

# CHAPITRE 1 : LIMITES-CONTINUITÉ

## EXERCICE\* 1

Déterminer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 - 10) ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x + 3} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (-3) ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x - 1} ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 8}{x - 2} ; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{-x + 3} ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{(x - 1)^2}$$

## EXERCICE 2

Déterminer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} (-x^2 + x + 3) ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + x + 5\right) ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - x + 2) ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2(2 - x) ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x(2 - x) + 1 - 4x^2] ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x}(x^2 + 2x - 1) ; \quad 7) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 3} ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x(3 - x)} ;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2}{7x + x^2} ; \quad 10) ; \quad 21) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x - \frac{x^2}{1 + x}\right) ; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4}{(x - 1)^2} ; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + x)}{x^2} ; \quad 13) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + x)}{x^2} ; \quad 15) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - x}{x^3 + x^2 - 2x}\right) ; \quad 16) \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{2x^2 + 5x - 3}{-x^3 - 2x + 5x + 6}\right) .$$

## EXERCICE\*3

Déterminer les limites suivantes

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - 15} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 1} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{2 + x^2} ;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - 4x ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1}) .$$

## EXERCICE\*4

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sin(x - 2)} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\pi x}{2} ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} .$$

## EXERCICE 5

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x} - 1}{x} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + x^2} - x ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + x}) ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2}}{x - 2}\right) ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + x} - 2}\right) ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x} ; \quad 7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x + 1}) ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \sqrt{x - 1}) ;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1}) ; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x^2 - x} - 6}\right)$$

### **EXERCICE 6**

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x + 2 \sin x}$  ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(x)}{x^2}$  ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \tan(x)}{x}$  ; 4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \sin(x) - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$  ;  
5)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{2x - \pi}$  ; 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos(x) - 1}{3x - \pi}$  ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$  ; 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$  .

### **EXERCICE\* 7**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$  .

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2°) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°) En déduire les équations des asymptotes à la courbe (C).
- 4°) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- 5°) Construire (Cf) et ses asymptotes dans le même repère.

### **EXERCICE 8**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{(x^2 + x - 2)}$  de représentation graphique

(Cf) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2°) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°) En déduire les équations des asymptotes à la courbe (C).

### **EXERCICE\* 9**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$  . de représentation graphique (Cf) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- 1) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = 3x$  est asymptote oblique à (Cf.) en  $-\infty$  .
- 2) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$  et donner une interprétation graphique du résultat.

### **EXERCICE 10**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$  de représentation graphique

(Cf) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2°) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°) En déduire les équations des asymptotes verticales à (Cf).
- 4°) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = x$  est asymptote oblique à (Cf) en  $+\infty$  et en  $-\infty$  .
- 5°) Déterminer la position relative de (Cf) par rapport à (D).

### **EXERCICE 11**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5$ .

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

- 1°) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  .
- 2°) Calculer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

### **EXERCICE 12**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \sqrt{x-3}$  de représentation graphique  $(C_f)$  dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

Démontrer que  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction  $(OI)$  en  $+\infty$ .

### **EXERCICE\* 13**

Dans les cas suivants,  $f$  est une fonction numérique de représentation graphique  $(C_f)$  dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ .

Démontrer que  $(C_f)$  admet une branche parabolique dont on déterminera la direction.

1)  $f(x) = \frac{x^4 + 5x^2 + 7}{x^2 + 3x + 8}$  ;      2)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x-1}{x+2}$

### **EXERCICE 14**

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction numérique  $f$  au point  $a$ .

1)  $f(x) = 3x^2 - 5x - 7$        $a = 2$  ;      2)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$        $a = -2$  .

3)  $\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x+3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$        $a = 1$  ;      4)  $f(x) = \frac{|x| + x^2}{|x|}$        $a = 0$  .

5)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

### **EXERCICE\* 15**

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction numérique  $f$  au point  $a$ .

1)  $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 0 \end{cases}$        $a = 2$  ;      2)  $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$        $a = 0$

3)  $f(x) = \frac{|x+1|}{x}$        $a = 0$  ;      4)  $f(x) = \sqrt{x-1}$        $a = 1$

### **EXERCICE 16**

On donne la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

Justifier que  $f$  admet un prolongement par continuité en 1 et préciser ce prolongement.

### **EXERCICE 17**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$

$f$  est-elle prolongeable par continuité en 2 ; en -2 ? Si oui préciser ce prolongement.

### **EXERCICE\* 18**

a) La fonction numérique  $f : x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$  est-t-elle prolongeable par continuité en 2 ?

b) Soit la fonction  $f$  de  $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{\tan x}{x}$  ; montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0, et préciser la fonction  $g$ , prolongement par continuité en 0 de  $f$ .

### **EXERCICE 19**

Soit la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$ .

1. Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2.  $f$  admet-elle un prolongement par continuité en 1 ? Si oui, déterminer ce prolongement.

### **EXERCICE\* 20**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ .

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
2. Vérifier que :  $-1 < \alpha < 0$ .
3. Déterminer un encadrement de  $\alpha$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

### **EXERCICE 21**

Dans chacun des cas suivants,  $f$  étant une fonction polynôme :

1. Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]-\infty; 0[$ .
2. Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

a)  $f(x) = x^3 + 2x + 2$                       b)  $f(x) = -2x^3 - 7x + 4$ .

### **EXERCICE 22**

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ .

- 1) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}$  qu'on notera  $\alpha$ .
- 2) Encadrer le réel  $\alpha$  par deux entiers consécutifs, puis déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.
- 3) Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### **EXERCICE 23**

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5$ .

- 1) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet trois et seulement trois solutions dans  $\mathbb{R}$  qu'on notera  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$  avec.  $\alpha < \beta < \lambda$
- 3) Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### **EXERCICE\* 24**

On considère la fonction numérique  $f : x \rightarrow \frac{1-x}{2x+3}$ .

- 1) Etudier le sens de variation et établir le tableau de variation de  $f$ .
- 2) Déterminer l'image par  $f$  de chacun des intervalles suivants :  $]-\frac{3}{2}; 1]$  et  $]-\infty; -\frac{3}{2}[$ .

### **EXERCICE 25**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

1. Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation
4. Démontrer que  $f$  réalise une bijection  $g$  de  $]1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
5. Donner le tableau de variation de  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .

6. On note (Cf) et ( $\Gamma$ ) les représentations graphiques respectives de  $f$  et  $g^{-1}$ .

Construire (Cf) et ( $\Gamma$ ) dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 1cm.

**EXERCICE 26**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ . de représentation graphique

(Cf) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2°) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 3°) En déduire l'équation de l'asymptote verticale à (Cf).
- 4°) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = x - 1$  est asymptote oblique à (Cf) en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 5°) Déterminer la position relative de (Cf) par rapport à (D).
- 6°) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation
- 7°) Démontrer que  $f$  réalise une bijection  $h$  de  $]4; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 8°) Construire (Cf) et ses asymptotes et ( $\Gamma$ ), la courbe de  $h^{-1}$  dans le même repère.

