'article est défectueux »

$\bar{D}$  est l'événement contraire de  $D$ .

$D_1$  : « L'article présente un défaut de soudure »

$D_2$  : « L'article présente un défaut sur un composant électronique »

$$P(D) = 1 - P(\bar{D})$$

$$P(\bar{D}) = P(\bar{D}_1) \times P(\bar{D}_2) = 0.9506$$

$$\Rightarrow P(D) = 1 - 0.9506 = 0.0494$$

On choisit  $k$  l'article dans cette surface. Il n'y a que deux possibilités

« L'article est défectueux »

« L'article est non défectueux »

$$P(X = k) = C_{800}^k (0.9506)^{800-k} (0.0494)^k$$

$X$  suit une loi binominale de paramètre :  $n = 800$  et  $p = 0.0494$

$$E(X) = np = 800 \times 0.0494 = 39.52$$

Le sens de  $E(X)$  est sur les 800 articles, il y a environ de 40 articles défectueux.

La probabilité qu'il y ait plus de deux articles défectueux dans sa commande est :

$$1 - [0.9506^{25} + 25 \times (0.9506)^{24} \times 0.0494] \approx 0.352$$

Soit  $n$  le nombre des articles

La probabilité d'avoir au moins un article défectueux est :

$$1 - (0.9506)^n = p_n$$

$$p_n \leq 0.5 \Rightarrow 1 - (0.9506)^n \leq 0.5 \Rightarrow (0.9506)^n \geq 0.5 \Rightarrow n \ln(0.9506) \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow n \ln(0.9506) \geq -\ln(2)$$

$$\Rightarrow n \leq \frac{\ln(2)}{\ln(0.9506)} \text{ donc } n \leq 13 \text{ donc } n = 13$$

$$P(700 \leq X \leq 1000) = \int_{700}^{1000} 7 \cdot 10^{-4} e^{-7 \cdot 10^{-4} x} dx$$

$$= \left[ -e^{-7 \cdot 10^{-4} x} \right]_{700}^{1000} = \frac{1}{e^{0.49}} - \frac{1}{e^{0.7}} \approx 0.116$$

#### Exercice 4

$$1) g(x) = e^{2x}(2x-1) + 1$$

\*Sens de variation de g

$$g'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = e^{2x}(4x-2+2) \text{ d'où } g'(x) = 4xe^{2x}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	0	$+\infty$

g admet un minimum 0 en 0 donc  $g(x) \geq 0$  pour tout x de IR

$$2) f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0} f = 2$  car on a :

$$f(x) = 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

b) la courbe  $(C_f)$  admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.

c) Variation de f

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \text{ et } f'(x) = \frac{1 + (2x-1)e^{2x}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

<b>x</b>	$-\infty$	<b>0</b>	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	+		+
<b>f(x)</b>			

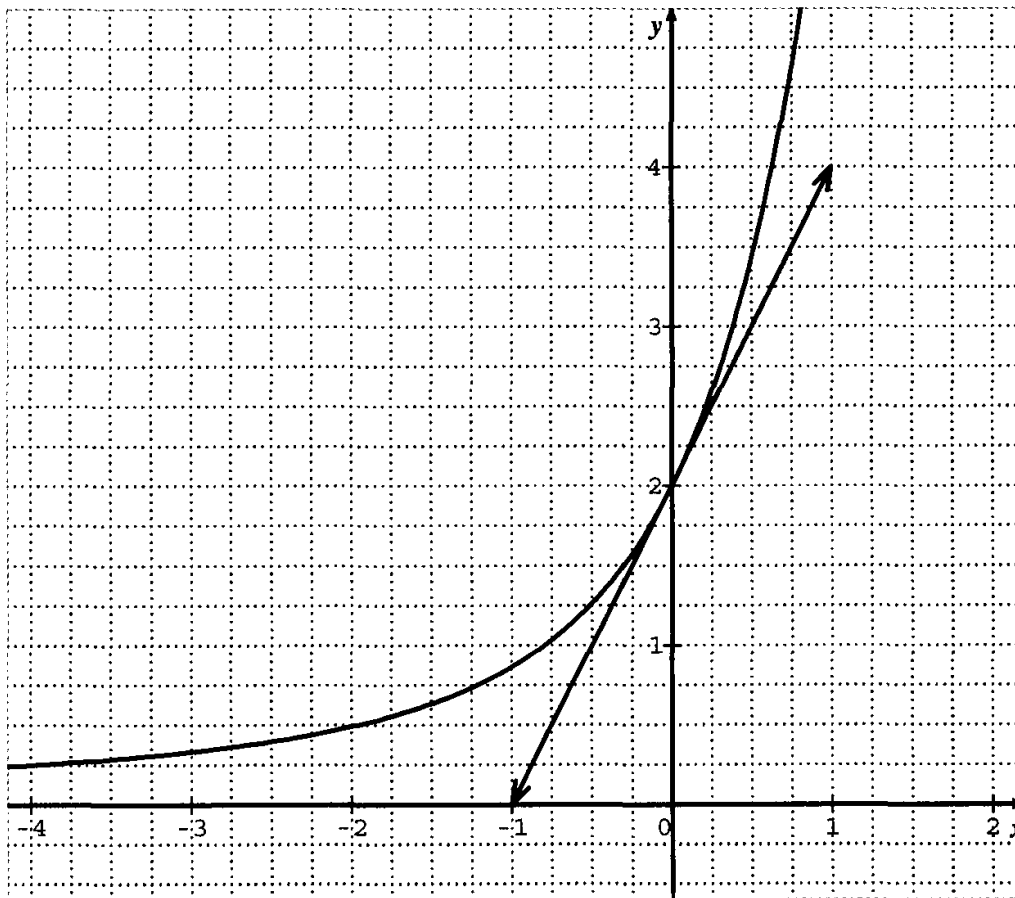
3)a) Continuité de  $f_1$  en 0

On a  $f(x) = f_1(x)$  si  $x$  est non nul donc  $f$  et  $f_1$  ont la même limite en 0

$$\lim_0 f = \lim_0 f_1 = 2 = f_1(0)$$

Donc  $f_1$  est continue en 0.

b) Voir figure



c) En utilisant la courbe de  $f$  sur  $[-2, 1]$  le nombre  $f'_1(0)$  est la valeur

limite du rapport  $\frac{f(x) - f_1(0)}{x}$  quand  $x$  tend vers 0.

Sur le graphique une valeur approchée de

$$f_1'(0) = \frac{f(0.05) - f_1(0)}{x} \approx \frac{e^{0.1} - 1 - 0.1}{(0.05)^2} \approx 2$$

Donc on peut conjecturer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} = 2$

Donc  $e^{2x}$  est équivalent à :  $1 + 2x + \frac{x^2}{2}$  au voisinage de 0.

$$4) \text{ Soit : } J = \int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x} - 1}{x} dx$$

a) on a :  $x \mapsto e^{2x} - 1$  est une fonction croissante sur  $[-2, -1]$

donc  $e^{-4} - 1 \leq e^{2x} - 1 \leq e^{-2} - 1 \Rightarrow$

$$-0.99 \leq e^{2x} - 1 \leq -0.86 \text{ puisque } x \leq 0$$

$$\text{Donc } -\frac{0.86}{x} \leq \frac{e^{2x} - 1}{x} \leq -\frac{0.99}{x} \text{ c-à-d}$$

$$-\frac{0.86}{x} \leq f(x) \leq -\frac{0.99}{x}$$

$$\text{b) on a } -\frac{0.86}{x} \leq f(x) \leq -\frac{0.99}{x} \Rightarrow$$

$$-0.86 \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} \leq \int_{-1}^{-2} f(x) dx \leq -0.99 \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$-0.86 [\ln|x|]_{-2}^{-1} \leq J \leq -0.99 [\ln|x|]_{-2}^{-1} \Rightarrow$$

$$0.86 \ln(2) \leq J \leq \ln(2) \times 0.99 \Rightarrow$$

$$0.596 \leq J \leq 0.69 \Rightarrow J \approx 0.65 \text{ unité d'air.}$$

## Sujet N°2

### Exercice 1

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1998 elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : $x_i$	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en k€ : $y_i$	64	75	100	113	125	127

1. a. Construire le nuage de points associé à la série statistique  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal. Les unités graphiques seront : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.
- b. Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au dixième). Placer le point G dans le repère.
2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.
  - a. Donner une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).
  - b. Tracer cette droite (D) dans le repère.
  - c. Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec cette approximation?
3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par  $y = f(x)$  avec :
 
$$f(x) = -2x^2 + 23x + 63.$$
  - a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle  $[0 ; 6]$ .
  - b. Tracer la courbe représentative  $(C_f)$  de la fonction f dans le repère de la question 1.
  - c. Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?

4. En réalité, le bénéfice en 2005 est en hausse de 0,9% par rapport à celui de 2004. Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ?

### Exercice 2

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier :  $A = -2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$ .

a) Si  $p = 3n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$  par 7 ?

b) Démontrer que si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p$  est divisible par 7.

c) Etudier le cas où  $p = 3n + 2$ .

4. On considère les nombres entiers  $a$  et  $b$  écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000} \quad b = \overline{1000100010000}.$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme  $A_p$ .

Sont-ils divisibles par 7 ?

### Exercice 3      A

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1-a) Etudier les variations de  $f$

b) Donner une équation de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 1.

2- Tracer la courbe  $C_f$  de  $f$  et sa tangente au point d'abscisse 1.

3-a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

b) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$  et que  $0.5 < \alpha < 1$  puis donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $\frac{1}{4}$ .

B-Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$U_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Déterminer le signe de  $U_{n+1} - U_n$

en déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

Montrer que  $(U_n)$  est convergente.

a. Justifier pour tout entier naturel  $n$  non nul l'encadrement

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$$

b-Vérifier que :

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$$

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

#### Exercice 4

On s'intéresse à une population de 135 000 personnes abonnées à un fournisseur d'accès à Internet. Il existe deux fournisseurs A et B. Toute personne est abonnée à un seul de ces fournisseurs. On sait qu'un tiers des personnes de cette population est abonné au fournisseur A. Par ailleurs, 60% des personnes abonnées au fournisseur A accèdent à Internet par le haut débit, et 51 % des personnes abonnées au fournisseur B accèdent à Internet par le haut débit. On choisit une

personne au hasard dans cette population, et on admet que la probabilité d'un évènement est assimilée à la fréquence correspondante. On définit les événements :

A : « la personne choisie est abonnée au fournisseur A »

B : « la personne choisie est abonnée au fournisseur B »

H : « la personne choisie accède à Internet par le haut débit »

1. Décrire cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
2. Montrer que la probabilité de l'évènement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,20.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,54.
4. Calculer  $p_H(A)$ , probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

### Corrigé :

#### Exercice 1 :

1-a) Voir figure ci-dessous

b)  $\bar{X} = 2$  ;  $\bar{Y} = 95.4$  donc  $G(2 ; 95.4)$

2-)  $\sigma(X) = 1.414$  ;  $\sigma(Y) = 22.844$  ;  $cov(X, Y) = 32$

a) D'après ce qui précède la droite de régression (D) de Y ex X est donnée par son équation réduite (D) :  $y = 16.x + 63.4$

b) Voir figure

c) L'équation de (D) donne l'estimation suivante de bénéfice:

L'année 2005 est de rang 6 donc  $y = 16x6 + 63.4 = 159.3$

3-)  $f(x) = -2.x^2 + 23.x + 63$

f est un polynôme de degré 2 donc elle est dérivable sur  $[0 ; 6]$

et  $f'(x) = -4.x + 23$

<b>x</b>	0	$\frac{23}{4}$	6	
<b>f'(x)</b>		+	0	-
<b>f(x)</b>	63	129.125	129	

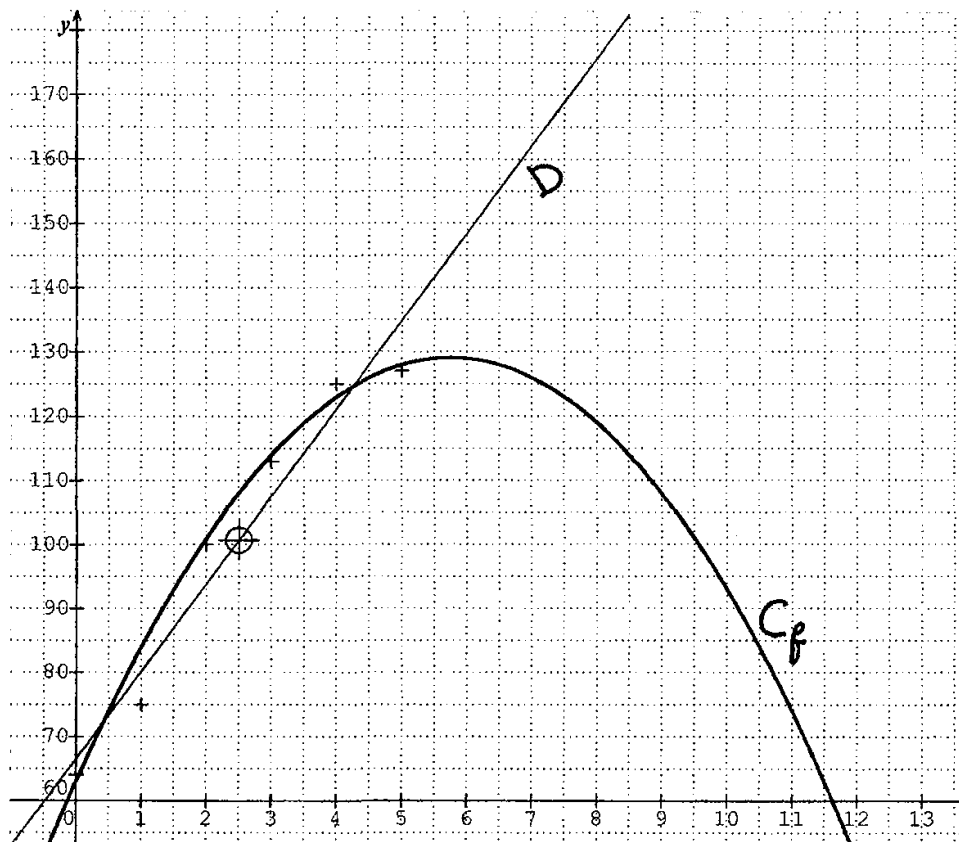
3-b) voir figure

c) Une estimation de bénéfice par cet ajustement est donnée par :

$$f(6) = 129$$

4-En réalité le bénéfice est donné par la relation :

$y = 127x(1.009) = 128.143$  donc le second ajustement donne la meilleure prévision de bénéfice



## Exercice 2 :

**1-Effectuons un raisonnement par récurrence.**

**Pour  $n = 0$ ,  $2^{3n} - 1 = 0$  et zéro est un multiple de 7.**

**Supposons que, pour un certain rang  $k$  quelconque,**

**$2^{3k} - 1$  soit un multiple de 7 et montrons que  $2^{3(k+1)} - 1$  est**

**un multiple de 7 :**

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 2^3 - 1$$

$$2^{3(k+1)} - 1 = 2^{3k} \times 8 - 1$$

$$2^{3(k+1)} - 1 = 7 \times 2^{3k} + 2^{3k} - 1.$$

**Nous avons :  $7 \times 2^{3k}$  multiple de 7 et  $2^{3k} - 1$  multiple de 7, par hypothèse de récurrence.**

**Donc, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7.**

**Autre méthode :  $2^{3n} - 1 = (2^3)^n - 1$  soit  $2^{3n} - 1 = 8^n - 1$ .**

$$\text{Or } 8^n - 1 = (8 - 1)(8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1)$$

$$8^n - 1 = 7 \times (8^{n-1} + 8^{n-2} + \dots + 8 + 1).$$

**Donc  $2^{3n} - 1$  est bien un multiple de 7.**

**Nous avons  $2^{3n+1} - 2 = 2 \cdot (2^{3n} - 1)$ .**

**Comme  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7.**

**Nous avons :  $2^{3n+2} - 4 = 4(2^{3n} - 1)$**

**Comme  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7, nous en déduisons que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.**

**2-Nous avons, en utilisant les résultats de la question précédente**

$$2^{3n} - 1 = 7k, \text{ avec } k \text{ entier naturel, donc } 2^{3n} = 7k + 1$$

$$2^{3n+1} - 2 = 7k' \text{ donc } 2^{3n+1} = 7k' + 2;$$

$$2^{3n+2} - 4 = 7k'' \text{ donc } 2^{3n+2} = 7k'' + 4.$$

**Or tout entier naturel s'écrit sous l'une des formes :**

$$3n, 3n + 1, 3n + 2.$$

**Nous en déduisons que les restes possibles de la division par 7 des puissances de 2 sont 1 ; 2 et 4.**

3. a) Nous avons  $A_{3n} = 2^{3n} + 2^{6n} + 2^{9n}$ . Chacun des exposants  $3n$ ,  $6n$  et  $9n$  étant un multiple de 3, les restes des divisions de  $2^{3n}$ ;  $2^{6n}$ ;  $2^{9n}$  par 7 sont à chaque fois égaux à 1 donc le reste de la division de  $A_p$  par 7 est, dans le cas  $p = 3n$ , égal à 3.

