savoir & savoir faire

maths

terminales C/E

analyse
dénombrements-statistiques

René Gauthier / Ginette Mison

CEDIC

savoir & savoir faire

maths

terminales C/E

analyse

dénombrements - statistiques

René Gauthier / Ginette Mison

CEDIC

Dans la collection savoir et savoir-faire :

Mathématiques :

Seconde, E. Feuillant.
Premières A/B, René Gauthier, Ginette Mison.
Premières S/E, Bernard Parzysz, Roger Proteau, Danièle Spérandio.
Terminale A1, René Gauthier, Ginette Mison.
Terminales A2/A3, René Gauthier, Ginette Mison.
Probabilités et Statistiques, Premières et Terminales, toutes sections, René Gauthier et Ginette Mison.
Analyse Terminales C/E, René Gauthier, Ginette Mison.
Géométrie Terminales C/E (ancien programme), René Gauthier.
Terminale B, René Gauthier, Ginette Mison.
Terminale D, René Gauthier, Ginette Mison.

Sciences physiques :

Dictionnaire pratique de physique, Roland Ferry, René Michalet, Pierre Provost.
Exercices et problèmes résolus avec la calculatrice au lycée, François Czakvary et Jacques Heurteaux.
Exercices et problèmes résolus de physique pour les classes terminales, Roland Ferry, René Michalet, Pierre Provost.
— Mécanique, électromagnétisme.
— Vibrations et propagation, physique atomique et nucléaire.
Thermodynamique physique et chimique, notions de flux et d'irréversabilité, Pierre Provost et Jean-Pierre Provost.
Sciences physiques, exercices résolus pour les classes de seconde, Michel Faye, Robert Le Goff.
— Mécanique, électricité, chimie.
Sciences physiques, exercices résolus pour les classes de premières S/E, Michel Faye, Robert Le Goff.
— Énergie, vibration, chimie.
Chimie Terminales C/D/E, Michel Faye, Robert Le Goff.

Cet ouvrage porte la référence
ISSN 0293-5635, ISBN 2-7124-0918-3

CEDIC, 32, boulevard Saint-Germain, 75005 Paris

POURQUOI CE LIVRE ET COMMENT S'EN SERVIR?

Sans SAVOIR-FAIRE, il n'y a pas de SAVOIR... Faire des mathématiques, ce n'est pas seulement enregistrer des connaissances, mais c'est aussi savoir s'en servir.

Dans ce livre, pour éviter le : « je croyais avoir compris le cours, mais je ne sais pas faire l'exercice... » qui revient si souvent, nous avons voulu :

- d'une part, faire la synthèse de ce qu'il est nécessaire ou important de savoir compte tenu des programmes,
- d'autre part, faciliter un entraînement systématique axé sur la résolution d'exercices et de problèmes en proposant un choix d'exercices caractéristiques, en indiquant des références, des « trucs », des méthodes différentes, des conseils, des mises en garde... bref, ce que l'on dit oralement dans une classe mais que l'on n'a pas l'habitude d'écrire.

LA PARTIE I, « **Points de repère** », vous rappelle brièvement des définitions, propriétés, formules de votre programme avec de très nombreux rappels de la classe de **première**. A chaque occasion sont signalés des exercices de la partie II se rapportant à la question traitée.

LA PARTIE II, « **Pour s'exercer** », contient 320 exercices; certains sont complètement résolus; pour d'autres, nous vous donnons seulement quelques indications pouvant guider votre recherche. Nous vous signalons, en cours de correction, les définitions ou propriétés de la partie I auxquelles vous pouvez vous référer.

LA PARTIE III, « **L'Index** », vous permettra de retrouver rapidement définitions, propriétés, vocabulaire, avec des exercices caractéristiques sur la question.

SOMMAIRE

I. Résumé de cours .... page 3

II. Pour s'exercer .... page 53

III. Index général .... page 241

Thèmes	Résumé de cours	Exercices corrigés	D'autres exercices pour chercher
Fonctions numériques notions générales	page 4	nos 1 à 29 (p. 55)	nos 30 à 86 (p. 86)
Fonctions logarithmes	page 25	nos 87 à 100 (p. 100)	nos 101 à 119 (p. 114)
Fonctions exponentielles	page 27	nos 120 à 127 (p. 118)	nos 128 à 143 (p. 127)
Suites réelles	page 32	nos 144 à 153 (p. 132)	nos 154 à 172 (p. 143)
Calculs d'intégrales **Applications**	page 36 page 38	nos 173 à 184 (p. 150) nos 204 à 215 (p. 165)	nos 185 à 203 (p. 151) nos 216 à 238 (p. 183)
Équations différentielles	page 41	nos 239 à 244 (p. 189)	nos 245 à 259 (p. 196)
Fonctions vectorielles	page 42	nos 260 à 265 (p. 200)	nos 266 à 274 (p. 209)
Dénombrements **Probabilités**	page 45	nos 275 à 285 (p. 212)	nos 286 à 309 (p. 224)
Statistiques	page 50	nos 310 à 312 (p. 232)	nos 313 à 329 (p. 238)

PARTIE I

POINTS DE REPÈRE
Résumé de cours

Voici des rappels de définitions, propriétés et formules de votre programme, ainsi que de nombreux rappels de classes antérieures.
Dans chaque chapitre sont signalés les exercices correspondants que vous pourrez traiter.

- Les fonctions numériques 4
    - Rappels de définitions 4
    - Fonctions trigonométriques 6
    - Problèmes de limites 9
    - Dérivées 13
    - Fonctions continues 16
    - Pour comparer, majorer, minorer 19
    - L'étude d'une fonction numérique 21
    - Rappels sur les primitives 23
- La fonction logarithme népérien 25
- Les fonctions exponentielles 27
- Suites numériques 32
- Calcul intégral et applications 36
- Équations différentielles 41
- Fonctions vectorielles et cinématique 42
- Dénombrements et probabilités 45
- Statistiques 50

Le nom seul des **Mathématiques**, qui, dans son étymologie, veut dire *Instruction, Science*, peint d'une manière juste et précise l'idée noble qu'on doit s'en former... On sait que les Mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs, par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc.
Les Mathématiques pures considèrent la grandeur d'une manière simple, générale et abstraite : et par là elles ont le précieux avantage d'être fondées sur les notions primordiales de la quantité. Elles comprennent :
1) l'Arithmétique ou l'Art de compter;
2) la Géométrie qui apprend à mesurer l'étendue;
3) l'Analyse, science des grandeurs en général;
4) la Géométrie mixte, combinaison de la géométrie ordinaire et de l'Analyse...

L'Encyclopédie (1784) (d'Alembert, abbé Bossut, etc.).

LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercices 1 à 86

Déf. 1

Fonction de A vers B : c'est une relation particulière de source A et de but B, telle que **tout élément** de A a, **au plus,** une image dans B.
Si x, élément de A, a une image par f, cette image est notée $f(x)$. L'ensemble des images des éléments de A par f est noté $f(A)$ ou $f\langle A\rangle$.
Une fonction **numérique** est une fonction pour laquelle A et B sont des parties de $\mathbb{R}$.

Déf. 2

L'ensemble de définition (ou domaine de définition), noté E_f, ou D_f, ou E, est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.

Déf. 3

Après avoir fait choix d'un **repère** dans le plan P, la **représentation graphique** de f dans **ce** repère est l'ensemble des points M de coordonnées $(x, f(x))$ dans ce repère.
Dire que le point $M(x, y)$ est un point de la représentation graphique de f, c'est dire que l'ordonnée de M, soit y, est l'image par f de son abscisse x : $y=f(x)$.

▲ *Une courbe de P peut être la représentation graphique d'une certaine fonction f pour un repère R_1 de ce plan, mais aussi la représentation graphique d'une toute autre fonction g pour un autre repère R_2 du même plan (problème : changement de repère)* (voir page 22).

Déf. 4

Application numérique : f est une application de A dans B (avec $A\subset\mathbb{R}$ et $B\subset\mathbb{R}$) si **tout élément de A** possède **une** image et **une seule** dans B.

Déf. 5

Application injective : deux éléments quelconques de A ont des images distinctes dans B

$$\forall_A x,\ \forall_A x' : x\neq x' \implies f(x)\neq f(x')$$

ou encore $$f(x)=f(x') \implies x=x' \quad \text{(contrapposée).}$$

Déf. 6

Application surjective : tout élément de B possède un antécédent au moins dans A

$$\forall_B y,\ \exists_A x : y=f(x).$$

Déf. 7

Application bijective : elle est **à la fois** surjective et injective.

Déf. 13

Application composée : si f est une application de A vers B et g une application de B vers C, alors l'application composée notée $g \circ f$ (... f suivie-de-g) est l'application de A vers C définie par :

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

Prop. 5

La loi de composition notée $\circ$ dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est **associative,** c'est-à-dire :

$$h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g.$$

Déf. 14

Égalité d'applications : deux applications f et g sont égales si et seulement si elles ont la même source A, le même but B et si :

$$\forall_A x, \quad f(x) = g(x).$$

Déf. 15

Restriction d'une application : si f est une application de A vers B et si A' est une **partie de A** alors la restriction p de f à A' est définie par :

$$\forall_{A} x; \quad p(x) = f(x).$$

- Revoir les définitions de application **croissante** sur I, application **décroissante** sur I.

Prop. 6

Si f est croissante (resp. *décroissante*) sur $[a, b]$:
— si, de plus f est **paire,** alors elle est **décroissante** (resp. *croissante*) sur $[-b; -a]$;
— si, de plus f est **impaire,** alors elle est **croissante** (resp. *décroissante*) sur $[-b; -a]$.

LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Prop. 7

Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont des applications **surjectives** de $\mathbb{R}$ sur $[-1; +1]$. Elles sont donc **bornées :**

$$\forall_{\mathbb{R}} x \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant +1 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant +1.$$

Prop. 8

Elles sont **périodiques** de période 2π : $\forall_{\mathbb{Z}} k \ \sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + k2\pi) = \cos x$.

Déf. 16

Fonction **tangente** (notée tan) :

$$x \longmapsto \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \left(\text{avec } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

Prop. 15

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

$\sin 2a = \frac{2tg\,t}{1+tg^2 t}$

$a = b$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2 \sin a \cdot \cos a$$
$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Trois écritures de cos 2a

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$
$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$
$$\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

Important pour « intégrer »

$$\tan\frac{x}{2} = t \quad \begin{cases} \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\[2mm] \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\[2mm] \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

Pour transformer un produit en somme

\+ ou −

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$
$$\sin b \cdot \cos a = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$a + b = p \iff a = \frac{1}{2}(p+q)$$
$$a - b = q \iff b = \frac{1}{2}(p-q)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$ − sin p
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$$
$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

sin 2a =

Pour transformer une somme ou différence en produit...

- **Équation : $a \cos x + b \cdot \sin x = c$**

Prop. 16

Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors l'équation devient plus simple (voir **P14**).
Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors on pose $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
L'équation donnée équivaut à : $\frac{a}{r} \cdot \cos x + \frac{b}{r} \cdot \sin x = \frac{c}{r}$.
Le *nombre complexe* $a + ib = z$ a pour **module** r et pour **argument** θ tels que

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

L'équation devient :

$$\cos \theta \cdot \cos x + \sin \theta \cdot \sin x = \frac{c}{r}$$

$$\cos (x - \theta) = \frac{c}{r}.$$

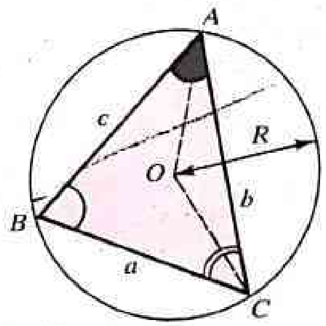
Si $\left|\frac{c}{r}\right| \leqslant 1$, c'est-à-dire si $c^2 \leqslant a^2 + b^2$, alors cette équation a des solutions dans $\mathbb{R}$.

- **Formules dans un triangle :**

Prop. 17

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \qquad (1)$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \qquad (2)$$



La formule (1) s'écrit de trois façons différentes.

PROBLÈMES DE LIMITES

(I) Limite de f en $x = a$

Prop. 18

*Si a est un **réel**, la question de la recherche d'une éventuelle limite en a se pose dans le seul cas où f est définie sur une partie E de R telle que $E \cup \{a\}$ soit un intervalle. Il n'est pas nécessaire que f soit définie au point $x = a$.*

Par exemple
$E =]a; +\infty[$
$E =]b; a[\cup]a; c[$
$E =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$

Ce qui peut se produire :

- $\lim\limits_{a} f = L$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *se lit*
  - f a pour limite le réel L en a
  - $f(x)$ tend vers L si x tend vers a
  - la limite de f, en a, est L

On écrit aussi :

$\lim\limits_{a} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a} [x \longmapsto x^2 - 5]$

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L'$ *se lit* : L' est la limite de f, *à gauche*, en a.

- $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = L''$ *se lit :* L'' est la limite de f, *à droite*, en a.
- $\lim\limits_{a} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$:
  $\begin{cases} f \text{ a pour limite } (+\infty) \text{ en } a \\ f(x) \text{ tend vers } (+\infty) \text{ si } x \text{ tend vers } a. \end{cases}$
- $\lim\limits_{a} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$: f a pour limite $(-\infty)$ en a.

▲ Pour les définitions, revoir le cours de Première.

$(+\infty)$ et $(-\infty)$ ne sont pas des réels, mais seulement des symboles pour **parler** de limites.

DES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Prop. 19

Si f est définie au point $x = a$ et admet une limite en ce point, alors cette limite est nécessairement $f(a)$.

Déf. 17

Si f est définie en a dans un intervalle contenant a et si $\lim\limits_{a} f = f(a)$ on dit que f est **continue** en ce point.
f est dite continue sur $]a, b[$ si et seulement si elle est continue en tout point x_0 de cet intervalle.

Voir page 16 l'étude de la continuité et ses conséquences.

Prop. 20

Si f et g ont pour limites respectives **les réels L et L'** en a :

- alors $f+g$ a pour limite $L+L'$ en ce point;
- alors $f \cdot g$ a pour limite $L \cdot L'$ en a;
- alors, si $L' \neq 0$, f/g a pour limite L/L' en a;
- alors, si $L \geqslant 0$, $\sqrt{f}$ a pour limite $\sqrt{L}$ en ce point.

Attention à la condition $L' \neq 0$.

Prop. 21

Si, pour tout x de D : $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} h = L$ avec $a \in D$, alors :

$$\lim_{a} g = L.$$

Important lorsque l'on peut *encadrer* g par deux fonctions.

Prop. 22

Si f a pour **limite L** en a, et si g est **continue en L**, alors $g \circ f$ a pour limite $g(L)$ en $x = a$.

Théorème important pour la recherche d'une limite de fonction composée

Prop. 23

- Toute fonction polynôme est continue sur R.
- Une fonction quotient de polynômes est continue sur son ensemble de définition.
- Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur R.

$\lim\limits_{x \to 1} (x^2-4x) = 1-4 = -3$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (\sin x) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Prop. 24

(1)	$\lim\limits_{x \to a} (kx^n) = ka^n$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \left(\frac{1}{x-a}\right) = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \left(\frac{1}{x-a}\right) = -\infty$
(2)	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$.

Résultats de Première à voir ou à revoir.

(II) Limite de f en $(+\infty)$ ou $(-\infty)$

Prop. 25

La question de la recherche d'une limite de f en $(+\infty)$ se pose dans le seul cas où f est définie sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle du type $]A; +\infty[$.
Pour la recherche d'une limite à $(-\infty)$, il est nécessaire que D contienne un intervalle du type $]-\infty; A'[$.

Ce qui peut se produire (pour les *définitions*, voir votre cours)

- $\lim\limits_{+\infty} f = L$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ *qui se lit*

  «f a pour limite L en $(+\infty)$»
  ou «$f(x)$ tend vers L si x tend vers plus l'infini»
- $\lim\limits_{-\infty} f = L'$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L'$ *qui se lit* «f a pour limite L' en $(-\infty)$».
- $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *qui se lit* «f a pour limite $(+\infty)$ en $(+\infty)$».
- $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *qui se lit* «f a pour limite $(-\infty)$ à $(+\infty)$».

etc.

Prop. 26

$\lim\limits_{+\infty} (x^n) = +\infty$	$\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\begin{cases} \text{si } n \text{ pair :} & \lim\limits_{-\infty} (x^n) = +\infty \\ \text{si } n \text{ impair :} & \lim\limits_{-\infty} (x^n) = -\infty. \end{cases}$

▲ Dans les théorèmes qui suivent, l'écriture $\lim f$ peut être remplacée indifféremment par $\lim\limits_{a} f$ ou $\lim\limits_{+\infty} f$ ou $\lim\limits_{-\infty} f$, à condition de le faire de la même manière dans les trois colonnes!
Le signe $\boxed{?}$ *signifie que ces théorèmes ne permettent pas de conclure dans l'immédiat. Il convient d'utiliser des méthodes particulières pour déterminer la limite cherchée, si elle existe.*
Ces formes sont parfois qualifiées de «formes indéterminées...».

I. Limites

Prop. 27

Somme

Si $\lim_{\bullet} f$	$\lim_{\bullet} g$	alors $\lim_{\bullet} (f+g)$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$\boxed{?}$

Prop. 28

Quotient

Si $\lim_{\bullet} f$	$\lim_{\bullet} g$	alors $\lim_{\bullet} (f/g)$
L	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$+\infty$	$L (L>0)$	$+\infty$
$-\infty$	$L (L>0)$	$-\infty$
$+\infty$	$L (L<0)$	$-\infty$
$L (L\neq 0)$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$+\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\boxed{?}$
$-\infty$	$-\infty$	$\boxed{?}$
$+\infty$	$-\infty$	$\boxed{?}$
0	0	$\boxed{?}$

Prop. 29

Produit

Si $\lim_{\bullet} f$	$\lim_{\bullet} g$	alors $\lim_{\bullet} (f\cdot g)$
$L (L>0)$	$+\infty$	$+\infty$
$L (L>0)$	$-\infty$	$-\infty$
$L (L<0)$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	$\boxed{?}$

Prop. 30

Radical

Si $\lim_{\bullet} f$	alors $\lim_{\bullet} \sqrt{f}$
$L (L>0)$	$\sqrt{L}$
$+\infty$	$+\infty$

Prop. 31

- S'il existe un réel A tel que pour tout x de $]A, +\infty[$: $g(x) \leqslant f(x)$ et si $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
- Si, sur un voisinage de a : $g(x) \leqslant f(x)$ et $\lim\limits_{a} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.

Prop. 32

— Si $\lim\limits_{\bullet} f = +\infty$ et si g est **bornée** sur son ensemble de définition, alors $\lim\limits_{\bullet} (f+g) = +\infty$.

— Si $\lim\limits_{\bullet} f = -\infty$ et si g est **bornée,** alors $\lim (f+g) = -\infty$.

Prop. 33

Si $\lim\limits_{\bullet} f = \blacksquare$ et si $\lim\limits_{\blacksquare} g = L$ **alors** $\lim\limits_{\bullet} (g \circ f) = L$

les symboles $\bullet$ et $\blacksquare$ peuvent être remplacés par **un réel a,** ou bien $(+\infty)$, ou $(-\infty)$.

Prop. 34

- La limite à $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ d'une fonction **polynôme** est égale à la limite, dans les mêmes conditions, de sa fonction monôme de degré le plus élevé.

Prop. 35

• La limite à $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ d'une fonction **quotient de deux polynômes** (ou fraction rationnelle) est égale à la limite, dans les mêmes conditions, de la fonction quotient des monômes de degrés les plus élevés au numérateur et au dénominateur.

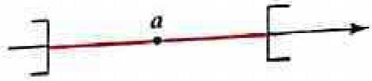
ATTENTION!
Ces théorèmes ne s'appliquent que pour les limites à l'infini.

▲ La recherche d'une limite de fonction utilise l'un des **théorèmes** qui précèdent, plus quelques autres que nous verrons à propos de fonctions logarithmes ou exponentielles, à l'exclusion de tout procédé « pifométrique ».
Des considérations intuitives peuvent aider à **retenir**, mais ne sauraient être acceptées comme justifications.
Tout résultat à propos d'une limite doit être justifié à l'aide d'un des théorèmes cités.

DÉRIVÉES DE FONCTIONS NUMÉRIQUES

Déf. 18

Si la fonction f est définie sur D, et si $a \in D$, on appelle parfois **voisinage** du réel a un intervalle *ouvert* contenant a. Ainsi, $]a-\alpha, a+\alpha[$, avec α strictement **positif**, est un **voisinage** de a.

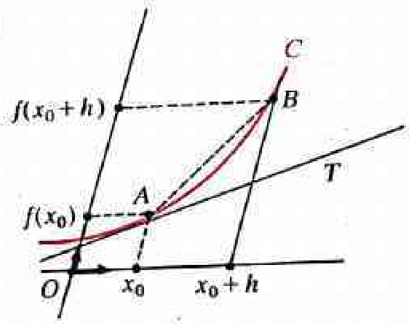


Déf. 19

f est **dérivable** en x_0 si et seulement si :
elle est définie en x_0 et sur un voisinage de x_0;
s'il existe un réel D_0 tel que :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = D_0.$$

D_0 est le **nombre dérivé** de f en x_0, noté aussi $f'(x_0)$.



$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est le coefficient directeur de AB.

D_0, s'il existe, est celui de la tangente AT à C.

Prop. 34

f est **dérivable** en x_0 si et seulement si :
elle est définie en x_0 et sur un voisinage de x_0;
s'il existe un réel D_0 et une application $h \longmapsto \varepsilon(h)$ tels que

$$f(x_0+h)-f(x_0) = h\left(D_0+\varepsilon(h)\right)$$

et $$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Déf. 20

f est **dérivable à droite** en x_0 si et seulement si :
f est définie en x_0 et sur un intervalle du type $[x_0; A[$;

Rappeler aussi la dérivabilité à gauche en x_0.

s'il existe un réel D_1 tel que :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = D_1$$

D_1 est le nombre **dérivé à droite.**

Déf. 21

f est **dérivable sur]a; b[** si elle est dérivable pour tout x_0 de]a, b[.
f est dérivable sur **[a, b]** si elle est dérivable sur]a, b[, à droite au point $x=a$ et à gauche au point $x=b$.

Pour «application dérivée» on dit aussi «fonction dérivée» ou «dérivée».
Ne pas confondre :
D_0 ou $f'(x_0)$ qui est un **réel**, $x \longmapsto f'(x)$ qui est une **application.**

Déf. 22

Si f est dérivable sur]a; b[, **l'application dérivée** de f sur]a, b[est l'application qui à tout x de]a, b[associe le nombre dérivé de f en ce point.

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

f' se note aussi $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

$f'(x_0)$ se notera donc $\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$.

La notation $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ est à manipuler avec précaution.

Dérivées successives de f

Déf. 23

Si f', dérivée de f sur l'intervalle I, est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f' est notée f'', ou $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$: c'est la dérivée **seconde** de f sur I.
On définit de même, si elles existent, les dérivées successives : f''' notée aussi $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^3}$

$f^{[4]}$ notée aussi $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^4}$, etc.

La dérivée d'ordre n, si elle existe, est notée $f^{(n)}$ ou $f^{[n]}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}x^n}$.

• Théorèmes généraux

Prop. 35

Si f et g sont dérivables sur]a, b[, alors :
pour tout réel λ, λf est dérivable sur]a, b[et

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f';$$

$f+g$ est dérivable sur]a, b[et

$$(f+g)' = f' + g';$$

Propriété dite de **linéarité.**

Prop. 36

Si f et g sont dérivables sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors :
$f \cdot g$ est dérivable sur I ;
f^n est dérivable sur I $(n \in \mathbb{N})$;
$\frac{f}{g}$ est dérivable sur I si $f(x) \neq 0$ sur I ;
Si $f(x) > 0$ sur I, alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I.

Prop. 37

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	$(f^n)' = nf' \cdot f^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$	$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Prop. 38

Résultats particuliers

La fonction f est définie par	... f' est définie par	... sur l'ensemble
$f(x) = a$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^p$ $(p \in \mathbb{Z})$	$f'(x) = px^{p-1}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(ax+b)$	$f'(x) = a \cdot \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$	$f'(x) = -a \cdot \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan(ax+b)$	$f'(x) = \frac{a}{\cos^2(ax+b)}$	$\left(ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

- **Dérivée d'une fonction composée :** $g \circ f$

Prop. 39

Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur $f(I)$, alors l'application **composée** $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) \quad \text{ou} \quad (g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f).$$

- **Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables**

Déf. 24

Une fonction de $\mathbb{R}^2$, ou de $\mathbb{R}^3$ ... dans $\mathbb{R}$ est une fonction de *plusieurs variables* (x, y), (x, y, z)...

Ex. : $f : (x, y) \longmapsto 4x^3 - 5y^2 + 2x - y.$

Pour **y fixé,** f est alors une fonction de **x seul :** si cette fonction est dérivable sur I, sa dérivée est la **dérivée partielle** de f *par rapport à x* : on la note $\dfrac{\delta f}{\delta x}$.
Pour **x fixé,** f est alors une fonction de **y seul :** si cette fonction est dérivable sur J, sa dérivée est la dérivée partielle de f par *rapport à y* : on la note $\dfrac{\delta f}{\delta y}$.

▲ Ainsi avec l'exemple ci-dessus :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 12x^2 + 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta f}{\delta y} = -10y - 1.$$

On définit aussi les dérivées partielles **secondes :**

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 24; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = -10; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 0; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 0.$$

FONCTIONS CONTINUES

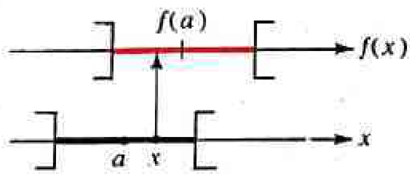
Déf. 25

(1) Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$.
f est **continue** en a signifie que :
— f est définie en a et sur un voisinage de a;
— f admet une limite en a : cette **limite est** $f(a)$.

(2) f est continue à **droite** en a si elle admet une limite à droite en ce point. Elle est continue à **gauche** si elle admet une limite à gauche : dans les deux cas, la limite est $f(a)$.

(3) f est continue sur $]a; b[$ si elle est continue en **tout point** de cet intervalle.

(4) f est continue sur $[a; b]$ si elle est continue sur $]a; b[$, continue à gauche en b et continue à droite en a.



$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que : $\forall_D x$
$|x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Prop. 40

Toute fonction **polynôme,** la fonction **SIN,** la fonction **COS** sont continues sur $\mathbb{R}$.
Si f est continue et **positive** sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I.
Une fonction **quotient** de polynômes est continue sur son ensemble de définition.
La fonction **TAN** est continue sur son ensemble de définition.

Propriétés fondamentales

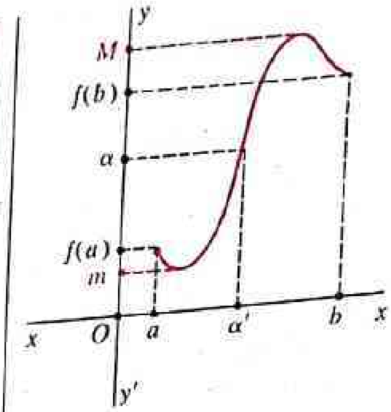
Prop. 41

Si f est **dérivable** en a, alors elle est continue en ce point.

Prop. 42

Si f est **continue** sur $[a;b]$, alors **tout réel** compris entre $f(a)$ et $f(b)$ a un antécédent par f et cet antécédent est élément de $[a;b]$.

▲ En particulier : si $f(a) \cdot f(b) < 0$, il existe c de $[a;b]$ tel que $f(c) = 0$.



Prop. 43

L'image par une fonction continue d'un intervalle **fermé, borné** $[a;b]$ est un intervalle **fermé borné** $[m;M]$: donc toute fonction continue sur $[a;b]$ est **bornée** sur cet intervalle.

Prop. 44

Si f est continue sur $[a;b]$ et **strictement croissante** sur cet intervalle, alors f est une **bijection** de $[a;b]$ sur $[f(a);f(b)]$.
Si f est continue sur $[a;b]$ et **strictement décroissante** sur cet intervalle, alors f est une bijection de $[a;b]$ sur $[f(b);f(a)]$.

L'intervalle $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$) est l'intervalle **image** de $[a;b]$ par f.

Pour un intervalle **ouvert** $]a, b[$, étudier $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Déf. 26

Si f est continue sur $]a;\alpha[$ et $]\alpha;b[$ et si f a pour limite un réel L en α à droite et en α à gauche, on appelle **prolongement de f par continuité** en α la fonction g telle que

$$g(\alpha) = L \quad \text{et pour} \quad x \neq \alpha \quad g(x) = f(x).$$

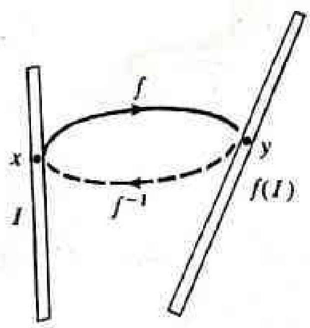
g est alors **continue** sur $]a, b[$.

BIJECTION ET BIJECTION RÉCIPROQUE

Prop. 45

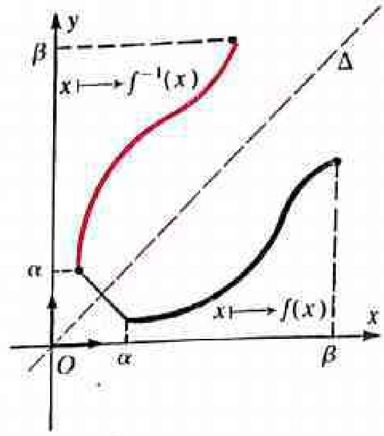
Si f est **continue et strictement monotone** sur I, alors sa bijection réciproque f^{-1} est **continue** sur $f(I)$. Les **variations** de f^{-1} sur $f(I)$ sont les mêmes que celles de f sur I.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$



Prop. 46

Pour **tout** x **de** I : $f^{-1}\circ f(x)=x$.
Pour **tout** x **de** $f(I)$: $f\circ f^{-1}(x)=x$.



Prop. 47

Dans un repère **normé,** la courbe représentative de f et celle de sa bijection réciproque f^{-1} sont **symétriques** par rapport à la **droite** d'équation $y=x$ (qui est ce que l'on appelle la *première bissectrice* en repère *orthonormé*).

Prop. 48

Si la valeur dérivée de f au point a de I est **non nulle,** alors la bijection réciproque f^{-1} est dérivable au point $b=f(a)$ et sa dérivée en ce point est l'inverse de la dérivée de f en a :

$$\boxed{f^{-1\prime}(b)=\frac{1}{f'(a)} \quad \text{avec} \quad b=f(a)} \qquad (f'(a)\neq 0).$$

- **Un exemple remarquable :**

Déf. 27

L'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$: $f : x \longmapsto x^n$ est une bijection. La bijection réciproque est l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ que l'on appelle « **racine n-ième** » : f^{-1}

avec $n\in\mathbb{N}^*$

$$y \longmapsto \sqrt[n]{y}$$

$$\boxed{a=\sqrt[n]{b} \iff b=a^n \ (a \text{ et } b \text{ sont } \textbf{positifs}).}$$

$\sqrt{a}$ est l'écriture simplifiée de $\sqrt[2]{a}$

▲ En écrivant $\sqrt[n]{x}$ sous la forme $x^{\frac{1}{n}}$, toutes les propriétés des puissances d'exposant *entier* s'appliquent aux nouvelles puissances d'exposant *fractionnaire*.
En particulier pour la **dérivée** de f définie par $f(x)=\sqrt[n]{x}$:

$x^{\frac{1}{n}}\cdot x^{\frac{1}{p}}=x^{\frac{1}{np}}$

Prop. 49

$$\boxed{\textbf{Si } f(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}} \ \textbf{ alors } \ f'(x)=\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} \quad (x>0).}$$

▲ $\sqrt[n]{x^p}$ se note aussi, de la même façon $x^{\frac{p}{n}}$ $(x>0)$.

$x^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{x^3}$

$n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$

Prop. 50

$$\boxed{\textbf{Si } g(x)=\sqrt[n]{x^p} \quad \textbf{alors} \quad g'(x)=\frac{p}{n}\,x^{\frac{p}{n}-1}.}$$

▲ $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x^p}}$ se note aussi $x^{-\frac{p}{n}}$ $(x>0)$.

POUR COMPARER, MAJORER, MINORER...

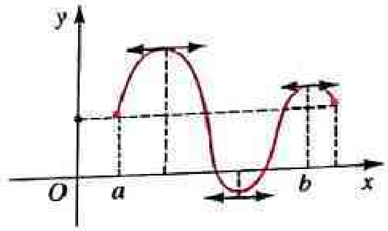
Prop. 51

> **Rappel :** Toute fonction continue sur $[a; b]$ est **bornée** sur cet intervalle, c'est-à-dire qu'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a; b]$: $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

- **Accroissements finis**

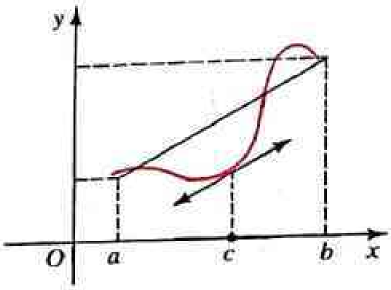
Prop. 52

Si $a < b$, si la fonction f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un réel c de $]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.
En particulier si $f(a) = f(b) = 0$, il existe c de $]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$. Ce que l'on retient en disant que pour une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, entre deux zéros de f, il existe **au moins** un zéro de la dérivée f'.



Prop. 53

> Si f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$, il existe au moins un réel c de $]a; b[$ tel que $$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$ ou bien, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Ces théorèmes prouvent l'existence de c mais non l'unicité.

Prop. 54

Si f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et si **de plus** la dérivée f' est **bornée** :

$$\alpha \leqslant f'(x) \leqslant \beta$$

alors $$\alpha \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \beta.$$

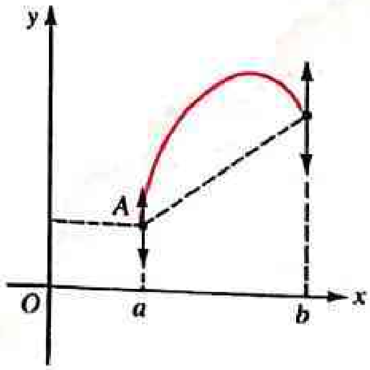
Inégalité des accroissements finis.

Conséquence : limite d'une dérivée.

Ces théorèmes évitent de revenir systématiquement à la définition de la dérivabilité.

Prop. 55

Si f est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ et si la **dérivée** f' admet une **limite** L_1 **à droite en** a, alors f est dérivable à droite en a et sa valeur dérivée à droite, en ce point, est L_1.
Si la **dérivée** f' admet une **limite** L_2 **à gauche en** b, alors f est dérivable à gauche en ce point et sa valeur dérivée à gauche en b est L_2.



Prop. 56

Si la dérivée de f admet pour limite $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ à droite en a, alors la courbe de f admet au point $A(a, f(a))$ une **tangente** parallèle à l'axe yy'. Même propriété en $B(b, f(b))$ si f' a pour limite $(+\infty)$ ou $(-\infty)$ à gauche en b.

Prop. 57

Soit f continue sur $[-a; +a]$. Si sa dérivée f' est continue sur cet intervalle, et s'il existe un réel A tel que pour tout x de $[-a +a]$

$$|f'(x)| \leqslant A|x^n|$$

alors $$|f(x)-f(0)| \leqslant \frac{A}{n+1}|x^{n+1}|.$$

Ce théorème servira aussi pour des **encadrements d'intégrales** sur $[a, b]$.

- **Développements limités au voisinage de 0**

Déf. 28

Si f est continue sur un intervalle I contenant 0, sauf éventuellement en 0, on dit que f admet un **développement limité polynomial** en 0 à l'ordre n s'il existe des réels a_0, a_1, a_2, ..., a_n et une fonction : $x \longmapsto \varepsilon(x)$ tels que :

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+x^n\varepsilon(x)$$

avec $$\lim_{0} \varepsilon = 0.$$

On démontre que :

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(0).$$

Prop. 58

Des exemples à connaître

(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^3\varepsilon(x) \qquad \lim\limits_{0} \varepsilon=0$

(2) $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+x^3\varepsilon(x) \qquad \lim\limits_{0} \varepsilon=0$

(3) $\cos(x)=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+x^4\varepsilon(x) \qquad \lim\limits_{0} \varepsilon=0$

(4) $\sin(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\varepsilon(x) \qquad \lim\limits_{0} \varepsilon=0$

(5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x) \qquad \lim\limits_{0} \varepsilon=0$

(6) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x) \qquad \lim\limits_{0} \varepsilon=0.$

Pour l'instant, ces développements limités sont à manipuler avec **prudence,** en évitant toute **opération** intempestive comme la division, en particulier. Voir les fonctions *ln* et *exp* page 00.

A l'ordre 1, on retrouve le développement limité déjà vu au moyen de la dérivée de f.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h[f'(x_0)+\varepsilon(h)]$$

avec $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon=0$

▲ Pour obtenir un développement limité *au voisinage de a,* on utilise le développement limité au voisinage de 0, avec le **changement de variable :**

$$x=a+h.$$

Un développement limité pourra servir pour obtenir des valeurs approchées de $f(x)$ au voisinage d'un point, pour simplifier la recherche de certaines limites, etc.

POUR L'ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE

L'un des buts de l'étude d'une fonction, c'est d'en donner une représentation graphique précise. Cette représentation permettra de résoudre certains problèmes : équations, inéquations, signes, encadrements, comparaison, etc.

Prop. 59

1. Déterminer l'ensemble de **définition** et examiner ce que cela entraîne pour la courbe de f (sa situation dans le plan). Étudier la **continuité** de f.
2. Étudier éventuellement la **parité** : en déduire des *symétries éventuelles* pour la courbe C.
3. Étudier éventuellement la **périodicité** (en particulier avec des *fonctions trigonométriques*, mais ce ne sont pas les seules!) ce qui permet d'étudier f sur un *intervalle réduit* d'amplitude égale à la période.
4. Déterminer les **limites** aux bornes de l'intervalle d'étude, et interpréter s'il y a lieu ces limites en termes d'*asymptotes* pour la courbe.
5. Étudier les **variations** de f au moyen de $f'(x)$ que vous aurez calculé, sans oublier de préciser sur quel ensemble f est *dérivable*. Soit f dérivable sur I.

Prop. 60

> Si la fonction dérivée f' est strictement **positive** sur I, alors la fonction f est **strictement croissante** sur I.
> Si la fonction dérivée f' est strictement **négative** sur I, alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I.
> Si f' est **nulle** sur I, alors f est **constante** sur cet intervalle.

6. Reporter le **maximum d'informations** sur un *tableau* dit des *variations;* calculer éventuellement maximum, minimum, etc.
7. Tracer la **courbe** dans un *repère* de votre choix : mais placer d'abord certains points remarquables (intersections avec les axes) avec leurs tangentes, construire les asymptotes s'il en existe, se souvenir d'étudier la position de la courbe par rapport à ces asymptotes, tenir compte de la parité, c'est-à-dire des symétries éventuelles.

Équation d'une tangente en $A(x_0, f(x_0))$

Prop. 61

Si f est **dérivable** en x_0, sa courbe représentative admet, au point $A(x_0, f(x_0))$ une tangente dont le coefficient directeur est égal à la valeur dérivée de f **en ce** point.

Équation de la tangente en A :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0) \quad \text{ou encore} \quad f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

- **Si $f'(x_0)=0$** alors la tangente en $A(x_0, f(x_0))$ est parallèle à l'axe $x'x$.

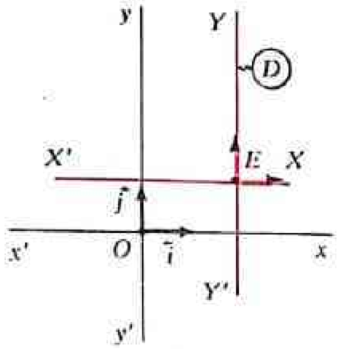
Prop. 62

Si f est dérivable à **droite** et à **gauche** en x_0, avec deux valeurs dérivées différentes, on dit qu'il y a deux *demi-tangentes* en A.

Prop. 63 Si $\lim\limits_{h \to 0} \left| \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right| = +\infty$, la courbe admet en A une tangente **parallèle à l'axe des y.**

■ **Recherche d'éléments de symétrie pour la courbe C**

Prop. 64 ▲ Choisir un **nouveau repère** dont l'origine est le **point E** ou un **point de D.** Le changement de variables $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ conduit à remplacer l'équation de C : $y = f(x)$ par une *nouvelle équation* $Y = k(X)$ dans ce *nouveau repère* : dans ce repère, C est alors la représentation d'une **nouvelle fonction** $k : X \longmapsto Y = k(X)$.
Si k est **impaire**, E est centre de symétrie.
Si k est **paire**, la droite D est axe de symétrie.

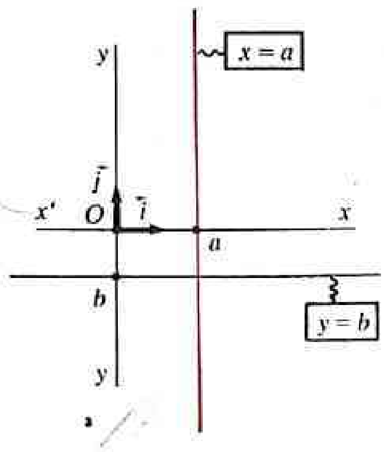


■ **Recherche d'asymptotes à la courbe C**

Déf. 29 La **droite** d'équation $x = a$, parallèle à l'axe yy', est une asymptote à la courbe représentative de f dans l'un des cas suivants :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = -\infty$$

$$\text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = -\infty.$$



Déf. 30 La **droite** d'équation $y = b$, parallèle à l'axe xx' est une asymptote à la courbe représentative de f dans l'un des cas suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

La position de la courbe par rapport à cette droite *(en dessous* ou *en dessus)* sera étudiée au moyen du **signe de $f(x) - b$.**

Déf. 31

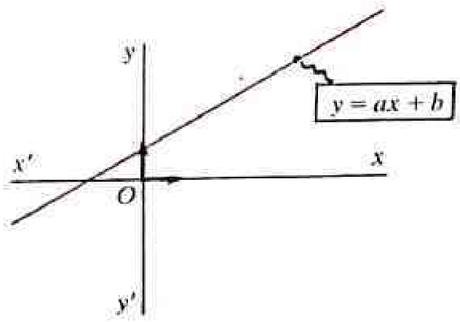
Si l'on peut trouver **deux réels** a et b, avec $a \neq 0$, tels que

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

alors **la droite d'équation** $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de f, que l'on appelle parfois *asymptote oblique.*



«Oblique» au sens de «non parallèle à l'un des axes».

La position de C par rapport à cette droite sera étudiée au moyen du **signe** de $f(x) - (ax+b)$.

- Cas 1 : Si $f(x)$ s'écrit sous la forme $ax + b + Q(x)$ avec $\lim\limits_{|x| \to +\infty} Q(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote.

Si, pour un quotient de polynômes, le degré du numérateur est supérieur de **une unité** à celui du dénominateur, alors ce quotient peut s'écrire :

$$ax + b + Q(x)$$

avec $\lim\limits_{+\infty} Q = 0.$

- Cas 2 : Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ **ou** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ (avec $a \neq 0$) et si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b \quad \textbf{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = b$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à C.

▲ Pensez toujours à interpréter une limite, en pensant à la courbe représentative de f et aux asymptotes.

RAPPELS SUR LES PRIMITIVES

Déf. 32

Si la fonction f est définie sur l'intervalle I, on appelle **primitive de f sur I** toute fonction F définie et dérivable sur I admettant f pour dérivée : $F' = f$.

Cours de Première

F est une **primitive** de f sur I

signifie

f est la **dérivée** de F sur I

Pour **vérifier** que F est bien une primitive de f, il suffit de **dériver** F : on doit **retrouver** f.

Prop. 65

Si f admet une primitive sur I alors elle en admet une **infinité.**
Si F est l'une d'elles, toutes les autres s'écrivent

$$H(x) = F(x) + C \quad (C \text{ constante}).$$

Prop. 66

Toute fonction f **continue** sur I admet des primitives sur cet intervalle.

Prop. 67

Si f possède des primitives sur I, pour **tout** x_0 de I et pour **tout réel** B, il existe **une** primitive de f et **une seule** qui prend la valeur B en x_0.

Prop. 68

Si f est définie par	… alors ses **primitives** s'écrivent	… sur l'ensemble
$f(x)=a$ (constante)	$F(x)=ax+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	$F(x)=-\frac{1}{x}+C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$F(x)=\frac{-1}{a}\cos(ax+b)+C$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^p$ (avec $p\in\mathbb{Q}$ et $p\neq -1$)	$F(x)=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$	$\mathbb{R}^*$ si $p\in\mathbb{Z}^-$; $\mathbb{R}_+^*$ si p non entier
$f(x)=\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$F(x)=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$	si $\cos(ax+b)\neq 0$

Prop. 69

Si F est une primitive de f sur I, alors λf admet pour primitives les fonctions $\boldsymbol{\lambda F+C}$, pour tout réel λ.

Prop. 70

Si F et G sont des primitives respectives de f et g, alors $\boldsymbol{F+G}$ est une primitive de $\boldsymbol{f+g}$.

Il est **souvent** plus facile de rechercher les primitives d'une somme que celles d'un produit; d'où l'idée de **linéariser**, avec les fonctions *trigonométriques*.

Prop. 71

Si f s'écrit sous la forme $\boldsymbol{U'\cdot U^n}$, n étant un **entier différent de (-1)** alors les primitives de f s'écrivent :

$$F=\frac{1}{n+1}\cdot U^{n+1}+C.$$

En particulier, si f s'écrit $\frac{U'}{U^2}$, ses primitives s'écrivent : $F=-\frac{1}{U}+C.$

Condition $u(x)\neq 0.$

LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Déf. 33

La fonction **logarithme népérien,** notée **ln,** est la primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule pour $x=1$.

Exercices 87 à 119.

L'**ensemble de définition** de $\ln x$ est donc $]0; +\infty[$.
Sa valeur en $\boldsymbol{x=1}$ est 0 : $\mathbf{\ln 1=0}$.

Sa **dérivée** est : $x \longmapsto \frac{1}{x}$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Cette définition est à bien connaître : attention à tout ce qu'elle contient! Vous rencontrerez peut-être encore la notation Log actuellement abandonnée.

Propriétés fondamentales :

Prop. 72

Quels que soient les réels **strictement positifs** a et b et le **naturel** n :

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$	$\ln(a^n) = n \ln a$

La fonction **ln** établit un **isomorphisme** de $(\mathbb{R}_*^+, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

Prop. 73

La fonction $x \longmapsto \ln x$ est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}_*^+$.

x	0	1	$+\infty$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$		+	
$\ln x$	$-\infty$	0	$\nearrow +\infty$

Prop. 74

Cette fonction est une **bijection croissante** de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ donc :

$\ln a = \ln b$	**équivaut à**	$a=b$
$\ln a < \ln b$	**équivaut à**	$a<b$
$\ln a > 0$	**équivaut à**	$a>1$.

Propriété importante.

Prop. 75

Il existe un **réel unique** dont le logarithme népérien est 1 : on le note e et on l'appelle *base des logarithmes népériens*

$\boxed{\mathbf{\ln e = 1}}$ avec $e \approx 2{,}718$.

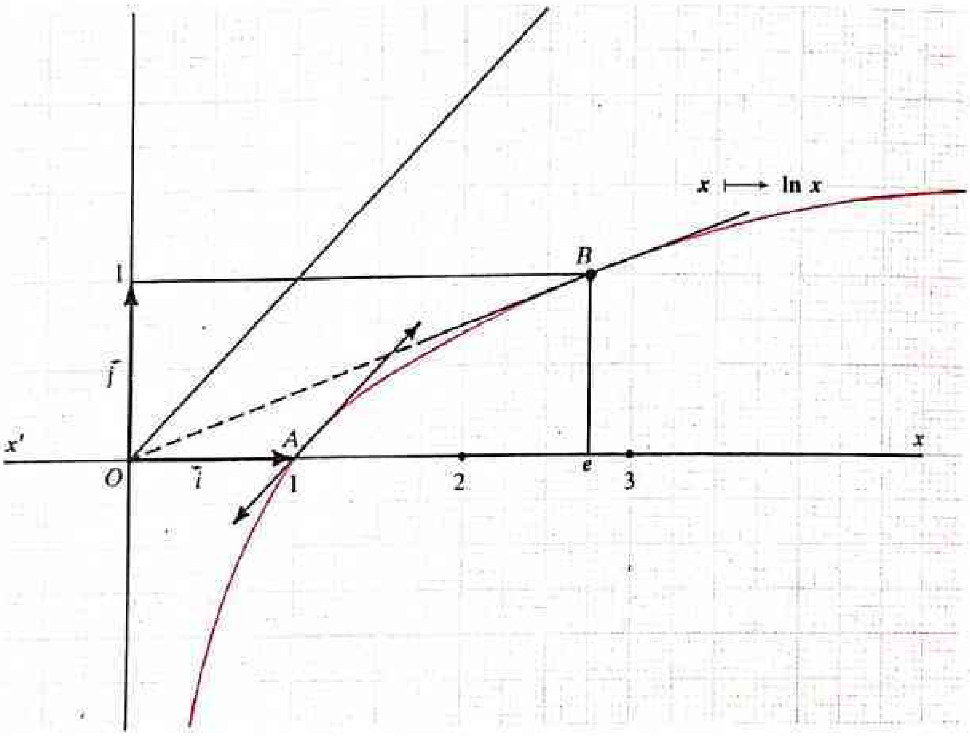
Prop. 76

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty.$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (\ln x) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0.$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \cdot \ln x) = 0.$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Prof. 77

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \left(\frac{\ln(1+u)}{u}\right) = 1.}$$



La **courbe représentative** de la fonction ln est tout entière dans le demi-plan défini par $x > 0$, avec $y > 0$ pour $x > 1$ et $y < 0$ pour $x < 1$.
La courbe est *asymptote* à l'axe yy'. En $A(1; 0)$, la tangente est de pente 1. En $B(e, 1)$, la tangente est une droite qui passe par l'origine du repère.

Dérivées et primitives de fonctions composées.
La fonction f définie par $f(x) = \ln|x|$ (avec $x \neq 0$) a pour dérivée f' telle que :

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Prop. 78

Les primitives de g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ avec $x \neq 0$ sont les fonctions :

$$G(x) = \ln|x| + C.$$

Prop. 79

> La fonction composée f définie par $f(x)=\ln|U(x)|$ avec $U(x)\neq 0$ a pour dérivée :
> $$f'(x)=\frac{U'(x)}{U(x)}.$$

$f(x)=\ln|(2x-4)|$ a pour dérivée
$$f'(x)=\frac{2}{2x-4}$$
sur $\mathbb{R}-\{2\}$.

Prop. 80

> Les primitives de g définie par $g(x)=\dfrac{U'(x)}{U(x)}$ avec $U(x)\neq 0$ sont les fonctions :
> $$G(x)=\ln|U(x)|+C.$$

$g(x)=\dfrac{4}{4x+1}$.

$G(x)=\ln|4x+1|+C$.

▲ Pour l'étude de **limites** de fonctions composées, on utilisera la propriété **P33** page 12. En particulier :

$$\begin{cases} \text{Si } \lim\limits_{\alpha} |U(x)|=+\infty & \text{alors } \lim\limits_{\alpha} \ln|U(x)|=+\infty. \\ \text{Si } \lim\limits_{\alpha} U(x)=0^+ & \text{alors } \lim\limits_{\alpha} \ln(U(x))=-\infty. \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{\ln} \ln|u(x)|$$

- **Développement limité** en $x=0$ de $\ln(1+x)$.

Prop. 81

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\cdot\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon=0.$$

- **Fonction logarithme de base *a* ($a>0$; $a\neq 1$).**

Déf. 34

La fonction logarithme **de base *a*** est la fonction notée $\log_a$ et définie par :

$$x>0 \qquad \boxed{\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}.}$$

▲ Ces fonctions ont les mêmes propriétés fondamentales que la fonction ln. Les problèmes de dérivabilité et de limite se traitent au moyen de la définition ci-dessus.

Logarithme *décimal :*
$$\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$$
cette fonction a perdu une grande partie de son intérêt depuis l'apparition des calculatrices.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Déf. 35

La fonction logarithme népérien étant une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet une *bijection réciproque :* la fonction **exponentielle naturelle,** ou **de base *e*,** est la bijection réciproque de la fonction ln. On la note **exp.**

> $y=\exp(x)$ **équivaut à** $x=\ln(y)$ avec $y>0$

Exercices 120 à 143.

$$\ln e = 1 \quad \text{donc} \quad e = \exp 1$$
$$\ln e^n = n \quad \text{donc} \quad e^n = \exp n.$$

On pose, pour tout réel x :

$$\mathbf{exp}\ x = e^x.$$

e^x se lit « exponentielle de x », ou « e de x » ou encore, mais c'est un abus : « e puissance x ».

$$e^{\ln y} = y \qquad y > 0$$
$$\ln(e^x) = x$$

Prop. 82

La fonction exp est **définie** sur $\mathbb{R}$;
exp x est **positif** pour tout x

$$\forall x : e^x > 0.$$

Prop. 83

La fonction exp est **égale** à sa dérivée sur $\mathbb{R}$:

$$(\exp x)' = \exp x$$

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Prop. 84

La fonction exp est une **bijection** strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$

$\exp a = \exp b$ ou $e^a = e^b$	**équivaut à**	$a = b$
$\exp a > \exp b$ ou $e^a > e^b$	**équivaut à**	$a > b.$

C'est important pour les équations et les inéquations.

Propriétés fondamentales :

Prop. 85

- $\exp a \cdot \exp b = \exp(a+b)$ ou $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$.
- $\dfrac{\exp a}{\exp b} = \exp(a-b)$ ou $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.
- $\dfrac{1}{\exp b} = \exp(-b)$ ou $\dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$.

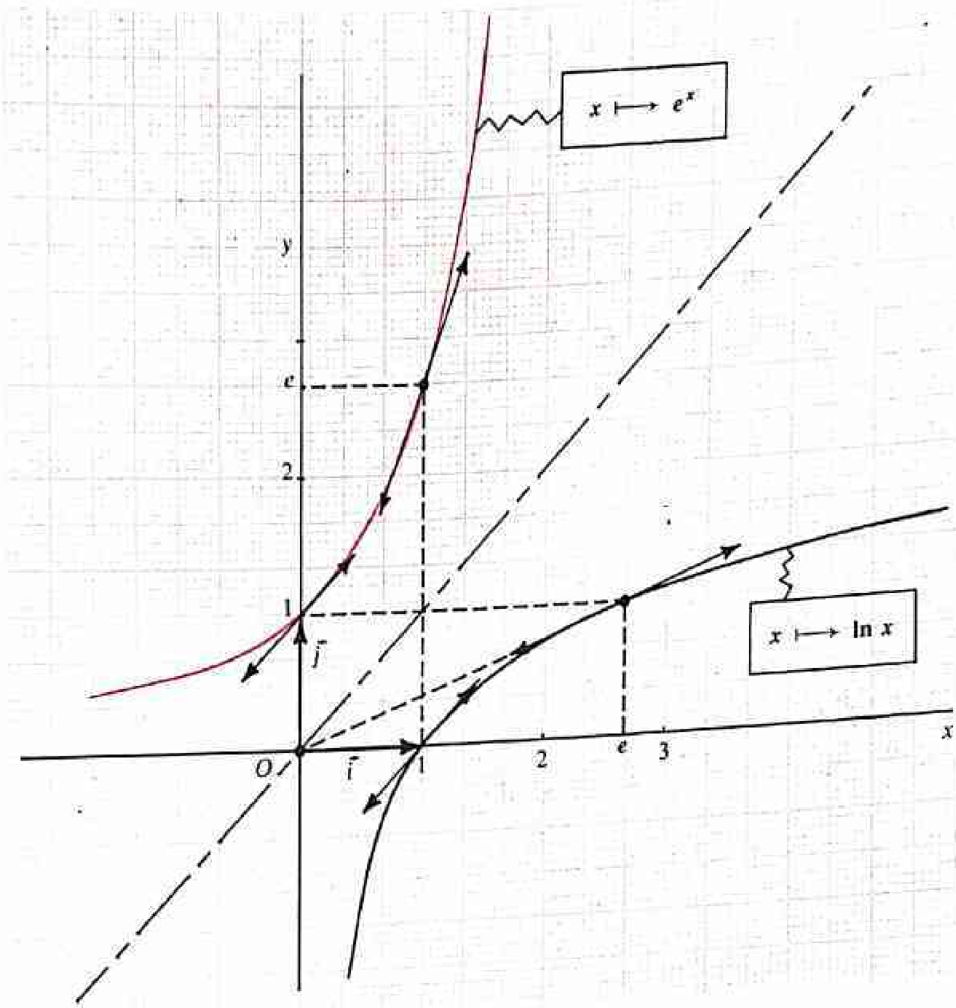
Isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

Prop. 86

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x) = 0.$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0.$

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \left(\frac{e^u - 1}{u}\right) = 1.}$$

La courbe représentative de la fonction exp est **symétrique** de la courbe représentative de ln par



rapport à la droite d'équation $y=x$, à condition que le repère soit *orthonormé.*
L'axe xx' est asymptote à cette courbe.

- **Développement limité en $x=0$.**

Prop. 87 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim_{0} \varepsilon = 0$.

- **Dérivées et primitives de fonctions composées.**

Prop. 88 Les primitives de g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x$ sont les fonctions G : $G(x)=e^x+C$.

Prop. 89 La fonction composée f définie par $f(x)=e^{U(x)}$ ou $f(x)=\exp U(x)$ a pour dérivée f' :

$$f'(x)=U'(x)\cdot e^{U(x)}.$$

$f(x)=e^{x^2+5x-2}$ a pour dérivée $f'(x)=(2x+5)\,e^{x^2+5x-2}$.

Prop. 90

Les primitives de g définie par :
$$g(x) = U'(x) \cdot e^{U(x)}$$
sont les fonctions G telles que :
$$G(x) = e^{U(x)} + C.$$

- **Fonctions $x \longmapsto a^x$** $(a > 0;\ a \neq 1)$.

Déf. 36

Si a est un réel strictement **positif et non égal à 1 :**

$$\boxed{e^{\ln a} = a.}$$

$$a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \ln a$$

La fonction **exponentielle de base** a est définie par :

$$x \longmapsto a^x = e^{x \cdot \ln a} \text{ avec } a > 0 \text{ et } a \neq 1.$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x,\ a^x > 0$.
Du point de vue algébrique, elle possède les **mêmes propriétés** que la fonction exp.

$a^{x+x'} = a^x \cdot a^{x'}$

$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

$\dfrac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x}$.

Prop. 91

Sa dérivée : $(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = a^x \cdot \ln a$.

Prop. 92

Cette fontion est
strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$,
strictement décroissante si $a < 1$.

Prop. 93

Si $a > 1$: $\lim\limits_{+\infty} (a^x) = +\infty \qquad \lim\limits_{-\infty} (a^x) = 0.$

Si $a < 1$: $\lim\limits_{+\infty} (a^x) = 0 \qquad \lim\limits_{-\infty} (a^x) = +\infty.$

Toutes ces propriétés se retrouvent à partir de l'égalité
$$a^x = e^{x \ln a}.$$

- **Fonction $x \longmapsto x^\alpha$** (α réel)

Prop. 94

Cette fonction est **définie** sur $]0; +\infty[$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pour $\alpha = 0$ cette fonction est la fonction constante : $f(x) = 1$.
Pour $\alpha = 1$ pour tout x : $f(x) = x$.

$$\boxed{\text{Pour } \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 1 : x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.}$$

La relation :
$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$
est essentielle. Elle permet de retrouver la dérivée et les limites de $f(x) = x^\alpha$.

Prop. 95

La fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ est **dérivable** sur $]0; +\infty[$. Sa dérivée est $\boldsymbol{f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$.

Prop. 96

Si $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to 0} (x^\alpha) = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^\alpha) = +\infty.$

Si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x \to 0} (x^\alpha) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^\alpha) = 0.$

Prop. 97

Soit g une fonction **dérivable** sur I et **strictement positive** sur I. Pour tout réel $\alpha \neq -1$, la fonction p telle que :

$$p(x) = g^\alpha(x) \cdot g'(x)$$

a pour **primitives** sur I les fonctions qui s'écrivent :

$$P(x) = \frac{1}{\alpha + 1} \cdot g^{\alpha+1}(x) + C.$$

Représentations graphiques des fonctions

$$f(x) = x^\alpha \quad (x > 0).$$

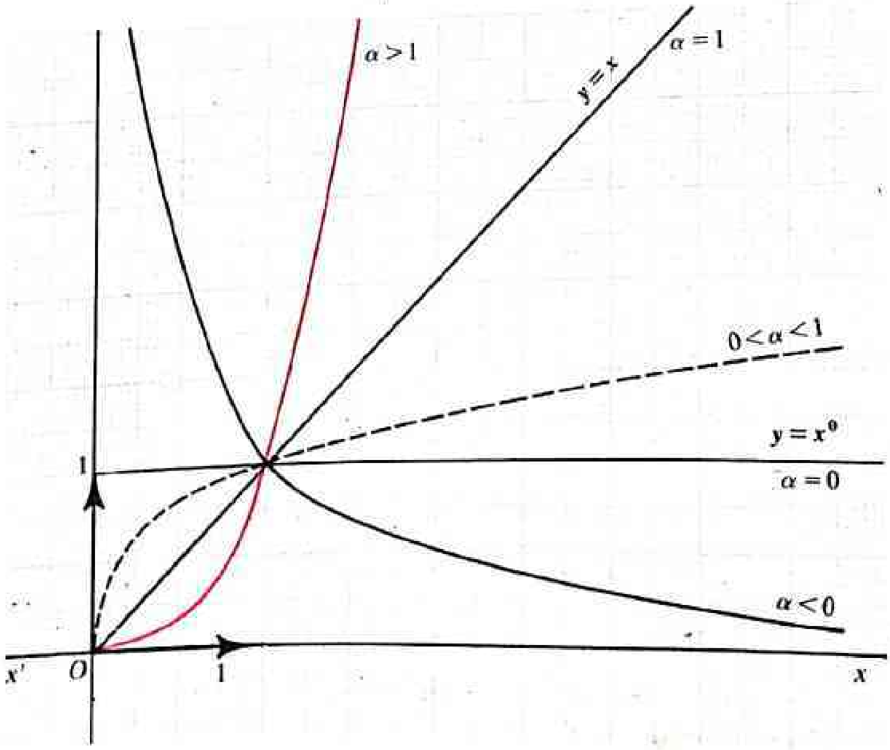
Une calculatrice vous permettra de dresser un tableau de valeurs de $f(x) = x^\alpha$.

$\alpha > 1$: penser à *l'allure de* : $x \longmapsto x^2$.

$0 < \alpha < 1$: penser à *l'allure de* : $x \longmapsto \sqrt{x}$.

$\alpha < 0$: penser à *l'allure de* : $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.

Pour $\alpha < 0$: les deux axes sont asymptotes à la courbe.



$U_n \leq M$

Prop. 98

Croissance comparée de certaines fontions.

Pour tout réel $\alpha > 0$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x^\alpha}\right) = 0$	$\lim\limits_{x \to 0^+} (x^\alpha \cdot \ln x) = 0.$

x^α croît plus vite que $\ln x$.

Prop. 99

Pour tout réel $\alpha > 0$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^\alpha}\right) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} (\lvert x\rvert^\alpha \cdot e^x) = 0.$

e^x croît plus vite que x^α.

Prop. 100

Pour tout réel a **positif** différent de 0 et de 1 et tout réel α :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right) = +\infty.$$

a^x *croît plus vite* que x^α.

Pour $\alpha < 0$, poser $\beta = -\alpha$.

SUITES RÉELLES

Déf. 37

Une suite réelle est une fonction pour laquelle la variable prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}$: c'est une **application** d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
Notations : $u : n \longmapsto u_n$ (u indice n).
Suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$;
Suite finie : $(V_n)_{1 \leq n \leq 8}$.

▲ Le premier terme d'une suite est soit U_0, auquel cas le *n-ème* terme est $\boldsymbol{U_{n-1}}$, soit V_1, auquel cas le *n-ème* est $\boldsymbol{V_n}$. Les opérations sur les suites se définissent comme pour une fonction.

Exercices 144 à 172

Ce sont des révisions et mises au point de la classe de 1[re].

u_n est le *terme général* de la suite u.

Déf. 38

Une suite U est croissante si, pour tout n :

$$U_n \leq U_{n+1}.$$

Une suite U est décroissante si pour tout n :

$$U_n \geq U_{n+1}.$$

Une suite est constante, ou stationnaire si pour tout n :

$$U_n = U_{n+1}.$$

On définit aussi une suite **strictement** croissante par

$$u_n < u_{n+1}.$$

Déf. 39

Deux suites U et V sont **égales** si :
$\forall n \quad U_n = V_n.$

Déf. 40

Une suite U est **majorée** par le réel A si pour tout n :

$$U_n \leqslant A.$$

Une suite U est **minorée** par B si pour tout n :

$$B \leqslant U_n.$$

Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

- **Démonstration par récurrence**

Dans l'étude d'une suite, on utilise souvent le raisonnement par récurrence qui repose sur la propriété suivante.

Ce type de démonstration ne s'applique pas qu'aux suites, bien évidemment!

Prop. 101

Soit $p(n)$ une propriété dépendant d'un **naturel n**, n_0 étant la *plus petite valeur* de n pour laquelle p a une signification.
Si $p(n_0)$ est vraie
et **si** « **$p(k)$ vraie** » entraîne « **$p(k+1)$ vraie** »
alors $p(n)$ est vraie pour **tous** les naturels n.

$p(n)$ est aussi appelé **prédicat**.

Pour n_0 on peut avoir $n_0=0$, $n_0=1$, etc.

- **Convergence**

Déf. 41

Une suite U est **convergente** et a pour **limite** le **réel L** si et seulement si pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un naturel p tels que pour tout $n\in D$:

$$n>p \implies |U_n-L|<\varepsilon.$$

On écrit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} (U_n)=L \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} U=L$$

ou

$$\lim U=L.$$

Une suite **divergente** est une suite non convergente.

D est l'ensemble de définition : c'est une partie de $\mathbb{N}$.

Si pour tout $n>n_0$

$$u_n=A$$

alors u est convergente vers A.

Déf. 42

Une suite est divergente vers $(+\infty)$ si, quel que soit le réel A il existe un naturel p tels que, pour tout $n\in D$

$$n>p \implies U_n>A.$$

On écrit $\lim\limits_{+\infty} U=+\infty$ ou $\lim U=+\infty$.

Une suite U est divergente vers $(-\infty)$ si la suite $(-U)$ est divergente vers $(+\infty)$.