**EXERCICE 27**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = x^3 - 12x - 15$ .

- 1) Etudier les variations de  $f$ .
- 2) En déduire que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -2; -1[$
- 3) Déterminer un encadrement de  $\alpha$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 4) Démontrer que l'équation  $f(x) = -30$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $]1; 2[$   
*(On pourra étudier la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = f(x) + 30$ ).*
- 5) Déterminer l'encadrement de  $\beta$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

**EXERCICE\* 28**

$f$  est une fonction continue en tout point de son ensemble de définition  $Df$ , et admettant le tableau de variation ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$1$	$3$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$		$-3$		$1$
	↘ ↗			↗ ↘		↗
		1		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

- 1) Préciser l'ensemble de définition  $Df$  de la fonction  $f$ .
- 2) Déterminer l'image par  $f$  de chacun des intervalles suivants :  $] -\infty ; -2[$ ,  $]0 ; 1[$  et  $]3 ; +\infty [$ .
- 3) Justifier que  $f$  réalise une bijection de  $] -2; 0]$  sur un intervalle  $K$  à préciser.
- 4) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]3 ; +\infty [$ .
- 5) En déduire le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

**EXERCICE 29**

- 1) Démontrer que l'équation :  $x \in \mathbb{R}, x^3 + 3x^2 - 9x + 3 = 10$  admet exactement trois solutions  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  ( $\alpha < \beta < \gamma$ ) que l'on encadrera par des entiers consécutifs.
- 2) En déduire le signe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 7$ , suivant les valeurs de  $x$  sur  $\mathbb{R}$ .

**EXERCICE 30**

Ecrire chacun des nombres réels ci-dessous sous la forme  $a^p$ ,  $a$  étant un entier naturel et  $p$  un nombre rationnel.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{36}} ; \quad \sqrt[3]{64} ; \quad \sqrt[4]{4^8} ; \quad \sqrt[5]{3^3} \left( \sqrt[5]{3^2} \right)^5 ; \quad \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[5]{3} \times \sqrt{27}} ; \quad (2^2)^3 \left( \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^4} \right)$$

**EXERCICE 31**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$

$$(E_1) : x\sqrt{x} = 27 ; \quad (E_2) : x^{\frac{2}{3}} - 9x^{\frac{1}{3}} + 8 = 0 ; \quad (E_3) : \left( x\sqrt[3]{x} \right)^2 = 256 .$$

**EXERCICE 32**

1. a) Résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation (E)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'inéquation (I)  $x^2 - 5x + 6 < 0$ .

2 a) A l'aide de la question 1. a), résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation (E')  $x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{4}} + 6 = 0$ .

b) A l'aide de la question 1. b), résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'inéquation (I')  $x^{\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{1}{4}} + 6 < 0$ .

# CHAPITRE 2 : DERIVEES-PRIMITIVES

## I. DERIVEES

### EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants déterminer la fonction dérivée  $f'$  de la fonction numérique  $f$  :

- 1)  $f(x) = 5x^3 - x^2 + x + 3$  ;    2)  $f(x) = 2(5 - x)^5$  ;    3)  $f(x) = \frac{3}{x}$  ;    4)  $f(x) = \frac{-3}{-2x+5}$  ;  
5)  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$  ;    6)  $f(x) = x+5 - \frac{3}{2x}$  ;    7)  $f(x) = 2x^2 - 5\sqrt{x}$  ;    8)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$   
9)  $f(x) = 3x - 2 \tan(x)$     10)  $f(x) = x^2 \cdot \cos x$  ;    11)  $f(x) = (4x^2 - 3)^{11}$ .

### EXERCICE \*2

Déterminer la fonction dérivée  $g'$  de la fonction numérique  $g$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$  ;    2)  $g(x) = \cos(x^2 - 1)$  ;    3)  $g(x) = x\sqrt{2 - x^2}$  ;    4)  $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$  ;  
5)  $g(x) = \sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$  ;    6)  $g(x) = (2 - \sin(5x))^3$  ;    7)  $g(x) = \frac{1}{\tan x}$ .

### EXERCICE 3

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$
- 2) On admet que  $f$  est dérivable sur  $] -1; 1[$ ,
  - a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $] -1; 1[$ .
  - b) Prouver que  $f$  est dérivable en 1, et donner  $f'(1)$ .
  - c) Etudier la dérivabilité de  $f$  en -1.
  - d) En déduire l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .

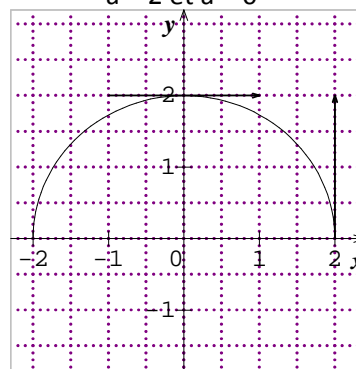
### EXERCICE\* 4

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonction  $f$  donnée par la courbe est dérivable au point  $a$ .

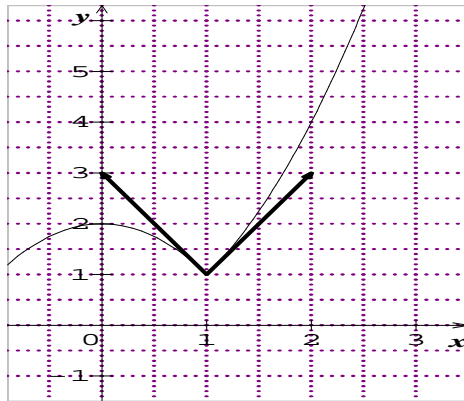
(1)  $a = 2$



(2)  $a = 2$  et  $a = 0$

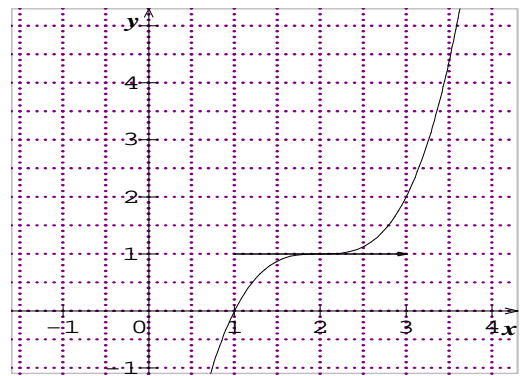


(3)



a = 1

(4)



a = 2

**EXERCICE\* 5**

Pour chacun des cas suivants, étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  au point  $a$  indiqué, et donner si possible une interprétation graphique (dans un repère orthogonal  $(O, I, J)$ ).

- 1)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad a = -1 ; \end{array} \right.$       2)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in ]-\infty; 1] \\ f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \in ]1; +\infty[ \end{array} \right. \quad a = 1$
- 3)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 + x + 1 \quad \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2\sqrt{3x + 9} \quad \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \quad a = 0 ;$       4)  $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x\sqrt{x+1} \quad \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. \quad a = 0.$

**EXERCICE 6**

Soit  $f$  la fonction définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - |x|}$ .

- 1- a) Justifier que l'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ .  
 b) Montrer que la fonction  $f$  admet en 1, un prolongement par continuité  $g$  que l'on précisera.  
 2) Pour la suite, on pose  $g(1) = 1$  ; Etudier la dérivabilité de la fonction  $g$  au point d'abscisse 1 puis déterminer si possible, le nombre dérivé de  $g$  en 1.

**EXERCICE 7**

Soit  $f$  et  $g$  des fonctions numériques définies par :  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et  $g(x) = \frac{1}{x}$

1. Déterminer  $f'(x)$  ;  $f''(x)$  ;  $f^{(3)}(x)$  (en fonction de  $n$ ).  
 2. Déterminer  $g'(x)$  ;  $g''(x)$  et  $g^{(3)}(x)$ .