Nous avons  $A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$ . Or le reste de la division de  $2^{3n+1}$  par 7 est. 2, le reste de la division de  $2^{6n+2}$  est. 4 (puisque  $6n + 2$  est. un multiple de 3 auquel on ajoute 2) et le reste de la division de  $2^{9n+3}$  par 7 est 1 (puisque  $9n + 3$  est un multiple de 3). Le reste de la division de :

$A_{3n+1} = 2^{3n+1} + 2^{6n+2} + 2^{9n+3}$  est donc nul, car la somme des restes des divisions de chacun des termes de cette somme donne 7.

Le nombre  $A_p$ , dans le cas  $p = 3n + 1$ , est divisible par 7.

Nous avons :  $A_{3n+2} = 2^{3n+2} + 2^{6n+4} + 2^{9n+6}$ .

Le reste de la division par 7 de  $2^{3n+2}$  est 4.

Le reste de la division par 7 de  $2^{6n+4} = 2^{3(n+1)+1}$  est 2.

Le reste de la division par 7 de  $2^{9n+6} = 2^{3(3n+2)}$  est 1.

Comme dans le cas précédent, nous en déduisons que le nombre  $A_p$ , dans le cas  $p = 3n + 2$ , est divisible par 7.

4. Nous avons :  $a = \overline{1001001000} = 2^3 + 2^6 + 2^9$  soit  $a = A_3$ .

$b = \overline{1000100010000} = 2^4 + 2^8 + 2^{12}$  soit  $b = A_4$ .

3 est de la forme  $3n$  donc, d'après 3.a),  $A_3$  n'est pas divisible par 7.

4 est de la forme  $3n + 1$  donc, d'après 3.b),  $A_4$  est divisible par 7.

#### Exercice 4

A-1-a) Etude de  $f$  :  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  sa fonction dérivée est

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} < 0$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]0 ; +\infty[$

#### Limites de $f$ aux bornes de son domaine

$$\text{On écrit : } f(x) = \frac{1 + x \ln x - x \ln(x+1)}{x}$$

donc :  $\lim_{0^+} f = +\infty$

Et puisque la fonction :  $x \mapsto \ln x$  est continue en 1 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

par suite la courbe (C) de f admet deux asymptotes : D :  $y = 0$  au voisinage de  $+\infty$  et  $\Delta$  :  $x = 0$

b) Equation de la tangente à (C) au point A(1 ;  $1 - \ln 2$ )

$$\text{on a } f'(1) = -\frac{1}{2} \text{ donc } T : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \ln 2$$

2-) Voir figure page : 89)

3-a) f est continue strictement décroissante sur son domaine

$]0 ; +\infty[$  et  $f : ]0 ; +\infty[ \rightarrow ]0 ; +\infty[$  donc f réalise une bijection de  $\mathbb{R}^*_+$  sur  $\mathbb{R}^*_+$ .

b) Solution de l'équation  $f(x) = x$

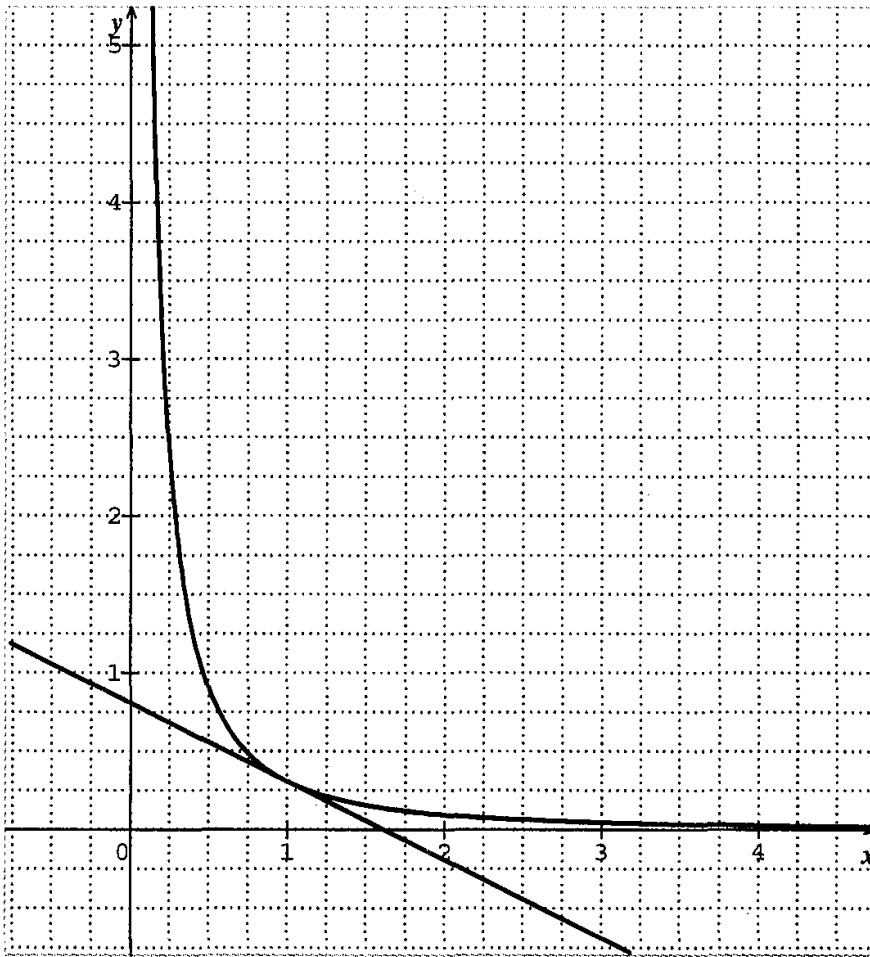
Soit  $g(x) = f(x) - x$  ; g est continue, strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^*_+$  et  $g : ]0 ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  puisque  $0 \in \mathbb{R}$  donc il existe un seul réel  $\alpha$  tel que :  $g(\alpha) = 0$  (L'existence est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires, l'unicité vient de la bijection) par suite  $f(\alpha) = \alpha$ .

Encadrement de  $\alpha$ . On a  $g(0.5) = 2 - \ln 3 - 0.5 = 1.5 - \ln 3 > 0$

$g(1) = 1 - \ln 2 - 1 = -\ln 2 < 0$  donc  $0.5 < \alpha < 1$

le centre de l'intervalle  $]0.5 ; 1[$  est  $\frac{3}{4} = 0.75$

$g(0.75) \approx -0.26$  donc  $0.5 < \alpha < 0.75$ .



B-1.

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-3n - 2}{n(2n+2)(2n+2)} < 0$$

2-)  $u_{n+1} - u_n < 0$  donc la suite  $(u_n)$  est décroissante

3-) La suite  $(u_n)$  est décroissante minorée par 0 donc elle est convergente.

4a) Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  :  $0 \leq n \leq x \leq n+1$ , donc  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ . Les fonctions sont continues sur  $[n; n+1]$  et  $n \leq n+1$  donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \text{ donc } \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

b) on a pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} - f(n)$$

c) d'après a) et b) on peut écrire

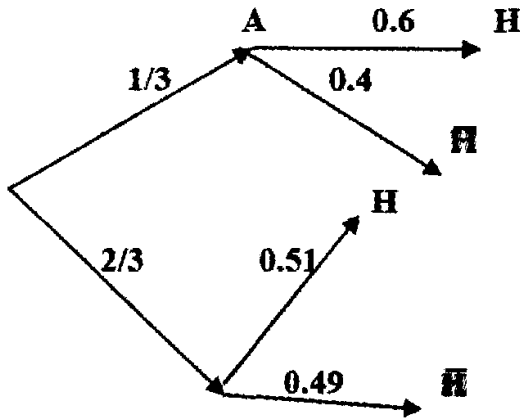
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - f(n) \leq \frac{1}{n} \text{ donc } 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Donc : } 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

### Exercice 5

1-On a :  $p(A) = 1/3$  ;  $p(B) = 2/3$  ;  $p(H/A) = 0.6 = 3/5$  et  $p(H/B) = 0.51$

On résume les données dans l'arbre suivant :



2. Montrons que la probabilité de l'évènement « la personne est abonnée au fournisseur A et accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,20.

On demande de calculer  $p(A \cap H) = p(A) \cdot p(H/A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$

3. Montrons que la probabilité de l'évènement H : « la personne accède à Internet par le haut débit » est égale à 0,54.

La probabilité demandée est :

$$p(H) = p(A \cap H) + p(B \cap H) = 0.2 + 0.51 \times \frac{2}{3} = 0.2 + 0.34 = 0.54$$

4. Calculer  $p_H(A)$ , probabilité de A sachant H, puis en donner la valeur décimale arrondie au centième.

$$p_H(A) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)} = \frac{0.2}{0.54} = \frac{10}{27} \approx 0.37$$

### Sujet 3

#### Exercice 1

Soit A un entier qui s'écrit  $\overline{aab4}$  dans la base 7 et  $\overline{1a4a}$  dans la base 11, avec a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1-a) Montrer que b est impaire.

b) Déterminer b ; a et A.

2-a) Montrer que pour tout n de  $\mathbb{N}$  :  $A^{n+1} + 3A^n$  est divisible par 7.

b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels p tels que :

$$A^{n+1} + pA^n \equiv 0(7) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{I}$$

#### Exercice 2 :

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. La quelle ? On ne demande pas de justifier.

1-

$$1\text{-On pose : } z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

La forme algébrique de  $z^2$  est :

$$(A) 2\sqrt{2}; (B) 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i; (C) 2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2}); (D) 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

2-À tout nombre complexe  $z \neq -2$ , on associe le nombre complexe  $z'$

$$\text{défini par : } z' = \frac{z - 4i}{z + 2}$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que  $|z'| = 1$  est :

(a) : un cercle de rayon 1 ; (b) : une droite

(c) : une droite privée d'un point ; (d) : un cercle privé d'un point

3) Soit  $U$  une suite numérique

(a) Si  $U$  converge vers zéro alors la suite  $S$  définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k \text{ est convergente}$$

(b) Si  $U$  est bornée alors elle est convergente

(c) Si  $U$  est décroissante majorée alors elle est convergente

(d) Si  $U$  est convergente alors elle est bornée

### Exercice 3

On considère la suite  $(I_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n$$

1) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n \geq 0$

b) Montrer que  $(I_n)$  est une suite décroissante.

c) En déduire que  $(I_n)$  est une suite convergente.

2) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

3) Calculer  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_4$

### Exercice 4

Un fournisseur livre deux catégories de câbles  $C_1$  et  $C_2$ .

Dans chaque livraison figurent 20% de câbles  $C_1$  et 80% de câbles

$C_2$ . Les parties  $A$  et  $B$  sont indépendantes.

On prélève, au hasard, 4 câbles dans une livraison de 50 câbles.

1) Préciser la probabilité de l'événement :

$E$  "les 4 câbles sont du type  $C_1$ "

2) Préciser la probabilité de l'événement  $F$  "1 câble est du type  $C_1$  et 3 câbles sont du type  $C_2$ "

3) Préciser la probabilité de l'événement  $G =$  "au moins un câble est du type  $C_1$ "

### Exercice 5

$$\text{Soit : } \begin{cases} f(x) = x + 1 - x \ln x ; \text{ si } x > 0 ; \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1-Montrer que  $f$  est continu à droite en 0. Puis étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

2-a)Vérifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*_+$  et que  $f'(x) = -\text{Log}(x)$

b) Etudier les variations de  $f$

c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  et que  $\alpha$  appartient à  $]3;5[$

d) Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

## Corrigé

### Exercice 1

1-

$$A = \overline{aab4}_{(7)} = \overline{1a4a}_{(11)}$$

$$A = a.7^3 + a.7^2 + b.7 + 4 = 11^3 + a11^2 + 4.11 + a$$

$$A \equiv 1 + a + a[2] \equiv 1[2] \text{ car } 11^n \equiv 1[2]$$

$$A \equiv b[2] \text{ donc } b \equiv 1[2] ; 7^n \equiv 1[2]$$

Donc  $b$  est impaire puisque  $b \geq 2$  donc  $b = 3$  ou  $b = 5$

On a :  $b \geq 2$  et  $b$  est impaire donc  $b = 3$  ou  $b = 5$

Si  $b=3$  alors :

$$A = a.7^3 + a.7^2 + 25 = 11^3 + a.112 + 44 \Rightarrow$$

$$392a + 25 = 122a + 1375 \Rightarrow$$

$$270a = 1350 \Rightarrow$$

$$27a = 135 \text{ acceptable car } 135 = 5 \times 27$$

Si  $b=5$  alors :

$$392a + 39 = 122a + 1375 \Rightarrow$$

$$270a = 1336$$

$$270 \cdot a \equiv 0[5] \text{ et } 1336 \equiv 1[5] \text{ donc } b=3 \text{ et } a=5$$

$$b = 3; a = 5 \Rightarrow A = 392 \times 5 + 25$$

$$\Rightarrow A = 1985$$

Conclusion :  $a=5$  ;  $b=3$  ;  $A=1985$

«  $A^{n+1} + 3 \cdot A^n$  est divisible par 7 » :  $P_n$

On a :  $A + 3 \equiv 1988 \equiv 0[7]$  donc la propriété de  $P_n$  est vrai pour  $n=0$ .

