REPUBLIQUE DU TCHAD

****

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

****

Unité-Travail-Progrès

****

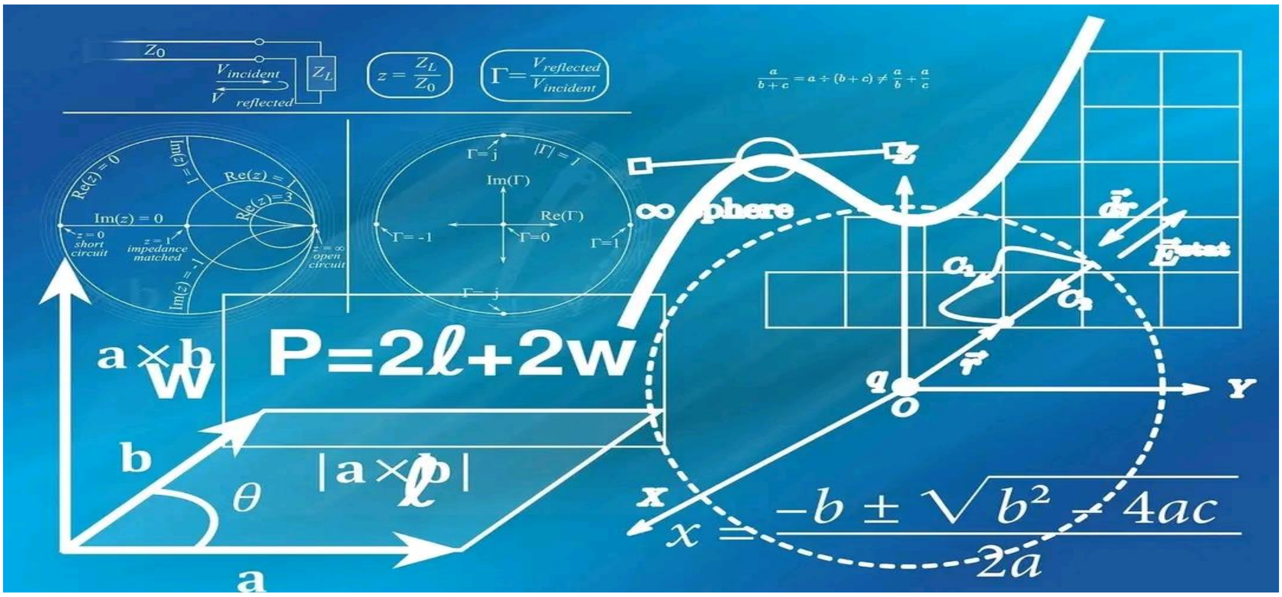
TOUMAÏ-MATHS

TERMINALE SCIENTIFIQUE (TS)

Exercices et problèmes corrigés pour réussir :

-le baccalauréat scientifique

-la préparation aux concours d'entrée dans les grandes écoles



Réalisé par : **M. DOUKGAYE GUETNA**

Sous la Direction de : **Dr Djerassem Laurent**

Tél : (+235) 66 96 97 97 / 68 15 67 86

1ère Edition

PRÉFACE

Au nom d'Allah l'infiniment miséricordieux et le très miséricordieux

---

Vous avez choisi ce fascicule parce que vous avez un objectif à atteindre. C'est un instrument réellement utile et efficace pour aider les apprenants de classes de **terminales scientifiques et techniques**, quel que soit leur niveau, à améliorer leurs performances en mathématiques. Inspirée de la pédagogie nouvelle, la conception de ce manuel se fonde sur les exercices et problèmes corrigés.

Les exercices résolus et commentés, soutenus par des méthodes de résolution permettant à l'apprenant d'acquérir l'esprit scientifique et les principaux modes de raisonnement qu'il devra savoir développer.

Notons cependant qu'il ne sert à rien de lire à priori la solution d'un exercice, mais qu'il faut chercher cette solution après avoir lu l'énoncé en entier et ne consulter la solution proposée dans le fascicule que pour contrôler son propre résultat ou en cas d'hésitation.

Nous attendons avec plaisir toutes les remarques et suggestions. **Merci**

Faire les mathématiques, c'est augmenter son quotient intellectuel.

BON COURAGE

Remerciements à tous mes enseignants, collègues et amis qui par leurs remarques m'ont accompagné durant l'élaboration de cette collection.

SOMMAIRE

DES CONSEILS

10 conseils pour réviser utile

1. Ne pas accumuler les leçons, faite un planning d'étude personnel.
2. Travailler dans le calme.
3. Fixez-vous des objectifs.
4. Alternez matières littéraires et matières scientifiques.
5. Pour réviser faites des fiches.
6. Pour relire les fiches, faites- le à haute voix.
7. Pour vous contrôler, testez-vous.
8. Si vous êtes saturez, révisez à deux ou trois.
9. Si vous manquer du temps autoriser vous a passé plus rapidement sur certains thèmes.
10. Pour tenir bon, restez positif.

10 Conseils pour réussir à l'épreuve de mathématiques au BAC

1) **Prévoyez une copie double et deux autres copies** (fournies lors des épreuves): Une pour chaque exercice afin d'éviter de compléter la solution d'un exercice à la suite d'un autre exercice, ce qui compliquerait la tâche du correcteur.

2) **Ce qu'il faut faire dès la réception du sujet.**

- Lire lentement le sujet en entier une première fois.
- Relire encore plus lentement le sujet, ligne après ligne, en notant cette fois au brouillon, à chaque mot–clé la ou les formules, théorèmes qui pourraient servir.

❖ 15 minutes après, en route !

3) **Choix du premier exercice à traiter.** Il est conseillé de commencer par l'exercice le plus abordable pour vous. Cela vous donnera une motivation à poursuivre avec beaucoup de quiétude votre épreuve.

4) **Attitude important pendant la composition**

- Certaines questions nécessitent une recherche approfondie : un brouillon est nécessaire mais pas pour faire une rédaction détaillée.
- Si vous n'avez pas pu traiter une question, ne vous en voulez pas : vous risquez de **perdre votre sang froid et commettre ensuite des erreurs** dans des questions simples. **Laissez un espace et continuez en supposant le résultat acquis**.

5) **Bon à savoir pendant l'épreuve**

- Sachez-vous arrêter lorsque les calculs deviennent trop complexes.
- N'oubliez jamais que les questions sont liées dans un exercice.
- Toute question qui commence par « en déduire… » trouve sa solution dans ce qui vient d'être traité, toute autre chemin n'est pas valable et vaut la note 0.
- Un raisonnement ne peut se baser sur la phrase « la calculatrice donne… » Ou bien « on lit... ».

6) **Après le brouillon.**

Rédiger correctement, avec des explications appropriées sans discours inutile et encadrer vos réponses.

7) **Après chaque question.**

Vérifier que vos résultats sont vraisemblables : une probabilité est un réel compris entre 0 et 1, une aire est un nombre réel positif, le module d'un nombre complexe est un réel positif, une fonction ne peut croitre vers $-\infty$, un vecteur ou un point ne peut être égal à son affixe…

8) **La fin de l'épreuve**.

15 minutes avant la fin de l'épreuve, relire votre copie afin de corriger les erreurs éventuelles et assemblez toutes les feuilles à remettre au surveillant.

L'auteur

NOMBRES COMPLEXES ET SIMILITUDES DIRECTES

Exercice N°1 :

On considère un polynôme P(Z) défini par :
$P(Z)= Z^3 + 9iZ^2+2(6i - 11)Z-3(4i + 12)$

1) Démontrer que l'équation $P(Z)=0$ admet une solution réelle Z_1 à déterminer.
2) Déterminer un polynôme $Q(Z)$ tel que l'on ait $P(Z) = (Z-Z_1)Q(Z)$
3) Démontrer que l'équation $Q(Z)= 0$ admet une solution imaginaire pure Z_2 à déterminer.
4) On note Z_3 la troisième solution de l'équation $P(Z) = 0$. Démontrer que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives Z_1; Z_2 et Z_3 sont alignés.

Exercice N°2 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $-1-5i$; $4-3i$; $3 + 3i$; $-2 + i$.

1) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
2) Déterminer l'affixe du point C'qui est symétrique du point C par rapport à D.
3) Déterminer l'affixe du point A' qui vérifie la relation : $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.
4) Quelle est la nature du quadrilatère A'BC'D ?

Exercice N°3 : *(Bac Blanc)*

Soit θ un réel de l'intervalle $]\,0\,;\boldsymbol{\pi}\,[$
1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$Z^2 - (2^{\theta+1} \cos\theta)Z + 2^{2\theta} = 0$$

2) Mettre sous forme trigonométrique les solutions obtenues.
3) On note A et B les point images des solutions précédentes et Z_A et Z_B leurs affixes respectives avec $Im(Z_A) \geq Im(Z_B)$
a)Pour quelles valeurs de θ le triangle OAB est-il équilatéral ?
b) Pour quelle valeur de θ les points O ; A et B sont-ils alignés ?

Exercice N° 4 :

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points M du plan dont l'affixe vérifie la relation donnée :
1) $|Z - 3i| = |Z - 3|$;

2) $|2 - 3i + Z| = |2 + 3i|$;

3) $|\bar{z} - 4 + i| = 1$;

4) $Arg(\bar{z}) = Arg(-Z)\ (2\boldsymbol{\pi})$

Exercice N°5 :

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $Z_1 = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}$ et $Z_2 = \frac{i-3}{-1-2i}$.

2. $Z_1 = (z+2)(2z - i)$ et $Z_2 = \frac{Z+1}{-iZ-2}$ (on posera $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$).

Exercice N°6 :

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 2) $z = -1 - i$; 3) $z = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$
4) $z = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$, $\theta \in]0; \pi]$.
5) $Z = 1 + \cos x + i\sin x$, $x \in]\pi ; 2\pi[$.

Exercice N°7 :

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit les points A $(1+i)$, B $(-3-i)$ et C $(2i)$

1. Placer les points A, B, C et déterminer la nature du triangle ABC.
2. Déterminer le point D tel que ADBC soit un parallélogramme.
3. Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tels que : a) $|z - 2i| = 3$.
b) $|z - 1 - i| = |z + 3 + i|$. c) $|\bar{z} - 1 + i| = 1$. d) $|iz + 2| = 3$.

Exercice N°8 :

A tout complexe $z \neq 2i$, on associe le complexe $Z = \frac{Z+1}{Z-2i}$.

Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que :
1. Z soit un réel.
2. Z soit un imaginaire pur.
3. Z soit un réel strictement positif.
4. Z soit un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négatif.
5. $|Z| = 1$.

Exercice N°9 :

1. Exprimer sin(5x) en fonction de sinx
2. Linéariser cos(3x)sin(2x).

Exercice N°10 :(Bac 2005)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $Z^3 = 1$
2. a) Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.
b) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$. En posant $u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$
déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les racines de l'équation (E).
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

Exercice N°11 *:*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, $Z^7 - 1 = 0$.
2. Soit $u = e^{i2\pi/7}$ *, calculer* $1 + u + u^2 + \ldots + u^6$.
3. En déduire que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0$.

Exercice N°12 *:*

1. Démontrer que l'équation $2Z^2 - 2(1 - \cos 2\alpha) Z + 1 - \cos 2\alpha = 0$, $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ *n'admet pas de solution réelle.*
2. Déterminer alors les solutions complexes de cette équation.
3. Calculer en fonction de α*, le module et un argument de ces solutions.*

Exercice N°13 *:*

1. Montrer que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle.
2. a) En utilisant la question (1), montrer que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.
b) En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}$ *est solution de l'équation* $4x^2 - 2x - 1 = 0$.
c) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{2\pi}{5}$ *et* $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice N°14 *:*

Soit f l'application du plan qui à tout point M(z), associe le point M'(z') tel que : $z' = -iz + 4i$
1. Montrer que f admet un unique point invariant Ω *dont on déterminera son affixe* ω.
2. a) Exprimer $z' - \omega$ *en fonction de* $z - \omega$.
b) Reconnaître l'application f et déterminer sa forme analytique.
3. Déterminer l'image par f de la droite (d) : $y = 2x - 1$ *et celle du cercle.*

(C) : $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$.
4. Déterminer l'ensemble des points M(z) dont les images M'(z') par f est sur l'axe $(x'x)$.

Exercice N°15 *:*

1. Soit l'application f : M(z) → M'(z'). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f dans les cas suivants :
a) $z' = (-\sqrt{3} + i)(z - i)$. ; *b)* $z' - 3i = 2 + z$.
c) $z' = -5iz$. ; *d)* $z' = i + e^{-i\pi \div 3} z$.

2. Soit la similitude directe f définie analytiquement par: $\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y - 2\sqrt{3} \end{cases}$;

Déterminer l'écriture complexe de f.

Exercice N°16 *:*

On définit les nombres complexes Z_n *de la manière suivante :* $Z_0 = 1$ *et, pour* n *entier naturel supérieur ou égal à 1,*
$Z_{n+1} = \frac{1}{3} Z_n + \frac{2}{3} i$.
1. Pour tout entier n*, on pose* $U_n = Z_n - i$.
a) Exprimer U_{n+1} *en fonction de* U_n *et en déduire la nature de* (U_n).

b) Montrer que $\forall\, n \geq 1$, $= (1-i)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

2. a) Exprimer en fonction de n la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de U_n et calculer les limites des suites (x_n) et (y_n).

b) Soit A_n le point d'affixe U_n. Montrer que les points A_n sont alignés.

<u>Exercice N°17</u> *:*

Soit f l'application du plan complexe qui à tout point M(z), associe le point M'(z') défini par
z' = (1 + i)z − 1.
1°) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera ses éléments caractéristiques.
2°) Soit la droite (d) : x – y + 2 = 0 et (C) le cercle de centre I(1− i) et de rayon 2.

Déterminer (d') et (C') les images respectives de (d) et (C) par la similitude f.