**EXERCICE\* 8**

Soit  $h$  la bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$  définie par  $h(x) = \frac{1}{x}$ .

- 1) Calculer  $h\left(\frac{1}{2}\right)$   
 2) Sachant que  $h^{-1}$  est dérivable en 2, calculer  $(h^{-1})'(2)$ .

3) Justifier que  $h^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{3}$  et calculer  $(h^{-1})'(\frac{1}{3})$ .

### **EXERCICE\* 9**

Soit  $f$  la fonction définie de  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1;1]$  par  $f(x) = \sin x$ .

- 1) Démontrer que  $f$  est une bijection.
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  (bijection réciproque de  $f$ ) en 0 et en 1.
- 3) On admet que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $] -1;1[$ .

Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $] -1;1[$ ,  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

### **EXERCICE 10**

Soit  $f$  la fonction définie de  $[0; \pi]$  sur  $[-1;1]$  par  $f(x) = \cos x$ .

- 1) Démontrer que  $f$  est une bijection.
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f^{-1}$  (bijection réciproque de  $f$ ) en 0 et en -1.
- 3) On admet que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $] -1;1[$ .

Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $] -1;1[$ ,  $(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

### **EXERCICE 11**

Soit  $f$  la fonction définie de  $[0; \frac{\pi}{2}]$  sur  $[-1;1]$  par  $f(x) = \sin^2(x)$ .

1. Démontrer que  $f$  est une bijection.
2. Soit  $g$  la bijection réciproque de  $f$

Démontrer que  $g$  est dérivable en  $\frac{1}{2}$  et préciser  $g'(\frac{1}{2})$ .

3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $g$ .
- 4.a) Ecrire une équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{4}$ .

b) En déduire une équation de la tangente à  $(C_g)$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$

5. Construire  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans un repère orthonormé.

### **EXERCICE 12**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ .  $(C_f)$  est la représentation graphique de  $f$

dans le plan muni d'un repère  $(O, I, J)$ .

- 1°) a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .  
b) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  puis interpréter graphiquement les résultats.
- 2°) a) Démontrer que  $f$  admet un prolongement  $g$  par continuité en 0. Préciser ce prolongement  $g$ .

b) Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

c) Démontrer que  $g$  est dérivable en 0 et préciser  $g'(0)$ .

- 3°) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 4°) Démontrer que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $K$  à préciser.

5°) Calculer  $g(\frac{4}{3})$  et démontrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{2}$ . Préciser  $(g^{-1})'(\frac{1}{2})$ .

6°) a) Démontrer que  $\forall x \in K, g^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x^2}$ .

b) Calculer  $\forall x \in K, (g^{-1})'(x)$  et retrouver la valeur de  $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$  calculer en  $5^\circ$ .

### **EXERCICE \*13**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique : 1cm)

Soit la fonction numérique  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$ . On note (Cf) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J).

- 1) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 2) Démontrer que  $f$  réalise une bijection  $g$  de l'intervalle  $]1; +\infty[$  sur un ensemble  $J$  que l'on précisera. On note  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$ .
- 3) Sans expliciter  $g^{-1}(x)$ , justifier que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(g^{-1})'(1)$ .
- 4) Expliciter  $g^{-1}(x)$  et retrouver le résultat précédent.
- 5) Construire  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.

### **EXERCICE 14**

#### **Partie A**

On considère la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ .

- 1°) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 2°) a) Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .  
b) Montrer que :  $\alpha \in ]-1; 0[$
- 3°) Prouver que :  $\forall x \in ]-\infty; \alpha], g(x) \leq 0$  et  $\forall x \in [\alpha; +\infty[, g(x) \geq 0$ .

#### **Partie B**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par :  $f(x) = x - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ .

1°) Démontrer que  $\forall x \in Df$ , on a :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)(x+1)^2}$

En déduire le signe  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

- 2°) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $Df$  et dresser son tableau de variation
- 3°) On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).  
a) Montrer que la courbe (C) admet deux droites asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation  $y = x$ .  
b) Construire la courbe (C) ; unité 1 cm. On prendra  $\alpha = -0,23$  et  $f(\alpha) = -1,14$ .

### **EXERCICE 15**

Soit  $f$  la fonction définie sur par :  $f(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{x-2}$  et (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, I, J) d'unité :  $OI = 2$  cm et  $OJ = 0,5$  cm).

- 1°) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2°) a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
b) Justifier que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $x = 2$  est une asymptote verticale à (C).
- 3°) Déterminer les nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\forall x \in Df, f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ .
- 4°) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = x + 3$  est une asymptote oblique à (C).
- 5°) Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (D).

6°) Démontrer que le point d'intersection A des deux asymptotes précédentes est un centre de symétrie à (C).

7°) a) Démontrer que  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

b) Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f.

e) déterminer en justifiant les réponses, les images de chacun des intervalles  $]0 ; 2], [-2 ; 0]$  et  $]3 ; +\infty[$ .

8°) Démontrer que (C) coupe l'axe (OI) en deux points que l'on précisera et déterminer une équation de la tangente à (C) en chacun de ces points.

9°) Construire (C) , les asymptotes et les tangentes citées en 8°).

### **EXERCICE 16**

Soit f la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :  $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$  et (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité : 1 cm .

1°) Démontrer que  $\forall x \in Df, \text{ on a : } f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$  .

2°) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) En déduire l'équation de l'asymptote verticale (D) à (Cf).

4°) a) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x + 3$  est une asymptote oblique à (Cf).

b) Etudier les positions relatives de (Cf) par rapport à ( $\Delta$ ).

5°) a) Démontrer que  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$  .

b) Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de f .

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0 ; 1[$ , puis déterminer une valeur de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près .

6°) Démontrer que f réalise une bijection g de  $] -\infty ; 1[$  sur un intervalle K à déterminer .

Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$  , la bijection réciproque de g.

7°) Construire (Cf) , les asymptotes et ( $\Gamma$ ) la courbe de  $g^{-1}$  dans le même repère.

### **EXERCICE 17**

On admet que pour tout nombre réel x,  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$  et  $-x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$ .

Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$  de représentation graphique ( $C_f$ )

dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité 2 cm.

1) Déterminer les limites de f en  $-\infty$  et en  $+\infty$  et en déduire si possible une interprétation graphique.

2) a) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = 2x$  est asymptote à ( $C_f$ ) en  $+\infty$ .

b) Etudier la position relative de ( $C_f$ ) par rapport à (D).

3) a) Justifier que pour tout nombre réel x,  $f'(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$  .

b) Déterminer le signe de  $f'(x)$

c) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

4) a) Justifier que f est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  la bijection réciproque de f.

c) Calculer  $f(0)$  puis démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(f^{-1})'(1)$  .

d) Soit  $(\Gamma)$ , la courbe de  $g^{-1}$ . Déterminer une équation de la tangente (T) à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 1.

5) Construire (Cf), (D) et  $(\Gamma)$  dans le même repère.

**EXERCICE\* 18**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $f(x) = (x - 3)\sqrt{2x}$  de représentation graphique (Cf) dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 1 cm.