Supposons que  $P_n$  est vraie jusqu'à l'ordre  $n$

$$A^{n+2} + 3A^{n+1} \equiv A^{n+1}[A + 3] \equiv 0[7] \text{ car } A + 3 \equiv 0[7]$$

$$A^{n+1} + pA^n \equiv 0[7] \Rightarrow A^n[A + p] \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow A + p \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow 4 + p \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow (7 - 3) + p \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow p \equiv 3[7] \text{ Donc } p = 7k + 3; k \in \mathbb{N}$$

### Exercice 2 :

Numéro de la question	1	2	3
Réponse exacte	b	b	d

### Exercice 3 :

1)a) Pour tout  $x$  de  $[0; \frac{\pi}{4}]$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :  $0 \leq (\tan x)^n \leq 1$

Donc  $I_n \geq 0$ .

b) On a : tout  $x$  de  $[0 ; \frac{\pi}{4}]$  :  $0 \leq \tan x \leq 1$  donc  $0 \leq (\tan x)^{n+1} \leq (\tan x)^n$

donc  $I_{n+1} \leq I_n$  d'où la suite  $(I_n)$  est décroissante.

c) La suite  $(I_n)$  est décroissante ; minorée par 0 donc elle est convergente.

2-a) Calcul de  $I_{n+2} + I_n$

$$\begin{aligned} I_{n+2} + I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \cdot \tan^n x \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)' \cdot \tan^n x \, dx = \frac{1}{n+1} [(\tan x)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

b) La relation  $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$  et  $I_n \geq 0$  affirme que :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \text{ donc La suite } (I_n) \text{ converge vers } 0.$$

3) Calcul de  $I_1$  ;  $I_2$  ; et  $I_4$ .

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(\tan x)' - 1] \, dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{La relation } I_2 + I_4 = \frac{1}{3} \text{ donne } I_4 = \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$

#### Exercice 4 :

il y a deux catégories de câbles  $C_1$  et  $C_2$ , dans chaque livraison figurent

20% de  $C_1$  80% de  $C_2$

Un livraison de 50 câbles est formé de 20% de  $C_1$  et 40 câbles  $C_2$  : le nombre des choix possibles est :  $C_{50}^4 = 345450$

$$1/ P(E) = \frac{C_{10}^4}{C_{50}^4} = \frac{3}{3290}$$

$$2/ P(F) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_{40}^3}{C_{50}^4} = \frac{988}{2303}$$

3)  $\bar{G}$  : " aucun câble de type  $C_1$  "

$$P(\bar{G}) = \frac{C_{40}^4}{C_{50}^4} \text{ donc } p(G) = 1 - P(\bar{G}) = \frac{13891}{23030}$$

### Exercice 5

Soit :  $\begin{cases} f(x) = x + 1 - x \ln x ; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1-Montrer que  $f$  est continu à droite en 0.

Puis étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

On a :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = 1 = f(0)$  ce qui affirme que :

$f$  est continue en 0

Si  $x > 0$  alors :  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 - \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0

2-a)Vérifier que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*_+$  et que  $f'(x) = -\ln(x)$

Pour  $x > 0$  ;  $f$  est la somme de deux fonction dérivables sur  $]0 ; +\infty[$  et

pour tout  $x > 0$  on a :  $f'(x) = 1 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = -\ln x$

b)Variations de  $f$

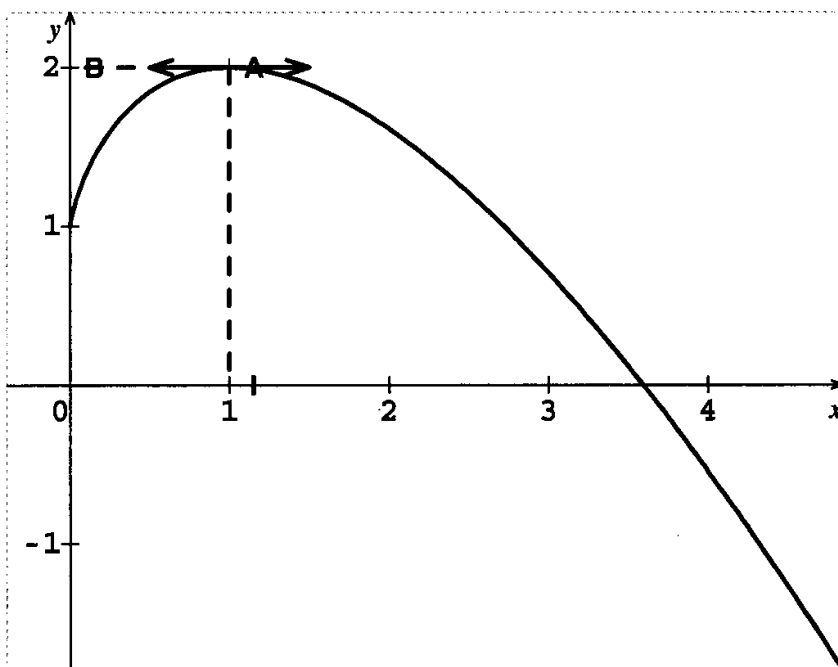
$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f$	1	2	$-\infty$

c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  et que  $\alpha$  appartient à  $]3 ; 4[$

\* Sur l'intervalle  $]0 ; 1]$   $f$  est continue, strictement croissante et  $f(0) = 1$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n' a aucune solution

\* Sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$   $f$  est continue, strictement décroissante et  $f(1) = 2$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  de plus :  $f(3).f(4) < 0$  donc  $\alpha \in ]3 ; 4[$ .

d) Tracer  $C_f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$



### Sujet4

**Exercice1** : Soit  $U$  la suite définie par:

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$$

1-a) Calculer  $U_1$  et  $U_2$  puis vérifier que  $U$  n'est ni géométrique ni arithmétique.

b) Représenter les premiers termes de la suite  $U$ . Conjecturer

2- Montrer par récurrence que  $U_n \in [0; 2]$

3-a) Montrer que la suite  $U$  est croissante. En déduire qu'elle est convergente

b) En utilisant la fonction  $f: x \rightarrow \sqrt{2+x}$  calculer la limite de  $U$

4-a) Montrer que :  $2 - U_n \leq \frac{2 - U_{n-1}}{2}$

b) En déduire que :  $2 - U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Retrouver alors le résultat de 3-b)

### Exercice 2(Q-C-M)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.

1- Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher, 5 sont rouges et 3 sont noires. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

A. La probabilité de tirer 3 boules noires est :

(a)  $\frac{1}{56}$  (b)  $\frac{3}{8}$  (c)  $\frac{1}{120}$

B. La probabilité de tirer 3 boules de la même couleur est :

(a)  $\frac{11}{56}$  ; (b)  $\frac{8}{56}$  ; (c)  $\frac{15}{120}$

2- Soit  $f$  une fonction définie continue en  $x_0$  ;  $f$  est strictement croissante sur un intervalle de type  $]x_0 - \alpha ; x_0 + \alpha[$   $\alpha > 0$  si

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$  alors la courbe  $(C)$  de  $f$  admet au point

$A(x_0 ; f(x_0))$  une demi tangente :

a) horizontale ; b) verticale dirigée vers le bas ;

c) verticale dirigée vers le haut

3-) Soit  $z$  un nombre complexe ;  $z$  vérifie :  $1 + z + z^2 + z^3 = 0$  si et seulement si  $z$  est un élément de :

a)  $\{-1 ; 1\}$  ; b)  $\{-1 ; i\}$  ; c)  $\{i ; -i ; -1\}$

4) Soit  $\Omega(a ; b)$  un centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Les coordonnées du point  $\Omega$  vérifient :

a)  $f(a - x) = 2b - f(x)$ ; b)  $f(2a - x) + f(x) = 2b$ ; c)  $f(2a - x) = 2b + f(x)$

### Exercice 3 :

La société INFOLOG a mis au point un nouveau logiciel de gestion destiné aux PME. Cette société a mené une enquête dans une région auprès de 300 entreprises équipées d'ordinateurs aptes à recevoir ce logiciel, ceci afin de déterminer à quel prix chacune de ces entreprises accepterait d'acquérir un exemplaire de ce nouveau logiciel. Elle a obtenu les résultats suivants :

X prix proposé pour le nouveau logiciel en centaines de dinars	30	25	20	15	10
Y nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.	90	120	170	200	260

1. Représenter graphiquement le nuage de points de la série  $(x_i ; y_i)$  dans un repère orthogonal (unités : 1 cm pour 200 dinars en abscisses et 5 cm pour 100 entreprises en ordonnées) Placer le point moyen  $G$  après avoir déterminé ses coordonnées.
2. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite  $D$  d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  sous la forme  $y = ax + b$ . les résultats ne seront pas arrondis. Tracer  $D$  sur le graphique précédent.
3. En utilisant l'ajustement précédent, préciser pour quel prix de vente la société INFOLOG peut espérer que les 300 entreprises contactées acceptent d'acquérir ce logiciel.
4. On note  $R(x)$  la recette, exprimée en centaines d'euros, dégagée par la vente de  $y$  logiciels au prix de  $x$  centaines de dinars.
  - a. En utilisant la relation entre  $y$  et  $x$  obtenue à la question 2, donner l'expression de  $R(x)$  pour  $x$  variant entre 5 et 30.

b. Étudier les variations de la fonction  $R$  sur  $[5 ; 30]$  et en déduire le prix de vente du logiciel, exprimé en dinars, pour que la recette  $R(x)$  soit maximale. Déterminer alors le montant de cette recette ainsi que le nombre d'entreprises disposées à acheter le logiciel à ce prix.

#### Exercice 4 Partie A

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x^2} ; g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respectivement  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$  dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée .

1. Identifier  $C_f$  et  $C_g$  sur la figure fournie. (Justifier la réponse).
2. Étudier la parité des fonctions  $f$  et  $g$  .
3. Étudier le sens de variation de  $f$  et de  $g$  . Étudier les limites éventuelles de  $f$  et de  $g$  en  $+\infty$ .
4. Étudier la position relative de  $C_f$  et  $C_g$  .

#### Partie B

On considère la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \text{ Erreur ! Signet non défini.}$$

1. Que représente  $G$  pour la fonction  $g$  ?
2. Donner, pour  $x > 0$ , une interprétation de  $G(x)$  en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de  $G$  sur  $\mathbb{R}$ .

On définit la fonction  $F$  sur  $\mathbb{R}$  par : pour tout réel  $x$ ,  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$

4.a) Démontrer, que, pour tout réel  $x$ ,  $G(x) = \frac{1}{2} [ F(x) - x ]$

b) Démontrer que  $F$  admet une limite finie  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

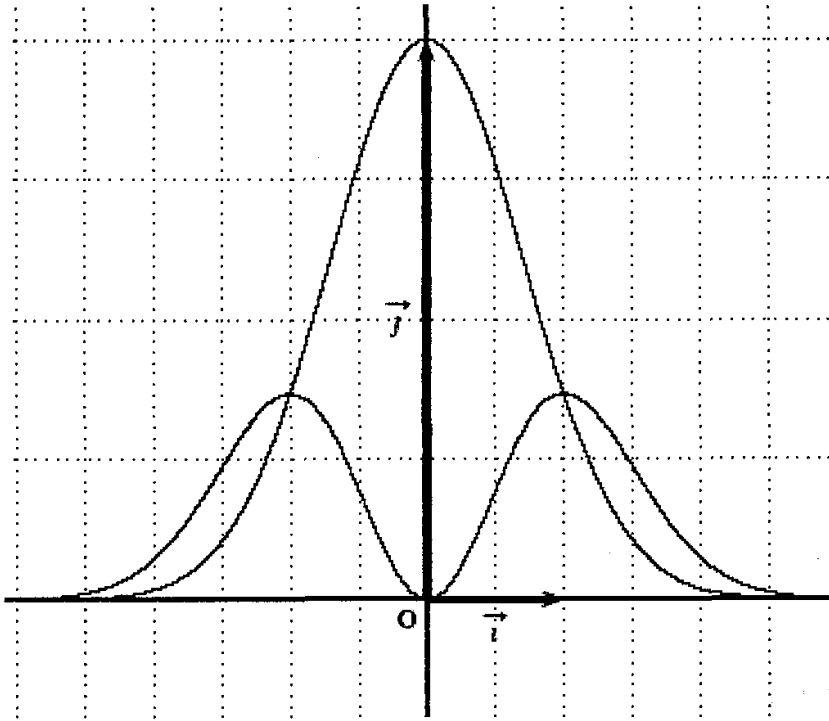
5. a. Démontrer que la fonction  $G$  admet une limite en  $+\infty$  que l'on précisera.

b. Interpréter en termes d'aires le réel  $N = \int_0^1 (1-t^2)e^{-t^2} dt$

c. En admettant que la limite de G en  $+\infty$  représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite  $(O; \vec{u})$  et la courbe  $C_g$

justifier graphiquement que  $N \geq \frac{l}{2}$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie)



## Corrigé

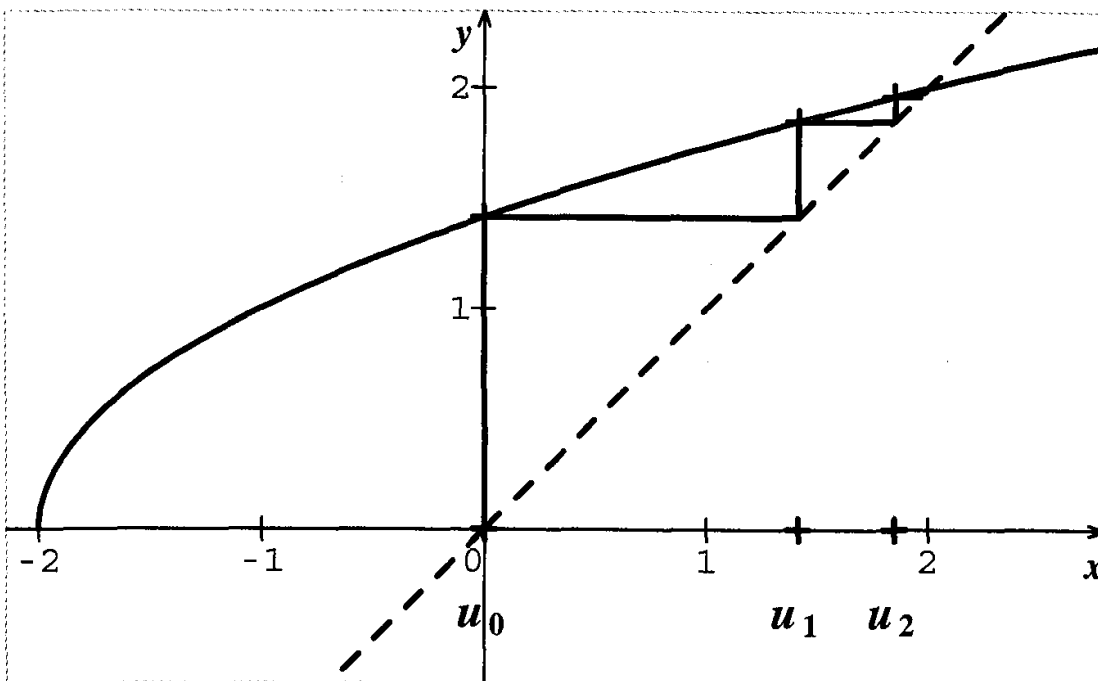
### Exercice 1

Soit U la suite définie par :  $U_0 = 0$  et  $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1-a) Calcul des premiers termes :

$U_1 = \sqrt{2}$ ;  $U_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ .  $2U_1 \neq U_0 + U_2$  et  $U_1^2 \neq U_0 \cdot U_2$  donc U n'est ni géométrique ni arithmétique

b)



2) Montrons que  $U_n \in [0 ; 2]$

On a  $U_0 = 0$  vrai

Supposons que  $U_n \in [0 ; 2]$  donc  $0 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2 \leq 2 + U_n \leq 4 \Rightarrow$

$$0 \leq \sqrt{2 + U_n} \leq 2 \text{ donc } U_{n+1} \in [0 ; 2]$$

3- Montrons que la suite  $U$  est croissante.