Prop. 102

Toute suite qui est **à la fois** croissante et majorée est convergente.
Toute suite qui est à **la fois** décroissante et minorée est convergente.

Mais cette propriété ne donne pas la limite L.

Prop. 103

Si la suite u est définie au moyen de la fonction f :

$$u_n = f(n)$$

f étant définie sur $]A; +\infty[$:

Si $\lim\limits_{+\infty} f = L$ alors u **converge** et $\lim\limits_{+\infty} u = L$.

Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors u est divergente vers $(+\infty)$.

Si $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ alors u est divergente vers $(-\infty)$.

Revoir à ce sujet des propriétés concernant les limites à $(+\infty)$ d'une fonction, que l'on utilisera aussi pour les suites.

- **Des cas particuliers**

Prop. 104

- La suite u telle que $u_n = \dfrac{1}{n^p}$ (p entier et $p \geqslant 1$) et la suite v telle que $v_n = \dfrac{1}{\alpha^n}$ (α réel, $\alpha > 1$) sont **convergentes vers 0.**
- Si la suite w est convergente vers 0, $\dfrac{1}{|w|}$ est **divergente vers $(+\infty)$.**
- Si la suite $|w|$ est divergente vers $(+\infty)$, $\dfrac{1}{w}$ est **convergente vers 0.**

Ces suites particulières sont intéressantes pour des comparaisons avec **P105.**

Prop. 105

Soient trois suites u, v et w telles que, à partir de n_0 :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Si u et w sont convergentes, avec la **même limite** L, alors v est convergente et $\lim v = L$.

Prop. 106

Soit une suite u définie par récurrence par :

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

Si u est convergente vers L et si g est **continue** sur un intervalle contenant L, alors

$$L = g(L).$$

Cette propriété, associée à **P102** permet souvent de déterminer une limite L **après avoir démontré l'existence de L.**

Prop. 107

Soit une suite u convergente de limite L et g une fonction continue en L.

La suite v définie par $v = g \circ u$ est convergente et sa limite est $g(L)$.

Suites particulières

- *Suite arithmétique*

Déf. 43

r étant un réel, une suite arithmétique de **raison** r est définie par son premier terme u_0 et, pour tout $n \neq 0$:

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Si $r=0$, la suite est constante.

Prop. 108

Expression du terme de rang n :

$$u_n = u_0 + n \cdot r.$$

Somme des termes de u_0 à u_{n-1} :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right).$$

u_0 : premier terme
u_{n-1} : dernier terme
n : nombre de termes

Une suite arithmétique n'est convergente que si la raison est nulle.

- *Suite géométrique*

Déf. 44

q étant un réel **non nul,** une suite géométrique de **raison** q est définie par son premier terme v_0 et, pour tout n :

$$v_{n+1} = v_n \cdot q.$$

Le cas $q=0$ ne présente aucun intérêt.

Prop. 109

Expression du terme de rang n :

$$v_n = v_0 \cdot q^n.$$

Somme des termes de v_0 à v_{n-1} :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = v_0 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

n : nombre des termes que l'on ajoute.

Prop. 110

- Si $|q|>1$, la suite (q^n) est divergente et

$$\lim_{+\infty}(|q^n|) = +\infty.$$

Si $|q|<1$, la suite (q^n) est convergente et

$$\lim_{+\infty}(q^n) = 0.$$

Les variations d'une suite géométrique dépendent à la fois du signe de v_0 et du signe de q.

Prop. 111

> Donc, si $|q|<1$, la somme S_n est une suite **convergente** et
>
> $$\lim_{+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}.$$

- **Suite vérifiant une relation du type**

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad ((a, b) \in \mathbb{R}^2).$$

Prop. 112

a et b étant deux réels fixés, l'ensemble des suites u vérifiant une telle relation est un **espace vectoriel** de **dimension** 2 sur $\mathbb{R}$.
Pour u_0 et u_1 donné, il existe **une seule** suite u de cet ensemble.

▲ La détermination des solutions passe par l'étude de **l'équation caractéristique** associée :

$$X^2 - aX - b = 0.$$

$a \neq 0, \quad b \neq 0$

conditions initiales :

$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta.$

Prop. 113

Si cette équation a **deux racines réelles** λ_1 et λ_2, alors :

$$u_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n.$$

Si cette équation a **une racine réelle** double λ alors :

$$u_n = (An + B)\lambda^n.$$

Si cette équation a **deux racines complexes** conjuguées

$$\lambda_1 = re^{i\theta} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = re^{-i\theta},$$

alors $\quad u_n = r^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta).$

A et B sont des **constantes réelles** déterminées au moyen des deux premiers termes u_0 et u_1 s'ils sont connus.

CALCUL INTÉGRAL

Déf. 45

Soit f une fonction **continue** sur l'intervalle I et a et b deux réels éléments de I. Si F est une **primitive** de f sur I, on appelle intégrale de a à b de f le réel : $F(b) - F(a)$.
Ce réel est indépendant de la primitive F choisie.

On le note $\int_a^b f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.}$$

Exercices 173 à 238

La lettre x peut être remplacée par **toute autre lettre :**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

Prop. 114

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Prop. 115

Si f est une constante K : $\int_a^b K\,dx = K(b-a).$

Pour « intégrale de a à b » lorsque $a < b$, on dit aussi « intégrale **sur** $[a, b]$ de f ».

Prop. 116

Si f est **impaire** : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

Si f est **paire** : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

Prop. 117

Si f et g sont deux fonctions continues sur I et λ un réel quelconque :

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Propriété dite de **linéarité** à rapprocher des propriétés **P69 P70** des primitives d'une fonction continue sur I.

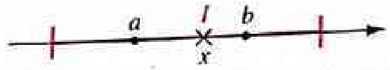
Prop. 118

Pour $a \in I$ et pour tout réel x de I, l'application G de I dans R :

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

est la primitive de f sur I **qui s'annule en $x=a$:**

Si	$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$
alors	$\boldsymbol{G'(x) = f(x)}$ et $\boldsymbol{G(a) = 0}.$



Attention à la condition $x \in I$.

Prop. 119

Théorème de Chasles : pour tous réels a, b et c de I

$$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt.$$

A rapprocher de :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

d'où le *nom de Chasles*.

Théorèmes de comparaisons.

Prop. 120

- Si $a<b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$

  Si $a<b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur I alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0.$

Bien noter la condition $a<b$.

Prop. 121

- Si $a<b$ et $f(x) \leqslant g(x)$ sur I alors

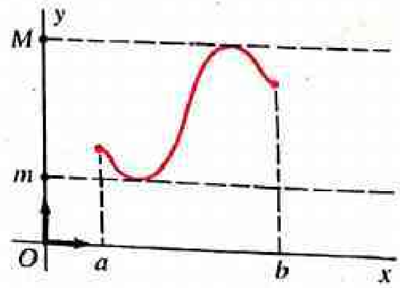
$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Prop. 122

- Si m et M sont respectivement le **minimum** et le **maximum** de f continue sur $[a;b]$, alors l'intégrale de f sur $[a;b]$ est encadrée par $m(b-a)$ et $M(b-a)$:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

entraîne $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a).$$



Déf. 46

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est appelé **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$.

Modes de calcul d'une intégrale d'une fonction continue.

Prop. 123

① *Recherche d'une primitive de f.*
Se souvenir que :

- il est souvent plus simple de déterminer une primitive d'une **somme** plutôt que celle d'un produit, d'où l'intérêt de **linéariser** certaines fonctions, en particulier en trigonométrie;
- si f s'écrit sous la forme $U'\cdot U^p$, avec $p \neq -1$, alors une primitive de f s'écrit $\dfrac{1}{p+1}\cdot U^{p+1}$;
- si f s'écrit sous la forme $\dfrac{U'}{U}$ alors une primitive de f s'écrit $\ln|U|$ $(U(x)\neq 0)$.

Si $f(x)=\cos 5x\cdot\sin 2x$, transformer $f(x)$ en somme.

p est rationnel.

Prop. 124

② *Intégration par parties :*

> Si f et g sont dérivables sur $[a, b]$, alors :
> $$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x=[f(x)\cdot g(x)]_a^b-\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Formule importante dont on ne saurait se passer dans certains cas.

Prop. 125

③ *Changements de variables affines.*
Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(\alpha x+\beta)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\cdot\int_{a'}^{b'} f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec $\begin{cases} a'=\alpha a+\beta \\ b'=\alpha b+\beta. \end{cases}$

$$\int_1^3 (2x-5)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-3}^{1} t^2\,\mathrm{d}t.$$

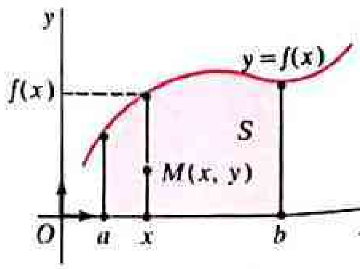
■ APPLICATION AUX CALCULS D'AIRES PLANES

Prop. 126

Le plan est muni d'un repère **orthogonal** $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Si $a<b$ et si $f(x)$ est **positif** sur $[a, b]$, alors **l'aire** de la surface limitée par la courbe représentative de f, l'axe xx' et les deux droites d'équations respectives : $x=a$ et $x=b$, est donnée par :

$$\mathcal{A}(S)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(l'unité d'aire étant l'aire du rectangle de côtés $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$).



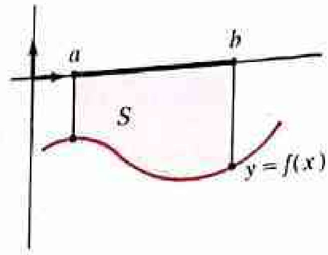
$a\leqslant x\leqslant b$ et $0\leqslant y\leqslant f(x)$

Prop. 127

Si la surface S' est **symétrique** de la surface S dans une symétrie orthogonale autour d'une droite D, ou dans une symétrie centrale, alors ces deux surfaces ont la même aire.

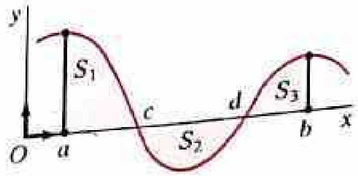
Si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a; b]$, alors l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, l'axe xx' et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

$$\mathcal{A}(S) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$



Prop. 128

Si la courbe représentative de f **coupe l'axe xx'**, c'est-à-dire si $f(x)$ s'annule sur $[a, b]$, alors on calculera une aire telle que celle de la surface *coloriée en rouge* ci-contre, en calculant séparément les aires pour les parties de surface situées de part et d'autre de l'axe xx', et on fera la somme des nombres **positifs** obtenus.

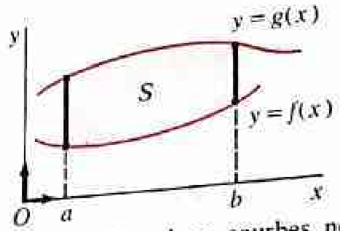


Aire totale
$= \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2) + \mathcal{A}(S_3)$.

Prop. 129

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a; b]$, alors l'aire de la surface délimitée par la courbe de f, celle de g, les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est donnée par :

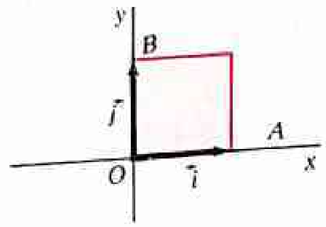
$$\mathcal{A}(S) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

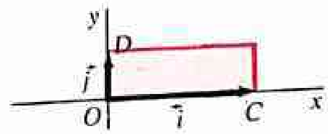


Attention! Les deux courbes ne sont pas **sécantes** sur $[a, b]$.

▲ **Attention à l'unité d'aire!**

- Si le repère est **orthonormé**, l'unité d'aire est celle du **carré** dont le côté a pour mesure $\|\vec{\imath}\|$.
- Si le repère est orthogonal avec $\|\vec{\imath}\| \neq \|\vec{\jmath}\|$, alors l'unité d'aire est celle du rectangle de côtés $\|\vec{\imath}\|$ et $\|\vec{\jmath}\|$.





Si $OA = OB = 1$ cm l'unité d'aire est **1 cm²**.
Si $OC = 3$ cm et $OD = 1$ cm l'unité d'aire est **3 cm²**.

■ APPLICATION A CERTAINES FONCTIONS

Prop. 130

Si f est **continue** sur un intervalle I, a étant **un élément de I**, alors l'application de I dans R :

$$x \longmapsto g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est **la primitive de f qui s'annule** en $x = a$.
Pour tout x de I :

$$\boldsymbol{g'(x) = f(x)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{g(a) = 0}.$$

g est une **fonction de x**.
La variable t n'est qu'une notation *(muette!)* et n'a rien à voir avec x.

■ APPLICATION A L'ÉTUDE DE CERTAINES SUITES

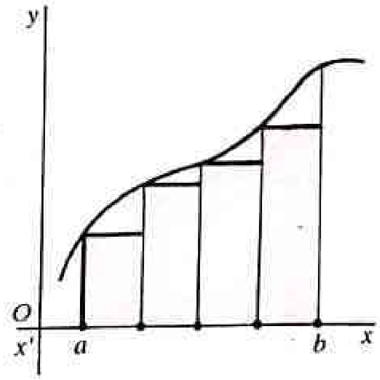
Prop. 131

Soit f une fonction **continue** sur $[a;b]$ et n un **naturel non nul.** Si l'on pose $h=\dfrac{b-a}{n}$; considérons la suite U définie par :

$$U_n = h\big[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f\big(a+(n-1)h\big)\big].$$

Alors cette suite est convergente et a pour limite la **valeur de l'intégrale** de f sur $[a;b]$:

$$\lim_{+\infty}(U_n)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



U_4 est la somme des aires de 4 rectangles.

■ APPLICATION AU CALCUL APPROCHÉ D'UNE INTÉGRALE

(U_n) est la suite définie ci-dessus.

Prop. 132

Les valeurs de (U_n) sont des **valeurs approchées** de l'intégrale de f sur l'intervalle $[a;b]$. Ces valeurs approchées peuvent être calculées au moyen d'une calculatrice ou d'un ordinateur.

Méthode des rectangles.

Prop. 133

Si la dérivée de f est **majorée,** en valeur absolue, par M sur $[a;b]$, $|f'(x)|\leqslant M$, alors on peut obtenir un majorant de l'erreur commise en remplaçant l'intégrale de f par U_n :

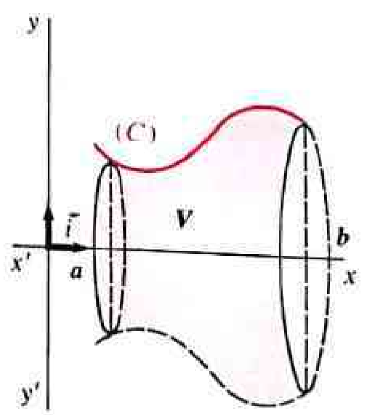
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - U_n\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{n}.$$

■ CALCUL D'UN VOLUME DE RÉVOLUTION

Prop. 134

Soit f continue et positive sur $[a;b]$, de courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Dans une rotation complète autour de l'axe $(O,\vec{\imath})$, la courbe C engendre une surface de révolution. Le solide S délimité par cette surface a pour volume :

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Déf. 47

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble des fonctions f qui vérifient une *relation* S, dans laquelle interviennent la fonction f (inconnue) et certaines de ses dérivées f', f'', etc., et éventuellement d'autres fonctions connues.

$$S(f, f', f'', \dots) = 0$$

f, f', f'' … sont en général désignées par y, y', y''.

Exercices 239 à 259

$f'(x) = x^2 - 5x + 3$

$g' - 2g = 0$

$y' - 2y = 0$

Prop. 135

Équation : $y' = u(x)$ (u : fonction connue).
Les solutions sont les primitives de u, si elles existent :

$$F(x) = U(x) + C.$$

C : constante **quelconque.**

136

Équation : $y'' = v(x)$ (v : fonction connue).
Les solutions sont les primitives des primitives de v si elles existent.

Attention!
L'écriture :

$$y'' - 5y' = 0$$

par exemple n'est pas très correcte.
Elle signifie que, **pour tout** x d'une partie de $\mathbb{R}$:

$$f''(x) - 5f'(x) = 0.$$

Mais cet abus d'écriture est consacré par l'usage.

Prop. 137

Équation du type : $y' - ay = 0$ $(a \in \mathbb{R}_*)$.
a étant un réel non nul, les solutions de l'équation linéaire du premier ordre $y' - ay = 0$ sont les fonctions F définies par

$$F(x) = C \cdot e^{ax}.$$

Il existe une unique solution vérifiant des **conditions initiales** données $F(x_0) = y_0$.

L'ensemble des solutions est un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$, de dimension (2).

Prop. 138

Équation du type : $y'' + ay' + by = 0$.
a et b étant deux réels, les solutions de l'équation linéaire du second ordre $y'' + ay' + by = 0$ sont les fonctions H dont la nature dépend des racines de **l'équation caractéristique** associée :

$$X^2 + aX + b = 0. \qquad \textbf{(E)}$$

a) Si (E) a *deux racines réelles* s et t, alors les fonctions H s'écrivent

$$H(x) = A \cdot e^{sx} + B \cdot e^{tx}.$$

b) Si (E) a *une seule racine* réelle s, alors les fonctions H s'écrivent :

$$H(x) = (Ax + B) \cdot e^{sx}.$$

c) Si (E) a *deux racines complexes* conjuguées :

$$\alpha + i\beta \quad \text{et} \quad \alpha - i\beta,$$

alors les fonctions H s'écrivent :

$$H(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) \cdot e^{\alpha x}.$$

$y'' + 2y' - 3y = 0.$

Équation caractéristique

$X^2 + 2X - 3 = 0$

$S = 1; \quad t = -3$

$H(x) = Ae^{x} + Be^{-3x}.$

A et B sont deux **constantes quelconques.**

- **Cas particulier :**

$$y'' - \omega^2 y = 0$$

a3$H(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$

Prop. 139

Dans chacun des cas, il existe une unique solution vérifiant des **conditions initiales** données :

$H(x_0)=y_0$ et $H'(x_0)=d_0$.

Prop. 140

Équation du type : $ay''+by'+y=u(x)$ (u connue).
Les solutions de cette équation sont la somme **d'une** solution *particulière* de cette équation et de la solution générale de l'équation sans second membre :

$$ay''+by'+y=0.$$

Recherche d'une solution particulière :

- Si u est une fonction polynôme, on cherchera une fonction polynôme de même degré.
- Si $u=a\cos(\omega x-\lambda)$, on cherchera une fonction du type
$$a'\cos(\omega x-\lambda') \quad \text{ou} \quad a'\cos\omega x+b'\sin\omega x.$$

FONCTIONS VECTORIELLES ET CINÉMATIQUE

Exercices 260 à 274

Déf. 48

Une fonction vectorielle d'une variable réelle est une fonction de *source* une partie I de $\mathbb{R}$ et de *but* un **espace vectoriel** E. E sera l'espace $\mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$, ou encore $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de base $\{1; i\}$.

Si B est une base de $\mathbb{R}^2$, par exemple, une fonction vectorielle $\vec{F}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est déterminée par un **couple de fonctions numériques :** les composantes de $\vec{F}$ relativement à B

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2\\ t\longmapsto(f(t),g(t))\end{array}\right\}\ \overrightarrow{F(t)}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}.$$

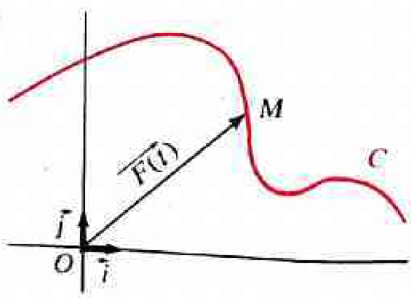
Dans $\mathbb{R}^3$: **trois** composantes.

Déf. 49

Si P est le **plan** affine euclidien de repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, à chaque valeur de la variable t est associé un unique **point unique M** du plan tel que :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{F(t)}=f(t)\vec{i}+g(t)\vec{j}.$$

Si t décrit l'ensemble de définition de $\vec{F}$, M décrit une partie du plan que l'on appelle **l'indicatrice** de $\vec{F}$ relativement au point O. Souvent, cette indicatrice est une *courbe*.



$M(f(t); g(t))$.

Déf. 50

$\vec{F}$ et $\vec{G}$ étant deux fonctions *vectorielles* de I dans E, et k une fonction *numérique* de I dans $\mathbb{R}$, on définit aussi les fonctions suivantes :

- Somme de $\vec{F}$ et $\vec{G}$:
$$\vec{F}+\vec{G} : t \longmapsto \overrightarrow{F(t)}+\overrightarrow{G(t)}.$$
- Produit de $\vec{F}$ par k :
$$k\cdot\vec{F} : t \longmapsto k(t)\,\overrightarrow{F(t)}.$$
- Produit vectoriel de $\vec{F}$ par $\vec{G}$:
$$\vec{F}\wedge\vec{G} : t \longmapsto \overrightarrow{F(t)}\wedge\overrightarrow{G(t)} \quad (\text{dans } \mathbb{R}^3).$$
Ce sont des fonctions **vectorielles** de I dans E.
- Produit scalaire de $\vec{F}$ et $\vec{G}$:
$$\vec{F}\cdot\vec{G} : t \longmapsto \overrightarrow{F(t)}\cdot\overrightarrow{G(t)}.$$
- Norme de $\vec{F}$:
$$\|\vec{F}\| : t \longmapsto \|\overrightarrow{F(t)}\|.$$
Ce sont des fonctions *numériques* de I dans $\mathbb{R}$.

Le produit vectoriel $\vec{F}\wedge\vec{G}$ est **défini dans** $\mathbb{R}^3$.

$$\vec{F}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}; \quad \vec{G}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix};$$

$$\vec{F}\wedge\vec{G}\begin{pmatrix}bc'-cb'\\ca'-ac'\\ab'-ba'\end{pmatrix}.$$

Déf. 51

Soit $\vec{F}=(f, g)$ une fonction vectorielle de I dans $\mathbb{R}^2$. Si $\vec{F}$ est définie sur un intervalle qui contient t_0, F est **continue** en t_0 *signifie* que les deux fonctions numériques f et g sont continues en ce point.

Même définition dans $\mathbb{R}^3$ avec les trois composantes (f, g, h).

Déf. 52

De même, $\vec{F}$ est **dérivable** en t_0 *signifie* que les deux fonctions numériques f et g sont dérivables en ce point.

> Le **vecteur dérivée** de $\vec{F}$ en t_0 est :
> $$\overrightarrow{F'(t_0)}=[f'(t_0);\, g'(t_0)].$$

Déf. 53

$\vec{F}$ est dérivable sur I *signifie* que f et g sont dérivables sur I. La fonction vectorielle dérivée de $\vec{F}$ est :
$$\vec{F}'=(f', g').$$

$\vec{F}'$ se note aussi $\dfrac{d\vec{F}}{dt}$.

On définit de même les *dérivées successives* $\vec{F}''$, ..., $\vec{F}^{[n]}$, si elles existent.

Ainsi, $$\vec{F}''(t)=\frac{d^2\vec{F}}{dt^2}.$$

$\vec{F}''(t)$ a pour composantes $(f''(t), g''(t))$.

$\vec{F}'$ et $\vec{F}''$ sont de nouvelles fonctions vectorielles de I dans $\mathbb{R}^2$.

Prop. 141

Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont dérivables sur I et si k est dérivable sur I : alors les fonctions *vectorielles* : $\vec{F}+\vec{G}$, $k\vec{F}$, $\vec{F}\wedge\vec{G}$ sont dérivables sur I, les fonctions *numériques* $\vec{F}\cdot\vec{G}$ et $\|\vec{F}\|$ sont dérivables sur I et :

$(\vec{F}+\vec{G})'=\vec{F}'+\vec{G}'$	$(k\vec{F})'=k'\vec{F}+k\vec{F}'$
$(\vec{F}\wedge\vec{G})'=(\vec{F}'\wedge\vec{G})+(\vec{F}\wedge\vec{G}')$	
$(\vec{F}\cdot\vec{G})'=\vec{F}'\cdot\vec{G}+\vec{F}\cdot\vec{G}'$	$\|\vec{F}\|'=\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{F}'}{\|\vec{F}\|}$

La formule de dérivation du produit vectoriel n'est valable que pour $E=\mathbb{R}^3$ bien sûr!

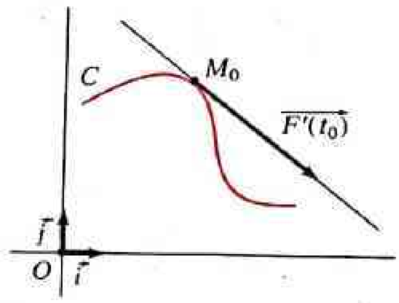
Si k est une constante :

$$(k\vec{F})'=k(\vec{F}').$$

- **Interprétation du vecteur dérivé de $\vec{F}$ en t_0.**

Prop. 142

Si la fonction vectorielle $\vec{F}=(f, g)$ est dérivable en t_0 et si le vecteur dérivé en ce point $\overrightarrow{F'(t_0)}$, **n'est pas le vecteur nul**, alors l'indicatrice C de F dans un repère du plan admet une **tangente** au point M_0 de coordonnées $(f(t_0); g(t_0))$ et le vecteur dérivé $\overrightarrow{F'(t_0)}$ est alors un **vecteur directeur** de cette tangente en M_0.



C'est un procédé pour trouver une équation de la tangente en M_0 à C, ou démontrer l'existence de cette tangente (coniques).

▲ Pour tout point N de cette tangente, il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{M_0N}=\lambda\overrightarrow{F'(t_0)}.$$

- **Cinématique**

Déf. 54

Si la variable t est le **temps** (avec une unité choisie) et si le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{F(t)}$ est un **point mobile** du plan.

M est repéré par ses coordonnées variables : $(f(t); g(t))$.

La trajectoire de M est l'indicatrice de $\vec{F}$ relative à O.

Si la trajectoire est une **droite,** le mouvement est **rectiligne.** Si elle est un **cercle,** le mouvement est **circulaire.**

Si la trajectoire est un **segment** de droite, on dit aussi que le mouvement est rectiligne.

▲ La cinématique est l'étude du mouvement de M, entre deux dates t_0 et t_1. Cette étude doit conduire à une *description physique* aussi précise que possible, de ce mouvement.

Déf. 55

Un mouvement est **périodique,** s'il existe une constante T telle que pour tout t :

$$\overrightarrow{F(t+T)}=\overrightarrow{F(t)}.$$

Déf. 56

Le **vecteur vitesse** de M, pour ce mouvement, est un vecteur noté $\overrightarrow{MV}$ (son *origine* est le point M) tel que :

$$\overrightarrow{MV} = \overrightarrow{F'(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F(t)}}{\mathrm{d}t} = (f'(t);\ g'(t)).$$

Son *support* est la tangente en M à la trajectoire (si $\overrightarrow{F'(t)} \neq \vec{0}$).

Attention!
En physique, vecteur vitesse et vecteur accélération sont parfois appelés **vecteurs liés** en M : ce sont des *représentants*, d'origine M, de

$$\overrightarrow{F'(t)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F''(t)}.$$

Déf. 57

Le **vecteur accélération** de M est un vecteur noté $\overrightarrow{M\Gamma}$ (origine M) tel que :

$$\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{F''(t)} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{F(t)}}{\mathrm{d}t^2} = (f''(t);\ g''(t)).$$

Déf. 58

Un mouvement est **uniforme** sur un intervalle I si, sur cet intervalle, la **norme** du vecteur vitesse est constante.
Un mouvement est **accéléré** sur I si, sur cet intervalle, la **norme** du vecteur vitesse est une fonction croissante.
Un mouvement est **retardé** (ou décéléré) sur I, si sur cet intervalle, la **norme** du vecteur vitesse est décroissante.

Prop. 143

Le mouvement est uniforme si :

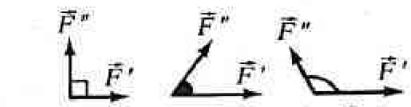
$$\overrightarrow{F'(t)} \cdot \overrightarrow{F''(t)} = 0.$$

Le mouvement est accéléré si :

$$\overrightarrow{F'(t)} \cdot \overrightarrow{F''(t)} > 0.$$

Le mouvement est retardé si :

$$\overrightarrow{F'(t)} \cdot \overrightarrow{F''(t)} < 0.$$



$\vec{F}' \cdot \vec{F}'' = 0$ $\quad$ $\vec{F}' \cdot \vec{F}'' > 0$ $\quad$ $\vec{F}' \cdot \vec{F}'' < 0$

DES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

Déf. 59

Un ensemble E est un ensemble **fini** si l'on peut *compter* ses éléments, c'est-à-dire trouver le nombre des éléments de E.
E est fini et possède n éléments s'il existe une **bijection de** E sur l'ensemble $\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n\}$, partie de $\mathbb{N}$.
Le naturel n est alors le **cardinal** de E ; on écrit : **card** $E = n$.
Le cardinal est l'**ensemble vide** $\varnothing$ est zéro : **card** $\varnothing = 0$.

Exercices 275 à 309.

Dénombrer : c'est trouver, lorsque c'est possible, le nombre des éléments d'un ensemble, si cet ensemble est fini.

card E *se lit* « cardinal de E ».

- **Produit cartésien $A \times B$**

Prop. 144

Si A et B sont des ensembles finis de cardinaux respectifs a et b, alors le produit cartésien $A \times B$, ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$, est fini et son cardinal est $\boldsymbol{a \times b}$.

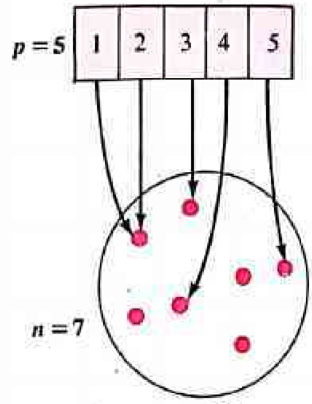
card $A \times B$ = card $A \times$ card B.

- **Nombre des applications de E vers F**

Prop. 145

Si E et F sont finis de cardinaux respectifs p et n, le **nombre des applications** de E vers F est :

$$\alpha = n^p \qquad \begin{array}{l} n \text{ : cardinal du but} \\ p \text{ : cardinal de la source.} \end{array}$$



$\alpha = 7^5$

- **Nombre des injections de E vers F**

Prop. 146

Pour des ensembles finis E et F, il existe une application **injective** (ou injection) de E vers F si et seulement si $\boldsymbol{p \leqslant n}$.
Si cette condition est réalisée, alors le **nombre des injections** de E vers F est désigné par A_n^p :

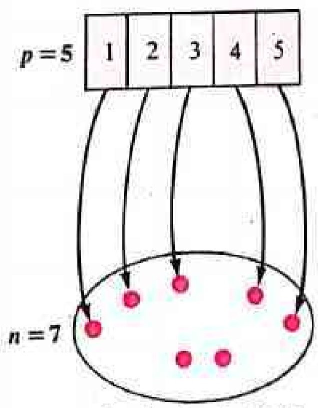
$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

A_n^p se lit « A n p ».

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$.

- **Arrangements**

F ayant n éléments, former un *arrangement* de p éléments de F $(p \leqslant n)$ c'est sélectionner p éléments choisis parmi les n éléments de F et les ranger dans **un certain ordre**. Le nombre de ces arrangements est égal au nombre des applications injectives de $\{1; 2; 3; \ldots; p\}$ dans F : c'est A_n^p.



$A_7^5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$

- **Bijections**

Prop. 147

Si $p = n$, toute injection de E dans F est une bijection entre deux ensembles de même cardinal.
Le **nombre des bijections** d'un ensemble à n éléments sur un ensemble de même cardinal est A_n^n :

$$\boldsymbol{A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2 \times 1 = n!}$$

$n!$ se lit « n factorielle » ou « factorielle n ».

Déf. 60

- **Permutations**

Une bijection de E sur lui-même est une permutation de E.
Le nombre des permutations de E est donc aussi $n!$

▲ L'utilisation d'un **arbre** peut rendre de grands services dans certains problèmes de dénombrement.

- **Parties d'un ensemble fini**

Prop. 148

Si E est fini, de cardinal n, l'ensemble de ses parties, noté $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble **fini** de cardinal $\mathbf{2^n}$.

$A \in \mathcal{P}(E)$ **équivaut à** $A \subset E$.

▲ Se souvenir que $\varnothing$ et E sont des parties de E.

Prop. 149

Si E est fini, le nombre des parties de E **ayant toutes** $\boldsymbol{p}$ **éléments** ($p \leq n$) est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

C_n^p se lit « c-n-p ».

Une partie à p éléments est encore parfois appelée **combinaison** de p objets pris parmi n.

$$\boxed{\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times p}.}$$

Dans l'écriture de $\binom{n}{p}$, il y a autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur.

Prop. 150

$$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.}$$

Prop. 151

Valeurs particulières :

$$\boxed{C_n^0 = C_n^n = 1} \qquad \boxed{C_n^1 = C_n^{n-1} = n.}$$

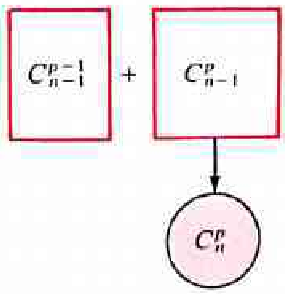
Prop. 152

$$\boxed{C_n^{n-p} = C_n^p} \qquad \boxed{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p.}$$

▲ *Pratiquement*, pour calculer $\binom{n}{p}$ vous pouvez utiliser l'une des formules ci-dessus mais, pour n *assez petit* vous avez intérêt à utiliser le **triangle de Pascal :** à partir de la ligne 3, un terme de la ligne n se déduit de deux termes de la ligne $(n-1)$ en utilisant la propriété **P152.**

Les propriétés **P151**, déjà connues de mathématiciens chinois, ont été établies par *Pascal*.

$n=0$	C_0^0				1					
$n=1$	C_1^0	C_1^1			1	1				
$n=2$	C_2^0	C_2^1	C_2^2		1	2	1			
$n=3$	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	1	$\boxed{3}$ +	$\boxed{3}$	1		
$n=4$	C_4^0	C_4^1	C_4^2	$C_4^3 \ldots$	1	4	6	4	1	
$n=5$	…				1	5	10	10	5	1



- **Développement de $(a+b)^n$** (binôme)

Prop. 153

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^n + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n}$$

(pour tous réels a et b).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k.$$

Ce développement contient $(n+1)$ termes (monômes) qui sont **tous de même degré n :** la *somme* des exposants de a et de b est donc n.

Le terme en $a^{n-p} \cdot b^p$ a pour **coefficient** C_n^p.

Le développement de $(a-b)^n$ se déduit du précédent en remplaçant b par $(-b)$.

Ce développement est connu sous le nom de *développement de Newton.*

Avec $a=b=1$, on obtient : $\boxed{\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p = 2^n.}$

A rapprocher de **P148**.

- **Applications à quelques problèmes de probabilité**

Une expérience soumise au hasard conduit souvent à un nombre fini d'*éventualités possibles :*

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots,\ e_n.$$

Exercices 283 à 309

Déf. 61

L'ensemble E de ces éventualités est un ensemble **fini** de cardinal n. Si l'on s'intéresse à *certaines* de ces éventualités, elles sont les éléments d'une partie A de E : A est un ensemble fini de cardinal p avec bien sûr $p \leqslant n$.

Les éléments de A sont des éventualités **favorables** à A.

On tire une carte au hasard dans un jeu de belote de 32 cartes.

Card $E = \mathbf{32}$.

On s'intéresse à l'événement A : « Tirer un as ».

Card $A = \mathbf{4}$

d'où $p(A) = \frac{4}{32}$.

Prop. 154

Dans une situation d'**équiprobabilité,** c'est-à-dire lorsque chaque éventualité a la même chance de se produire que toutes les autres, alors la **probabilité** de l'**événement** A est le quotient du cardinal de A par le cardinal de E :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E}.$$

Dans cette hypothèse, on se ramène donc toujours à des problèmes de **dénombrement** pour calculer $p(A)$.

$$p(A) = \frac{\overbrace{\text{nombre d'éventualités } \textbf{favorables} \text{ à } A}^{\text{card } A}}{\underbrace{\text{nombre de } \textbf{toutes} \text{ les éventualités } \textbf{possibles}}_{\text{card } E}}$$

En probabilité, on utilise le vocabulaire et le symbolisme des ensembles, avec un langage propre aux probabilités.

Déf. 62

Vocabulaire des ensembles	Vocabulaire en probabilité
Ensemble E (fini)	Ensemble des *éventualités*
$A \subset E$: A est une partie de E	A est un **événement**
$x \in A$	x est une éventualité **favorable** à A
$\{x\}$: singleton	x est un événement **élémentaire**
$\overline{A}$: partie **complémentaire** de A dans E	$\overline{A}$ est l'événement **contraire** de A
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont **incompatibles**
$D = A \cup B$	D est l'événement « A **ou** B »
$F = A \cap B$	F est l'événement « A **et** B »

$\overline{A}$ s'écrit aussi $\complement_E^A$.

Déf. 63

Une **probabilité** définie sur E est une *application* p qui, à tout événement, c'est-à-dire à toute partie de E, associe **un nombre réel** positif et inférieur à 1, appelé probabilité de cet événement, avec les propriétés suivantes :

C'est une esquisse de théorie très simplifiée que l'on utilisera uniquement dans le cas d'ensembles finis avec équiprobabilité : choix au *hasard*, dés non *truqués*, etc.

Prop. 155

- $\mathbf{p(E) = 1}$.
- Quel que soit l'événement A :
$$\mathbf{0 \leq p(A) \leq 1}.$$
- Si les événements A et B sont **incompatibles,** c'est-à-dire si $A \cap B = \varnothing$ alors
$$\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B)}.$$

Prop. 156

La somme des probabilités de deux événements **contraires** est 1 : $\mathbf{p(A) + p(\overline{A}) = 1}$.

Propriété très utile dans certains cas.

Prop. 157

Quels que soient les événements A et D :
$$\mathbf{p(A \cup D) = p(A) + p(D) - p(A \cap D)}.$$

Prop. 158

Si n événements A_1, A_2, A_3, ... sont **incompatibles deux à deux,** alors la probabilité de leur réunion est égale à la **somme** de leurs probabilités respectives.

D'où l'intérêt, parfois, d'envisager une **partition** de l'ensemble E.

Prop. 159

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, alors on dit que l'on se trouve dans une situation **d'équiprobabilité,** ou encore de **probabilité uniforme** et l'on a
$$p(A) = \frac{\textbf{card } A}{\textbf{card } E}.$$

STATISTIQUES

Déf. 64

- **Étude d'une variable statistique** (x_i, n_i) (cours de Première)
  n_i est *l'effectif* de la valeur x_i :
  l'effectif total est $N=\sum_{i=1}^{k} n_i$.
  Moyenne : $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N}$.
  Variance : $V=\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i-\overline{X})^2}{N}$.
  Écart type : $\sigma=\sqrt{V}$.

Revoir vos cours de Seconde et Première.

Autre calcul pour V

$V_x=\begin{pmatrix}\text{moyenne des}\\ x_i^2\end{pmatrix}-\overline{X}^2$.

- **Étude conjointe de deux variables** (X, Y)
  Pour deux caractères à valeurs isolées, les données se présentent sous la forme de couples $(x_i; y_i)$.
  Pour des caractères regroupés en classes, on dispose d'un ensemble de cases d'un tableau cartésien : chaque case est affectée d'un coefficient égal à l'effectif de cette case.
  Pour chacune des variables X et Y on peut calculer :
  — la valeur moyenne : $\overline{X}$ et $\overline{Y}$;
  — la variance : V_x et V_y;
  — l'écart type : σ_x et σ_y.

Exercices 310 à 320

X	Y
x_1 x_2 $\vdots$	y_1 y_2 $\vdots$

L'effectif total est le même pour X et Y.

Déf. 65

La **covariance** $C(x, y)$ du couple (X, Y) est donnée par :

$$C(x, y)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{X})(y_i-\overline{Y})$$

ou encore : $C(x, y)=\left(\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right)-\overline{X}\,\overline{Y}$.

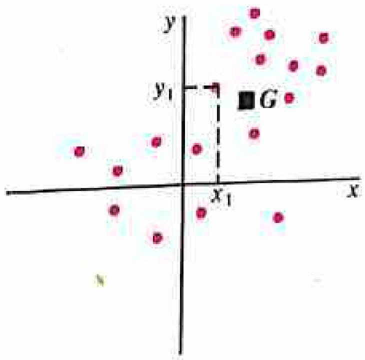
Pour le calcul de $C(x, y)$ bien organiser son travail et utiliser une calculatrice.

Déf. 66

Dans un repère orthogonal, on construit tous les points $M_i(x_i; y_i)$. Il y a autant de points que de couples $(x_i; y_i)$. L'ensemble de ces points M_i constitue le **nuage de points** représentant les couples $(x_i; y_i)$. Dans le cas de répartition en classes, chaque case est remplacée par son centre affecté d'un coefficient égal à l'effectif de la case : on obtient un nuage de points *pondérés*.

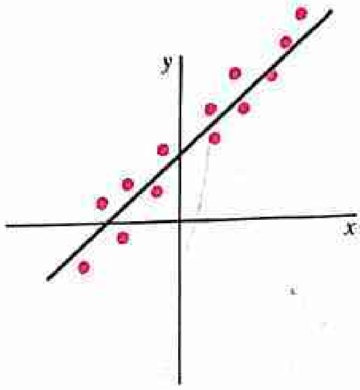
Déf. 67

Le **point moyen** du nuage est le barycentre des points M_i avec pour coefficients les effectifs.
Les coordonnées de ce point moyen G sont $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.
Les coefficients sont 1 si chaque couple n'apparaît qu'une fois.



Ajustement graphique

Il se peut que les points du nuage soient disposés en épousant la forme d'une *courbe simple :* faire un ajustement graphique, c'est dessiner cette courbe et éventuellement en trouver une équation.
Si la courbe la plus *«proche»* est une droite, on est dans une situation d'**ajustement linéaire** (ou affine).
La méthode des moindres carrés permet de déterminer des équations de droites d'ajustement linéaire, ou **droites de régression.**



Prop. 160

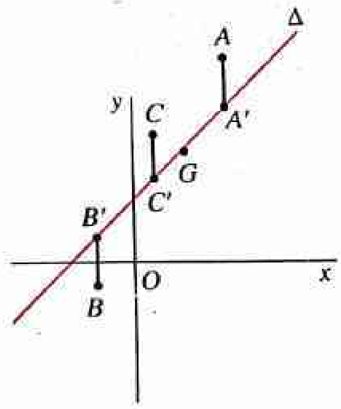
La droite de régression **de y en x** est une droite passant par le point moyen G : elle a pour équation

$$y-\bar{y}=m_1(x-\bar{x}) \quad \text{avec} \quad m_1=\frac{C(x,\,y)}{V_x}.$$

Prop. 161

La droite de régression de x **en y** est une droite passant par le point moyen G : elle a pour équation

$$y-\bar{y}=m_2(x-\bar{x}) \quad \text{avec} \quad m_2=\frac{V_y}{C(x,\,y)}.$$



Prop. 162

Les deux droites de régression passent par G.

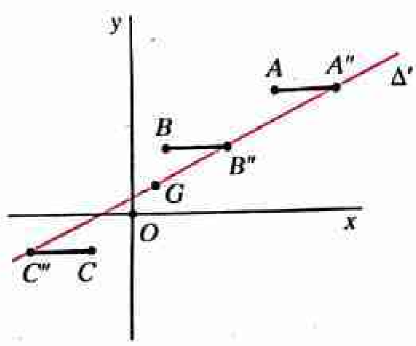
Prop. 163

Elles sont **confondues** si $m_1=m_2$.
Elles sont «**très voisines**» si $m_1 \approx m_2$.

Déf. 68

On pose : $r^2=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{(C(x,\,y))^2}{V_x \cdot V_y}$

Le réel r est le **coefficient de corrélation linéaire.**



Prop. 164

Si $|r|=1$ tous les points du nuage sont alignés et les deux droites de régression sont confondues.
Si $|r|\approx 1$ les deux droites sont très «proches». On dit qu'il y a une **forte dépendance linéaire** entre x et y.
Dans les autres cas, la dépendance linéaire est douteuse.

Remarques pour les calculs

Prop. 165

Soit k un réel donné
$(\overline{X+k}) = \overline{X} + k$.

Prop. 166

La variance est donc **inchangée** si l'on ajoute (ou si l'on retranche) une **même constante** à tous les x_i (ou aux y_i).
Il en est donc de même de la covariance d'un couple (X, Y).
Il en est de même du coefficient de corrélation.

Prop. 167

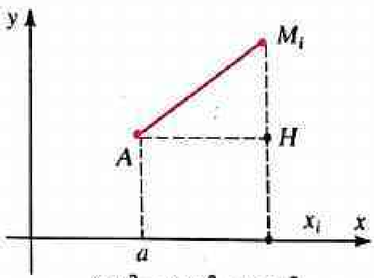
$(\overline{k \cdot X}) = k \cdot \overline{X}$.
Les calcul des coefficients m_1 et m_2 est inchangé si l'on multiplie les deux variables X et Y par un même coefficient k.

Moment d'inertie d'un nuage par rapport à un point

Déf. 69

A étant le point de coordonnées (a, b) dans le plan, le **moment d'inertie** du nuage de points (M_i) (éventuellement pondérés par les coefficients α_i) par rapport à A est le réel :

$$\mathcal{M}_A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot AM_i^2$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\right].$$



$AM_i^2 = AH^2 + HM_i^2$

Prop. 168

Ce moment d'inertie est **minimum** si A est le point moyen G du nuage.
Ce moment d'inertie par rapport à G est alors

$$\mathcal{M}_G = V_x + V_y.$$

PARTIE II

POUR S'EXERCER

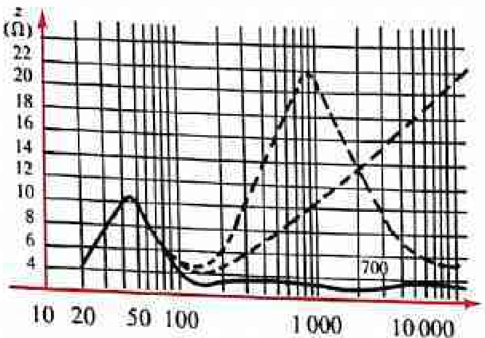
> Cette partie contient des exercices. Certains sont complètement résolus, avec rappel des définitions $\boxed{D}$ et propriétés $\boxed{P}$ auxquelles il est utile de se reporter. Dans « d'autres pour chercher », nous donnons quelques indications pour la résolution, et parfois des réponses.

• Fonctions : notions générales	ex. 1 à 86	page 54
• Fonctions logarithmes	ex. 87 à 119	page 100
• Fonctions exponentielles	ex. 120 à 143	page 118
• Suites réelles	ex. 144 à 172	page 132
• Calculs d'intégrales	ex. 173 à 203	page 150
• Applications du calcul intégral	ex. 204 à 238	page 165
• Équations différentielles	ex. 239 à 259	page 189
• Fonctions vectorielles	ex. 260 à 274	page 200
• Dénombrements et probabilités	ex. 275 à 309	page 212
• Statistiques	ex. 310 à 320	page 232

« L'objet le plus important de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement secondaire est d'apprendre à mettre un problème scolaire en équation.
Apprendre à penser, cela signifie que le professeur de mathématiques ne devrait pas se contenter de dispenser le savoir, mais qu'il devrait tenter de développer chez les étudiants la capacité d'utiliser ce savoir. »

G. POLYA
« La découverte des mathématiques »

FONCTIONS NUMÉRIQUES : notions générales



Courbe donnant l'impédance z en fonction de la fréquence f.

Le concept de fonction est connu depuis très longtemps. On pense que c'est à la fin du 17ᵉ et au début du 18ᵉ que ce concept commence à prendre forme sous l'influence de **Jean Bernoulli,** de **Leibniz,** de **Léonard Euler,** de **Newton.** Une fonction est une « **... quantité variable qui dépend d'une autre quantité variable...** »

La notion de **dérivée** est inventée à peu près à la même époque par **Newton** (*Principia*-Londres 1686) **et Leibniz** (1700).

Le premier conçoit cette notion nouvelle à partir de considérations de mécanique (vitesse-accélération) et l'utilise pour démontrer les grands principes de la gravitation universelle.

Le second part de ses recherches sur les tangentes à une courbe.

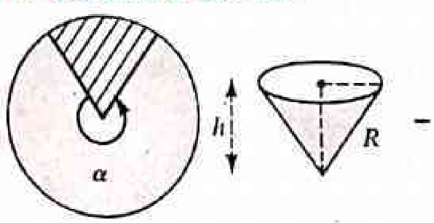
Et, à partir de 1712, surgit un véritable conflit scientifique entre Newton et Leibniz sur le point de savoir lequel des deux fut le premier inventeur du « *Calcul des dérivées* ». En dépit de son génie, Newton ne parvient pas à imposer ses vues à la fin de sa vie, alors que l'école de Leibniz sous l'influence du maître, fait de ce **calcul** un véritable instrument mathématique qui s'impose par sa simplicité, la commodité des notations, et les utilisations qui en sont données.

Si Newton reste incontestablement l'inventeur de la mécanique classique, Leibniz fut bien celui du **calcul différentiel.**

- **Quelques mathématiciens qui ont contribué aux progrès de l'analyse** *(fonctions)*

−280 **Archimède** (Grèce)	Tangentes aux courbes; calculs d'aires.
1596 **Descartes** (France)	Les tangentes à une courbe.
1642 **Newton** (Angleterre)	La mécanique; vitesse, accélération et dérivées.
1646 **Leibniz** (Allemagne)	Les tangentes à une courbe et les dérivées
1718 **Bernoulli J.** (France)	Le concept de fonction et travaux d'analyse.
1777 **Gauss** (Allemagne)	La notion d'infini et les limites.
1789 **Cauchy** (France)	Limites, continuité et calcul différentiel.

Un problème de maximum



On a découpé le secteur grisé dans un disque métallique. Le secteur qui reste est recourbé et les deux rayons de coupe sont soudés pour obtenir un cône. Comment choisir l'angle α pour que le volume du cône soit maximum?

1 Énoncé

$f(x)=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-x-2}$. Déterminer l'ensemble de définition de f, les limites aux bornes des intervalles de définition, la situation de la courbe dans le plan, ainsi que les asymptotes à cette courbe. Calculer $f'(x)$.

Solution

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2,+\infty[$.
La recherche des limites à $(+\infty)$, à $(-\infty)$, en $x=2$ et $x=-1$ à droite et à gauche, a une signification.

$f(x)$ s'écrit aussi $\dfrac{x}{(x-2)(x+1)}$.

Prop. 25

- $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=0$ et $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-x-2}\right)=0$

Prop. 28 Déf. 30

donc $\mathbf{\lim\limits_{+\infty} f=0}$ et $\mathbf{\lim\limits_{-\infty} f=0}$.

La droite d'équation $y=0$, c'est-à-dire l'axe $x'x$ est **asymptote** à la courbe de f. La position de la courbe est obtenue en étudiant le **signe** de $f(x)$ qui s'écrit

$$f(x)=\frac{x}{(x-2)(x+1)}.$$

Signe de $f(x)$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0

- Pour l'étude d'une limite en $x=2$ prenons cette seconde écriture de $f(x)$.

$$\lim_{x\to2}(x)=2 \quad \lim_{x\to2}(x-2)(x+1)=0$$

Prop. 28 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{u(x)}{v(x)}$

donc $$\lim_{x\to2}|f(x)|=+\infty.$$

Il faut distinguer la limite à droite et à gauche en ce point, en tenant compte du signe de $f(x)$. On obtient

$$\mathbf{\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \mathbf{\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)=-\infty}.$$

Les écritures $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ n'ont donc pas de signification.

- Même étude en $x=-1$:
On obtient

$$\mathbf{\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=+\infty} \quad \text{et} \quad \mathbf{\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}}=-\infty.$$

Déf. 29

Déf. 30

- Les droites d'équations : $y=0$; $x=2$; $x=-1$ sont donc des asymptotes à la courbe de f.

- Compte tenu de ces résultats, du signe de $f(x)$, des limites, on peut déjà avoir une idée précise de la position de la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$: elle se situe dans la partie du plan non hachurée sur le croquis ci-contre et la position par rapport aux asymptotes est indiquée dans un cercle pointillé. On obtient de la sorte des indications précieuses avant toute étude de variations.

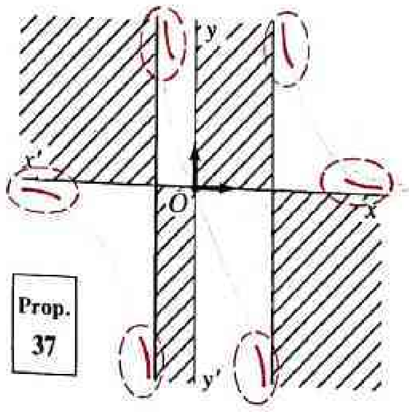
- En utilisant la dérivée de $\left(\frac{1}{v}\right)$ ou de $\left(\frac{u}{v}\right)$, on obtient

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{2x-1}{((x-2)(x-1))^2}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2+4x-2}{(x-2)^2(x-1)^2}$$

dont le signe est facile à étudier pour l'étude des variations de f.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	$-\infty$	||	$+\infty$	0	$-\infty$	||	$+\infty$	0



Prop. 37

2 Énoncé

> $$f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x+2.$$
> Déterminer les limites à $(+\infty)$ et $(-\infty)$ et les asymptotes à la courbe de f.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall_{\mathbb{R}} x : x^2+x+1>0$

L'étude des limites à $(+\infty)$ et $(-\infty)$ a une signification.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+2)=+\infty$

donc $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

Prop. 27

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+2)=-\infty$.

Il se pose donc un problème : les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure. Il faut alors transformer l'écriture de $f(x)$ en utilisant **la forme conjuguée :**

Forme indéterminée.

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+2\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-(x+2)\right)}{\sqrt{x^2+x+1}-(x+2)}$$

$$f(x)=\frac{-3x-3}{D(x)}$$

$$f(x)=\frac{-x\left(3+\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}$$

Mettre x en facteur en remarquant que pour $x<0$:

$$\sqrt{x^2}=-x$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{3}{2}$.

- La droite d'équation $y=\frac{3}{2}$ est asymptote pour x tendant vers $(-\infty)$.

Prop. 27

Mais puisque $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$, il y a lieu de se demander s'il y a une autre asymptote non parallèle aux axes

Prop. 28

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}{x}\ (\text{avec } x>0)$$

Déf. 31

d'où $\lim\limits_{+\infty} g=2$

Utiliser la forme conjuguée pour transformer $f(x)-2x$.

$$p(x)=f(x)-2x=\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+x+1}+x-2}\quad (x>0).$$

On obtient $\lim\limits_{+\infty}(f(x)-2x)=\frac{5}{2}$.

Déf. 31

La droite d'équation $y=2x+\frac{5}{2}$ est asymptote à la courbe de f.

3 Énonce

$g(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$. Déterminer l'ensemble de définition et la limite en $x=1$.

Soit $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$

Solution

$D_g=[-3;1[\cup]1;+\infty[$.

Résoudre
$$\begin{cases}x+3\geqslant 0\\ 2x+7\geqslant 0\\ \sqrt{2x+7}\neq 3.\end{cases}$$

g n'est pas définie en $x=1$ mais $D_g\cup\{1\}$ est un intervalle.

Prop. 28

Numérateur et dénominateur ayant pour limite 0 en $x=1$, il faut transformer l'écriture de $g(x)$ en utilisant les formes conjuguées. On obtient :

$$g(x)=\frac{(\sqrt{A}-2)(\sqrt{B}+3)(\sqrt{A}+2)}{(\sqrt{B}-3)(\sqrt{A}+2)(\sqrt{B}+3)}$$

Forme conjuguée du numérateur et du dénominateur.

$$g(x)=\frac{(x-1)(\sqrt{B}+3)}{2(x-1)(\sqrt{A}+2)}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2x+7}+3}{\sqrt{x+3}+2}$$

d'où $\lim\limits_{1} g=\frac{3}{4}$.

Prop. 27 Prop. 28

4 Énoncé

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. Déterminer les asymptotes à la courbe de f.

Solution

f est définie pour $x \geqslant -3$ et $x \neq 1$:

$$D_f=[-3;\ 1[\cup]1,\ +\infty[.$$

$D\cup\{1\}$ est un intervalle.

- $f(-3)=\dfrac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$.

Prop. 28

Il faut transformer $f(x)$ avec la forme conjuguée du numérateur. On trouve

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}.$$

$(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)$
$=x-1.$

D'où $\quad \mathbf{\lim\limits_{+\infty} f=0.}$

L'axe $x'x$ est donc asymptote à la courbe.

En $x=1$, numérateur et dénominateur ont pour limite 0. Mais avec la nouvelle écriture de $f(x)$, on obtient :

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2)=4 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{\lim_{1} f=\frac{1}{4}}.$$

x	-3	1	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ ‖ $\frac{1}{4}$	0

Il n'est pas question ici d'asymptote : le point $A\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$ n'est pas un point de la courbe de f, mais c'est une sorte de « point limite » parfois nommé « point d'arrêt ».

On pourrait définir g, prolongement de f par continuité en posant

$$g(1)=\frac{1}{4}.$$

5 Énoncé

$$f(x)=2\cos x-\cos 5x-\cos 3x.$$

Étudier le signe de $f(x)$ sachant que x décrit $[0;\ 2\pi[$.

Résoudre $\quad f(x)=0 \quad$ avec $\quad x\in[0;\ 2\pi[$.

Solution

On ne sait pas étudier de manière simple le signe d'une somme. On cherchera donc à factoriser $f(x)$.

$$f(x)=2\cos x-(\underbrace{\cos 5x+\cos 3x}_{\cos p+\cos q})$$

Prop. 15

$\cos p+\cos q$
$=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$$f(x) = 2\cos x - 2\cos 4x \cdot \cos x$$
$$= 2\cos x\,(\underbrace{1-\cos 4x}_{1-\cos 2\alpha})$$

$$f(x) = 2\cos x \times 2\sin^2 2x = \mathbf{4\cos x \cdot \sin^2 2x}.$$

Cette factorisation de $f(x)$ permet d'affirmer que le signe de $f(x)$ est le même que le signe de **cos** $\boldsymbol{x}$:

Si $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: $f(x) \geqslant 0$.

Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: $f(x) \leqslant 0$.

L'équation : $f(x) = 0$ équivaut à :

$$\cos x \cdot \sin^2 2x = 0$$

d'où $\cos x = 0$ **ou** $\sin 2x = 0$, c'est-à-dire

$$2\sin x \cdot \cos x = 0$$

c'est-à-dire, dans l'intervalle envisagé :

$$\left(x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2}\right) \quad \textbf{ou} \quad (x = 0 \text{ ou } x = \pi)$$

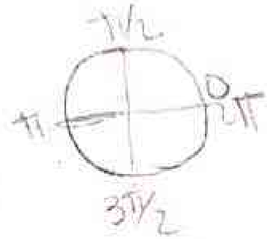
$$S = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

ici $\begin{cases} p+q = 8x \\ p-q = 2x. \end{cases}$

$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha$

ici $\mathbf{2\alpha = 4x}$.

Revoir votre cours de première pour le signe de cos x.



Prop. 14

Retenir que, pour **étudier un signe,** il vaut mieux avoir à faire à **un produit** qu'à une somme.

6 Énoncé

> $$g(x) = 2\cos x \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{5x}{2}.$$
>
> Écrire $g(x)$ sous la forme d'une somme de 4 fonctions sinus afin de déterminer les primitives de la fonction g.

Solution

$$g(x) = 2\cos x \cdot \underbrace{\cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{5x}{2}}_{\sin a \cdot \cos b}$$

d'où

$$g(x) = \cos x \cdot \left[\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{5x}{2}\right) + \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{2}\right)\right]$$

$$g(x) = \cos x \cdot (\sin 3x + \sin 2x)$$

$$g(x) = \underbrace{\sin 3x \cdot \cos x} + \underbrace{\sin 2x \cdot \cos x}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) + \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)$$

$$\mathbf{g(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x).}$$

Prop. 15

$2\sin a \cdot \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

$\frac{x}{2} = b$; $\frac{5x}{2} = a$

$\begin{cases} a+b = 3x \\ a-b = 2x. \end{cases}$

$\begin{cases} 3x + x = 4x \\ 3x - x = 2x \end{cases}$

$\begin{cases} 2x + x = 3x \\ 2x - x = x. \end{cases}$

Vous savez déterminer les primitives d'une somme, ainsi que chacune des primitives des termes de cette somme.
D'où les primitives de g :

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{4}\cos 4x\right) + C.$$

Remarquons au passage que, pour déterminer la **dérivée** de g, il est plus simple d'utiliser la seconde forme *(somme)* que la première *(produit)*.

Prop. 68 — Prop. 69 — Prop. 70

Voir cours de Première.

Pour chercher une primitive, il vaut mieux avoir à faire à une **somme** qu'à un produit.

7 Énoncé

1) Résoudre $x \in [0; 2\pi[$: $\cos 2x - \cos x + 1 = 0.$
2) Résoudre $x \in [0; 2\pi[$: $\cos 2x - \cos x + 1 \geqslant 0.$
3) Résoudre $x \in [0; 2\pi[$: $2\cos 2x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} + 2 = 0.$

Solution

1) Dans cette équation, figurent simultanément $\cos 2x$ et $\cos x$.
Vous devez d'abord la transformer, pour obtenir **une seule** inconnue, $\cos x$ par exemple.
Vous savez que : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
L'équation équivaut à :

$$(2\cos^2 x - 1) - \cos x + 1 = 0$$

c'est-à-dire à :

$$\mathbf{\cos x\,(2\cos x - 1) = 0.}$$

Ce qui équivaut à :

$$\cos x = 0 \quad \textbf{ou} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$x \in [0; 2\pi[$ donc

$$\begin{cases} \cos x = 0 \text{ équivaut à } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{2} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \text{ équivaut à } x = \dfrac{\pi}{3} \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{3}. \end{cases}$$

2) L'inéquation équivaut à :

$$\mathbf{\cos x\,(2\cos x - 1) \geqslant 0.}$$

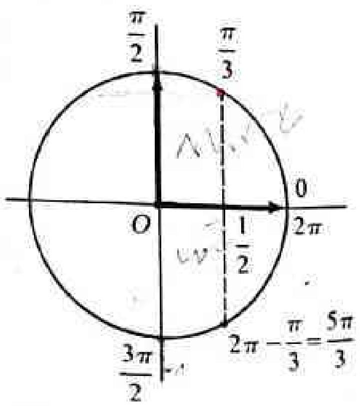
Pour la résoudre, il vous faut étudier le signe de chaque facteur, avec la condition :

$$0 \leqslant x < 2\pi.$$

Essayer de se ramener à des équations élémentaires simples.

Prop. 14 — Prop. 15

cos x = X



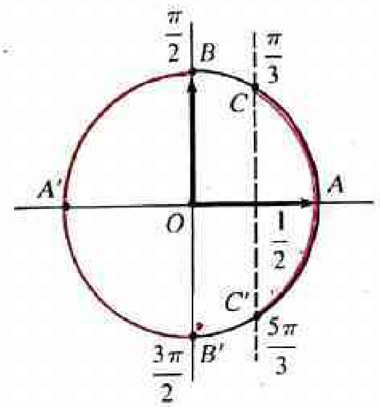
x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$\cos x$		+		+	0	−	0	+		+	
$2\cos x - 1$		+	0	−		−		−	0	+	
Produit		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$2\cos x - 1 \geqslant 0$ signifie $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $M \in \widehat{C'AC}$

$2\cos x - 1 \leqslant 0$ signifie $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$ d'où $M \in \widehat{CA'C'}$.

Compte tenu de ces résultats, l'ensemble des solutions de l'inéquation, sur $[0; 2\pi[$ est donc :

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right[.$$



Pour l'étude d'une inéquation, en trigonométrie, on peut difficilement se passer du cercle trigonométrique.

3) Là encore, nous avons les *deux* inconnues $\cos 2x$ et $\cos x$.
Exprimons encore $\cos 2x$ en fonction de $\cos x$: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.
L'équation équivaut à :

$$4\cos^2 x - 2(1+\sqrt{3})\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

C'est une équation du **second degré** en $\cos x$.

Prop. 15

Posons $u = \cos x$.

Avec $-1 \leqslant u \leqslant 1$.

Résolvons : $4u^2 - 2(1+\sqrt{3})u + \sqrt{3} = 0.$

En effet :

$$\Delta' = (1-\sqrt{3})^2.$$

On trouve : $u' = \frac{1}{2}$ et $u'' = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ équivaut, avec $x \in [0; 2\pi[$, à :

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$.

D'où les solutions : $\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$.

$2x^2 - 1 = 0$

$D = 0 - 4 \times 2 \times (-1)$

$D = 8 = 2\sqrt{2}$

$x_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{4}$

$\frac{2\sqrt{2}}{4}$

$(x - x_1)(x - x_2)$

8 Énoncé

$$f(x) = \frac{1}{2\cos x + 1}; \quad g(x) = \frac{\tan x}{2\cos x + 1}; \quad h(x) = \sqrt{2}\cos x + 1.$$

Pour chaque fonction, étudier l'ensemble de définition, la parité, la périodicité.

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2})(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2})$

Solution

- **Fonction f** : $f(x)$ est calculable si $\cos x \neq -\dfrac{1}{2}$

  or $\qquad -\dfrac{1}{2} = \cos \dfrac{2\pi}{3} \quad$ et $\quad -\dfrac{1}{2} = \cos \dfrac{4\pi}{3}$.

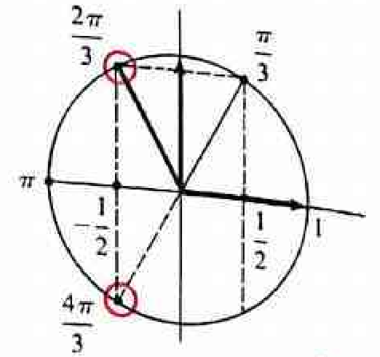
  L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ **privé des réels** qui s'écrivent $\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ ou $\dfrac{4\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

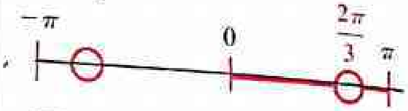
  Si $x \in D_f$, alors $(-x) \in D_f$ et $\cos(-x) = \cos x$: f est **paire.**

  Si $x \in D_f$, $(2\pi + x) \in D_f$ et $f(x + 2\pi) = f(x)$: f est **périodique** de période 2π.

  Compte tenu de la périodicité et de la parité, il suffit de faire une étude de f sur

  $$\left[0; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[.$$





Prop. 8

- **Fonction g** : $g(x)$ est calculable si $\cos x \neq -\dfrac{1}{2}$ et si **$\tan x$ existe.**

  En tenant compte de l'étude ci-dessus pour f, D_g est l'ensemble D_f privé des réels qui s'écrivent $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

  $\tan(-x) = -\tan x$ et f est paire : donc g est **impaire.**

  g est **périodique** de période 2π.