<u>Exercice N°18</u> *:*

Soit A(-1), B(-2+ i), C(i) et D(1-2i) des points du plan,
1. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S tel que s(A) = B et s(C) = D.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S'qui laisse invariant A et transforme B en C.
3. Déterminer l'expression analytique de la similitude S'' de centre C, d'angle $\frac{\pi}{4}$ *et de rapport K=2.*

<u>Exercice N°19</u> *:*

1°) On pose $Z = x + iy = \frac{1}{2+\cos\theta+i\sin\theta}$ *avec x, y,* ϑ *de nombres réels.*

a) Exprimer x et y en fonction de ϑ
b) Montrer que si ϑ *varie le point M(x ; y), image du nombre complexe Z dans le plan complexe décrit le cercle de diamètre [BC] avec B (*$\frac{1}{3}$*; 0) et C (1 ; 0).*
2°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :*

(E) : $Z^2 + 2\bar{Z}^2 + Z - \bar{Z} + 9 = 0$ *avec* $\bar{Z}$ *le conjugué de Z*

<u>Exercice N°20</u> *: (Examen Blanc Lycée Saint François Xavier)*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$ *).*
1°) On considère dans $\mathbb{C}$ *l'équation :*

(E) $Z^3 - 6iZ^2 - 18Z + 40i = 0$.

a) Développer et réduire l'expression :

$$U(x) = (x-4)(-x^2+2x-10)$$

b) Démontrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure Z_0 *que l'on précisera.*
c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation (E).*

2°) A, B et C sont trois points du plan complexe d'affixes respectives $Z_A = 4i$; $Z_B = 3 + i$ *et* $Z_C = -3 + i$.
Soit f la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

a) Déterminer la nature du triangle ABC.
b) Déterminer l'écriture complexe de f
c) En déduire la nature de la similitude f ainsi que ses éléments caractéristiques.

3°) On considère les transformations g et φ du plan dont les écritures sont respectivement : $Z_1 = -2Z + 12i$ *et* $Z_2 = -iZ - 4 + 4i$ *et on pose S =* $go\varphi$

a) Déterminer l'écriture complexe de S
b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de S.

<u>Exercice N°21</u> *:*

Soit Z un nombre complexe défini par :

$$Z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

On considère deux entiers naturels n et p et on pose A= Z^n

Démontrer que A ne peut prendre que quatre valeurs :

a) La valeur $A_1 = (-1)^p$
b) La valeur $A_2 = (-1)^p(1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) La valeur $A_3 = (-1)^p i$
d) La valeur $A_4 = (-1)^p(-1+i)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Exercice N°22</u> *:(exos mixtes)*

L'élève GUETNA fils de la terminale scientifique veut bien s'autoévaluer et avait du mal à résoudre l'énoncé ci-dessous donc il demande l'aide des élèves de la TS.

A*-Soit P un polynôme complexe à coefficients réels.*
1) Montrer que $\overline{P(Z)}=P(\bar{Z})$.
2) En déduire que, si Z est racine de P, alors $\bar{Z}$ *est aussi racine de P.*

B *–Soit* φ *un réel dans* $\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$, *écrire sous forme trigonométrique, chacun des nombres complexes suivants :*
a) $-\cos\varphi - i\sin\varphi$; *b)* $\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$; *c)* $-\cos\varphi + i\sin\varphi$; *d)* $-\sin\varphi - i\cos\varphi$;
e) $\cos\varphi + i\cos\varphi$.

C*- Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *:*

1) $Z^3 = \bar{Z}$; *2)* $(1+iZ)^5 = (1-iZ)^5$; *3)* $\left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^3 + \left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^2 + \frac{Z+i}{Z-i} + 1 = 0$;
4) $(Z+1)^n = (Z-1)^n$; *5)* $(Z+i)^n = (Z-i)^n$ $\forall$ *n entier naturel non nul ;*
6) $\begin{cases} x+y = 1+i \\ xy = 2-i \end{cases}$.

D*- Calculer pour* $\varphi \in]0;2\pi[$ *et* $n \in IN$ *:*

$M = \sum_{k=0}^{n}(\cos k\varphi)$; $N = \sum_{k=0}^{n}(\sin k\varphi)$ *et pour* $\theta \in IR$ *et* $n \in IN$; $R = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos k\theta$; $S = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin k\theta$

E- *Soit x un réel,* $x \neq 0[2\pi]$. *On pose* :

$$A(x) = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos 6x\,; \qquad B(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin 6x \ \ et$$

$$S(x) = 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \cdots + e^{6ix}$$

i) Exprimer S(x) en fonction de A(x) et B(x).
2i) En déduire l'expression de A(x) en fonction de S(x).
3i) Déterminer, uniquement en fonction des lignes trigonométriques de
$\frac{7x}{2}$ *et de* $\frac{x}{2}$; *une expression de* $A(x), B(x)$ *et* $S(x)$.

F-*Soit* $Z=e^{i\frac{2\pi}{7}}$; $S=Z+Z^2+Z^3$ *et* $T= Z^4 + Z^5 + Z^6$;

a) Montrer que $S = \overline{T}$ *et que* $Im(Z) > 0$; *b) Calculer* $S + T$ *et* ST. *En déduire* S *et* T.

G-*soit pour tout* $n \in IN^*$; S_n *la somme définie par* : $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

1-Posons $Z=\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$ *i) Donner une expression simple de* : $P = 1 + Z + \cdots + Z^{n-1}$
2i) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de P. *3i) En déduire l'égalité*: $S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$;

2) Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}S_n\right)$.

H- *Déterminer l'écriture complexe de la similitude S qui transforme le bipoint (A, B) en bipoint (A', B') dans les cas suivants :*

1) A(1 , 2) et B(3 , -1) en A'(0, -3) et B'(1, 1) ; 2) A(1, 0) et B(1, 1) en A'(0, -1) et B'(3, 3)

I- *Dans chaque cas, donner l'écriture complexe de la transformation* f *du plan complexe donnée :*

1°) f *est la translation de vecteur* $\vec{w}(1, -5)$.

2°) f *est l'homothétie de centre* $0(0,0)$ *et de rapport* 3.
3°) f *est une homothétie de centre A* $(1-i)$ *et de rapport* -2.
4°) f *est une rotation de centre A (1, 1) et d'angle* $\frac{2\pi}{3}$
5°) f *est une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *qui transforme B* $(1-i)$ *en B'*$(-i)$.

J-*Soit* $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, *et soient* a, *b, c trois nombres complexes donnés. Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} x + y + Z = a \\ x + jy + j^2 z = b\,; \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$$

K- *1°) on pose* $w=e^{\frac{2i\pi}{7}}$; $A = w + w^2 + w^4$ *et* $B = w^3 + w^5 + w^6$

i) Calculer A+B et AB ; ii) En déduire A et B
2°) Déterminer le module et argument des nombres complexes suivants :

$$a)\ \frac{1-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+e^{\frac{i\pi}{3}}}\ ; \qquad b)\frac{1-\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta} \quad avec\ \theta \in [0,\pi[$$

Exercice N°23 *:*

On considère l'application S qui à tout point M de coordonnée (x, y) fait correspondre M'de coordonnée (x', y') telle que :

$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$

1) La transformation S est-elle bijective et a-t-elle des points invariants ?
2) Calculer x'' et y'' en fonction de x et y, puis x''' et y''' en fonction de x et y.
3) Démontrer que S est une similitude plane directe et déterminer ses éléments caractéristiques.

4) Déterminer la nature de SoS et celle de SoSoS.
5) Quelle est l'image par S de la droite (0$\vec{u}$)?
6) Quelle est l'image par S de la droite (0$\vec{v}$)?
7) Quelle est l'image par S se la droite (d) d'équation : x-y+2=0 ?
8) Quelle est l'image par S du cercle de centre I (-2, 1) et de rayon 2 ?

Exercice N°24 *:*

On considère les nombres complexes suivants :

$a =-\sqrt{3}+i\ ,\quad b = 3+2i,\quad c = 7-2i.$

1. a) Déterminer de deux façons différentes les racines carrées de a. En déduire les valeurs de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.
b) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n sont un nombre réel.
c) Déterminer les entiers relatifs n pour lesquels a^n est un nombre imaginaire pure.
2) Déterminer et construire les ensembles de points M d'affixe z tels que :
$i)|z-b| = |z-c|;\qquad ii)|z-b| = |a|.$

Exercice N°25 *:*

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par:

$$\begin{cases} Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n\ pour\ tout\ n \in IN \\ z_0 = 16 \end{cases}$$

On note r_n $le\ module\ de\ z_n$: $r_n = |z_n|$ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine 0, on considère les points A_n $d'affixe\ z_{n.}$

1-a) Calculer z_1 ; z_2 et z_3.
b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique
c) Ecrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique
d) Démontrer que le triangle $0A_0A_1$ $est\ isocéle\ rectangle\ en\ A_1$
2) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique de raison q=$\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle

convergente? Interpréter géométriquement le résultat précédent. On note I_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point
A_0 *au point* A_n *en passant successivement par les points* $A_1,\ A_2,\ A_3 \cdots$ *Ainsi*
$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1}$

3-a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_n$
b) Donner une expression de I_n *en fonction de* n
c) Déterminer la limite de la suite (I_n)

Exercice N°26 *: (06 points)*

Soit la suite (Z_n) *définie par :*

$$\begin{cases} Z_0 = i \\ Z_n = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$$

1. Calculer Z_1 *et* Z_2. *(02pts)*
2. On considère la suite (Un) *définie par* $U_n = z_n + 2$.
a) Montrer que : $U_n = (2+i)(1+i)^n$. *(01pt)*
b) Exprimer Zn *en fonction de n.* *(01pt)*
3. Soit M_{n+1}, M_n, *A et B les points d'affixes respectives :* $z_{n+1};\ z_n;\ i$ *et* $\frac{-1}{2} - \frac{i}{2}$.
Démontrer que : $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ *et que* $\left(\overrightarrow{BM_n},\ \overrightarrow{AM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}$. *(02pts)*

Exercice N°27 *:*

P est un plan affine euclidien. A chaque point M(Z) associe M'(Z'). On considère la transformation T définie par : $T: Z' = (\alpha + i)Z + 1 + bi$; $\alpha, b \in IR$

1. Calculer la valeur de α *pour que T soit une similitude directe d'angle* $\frac{3\pi}{4}$.

2. Soit I le centre de la similitude S, α *étant trouvé.*
i) Calculer les coordonnées de I en fonction de b.
ii) Déterminer une équation de l'ensemble décrit par I quand b varie.

3. Montrer que pour $\alpha = 0$, *T est une rotation. Quelle est la nature de l'angle de T ?*

Exercice N°28 *:*

On considère les nombres complexes : $Z_1 = \left(\sqrt{3}+1\right)(1+i)$; $Z_2 = \left(\sqrt{3}-1\right)(-1+i)$

1-Calculer le module et l'argument des nombres complexes Z_1 *et* Z_2

2-On pose $u = Z_1.Z_2$ *et* $v = \frac{Z_1}{Z_2}$. *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes* u *et* v.

3-On pose $\alpha = Z_1 + Z_2$ *et* $\beta = Z_1 - Z_2$. *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes* α *et* β. *En déduire le module et l'argument du nombre complexe* $\gamma = {Z_1}^2 - {Z_2}^2$

Exercice N°29 :

Soit $P(Z) = 2Z^4 - 6Z^3 + 9Z^2 - 6Z + 2$. *On va chercher à calculer les racines de P.*

1- Calculer $P(1 + i)$

2- Comparer $P(\bar{Z})$ *et* $\overline{P(Z)}$

3- Montrer que si Z_0 *est racine de P alors* $\overline{Z_0}$ *est aussi racine de P.*

4- Montrer que si Z_0 *est racine de P alors* $\frac{1}{Z_0}$ *est aussi racine de P.*

5- Déterminer toutes les racines de P.

Exercice N°30 *:*

On considère la fonction polynôme P à variable complexe par :

$$P(Z) = Z^3 - (6 + 6i)Z^2 + 21iZ + 15 - 5i$$

1- Calculer $P(i)$

2- En déduire que $P(Z) = (Z - i)(\alpha Z^2 + \beta Z + \gamma)$ *où* α, β *et* γ *sont des nombres complexes que l'on déterminera.*

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $Z^2 - (6 + 5i)Z + 5 + 15i = 0$; *En déduire les solutions de l'équation* $P(Z) = 0$

4- A , B et C sont les points du plan complexe d'affixes respectives $a = i, b = 3 + i$ *et* $c = 3 + 4i$

- *i) Calculer le rapport* $\frac{c-b}{a-b}$.
- *ii) Quelle est la nature du triangle ABC ?*
- *iii) Donner l'angle de la rotation de centre B qui transforme A en C.*

Exercice N°31 *:*

Soit S est la transformation du plan dont l'écriture complexe : $Z' = (i - \sqrt{3})Z + \sqrt{3} + i$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S

2) Déterminer l'expression analytique de S

3) Déterminer l'image par S de la droite (D) de repère $(A, \vec{u})$ *où* $A\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice N°32 *:*

f *est la transformation dont l'écriture complexe est :* $Z' = a^2 Z + \alpha - 1$

1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes a *pour lesquels :*
(i) f *est une translation*
(ii) f *est une rotation d'angle* $\frac{\pi}{2}$
(iii) f *est une homothétie de rapport 2.*

2) On suppose que $a = 1 + i$ *; déterminer la nature et les éléments caractéristiques de* f.

Exercice N°33 :

Soit P le polynôme complexe défini par : $P(Z) = Z^3 - (3+4i)Z^2 + (-3+7i)Z + 4$

1. Montrer que l'équation P(Z)=0 admet une unique solution imaginaire pure ia *que l'on déterminera.*

2. Démontrer qu'il existe un polynôme Q du second degré tel que

$$\forall\, Z \in \mathbb{C}, P(Z) = (Z - ia)Q(Z)$$

3. i) Résoudre dans $\mathbb{C}$*, l'équation Q(Z)=0*
ii) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation P(Z)=0
iii) Mettre chacune des solutions sous formes trigonométrique et exponentielle.

4. Le plan est muni du repère orthonormé $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives* $i, i+1 \ et \ 2+2i$

Placer les points A, B et C dans le plan.

5. i) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui transforme A en B et B en C.
ii) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
iii) Déterminer l'expression analytique de S.

6. i) Déterminer l'équation du cercle C', image du cercle C de centre $I\binom{-2}{1}$ *et de rayon 2.*
ii) Quelle est l'image de la droite (AB) par S ? Donner une équation à cette droite.