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{2 + U_n} - U_n = \frac{2 + U_n - U_n^2}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + \sqrt{2 + U_n}} \geq 0$$

Car  $U_n \in [0 ; 2]$  donc  $U$  est croissante

\*Convergence de la suite  $U$

$U$  est monotone bornée donc elle est convergente

4-a) Montrons que :  $2 - U_n \leq \frac{2 - U_{n-1}}{2}$

La fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2 + x}$  ; est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} \leq \frac{1}{2}$$

De plus  $f(2) = 2$  : le théorème des accroissements finis nous

affirme que :  $|f(2) - f(U_{n-1})| = |2 - f(U_{n-1})| \leq \frac{1}{2} |2 - U_{n-1}|$  d'après

2) on a  $U_{n+1} \in [0 ; 2]$  donc :  $2 - U_n \leq \frac{2 - U_{n-1}}{2}$

b) En écrivant les différentes inégalités (1) de 1 à n puis multipliant

membre à membre on obtient :  $2 - U_n \leq \frac{1}{2^n} (2 - U_0)$

$U_0 = 0$  d'où :  $2 - U_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . les théorèmes de l'encadrement de limite

donnent :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - U_n) = 0$  donc :

$U$  est convergente et qu'elle converge vers 0

## Exercice 2

N° de la question	1-a	1-b	2	3	4
Réponse correcte	A	A	b	c	b

## Exercice 3

1-Voir figure ci-dessous

2)  $\sigma(x) = 7,07107$  ;  $\sigma(y) = 59,7997$

$\text{Cov}(x ; y) = -420$  ;  $r = -0,993266$

L'équation de la droite de régression de y en x est  $D : -8,4.x + 336$

3) lorsque  $y = 300$  alors  $x = \frac{36}{8,4} \approx 4,2857$  c'est-à-dire le prix est à

l'ordre de : 428,57 dinars.

4-a) Expression de la recette  $R(x)$

$$R(x) = x \cdot y = -8.4 \cdot x^2 + 336 \cdot x$$

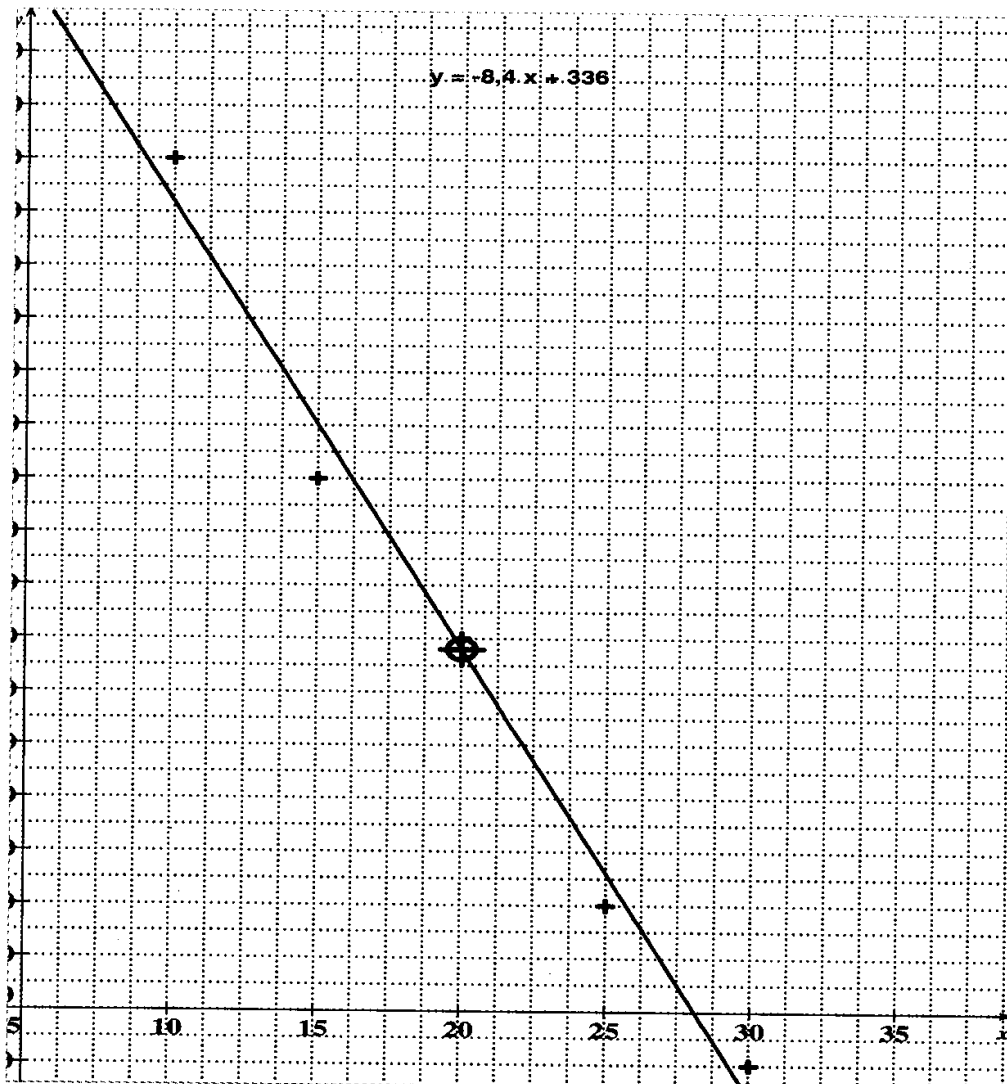
$$b) R'(x) = -16.8x + 336$$

$$R'(x) = 0 \text{ lorsque } x = \frac{3360}{168} = 20$$

x	5	20	30
R'(x)	+	0	-
R(x) en centaine de dinars	1470	3360	2520

b) R est maximal lorsque le prix de vente est 20 milles dinars et la recette sera 3360 milles dinars ; le nombre d'entreprise est :

$$y = \frac{R(x)}{x} = \frac{3360}{20} = 168$$



**Exercice 4 :      Partie A**

1.) On a  $f(0) = 1$  et  $g(0) = 0$ , ce qui permet de distinguer  $C_f$  et  $C_g$ .

2.)

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$   $f$  étant définie sur un intervalle symétrique autour de 0 est donc paire.

$$g(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = g(x);$$

pour les mêmes raisons la fonction  $g$  est paire.

3. Dérivée :  $f'(x) = (-2x)$ . qui est signe de  $(-x)$  : donc  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}_-$  et décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

En posant  $x^2 = X$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

De même pour  $g$ ,  $g'(x) = 2xe^{-x^2} - 2x \cdot x^2 e^{-x^2} = (2x - 2x^3)e^{-x^2}$  qui est du signe de  $x(1 - x^2)$ . On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

La limite est identique au voisinage de  $-\infty$ .

On obtient les tableaux de variations suivants :

<b>x</b>	$-\infty$	0	$+\infty$
<b>f'(x)</b>	+	0	-
<b>f(x)</b>	0	1	1

<b>x</b>	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
<b>g'(x)</b>	+	0	-	0	+	0	-
<b>g(x)</b>	0	$\frac{1}{e}$	0	$\frac{1}{e}$	0		

4. Soit  $d(x) = f(x) - g(x) = (1-x^2)$  qui est du signe de  $1-x^2$ , donc positive sur  $[-1; 1]$ , négative ailleurs. Conclusion :

- Sur  $[-1; 1]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , donc  $C_f$  est au dessus de  $C_g$ ;

- Sur  $]-\infty; -1[$  et  $1; +\infty[$ ,  $C_f$  est au-dessous de  $C_g$ .

### Partie B

1.  $G$  étant dérivable donc continue,  $G$  est la primitive de la fonction  $g$  qui s'annule en 0.

2. Pour  $x > 0$ ,  $G(x)$  représente en unités d'aire, l'aire de la surface limitée par l'axe des abscisses, la courbe  $C_g$  et les droites d'équations,  $X = 0$  et  $X = x$ .

3-On a par définition  $G'(x) = g(x)$  et d'après la question 3 de la partie A, 2- )  $g(x) \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $G$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4. a) Les fonctions  $u$  et  $v$  étant dérivables, on peut intégrer  $G(x)$  par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = \frac{-1}{2}t ; u'(t) = \frac{-1}{2} \\ v'(t) = -2te^{-t^2} \text{ et } v(t) = e^{-t^2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } G(x) = \left[ \frac{-1}{2}te^{-t^2} \right]_0^x + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [F(x) - xe^{-x^2}]$$

b)  $F$  est croissante  $F(x) = F(1) + \int_1^x f(t) dt$  or si  $x \geq 1$  alors :

$-t^2 \leq -t$  donc

$$\int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x e^{-t} dt \leq \frac{1}{e}$$

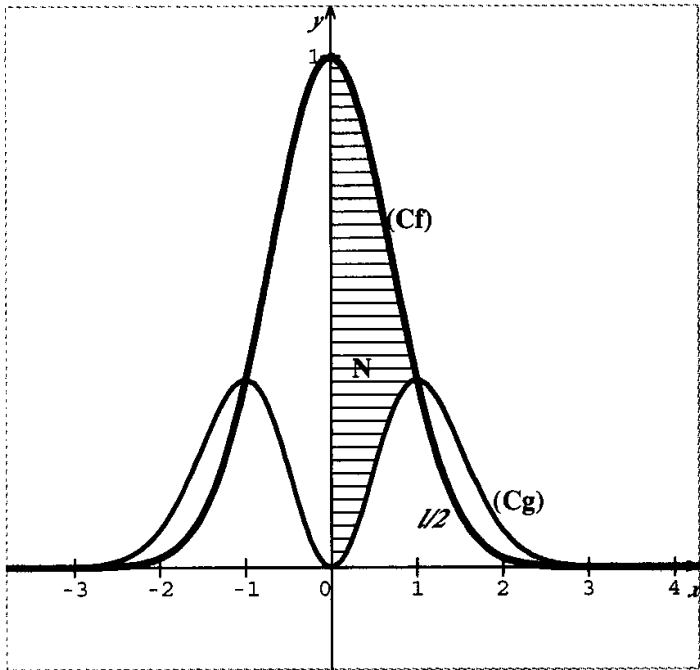
par suite  $F$  est continue, croissante et majorée donc elle admet une limite finie en  $+\infty$

5. a. Soit  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

Toutes les fonctions de l'égalité précédente étant continues, on peut en déduire à la limite que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \frac{l}{2}$

b)  $N = F(1) - G(1)$ .  $N$  représente donc l'aire de la surface limitée par les droites :  $x = 0$ ,  $x = 1$ , et les deux courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

c) On voit sur le graphique  $N >$



### Sujet 5

Exercice N°1 pour chaque question il y a quatre réponses dont une et une seule est correcte. la quelle ?

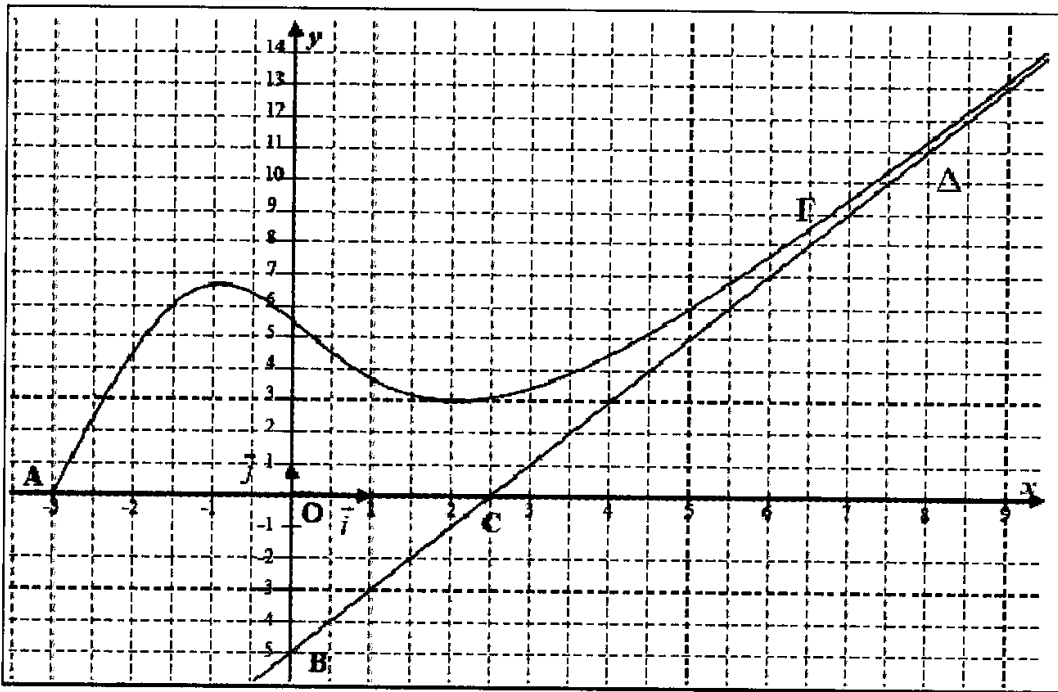
1-On considère la courbe ci-dessous.

a) la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[-2 ; 1]$

b) la droite (D) :  $y = 2x - 5$  est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = +\infty$

d)  $f'(0) = 1$



2- Si la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  alors

\* l'équation  $f(x) = 0$  admet :

a) Au moins une solution. ; b) Au plus une solution.

c) Exactement une solution ; d) Aucune solution

3- Si  $M$  ;  $M'$  ;  $M''$  deux points distincts du plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ , d'affixes respectives :  $z$  ;  $z'$  ;

$z + z'$  tels que :  $|z| = |z'| = 1$  alors :

a)  $z = -z'$  ; b)  $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(z')$  ; c)  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 1$  ; d)  $OMM''M'$  est un losange

**Exercice 2** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue  $z$  suivante :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que  $-i$  est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels  $a, b, c$  tels que :

$$z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i = (z+i)(az^2 + bz + c).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 3 :** Pour coder un message, on procède de la manière

suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier  $n$  de l'ensemble  $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$  selon le tableau ci-dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

$a$  et  $b$  étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier  $n$  de  $\Omega$  le reste de la division euclidienne de  $(an+b)$  par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec  $a = 2$  et  $b = 3$ , on procède de la manière suivante:

étape 1 : on lui associe l'entier  $n = 15$ .

étape 2 : le reste de la division de  $2 \times 15 + 3 = 33$  par 26 est 7.

étape 3 : on associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend  $a = 0$  ?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit :  $a = 13$ .

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend  $a = 5$  et  $b = 2$ .

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers  $n$  et  $p$ . Montrer, que si  $5n + 2$  et  $5p + 2$  ont le même reste dans la division par 26 alors  $n - p$  est un multiple de 26. En déduire que  $n = p$ .

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément  $n$  de  $\Omega$  tel que :  $5n - 26y = 2$ , où  $y$  est un entier.

b. On considère l'équation  $5x - 26y = 2$ , avec  $x$  et  $y$  entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation  $5x - 26y = 2$ .

ii. Résoudre alors l'équation  $5x - 26y = 2$ .

iii. En déduire qu'il existe un unique couple  $(x; y)$  solution de l'équation précédente, avec  $0 \leq x \leq 25$ .

c. Décoder alors la lettre E.