1. Etudier la continuité de  $f$  en 0
2. Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et donner une interprétation graphique.
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique des résultats.
4. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ 
  - a) Démontrer que  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ f'(x) = \frac{3x-3}{\sqrt{2x}}$ .
  - b) Déterminer le signe de  $f'(x)$  et le sens de variation de  $f$ .
  - c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Justifier que  $f$  réalise une bijection  $g$  de  $[1 ; +\infty[$  sur un intervalle  $K$  à déterminer.
6. Soit  $(\Gamma)$  la représentation graphique de  $g^{-1}$  bijection réciproque de  $g$  dans le repère (O,I,J).
  - a- Justifier que  $g^{-1}$  est dérivable en 0 et calculer  $(g^{-1})'(0)$ .
  - b- En déduire une équation de la tangente (T) à  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 0.
- 7- Construire (Cf),  $(\Gamma)$  et (T) dans le repère (O,I,J).

**II. PRIMITIVES**

**EXERCICE \*19**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction  $f$  sur un intervalle à préciser

- 1)  $f(x) = (2x+1)^{-4}$ ;      2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$ ;      3)  $f(x) = x+1 - \frac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}$
- 4)  $f(x) = \cos x \sin^4 x$  ;    5)  $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+3}}$ ;    6)  $f(x) = \cos^2 x$  ;    7)  $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$

**EXERCICE 20**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction  $f$  sur un intervalle à préciser.

- 1)  $f(x) = x^3$  ;      2)  $f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$  ;      3)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  ;      4)  $f(x) = x^5 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{x}$  ;    5)
- $f(x) = \frac{3x^4 + 2x^2 - 3}{x^2}$  ;    6)  $f(x) = \sqrt{x}$  ;      7)  $f(x) = 3(3x+1)^4$ ;      8)  $f(x) = \sin^2 x$ .
- 9)  $f(x) = 4(3x+4)^5$ ;      10)  $f(x) = -(5x-2)^{-7}$  ;      11)  $f(x) = -5\sin 4x + 3\cos 2x$  ;
- 12)  $f(x) = 2x^3 + \frac{3}{x^2}$  ;    13)  $f(x) = (2x+1)^5$ ;    14)  $f(x) = -(3-x)^3$  ;    15)  $f(x) = x\cos(x^2 + \pi)$  ;

16)  $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  ; 17)  $f(x) = 3 \sin(3x + \frac{\pi}{2})$  ; 18)  $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$  ; 19)  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3}$  ;  
 20)  $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^6}$  ; 21)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$  ; 22)  $f(x) = \frac{1}{4x^2-4x+1}$  ; 23)  $f(x) = \cos^3 x \sin^2 x$ .

**EXERCICE 21**

On considère la fonction f définie par :  $f(x) = 3x - 1 + \frac{2}{x^2}$

- 1°) Justifier que f admet des primitives sur  $]-\infty ; 0[$ .  
 2°) Déterminer la primitive de f qui s'annule en -1.

**EXERCICE 22**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de f qui prend la valeur  $y_0$  en  $x_0$ .

- 1)  $f(x) = x^2 + x - 2$   $x_0 = 1$  et  $y_0 = 0$  ; 2)  $f(x) = (2x-1)^3$   $x_0 = 2$  et  $y_0 = -1$ .  
 3)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$   $x_0 = 2$  et  $y_0 = 0$  ; 4)  $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{(x-3)^2}$   $x_0 = 0$  et  $y_0 = -1$ .  
 5)  $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$   $x_0 = \frac{\pi}{6}$  et  $y_0 = \frac{1}{6}$  ; 6)  $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$   $x_0 = 0$  et  $y_0 = \sqrt{5}$   
 7)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3(x)}$   $x_0 = \frac{\pi}{6}$  et  $y_0 = 1$  ; 8)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$   $x_0 = 0$  et  $y_0 = 1$  ;

**EXERCICE\* 23**

f est une fonction de IR vers IR définie par :  $f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$ .

- 1) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout nombre réel x différent de 1,  $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$   
 2) En déduire la primitive de f sur  $]1; +\infty[$  qui prend la valeur 1 en 0.

**EXERCICE 24**

On considère la fonction f définie sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$  par :  $f(x) = x\sqrt{1-2x}$ .

- 1) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que la fonction F définie sur  $] -\infty; \frac{1}{2}[$  par :

$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-2x}$  soit une primitive de f.

**EXERCICE 25**

Soit f la fonction définie sur  $] -3; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{x+3}$  et F la primitive de f sur  $] -3; +\infty[$  qui

s'annule en zéro.

1. Etudier les variations de la fonction F sur  $] -3; +\infty[$ .  
 2. Etudier le signe de F(x) sur  $] -3; +\infty[$ .  
 3. Soit g la fonction définie sur  $] -3; +\infty[$  par  $g(x) = F(x) - x$ .  
 a) Démontrer que g est décroissante sur  $] -3; +\infty[$ .  
 b) En déduire que : si  $x > 0$ , alors  $F(x) < x$ .

# CHAPITRE 3 : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

## EXERCICE 1

Simplifier les expressions suivantes:

$$A = \ln 8 - \ln 4 ; \quad B = \ln 2 - \ln \frac{1}{2} ; \quad C = \ln 9 + \ln 3 ; \quad D = \ln 2 + \ln 4 - \ln 8 ; \quad E = \frac{1}{2} \ln 36 ;$$

$$F = \ln\left(\frac{1}{3}\right) - 2\ln(\sqrt{3}) ; \quad G = \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) ; \quad H = \ln(100) + \ln(0,01) ;$$

$$M = \ln 8 - \ln 12 + \ln 15 ; \quad N = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right) ; \quad R = \ln(e\sqrt{e}) ; \quad S = \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$$

$$J = \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2}) ; \quad P = \ln\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right) ; \quad Q = \ln \frac{1}{100}.$$

## EXERCICE\* 2

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants.

1)  $f(x) = \ln(-x + 5)$  ;

2)  $f(x) = \ln(-x) + 5$  ;

3)  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$  ;

4)  $f(x) = x + \ln(x^2)$  ;

5)  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$  ;

6)  $f(x) = \ln|2x - 3|$

7)  $\ln(x+1)$  ;

8)  $\sqrt{\ln x}$  ;

9)  $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$

## EXERCICE 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction numérique f dans chacun des cas suivants

10)  $f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$  ;

11)  $f(x) = \left(\frac{1}{\ln x}\right)$

12)  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

13)  $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$

14)  $f(x) = \ln(\ln x)$

15)  $f(x) = \ln|x^2 - 9|$

16)  $f(x) = \ln[(3-x)\sqrt{x+2}]$

17)  $f(x) = \left(\frac{4}{\ln|x|-1}\right)$

18)  $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-5}$

## EXERCICE\* 4

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

a)  $\ln(3x-1) = \ln(x+1)$  ;

b)  $\ln x = -5$  ;

c)  $\ln(-2x+1) = 2$  ;

d)  $\ln(1-x) + \ln(x+5) = \ln(-8x)$  ;

e)  $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$  ;

f)  $\ln(x^2 + x) = 1$  ;

g)  $\ln x < -1$  ; h)  $\ln|2x-1| \leq 0$  ; i)  $\ln(x^2 - x + 1) \geq \ln(2-x)$  ; j)  $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 > 0$

## EXERCICE 5

Résoudre dans IR les équations et inéquations suivantes

1)  $\ln(3x) = 2$  ;

2)  $\ln x = 1$  ;