Exercice N°34 :

On considère l'application f *définie par :* $Z' = (1 - i\sqrt{3})Z + i\sqrt{3}$

1. Déterminer la nature de f

2. Déterminer les éléments caractéristiques de f

3. Déterminer l'image du point A(-1 ; 1) par f.

Exercice N°35 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation :* $Z^2 = (1+\sqrt{2})Z - \sqrt{2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ *les équations :* $Z + \frac{1}{Z} = 1 \ et \ Z + \frac{1}{Z} = \sqrt{2}$

3. Soit P(Z) le polynôme définie par : $P(Z) = Z^4 - (1+\sqrt{2})Z^3 + (2+\sqrt{2})Z^2 - (1+\sqrt{2})Z + 1$

i) Exprimer $\frac{P(Z)}{Z^2}$ *en fonction de* $u = Z + \frac{1}{Z}$
ii) Résoudre $\frac{P(Z)}{Z^2} = 0.$

Exercice N°36 :

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(0\,;\vec{u};\vec{v})$. On considère le polynôme complexe P définie par :

$$P(Z) = Z^4 - 4(1+i)Z^3 + 12iZ^2 + 8(1-i)Z - 20$$

1. On donne A, B, C et D les points d'affixes respectives : $-1+i; 1-i; 3+i$ *et* $1+3i$

i) Placer dans le plan complexe P, les ponts A, B, C et D.
ii) Montrer que les affixes respectives de ces points sont solutions de l'équation P(Z)=0
iii) Montrer que le quadrilatère ABCD est un carré

2. Soit h l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i$

(a) Déterminer l'affixe de Ω telle que h(Ω)=Ω
(b) En déduire la nature exacte et les éléments caractéristiques de h
(c) r est la rotation de centre Ω et d'angle 15°. Donner la nature et les caractéristiques de S= $h o r$.

Exercice N°37 :

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(0\,;\vec{u};\vec{v})$ ayant comme unité graphique 1 cm.

On note A et B les points d'affixes respectives : i *et* $-4-2i$.

Soit Z un nombre complexe diffèrent de i, on pose : $Z' = i\,\frac{Z+4+2i}{Z-i}$

1) *Donner une interprétation géométrique de l'argument et du module de Z'.*
2) *Déterminer et représenter l'ensemble E des points M du plan complexe (P) d'affixe Z tel que Z' est nombre un réel.*
3) *On pose* $Z_1 = Z - i$ *et* $Z'_1 = Z - i$
   Montrer que $Z_1Z'_1 = -3+4i$. *Calculer* $|Z_1Z'_1|$
4) *a) Prouver que si M appartient au cercle (C) de centre A d'affixe i et de rayon r, avec $r > 0$; M' appartient à un cercle (C') de centre A.*
   b) Déterminer r pour que (C)=(C').

LES FONCTIONS

Problème N°1 :

Soit les fonctions f, g, h, i *et* j *définies par :* $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$;

$g(x) = \frac{x-1}{2-x}$; $h(x) = \frac{2x^2-x-6}{x-1}$; $i(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x$; $j(x) = x - \sqrt{x-1}$.

1.) Pour chacune de ces fonctions, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire les éventuelles asymptotes.

2.) Montrer que la droite (d) d'équation $y = 2x + 1$ *est une asymptote oblique à* C_h *la courbe de* h.

Problème N°2 *:*

On considère f *une fonction numérique à variable réelle* x *définie par :*

$f(x) = \sqrt{(x+\sqrt{1+x^2})^3 + (x-\sqrt{1+x^2})^3}$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on désigne par C_f *la courbe représentative de la fonction* f.

1°) Démontrer que la fonction f *est définie sur l'intervalle* $[0;\ +\infty[$.

2°) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

3°) Déterminer la limite quand x *tend vers* $+\infty$ *de* $\frac{f(x)}{x}$.

4°) En déduire une interprétation graphique qui concerne la courbe représentative C_f.

5°) Etudier la dérivabilité de la fonction f *au point d'abscisse* $x_0 = 0$.

6°) En déduire le lien qui existe entre la courbe représentative de la fonction f et les relations

$\begin{cases} x = 0 \\ y \geq f(0) \end{cases}$

7°) Etudier le sens de variation de f *et dresser son tableau de variations.*

8°) Tracer la courbe de f.

Problème N°3 *: (Bac)*

Soit la fonction numérique f, *de variable réelle* x, *définie par :* $f(x) = |x| - \frac{8}{|x|+2}$.

On désigne par C_f *la courbe représentative de* f *dans le plan rapporté à un repère orthonormé* $(0;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$;

(Unité de longueur : 1 cm)

1°) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f *ainsi que les limites aux bornes de cet ensemble. Etudier la dérivabilité de* f *pour* $x_0 = 0$ *; qu'en déduire pour* C_f *?*

Démontrer que la droite d'équation $x = 0$ *est axe de symétrie de la courbe* C_f.

2°) Etudier les variations de f.

3°) Démontrer que les droites : (D_1) d'équation $y = -x$ et (D_2) d'équation $y = x$ sont asymptotes à la courbe de la fonction f. Préciser la position relative de C_f et de (D_2) quand x est positif.

4°) Chercher les coordonnées des points d'intersection de c_f avec l'axe des abscisses et donner les équations des tangentes en ces points.

5°) Construire, dans le même repère, la courbe C_f, les droites (D_1) et (D_1) et ainsi que les tangentes trouvées au 4°).

***Problème N°4** :*

Soit la fonction numérique U définie sur IR par : U(x)=$\sqrt{x^2+1} - x$ et (C) sa courbe représentative.

1-a)Déterminer la limite de U en $+\infty$ et $-\infty$.
b) Etudier les branches infinies de (C).
c) Montrer que pour tout réel x, on a $U(x) > 0$. En déduire le signe de U(x)+2. Interpréter géométriquement le résultat.
2- a)Montrer que la dérivée de U est définie par : $U'(x) = \frac{-U(x)}{\sqrt{x^2+1}}$
b) Etudier les variations de U.
c) Tracer la courbe de (U) et ses asymptotes.
3-a) Justifier que U est bijective de IR vers un intervalle J à préciser. Donner le sens de variation de sa réciproque.
b) Tracer la courbe (μ) de U^{-1} dans le même repère que (C).
c) Montrer que pour tout x de J, on a : $U^{-1}(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2x}$.

***Problème N°5** :*

On considère m un entier naturel quelconque. Soit f_m une fonction définie sur [0 ; 1] par :

$$f_m = x^m\sqrt{x(1-x)}.$$

On note C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé (on prendra 10cm pour unité graphique).

1°) Démontrer que la courbe C_0 représentative de la fonction f_0 est un demi-cercle de rayon $\frac{1}{2}$ dont on précisera le centre.

2°) On considère dans cette question que $m \geq 1$.

a. Calculer $f'_m(x)$ $pour$ $0 < x < 1$ et montrer que $f'_m(x)$ et $(m+\frac{1}{2}) - (m+1)x$ ont le même signe.

b. Etudier la dérivabilité de f_m en 0 et en 1.
c. Dresser le tableau de variations de f_m.
3°) a. Etudier le signe de $f_{m+1}(x) - f_m(x)$ pour x un élément de l'intervalle $[0,\ 1]$ et $m \geq 1$

b. En déduire les positions relatives des courbes C_{m+1} et C_m

4°) Tracer dans le même repère les courbes C_0, C_1 et C_2.

<u>Problème N°6</u> *: Soit la fonction f :* $x \to \frac{\sqrt{|x^2-1|}}{2}$

1) Etudier la fonction f et tracer la courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté à un repère.
2) En déduire l'ensemble τ *des points M du plan dont les coordonnées (x ; y) satisfont à :* $4y^2=|x^2-1|$

<u>Problème N°7</u> *:*

Soit la fonction numérique f d'une variable réel strictement positif, définie par : $f(x) = x^{x^x}$ *.*
Calculer sa dérivée en $x = 1$*.*

<u>Problème N°8</u> *:*

Soit la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x) = \sin x \,.\, E\left(\frac{1}{x}\right)$
1-a) Montrer que $\forall\ x \in IR^*, \left|f(x) - \frac{\sin x}{x}\right| < |\sin x|$
b) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$
2-a) Montrer que $\forall\ x \in IR^*;\ |f(x)| \leq \frac{1}{x}$
b) En déduire la limite de $f(x)$ *quand* x *tend vers +∞*
3-a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

b) Retrouver $\lim_{x\to 0} f(x)$*.*

<u>Problème N°9</u> *:*

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x-E(x)}{x+E(x)}$
1) Déterminer le domaine de définition de f*.*
2-a) Donner une expression simplifiée de f *sur l'intervalle* $]0,1[$
b) Montrer que $\forall\ x \in\ ]-1,\ 0[\,, f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
c) Etudier la limite de f *en* $x_0 = 0$
3-a) Montrer que $\forall\ x \in\ ]1,+\infty[\ : 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x}$
b) En déduire la limite de $f(x)$ *quand x tend vers +∞*
c) Calculer la limite de $f(x)$ *en* $-\infty$

<u>Problème N° 10</u> *:*

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ *on considére la fonction polynomiale*
$P_n\ definie\ \forall\ x \in IR_+\ par\ P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$ *;*

1) Etudier le sens de variation de P_n $sur\ IR_+\ et\ préciser\ P_n(0)\ et\ P_n(1)$
2) En déduire que, pour n supérieure ou égale 2,
$P_n\ admet\ un\ racine\ unique\ \alpha_n\ dans\ ]0,1[.$
Donner la valeur exacte de α_2*.*
3) Démontrer que pour tout n supérieure ou égale 2 on a $P_n(\alpha_{n+1}) < 0$
4) En déduire le sens de variation de la suite (α_n)*.* $La\ suite\ (\alpha_n)$ *est-elle convergente ?*

Problème N°11 *:*

Soit g une fonction définie par : $g(x)$=$ln(\alpha x + b)$

On précise que α et b sont de nombres réels. Soit (C) la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé.

1°) Déterminer α et b pour que : g(2)=0 et g'(3)=$\frac{3}{4}$

2°) Déterminer l'ensemble de définition de g.

3°) Etudier les variations de g.

4°) Déterminer α et b pour que la courbe (C) passe par le point B(2 ; 0) et qu'elle admette au point B une tangente de coefficient directeur -2.

Problème N° 12 *:*

Partie A *:*

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2xlnx$

1° Etudier le sens de variation de la fonction g.

2° En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie B *:*

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+lnx}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O ; I ; J) avec 2cm d'unité

1°) Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

2°) a. Déterminer la limite de f en +∞ .

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).

c. Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ).

d. Montrer que la droite (Δ) coupe la courbe (C) en un point A dont on déterminera les coordonnées.

3°) Etudier le sens de variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

4°) Montrer qu'il existe un point unique B de la courbe (C) en lequel la tangente (T) est parallèle à (Δ) et déterminer les coordonnées du point B.

5°) a. Montrer que l'équation $f(x)$=0 admet une solution unique β

b. Exprimer ln(β) en fonction de β

c. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse β est supérieur à 1

(On admet que 0 ,31≤ $\beta \leq 0{,}35$)

6°) Représenter la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Problème N°13 *: (Bac)*

On considère une fonction g *définie sur IR par :* $g(x) = xe^x - 1$

1°) a. Etudier les variations de la fonction g.

b. Démontrer qu'il existe un réel unique α tel que $\alpha e^{\alpha} = 1$ *et donner un encadrement de α d'amplitude* 10^{-3}.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ *suivant les valeurs de* x.

2°) On considère une fonction f *définie sur* $]0;\ +\infty[$ *par :* $f(x) = e^x - lnx$

a. Déterminer la limite de f *en* $+\infty$

b. Etudier les variations de la fonction f *et dresser son tableau de variations.*

c. Démontrer que f *admet un minimum* $m=\alpha + \alpha^{-1}$ *et démontrer que* $2{,}32 \leq m \leq 2{,}34$.

Problème N°14 *:*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unité 2 cm).

Soit E le point de coordonnées (ln2 ; ln2).

I° *On considère* α *et b deux nombres réels et on désigne par* g *la fonction de variable réelle* x *définie sur IR par :* $g(x) = \alpha x + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$

1°) Calculer la dérivée de la fonction g

2°) Déterminer α et b pour que la courbe représentative de g *passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses*

II° *Soit* f *une fonction définie par :* $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$

1°) Montrer que pour tout réel x *on a :* $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$

2°) Calculer les limites de f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$ *et montrer que les droites d'équations*

$y = x - 2$ *et* $y = x + 2$ *sont asymptotes à la courbe de* f.

3°) Etudier les variations de f.

4°) Construire la courbe de f, *sa tangente en E.*

Problème N°15 *:*

Soit f *la fonction numérique d'une variable réelle* x *définie sur IR par :*

$f(x) = ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$

1-a) Montrer que la fonction f *est impaire*

b) Montrer que f *est dérivable sur IR et vérifier que* $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Etudier les branches infinies de la courbe (C) de f

2-a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle I que l'on précisera

b) Montrer que $g(x) = \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$

<u>Problème N°16</u> :

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = (x-1)^n lnx$$

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé R= (0, I, J)
1) On pose pour tout x ϵ $IR^*{}_+$, $\varphi_n(x) = nlnx + 1 - \frac{1}{x}$

a) Etudier les variations de φ_n
b) Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.

2)
a) Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.
b) Tracer dans le même repère R, les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

<u>Problème N°17</u> :

Soit la famille de la fonction f_m $définie\ par$ $f_m(x) = (x+1)e^{mx}$ et C_m sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'unité : 2cm

1) Montrer que toutes les courbes de C_m de f_m passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.
2) Etudier les variations des fonctions f_1 et f_{-1}.
3) Donner les équations des tangentes aux courbes C_1 et C_{-1} aux points A et B.
4) Tracer les courbes C_1 et C_{-1}
5) Calculer en cm² l'aire du domaine plan limité par les courbes C_1 et C_{-1}, les droites d'équations x=-1 et x=0.

<u>Problème N°18</u> :

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = -1 + xe^x$

***A**. Etudier les variations de g.*
a) Montrer que l'équation $g(x)$=0 admet une solution unique $\alpha \in]0{,}5\ ;0{,}6[$.
b) En déduire le signe de $g(x)$ sur les intervalles $]0;\ \alpha]$ et $[\alpha;+\infty[$

***B**. Soit la fonction f définie sur $]0;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - lnx - 2$*

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0, I, J) où l'unité est 4 cm.
1) Calculer la limite de f en 0.

2) En remarquant que $f(x) = \left(\frac{e^x}{x} - \frac{lnx}{x} - \frac{2}{x}\right)$; calculer la limite de f en +∞, préciser la branche infinie en $+\infty$.

3.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ (où f' est la dérivé de f)

b) En utilisant A.b) dresser le tableau de variation de f.

4.a) Montrer que $e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ $puis\ \alpha = -ln\alpha$.

b) En déduire que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$

5) Tracer (C), on prendra $\alpha = 0,55$

6.a) Montrer que la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ $par: F(x) = e^x - xlnx - x$ est une primitive de f.

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{1}{2}$ et x =1.

Problème N°19 :

Pour tout entier naturel $n > 1, on\ considére\ la\ fonction\ f_n\ définie\ sur\ I =$ $[1;+\infty[\quad par: f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(lnx)^n}{x^2}$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal (0, I, J) (unité : 1cm sur (0X) et 10cm sur (0Y)).