  Il suffit d'étudier g sur

  $$\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[.$$

$g(x) = f(x) \times \tan x.$

Déf. 16 — Prop. 9

Prop. 10

- **Fonction h** : $h(x)$ est calculable si $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

  h est **paire** et h est **périodique** de période 2π.

  Sur l'intervalle $[0; \pi[$ on a :

  $$x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \iff \cos x \geqslant -\frac{1}{2}$$

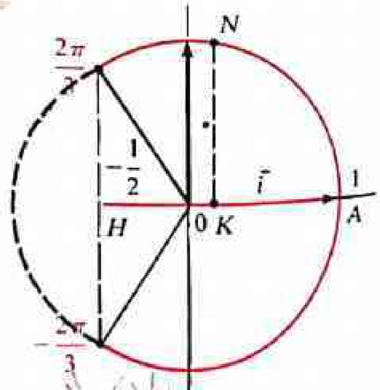
  et $$x \in \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right[\iff \cos x < -\frac{1}{2}.$$

  Pour x décrivant $[0; \pi[$, $h(x)$ est calculable pour

  $$0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}.$$

  Pour x décrivant $[-\pi; \pi[$, $h(x)$ est calculable si

  $$x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$



119

L'ensemble de définition de h est la *réunion* des intervalles :

$$I_k = \left[-\frac{2\pi}{3} + k2\pi\,;\, \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right],$$

k décrivant $\mathbb{Z}$.

9 Énoncé

Étudier la limite en $x=0$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{\sin 4x}{6x};\ f_2(x) = \frac{\sin x}{4x^2};\ f_3(x) = \frac{\sin 4x}{\tan 5x};\ f_4(x) = \frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}.$$

Solution

L'utilisation des théorèmes sur les limites conduit à des formes indéterminées.

- $f_1(x) = \dfrac{\sin 4x}{4x} \times \dfrac{4x}{6x} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sin 4x}{4x}$.

  Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x} = 1$ donc $\lim\limits_{0} f_1 = \dfrac{2}{3}$.

Prop. 28

- $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x} \times \dfrac{1}{4x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \left|\dfrac{1}{4x}\right| = +\infty$

  donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_2(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_2(x) = -\infty$.

Se ramener aux propriétés

Prop. 24 (2)

- $f_3(x) = \dfrac{\sin 4x}{4x} \times \dfrac{5x}{\tan 5x} \times \dfrac{4x}{5x}$

  $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\tan 5x} = 1$ d'où $\lim\limits_{0} f_3 = \dfrac{4}{5}$.

- $f_4(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin x} \times \dfrac{x}{\sin x}$.

  Or $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

  d'où $\lim\limits_{0} f_4 = \dfrac{1}{2}$.

- **Autre méthode pour f_1 :**

  $\sin u = u - \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^5}{120} + u^5 \cdot \varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$.

  En posant $u = 4x$:

$$f_1(x) = \frac{1}{6x}\left(4x - \alpha x^3 + \beta x^5 + x^5 \cdot \varphi(x)\right)$$

$$f_1(x) = \frac{4}{6} - \frac{1}{6}\alpha x^2 + \frac{1}{6}\beta x^4 + x^4 \cdot \psi(x)$$

  avec $\lim\limits_{0} \psi = 0$.

  Donc $\lim\limits_{0} f_1 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

On peut aussi utiliser le développement limité de $\sin x$ en $x=0$ pour f_1 et f_2 en particulier.

Prop. 58 (4)

$\alpha = \dfrac{4^3}{6}$ et $\beta = \dfrac{4^5}{120}$.

10 Énoncé

$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\tan x-1}$. Si $x\in[0;2\pi]$, déterminer l'ensemble de définition de f puis étudier les limites de f en $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

Solution

Sur $[0, 2\pi[$, $\tan x=1$ pour $x=\dfrac{\pi}{4}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

D'où $D=[0;2\pi]-\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Ne pas oublier que $\tan x$ n'est pas définie en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$. Prop. 9

- $\boxed{\lim_{\frac{\pi}{2}} f}$ Le numérateur est continu en $\dfrac{\pi}{2}$: sa limite est le **réel positif** $\sqrt{2}-1$.
  La fonction **tan** a une limite infinie en $\dfrac{\pi}{2}$.

$\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{2}-1=\sqrt{2}-1$.

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\x<\pi/2}}(\tan x)=+\infty \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}}(\tan x)=-\infty.$$

d'où :

$$\lim_{\substack{x\to\pi/2\\x<\pi/2}} f(x)=\mathbf{0^+} \quad\text{et}\quad \lim_{\substack{x\to\pi/2\\x>\pi/2}} f(x)=\mathbf{0^-}.$$

Théorèmes sur les limites

Prop. 28 (quotient)

- $\boxed{\lim_{\frac{5\pi}{4}} f}$ $\sin\dfrac{5\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En $\dfrac{5\pi}{4}$, le numérateur a pour limite (-2).
  $\tan\dfrac{5\pi}{4}=1$. En ce point, le dénominateur a pour limite 0

$\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{4}-1=-2$.

$\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}$: alors $\tan x<1$ d'où $\tan x-1<0$

$\dfrac{5\pi}{4}<x<\dfrac{3\pi}{2}$: alors $\tan x>1$ d'où $\tan x-1>0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to5\pi/4\\x<5\pi/4}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\pi/4\\x>5\pi/4}} f(x)=-\infty$.

Théorèmes sur les limites

Prop. 28 (quotient)

- $\boxed{\lim_{\frac{\pi}{4}} f}$ En ce point, numérateur et dénominateur ont pour limite **0**, donc il faut trouver une méthode particulière passant par une transformation de $f(x)$.

Prop. 28

Posons $x=\dfrac{\pi}{4}+h$, afin de se ramener à la recherche, pour une fonction de h, de sa limite en $h=0$

$x=\dfrac{\pi}{4} \iff h=0$.

$$\sqrt{2}\sin x - 1 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - 1$$
$$= \sin h + \cos h - 1$$

$$\tan x - 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - 1 = \frac{1+\tan h}{1-\tan h} - 1$$
$$= \frac{2\tan h}{1-\tan h}.$$

Le changement de variable conduit à la fonction :

$$g(h) = \frac{(\sin h + \cos h - 1)(1-\tan h)}{2\tan h}.$$

Ici encore, numérateur et dénominateur ont pour limite **0** en $h=0$. Divisons par h le numérateur et le dénominateur

$$g(h) = \frac{\dfrac{\sin h}{h} + \dfrac{\cos h - 1}{h}}{2\dfrac{\tan h}{h}} \times (1-\tan h)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1; \quad \lim_{h\to 0}\frac{\tan h}{h} = 1$$

et $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h^2}\times h = 0.$

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{h\to 0} g(h) = \frac{1}{2}.$

Revoir **Prop. 15**

$\sin(a+b)$

$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Faire apparaître des *formes* connues. **Prop. 24** **(2)**

$\lim_{h\to 0}(1-\tan h) = 1.$

Prop. 28

11 Énoncé

> Voici deux fonctions numériques f et h définies par :
> $$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2x-3}.$$
> 1) Déterminer l'ensemble de définition de f; calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$. Déterminer la dérivée d'ordre n de f $(n \in \mathbb{N}^*)$.
>
> 2) Mêmes questions pour la fonction g.

Solution

1) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-2}$

$$f''(x) = (-1)\times\frac{-2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{1\times 2}{(x-1)^3}$$

$$f'''(x) = 1\times 2\times\frac{-3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-1\times 2\times 3}{(x-1)^4}.$$

formule : $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$

Prop. 37

Attention à la dérivée de :
$u(x) = (x-1)^2$
$u'(x) = 2\times 1\times(x-1)^1.$

Compte tenu de ces résultats, on voit apparaître une **loi de formation** des dérivées successives et il nous semble que :

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times 1\times 2\times 3\times\ldots\times n}{(x-1)^{n+1}}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Cette formule s'applique jusqu'à $n=3$ (constatation).

Démontrons que, si on la suppose vraie pour p, alors elle est vraie pour le naturel suivant $(p+1)$:

Hypothèse de récurrence :

$$f^{(p)}(x)=\frac{(-1)^p\times p!}{(x-1)^{p+1}}$$

$$f^{(p+1)}(x)=[f^{(p)}(x)]'=(-1)^p p!\,\frac{-(p+1)(x-1)^p}{(x-w)^{2p+2}}$$

d'où $$f^{(p+1)}(x)=\frac{(-1)^{p+1}\cdot(p+1)!}{(x-1)^{p+2}}.$$

On a ainsi démontré que la formule est vraie pour $p+1$.

Ce qui démontre que la formule est vraie pour tout naturel n $(n\neq 0)$.

2) $D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$. On trouvera :

$$g'(x)=\frac{-2}{(2x-3)^2};\quad g''(x)=\frac{2^2\times 2}{(2x-3)^3};$$

$$g'''(x)=\frac{-2^3\times 2\times 3}{(2x-3)^4}.$$

Démontrez par récurrence que :

$$g^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\times 2^n\times n!}{(2x-3)^{n+1}}.$$

Si $v(x)=(x-1)^3$

alors $v'(x)=3\times 1\times(x-1)^2$

Prop. 37

C'est une *conjecture*...

Démonstration par récurrence.

Prop. 101

$-(p+1)=(-1)\cdot(p+1)$

et $(-1)^p\times(-1)=(-1)^{p+1}$

$p!\times(p+1)=(p+1)!$

$2p+2-p=p+2.$

Attention!

Si $u(x)=(2x-3)^2$

alors $u'(x)=2\times 2(2x-3)$

Prop. 37

Ainsi, dans le calcul de chaque dérivée d'ordre supérieur, apparaît un facteur **2** supplémentaire au numérateur.

D'où 2^n...

12 Énoncé

> f est une fonction de deux variables définie par
> $$f(x,\,y)=x(x^2+2y^2).$$
> Calculer les dérivées partielles de f du 1er ordre et du second ordre.

Solution

$$f(x,\,y)=x^3+2xy^2.$$

Dérivées premières :

$$\frac{\delta f}{\delta x}=3x^2+2y^2;\quad \frac{\delta f}{\delta y}=4xy.$$

Pour la dérivée partielle par rapport à x, supposer **y constant** et considérer la fonction g :

$g(x)=f(x,\,k)=x^3+2xk^2$

Dérivées secondes :

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}=6x; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x f \delta y}=4y;$$
$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}=4x; \quad \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}=4y.$$

$g'(x)=\frac{\delta f}{\delta x}=3x^2+2k^2.$

Déf. 24

13 Énoncé

En courant alternatif, l'impédance Z d'un circuit électrique est donnée par la formule :

$$Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

Soit la fonction G : $(R, L, C, \omega) \longmapsto Z$.

Calculer $\frac{\delta G}{\delta R}$; $\frac{\delta G}{\delta L}$; $\frac{\delta G}{\delta C}$; $\frac{\delta G}{\delta \omega}$. Que se passe-t-il à la résonance si $LC\omega^2=1$?

Solution

- Posons $\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2=k$ (constante).

$$Z=\sqrt{R^2+k}.$$
$$\frac{\delta G}{\delta R}=\frac{R}{\sqrt{R^2+k}}=\frac{R}{Z}.$$

- Posons $u(L)=(L\omega+a)^2$ (ω et a constants : $a=-\frac{1}{C\omega}$) $\quad u'(L)=2\omega(L\omega+a)$

donc $$\frac{\delta G}{\delta L}=\frac{u'(L)}{2\sqrt{R^2+u(L)}}=\frac{\omega\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}{Z}.$$

- Posons $v(C)=\left(b-\frac{1}{C\omega}\right)^2$ (avec ω et b constants : $b=L\omega$)

$$v'(C)=2\left(\frac{\omega}{C^2\omega^2}\right)\cdot\left(b-\frac{1}{C\omega}\right)$$

donc
$$\frac{\delta G}{\delta C}=\frac{v'(C)}{2\sqrt{R^2+v(C)}}=\frac{\frac{1}{C^2\omega}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}{Z}.$$

- Posons $f(\omega)=\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2$ (avec L et C constants)

$$f'(\omega)=2\left(L+\frac{C}{C^2\omega^2}\right)\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)$$

Déf. 24

Pour calculer $\frac{\delta G}{\delta R}$, considérer que L, ω et C sont constants.
Z dépend de la seule variable R.
$Z=\sqrt{R^2+k}$

Prop. 37

$$\frac{d\left(\sqrt{R^2+k}\right)}{dR}=\frac{2R}{2\sqrt{R^2+k}}=\frac{R}{Z}.$$

Pour calculer $\frac{\delta G}{\delta L}$, considérer R, C et ω constants.

Pour $\frac{\delta G}{\delta C}$, considérer R, L et ω constants...

donc

$$\frac{\delta G}{\delta \omega}=\frac{f'(\omega)}{2\sqrt{R^2+f(\omega)}}=\frac{\left(L+\frac{1}{C\omega^2}\right)\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}{Z}.$$

Si le circuit est en *résonance*, c'est-à-dire si $LC\omega^2=1$ alors

$$L\omega-\frac{1}{C\omega}=\frac{LC\omega^2-1}{C\omega}=0.$$

Il en résulte alors que

$$\frac{\delta G}{\delta L}=0;\quad \frac{\delta G}{\delta C}=0;\quad \frac{\delta G}{\delta \omega}=0.$$

On a alors

$$Z=\sqrt{R^2}=R \quad \text{et} \quad \frac{\delta G}{\delta R}=1.$$

Prop. 37 — Prop. 38

Consultez votre professeur de Physique...
L'impédance Z dépend de R seule : elle se comporte comme une *résistance pure*.

14 Énoncé

Soit $g(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Déterminer son ensemble de définition. Sur quel ensemble est-elle dérivable? Déterminer $g'(x)$ sur cet ensemble.

Solution

- Posons $u(x)=\frac{x^3}{x-1}$. g est définie pour $u(x)\geqslant 0$.
  Le signe de $u(x)$ est le même que celui de $x(x-1)$ avec $\boldsymbol{x\neq 1}$

$$D_g=]-\infty;0]\cup]1;+\infty[.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(x-1)$		+	0	−	‖	+	

- On sait déjà que : $x\longmapsto\sqrt{u(x)}$ est dérivable si u est dérivable et $\boldsymbol{u(x)>0}$.
  La fonction g est donc déjà **dérivable** sur $]-\infty;0[$ et $]1,+\infty[$. Calculons $g'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

Prop. 36 — Prop. 37

$u(x)$ est un quotient de polynômes, donc u est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

$$u(x)=\frac{x^3}{x-1}$$

d'où

$$u'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

$$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

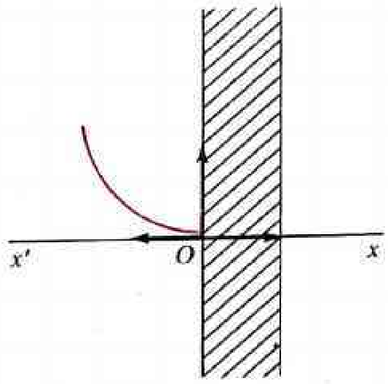
Donc : $g'(x)=\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}.$

Le signe de $g'(x)$ sera donc celui de $(2x-3)$.

- Étudions la dérivabilité en $x=0$, à **gauche** et, pour cela utilisons la définition :
Soit
$$\varphi(h)=\frac{1}{h}\left(g(h)-g(0)\right)=\frac{1}{h}\sqrt{\frac{h^3}{h-1}} \quad \text{avec} \quad h<0$$
$$\varphi(h)=\frac{1}{h}\times|h|\times\sqrt{\frac{h}{h-1}} \quad (\sqrt{h^2}=|h|).$$
Or, ici, $h<0$, donc $|h|=-h$
$$\varphi(h)=\frac{-h}{h}\sqrt{\frac{h}{h-1}}=-\sqrt{\frac{h}{h-1}}$$
donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \varphi(h)=0.$
Donc g admet une valeur dérivée **en 0 à gauche** égale à 0.
Au point (0; 0) la courbe représentative de g présentera une demi-tangente de **pente nulle :** son support est l'axe $x'x$.

Déf. 20

$g(0)=0.$



- **Autre méthode** : sur $]-\infty; 0[$:
$$g'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x(x-1)}{x^4}}$$
d'où $g'(x)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x-3}{(x-1)^2}\sqrt{x(x-1)}.$
g est définie en $x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g'(x)=0.$
Donc g est dérivable à **gauche** en $x=0$ et sa valeur dérivée est 0.

Voir Prop. 55

$$\sqrt{\frac{x(x-1)}{x^4}}=\frac{1}{x^2}\sqrt{x(x-1)}.$$

15 Énoncé

Étudier et représenter graphiquement f : $f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{|x-1|}$

et discuter des nombres de solutions de l'équation
$$x^2+|x|-m\,|x-1|=0 \quad (m : \text{paramètre}).$$

Solution

f est définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
Sur $\mathbb{R}^-$: $f(x)=-x$.
Sur $[0; 1[$: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x}$, avec
$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}.$$

Étudier les signes de x et $x-1$ pour écrire $f(x)$ sans barres de valeur absolue.

Prop. 37

Sur $]1; +\infty[$: $$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

et $$f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(1-x)^2}.$$

Étudier le signe de : x^2-2x-1.

- On montrera que f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et $]1; 1+\sqrt{2}[$ et que f est croissante sur $[0; 1[$ et $[1+\sqrt{2}; +\infty[$, avec
$$f(1+\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}.$$

$3+2\sqrt{2}\approx 5{,}8.$

$1+\sqrt{2}$ $1-\sqrt{2}$

- $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ avec une asymptote d'équation $y=x+2$.

- $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{1} f=+\infty$: la droite d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe.

- **Étude locale en 0 :** f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ avec $f'(x)=-1$

  On peut aussi revenir à la définition.

  f est dérivable sur $]0; 1[$ avec
$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}.$$

  A gauche, en $x=0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x)=-1.$

  A droite en $x=0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)=1.$

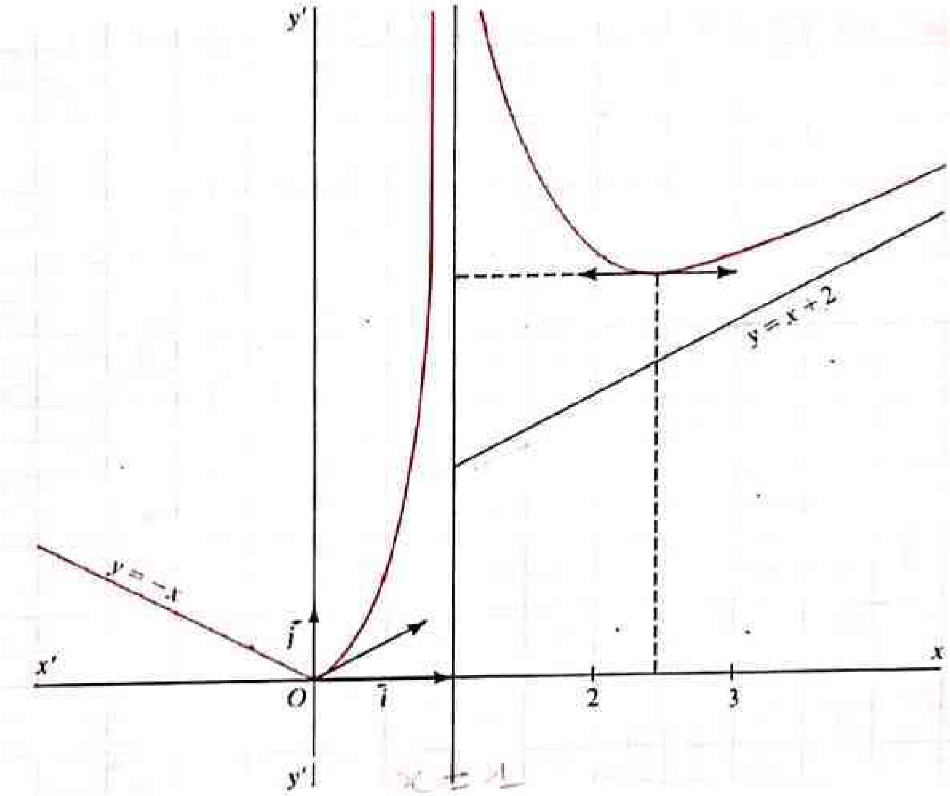
  f est donc dérivable à droite et à gauche en $x=0$, avec deux valeurs dérivées différentes; la courbe aura donc une tangente à gauche de pente (-1) et une tangente à droite de pente 1 en ce point.

  Prop. 55

  Prop. 62

- **L'équation donnée équivaut à :**
$$f(x)=m.$$
On obtient le nombre des solutions de cette équation en étudiant le nombre des points d'intersection de la représentation graphique C de f avec une droite Δ variable d'équation $y=m$.
Si $m<0$: l'équation n'a pas de solution.
$0<m<3+2\sqrt{2}$: deux solutions.
$3+2\sqrt{2}<m$: quatre solutions.
Une solution pour $m=0$ et trois solutions pour
$$m=3+2\sqrt{2}.$$

$\Delta /\!/ x'x.$



16 Énoncé

Étude et représentation graphique de $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Solution

f est définie sur $]-\infty ; 0] \cup]1 ; +\infty[$

$f(x) = |x| \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = +\infty$$

Prop. 37

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \frac{1}{2}.$$

Déf. 31

La droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote pour $x > 0$ et la droite d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote pour $x < 0$.

Déf. 29

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$. La droite $x = 1$ est asymptote.

Scanned by CamScanner

- f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]1, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{x^2(2x-3)}{2(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x^3}}.$$

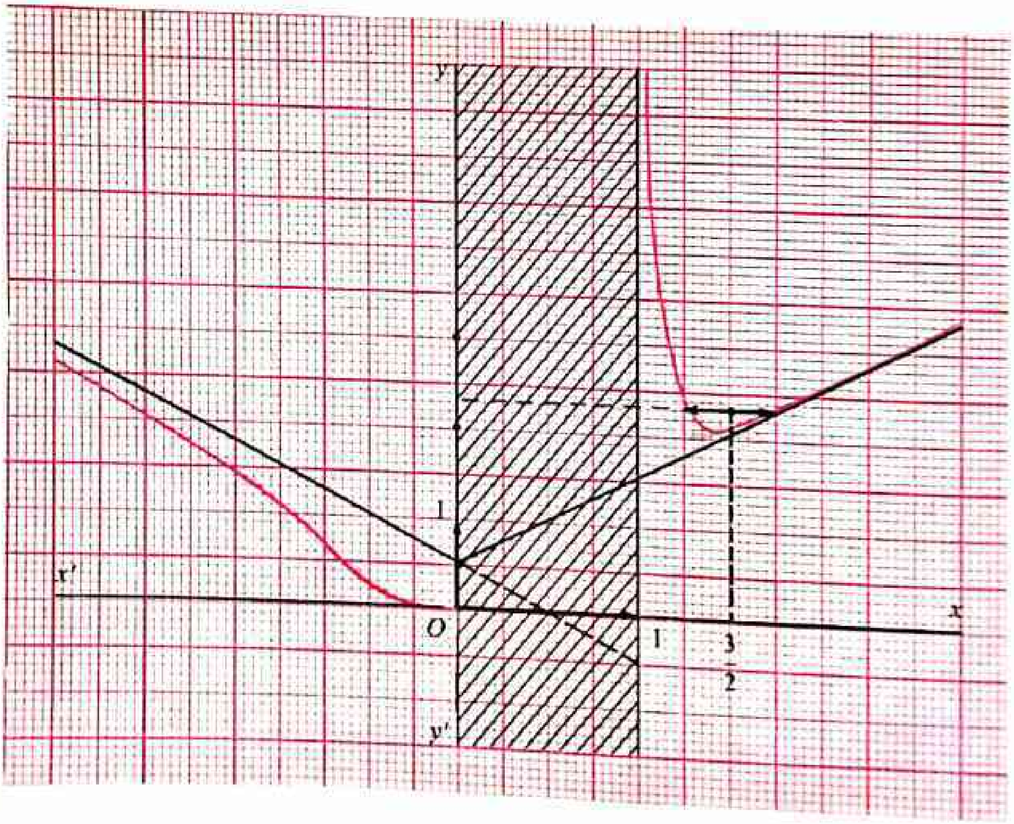
$f'(x)=0$ pour $x=\frac{3}{2}$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-3)$.

- f est dérivable à gauche en $x=0$ (voir **exercice 14**) et la valeur dérivée à gauche en ce point est 0.

Pour le tracé de la représentation graphique, construire les asymptotes, le point $A\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ à tangente parallèle à $x'x$; A l'origine, tracer une demi-tangente portée par $x'x$.

x	$-\infty$		0		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f'		$-$				$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0			$\searrow$		$\nearrow$	

$f\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 2{,}1$



17 Énoncé

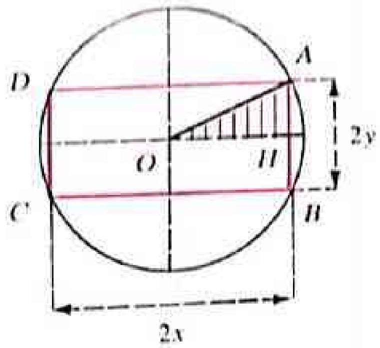
Un rectangle de côtés variables est inscrit dans un cercle donné de rayon R.
Démontrer que le rectangle d'aire maximum est le carré.
Quelle est son aire?

Solution

Désignons les mesures des côtés respectivement par $2x$ et $2y$.

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OAH conduit à :

$$x^2+y^2=R^2 \quad \text{d'où} \quad y=\sqrt{R^2-x^2}.$$



L'aire du rectangle s'écrit en fonction de x :

$$S(x)=4x\sqrt{R^2-x^2}.$$

Ici, la fonction S est définie sur $[O; R]$ car x est une longueur.

Elle est dérivable sur $[O; R[$ et, sur cet intervalle :

$$S'(x)=4\sqrt{R^2-x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{4(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Sur l'intervalle considéré, $S'(x)=0$ pour $x=\dfrac{R}{\sqrt{2}}$

$S'(x)>0$ sur $\left]0; \dfrac{R}{\sqrt{2}}\right[$ et $S'(x)<0$ sur $\left]\dfrac{R}{\sqrt{2}}; R\right[$.

x	0		$\frac{R}{\sqrt{2}}$		R
S'		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	$2R^2$	$\searrow$	0

L'aire S est maximum pour

$$x=\frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \text{d'où} \quad y=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{2}}=\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

On a $x=y$. Le rectangle est alors un carré, d'aire :

$S\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=\mathbf{2R^2}$.

Prop. 60

18 Énoncé

Étudier les variations de $g : x \longmapsto 2x+\sqrt{|x^2-1|}$.
Trouver les asymptotes, construire la courbe et les tangentes aux points particuliers.

Solution

Sur $[-1; 1]$: $g(x)=2x+\sqrt{1-x^2}$;

si $x \notin [-1; 1]$: $g(x)=2x+\sqrt{x^2-1}$.

g est définie sur $\mathbb{R}$.

- $\lim_{+\infty} g = +\infty$ et $\lim_{-\infty} g = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 3 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} (g(x) - 3x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \to -\infty} (g(x) - x) = 0.$$

La droite d'équation $y = 3x$ est **asymptote** $(x > 0)$ ainsi que la droite d'équation $y = x$ $(x < 0)$.

Pour $x < -1$:
$$g(x) = x\left(2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right).$$
Pour $x > +1$:
$$g(x) = x\left(2 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right).$$

- g est **dérivable** sur $]-1; 1[$ avec $g_1'(x) = u(x) \cdot (4 - 5x^2)$

$$g_1'(x) = 0 \quad \text{pour} \quad x = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Déf. 31

avec $u(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2} + x}$

x	-1		$\frac{2\sqrt{5}}{5}$		1
$g_1'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$

- g est **dérivable** sur $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$ avec $g_2'(x) = v(x) \cdot (3x^2 - 4)$

$g_2'(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. $g_2'(x) > 0$ pour $x > +1$.

$$v(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1} - x}$$

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$		-1
$g_2'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$

Ces informations permettent de donner les variations de g sur D_g.

- **Étude locale** en $x = 1$ et $x = -1$

$$g(1) = 2; \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} |g_1'(x)| = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} |g_2'(x)| = +\infty.$$

g n'est pas dérivable en ce point mais la courbe représentative a une tangente parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$

Prop. 55

$$g(-1) = -2; \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} |g_1'(x)| = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} |g_2'(x)| = +\infty.$$

Prop. 56

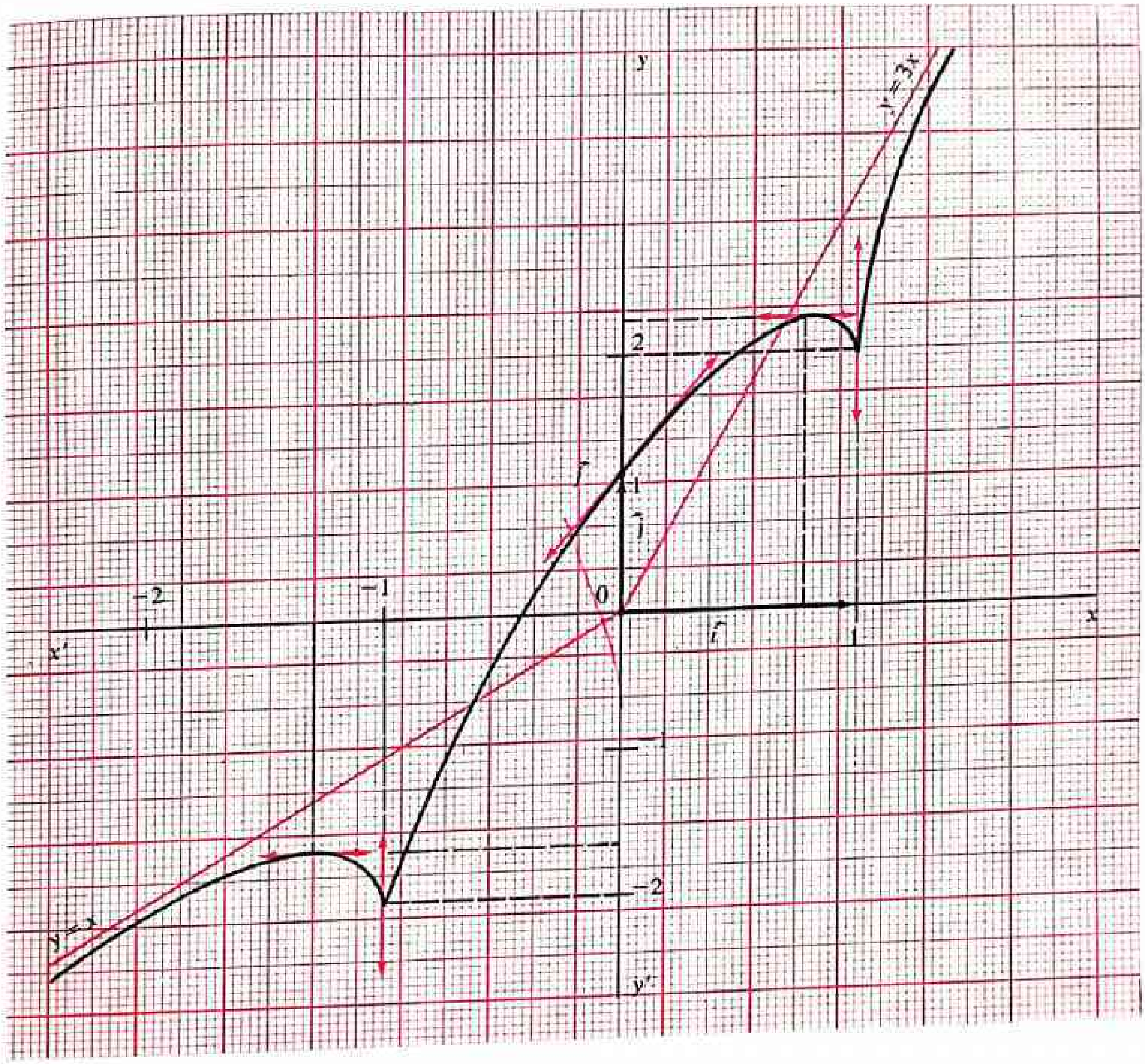
Même remarque qu'en $x = 1$.

- Construire avec soin les asymptotes, les points particuliers avec la tangente en ce point :

$A\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{3}\right)$: tangente parallèle à $x'x$

$B\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}; \sqrt{5}\right)$: tangente parallèle à $x'x$

$C(-1; -2)$: tangente parallèle à yy'
$D(1; 2)$: tangente parallèle à yy'
$E(0; 1)$: tangente de pente 2.



19 **Énoncé**

$$f(x)=\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}.\ \text{Étudier } \lim_0 f.$$

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}^*$; f est une fonction paire.
En $x=0$, numérateur et dénominateur ont pour limite 0.

Les théorèmes ne permettent pas de conclure. Prop. 28

Essayons de transformer $f(x)$ pour faire apparaître $\frac{1-\cos x}{x^2}$: $\quad f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty.$$

Prop. 24 (3)

On ne peut pas conclure pour la limite de f en $x=0$. Utilisons alors un développement limité de $x \longmapsto \cos x$ en $x=0$:

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0$$

d'où
$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2-x^2\varepsilon(x)$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{24}x^2-x^2\varepsilon(x)\right)=\frac{1}{12}+2\varepsilon(x),$$

avec
$$\lim_0 \varepsilon = 0.$$

Il en résulte que
$$\lim_0 f = \frac{1}{12}.$$

On pourrait définir la fonction g, **prolongement** de f par **continuité** en $x=0$.

Pour $x \in \mathbb{R}^*$:
$$g(x)=f(x)$$

et
$$g(0)=\frac{1}{12}.$$

Cette transformation d'écriture ne suffit pas pour répondre à la question posée.

C'est la seule méthode simple pour déterminer la limite cherchée.

Prop. 58 (3)

Cette fonction g est continue en $x=0$. L'étude de la dérivabilité de g en $x=0$ nécessiterait le développement limité de $\cos x$ avec quatre termes.

20 Énoncé

$g(x)=\sqrt{x^4+x^3-2}-x^2$. Démontrer que l'intervalle $[1;+\infty[$ est contenu dans l'ensemble de définition de g. En utilisant un développement limité de $\sqrt{1+u}$ en $u=0$ et un changement de variable, trouver $\lim_{+\infty} g$ et une équation d'une asymptote à la courbe représentative de g.

Solution

Si $x \geqslant 1$, alors $x^4 \geqslant 1$, $x^3 \geqslant 1$ donc $x^4+x^3 \geqslant 2$.

Prop. 25

La recherche de $\lim_{+\infty} g$ a donc une signification

$$g(x)=x^2\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}}-1\right].$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x^4}\right)=0$$

Posons $u=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}$.

On a donc : $\lim_{x\to+\infty} u(x)=0$.

Or $\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$

Prop. 58 (2)

d'où

$$g(x)=x^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right)^2+\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^4}\right)^2\cdot\varepsilon(u(x))-1\right]$$

$$g(x)=x^2\left[\frac{1}{2x}-\frac{1}{x^4}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{2x^5}-\frac{1}{2x^8}+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^5}+\frac{4}{x^8}\right)\varepsilon(u(x))\right]$$

$$g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{2x^6}+\left(1-\frac{4}{x^3}+\frac{4}{x^6}\right)\varepsilon(u(x))$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^6}\right)=0$$

et $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(u(x))=0$

donc $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\right)\right]=0.$

On a démontré d'une part que $\lim\limits_{+\infty} g=+\infty$ et que la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}$ est asymptote à la courbe.

$$\begin{tikzcd} & u=\frac{1}{x} \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ x \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & \varepsilon(u(x)) \end{tikzcd}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(u(x))=\lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$$

On aurait pu aussi étudier :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$$

Déf. 31

21 Énoncé

Rappeler le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $u=0$ de :

$$u\longmapsto\sqrt{1+u}.$$

1) Donner un développement limité au voisinage de $x=0$ de f telle que :

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-x+\sqrt{x^3+x^2}\right).$$

2) Soit g définie par $\qquad g(x)=\sqrt{x^4+x^3}-x^2-\dfrac{1}{2}x.$

En utilisant un développement limité en 0 de $\sqrt{1+u}$ et le changement de variable $x=\dfrac{1}{u}$, déterminer $\lim\limits_{+\infty} g$.

Solution

1) $\sqrt{1+u}=1+\dfrac{1}{2}u-\dfrac{1}{8}u^2+u^2\cdot\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{0}\varepsilon=0$.

f est définie et continue sur $[-1;+\infty[$

$\sqrt{x^3+x^2}=|x|\sqrt{x+1}$

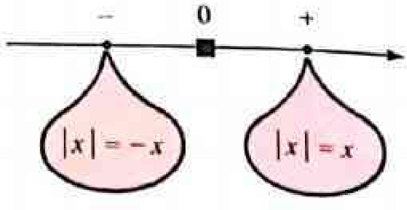
$\qquad =|x|\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+x^2\cdot\varepsilon(x)\right)$

avec $\lim\limits_{0}\varepsilon=0.$

Prop. 58 (2)

$x^3+x^2=x^2(x+1)$

$x+1\geqslant 0 \iff x\geqslant -1.$



Pour $x > 0$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-x+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^3+x^3\cdot\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}x^3+x^3\cdot\alpha(x)$$

avec

$$\alpha(x)=+\frac{1}{2}\varepsilon(x) \quad \text{donc} \quad \lim_{0}\alpha=0.$$

Pour $x < 0$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-x-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^3-x^3\varepsilon(x)\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{16}x^3+x^3\cdot\beta(x)$$

avec $\lim\limits_{0}\beta=0$.

Le développement limité de f au voisinage de 0 n'est donc pas le même **à droite et à gauche** de 0.

2) $x^4+x^3=x^3(x+1)$. g est définie et continue sur $]-\infty;-1]$ et $[0;+\infty[$. Mettons x^2 en facteur :

$$g(x)=x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x^2-\frac{1}{2}x.$$

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad 0 \quad$ $+\infty$
$x(x+1)$	$+ \quad 0 - 0 \quad +$

Le changement de variable $x=\dfrac{1}{u}$ conduit à la fonction p :

$$p(u)=\frac{1}{u^2}\sqrt{1+u}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2u}.$$

Faire apparaître la forme $\sqrt{1+u}$ pour utiliser son développement limite en $u=0$.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} u=0$.

Utilisons le développement limité en $u=0$ de $\sqrt{1+u}$:

$$p(u)=\frac{1}{u^2}\left(1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+u^2\varepsilon(u)\right)-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{2u}$$

$$p(u)=-\frac{1}{8}+\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0}\varepsilon(u)=0.$$

Prop. 58 (2)

$$\begin{tikzcd} & u=\frac{1}{x} \arrow[dr, "p"] & \\ x \arrow[ur] \arrow[rr, bend right, "g"'] & & g(x) \end{tikzcd}$$

Prop. 33

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} u=0$ et $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$

d'où $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{u\to 0} p(u)=-\dfrac{1}{8}.$

L'utilisation directe des théorèmes pour étudier $\lim\limits_{+\infty} g$ conduit à une indétermination.

22 Énoncé

f est définie par : $f(0)=0$ et pour $x\neq 0$: $f(x)=\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$.

f est-elle continue en $x=0$? Est-elle dérivable en ce point?

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour $x \in]0; +\infty[$ **:** $f(x) = \sqrt{x}$.
Pour $x \in]-\infty; 0[$ **:** $f(x) = -\sqrt{-x}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (\sqrt{x}) = 0$$

et
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = 0.$$

Or $f(0) = 0$ donc f est continue en 0.

- f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{pour} \quad x > 0.$$
- f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} \quad \text{pour} \quad x < 0.$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f'(x) = +\infty.$$

f n'est donc pas dérivable en $x = 0$, ce que l'on peut confirmer par une étude au moyen de la définition. C'est donc un exemple d'application continue en un point et non dérivable en ce point.

f est définie sur un *voisinage* de 0.
f est impaire.

Déf. 25

A l'origine O du repère la tangente à la courbe est portée par l'axe yy'.

23

Énoncé

$f(x) = \frac{1}{x}\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right)$ avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que l'on peut définir f_1, prolongement de f par continuité en $x = 0$; f_1 est-elle dérivable en $x = 0$?

Solution

f, non définie en $x = 0$, n'est pas continue en ce point.
Mais

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}\right) = -\frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$
$$= (-x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

d'où $\lim_0 f = 0$.

Déf. 25

Prop. 24 (2)

Si l'on pose $f_1(0)=0$ et, pour $x\neq 0$: $f_1(x)=f(x)$, alors la fonction f_1 est continue en $x=0$; f_1 est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Déf. 19

Posons $\varphi(h)=\dfrac{f_1(h)-f_1(0)}{h}$

$$\varphi(h)=-\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{1}{\cos h}=-\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2\times\frac{1}{\cos h}$$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ et $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\cos h}=1$ d'où $\lim\limits_{0}\varphi=-1$.

La fonction f_1 est donc dérivable en $x=0$, sa valeur dérivée en ce point est (-1).

On pourrait aussi calculer $f'(x)$ pour $x\neq 0$ et étudier les limites de f' à droite et à gauche en 0. Prop. 38

24 **Énoncé**

$g(x)=\tan x-\frac{4}{\pi}x$. Étudier la continuité sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ de g, de g' et de g''. En déduire les variations de g' et de g sur cet intervalle et montrer que pour $0<x<\frac{\pi}{4}$: $\tan x<\frac{4}{\pi}x$.

Solution

La fonction tangente est continue et dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Prop. 40

$$g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{4}{\pi}=\tan^2 x+1-\frac{4}{\pi};$$

Prop. 38

$$g''(x)=2\,\frac{\tan x}{\cos^2 x}$$

$g''(x)>0$ sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ donc g' est strictement croissante et **continue** sur $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$

Le signe de g'' donne les variations de g', et le signe de g' donne les variations de g

$$g'(0)=1-\frac{4}{\pi}<0 \quad\text{et}\quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{4}{\pi}>0.$$

Prop. 42 Prop. 60

Dans ces conditions, puisque $g'(0)$ et $g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ sont de **signe contraire**, il existe un unique réel x_0 de $\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ tel que $g'(x_0)=0$.

Sur $]0;x_0[$: $g'(x)<0$ et sur $\left]x_0;\frac{\pi}{4}\right[$, $g'(x)>0$.

D'où les variations de g.

$$g(0)=0 \quad\text{et}\quad g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

x	0		x_0		$\frac{\pi}{4}$
g''			$+$		
g'		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
g	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

En raison des variations de g et de sa continuité, on a pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$:

$$g(x) < 0 \quad \text{d'où} \quad \tan x < \frac{4}{\pi} x.$$

25 Énoncé

Soit l'équation d'inconnue x : $x\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3x^2+4} = m$ (m paramètre réel). Démontrer qu'elle a une unique solution positive pour tout m supérieur à (-2).

Solution

Étudions pour cela g définie par

$$g(x) = x\sqrt{3} - 4 + \sqrt{3x^2+4}$$

g est définie, **continue** et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = \sqrt{3} + \frac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2+4}}(\sqrt{3x^2+4} + x\sqrt{3}).$$

Pour tout réel x :

$$3x^2 + 4 > 3x^2 \quad \text{d'où} \quad \sqrt{3x^2+4} > x\sqrt{3}$$

donc $g'(x) > 0$. g est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{+\infty} g = +\infty, \quad g(0) = -2.$$

La restriction g_1 de g à $[0, +\infty[$ est donc une **bijection** de $[0; +\infty[$ sur $[-2; +\infty[$.
Pour tout réel m de $[-2; +\infty[$, il existe un x_1 réel positif tel que $g_1(x_1) = m$.

On peut aussi étudier $\lim\limits_{-\infty} g$. On trouve $\lim\limits_{-\infty} g = -4$.
g est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-4, +\infty[$.

$\sqrt{3x^2+4}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Prop. 37

Prop. 44

x	0	x_1	$+\infty$
g_1	-2	m ↗	$+\infty$

$$g(x) = \frac{(x\sqrt{3}-4)^2 - 3x^2 - 4}{x\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3x^2+4}}$$

$$g(x) = \frac{-8x\sqrt{3} + 12}{D}.$$

En factorisant x dans D, on trouve

$$\lim_{-\infty} g = \frac{-8\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -4.$$

26 Énoncé

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; 2[$.
2) Dessiner une représentation graphique de f et trouver un centre de symétrie pour cette courbe.
3) Déterminer $f^{-1}(x)$ et donner une représentation graphique de f^{-1}, dans le même repère orthonormé que pour f.

Solution

1) f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, car les fonctions :

$$x \longmapsto x^2+1; \quad x \longmapsto \sqrt{x^2+1};$$

$$x \longmapsto x \quad \text{et} \quad x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Ici, la résolution de l'équation $f(x)=m$ avec $m \in]0;2[$, n'est pas simple du tout.

Pour tout réel x : $f'(x)>0$; f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x)) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \mathbf{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x)) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \mathbf{0}.$$

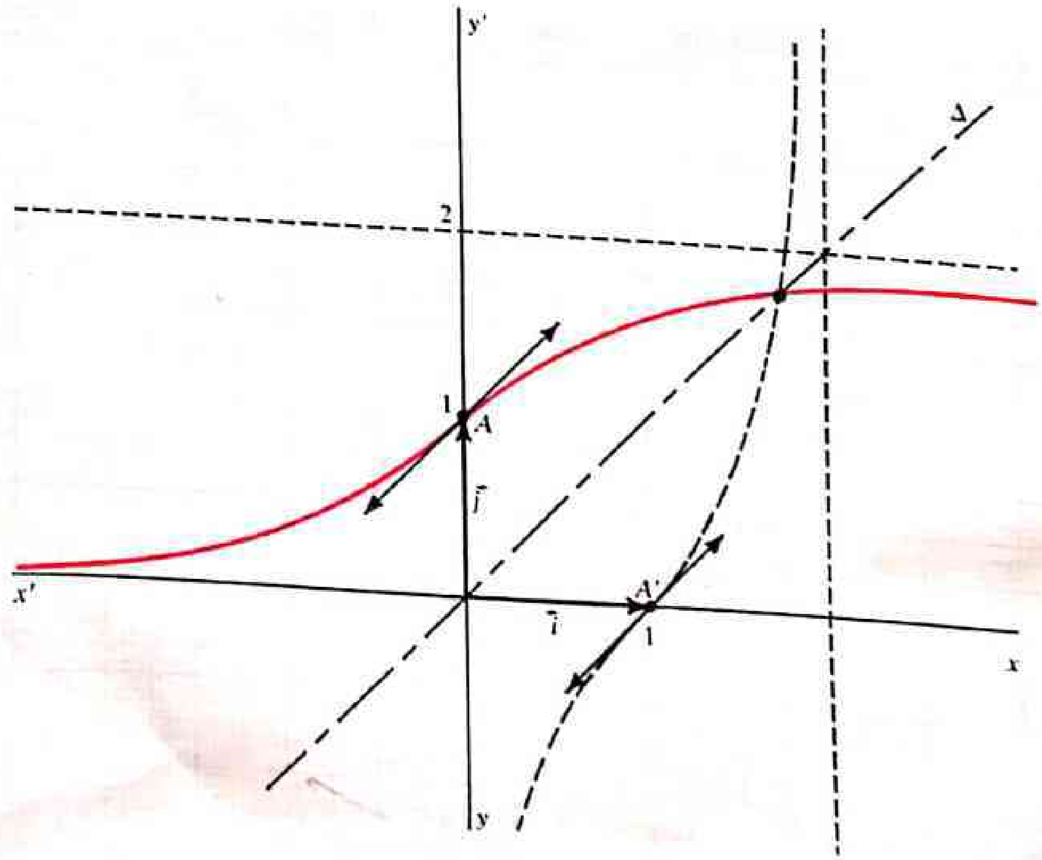
Pour $x>0$:

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Pour $x<0$:

$$\sqrt{x^2+1} = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Donc f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et compte tenu des limites étudiées, f est alors une **bijection** de $\mathbb{R}$ sur $]0;2[$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	1 ↗	2

2) Les droits d'équations $y = 0$ et $y = 2$ sont des asymptotes à la courbe représentative de f (courbe en rouge).
Au point $A(0; 1)$: $f'(0) = 1$.
La tangente en A est parallèle à la droite Δ d'équation $y = x$.
Démontrons que le point A est centre de symétrie pour cette courbe et, pour cela, prenons A comme nouvelle origine :

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y + 1. \end{cases}$$

L'équation $\quad y = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

devient $\quad Y + 1 = 1 + \dfrac{X}{\sqrt{X^2+1}}$

d'où $\quad Y = \dfrac{X}{\sqrt{X^2+1}}$.

Dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe est la représentation graphique de la **nouvelle** fonction :

$$F : X \longmapsto \frac{X}{\sqrt{X^2+1}}.$$

C'est une fonction impaire : donc le point A est un centre de symétrie de cette courbe.

f est strictement croissante.

3) Pour déterminer $f^{-1}(x)$, il faut exprimer x **en fonction de** y, en se souvenant que $x > 0$ équivaut à $y > 1$ et $x < 0$ équivaut à $0 < y < 1$: x et $y - 1$ sont de même signe.

$$y - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

conduit à $\quad (x^2+1)(y-1)^2 = x^2$

$x^2 - x^2(y-1)^2 = (y-1)^2$

$x^2(2y - y^2) = (y-1)^2$.

c'est-à-dire à $\quad x^2 = \dfrac{(y-1)^2}{2y - y^2}$.

Or $0 \leqslant y \leqslant 2$, donc $2y - y^2 \geqslant 0$.
x et $(y - 1)$ étant de même signe, on obtient :

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$.

$$x = \frac{y-1}{\sqrt{2y - y^2}} \quad \text{donc} \quad f^{-1}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

La courbe représentative de f^{-1} (en noir) est symétrique de celle de f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

En repère **orthonormé.**

En $A'(1; 0)$ la tangente est parallèle à Δ.
A' est centre de symétrie de la courbe C'.
Les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ sont des asymptotes.

Les deux courbes se coupent sur Δ en un point dont on ne sait pas calculer exactement les coordonnées.

27 **Énoncé**

Démontrer que l'équation d'inconnue x :
$$x^4 - mx^3 - 6x^2 + mx + 1 = 0$$
a quatre racines réelles quel que soit le paramètre m.
La résoudre pour $m = 0$.

Solution

Cette équation équivaut à
$$m(x^3 - x) = x^4 - 6x^2 + 1.$$
Les réels 0, 1 et -1 ne sont pas solution, donc l'équation équivaut à :
$$f(x) = m \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{x^4 - 6x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}.$$
f est continue et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$, $]0; 1[$, $]1; +\infty[$ et f est impaire.

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$ et $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

Donc la restriction f_1 de f à $]1; +\infty[$ est une **bijection** de $]-1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Donc, pour tout réel m, l'équation $f_1(x) = m$ a une solution x_1 avec $x_1 > 1$.
On démontre de même que f_2, restriction de f à $]0; 1[$ est une **bijection** croissante de $]0; 1[$ sur $\mathbb{R}$.
L'équation $f_2(x) = m$ a **une** solution sur $]0; 1[$.
Or f est impaire. L'équation donnée a donc aussi exactement une solution x_3 sur $]-w; 0[$ et une solution x_4 sur $]-\infty; -1[$.
D'où les quatre solutions :
$$\boldsymbol{x_4 < -1 < x_3 < 0 < x_2 < 1 < x_1}.$$
Pour $m = 0$:
$$x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$
c'est une équation **bicarrée** de solutions :
$$-\sqrt{3 + 2\sqrt{2}};\ -\sqrt{3 - 2\sqrt{2}};\ \sqrt{3 - 2\sqrt{2}};\ \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Autre écriture
$$f(x) = x - \frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

x	1		x_1		$+\infty$
f_1	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Poser $X = x^2$
$$X^2 - 6X + 1 = 0$$
$$\Delta' = 8.$$

28 **Énoncé**

$f : x \longmapsto \sqrt{1 - x^2}$. Quelle est la représentation graphique de f?
Si a et b sont deux réels tels que $a < b$ et $[a, b] \subset [-1; 1]$, interpréter géométriquement le théorème des accroissements finis pour f sur $[a; b]$.

Solution

$y=\sqrt{1-x^2}$ équivaut à $y^2=1-x^2$ et $x^2+y^2=1$ avec $y \geqslant 0$.
f est définie et continue sur $[-1;\,1]$. Sa représentation graphique est un demi-cercle de centre O et de rayon 1.
f est dérivable sur $]-1;\,1[$ et

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Si $[a;\,b]$ est inclus dans $[-1;\,1]$, f est continue sur $[a;\,b]$.
Il existe donc un réel c de $]a;\,b[$ tel que

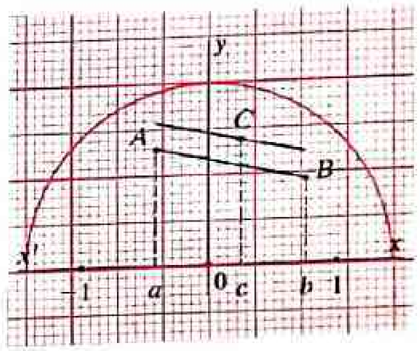
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ce qui signifie que, pour deux points quelconques A et B du demi-cercle, il existe un point C du demi-cercle où la tangente est parallèle à la corde $[AB]$.
Si $a=-b$, alors $f(b)=f(a)$: la corde est parallèle à $x'x$, ainsi que la tangente en C et $c=\dfrac{a+b}{2}$.

De plus, f' n'est pas bornée : $f'(x)$ peut prendre toute valeur réelle. Pour tout réel λ, il existe sur le demi-cercle une tangente de pente λ.

f est paire.

$\boxed{\text{Prop. } 53}$



$\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\lambda$ a une solution pour tout réel λ.

29 Énoncé

a et b étant des réels positifs tels que $a<b$, montrer que :

$$0<\sqrt[3]{1+b}-\sqrt[3]{1+a}<\frac{1}{3}(b-a).$$

En déduire un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt[3]{1{,}006}$ par le réel 1.

Solution

La fonction $f\;:\;x \longmapsto \sqrt[3]{1+x}$ est continue et dérivable sur $]-1;\,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}^+$.

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{3}}$$

d'où $$f'(x)=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}.$$

Pour $x \geqslant 0$, $(1+x)^2 \geqslant 1$ d'où $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{3}$.

Dérivée de $f(x)=[u(x)]^{\alpha}$

$f'(x)=\alpha[u(x)]^{\alpha-1}$

pour tout rationnel α.

La fonction f étant continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis sur un intervalle $[a ; b]$ quelconque inclus dans $\mathbb{R}^+$:

$$0 < f'(x) \leqslant \frac{1}{3} \quad \text{entraîne} \quad 0 < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{1}{3}$$

d'où

$$0 < \sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leqslant \frac{1}{3}(b-a) \quad (\text{avec } b > a).$$

Pour $a = 0$ et $b = 0{,}006$, on obtient

$$0 < \sqrt[3]{1{,}006} - 1 < \frac{1}{3} \times 0{,}006$$

d'où $\quad \sqrt[3]{1{,}006} - 1 < 0{,}002.$

Si l'on prend 1 comme valeur approchée de $\sqrt[3]{1{,}006}$, on commet une erreur inférieure à 2×10^{-3}.

Attention aux **conditions d'application** du théorème des accroissements finis

- f continue sur $[a ; b]$.
- f dérivable sur $]a ; b[$.
- f' bornée sur $]a ; b[$.

Prop. 54

D'AUTRES POUR CHERCHER

■ Des problèmes de limites

30

Énoncé

Étudier les limites éventuelles à $(+\infty)$ et $(-\infty)$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{8x^2+6}{x-4}; \quad f_2(x) = \frac{8x-5}{x^2+4}; \quad f_3(x) = \frac{4x+6}{2-x}; \quad f_4(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2-3x+9}.$$

Indication

Revoir l'exercice **1** et les propriétés **P26** et **P28.**

31

Énoncé

$g(x) = \dfrac{4x^2+x-5}{x^2-9}$. *Déterminer l'ensemble de définition de g, ainsi que les limites aux bornes des intervalles où elle est définie. Quelles sont les asymptotes à la courbe représentative de g?*

Indication

Asymptotes : $y = 4$; $x = 3$; $x = -3$.

32

Énoncé

$g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. *Mêmes questions qu'à l'exercice* **31.**

Indication

Montrer que $g(x)$ peut s'écrire sous la forme $ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.

33

Énoncé

$h(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$. *Mêmes questions qu'à l'exercice* **31.**

Indication

On trouvera deux asymptotes d'équations : $y = x$ et $y = 3x$.

34

Énoncé

$p(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x + 1 + \sqrt{x^2+1}}$. *Mêmes questions qu'à l'exercice* **31.**

Indication

La limite à $(+\infty)$ est $\dfrac{1}{2}$. A $(-\infty)$, utiliser la forme conjuguée de $x + 1 + \sqrt{x^2+1}$. Voir exercice **2.**

35

Énoncé

Déterminer la limite éventuelle en $x = 0$ de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2}; \quad g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x}; \quad h(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x^2}.$$

Indication

Utiliser **P28** pour f et g. Pour h, utiliser la forme conjuguée du numérateur.

36

Énoncé

$g(x) = \dfrac{\sin x - x \cos x}{x^3}$.

Écrire un développement limité en $x = 0$ de g et en déduire $\lim\limits_{0} g$.

Indication

Revoir **P58.** $\lim\limits_{0} g = \frac{1}{3}$.

37

Énoncé

$u(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - x}{x^3}$.

Écrire un développement limité en $x = 0$ et en déduire $\lim\limits_{0} u$.

Indication

A partir du développement limité de $\sqrt{1+x}$, écrire celui de $\sqrt{1-x}$, puis celui de u. $\lim\limits_{0} u = \frac{1}{8}$.

38

Énoncé

$f(x) = \sqrt{x(x-1)}$. *Écrire $f(x)$ sous la forme* $|x|\sqrt{p(x)}$.

En utilisant le changement de variable $u = -\dfrac{1}{x}$ et un développement limité en $x = 0$ de $\sqrt{1+u}$ déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f.

39

Énoncé

$g(x) = \sqrt{4-x}$. *Écrire un développement limité de g en $x = 0$, puis en $x = 3$.*

Indication

En $x = 0$: $g(x) = \sqrt{4\left(1 - \frac{x}{4}\right)} = 2\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{4}\right)}$. Utiliser **P58.**

En $x = 3$, poser $x = 3 + h$ et utiliser un développement limité en $h = 0$ de $\sqrt{1-h}$, puis remplacer h par $(x-3)$.

40

Énoncé

Démontrer :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^4}\right) = -\frac{1}{12} \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right) = -\frac{1}{2}.$$

■ **Avec des fonctions trigonométriques**

41

Énoncé

Sachant que $\cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ *calculer* $\cos 2a$ *et résoudre l'équation* $\cos x = \cos a$.

$\sin b = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. *Calculer* $\cos 2b$ *et résoudre l'équation* $\sin x = \sin b$.

Indication

Revoir des formules de **P15** ainsi que les propriétés **P14.**

42 **Énoncé**

Résoudre $\cos 3x = \cos 2x$ *dans* $[0; 2\pi[$.

Exprimer $\cos 3x$ *puis* $\cos 2x$ *en fonction de* $\cos x$.

Si on pose $f(x) = \cos 3x - \cos 2x$, *le changement de variable* $u = \cos x$ *conduit à* $f(x) = g(u)$: *résoudre* $g(u) = 0$ *dans* $\mathbb{R}$.

Déduire de ce qui précède le cosinus et le sinus de $\dfrac{2\pi}{5}$ *puis de* $\dfrac{4\pi}{5}$.

Indication

$2x = x + x$ puis $3x = 2x + x$. Factoriser $g(u)$.

43 **Énoncé**

Exprimer $\sin^4 x$ *en fonction de* $\cos 2x$ *et* $\cos 4x$, *puis en fonction de* $\cos x$.

Indication

R : $\sin^4 x = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2} \cos 2x + \dfrac{1}{8} \cos 4x$.

44 **Énoncé**

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Indication

Rapprocher $\sin x + \sin 5x$, puis $\cos x + \cos 5x$.

45 **Énoncé**

$f(x) = \dfrac{1}{\sin x - \cos x}$. *Déterminer l'ensemble de définition, la parité, la période de* f.

Indication

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\sin x \cos \dfrac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin \dfrac{\pi}{4}\right)$. **P16.**

46

Énoncé

$g(x)=\dfrac{\tan x}{2\sin x-1}$. *Mêmes questions qu'à l'exercice* $\boxed{45.}$

Indication

Revoir l'exercice $\boxed{8.}$

47

Énoncé

Déterminer l'ensemble de définition, étudier la parité et la périodicité de chacune des fonctions :

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-2\cos x}}{\tan x};\quad g(x)=\sqrt{\frac{\tan x+1}{\tan x-1}};\quad h(x)=\frac{\sin 2x}{\cos x}.$$

Indication

Penser à l'existence de la fonction tangente.

48

Énoncé

$$u(x)=\frac{\sin 2x}{\tan 4x};\quad v(x)=\frac{\sin^2 2m}{4x};\quad w(x)=\frac{1-\cos 4x}{6x^2}.$$

Étudier la limite en $x=0$ *de chacune de ces fonctions.*

Indication

Revoir l'exercice $\boxed{9}$ et les propriétés $\boxed{\text{P24}}$ (2).

49

Énoncé

Même question qu'à l'exercice $\boxed{48}$ *pour les fonctions :*

$$f(x)=\frac{x\sin x}{1-\cos x};\quad g(x)=\frac{\sin x-\tan x}{x^3};\quad h(x)=\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\tan x}.$$

Indication

Faire apparaître des *formes* qui permettent de conclure.

50

Énoncé

$g(x)=\left(\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}\right)\cdot\tan x$. *Étudier ses limites en* $x=0$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Indication

En $x=\dfrac{\pi}{2}$ poser $x=\dfrac{\pi}{2}+h$ et se ramener à la limite en $h=0$ d'une fonction de h.

■ Continuité et accroissements finis

51 **Énoncé**
$h(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 3x}$. *Calculer $h(0)$. Déterminer l'ensemble de définition de h. Cette fonction est-elle continue en $x = 0$? en $x = 3$?*

Indication

Attention à la définition de la continuité $\boxed{\text{D25.}}$ Réponse : *non* en $x = 0$.

52 **Énoncé**
$f(x) = x - \sqrt{E\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ *où E désigne la fonction valeur entière.*
Représenter graphiquement f sur $[0; 4]$. Est-elle continue en $x = 1$? en $x = 2$? Généraliser.

Indication

f est continue en $x = 1$, mais n'est pas continue en $x = 2$.

53 **Énoncé**
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{x^3 + 1}$. *Quel est l'ensemble de définition de f?*
Peut-on définir un prolongement par continuité en $x = -1$.

Indication

Chercher la limite de f en -1. La réponse est *oui*.

54 **Énoncé**
$g(x) = \dfrac{|x| \times |x + 1|}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}$.
Peut-on définir un prolongement de g par continuité en $x = -1$?

Indication

En $x = -1$, la limite à droite et la limite à gauche sont $\dfrac{1}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$; la réponse est *non*.

55 **Énoncé**
$f(x) = 2 - \sqrt{(x - 1)^2}$. *$f$ est-elle continue sur $[0; 2]$? Comparer $f(0)$ et $f(2)$. Quelle erreur commet-on en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[0; 2]$?*
Représenter graphiquement sur cet intervalle et interpréter votre réponse.

Indication

Revoir les conditions d'application de la propriété **P52.**

56

Énoncé

$g(x)=\sqrt{x}$. *Interpréter le théorème des accroissements finis pour g sur $[a;b]$ inclus dans $\mathbb{R}^+$ et calculer le réel c du théorème en fonction de a et b.*

57

Énoncé

$f(x)=\dfrac{1}{x}$. *Appliquer et interpréter le théorème des accroissements finis sur $[a;b]$ u a et b positifs. Calculer le réel c en fonction de a et de b. En déduire une construction de la tangente au point $K(c, f(c))$ de l'hyperbole représentative de f. Cette tangente coupant les axes en A et B que peut-on dire de K par rapport à A et B?*

Indication

$c=\sqrt{ab}$. En posant $a=\dfrac{c}{2}$, on trouve $b=2c$. La tangente est parallèle à la droite passant par les points $\left(\dfrac{c}{2};\dfrac{2}{c}\right)$ et $\left(2c;\dfrac{1}{2c}\right)$. K est le milieu de $[AB]$.

58

Énoncé

a) *En étudiant la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x-1$, démontrer que l'équation $f(x)=0$ a trois racines réelles que l'on placera par rapport à -2; -1; 0; 1 et 2.*

b) *Exprimer $\cos 3u$ en fonction de $\cos u$.*

c) *En déduire les racines de $f(x)=0$ en fonction d'un cosinus de $\dfrac{\pi}{9}$, $\dfrac{5\pi}{9}$, $\dfrac{7\pi}{9}$...*

Indication

f continue sur $\mathbb{R}$, croissante sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$, décroissante sur $[-1;1]$.
Poser $x=2\cos u$.

59

Énoncé

$g(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. *Montrer que l'on a $g(x)=\dfrac{x^7-1}{x-1}$ pour $x\neq 1$. Étudier les variations de $h: x\longmapsto x^7$ et en déduire que l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution réelle.*

Indication

Suite géométrique. h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(1)=1$.

60 **Énoncé**

Pour $x \leq 0$ on pose : $f(x) = 2x + 3$ et pour $x > 0$: $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Comment choisir a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?
Même question pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

61 **Énoncé**

Étudier la continuité et la dérivabilité de $x \longmapsto \dfrac{x}{E(x)}$.

Indication

Étudier l'ensemble de définition, puis la continuité en a pour $a \notin \mathbb{Z}$ puis $a \in \mathbb{Z}$.

■ **Dérivabilité**

62 **Énoncé**

$f(x) = x\,|x-1|$. Étudier la dérivabilité de f en $x = 1$ et $x = 0$. Tracer les tangentes à la courbe de f aux points correspondants.

Indication

En $x = 1$, on trouvera une limite à droite et une limite à gauche.

63 **Énoncé**

$f(x) = \dfrac{x^2 - 11x + 30}{x^2 - x}$; $g(x) = \dfrac{10x - 30}{x - x^2}$. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ puis $f'(x) - g'(x)$. Interpréter le résultat.

Indication

On trouvera que $f(x) - g(x)$ est constante.

64 **Énoncé**

$f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Indication

On montrera, de deux façons différentes que $f'(x) = 0$ pour tout x.

65

Énoncé

$g(x)=\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$. Montrer que $g(x)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{(x-2)^2}$.
Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de g, puis la dérivée d'ordre n de g.