**Exercice 4 :** On considère les matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1-Vérifier que :  $A = J + 10.I$

2-Calculer  $J^2$  ;  $I^2$  ;  $I.J$  ; en déduire  $A^2$  en fonction de I et J

3-Calculer alors :  $A^3$  en fonction de I et J

**Exercice 5 :** On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble IR des

nombre réels par :  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère ortho normal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique : 5 cm).

**Partie A. Étude de la fonction f**

1. Vérifier que pour tout nombre réel x :  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

2. Déterminer les limites de f en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3. Calculer  $f'(x)$  pour tout nombre réel x. En déduire les variations de f sur IR.

4. Dresser le tableau des variations de f.

5. Tracer la courbe C et ses asymptotes éventuelles dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

**Partie B. Quelques propriétés graphiques.**

On considère les points M et M' de la courbe C d'abscisses respectives : x et -x. Déterminer les coordonnées du milieu A du segment [MM'].

Que représente le point A pour la courbe C ?

2. Soit  $n$  un entier naturel. On désigne par  $D_n$  le domaine du plan limité par la droite d'équation  $y = 1$ , la courbe  $C$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = n$ ,  $A_n$  désigne l'aire du domaine  $D_n$  exprimée en unité d'aire.

a. Calculer  $A_n$ .

b. Étudier la limite éventuelle de  $A_n$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Corrigé :

#### Exercice 1 : QCM

Numéro de la question	1	2	3
Réponse exacte	b	b	d

#### Exercice 2 : I-Résolution de (E)

1-vérifions que  $i$  est une solution de (E)

On a:  $(-i)^3 + (-8+i) \times i^2 + (17-8i) \times (-i) + 17i = i+8 - 1 - 17i - 8 + 17i = 0$

donc :-  $i$  est une solution de (E).

En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système

$$\begin{cases} a = 1 \\ ai + b = -8 + i \\ c + ib = 17 - 8i \\ ic = 17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 17 \end{cases}$$

On a donc pour tout complexe  $z$ ,

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 - 8z + 17)$$

3- On a donc (E)  $\Leftrightarrow (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$  ou

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

donc  $z = -i$  ou  $z^2 - 8z + 17 = 0$

$$z' = \frac{8 - 2i}{2} = 4 - i; z'' = 4 + i$$

On trouve aussitôt que :  $S = \{-i; 4+i; 4-i\}$

**Exercice 3 :**

1. Si  $a = 0$ ,  $a_n + b = b$ , donc toutes les lettres seront codées par la même lettre correspondant au reste de la division de  $b$  par 26.

2. Si  $a = 13$ .

A correspond à 0, donc  $a_n + b = b$ . A est codée par la lettre qui correspond au reste de la division de  $b$  par 26.

C correspond à 2, donc  $a_n + b = 13 \times 2 + b \equiv b \pmod{26}$ . Donc C est codé de la même façon que A.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend  $a = 5$  et  $b = 2$ .

$$\text{a. Si : } \begin{cases} 5n + 2 \equiv r \pmod{26} \\ 5p + 2 \equiv r \pmod{26} \end{cases}$$

alors par différence  $5(n-p) \equiv 0 \pmod{26} \Rightarrow$

$n - p \equiv 0 \pmod{26}$  (car 5 est premier avec 26), donc finalement

$n \equiv p \pmod{26}$ . Or  $n$  et  $p$  sont inférieurs à 26. Conclusion  $n = p$ .

b. On a la suite :

$A \rightarrow 0 \rightarrow 2 \rightarrow C$

$M \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow K$

$I \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow Q$ .

AMI est codé « CKQ ».

4. a. D'après le tableau E correspond à 4. Donc la lettre codée E correspond à un nombre  $n$  tel que

$$5n + 2 \equiv 4 \pmod{26} \Leftrightarrow$$

$$5n - 2 \equiv 0 \pmod{26} \Leftrightarrow$$

$$5n - 2 = 26y, \text{ avec } y \in \mathbb{Z}$$

b. On considère l'équation  $5x - 26y = 2$ , avec  $x$  et  $y$  entiers relatifs.

(i) Solution particulière de l'équation  $5x - 26y = 2$ . On a

$$26 = 5 \times 5 + 1 \Leftrightarrow 26 \times 1 - 5 \times 5 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \times 26 - 10 \times 5 = 2$$

$$\Leftrightarrow 5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2. \text{ On a donc une solution :}$$

le couple  $(-10 ; -2)$ .

(ii). On a le système :

$$\begin{cases} 5x - 26y = 2 \\ 5 \times (-10) - 26 \times (-2) = 2 \text{ d'où par différence :} \\ 5(x + 10) - 26(y + 2) = 0 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$5(x + 10) = 26(y + 2)$ . 5 et 26 étant premiers entre eux, il en résulte d'après le théorème de Gauss qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x + 10 = 26k$ , d'où en substituant dans la dernière égalité :

$y + 2 = 5k$ . On obtient donc : les couples solutions sont les couples  $(x ; y)$

$$\text{tels que: } \begin{cases} x = 26k - 10 \\ y = 5k - 2 \end{cases}$$

$$(iii). 0 \leq x \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq 26k - 10 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq 26k \leq 35 \Rightarrow k = 1.$$

Finalemment  $x = 16$  et  $y = 3$ . Le seul couple solution est  $(16 ; 3)$ .

c. La lettre codée E correspond à  $x = n = 16$ .

D'après le tableau c'est Q.

**Exercice 4 :** On considère les matrices suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1-) J + 10I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$2-) J^2 = 3J; I^2 = 0; IJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; JI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$A^2 = 3J + 10(IJ + JI)$$

$$\begin{aligned} 3-) A^3 &= A^2 \cdot A = [3J + 10(IJ + JI)](J + 10I) \\ &= 19J + 30(IJ + JI) + 100I \end{aligned}$$

**Exercice 5 :      Partie A****1-transformation de  $f(x)$** 

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

**2-Calcul des limites aux bornes :**

$\lim_{+\infty} f = 1$  car:  $e^{-x}$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $(-\infty)$

$$\lim_{-\infty} f = 0$$

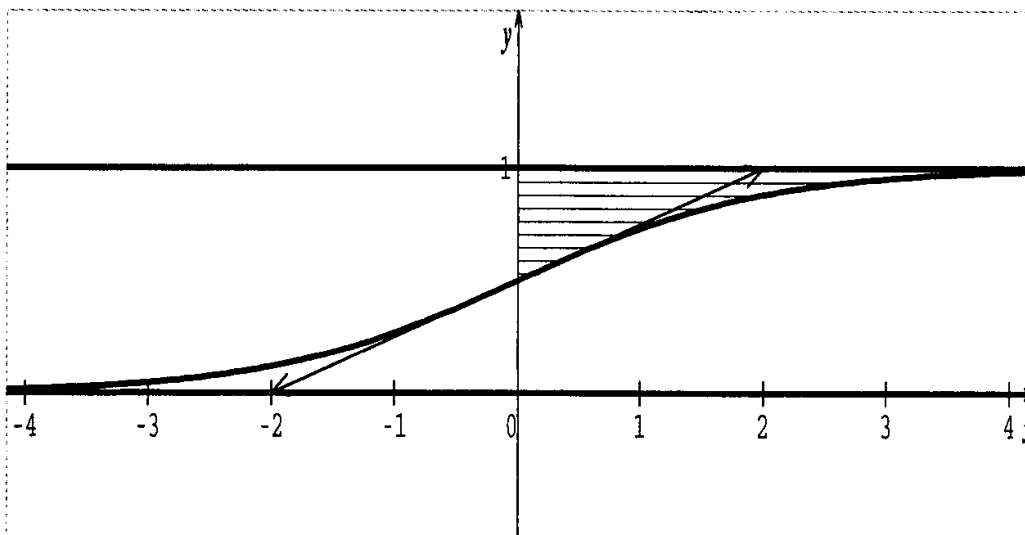
**3-Calcul de  $f'(x)$** 

$f$  est continument dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a :

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

**4-Tableau des variations de  $f$** 

<b>x</b>	$-\infty$	$+\infty$
<b><math>f'(x)</math></b>	+	
<b><math>f(x)</math></b>		

**5-Courbe de  $f$** 

**Partie B**

1- Soit les points  $M(x; f(x)) ; M'(-x; f(-x))$

$f(x) + f(-x) = 1$  donc le milieu A du segment  $[MM']$  a pour coordonnées  $(0; 0.5)$  le point A est donc le centre de symétrie de la courbe (C) de f

$$2 - a) A_n = \int_0^n [1 - f(x)] dx = [x - \ln(1 + e^x)]_0^n$$

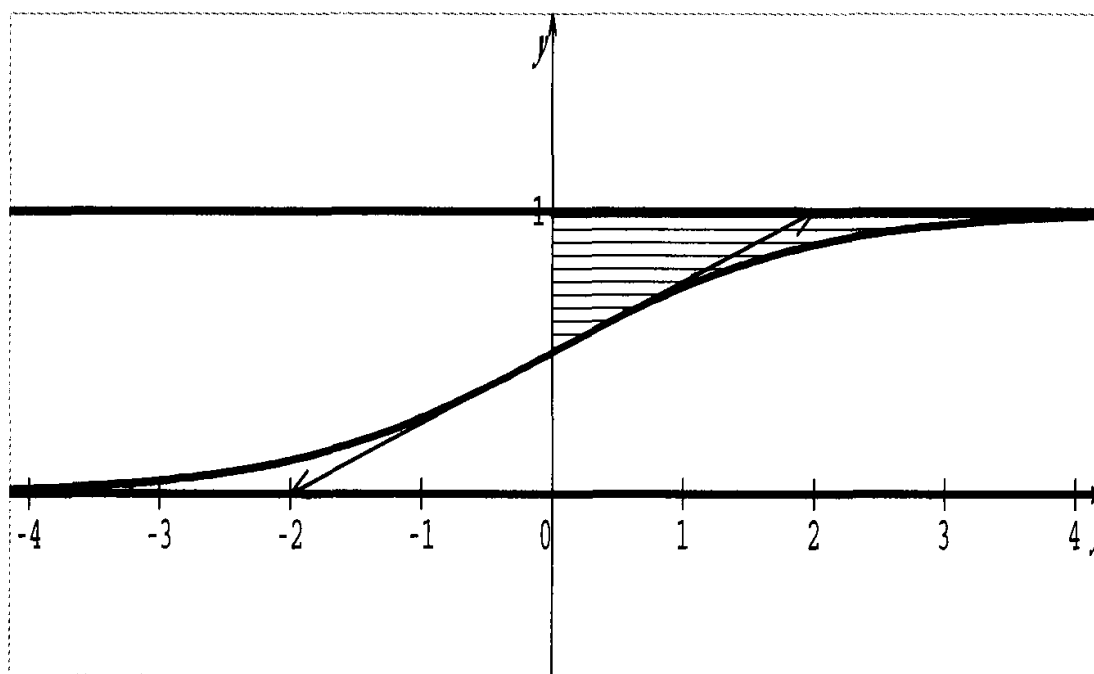
$$= n - \ln(1 + e^n) + \ln 2$$

$$A_n = \ln[f(n)] + \ln(2)$$

b) Limite de  $A_n$  lorsque n tend vers  $+\infty$

On a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f = 1$  donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \ln 2$

donc



**Sujet 6****Exercice 1 :**

1)  $p$  étant un entier naturel non nul  $n$  est un entier strictement supérieur à 1 ; on considère les entiers  $a$  et  $b$  définis par :

$a = p.n$  ;  $b = p(n - 1)$ . Montrer que :  $\text{PGCD}(a ; b) = a - b$ .

2)a- Démontrer que , si  $\text{PGCD}(a , b) = a - b$  alors  $a$  et  $b$  sont de la forme :  
 $a = np$  ;  $b = (n - 1)p$ .

b- Résoudre dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  le système :  $\begin{cases} \text{PGCD}(a , b) = a - b \\ \text{PPCM}(a , b) = 30. \end{cases}$

**Exercice 2**

Pour chaque question, il y a une ou deux propositions correctes.

1- Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , est définie par :

(A):  $f''(x) = -2 \int_0^x t e^{-t^2} dt$  ; (B)  $f''(x) = -2 \int_0^x x e^{-t^2} dt$

(C)  $f''(x) = -2x e^{-x^2}$  ; (D)  $f''(x) = e^{-x^2}$

2- Soit  $M$  la matrice définie par :  $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  ;  $\det(M) =$

(a) 0 ; (b) 1 ; (c) -1 ; (d) 3

3- Soit  $M$  une matrice l'équation  $M^2 = 0$  admet :

une seule solution ; (b) Une infinité des solutions ; (c) Aucune solution

4- Soit  $A = 2^{2008} - 1$

a)  $A$  est divisible par 2 ; b)  $A$  est divisible par 5 ; c)  $A$  est divisible par 15 ;

d)  $A$  est premier.

**Exercice 3**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  (unité graphique 1 cm). On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue  $z$  suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0.$$

**I. Résolution de l'équation (E).**

1. Montrer que  $-i$  est solution de (E).

2. Déterminer les nombres réels  $a, b, c$  tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(az^2 + bz + c).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II- On appelle A, B et C les points d'affixes respectives :  $4 + i, 4 - i, -i$ .

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Le point  $\Omega$  est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par l'application  $f : P \rightarrow P$  qui à tout point M d'affixe  $z$  associe le point M' d'affixe  $z' = iz + 2 - 2i$ . Calculer l'affixe de S.

3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle C de centre  $\Omega$  et déterminer son rayon. Tracer (C)

4. À tout point M d'affixe  $z \neq 2$ , on associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2}$$

a. Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.

b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle C' de centre P, d'affixe  $i$ . Déterminer son rayon et tracer C'

c. Pour tout nombre complexe  $z \neq 2$ , exprimer  $|z' - i|$  en fonction de  $z$ .

d. Soit M un point d'affixe  $z$  appartenant au cercle C.

Démontrer que :  $|z' - i| = 2\sqrt{5}$ .

e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle C.

**Exercice 4 :**

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on note  $f_k$  l'application de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$  définie par : si

$$k \neq 0 \quad f_k(x) = x^k \sqrt{1-x} \quad \text{et} \quad f_0(x) = \sqrt{1-x}$$

1-Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f_k$ .

2-a) Donner, en distinguant selon la valeur de  $k$ , le tableau de variation de  $f_k$

b) Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes  $C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  représentatives de  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .

c) Calculer le volume du solide engendré par la rotation de la courbe ( $C_1$ ) autour de l'axe des abscisses

3 – Calculer  $\int_0^1 f_0(x) dx$ .

4-Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose:

$$I_k = \int_0^1 f_k(x) dx$$

a) Montrer, en intégrant par parties, que pour tout

entier  $k \geq 1$  :  $I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$

En déduire une expression de  $I_k$ .

b) En remarquant que  $I_k > 0$  déduire de a) que la suite  $(I_k)$  est décroissante ; puis montrer qu'elle est convergente.