Parie A : 1) Etudier f_1

2) Tracer la tangente à C_1 au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe C_1

3) A l'aide d'une intégration par partie, calculer pour tout x dans I, $I_1(x) = \int_1^x f_1(t)dt$

Partie B : Comportement des fonctions $f_n, n \geq 1$.

1) En remarquant $\frac{(lnx)^n}{x^2} = \left(\frac{lnx}{x^{\frac{2}{n}}}\right)^n$, déterminer la limite de f_n $en + \infty$.

2.a) Calculer $f'_n(x)$ $et\ vérifier\ que\ f'_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = 0$

b) Vérifier que la valeur maximale de f_n $sur\ I\ est\ y_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$

3.a) Soit x appartenant à I. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f_2(x) - f_1(x)$

b) Déterminer la tangente à C_2 au point d'abscisse 1. Préciser les positions relatives de C_1 et C_2

4) Soit n un entier strictement positif.

a) Calculer lorsque $x > 1$, $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

b) Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2}f_n\left(\frac{n+1}{e^2}\right)$ et que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2}y_n$

c) Déduisez-en que $y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{2n}}$. $Quel\ est\ la\ limite\ de\ la\ suite\ (y_n)$?

Partie C : Etude de primitive y_n sur I. Pour tout entier

n≥ 1 $et\ tout\ réel\ x\ de\ I, on\ considère\ l'intégrale\ I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt\ ; soit\ \beta \geq$ $1\ un\ réel\ fixé$.

1) Montrer que $0 \leq I_n(\beta) \leq (\beta - 1)y_n$ $\quad$ 2) $Déduisez\ en\ limI_n(\beta)\ quand\ n\ tend\ vers\ +\infty$ (on utilisera B.4.c)

Problème N°20 *: (Bac)*

***A**. Soit la fonction g définie sur]0 ; $+\infty$ [par : $g(x)$ = 1+ x + ln$x$.*

1. Dresser le tableau de variations de g.

2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x)$ = 0. Vérifier que α appartient à]0,2 ; 0,3[.

3. En déduire le signe de g sur]0 ; $+\infty$ [.

4. Etablir la relation lnα = - 1 – α.

***B**. On considère la fonction f définie par* $f(x) = \begin{cases} \frac{x(lnx)}{x} \ si\ x > 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est continue en 0, puis sur]0 ; $+\infty$ [.

2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que quel que soit x élément de]0 ; $+\infty$ [, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$; puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur]0 ; $+\infty$ [.

5. Montrer que $f(\alpha)$ = - α.

6. Représenter la courbe de f.

Problème N°21 *: (Bac 2008)*

***A.** Soit la fonction f définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \ si\ x < 0 \\ (2 + x)e^{-x} \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$-{-1}.

2. a) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f. Préciser les asymptotes parallèles aux axes de coordonnées.

b) Calculer $lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+2)]$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Démontrer que : $lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x} = -1\ et\ lim_{x\to0}\frac{ln(1-x)}{x} = -1$

c) En déduire que f est dérivable en 0 à gauche et à droite. f est-elle dérivable en 0

4. Calculer $f'(x)$ pour : a) x $\in$] 0; $+\infty$ [.

b) x $\in$] $-\infty$; −1[U] −1 ; 0[.

5. Etudier le signe de $f'(x)$ pour x $\in$]0; +∞ [et pour x $\in$]—∞; −1[U]− 1; 0[.

6. Dresser le tableau de variation de f.

7. Montrer que l'équation $f(x)$ = 0 admet une unique solution α appartenant à]-3 ; -2[.

8. Tracer (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (0, I, J) d'unité 1cm. (Mettre en évidence l'allure de (C) au point d'abscisse 0 et les droites asymptotes).

***B**. Soit g la restriction de f à]—∞; −1 [.*

1. Montrer que g définit une bijection de]—∞; −1 [sur un intervalle J à préciser.

2. On note g^{-1} sa bijection réciproque.

a) Calculer $g(-2)$. Montrer que g^{-1} est dérivable en ln3.
b) Calculer $(g^{-1})'(\ln 3)$.
c) Représenter la courbe de g^{-1} dans le repère précédent.

<u>Problème N°22</u> *:*

Soit la fonction f, $f(x) = ln(\cos x)$ et C_f sa courbe.
1. Etudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ et dresser son tableau de variation.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$.
b) Soit la fonction g telle que : $g(x) = \ln(\cos x + \sqrt{3}\sin x)$; montrer que C_g la courbe de g peut se déduire de C_f par une transformation simple à préciser.

<u>Problème N°23</u> *:*

A. Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 lnx$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0. Définir ce prolongement.

B. On considère la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x^2 lnx \ \ si\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.
1. Etudier la dérivabilité de g sur $[0\ ;+\infty[$.
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. a) Montrer que la restriction h de la fonction g à l'intervalle $[1\ ;+\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
b) Sur quel ensemble h^{-1} est-elle dérivable ?
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h^{-1}(x) = e$.
d) Construire la courbe de g et celle de h^{-1} (on représentera les points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses et la demi-tangente en 0).

<u>Problème N°24</u> *:*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^x$ et (C) sa courbe dans un repère (0, i, j).

1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que (C) coupe la droite (Δ) : $y = x$ en un unique point d'abscisse α appartenant à $[1\ ;\frac{3}{2}]$.
3. Tracer (C).
4. a) Montrer que f admet une bijection réciproque f^{-1} sur $]\frac{1}{2}\ ; +\infty[$.
b) Déterminer l'image de l'intervalle $]0\ ;\ \alpha]$ par f^{-1}.
5. Déduire du tracé de (C) la courbe de la fonction g définie par $g(x) = |2x+1|e^x$.

Problème N°25 *:*

Soit la fonction f définie par : $f(x) = (2x+1)e^{-x}$ et (C) sa courbe.
1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que (C) coupe la droite (d) : $y = x$ en un unique point A d'abscisse α appartenant à I = $[1 ; \frac{5}{4}]$.
3. Tracer (C).
4. Montrer que pour tout x appartenant à I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
5. En déduire que pour tout x appartenant à I on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Problème N°26 *:*

L'élève GUETNA FILS veut résoudre ce problème et se confronte à un souci élémentaire puis implore l'aide de ses camarades de TS.

Dans ce problème, n est un entier naturel diffèrent de zéro et on considère la famille de fonctions f_n définies sur $[0;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ \quad f_n(0) = 0 & \end{cases}$$

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm et on note C_n $la\ courbe\ représentative\ de\ la\ fonction\ f_n$.

Partie A *:*

Dans cette première partie, on se propose d'étudier la fonction f_1.
1-a) Etudier la continuité de $f_1\ en\ 0\ et\ son\ comportement\ en + \infty$
b) Etudier le comportement du rapport :
$\frac{f_1(x)}{x}\ lorsque\ x\ tend\ vers\ 0. Que\ peut\ on\ conclure\ pour\ la\ fonction\ f_1\ et\ la\ courbe\ C_1?$
2-a) Justifier la dérivabilité de $f_1\ sur\ ]0;\ +\infty[. Calculer\ f'_1(x) et\ f''_1(x)\ \forall x \in\ ]0; +\infty[$
b) Etudier successivement les variations de
$f'_1\ et\ de\ f_1\ et\ dresser\ le\ tableau\ de\ variation\ de\ f_1.$
3) Tracer la courbe C_1, son asymptote et la tangente au point 0.

Partie B *:*

La seconde partie est consacrée à l'étude des fonctions $f_n\ lorsque\ n \geq 2$.
1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 puis le comportement de $f_n\ en + \infty$.
2-a) Justifier la dérivabilité de $f_n\ sur + \infty$
Démontrer que :

$f'_n(x) = x^{n-1}g_n(x)$ où $g_n\ est\ une\ fonction\ définie\ sur\ ]0; +\infty[\ que\ l'on\ determinera$
b) Etudier les variations de la fonction $g_n\ et\ en\ déduire\ le\ signe\ de\ g_n(x)$
c) Dresser le tableau de f_n.

Partie C *:*

La troisième partie porte sur les courbes $C_n\ lorsque\ n \geq 2$.
1) Quelle est la tangente à

C_n *en* 0 *origine du repère* ? 2) *Etudier la position relative de* C_n *et* C_{n+1} *pour* $n \geq 2$.
Quelle est la position de C_1 *par rapport à toutes les courbes de* C_n?
3-a) Déterminer $lim_{x\to+\infty}\left[x^2 ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$ *. Que peut-on en conclure pour* C_2 *?*
b) Préciser la position de C_2 *par rapport à la droite d'équation* $y = x - \frac{1}{2}$
4) Tracer C_2 *et* C_3 *dans le meme repère que* C_1.

Problème N°27 *:*

L'élève DANAMOU de la terminal scientifique (TS) veut résoudre ce problème et se confronte dont à un souci élémentaire puis implore l'aide de ses camarades de TS.

Soit f *la fonction définie par :* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f*. Vérifier si f est continue et dérivable en 0*
Déterminer les limites aux bornes de Df.
2) Déterminer le sens de variation de f*. En déduire le tableau de variation de* f.
3) Déterminer les branches infinies si elles existent.
4) Tracer la courbe de f *et ses asymptotes.*

Problème N°28 *: (11 points)*

Partie A *:*

Soit la fonction numérique f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} \ si\ x\ \epsilon\ ]-\infty;\ 0[\\ ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\ si\ x\ \epsilon\ [0;1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[\end{cases}$$

Soit (C) la courbe de f *dans le plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique 2cm).*

1. Etudier la continuité de f *en 0.*

2. a) Montrer que pour tout $x \in]0;1[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{ln\,(1-x)}{x} - \frac{ln\,(1+x)}{x}$.

b) Etudier la dérivabilité de f *en 0.*
c) En déduire que (C) admet au point d'abscisse 0 deux demi-tangentes dont on donnera les équations.
3. Etudier les variations de f.
4. Tracer la courbe (C).

Partie B *:*

Soit g *la restriction de f à]1 ; +∞ [.*
1. Montrer que g *est une bijection de]1 ; +∞ [sur un intervalle J à préciser. On notera* g*–1 la bijection réciproque de* g.
2. Montrer que l'équation $g(x)$ *= - e admet une solution* α *sur l'intervalle] 1 ; +∞ [(on ne demande pas de calculer* α*).*
3. Montrer que pour tout x $\in J$, $g^{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x-1}$.

4. Tracer dans le repère précédent la courbe de g^{-1}.
5. Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points M(x ;y) défini par : $-\ln 7 \leq x \leq -1$ et $0 \leq y \leq g^{-1}(x)$

Problème N°29 : *(07 Points)*

1.a) Etudier les variations de la fonction f définie sur] -1 ; +∞ [par : f(x) = 2ln(x+1).
(01,5pt)
Tracer sa courbe (C) dans un repère orthonormé. (01pt)
b) Démontrer que sur [2 ; +∞ [l'équation f(x) = x admet une solution unique λ.
(01pt)

2. On considère la suite (Un), $n \in \mathbb{N}$ telle que $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = 2ln\,(1+U_n) \end{cases}$

a) Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le repère.
(0,5pt)
b) Démontrer par récurrence que pour tout n, $Un \geq 2$. (0,5pt)
c) Montrer que pour tout x de l'intervalle [2 ; +∞ [, $|\, f'(x) \,| \leq \frac{2}{3}$.
(0,5pt)
d) En déduire que pour tout n, on a : $|\, U_{n+1} - \lambda \,| \leq \frac{2}{3} |\, U_n - \lambda |$, que $|\, U_{n+1} - \lambda \,| \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et que la suite (Un) converge vers λ. (0,5+0,25pt)
e) Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|\, U_p - \lambda | \leq 10^{-2}$.
Que représente Up pour λ ? (0,5+0,25pt)

Problème N°30 *:*

Partie A

On considère la fonction f définie sur IR par: $f(x) = x(1+e^{2-x})$. On note (C) sa courbe représentative dans le repère $(0\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ avec unité graphique: $2cm$)

1°) Soit h la fonction définie sur IR par : $h(x) = 1 + (1-x)e^{2-x}$
a) Etudier le sens de variation de h sur IR
b) En déduire le signe de $h(x)$ sur IR
2°) a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu
c) Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu
d) Préciser la position de (C) par rapport à la droite (Δ)
3°) a) Déterminer $f'(x)$ puis étudier son signe
b) En déduire le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation
c) Montrer que f réaliser une bijection de IR vers un intervalle J à préciser on note f^{-1} la bijection de réciproque de f
d) f^{-1} est-elle dérivable en 4 ? Dresser son tableau de variation
e) Construire la courbe (C), et (Δ) puis déduire la courbe (τ) de f^{-1} dans le même le repère

Partie B

1) Calculer l'aire $A(\theta)$ *de la partie délimitée par (C), la droite* (Δ) *et les droites d'équations* $x = 0\ et\ x = \theta\ avec\ \theta \in IR_+{}^*$
2) Calculer $\lim\limits_{\theta \to +\infty} A(\theta)$ *puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

<u>Problème N° 31</u> *:*

Partie A

On considère la fonction $g\ définie\ par\ g(x) = (1-x)e^x - 1$
1) Etudier les variations de g
2) Calculer $g(0).En\ déduire\ sur\ IR\ que\ \forall\ x \neq 0; g(x) < 0$

Partie B

Soit la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \quad si\ x \neq 0 \\ \quad f(0) = 3 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f *dans le plan muni d'un repère orthonormé* $(0\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ *(unité graphique 2cm). On admet que* f *est dérivable en 0 et que* $f'(0) = -\frac{1}{2}$

1) a) Déterminer la limite de $f\ en + \infty$

b) Etablir que $\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}}$ *puis déterminer la limite de* $f\ en + \infty$

En déduire que (C) admet une asymptote horizontale en +∞ dont on donnera l'équation

2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ *est asymptote oblique à la courbe (C) en -∞*

3) Calculer pour tout $x \neq 0, f'(x)\ et\ montrer\ que\ f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$
4) a) Donner le sens de variation de f
b) Dresser le tableau de variation de f
5) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse nul, écrire l'équation de (T)
6) Tracer (D), (T) et (C).