3)  $2\ln(-x+3) = 0$  ;

4)  $\ln(x^2) = -1$  ;

5)  $\ln[x(x+1)] = 0$  ;

6)  $\ln x + \ln(x+1) = 0$  ;

7)  $2\ln x - 1 = 0$  ;

8)  $2x\ln x + x = 0$  ;

9)  $(x-1)(1+\ln x) = 0$  ;

10)  $\ln x(\ln x - 1) = 0$  ;

11)  $x\ln(x+2) = 0$  ;

12)  $(x-1)(1+\ln x) = 0$  ;

13)  $(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$  ;

14)  $2\ln x - 1 = 0$  ;

15)  $\ln x + \ln(x+1) = 1$  ;

16)  $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1$  ;

**17)**  $\ln(x+1) = -1 + \ln(x-1)$  ;      **18)**  $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(-2x-2)$  ;      **19)**  $\ln\left|\frac{1}{2} + x\right| = \ln|x|$  ;  
**20)**  $\ln|x-1| + \ln|2x+1| = 0$  ;      **21)**  $\ln(x+4) + \ln(3x-2) - \ln 2 = \ln(2x-4)$  ;      **22)**  $\ln x > 1$  ;  
**23)**  $3 - \ln x \leq 0$  ;      **25)**  $\ln(2-x) + \ln(x+4) > \ln(3x+2)$  ;      **25)**  $\ln(x-3) - \ln(2+x) < 0$   
**26)**  $\ln(x-1) < 1$  ;      **27)**  $(1 - \ln x)(3 + \ln x) \geq 0$  ;      **28)**  $\ln(x^2 + 9) - \ln(x+3) \geq \ln(x-3) + \ln 2$  ;  
**29)**  $(\ln x)^2 - \ln x - 2 < 0$  ;      **30)**  $(\ln x)^2 - 5 \ln x + 2 > 0$  ;      **24)**  $\frac{1}{\ln(x)+1} > 0$  ;

**EXERCICE 6**

D) Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivantes :

1)  $\begin{cases} x - y = -2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$       2)  $\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = 1 \\ 5 \ln x + 3 \ln y = 4 \end{cases}$       3)  $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

**EXERCICE 7**

- 1- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $-x^2 - x + 6 = 0$   
 2. On considère le polynôme P définie par :  $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$ .  
 a) Vérifier que  $-1$  est un zéro de P.  
 b) Déterminer le polynôme Q tel que  $P(x) = (x+1)Q(x)$ .  
 c) En déduire les solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $P(x) = 0$ .  
 3- Résoudre l'équation (E) :  $2\ln x + \ln(x+2) = \ln(5x+6)$ .  
 4- a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $P(x) > 0$ .  
 b) En déduire la résolution de l'inéquation (I) :  $2\ln x + \ln(x+2) < \ln(5x+6)$ .

**EXERCICE\*8**

Déterminer les limites suivantes :

**a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} - 2x \ln x$  ;      **b)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + \frac{1}{x} - 1)$  ;      **c)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$  ;      **d)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln|x|)$  ;  
**e)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$  ;      **f)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$  ;      **g)**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$  ;      **h)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$  .

**EXERCICE 9**

Déterminer les limites suivantes :

**1)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln x$  ;      **2)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \ln x$  ;      **3)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1)$  ;      **4)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} - \ln x$  ;      **5)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \frac{1}{x})$  ;  
**6)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{1}{x})$  ;      **7)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x^2+1}{3+2x^2}$  ;      **8)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\ln x}{x}$  ;      **9)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\ln x}{x}$  ;      **10)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \ln x)$  ;  
**11)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x)$       **12)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$  ;      **13)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1+x^2})$  ;      **14)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2})$  ;  
**15)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$  ;      **16)**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2+1}{3+2x^2}$  ;      **17)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$  ;      **18)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2 \ln(x+1)}{x+1}$

19)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3} - x \ln x$  ; 20)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3} - x \ln x$  ; 21)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{x}$  ; 22)  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{\ln x}{x^2})$  ; 23)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + \frac{1}{x})$

24)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1 + \frac{1}{x})$  ; 25)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1 + \frac{1}{x})$  ; 26)  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$  ; 27)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$  ; 28)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x-1}$  ;

29)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$  ; 30)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$  ; 31)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{2x+1}$  ; 32)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+1)}$  ; 33)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$  .

**EXERCICE 10**

Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer le ou les intervalle(s) sur lequel(s) f est dérivable et calculer la dérivée f' de f .

- 1)  $f(x) = \ln(x+3)$  ; 2)  $f(x) = \ln x + 3$  ; 3)  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  ; 4)  $f(x) = x + \ln x^2$  ;  
 5)  $f(x) = \ln(\frac{1}{x+1})$  ; 6)  $f(x) = \ln|x+3|$  ; 7)  $f(x) = x \ln x$  ; 8)  $f(x) = \ln x + \ln(x+1)$  ;  
 9)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ; 10)  $f(x) = \ln(3x-1)$  ; 11)  $f(x) = 2 \ln x$  ; 12)  $f(x) = \ln x^2$  ;  
 13)  $f(x) = \ln(\frac{2x-1}{x-1})$  ; 14)  $f(x) = \ln(1+x^2)$  ; 15)  $f(x) = \ln(2x-x^2)$  ; 16)  $f(x) = x \ln x - x$  ;  
 17)  $f(x) = \frac{2 \ln(x+1)}{x+1}$  ; 18)  $f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$  ; 19)  $f(x) = x^2 + (\ln x)^2$  ; 20)  $f(x) = 2x^2 - \ln x + 1$  ;  
 21)  $f(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$  ; 22)  $f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$  ; 23)  $f(x) = x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$  ; 24)  $f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$

**EXERCICE 11**

On considère les fonctions g et f définies sur ]0; +∞[ par :  $g(x) = (2x-1)\ln(x) - x + 1$  et  $f(x) = \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$  .

Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad g'(x) = \ln(x^2) - \frac{1}{x} + 1$  et  $f'(x) = \frac{g(x)}{\ln^2(x)}$  .

**EXERCICE\* 12**

On considère g et f les fonctions définies par :  $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$  ,

$f(x) = -2x - 2 + \frac{2 + 2 \ln(x+2)}{x+2}$  . Démontrer que :  $\forall x \in ]-2; +\infty[ \quad , \quad f'(x) = -\frac{2g(x)}{(x+2)^2}$  .

**EXERCICE 13**

On considère g et f les fonctions définies sur ]0; +∞[ par :  $f(x) = -\frac{1}{32}x + \frac{(x-2)\ln x}{x^2}$  et

$g(x) = x^2 + 4x - 16 + 32 \ln x$  . Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{(4-x)g(x)}{32x^3}$  .

**EXERCICE 14**

On considère g et f les fonctions définies sur ]1; +∞[ par :  $f(x) = 2 + \frac{\ln(x-1)}{x^2}$  et

$g(x) = \frac{x}{x-1} - 2 \ln(x-1)$  . Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad g'(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$  et  $f'(x) = g(x)$  .

**EXERCICE 15**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur un intervalle que l'on précisera.

- a)  $f(x) = \frac{3}{2-x}$  ; b)  $f(x) = x^2 - 5x - \frac{1}{x}$  ; c)  $f(x) = \frac{7}{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$  ; d)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

e)  $f(x) = \frac{5}{x-1} + \frac{7}{x+1}$  ; f)  $f(x) = \frac{2x}{x^2+3}$  ; g)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+5}$  ; h)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

**EXERCICE \*16**

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K de la fonction f.