Indication

Voir exercice **11.**

66

Énoncé

$u(x)=\sin x\cos^4 x$. Déterminer la dérivée de u, puis la primitive de u qui s'annule en $x=0$.

67

Énoncé

Pour $x\geqslant 0$ on pose $f(x)=\sqrt{x}-2$ et pour $x<0$, $f(x)=-\sqrt{-x}+2$.
Étudier la parité de f et sa dérivabilité en $x=0$.

68

Énoncé

Calculer la dérivée d'ordre n de : $x \longmapsto \cos(ax+b)$
et de : $x \longmapsto \sin(ax=b)$.

Indication

$u(x)=\cos(ax+b)$; $u^{(n)}(x)=a^n\cos\left(ax+b+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

69

Énoncé

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de :
$f:(x,y)\longmapsto 5x^2y-xy^4-6x$; $\quad g:(x,y,z)\longmapsto x^2+y^2-xyz^2$.

70

Énoncé

Soit la fonction $u:(x,t)\longmapsto u(x,t)$. On appelle équation des cordes vibrantes l'équation du type suivant entre ses dérivées partielles :

$$k\,\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=\frac{\delta^2 u}{\delta t^2}.$$

Démontrer que les fonctions du type $F(x,t)=\sin Ax\cdot\sin(Akt+\varphi)$ vérifient cette équation (A et φ étant des constantes).

Indication

Calculer $\dfrac{\delta F}{\delta u}$, $\dfrac{\delta F}{\delta t}$, $\dfrac{\delta F}{\delta x^2}$, $\dfrac{\delta F}{\delta t^2}$. Voir exercice **13.**

71 **Énoncé**

Calculer les dérivées partielles du premier ordre de $f : (x, y, z) \longmapsto \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ *puis de* $g(x, y, z) \longmapsto \frac{x - 4y + 5z}{x + y - z}$.

72 **Énoncé**

Soit f *telle que, pour* $x \geqslant 1$: $f(x) = -x + \sqrt{(x-2)^2(x-1)}$.
f *est-elle dérivable en* $x = 2$?

Indication

f est dérivable à droite en $x = 2$, et à gauche, mais les valeurs dérivées sont distinctes.

73 **Énoncé**

g *est définie par :* $g(0) = 0$ *et pour* $x \neq 0$: $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Démontrer que g *est continue en* $x = 0$, *mais non dérivable en ce point.*

Indication

Penser que, pour tout $x \neq 0$: $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$.

■ **Continuité et bijections**

74 **Énoncé**

$f(x) = 2x - 3 + |x|$. *Étudier* f, *sa continuité, ses variations, sa dérivabilité. Montrer que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$; *est-elle dérivable sur* $\mathbb{R}$?

Indication

f n'est pas dérivable en $x = 0$.

75 **Énoncé**

Démontrer que f, *restriction de la fonction* **cosinus** *à* $[0, \pi]$ *est une bijection de* $[0; \pi]$ *sur* $[-1; 1]$. *Dessiner la représentation graphique de* f *et de* f^{-1} *et démontrer que pour tout* x *de* $[-1; 1]$, *on a* $f^{-1}(x) + f^{-1}(-x) = \pi$. *Calculer la valeur dérivée de* f^{-1} *en* 0; *en* $\frac{1}{2}$. f^{-1} *est-elle dérivable en* 1? *en* -1?

Indication

Penser que $\cos(\pi - a) = -\cos a$. Revoir $\boxed{\textbf{P48.}}$ $\overset{-1}{f}$ n'est pas dérivable si $f'(x) = 0$.

76

Énoncé

$f(x)=\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}$. *Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]1;+\infty[$.*

Que peut-on en déduire pour la résolution de l'équation dans $\mathbb{R}$: $f(x)=m$, de paramètre m?

77

Énoncé

$f(x)=\dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$. *Démontrer que la restriction de f à $]0;2[$ est une bijection de $]0,2[$ sur $]1,+\infty[$ et trouver $\overset{-1}{f}(x)$.*

Indication

f est strictement décroissante sur $]0;2[$; $\overset{-1}{f}(x)=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

78

Énoncé

Étudier la fonction g définie par $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-1}}$.

Démontrer que la restriction de g à $]1,+\infty[$ est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $]1,+\infty[$. Exprimer $\overset{-1}{g}(x)$.

Que peut-on en déduire pour la courbe de g et celle de $\overset{-1}{g}$ sur $]1,+\infty[$?

Indication

On montrera que $g=\overset{-1}{g}$ sur $]1;+\infty[$.

79

Énoncé

$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$. *Démontrer que la restriction de f à $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de cet intervalle sur une partie de $\mathbb{R}$ à déterminer.*

Démontrer que $\overset{-1}{f}$ est dérivable sur $]1;+\infty[$ et calculer la dérivée de $\overset{-1}{f}$.

Indication

Ne pas chercher à expliciter $\overset{-1}{f}(x)$. On trouvera : $\overset{-1}{f}{}'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

80 **Énoncé**

f est l'application de $[1, 4]$ dans $[1, 3]$ définie par

$$\begin{cases} x \in [1; 2[& f(x) = x \\ x \in [2; 3] & f(x) = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{7}{2} \\ x \in]3; 4] & f(x) = \dfrac{x}{2} + 1. \end{cases}$$

a) *Démontrer que f est une bijection de $[1; 4]$ sur $[1; 3]$.*

b) *Démontrer que f n'est pas continue sur $[1; 4]$ et n'est pas monotone sur cet intervalle.*

Indication

Faire une représentation graphique soignée. Elle aidera à démontrer que, pour tout m de l'intervalle $[1; 3]$ l'équation $f(x) = m$ a une solution unique dans $[1; 4]$.
On a ici un exemple de bijection qui n'est ni continue, ni monotone sur $[1; 4]$.

■ Études de fonctions numériques

81 **Énoncé**

Étudier et représenter graphiquement f telle que $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

Indication

$f'(x) = \dfrac{x^2(x+1)(x+3)}{(x+1)^4}$. La courbe a pour asymptotes les droites d'équations : $x = -1$ et $y = x - 2$. A l'origine, la courbe est tangente à l'axe $x'x$.

82 **Énoncé**

Étudier et représenter graphiquement : $g(x) = |x| - \dfrac{8}{|x| + 2}$.

Indication

g n'est pas dérivable en $x = 0$. A l'origine, il y a deux demi-tangentes. Deux asymptotes : $y = x$ et $y = -x$.

83 **Énoncé**

$f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$. *Démontrer qu'il suffit d'étudier f sur $]0; \pi[$, et faire cette étude.*

Indication

f est impaire et de période 2π. $f'(x)=\dfrac{-\cos x(3\cos^2 x+\sin^2 x)}{\sin^2 x}$.

84 **Énoncé**

$g(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}$.

Déterminer l'ensemble de définition de g.
On pose $x=\cos\varphi$ avec $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. Exprimer $g(x)$ en fonction de φ.
En déduire une représentation graphique de g.

Indication

L'ensemble de définition de g est $[-1;\,1]$. Pour $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$: $y=x$.

Pour $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{3\pi}{4}$ $y=\sin\varphi$ donc $x^2+y^2=1$ et pour $\dfrac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\pi$: $y=-x$.
La représentation de g est la réunion d'un quart de cercle et de deux segments.

85 **Énoncé**

$f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$. *Étudier et représenter graphiquement f.*

Indication

Deux asymptotes d'équations : $y=x-2$ et $y=-x+2$.

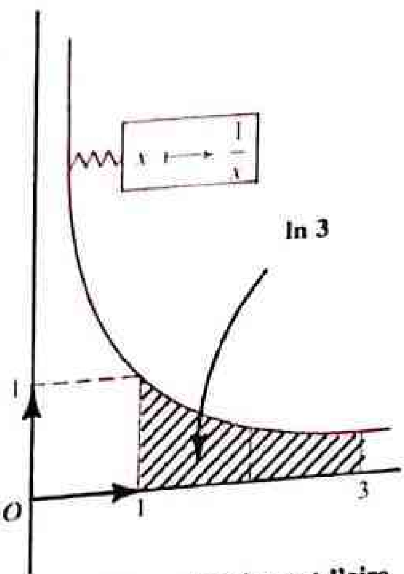
86 **Énoncé**

$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. *Étudier et représenter graphiquement f. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I. Construire la représentation graphique de f^{-1}.*

Indication

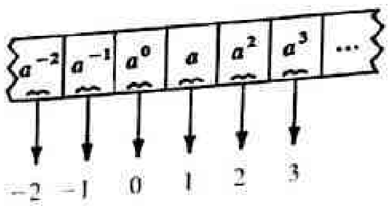
Remarquer que $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ et que pour tout x : $f'(x)>0$. Deux asymptotes d'équations : $y=0$ et $y=2x$.

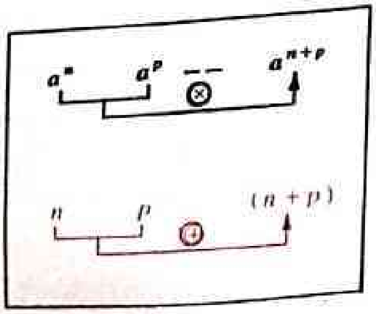
FONCTIONS LOGARITHMES



Un logarithme népérien est **l'aire d'une surface** comprise entre la courbe, $x'x$ et deux parallèles à *Oy*.

Le 16[e] siècle connaît un développement important du commerce, des échanges bancaires, de l'astronomie appliquée à la navigation, toutes activités humaines qui posent des problèmes de calcul aux savants de l'époque. C'est dire que l'invention d'un outil de calcul était dans l'air à l'époque. C'est sans doute le Suisse **Burgi** qui, en 1588, eut le premier l'idée des logarithmes, sans publier immédiatement ses travaux. L'Écossais **Napier** — qui devint **Néper** en français — publia, en 1614 à Édimbourg, le premier traité sur les logarithmes qui portent son nom, ainsi qu'une table à laquelle il travaillait depuis vingt ans.
L'Anglais **Briggs**, contemporain de Napier, imagina les logarithmes décimaux et publia en 1617 la première table à 14 décimales.
La première *«règle à calculs logarithmique»* de **Gunter** apparaît en Angleterre en 1624. L'intérêt pratique des logarithmes avec tables et règles à calcul est devenu très mince depuis l'apparition des calculatrices.





L'idée de base des **logarithmes de base** a est la correspondance entre les puissances de a et les exposants de ces puissances :
On pose

$$f(a^n) = n \quad \text{et} \quad f(a) = 1.$$

Sachant que $a^n \times a^p = a^{n+p}$, on a donc

$$f(a^n \times a^p) = f(a^n) + f(a^p).$$

Si $a = 10$, cette fonction est la fonction *«logarithme décimal»* : $f(10) = 1$; $f(10^n) = n$.
Avant l'apparition des calculatrices, elle permit d'effectuer certains calculs compliqués : le calcul d'un produit devient le calcul d'une somme de logarithmes :

$$\log(25\,000 \times 1{,}03^8) = \log 25 + \log 1\,000 + 8 \log 1{,}03.$$

- **Quelques mathématiciens qui ont contribué à l'invention des logarithmes.**

1550 Napier	(Écosse) Invente les logarithmes népériens
1552 Burgi	(Suisse) Horloger et astronome
1556 Briggs	(Angleterre) Tables de logarithmes décimaux
1560 Wright	(Angleterre) Cartographe. Travaille avec Briggs
1581 Gunter	(Angleterre) Invente la première règle à calculs
1646 Leibniz	(Allemagne) Logarithmes de nombres complexes

DES EXERCICES CORRIGÉS

87

> *a*) Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R},\ \ln(-x-2)+\ln(-3x)-\ln(x(2x+1))=0.$
> *b*) Résoudre l'inéquation : $x \in \mathbb{R},\ \ln(-x-2)+\ln(-3x)-\ln(x(2x+1))>0.$

Solution

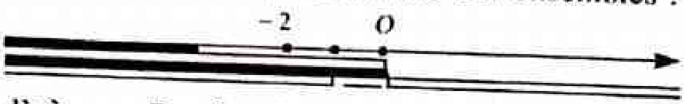
a) Il faut tout d'abord déterminer l'ensemble de définition de

$$x \longmapsto \ln(-x-2)+\ln(-3x)-\ln(x(2x+1)).$$

f est définie si :

$$\begin{cases} -x-2>0 & \text{donc } x<-2 & (S_1) \\ -3x>0 & \text{donc } x<0 & (S_2) \\ x(2x+1)>0 & \text{donc } x<-\dfrac{1}{2} \text{ ou } x>0 & (S_3). \end{cases}$$

Il faut trouver l'intersection de ces ensembles :



d'où $\quad D=S_1 \cap S_2 \cap S_3 =]-\infty, -2[.$

Résolution de l'équation.
Elle équivaut à :

$$x \in D, \quad \ln(-x-2)(-3x)=\ln(x(2x+1)).$$

Or la fonction logarithme népérien est une **bijection,** donc cette équation **équivaut** à :

$$(-x-2)(-3x)=x(2x+1)$$

c'est-à-dire $\ 3x^2+6x=2x^2+x$

$$x^2+5x=0 \quad \text{ou} \quad x(x+5)=0$$
$$x=0 \text{ ou } x=-5.$$

Seule la valeur (-5) est élément de D d'où : $S=\{-5\}$.

b) **Résolution de l'inéquation.**
Cette inéquation **équivaut à :**

$$x \in D, \quad \ln(-x-2)(-3x)>\ln(x(2x+1)).$$

Or la fonction ln est une bijection **croissante.**
. Cette inéquation équivaut donc à :

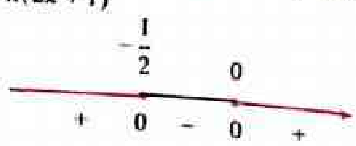
$$(-x-2)(-3x)>x(2x+1)$$
$$3x^2+6x>2x^2+x$$
$$x^2+5x>0 \quad \text{d'où} \quad x(x+5)>0$$

ce qui équivaut à $x<-5$ ou $x>0$.
Et comme $D=]-\infty;-2[$ on a

$$S'=]-\infty;-5[.$$

Déf.
33

Étudier le signe du produit $x(2x+1)$



Il est recommandé de représenter ces intervalles au moyen d'un axe.

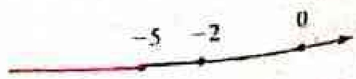
Prop.
72

Si $a>0$ et $b>0$
$\ln a+\ln b=\ln(ab)$

Prop.
74

$\ln u=\ln v \iff u=v.$
Penser que ce réel est bien élément de l'ensemble de définition.

Prop.
73



88 **Énoncé**

Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $\begin{cases} 5 \ln x + 2 \ln y = 8 \\ 4 \ln x - 3 \ln y = 11. \end{cases}$

Solution

$\ln x$ et $\ln y$ existent si : $x > 0$ et $y > 0$.
On peut résoudre ce système par changement de variables. Si on pose :

$$X = \ln x \quad \text{et} \quad Y = \ln y.$$

Déf. 33

X et Y peuvent être des **réels quelconques.**
$\ln x = y$ équivaut à $x = e^y$

On doit d'abord résoudre le système intermédiaire :

$\begin{cases} 5X + 2Y = 8 \\ 4X - 3Y = 11 \end{cases}$ dont la solution est $(X = 2;\ Y = -1)$

Prop. 75 Déf. 35

$X = 2$ conduit à $\ln x = 2$ d'où $x = e^2$

$Y = -1$ conduit à $\ln y = -1$ d'où $y = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

La solution du système donné est : $\left(e^2; \frac{1}{e}\right)$.

$e \approx 2{,}718$.
On peut, à la machine, calculer des valeurs approchées de e^2 et $\frac{1}{e}$.

89 **Énoncé**

$f(x) = \dfrac{12x + 16}{(x+2)^2}$. Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{(x+2)^2} + \dfrac{b}{x+2}$. En déduire les primitives de f.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$. Pour tout $x \neq -2$, on doit avoir

$$\frac{12x + 16}{(x+2)^2} = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}.$$

Déf. 14

Égalité de fonctions.

C'est-à-dire : $12x + 16 = a + b(x+2)$.
Ce qui implique : $b = 12$ et $a + 2b = 16$

Égalité de **fonctions polynômes** sur $\mathbb{R} - \{-2\}$.

d'où $\quad a = -8 \quad$ et $\quad b = 12$

$$f(x) = -\frac{8}{(x+2)^2} + \frac{12}{x+2}.$$

- $f_1(x) = \dfrac{-8}{(x+2)^2}$. Si l'on pose $u(x) = x + 2$ alors $u'(x) = 1$ d'où $f_1 = -8 \cdot u' \cdot u^{-2}$. Ses primitives s'écrivent : $F_1 = \dfrac{8}{u}$ d'où $F_1(x) = \dfrac{8}{x+2}$.

Prop. 71

$f_1(x) = -8 \cdot (x+2)^{-2}$

- $f_2(x)=\frac{12}{x+2}$. Si l'on pose $u(x)=x+2$ alors

$$f_2=12\,\frac{u'}{u}.$$

Les primitives de f_2 s'écrivent : $F_2=12\ln|u|$.
Sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ les primitives de f sont les fonctions F telles que :

$$F(x)=\frac{8}{x+2}+12\ln|x+2|+C.$$

Prop. 80

90 **Énoncé**

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tous réels a et b tels que $0<a<b$: $1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$.

En déduire un encadrement de $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$.

Solution

Si a et b sont deux réels strictement positif, la fonction ln étant continue et dérivable sur $]0;+\infty[$, on a $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Prop. 54

Si $a<x<b$, alors $\frac{1}{b}<f'(x)<\frac{1}{a}$.

$b-a>0$

Donc $\frac{1}{b}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{a}$

c'est-à-dire $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$

d'où $1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1.$

En posant, $a=4$ et $b=5$: $1-\frac{4}{5}<\ln\frac{5}{4}<\frac{5}{4}-1$

donc $0{,}2<\ln\frac{5}{4}<0{,}25.$

On trouve : $\ln\frac{5}{4}\approx 0{,}223\,144$

91 **Énoncé**

Soit la fonction f définie par : $f(0)=0$ et, pour $x\neq 0$: $f(x)=x\ln\frac{1}{|x|}$.
Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Solution

f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \longmapsto \ln\left(\frac{1}{|x|}\right)$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty;0[$.

Donc f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$.

- Étude de la **dérivabilité en $x=0$.**
  Posons
  $$\varphi(h)=\frac{1}{h}\left[f(0+h)-f(0)\right]=\ln\frac{1}{|h|}=-\ln|h|$$
  $$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\left[\varphi(h)\right]=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\left[\varphi(h)\right]=-\infty.$$
  Donc f **n'est pas dérivable** en $x=0$.
- L'étude de la **continuité en $x=0$** revient à comparer : $f(0)$ et $\lim_{x\to 0}\left[f(x)\right]$.

  Il est indispensable d'envisager le cas $x>0$ puis le cas $x<0$:
  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[f(x)\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left[-x\ln x\right]=0=f(0)$$
  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[f(x)\right]=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left[(-x)\ln(-x)\right]=0=f(0).$$
  Donc f est **continue** en $x=0$.

Déf. 25

On commence par la dérivabilité, car si f est **dérivable** en $x=0$, cela entraîne qu'elle est continue, alors que la réciproque est fausse.

Déf. 19

La **tangente** au point O, origine du repère, est donc l'axe $(O, \vec{j})$.

Sur $\mathbb{R}^*$:
$$f'(x)=-1-\ln|x|.$$

Déf. 25

$$\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0.$$

C'est l'exemple d'une fonction continue en un point et non dérivable en ce point.

92 **Énoncé**

> $f(x)=\ln\left(\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)$. Démontrer que la restriction de f à $]0;2[$ est une bijection de $]0;2[$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer f^{-1}.

Solution

f est définie et continue sur $]-\infty;0[$, $]0;2[$ et $]2;+\infty[$.

Calculons $f'(x)$ sur $]0;2[$.

Pour $0<x<2$: $\frac{x}{x-2}<0$ donc $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$.

Si $u(x)=\frac{x}{2-x}$, alors $u'(x)=\frac{2}{(2-x)^2}$

d'où
$$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}.$$

$\frac{x}{x-2}\neq 0$ si $x\neq 0$ et il faut

$$x-2\neq 0.$$

$$\left(\ln|u(x)|\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Prop. 79

Pour $0<x<2$: $x(2-x)>0$.
f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \left(\frac{x}{2-x}\right)=+\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{x}{2-x}\right)=0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)=-\infty.$$

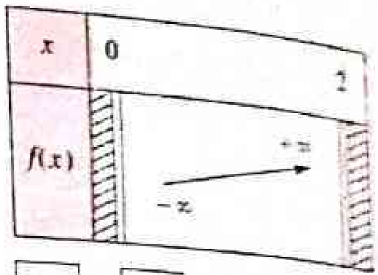
La restriction de f à $]0;2[$ est une bijection de $]0;2[$ sur $\mathbb{R}$.

$$y=\ln\frac{x}{2-x} \quad \text{équivaut à} \quad \frac{x}{2-x}=e^y$$

d'où $x=2e^y-xe^y$ donc $x(1+e^y)=2e^y$

$$x=\frac{2e^y}{1+e^y}.$$

Donc $$\overset{-1}{f}(X)=\frac{2e^X}{1+e^X}.$$



Prop. 33

Prop. 44

Il s'agit d'exprimer x en fonction de y pour déterminer $\overset{-1}{f}$.

Déf. 35

93 **Énoncé**

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x-\ln x};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x\ln x}\right);\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln|x+1|}{x+2}\right).$$

Solution

1) $f_1(x)=\dfrac{2x+3}{x-\ln x}$. f_1 est définie sur $]0;+\infty[$.

On peut donc chercher $\lim\limits_{+\infty} f_1$.

On va essayer de faire apparaître la forme :

$$\frac{\ln u}{u}.$$

Divisons numérateur et dénominateur par x.

$$f_1(x)=\frac{2+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{\ln x}{x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0^+$

donc $$\lim_{+\infty} f_1=+2.$$

On ne peut pas trouver directement

$\lim (x-\ln x)$

C'est une forme indéterminée.

Prop. 76

La droite d'équation $y=2$ est asymptote à la courbe de f_1.

2) $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x \ln x}$.

$$\lim_{+\infty} (x^2 - 1) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} (x \ln x) = +\infty.$$

Divisons numérateur et dénominateur par x^2.

$$f_2(x) = \frac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{\ln x}{x}};$$

Prop. 76

Prop. 27 Prop. 28

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

donc $\quad \mathbf{\lim_{+\infty} f_2 = +\infty.}$

3) $f_3(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{x+2}$. f_3 est définie pour $x \neq -1$.

$$f_3(x) = \frac{\ln|x+1|}{|x+1|} \times \frac{|x+1|}{x+2}.$$

Or, si l'on suppose $x > -1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|x+1|}{x+2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) = 0$$

d'où $\quad \mathbf{\lim_{+\infty} f_3 = 0.}$

Fonction composée :

$u = x + 1$.

$\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \dfrac{\ln u}{u}$.

$\lim_{x \to +\infty} (u) = +\infty$.

94 Énoncé

Étudier les limites :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\ln(x^2 - 3x + 1)}{x}\right); \quad \lim_{x \to e} \left(\frac{\ln x - 1}{x - e}\right); \quad \lim_{x \to 3} \left(\ln \frac{x^2}{|x^2 - 9|}\right).$$

Solution

1) $f_1(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \ln(x^2 - 3x + 1)$; f_1 est définie sur

$$\left]-\infty; 0\right[\cup \left]0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right[.$$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ pour

$\alpha = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ou $\beta = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

On peut chercher $\lim\limits_{0} f_1$.

$$f_1(x) = \frac{\ln(1 + (x^2 - 3x))}{x^2 - 3x} \times \frac{x^2 - 3x}{x}$$
$$= \frac{\ln(1 + h)}{h} \times (x - 3).$$

Utiliser :

$\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+h)}{h}\right) = 1.$

$h = x^2 - 3x$. $\lim\limits_{x \to 0} (h) = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+h)}{h}\right) = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} (x-3) = -3$ d'où $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -3.$

Prop. 77

La droite d'équation $y = -3$ est asymptote à la courbe de f_1.

2) $f_2(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$; f_2 est définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{e\}$.

Posons $x = e + h$ $\lim\limits_{x \to e} (h) = 0$.

La fonction $u : x \longmapsto \ln x$ est dérivable en $x = e$ et la dérivée en e est $\dfrac{1}{e}$.

Déf. 19

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{\ln(e+h) - \ln e}{h}\right] = \dfrac{1}{e} = \lim\limits_{x \to e} f_2(x)$.

La droite d'équation $y = \dfrac{1}{e}$ est asymptote à la courbe représentative de f_2.

3) $f_3(x) = \ln \dfrac{x^2}{|x^2 - 9|}$; f_3 est définie sur

$$\mathbb{R} - \{3;\ -3;\ 0\}.$$

$\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$ et $\lim\limits_{x \to 3} |x^2 - 9| = 0^+$

Prop. 33

donc $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{x^2}{|x^2 - 9|}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 3} f_3(x) = +\infty$.

95 **Énoncé**

$$g(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

1) Étudier les variations de g et le signe de $g(x)$. Tracer la courbe de g.

2) Démontrer que l'équation $x \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x} - \dfrac{1}{2} x = 0$ a une solution unique dans l'intervalle $[1;\ e]$.

Solution

1) g est définie, continue et dérivable sur $]0;\ +\infty[$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

d'où le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$	

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. $g(x) = \dfrac{1}{x}(1 + x \ln x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \ln x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$

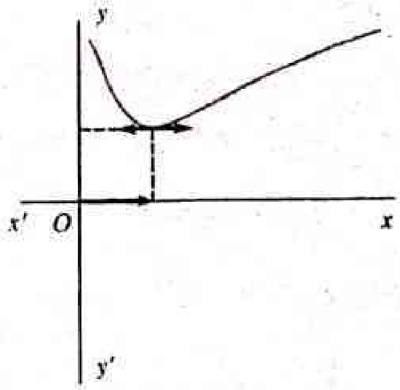
donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$.

Pour tout $x>0$, $g(x)>1$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln x}{x}\right)=0.$$

Prop. 76

L'axe $y'y$ est une asymptote et la courbe de g a une branche parabolique de direction $x'x$.



2) Pour étudier les solutions de cette équation, étudions f définie par

$$f(x)=x \ln\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2}x \quad \text{avec} \quad x>0.$$

f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\ln\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}g(x).$$

Puisque $g(x)$ est strictement positive sur $]0;+\infty[$, f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g=f'$	//////	$+$	
f	////// $-\infty$	0 ↗	$+\infty$

Étudions les limites de f à $(+\infty)$ et à $(-\infty)$.

$$f(x)=\frac{1}{2}x\left(\ln x+\frac{\ln x}{x}-1\right) \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0.$$

Donc $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$

$\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$ pour $x>0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{2}x\ln x\right)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{1}{2}\ln x\right)=-\infty.$$

Prop. 76 Prop. 27

Donc $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$.

f est donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Il existe donc un **réel positif** α **unique** tel que $f(\alpha)=0$

$\ln e=1$.

$$f(1)=-\frac{1}{2}; \quad f(e)=\frac{e}{2}+\frac{1}{2}-\frac{e}{2}=\frac{1}{2}.$$

Prop. 44 Prop. 42

$f(1)\cdot f(e)<0$ donc α est compris entre 1 et e.

96 Énoncé

$f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$. Étudier cette fonction.

Démontrer que le point $A\left(\frac{3}{4};\ln 2\right)$ est centre de symétrie de la courbe représentative. Tracer cette courbe.

Solution

f est définie et continue pour $(2x+1)(x-2)>0$ c'est-à-dire sur

$$\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{2}\right[\cup\,]2,\,+\infty[.$$

$$u(x)=\frac{2x+1}{x-2}=\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

pour $x\neq 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
f			//////	

- $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=2$ donc $\lim\limits_{+\infty}(\ln\circ u)=\ln 2$

  et $\lim\limits_{-\infty}(\ln\circ u)=\ln 2.$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} u(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty$

  $\lim\limits_{\substack{x\to -1/2\\ x<-1/2}} u(x)=0$ avec $u(x)>0$

  donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1/2\\ x<-1/2}} f(x)=-\infty.$

  Les droites d'équations : $y=\ln 2$; $x=2$; $x=-\frac{1}{2}$ sont des asymptotes pour la courbe de f.

Prop. 33

Prop. 79

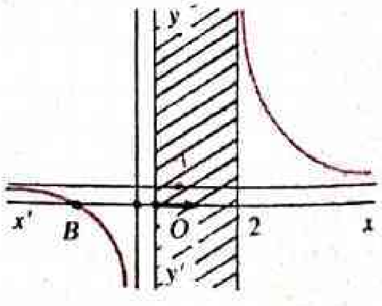
- f est **dérivable** sur son ensemble de définition et

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{-5}{(x-2)(2x+1)}.$$

$$u'(x)=\frac{-5}{(x-2)^2}.$$

  $f'(x)<0$ pour x décrivant l'ensemble de définition. D'où les variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'		$-$		//////		$-$	
f	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	//////	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$



- $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$. Un point M de coordonnées $(x,\,y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ a pour coordonnées $(X,\,Y)$ dans $(A,\vec{i},\vec{j})$ telles que

$$x=X+\frac{3}{4}\qquad y=Y+\ln 2.$$

  L'équation $y=f(x)$ devient :

$$Y+\ln 2=\ln\left(\frac{2\left(X+\frac{5}{4}\right)}{X-\frac{5}{4}}\right)\text{ d'où }\;Y=\ln\left(\frac{X+\frac{5}{4}}{X-\frac{5}{4}}\right).$$

Prop. 64

La courbe de f est donc aussi la courbe, dans le nouveau repère d'origine A, de la fonction F telle que : $F(X) = \ln\left(\dfrac{4X+5}{4X-5}\right)$

$D_F = \left]-\infty; -\frac{5}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$

$$F(-X) = \ln\left(\frac{-4X+5}{-4X-5}\right) = \ln \frac{1}{\dfrac{4X+5}{4X-5}} = -F(X).$$

$\ln\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln k$

F est impaire donc A est centre de symétrie de la courbe.

Déf. 10	Prop. 4

Remarquons que $f(x) = 0$ si $\dfrac{2x+1}{x-2} = 1$ c'est-à-dire $x = -3$. La courbe coupe $x'x$ en $B(-3; 0)$ avec, en ce point, une tangente de pente $\left(-\dfrac{1}{5}\right)$.

$\ln a = 0 \iff a = 1.$

97 **Énoncé**

Étudier la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$ et tracer sa courbe représentative.
Démontrer que la droite D d'équation $x = 2$ est axe de symétrie. Discuter des nombres des solutions de l'équation

$$\ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right) = k.$$

Solution

$x^2 - 4x = x(x-4)$
$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$.

$u(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-1)(x-3)}$. Il faut que $u(x) > 0$.
On trouve

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]1; 3[\cup]4; +\infty[.$$

Déf. 33

x		0		1		3		4	
$x(x-4)$	+	0	−		−		−	0	+
$(x-1)(x-3)$	+		+	0	−	0	+		+
$u(x)$	+	0	−	‖	+	‖	−	0	+

• **Limites :** $\lim\limits_{x \to +\infty} (u(x)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2}\right) = 1$

et $\lim\limits_{-\infty} u = 1$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = \ln 1 = 0$

et $\lim\limits_{-\infty} f = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} u(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} u(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} f(x) = -\infty$.

Limite pour une fonction composée.

- **Dérivée :** $f(x)=\ln\big(u(x)\big)$ donc $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$,

$$u'(x)=\frac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$$

d'où $$f'(x)=\frac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}.$$

$[\ln(u)]'=\dfrac{u'}{u}$

Prop. 79

Attention à ce calcul de $f'(x)$. Toute la suite en dépend.

Le **signe** de $f'(x)$ est donc celui de $(x-2)\times u(x)$. Sur l'ensemble de définition, $u(x)>0$, donc D_f, le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-2)$:

$f'(x)=0 \iff x=2$ et $2\in D_f$

$f'(x)>0 \iff x\in\,]2,+\infty[\,\cap D$

$f'(x)<0 \iff x\in\,]-\infty;2[\,\cap D.$

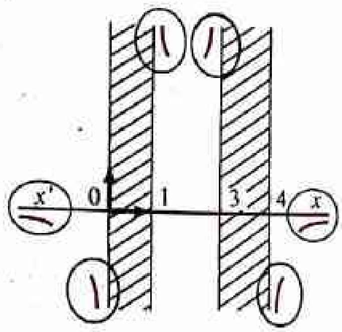
Rechercher le plus de simplicité possible pour l'étude du signe de $f'(x)$. Penser à **signe** plutôt qu'à **inéquation.**

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		0	1		2		3	4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	~~$+$~~	0	$+$	‖	‖	$+$	
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	‖ $+\infty$	↘	α	↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	↗	0

Déf. 29

Déf. 30



La courbe aura pour **asymptotes** l'axe des x, et les quatre droites d'équations respectives : $x=0$; $x=1$; $x=3$; $x=4$

$$\alpha=f(2)=2\ln 2\approx \mathbf{1{,}39}.$$

Avant même de tracer la courbe démontrer que la droite D d'équation $x=2$ est un **axe de symétrie.** Pour cela, faisons un changement de repère en prenant pour nouvelle origine A, un point de D, par exemple :

Prop. 64

$$A(2;0).$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA} \text{ conduit à } \begin{cases} X=x-2\\ Y=y\end{cases}$$

si (x, y) sont les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le nouveau repère $(A,\vec{i},\vec{j})$. Ces changements de variables : $x=X+2$ et $Y=y$

Cette méthode est à utiliser systématiquement pour la recherche d'un centre ou d'un axe de symétrie.

dans l'équation : $y=\ln\left(\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$

conduit à la nouvelle équation :

$$Y=\ln\left[\frac{(X+2)^2-4(X+2)}{(X+2)^2-4(X+2)+3}\right]=\ln\left(\frac{X^2-4}{X^2-1}\right).$$

Pour le tracé de la courbe, calculer un certain nombre de valeurs de $f(x)$ pour $x>2$, et compléter par *symétrie.*

La courbe de f, dans le nouveau repère, est la représentation de la **nouvelle fonction** g :

$$X \longmapsto \ln\left(\frac{X^2-4}{X^2-1}\right).$$

$G(-\alpha)=G(\alpha)$ donc G est paire; dans ce repère, le nouvel axe $(A, \vec{j})$ est donc axe de symétrie de la courbe. C'est la droite D.

Déf. 9 | Prop. 3

- **Équation** $f(x)=k$.

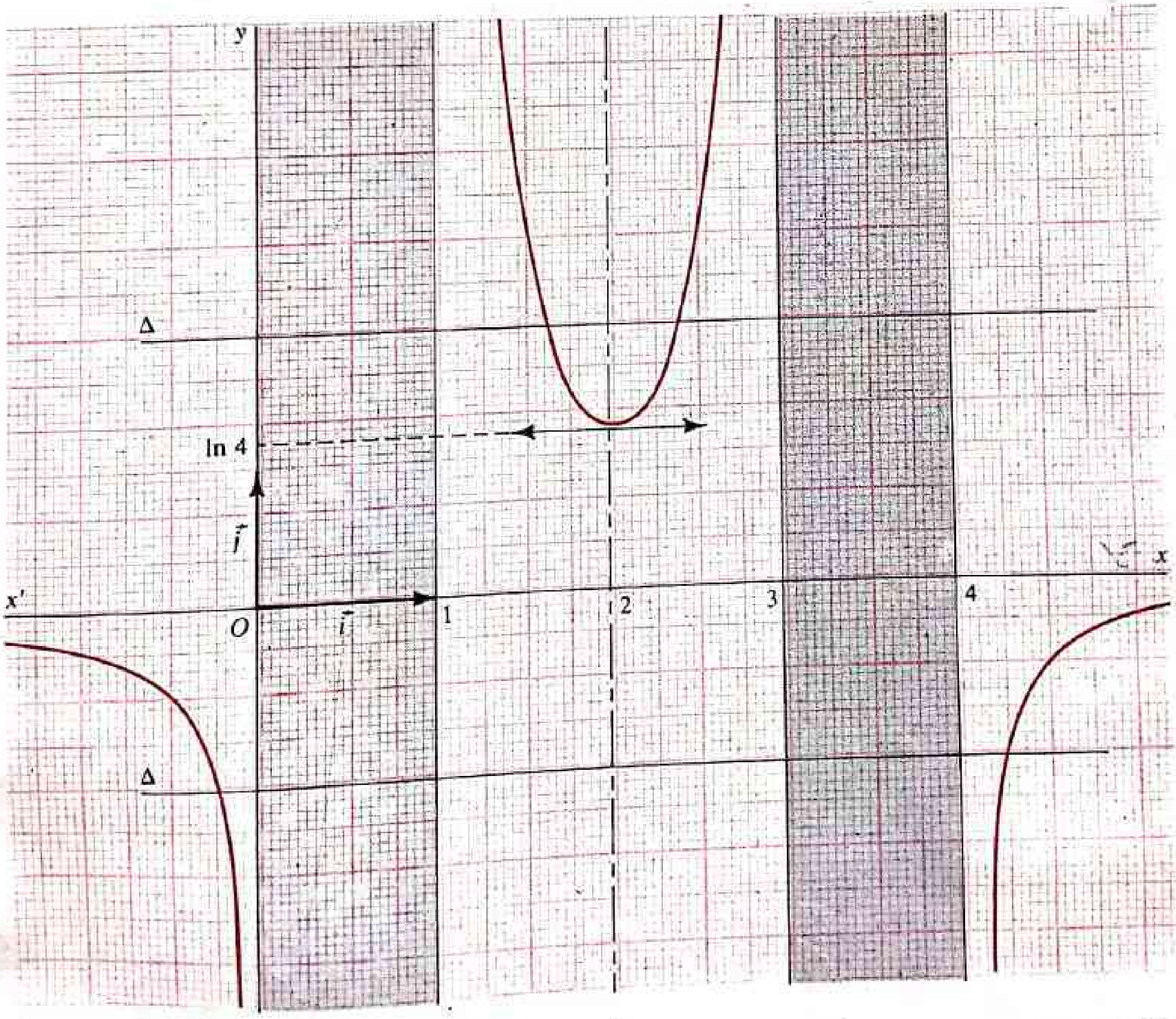
Il s'agit d'étudier graphiquement l'intersection de la courbe de f et d'une *droite variable* Δ d'équation $y=k$ parallèle à $x'x$.

Compte tenu de la continuité de f et de ses variations :

si $k<0$ ou $k>\ln 4$: Δ coupe C en deux points donc l'équation a deux solutions.

Si $0 \leqslant k < \ln 4$: Δ ne coupe pas C et l'équation n'a pas de solution.

Pour $k=\ln 4$ l'équation a une solution (double) : $x=2$.



98 **Énoncé**

$f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Étudier $\lim\limits_{0} f$ en utilisant un développement limité.

Solution

f est définie sur $]-1,\ 0[\cup]0;\ +\infty[$.
On sait que
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon=0.$$
D'où
$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)=-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+x\varepsilon(x)$$
donc
$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\frac{1}{2}.$$
On pourrait définir g, prolongement de f par continuité en $x=0$ avec $g(0)=-\frac{1}{2}$, et pour $x>-1$ et $x\neq 0$: $g(x)=f(x)$.

Prop. 58 (5)

f n'est pas définie en $x=0$ mais on peut néanmoins utiliser un développement limité au voisinage de 0.

99 **Énoncé**

$g(x)=\ln(\cos x)$. Écrire un développement limité de g en $x=0$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ et déterminer la limite en $x=0$ de $\dfrac{g(x)}{3x^2}$.

Solution

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon_1=0.$$
Posons
$$h=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_1(x).$$
On a $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$. Or
$$\ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+h^3\varepsilon_2(h) \text{ avec } \lim_{0}\varepsilon_2=0$$
$$h^2=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+x^6\cdot\alpha(x) \quad\text{et}\quad \lim_{0}\alpha=0$$
$$h^3=-\frac{x^8}{8}+\frac{x^8}{32}+x^8\cdot\beta(x) \quad\text{et}\quad \lim_{0}\beta=0.$$

Revoir Prop. 58 (3) et (5)

Dans l'écriture de h^2, gardons les deux premiers termes, en x^2 et x^4. De même dans h^3, gardons les seuls termes en x^8.
Expliciter $\alpha(x)$ pour contrôler que $\lim\limits_{0}\alpha=0$.

On a donc, compte tenu du développement de $\ln(1+h)$, en conservant les termes de degré inférieur à 5 :

$$g(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\gamma(x) \quad \text{et} \quad \lim_0 \gamma = 0.$$

Donc $$u(x) = \frac{g(x)}{3x^2} = -\frac{1}{6} - \frac{x^2}{24} + \frac{x^2}{3}\gamma(x)$$

et $$\lim_{x \to 0} u(x) = -\frac{1}{6}.$$

100 **Énoncé**

Écrire un développement limité de $\ln x$ en $x=2$ puis en $x=e$.

Solution

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\varepsilon_1(u) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon_1 = 0.$$

Prop. 58 (5)

$\boxed{x=2.}$ Posons $x = 2+h = 2\left(1+\frac{h}{2}\right)$

$h = x-2$

$$\ln x = \ln\left[2\left(1+\frac{h}{2}\right)\right] = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

donc $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 0$

d'où

$$\ln x = \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{h^3}{8}\right) + h^3\varepsilon_2(h)$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + (x-2)^3 \cdot \varepsilon_3(x).$$

$$\begin{tikzcd} h \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \frac{h}{2} \arrow[r] & \varepsilon_2(h) \end{tikzcd}$$

$$\lim_{x \to 2} \varepsilon_3(x) = \lim_{h \to 0} \varepsilon_2(h) = 0$$

$\boxed{x=e.}$ Posons $x = e+h = e\left(1+\frac{h}{e}\right)$.

On trouve de même

$$\ln x = 1 + \frac{x-e}{e} - \frac{(x-e)^2}{2e^2} + \frac{(x-e)^3}{3e^3} + (x-e)^3 \cdot \alpha(x)$$

avec $$\lim_{x \to e} \alpha(x) = 0.$$

D'AUTRES POUR CHERCHER...

■ Questions diverses. Limites

101

Énoncé

Quel est l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto \ln(x^2-4)$; $g : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x^2-4}{x+1}\right)$; $h : x \longmapsto \ln\left|\dfrac{x^2-4}{x+1}\right|$?

102

Énoncé

Trouver l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f : x \longmapsto \ln\sqrt{x^2+4x-5}$; $g : x \longmapsto \ln\sqrt{x^4-16}$; $h : x \longmapsto \ln\left|\dfrac{2x}{x^2-9}\right|$.

103

Énoncé

Résoudre chacune des équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(x+1)+\ln(x+5)=\ln 96$.

b) $2\ln(x-1)-\ln(x+1)=3$.

c) $\ln 24+\ln(3-x)=\ln(x+1)+\ln(25x-49)$.

Indication

a) $\ln(x+1)(x+5)=\ln 96$ d'où $(x+1)(x+5)=96$.

104

Énoncé

Résoudre chacune des équations suivantes :

a) $\ln x+\ln(11-x)=\ln(2x^2)$.

b) $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln|4x^2+3x-7|$.

105

Énoncé

Résoudre $4(\ln x)^4-5(\ln x)^2+1=0$.

Indication

Résoudre d'abord $4X^4-5X^2+1=0$ avec $X=\ln x$.

106

Énoncé

Résoudre

a) $\begin{cases} 5\log_2 x+2\log_2 y=8 \\ 4\log_2 x-3\log_2 y=11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7(\log_y x+\log_x y)=50 \\ xy=256. \end{cases}$

Indication

Revoir la définition de $\log_a x$. *a*) $(x, y) = \left(4; \frac{1}{2}\right)$;
b) $(x, y) = (2; 2^7)$ ou $(x, y) = (2^7; 2)$.

107 **Énoncé**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

a) $\ln(3-x) < \ln(2x+5)$.

b) $\ln 24 + \ln(3-x) < \ln(x+1) + \ln(25x-49)$.

c) $1 + \ln(x+3) > \ln(x^2+2x-3)$.

Indication

Pour c), penser à remplacer 1 par $\ln e$; ln est croissante.

108 **Énoncé**

$h(x) = \frac{4}{x^2-4}$. *Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que* $h(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$.
Déterminer les primitives de $h(x)$.

Indication

Voir exercice **89**; $a = 1$; $b = -1$.

109 **Énoncé**

$f(x) = \frac{-x^2+2x+11}{x^2-2x-3}$. *Montrer que* $f(x)$ *peut se mettre sous la forme*

$f(x) = -1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-3}$. *Déterminer la primitive de f qui s'annule pour* $x = 5$.

110 **Énoncé**

Donner un développement limité à l'ordre 2 en $x = 0$ *de* $\ln(x^2+3x+3)$ *puis de* $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ *en* $x = 0$.

Indication

$\ln(x^2+3x+3) = \ln\left[3\left(1 + x + \frac{x^2}{3}\right)\right] = \ln 3 + \ln(1+h)$ avec $h = x + \frac{x^2}{3}$. (Ex. 99)

$\frac{\sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x - x}{x}$. Utiliser un développement limité de $\sin x$.

111

Énoncé

$f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-9}\right)$. *Étudier les limites aux bornes des intervalles de définition.*

Indication

$D=]-\infty;\ -3[\cup]3;\ +\infty[\quad \lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f=0\quad \lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f=+\infty.$

112

Énoncé

Étude de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x\ln x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\ln(x^2-1)$; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2-1)\ln(x^2-1)$.

Indication

R : $(+\infty)$; $(+\infty)$; 0.

Études de fonctions

113

Énoncé

$g(x)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$. *Étudier les variations de g et démontrer que g est impaire.*

Indication

$D=\mathbb{R}-\{1;\ -1\}$. $\lim\limits_{+\infty} g=\lim\limits_{-\infty} g=0$.

114

Énoncé

$g(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. *Étudier les variations de g et tracer la courbe.*

Indication

$D=]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[\quad f'(x)=\dfrac{-(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x}.$

115

Énoncé

$f(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

Démontrer que f est impaire, étudier f et tracer sa courbe.

Indication

$f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

116

Énoncé

$p(x)=x+1+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$. Calculer $p'(x)$. Démontrer que la droite d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe de p. Préciser les autres asymptotes. Trouver un centre de symétrie.

Indication

$p'(x)=\dfrac{2x^4-7x^2+3}{2x^2(x^2-1)}$. $A(0,\ 1)$ est centre de symétrie.

117

Énoncé

$f(x)=\ln\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$ avec $ac\neq 0$. *Démontrer que la courbe de f présente un centre de symétrie A de coordonnées* $\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right);\ \ln\left|\dfrac{a}{c}\right|\right)$.

Indication

Changement de variable. Voir exercice **96.**

118

Énoncé

Étudier les variations et le signe de $g(x)=(1+x)(\ln(1+x))^2-x^2$ et en déduire les variations de f telle que $f(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$.

Indication

Calculer $g'(x)$ puis $g''(x)$. $g''(x)=\dfrac{2\ln(1+x)-2x}{1+x}$ $g''(x)\leqslant 0$ sur $]-1,\ +\infty[$

g est croissante sur $]-1,\ 0]$ et décroissante sur $]0,\ +\infty[$. Le signe de la dérivée de f est donné par le signe de g.

119

Énoncé

$f(x)=\dfrac{\ln|x-1|}{\ln|x+1|}$ et $g(x)=\dfrac{\ln|x+1|}{\ln|x-1|}$. *Préciser les ensembles de définition de f et g. En quels points les courbes de f et g se coupent-elles?*

DES EXERCICES CORRIGÉS

120 Énoncé

Résoudre :

a) $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x} - 19e^x + 30 = 0$.

b) $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x+2} - \frac{1}{2}(e^{x+2}) - \frac{3}{2}e^2 \geqslant 0$.

Solution

a) • Posons $X = e^x$. Il faut alors résoudre :

$$X^3 - 19X + 30 = 0.$$

$e^{3x} = (e^x)^3$

$(X-2)(X^2+2X-15) = 0$

Les racines sont $X_1 = 2$; $X_2 = 3$; $X_3 = -5$.
$e^x = 2$ donne $x = \ln 2$.
$e^x = 3$ donne $x = \ln 3$.
$e^x = -5$ n'a pas de solution

Déf. 35

d'où $\quad S = \{\ln 2; \ln 3\}$.

b) • Posons $X = e^x$.

$$e^{2x+2} = e^2 \times e^{2x} = e^2X^2$$
$$e^{x+2} = e^2X.$$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

$X = e^x$ donc $X > 0$.

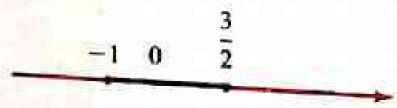
En multipliant par 2 et en divisant par e^2, on a : $\quad 2e^{2x} - e^x - 3 \geqslant 0$.

Prop. 85

Résolvons : $\quad 2X^2 - X - 3 \geqslant 0$

c'est-à-dire $\quad (X+1)(2X-3) > 0$

sans oublier que X est **positif.**



On est conduit à $X \geqslant \frac{3}{2}$ c'est-à-dire $e^x \geqslant \frac{3}{2}$ donc $x \geqslant \ln \frac{3}{2}$. $\quad S' = [\ln \frac{3}{2}; +\infty[$.

121 Énoncé à faire

Le radon est un gaz radioactif qui se désintègre avec le temps.
Si m est une masse de radon un certain jour (origine), x jours plus tard la masse $f(x)$ est donnée par $f(x) = m \cdot e^{-0,18x}$ (x en jours).

1) Quelle est la variation de la masse en 1 jour?
2) Étudier f et en donner une représentation graphique, x décrivant $\mathbb{R}^+$.
3) On appelle *période* le temps au bout duquel la masse a diminué de moitié. Calculer la période du radon.

Solution

1) $f(x+1) = m \cdot e^{-0,18(x+1)} = m \cdot e^{-0,18x - 0,18}$

$f(x+1) = m \cdot e^{-0,18x} \times e^{-0,18}$.

$f(x+1) = f(x) \times e^{-0,18} \simeq 0,835 f(x)$.

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ **Prop. 85**

$e^{-0,18} \simeq 0,835$

D'un jour à l'autre la masse de radon est multipliée par 0,835.

$$0,835 = 1 - 0,165.$$

$0,165 \longrightarrow 16,5\ \%$.

Il y a donc une *diminution* de la masse de **16,5 % par jour.**

Pour $n \in \mathbb{N}$, f est une suite géométrique de raison 0,835.
Ici, nous étudions f avec x **décrivant** $\mathbb{R}^+$.

2) Ici f est définie pour $x \geqslant 0$: $f(0) = m$

$f'(x) = -0,18 m e^{-0,18x}$ $\quad \forall x > 0 \quad f'(x) < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x}) = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$.

Quelques valeurs :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	m	0,835 m	0,697 m	0,582 m	0,486 m	0,406 m

m : masse *initiale*.

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
f	$m \searrow 0$

3) Il faut résoudre l'équation :

$f(x) = \frac{1}{2} m$ c'est-à-dire $m \cdot e^{-0,18x} = 0,5m$

d'où $e^{-0,18x} = 0,5$

$$-0,18x = \ln(0,5) = -\ln 2$$

Déf. 35

donc $x = \dfrac{\ln 2}{0,18} \simeq \dfrac{0,693}{0,18} \simeq$ **3,85.**

La masse a diminué de moitié au bout de 3,85 jours, c'est-à-dire au bout de 92 heures environ.

La réponse n'est pas un naturel.

122 **Énoncé**

Soit f telle que $f(x) = (x-1)e^x$.

1) Étudier ses variations et tracer la courbe représentative.
2) Quel est le nombre des solutions de l'équation : $(x-1)e^x = m$ selon les valeurs du paramètre m.
3) Déterminer le réel a pour que F définie par $F(x) = (ax+b)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Solution

1) f est définie sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (xe^x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} (e^x) = 0$$

Prop. 86

d'où $$\lim_{-\infty} f = 0$$

$$f'(x) = xe^x.$$

$\forall x \quad e^x > 0.$

Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de x.
D'où le tableau ci-contre qui donne les variations de f.
La courbe admet l'axe $x'x$ comme asymptote à $(-\infty)$.
En $A(0; -1)$ $\quad f'(0) = 0$.
En $B(1; e)$ $\quad f'(1) = e$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2) f est continue sur $\mathbb{R}$. Compte tenu des variations de f, en coupant la courbe par une droite variable parallèle à $x'x$, d'équation $y = m$, on montre que l'équation $f(x) = m$:

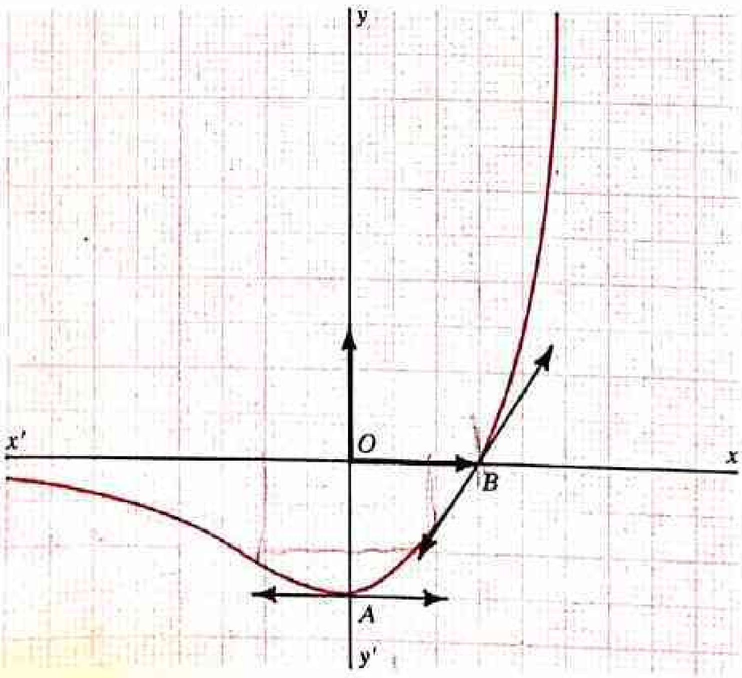
— n'a pas de solution si $m < -1$;
— a 2 solutions si $-1 < m < 0$;
— a 1 solution si $m \geqslant 0$.

3) $F(x) = (ax + b)e^x$.
Calculons $F'(x)$

$$F'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x.$$

f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle a donc des primitives.

Revoir la définition d'une primitive. Déf. 32



F en est une si et seulement si, pour tout réel x,

$$F'(x)=f(x)$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (ax+a+b)\,e^x=(x-1)\,e^x$$

donc, puisque $e^x \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ax+a+b=x-1$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{a=1} \quad \text{et} \quad \mathbf{b=-2.}$$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$G(x)=(x-2)\,e^x+C.$$

Prop. 89

$F'=f$

équivaut à

$\forall x \in D : F'(x)=f(x)$.

Ce n'est pas une équation, mais une égalité d'applications.

Déf. 14

123 **Énoncé**

Soit la fonction f telle que $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

1) Démontrer que pour tout x réel : $|f(x)|<1$.
2) Démontrer que f est impaire.
3) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout x : $f^2(x)+f'(x)=1$.
4) Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique.
5) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;\,1[$. Déterminer $\overset{-1}{f}$.

Solution

1) Pour tout réel x :

$$e^{2x}>0 \quad \text{donc} \quad e^{2x}+1>0;$$

donc $\quad D_f=\mathbb{R}$.

$$1-f(x)=1-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{2}{e^{2x}+1}>0$$

donc $\quad \mathbf{1<f(x)}$

$$1+f(x)=1+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}>0$$

donc $\quad \mathbf{f(x)>-1.}$

Il en résulte que

$$-1<f(x)<1 \quad \text{donc} \quad |f(x)|<1.$$

Pour comparer 1 et $f(x)$ calculer $1-f(x)$

$|f(x)|<1$

équivaut à

$-1<f(x)<1$.

La courbe est donc située entre les deux droites d'équation $y=1$ et $y=-1$

2) Pour tout réel x : $x \in \mathcal{D}_f$ et $(-x) \in \mathcal{D}_f$.

$$f(-x)=\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}=\frac{e^{-2x}(1-e^{2x})}{e^{-2x}(1+e^{2x})}$$

$$f(-x)=\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}=-f(x) \text{ donc } f \text{ est } \mathbf{impaire.}$$

$e^{-a}\cdot e^{a}=1$.

Déf. 10 Prop. 4

3) $f'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$$f^2(x)=\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$f^2(x)+f'(x)=\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}=\frac{e^{4x}+2e^{2x}+1}{(e^{2x}+1)^2}$$
$$=\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^2}=1.$$

On a donc $f'(x)=1-f^2(x)$.

L'origine du repère est centre de symétrie de la courbe de f.

$$(e^{2x})'=2e^{2x}.$$

f est solution de *l'équation différentielle :*

$$y^2+y'=1.$$

4) Pour tout réel x : $f'(x)>0$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{e^{2x}\left(1-\dfrac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1+\dfrac{1}{e^{2x}}\right)}=\frac{1-\dfrac{1}{e^{2x}}}{1+\dfrac{1}{e^{2x}}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x})=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^{2x}}\right)=0$

Prop. 86

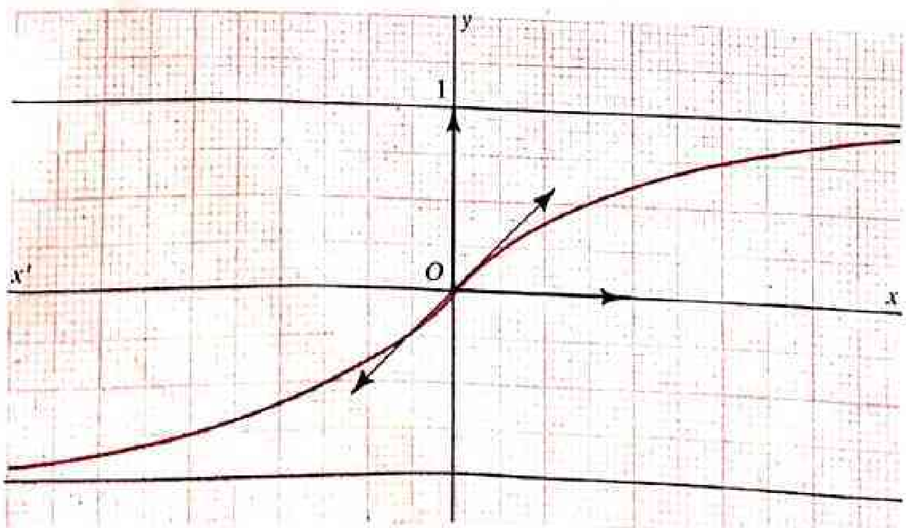
et $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\mathbf{1}.$$

Comme f est impaire : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\mathbf{-1}.$

La courbe aura pour asymptote les droites d'équation : $y=1$ et $y=-1$. L'origine du repère est centre de symétrie.

$f'(0)=\dfrac{4}{2^2}=1$. La tangente en O est la droite de pente 1.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	-1 ↗	1



5) f étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$ c'est-à-dire $]-1;+1[$.

$$y=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \quad \text{équivaut à} \quad ye^{2x}-e^{2x}=-1-y$$

d'où

$$e^{2x}(1-y)=1+y \qquad e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$$

c'est-à-dire

$$2x=\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad \text{et} \quad x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Donc $$\overset{-1}{f}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Prop. 44

Il s'agit d'exprimer x en fonction de y.

Déf. 35

Se souvenir que :

$$-1<y<1$$

donc $(1+y)(1-y)>0$.

124

Énoncé

a) $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$. Étudier les variations de f et son signe sur $\mathbb{R}^*$.

b) $g(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ pour $x\neq 0$ et $g(0)=0$.
Étudier la continuité et la dérivabilité de g en $x=0$. Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentative.

Solution

a) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{+\infty} f=\lim_{-\infty} f=2;$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=1.$$

$$f'(x)=-e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{2x+1}{x^3}\right).$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $-x(2x+1)$.
En $x=-\frac{w}{2}$: $f'(x)=0$ et $f(x)=1-\frac{1}{e^2}\approx 0{,}86$.
Ces variations de f, ainsi que la continuité de f sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ avec le fait que

$$\alpha=f\left(-\frac{1}{2}\right)>0$$

font que pour tout $x\neq 0$, $f(x)>0$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(e^{\frac{1}{x}})=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(e^{\frac{1}{x}})=+\infty$.

$x \longmapsto e^{\frac{1}{x}}$ a pour dérivée

$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$.

Prop. 89

Attention aux limites de f en $x=0$.

Pour $x>0$ écrire :

$$f(x)=e^u+ue^u+1$$

avec $u=\frac{1}{x}$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} u(x)=+\infty$.

Prop. 86

Pour $x<0$: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(e^{\frac{1}{x}})=0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$-$	
f	2	↘	α	↗ 1	‖ $+\infty$	↘	2

Scanned by CamScanner

Dans les deux cas $\lim\limits_{0} g = 0 = g(0)$.

g est donc continue en $x = 0$.
Pour $x \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{f(x)}{D(x)}.$$

Le signe de $g'(x)$ est donc celui de $f(x)$ étudié ci-dessus.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x) = 1.$$

g n'est **pas dérivable** en $x = 0$, mais au point correspondant, on aura deux demi-tangentes de pentes respectives 0 et 1.

$$\lim_{+\infty} g = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} g = -\infty.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{g(x)}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

et
$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(g(x) - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{4}.$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

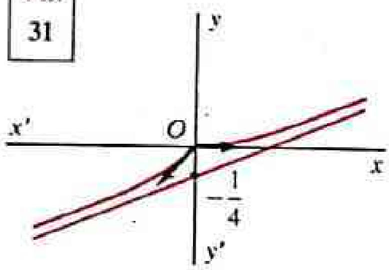
Prop. 55

Cette propriété évite un retour systématique à la définition

Déf. 19 Déf. 20

Rechercher une éventuelle asymptote oblique.

Déf. 31



125 Énoncé

Dans un traitement au phénol, certaines bactéries sont détruites. On suppose que le nombre y de survivants au bout de x heures est donné par :

$$y = K \cdot C^x.$$

1) Déterminer K et C sachant que, au départ il y a 434 bactéries et qu'au bout d'une demi-heure, il en reste 410.

2) Combien reste-t-il de bactéries au bout d'une heure? de 1 heure $\frac{1}{2}$? 275 minutes? 1 jour? 1 semaine?

3) Au bout de combien d'heures une seule bactérie est en survie?

Solution

1) Pour $x = 0$, $y = 434$:

donc $434 = K \cdot C^0$; $\mathbf{K = 434}$.

Pour $x = 0{,}5$, $y = 410$: $410 = 434 \times C^{0,5}$

donc $\sqrt{C} = \frac{410}{434}$; $C = \left(\frac{410}{434}\right)^2 \approx \mathbf{0{,}892}$.

D'où $\mathbf{y = 434 \times (0{,}892^x)}$.

On peut prévoir que $C < 1$ puisqu'il y a *diminution*.

2) On calcule y au moyen de la fonction

$$f(x)=434\,(0{,}892)^x.$$

$x=1$: $f(1)=434\times 0{,}892\approx 387.$

$x=1{,}5$: $f(1{,}5)=434\times 0{,}892^{1,5}\approx 366.$

275 min $=\dfrac{275}{60}$ h. $\quad x=\dfrac{275}{60}\approx$ **4,583** :

$$f(4{,}583)=434\times 0{,}892^{4,583}\approx 258.$$

1 jour = 24 h :

$$f(24)=434\times 0{,}892^{24}\approx 28.$$

1 semaine = 24 × 7 h = 168 h :

$$f(168)=434\times 0{,}892^{168}\approx 2\times 10^{-6}.$$

3) Résolvons l'équation :

$$434\times 0{,}892^x=1.$$

$$\ln 434+x\,\ln(0{,}892)=\ln 1$$

d'où $$x=-\frac{\ln 434}{\ln 0{,}892}.$$

On trouve $x\approx$ **53 h** environ.

Utiliser une calculatrice avec la touche $\boxed{y^x}$.

Au bout d'une semaine, il y a longtemps qu'il n'y a plus de bactéries!

Déf. 35

126 **Énoncé**

Étudier et représenter graphiquement la fonction

$$g : x \longmapsto x^x.$$

$a^x = e^{x\ln a}$

Solution

g est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
Sachant que $x=e^{\ln x}$, on a alors

$$g(x)=e^{x\ln x}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{+\infty} g=+\infty.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\ln x)=0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{0} g=1.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{x}\right)=+\infty$. La courbe présentera donc une branche parabolique.

$$g'(x)=(\ln x+1)\,e^{x\ln x}.$$

Le signe de $g'(x)$ est donc celui de

$$\ln x-\ln\frac{1}{e}.$$

Déf. 36 | Prop. 91 | Prop. 93

g pourrait être prolongée par continuité en $x=0$ à droite.

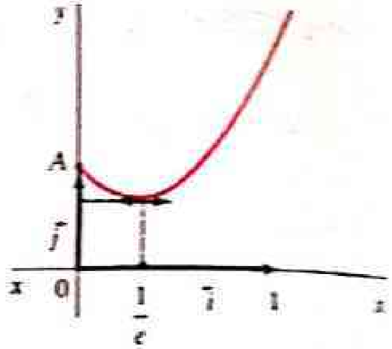
x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

$(x\ln x)' = (x)'\ln x + (\ln x)'x$
$= \ln x + 1.$

On trouvera $f\left(\frac{1}{e}\right)=\beta=\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}\approx 0{,}7$.

La courbe aura l'allure ci-contre. On précisera un certain nombre de points au moyen d'une calculatrice.

Le point $A(0;\,1)$ est une sorte de **point limite** qui ne fait pas partie de la courbe de g.



127 **Énoncé**

> $f(x)=(1-x)^n e^{\frac{x}{2}}$, n étant un naturel non nul.
>
> *a*) Démontrer que f est bornée sur l'intervalle $[0;\,1]$.
>
> *b*) Écrire les trois premiers termes du développement limité de f en $x=0$.

Solution

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x)^{n-1}\cdot e^{\frac{x}{2}}[-x+1-2n].$$

Dès que $n\geqslant 1$, $1-2n<0$.
Donc si $x\in[0;\,1]$; $x>1-2n$ donc

$$1-2n-x<0 \quad \text{et} \quad 1-x>0.$$

Donc $f'(x)<0$ sur $[0;\,1]$

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad f(1)=0.$$

Donc $\forall x\in[0;\,1]$; $0\leqslant f(x)\leqslant 1$.

x	0	1
f'	$-$	
f	$1 \searrow$	0

b) $e^u=1+u+\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon=0$, donc

Prop. 58 (6).

$$e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+x^2\alpha(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \alpha=0.$$

De plus, en développant $(1-x)^n$, on trouve comme premiers termes

Avec $\lim\limits_0 \beta=0$.

$$(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+x^2\cdot\beta(x).$$

En effectuant le produit $e^{\frac{x}{2}}\cdot(1-x)^n$ on a, comme premiers termes :

On néglige tous les autres termes de degré supérieur, puisque l'on s'intéresse seulement aux termes de degré 1 et 2.

$$1-nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{x}{2}-\frac{nx^2}{2}+\frac{x^2}{8}\cdots$$

d'où

$$f(x)=1+x\left(\frac{1}{2}-n\right)+x^2\left(\frac{1}{8}-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+x^2\varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_0 \varepsilon=0.$

D'AUTRES POUR CHERCHER

■ Questions diverses

128 **Énoncé**

Équations à résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{-2x+4}=\dfrac{8}{25}$. b) $4e^{2x}-4e^{x}-3=0$. c) $(4{,}5)^{2x}-(4{,}5)^{x}-3=0$.