Partie C

Soit h *la fonction définie sur* $IR\ par\ h(x) = f(x) - x$

1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in \left]0; \frac{5}{2}\right[$
2) On pose $I = \left[0; \frac{5}{2}\right]$

a) Démontrer que pour tout $x \in I, on\ a{:}\ g(x) \geq -20\ et\ (e^x - 1)^2 \geq 40$

b) En déduire que si $x\ \in I, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

3) Soit (U_n) *la suite définie sur* $IN\ par$ *:* $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in I\ on\ a\ U_n \in I$

b) Montrer que pout tout $n \in IN, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ $et\ que$ $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^{n+1}$

c) En déduire que (U_n) $converge\ vers\ \alpha$

d) Déterminer le plus petit entier $n_0$tel que pour tout $n \geq n_0$; $on\ ait$ $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

<u>Problème N°32</u> *:*

On considère la fonction de la variable réelle x définie sur IR^* $par: f(x) = \frac{-ln|x|}{x} + x - 2$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A *:*

Soit la fonction g définie sur IR^* par $g(x) = -x^2 + 1 - ln|x|$

1. Etudier les variations de la fonction g et dresser le tableau de variations
2. Calculer $g(-1)$ et $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

Partie B *:*

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe Cf admet une asymptote verticale

2.
(a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe de la fonction f
(b) Etudier les positions relatives de Cf par rapport (D)

3.
(a) Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire le sens de variation de f
(b) Dresser le tableau de variation de f

4.
(a) Montrer que le point I , intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe Cf
(b) Construire la courbe Cf ainsi que les asymptotes

5. Discuter graphiquement et en fonction du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation dans $IR, f(x) = m$ $(\ m\ \in IR)$

Partie C *:*

Soit a un réel tel que $-1 \leq a < 0$ $et\ soit$ (Δ) la région du plan délimité par la courbe Cf, d'équations respectives $x = -1; x = a; y = x - 2$

1.
(a) Calculer en fonction de a $l'aire\ A(a)\ de\ (\Delta)$
(b) Calculer $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a < 0}} A(a)$ et interpréter graphiquement le résultat

2. On donne la suite définie pour tout entier $n > 0$ $par: u_n = \int_1^n f(x)dx$

(a) Calculer u_n en fonction n
(b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier

Problème N°33 *: (Bac Tchad 2024 série D)*

Partie A

On définit la fonction g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par: $g(x) = 2x - (x-1)ln\,(x-1)$

1. On admet que : $\lim\limits_{x\to 0}(xlnx) = 0$. En déduire la limite de g lorsque x tend vers 1.

2. Calculer $g'(x)$ pour $x \in\ ]1\,;+\infty[$.

3. Résoudre l'inéquation : $1 - ln(1-x) > 0$, d'inconnue $x \in\ ]1;\ +\infty[$.

4. Etudier le sens de variations de g sur l'intervalle $]1\,;\ +\infty[$.

5. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique notée α dans l'intervalle $[e+1\,; e^2+1]$ puis étudier le signe de g(x) sur $]1\,;+\infty[$

Partie B

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{ln\,(x^2-1)}{x}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$ et prouver que $\lim\limits_{x\to +\infty}\varphi(x) = 0$.

2. Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que $\varphi'(x)$ a le meme signe que $g(x^2)$ sur $]1\,;+\infty[$

3. Montrer que φ est croissante sur l'intervalle $\left]1\,;\ \sqrt{\alpha}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\alpha}\,;+\infty\right[$

Partie C

On définit la fonction f sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{ln(e^{2x}-1)}{e^x}$

1. Vérifier que pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[\ \ f(x) = \varphi(e^x)$

2. En déduire :

a) La limite de f lorsque x tend vers 0
b) La limite de f lorsque x tend vers +∞
c) Le sens de variation de f sur $]0\,;+\infty[$ et que f admet un maximum en $ln\,(\sqrt{\alpha})$

3. Montrer que pour tout $x \in\ ]0\,;+\infty[\,; f(x) \le \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

Problème N°34 *: ENSTP 2024*

Partie A

1) *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' + 2y' + y = 0$
2) *Déterminer la solution particulière* $u, sachant\ que\ u(0) = 1\ et\ u'(0) = 0$

Partie B

Soit f, la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & si\ x \leq 0 \\ 1 - 2x + x\ln x & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *du plan d'unité graphique : 2 cm*

3) *Préciser l'ensemble de définition de* f.
4) *Etudier la continuité et la dérivabilité de* f *en* $x = 0$
5) *Etudier les variations de f. On dressera un tableau de variation de f*
6) *Pour* $x \leq 0$*, déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses et écrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C) en ce point.*
7) *Démontrer que l'équation* $f(x) = 0$ *admet une unique solution* $\alpha \in]6\,;7[$. *On ne demande pas de calculer* α.
8)
   a) *Etudier les branches infinies à (C)*
   b) *Tracer la courbe (C) de f et la droite (T).*

Problème N°35 *:*

Partie A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$. *On note C la courbe représentative de f dans un plan P rapporté à un repère orthogonal (0 ;* $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$*). Unité graphique 1 cm sur 0x et 10 cm sur 0y.*

1-a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de f en +∞ (on pourra noter que $f(x) = 2\left[\frac{x}{2}e^{\frac{-x}{2}}\right]^2$*)*

2-a. Expliciter la dérivée de f' de f et étudier le signe de f'(x).

b. Etudier les variations de f

c. Construire la courbe C de f dans le plan

3- On considère la fonction F définie sur $[0\,; +\infty\,[\ par: F(x) = \int_0^x f(t)dt$

a. *Utiliser une intégration par parties pour calculer :* $I(x) = \int_0^x te^{-t}dt$
b. *Montrer en utilisant 3-a.) et une nouvelle intégration par parties que :*
   $F(x) = 1 - e^{-t}(1 + x + \frac{x^2}{2})$
c. *Montrer que F est une fonction strictement croissante telle que* $0 \leq F(x) \leq 1\ \ \forall\, x$.

d. Montrer en utilisant 1-b), que F admet en $+\infty$ une limite que l'on déterminera. En déduire que l'équation F(x)=c, avec $0 \leq c \leq 1$ admet une solution et une seule dans $[0\,;+\infty\,[$.

Partie B

Dans cette partie, on se propose de résoudre l'équation F(x)=0,95. Pour cela, on introduit la fonction auxiliaire : $g(x) = ln(1 + x + \frac{x^2}{2})$ *+ ln20*

1- Montrer que l'unique réel α tel que F(α)=0,95 est aussi l'unique solution de $g(x) = x$.
2- Montrer que g est une fonction strictement croissante sur IR. En déduire que l'image de $g([5\,;10])$ est inclus dans $[5\,;10]$
3- a. Justifier que $|g'(x)| \leq \frac{1}{3}$ pour tout x dans $[5\,;10]$

   b. En déduire que $|g(v) - g(u)| \leq \frac{1}{3}|v - u|\ \forall\ x\ \in [5\,;10]$

   c. Montrer que $\alpha\ x\ \in [5\,;10]$

4- On considère la suite (U_n) de nombre dans l'intervalle $[5\,;10]$ définie par : $\begin{cases} U_n = 5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$

a. Utiliser 3-c°) pour montrer par récurrence sur n que : $|U_n - \alpha| \leq \frac{5}{3^n}$
b. Déterminer n_0 tel que $|U_{n_0} - \alpha| \leq 10^{-2}$
c. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près de α.

<u>Problème N°36</u> *:*

f est la fonction définie sur IR par : $f(x) = x - \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$

C est sa courbe représentative dans un repère orthonormal (0 ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), (on prendra sur chaque axe 3 cm comme unité)

Partie A

1. a) Calculer pour tout réel x, $f'(x) et\ f''(x)$.

b) Déduire les variations de f'.

c) Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ a une unique solution $\propto$ dans IR. Donner une valeur approchée de $\propto$ à 10^{-2} prés.

2. a) Déduire de la question précédente, les variations de f et dresser son tableau de variations.

b) Démontrer que la droite (Δ): $y = x$ est asymptote à C. Etudier les positions relatives de (Δ) et C.

Partie B

On définit la suite (U_n) par $U_n = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$

1. En utilisant la représentation graphique de la question de la partie A 2. c). Que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (U_n) ?
2. a) Démontrer que pour tout $n \geq 1, \quad -1 < U_n < 0$.
   b) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante. Puis déduire que cette suite à une limite l (que l'on ne demande pas de calculer)

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on : $0 < U_{n+1} + 1 < \frac{3}{4}(U_n + 1)$

   b) Déduire pour tout entier n que : $0 < U_{n+1} + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Quelle est la limite de la suite (U_n)?

<u>Problème N°37</u> :

Partie A

Soit h la fonction définie sur $]-\infty\,; 0[\ par: h(x) = 2ln\,(-x)$

1) Etudier le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
2) Calculer $h(-1)$ et déduire le signe de h sur $]-\infty\,; 0[$

Partie B

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2xln|x|; & si\ x < 0 \\ (x+2)e^{-x} - 1; & si\ x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (0 ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) d'unité graphique 1 cm.

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Calculer la limite de la fonction $x \to \frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
2) Etudier la continuité de f en 0.
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 et en déduire que la courbe (C) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0 dont on précisera les équations.
4) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ (on pourra exprimer $f'(x)$ en fonction de h(x) sur $]-\infty\,; 0[$).
5) En déduire le sens de variations de f et dresser son tableau de variation.
6) Montrer que l'équation $f(x)$ =0 admet deux solutions $\alpha\ et\ \beta\ tels\ que: 1 < \alpha < \frac{3}{2}\ \ et - 4 < \beta < -3$.
7) Construire la courbe (C).
8) Soit λ un nombre réel positif inférieur ou égal à 1.
   a) A l'aide d'une intégration par parties ; calculer en cm², l'aire de la partie du plan définie par : $\begin{cases} \lambda \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
   b) Calculer la limite de $A(\lambda)$ en 0.

Partie C

Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;\ -1]$

1) Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} sur $]-\infty;\ -1]$
2) Dresser le tableau de variation de g^{-1}
3) Tracer la courbe (C') de la fonction g^{-1}.

Probabilités

Enigme N°1 :

8 athlètes parmi lesquels Chérif, s'alignent pour la finale de 100 m des jeux olympiques. Sachant qu'il n'y a pas d'ex aequo.
1. Quel est le nombre de podiums possibles ?
2. Quel est le nombre de podiums dans lesquels
a) Chérif est premier ?
b) Figure Chérif ?

Enigme N°2 :

Dans un jeu de 32 cartes, combien de « mains » de 5 cartes peut-on avoir comportant :
1) Exactement 2 valets ? *2) 3 carreaux ?*
3) Plus de 2 dames ? *4) Au moins un roi ?*

Enigme N°3 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir :
1) le roi de trèfle. *2) un roi.*
3) un trèfle. *4) un roi ou un trèfle.* *5) ni roi, ni trèfle*

Enigme N°4 :

Une urne contient 5 boules rouges (BR), 3 boules blanches (BB) et 2 boules noires (BN).
A. On tire simultanément 3 boules de l'urne.
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages comportant :
a) 3BR ? *b) 3BN ?* *c) 2BB et 1BN ?* *d) 2BB ?* *e) Au moins 1BB ?*
f) des boules de même couleur ?
g) des boules tricolores ?
B. On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne.
1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages comportant :
a) 3BR ? *b) 3BN ?* *c) 2BB suivies d'une BN ?* *d) 2BB et 1BN ?* *e) 2BB ?*
f) au moins 1BB ?
C. On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne. Répondre aux mêmes questions que dans (B)

Enigme N°5 :

Un sac contient 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac sans remise du jeton tiré.
Calculer la probabilité :
a) De ne tirer que 3 jetons verts *b) De ne tirer aucun jeton vert*

c) De tirer au plus 2 jetons verts d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.

Déterminer la probabilité :

a) De ne tirer que 3 jetons verts b) De ne tirer aucun jeton vert
c) De tirer au plus 2 jetons verts d) De tirer exactement 1 jeton vert.

<u>Enigme N°6</u> *:*

Une urne contient 10 boules : cinq blanches numérotées 1, 1, 1, 2, 4. Trois noires numérotées 1, 3, 5 et deux rouges numérotées 6, 6.

1) On tire simultanément deux boules de l'urne :
a) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : les deux boules ont la même couleur

B : les deux boules sont de couleurs différentes

C : les deux boules portent le même numéro

b) Sachant que les deux boules ont la même couleur calculer la probabilité qu'elles portent le même numéro.
c) Les événements A et C sont-ils indépendants ?
2) On suppose maintenant que chaque boule tirée portant un numéro impair fait gagner 5F et 10F dans le cas du numéro pair.
a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X associée à ce tirage.
b) Calculer l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X

<u>Enigme N°7</u> *:*

Soient deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient trois boules blanches et cinq boules noires, L'urne U_2 contient deux boules blanches et trois boules noires.

On tire une boule de l'urne U_1 puis une boule de l'urne U_2.

1) Déterminer la probabilité pour que les deux boules tirées soient noires.
2) On considère l'événement :

A : les deux boules tirées sont de couleurs différentes

Déterminer P(A) la probabilité de réaliser l'événement A

3) Sachant que les deux boules tirées sont de couleurs différentes, déterminer la probabilité pour que la boule noire provienne de l'urne U_1.

<u>Enigme N°8</u> *:*

On considère une urne qui contient n boules noires et trois boules blanches avec n un entier naturel non nul. On extrait simultanément deux boules de l'urne à savoir que les boules sont totalement indiscernables au toucher et que tous les tirages sont équiprobables.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage le nombre de boules blanches obtenues.

1.a) Déterminer en fonction de l'entier naturel n l'expression de la variable aléatoire X

b) Exprimer l'espérance mathématique E(X) ainsi que la variance V(X) en fonction de l'entier naturel n.

c) Résoudre dans IN l'équation P(X=0) =P(X=2)

2. On suppose maintenant que n=3 ; on procède à trois tirages consécutifs de deux boules, les deux boules étant remises après chaque tirage.

Sachant que les tirages sont indépendants calculer la probabilité de titrer une fois et une seule deux boules blanches.

Enigme N°9 *:*

Une usine fabrique des ampoules électriques à l'aide de trois machines A, B et C. La machine A assure 20% de la production et 5% des ampoules de A sont défectueuses. La machine B assure 30% de la production et 4% des ampoules de B sont défectueuses. La machine C assure 50% de la production et 1%des ampoules produites par C sont défectueuses.

1°On choisit au hasard une ampoule. Calculer les probabilités :

a) Pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par A

b) Pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par B

c) Pour que l'ampoule soit défectueuse et produite par C

d) En déduire la probabilité pour qu'une ampoule prise au hasard soit défectueuse.

2° On choisit au hasard une ampoule. Elle est défectueuse.

Calculer la probabilité pour que cette ampoule :

i) Provienne de la machine A
ii) Provienne de la machine B
iii) Provienne de la machine C.

Enigme N°10 *:*

On considère l'équation du second degré :

$$(E) : x^2+\gamma x+\beta=0$$

Les coefficients γ et β sont l'un des entiers naturels 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Le coefficient γ est déterminé par un premier jet de dé parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et ont toutes la même probabilité d'apparaitre

Le coefficient β est déterminé par un deuxième jet de ce même dé.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

i) L'équation (E) admet deux racines réelles distinctes *ii) L'équation (E) admet deux racines réelles confondues*

iii) L'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées.