5-a) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $I_k \leq \frac{1}{k+1}$

b) Calculer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k$$

**Corrigé**

### Exercice 1

1°/  $P$  est un entier naturel non nul  $n \in \mathbb{N}^*$

$$a = n_p ; b = a - p , n > 1$$

$$a = b + p , b = (n-1)p + 0$$

donc  $\text{PGCD}(a,b) = p$  ( algorithme d'Euclide)

2°/ a°/ Soit a et b deux entiers naturels tels que PGCD (a,b) = a - b , donc il existe deux entiers d et d' tel que :

$$b = d(a-b) ; a = d'(a-b) \Rightarrow d' - d = 1$$

On pose a-b=p ; d'= n

Donc a= np ; b = (n-1) p

$$b^\circ / \begin{cases} \text{PGCD}(a,b) = a - b \\ \text{PPCM}(a,b) = 30 \end{cases}$$

$$* a.b = 30(a-b) = 30p = p^2 n(n-1)$$

$$\Rightarrow 30 = 6.5.1 = 3.2.5 = 2.1.15$$

D'où n=6; p=1 → a=6, b = 5

\* n=3 ; p=5 → a=15 ; b = 10

\* n=2 ; p = 15 → a=30 ; b = 15

## Exercice 2

Numéro de la question	1	2	3	4
Réponses correcte	c	a	b	b;c

## Exercice 3

I-Résolution de (E)

1-vérifions que i est une solution de (E)

$$\text{On a } ((-i)^3 + (-8+i) \times i^2 + (17-8i) \times (-i) + 17i = i+8 - 1 - 17i - 8 + 17i = 0$$

donc :- i est solution de (E).

1. En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ ai + b = -8 + i \\ c + ib = 17 - 8i \\ ic = 17i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 17 \end{cases}$$

On a donc pour tout complexe z,

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 - 8z + 17)$$

3- On a donc  $(E) \Leftrightarrow (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0 \Leftrightarrow z + i = 0$  ou

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

donc  $z = -i$  ou  $z^2 - 8z + 17 = 0$

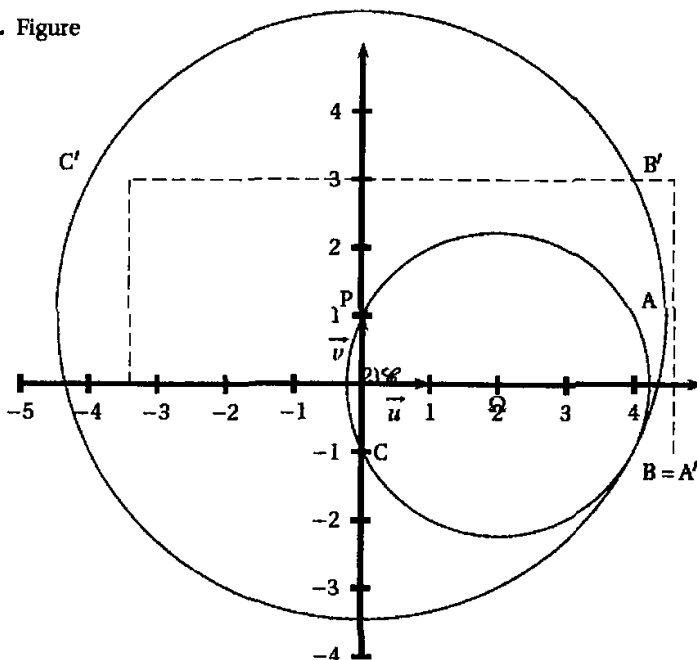
$$\Delta = 64 - 68 = -4 = (2i)^2 \text{ donc il existe deux solutions}$$

$$z' = \frac{8-2i}{2} = 4 - i ; z'' = 4 + i$$

On trouve aussitôt que :  $S = \{-i ; 4+i ; 4-i\}$

II-

1. Figure



2-:  $z' - 2 = i(z - 2)$ . Donc  $z_S - 2 = i(4+i-2) \Leftrightarrow z_S = 2+2i-1 = 1+2i$ .

3. D'après la question précédente :  $\Omega S = \Omega A$ . A et B sont symétriques par rapport à  $(Ox)$ , et  $\Omega \in (Ox)$ , donc  $\Omega A = \Omega B$  ; enfin B et C ayant la même ordonnée,  $\Omega$  appartient à la médiatrice de  $[BC]$  et  $\Omega B = \Omega C$ .

Conclusion B, A, S et C appartiennent à un cercle C de centre  $\Omega$ .

Le rayon est égal à  $\Omega C = \sqrt{5}$

4-a. D'après la définition algébrique

$$z_{A'} = \frac{i(4+i) + 10 - 2i}{4+i-2} = 4 - i = z_B$$

$$z_{B'} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4-i-2} = 4 + 3i$$

$$z_{C'} = \frac{i(-i) + 10 - 2i}{-i-2} = -4 + 3i$$

$$b) PA' = PB' = PC' = 2\sqrt{5}$$

Donc A', B' et C' appartiennent au cercle (C') de centre P et de rayon  $2\sqrt{5}$

$$c) \text{ On a : } z' = \frac{i(z-2) + 10}{z-2} = i + \frac{10}{z-2} \text{ donc : } z' - i = \frac{10}{z-2}$$

$$\text{et en prenant les modules : } |z' - i| = \frac{10}{|z-2|} = \frac{10}{\Omega M}$$

d) Si  $M \in (C)$  alors  $\Omega M = \sqrt{5}$ . D'après la question précédente : d'où :

$$|z' - i| = \frac{10}{\Omega M} = 2\sqrt{5} = PM' \text{ donc } M' \in (C')$$

e. Géométriquement la dernière relation signifie :  $PM' = 2\sqrt{5}$  donc les points M' appartiennent au cercle (C')

Remarque :  $M \in C \Rightarrow z = 2 + \sqrt{5}e^{i\theta}$  avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ . Après calcul on en déduit que  $z' = i + 2\sqrt{5}e^{-i\theta}$  avec  $\theta \in [0; 2\pi[$ .

En prenant les modules on trouve bien que  $|z' - i| = 2\sqrt{5}$ .

Conclusion : l'image du cercle (C) est donc le cercle (C').

#### Exercice 4

1) Si  $k \neq 0$  ;  $f_k(x) = x^k \sqrt{1-x}$  avec  $x \in [0, 1]$  et

$$f_0(x) = \sqrt{1-x}$$

\* f est continue sur  $[0, 1]$  : produit de deux fonctions continues

\* f est dérivable sur  $[0, 1[$  et

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f_k(x) - f_k(1)] \cdot \frac{1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^k}{\sqrt{1-x}} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à gauche en 1

$$\begin{aligned} 2/a/ f'_k(x) &= k x^{k-1} \sqrt{1-x} \cdot \frac{x^k}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2kx^{k-1} - (2k+1)x^k}{2\sqrt{1-x}} ; k \geq 1 \\ &= \frac{x^{k-1} [2k - (2k+1)x]}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

$x$	0	$\frac{2k}{2k+1}$	1
$f'_k(x)$	+	0	-
$f_k(x)$	0	$\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^k \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+1}$	0

Si  $k = 0$  ;  $f'_0(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} < 0$

$x$	0	1
$f'_0(x)$		-
$f_0(x)$	1	0

2-b) Voir figure ci-dessous

$$3^\circ / \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \left[ \frac{-2}{3} (1-x)\sqrt{1-x} \right]_0^1$$

$$4^\circ / I_k = \int_0^1 f_k(x) dx = \frac{2}{3}$$

a/ Montrons que :  $I_k = \frac{2}{2k+3} I_{k-1}$

$$I_k = \int_0^1 x^k \sqrt{1-x} \, dx \quad , \quad k \geq 1$$

On pose :  $U(x) = x^k \Rightarrow U'(x) = kx^{k-1}$

$$V'(x) = \sqrt{1-x} \text{ et } V(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$$

$$\text{Donc } I_k = \left[ \frac{2}{3} x^k (1-x) \sqrt{1-x} \right]_0^1 + \frac{2k}{3} \int_0^1 x^{k-1} \sqrt{1-x} \, dx - \frac{2k}{3} \int_0^1 x^k \sqrt{1-x} \, dx$$

$$\text{Donc } I_k = -\frac{2k}{3} I_k + \frac{2k}{3} I_{k-1}$$

$$\text{Par suite } \left(\frac{2k}{3} + 1\right) I_k = \frac{2k}{3} I_{k-1} \Rightarrow I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$$

$$I_k = \frac{2k}{2k+3} I_{k-1}$$

$$I_{k-1} = \frac{2(k-1)}{2k+1} I_{k-2}$$

$$I_{k-2} = \frac{2(k-2)}{2k-1} I_{k-3}$$

⋮  
⋮

$$I_1 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

**Multipliant membre à membre les k inégalités**

$$\text{On aura : } I_k = \frac{2^{k+1} k!}{3 \cdot 5 \dots (2k+3)} = \frac{(2 \cdot 4 \dots 2k) \cdot (2k+2) 2^{k-1} k!}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (2k+2)(2k+3)}$$

$$I_k = \frac{2^{2k+2} (k+1)!}{(2k+3)!}$$

$$\text{b) } I_k > 0 \text{ et } I_k = \frac{2k}{(2k+3)} I_{k-1} < I_{k-1} \text{ Car } \frac{2k}{2k+3} < 1$$

**donc la suite  $(I_k)$  est décroissante**

**$(I_k)$  est décroissante, minorée par 0 donc  $(I_k)$  est convergente.**

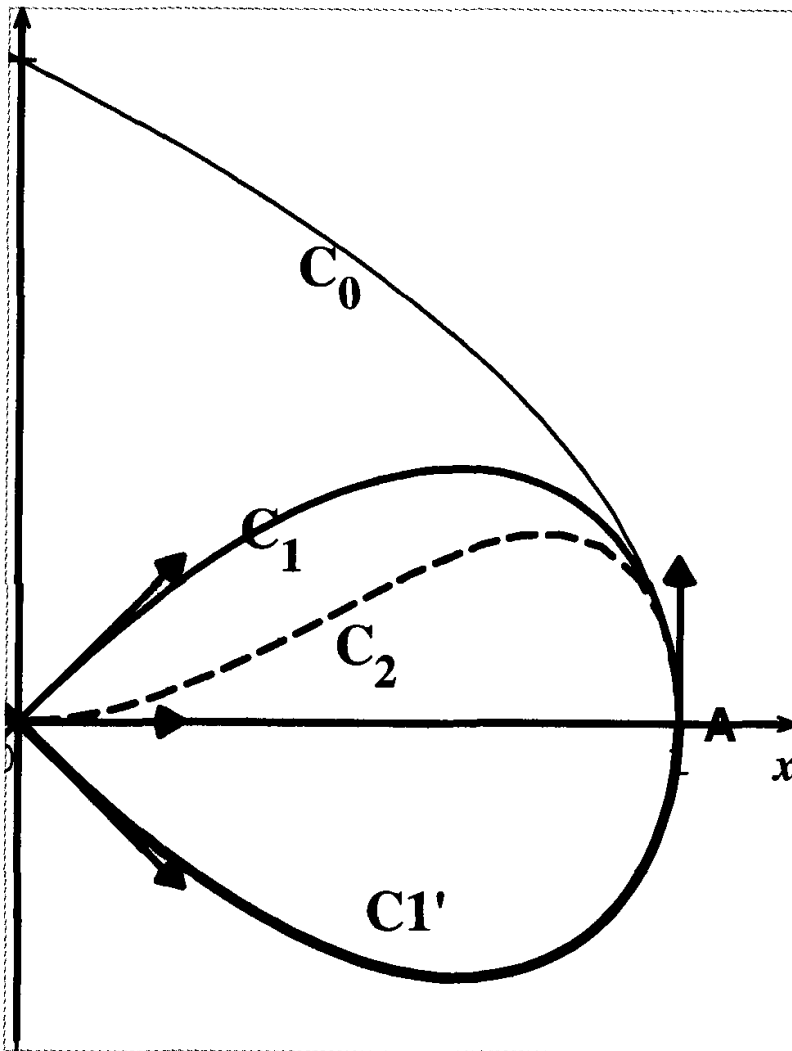
5° a/ on a pour tout  $x \in [0, 1]$

$$0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^k \sqrt{1-x} \leq x^k$$

$$\text{D'où } 0 \leq I_k \leq \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

$$\text{b/ on a : } 0 \leq I_k \leq \frac{1}{k+1} \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k \leq 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = 0$$



## Sujet 7 (Bac 2008)

### Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant e la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Si  $(u_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = (-2)^n$  alors

- a)  $(u_n)$  est arithmétique. b)  $(u_n)$  est géométrique.  
c)  $(u_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.

Si  $(u_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \ln(3^n)$  alors

- a)  $(u_n)$  est croissante. b)  $(u_n)$  est décroissante.  
c)  $(u_n)$  n'est ni croissante, ni décroissante.

3) Si  $(u_n)$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = ne^n$  alors

- a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$  ; b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$  ; c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

### Exercice 2 : (3 points)

- 1) Déterminer les couples  $(a, b)$  d'entiers tels que :  $19a = 7b$  .  
2) Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $19x - 7y = 1$ .  
a) Vérifier que  $(3, 8)$  est une solution particulière de l'équation (E).  
b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $\epsilon$  .

### Exercice 3 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes

l'équation :  $z^2 - 2(1+i)z - 1 + 2i = 0$ .

2- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

on considère les points A et B d'affixes respectives

$z_A = i$  et  $z_B = 2+i$ .

Calculer les distances OA, OB et AB.

**Montrer que le triangle OAB est rectangle.**

**c) Déterminer l'abscisse du point C tel que OABC est un rectangle.**

**Exercice 4 : (5 points) Dans le graphique ci-dessous, (C)**

**désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé. La droite  $\Delta : x = -2$  est une asymptote à la courbe (C).**

**1) Donner**

**a)  $f(-1)$  et  $f'(-1)$**

**b)  $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$**

**c) Le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$ , de l'équation  $f(x) = 0$**

**2) On suppose dans la suite que pour tout  $x \in ] -2, +\infty[$**

**$f(x) = -2x + m + p \ln(x + 2)$  où m et p sont deux constantes réelles.**

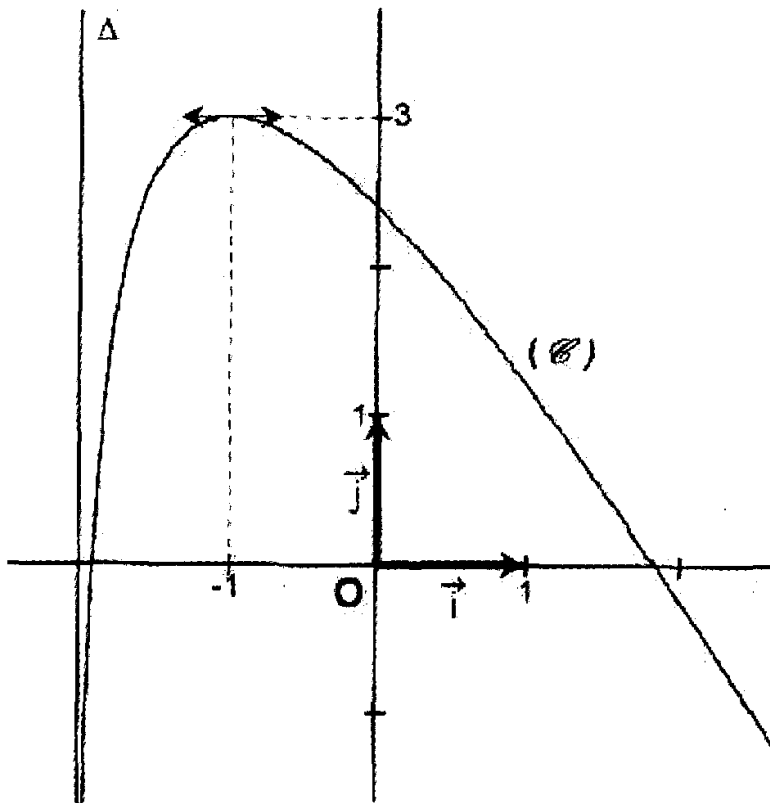
**a) Montrer que  $m = 1$ .**

**b) Calculer  $f'(x)$  à l'aide de p.**

**c) Montrer que  $f(x) = -2x + 1 + 2 \ln(x + 2)$ .**

**d) Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite D**

**d'équation  $y = -2x + 1$ .**



3) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 \ln(x+2) dx = 3 \ln(3) - 2.$$

b) En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = 1$ .