Indication

a) $-2x+4=\ln\left(\dfrac{8}{25}\right)$; $x\approx 2{,}569$. *b*) Poser $X=e^{x}$: $\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$. *c*) Poser $u=4{,}5^{x}$.

129 **Énoncé**

Équations à résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{3x}-2e^{2x}-5e^{x}+6=0$. b) $e^{3u}-e^{2u}-9e^{u}+9=0$.

Indication

a) $\{0;\ln 3\}$. *b*) $\{0;\ln 3\}$.

130 **Énoncé**

Résoudre :

(1) $\begin{cases} e^{x}\cdot e^{2y}=e^{5/2} \\ 2xy=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \ln(x+2y)-\ln 2=\ln(8+x)+\ln 3 \\ e^{2x-1}\times e^{y+7}=1. \end{cases}$

Indication

(1) Solutions $\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{1}{8}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{8}\right)$.

131 **Énoncé**

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $9e^{-x}-4e^{x}\leqslant 0$. b) $e^{2x}-2\geqslant 0$.

Indication

a) On est conduit à $9X^2-4\leqslant 0$ avec $X>0$: $S=\left[\ln\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

b) $e^{2x}-2\geqslant 0$ équivaut à $e^{2x}\geqslant 2$ d'où $2x\geqslant \ln 2$.

132

Énoncé

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$; $g(x)=\dfrac{e^x}{2-e^x}$; $h(x)=\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}$.

Déterminer l'ensemble de définition, la dérivée et le signe de la dérivée de chaque fonction.

Indication

Pour f : $D=\mathbb{R}^*$ $f'(x)=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)<0$.

133

Énoncé

Démontrer que pour tout réel x : $\left|\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right|<1$.

Indication

Étudier le signe de $1-\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ et de $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}+1$.

134

Énoncé

Résoudre l'équation dans $\mathbb{R}$: $\ln(\ln e^{2x}-e^{-\ln x})=2-\ln x$.

Indication

Simplifier d'abord avec **P94.**

135

Énoncé

Une souche de bactéries est placée dans certaines conditions de culture : on observe que le nombre des bactéries double au bout de 24 heures.

1) *Comment s'exprime le nombre y des bactéries au bout de x jours?*
2) *Pour t en heures, on suppose que y est donné par :* $y=Ke^{\alpha t}$.
   Déterminer α *sachant que le nombre de bactéries double en 24 heures.*
3) *Au bout de combien de temps le nombre de ces bactéries est-il multiplié par 10?*

Indication

1) Suite géométrique de raison 2, de premier terme y_0, nombre initial de bactéries : $y=y_0 2^x$.
2) Pour $t=0$, $y_0=K$; pour $t=24$, $2y_0=y_0\cdot e^{24\alpha}$. En déduire α.

■ Études de fonctions

136 **Énoncé**

$f(x)=\dfrac{x-1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}$. *Étudier ses limites à* $(+\infty)$, *à* $(-\infty)$ *et en* $x=0$. *Calculer* $f'(x)$.

Indication

$\lim\limits_{+\infty} f=1$; $\lim\limits_{-\infty} f=1$. En $x=0$, deux limites : 0 et $(-\infty)$. $f'(x)=\dfrac{1}{x^3}\,e^{\frac{1}{x}}$.

137 **Énoncé**

$f(x)=e^{-x}\sin x$.

a) *Calculer* $f'(x)$; $f''(x)$.

b) *Démontrer que les solutions de* $f'(x)=0$ *sont les éléments d'une suite arithmétique de raison* π *et que leurs images par* f *sont les éléments d'une suite géométrique.*

Indication

b) La raison de la suite géométrique est $-\dfrac{1}{e^{\pi}}$.

138 **Énoncé**

Soit f_1 *et* f_2 *les deux fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par :*

$$f_1(x)=e^{x-2}+1;\quad f_2(x)=e^{-x+2}+1.$$

Leurs représentations graphiques dans P sont notées C_1 *et* C_2.

1) *Étudier* f_1 *et* f_2. *Tracer* C_1 *et* C_2. *Démontrer que* C_1 *et* C_2 *sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $x=2$.

2) *Démontrer que* f_1 *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur A à déterminer. Déterminer la bijection réciproque ainsi que sa dérivée.*

Indication

C_1 et C_2 ont un point commun et sont tangentes en ce point. Étudier la position de C_1 et de la droite $y=x$ au moyen des variations de $x \longmapsto f_1(x)-x$.

139 **Énoncé**

1) $f(x)=e^{2x}-e^{x}-2$. *Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.*

2) $g(x)=\left|e^{2x}-e^{x}\right|-2$. *Étudier les variations de g et tracer sa courbe.* *g est-elle dérivable en* $x=0$? *Est-elle continue en ce point?*

Indication

2) $e^{2x} \geqslant e^x$ équivaut à $2x \geqslant x$ d'où $x \geqslant 0$. Sur $\mathbb{R}^+$: $g(x)=f(x)$; sur $\mathbb{R}^-$: $g(x)=e^x-e^{2x}-2$. g n'est pas dérivable en $x=0$, mais elle est continue en ce point.

140 **Énoncé**

$g(x)=3x-3\ln|2e^x-1|$.

Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de g.

Indication

$D_g=\mathbb{R}-\{-\ln 2\}$ $\lim\limits_{+\infty} g=-3\ln 2$; $\lim\limits_{-\infty} g=-\infty$; $\lim\limits_{+\infty}(g(x)-3x)=0$; $\lim\limits_{-\ln 2} g=+\infty$.
Trois asymptotes d'équations : $x=-\ln 2$; $y=3x$; $y=-3\ln 2$.

141 **Énoncé**

La fonction f est définie par : $x>0 : f(x)=x\ln x$ $\quad x\leqslant 0 : f(x)=-xe^x$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x=0$.

Indication

f est continue en $x=0$ mais n'est pas dérivable; la dérivée à gauche est (-1).

142 **Énoncé**

Étudier et représenter graphiquement $g : x \longmapsto \ln(2^x+1)$.

Démontrer que g est bijective. Déterminer $\overset{-1}{g}$ *et sa valeur dérivée en* $x=\ln 2$.

Indication

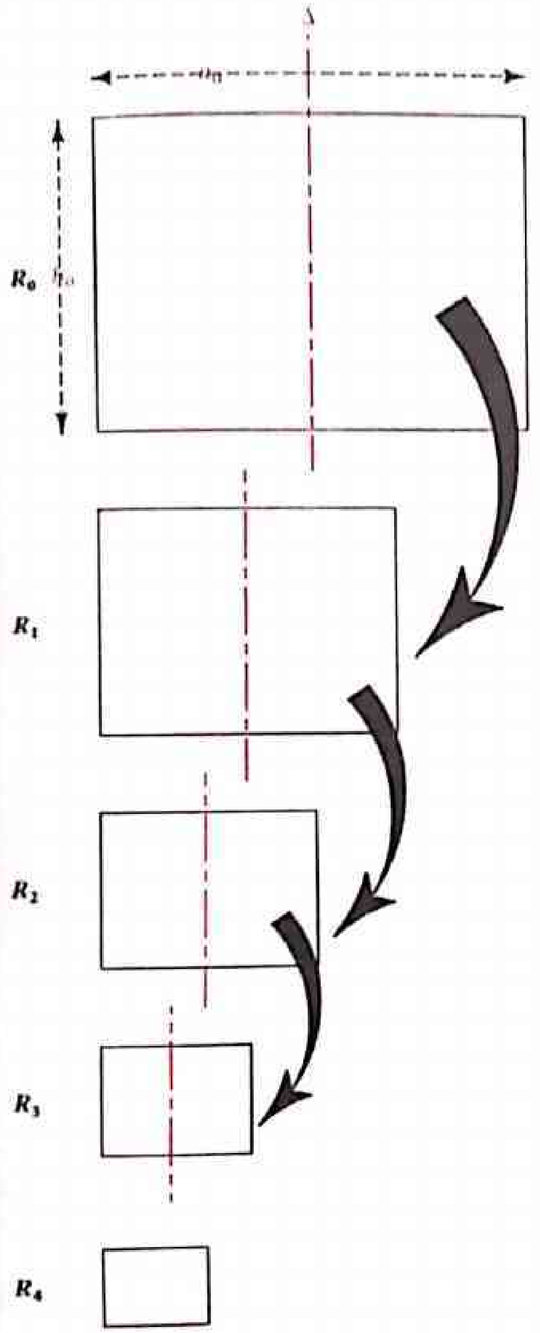
Deux asymptotes à la courbe de g.

143 **Énoncé**

Étudier et représenter graphiquement : $h : x \longmapsto x^{x-1}$.

Indication

$\lim\limits_{+\infty} h=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x)=+\infty$; $h(x)=e^{(x-1)\ln x}$.



En imprimerie, on utilise des **formats normalisés**, représentés par des rectangles R_0, R_1, R_2, ..., R_n.
Ces rectangles obéissent à des règles très précises. D'une part le **quotient** : $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même pour tous les rectangles; d'autre part le rectangle R_{n+1} est obtenu par pliage du rectangle R_n autour de la médiatrice Δ des grands côtés et découpage le long du pli (R_n *donne* donc deux rectangles R_{n+1}). Pour le rectangle R_n, désignons par a_n la longueur et b_n la largeur.

- **Traduction du pliage-découpage :**

$$a_{n+1} = b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

d'où $$(a_n, b_n) \longmapsto \left(b_n ; \frac{1}{2} a_n\right).$$

- **Condition sur les côtés :**

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n}{\frac{1}{2} a_n}$$

d'où $\dfrac{1}{2} a_n^2 = b_n^2$ donc $\dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$.

Le rapport des côtés est donc $\sqrt{2}$ pour tous les formats.

Le premier format A_0 est celui du rectangle R_0 d'aire 1 m².
Calculons les dimensions de R_0.
On sait que $a_0 = b_0\sqrt{2}$. L'aire s'écrit $a_0 b_0$ soit $b_0^2\sqrt{2}$.
En mm² : $b_0^2\sqrt{2} = 1\,000\,000$ donc

$$b_0 = \sqrt{\frac{1\,000\,000}{\sqrt{2}}} \quad \textit{(en mm)}.$$

On trouve $b_0 \approx$ **841 mm** et $a_0 \approx 841 \times \sqrt{2} \approx$ **1 189 mm.**
A_4 est le format commercial ordinaire : c'est celui du rectangle R_4 pour lequel :

$$a_4 = a_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{4} a_0 \approx \mathbf{297\ mm}$$

$$b_4 = \frac{1}{4} b_0 \approx \mathbf{210\ mm.}$$

C'est le format 21 × 29,7 (en cm) bien connu de ceux qui écrivent.

DES EXERCICES CORRIGÉS

144 Énoncé

En testant une certaine lame de verre, on a constaté que la lumière perd $\frac{1}{12}$ de son intensité en traversant cette lame.
Combien doit-on disposer de lames identiques pour que, au travers de l'ensemble, la lumière perde la moitié de son intensité?

solution

Si i désigne l'intensité lumineuse à *l'entrée*, avant la lame, à la sortie, on aura une intensité i' telle que

$$i' = i - \frac{1}{12}\,i = \frac{11}{12}\,i.$$

Supposons qu'à l'entrée l'intensité soit i_0.
Après la première lame, on a l'intensité :

$$i_1 = \frac{11}{12}\,i_0.$$

Après la seconde lame : $i_2 = \frac{11}{12}\,i_1 = \left(\frac{11}{12}\right)^2 i_0.$

Après la troisième lame : $i_3 = \left(\frac{11}{12}\right)^3 i_0.$

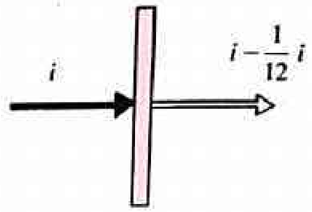
Donc, après la $n^{\text{ième}}$ lame, on a l'intensité i_n :

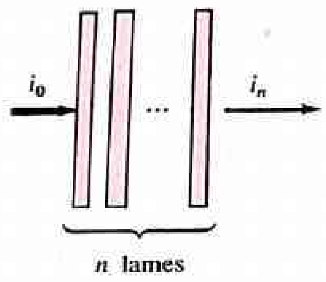
$$i_n = \left(\frac{11}{12}\right)^n \cdot i_0.$$

La suite i est une **suite géométrique** de premier terme i_0 et de raison $q = \frac{11}{12}$. Cette suite est décroissante et **convergente** vers zéro puisque $q < 1$.
L'intensité i_0 devient $\frac{1}{2}\,i_0$ pour n vérifiant :

$$\frac{1}{2}\,i_0 = \left(\frac{11}{12}\right)^n i_0 \quad \text{d'où} \quad n\left(\ln\frac{11}{12}\right) = \ln\frac{1}{2}.$$

On trouve $n \approx 7{,}97$.
C'est au-delà de la 8^{e} lame que la lumière perd la moitié de son intensité.





On suppose qu'il n'y a pas de *perte* entre deux lames consécutives.

Déf. 44

Prop. 110

Utiliser la fonction ln et votre calculatrice.

145 Énoncé

La suite u est définie par : $u_0 = 1$ et $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} - 3)$; on pose $v_n = u_n + 3$.
Démontrer que v est une suite géométrique.
Étudier la convergence de v_n puis de u_n.

Solution

$$v_n = \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{3}{2} + 3 = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(u_{n-1}+3)$$

$$v_n = \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

D'autre part $v_0 = u_0 + 3 = 4$. La suite v_n est donc une suite **géométrique** de premier terme $v_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

Cette suite est donc convergente et $\lim\limits_{+\infty} v_n = \mathbf{0}$.

Or, pour tout n : $u_n = v_n - 3$.

Donc la suite u_n est convergente et

$$\lim_{+\infty} u_n = -3.$$

$u_0 = 1$ d'où $v_0 = 4$
$u_1 = -1$ d'où $v_1 = 2$
$u_2 = -2$ d'où $v_2 = 1$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont décroissantes.

Prop. 110

Limite d'une **somme** de deux suites.

146 **Énoncé**

> La suite v est définie par : $v_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 0$: $v_{n+1} = \sqrt{2v_n + 35}$.
> Démontrer que tous ses termes sont positifs et que v est majorée par 7.
> Démontrer que v est strictement croissante.
> Démontrer que v est convergente et calculer sa limite.

Solution

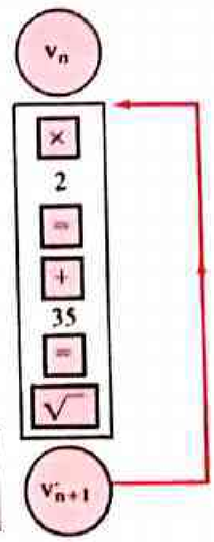
En utilisant une calculatrice, on trouve :

$$v_1 \approx 5{,}916; \quad v_2 \approx 6{,}843;$$
$$v_3 \approx 6{,}978; \quad v_4 \approx 6{,}997; \quad v_5 \approx 6{,}999\,5.$$

- v_0 est **positif.**
  Supposons que v_p soit un réel positif :
  $2v_p + 35 > 0$ donc v_{p+1} existe et est positif.
  Donc, pour tout n, v_n est positif : la suite v est **minorée par 0.**

- Démontrons par **récurrence** que : $\forall n \quad v_n < 7$
  $v_0 < 7$.
  Supposons : $v_p < 7$. On a alors
  $$2v_p < 14$$
  $$0 < 2v_p + 35 < 49$$
  $$\sqrt{2v_p + 35} < \sqrt{49}$$
  donc $$v_{p+1} < 7.$$
  Donc, pour tout n : $v_n < 7$.
  La suite v est donc **majorée** par 7. Elle est bornée.

A la calculatrice, ne pas *effacer* v_n pour calculer v_{n+1}.



Prop. 101

Déf. 40

Si A et B sont positifs $A < B \iff \sqrt{A} < \sqrt{B}$

- Démontrons par **récurrence** que, pour tout n : $v_{n+1} > v_n$. On a $v_1 > v_0$.
  Supposons : $v_p > v_{p-1}$ et comparons v_p et v_{p+1}

$$\left.\begin{array}{r} v_{p+1} = \sqrt{2v_p + 35} \\ v_p = \sqrt{2v_{p-1} + 35} \end{array}\right\} \quad \text{or} \quad v_p > v_{p-1}$$

  donc $$2v_p + 35 > 2v_{p-1} + 35$$
  d'où $$v_{p+1} > v_p.$$
  Ainsi, pour tout n : $\boldsymbol{v_{n+1} > v_n}$.

On pourrait aussi étudier
$$v_{p+1} - v_p$$
avec une **forme conjuguée** de
$$\sqrt{A} - \sqrt{B}.$$

Inégalités strictes. Déf. 38

- La suite v est strictement **croissante.**
  Par ailleurs, nous avons montré qu'elle est majorée.
  Elle est donc convergente : sa limite L existe. C'est un **réel positif.**
  La fonction $g : x \longmapsto \sqrt{2x + 35}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc en $x = L$.

On a ainsi **démontré** l'existence de L, suggérée par les calculs à l'aide de la calculatrice.

Prop. 102

  Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = g(L)$.
  L vérifie l'équation : $L = \sqrt{2L + 35}$ avec $L > 0$
  soit $$L^2 - 2L - 35 = 0.$$
  Cette équation a deux racines réelles : 7 et -5.
  L est la racine **positive** : $L = 7$.
  Donc :
$$\lim_{+\infty} \boldsymbol{u_n = 7}.$$

g est en fait continue sur
$$\left[-\frac{35}{2}; +\infty\right[,$$
donc a fortiori sur $[0, +\infty[$

Prop. 106

147 Énoncé

> Trois suites, u, v et w sont définies de la manière suivante sur $\mathbb{N}^*$:
>
> $$u \begin{cases} u_1 = 1 \\ n \geqslant 1 : u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases} \qquad v \begin{cases} v_1 = 12 \\ n \geqslant 1 : v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$
>
> $$w : \forall n,\ w_n = u_n - v_n.$$
>
> 1) Démontrer que w est une suite géométrique convergente à termes négatifs.
> 2) Démontrer que u est croissante et que v est décroissante.
> 3) Démontrer que u et v sont bornées. Sont-elles convergentes?
> 4) On considère la suite t définie, pour tout n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
> Démontrer que t est constante. Est-elle convergente?
> 5) Démontrer que u et v ont la même limite. Trouver cette limite.

Solution

1) • $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n - \dfrac{1}{4} u_n + \dfrac{2}{3} v_n - \dfrac{3}{4} v_n$

$$w_{n+1} = \frac{1}{12}(u_n - v_n).$$

Comparer w_{n+1} et w_n.

Donc, pour tout n :

$$w_{n+1} = \frac{1}{12} w_n \quad \text{et} \quad w_1 = u_1 - v_1 = -11.$$

La suite w est donc une suite géométrique de premier terme -11 et de raison $q = \dfrac{1}{12}$. Puisque $|q| < 1$, elle est convergente et sa limite est zéro.

Si $|q| < 1$: $\lim\limits_{+\infty}(q^n) = 0$

Déf. 44 — Prop. 110

$$\forall n : w_n < 0 \text{ donc } u_n < v_n \text{ pour tout } n.$$

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3} u_n + \dfrac{2}{3} v_n - u_n = \dfrac{2}{3}(v_n - u_n) > 0$ pour tout n.
La suite u est donc strictement croissante.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{4} u_n + \dfrac{3}{4} v_n - v_n = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) < 0$ pour tout n.
La suite v est donc strictement décroissante.

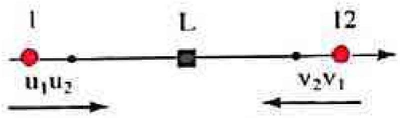
Comparer u_n et u_{n+1} puis v_n et v_{n+1}.

Déf. 38

3) Pour tout n : $u_1 < u_n$
$u_n < v_n$
$v_n < 1$

donc $1 < u_n < v_n < 12$.

u est majorée par 12 alors que v est minorée par 1.
Puisque u est croissante elle est donc convergente.
Puisque v est décroissante elle est donc convergente.



$\lim\limits_{+\infty}(u_n - v_n) = 0.$

Les suites u et v sont des suites **adjacentes.**

Prop. 102

Ce résultat affirme l'existence des limites mais **ne** permet pas de les **calculer!**

4) $t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99$
$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n$
$t_{n+1} = 3u_n + 8v_n = t_n$
Donc la suite t est constante.

Elle est **convergente** et $\lim\limits_{+\infty}(t_n) = \mathbf{99}$.

Toute suite constante est convergente.

5) $w_n = u_n - v_n$; $\lim\limits_{+\infty} w = 0$.

Or, u et v sont convergentes : si on désigne par L_1 et L_2 leurs limites, on a donc :

$$\lim_{+\infty}(u - v) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{+\infty} u - \lim_{+\infty} v = 0.$$

Ce qui démontre que $\boldsymbol{L_1 = L_2}$

$$\lim_{+\infty}(t) = 99 \text{ donc } \lim_{+\infty}(3u) + \lim_{+\infty}(8v) = 99$$

d'où $\quad 3L + 8L = 99 \quad \boldsymbol{L = 9.}$

En définitive : $\boldsymbol{\lim\limits_{+\infty} u = \lim\limits_{+\infty} v = 9.}$

Puisque l'**existence** de L_1 et L_2 est prouvée, on peut alors écrire des égalités faisant intervenir ces limites et utiliser des théorèmes sur les limites.

148 Énoncé

La suite u est définie par : $u_0=0$ et pour $n \geqslant 0$ $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{u_n+3}$.

1) Calculer u_1, u_2, u_3. Démontrer que $u_{n+1}=2-\dfrac{5}{u_n+3}$ pour tout n.
2) Démontrer que la suite est définie pour tout n et que tous ses termes sont positifs.
3) Démontrer que la suite est majorée par 2.
4) Démontrer que u est strictement croissante.
5) Démontrer que u est convergente et calculer sa limite.

Solution

1) $u_0=0$; $u_1=\dfrac{1}{3}$; $u_2=\dfrac{1}{2}$; $u_3=\dfrac{4}{7}$;

$$u_{n+1}=\frac{2u_n+6-5}{u_n+3}=\frac{2(u_n+3)}{u_n+3}-\frac{5}{u_n+3}=2-\frac{5}{u_n+3}.$$

On pourrait se contenter de transformer :

$$2-\frac{5}{u_n+3}.$$

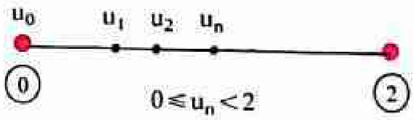
2) Les premiers termes sont positifs. Supposons $u_n>0$; il en résulte que : $u_{n+1}>0$. Donc tous les termes sont positifs et $u_n+3 \neq 0$, pour tout n.

Prop. 101

3) $u_n>0$ donc $\dfrac{5}{u_n+3}>0$ et $2-\dfrac{5}{u_n+3}<2$.
On a donc démontré que :

$$\forall n \quad u_n<2.$$

La suite u est **majorée par 2**. Cette suite est donc **bornée**.



Déf. 40

4) $u_{p+1}=2-\dfrac{5}{u_p+3}$.
De même : $u_{p+2}=2-\dfrac{5}{u_{p+1}+3}$

$$u_{p+2}-u_{p+1}=\frac{5}{u_p+3}-\frac{5}{u_{p+1}+3}=\frac{5(u_{p+1}-u_p)}{D}.$$

Comparer les termes u_{p+2} et u_{p+1} par différence.

$D=(u_p+3)(u_{p+1}+3)>0$.

On a contrôlé que : $u_1-u_0>0$.
Supposons que $u_{p+1}-u_p>0$.
La différence $u_{p+2}-u_{p+1}$ est donc de **même signe** que la différence $u_{p+1}-u_p$, puisque $D>0$.
On a ainsi démontré par récurrence que :

$$\forall n \quad u_{n+1}>u_n.$$

La suite u est donc **strictement croissante.**

Raisonnement par récurrence Prop. 101.

Déf. 38 Puisque $u_0=0$, on a donc $\forall n \ 0 \leqslant u_n<2$.

5) La suite étant croissante et majorée par 2, elle est **convergente.** Sa limite L est un réel de l'intervalle $[0; 2[$

Prop. 102 La suite est **bornée.**

La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+3}$ est continue sur $]-3; +\infty[$ donc à fortiori sur l'intervalle $[0; 2[$.

Donc $\lim\limits_{+\infty}(u) = f(L)$.

L vérifie donc l'équation :

$$\frac{2L+1}{L+3} = L \quad \text{et} \quad L > 0$$

c'est-à-dire $\quad \boldsymbol{L^2 + L - 1 = 0.}$

Cette équation a pour solutions :

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

L est la racine positive :

$$\boldsymbol{L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618.}$$

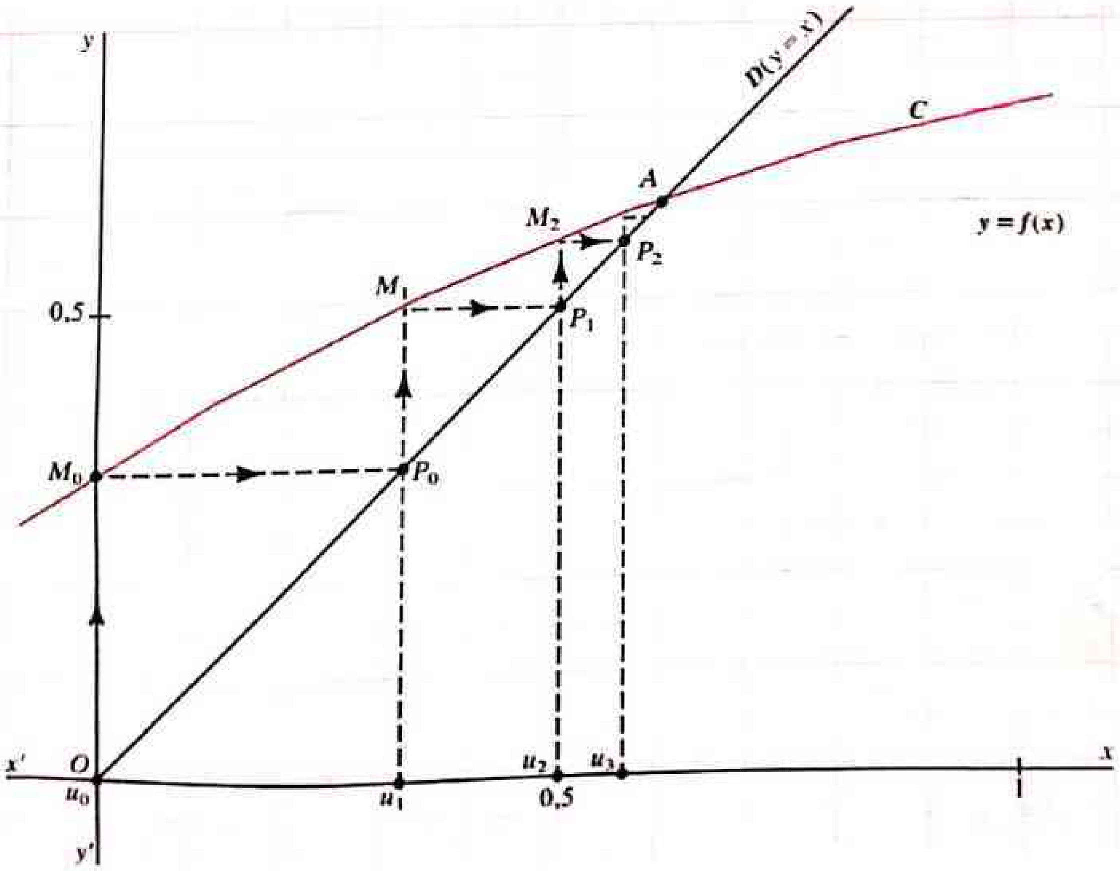
Prop. 106

$\lim\limits_{x \to L} f(x) = f(L)$.

Illustration graphique.

Traçons la courbe C d'équation $y = \dfrac{2x+1}{x+3}$ et la droite D d'équation $y = x$ (sur l'intervalle $[0; 1]$)

$\boldsymbol{u_0 = 0}$; $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{3}$.



u_1 est l'ordonnée du point M_0 de C, d'abscisse u_0.
La parallèle à $x'x$ par M_0 coupe D en P_0 : P_0 a pour abscisse u_1.
$u_2 = f(u_1)$.
u_2 est l'ordonnée de M_1, point de C, d'abscisse u_1 : on obtient M_1 en traçant par P_0 la parallèle à yy'.

$$\begin{array}{l} M_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M_1\ (M_1 \in C) \\ M_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M_2\ (M_2 \in C) \end{array}$$

etc.
Si l'on continue ainsi, les points M_n obtenus se **rapprochent** du point A, intersection de D et de la courbe C. Les coordonnées de A sont $(L; L)$ avec $L = f(L)$.
On trouve ces coordonnées en résolvant l'équation $f(x) = x$.
L'abscisse de A est la **racine positive.**

Points successifs sur C :
$M_0(u_0; u_1)$,
$M_1(u_1; u_2)$,
$M_3(u_2; u_3)$.

149 Énoncé

Étudier la convergence de chacune des suites définies pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right); \quad v_n = n\left(1 + \cos\frac{n\pi}{12}\right); \quad w_n = n\left(2 + \cos\frac{n\pi}{12}\right).$$

Solution

- $\left|\cos\dfrac{n\pi}{12}\right| \leqslant 1$ donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

  Or $\lim\limits_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, donc la suite $|u_n|$ est convergente et sa limite est 0; donc u_n est convergente et $\lim u_n = 0$.

- Pour $n = 6(2p+1)$: $\cos\dfrac{n\pi}{12} = 0$ et $v_n = n$.

  Pour $n = 12(2p+1)$: $\cos\dfrac{n\pi}{12} = -1$ et $v_n = 0$.

  La suite v_n n'est pas convergente.

- $-1 \leqslant \cos\dfrac{n\pi}{12} \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 2 + \cos\dfrac{n\pi}{12} \leqslant 3$

  par conséquent

  $$n \leqslant w_n \leqslant 3n$$

  donc $\lim\limits_{+\infty} w_n = +\infty$.

Prop. 104

Produit d'une suite convergente par une suite majorée.
La fonction f telle que

$$f(x) = x\left(2 + \cos\frac{x\pi}{12}\right)$$

a pour limite $(+\infty)$ à $(+\infty)$.

Prop. 103

Encadrement de w_n

$\lim\limits_{+\infty} n = \lim\limits_{+\infty} 3n = +\infty$.

150 Énoncé

$u_0 = 2$ et pour $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right)$.

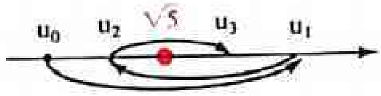
La suite v_n est définie par $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$.

1) Étudier les variations de la suite u_n.
2) Démontrer que pour tout n : $v_{n+1} = (v_n)^2$. Démontrer que v_n est bornée. Étudier ses variations.
3) Étudier la convergence de v_n et celle de u_n.

Solution

1) $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{9}{4}$; $u_2 = \dfrac{161}{72}$. $u_0 < u_1$ mais $u_1 > u_2$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5 - u_n}{2u_n}.$$



Les termes de u_n sont positifs.
Le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend de la position de u_n par rapport à $\sqrt{5}$.

$u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 5}{2u_n}$.

$$u_0 < \sqrt{5} \quad \text{d'où} \quad u_1 > u_0$$

et $\quad u_1 > \sqrt{5}, \quad$ d'où $\quad u_2 < u_1$, etc.

La suite u_n n'est ni croissante ni décroissante.

2) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{5}}{u_{n+1} + \sqrt{5}} = \dfrac{u_n^2 + 5 - 2u_n\sqrt{5}}{u_n^2 + 5 + 2u_n\sqrt{5}} = \dfrac{(u_n - \sqrt{5})^2}{(u_n + \sqrt{5})^2}$

$v_{n+1} = (v_n)^2$.
Or $u_n - \sqrt{5} < u_n + \sqrt{5}$ donc $|v_n| < 1$,
d'où $\quad v_{n+1} < 1$.
La suite v_n est majorée par 1 et

$$v_0 = \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} = \frac{-1}{(2 + \sqrt{5})^2}.$$

$\dfrac{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})^2} = \dfrac{4-5}{(2+\sqrt{5})^2}$.

v_0 est donc le seul **terme négatif** de la suite v_n. Donc pour tout n : $v_0 \leqslant v_n < 1$. La suite v est bornée. Posons $v_0 = a$.

Déf. 40

$$v_1 = a^2; \quad v_2 = v_1^2 = a^4; \quad v_3 = (v_2)^2 = a^8;$$

pour $n > 0 \quad v_n = (a^2)^n$.

$|a| = \dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2} < 1$.

Or, $a < 1$, donc $\lim\limits_{+\infty}(v_n) = 0$.

Prop. 104

On peut montrer aussi que v_n est **décroissante** :

$$v_{n+1} - v_n = v_n^2 - v_n = v_n(v_n - 1) < 0.$$

3) v_n est convergente et $\lim v_n = 0$.
Calculons u_n en fonction de v_n :

$$u_n = \sqrt{5}\left(\frac{1+v_n}{1-v_n}\right)$$

donc u_n est convergente et $\lim\limits_{+\infty} u_n = \sqrt{5}$.

- On peut aussi étudier la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2x} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} = \frac{x^2-5}{2x^2},$$

$f'(x) = 0$ en $x = \sqrt{5}$ et $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.
$u_0 = 2$; $u_1 = f(u_0)$; $u_2 = f(u_1)$, etc.
En utilisant le tracé de la courbe de f sur $]0; +\infty[$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$, on construit, à partir de $u_1 = 0$ les points de la courbe C :

$M_0(u_0; u_1)$; $M_1(u_1; u_2)$; $M_3(u_2; u_3)$, etc.,

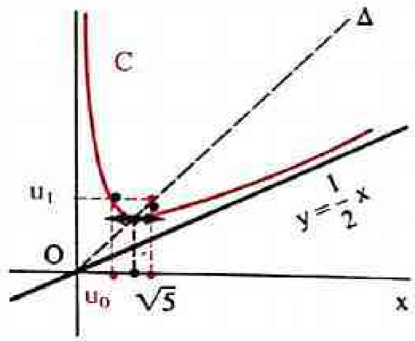
et l'on *observe* les positions des termes u_n par rapport à l'abscisse de $A(\sqrt{5}; \sqrt{5})$, et la convergence de u_n vers $\sqrt{5}$

avec $\quad u_p < \sqrt{5} \iff u_{p+1} > \sqrt{5}$.

v_n, bornée et croissante est donc convergente et sa limite L vérifie

$$L^2 - L = 0 \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{Prop.}\\ 106\end{array}}.$$

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
f	‖	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	$+\infty$



Voir détail à l'exercice **148**.

151 Énoncé

> S est l'ensemble des suites (u_n) qui vérifient, pour tout n :
> $$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$
> On sait que S est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.
> Déterminer deux suites particulières de S, qui constituent une base de S.
> Trouver la suite élément de S, telle que $u_0 = 2$ et $u_1 = -1$.

Solution

Une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q est élément de S si et seulement si q vérifie l'équation caractéristique

$$q^2 - 2q + 2 = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution réelle, mais les solutions complexes : $q_1 = 1 + i$ et $q_2 = 1 - i$.

$\Delta = -1 = i^2$.

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$
$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$.

S ne contient donc pas de suite géométrique réelle.

Mais

$$q_1^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right);$$

$$q_2^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Posons $s_n = \frac{1}{2}(q_1^n + q_2^n) = \sqrt{2}^n \cdot \cos \frac{n\pi}{4}$

et $t_n = \frac{1}{2i}(q_1^n - q_2^n) = \sqrt{2}^n \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$.

s_n et t_n sont des suites réelles éléments de S.

Vérifions le pour s_n : $s_{n+2} - 2s_{n+1} + 2s_n = A$

$$A = \frac{1}{2}(q_1^{n+2} + q_2^{n+2} - 2q_1^{n+1} - 2q_2^{n+1} + 2q_1^n + 2q_2^n)$$

$$A = \frac{1}{2}(q_1^{n+2} - 2q_1^{n+1} + 2q_1^n) + \frac{1}{2}(q_2^{n+2} - 2q_2^{n+1} + 2q_2^n)$$

$$A = \frac{1}{2}q_1^n(q_1^2 - 2q_1 + 2) + \frac{1}{2}q_2^n(q_2^2 - 2q_2 + 2) = 0.$$

Étudions la combinaison linéaire :

$$\forall n \quad \alpha s_n + \beta t_n = 0$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \quad \sqrt{2}^n\left(\alpha \cos \frac{n\pi}{4} + \beta \sin \frac{n\pi}{4}\right) = 0$$

Pour $n = 0$, on obtient : $\alpha = 0$.
Pour $n = 2$, on obtient : $\beta = 0$.
La famille $\{s_n, t_n\}$ est donc une famille libre de S, donc une **base de** S, puisque S est de dimension 2.
Toute suite de S s'écrit donc :

$$u_n = \sqrt{2}^n\left(A \cos \frac{n\pi}{4} + B \sin \frac{n\pi}{4}\right).$$

$u_0 = 2$ et $u_1 = -1$ conduisent à : $A = 2$ et $B = -3$,

d'où $u_n = (\sqrt{2})^n\left(2 \cos \frac{n\pi}{4} - 3 \sin \frac{n\pi}{4}\right)$.

Prop. 112

La méthode est à retenir : le passage par la recherche de suites **complexes** pour déterminer des suites **réelles** éléments de S.

Car q_1 et q_2 sont solution de
$q^2 - 2q + 2 = 0$.

Prop. 113

Revoir la notion de **base** pour un espace vectoriel.

A et B sont des réels quelconques.

La suite cherchée est unique.

152 **Énoncé**

> Déterminer les suites qui vérifient $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
> Quelle est celle de ces suites pour laquelle $u_0 = 1$ et $u_1 = -3$?

Solution

Cherchons, parmi les éléments de cet espace vectoriel de suites, les suites géométriques avec $v_0 = 1$ et de raison x.
x est solution de l'équation caractéristique :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \; : \; x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Si l'on pose $s_n = 1$ et $t_n = 2^n$, la famille $\{s_n ; t_n\}$ est une famille libre et une base de l'espace vectoriel.
Les suites cherchées s'écrivent :

$$u_n = A + B \cdot 2^n.$$

Prop. 112

Le vérifier rapidement.

$u_0=1$ conduit à : $A+2B=1$.
$u_1=-3$ conduit à : $A+4B=-3$
d'où $B=-2$ et $A=5$
donc $u_n=5-2\times 2^n$.

Prop. 113

Pour u_0 et u_1 fixés, A et B se calculent de manière unique

153 **Énoncé**

Démontrer que pour tout naturel n non nul :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Étudier la convergence de la suite : $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

puis de la suite : $v_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$

Solution

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Multiplier et diviser par la **forme conjuguée** de $\sqrt{A}-\sqrt{B}.$

Or
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$$

$\sqrt{n+1}>\sqrt{n}.$

et
$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}$$

d'où
$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

La suite $t_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}$ est convergente et $\lim\limits_{+\infty} t_n=0$, de même
$$q_n=\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$
converge vers 0. Donc u_n est **convergente** vers 0.

Encadrement d'une suite par deux suites convergentes vers 0.

Prop. 105

Pour $n>0$: $\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

Démontrons par récurrence que : $\boldsymbol{v_n>2\sqrt{n+1}-2}$.

Si $v_p>2\sqrt{p+1}-2$, on a
$$v_{p+1}=v_p+\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$
d'où
$$v_{p+1}>(2\sqrt{p+1}-2)+2(\sqrt{p+2}-\sqrt{p+1})$$
$$v_{p+1}>2\sqrt{p+2}-2.$$

Prop. 101

Raisonnement par récurrence.

La suite $w_n=2(\sqrt{n+1}-2)$ est divergente vers $(+\infty)$.

Comme $v_n>w_n$, alors v_n est **divergente** vers $(+\infty)$.

Majoration d'une suite par une suite qui diverge vers $+\infty$.

Déf. 42

D'AUTRES POUR CHERCHER

154 **Énoncé**

La suite (w_n) *est définie par* $w_0 = a$ *et* $w_1 = b$ *avec, pour* $n > 1$

$$w_{n+1} = w_n - w_{n-1}.$$

Démontrer que cette suite est périodique. Quelles sont ses variations?

Indication

Démontrer par récurrence que $w_{n+3} = -w_n$ puis calculer w_{n+6}.
Réfléchir à la périodicité et son influence sur les variations.

155 **Énoncé**

Démontrer que $\left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}\right)$ *est une suite arithmétique si et seulement si* (a^2, b^2, c^2) *est une suite arithmétique.*

$\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}, \frac{1}{1+\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$ *est-elle une suite arithmétique?*

156 **Énoncé**

a) *Une suite* u *est définie par* $u_0 = -3$ *et* $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n - 6$.
Calculer les cinq termes qui suivent u_0.

b) *La suite* v *est définie par* $v_n = u_n + 18$.
Démontrer que v *est une suite géométrique que l'on précisera.*

c) *La suite* v *est-elle convergente? Et la suite* u*?*

Indication

Ces deux suites sont convergentes : $\lim v_n = 0$ et $\lim u_n = -18$.

157 **Énoncé**

Soit la suite (u_n) *de terme général* $u_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$.

a) *Déterminer deux constantes réelles* a *et* b *telles que* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}.$$

b) *Soit la suite réelle définie par le terme général* $S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$.

Donner en fonction de n *l'expression de* S_n*. Démontrer que* S_n *est convergente.*

Indication

Démontrer par récurrence que $S_n = 1 - \frac{1}{2n+3}$. S_n est croissante et majorée.

158

Énoncé

Voici deux suites définies pour $n > 0$: $u_n = \dfrac{(1{,}01)^n}{n}$ *et* $v_n = \dfrac{(1{,}01)^n}{\sqrt{n}}$.

Tous les termes sont positifs.

1) *Démontrer que si* a *et* b *sont des réels strictement positifs :*

$$a < b \quad \textit{équivaut à} \quad \frac{b}{a} > 1.$$

2) *Exprimer* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$ *en fonction de* n. *En déduire que la suite* u *est décroissante pour* $1 \leqslant n \leqslant 100$ *et croissante pour* $n > 100$.

3) *Exprimer* $t_n = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ *puis* $(t_n^2 - 1)$ *en fonction de* n *et étudiez les variations de* v.

Indication

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1{,}01 \times n}{n+1}$; $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{n - 100}{100(n+1)}$. $u_{n+1} > u_n$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 > 0$.

159

Énoncé

$s_n = \dfrac{n}{3n + (-1)^n}$; *on pose* $s'_n = \dfrac{n}{3n + (-1)^n} - \dfrac{1}{3}$.

1) *Démontrer que* s'_n *ne garde pas un signe constant.*

2) *Démontrer que* $|s'_n| < \dfrac{1}{n}$. *En déduire que* s' *converge vers* 0.

s est-elle une suite convergente?

Indication

La suite s_n n'est pas monotone, mais convergente.

160

Énoncé

Étudier la convergence de chacune des suites :

$$u_n = \frac{3n^2 + 2n - 1}{5n + 3}; \quad v_n = \frac{5n^4 + n^2 + 1}{n^4 + n^3}; \quad w_n = 3\sqrt{n^2 + n + 1} - 5n.$$

161

Énoncé

N^* *désignant l'ensemble des entiers naturels privés de zéro, on donne la suite* (u_n) *à termes positifs, de premier terme* $u_1 = 1$ *et telle que pour tout* n *de* N^*, *on ait :* $(u_{n+1})^2 = 2u_n$.

1) *Calculer* u_2, u_3 *et* u_4.

2) *On pose :* $\forall n \in N^*$, $v_n = \ln u_n - \ln 2$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n \in N^*}$ *est une suite géométrique dont on précisera la raison. Calculer la limite de* v_n, *puis celle de* u_n *quand* n *tend vers* $(+\infty)$.

3) *On désigne par A_p la somme des p premiers termes de la suite (v_n) et par B_p le produit des p premiers termes de la suite (u_n). Calculer A_p et B_p en fonction de p. Déterminer les limites de A_p et de B_p quand p tend vers $+\infty$.*

Indication

1) $u_2 = 2^{\frac{1}{2}}$; $u_3 = 2^{\frac{3}{4}}$; $u_4 = 2^{\frac{7}{8}}$. 2) On trouve $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$; $\lim u_n = 2$.

162

Énoncé

Voici quatre suites u, v, w, t, définies par :

$$u_n = \frac{n}{3n+1}; \quad v_n = \frac{n+1}{3n+1}; \quad w_n = \frac{n}{3n-1}; \quad t_n = \frac{n+2}{3n-1}.$$

a) *Étudier les variations de chacune de ces suites.*

b) *Démontrer que $\frac{1}{3}$ est un majorant de u et un minorant de v, w et t.*

c) *En déduire la convergence de u, v, w et t.*

d) *On pose $u' = \frac{1}{3} - u_n$. Démontrer que $0 < u' < \frac{1}{n}$; en déduire la limite de u'_n et celle de u_n. Étudier de même les limites de v, w, t.*

Indication

a) On peut soit étudier le signe de $(u_n - u_{n-1})$, soit étudier les variations de $x \longmapsto \frac{x}{3x+1}$. u est croissante; v, w et t sont décroissantes.

163

Énoncé

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$.

1) *Démontrer que u est majorée par 4 et qu'elle est croissante.*

2) *Quelle est la limite de u?*

3) *Illustrez cette étude en traçant dans un repère orthonormé les droites d'équations : $y = x$ et $y = \frac{1}{2} x + 2$.*

4) *On considère la suite v telle qu $v_n = u_n + h$.*
Déterminer h pour que v soit une suite géométrique.
Étudier la limite de v et retrouver celle de u.

Indication

Voir les interprétations graphiques dans les exercices **148** et **150**.

164

Énoncé

Soit la suite v définie par $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n + 2$.

1) *Démontrer que v est minorée et qu'elle est décroissante.*
2) *Est-elle convergente?*
3) *Illustrer en traçant les droites d'équations : $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 2$.*

Indication

A rapprocher de l'exercice précédent. Le choix de v_0 change tout.

165

Énoncé

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \dots + \frac{1}{n^2+2n+1}.$$

Étudier la limite de cette suite, en majorant chaque terme de la somme.

Indication

Il s'agit de majorer u_n par une suite de limite nulle en remarquant que, quel que soit $p > 1$:

$$\frac{1}{n^2+p} < \frac{1}{n^2+1}.$$

166

Énoncé

Étudier les limites de :

$$u_n = \frac{n \cos n}{\sqrt{n^4+1}}; \quad v_n = \frac{n^2 + \cos n}{3n^2 + \sin n}; \quad t_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

Indication

Majorer $|u_n|$ par une suite convergente de limite nulle.
Pour t_n, mettre en évidence la suite géométrique $s_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

167

Énoncé

a et b sont des réels tels que $0 < a < b$. (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :

$$u_0 = a \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}; \quad v_0 = b \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n).$$

1) *Calculer u_1, v_1, u_2, v_2 et les représenter par des points sur un axe.*
2) *Démontrer que, pour tout n : $u_n < v_n$.*
3) *Démontrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.*

4) *On pose :* $w_n = v_n - u_n$. *Démontrer que* w_n *est convergente de limite* 0.
5) *Démontrer que* $u_n v_n = ab$. *En déduire les limites de* u_n *et* v_n.

Indication

2) Récurrence. Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction de $u_n - v_n$.
5) $\lim u = \lim v = \sqrt{ab}$. C'est la moyenne géométrique de a et b.

168 **Énoncé**

a étant un réel positif, la suite (u_n) *est définie par* $u_0 = a$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1) *Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles* (u_n) *est constante.*
2) *Ces valeurs sont désormais exclues. Démontrer que si* $a > 1$, *alors* u_n *est minorée par* 1, *et majorée par* 1 *si* $0 < a < 1$.
3) *Étudier les variations de* u_n *et sa convergence.*

Indication

3) Comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. $\lim u = 1$ pour tout $a > 0$.

169 **Énoncé**

On considère les suites u qui vérifient la relation :

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n \qquad (1)$$

les termes u_0 *et* u_1 *étant donnés.*

1) *Trouver deux suites géométriques* v_n *et* w_n, *de premier terme* 1, *qui vérifient cette relation.*
2) *Soit* $t_n = 6v_n - 8w_n$. *Démontrer que* t_n *vérifie la relation* (1).
3) *Déterminer l'ensemble des suites qui vérifient cette relation.*

Indication

Voir les exercices **151** et **152.**

170 **Énoncé**

On considère les suites v qui vérifient la relation (2) :

$$v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$$

les termes v_0 *et* v_1 *étant donnés.*

1) *Trouver une suite géométrique* u_n, *de premier terme* 1, *qui vérifie cette relation.*
2) *Démontrer qu la suite* $w_n = nu_n$ *vérifie aussi la relation* (2).

171 **Énoncé**

Déterminer l'ensemble des suites (u_n) *qui vérifient*

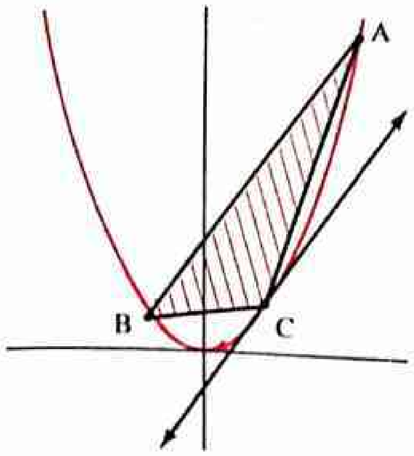
$$9u_{n+2}+6u_{n+1}+u_n=0.$$

Déterminer la suite qui vérifie $u_0=u_1=1$ *et étudier sa convergence.*

172 **Énoncé**

Déterminer la suite (v_n) *qui vérifie*

$$v_{n+2}=2v_{n+1}-5v_n \quad \textit{avec} \quad v_0=-2 \quad \textit{et} \quad v_1=0.$$

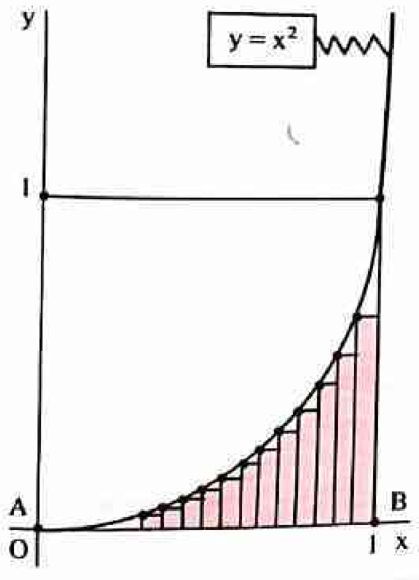


Déjà les mathématiciens grecs calculaient des aires par des procédés divers : Eudoxe (−408 avant notre ère) puis Euclide (−365 avant notre ère) se sont intéressés au problème des **mesures de figures**, mesures d'aires (disque) mesures de volumes. Archimède (−287; −212) fut l'un des premiers à élaborer une véritable méthode de recherche pour les aires. C'est ainsi qu'il démontra, le premier, que l'aire du **secteur de parabole** (colorié en rouge) et les 4/3 de l'aire du triangle ABC; il utilise pour cette démonstration des considérations mécaniques.

Des mathématiciens tels que **Képler** (1571-1630) (volumes des tonneaux) et surtout **Cavalieri** (1598-1647) (méthodes des indivisibles), **Pascal** (1623-1662), **Guldin** (1577-1643) ont préparé une méthode moderne d'intégration grâce à la décomposition de surfaces et de volumes en *domaines élémentaires*.

C'est à **Leibniz** (1646-1716) et **Newton** (1643-1727) que l'on doit la mise au point du calcul intégral et sa liaison avec le *«problème des tangentes»* c'est-à-dire la dérivation.

Cauchy (1789-1857) et **Riemann** (1826-1866) donnent une forme définitive à la théorie.



Pour calculer l'aire S de la surface comprise entre la parabole, l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x = 1$, découpons cette surface en «**tranches**» de même largeur.

Si le nombre de ces tranches est n, leur largeur commune est $1/n$, et l'on peut assimiler chaque tranche à un rectangle de largeur $1/n$ et de hauteurs :

$$0; \left(\frac{1}{n}\right)^2; \left(\frac{2}{n}\right)^2; \left(\frac{3}{n}\right)^2; \ldots; \left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Écrivons la somme de leurs aires :

$$S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{9}{n^2} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right]$$

$$S_n = \frac{1}{n^3}[1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Dans l'un de ses *«Traités d'Arithmétique»*, Pascal a démontré que la somme des carrés des nombres entiers de 1 à $(n-1)$ est

$$\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}. \qquad \text{Donc} \qquad S_n = \frac{n\,(n-1)(2n-1)}{6n^3}.$$

On peut considérer que l'aire cherchée S est la limite de S_n lorsque l'on augmente indéfiniment n : cette limite est 1/3. C'est un **résultat** analogue à ce que trouvait déjà Archimède.

DES EXERCICES CORRIGÉS

173 Énoncé

Étudier l'existence des intégrales suivantes, et les calculer si possible :

$$A=\int_0^2(2x^2-2)\,dx;\qquad B=\int_0^2|2x^2-2|\,dx;$$
$$H=\int_0^1 4x(2x^2-2)^3\,dx;\qquad D=\int_0^3\frac{4x}{(2x^2-2)^2}\,dx;$$
$$E=\int_1^2 4x\sqrt{2x^2-2}\,dx;\qquad F=\int_2^3\frac{4x}{(2x^2-2)^2}\,dx.$$

Solution

A : La fonction polynôme : $x\longmapsto 2x^2-2$ est continue sur $[0;2]$ donc l'intégrale A existe. Les primitives de cette fonction sont :

Déf. 32

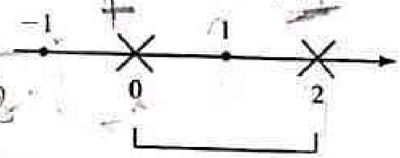
Déf. 45

$$F(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+C$$

$$A=[F(x)]_0^2=F(2)-F(0)=\left(\frac{16}{3}-4+C\right)-C=\frac{4}{3}.$$

La valeur de C n'a pas d'importance : cette constante disparaît dans $F(2)$-$F(0)$.

B : La fonction : $x\longmapsto|2x^2-2|$ est continue sur $[0;2]$ donc l'intégrale B existe.
Mais $|2x^2-2|$ peut s'écrire de deux façons différentes
$$2x^2-2=2(x-1)(x+1).$$



- **Si $x<-1$ ou $x>1$:** $|2x^2-2|=2x^2-2$ car $(x-1)(x+1)>0$.
- **Si $-1<x<1$:** $|2x^2-2|=-2x^2+2$ car $(x-1)(x+1)<0$.

Le calcul de B doit être **scindé en deux calculs** :

$$B=\int_0^1(-2x^2+2)\,dx+\int_1^2(2x^2-2)\,dx$$
$$B=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x+C\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^3-2x+C'\right]_1^2$$
$$B=\left(-\frac{2}{3}+2\right)+\left(\frac{16}{3}-4\right)-\left(\frac{2}{3}-2\right)=4.$$

Puisque $|2x^2-2|\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ on trouve donc pour B un réel positif.

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx.$$

H : La fonction g telle que $g(x)=4x(2x^2-2)^3$ étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale existe.

Déf. 45

Si on pose :
$$u(x)=2x^2-2,\quad \text{on a}\quad u'(x)=4x$$
d'où :
$$g=u'\times u^3$$
donc une primitive de g est :
$$G(x)=\frac{1}{4}u^4(x)=\frac{1}{4}(2x^2-2)^4,$$

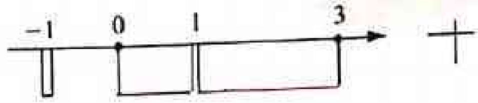
$f=u'\cdot u^n$; $F=\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$ (si $n\neq-1$).

On peut prendre **0** comme valeur de la constante C.

et par conséquent :

$$H = \left[G(x)\right]_0^1 = G(1) - G(0) = -4.$$

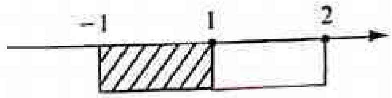
D : La fonction $x \longmapsto \dfrac{4x}{(2x^2-2)^2}$ n'est pas définie en $x=-1$ et $x=1$. Elle n'est donc pas continue sur $[0; 3]$, par conséquent l'intégrale D n'existe pas.



E : La fonction h définie par

$$h(x) = 4x\sqrt{2x^2-2}$$

est définie et continue si $x^2-1>0$; elle est donc continue sur l'intervalle $[1; 2]$. L'intégrale E existe donc. Avec $u(x) = 2x^2-2$, h se présente sous la forme : $h = u' \times u^{\frac{1}{2}}$.



Prop. 97

Une primitive sera donc :

$$H(x) = \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{(2x^2-2)^3}$$

$u^{\frac{3}{2}} = \sqrt{u^3}$.

d'où

$$E = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(2x^2-2)^3}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{6^3}-0\right) = 4\sqrt{6}.$$

E est encore un réel positif puisque

$$4x\sqrt{2x^2-2}$$

est positif sur $[1; 2]$.

F : La fonction est continue sur $[2; 3]$ donc l'intégrale est calculable

$$\frac{4x}{(2x^2-2)^2} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

une primitive s'écrit :

$$K(x) = -\frac{1}{u(x)} = \frac{-1}{2x^2-2}$$

$$F = \left[\frac{-1}{2x^2-2}\right]_2^3 = \left[\frac{-1}{16}+\frac{1}{6}\right] = \frac{5}{48}.$$

F est un réel positif.

174 Énoncé

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cdot \sin x \, dx$ puis $J = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x \cdot \sin x \, dx.$

Solution

$x \longmapsto \cos 3x \cdot \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ici, il est indispensable de **linéariser** $\cos 3x \cdot \sin x$, c'est-à-dire le mettre sous forme de somme

sin $a \cdot \cos b$.

$$f(x) = \cos 3x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\left[\sin 4x + \sin(-2x)\right]$$

De l'intérêt de savoir ses formules de trigo...

Prop. 15

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Une primitive de f est F telle que :

$$F(x) = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

D'où

$$I = \left[-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I = \left(-\frac{1}{8}\cos 2\pi + \frac{1}{4}\cos \pi\right) - \left(-\frac{1}{8}\cos 0 + \frac{1}{4}\cos 0\right)$$

$$I = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

De même $J = \left[-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{+\frac{\pi}{3}} = \mathbf{0}.$

Pour J, remarquer que f est **impaire**, donc

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Prop. 68

Attention à cos 0, cos π... et aux fautes de calcul!

Même méthode pour

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 8x \cdot \cos 5x\,\mathrm{d}x;$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos 6x \cdot \sin 2x\,\mathrm{d}x...$

Prop. 116

175 × **Énoncé**

$f(x) = \frac{12x+16}{(x+2)^2}$. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x différent de -2, $f(x) = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{x+2}$. En déduire $K = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution

On doit avoir, pout tout $x \neq -2$:

$$\frac{12x+16}{(x+2)^2} = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b}{(x+2)}$$

$$\frac{12x+16}{(x+2)^2} = \frac{a}{(x+2)^2} + \frac{b(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$\frac{12x+16}{(x+2)^2} = \frac{bx+a+2b}{(x+2)^2}$$

donc $\begin{cases} b = 12 \\ a+2b = 16 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -8 \\ b = 12 \end{cases}$

$$f(x) = -\frac{8}{(x+2)^2} + \frac{12}{x+2}.$$

Cherchons les primitives F de f.

- $g(x) = \frac{-8}{(x+2)^2}$.

  Posons : $u(x) = x+2$, $u'(x) = 1$.

  $g(x)$ est de la forme $(-8)\cdot\frac{u'(x)}{u^2(x)}$.

  Donc $G(x) = \frac{8}{x+2} + C_1$.

Ce quotient ne se présente pas sous la forme $\frac{u'}{u^n}$...

Il faut donc trouver autre chose pour calculer ces primitives.

On doit avoir **pour tout** $x \in D_f$

$12x + 16 = bx + (a + 2b)$.

f est la somme de deux fonctions continues sur $]-2; +\infty[$ et $[0; 3] \subset]-2; +\infty[$.

Ne pas confondre les primitives de $\frac{u'}{u^2}$ et les primitives de $\frac{u'}{u}$.

• $h(x)=\dfrac{12}{x+2}$; $h=12\,\dfrac{u'}{u}$

donc $\boldsymbol{H(x)}=12\ln|x+2|+C_2$.

Prop. 80

Ainsi : $\boldsymbol{F(x)=\dfrac{8}{x+2}+12\ln|x+2|+C}$.

avec $C=C_1+C_2$.

D'où
$K=F(3)-F(0)=\dfrac{8}{5}+12\ln 5-4-12\ln 2$

$K=\boldsymbol{\dfrac{-12}{5}+12\ln\dfrac{5}{2}}$.

176 **Énoncé**

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\pi} x\cdot\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

Solution

La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc I existe.

$u(x)=x\cdot\cos\dfrac{x}{2}$.

C'est un produit que l'on ne peut pas linéariser.
Il faut donc trouver autre chose.

Puisque $x\cdot\cos\dfrac{x}{2}>0$ sur $[0,\pi]$, l'intégrale cherchée sera positive.

ici $x\cdot\cos\dfrac{x}{2}\geqslant 0$ sur $[0;\pi)$
donc I sera positif.

On essaie une intégration **par parties**.

Prop. 124

Le **choix** de f et g' n'est pas toujours évident.
Il faut donc essayer!

• $\boxed{\text{1}^{\text{er}}\text{ essai}}$

Si on pose

$$\begin{cases} f(x)=\cos\dfrac{x}{2} & \text{alors} \quad f'(x)=-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} \\ g'(x)=x & \text{alors} \quad g(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

on a : $I=\left[\dfrac{1}{2}x^2\cos\dfrac{x}{2}\right]_0^{\pi}+\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\pi}x^2\cdot\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

L'intégrale qui apparaît s'est compliquée! C'est donc que le **choix** de f et g' dans l'intégration par parties était mauvais.

• $\boxed{\text{2}^{\text{e}}\text{ essai}}$

Si on pose

$$\begin{cases} f(x)=x & \text{alors} \quad f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos\dfrac{x}{2} & \text{alors} \quad g(x)=2\sin\dfrac{x}{2} \end{cases}$$

on a : $I=\left[2x\sin\dfrac{x}{2}\right]_0^{\pi}-2\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$.

On sait calculer la nouvelle intégrale

$$I=\left[2x\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}+2\left[2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}=2\pi-4.$$

$\left(\cos\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$

$I>0$

177 **Énoncé**

> Soient $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
> Calculer $I+J$, $I-J$, en déduire I et J.

Solution

Les fonctions données sont continues sur $\mathbb{R}$, donc intégrables sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)(\cos^2 x+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\,\mathrm{d}x=[x^2+x]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)(\cos^2 x-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos 2x\,\mathrm{d}x.$$

On a besoin d'une intégration par parties.
Posons $u(x)=2x+1$ et $v'(x)=\cos 2x$.

$$I-J=\left[\frac{1}{2}(\sin 2x)(2x+1)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,\mathrm{d}x$$

$$I-J=\left[\frac{1}{2}(\sin 2x)(2x+1)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} I+J=\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{4} \\ I-J=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

c'est-à-dire $I=\dfrac{\pi^2}{32}+\dfrac{\pi}{4}$ et $J=\dfrac{\pi^2}{32}$.

Autre méthode

On pourrait calculer directement I et J : exprimer $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\cos 2x$ et faire deux intégrations par parties; c'est plus long...

Remarquer l'intérêt du calcul de $I+J$ car $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

Prop. 124

$f(x)=2x+1$ $f'(x)=2$
$g'(x)=\cos 2x$ $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\int_0^{\pi/4} f(x)\,g'(x)=[f(x)g(x)]_0^{\pi/4}-$

$\int_0^{\pi/4} f'(x)\,g(x)$

178 **Énoncé**

> Calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3 x\,\mathrm{d}x$; $J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$; $K=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

Solution

Les trois fonctions : $x \longmapsto \cos^3 x$; $x \longmapsto \cos^4 x$; $x \longmapsto \sin^5 x$ sont définies, dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. I, J, K sont donc calculables.

- **Calcul de I** : Posons $f(x) = \cos^3 x$. Cherchons une primitive de f

$$f(x) = \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$$
$$f(x) = \mathbf{\cos x - \cos x \cdot \sin^2 x.}$$

La fonction f_2 : $f_2(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ se présente sous la forme

$$f_2(x) = u'(x) \times u^2(x) \text{ avec } u(x) = \sin x$$

et
$$u'(x) = \cos x.$$

Une primitive de f_2 est donc $\frac{1}{3}u^3$.

D'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} u'(x)\,u^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$I = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}[\sin^3 x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$I = \sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \mathbf{\frac{5\sqrt{2}}{12}}.$$

- **Calcul de J** : Posons $g(x) = \cos^4 x$.
Il faut **linéariser** g.

$$\cos^4 x = [\cos^2 x]^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos 2x)^2$$
$$\cos^4 x = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$g(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1 + \cos 4x)$$
$$g(x) = \mathbf{\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.}$$

Une primitive de g :

$$G(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x.$$

D'où
$$J = \left[\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$J = \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \mathbf{\frac{3\pi + 7}{16}} \approx 1{,}026.$$

- **Calcul de K.** La fonction $x \longmapsto \sin^5 x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire, donc

$$\int_{-a}^{a} \sin^5 x \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{ainsi :} \quad \mathbf{K = 0.}$$

Déf. 45

Cette méthode est applicable si l'on a une puissance de $\cos x$ (ou de $\sin x$) d'exposant **impair**.

$(u^3)' = 3u'u^2$

Prop. 97

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$

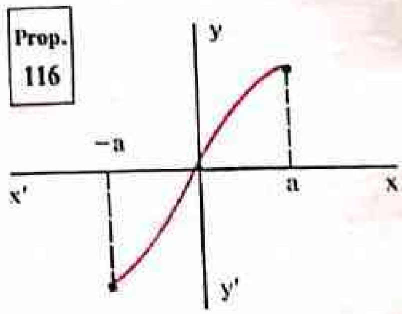
appliquée 2 fois :
avec $\alpha = x$
avec $\alpha = 2x$

$[\sin(ax)]' = a \cdot \cos ax$

Remarquer que $x \longmapsto \cos^4 x$ est **paire**, donc

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$$

Prop. 116



$$\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

179 Énoncé

Calculer $L=\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x$.