<u>Enigme N°11</u> *:*

On dispose de 2 urnes U_1 et U_2. U_1 Contient 4 boules blanches et 1 boule noire. U_2 Contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On choisit une urne au hasard, puis une boule dans l'urne choisie.
1. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire :
a) sachant que l'urne choisie est U_1 ?
b) sachant que l'urne choisie est U_2 ?
2. En déduire la probabilité de tirer une boule noire.

<u>Enigme N°12</u> *:*

On jette deux dés ayant la forme d'un tétraèdre régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4. On note X la somme des numéros obtenus.
1. a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Représenter la loi de probabilité de X.
2. a) Définir F la fonction de répartition de X.
b) Représenter F.

<u>Enigme N°13</u> *:*

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risque. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche 30% des individus non vaccinés ne sont pas malades.
1. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité :
i) qu'elle soit malade sachant qu'elle est vaccinée ?
ii) qu'elle soit malade et vacciné ?
iii) qu'elle contracte la maladie ?
2. Calculer la probabilité qu'un individu bien portant soit vacciné.

<u>Enigme N°14</u> *: (Bac)*

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note pi, i ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6} la probabilité de tirer le jeton numéroté i. On suppose que les probabilités p1, p2, p3, p4, p5 et p6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $\frac{1}{30}$.
1. a) Montrer que p1=$\frac{1}{12}$.
b) En déduire p2, p3, p4, p5 et p6.
2. On tire 3 fois de suite et avec remise un jeton de cette urne et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons portant un numéro pair.
a) Déterminer la loi de probabilité de X.
b) Déterminer l'espérance mathématique de X puis son écart-type.
3. Un joueur tire simultanément 2 jetons et note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les deux jetons tirés.
a) Déterminer la loi de probabilité de S.
b) On gagne à ce jeu lorsque S ≥ 4. Déterminer la probabilité de gagner.

Enigme N°15 *: (Bac)*

I*. On considère Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements. Dans le cas d'équiprobabilité rappeler les probabilités des événements suivants : A, A sachant B,* $A \cap \overline{B}$ *et* $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$.

II*. Une société de distribution d'électricité ayant une production insuffisante en électricité pour assurer une alimentation continue dans tout le pays, procède à des délestages. Ainsi à partir d'un certain jour les délestages ont débuté dans une ville Ndjamena à un rythme décrit comme suit :*

- Le premier jour la ville est délestée.

- Si la ville est délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{2}{9}$.

- Si elle n'est pas délestée un jour, la probabilité qu'elle soit délestée le jour suivant est $\frac{5}{6}$.

On désigne par D_n *l'événement « La ville est délestée le n-iéme jour » et* P_n *la probabilité de l'événement* D_n ; $P_n = P(D_n)$.

1. Montrer les égalités suivantes : $P(D_n) = 1$; $P(D_{n+1}/D_n) = 2/9$; $P(D_{n+1}/\overline{D_n}) = 5/6$.

2. Exprimer pn+1 en fonction de $P(D_{n+1} \cap D_n)$ *et* $P(D_{n+1} \cap \overline{D_n})$.

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $P_{n+1} = -\frac{11}{18} P_n + \frac{5}{6}$.

4. On pose $Un = 6P_n - \frac{90}{29}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que la suite (Un*) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.*

b) Exprimer Un *puis* p_n *en fonction de n.*

c) Un match de football doit se jouer le 20ième jour. Quelle est la probabilité pour que les habitants de la ville le suivent sans délestage.

Enigme N°16 *: (Bac)*

Un tiroir contient pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément 2 chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.

a) Calculer la probabilité de l'événement A : « tirer 2 chaussures de la même couleur ».

b) Calculer la probabilité de l'événement B : « tirer un pied gauche et un pied droit »

c) Montrer que la probabilité de l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est 1/19

2. On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3, 4.

b) Montrer que la loi de probabilité de X est : $P(X = 2) = \frac{1}{6}$; $P(X = 3) = \frac{1}{3}$; $P(X = 4) = \frac{1}{2}$

c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

Enigme N°17 *:*

Un sac contient 5 jetons verts numérotés de 1 à 5 et 4 jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1) On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac sans remise du jeton tiré.
Calculer la probabilité :
a) De ne tirer que 3 jetons verts
b) De ne tirer aucun jeton vert
c) De tirer au plus 2 jetons verts
d) De tirer exactement 1 jeton vert.

2) On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac.
Déterminer la probabilité :
a) De ne tirer que 3 jetons verts
b) De ne tirer aucun jeton vert
c) De tirer au plus 2 jetons verts
d) De tirer exactement 1 jeton vert.

Enigme N°18 *:*

On considère n *un entier naturel quelconque. Soit une urne qui contient n boules (*$n \geq 5$*) dont trois sont blanches. Les autres sont noires. Linamamou tire simultanément deux boules de l'urne On suppose que tous les tirages des deux boules sont équiprobables.*

1) Démontrer que la probabilité d'avoir deux boules blanches est de $\left(\frac{6}{n^2-n}\right)$.

2) Soit le jeu suivant : On gagne 300F si les deux boules tirées sont noires ; on perd 100F si elles sont blanches ; on ne gagne rien et on ne perd rien si elles sont de couleurs différentes. Soit X la variable aléatoire associée au gain algébrique de Linamamou.

i) Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de n.

ii) Calculer l'espérance mathématique de X

iii) Déterminer le nombre de boules que doit contenir l'urne si E(X)= 0.
Quelle est alors la variance de X ?

Enigme N°19 *:*

*Soit dans **C** l'équation : (E) :* $Z^2 - \left(1 - i + e^{i\alpha}\right)Z + (1-i)e^{i\alpha}$

α est un nombre r el de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

1. Développer l'expression A=$(e^{i\alpha} - 1 + i)^2$ *et résoudre dans l'équation (E).*

2. Soit l'application f_α *du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe Z fait correspondre le point M' d'affixe Z' tel que :* $Z' = (1-i)Z + e^{i\alpha}$

a) Déterminer les coordonnées du point invariant ω de l'application f_α *en fonction du réel α*
b) Démontrer que quand α décrit] 0 ; $\frac{\pi}{2}$*[ω décrit un ensemble à préciser.*

c. Déterminer la valeur α_0 *pour laquelle ω admet* $-\frac{1}{2}$ *comme ordonnée et caractériser* f_{α_0}.

3. Une urne contient cinq jetons portant respectivement : $-1, -\cos\alpha, \cos\alpha, 1$ et 1.
On désigne par X la variable aléatoire qui à tout tirage simultané au hasard associe le produit des nombres inscrits sur les jetons.

i) Déterminer la loi de probabilité de X.

ii) Déterminer la valeur de α pour laquelle E(X) =0,15.

Enigme N°20 :

Ursula lance simultanément deux dés cubiques équilibrés dont les faces portent le chiffre 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

On dit qu'elle obtient un « double » si les chiffres portés par les deux dés sont identiques.

A chaque lancer elle gagne 500F si elle fait « un double » et perd 100F dans le cas contraire.

1. Elle lance une fois les deux dés. Déterminer la probabilité qu'elle gagne

2. Les deux dés sont lancés trois fois. On associe au gain algébrique de Marie une variable aléatoire notée X.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

3. Ursula lance n fois les deux dés avec n un entier naturel.

On note A_n l'événement « ne jamais faire un double » et

B_n l'événement « faire au moins un double »
a. Exprimer $P(A_n)$ et $P(B_n)$ en fonction de n

b. Pour quelle valeur de n peut-on avoir : $P(A_n) = \frac{4}{5}$

Enigme N°21 :

Dans une classe d'un lycée 20 élèves étudient le Français, 12 étudient la Géographie et 9 étudient Histoire. 12 élèves étudient uniquement le Français ,4 étudient uniquement Histoire et 5 étudient uniquement Géographie.

Chaque élève étudie au moins une des trois matières mais aucun élève n'étudie les trois

1. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?

2. Si un élève de la classe est sélectionné au hasard, déterminer la probabilité pour qu'il étudie :

i) Histoire et Géographie ensemble.

2i) Exactement deux matières.

3. Si un élève est sélectionné au hasard dans la liste de ceux qui n'étudient pas le Français, déterminer la probabilité pour que la personne choisie étudie :

i) Histoire et Géographie ensemble. ii) Uniquement Géographie

Enigme N°22 _: (06 points)_

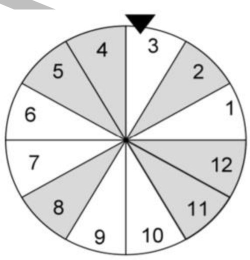
Un arrondissement de m habitants compte 48% d'hommes. Des études statistiques montrent que : 4% des hommes et 7% des femmes sont atteints de paludisme. On choisit un individu au hasard parmi ces habitants. Calculer la probabilité pour qu'il soit :
a) un homme atteint de paludisme. (01pt)
b) une femme atteinte de paludisme. (01pt)
c) une personne atteinte de paludisme. (01pt)
d) un homme non atteint de paludisme. (01pt)
e) un homme sachant qu'il est atteint de paludisme. (01pt)

Enigme N°23 _: (05 points)_

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant 3 boules vertes et 2 boules blanches et d'un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Une partie consiste pour un joueur à prélever au hasard une boule de l'urne ;
- Si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne la partie si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4.
- Si la boule tirée est verte, il lance et gagne la partie si le numéro obtenu est pair.
On considère les événements B : « le joueur tire une boule blanche » et G : « le joueur gagne la partie ».
1. Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche.
_(01pt)_
2. Montrer que la probabilité de gagner la partie est 17/30. (02pts)
3. Le joueur gagne la partie, quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ?
(02pts)

Enigme N°24 _:_

Un jeu suivant consiste à faire tourner la roue et à considérer le nombre et la couleur de la case sur laquelle elle s'arrête.



Déterminer la probabilité des événements suivants :
1) Evénement A : « le nombre obtenu est 6»
2) Evénement B : « on obtient case grise »
3) Evénement C : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 8»
4) Evénement D :« le nombre est pair sur une case grise»
5) Evénement E :« le nombre obtenu est impair et la case est blanche»

Enigme N°25 *:*

Une université propose aux étudiants trois orientations et trois seulement. Une filière A, une filière B et une filière C.

Chaque étudiant de l'université est inscrit dans une université de trois filières et une seule.

- *Les effectifs de la filière A sont double de la filière B*
- *Les effectifs de filière B sont le triple de la filière C*

On sait de plus que :

- *20% des étudiants de la filière A sont des filles ;*
- *30% des étudiants de la filière B sont des filles ;*
- *40% de étudiants de la filière C sont des filles.*

On choisit au hasard un étudiant de cette université :

On note A l'évènement « l'étudiant est inscrit dans la filière A »

On note B l'évènement « l'étudiant est inscrit dans la filière B »

On note C l'évènement « l'étudiant est inscrit dans la filière C »

On note F l'évènement « l'étudiant est une fille ».

1) *Calculer les probabilités des évènements A, B et C.*
2) *Calculer la probabilité que l'étudiant soit inscrit dans la filière A et soit une fille.*
3) *Calculer la probabilité de l'évènement F.*
4) *L'étudiant, choisi est une fille. Calculer la probabilité qu'il soit inscrit dans la filière A.*
5) *L'étudiant, choisi au hasard, n'est pas inscrit dans la filière A. Calculer la probabilité que ce soit une fille.*
6) *On prend 5 étudiants. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de filles parmi les 5 étudiants. Déterminer la loi de probabilité de X.*

Enigme N°26 *:*

Le sujet du concours d'entrée dans une grande école est noté sur 20 points. Il comporte 5 questions à choix multiples. Pour un candidat donné, on attribue 4 points pour chaque réponse juste et zéro point pour chaque question non traitée ou à réponse fausse.

On admet que lorsqu'un candidat répond au hasard à une question, la probabilité de donner une réponse juste est $\frac{1}{4}$.

1) *Soit k le nombre exact de réponses justes données par un candidat à ce concours. Exprimer en fonction de k, la note globale N de ce candidat.*
2) *Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses justes obtenues par un candidat qui a répondu à chacune des 5 questions.*

a) *Déterminer les valeurs possibles de X.*
b) *Démontrer que :* $P(X = 3) = \frac{45}{512}$
c) *Justifier que la probabilité pour que le candidat ait une note globale supérieure à 10 est :* $\frac{53}{512}$.

Enigme N°27 :

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$; *on note* P_k *la probabilité d'obtenir le nombre* k *sur la surface cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres* $P_1,\ P_2, P_3$ *et* P_4 *dans ce d'ordre forment une progression arithmétique.*

1) *Sachant que* $P_4 = 0{,}4$, *Montrer que* $P_1 = 0{,}1;\ P_2 = 0{,}2$ *et* $P_3 = 0{,}3$
2) *On lance le dé trois (3) fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants*
a) *Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?*
b) *Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?*
3) *On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note X la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.*
   a) *Pour* $0 \leq i \leq 10$, *exprimer en fonction de* i *la probabilité de l'évènement* $(X = i)$
   b) *Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.*
   c) *Calculer la probabilité de l'évènement* $(X \geq 1)$. *On donnera une valeur arrondie au millième*
4) *On lance* n *fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note* U_n *la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au* n*-ième lancer.*
   a) *Montrer que* (U_n) *est une suite géométrique et qu'elle converge*
   b) *Calculer* $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ *en fonction de* n *puis étudier la convergence de la suite* (S_n)
   c) *Déterminer le plus petit entier* n *tel que* $S_n \geq 0{,}999$

NB : On donne $(0{,}6)^{10} \simeq 0{,}000604$; $ln(0{,}001) \simeq -6{,}90; ln(0{,}6) \simeq -0{,}51$

Enigme N°28 :

Une urne contient dix boules : quatre (4) rouges et six (6) blanches.

1) *On extrait simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de boules rouges extraites. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) de X.*
2) *On répète* n *fois l'épreuve précédentes ; après chaque tirage de trois boules rouges.*
   a) *On suppose* $n = 5$. *Calculer la probabilité que l'on obtienne exactement deux fois un tirage de trois boules rouges.*
   b) *On prend maintenant* $n = 2$. *On note S l'évènement « le nombre total de boules rouges obtenues après les deux tirages est 3 ». Calculer la probabilité de S.*

Enigme N°29 :

A, B et C sont des évènement d'un espace probabilisable $(\Omega, p(\Omega))$. *Ecrire les évènements suivants :*

a) *A et B se produisent ;*
b) *A et B et C se produisent ;*

c) *A se produit seul ;*
d) *A et B se produisent et non C ;*
e) *Au moins deux de ces trois évènements se produisent ;*
f) *Au moins l'un des 3 évènements se produit ;*
g) *Aucun de ces 3 évènements se produit.*

Enigme N°30 *:*

On jette successivement et indépendamment sur une tableau horizontale deux (2) dés tétraédriques dont les faces sont numérotées de 1 à 4. X étant le produit des nombres obtenus.