**Exercice 5 : (5 points)** La question 1 est hors programme

1- Soit la matrice M suivante  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer le déterminant de M. En déduire que M est inversible.

b) Montrer que :  $M^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2) Soient les équations suivantes :

$$y + 2z - 5 = 0; -x + 3y - 2 = 0 \text{ et } x - 2y + z = 0$$

a) Déterminer la matrice  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) En déduire la solution du système : 
$$\begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

### Corrigé

#### Exercice 1

Numéro de la question	1	2	3
Réponse correcte	b	a	a

#### Exercice 2:

1) Les entiers 19 et 7 sont premiers entre eux donc :

7 divise a et 19 divise b : par suite  $a = 7k$  avec k est entier.

On remplace a par 7k donc :  $19 \cdot 7k = 7b$  d'où :

$b = 19k$ . Les couples (a,b) vérifiant l'équation :  $19a = 7b$  sont de type :  $(7k ; 19k)$  avec k est un entier.

2) Soit l'équation (E) :  $19x - 7y = 1$

a)  $19 \times 3 = 57 ; 7 \times 8 = 56$  d'où :  $19 \times 3 - 7 \times 8 = 1$  donc  $(3, 8)$  est une solution de (E)

b)  $19x - 7y = 1 \Leftrightarrow 19x - 7y = 19 \cdot 3 - 7 \cdot 8$

$$\Leftrightarrow 19(x - 3) = 7(y - 8)$$

D'où :  $x - 3 = 7k$  et  $y - 8 = 19k$  soit :

$x = 7k + 3$  et  $y = 19k + 8$  avec k est un entier

$$S_{\text{Zxz}} = \{ (7k + 3 ; 19k + 8), k \text{ est un entier} \}$$

Exercice 3 : On considère dans C l'équation (E) :

$$z^2 - 2(1 + i)z - 1 + 2i = 0$$

1) Résolution de (E)

$\Delta' = (1 + i)^2 - (-1 + 2i) = 2i - 2i + 1 = 1$  donc il existe deux solutions distincts :  $z' = 1 + i - 1 = i$  et  $z'' = 2 + i$

2) a)  $OA = 1 ; OB = \sqrt{5} ; AB = 2$

b) Nature du triangle ABO

$OA^2 + AB^2 = 1 + 4 = 5 = OB^2$  donc OAB est un triangle rectangle en A.

c) Puisque OAB est un triangle rectangle en A.

donc pour que OABC est un rectangle il suffit que :

$$Z_C = Z_B - Z_A = 2$$

### Exercice 4

1) a)  $f(-1) = 3$  ;  $f'(-1) = 0$  car la courbe (C) admet au point d'abscisse (-1) une tangente horizontale.

b) la courbe (C) admet la droite (d) :  $x = -2$  comme asymptote verticale et  $f(x)$  prend des valeurs négatives lorsque  $x$  tend vers (-2) donc  $f(x)$  tend vers  $(-\infty)$  lorsque  $x$  tend vers (-2).

c) la courbe (C) coupe l'axe des abscisses deux fois donc l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions

2) On suppose que :  $f(x) = -2x + m + p \ln(x+2)$

a) On a  $f(-1) = 3 = 2 + m$  donc  $m = 1$ .

$$b) f'(x) = -2 + \frac{p}{x+2}$$

c) On a  $f'(-1) = 0 = -2 + p$  donc  $p = 2$  d'où

$$f(x) = -2x + 1 + 2 \ln(x+2)$$

$$d) f(x) - (-2x + 1) = 2 \ln(x+2)$$

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - (-2x + 1)$	-	0	+
Position	(C) est au dessous de (D)		(C) est au dessus de (D)

3) a) On pose  $u(x) = \ln(x+2)$  donc  $u'(x) = \frac{1}{x+2}$

$$v'(x) = 1 \text{ et } v(x) = x + 2$$

$$\begin{aligned} d'où \int_{-1}^1 \ln(x+2) dx &= [(x+2)\ln(x+2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx \\ &= 3 \ln(3) - 2 \end{aligned}$$

b) Pour tout  $x$  de  $[-1 ; 1]$  on a :  $f(x) \geq -2x + 1$  donc :  
 déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D  
 et les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = 1$  est définie par :

$$A = \int_{-1}^1 \ln(x+2) dx = [(x+2)\ln(x+2)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx$$

$$= 3\ln(3) - 2 \text{ unités d'aire}$$

### Exercice 5

1- Soit la matrice M suivante  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer le déterminant de M. En déduire que M est inversible.

$$\text{Dé}(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 \cdot 0 - 6 = -1 \text{ donc M est}$$

inversible .

b) Vérification de l'inverse de M: on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Soient les équations suivantes :

$$y + 2z - 5 = 0 ; -x + 3y - 2 = 0 \text{ et } x - 2y + z = 0$$

a) Déterminer la matrice  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix}$$

b) En déduire la solution du système :  $\begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

d'après a)  $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ -x + 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; S_{\mathbb{R}^3} = \{(-5, -1, 3)\}$$

## Sujet 8 Bac 2008 (Session de contrôle)

### Exercice 1 : (4 points)

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i \text{ et } z_B = -1 + i.$$

Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle.

Déterminer l'affixe du point C tel que OACB est un carré.

2) On considère, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation (E) :  $z^2 + i b z - 2 = 0$  où b est un nombre réel.

Déterminer b pour que  $(1 + i)$  soit une solution de l'équation (E)

Pour la valeur de b trouvée, déterminer la deuxième solution de l'équation (E).

### Exercice 2 : (6 points)

On considère une fonction f définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
f	1	↘ 0 ↗	↘ $+\infty$ ↗	↘ -3 ↗

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1) Répondre par vrai ou faux sans justification.

a) 0 est un minimum local de f .

b) La droite d'équation  $x = 2$  est une asymptote à C

c) La droite d'équation  $y = -3$  est une asymptote C

d) La courbe C admet une asymptote oblique.

2) Déterminer le signe de  $f(x)$  pour  $x \in ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$

3) Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \ln(|f(x)|)$ .

a) Montrer que  $g$  est définie sur l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ .

b) Donner le tableau de variation de  $g$ .

c) Donner une allure de la courbe  $C'$  de  $g$  dans un repère orthonormé.

**Exercice 3: (Hors programme : Il est remplacé par le suivant**

Une usine fabrique en grande série de climatiseurs susceptible de présenter deux défauts a et b. Une étude statistique de la production conduit aux résultats suivants

\*3% des climatiseurs présentent le défaut a.

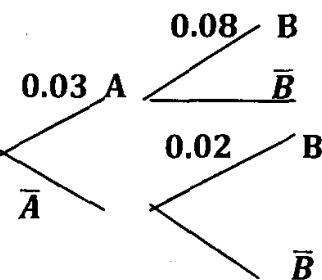
\*Parmi les climatiseurs présentant le défaut a ,8% présentent le défaut b .

\* Parmi les climatiseurs ne présentant pas le défaut a ,2% présentent le défaut b .On prélève au hasard un climatiseur dans la production .On désigne par A et B les événements suivants.

A « Le climatiseur présente le défaut a »

B « Le climatiseur présente le défaut b »

1) L'arbre pondéré ci-contre représente cette situation Recopier et compléter cet arbre..



2) Pour cette question, On donne les résultats

A quatre chiffres après la virgule

a) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente à la fois les deux défauts a et b ?

b) Quelle est la probabilité que ce climatiseur présente le défaut b ?

c) Quelle est la probabilité que ce climatiseur ne présente aucun défaut ?

### Exercice 4 (5 points)

1) Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $11x - 5y = 2$ .

a) Vérifier que (2, 4) est une solution de (E).

Montrer que (x, y) est solution de (E) si et seulement si :

$$11(x - 2) = 5(y - 4).$$

En déduire les solutions de (E).

2) Soit n un entier naturel non nul. On pose :

$$a = 5n + 2 \text{ et } b = 7n + 5.$$

Calculer  $7a - 5b$  et en déduire que  $\text{P.G.C.D}(a, b) = 1$  ou

$$\text{P.G.C.D}(a, b) = 11.$$

Déterminer en utilisant 1) les entiers naturels non nuls n tels que

$$\text{P.G.C.D.}(a, b) = 11.$$

## Corrigé

### Exercice 1

1)  $OA = OB = \sqrt{2}$  et  $AB = 2$  donc OAB est un triangle rectangle et isocèle

Ou encore  $OA = OB = \sqrt{2}$  et  $(1 + i) \cdot (-1 - i) = -2i$  est un imaginaire pure donc OAB est un triangle isocèle rectangle

2) On considère, dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation (E) :  $z^2 + ibz - 2 = 0$  où b est un nombre réel.

\*Déterminons b pour que  $(1 + i)$  soit une solution de l'équation (E)

$$(1 + i) \text{ est une solution de (E) lorsque } (1 + i)^2 + ib - b - 2 = 0$$

$$\text{Donc : } 2 - 2i = ib(1 + i) = b(-1 + i) \text{ d'où } b = -2$$

\*Pour  $b = -2$ , Soit  $z'$  la seconde solution de (E)  $z' + 1 + i = -ib = 2i$   
donc  $z' = -1 + i$

**Exercice 2**

1) a) Vrai ; b) Vrai ; c) Vrai ; d) Faux

2)  $f(x) \geq 0$  si  $x \in ]-\infty ; 2[$  et  $f(x) < 0$  si  $x \in ]2, +\infty[$

3) Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \ln(|f(x)|)$  .

a) Montrons que  $g$  est définie sur l'ensemble  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ .

La fonction  $f$  s'annule en  $(-1)$  et n'est pas définie en  $2$  donc

$|f(x)| > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ . Donc  $g$  est définie  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ .

b) Donner le tableau de variation de  $g$ .

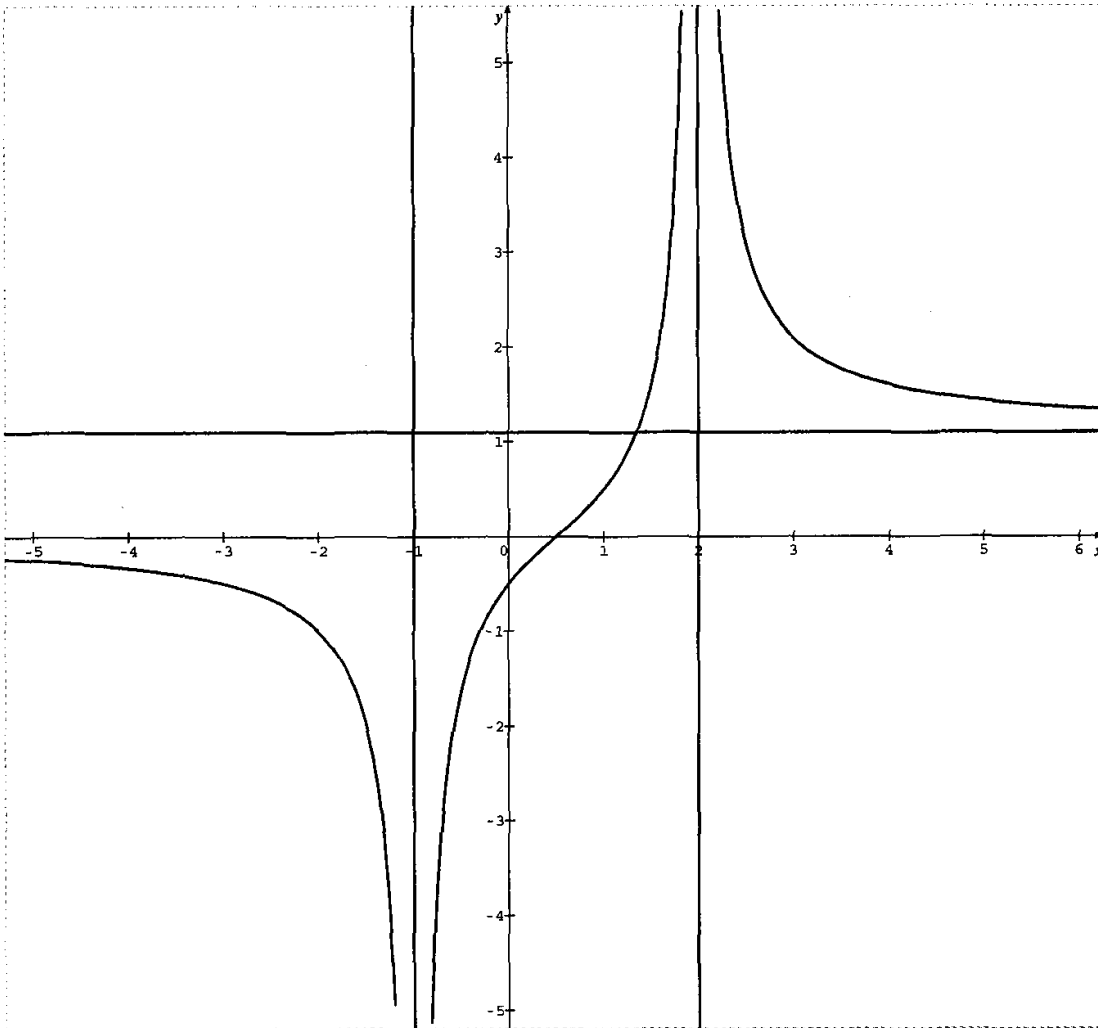
$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Le tableau des variations de  $f$  nous affirme que

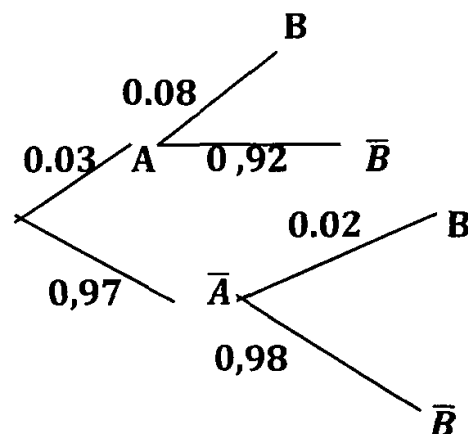
$g$  est strictement décroissante sur chacun des intervalles :

$] -\infty ; -1[$  et  $]2 ; +\infty[$  et elle est croissante sur  $] -1 ; 2[[$

c) Donner une allure de la courbe  $C'$  de  $g$  dans un repère orthonormé

**Exercice 3:**

1)



2)a) La probabilité demandée est  $p(A \cap B) = p(B/A) \cdot p(A) = 0,0024$

b) La probabilité demandée est  $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$

soit  $p(B) = 0,0024 + 0,02 \cdot 0,97 = 0,0218$

c) La probabilité demandée est  $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,98 \cdot 0,97 = 0,9506$

**Exercice 4**

1) Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $11x - 5y = 2$ .

a) Vérifier que (2, 4) est une solution de (E).