Solution

$x \longmapsto \sqrt{3-x}$ est continue sur $]-\infty, 3]$ donc cette intégrale existe. Intégrons par parties :

$$\begin{cases} u(x)=x & \text{d'où} \quad u'(x)=1 \\ v'=(3-x)^{\frac{1}{2}} & \text{d'où} \quad v=-\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$L=\left[-\frac{2x}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2+\frac{2}{3}\int_0^2 (3-x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$L=\left[-\frac{2x}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2-\left[\frac{4}{15}(3-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^2$$

$$L=\left(-\frac{4}{3}\right)-\frac{4}{15}\left(1-\sqrt{3^5}\right)$$

$$L \quad \frac{12\sqrt{3}}{5}-\frac{44}{15}\approx \mathbf{1{,}22.}$$

Prop. 124

$x \longmapsto (3-x)^{\frac{3}{2}}$ a pour dérivée

$$x \longmapsto -\frac{3}{2}(3-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$x \longmapsto (3-x)^{\frac{5}{2}}$$

a pour dérivée

$$x \longmapsto -\frac{5}{2}(3-x)^{\frac{3}{2}}$$

$f(x)>0$ sur $[0; 2]$ donc on doit trouver $L>0$

180 Énoncé

Calculer les intégrales

$$A=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x; \qquad B=\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x; \qquad C=\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x; \qquad D=\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Solution

Les trois premières fonctions sont continues sur $]0; +\infty[$ donc les trois intégrales existent.

Ces trois fonctions étant positives sur $[1; e]$, A, B et C seront des réels positifs.

A : $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; f est de la forme $f=u'\times u$ avec $u(x)=\ln x$.

D'où une primitive : $F(x)=\frac{1}{2}u^2(x)=\frac{1}{2}\ln^2 x$

$$A=[F(x)]_1^e=\frac{1}{2}\ln^2 e-\frac{1}{2}\ln^2 1=\mathbf{\frac{1}{2}}.$$

Prop. 97

B : Intégrons par parties : $\ln x = 1\times \ln x$.

Posons $\begin{cases} u(x)=\ln x & \text{d'où} \quad u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)=1 & \text{d'où} \quad v(x)=x \end{cases}$

$$B=[u(x)\cdot v(x)]_1^e-\int_1^e u'(x)\times v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$B=[x\ln x]_1^e-[x]_1^e=[x\ln x-x]_1^e=\mathbf{1.}$$

pour $1<x<e$: $\frac{1}{x}<1$ on a

$$\frac{\ln x}{x}<\ln x<x\ln x$$

donc $A<B<C$.

$\ln e=1$ et $\ln 1=0$

C : Intégrons par parties :

Posons $\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{d'où} \quad u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{d'où} \quad v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Prop. 124

$$C = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$C = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

D : $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ $\qquad E_f =]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[.$

f est continue sur $]1,\ +\infty[$ donc D existe

Prop. 80

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x}.$$

Ln x

Si l'on pose $u(x) = \ln x$, on a

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Il fallait y penser…

Donc f admet pour primitives $\ln|u| + C$

$$F(x) = \ln|\ln x| + C.$$

$$D = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = [\ln(\ln x)]_e^{e^2}$$

$$D = \ln 2 - \ln 1 = \mathbf{\ln 2}.$$

Ici $x > 1$ donc $\ln x > 0$

$|\ln x| = \ln x$

$\ln e = 1$

$\ln e^2 = 2$

181 **Énoncé**

> Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\cos x)^{2n+1}\,\mathrm{d}x$ (n entier naturel).
>
> Démontrer que $I = 0$ quel que soit n.

Solution

Utilisons le changement de variable affine :

Surtout, ne pas tenter un calcul *direct*, par une autre méthode.

$$t = \frac{\pi}{2} - x.$$

Prop. 125 $\quad x = \dfrac{\pi}{2} - t \qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$

Pour $x = \dfrac{\pi}{6}$, on a $t = \dfrac{\pi}{3}$ et pour $x = \dfrac{5\pi}{6}$, on a $t = -\dfrac{\pi}{3}$.

D'où $\quad I = (-1)\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)^{2n+1} dt$

Cet exercice montre l'intérêt de l'utilisation d'un changement de variable dans certains cas.

donc $\quad I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin t)^{2n+1} \cdot \mathrm{d}t.$

Prop. 116

La fonction : $t \longmapsto \sin^{2n+1} t$ est une fonction **impaire** donc $I = 0$ pour tout n.

182 Énoncé

Utiliser un changement de variable pour calculer :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)dx; \quad J=\int_0^1 \ln(4x+1)\,dx.$$

Solution

- **Calcul de I** : Posons $t=4x-\frac{\pi}{6}$.

  Si $x=0$, alors $t=-\frac{\pi}{6}$.

  Si $x=\frac{\pi}{4}$, alors $t=\frac{5\pi}{6}$.

  Avec cette nouvelle variable t :

  $$I=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \sin t\,dt$$

  d'où

  $$I=\frac{1}{4}[-\cos t]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{4}\left[+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

- **Calcul de J** : Posons $t=4x+1$.
  Pour $x=0$, alors $t=1$. Pour $x=1$, alors $t=5$.
  Avec cette nouvelle variable :

  $$J=\frac{1}{4}\int_1^5 \ln t\,dt.$$

  En intégrant par parties :

  $$\begin{cases} u'(t)=1 & u(t)=t \\ v(t)=\ln t & v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$$

  $$J=\frac{1}{4}[t\ln t]_1^5-\frac{1}{4}[t]_1^5=\frac{1}{4}[5\ln 5-5+1]$$

  $$\mathbf{J=\frac{5}{4}\ln 5-1.}$$

On peut aussi utiliser une primitive de $\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$.

$F(x)=-\frac{1}{4}\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Prop. 125

$\ln(4x+1)$ est continue sur $\left]-\frac{1}{4};+\infty\right[$.

Voir ici l'exercice 180.

183 Énoncé

Calculer $I_n=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{\pi}^{4n\pi} x\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Montrer que (I_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme I_0.

On pose : $S_n=I_0+I_1+\ldots+I_n$. Calculer S_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Solution

$x \longmapsto x \cos \frac{x}{2}$ est **continue** donc intégrable sur $[\pi ; 4n\pi]$.

Voir aussi l'exercice $\boxed{176.}$

Posons : $\begin{cases} u(x) = x & \text{d'où} \quad u'(x) = 1 \\ v'(x) = \cos \frac{x}{2} & \text{d'où} \quad v(x) = 2 \sin \frac{x}{2}. \end{cases}$

Le choix de u et de v' est, encore ici, une question de bon sens.

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\left[2x \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4n\pi} - \int_{\pi}^{4n\pi} 2 \sin \frac{x}{2} \, dx \right)$$

Prop. 124

$2\sin\frac{x}{2}$ ... $= -4\cos\frac{x}{2}$

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left[2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{4n\pi}$$

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot (8n\pi \times 0 + 4 - 2\pi - 0) = \frac{1}{2^n} (2 - \pi).$$

Or : $$I_n = \frac{2-\pi}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = I_{n-1} \times \frac{1}{2}.$$

On remarque que $I_n < 0$ (car $\pi > 2$).
On ne pouvait pas prévoir ce résultat *a priori* car $x \cos \frac{x}{2}$ change de signe sur $[\pi, 4n\pi]$.

Donc (I_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, de 1[er] terme $I_0 = 2 - \pi$.

$$S_n = I_0 + I_1 + \ldots + I_n = (2 - \pi) \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right]$$

$$S_n = 2(2 - \pi) \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right).$$

La suite I_n est convergente car $|q| < 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2(2 - \pi)$.

Prop. 110

184 Énoncé

En utilisant des intégrations par parties successives, calculer
$$A = \int_0^1 x^3 e^{-\frac{x}{2}} \, dx.$$

Solution

$x \longmapsto x^3 e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **Première intégration par parties**

$\begin{cases} f(x) = x^3 & \text{d'où} \quad f'(x) = 3x^2 \\ g'(x) = e^{-\frac{x}{2}} & \text{d'où} \quad g(x) = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

$$A = \left[-2x^3 e^{-\frac{x}{2}} \right]_0^1 + 6 \int_0^1 x^2 e^{-\frac{x}{2}} \, dx.$$

Ce n'est pas très difficile, mais cela demande une bonne attention (coefficients!).

Prop. 124

- **Seconde intégration par parties pour B**

$$\begin{cases} h(x)=x^2 & \text{d'où} \quad h'(x)=2x \\ g'(x)=e^{-\frac{x}{2}} & \text{d'où} \quad g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$B=\int_0^1 x^2e^{-\frac{x}{2}}\,dx=\left[-2x^2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1+4\int_0^1 xe^{-\frac{x}{2}}\,dx.$$

- **Troisième intégration par parties pour C**

$$\begin{cases} p(x)=x & \text{d'où} \quad p'(x)=1 \\ g'(x)=e^{-\frac{x}{2}} & \text{d'où} \quad g(x)=-2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$$

$$C=\int_0^1 xe^{-\frac{x}{2}}\,dx=\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1+2\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$$

$\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ est calculable directement :

$x \longmapsto -2e^{-\frac{x}{2}}$ est une primitive de $x \longmapsto e^{-\frac{x}{2}}$

$$D=\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}}\,dx=\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1$$

d'où

$A=\left[-2x^3e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1+6B$

$A=\left[-2x^3e^{-\frac{x}{2}}-12x^2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1+24C$

$A=\left[-2x^3e^{-\frac{x}{2}}-12x^2e^{-\frac{x}{2}}-48xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1+48D$

$A=\left[(-2x^3-12x^2-48x-96)\,e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1$

$A=(-2-12-48-96)\,e^{-\frac{1}{2}}+96$

$A=96-\dfrac{158}{\sqrt{e}}\approx \mathbf{0{,}168.}$

$(e^{ax+b})'=ae^{ax+b}$

$(e^{-\frac{x}{2}})'=-\frac{1}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}.$

$\boxed{\text{Prop. } 90}$

à reprendre calculs.

Ne pas faire tous les calculs intermédiaires, attendre la fin!

D'AUTRES POUR CHERCHER

185 **Énoncé**

$f(x) = \cos x \times \sin^2 x$; $g(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; $p(x) = \sin x \times \cos^5 x$.

Déterminer les primitives de chacune de ces fonctions.

186 **Énoncé**

Calculer

$$I = \int_2^4 \frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad J = \int_{-3}^0 |x^2 - x - 2|\,\mathrm{d}x; \qquad K = \int_1^2 \frac{(x+1)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Indication

> Écrire I sous forme de somme. Pour J étudier d'abord le signe de $(x^2 - x - 2)$. Justifier d'abord l'existence de chaque intégrale.

187 **Énoncé**

Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x; \qquad J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x; \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Indication

> Penser à l'existence de ces intégrales.

188 **Énoncé**

Calculer : $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 - 3\cos x}\,\mathrm{d}x$; $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 3x}{1 + \cos 3x}\,\mathrm{d}x$.

Indication

> Pour tout x de $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, $\cos x \neq \dfrac{1}{3}$.

189 **Énoncé**

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.

a) *Démontrer qu'il existe deux réels* a *et* b *tels que* $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.

b) *Calculer* $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ *en justifiant l'existence de cette intégrale.*

c) $g(x) = [f(x)]^2$. *Calculer* $\displaystyle\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x$.

Indication

a) $a=1$ et $b=-2$. b) $I=1+\ln\left(\frac{9}{16}\right)$. c) $J=\frac{4}{3}+\ln\frac{81}{256}$.

190

Énoncé

Calculer

$$A=\int_0^1 (x+3)(x^2+6x+4)^2\,dx; \qquad B=\int_{-2}^{1}\sqrt{x+3}\,dx; \qquad C=\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx.$$

Indication

Pour le calcul de A, surtout ne pas développer!

191

Énoncé

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \times \cos 2x\,dx; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x(\cos^2 2x)\,dx; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}\,dx.$$

192

Énoncé

Calculer

$$I=\int_1^2 \frac{4x^5-2x^3+x^2-1}{3x^2}\,dx; \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2x+1)-4\cos 3x)\,dx;$$

$$K=\int_{-1}^{1} (x-1)^2(x+1)^2\,dx.$$

193

Énoncé

Écrire $\cos^2 x$ *et* $\sin^4 x$ *en fonction de* $\cos 2x$ *et* $\cos 4x$.

Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos^2 x+\sin^4 x)\,dx.$$

194

Énoncé

On pose $I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx$ (*n est un naturel supérieur à* 0).

1) *Calculer* I_1.

2) *Montrer que pour tout naturel* n : $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$.

3) En déduire I_2 et I_3.

4) *Calculer alors* $J=\int_0^1 (x^3+2x^2-2x)\,e^x\,dx$.

Indication

2) Faire une intégration par parties. 4) Utiliser le calcul de I_1, I_2 et I_3.

195 **Énoncé**

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx,\quad B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

Calculer $A+B$, $A-B$ et en déduire A et B.

Indication

Penser d'abord à l'existence! $A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

196 **Énoncé**

Calculer $F(x)=\displaystyle\int_0^x 10^t\,dt$ *en fonction du réel x puis résoudre l'équation* $F(x)=6$.

Indication

Penser que $10^t=e^{t\ln 10}$ dont la dérivée est $\dfrac{1}{\ln 10}\,e^{t\ln 10}$.

197 **Énoncé**

Calculer la valeur moyenne de la fonction f, pour I donné, dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=4x^2-5x+3$ et $I=[0;3]$.

b) $f(x)=\sin^2 x$ et $I=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $I=[e;2e]$.

Indication

Revoir la définition de la valeur moyenne.

198 **Énoncé**

Calculer $\displaystyle\int_2^4\frac{1+x+x^2}{(x-1)^2}\,dx$, *par changement de variable, en posant* $X=x-1$.

199 **Énoncé**

Calculer $I=\displaystyle\int_2^3\frac{3+2t}{t-1}\,dt$ *et* $J=\displaystyle\int_0^1\frac{t^2+3t-1}{2-t}\,dt$ *à l'aide d'un changement de variable.*

Indication

Pour I, poser $X=t-1$ et pour J poser $X=2-t$.

200

Énoncé

1) *Calculer* $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

2) *Calculer* $I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$ *en intégrant par parties.*

3) *On pose* $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

Trouver une relation entre I_n *et* I_{n-1}. *En déduire* I_2 *et* I_3.

Indication

$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$. Attention : la dérivée de $u = 1-x$ est $u' = -1$.
3) Partir de I_n en posant $u(x) = x^n$ et $v'(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$

$$(1-x)^{\frac{3}{2}} = (1-x)(1-x)^{\frac{1}{2}}. \qquad I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n).$$

201

Énoncé

Calculer $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos x)^4(1-\cos x)^3\,\mathrm{d}x$.

Indication

$f(x) = \sin^6 x + \sin^6 x \cdot \sin x$. Linéariser $\sin^6 x$. $\qquad I = \frac{5\pi}{48} + \frac{1}{448} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

202

Énoncé

Calculer $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t} \cdot \sin t\,\mathrm{d}t$.

Indication

Deux intégrations par parties. $\qquad u_n = \frac{(-1)^n}{2e^{n\pi}}(1+e^{-\pi})$.

203

Énoncé

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. *Démontrer que pour tout* x : $x - x^3 + x^5 - x^7 \leqslant f(x) \leqslant x - x^3 + x^5$.
En déduire un encadrement de $I = \int_0^{0,2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication

Penser à utiliser les suites géométriques pour la première question.

DES EXERCICES CORRIGÉS

204 **Énoncé**

$f(x)=x^2$ et $g(x)=2x-x^2$. Démontrer que l'aire de la surface, ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$ est le tiers de l'aire d'un carré de côté 1.

Solution

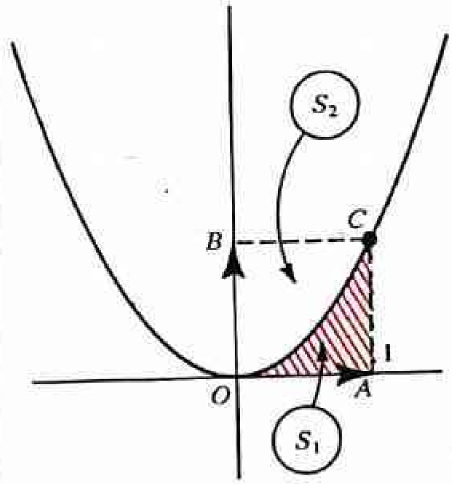
f est définie sur $\mathbb{R}$ et, $f(x) \geq 0$ pour tout x.
La représentation graphique de f est une parabole, dont $(O, \vec{j})$ est axe de symétrie.
$f(1)=1$, donc la parabole passe par le point $C(1; 1)$.
La surface **hachurée** S_1 est définie par :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Son aire est : $\mathcal{A}_1 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

L'aire du carré étant **1** en cm^2, l'aire de S_2 est donc :

$$\mathcal{A}_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$



Étudier les variations de g.

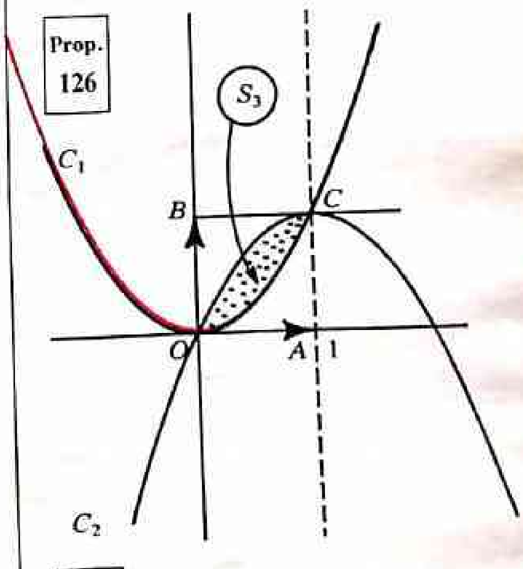
La courbe représentative de g est une parabole de sommet $C(1, 1)$ et d'axe la droite d'équation $x=1$.
Pour connaître la **position relative** des deux courbes, étudions la différence :

$$f(x)-g(x)=x^2-(2x-x^2)=2x^2-2x=2x(x-1).$$

$\boldsymbol{f(x)-g(x)=0}$ équivaut à $x=0$ ou $x=1$.
Les points d'intersection sont donc $O(0; 0)$ et $C(1; 1)$.
Si $x \in [0; 1]$: $2x^2-2x \leq 0$ donc $g(x) \geq f(x)$.
La courbe de g est donc **au-dessus** de la courbe de f dans cet intervalle.
Un point de la surface S_3, située entre les deux courbes, est donc caractérisé par :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) \leq y \leq g(x).$$

Prop. 126



L'aire de S_3 : $\mathcal{A}_3 = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\mathcal{A}_3 = \int_0^1 (g(x)-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x-2x^2)\,\mathrm{d}x,$$

d'où $\mathcal{A}_3 = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Prop. 129

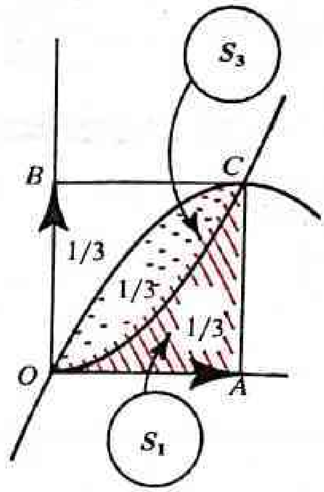
Unité : cm^2 si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm.

$\frac{1}{3}$ unité d'aire.

En définitive, les deux courbes découpent dans le carré $OACB$ trois surfaces :

$$S_1 \quad \text{d'aire } \frac{1}{3}; \qquad S_3 \quad \text{d'aire } \frac{1}{3}$$

et la troisième surface qui est $S_1 - S_3$, d'aire $\frac{1}{3}$.
Ces trois surfaces ont donc la même aire.



205 Énoncé

1) $f(x) = \cos x + \cos^2 x$. Étudier f, x décrivant $[-\pi; 3\pi]$. Tracer la courbe représentative de f.
2) Calculer l'aire de la surface délimitée par cette courbe, l'axe $x'x$ et les deux droites d'équations : $x = 0$ et $x = \pi$.
3) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et en donner une interprétation géométrique.

Solution

1) f est périodique et de période 2π : on peut l'étudier pour $x \in [-\pi; \pi]$.
f est paire : il suffit de l'étudier sur $[0; \pi]$
$f'(x) = -\sin x - 2 \sin x \cdot \cos x$
$f'(x) = -\sin x(2 \cos x + 1)$
Sur $[0; \pi]$, $f'(x)$ s'annule en $x = 0$; $x = \pi$ et $x = \frac{2\pi}{3}$.
Sur cet intervalle : $\sin x \geqslant 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est le signe contraire de : $2 \cos x + 1$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos x + 1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	0

Déf. 11

$f(x + 2\pi) = f(x)$

$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

$f(0) = 2$

$f(\pi) = -1 + 1 = 0$

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$.

Cherchons l'intersection de la courbe avec l'axe $x'x$, ce qui est indispensable pour le calcul d'aire de la question 2.

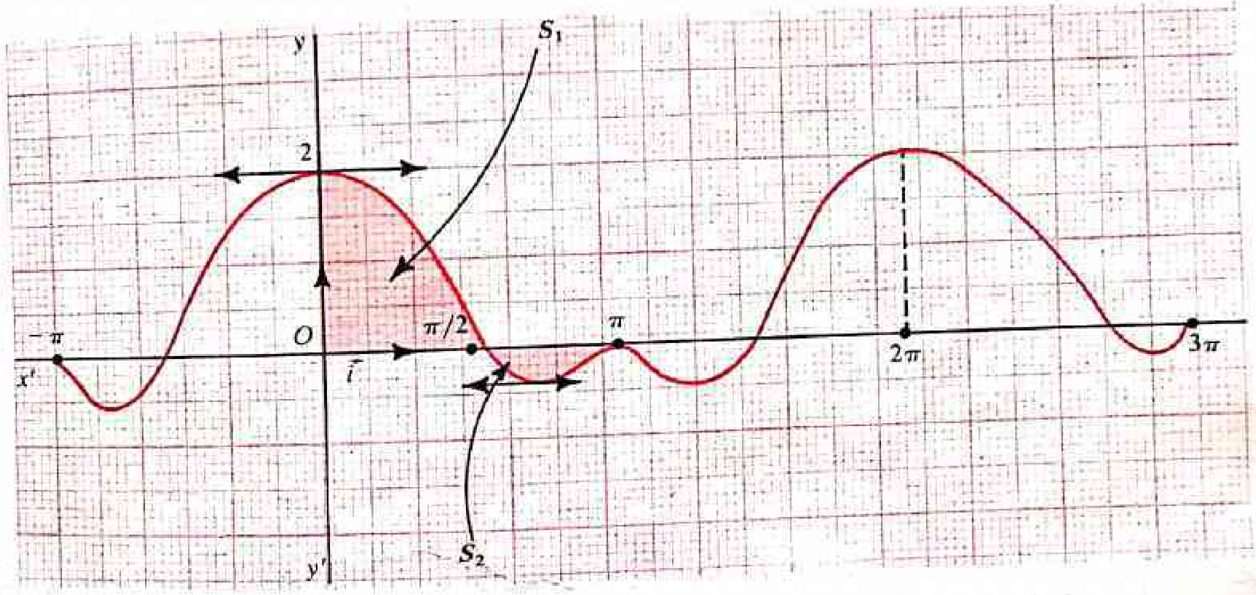
$$f(x)=\cos x(1+\cos x)$$

$f(x)=0$ équivaut à $\cos x=0$ ou $\cos x=-1$

d'où, pour $x\in[0;\pi]$: $x=\frac{\pi}{2}$ ou $x=\pi$.

Tracer avec précision la courbe pour x décrivant $[0;\pi]$: placer les points $(0;2)$ et $\left(\frac{2\pi}{3};-\frac{1}{4}\right)$ à tangente parallèle à $x'x$, puis les points $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ et $(\pi;0)$ sur l'axe $x'x$.

Par symétrie autour de yy', on obtient la courbe sur $[-\pi;0]$ (fonction paire) et par translation de vecteur $\vec{u}=2\pi\vec{i}$, on obtient la courbe pour x décrivant $[\pi;3\pi]$.



2) La surface en question est la réunion de deux surfaces : l'une au-dessus de $x'x$ d'aire S_1, l'autre, au-dessous, d'aire S_2

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \quad \left(\text{car } f(x)\geqslant 0 \text{ sur } \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$S_2=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx \quad \left(\text{car } f(x)\leqslant 0 \text{ sur } \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]\right).$$

Cherchons une primitive F de f :

$$f(x)=\cos x+\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$$

Prop. 126

Prop. 127

Si $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ cm, l'unité d'aire est 1 cm².

d'où $\quad F(x) = \sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + C$

$$S_1 = [F(x)]_0^{\pi/2} = \left(1 + \frac{\pi}{4} + C\right) - (C) = 1 + \frac{\pi}{4}$$

(unités d'aire)

$$S_2 = [F(x)]_{\pi/2}^{\pi} = \left(1 + \frac{\pi}{4} + C\right) - \left(\frac{\pi}{2} + C\right) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

(unités d'aire)

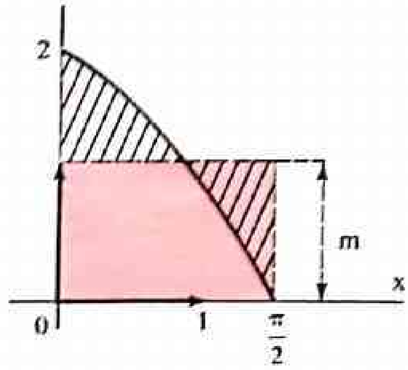
d'où $\quad \boldsymbol{S_1 + S_2 = 2}$ (unités d'aires).

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = S_1 = 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{4+\pi}{4}.$

La valeur moyenne m de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est donc

$$m = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \times \left(\frac{4+\pi}{4}\right) = \frac{4+\pi}{2\pi}.$$

C'est la largeur du rectangle d'aire S_1, de longueur $\frac{\pi}{2}$. Sur le dessin, les deux surfaces hachurées sont donc **équivalentes** : elles ont la même aire.



Déf. 46

206 Énoncé

> f est la fonction définie par $f(x) = x + 5 - \frac{4}{x^2}$.
>
> 1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions x_1, x_2, x_3 que l'on calculera. On pose $x_1 < x_2 < x_3$.
> 2) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
> 3) Calculer l'aire de la surface déterminée par
>
> $$x_1 \leq x \leq x_2, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Solution

1) $f(x)$ existe si, et seulement si, $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2};$$

$$f(x) = 0 \iff x^3 + 5x^2 - 4 = 0.$$

Nous remarquons que $f(-1) = 0$ donc, dans le polynôme $x^3 + 5x^2 - 4$ on peut factoriser $x + 1$.

On trouve : $x^3 + 5x^2 - 4 = (x+1)(x^2 + 4x - 4)$.

D'où $\quad x_1 = -2 - 2\sqrt{2},\ x_2 = -1,\ x_3 = -2 + 2\sqrt{2}.$

Équation du 3ᵉ degré : il faut chercher une racine évidente.

Division de polynômes ou utilisation de $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

2) $f(x)$ est continue et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $]0, +\infty[$. $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} (f(x)-(x+5))=0$. La droite d'équation $y=x+5$ est asymptote à la courbe de f.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty.$$

L'axe yy' est asymptote.

$$f'(x) = 1 + \frac{8x}{x^4} = \frac{x(x+2)(x^2-2x+4)}{x^4}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x+2)$.
D'où les variations de f.

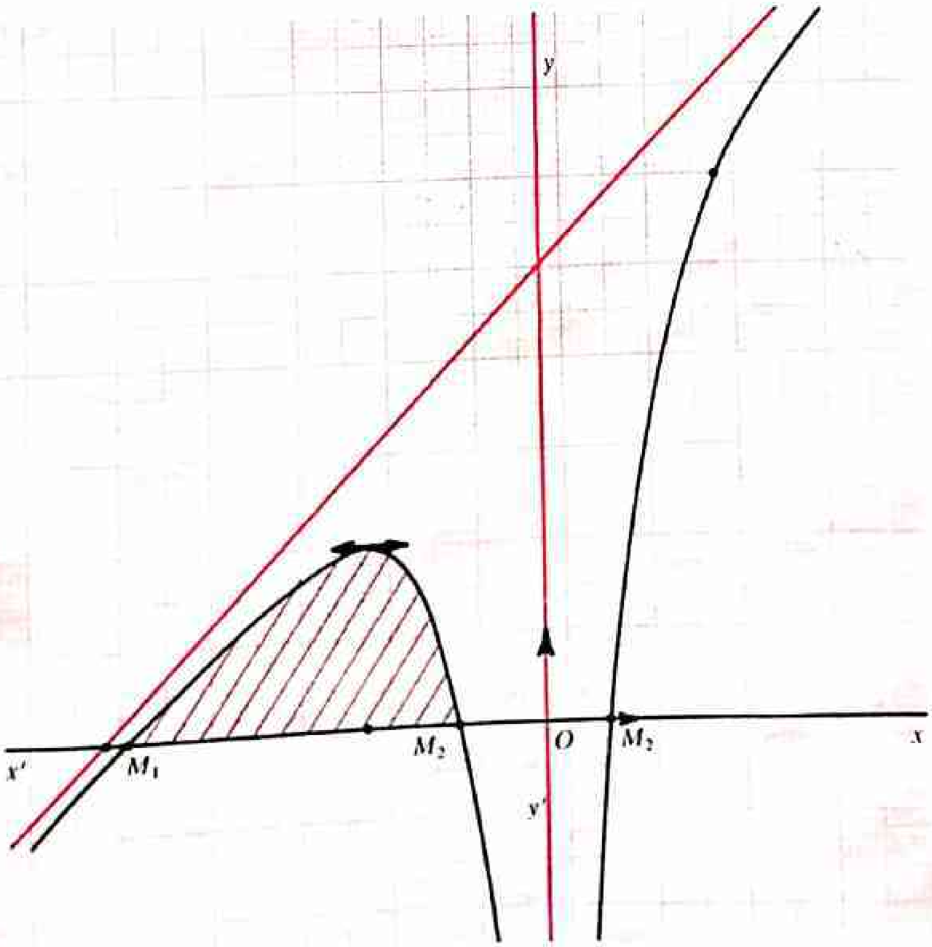
3) Sur $[-2-2\sqrt{2}; -1]$, $f(x)$ est **positif.**
f est continue sur cet intervalle, donc f est intégrable. $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x}$.

Faire une étude précise de f et tracer sa courbe avant tout calcul d'aire.

Déf. 31

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Prop. 126



L'aire $\mathcal{A}$ cherchée est donc égale à :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \quad \text{soit} \quad \left[\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

$$F(-1)=\frac{1}{2}-5-4=-8{,}5$$

$$F(-2-2\sqrt{2})=-2-8\sqrt{2}.$$

$\mathcal{A}=-8{,}5+2+8\sqrt{2}=\mathbf{8\sqrt{2}-6{,}5}$ unités d'aire.

207 **Énoncé**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe C d'équation $a^2y^2-x^2(a^2-x^2)=0$ avec $a>0$.
Calculer l'aire de la surface intérieure à la courbe C.
Calculer le volume du solide engendré par la rotation de C autour de $x'x$.

Solution

L'équation équivaut à : $y^2=\dfrac{x^2}{a^2}(a^2-x^2)$
c'est-à-dire

$$y=\frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \textbf{ou} \quad y=\frac{-x}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

avec $a^2-x^2 \geqslant 0$.

$a^2-x^2 \geqslant 0$ équivaut à $x \in [-a;\, a]$.

Construisons C_1, courbe de

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

puis C_2, la courbe représentative de $f_2=-f_1$. La courbe C est la réunion des deux courbes C_1 et C_2.

$M(x,\, y) \in C$ équivaut à $M \in C_1$ **ou** $M \in C_2$.

f_1 est continue sur $[-a;\, a]$ et dérivable sur $]-a;\, a[$; f_1 est **impaire.**

$$f_1'(x)=\frac{1}{a}\left[\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right].$$

Étudions f_1 sur $[0;\, a]$.

$f_1'(x)=0$ pour $x=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ sur cet intervalle.

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f_1'(x)=-\infty$. La tangente à la courbe C_1 en $A(a;\, 0)$ est parallèle à l'axe $y'y$. Après le tracé de l'arc $\widehat{OBA}$, on trace l'arc $\widehat{ODA'}$ par symétrie par rapport à O.

La courbe C est obtenue en construisant C_2, symétrique de C_1 par rapport à $x'x$.

x	0		$\frac{a}{\sqrt{2}}$		a
f_1'	1	$+$	0	$-$	‖
f_1	0	↗	$\frac{a}{2}$	↘	0

Prop. 126

- **L'aire** totale est, compte tenu des symétries, égale à 4 fois l'aire de la surface S définie par :

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Comme $f_1(x) \geqslant 0$ sur $[0; a]$, on a

$$\mathcal{A}(S) = \int_0^a \frac{x}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a x(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Une primitive de f_1 est

$$F_1(x) = -\frac{1}{3a}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

d'où $\mathcal{A}(S) = [F_1(x)]_0^a = \frac{1}{3a} \times a^3 = \frac{1}{3}a^2$

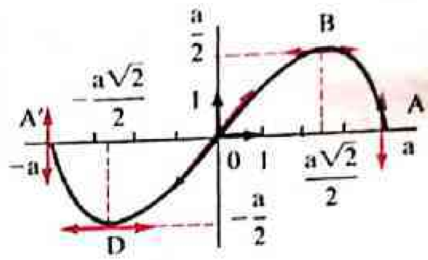
d'où **l'aire totale** : $\mathcal{A}(S) = \frac{4}{3}a^2$ (unités d'aire).

- Compte tenu des symétries, le **volume** cherché est

$$v = 2\int_0^a \pi f_1^2(x)\,dx = \frac{2\pi}{a^2}\int_0^a x^2(a^2-x^2)\,dx$$

$$v = \frac{2\pi}{a^2}\left[\frac{1}{3}a^2x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^a = \frac{2\pi}{a^2}\left(\frac{1}{3}a^5 - \frac{1}{5}a^5\right)$$

$$v = \frac{4\pi a^3}{15} \text{ (unités de volume).}$$

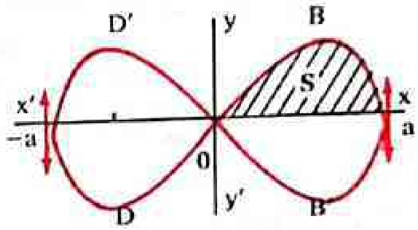


$u(x) = a^2 - x^2 \quad u'(x) = -2x.$

$$f_1 = -\frac{1}{2a}u' \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

d'où $$F_1 = -\frac{1}{3a}u^{\frac{3}{2}} + C.$$

Prop. 127



Prop. 134

208 **Énoncé**

> En repère orthonormé, on considère le demi-cercle d'équation $x^2+y^2=R^2$ avec $y \geqslant 0$. Calculer le volume de la sphère engendrée par la rotation de ce cercle autour de l'axe $x'x$.

Solution

$y^2 = R^2 - x^2$ avec $|x| \leqslant R$.

Ce volume de révolution est donné par :

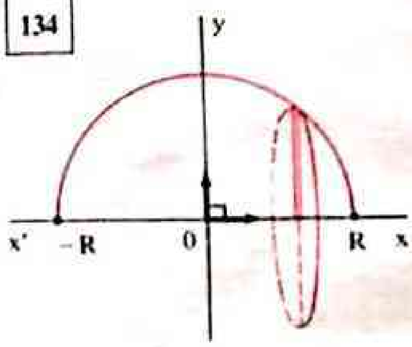
$$V = \int_{-R}^{R} \pi y^2\,dx = \int_{-R}^{R} \pi(R^2-x^2)\,dx$$

$$V = \pi\left[R^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-R}^{R} = 2\pi\left[R^3 - \frac{1}{3}R^3\right] = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(unités de volume).

On retrouve un résultat bien connu depuis la classe de Cinquième.

Prop. 134



209 Énoncé

$f(x)=2e^x-e^{2x}$. Étudier les variations de f et construire la courbe qui coupe en A l'axe $x'x$ et en B l'axe $y'y$. Le repère est orthonormé.

Calculer l'aire de la surface comprise entre l'axe $x'x$, l'axe $y'y$ et l'arc $\widehat{AB}$ de la courbe.

Calculer le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB}$ autour de $x'x$.

Solution

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=2e^x-2e^{2x}=2e^x(1-e^x)$$

$$\lim_{-\infty} f=0 \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f=-\infty.$$

$f'(x)=0$ pour $x=0$; $f'(x)>0$ pour $x<0$.
$f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour $e^x=2$ d'où $x=\ln 2$.
L'axe $x'x$ est asymptote à la courbe en $(-\infty)$.
$f(x)$ est positif sur $[0; \ln 2]$ donc **l'aire** demandée est donné par

$$\mathcal{A}=\int_0^{\ln 2}(2e^x-e^{2x})\,\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A}=\left[2e^x-\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2}=\frac{1}{2} \text{ (unité d'aire).}$$

Le **volume** de révolution est donné par :

$$v=\int_0^{\ln 2}\pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\ln 2}(4e^{2x}-4e^{3x}+e^{4x})\,\mathrm{d}x$$

$$v=\pi\left[2e^{2x}-\frac{4}{3}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^{\ln 2}$$

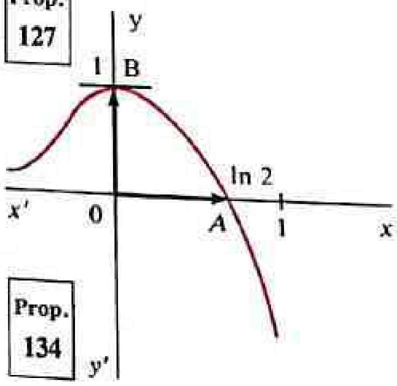
$$v=\pi\left[\left(8-\frac{32}{3}+\frac{16}{4}\right)-\left(2-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]=\frac{5\pi}{12}$$

(unités de volume).

$f(x)=e^x(2-e^x)$
$\lim_{x\to+\infty}(e^x)=+\infty$
donc $\lim_{+\infty} f=-\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Prop. 127



Prop. 134

210 Énoncé

$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$; $\quad g(x)=\int_1^x\sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad h=g\circ f$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur $[1; +\infty[$.
Démontrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, calculer $h'(x)$ et en déduire $h(x)$.

Solution

$t \longmapsto \sqrt{t^2-1}$ est continue sur $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$ donc son intégrale sur $[1; x]$ existe à condition que $x\geqslant 1$.

g est donc définie sur $[1; +\infty[$. g est une primitive de
$$1 \longmapsto \sqrt{x^2-1}$$
sur cet intervalle : $g'(x)=\sqrt{x^2-1}$.
g est donc continue sur $[1; +\infty[$ et $g(1)=0$.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable :
$$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$
$f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ avec $f(0)=1$.
f est donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1; +\infty[$.
g étant continue et dérivable sur $[1; +\infty[$, il en résulte que l'application composée $h=g\circ f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$
$$h'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$$
d'où $\quad h'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\times\sqrt{f^2(x)-1}$
$$f^2(x)-1=\frac{1}{4}[e^{2x}+e^{-2x}+2-4]=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2$$
donc $\quad h'(x)=\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{-2x}-\frac{1}{2}$.

h est une primitive de cette fonction :
$$h(x)=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}-\frac{1}{2}x+c$$
et l'on sait que $h(0)=g(f(0))=g(1)=0$ d'où
$$\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+c=0 \qquad c=0$$
donc $\quad \boldsymbol{h(x)=\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}-\frac{1}{2}x}$.

Déf. 45

Prop. 130

x	0	$+\infty$
f	1 ↗	$+\infty$

Prop. 44 Prop. 39

$2e^x\times e^{-x}=2$
$(e^x+e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}+2$
$(e^x-e^{-x})^2=e^{2x}+e^{-2x}-2$.

211 Énoncé

g est la fonction de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\quad g(x)=\tan x-\frac{4}{\pi}x$.

1) Étudier les variations de sa dérivée g', et démontrer qu'il existe un unique réel x_0 de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $g'(x_0)=0$.
En déduire les variations de g et le signe de $g(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2) Démontrer que, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$: $\quad 0\leq(\tan x)^n\leq\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n$.

3) Soit, pour n entier supérieur à 0 : $\quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n\,dx$.
Démontrer que I_n est convergente et déterminer sa limite.

Solution

1) Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$: $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{4}{\pi}=1-\frac{4}{\pi}+\tan^2 x$

$$g''(x)=2\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}.$$

Sur $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, $g''(x)>0$ donc g' est strictement croissante

$$g'(0)=1-\frac{4}{\pi}<0 \quad \text{et} \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{4}{\pi}>0.$$

g' étant continue sur l'intervalle considéré, il existe un unique réel x_0 tel que $g'(x_0)=0$.

Sur $[0; x_0[$, on a $g'(x)<0$; sur $\left]x_0, \frac{\pi}{4}\right]$: $g'(x)>0$.

D'où le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

Puisque $g(0)=0$ et $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, le minimum m de g sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ est un réel **strictement négatif;** pour tout $x\in\left]0; \frac{\pi}{4}\right[$, on a $g(x)<0$.

2) Il en résulte que pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$\tan x-\frac{4}{\pi}x\leqslant 0$$

d'où $\quad 0\leqslant\tan x\leqslant\frac{4x}{\pi}$ et $0\leqslant(\tan x)^n\leqslant\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n$.

3) Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ on a : $\quad 0\leqslant(\tan x)^n\leqslant\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n$

d'où $$0\leqslant I_n\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4x}{\pi}\right)^n\mathrm{d}x$$

donc $$0\leqslant I_n\leqslant\left(\frac{4}{\pi}\right)^n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{n+1}\,\frac{\pi}{4}.$$

La suite u définie par : $u_n=\frac{1}{n+1}$ est convergente et sa limite est 0.

g est définie, continue et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

La dérivée de :
$u : x \longmapsto \tan x$
est u' :
$x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Prop. 42

x	0		x_0		$\frac{\pi}{4}$
g''	0	+		+	4
g'		−	0	+	
g	0	↘	m	↗	0

Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$: $\tan x\geqslant 0$

Prop. 121 Très important pour encadrer une intégrale.

$[x^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$

Déf. 41

$\lim_{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$

$$\lim_{+\infty} u_n = 0.$$

Or : $$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi}{4} u_n$$

donc, puisque $\lim \frac{\pi}{4} u_n = 0$ la suite I_n est convergente et

$$\lim_{+\infty} I_n = 0.$$

Prop. 104 · Prop. 110

$\lim_{+\infty} I_n = 0$

212 **Énoncé**

Soit la suite $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1) Écrire u_1; u_2; u_3. Combien y a-t-il de fractions dans l'écriture de u_n?

2) Calculer $u_{n+1} - u_n$.
Démontrer que la suite u est décroissante et qu'elle est bornée.

3) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ avec $x \in [1; 2]$.
On pose $v_n = f(1) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)$.
Montrer que $v_n = nu_n$. En déduire la limite de u_n.

Solution

1) $u_1 = 1$; $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; $u_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$.

u_n est une somme de n **fractions** : le premier dénominateur est n, le dernier est $(2n-1)$.
Le nombre des termes est $(2n-1) - n + 1 = n$.
u_{n+1} est donc la somme de $(n+1)$ fractions.

u_n est définie par une somme.

Déf. 38

2) $$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0.$$

$2n+1 > 2n$ donc $\frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n}$

La suite u est donc **décroissante**. Tous ses termes sont visiblement positifs et u_1 est le plus grand. Donc pour tout n : $0 < u_n \leqslant 1$. u_n est **majorée**. Cette suite est **donc** convergente.

Prop. 102

Mais comment calculer sa limite?

3) $v_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}$.

$v_n = 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \ldots + \frac{n}{2n-1}$

$v_n = n\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right]$

donc $\quad v_n = nu_n$ donc $u_n = \frac{1}{n}\, v_n$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(1+\frac{k}{n}\right) + \ldots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right].$$

u_n est la somme des aires de n rectangles, de largeur $\frac{1}{n}$, et de longueurs :

$f(1)$, $f\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ..., $f\left(1+\frac{k}{n}\right)$, ..., $f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)$.

Or, f est continue sur $[1, 2]$.
Il en résulte que u_n est **convergente** et que sa limite est :

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$L = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^2 = \mathbf{\ln 2 \approx 0{,}693\,14}$$

Avec un ordinateur, pour $n = 1\,000$, on a trouvé $u_{1\,000} \approx 0{,}693\,39$.

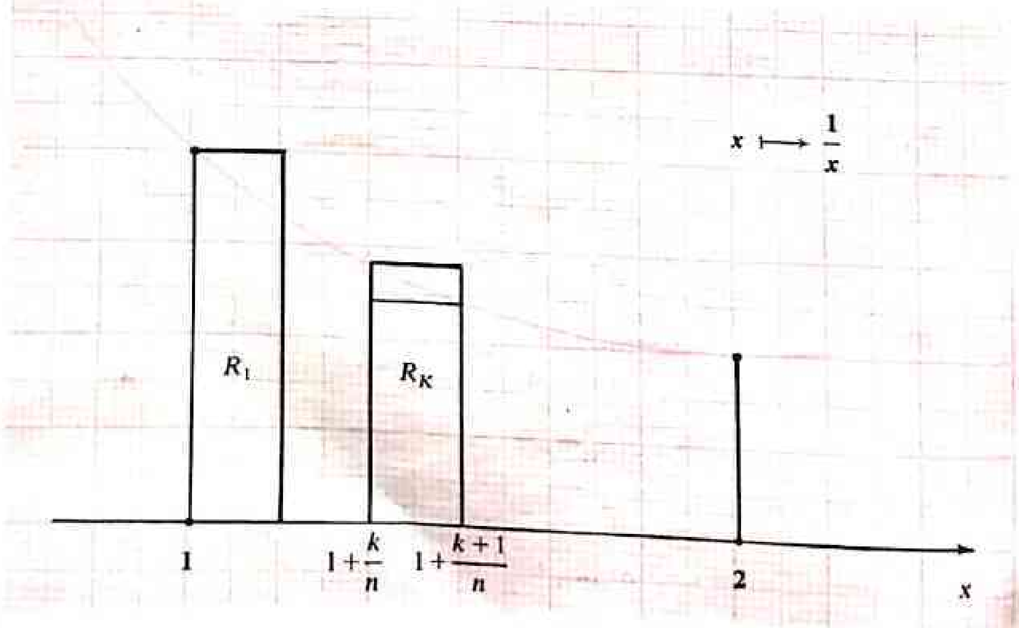
puis pour $n = 10\,000 \qquad u_{10\,000} \approx 0{,}693\,17$.

L'intervalle $[1; 2]$ est divisé en n intervalles :

$1;\ 1+\frac{1}{n};\ 1+\frac{2}{n};\ \ldots;\ 1+\frac{n-1}{n};\ 2.$

Prop. 131

Vous pouvez vous-même faire quelques calculs avec une machine programmable ou, mieux, un ordinateur.
Mais la *convergence* est lente... il vous faudra de la patience... et de la *mémoire*.



213 Énoncé

fait avec ABIGAIL le 17/03/87

Soit la fonction f définie par $f(x)=(1-x)^n \cdot e^{\frac{x}{2}}$. ($n$ entier supérieur à 0).

1) Démontrer que la restriction de f à $[0; 1]$ est une bijection de cet intervalle sur lui-même.

2) On pose : $I_n=\dfrac{1}{2^{n+1}(n!)}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ pour n entier supérieur à 0.

   Déterminer une suite convergente u telle que, pour tout n : $0 \leqslant I_n \leqslant u_n$.
   En déduire que I_n est convergente et trouver sa limite.

3) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

4) On pose : $v_n=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{1}{n!}$ $\quad(n\in\mathbb{N}^*)$.

   Démontrer que pour tout $n>0$: $I_n=\sqrt{e}-v_n$.
   v_n est-elle convergente? Quelle est sa limite?

Solution

1) f est **continue** et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; 1]$.

f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,e^{\frac{x}{2}}\cdot(1-x)^{n-1}(1-2n-x)$$

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1 & \text{donc} \quad 1-x\geqslant 0 \\ 1-2n<0 & \text{donc} \quad x>1-2n \end{cases}$$

donc $\quad f'(x)<0$ sur $]0; 1[$

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad f(1)=0.$$

x	0	1
f'	$-$	0
f	1 $\searrow$	0

f est donc une **bijection décroissante** de $[0; 1]$ sur lui-même.

Prop. 44

2) Pour tout t de $[0; 1]$: $0\leqslant f(t)\leqslant 1$

donc $\quad 0\leqslant\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ et $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant 1.$

f est intégrable sur $[0, 1]$ pour tout n puisqu'elle est continue sur cet intervalle.

Prop. 121

Ainsi, pour tout naturel n $(n>0)$ on a

$$0\leqslant I_n\leqslant\frac{1}{2^{n+1}\cdot n!}$$

Majoration d'une suite par une suite convergente u_n :

$$0\leqslant I_n\leqslant u_n.$$

Posons : $\quad u_n=\dfrac{1}{2^{n+1}\cdot n!}$.

La suite $\dfrac{1}{n!}$ est convergente : sa limite est 0.

La suite géométrique $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ est convergente et sa limite est 0, donc u_n est convergente et sa limite est 0. I_n est donc convergente et $\lim\limits_{+\infty} I_n=0$.

Suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2}<1$.

Prop. 110

3) Une intégration par parties sur I_{n+1} va conduire à cette relation entre I_{n+1} et I_n.

On a :

$$I_{n+1} = k \cdot \int_0^1 (1-t)^{n+1} \cdot e^{\frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

Posons

$$\begin{cases} u(t) = (1-t)^{n+1} & \text{d'où } u'(t) = -(n+1)(1-t)^n \\ v'(t) = e^{\frac{t}{2}} & \text{d'où } v(t) = 2e^{\frac{t}{2}} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = k\left[2(1-t)^{n+1} \cdot e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 + 2k(n+1)\int_0^1 (1-t)^n \cdot e^{\frac{t}{2}} \mathrm{d}t.$$

$$\left[2(1-t)^{n+1} \cdot e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1 = 0 - 2.$$

Donc :

$$I_{n+1} = -2k + I_n = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}.$$

4) Démontrons par récurrence :

$$\forall n > 0 \quad I_n = \sqrt{e} - v_n.$$

La plus petite valeur de n est 1 :

$$v_1 = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} = \frac{3}{2}$$

$$I_1 = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)\, e^{\frac{t}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[2(1-t)\, e^{\frac{t}{2}} + 4e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1$$

$$I_1 = \sqrt{e} - \frac{3}{2}.$$

Pour $n = 1$, on a bien $I_1 = \sqrt{e} - v_1$.

Supposons l'énoncé vrai pour l'entier naturel p : $I_p = \sqrt{e} - v_p$.

Or, $$I_{p+1} = I_p - \frac{1}{2^{p+1}(p+1)!}$$

d'où

$$I_{p+1} = \sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{2^p} \times \frac{1}{p!}\right) - \frac{1}{2^{p+1}(p+1)!}$$

$$I_{p+1} = \sqrt{e} - v_{p+1}.$$

L'égalité est donc vraie pour $(p+1)$.

Donc, pour tout naturel n supérieur à 0 :

$$I_n = \sqrt{e} - v_n \quad \text{d'où} \quad v_n = \sqrt{e} - I_n.$$

Or, la suite I_n est convergente et sa limite est 0.

Donc v_n est convergente et $\lim\limits_{+\infty} (v_n) = \sqrt{e}$.

Prop. 124

avec $k = \dfrac{1}{2^{n+2} \cdot (n+1)!}$

$$2k = \frac{1}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$$

$$2k(n+1) = \frac{1}{2^{n+1} \cdot n!}$$

On retrouve I_n dans le second membre de l'égalité.

On remarque que $I_{n+1} - I_n < 0$.

La suite I_n est donc strictement **décroissante.**

Déf. 38

Intégration par parties (voir question 3).

Prop. 101

Énoncé (E_n)

$$\begin{cases} (E_1) \text{ vrai} \\ (E_p) \Longrightarrow (E_{p+1}) \end{cases}$$

$$\sqrt{e} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{2^p \cdot p!}\right)$$

avec $0! = 1$

214

Énoncé

Pour n naturel supérieur à 0, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Trouver une relation entre I_n et I_{n-2} en intégrant par parties.
3) Exprimer I_{2p} en fonction de p.
4) On pose : $u_n = nI_nI_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Démontrer que u_n est constante. En déduire I_{2p-1} en fonction de p.
5) On pose : $J_0 = I_0$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$. Comparer J_n et I_n.

Solution

1) $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$.

Remarquer que $I_n > 0$ puisque $\sin x > 0$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2) $\sin^n x = \sin x \times \sin^{n-1} x$.

Posons $u(x) = \sin^{n-1} x$

d'où $u'(x) = (n-1)\cos x \cdot \sin^{n-2} x$

$v'(x) = \sin x$ d'où $v(x) = -\cos x$

Prop. 124

$$I_n = [-\cos x \cdot \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x\,dx$$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x \times \sin^{n-2} x = \sin^n x$

$$I_n = 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

d'où $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

donc $\boldsymbol{nI_n = (n-1)I_{n-2}}$.

$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3) I_0 est **connu** : $I_0 = \frac{\pi}{2}$ d'où

Calculer les **premiers termes** I_2, I_4, I_6 pour avoir une idée de la formule générale.

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \quad (n = 2 \text{ d'où } p = 1)$$

$$I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \quad (n = 4 \text{ d'où } p = 2)$$

$$I_6 = \frac{5}{6} I_4 = \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2} \quad (n = 6 \text{ d'où } p = 3).$$

Raisonnement par récurrence.

Supposons que

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots \times 3 \times 1}{2k \times (2k-2)\ldots \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Prop. 101

Calculons I_{2k+2} en utilisant la relation de la question 2

$$I_{2k+2} = \frac{(2k+2-1)}{(2k+2)} I_{2k}$$

$$I_{2k+2} = \frac{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\ldots \times 1}{(2k+2)(2k)(2k-2)\ldots \times 2} \times \frac{\pi}{2}.$$

On a donc démontré que, pour tout naturel p

$$I_{2p}=\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots\times 3\times 1}{2p\times(2p-2)\ldots\times 4\times 2}\times\frac{\pi}{2}.$$

Il y a p facteurs au numérateur et au dénominateur.

Formule qui permet de déterminer des **approximations de π**, due à Wallis.

4) $u_n=nI_nI_{n-1}$; $u_{n+1}=(n+1)I_{n+1}I_n$.

Or $$I_{n+1}=\frac{n}{n+1}I_{n-1},$$

donc $$u_{n+1}=(n+1)\frac{n}{n+1}I_{n-1}I_n$$

et $$u_{n+1}=u_n.$$

Donc la suite u_n est constante :

$$u_1=1\times I_1\times I_0=\frac{\pi}{2}.$$

Donc, pour tout n : $\quad nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}.$

Ayant calculé I_n pour n **pair** ($n=2p$), on a

n pair : $n=2p$

$n-1=2p-1$

$$I_{2p-1}=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2pI_{2p}}$$

$$I_{2p-1}=\frac{(2p-2)(2p-4)\ldots\times 4\times 2}{(2p-1)(2p-3)\ldots\times 3\times 1}.$$

5) Pour J_n, utilisons le **changement de variable** affine : $\quad t=\frac{\pi}{2}-x.$

Prop. 125

Pour $x=0$: $t=\frac{\pi}{2}$. $\quad$ Pour $x=\frac{\pi}{2}$: $t=0$

$x=\frac{\pi}{2}-t$

d'où

$$J_n=(-1)\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t=I_n.$$

on pourrait, pour J_n, refaire le même travail directement.

215 Énoncé

1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ et $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Étudier les variations de f sur $[0; 1]$.

2) On partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de largeur $\frac{1}{n}$. Sur l'intervalle $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ on considère le rectangle R_k de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$, et le rectangle S_k de largeur $\frac{1}{n}$ et de hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$. u_n désignant la somme des aire des rectangles R_k et v_n celle de rectangles S_k, démontrer que

$$u_n\leqslant I\leqslant v_n \quad\text{et que}\quad v_n-u_n=\frac{1}{2n}.$$

3) Trouver un encadrement de I avec $n=10$. Quelle valeur de n faut-il choisir pour que cet encadrement donne I avec une erreur inférieure à 10^{-2}?

Solution

Mais on ne sait pas calculer I avec les moyens dont nous disposons

Prop. 131 | Prop. 132

1) f étant continue sur $\mathbb{R}$, I existe.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad \text{sur} \quad [0;\ 1];$$

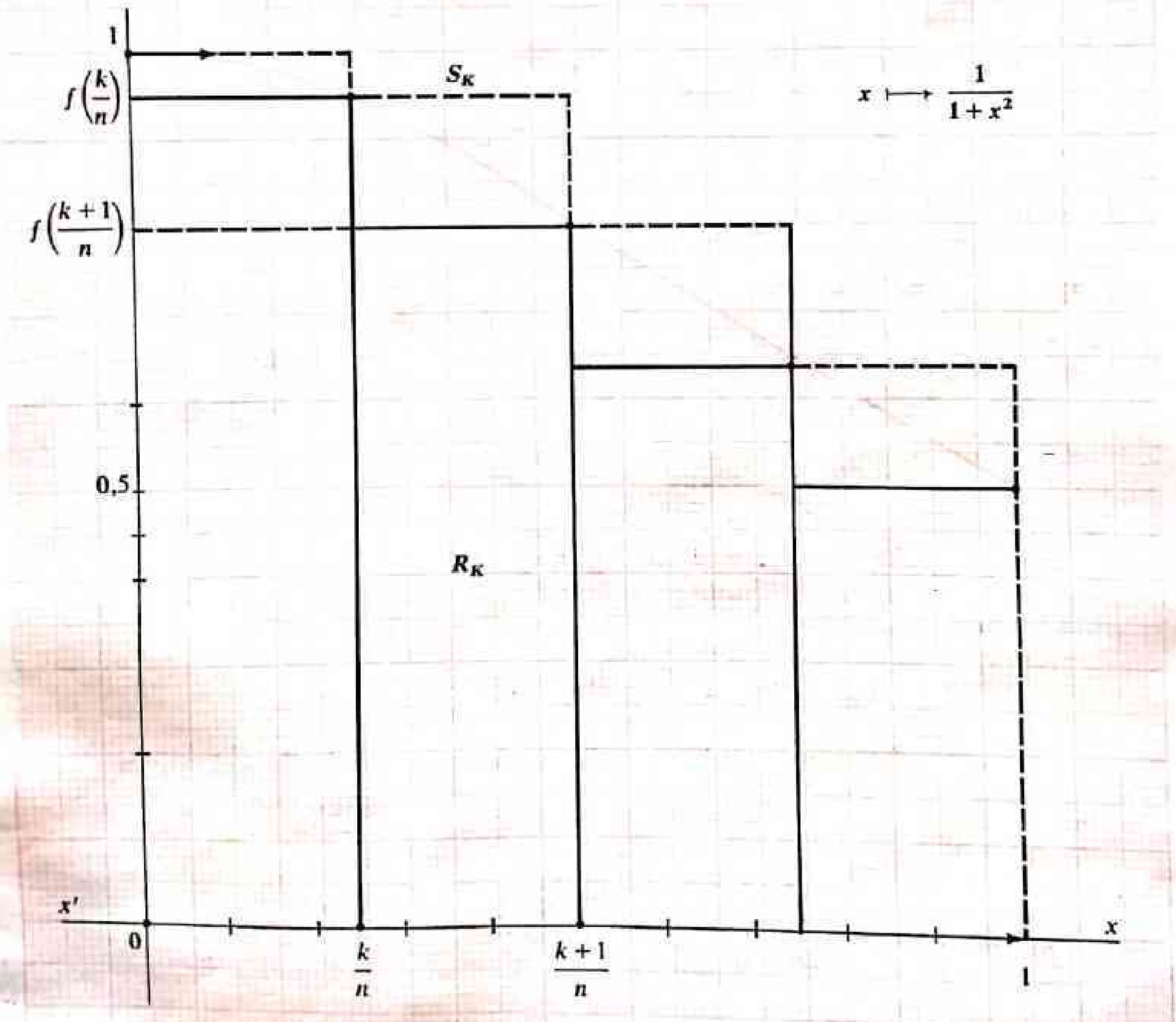
f est décroissante sur cet intervalle.

Donc $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$ entraîne $f\left(\frac{k}{n}\right) > f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

2) Aire de R_k : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$.

Aire de S_k : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right); \qquad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$



Or pour

$$x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] : f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$$

donc

$$\int_\alpha^\beta f\left(\frac{k+1}{n}\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_\alpha^\beta f\left(\frac{k}{n}\right) \mathrm{d}x$$

avec $\alpha = \dfrac{k}{n}$ et $\beta = \dfrac{k+1}{n}$.

En ajoutant ces intégrales pour k entier variant de 0 à $(n-1)$, on obtient

$$u_n \leqslant I \leqslant v_n.$$

$$v_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$u_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$

Cette méthode de calcul approché de I est la **méthode des rectangles.**

donc

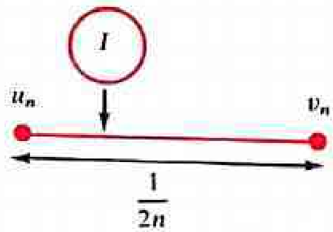
$$v_n - u_n = \frac{1}{n}(f(0) - f(1)) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2n}.$$

$f\left(\dfrac{n}{n}\right) = f(1) = \dfrac{1}{2}$

$f(0) = 1$

Puisque $u_n \leqslant I \leqslant v_n$:

$$I - u_n \leqslant v_n - u_n \quad \text{donc} \quad I - u_n \leqslant \frac{1}{2n}.$$



De même :

$$v_n - I \leqslant v_n - u_n \quad \text{donc} \quad v_n - I \leqslant \frac{1}{2n}.$$

u_n et v_n donnent des **valeurs approchées** de I à $\dfrac{1}{2n}$ près.

3) $\boldsymbol{n = 10}$:

$$u_{10} = \frac{1}{10}\left(f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{2}{10}\right) + \ldots + f(1)\right) \approx 0{,}759\,98$$

$$v_{10} = \frac{1}{10}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \ldots + f\left(\frac{9}{10}\right)\right) \approx 0{,}809\,98.$$

$\dfrac{1}{20} = 0{,}05$

Donc $\boldsymbol{0{,}759\,98 \leqslant I \leqslant 0{,}809\,98}$

On a ainsi calculé des encadrements de I sans utiliser de primitive de I.

$v_n - u_n = \dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-2}$ équivaut à $2n \geqslant 100$ donc $\boldsymbol{n \geqslant 50}$.

Pour $n = 50$, on trouve l'encadrement :

$$\boldsymbol{0{,}780\,38 \leqslant I < 0{,}790\,38.}$$

D'AUTRES POUR CHERCHER

■ Calculs d'aires plans

216 **Énoncé**

$g(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Étudier la fonction g et tracer sa courbe représentative. Calculer l'aire de la surface comprise entre cette courbe, l'asymptote oblique et les deux droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

Indication

Différence de deux fonctions $\boxed{\text{P128}}$: Rep : $\dfrac{1}{2}$.

217 **Énoncé**

$f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x - 3}$.

1) *Démontrer que $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+3}$ pour tout x de E_f.*
2) *Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C.*
3) *Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe C, l'axe $x'x$ et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.*

Indication

Attention au signe de $f(x)$ sur $[-1; 0]$.

218 **Énoncé**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer l'aire de l'ensemble E des points $M(x; y)$ tels que :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad (x-1)\,e^x \leq y \leq 0.$$

Indication

$f(x)$ est négatif sur $[0; 1]$. Rep : $A = e - 2$ (unités d'aire).

219 **Énoncé**

$f(x) = \cos^2 x + \sin x \cos x$ *avec* $x \in [0; \pi]$.

1) *Démontrer que f est continue sur $[0; \pi]$. Étudier son signe.*
2) *Calculer l'aire de l'ensemble E des points M du plan dont les coordonnées vérifient $0 \leq x \leq \pi$ et y compris entre 0 et $f(x)$.*

Indication

1) Se souvenir que $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.
   $f(x) > 0$ équivaut à $x < \frac{\pi}{2}$ ou $x > \frac{3\pi}{4}$.
2) Faire apparaître $\cos 2x$ et $\sin 2x$. Attention au signe de $f(x)$.

220

Énoncé

a) *Tracer la représentation graphique C de la fonction* $x \longmapsto \sin x$ *pour* $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
Calculer l'aire de la surface comprise entre cette courbe et l'axe $x'x$.

b) *On considère la fonction* $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$.
Déterminer a, b et c pour que la courbe représentative de f coupe $x'x$ *aux mêmes points que C et passe par le point* $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. *Tracer alors la courbe de f.*

c) *Calculer l'aire de la surface comprise entre les deux courbes.*

d) *Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur* $[0; \pi]$.

Indication

On trouve $f(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$. La parabole est au-dessus de la sinusoïde.
L'aire est égale à $\frac{2\pi}{3} - 2$ (unités d'aire).

221

Énoncé

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

1) *Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C.*

2) *Calculer l'aire de la surface comprise entre C, l'axe* $x'x$ *et les deux droites d'équations* $x = 2$ *et* $x = 4$.
Calculer l'aire de la surface comprise entre C, l'axe $x'x$ *et les deux droites d'équation* $x = 2$ *et* $x = m (m > 2)$.
Cette aire a-t-elle une limite si m tend vers $(+\infty)$?

3) *Démontrer que la restriction de f à* $[2; +\infty[$ *est une bijection de* $[2; +\infty[$ *vers* $[0; -1[$.
En déduire $\int_0^{\frac{3}{4}} f^{-1}(x)\,dx$.

Indication

3) Penser à la symétrie orthogonale autour de la première bissectrice du repère pour représenter f^{-1}. Se souvenir que cette symétrie conserve les aires.
Interpréter $\int_0^{\frac{3}{4}} f^{-1}(x)\,dx$ comme une différence d'aires que l'on sait calculer.

222 **Énoncé**

1) *Étudier* $f : x \longmapsto \frac{1}{x}(1+\ln x)$ *et tracer sa courbe C.*

Elle coupe l'axe x'x en A : préciser son abscisse α.

2) *On désigne par* S_1 *la surface comprise entre C, l'axe x'x, et les droites d'équations* $x=\alpha$ *et* $x=1$*; on désigne par* S_2 *la surface comprise entre C, x'x et les droites d'équations* $x=1$ *et* $x=m$ $(m>1)$.