1) *Donner la loi de probabilité de X et son diagramme en batons.*
2) *Donner la fonction de répartition de X et sa courbe cumulative.*

Enigme N°31 *:*

Un homme en possession de 10 clés dont une seule est la bonne essaie d'ouvrir une porte. On suppose les clés indiscernables et les essaies aléatoire.

1) *Il essaie les clés en remettant à chaque fois la clé essayée dans le trousseau. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au quatre essai seulement ?*
2) *Il pratique maintenant une autre méthode en mettant la clé essayée de côté et à continuer les essais avec les clés restantes. On désigne par X le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte.*
   Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.

Enigme N°32 *:*

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée comme suit :

$X = x_i$	*1*	*2*	*3*
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\alpha - \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

1) *Calculer la valeur de α.*
2) *Calculer :*
   a) *L'espérance mathématique de X*
   b) *La variance de X.*
   c) *L'écart-type de X.*

Les Suites Numériques

Exercice N°1 *:*

A tout entier naturel n est associé le réel U_n strictement positif, tel que :

$ln(U_n) = \left(\frac{2n-5}{40}\right)$ *, avec ln le logarithme népérien.*

1°) Montrer que la suite de terme général $ln(U_n)$ est une suite arithmétique.

2°) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.

3°) Calculer la somme des dix premiers termes de la suite arithmétique et le produit des dix premiers termes de la suite géométrique.

Exercice 2 *:*

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies par

$U_0 = 1$; $U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+1}$

et $Vn = \frac{1}{U_n}$

1. Calculer U_1; U_2; V_0 et V_1.
2. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on indiquera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.
4. Exprimer en fonction de n, $S_n=V_0 + V_1 + \cdots V_n$.
5. Etudier la convergence des suites (V_n), (U_n) et (S_n)

Exercice 3 *:*

Soit (v_n) la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{ln1}{1^2} + \frac{ln2}{2^2} \cdots + \frac{lnn}{n^2} \quad avec \quad n \geq 1$$

1. Etablir que $\frac{lnk}{k^2} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad k \geq 1$

2. Justifier que $\frac{1}{2k\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \quad k > 1$

3. En déduire que $v_n \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} \quad n \geq 1$

4. Démontrer que la suite v est convergente.

Exercice 4 *:*

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = e \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases} \quad \forall\, n \in IN$$

On pose $\forall\, n \in IN; v_n = lnu_n$

1.a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Donner l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
2.) Pour tout entier naturel n on pose :

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \ \ et \ \ p_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$$

a) Montrer $p_n = e^{s_n}$
b) Exprimer s_n en fonction de n
c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n
3) Calculer la limite de s_n et p_n

<u>Exercice 5</u> *:*

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par U_0= 4 et U_{n+1}=$\sqrt{3U_n - 2}$.

1. Montrer par récurrence que la suite (U_n) est minorée par 2.
2. Etudier la monotonie de la suite (U_n).
3. En déduire que cette suite converge vers un nombre réel dont on déterminera sa valeur.

<u>Exercice 6</u> *:*

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé.
2. Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

Calculer U_1, U_2 et en déduire le sens de variation de (U_n).
3. Soit la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$

a) Représenter sur l'axe des abscisses du repère précédent les trois premiers termes de la suite (V_n).
b) Démontrer que la suite (V_n) est minorée par 2.
c) Etudier la monotonie de la suite (V_n).
d) En déduire que (V_n) est convergente et calculer sa limite.

<u>Exercice 7</u> *:(Bac)*

Soit la suite (U_n) définie par :

$U_0 = 3 \ et \ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 12}$ *Pour tout entier naturel n.*

1°) Montrer que pour tout n, $0 \leq U_n \leq 4$

2°) a. Montrer que pour tout n, on a : $|U_{n+1} - 4| \leq \frac{|U_n - 4|}{4}$

b. Montrer que pour tout n, $0 \leq |U_n - 4| \leq \frac{1}{4^n}$
c. En déduire que la suite (U_n)converge et trouver sa limite.

Exercice 8 :

1.a) Etudier les variations de la fonction f définie par : f(x) = e^{2x} −1.
b) Démontrer que sur [-1 ; $-\frac{3}{4}$] l'équation f(x) = x admet une solution unique γ. *c) Montrer que pour tout x de l'intervalle [−1; $-\frac{3}{4}$], | f'(x)| ≤$\frac{1}{2}$.*

2. On considère la suite (Un), n ∈ ℕ telle que $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Démontrer par récurrence que pour tout n, - 1≤ U_n ≤ −3/4
b) Montrer que pour tout n, on a : | $U_{n+1} - \gamma$ | ≤ $\frac{1}{2}$| $U_n - \gamma$ |
c) En déduire que | $U_n - \gamma$ | ≤ $\frac{1}{2^{n+1}}$
d) Etudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 9 :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ $définie\ par$: $u_n = 1\ \ et\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4$

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in IN}$.

2. On pose $v_n = u_n - 8$
a) Montrer que la suite (v_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.*
b) En déduire v_n $puis$ u_n *en fonction de n.*
3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
4. Quelle est la limite de la suite (u_n)
5. Exprimer $S_{0,n} = v_0 + \cdots + v_n$ *en fonction de n. Quelle est la limite de* $S_{0,n}$?
6. Calculer la somme des 30 premiers nombres entiers naturels.

Exercice 10 :

Soit $(u_n)_{n\in IN}$ *la suite numérique définie par :*

$u_0 = 1\ et\ u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u^2{}_n + 1}}$

1. Montrer que $\forall\ n \in IN, u_n > 0$

2. Etudier le sens de variation de la suite (u_n)
3. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n) *et conjecturer une expression de* u_n *en fonction de n.*
4. Démontrer cette conjecture en utilisant u_n *par un raisonnement par récurrence*
5. Etudier la convergence de cette suite (u_n)

Exercice 11 :

En utilisant $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ $\quad x > 0$ *, étudier la convergence de la suite*(u_n) *pour tout entier naturel non nul n, par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Exercice 12 *:*

Soit α un réel strictement positif. On définit la suite (u_n) par $u_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$

1. a) Démontrer que pour tout x positif on a :

$$\frac{x}{1+x} \leq ln\,(1+x) \leq x$$

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\frac{n\alpha}{n+\alpha} \leq ln u_n \leq \alpha$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 13 *:*

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$ $\quad n \in IN$

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante

2) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 3, k! \geq 2 \times 3^{k-2}$

3) Vérifier que la formule reste vraie pour tout entier naturel k. En déduire que la suite (U_n) est majorée

4) Montrer que (U_n) est convergente et majorer sa limite.

Exercice 14 *:*

1°) Montrer que les deux suites définies, pour tout n entier naturel non nul, par :

$u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k}$ Sont adjacentes.

2°) En déduire que la suite de terme général $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente.

Exercice 15 *:*

Soient α et β deux réels tel que $0 < \alpha < \beta$. On considère les suites (u_n) et(v_n) définies par : $u_0 = \alpha$ et $v_0 = \beta$ et par la relation de réccurence $\forall\, n \in IN$,

$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$; $\quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

Montrer que les deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers une limite (appelée moyenne arithmético- géométrique des nombres α et β

Exercice 16 *:*

O n définie une suite de points (M_n) d'affixe z_n par $\begin{cases} z_0 = 8 \\ z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} z_n \end{cases} \quad n \in IN$

1°) Calculer z_n en fonction de n.
2°) Pour tout entier n, calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$

3°) Démontrer que $M_nM_{n+1} = k0M_n$ où k est un réel positif à déterminer
4°) En déduire la nature du triangle $0M_nM_{n+1}$
5°) Déterminer la limite de r_n *le module de* z_n lorsque n tend vers plus infini. Quelle interprétation géométrique peut-on en donner ?

Exercice 17 :

Soit (u_n) *la suite définie par :* $u_n = \sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k}\right)$

1°) Montrer que pour tout n de IN, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2°) En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

3°) Etablir alors que la suite (u_n) *est convergente.*

Exercice 18 :

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ et $ln(u_{n+1}) = 1 + ln(u_n)$

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$
2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e$
3°) Exprimer u_n *en fonction de n puis déterminer la limite de* (u_n)

4°) On pose $v_n = ln(u_n)$

a- *Exprimer la somme* $S_{0,n} = v_0 + \cdots + v_n$ *en fonction de n*
b- *En déduire l'expression de* $P_{0,n} = u_0 \times \cdots \times u_n$
c- *Etudier la limite de* $P_{0,n}$

Exercice 19 : *(Bac blanc Lycée Ibnou Cina)*

On considère la suite (Z_n) *définie pour tout* $n \in IN$ par: $\begin{cases} Z_n = (a^n)Z_0 \\ z_n = 6 + i6 \\ a = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$

1°) Exprimer Z_1 et a^2 *sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.*

2°) Exprimer Z_3 et Z_7 *en fonction de* Z_1 et a^2 *et en déduire l'expression de* Z_3 et Z_7 *sous forme trigonométrique.*

3°) On pose $|Z_n| = r_n$ *pour tout* $n \in IN$

a- *Montrer que* $\forall\, n \in IN, r_n = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$
b- *En déduire que la suite* (r_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme*
c- *Déterminer la limite de la suite* (r_n) *et interpréter géométriquement le résultat obtenu.*

Exercice 20 *: (Concours EAMAC)*

Soit la suite (U_n) *définie sur* IN^* par: $\begin{cases} U_n = 1 \\ U_{n+1} = \frac{nU_n+4}{n+1} \end{cases}$

1°) a-Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n).

b- La suite (U_n) *est-elle arithmétique ? Géométrique ?*

2°) On considère la suite (V_n) *définie par :* $V_n = nU_n$

a- Montrer que la suite (V_n) *est arithmétique en donnant sa raison et son premier terme.*

b- Donner l'expression de V_n *fonction de* n.

c- En déduire l'expression de U_n *en fonction de* n*, puis retrouver ses quatre premiers termes*

3°) Montrer que la suite (U_n) *est strictement monotone et bornée.*

4°) a- Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b- La suite (V_n) *est-elle convergente ?*

Exercice 21 *:*

Soit (u_n) *la suite définie pour tout entier naturel non n nul n par* $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1) *a) Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} lnu_n$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0, \frac{x}{x+1} \leq ln(x+1) \leq x$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a : , $\frac{n}{n+1} \leq ln(u_n) \leq 1$*; puis que*

$u_n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$.

d) En utilisant cet encadrement pour n *=5000, retrouver une valeur approchée de* e.

Exercice 22 *:*

Soit (u_n) *la suite numérique définie par son premier terme* $(u_0 = 2)$ *et* $u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{-1+2u_n}$

On pose $v_n = \frac{-1+u_n}{u_n}$ *et* $w_n = lnv_n$

1) *Montrer par récurrence que la suite* (u_n) *est minorée par 1.*
2) *Montrer que la suite* (w_n) *est une suite géométrique dont précisera la raison et son premier terme.*
3) *Exprimer* w_n, v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
4) *Déterminer :*

   a) La limite de u_n *quand n tend vers* $+\infty$

   b) La somme $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}$

c) *Le produit* $P_n = v_0 \times v_1 \times \ldots \times v_{n-1}$
d) *La limite de* S_n *quand n tend vers* $+\infty$
e) *La limite de* P_n *quand n tend vers* $+\infty$

Exercice 23 **:**

Soit (u_n) *la suite numérique définie par son premier terme* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

On pose $v_n = ku_n + 3; \qquad k \in IR^*$

1) *Calculer les quatre premiers termes de la suite* (u_n)
2)
   a) *Déterminer le réel* k *pour que la suite* (v_n) *soit une suite géométrique dont on précisera la raison et son premier terme.*
   b) *Exprimer* v_n *puis* u_n *en fonction de n.*
   c) *Calculer la limite de* u_n.

Calcul intégral

Exercice 1 :

Calculer : a) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$ *b)* $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}dx$ *c)* $\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

Exercice 2 :

Calculer : $\int_{-2}^{2}|x+1|dx$

Exercice 3 :

1°) Calculer $\int_{-3}^{0}(|2x+1|-2|x+1|)\,dx$ *2°) Encadrer* $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{(3+\cos t)^2}$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie par : $f(x)=\cos^4 x+\sin^2 x$

1) Linéariser $f(x)$.

2) En déduire la primitive de f qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 5 :

On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\cos^2 x dx$ *et* $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin^2 x dx$.

1) Calculer I+J

2) Calculer à l'aide d'une intégration par parties I-J.

3) En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=xe^{1-x}$ *et (C) sa courbe.*

1) Etudier f et tracer sa courbe (C)

2) Utiliser une intégration par parties pour calculer $I_1=\int_0^1 f(x)dx$*. Quelle est l'interprétation géométrique de* I_1 *?*

3) Pour tout $n\geq 1$, *on pose* $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

i) Montrer que $\forall\, x\in[0\,;\,1]$ *on a* $x^n\leq x^n e^{1-x}\leq x^n e$

ii) En déduire que $\frac{1}{n+1}\leq I_n\leq\frac{e}{n+1}$ *et étudier la convergence de la suite* (I_n)

iii) Utiliser une intégration par parties pour montrer que $\forall\, n\geq 1$ *on a* $I_{n+1}=(n+1)I_n-1$

Exercice 7 *:*

1) Etant donné $r > 0, calculer\ I = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

(Indication : reconnaître en la courbe sur $[-r; r]$ *de* $\to \sqrt{r^2 - x^2}$ *une partie d'une courbe très connue)*

2) Déduire du calcul de I celui de : $J = \int_{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 + 2t - 2t^2}\, dt$

(Indication : écrire 1+2t-2t² sous forme canonique et faire un changement de variable affine).