1)  $f(x) = \frac{3}{2-x}$  ;  $K = ]2; +\infty[$  ; 2)  $f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1}$  ;  $K = \mathbb{R}$  ; 3)  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$  ;  $K ]-1; +\infty[$ .

**PROBLEME\* 1**

On considère la fonction f définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 2 cm).

- 1°) a. Déterminer les limites de f en 0 et en  $+\infty$ .  
b. Donner les interprétations graphiques des résultats.
- 2°) a. Démontrer que pour tout x de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ .  
b. Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.
- 3°) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm.

**PROBLEME\* 2**

Soit f la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = -x + x \ln x$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 0$

- 1°) a) Démontrer que f est continue en 0.  
b) Etudier la dérivabilité de f en 0, et donner une interprétation graphique du résultat.
- 2°) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis donner une interprétation graphique des résultats.
- 3) a) Démontrer que  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \ln x$ .  
b) En déduire les variations et le tableau de variation de f.
- 4) Construire  $(C_f)$  dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 2 cm.

**PROBLEME 3**

**Partie A**

On considère la fonction f définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$ .

- 1°) Préciser les limites de g en 0 et en  $+\infty$ .
- 2°) Etudier les variations de g.
- 3°) a. Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet 1 comme solution unique.  
b. Démontrer que : pour tout x de  $]0; 1[$  ;  $g(x) < 0$  et pour tout x de  $]1; +\infty[$  ;  $g(x) > 0$ .

**Partie B**

On considère la fonction f définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x - 2 - \frac{\ln x}{x^2}$  On appelle (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 2 cm).

- 1°) a. Etudier les limites de f en 0 et en  $+\infty$ .  
b. Donner si possible une interprétation graphique.
- 2°) a. Démontrer que pour tout x de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ .  
b. Etudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation.  
c. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]1; +\infty[$ , une solution unique  $\beta$ .  
Vérifier que  $2 < \beta < 2,17$ .

3°) On pose  $h(x) = x - 2$ .

a. Montrer que  $f - h$  admet 0 comme limite en  $+\infty$ .

Quelle en est l'interprétation graphique?

b. Préciser la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation  $y = x - 2$

4°) Montrer qu'il existe un point A de (C) et un seul en lequel la tangente (T) à (C) est parallèle à la droite (D).

5°) Tracer la courbe (C) et les droites (D) et (T).

#### **PROBLEME 4**

##### **PARTIE A**

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  [par :  $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1°) Etudier le sens de variation de  $g$ .

2°) Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$ .

##### **PARTIE B**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  [par :  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln x}{x}$ .

On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (O, I, J) (*unité graphique 2 cm*).

1°) Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = \frac{x}{2}$  est asymptote à la courbe (C)

c) Déterminer la position de (C) par rapport à (D) sur  $]0; +\infty[$ .

d) Montrer en particulier que (D) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3°) a. Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ .

b. Etudier le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

4°) Montrer qu'il existe un point B et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (D). Préciser les coordonnées de B.

5°) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une solution unique  $\alpha$ .

b) Justifier l'encadrement :  $0,34 < \alpha < 0,35$ .

6°) Tracer la courbe (C) et les droites (D) et (T).

#### **PROBLEME 5**

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  [et définie par :  $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) (*unité graphique 1 cm*).

##### **PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  [et définie par :  $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

1°) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation. (*On ne demande pas de calculer les limites*).

2°) Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, g(x) > 0$ .

##### **PARTIE B**

1°) a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote à (C) en  $+\infty$ .

b) Préciser la position de (C) par rapport à (D).

3°) a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

- b) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.  
 c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est :  $y = 3x - 4$ .

4°) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que :  $1,3 < \alpha < 1,4$ .

### **PARTIE C**

On pose :  $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$  et  $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ .

- 1°) a) Déterminer le sens de variation de  $h$  sur  $]0; +\infty[$   
 b) Calculer  $h(1)$  puis justifier que :  $\forall x \in ]0; 1[, h(x) > 0$ ; et  $\forall x \in ]1; +\infty[, h(x) < 0$ .  
 2°) a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$   
 b) Etudier les variations de  $\varphi$  puis en déduire le signe de  $\varphi(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
 c) Déterminer la position de (C) par rapport à (T).  
 3°) Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra  $\alpha = 1,35$ .

### **PROBLEME\* 6**

#### **Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$ .

- 1) Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .  
 2) a) Pour tout  $x$  élément de  $D_g$ , déterminer  $g'(x)$  et déterminer son signe.  
 b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de  $g$ .  
 3) a) Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1,24; 1,25[$ .  
 b) En déduire que  $g$  est négative sur  $]0; \alpha[$  et positive sur  $]\alpha; +\infty[$ .

#### **Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$  et  $(C_f)$  sa représentation graphique

dans un repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2cm.

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en 0 et interpréter graphiquement le résultat.  
 2) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 2$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  en  $+\infty$ .  
 3) Déterminer la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ .  
 4) a) Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à  $D_f$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
 b) En déduire le signe de  $f'(x)$  et le sens de variation de  $f$ .  
 c) Etablir le tableau de variation de  $f$ .  
 5) a. Montrer que  $f(\alpha) = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$ .  
 b. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.  
 6) Construire  $(\Delta)$  et  $(C_f)$  dans le même repère.  
 On donne  $f(\alpha) \approx -1,2$ .

### **PROBLEME 7**

#### **PARTIE A :**

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J) . Unité : 2cm).

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = x + 1 - x \ln x$  si  $x > 0$  et  $f(0) = 1$ .

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en 0 . En déduire une interprétation graphique.  
 2) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
 3) a. Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.  
 b. Prouver que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ .

c. Justifier que :  $3,5 < \alpha < 3,6$ .

d. Démontrer que : pour tout  $x$  de  $]0; \alpha[$  ;  $f(x) > 0$  et pour tout  $x$  de  $]\alpha; +\infty[$  ;  $f(x) < 0$ .

4) Construire la courbe (C) de  $f$  dans le même repère (O,I,J).

## **PARTIE B**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2 + \frac{\ln x}{1+x}$ .

1) a) Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.

b) En déduire des interprétations graphiques.

2) a) Démontrer que  $g(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha}$  en déduire un encadrement de  $g(\alpha)$ .

b) Déterminer un encadrement de  $g(\alpha)$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

3) a) Démontrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  ;  $g'(x) = \frac{f(x)}{x(1+x)^2}$ .

b) En déduire les variations de  $g$  et dresser son tableau de variation.

4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de la courbe (C') représentative de  $g$  avec la droite (D) d'équation  $y = 2$ .

5) construire la courbe (C') dans le même repère que (C).

## **PROBLEME 8**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$ , et on désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1 cm).

1) a) Etudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x - 1 + \ln x$ .

b) Vérifier que  $g(1) = 0$

c) En déduire le signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$

2) a) Démontrer que : pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  ;  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .

b) Déduire de la question 1. Le signe de  $f'(x)$  et les variations de  $f$ .

c) Déterminer les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

d) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Etudier suivant les valeurs de  $x$  la position relative de  $(C_f)$  par rapport à la courbe  $(\Gamma)$  d'équation :  $y = \ln x$ .

b) Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $f(x) - \ln x$ . Interpréter graphiquement le résultat.

c) Construire la courbe  $(\Gamma)$ , puis la courbe  $(C_f)$  dans le même repère.