$11 \times 2 - 5 \times 4 = 22 - 20 = 2$  donc (2, 4) est une solution de (E)

b) Montrer que (x, y) est solution de (E) si et seulement si :

$11(x - 2) = 5(y - 4)$ . En déduire les solutions de (E).

$11x - 5y = 11 \times 2 - 5 \times 4 \Leftrightarrow 11(x - 2) = 5(y - 4)$ .

5 et 11 sont premiers entre eux donc :  $x - 2$  est un multiple de 5

d'où :  $x - 2 = 5k$  avec  $k$  est un entier soit  $x = 5k + 2$

On remplace dans (E) on aura :  $y = 11k + 4$

2) Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose :

$a = 5n + 2$  et  $b = 7n + 5$ .

a) Calculer  $7a - 5b$  et en déduire que P.G.C.D (a,b) = 1 ou

P.G.C.D (a,b) = 11.

$7a - 5b = -11$  donc P.G.C.D (a,b) = 1 ou P.G.C.D (a,b) = 11.

b) Déterminer les entiers naturels non nuls  $n$  tels que :

P.G.C.D. (a,b) = 11.

P.G.C.D. (a,b) = 11 lorsque  $a$  et  $b$  sont des multiples de 11 donc

Donc  $3a - 2b = n - 4$  est un multiple de 11 d'où  $n = 11k + 4$  avec  $k$  est un entier naturel.

**Bac 2009 (Session principale)****Exercice 1 (Hors programme : on a remplacé par le suivant)**

On considère la suite  $(U_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{e^k}$$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$(2n + 2) - e(2n+1) < 0$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,

$$U_{2n+2} - U_{2n} = \frac{1}{e^{2n+2}} [(2n + 2) - e(2n + 1)]$$

En déduire que la suite  $(U_{2n})_{n \geq 1}$  est décroissante.

2) Montrer que pour la suite  $(U_{2n+1})_{n \geq 1}$  est croissante.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  ;

$$U_{2n} \geq U_{2n+1}$$

b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_{2n} - U_{2n+1})$

4) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers un réel  $a$  et que

$$u_3 < a < u_2 .$$

### Exercice 2 :

1-Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $2x + 3y = 5$

2-Dans la suite les âges sont exprimés en années.

En 2009, un père dont l'âge  $n$  est compris entre 50 et 55, a deux fils A et B d'âges respectives  $a$  et  $b$ . On suppose que :

-En 2001, l'âge du père était le double de l'âge du fils A.

-En 2006, l'âge du père dépassait de trois ans le triple de l'âge du fils B

a) Montrer que  $n, a$  et  $b$  vérifient : 
$$\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$$

b) Vérifier que  $(a, -b)$  est une solution de (E)

c) En déduire les âges  $n, a$  et  $b$  du père et ses deux fils.

### Exercice 3

1) a) Calculer  $(1 - 2i)^2$

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $(1 - i)z^2 + 2z + 4i = 0$

on notera  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de (E) avec  $z_2 \in \mathbb{R}$

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points A et B d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ . On désigne par C et D les symétriques de A et B par rapport au point I d'affixe  $i$ .

a) Calculer  $z'_1$  et  $z'_2$  les affixes respectives de C et D.

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

#### Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . La courbe (C) ci-dessous représente une fonction  $f$  définie dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

-L'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de  $+\infty$

-(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de  $-\infty$ .

1) Par lecture graphique et sans justification

a) Donner  $f(0)$  et  $f'(0)$

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) On suppose dans la suite que pour tout réel  $x$ , on a :

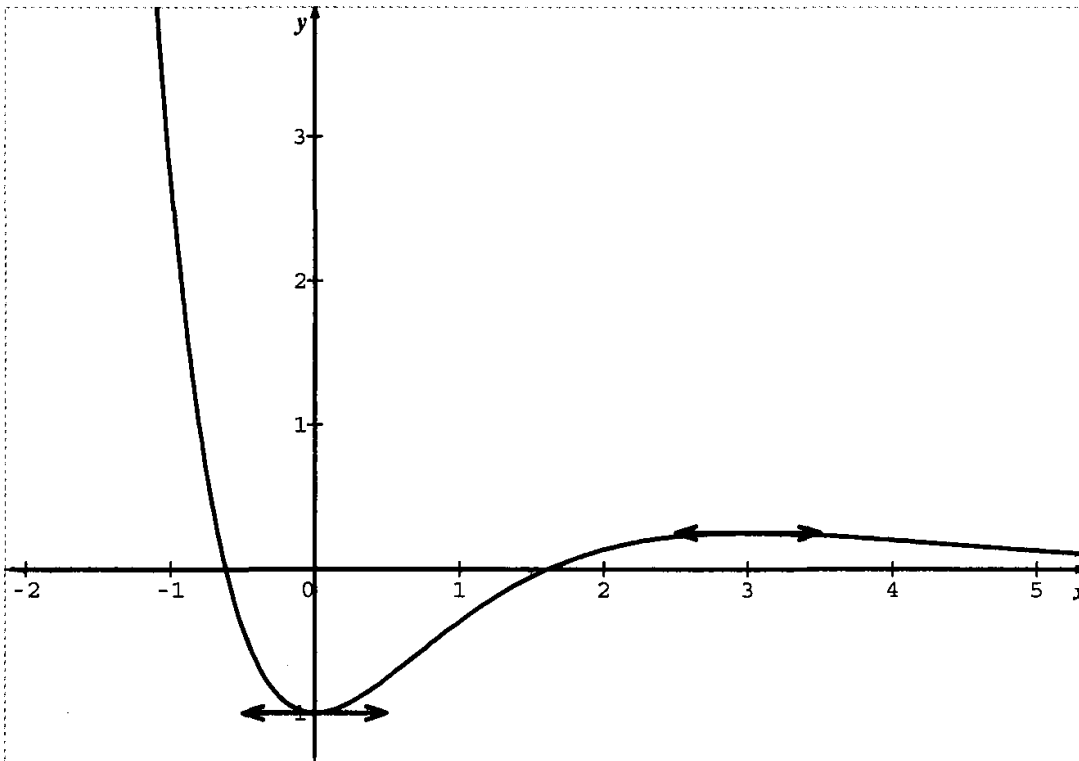
$f(x) = (x^2 + ax + b)e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles.

a) Exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

b) En utilisant 1)a) calculer  $a$  et  $b$ .

3)a) Vérifier que la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = (-x^2 - x)e^{-x}$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C), les axes du repère et la droite d'équation  $x = 1$



**Exercice 5** Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendants a et b.

On considère les deux événements suivants :

A « Une calculatrice fabriquée présente le défaut a »

B : « Une calculatrice fabriquée présente le défaut b »

1)a) Calculer  $p(A \cap B)$ .

b)En déduire que la probabilité pour qu'une calculatrice fabriquée soit défectueuse est égale à :0,0397

2)Une librairie passe une commande de 20 calculatrices. Calculer la probabilité que deux calculatrices dans cette commande soient défectueuses.

3)La librairie exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au moins une calculatrice défectueuse reste inférieure à 50%.Déterminer le nombre maximum de calculatrices qu'elle peut commander.

**Corrigé**

**Exercice 1**

$$U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{e^k}$$

1. a.  $2n+2+e(2n+1) = 2n+1 = 2n(1-e)+2-e$

or  $1 - e < 0$  et  $2-e < 0$  donc :

$$(2n + 2) - e(2n + 1) < 0$$

b.  $U_{2n+2} - U_{2n} = (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{e^{2n+1}} + \frac{2n+2}{e^{2n+2}} = \frac{2n+2}{e^{2n+2}} - \frac{2(2n+1)}{e^{2n+2}}$

$$U_{2n+2} - U_{2n} = e^{2n+2} [(2n+2) - e(2n+1)]$$

D'où d'après 1.a.  $U_{2n+2} - U_{2n} < 0$  c'est-à-dire  $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite strictement décroissante sur  $\mathbb{N}^*$

2.  $U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{2n}{e^{2n}} - \frac{2n+1}{e^{2n+1}} = \frac{e2n - 2n + 1}{e^{2n+1}}$

$$U_{2n+1} - U_{2n-1} = \frac{1}{e^{2n+1}} [e(2(n-1)+2) - (2(n-1)+3)]$$

$\Rightarrow U_{2n+1} - U_{2n-1}$  a le même signe que :

$$2(n-1)[e-1] + (2e-3)$$

Or  $e-1 > 0$  et  $2e-3 > 0$  donc

$U_{2n+1} - U_{2n-1} > 0$  donc la suite  $(U_{2n+1})$  est strictement croissante

3. a.  $U_{2n+1} - U_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}(2n+1)}{e^{2n+1}} = -\frac{2n+1}{e^{2n+1}} < 0$  donc  $U_{2n} > U_{2n+1}$

b.  $U_{2n} > U_{2n+1} = \frac{2n+1}{e^{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$

4. d'après ce qui précède les suites

$(U_{2n})$  et  $(U_{2n+1})$  sont deux suite adjacents donc elle convergent vers la même limite  $\alpha$ .

Or  $(U_{2n})$  est décroissante donc  $U_{2n} < U_2 \Rightarrow \alpha \leq U_2$

$(U_{2n+1})$  est croissante donc  $U_3 < U_{2n+1} \Rightarrow U_3 \leq \alpha$  d'où  $U_3 \leq \alpha \leq U_2$ .

Donc  $U_3 < U_5 \leq \alpha \leq U_4 < U_2 \Rightarrow U_3 < \alpha < U_2$

### Exercice 2

1) Soit (E) :  $2x + 3y = 5$

\*Résolution de (E)

Le couple  $(1, 1)$  est une solution

$2x + 3y = 5 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 2(x - 1) = -3(y - 1)$ , 2 et 3 sont premiers entre eux et 3 divise  $2(x - 1)$  donc (théorème de Gauss) 3 divise

$(x - 1)$  Par suite  $x = 3k + 1$ ,  $k$  est un entier

On remplace  $x$  par son expression on aura :  $y = -2k + 1$ .

La réciproque est évident :

$$S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (3k + 1, -2k + 1), k \in \mathbb{Z} \}$$

2)  $n$  est l'âge du père en 2009

a) En 2001,  $n - 8 = 2(a - 8)$  donc  $n = 2a - 8$

En 2006,  $n - 3 = 3(b - 3) + 3$  donc  $n = 3b - 3$  d'où :

$$\begin{cases} n = 2a - 8 \\ n = 3b - 3 \end{cases}$$

b) D'après a) :  $2a - 8 = 3b - 3 \Leftrightarrow 2a - 3b = 5 = 2a + 3(-b) = 5$

donc  $(a, -b)$  est une solution de (E)

c) D'après 1) et 2)b) on en déduit que :

$$a = 3k + 1 \text{ et } b = 2k - 1$$

d'où :  $50 < 6k - 6 < 55$  soit  $k = 10$  donc  $n = 54$ ,  $a = 31$  et  $b = 19$

### Exercice 3

$$1) a) (1 - 2i)^2 = -3 - 4i$$

b)  $(1 - i)z^2 + 2z + 4i = 0$  le discriminant réduit est :

$1 - 4i(1 - i) = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$  donc l'équation (E) admet deux solutions

$$\text{distinctes : } z_1 = \frac{-1 - 1 + 2i}{1 - i} = 1 - i; z_2 = \frac{-1 + 1 - 2i}{1 - i} = -2$$

$$S_C = \{ -2; 1 - i \}$$

2)  $A(1 - i)$  et  $B(-2)$  et  $I(i)$

a)  $z'_1 = z_C = 2z_I - z_A = 2i - (1 - i) = -1 + 3i$

$z'_2 = z_D = 2z_I - z_B = 2i + 2 = 2 + 2i$

b)  $I = A^*C = B^*D$  donc ABCD est un parallélogramme pour qu'il soit un carré il suffit que :  $AB = BC$  et  $AC = BD$

$AB = |-2 - 1 + i| = \sqrt{10}$  ;  $BC = |-1 + 3i + 2| = \sqrt{10}$

Donc  $AB = BC$  ;  $CA = |1 - i + 1 - 3i| = 2\sqrt{5} = BD$  donc ABCD est un carré .

#### Exercice 4

1) a)  $f(0) = -1$  et  $f'(0) = 0$

b)

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$f(3)$	0

2) a)  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = (2x + a - x^2 - ax - b)e^{-x}$

Soit  $f'(x) = [-x^2 - (a - 2)x + a - b]e^{-x}$

b)  $f(0) = b = -1$  et  $f'(0) = (a - b) = 0$  donc  $a = b = -1$

3) a)  $F'(x) = (-2x - 1 + x^2 + x)e^{-x} = (x^2 - x - 1)e^{-x} = f(x)$  donc  $F$  est une primitive de  $f$ .

b) L'aire  $A$  demandée est donnée par la formule :

$$A = \int_0^1 |f(t)| dt = F(0) - F(1) = \frac{2}{e} \text{ ua}$$

#### Exercice 5 :

Les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants)

1) a)  $p(A \cap B) = p(A)p(B) = 3 \cdot 10^{-4}$

**b) Une calculatrice est défectueuse lorsque présente l'un des deux défauts ; la probabilité demandée est :**

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A).p(B) = 0.0397$$

**2) Les événements « La calculatrice est défectueuse » et « La calculatrice n'est pas défectueuse » sont indépendantes et forme une partition de l'univers  $\Omega$  ; les choix sont indépendants donc le phénomène étudié suit une loi binomiale de paramètres :**

$$n = 20 \text{ et } p = \frac{397}{10000}$$

$$p_1 = C_{20}^2 \left( \frac{397}{10000} \right)^2 \left( \frac{9403}{10000} \right)^{18}$$

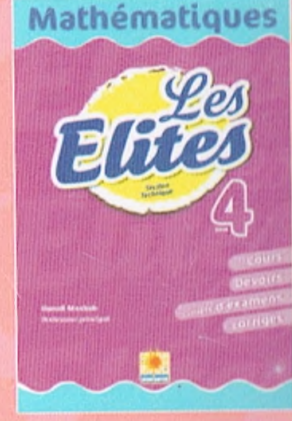
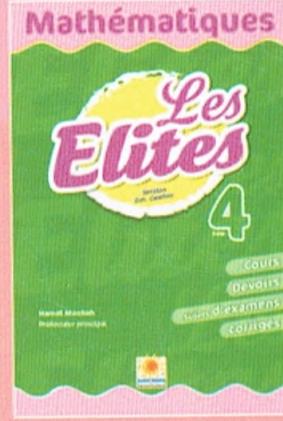
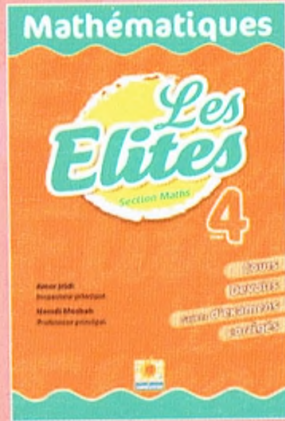
**3) On veut que  $p(X \geq 1) \leq 0.5$  donc  $1 - p(X = 0) \leq 0.5$  autrement dit :**

$$\left( \frac{9403}{10000} \right)^n \geq 0.5 \text{ soit : } n \ln(0.9403) \geq -\ln(2) \Leftrightarrow n \leq \frac{-\ln 2}{\ln(0.9403)}$$



Dans la même collection

Les  
Elites



Prix : 8.500



I.S.B.N : 978-9973-062-91-8