Exercice 8 *:*

On pose pour tout entier naturel non nul, $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

1) Montrer que pour tout x de $[0\,;1]$

$$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

2) En déduire que $U_n = ln2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$

3) Déterminer la limite de la suite (U_n)*.*

Exercice 9 *:*

Soit (I_n) *une suite définie par :* $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$

1) A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre $I_n\ et\ I_{n+1}$

2) Calculer I_0

3) En déduire I_n

Exercice 10 *: un encadrement de π*

Soit (I_n) *la suite définie par :* $I_n = \int_0^{\pi} sin^n x dx$

1) Calculer $I_0\ et\ I_1$

2) Sans calculer I_n *démontrer que la suite* (I_n) *est décroissante*

3) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $\forall\ n \in IN\ I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

4) i- Calculer : $I_9\ , I_{10}\ et\ I_{11}$

ii-En déduire que : $\frac{2^{17}}{3^4 \times 7^2 \times 11} \leq \pi \leq \frac{2^{16}}{3^4 \times 7 \times 7^2}$

Exercice 11 *:*

Soit (I_n) *la suite numérique définie par :* $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1} dx \;\; n \in IN$

1) Calculer I_0 *et* I_1

2) Montrer que la suite (I_n) *est croissante*

3) Montrer que la suite (I_n) *est majorée*

4) En déduire la convergence de la suite (I_n)

5) Montrer que $1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$

6) En déduire la limite de la suite (I_n)

Exercice 12 *:*

f est la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ *par:* $f(x) = ln\,(x + \sqrt{x^2-1})$

1°) Calculer f'(x).

2°) Calculer $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

3°) On pose $J = \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{x^2-1}\,dx$. *A l'aide d'une intégration par parties exprimer I + J en fonction de J et déduisez la valeur de J*

Exercice 13 *:*

On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

1°) a. Déterminer le domaine de définition de f.

b. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ *quand x tend vers 0*

La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2°) a. Etudier le sens de variations de la fonction f.

b. Déterminer la limite de f *en* $+\infty$.

3°) Démontrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique dans l'intervalle $[e\,;\ +\infty[$

4°) Soit (T) la tangente à la courbe (C) de f au point d'abscisse 1. Déterminer une équation de (T).

5°) Tracer la courbe (C) et la droite (T) dans un repère orthonormé.

6°) On considère un réel α de l'intervalle $]0\,;e]$ *; et on pose :*

$I(\alpha) = \int_\alpha^e f(x)dx$

a. Calculer $I(\alpha)$ *pour* $\alpha \in]0\,;e]$.

b. Déterminer la limite de I(α) quand α tend vers 0

c. En déduire l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=0 et x=e.

Exercice 14 *:*

On pose $J_n = \int_1^e x^2(lnx)^n dx \ \ pour\ tout\ n\ \in IN$

1) Calculer J_0

2) Montrer que $J_n \geq 0\ pour\ tout\ n \in IN$

3) Montrer que (J_n) *est décroissante*

4) Montrer que (J_n) *est convergente*

5) En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a cette relation : $3J_{n+1} + (n+1)J_n = e^3$

6) En déduire les valeurs exactes de $J_1\ et\ J_2$.

Exercice 15 *:*

On considère la fonction F définie par sur $]0;\ +\infty[\ par\ F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} e^{\frac{-1}{t}} dt$

1°) Justifier l'existence de $F(x)\ sur\ ]0;\ +\infty[$
2) Etudier le signe de $F(x)$
3) a-Etudier la dérivabilité de F et déterminer F'
b- En déduire le sens de variation de F

Exercice 16 *:*

Soit $n > 0$*, un entier, on pose :* $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2} dx$ *et* $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx$ *(on ne cherche pas à calculer)*

1°) Calculer $I_0 + 2I_1$*, en fonction de* I_0.
2°) Vérifier que $I_0 + I_1 + I_2 = 1$*, en déduire* $I_2\ en\ fonction\ de\ I_0$.
3°) Montrer que la suite (I_n) *est décroissante et convergente.*
4°) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$*, on a :* $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$*. Quelle est la limite de* I_n *lors que n tend vers* $+\infty$?
5°) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour n de IN on a :

$I_n = \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_n^1 \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} x^{n+1} dx$
6°) En observant que : $\frac{1}{9} \leq \frac{1+2x}{(1+x+x^2)^2} \leq 3\ \ sur\ [0;1]$*, en déduire que :*

$1 + \frac{1}{3(n+2)} \leq 3(n+1)I_n \leq 1 + \frac{9}{n+2}$

7°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} 3nI_n$.

Exercice 17 *:*

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nt} \sin t \, dt \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nt} \cos t \, dt$$

1°) Calculer I_0 et J_0

2°) Soit n un entier non nul :

a-) En intégrant par parties, montrer que I_n et J_n vérifient le système : $\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

b-) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n
3°) Calculer les limites des suites I_n et J_n.

Exercice 18 *:*

1°) a) Démontrer que pour tout réel x, on a: $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

b) En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$

2°) Soit f la fonction définie par $f(x) = ln(1 + e^x)$

a-Calculer la dérivée de f

b-Calculer à l'aide d'une intégration par parties la valeur de l'intégrale

$J = \int_0^1 e^x ln(1 + e^x) \, dx$

Exercice 19 *:*

On considère la fonction $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$

1) *Donner l'ensemble de définition de F.*
2) *a) Montrer que pour tout t positif,* $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leq \frac{1}{t}$

   b) Donner un encadrement de F.

   c) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

3) *Calculer* $F'(x)$.

Exercice 20 *:*

Soit f la fonction définie sur $]0\,;0{,}5[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$ *par:* $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{lnt} dt$.

1. *a) Montrer que f est bien définie.*

   b) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;0{,}5[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$. *Calculer f'*

2. *a) Montrer que pour tout x de* $]0\,;0{,}5[\,\cup\,]1\,;\,+\infty[$; $\frac{x}{ln2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{lnx}$

b) En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

3. Soit Φ *la fonction définie sur* $]0;1]$ *par* $\Phi(x) = 2 - 2x + lnx$

a) Montrer qu'il existe un unique α *de* $]0\,;0{,}5[$ *tel que* $\Phi(\alpha) = 0$

b) Montrer que, pour tout x *de* $[\alpha;1[$, $lnx \geq 2x - 2$

c) Montrer que pour tout x *de* $[\alpha;0{,}5[$ $f(x) \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x} \frac{1}{t-1}dt$

d) En déduire $\lim_{x \to 0{,}5} f(x)$

4. Montrer que, pour tout $t \geq 1$, *on a*: $0 \leq lnt \leq t - 1$. *En déduire* $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

5. Donner le sens de variations de f.

<u>Exercice 21</u> *:*

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_1^e (lnx)^n\,dx$

1) *Montrer que pour tout entier naturel n,* $I_n \geq 0$ *et donner le sens de variation de la suite (* I_n*).*
2) *Montrer que pour tout entier naturel n,* $I_n = e - (n+1)I_n$
3) *Déduire des questions précédentes que pour tout entier naturel n, on a :*

$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

4) *Déterminer* $\lim_{x \to +\infty} I_n$ *puis* $\lim_{x \to +\infty} nI_n$.

<u>Exercice 22</u> *:*

Soit la fonction f définie sur IR_+ *par :*

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

1) *Déterminer une primitive de f sur* IR_+
2) *Soit la suite* (u_n) *définie pour* $n > 0$ *par*: $u_n = \int_{ln\,(n)}^{ln\,(n+1)} f(x)dx$
   Exprimer u_n *en fonction de n*
3) *Montrer que la suite* (u_n) *est décroissante positive. Que peut-on en déduire ?*
   Calculer la limite de u_n *quand n tend vers* $+\infty$.

Mr DOUKGAYE GUETNA

Formulaire de dérivées

Fonction	Dérivée	Domaine	Commentaire
a	0	$\mathbb{R}$	a constante réelle
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	
$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$	$c \neq 0,\ ad-bc \neq 0$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$	
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$	$]0,+\infty[$	$n \in \mathbb{N}^*$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0,+\infty[$	α réel quelconque

Fonction	Dérivée	Domaine	Commentaire
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$a > 0$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$]0,+\infty[$	
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$]0,+\infty[$	$a > 0$ et $a \neq 1$

Fonction	Dérivée	Domaine	Commentaire
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$	
$\operatorname{cotan} x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2 x$	$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\mathbb{R}$	

Fonction	Dérivée	Domaine	Commentaire
$\operatorname{Arcsin} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	
$\operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	
$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	

Fonction	Dérivée	Domaine	Commentaire
$f+g$	$f'+g'$	f et g dérivables	
λf	$\lambda f'$	f dérivable	λ constante
fg	$f'g+fg'$	f et g dérivables	
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	f et g dérivables et $g(x_0) \neq 0$	

Fonction	Dérivée	Domaine	Commentaire
$g \circ f$	$g' \circ f \times f'$	f dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$	
f^{α}	$\alpha f' f^{\alpha-1}$	f dérivable et $f(x_0) > 0$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$	...$f(x_0) \neq 0$	
$\frac{1}{f^n}$	$\frac{-nf'}{f^{n+1}}$	...$f(x_0) \neq 0$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$f(x_0) > 0$	
e^f	$f'e^f$	...	
$\ln \lvert f \rvert$	$\frac{f'}{f}$	...$f(x_0) \neq 0$	
$\sin f$	$f' \cos f$		
$\cos f$	$-f' \sin f$		
$\tan f$	$\frac{f'}{\cos^2 f} = f'\left(1+\tan^2 f\right)$		
$\text{Arcsin}\, f$	$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$		
$\text{Arctan}\, f$	$\frac{f'}{1+f^2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

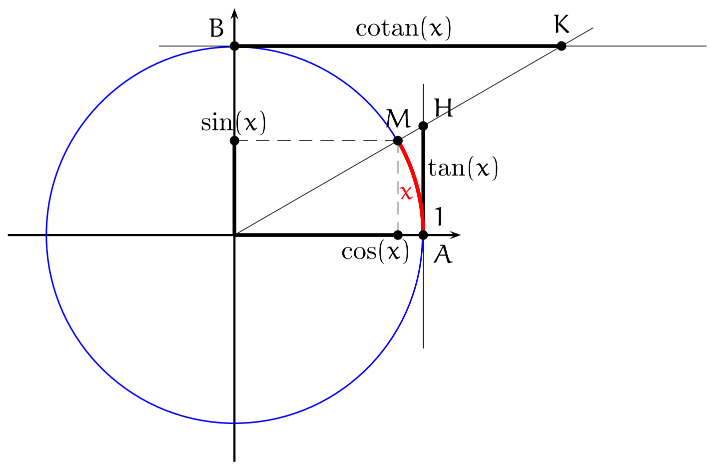
Formulaire de primitives

Fonction	Une primitive	Intervalle	Commentaire
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty[$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\ln x$	$x \ln x - x$	$]0, +\infty[$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
e^{zx}	$\dfrac{1}{z} e^{zx}$	$\mathbb{R}$	$z \in \mathbb{C}^*$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$a > 0$ et $a \neq 1$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$	$k \in \mathbb{Z}$
$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2 x$	$\operatorname{cotan} x$	$]k\pi, (k+1)\pi[$	$k \in \mathbb{Z}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$		
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\rvert$		
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\rvert$		
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1, 1[$	
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$]-a, a[$	$a > 0$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$	$a \neq 0$
$\dfrac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+\alpha}{\beta}\right)$	$\mathbb{R}$	$\beta \neq 0$

Fonction	**Une primitive**	**Commentaire**
$f+g$	$F+G$	
λf	λF	λ constante
$f' \times g \circ f'$	$g \circ f$	
$f' f^{\alpha}$	$\dfrac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f \rvert$	
$\dfrac{f'}{f^n}$	$-\dfrac{1}{(n-1)f^{n-1}}$	$n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}$	
$f' e^f$	e^f	
$f' \sin f$	$-\cos f$	
$f' \cos f$	$\sin f$	
$f' \operatorname{sh} f$	$\operatorname{ch} f$	
$f' \operatorname{ch} f$	$\operatorname{sh} f$	
$\dfrac{f'}{\cos^2 f} = f'\left(1+\tan^2 f\right)$	$\tan f$	
$\dfrac{f'}{\operatorname{ch}^2 f} = f'\left(1-\operatorname{th}^2 f\right)$	$\operatorname{th} f$	
$\dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$\operatorname{Arcsin} f$	
$\dfrac{f'}{1+f^2}$	$\operatorname{Arctan} f$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Formulaire de trigonométrie circulaire

Mr DOUKGAYE GUETNA



$\cos(x) =$ abscisse de M

$\sin(x) =$ ordonnée de M

$\tan(x) = \overline{AH}$

$\text{cotan}(x) = \overline{BK}$

$e^{ix} = z_M$

Pour $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\text{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Enfin pour $x \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $\text{cotan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Valeurs usuelles.

x en °	0	30	45	60	90
x en rd	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\text{cotan}(x)$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\forall x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
$$\forall x \notin \pi\mathbb{Z},\ 1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

addition d'un tour

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\tan(x + 2\pi) = \tan x$
$\text{cotan}(x + 2\pi) = \text{cotan}\, x$

addition d'un demi-tour

$\cos(x + \pi) = -\cos x$
$\sin(x + \pi) = -\sin x$
$\tan(x + \pi) = \tan x$
$\text{cotan}(x + \pi) = \text{cotan}\, x$

angle opposé

$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$
$\text{cotan}(-x) = -\text{cotan}\, x$

angle supplémentaire

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\tan(\pi - x) = -\tan x$
$\text{cotan}(\pi - x) = -\text{cotan}\, x$

angle complémentaire

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \text{cotan}\, x$
$\text{cotan}(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$

quart de tour direct

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
$\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\text{cotan}\, x$
$\text{cotan}(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x$

quart de tour indirect

$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$
$\tan(x - \frac{\pi}{2}) = -\text{cotan}\, x$
$\text{cotan}(x - \frac{\pi}{2}) = -\tan x$

.

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de duplication

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$
$= 2\cos^2 a - 1$
$= 1 - 2\sin^2 a$
$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

$\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

Formules de linéarisation

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Formules de factorisation

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

cos x, sin x et tan x en fonction de t=tan(x/2)

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Divers

$1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$

$1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2}$

$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Résolution d'équations

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = a + 2k\pi$
ou
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -a + 2k\pi$

$\sin x = \sin a \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = a + 2k\pi$
ou
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi - a + 2k\pi$

$\tan x = \tan a \Leftrightarrow$
$\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = a + k\pi$

Exponentielle complexe

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{ix} = \cos x + i \sin x.$

Valeurs usuelles

$e^0 = 1,\ e^{i\pi/2} = i,\ e^{i\pi} = -1,\ e^{-i\pi/2} = -i,\ e^{2i\pi/3} = j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i.$

Propriétés algébriques

$\forall x \in \mathbb{R},\ |e^{ix}| = 1.$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)},\quad \dfrac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)},\quad \dfrac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$

Formules d'Euler

$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x.$

Formule de Moivre

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{ix})^n = e^{inx}.$