## **PROBLEME 9**

### **PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-1; +\infty[$  par  $g(x) = (x+1)^2 + 2 - 2 \ln(x+1)$

1. a) Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$

b) Calculer la limite de  $g$  en  $-1$

2. a) Déterminer la dérivée  $g'$  de  $g$

b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .

3) Justifier que  $\forall x \in ]-1; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

### **PARTIE B**

Le plan est muni d'un repère (O, I, J) d'unité 2 cm.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-1; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2 \ln(x+1)}{x+1}$ .

On note (C) la courbe représentative de  $f$ .

1. Justifier que  $f(x) = x + \frac{2 \ln(x+1)}{x+1}$
2. a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b) Calculer la limite de  $f$  en  $-1$  ; puis interpréter graphiquement le résultat.
3. a) Montrer que  $\forall x \in ]-1; +\infty[ , f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$   
b. En déduire le sens de variation de  $f$  puis dresser son tableau de variation
4. a) Justifier que la droite (D) d'équation  $y = x$  est asymptote à (C) en  $+\infty$ .  
b. Étudier la position relative de (C) par rapport à (D).
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en 0.
6. Montrer qu'il existe un point unique B de (C) où la tangente (T') est parallèle à (D).
7. Construire (D) ; (T) ; (T') et (C) dans le même repère.

### **PARTIE C**

1. Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $]-1; +\infty[$
2. On pose  $A = 4[F(\lambda) - F(0)]$  et  $\lambda$  un réel strictement supérieur à 0.  
a) Justifier que  $A = 2[\lambda^2 + 2 \ln^2(\lambda + 1)]$   
b) Détermine la limite lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  de  $A$ .

### **PROBLEME 10**

#### **Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x - 3 + \ln x$ .

- 1°) Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
- 2°) Déterminer la dérivée  $g'$  et donner le sens de variation de  $g$ .
- 3°) a. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]2,20; 2,21[$ .  
b. Justifier que : pour tout  $x \in ]0; \alpha]$  ,  $g(x) < 0$   
pour tout  $x \in ]\alpha; +\infty[$  ,  $g(x) > 0$ .

#### **Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(-2 + \ln x)$ . On appelle (C)

la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 2 cm).

- 1) a. Déterminer la limite de  $f$  en 0 et donner une interprétation graphique du résultat.  
b. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et justifier que (C) admet une branche parabolique de direction (OI) en  $+\infty$ .
- 2) a. Démontrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b. Étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.  
c. Montrer que  $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ .  
d. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
- 3) Justifier que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions qui sont 1 et  $e^2$ .
- 4) Construire (C). (On prendra  $\alpha = 2,2$  et  $f(\alpha) = -0,6$ ).

#### **Partie C**

- 1) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0; \alpha[$ .  
Montrer que  $h$  est une bijection de  $]0; \alpha[$  sur un intervalle  $K$  que l'on déterminera.
- 2) On note  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$ .  
a. Calculer  $h(1)$ .  
b. Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable en 0 et calculer  $(h^{-1})'(0)$ .
- 3) Construire la représentation graphique (  $\Gamma$  ) de  $h^{-1}$ , dans le même repère que (C).

# CHAPITRE 4 : FONCTIONS EXPONENTIELLES- FONCTIONS PUISSANCES

## EXERCICE 1

$x$  désigne un nombre réel strictement positif. Simplifier les expressions suivantes dans chacun des cas suivants.

$$A = e^{2\ln 4} ; \quad B = e^{\ln 4 - \ln 3} ; \quad C = e^{-\ln 3} ; \quad D = e^{x + \ln x} ; \quad F = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} ;$$

$$G = e^{(x - \ln 3)} ; \quad H = \frac{e^x}{e^{2x}} ; \quad I = (e^x + 2)(e^x - 2) ; \quad K = \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} .$$

## EXERCICE\* 2

Calculer les limites suivantes.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x + 1) ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x^2) ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| e^{\frac{x}{2}} - e^x \right| ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} ; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - e^x}{e^x + 1}$$

## EXERCICE 3

Calculer les limites suivantes.

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln 3} - x ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^{2x} ; \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - e^{-2x} + x - 1 ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x) ;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x) ; \quad 6) \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)e^{\frac{-x+1}{x+2}} ; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} e^x \left[ \ln(x^2) + \frac{2}{x} \right] ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} ;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x + 1) ; \quad 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln x) ; \quad 11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( e^x + \frac{1}{x} - 1 \right) \right] ; \quad 12) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x e^x}{1 + e^x} - x \right) ;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x e^x}{1 + e^x} \right) ; \quad 14) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{e^x - 1} \right) ; \quad 15) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{-x} + x - 2) ; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) e^{\frac{1}{|x|}}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 5x) ; \quad 18) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 4}{e^{2x} + 3} ; \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x e^x - x}{x^2} \right) ; \quad 20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x^2}}$$

## EXERCICE\* 4

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$a) e^{3x+2} = e ; \quad b) e^{2x} - 9 = 0 ; \quad c) e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 ;$$

$$d) e^x = -\frac{1}{2} ; \quad e) e^x + 3 = 4e^{-x} ; \quad f) \ln(e^x - 5) = 0 .$$

## EXERCICE 5

Résoudre dans IR les équations suivantes :

$$a) e^x - 1 = 0 ; \quad b) e^x = e^{-x} ; \quad c) e^x + 1 = 0 ; \quad d) e^x (e^x - 16) = 0 ;$$

$$e) (2e^x - 1)(e^x - 2) = 0 ; \quad f) e^{2x} - e^x = 0 ; \quad g) \ln(e^{x+1}) = 0 ; \quad h) e^{(1 - 2 \ln x)} = 1 ;$$

i)  $e^{3\ln(\sqrt{x})} = 1$  ; j)  $e^{2x} + e^x - 2 = 0$  ; k)  $2e^{2x} + 3e^x - 5 = 0$  ; l)  $4e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$  ;  
m)  $e^x + e^{-x} - 2 = 0$  ; n)  $e^{2x+1} - e^{x+1} - 2e = 0$  ; o)  $e^{x-2} = 1$  ; p)  $e^{-x+4} - 3 = 0$  ;  
q)  $e^{-x+3} + 4 = 3$  ; r)  $e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$  ; s)  $3e^{4x} + 5e^{2x} - 2 = 0$  ; t)  $e^x = \frac{1}{2}$  ;  
u)  $e^x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ; v)  $e^{x+3} = e^{2x-1}$  ; w)  $2e^x - 3e^{-x} = -5$  .