Déterminer m pour que les surfaces S_1 *et* S_2 *aient la même aire.*

Indication

$\mathcal{A}(S_1)=\frac{1}{2}$. m est la racine positive de $\ln^2 m+2\ln m-1=0$.

223 **Énoncé**

a) $f(x)=\frac{2}{3}x+1+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$. *Étudier f et tracer sa courbe.*

b) *Calculer* $\int_4^6 \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\mathrm{d}x$.

En déduire l'aire de la surface, ensemble des points M tels que

$$4\leqslant x\leqslant 6 \quad \text{et} \quad f(x)\leqslant y\leqslant \frac{2}{3}x+1.$$

Indication

Transformer $\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ sur $]2;+\infty[$. Poser $t_1=x-2$ et $t_2=x+2$.

224 **Énoncé**

$g(x)$ *est définie par* $g(x)=e^x\sin x$ *avec* $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

1) *Démontrer que g est une bijection de* $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ *sur A à déterminer.*

Tracer la courbe C de sa bijection réciproque : on admettra que C est au-dessus de la droite Δ *d'équation* $y=x$.

2) *Calculer l'aire de la partie du plan, ensemble des points* $M(x;y)$ *tels que*

$$x\in A \quad \text{et} \quad 0\leqslant y\leqslant g^{-1}(x).$$

Indication

$g'(x)>0$ pour tout x de $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour (2), penser à une symétrie orthogonale.

225 **Énoncé**

$f(x)=\dfrac{4x-x^2}{(x-2)^2}$ et $g(x)=4x-x^2$. Étudier et représenter graphiquement f et g.
Calculer l'aire de la surface définie par

$$3 \leqslant x \leqslant 4 \quad et \quad f(x) \leqslant y \leqslant g(x).$$

Indication

Chercher les points communs aux deux courbes. L'aire a pour mesure $\ln(e^2+e+1)$.

■ Autres activités

226 **Énoncé**

Appliquer la méthode de l'exercice $\boxed{215}$ *pour trouver des encadrements de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x$ (méthode des rectangles).*

Indication

$0{,}92 \leqslant I \leqslant 0{,}93$.

227 **Énoncé**

Appliquer la méthode de l'exercice $\boxed{215}$ *pour trouver des encadrements de l'intégrale $J=\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.*

Indication

La fonction f étant paire, il suffit de calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$ et de doubler le résulat.

228 **Énoncé**

On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$. Démontrer que f est impaire et croissante sur $]-1;1[$.
Démontrer que, pour $t \in [0;1[$: $\quad 1 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.
En déduire que f admet une limite α à gauche en $x=1$ et que $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Indication

Penser que la dérivée d'une fonction impaire est paire. On pourrait prolonger f par continuité en $x=1$.

229 **Énoncé**

On pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$ *(n entier supérieur à 0). Calculer* J_1, J_2 *et* J_3. *Exprimer* $J_{n+2} + J_n$ *en fonction de n, puis* $J_n - J_{n+4}$. *En déduire* J_4 *et* J_5.

Indication

$x \longmapsto \tan x$ a pour dérivée $x \longmapsto 1 + \tan^2 x$. $J_1 = \frac{1}{2} \ln 2$; $J_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.
$J_{n+2} + J_n = \frac{1}{n+1}$.

230 **Énoncé**

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ *et* $f(0) = 0$. f' *est positive et majorée par M sur* $\mathbb{R}^+$. *Démontrer que pour tout réel x positif, on a*

$$f(x) \leq Mx \quad \textit{et que} \quad \int_0^x f(t)\,dt \leq \frac{1}{2} Mx^2.$$

Indication

Penser à utiliser le théorème des accroissements finis.

231 **Énoncé**

Calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de x'x de l'arc de sinusoïde défini par $y = \sin x$ *et* $0 \leq x \leq \pi$.

232 **Énoncé**

Même question qu'à l'exercice précédent pour l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

233 **Énoncé**

Même question qu'à l'exercice précédent pour l'arc de parabole défini par $y = 9 - x^2$ *et* $y \geq 0$.

234 **Énoncé**

a) *Montrer que pour* $t \geq 1$: $\sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2+1} \leq t\sqrt{2}$ *et en déduire que pour* $x \geq 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \leq \ln 2.$$

b) $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$. *Calculer la dérivée de F et étudier ses variations.*

Indication

b) Écrire $f(x)$ sous la forme $\int_1^{2x} u(t)\,dt - \int_1^{x} u(t)\,dt$.

235 **Énoncé**

$G(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^t \, dt$. *Quel est l'ensemble de définition de G? Étudier les variations de G. Déterminer* $\lim_{+\infty} G$ *et* $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} G(x)$ *après avoir étudié le signe de* $f(x) = G(x) - \ln x$.

Indication

G est définie sur $]0; +\infty[$. Revoir **P130.**

236 **Énoncé**

a) $F : x \longmapsto \int_1^x \frac{\ln t}{(1+t)^2} \, dt$. *Étudier la définition de F et sa dérivabilité.*

b) *h est définie par* $h(x) = e^x$ *et* $g = F \circ h$. *Démontrer que g est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que*

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1} \quad (t \neq 0 \text{ et } t \neq -1).$$

Calculer $g(x)$.

237 **Énoncé**

Soit la suite (u_n) *définie, pour* $n \geq 1$ *par :* $u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{p=1}^{n} p^2$.
Étudier sa convergence.

Indication

Voir l'exercice **212.** Utiliser la fonction g telle que $g(x) = x^2$ sur $[0; 1]$.

238 **Énoncé**

Démontrer que pour $n \geq 2$:

$$\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \int_n^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{n \ln n}.$$

Soit (v_n) *telle que*

$$v_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{n \ln n} - \ln(\ln n) \quad \text{avec} \quad n \geq 2.$$

Démontrer que v_n *est convergente.*

DES EXERCICES CORRIGÉS

239 Énoncé

Trouver toutes les courbes C telles que en chacun de leur point M la tangente à C soit perpendiculaire à OM. Trouver celle de ces courbes qui passe par $A(3; 4)$.

Solution

Si la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f, cette courbe est l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) avec $y = f(x)$.
Si f est dérivable, le coefficient directeur de la tangente en M est $f'(x)$.
Si M a pour coordonnées $(x, f(x))$, le coefficient directeur de OM est $\frac{f(x)}{x}$, avec $x \neq 0$.

Dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit des pentes est (-1) :

$$f'(x) \times \frac{f(x)}{x} = -1 \quad (x \neq 0).$$

Il nous faut résoudre **l'équation différentielle :**

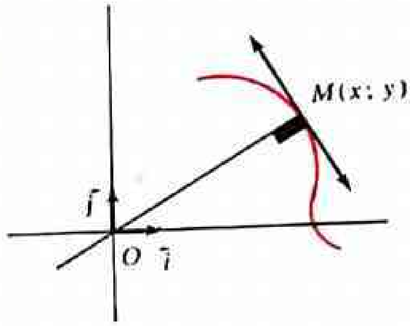
$$y'y = -x \quad (\text{avec } x \neq 0).$$

$y'y$ est la dérivée de $\frac{1}{2}y^2$; x est la dérivée de $\frac{1}{2}x^2$.

D'où $\frac{1}{2}y^2 = \frac{-1}{2}x^2 + C$ (C : constante)

c'est-à-dire $\mathbf{x^2 + y^2 = 2C.}$

Les courbes cherchées sont les cercles de centre le point O et de rayon $\sqrt{2C}$ si $C > 0$. Le cercle qui passe par A est tel que $9 + 16 = 2C$ d'où $C = 5$. Son équation est $x^2 + y^2 = 25$.



Si $x = 0$, M est sur l'axe yy' et la tangente en M est parallèle à $x'x$.

$f'(x) \times f(x) = -x$.

Déf. 47

Dérivée de $u(x)^n$.

Prop. 37

A chaque **réel positif** C correspond un cercle.

240 Énoncé

Trouver toutes les courbes C telles qu'en chacun de leur point M le coefficient directeur de la tangente en M soit le double du coefficient directeur de OM. Quelle est celle de ces courbes qui passe par le point $B(2; -1)$?

Solution

Si C est la représentation graphique de f : $x \longmapsto f(x)$, f est solution de l'équation différentielle $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x}$ $(f(x) \neq 0)$

c'est-à-dire $\ln|f(x)| = 2 \ln|x| + k$

d'où $f(x) = Ax^2$.

B est un point de C si et seulement si $4A = -1$

d'où $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

$f(x) \neq 0$ donc M n'est pas un point de $x'x$.

Déf. 47

Dérivée de $\ln|u(x)|$. Prop. 79 Prop. 80

Les courbes C sont des **paraboles.** Voir cette propriété en géométrie.

241 ## Énoncé

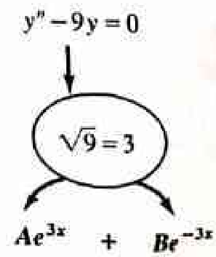
1) Soit l'équation différentielle (1) : $y'' - 9y = 0$.
Démontrer que les fonctions f_1 et f_2 définies par
$$f_1(x) = e^{3x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = e^{-3x}$$
sont solutions de (1) et que toute combinaison linéaire de f_1 et f_2 et solution de (1).
2) Soit l'équation différentielle (2) : $y'' + 9y = 0$.
Démontrer que les fonctions g_1 et g_2 définies par
$$g_1(x) = \cos 3x \quad \text{et} \quad g_2(x) = \sin 3x$$
sont solutions de (2), ainsi que toute combinaison linéaire de g_1 et g_2.
3) Pour chaque équation, trouver, si elle existe, la solution dont la courbe passe par le point $B(-1;\,2)$ et admet en ce point une tangente de pente 1.

Solution

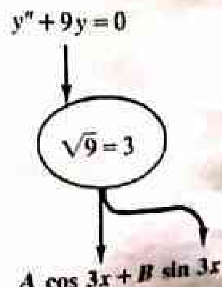
1) $f_1(x) = e^{3x}$; $f_1'(x) = 3e^{3x}$; $f''(x) = 9e^{3x}$
$$f_1''(x) + f_1(x) = 9e^{3x} - 9e^{3x} = 0$$
pour tout x : f_1 est solution de (1).
De même : $f_2''(x) + f_2(x) = 9e^{-3x} - 9e^{-3x} = 0$ pour tout x.
$$(\alpha f_1 + \beta f_2)''(x) + (\alpha f_1 + \beta f_2)(x)$$
$$= \alpha f_1''(x) + \alpha f_1(x) + \beta f_2''(x) + \beta f_2(x)$$
$$\alpha\left[f_1''(x) + f_1(x)\right] + \beta\left[f_2''(x) + f_1(x)\right] = 0$$
pour tout x.

Toute solution de (1) s'écrit :
$$\mathbf{F(x) = Ae^{3x} + Be^{-3x}}$$
(A et B réels quelconques).

2) $g_1'(x) = -3 \sin 3x$; $g_1''(x) = -9 \cos 3x$
d'où $g_1''(x) + 9g_1(x) = 0$.



Prop. 138



De même $g_2'(x)=3\cos 3x$; $g_2''(x)=-9\sin 3x$ d'où $g_2''(x)+9g_2(x)=0$.

Toute solution de (2) s'écrit :

$$G(x)=A\cos 3x+B\sin 3x.$$

Prop. 138

3) Pour (1), conditions initiales : $F(-1)=2$ et $F'(-1)=1$

d'où

$$\begin{cases} Ae^{-3}+Be^{3}=2 \\ 3Ae^{-3}-3Be^{3}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Ae^{-3}+Be^{3}=2 \\ Ae^{-3}-Be^{3}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Pente de la tangente en B :

$F'(-1)$.

$F'(x)=3Ae^{3x}-3Be^{-3x}$.

Il faut résoudre ce système d'inconnues les constantes A et B.

On trouvera : $A=\dfrac{7}{6}e^{3}$ et $B=\dfrac{5}{6}e^{-3}$.

$e^{-3}=\dfrac{1}{e^{3}}$.

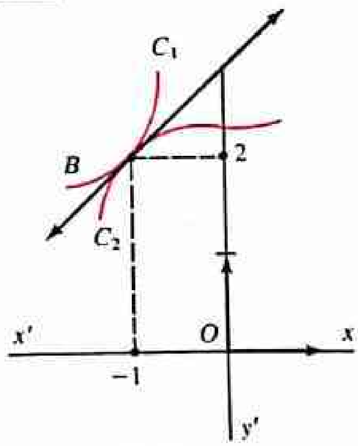
$e^{3x}\times e^{3}=e^{3x+3}$

$G'(x)=-3A\sin 3x+3O\cos 3x$.

D'où la solution particulière :

$$F(x)=\frac{7}{6}e^{3x+3}+\frac{5}{6}e^{-3x-3}.$$

Prop. 139



Pour (2), conditions initiales : $G(-1)=2$ et $G'(-1)=1$

d'où $\begin{cases} A\cos(-3)+B\sin(-3)=2 \\ -3A\sin(-3)+3B\cos(-3)=1 \end{cases}$

On trouve : $A=2a+\dfrac{1}{3}b$ et $B=\dfrac{1}{3}a-2b$

avec $a=\cos 3$ et $b=\sin 3$.

La courbe de F et la courbe de G ont le point $B(-1, 2)$ en commun et la même tangente en ce point.

Elles sont donc tangentes en B.

242 Énoncé

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données :

(1)	$y''+4y'-5y=0$	$(x_0=0;\ y_0=-2;\ y_0'=3)$
(2)	$y''-6y'+9y=0$	$(x_0=-1;\ y_0=3;\ y_0'=0)$
(3)	$y''+2y'+5y=0$	$(x_0=0;\ y_0=4;\ y_0'=-1)$.

Solution

- **Équation (1) :** L'équation caractéristique associée s'écrit :

$$r^2+4r-5=0 \qquad \Delta>0.$$

Cette équation a **deux solutions réelles :** 1 et -5.

Prop. 138

$y''+ay'+by=0$

$r^2+ar^1+br^0=0$

$\Delta=16-4(-5)=36 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=6$

$r_1=\dfrac{-4-6}{2}=-5$ $\quad r_2=\dfrac{-4+6}{2}=1$

Les solutions de (1) s'écrivent :

$$f(x)=Ae^{x}+Be^{-5x}$$

$$\begin{cases} f(0)=-2 & \text{d'où} \quad A+B=-2 \\ f'(0)=3 & \text{d'où} \quad A-5B=3. \end{cases}$$

$f'(x)=Ae^{x}-5Be^{-5x}.$

On trouve $B=-\dfrac{5}{6}$ et $A=-\dfrac{7}{6}$.

Donc : $f_1(x)=\dfrac{-5}{6}\,e^{x}-\dfrac{7}{6}\,e^{-5x}=-\dfrac{1}{6}\,(5e^{x}+7e^{-x})$.

Les conditions initiales données déterminent **une** solution particulière unique.

- **Équation (2) :** L'équation caractéristique associée s'écrit :

$$r^2-6r+9=0 \qquad \Delta=0.$$

La seule racine réelle est 3.
Les solutions s'écrivent : $g(x)=e^{3x}(Ax+B)$;

Calculer $g'(x)$.
$g'(x)=e^{3x}(3Ax+3B+A)$.

$g(-1)=3$ d'où : $e^{-3}(-A+B)=3$
$g'(-1)=0$ d'où : $e^{-3}(-3A+3B+A)=0.$

On obtient

$$\begin{cases} -A+B=3e^{3} \\ -2A+3B=0 \end{cases}$$

Multiplicateurs $\begin{vmatrix} -2 \\ 3 \end{vmatrix}$.

d'où $B=-6e^{3}$ et $A=-9e^{3}$.
La solution s'écrit :

$$g_1(x)=e^{3x+3}(-9x-6).$$

Solution particulière **unique.**

- **Équation (3) :** L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2+2r+5=0 \qquad \Delta=-16=16i^2.$$

Cette équation a **deux racines complexes** conjuguées :

Prop. 139

$$\alpha=-1+2i \quad \text{et} \quad \beta=-1-2i.$$

Les solutions de l'équation (3) s'écrivent donc :

$$p(x)=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$$

Prop. 138

$$p'(x)=e^{-x}(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)-e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$$
$$=e^{-x}\big((-2A-B)\sin 2x+(2B-A)\cos 2x\big)$$

On doit calculer $p'(x)$ pour tenir compte de

$$p'(0)=-1.$$

$p(0)=4$
d'où $A\cos 0+B\sin 0=4 \qquad A=4$
$p'(0)=-1$
d'où $(-2A-B)\sin 0+(2B-A)\cos 0=-1.$
D'où : $2B-A=-1$ avec $A=4$ donne $B=\dfrac{3}{2}$
d'où la solution cherchée

$$p_1(x)=e^{-x}\left(4\cos 2x+\frac{3}{2}\sin 2x\right).$$

Prop. 139

Solution particulière **unique.**

243 **Énoncé**

u étant une fonction connue, on considère l'équation différentielle :

(1) $$y'' + ay' + by = u.$$

1) *Soit* f une solution particulière de l'équation (1). Démontrer que la fonction g est solution de (1) si et seulement si $(f-g)$ est solution de l'équation (2) : $y'' + ay' + by = 0$.

2) Soit l'équation (3) : $y'' + 2\sqrt{3}y' - y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Résoudre cette équation en cherchant une solution particulière f sous la forme :

$f(x) = K \sin\left(x + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$.

3) Mêmes questions pour (4) : $y'' + 3y = 2x^2 + 1$ avec $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Solution

1) f est solution de (1) :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) + af'(x) + bf(x) = u(x).$$

- **Si g est solution de (1) :**

$$\forall x \in \mathbb{R} : g''(x) + ag'(x) + bg(x) = u(x).$$

Par différence, on est conduit à :

$$(f-g)''(x) + a(f-g)'(x) + b(f-g)(x) = 0.$$

Ce qui prouve que $(f-g)$ est solution de (2).

- **Réciproquement,** si $(f-g)$ est solution de (2), sachant que f est solution de (1), on est conduit par différence à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) + ag'(x) + bg(x) = u(x).$$

Ce qui montre que g est solution de (1).

2) Résolvons l'équation : (4) $y'' + 2\sqrt{3}y' - y = 0$ d'équation caractéristique :

$$X^2 + 2\sqrt{3}X - 1 = 0.$$

Elle a deux solutions réelles :

$$-\sqrt{3} + 2 \quad \text{et} \quad -\sqrt{3} - 2$$

d'où la solution générale de (4) :

$$\mathbf{g(x) = Ae^{(-\sqrt{3}+2)x} + Be^{(-\sqrt{3}-2)x}}.$$

Cherchons une solution particulière de (3)

Si $f(x) = K \sin\left(x + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$

alors : $f'(x) = K \cos\left(x + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$

(1) est une équation **fonctionnelle :** *l'inconnue* est une fonction.

Déf. 47

Ainsi, on obtient la **solution générale** de (1) en cherchant une **solution particulière** de (1) que l'on ajoute à la **solution générale** de (2).

Prop. 138

$\Delta' = 4$
$X_1 = -\sqrt{3} + 2$
$X_2 = -\sqrt{3} - 2.$

Prop. 140

et $\quad f''(x) = -K \sin\left(x + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$

$$\forall x : -K \sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right) + 2\sqrt{3}\,K \cos\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right) - K \sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-2k\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right) - \sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right] = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

et, en remplaçant $\sqrt{3}$ par $\tan\frac{\pi}{3}$:

$$\frac{-2K}{\cos\frac{\pi}{3}}\left[\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right) - \sin\frac{\pi}{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta\right)\right] = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

d'où

$$-4K\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}+\theta-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

pour tout x.

On a donc $K = -\frac{1}{4}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Donc, d'après ce que l'on a vu en (1), les solutions générales de l'équation (3) s'écrivent :

$$G(x) = Ae^{(-\sqrt{3}+2)x} + Be^{(-\sqrt{3}-2)x} - \frac{1}{4}\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Il s'agit d'écrire

$$\sin\varphi + K\cos\varphi$$

sous la forme

$$\lambda\sin(\varphi+\varphi').$$

La solution générale contient deux constantes arbitraires A et B.

3) Cherchons les solutions de (5) : $y'' + 3y = 0$.

L'équation caractéristique : $X^2 + 3 = 0$ a pour racines complexes : $z_1 = 3i$ et $z_2 = -3i$.

D'où les solutions générales de l'équation (5) :

$$h(x) = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Prop. 140

Cherchons une solution particulière de :

$$y'' + 3y = 2x^2 + 1$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f'(x) = 2ax + b;\quad f''(x) = 2a.$$

La *forme* de la solution particulière dépend du type de fonction qui figure au second membre.

On doit avoir, pour tout réel x :

$$2a + 3ax^2 + 3bx + 3c = 2x^2 + 1$$

d'où $\quad 3a = 2;\quad 3b = 0;\quad 3c + 2a = 1$

donc $\quad a = \frac{2}{3};\quad b = 0;\quad c = -\frac{1}{9}.$

Ici, il s'agit d'une égalité de fonctions polynômes.

Les solutions générales de l'équation donnée s'écrivent donc :

$$F(x) = A\cos 3x + B\sin 3x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}.$$

La solution générale contient encore deux constantes arbitraires A et B.

244 Énoncé

1) Soit l'équation différentielle $9y''+6y'+y=0$. Déterminer la solution g qui vérifie $g(0)=6$ et $g'(0)=0$. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, calculer l'aire de la surface, ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $0 \leqslant x \leqslant m$ et $0 \leqslant y \leqslant g(x)$.
2) Résoudre l'équation différentielle : $9y''+6y'+y=x^2+1$.
On cherchera une solution particulière u du type : $u(x)=x^2+ax+b$.

Solution

Prop. 138

1) L'équation caractéristique associée :

$$9X^2+6X+1=0$$

a pour unique solution réelle : $\alpha=-\frac{1}{3}$.

La solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$G(x)=(Ax+B)\,e^{-\frac{1}{3}x}$$

$$G'(x)=\left(-\frac{1}{3}Ax-\frac{1}{3}B+A\right)e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Prop. 139

Les conditions : $g(0)=6$ et $g'(0)=0$ conduisent à $B=6$ et $-\frac{1}{3}B+A=0$

$B=6 \quad A=\frac{1}{2}B=2.$

d'où **la** solution demandée :

$$\mathbf{g(x)=(2x+6)\,e^{-\frac{1}{3}x}}$$

avec $\qquad g'(x)=-\frac{2}{3}xe^{-\frac{1}{3}x}.$

Une étude rapide des variations de g conduit au tableau ci-contre. Se souvenir que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	0

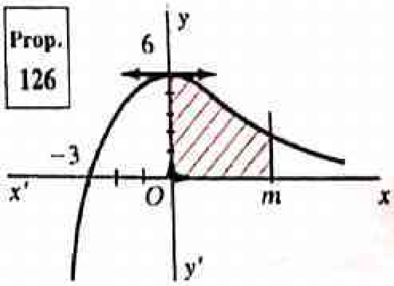
$$\lim_{x\to-\infty}(e^{-x})=+\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(xe^{-x})=0$$

d'où $\qquad \lim_{+\infty} g=0.$

L'étude de ces variations montre que, pour $x>0$, $g(x)>0$. Donc, l'aire $S(m)$ s'écrit :

$$S(m)=\int_0^m(2x+6)\,e^{-\frac{1}{3}x}\,\mathrm{d}x.$$

Prop. 126



Une intégration par parties avec

$$\begin{cases} u(x)=2x+6 \\ v'(x)=e^{-\frac{1}{3}x} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} u'(m)=2 \\ v(x)=-3e^{-\frac{1}{3}x} \end{cases}$$

donne

$$S(m)=\left[-3(2x+6)e^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^m+6\int_0^m e^{-\frac{1}{3}x}\,dx$$

$$S(m)=\left[(-6x-36)e^{-\frac{1}{3}x}\right]_0^m$$
$$S(m)=(-6m-36)e^{-\frac{1}{3}m}+36.$$

2) Les solutions de : $9y''+6y'+y=x^2+1$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation sans second membre :

$$G(x)=(Ax+B)e^{-\frac{1}{3}x}$$

une solution particulière u de l'équation complète.
Si $u(x)=x^2+ax+b$, alors

$$u'(x)=2x+a \quad \text{et} \quad u''(x)=2.$$

u est solution de l'équation complète si et seulement si pour **tout réel** x :

$$18+6(2x+a)+x^2+ax+b=x^2+1$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}12+a=0\\18+6a+b=1\end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases}a=-12\\b=55\end{cases}$$

d'où $\qquad u(x)=x^2-12x+55.$

Les solutions k de l'équation proposée sont donc définies par :

$$k(x)=(Ax+B)e^{-\frac{1}{3}x}+x^2-12x+55.$$

Les primitives de :
$h : x \longmapsto e^{-\frac{1}{3}x}$
s'écrivent
$H : x \longmapsto -3e^{-\frac{1}{3}x}.$

Méthode :

- Résoudre l'équation sans second membre.
- Déterminer une solution particulière de l'équation complète.

Prop. 140

D'AUTRES POUR CHERCHER

245

Énoncé

Dans un mouvement rectiligne, l'abscisse x du point M est une fonction du temps t : x' est la vitesse et x'' l'accélération.

A tout instant t, l'accélération est donnée par : $x''=2t+\sin t$.

Déterminer la fonction $x=f(t)$ sachant que pour $t=0$: $x_0=4$ et $x'_0=-1$.

Indication

Voir exercice **239**. Ne pas oublier les conditions initiales.

246

Énoncé

Pour un mouvement rectiligne, à tout instant t, l'accélération est le double de la vitesse.

Déterminer la loi horaire $x=g(t)$ sachant que pour $t=0$: $x_0=4$ et $x'_0=2$.

Indication

Quel que soit t : $x''=2x'$ d'où $\frac{x''}{x'}=2$; $\frac{x''}{x'}$ est la dérivée de $\ln|x'|$ et 2 est la dérivée de $2t$. On trouve $g(t)=K_1e^{2t}+K_2$.

247 **Énoncé**

Trouver une courbe, passant par le point A de coordonnées (1; 1) et telle qu'en tout point M de cette courbe la tangente ait un coefficient directeur égal au carré de l'ordonnée de M.

Indication

$y=f(x)$. Il faut résoudre $y'=y^2$; $\frac{y'}{y^2}$ est la dérivée de $\left(-\frac{1}{y}\right)$.

248 **Énoncé**

Trouver une courbe passant par le point B de coordonnées (2; 0), et telle que en chacun des points M, la pente de la tangente soit l'inverse de la pente de la droite OM.

Indication

$y=g(x)$. Il faut résoudre l'équation différentielle $y'=\frac{x}{y}$.

$y'y$ est la dérivée de $\frac{1}{2}y^2$.

249 **Énoncé**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'=y\cos x$. b) $y'=y(3x^2-6x+1)$. c) $y''=5x+8$.

Indication

a) $f(x)=Ce^{\sin x}$. c) $g(x)=\frac{5x^3}{6}+4x^2+C_1x+C_2$.

250 **Énoncé**

Démontrer que f définie par :

$$f(x)=4e^x-5e^{-x}-5x-2$$

est solution de l'équation différentielle $y''-y=5x+2$.

Indication

Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

251 **Énoncé**

Trouver la solution de chacune des équations suivantes, satisfaisant à la condition donnée :

a) $2y'+y=0$ *avec* $f(1)=2$;

b) $3y'-4y=0$ *avec* $g(-1)=1$.

Indication

a) Réponse : $y=2e^{-\frac{1}{2}(x-1)}$.

252 **Énoncé**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''-y=0$. b) $y''+y=0$.

c) $y''-16y=0$. d) $y''+16y=0$.

Indication

Voir exercice **241.**

a) $f(x)=Ae^{x}+Be^{-x}$.

b) $f(x)=A\cos x+B\sin x$.

253 **Énoncé**

Reprendre les quatre équations de l'exercice ci-dessus et trouver, pour chacune d'elles, la solution qui satisfait aux deux conditions : $f(0)=1$ *et* $f'(0)=4$.

254 **Énoncé**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''+6y'+5y=0$.

b) $y''-4y'+4y=0$.

c) $y''-2y'+3y=0$.

Indication

a) $y=Ae^{-x}+Be^{-5x}$.

b) $y=(Ax+B)e^{2x}$.

c) $y=\left(A\cos\sqrt{2}x+B\sin\sqrt{2}x\right)e^{x}$.

255 **Énoncé**

Pour chaque équation de l'exercice précédent, trouver la solution particulière g qui satisfait aux conditions : $g(0)=1$ *et* $g'(0)=-1$.

256 **Énoncé**

Voici deux équations différentielles :

a) $y'' + y' - 2y = 0$.

b) $2y'' + 2y' + 5y = 0$.

Pour chacune d'elles, trouver la solution particulière dont la courbe représentative passe par le point A de coordonnées (0; 3) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur égal à (−1).

257 **Énoncé**

Voici une équation différentielle : $y'' + my' + y = 0$ *(m est un paramètre réel).* *Discuter de l'écriture de ses solutions suivant les valeurs du réel m.*

Indication

Calculer Δ pour l'équation caractéristique et étudier son signe.

258 **Énoncé**

On se propose de déterminer toutes les fonctions numériques f de la variable réelle x qui sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad f''(x) + 3f(x) = -x.$$

1) *Vérifier que la fonction f définie par* $f(x) = -\dfrac{x}{3}$ *est une solution.*

2) *Montrer que, si une fonction f est solution de (E), alors la fonction g définie par :* $g(x) = f(x) + \dfrac{x}{3}$

est une solution de l'équation différentielle (E') : $g''(x) + 3g(x) = 0$.

3) *Déterminer toutes les solutions de l'équation (E'). En déduire la solution générale de l'équation (E).*

259 **Énoncé**

Soit l'équation différentielle : $(E) \qquad y'' + 2y' + y = 0$.

a) *Trouver les solutions de cette équation.*

b) *Parmi les solutions de (E), on considère les courbes intégrales* C_λ *qui ont pour équation* $y = (x + \lambda)e^{-x}$, λ *désignant un réel arbitraire.*
Chaque courbe C_λ *possède un seul point* S_λ *où sa tangente est parallèle à l'axe x'x. Déterminer en fonction de* λ *les coordonnées de ce point. Déterminer l'ensemble S décrit par les points* S_λ *lorsque* λ *décrit l'ensemble des réels. Construire enfin cet ensemble S.*

DES EXERCICES RÉSOLUS

260 Énoncé

Soit la fonction vectorielle $\vec{F} : t \longmapsto \left(2\cos t; 2\cos^2\frac{t}{2}\right)$; t décrit $\mathbb{R}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point mobile M est défini par : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)}$ (t est le temps).

1) Quelle est la trajectoire du point M? Décrire le déplacement de M sur cette trajectoire.
2) Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération à la date t.
   Construire M, $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ aux dates $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$ et $t=\frac{\pi}{3}$.
3) Donner une description complète de ce mouvement.

Solution

1) $f_1 : t \longmapsto x = f_1(t) = 2\cos t$

$f_2 : t \longmapsto y = f_2(t) = 2\cos^2\frac{t}{2}$.

Déf. 48

Déf. 49

Essayons de trouver une relation entre x et y, indépendante de t.

$$\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{x}{2} = y - 1$$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

donc, quel que soit t : $\boldsymbol{x - 2y + 2 = 0}$ (équation d'une droite).

M est donc un point d'une droite D : la trajectoire est incluse dans D. Mais est-ce la droite tout entière?

Le mouvement de M est un mouvement rectiligne. Déf. 54

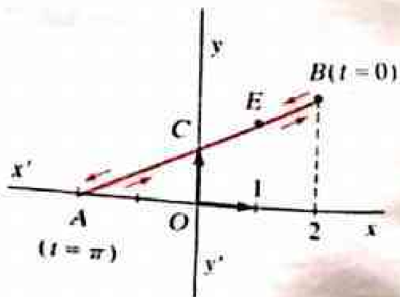
$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \quad \text{d'où} \quad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

La trajectoire est un **segment** $[AB]$ de cette droite avec $A(-2; 0)$ et $B(2; 2)$.

Les fonctions f_1 et f_2 étant **périodiques**, de période 2π, la fonction vectorielle $\vec{F}$ est périodique, de période 2π.

Pour étudier le mouvement de M, il suffit de faire une étude pour t décrivant $[0; 2\pi]$.

Nous savons que M décrit $[AB]$. Pour décrire son mouvement, il suffit d'étudier les variations de l'une de ses coordonnées, x par exemple.



A la date $t=0$, M est en B. Lorsque t décrit $[0; \pi]$, M décrit le segment $[BA]$, de B vers A; M atteint le point A à la date $t=\pi$, puis, lorsque t décrit $[\pi; 2\pi]$, M décrit le même segment, dans le sens A vers B, et atteint B à la date $t=2\pi$.

t	0		π		2π
$2\cos t$	2	↘	-2	↗	2
M	B		A		B

...puis cela recommence!

2) Vecteur vitesse : $\overrightarrow{MV}=\dfrac{d\overrightarrow{F(t)}}{dt}=f_1'(t)\,\vec{i}+f_2'(t)\,\vec{j}$.

Ses composantes :

$$\overrightarrow{MV}\begin{cases} x'=-2\sin t \\ y'=-2\sin\dfrac{t}{2}\cdot\cos\dfrac{t}{2}=-\sin t\end{cases}$$

$$\left(\cos^2\frac{t}{2}\right)'=-2\times\frac{1}{2}\times\cos\frac{t}{2}\times\sin\frac{t}{2}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

Vecteur accélération :

$$\overrightarrow{M\Gamma}=\frac{d^2\overrightarrow{F(t)}}{dt^2}=f_1''(t)\,\vec{i}+f_2''(t)\,\vec{j}.$$

Ses composantes : $\overrightarrow{M\Gamma}\begin{cases} x''=-2\cos t \\ y''=-\cos t\end{cases}$

Déf. 55 — Déf. 56

Remarquons que $2\vec{i}+\vec{j}$ est un vecteur directeur de AB.

$x-2y+2=0$

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

Par ailleurs : $\overrightarrow{MV}=-\sin t\,(2\vec{i}+\vec{j})$ et $\overrightarrow{M\Gamma}=-\cos t.(2\vec{i}+\vec{j})$.

Quel que soit t, les vecteurs $\overrightarrow{MV}$ et $\overrightarrow{M\Gamma}$ sont **colinéaires** à $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur vitesse et le vecteur accélération ont pour support la droite AB.

Propriété générale d'un mouvement rectiligne.

$t=0$: M est en A.

$\overrightarrow{MV}_1=\vec{0}$ et $\overrightarrow{M\Gamma}_1=-2\vec{i}-\vec{j}=\overrightarrow{BC}$.

$t=\dfrac{\pi}{2}$: $f_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $f_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$. M est en $C(0; 1)$

$\overrightarrow{MV}_2=-2\vec{i}-\vec{j}=\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{M\Gamma}_2=\vec{0}$.

$t=\dfrac{\pi}{3}$: $f_1\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ et $f_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$. M est en $E\left(1; \dfrac{3}{2}\right)$

$\overrightarrow{MV}_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\vec{i}+\vec{j})$ et $\overrightarrow{M\Gamma}_3=-\dfrac{1}{2}(2\vec{i}+\vec{j})=\overrightarrow{EC}$.

3) Donner une description du mouvement, c'est indiquer comment se déplace le point M sur sa trajectoire et préciser les intervalles pour lesquels le mouvement est accéléré et les intervalles pour lesquels il est retardé.

Toute étude de mouvement doit s'achever par une description complète.

Pour cela, on est conduit à étudier les variations de $\|\overrightarrow{MV}\|$, ou bien le signe de $\overrightarrow{MV}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}$.

Déf. 57 — Prop. 143

$\overrightarrow{MV}\cdot\overrightarrow{M\Gamma}=5\sin t\cdot\cos t$. Étudier le signe de $\sin t$ et $\cos t$.

t décrit $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$: M décrit $[BC]$ d'un mouvement accéléré.

Le vecteur vitesse s'annule en $t=0$, $t=\pi$ et $t=2\pi$.

De la date $t=0$ à $t=\dfrac{\pi}{2}$, la norme

t décrit $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: M décrit $[CA]$ d'un mouvement retardé.

t décrit $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$: M décrit $[AC]$ d'un mouvement accéléré.

t décrit $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$: M décrit $[CB]$ d'un mouvement retardé.

de la vitesse est croissante, puis décroissante de $t=\frac{\pi}{2}$ à $t=\pi$.

$\|\overrightarrow{MV}\|$ est maximum en $t=\frac{\pi}{2}$ et $t=\frac{3\pi}{2}$.

Ce maximum est $\sqrt{5}$.

261 Énoncé

Dans un mouvement rectiligne, l'abscisse x du point M est une fonction du temps : $x=f(t)$ avec $t>0$. La vitesse v est la dérivée de f, et l'accélération γ la dérivée seconde. A tout instant t, on a : $\gamma=3t-\frac{1}{t^2}$.

Déterminer f, sachant que à l'instant $t=1$, on a $x_1=\frac{3}{2}$ et $v_1=\frac{7}{2}$.

Solution

La fonction f cherchée est solution de l'**équation différentielle** : $f''(t)=3t-\frac{1}{t^2}$.

f' et f'' existent.

f' est une primitive de f'' :

Prop. 136

d'où
$$f'(t)=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{t}+A.$$

A et B sont des constantes.

f est une primitive de f' : d'où
$$f(t)=\frac{1}{2}t^3+\ln t+At+B.$$

$t>0$.

Les constantes A et B sont déterminées en tenant compte des conditions initiales :

En $t=1$: $f'(1)=\frac{7}{2}$ d'où $\frac{3}{2}+1+A=\frac{7}{2}$

donc $A=1$.

En $t=1$:

$f(1)=\frac{3}{2}$ d'où $\frac{1}{2}+0+A+B=\frac{3}{2}$

donc $B=0$.

La fonction f est donc définie par :
$$x=f(t)=\frac{1}{2}t^3+\ln t+t.$$

C'est ce que l'on appelle l'équation horaire.

262 Énoncé

On considère la fonction vectorielle : $t \longmapsto (x;\, y)$ telle que

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos t + 2 \\ y = \sin t - \cos t - 1 \end{cases} \quad (t \text{ décrit } \mathbb{R}).$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, le point mobile M a pour coordonnées (x, y); t est le temps.

1) Calculer $(x-2)^2+(y+1)^2$. En déduire la trajectoire de M. Construire cette trajectoire.
2) Déterminer $\overrightarrow{V(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$; construire M, ainsi que les vecteurs vitesse et accélération pour $t=0$; $t=\frac{\pi}{2}$; $t=\frac{3\pi}{4}$.
3) Montrer que le mouvement de M est circulaire et uniforme.

Solution

1) $f_1 : t \longmapsto x = \sin t + \cos t + 2$,
$f_2 : t \longmapsto y = \sin t - \cos t - 1$.

f_1 et f_2 sont des fonctions périodiques de période 2π, le mouvement de M est donc **périodique,** de période 2π.

Déf. 48

Il suffira de faire une étude pour t décrivant $[0;\, 2\pi]$.

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = (\sin t + \cos t)^2 + (\sin t - \cos t)^2 = 2.$$

Soit A le point de coordonnées $(2;\, -1)$.
$(x-2)$ et $(y+1)$ sont les composantes de $\overrightarrow{AM}$

$$(x-2)^2+(y+1)^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 = 2$$

donc, quel que soit t :

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{2}.$$

Le point M est un point du cercle de centre A, de rayon $\sqrt{2}$.

Mouvement **circulaire.**

Pour préciser cette trajectoire et le déplacement de M, il nous faut étudier les variations de $f_1(t)$ et celles de $f_2(t)$.

Déf. 54

$$\sin t + \cos t = \sin t + \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin t - \cos t = \sin t - \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} x = f_1(t) = \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \\ y = f_2(t) = \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \end{cases}.$$

On peut également étudier les variations de
$t \longmapsto f_1(t)$
$t \longmapsto f_2(t)$ sur $[0;\, 2\pi]$.

Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$ et majorées par 1 en valeur absolue.

Si α décrit $\mathbb{R}$, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ décrivent $[-1, 1]$; d'où

$$-\sqrt{2}+2 \leqslant \sqrt{2}\cos\alpha + 2 \leqslant \sqrt{2}+2$$
$$-\sqrt{2}-1 \leqslant \sqrt{2}\sin\alpha - 1 \leqslant \sqrt{2}-1$$

donc $x = f_1(t)$ décrit l'intervalle

$$[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}]$$

et $y = f_2(t)$ l'intervalle

$$[-1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}].$$

Donc le point M décrit **le cercle tout entier.**

Pour $t = 0$ **:** $x = 3$ et $y = -2$: M est en M_0.

Pour $t = \frac{\pi}{4}$ **:** $x = \sqrt{2}+2$ et $y = -1$: M en M_1.

Pour $t = \frac{3\pi}{4}$ **:** $x = 2$ et $y = \sqrt{2}-1$: M en M_2.

Pour $t = \frac{5\pi}{4}$ **:** $x = 2-\sqrt{2}$ et $y = -1$: M en M_3.

Pour $t = \frac{7\pi}{4}$ **:** $x = 2$ et $y = -\sqrt{2}-1$: M en M_4

etc.

Si t décrit $[\alpha; \alpha+2\pi[$.
M décrit un cercle entier.

2) Composantes du **vecteur vitesse :**

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \begin{cases} x' = f_1'(t) = -\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \\ y' = f_2'(t) = \sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

On peut utiliser l'une ou l'autre des formes de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

Composantes du **vecteur accélération :**

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} \begin{cases} x'' = f_1''(t) = -\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \\ y'' = f_2''(t) = -\sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$t = 0$ $\quad M$ en M_0; $\overrightarrow{V(0)}(1; 1)$, $\overrightarrow{\Gamma(0)}(-1; 1)$,

$t = \frac{\pi}{2}$ $\quad M$ en $M_5(3; 0)$; $\overrightarrow{V(\pi/2)}(-1; 1)$;
$\overrightarrow{\Gamma(\pi/2)}(-1; -1)$,

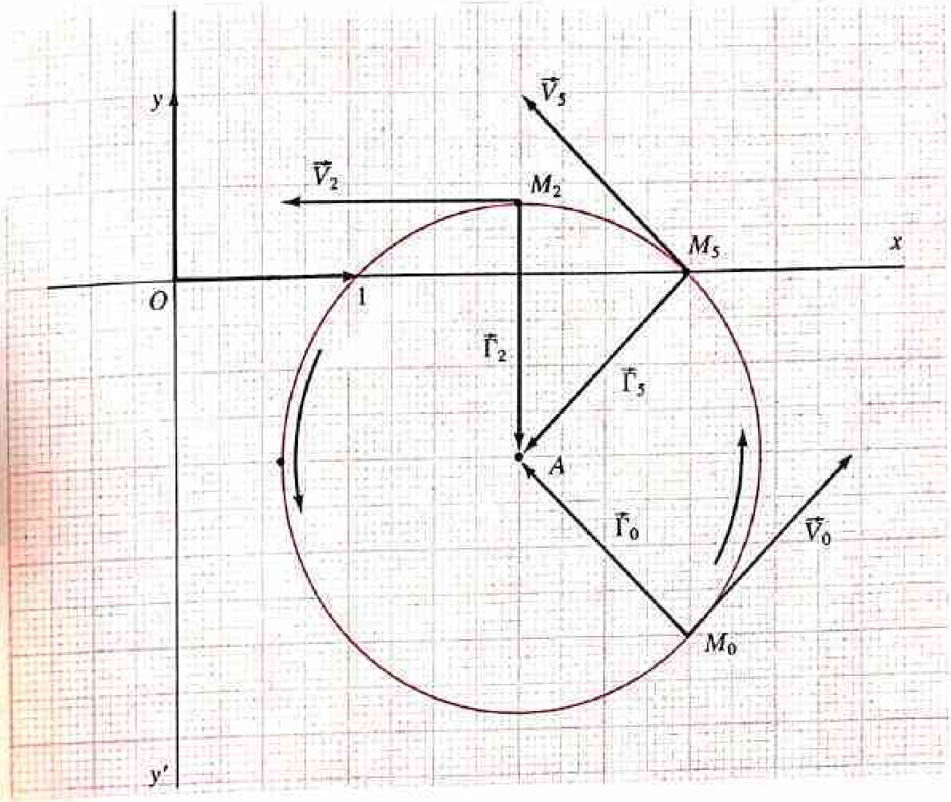
$t = \frac{3\pi}{4}$ $\quad M$ en $M_2(2; \sqrt{2}-1)$;
$\overrightarrow{V(3\pi/4)} : (-\sqrt{2}; 0)$; $\overrightarrow{\Gamma(3\pi/4)} : (0; -\sqrt{2})$.

Calculons les composantes de $\overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AM}\left(\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right); \quad \sqrt{2}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

On remarque que, pour tout t : $\overrightarrow{\Gamma(t)} = -\overrightarrow{AM}$.
Ce qui facilite le tracé de $\overrightarrow{\Gamma(t)}$.

Faire un dessin clair et précis qui aide à visualiser l'allure du mouvement de M.



3) On peut procéder de deux façons.

- **Calcul de $\|\overrightarrow{V(t)}\|$:** $\|\overrightarrow{V(t)}\|^2 = 2$.
  Le mouvement est donc circulaire et uniforme.
- **Calcul de $\overrightarrow{V(t)} \cdot \overrightarrow{\Gamma(t)}$:** $\overrightarrow{V(t)} \cdot \overrightarrow{\Gamma(t)} = 0$.
  On retrouve les propriétés qui caractérisent un mouvement circulaire et uniforme.

Prop. 143

de même $\|\overrightarrow{\Gamma(t)}\|$ est constante et égale à 2.

Revoir le cours de physique.

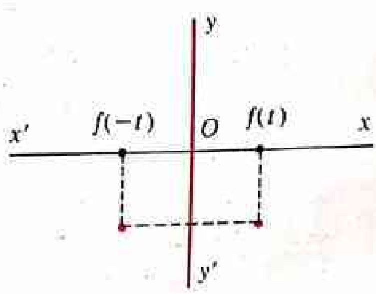
263 Énoncé

Construire la courbe C de représentation paramétrique t décrivant $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln(\cos^2 t) \end{cases}$$

Solution

Posons $f(t) = \sin t$ et $g(t) = \ln(\cos^2 t)$.
g est définie pour $\cos^2 t \neq 0$. Compte tenu de la périodicité de la fonction sinus et de la fonction cosinus, il suffit de faire varier t sur $[-\pi; \pi[$, privé de $-\dfrac{\pi}{2}$ et $+\dfrac{\pi}{2}$.
g est paire et f est **impaire.**
$f(-t) = -f(t)$ et $g(-t) = g(t)$ donc l'axe yy' est axe de symétrie pour la courbe.



Scanned by CamScanner

Il suffit de faire varier t sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Sur cet intervalle :

$|\sin t|<1$ et $0<\cos t\leqslant 1$ donc $y\leqslant 0$

$\cos^2 t = 1-x^2$ d'où $\mathbf{y=\ln(1-x^2)}$.

C'est l'équation de la courbe C avec $|x|<1$.
Il suffit alors d'étudier la fonction

$$h : x \longmapsto \ln(1-x^2).$$

Elle est définie sur $]-1;1[$ et paire

$$h'(x)=\frac{-2x}{1-x^2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x)=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} h(x)=-\infty.$$

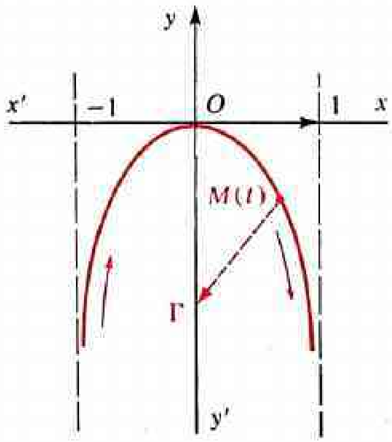
D'où les variations de h.

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
x	-1		0		1
h'	‖	$+$	0	$-$	‖
h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖

Les droites d'équation $x=1$ et $x=-1$ sont asymptotes à C.
L'axe yy' est axe de symétrie. C est tangente en O à $x'x$.
En cinématique, si t est le temps, décrivant $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, le point $M(f(t), g(t))$ décrit la courbe C
Le *mobile* M décrit C dans le sens indiqué par les flèches

$\overrightarrow{MV}\,(\cos t;\ -2\tan t)$;
$\overrightarrow{M\Gamma}\,(-\sin t;\ -2(1+\tan^2 t))$.

On remarque que la première composante de $\overrightarrow{M\Gamma}$ est l'opposée de l'abscisse de M : donc Γ est un point de l'axe yy' pour tout t.



Déf. 55 | Déf. 56

264 Énoncé

Soit $\vec{F}$ la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$t \longmapsto \begin{cases} x=a\cos t-b\sin t\\ y=\frac{4}{5}(a\sin t+b\cos t)\\ z=\frac{3}{5}(a\sin t+b\cos t)\end{cases}$$

1) L'espace affine étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer l'indicatrice de $\vec{F}$ rapportée au point O. Démontrer que cette courbe est l'intersection d'une sphère et d'un plan.
2) Si t est le temps, étudier le mouvement de M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{F(t)}$.
3) Si N est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy, étudier le mouvement de N.

Il suffit de faire varier t sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Sur cet intervalle :

$|\sin t| < 1$ et $0 < \cos t \leqslant 1$ donc $y \leqslant 0$

$\cos^2 t = 1 - x^2$ d'où $\mathbf{y = \ln(1 - x^2)}$.

C'est l'équation de la courbe C avec $|x| < 1$.
Il suffit alors d'étudier la fonction

$$h : x \longmapsto \ln(1 - x^2).$$

Elle est définie sur $]-1; 1[$ et paire

$$h'(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} h(x) = -\infty.$$

D'où les variations de h.

Les droites d'équation $x = 1$ et $x = -1$ sont asymptotes à C.

L'axe yy' est axe de symétrie. C est tangente en O à $x'x$.

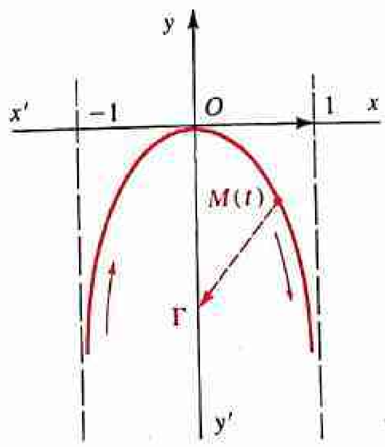
En cinématique, si t est le temps, décrivant $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, le point $M(f(t), g(t))$ décrit la courbe C

Le *mobile* M décrit C dans le sens indiqué par les flèches

$\overrightarrow{MV}(\cos t; -2\tan t)$;
$\overrightarrow{M\Gamma}(-\sin t; -2(1 + \tan^2 t))$.

On remarque que la première composante de $\overrightarrow{M\Gamma}$ est l'opposée de l'abscisse de M : donc Γ est un point de l'axe yy' pour tout t.

t	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
x	-1		0		1
h'	‖	$+$	0	$-$	‖
h	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖



Déf. 55 | Déf. 56

264 Énoncé

Soit $\vec{F}$ la fonction vectorielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$t \longmapsto \begin{cases} x = a\cos t - b\sin t \\ y = \frac{4}{5}(a\sin t + b\cos t) \\ z = \frac{3}{5}(a\sin t + b\cos t) \end{cases}$$

1) L'espace affine étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer l'indicatrice de $\vec{F}$ rapportée au point O. Démontrer que cette courbe est l'intersection d'une sphère et d'un plan.
2) Si t est le temps, étudier le mouvement de M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F(t)}$.
3) Si N est le projeté orthogonal de M sur le plan xOy, étudier le mouvement de N.

Solution

DÉf. 49

1) $\vec{F}$ est définie, continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2π. Pour tout t : $3y = 4z$. L'indicatrice cherchée est incluse dans le plan d'équation : $3y - 4z = 0$, contenant $x'x$.

Revoir votre cours de 1re

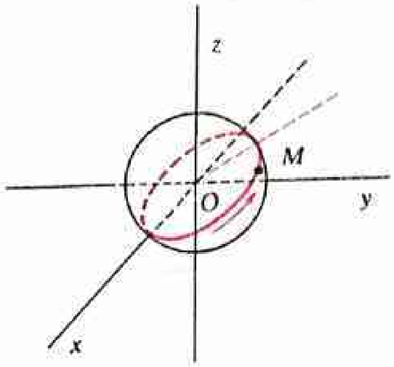
Calculer x^2, y^2 et z^2.

$\frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1.$

On trouve, pour tout t :

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2.$$

L'indicatrice cherchée est incluse dans la sphère de centre O et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le plan ci-dessus passe par le centre de la sphère. Donc l'intersection de ce plan et de la sphère est un cercle C de centre O et de rayon R.



2) Le mouvement de M est un mouvement **circulaire** périodique.

Vecteur vitesse

$$\overrightarrow{MV} \begin{cases} x' = -a \sin t - b \cos t \\ y' = \frac{4}{5}(a \cos t - b \sin t) \\ z' = \frac{3}{5}(a \cos t - b \sin t) \end{cases}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + b^2 = R^2.$$

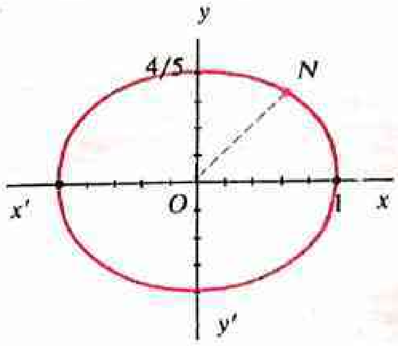
$\|\overrightarrow{MV}\|$ est constante : le mouvement de M est un mouvement circulaire et uniforme.

DÉf. 55

3) Dans le plan xOy, muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le point N a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = a \cos t - b \sin t \\ y = \frac{4}{5}(a \sin t + b \cos t). \end{cases}$$

Pour tout t : $\quad x^2 + \frac{25}{16} y^2 = 1.$



Le point N décrit, dans le plan xOy, une **ellipse** de grand axe porté par $x'x$, et de petit axe porté par $y'y$.

Ce mouvement n'est pas un mouvement uniforme.

Voir **coniques**

265 **Énoncé**

$\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes, est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction vectorielle g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$g(t) = \frac{2}{\sin t} + 3i \frac{\cos t}{\sin t} \qquad t \text{ décrivant }]0; \pi[.$$

O étant l'origine d'un repère du plan, construire l'indicatrice de g relative au point O.

Solution

g est continue sur $]0;\pi[$. Posons
$$f_1(t)=\frac{2}{\sin t},\quad f_2(t)=\frac{3\cos t}{\sin t}$$
et soit M le point de coordonnées :
$$x=f_1(t)\quad \text{et}\quad y=f_2(t).$$

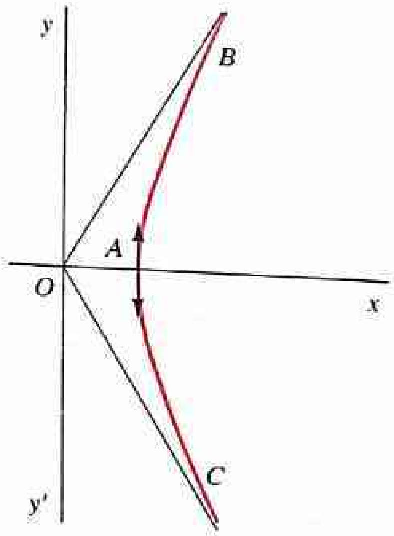
$x=\Re e(z)$ et
$y=\mathrm{Im}(z)$

Cherchons une relation simple entre y et x :
$$\sin t=\frac{2}{x}\quad \text{d'où}\quad \cos^2 t=1-\frac{4}{x^2}\quad \text{avec}\quad x\geqslant 2$$

$\sin t>0$ sur $]0;\pi[$
d'où $x\geqslant 2$

$$y\sin t=3\cos t\quad \text{d'où}\quad y^2\sin^2 t=9\cos^2 t$$
$$y^2\times\frac{4}{x^2}=9\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)\ \text{d'où}\ 4y^2=9x^2-36\ \text{avec}\ x\geqslant 2$$
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-1=0\quad \text{avec}\quad x\geqslant 2.$$

L'indicatrice est donc une branche d'**hyperbole** d'axe focal $x'x$, de sommet $A(2;0)$ sur $x'x$, d'asymptotes les droites d'équations
$$y=\frac{3}{2}x\quad \text{et}\quad y=-\frac{3}{2}x.$$



Si t décrit $]0;\pi[$, $\sin t$ décrit $]0;1]$

et
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f_1(t)=+\infty;$$
$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f_1(t)=+\infty\quad \text{et}\quad f_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f_2(t)=+\infty;$$
$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f_2(t)=-\infty\quad \text{et}\quad f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
x	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Lorsque t décrit $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, le point M décrit l'arc $\widehat{BA}$ de l'hyperbole et lorsque t décrit $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$, M décrit l'arc $\widehat{AC}$.

D'AUTRES POUR CHERCHER

Dans les exercices $\boxed{266}$ à $\boxed{271}$, on considère le mouvement d'un point M dont les coordonnées dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont données en fonction du temps t.
Pour chacun de ces exercices, on tracera la trajectoire, on déterminera le vecteur accélération, le vecteur vitesse et lorsque c'est possible, on déterminera les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré ou retardé.

266 **Énoncé**

$x = t + 2$; $y = -t^2 + 7$ *avec* $-2 \leqslant t \leqslant 3$.
Placer M, construire le vecteur vitesse et le vecteur accélération en $t = 1$.

Indication

On trouve un arc de parabole. Pour tout t : $\overrightarrow{\Gamma(t)} = -2\vec{j}$.

267 **Énoncé**

$x = t + 1$; $y = t^3 - 2t$ *avec* $t \in \mathbb{R}^+$.
Placer M, construire le vecteur vitesse et le vecteur accélération en $t = 1$.

Indication

Quel que soit t, $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ est colinéaire à $\vec{j}$.
Pour la nature du mouvement, on sera amené à faire une étude sur trois intervalles : $\left[0; \frac{1}{3}\right[$; $\left]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right[$ et $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

268 **Énoncé**

$x = \dfrac{1}{t}$; $y = t^2$ *avec* $t \in \mathbb{R}_*^+$.
Placer M, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ à l'instant $t = 2$.

269 **Énoncé**

$x = \dfrac{1}{2}\ln t$; $y = \ln(t - 1)$ *avec* $t > 1$.
Donner une équation de la trajectoire sans chercher à la tracer.

Indication

Équation de la trajectoire : $y = \ln(e^{2x} - 1)$.

270 **Énoncé**

$x = \sin t$; $y = \sin 3t$.
Montrer que le mouvement est périodique.

Indication

Exprimer $\sin 3t$ en fonction de $\sin t$ en écrivant $\sin 3t=\sin(2t+t)$.

271 **Énoncé**

On considère dans le plan P le mouvement du point $M(x;\, y)$ tel que

$$x=\frac{1}{\cos(2t)};\quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan(2t)\quad \text{où}\quad t\in\left[0;\,\frac{\pi}{4}\right[.$$

a) *Montrer que la trajectoire T est une partie d'une hyperbole à préciser.*

b) *Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Vérifier que le mouvement est accéléré.*

Indication

Hyperbole d'équation $x^2-2y^2=1$.

272 **Énoncé**

On considère un point mobile M de coordonnées $(x(t),\, y(t))$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où t décrit l'intervalle $[0,\, \pi]$.

A l'instant $t=0$, M coïncide avec le point A de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et son vecteur vitesse $\vec{V}(0)$ a pour coordonnées $(0,\, 1)$.

A tout instant $t(0\leqslant t\leqslant \pi)$ le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ de M a pour coordonnées

$$\left(-\frac{1}{2}\cos t;\ -\frac{1}{2}\cos t-\sin t\right).$$

1) *Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ puis les coordonnées de M à l'instant t.*

2) *Déterminer la trajectoire du point M par une équation.*

Indication

On trouve les composantes de $\vec{V}(t)$ en cherchant des primitives des composantes de $\vec{\Gamma}(t)$, sans oublier les constantes, que l'on détermine par les conditions initiales. De même, on obtient les composantes de $\overrightarrow{OM}$ à partir de celles de $\overrightarrow{V(t)}$. Équation : $y=x+\sqrt{1-4x^2}$. Attention : $\sin t\geqslant 0$.

273 **Énoncé**

Dans l'espace affine euclidien, muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un point mobile M dont les coordonnées s'expriment, en fonction du temps t, par :

$$x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t;\quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t;\quad z=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos t.$$

a) *Démontrer que le mouvement est périodique.*

b) *B et C sont les positions respectives de M pour $t=0$ et $t=\frac{\pi}{2}$.*

A a pour coordonnées $(1, 0, 0)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *en fonction de* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. *On pose* $\overrightarrow{AB} = \vec{I}$ *et* $\overrightarrow{AC} = \vec{J}$.
Démontrer que $(\vec{I}, \vec{J})$ *est une base orthonormée du plan ABC.*

c) *Montrer que* $\overrightarrow{AM}$ *s'exprime en fonction de* $\vec{I}$ *et* $\vec{J}$.
En déduire que la trajectoire est un cercle du plan ABC.
Que pouvez-vous encore dire de ce mouvement?

274 **Énoncé**

Dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, *on considère un point mobile M dont la position au temps t, est définie par ses coordonnées :*

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos 2t \\ y(t) = \cos 2t \\ z(t) = \sin^2 t. \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1) *Déterminer le vecteur vitesse* $\overrightarrow{V(t)}$ *et le vecteur accélération* $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ *au temps t. Ces vecteurs sont-ils liés?*

2) *Démontrer que la trajectoire est un segment de droite. Décrire le mouvement.*

DES PROBLÈMES DE DÉNOMBREMENT

DES EXERCICES CORRIGÉS

275 **Énoncé**

Dans une chaîne de fabrication, une pièce doit passer sur cinq machines A, B, C, D, E.

1) Combien y a-t-il de trajets possibles si l'ordre de passage sur les diverses machines est indifférent?
2) Combien de trajets si la pièce doit passer en A avant B et D et en C avant E?

Solution

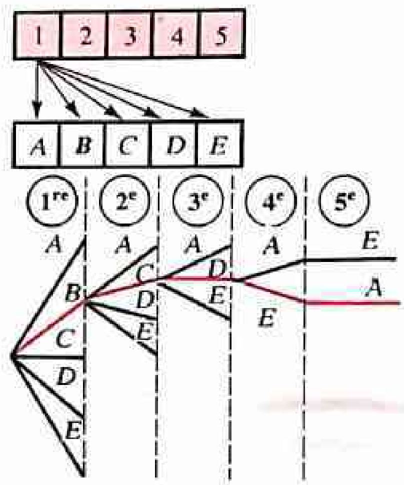
1) $ABCDE$ est un trajet possible, $ACBED$ en est un autre. Pour trouver le nombre de trajets possibles, il faut donc trouver le nombre de **bijections** de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$.

Un **arbre** permet de visualiser ces choix : pour la *première* machine, 5 choix possibles, d'où les 5 branches.

La première étant choisie (ex. : **B**), il ne reste que 4 choix possibles pour la seconde. La première et la seconde étant choisies ($B \cdot C$), il reste 3 choix, etc. Au total :

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = \mathbf{120}.$$

Vous savez que le **nombre des bijections** d'un ensemble à 5 éléments sur un ensemble de même cardinal est $5! = \mathbf{120}$.



Trajet ***BCDEA***.
Permutations.

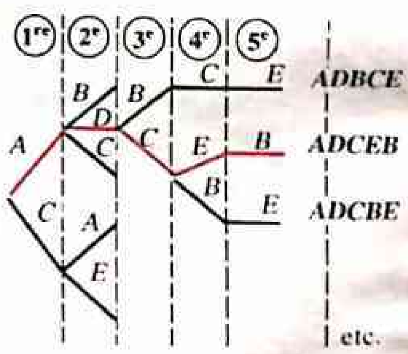
Déf. 60 | Prop. 147

2) Parmi les 120 bijections trouvées précédemment, il faut choisir celles qui conviennent. On peut faire un arbre pour dénombrer les trajets possibles, et, ici, c'est le seul procédé utilisable.

La 1^{re} machine ne peut être que A ou C...

Il n'y a que **deux** branches au premier niveau.

Nous vous laissons le soin de dessiner l'arbre complet. Il y a **20 trajets** possibles.



Trajet ***ADCEB***.

276 **Énoncé**

> Un nombre est une suite de chiffres.
> On n'utilisera dans cet exercice que les chiffres de 1 à 9 (0 est **exclu**).
>
> 1) Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres *distincts*? Combien de nombres de 6 chiffres distincts? de 9 chiffres distincts? de 11 chiffres distincts?
>
> 2) Combien peut-on former de nombres de 3 chiffres, distincts ou non? Même question pour des nombres de 6 chiffres? des nombres de 11 chiffres?
>
> 3) On veut former tous les nombres de 3 chiffres contenant 2 fois le chiffre 1, et deux fois seulement : combien y en a t-il? Combien y a-t-il de nombres de 3 chiffres ayant deux fois exactement le même chiffre?

Solution

1) Posons $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

- Un nombre de **3 chiffres** distincts est une **application injective** de l'ensemble $\{1; 2; 3\}$ dans l'ensemble E, puisque les chiffres sont **distincts.** D'où le nombre de ces injections :

$$A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = \mathbf{504}.$$

Nombres de 6 chiffres distincts :

$$A_9^6 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \mathbf{60\,480}.$$

- Nombres de 9 chiffres distincts : les 9 chiffres de E sont utilisés. Il s'agit donc d'un nombre de **bijections** de E sur lui-même :

$$P_9 = 9! = \mathbf{362\,880}.$$

- Il n'est bien sûr pas possible d'obtenir un nombre de 11 chiffres différents avec les 9 chiffres de l'ensemble E.

2) • Les 3 chiffres sont **distincts ou non :** le nombre formé est associé à une application de l'ensemble $\{1; 2; 3\}$ dans l'ensemble E.
Le nombre de ces applications est :

$$K = 9^3 = \mathbf{729}.$$

Nombres de 6 chiffres, distincts ou non :

$$K' = 9^6 = \mathbf{531\,441}.$$

- Nombres de 11 chiffres :

$$K'' = 9^{11} \simeq \mathbf{31 \times 10^9} \text{ environ}.$$

3) Un nombre de 3 chiffres contenant deux fois le chiffre 1 se présente sous l'une des formes : $\mathbf{11x;\ 1x1;\ x11}$.

E est l'ensemble des chiffres utilisés.

Prop. 146

Exemples

1	5	9

1	9	5

2	4	5

Prop. 147

Bien savoir faire la différence entre une **application** et une **application injective.**

Prop. 145 Prop. 146

x peut prendre huit valeurs : 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
Il y a donc : 3×8 soit **24** nombres de cette nature.
Si l'on envisage **tous** ces nombres de 3 chiffres ayant deux fois le même chiffre, il y en a 24 qui contiennent deux fois le chiffre 1, 24 qui contiennent deux fois le chiffre 2, etc.
Le nombre cherché est donc :

$$24 \times 9 = \mathbf{216}.$$

1	1	•
1	•	1
•	1	1

277 Énoncé

a) Sur un bateau, on dispose, pour faire des signaux, de 4 pavillons, dont 2 rouges, un bleu et un vert : combien de signaux différents peut-on former en alignant verticalement ces quatre pavillons?

b) Même question si l'on dispose de 3 rouges, 1 bleu et 1 vert, tous alignés verticalement.

c) Même question si l'on aligne 4 rouges, 2 bleus et 2 verts.

Solution

a) Appelons R_1 et R_2 les deux pavillons rouges, B le bleu et V le vert; R_1R_2BV est un signal; R_1BR_2V en est un autre; quant à R_2R_1BV, c'est le **même** que le **premier**.
Si l'on distinguait les deux rouges R_1 et R_2 il y aurait autant de signaux que de bijections d'un ensemble de quatre éléments dans lui-même, c'est-à-dire (4!).
Mais les deux arrangements R_1BR_2V et R_2BR_1V donnent le même signal.
Chaque signal est donc compté 2 fois. Il y a :

$$\frac{4!}{2} = \mathbf{12} \text{ signaux différents.}$$

R_1	R_1
R_2	B
B	R_2
V	V

On sait que le nombre cherché est inférieur à 24. On peut donc essayer de les écrire tous empiriquement. Il faut trouver une méthode rationnelle de construction de la liste. Par exemple, le 1er est R, et trouver tous les signaux dont le **premier** pavillon est **rouge...**

RRBV	*BRRV*	*VRRB*
RRVB	...	...
RBRV	etc.	etc.
...		

On en trouve **12.**

b) Un signal est maintenant formé de 5 pavillons : 3 rouges, 1 bleu et 1 vert. Appelons R_1, R_2, R_3 les trois rouges.
$R_1R_2BR_3V$ est le même signal que $R_1R_3BR_2V$ et que $R_2R_3BR_1V$...
Si l'on distinguait les trois rouges, il y aurait (5!) signaux différents.
Il y a (3!) façons de permuter les 3 rouges R_1, R_2, R_3.
Chaque signal est donc compté (3!) fois.
Il y a donc :

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20 \text{ signaux différents.}$$

c) Il y a $\dfrac{8!}{4!2!2!}$ signaux, soit 420.

Remarque :
On appelle quelquefois « *arrangement avec répétition* » de tels groupements.

Les 4 rouges R_1, R_2, R_3, R_4 donnent (4!) signaux identiques. De même les 2 bleus donnent (2!) signaux identiques et les 2 verts...

278 **Énoncé**

On dispose d'un jeu de belote de 32 cartes : il comporte 8 cœurs, 8 carreaux, 8 piques et 8 trèfles.

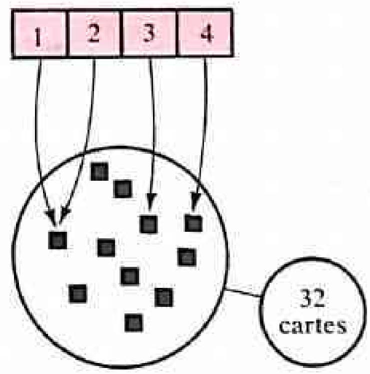
1) Je tire une première carte, je note la carte tirée et je la remets dans le jeu, et je procède de même trois autres fois (quatre tirages).
   a) Combien y a-t-il de façons de tirer ces quatre cartes?
   b) Combien de tirages commencent par un cœur?
   c) Combien de tirages ne contiennent qu'un cœur?
2) Je tire quatre cartes à la fois sans tenir compte de l'ordre.
   a) Combien y a-t-il de tirages distincts?
   b) Combien de tirages ne contiennent qu'un cœur?

Solution

1) **A chaque tirage** d'une carte, on choisit une carte parmi 32 : il n'est pas exclu de choisir deux fois la même carte, puisque chaque carte est remise dans le jeu.

Prop. 2.

a) Chacun des choix de 4 cartes est une **application** de $\{1; 2; 3; 4\}$ dans l'ensemble des 32 cartes.
Le nombre des choix est donc : 32^4 soit **1 048 576.**



b) La première carte est un cœur choisi parmi 8.
Les trois autres cartes peuvent être des cœurs, ou autre chose : elles sont choisies parmi 32 cartes.
Le nombre de ces choix est donc :

$$8 \times 32^3 = \mathbf{262\,144.}$$

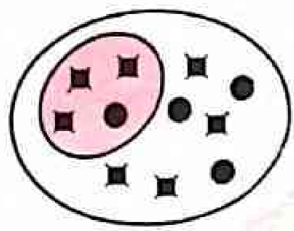
c) Le cœur peut occuper l'une des 4 cases : ce cœur est choisi parmi 8.
Les autres cartes, **qui ne sont pas des cœurs,** sont choisies parmi 24 cartes.
Le nombre de ces tirages sera :

$$4 \times 8 \times 24^3 = \mathbf{442\,368.}$$

2) Un tel tirage équivaut à choisir une **partie** à 4 éléments dans un ensemble de 32 éléments.

a) Nombre de ces tirages :

$$\binom{32}{4} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29}{4} = \frac{A_{32}^4}{24} = \mathbf{35\,960.}$$



b) Pour le **cœur,** il y a 8 choix possibles.
Les trois autres cartes sont choisies parmi les 24 cartes qui ne sont pas des cœurs.
Nombre de ces tirages :

$$8\binom{24}{3}=\frac{8\times(24\times 23\times 22)}{3!}=\mathbf{16\,192.}$$

279

Énoncé

a) Déterminer le nombre de « **mots** » de quatre lettres **différentes** que l'on peut former avec les lettres du mot CONFLIT.

b) Combien de ces mots contiennent seulement des consonnes?

c) Combien de ces mots commencent et se terminent par une consonne?

d) Combien de ces mots commencent par une voyelle?

e) Combien contiennent la lettre T?

f) Combien commencent par F et finissent par une voyelle?

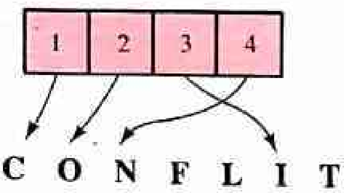
Solution

Remarquons d'abord que les sept lettres de ce mot sont différentes.
On appelle **mot** toute suite de quatre lettres, que cet assemblage ait un sens ou non dans notre langue.

Noter ici la différence avec l'exercice **278.**

a) Il s'agit de trouver le nombre des **injections** d'un ensemble à quatre éléments dans un ensemble à sept éléments.

$$n_1=A_7^4=7\times 6\times 5\times 4=\mathbf{840.}$$

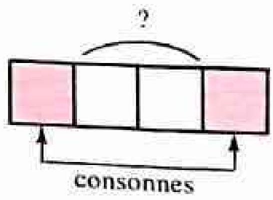


b) Il y a cinq consonnes : C, N, F, L, T.
Il s'agit ici du nombre d'injections d'un ensemble à quatre éléments dans un ensemble à cinq éléments.

Prop. 3

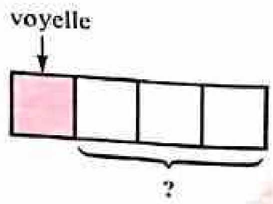
$$n_2=A_5^4=5\times 4\times 3\times 2=\mathbf{120.}$$

c) Une consonne comme première lettre : **5** possibilités.
Une consonne comme dernière lettre : **4** possibilités.
Il faut ensuite choisir **deux** lettres parmi les **5** qui restent.
Il y a A_5^2 possibilités.



$$n_3=5\times A_5^2\times 4=5\times(5\times 4)\times 4=\mathbf{400.}$$

d) Première lettre : une voyelle parmi 2; deux possibilités.
Il reste à choisir **3** lettres parmi les **6** qui restent.



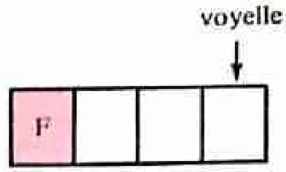
$$n_4=2\times A_6^3=2\times(6\times 5\times 4)=\mathbf{240.}$$

e) **La lettre** ***T*** peut être placée à l'une des 4 positions.
Il reste à choisir trois autres lettres parmi 6.

$$n_5 = 4 \times A_6^3 = 4 \times (6 \times 5 \times 4) = \mathbf{480}.$$

f) ***F*** est placée; restent à placer 3 lettres **dont** une voyelle.
Pour la voyelle finale, il y a **deux** choix possibles.
Il reste à choisir deux lettres parmi 5 :

$$n_5 = 2 \times A_5^2 = 2 \times (5 \times 4) = \mathbf{40}.$$



280 Énoncé

Résoudre : $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n.$

Solution

Remarquer d'abord que l'on doit avoir $2n \geqslant 3$ donc $n \geqslant 2$. L'équation s'écrit :

$$2n + \frac{1}{2} \cdot 2n(2n-1) + \frac{1}{6}\, 2n(2n-1)(2n-2) = 387n.$$

D'où (multiplication par 3)

$$6n + 3n(2n-1) + n(2n-1)(2n-3) = 1\,161n.$$

On obtient une équation équivalente en divisant par n car $n \geqslant 2$

$$6 + 6n - 3 + (4n^2 - 6n + 2) = 1\,161$$

d'où $\quad 4n^2 = 1\,156 \quad n^2 = 289 = 17^2.$

Avec $n \in \mathbb{N}^*$, la solution **unique** est **17**.

Dans C_n^p : $p \leqslant n$.

Prop. 149

Surtout, ici, ne pas utiliser C_n^p sous la forme $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Cela devient inextricable!

Il y a **deux** solutions dans $\mathbb{R}$ mais une seule dans $\mathbb{N}$ ($n > 0$).

281 Énoncé

1) x étant un réel, développer $(1+x)^{10}$ puis $(1-x)^{10}$, puis $(1+x^2)^{10}$.

2) En réduire les sommes :

$$A = \sum_{p=0}^{p=10} C_{10}^p \quad \text{et} \quad B = \sum_{p=0}^{p=10} (-1)^p C_{10}^p.$$

Solution

1) Le développement de $(1+x)^{10}$ contient les monômes :

$$C_{10}^p \times 1^{10-p} \times x^p = C_{10}^p \times x^p.$$

Prop. 153 $\quad 1^K = 1$ si $K \in \mathbb{N}$.

Pour déterminer les coefficients C_{10}^p vous disposez de deux méthodes.

- Construire le *triangle de Pascal* jusqu'à la ligne $n=10$.
- Faire un *calcul direct* le plus astucieusement possible :

$$C_{10}^0=C_{10}^{10}=\mathbf{1}; \qquad C_{10}^1=C_{10}^9=\mathbf{10};$$
$$C_{10}^2=C_{10}^8=\frac{10\times 9}{2}=\mathbf{45};$$
$$C_{10}^3=C_{10}^7=\frac{10\times 9\times 8}{1\times 2\times 3}=\mathbf{120};$$
$$C_{10}^4=C_{10}^6=\mathbf{210}; \qquad C_{10}^5=\mathbf{252}.$$
$$(1+x)^{10}=1+10x+45x^2+120x^3+210x^4+252x^5+210x^6+120x^7+45x^8+10x^9+x^{10}.$$

Prop. 150 — Prop. 151 — Prop. 152

- Pour le développement de $(\mathbf{1-x})^{\mathbf{10}}$, il suffit de remplacer x par $(-x)$ dans l'égalité précédente :

$$(1-x)^{10}=1-10x+45x^2-120x^3+210x^4-252x^5+210x^6-120x^7+45x^8-10x^9+x^{10}.$$

Attention à la **parité** de p
Si p **pair** : $(-x)^p=x^p$.
Si p **impair** : $(-x)^p=-x^p$.

- Pour le développement de $(\mathbf{1+x^2})^{\mathbf{10}}$, on remplace x par x^2 dans la première égalité avec :

$$(x^2)^p=x^{2p}.$$

Prop. 153

$(x^2)^2=x^4$; $(x^2)^3=x^6$, etc.

2) Pour obtenir A, qui est la somme :

$$C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10}$$

il suffit de donner à x **la valeur 1** dans le développement de $(1+x)^{10}$.
On obtient : $A=(1+1)^{10}=\mathbf{2^{10}}$.
D'où $C_{10}^0+C_{10}^1+C_{10}^2+\ldots+C_{10}^{10}=2^{10}=\mathbf{1\,024}.$
Dans un ensemble E à 10 éléments, C_{10}^0 est le nombre de parties ayant 0 éléments — la partie vide — C_{10}^1 le nombre de **singletons**, C_{10}^2 le nombre de **paires**, etc.
Donc A est le nombre de toutes les parties de E.
Si card $E=10$, alors card $\mathcal{P}(E)=1\,024$.

2^{10} est également le **Cardinal de $\mathcal{P}(E)$** avec Card $E=10$.

Singleton : partie à 1 élément.
Paire : partie à 2 éléments.

Prop. 148

- $B=C_{10}^0-C_{10}^1+C_{10}^2-C_{10}^3+C_{10}^4-\ldots-C_{10}^9+C_{10}^{10}$.

Pour obtenir B, il suffit de donner à x la valeur 1 dans le développement de $(1-x)^{10}$.

$$B=(1-1)^{10}=0^{10}=0.$$

Il en résulte :

$$C_{10}^0+C_{10}^2+C_{10}^4+C_{10}^6+C_{10}^8+C_{10}^{10}=C_{10}^1+C_{10}^3+C_{10}^5+C_{10}^7+C_{10}^9.$$

282 Énoncé

1) Calculer $A = C_6^1 + 2C_6^2 + 3C_6^3 + 4C_6^4 + 5C_6^5 + 6C_6^6$ et $B = 6 \times 2^5$.

2) Démontrer que, pour tout naturel k avec $1 \leqslant k \leqslant n$: $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

En déduire que $\sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k = n \times 2^{n-1}$ et retrouver le résultat de la première question.

Solution

1) $C_6^1 = C_6^5 = \mathbf{6}$; $C_6^6 = \mathbf{1}$; $C_6^2 = C_6^4 = \mathbf{15}$; $C_6^3 = \mathbf{20}$.

D'où

$A = 6 + (2 \times 15) + (3 \times 20) + (4 \times 15) + (5 \times 6) + 6$

$A = \mathbf{192}$

$B = \mathbf{192}$ d'où $A = B$.

Prop. 151 Prop. 152

3) $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$

Prop. 150

or $n! = n \times (n-1)!$ et $k! = k \times (k-1)!$.

$n! = n \times (n-1)!$

D'où $C_n^k = \dfrac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \dfrac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

$(n-1) - (k-1) = n - k$.

Donc $\mathbf{kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}}$.

$\sum_{k=0}^{k=n} kC_n^k = 0 + 1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$

$\sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{k=n} nC_{n-1}^{k-1} = n \cdot \sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1}$.

En utilisant l'égalité démontrée ci-dessus.

Or $\sum_{k=1}^{k=n} C_{n-1}^{k-1} = \mathbf{2^{n-1}}$.

Prop. 163

Donc $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k = n \times 2^{n-1}$.

A la première question, on avait $n = 6$

$A = \sum_{k=1}^{k=6} kC_6^k = 6 \times 2^5 = B$.

283 Énoncé

1) Un sac contient 24 grains de haricots : 8 rouges et 16 blancs. On tire au hasard 3 grains dans le sac. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 rouges? Celle d'obtenir 3 blancs? Celle d'obtenir un rouge et 2 blancs?

2) Le sac contient n grains rouges et $2n$ grains blancs. On tire 3 grains. Quelle est la probabilité p_n d'obtenir un rouge et 2 blancs? tire

La suite p_n est-elle convergente?

24 C_{24}^3 24

Solution

1) On choisit au **hasard** 3 éléments dans un ensemble de 24. Le nombre de ces choix est le nombre des **parties** à 3 éléments dans un ensemble à 24.

$$\binom{24}{3}=\frac{24\times 23\times 22}{1\times 2\times 3}=2\,024,\quad \text{card } E=\mathbf{2\,024.}$$

« Tirage au hasard » signifie que tous les grains ont la même probabilité d'être tirés, c'est-à-dire que l'on se place dans l'hypothèse d'**équiprobabilité**.

Événement A : « Tirer 3 rouges ».
On tire 3 rouges parmi les 8 rouges.

$$\text{Card } A=\binom{8}{3}=\frac{8\times 7\times 6}{1\times 2\times 3}=\mathbf{56.}$$

Prop. 159

Nous sommes dans l'hypothèse d'équiprobabilité, d'où la probabilité de l'événement A :

$$p(A)=\frac{56}{2\,024}\approx\mathbf{0{,}028.}$$

Prop. 154

Événement B : « Tirer 3 blancs » (parmi 16)

$$\text{Card } B=\binom{16}{3}=\frac{16\times 15\times 14}{1\times 2\times 3}=\mathbf{560}$$

d'où $$p(B)=\frac{560}{2\,024}\approx\mathbf{0{,}277.}$$

Événement C : « Tirer 1 rouge et 2 blancs ».
Ce tirage *bicolore* se présente comme un couple :

Prop. 144

(Tirage d'un rouge; Tirage de 2 blancs).

Prop. 149

Nombre de manières de tirer **1 rouge :**

$$n_1=\binom{8}{1}=8.$$

Nombre de manières de tirer **2 blancs :**

$$n_2=\binom{16}{2}=\frac{16\times 15}{2}=120.$$

A **chaque** tirage de 1 rouge on peut associer 120 tirages de 2 blancs.

Donc $$\text{Card } C=8\times 120=960$$

d'où $$p(C)=\frac{960}{2\,024}\approx\mathbf{0{,}474.}$$

Prop. 154

2) C'est toujours l'événement : $C=$« Tirer 1 rouge et 2 blancs ». On tire un rouge parmi n : le nombre de ces tirages est

On suppose toujours vérifiée l'hypothèse d'équiprobabilité.

$$n_1=\binom{n}{1}=n.$$

Prop. 151

On tire **deux** blancs parmi $2n$: le nombre de ces tirages possibles est

$$n_2=\binom{2n}{2}=\frac{2n(2n-1)}{2}=n(2n-1).$$

Prop. 149

D'où $\quad \text{Card } C = n_1 \times n_2 = n^2 \times (2n-1)$.

Le nombre de tous les tirages possibles de 3 grains parmi $3n$ est alors :

$$\text{Card } E = \binom{3n}{3} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\text{Card } E = \frac{1}{2}\, n(3n-1)(3n-2)$$

donc $\quad p_n(C) = \dfrac{\text{Card } C}{\text{Card } E}$

$$p_n(C) = \frac{2n^2(2n-1)}{n(3n-1)(3n-2)} = \frac{4n^3 - 2n^2}{9n^3 - 9n^2 + 2n}.$$

Considérons la suite p_n.

On peut écrire $\quad p_n = \dfrac{4 - \dfrac{2}{n}}{9 - \dfrac{9}{n} + \dfrac{2}{n^2}}$

$\lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{2}{n}\right) = 0$; $\lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{9}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} \left(\dfrac{2}{n^2}\right) = 0$

d'où $\mathbf{\lim\limits_{+\infty} (p_n) = \dfrac{4}{9}}$.

La suite p_n est convergente et sa limite est $\dfrac{4}{9}$.

Pour $n=8$, on retrouve $p(C)$ dans le *cas particulier* de la question précédente.

Voir votre cours de Première sur les **suites** ou bien

$\boxed{\text{Déf. } 41}$ $\boxed{\text{Prop. } 104}$

284 Énoncé

Dans une urne il y a 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre.

a) Quelle est la probabilité de l'événement A : « la première est blanche, la deuxième est noire » dans chacun des **deux cas** suivants :

1) On tire la boule, on lit la couleur et on la remet dans l'urne.

2) On tire la boule, on ne la remet pas dans l'urne après ce tirage.

b) Quelle est la probabilité de l'événement B : « les deux boules sont de couleurs différentes », dans chacun de ces deux cas.

Solution

a) L'urne contient cinq boules.

- Cas 1 : L'univers E est l'ensemble des **25 couples** de deux boules, **distinctes ou non.**
  La boule blanche est choisie parmi 3 et la noire parmi 2 :

$$\text{Card}(A) = 3 \times 2$$

donc $\quad p(A) = \dfrac{3 \times 2}{25} = \dfrac{6}{25} = \mathbf{0{,}24}.$

Et ceci dans le cas où la première boule tirée est remise dans l'urne.

$\boxed{\text{Prop. } 154}$ $\boxed{\text{Prop. } 146}$

- **Cas 2 :** L'univers E' est l'ensemble des couples de 2 boules **distinctes.**

$$\text{Card } E' = A_5^2 = \mathbf{20}.$$

Card(A) ne change pas, donc

$$p'(A) = \frac{6}{20} = \mathbf{0{,}3}.$$

Puisque la boule n'est pas remise on ne peut pas avoir **deux fois** la même boule.

BN ou NB $\boxed{\text{Prop. } 155}$

b) B est la **réunion** de deux événements **incompatibles** : « la 1^{re} est blanche, la 2^e noire » ou « la 1^{re} est noire, la 2^e blanche ».

- **Cas 1 :** $p(B) = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25} = \mathbf{0{,}48}.$
- **Cas 2 :** $p'(B) = 0{,}3 + 0{,}3 = \mathbf{0{,}6}.$

Somme de probabilités.
Le lecteur expliquera ces calculs.

285 **Énoncé**

1) On dispose de m jetons, numérotés de 1 à m. On tire un jeton au hasard, on note le numéro marqué, puis on remet ce jeton dans le sac; tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés. On procède à n tirages identiques.
On envisage l'événement B : « Deux jetons au moins ont le même numéro ».
Trouver une relation entre les probabilités $p_{n+1}(\overline{B})$ et $p_n(\overline{B})$ et en déduire un procédé de calcul de $p_n(B)$.
Si $m = 10$, calculer $p_n(B)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 7$.
2) Comment utiliser le modèle ci-dessus pour résoudre le problème suivant : dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité pour que deux personnes au moins aient le même jour anniversaire? Trouver n pour que cette probabilité soit au moins égale à 0,5; puis pour qu'elle soit supérieure à 0,9.

Solution

1) On peut envisager comme **univers** Ω l'ensemble des n-uplets dont les éléments sont choisis dans l'ensemble E des m jetons.

$$\Omega = E^n \quad \text{d'où} \quad \text{Card}(\Omega) = m^n.$$

n tirages :
$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$
m choix pour e_i

Soit l'événement contraire de B :
$\overline{B}$: « Les n jetons tirés portent des numéros **tous distincts** »

$\boxed{\text{Prop. } 145}$ $\boxed{\text{Prop. } 146}$

$$\text{Card}(\overline{B}) = A_m^n \quad \text{d'où} \quad p_n(\overline{A}) = \frac{A_m^n}{m^n}$$

$\boxed{\text{Prop. } 156}$

de même $\quad p_{n+1}(\overline{B}) = \dfrac{A_m^{n+1}}{m^{n+1}}.$

Donc : $$\frac{p_{n+1}(\overline{B})}{p_n(\overline{B})}=\frac{A_m^{n+1}}{A_m^n}\times\frac{m^n}{m^{n+1}}$$

$$\frac{p_{n+1}(\overline{B})}{p_n(\overline{B})}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}\times\frac{1}{m}$$

$$\frac{p_{n+1}(\overline{B})}{p_n(\overline{B})}=\frac{m-n}{m}$$

d'où $$p_{n+1}(\overline{B})=\frac{m-n}{m}\,p_n(\overline{B}).$$

Le nombre m étant fixé, cette relation de récurrence permet de calculer $p_n(\overline{B})$, de **proche en proche,** à partir de $n=1$, avec :

$$p_1(\overline{B})=1 \quad \text{puis} \quad p_2(\overline{B})=\frac{m-1}{m}, \text{ etc.}$$

On obtient $p_n(B)$ avec l'égalité :

$$p_n(B)=1-p_n(\overline{B})$$

on trouvera ci-contre les résultats pour $m=10$.

2) Une année « banale » comporte 365 jours... Les jours anniversaires de n personnes sont des tirages de numéros parmi ces 365 : on utilise le modèle ci-dessus avec $m=365$ jetons.

$$p_n(B)=1-\frac{A_{365}^n}{365^n}; \quad p_1(\overline{B})=1$$

$$p_{n+1}(\overline{B})=\frac{365-n}{365}\cdot p_n(\overline{B})$$

et $$p_n(B)=1-p_n(\overline{B}).$$

Organisez votre calcul au moyen d'une calculatrice, par exemple.
On trouvera :

$n=23$: $p_n(\overline{B})\approx 0{,}4927$ et $p_n(B)\approx 0{,}5072$

$n=41$: $p_n(\overline{B})\approx 0{,}0968$ et $p_n(B)\approx 0{,}9031$.

Dès qu'un groupe de personnes atteint 23 individus, la probabilité pour que 2 d'entre elles, au moins, aient le même jour anniversaire, **dépasse 50 %.**
Pour 41 individus, cette probabilité dépasse 90 %...

On pourrait, bien sûr, calculer $p_n(B)$ directement, par

$$p_n(B)=1-\frac{A_m^n}{m^n}.$$

$\boxed{m=10}$

n	$p_n(\overline{B})$	$p_n(B)$
1	1	0
2	0,90	0,10
3	0,72	0,28
4	0,504	0,496
5	0,302	0,698
6	0,151	0,849
7	0,060	0,939

$p_n(\overline{B})$ est décroissante et $p_n(B)$ croissante.

- Sur 29 rois de France dont on connaît les dates de naissance, 2 ont le même anniversaire : Charles IX et Louis XII nés le 27 janvier.
- Sur 28 empereurs de la maison de Habsbourg : deux sont nés un 21 septembre et deux sont nés un 24 février.
- Par contre, sur les 32 souverains anglais, il n'en existe pas deux qui ont la même date de naissance.

D'AUTRES POUR CHERCHER

■ Dénombrements

286 **Énoncé**

Simplifier les expressions :

$$\frac{n!}{(n-2)!};\quad \frac{(n-1)!}{(n+2)!};\quad \frac{(n-p+1)!}{(n-p-1)!};\quad \frac{n!}{(n+1)!}-\frac{(n-1)!}{n!}.$$

Indication

$$\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{1\times2\times3\times\ldots\times(n-2)(n-1)\,n}{1\times2\times3\times\ldots\times(n-2)}=(n-1)\,n.$$

287 **Énoncé**

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

a) $C_n^3-C_n^2=\dfrac{n^3-6n^2}{6}+5$; b) $\dfrac{C_n^4}{C_n^2}=13$;

c) $C_x^1+C_x^2+C_x^3=\dfrac{7x}{2}$; d) $C_{x-1}^{x-5}=3C_{x-3}^{x-7}$.

Indication

a) $n=6$. *b)* $n=15$. *d)* Voir l'exercice **290**.

288 **Énoncé**

Calculer la valeur du quotient $\dfrac{C_n^1\times C_{2n}^2}{C_{3n}^3}$.

Trouver la limite de ce quotient si n tend vers l'infini.

Indication

La limite est $\dfrac{4}{9}$.

289 **Énoncé**

Développer :

$$A=(2x+y)^3;\quad B=(2x+y)^5;\quad C=(2x-y)^5$$

$$D=(x^2-3y)^4;\quad E=(2a^2-b)^6;\quad F=\left(\frac{a}{2}+b\right)^8.$$

290 **Énoncé**

a est un naturel fixé supérieur à 1. On considère la suite $u_p = C_a^p$ $(0 \leq p \leq a)$.

1) *Étudier ses variations. Y a-t-il des termes égaux?*

2) *En déduire que $C_n^p = C_n^q$ équivaut à $p + q = n$.*

Indication

Écrire $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ que l'on compare à 1. Les variations de u_p dépendent de la position de p par rapport à $\frac{1}{2}(a-1)$. Deux cas selon la parité de a.

291 **Énoncé**

a) *On doit choisir trois élèves parmi neuf élèves pour jouer les rôles de Tartuffe, Orgon et Cléante : combien de choix possibles?*

b) *Même question si l'un des élèves, André, refuse de jouer le rôle d'Orgon?*

Indication

a) 504. *b*) On peut utiliser deux méthodes différentes.

M_1 Il y a 8 possibilités pour le choix d'Orgon, 8 encore pour celui de Tartuffe et 7 pour celui de Cléante.

M_2 Si André joue Orgon, il y a 56 possibilités de choix pour les 2 autres rôles. On calcule alors une différence.

292 **Énoncé**

Calculer le nombre de possibilités qu'il y a de rgnger sur une étagère de bibliothèque 5 gros livres, 4 livres de grosseur moyenne et 3 livres beaucoup plus minces, sachant que les livres de même dimension sont placés les uns à côté des autres.

Indication

Il faut

— ordonner les 3 catégories (gros, mince, moyen) : 3! soit 6 façons;

— pour chaque catégorie, ranger les ouvrages de cette catégorie $(5!) \times (4!) \times (3!) = 17\,280$. Achever le calcul.

293 **Énoncé**

On veut élire un comité de 4 personnes choisies parmi 12.

a) *De combien de manières peut-on former ce comité?*

b) *De combien de manières si Monsieur X refuse de siéger avec Monsieur Y?*

c) *De combien de manières si Monsieur Z ne veut siéger qu'en présence de Monsieur T?*

d) *Parmi les 12 personnes, il y a 7 hommes et 5 femmes, combien de manières de former un comité composé de 2 hommes et 2 femmes? et si en plus Monsieur A ne veut pas siéger avec Madame B?*

Indications

b) Deux méthodes : M_1 X siège mais pas Y (C_{10}^3). Y siège mais pas X (C_{10}^3). Ni X ni Y ne siègent (C_{10}^4). M_2 X et Y siègent en même temps (C_{10}^2) puis faire une différence.

294 **Énoncé**

On écrit sur 26 cartons les 26 lettres de notre alphabet. On tire simultanément 5 de ces cartons.

1) *Combien y a-t-il de tirages différents?*
2) *Combien de tirages contiennent 3 consonnes et 2 voyelles?*
3) *Combien de tirages contiennent la lettre B?*
4) *Combien de tirages contiennent les lettres A et B?*
5) *Combien de tirages contiennent au moins une voyelle?*

Indication

Pour la question 5, pensez aux tirages ne contenant aucune voyelle.

295 **Énoncé**

ABCD est un rectangle. On trace 5 droites parallèles à AD coupant [AB] et 3 droites de direction AB coupant [BC].
Combien peut-on dénombrer de rectangles sur cette figure?

Indication

Choisir un rectangle du dessin, c'est choisir d'une part 2 parallèles à AD, parmi 7 et d'autre part, 2 parallèles à AB, parmi 5.

296 **Énoncé**

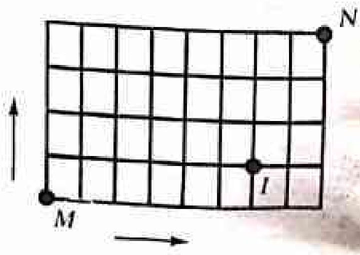
Douze personnes se retrouvent le matin. Chacune d'elles serre la main à chacune des autres. Quel est le nombre de toutes les poignées de mains échangées?

297 **Énoncé**

Combien y a-t-il de manières de garer trois voitures dans un parking qui comporte cinq places? Et cinq voitures? et quatre voitures?

298 **Énoncé**

On part de M pour aller en N, en suivant les lignes du quadrillage, en se déplaçant seulement vers la droite et vers le haut.
Combien d'itinéraires possibles?
Combien d'entre eux passent en I?



299 **Énoncé**

$f(x)=(1+x)^n$. Développer $f(x)$ et écrire la dérivée de f de 2 façons.
En déduire

$$\sum_{k=1}^{k=n} kC_n^k = n2^{n-1} \quad \text{et pour } n \geqslant 2: \quad \sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k C_n^k = 0.$$

300 **Énoncé**

x et y étant des naturels résoudre le système :

$$\binom{x}{y}=\binom{x}{y+1} \quad \text{et} \quad 4\binom{x}{y}=5\binom{x}{y-1}.$$

Indication

Penser que dans $\binom{n}{p}$ on doit avoir $n \geqslant p$. Réponse : $x=17$ et $y=8$.
Voir ex. **290**.

301 **Énoncé**

Démontrer que $\dfrac{1}{n+1} C_{n+1}^p = \dfrac{1}{p} C_p^{p-1}$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2}{n+1}(2^n-1)$.

302 **Énoncé**

Démontrer que $A_n^p = A_{n-1}^p + pA_{n-1}^{p-1}$.
En déduire, pour les A_n^p, un « triangle » analogue au triangle de Pascal pour les C_n^p.

■ **Probabilités**

303 **Énoncé**

Dans une urne se trouvent six boules blanches numérotées de 1 à 6 et cinq boules rouges numérotées de 1 à 5.
On extrait, au hasard et simultanément, quatre boules de l'urne; on admet que tous les tirages de quatre boules sont équiprobables.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : les quatre boules sont blanches.
B : il y a, parmi les quatre boules, au moins une boule blanche.
C : parmi les quatre boules, il y a exactement une boule blanche et exactement une boule numérotée 3.

Indication

$p(A)=\dfrac{1}{22}$; $p(B)=\dfrac{65}{66}$; $p(C)=\dfrac{9}{55}$.
Pour l'événement B, penser à l'événement contraire.

304 **Énoncé**

On dispose d'un jeu de 32 cartes. On en tire 3 simultanément, on suppose l'équiprobabilité des tirages de 3 cartes. Quelles sont les probabilités des événements suivants :

A : Obtenir exactement un cœur.

B : Obtenir exactement un valet.

C : Obtenir exactement un cœur et un valet.

Indication

$p(A)=\frac{8C_{24}^2}{C_{32}^3}$; Pour l'événement C, envisager deux cas : soit que l'on tire le valet de cœur, soit un autre valet.

305 **Énoncé**

Dans un tiroir, il y a quatre chaussettes noires, six rouges et deux blanches, toutes indiscernables au toucher.

Lors d'une panne d'électricité, le savant Cosinus choisit deux chaussettes au hasard.

Quelle est la probabilité pour qu'il aille faire ses cours avec deux chaussettes de couleurs différentes?

Indication

Penser à l'événement contraire $\overline{A}$: $p(\overline{A})=\frac{1}{3}$.

306 **Énoncé**

Un joueur tire l'une après l'autre 4 cartes d'un jeu de 52 cartes (tirage sans remise).

a) *Quelle est la probabilité p_1 pour que les 4 cartes soient des piques?*

b) *Quelle est la probabilité p_2 pour que les 4 cartes soient des cœurs?*

c) *Quelle est la probabilité p_3 pour qu'il ait un cœur exactement?*

d) *Quelle est la probabilité p_4 pour qu'il ait un cœur et un pique?*

307 **Énoncé**

a) *Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x}$.*

Étudier ses variations et tracer sa représentation graphique.

b) 1) *n désignant un nombre entier strictement positif, une urne électorale contient $n-1$ bulletins « NON » et $n+1$ bulletins « OUI ».*

Pour réaliser un sondage sommaire, on prélève deux bulletins, chaque bulletin ayant la même probabilité d'être prélevé. Calculer la probabilité $P(n)$ de l'événement : « on a prélevé deux bulletins portant des votes différents ».

2) *Utiliser la partie a pour déterminer la valeur n_0 de l'entier n pour laquelle la probabilité P(n) prend sa plus grande valeur. Calculer $P(n_0)$.*

Indication

b) $P(n)=\dfrac{n^2-1}{2n^2-n}$. P(4) maximum.

308

Énoncé

20 chevaux sont au départ d'une course. Seule nous intéresse l'arrivée des trois premiers chevaux.

a) *Je joue 3 numéros. Quelle est la probabilité pour que je gagne «dans l'ordre»; «dans le désordre»?*

b) *Je joue maintenant 5 numéros. Quelle est la probabilité pour que je gagne le tiercé dans l'ordre; dans le désordre?*

Indication

a) Dénombrer d'abord toutes les arrivées pour les trois premiers dans l'ordre (arrangement). $p_1 \approx 0{,}000\,146$.

b) Dénombrer les arrivées des 3 premiers dans un ordre quelconque. $p_2 = 6p_1$.

309

Énoncé

Une urne contient 100 billets numérotés de 1 à 100.

1) *On extrait de l'urne 1 billet.*
Sachant que chaque billet a la même probabilité d'être extrait, quelle est la probabilité d'obtenir un billet dont le numéro est terminé par le chiffre 2.

2) *On tire deux billets de l'urne simultanément. Donner le nombre de tirages différents possibles.*

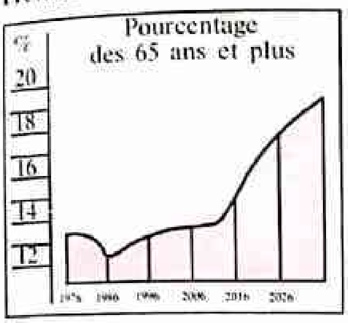
3) *Ces billets sont utilisés pour une tombola. Chaque billet dont le numéro est terminé par un chiffre 2 donne droit à un lot. On extrait simultanément deux billets de l'urne. Les événements élémentaires attachés à cette expérience sont équiprobables.*
Soit A l'événement : «gagner un lot et un seulement».
Soit B l'événement : «gagner deux lots».
Soit C l'événement : «gagner au moins un lot».
Calculer la probabilité des événements A, B, C.

Indication

1) $p_1 = 0{,}1$. 2) 4950. 3) $p(A)=\dfrac{900}{4950}$, $p(B)=\dfrac{C_{10}^2}{4950}$.

STATISTIQUES

Statistiques et Prévisions



Déjà, à Rome l'Empereur **Auguste** fit procéder à des enquêtes sur les richesses de l'Empire, le nombre des soldats, des navires et les revenus des citoyens. L'usage des statistiques remonte donc à la plus haute antiquité... En France, le ministre **Vauban** fit une tentative de recensement de la population. Le premier bureau des statistiques fut créé à la fin du XVII^e, et le premier recensement sérieux eut lieu en 1801, à l'initiative de **Chaptal,** ministre de Napoléon I^{er}.
Au XVII^e, **Deparcieux** (France) et **Wargentin** (Suède) dressent les premières tables de mortalité, indispensables aux assurances.
A la fin du même siècle, **Bernoulli** et **Laplace** étudient les premières applications du calcul des probabilités aux prévisions statistiques.
C'est en 1946 qu'est créé en France l'**I. N. S. E. E.,** organisme public chargé en particulier des recensements (du latin *« recensere »* : dénombrer). Le premier recensement chinois n'eut lieu qu'en 1953.

Les premiers sondages importants furent pratiqués aux États-Unis vers 1930 par **Gallup.** L'I.F.O.P. fut créé en France vers 1938. Deux grandes méthodes sont utilisées pour les *sondages d'opinion.*
Dans la méthode des **quotas,** on interroge un échantillon de la population (500 à 2 000 personnes); cet échantillon doit avoir les mêmes caractéristiques que la population totale considérée : proportion hommes-femmes, répartition par âges, catégories socio-professionnelles, etc.
Encore faut-il que ces caractéristiques soient bien connues, par référence par exemple, à un recensement récent. Le nom des personnes interrogées n'est pas connu.
Dans la méthode **probabiliste,** on interroge des personnes prises au hasard sans se préoccuper de la constitution de l'échantillon « sondé ». Mais dans ces conditions, le nombre des personnes interrogées doit être beaucoup plus élevé que dans la méthode des quotas. Ces choix « au hasard » sont en réalité faits sur une liste générale de la population détenue par l'organisme sondeur (I.N.S.E.E.).

Dans la vie quotidienne, nous ne faisons pas un pas sans rencontrer des lois statistiques qui servent de base à nos actions pratiques.
Heisenberg, Physicien

C'est le mathématicien **Barrême** qui a donné son nom à nos barèmes actuels.
En 1671, il publiait un livre et des tables numériques « livre nécessaire à toutes sortes de conditions » :
« Le Sieur Barrême, arithméticien demeurant au bout du Pont Neuf, enseigne brièvement l'arithmétique et vend quatre livres utiles. Le premier est le livre des Comptes et Multiplications, dédié à Monseigneur Colbert. Le second permet d'apprendre l'arithmétique par soi-même par les méthodes les plus courtes qu'on ait jamais vues. Le troisième est le petit livre du Grand Commerce et des Changes... »

DES EXERCICES CORRIGÉS

310 **Énoncé**

Durant une période d'hiver, monsieur Dupont dresse un tableau d'observations quotidiennes : x désigne, en degrés, la température moyenne extérieure de la journée, et y la consommation en fuel — en litre — de sa chaudière, le même jour.

x	-6	-4	0	5	10
y	40	36	32	24	18
Point	A	B	C	D	E

1) Construire le nuage de points représentant ces couples et déterminer le point moyen G (les points sont désignés par A, B, C, D, E).
2) Écrire l'équation d'une droite Δ passant par G et de pente m.
Chacun des points A, B, C, D, E se projetant en A', B', C', D', E' sur D, parallèlement à $y'y$, calculer les coordonnées des points $A'B'C'D'E'$ en fonction de m.
3) Calculer $F(m) = AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + DD'^2 + EE'^2$.
Étudier les variations de F et en déduire la valeur de m pour laquelle elle est minimum. Donner l'équation de la droite Δ_0 correspondant à cette valeur de m et la tracer.
4) Écrire une équation de la droite de régression de y en x en utilisant les formules de votre cours.

Solution

1) Les points A, B, C, D, E sont représentés sur la figure ci-dessous. Nous n'avons pas pris la même origine pour les deux axes. Le point moyen G a pour coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{5}(-6-4+5+10) = 1; \\ \bar{y} = \frac{1}{5}(40+36+32+24+18) = 30. \end{cases}$$

G est le point de coordonnées (1; 30).

2) Une droite Δ de coefficient directeur m passant par G a pour équation

$$y - 30 = m(x-1) \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{y = mx - m + 30.}$$

Point A' : son abscisse est celle de A : -6

$$A' \in \Delta$$

d'où $\quad y = -6m - m + 30 = 30 - 7m$

$$A'(-6; 30-7m).$$

On n'a pas la même unité sur les deux axes.

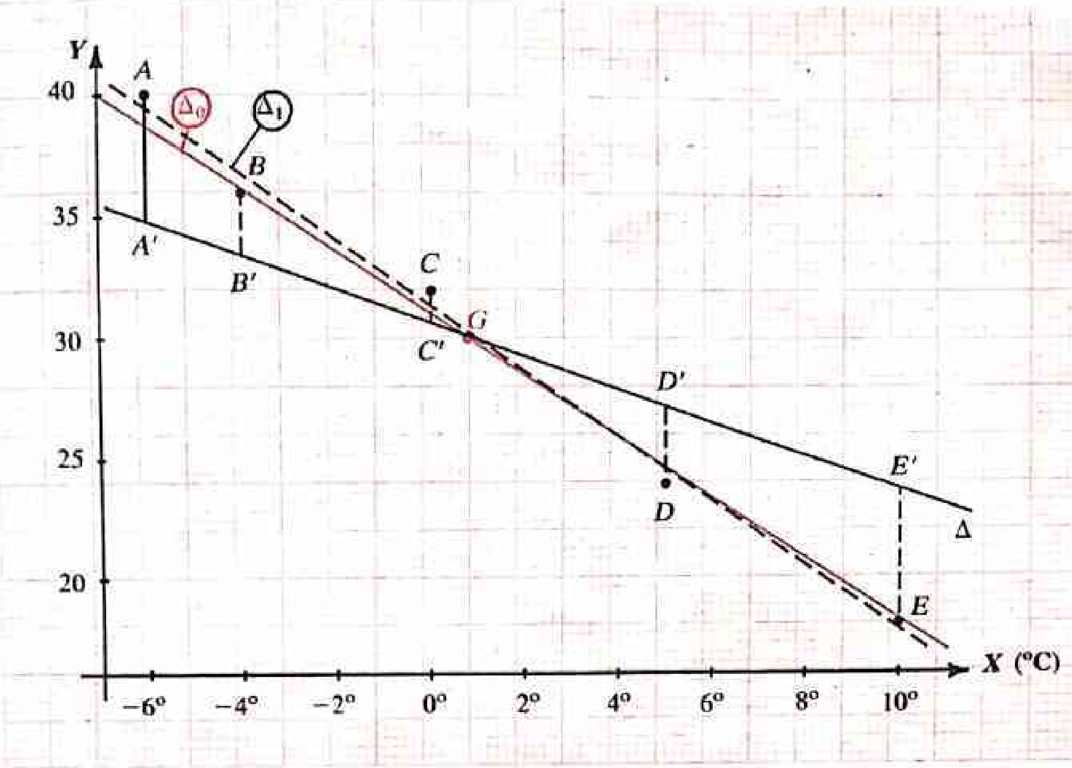
Déf. 64

G est le **barycentre** pour les points du nuage de points.

Déf. 67

$$\frac{y - y_G}{x - x_G} = m$$

Δ n'est pas parallèle à l'axe yy'.



Point B' : $x=-4$ d'où $y=-5m+30$;
$B'(-4;\,-5m+30)$.

Point C' : $(0;\,30-m)$.
Point D' : $(5;\,30+4m)$.
Point E' : $(10;\,30+9m)$.

3) $\overrightarrow{AA'}\begin{pmatrix}0\\-7m-10\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BB'}\begin{pmatrix}0\\-5m-6\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{CC'}\begin{pmatrix}0\\-m-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DD'}\begin{pmatrix}0\\6+4m\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EE'}\begin{pmatrix}0\\9m+12\end{pmatrix}$.

$F(m)=(-7m-10)^2+(-5m-6)^2+(-m-2)^2+(6+4m)^2+(9m+12)^2$

$$\boldsymbol{F(m)=172m^2+468m+320.}$$

La fonction dérivée : $F'(m)=344m+468$ s'annule pour $m_0=-\dfrac{468}{344}\approx \mathbf{-1{,}36}$.

La fonction F est minimum pour cette valeur de m et l'équation de Δ_0 correspondante est

$$\mathbf{y=-1{,}36x+31{,}36.}$$

Δ_0 est tracé en rouge sur la figure.
Cette droite Δ_0 passe par G : pour la construire, il suffit de déterminer un second point.

4) La droite de régression de y en x a pour équation :

$$y-\bar{y}=m_1(x-\bar{x}) \quad \text{avec} \quad m_1=\frac{C(x,\,y)}{Vx}.$$

On remarque que
$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{EE'}=\vec{0}$.

Variations d'une fonction du second degré.

m		−1,36	
F	↘		↗

Déf. 67

Pour organiser vos calculs pour $C(x,\,y)$, V_x et V_y, préparer un tableau avec les valeurs de $(x_i-\bar{x})$ et $(y_i-\bar{y})$.

La covariance de (x, y) est :

$$C(x, y) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} \approx \mathbf{-46,8.}$$

La variance de x :

$$Vx = \frac{1}{5}[49 + 25 + 1 + 16 + 81] = \frac{172}{5} = \mathbf{34,4}$$

d'où $$m_1 \approx \frac{-46,8}{34,4} \approx \mathbf{-1,36.}$$

L'équation s'écrit :

$$y - 30 = -1,36(x - 1)$$

d'où $$\mathbf{y = -1,36x + 31,36.}$$

Remarque : On pourrait aussi déterminer une équation de la droite de régression de x en y (Δ_1) :

$$y - \bar{y} = m_2(x - \bar{x})$$

avec $$m_2 = \frac{Vy}{C(x, y)} \approx -1,37.$$

On trouve l'équation : $\mathbf{y = -1,37x + 31,7.}$
Les deux droites Δ_0 et Δ_1 sont très proches l'une de l'autre : ce qui est confirmé par le calcul du coefficient de corrélation r :

$$r^2 = \frac{m_1}{m_2} = \frac{(C(x, y))^2}{Vx \cdot Vy} \approx 0,997$$

d'où $$\mathbf{|r| \approx 0,998.}$$

$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
−7	10
−5	6
−1	2
4	−6
9	−12

Déf. 64 | Déf. 65 | Prop. 160

On trouve bien sûr la même équation (voir le cours).
Comme à la question 3, on pourrait calculer en fonction de m, la somme des carrés des distances de chacun des points à sa projection sur Δ, **parallèlement** à $x'x$, et déterminer la valeur m_2 pour laquelle cette somme est minimum.

Déf. 68

$|r|$ est très proche de 1 d'où une très forte corrélation linéaire entre ces deux variables.

311 Énoncé

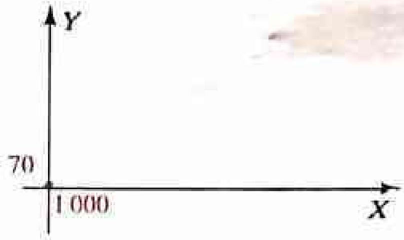
Pour 15 espèces d'oies sauvages on a noté le poids des oies adultes (PA) et le poids correspondant de leurs œufs (PO) (en g).

PA	3 500	3 250	2 180	1 500	3 100	2 500	2 125	1 500	2 375
PO	145	160	125	100	146	120	127	94	120

PA	2 000	2 090	1 280	1 600	1 400	1 400
PO	141	144	91	107	90	85

1) Donner une représentation graphique par un nuage de points.
2) Calculer la valeur moyenne de chacune des variables PA et PO. Marquer le point moyen.
3) Calculer la covariance de PA et PO, ainsi que le coefficient de corrélation.
4) Écrire les équations des droites de régression de y en x et de x en y.

On placera les points sur papier millimétré : X étant le poids des adultes (1 cm pour 200 g), origine à 1 000 g; Y étant le poids des œufs (1 cm pour 10 g), origine à 70 g. Il est bien évident que l'on ne peut prendre la même unité sur les deux axes, ni la valeur 0 comme *origine* commune.



2) Désignons respectivement par x_i et y_i les poids des oies (en g) et les poids de leurs œufs (en g). On trouve : $\bar{x} \approx \mathbf{2\,120}$; $\bar{y} \approx \mathbf{119{,}7}$.
Le point moyen G, isobarycentre des 15 points, a pour coordonnées (2 120; 119,7).

Préparer un tableau.

$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$
1 380	25,3
1 130	40,3
60	5,3

3) **Covariance :**

$$C(x, y) = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \approx \mathbf{13\,914}.$$

Variances :

$$V_x = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2 \approx 476\,777$$

d'où $\sigma_x \approx 690{,}5$

$$V_y = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (y_i - \bar{y})^2 \approx 546{,}75$$

d'où $\sigma_y \approx 23{,}38$.

Déf. 64 — Déf. 65 — Déf. 68

Coefficient r de corrélation :

$$r = \frac{C(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \approx \mathbf{0{,}861}.$$

Ce réel r n'est pas très éloigné de 1, ce qui indique une assez bonne corrélation linéaire entre les variables x et y et justifie la recherche des droites de régression.
A première vue, sur la représentation graphique, l'ajustement linéaire ne paraît pas justifié. Mais il ne faut pas perdre de vue l'importance du choix de l'origine et de l'échelle pour **l'allure** d'une représentation.

Si l'on avait sur $x'x$ la même unité que sur $y'y$ et la même origine, l'alignement des points serait plus probant.

4) **Droite de régression de y en x :**

$$y - \bar{y} = m_1(x - \bar{x}) \quad \text{avec} \quad m_1 = \frac{C(x, y)}{V_y}$$

$$m_1 \approx \frac{13\,914}{546{,}75} \approx 0{,}029$$

d'où l'équation

$$\mathbf{y = 0{,}029x + 57{,}79} \quad (D_1).$$

Prop. 160 — Prop. 161

Droite de régression de x en y :

$$y - \bar{y} = m_2(x - \bar{x}) \quad \text{avec} \quad m_2 = \frac{V_x}{C(x, y)}$$

$$m_2 \approx 0{,}039$$

$$\mathbf{y = 0{,}039x + 33{,}36} \quad (D_2).$$

On tracera la droite D_1 en noir et la droite D_2 en rouge.

On retrouve

$$|r|^2 = \frac{m_1}{m_2} \approx 0{,}743$$

et

$$\sqrt{0{,}743} \approx 0{,}861.$$

312 **Énoncé**

Voici des informations météorologiques pour la ville de Cherbourg (*Le climat de La France* par R. Arlery). Les températures T sont les moyennes mensuelles calculées à partir des relevés pendant 30 ans environ. Les hauteurs de précipitation P (en mm) sont les moyennes mensuelles calculées de la même façon.

	J	F	Ma	A	Mai	Ju	Juil	Ao	S	O	N	D
T	6,5	6,3	7,7	9,6	12,1	14,8	16,4	16,8	15,8	12,9	9,7	7,5
P (mm)	109	75	62	49	41	39	55	71	79	99	133	119

1) Pour la variable T, calculer la valeur moyenne et l'écart type.
Mêmes calculs pour la variable P.
2) Représenter chaque mois de l'année par un point de coordonnées $(t_i ; p_i)$.
Vous obtenez un nuage de points. Placer le point moyen G.
3) Tracer la droite Δ' passant par G et parallèle à l'axe yy'. Calculer l'inertie du nuage par rapport à Δ'.
Même question avec la droite Δ passant par G et parallèle à l'axe xx'.
4) Quelle est l'inertie du nuage par rapport à G?

Solution

1) **Moyenne pour T :**

$$\overline{T}=\frac{6,5+6,3+7,7+\ldots+7,5}{12}\simeq 11,3.$$

Variance :

Déf. 64

$$V_1=\frac{(11,3-6,5)^2+(11,3-6,3)^2+\ldots+(11,3-7,5)^2}{12}.$$

$V_1 \simeq$ **14,40.**

L'écart type pour T est donc

$$\sigma=\sqrt{14,4}\simeq 3,8.$$

Pour la variable P, on trouve :

$$\overline{P}=77,6; \quad V_2\simeq 890; \quad \sigma_2\simeq 29,8.$$

2) Il n'est pas nécessaire que les deux axes aient la même origine. Les unités choisies ne seront pas les mêmes, puisque T varie de 6 à 17 et P de 40 à 140.
Il n'est pas question de parler ici de repère **orthonormé.**
Le **nuage** de points est facile à dessiner. En climatologie, on joint les points 2 à 2 dans l'ordre chronologique des mois.
Le **point moyen** G a pour coordonnées $(\overline{T}; \overline{P})$.

Vous obtiendrez une courbe fermée appelée **climogramme du lieu**, qui caractérise un type de climat.

Déf. 67

3) Envisageons la projection orthogonale sur Δ' de chacun des 12 points du nuage : J en J', O en O', etc.
L'inertie du nuage par rapport à Δ' est la somme des carrés des distances :

$$JJ'^2 + OO'^2 + SS'^2 + \dots$$

Or : $$JJ'^2 = (\overline{T} - t_1)^2$$

et de même pour les autres points.

D'où : $$\boldsymbol{I_{\Delta'} = \sum_{i=1}^{12} (\overline{T} - t_i)^2 = 12V_1}.$$

De même, l'inertie du nuage par rapport à Δ parallèle à $x'x$ est la somme des carrés des distances des points à Δ.

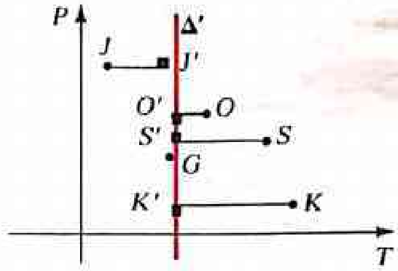
$$\boldsymbol{I_{\Delta} = \sum_{i=1}^{12} (\overline{P} - p_i)^2 = 12V_2}.$$

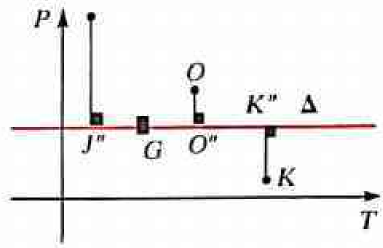
Inertie du nuage par rapport à G :

$$I_G = \sum_{i=1}^{12} (\overline{T} - t_i)^2 + \sum_{i=1}^{12} (\overline{P} - p_i)^2$$

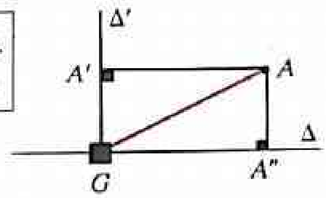
$$I_G = 12(V_1 + V_2).$$

Or $AG^2 = AA'^2 + AA''^2$, donc l'inertie du nuage est la somme des carrés des distances à G des 12 points du nuage.





Déf. 69



La valeur de I_G rend compte de **la dispersion** du nuage autour du point moyen.

D'AUTRES POUR CHERCHER

313 **Énoncé**

Le nombre d'œufs pondus en un an par une poule a été relevé pendant 8 ans. Voici les résultats.

Année (t)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre d'œufs pondus (n)	160	140	122	112	96	88	72	62

Représenter le nuage de points. Un ajustement linéaire vous semble-t-il justifié? Dans l'affirmative, écrire les équations des droites de régression.

314 **Énoncé**

Voici le prix annuel moyen du mètre carré de logement vendu dans le secteur libre (en francs) entre 1972 et 1978, d'une part à Paris et d'autre part en province.

	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
Province	1 840	2 080	2 340	2 700	3 140	3 650	4 360
Paris	3 480	3 860	4 540	5 210	5 790	6 470	7 420

1) *Représentez l'évolution de ce prix moyen en province de 1972 à 78. Calculez, pour chaque année, le pourcentage d'augmentation par rapport à l'année précédente.*
2) *Mêmes questions pour le prix moyen à Paris. On pourra utiliser le même graphique.*
3) *Faire un nuage de points pour ces sept années : en abscisse, le prix X en province et en ordonnée le prix Y à Paris. Déterminer le point moyen. Calculez le coefficient de corrélation linéaire.*

Indication

3) Point moyen : ($\overline{X} \simeq 2873$; $\overline{Y} \simeq 5253$). Coefficient $r \approx 0{,}993$.

315 **Énoncé**

Sur dix feuilles de lierre, on a mesuré la longueur x de la nervure principale et la longueur y du pétiole (en mm). Représenter par un nuage de points. Calculer le coefficient de corrélation entre x et y.

NERVURE	PÉTIOLE
76,5	27,0
70,5	34,5
81,5	33,5
82,0	37,0
67,5	32,5
67,0	35,5
86,0	42,0
76,5	41,0
66,5	44,0
64,0	38,0

Indication

$\bar{x}=73{,}8$; $V_x \simeq 53{,}61$; $\bar{y} \simeq 36{,}5$; $V_y \simeq 22{,}95$; $|r| \simeq 0{,}0106$.

316

Énoncé

Entre 1975 et 1981, la direction d'une entreprise a augmenté ses dépenses publicitaires chaque année et établi une comparaison avec la progression du chiffre d'affaires.
Représenter par un nuage de points, trouver une équation de la droite de régression de Y en X, de la droite de régression de X en Y et calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Année	*Dépenses publicitaires x (en francs)*	*Chiffres d'affaires y (en milliers de francs)*
1975	73 200	35 261
1976	74 700	35 771
1977	76 200	36 791
1978	77 700	37 301
1979	79 200	37 556
1980	80 700	38 066
1981	82 200	38 831

Indication

$\bar{X}=77\,700$; $\bar{Y} \simeq 37\,082$; $r \simeq 0{,}99$.

317

Énoncé

Voici des relevés pour deux variables X et Y.

X	1	2	3	4	5	7
Y	19	12	7	4	4	3

1) *Représenter les couples (X, Y) par un nuage de points et calculer le coefficient de corrélation.*

2) *On pose $Z = \dfrac{1}{X}$. Expliquez en quoi le premier graphique suggère ce changement de variable. Dressez un tableau de valeurs pour les couples $(Z\,;\,Y)$. Dessiner un nouveau nuage de points. Calculez le nouveau coefficient de corrélation. Donnez les équations des droites de régression.*

Indication

1) Le coefficient est environ 0,87.
2) Le coefficient est environ 0,97.

318 **Énoncé**

L'évolution du pourcentage des frais de santé par rapport au budget des ménages (documentation française - 28 mai 1980) donne lieu au tableau suivant :

x_i	1959	1970	1975	1978
y_i	7,1	9,8	11,8	12,6

1) *Donner une représentation graphique.*
2) *Calculez le coefficient de corrélation et écrire l'équation de la droite de régression de y en x.*
3) *En 1985, les experts prévoient pour les frais de santé, un taux de 14,5 % par rapport au budget des ménages. Justifier cette prévision.*

319 **Énoncé**

Pour 11 espèces de goëlands du genre Larus, *on a fait les relevés suivants : x est le poids adulte en grammes et y est la durée d'incubation des œufs en jours.*

x	1 050	770	400	500	800	1 500	1 700	120	320	300	360
y	28	25	26	25	26	28	27	21	24	23	21

Trouver les équations des droites de régression de y en x et de x en y.

Indication

$y = 0{,}004x + 22{,}2$ et $y = 0{,}006x + 20{,}6$; $|r| \simeq 0{,}794$.

PARTIE III

INDEX

En face de chaque mot important, on trouvera des références aux pages pour ce qui concerne les définitions et les **propriétés** essentielles, puis des **exercices** signalés par leurs numéros. Certains d'entre eux, notés en rouge, nous semblent les plus caractéristiques.

Mots	Définitions et propriétés		Exercices signalés par le numéro
	page	n°	
A			
Accélération	45	D57	260-261-262-263-264-265-266 à 274
Accéléré (mouvement)	45	D57-P143	260
Accroissements finis	19	P52-53 .	28-29-55-56-57-90
Aires (calculs d')	38	P126-127	204-205-206-207-215-216 à 225
Ajustement linéaire	51	P160-161	310-311-313-à-319
Arithmétique (suite)	35	D43-P108	
Arrangement	46	P146	278-279-285-291
Asymptote (à une courbe)	62	D29-30-31	1-2-4-15-16-18-31-32-33-34-81 à 86
B			
Bijection	4-17	D7-P44	26-27-58-59-74 à 80-86-95-142-275-276
Binôme (développement)	47	P153	281-282-289-290-299
C			
Caractéristique (équation)	36-41	P138	242-243-254 à 259
Cardinal (d'un ensemble)	45	D59	275 à 285-286 à 309
Cinématique	44	D54-55	260-261 à 265-266 à 274
Combinaison	47	P149	278-280-282-283
Composée (fonction)	6	D13-P5	210
Continuité (d'une fonction)	16	D25	20-21-22-23-24-26-27-28-29. 51 à 61-73 à 80-91-127
Contraires (événements)	49	D62	285-303-305
Convergence (d'une suite)	33	D41	144-145-146-147-148-149-150-154 à 172-211-212
Corrélation (coefficient de)	51	D68	310-311-313 à 319
Covariance	50	D65	310-311-313 à 319

Mots	Définitions et propriétés		Exercices signalés par le numéro
	page	n°	
D			
Définition (ensemble de)	4	D2	1-8-10-14-30 à 86
Dénombrement	45	D59-60	275 à 285-286 à 309
Développement limité	20	D28-P58	19-20-21-36-37-38-39-40-98-99-100-110-127
Dérivabilité-Dérivées	13	D19-20	11-14-15-16-17-18-22-23-62 à 73-91-210
Différentielle (équation)	41	D47	239-240-241-242-243-244-245 à 259-261
E			
Écart type (statique)	50	D64	310 à 319
Équation différentielle	41	D47	Voir **différentielle**
Équiprobabilité	49	P154-159	Voir **probabilité**
Étude d'une fonction	21	P59 à 64	15-16-17-18-25-74 à 86-95 à 143
Événement (en probabilité)	49	D62-63	
Exponentielle (fonction)	27	D35-36	120-121-122-123-124-125-126-128 à 143-244-250
F			
Fonction vectorielle	42	D48 à 58	260-261-262-263-264-265-266 à 274
G			
Géométrique (suite)	35	D44-P109	144-145-147-151-183-203
I			
Incompatibles (événements)	49	D62-P155	284
Indicatrice	42	D49	260-261-262-263-264-265-266 à 274
Injection-Injective	4-46	D5-P146	276-278-279-285-291
Intégral (calcul)	36	D45-46	173 à 184-185 à 203-204 à 215-216 à 238
Impaire (fonction)	5	D10-P4	8-26-27-47-83-96-174-178-181
L			
Limite d'une fonction	9 à 13	P18 à 35	1-2-3-4-9-10-15-16-18-19-20-21. 30 à 86-93-94
Limite d'une suite	33	D41-P102	Voir **convergence** (d'une suite)
Logarithme népérien	25	D33-34	87-88-89-90-95-96-97-101 à 119
M			
Majoration	5-33	D12-D40	24-29-90-123-133-146-147-211-215-230
Moyenne (statistique)	50	D64	310-311-312-313 à 319
Moyenne (valeur)	38	D46	197
N			
Nuage de points	50	D66-67	310-311-312-313 à 319

Mots	Définitions et propriétés		Exercices signalés par le numéro
	page	n°	
P			
Paire (fonction)	5	D9-P3	8-47-97-178
Parties d'un ensemble	47	P148 à 153	278-283-293-294-295
Parties (intégration par)	38	P124	176-177-179-180-183-184-185 à 203
Partielles (dérivées)	15	D24	12-13-69-70-71
Périodique (fonction)	5	D11	8-47-154-260-262-263-264-270-272
Primitives	23	D32	6-89-122-173 à 238. Voir **calcul intégral.**
Probabilités (calcul)	48	D61 à 63	283-284-285-303 à 309
Prolongement (par continuité)	17	D26	4-23-54
R			
Radicaux (dans ℝ)	18	D27	2-3-4-153
Réciproque (bijection)	5-17	P45-46	26-27-74 à 80-92
Récurrence (démonstration)	33	P101	11-147-148
Régression (droite de)	51	P160-161	310-311-313 à 319
Restriction (d'une fonction)	6	D15	92
Retardé (mouvement)	45	D57-P143	260
S			
Statistiques	50	D64 à 68	310-311-312-313 à 319
Suites réelles	32	D37	144 à 153-154 à 172-211-212-213-214-229-237-238
Symétries (d'une courbe)	5-22	P3-4-64	26-83-96-97
T			
Tangente à une courbe	21	P61-62	15-16-18-239-240
Trajectoire (cinématique)	44	D54	260-262-263-264-265-266 à 274
Trigonométrie	6-9	P7 à 17	5-6-7-8-9-10-41 à 50-205
V			
Variance	50	D64	310-311-312-313 à 319
Variation (d'une fonction)	21	P60	15-16-17-18. Voir **Étude d'une fonction**
Vectorielle (fonction)	42	D48 à 58	Voir **Fonction vectorielle**
Vitesse (vecteur)	45	D55	260-261-262-263-264-265-266 à 274
Volume (calcul de)	40	P134	207-208-209-231-232-233

savoir & savoir faire

3 parties

1 **Points de repère** : un résumé de cours.

2 **Pour s'exercer** : des exercices progressifs entièrement résolus, avec des astuces, d'autres avec des indications de solution.

3 **Un index.**

EDITIONS CEDIC
DIFFUSION FERNAND NATHAN
F 67 84 98
32 bd Saint Germain 75005 Paris
ISBN 2-7124-0918-3