**EXERCICE\* 6**

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a)  $e^{x-3} \geq 1$  ; b)  $\frac{e^x+3}{e^x-1} < e^x$  ; c)  $e^{4-x} < 0$  ;  
d)  $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$  ; e)  $(e^{2x}-1)(3-e^x) > 0$  ; f)  $e^x - e^{-x} > 0$

**EXERCICE 7**

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

1)  $e^x \geq 3$  ; 2)  $e^{x-4} \leq 1$  ; 3)  $e^{2x-5} > e^x$  ; 4)  $e^{2x-1} < e$  ; 5)  $e^{2x} - 5e^x - 6 > 0$  ;  
6)  $e^{2x} - 3e^x + 2 < 0$  ; 7)  $e^{-x} + 4 \geq 0$  ; 8)  $-e^{3x} + 4e^{2x} - e^x < 0$  ; 9)  $(3-e^x)(e^x+1) \geq 0$  ;  
10)  $e^x \leq 1$  ; 11)  $e^x \geq e$  ; 12)  $e^{x-3} \geq 0$  ; 13)  $4 - e^x > 0$  ; 14)  $e^{2x+1} > e^3$  ;  
15)  $e^{-2x} < 1$  ; 16)  $\ln(e^{x-5}) < 0$  ; 17)  $e^{2x} - 3e^x + 2 \leq 0$  ; 18)  $e^{2x} - e^x + 1 \leq 0$

**EXERCICE 8**

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

(S<sub>1</sub>)  $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$  ; (S<sub>2</sub>)  $\begin{cases} 2e^x - e^y = 15 \\ e^x + 2e^y = 40 \end{cases}$  ; (S<sub>3</sub>)  $\begin{cases} 2e^x + 3e^y = 1 \\ e^x - 5e^y = 7 \end{cases}$  ;  
(S<sub>4</sub>)  $\begin{cases} e^x \cdot e^{2y-1} = 1 \\ e^{x+2} \cdot e^y = e \end{cases}$  ; (S<sub>5</sub>)  $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ e^{x+y} = 10 \end{cases}$  ; (S<sub>6</sub>)  $\begin{cases} 2^x = 2^{2-y} \\ 2^x + 2^{y+2} = 17 \end{cases}$  .

**EXERCICE 9**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonctions  $f$  et la dérivée  $f'$ .

1)  $f(x) = e^{-x} + 2e^x$  ; 2)  $f(x) = e^{x^2+1}$  ; 3)  $f(x) = \ln(1+e^x)$  ; 4)  $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$  ;  
5)  $f(x) = (2x+1)e^{2x}$  ; 6)  $f(x) = e^{-x}(1-x)+1$  ; 7)  $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$  ; 8)  $f(x) = e^x \ln x$  .

**EXERCICE 10**

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonctions  $f$  et la dérivée  $f'$ .

1)  $f(x) = e^{(3x+2)}$  ; 2)  $f(x) = e^{\frac{1}{x-4}}$  ; 3)  $f(x) = (1+x)e^{\sqrt{x}}$  ; 4)  $f(x) = e^{\ln x}$   
5)  $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$  ; 6)  $f(x) = \frac{x}{e-e^x}$  ; 7)  $f(x) = \ln|e^x-1|$  ; 8)  $f(x) = \frac{x^2-e^x}{x(1+e^x)}$   
9)  $f(x) = xe^{-2x}$  ; 10)  $f(x) = \frac{e^x}{x}$  ; 11)  $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$  ; 12)  $f(x) = e^x + e^{-x}$  ;

### EXERCICE\* 11

On considère les fonctions numériques  $f$  et  $g$  définies par  $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$  et  $g(x) = e^x + x + 1$ .

Démontrer que  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}$ .

### EXERCICE 12

1. On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x(e^{-x} - 1)$  et  $g(x) = (1-x)e^{-x} - 1$

Montrer que  $g'(x) = (x-2)e^{-x}$  et  $f'(x) = g(x)$ .

2. On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (-xe^x + e^x) \ln(1+e^x)$  et

$g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$ . Montrer que  $f'(x) = e^x g(x)$ .

### EXERCICE\* 13

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive  $F$  de la fonction numérique  $f$  sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.

1)  $f(x) = e^{1-x}$ ;      2)  $f(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ;      3)  $f(x) = (-2x+5)e^{-x^2+5x-2}$ ; 1)

4)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ;      5)  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ ;      6)  $f(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 3e^x - 1}{e^x}$ .

### EXERCICE 14

Déterminer une primitive de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = e^{2x} + 1$ ;      2)  $f(x) = e^{-x+1}$ ;      3)  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x-2}$ ;      4)  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ ;

5)  $f(x) = \frac{1}{4}e^x$ ;      6)  $f(x) = e^{2x+3}$ ;      7)  $f(x) = xe^{x^2}$ ;      8)  $f(x) = 4xe^{x^2-2}$ ;

9)  $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$ ;      10)  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ;      11)  $f(x) = \frac{e^x}{5e^x + 1}$ ;      12)  $f(x) = xe^{x^2}$

### EXERCICE 15

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 e^{2x}$ . On pose  $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$

Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $G$  soit une primitive de  $g$ .

### EXERCICE 16

On considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2 e^{-x}$

1) Prouver que  $h'(x) = 2xe^{-x} - h(x)$  et  $h''(x) = 2e^{-x} - h(x) - 2h'(x)$

2) En déduire que  $h(x) = -2h'(x) - h''(x) + 2e^{-x}$

3) Déterminer une primitive  $H$  de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 17

Le but de l'exercice est de déterminer les primitives sur  $\mathbb{R}$  de la fonction numérique définie par  $f(x) = x^3 \cdot e^{-x^2}$  en utilisant deux méthodes.

- 1) On pose  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x^2}$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes réelles.
  - a) Calculer la dérivée  $F'(x)$  de  $F$  pour tout  $x$  réel.
  - b) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$  et  $h(x) = x \cdot e^{-x^2}$ .
  - a) Déterminer une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - b) Calculer  $g'(x)$ , puis montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = h(x) - \frac{1}{2}g'(x)$ .
  - c) En déduire les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) Déterminer la primitive  $F_0$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0.

### **PROBLEME\* 1**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (2-x)e^x$  et on désigne par (Cf) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 1 cm.

- 1) Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$  et interpréter graphiquement le résultat.
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a- Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (1-x)e^x$ .  
 b- Etudier le signe de  $f'(x)$  et en déduire le sens de variation de  $f$ .  
 c- Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 4) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (Cf) avec les axes (OI) et (OJ).
- 5) Construire (Cf). On prendra  $e \approx 2,7$ .

### **PROBLEME 2**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x + 2 + e^{-x}$ . On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 1 cm).

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. a) Justifier que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = -\frac{(e^x + 1)}{e^x}$ .  
 b) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.  
 c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $[2; 3]$  une solution unique  $\alpha$ .  
 d) Déterminer un encadrement de  $\alpha$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
3. a) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à (Cf) en  $+\infty$ .  
 b) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite ( $\Delta$ ).  
 c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0
4. Tracer les droites ( $\Delta$ ) ; (T) et la courbe (C).

### **PROBLEME 3**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + e^{-x}$ . On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 2 cm).

- 1 Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. a) Justifier que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$ .  
 b) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 2x$  est asymptote oblique à (Cf) en  $+\infty$ .  
 b) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite ( $\Delta$ ).  
 c) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
4. Tracer les droites ( $\Delta$ ) ; (T) et la courbe (C).

#### **PROBLEME 4**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = e^{2x} - x - 4$ . On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un plan

rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 1 cm).

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique des résultats.
2. a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .  
b) Démontrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = -x - 4$  est une asymptote oblique à ( $C_f$ ) en  $-\infty$ .  
c) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite ( $\Delta$ ).
2. a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .  
b) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.
3. Tracer les droites ( $\Delta$ ) et la courbe (C).

#### **PROBLEME \*5**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (x+2)e^{\frac{x}{2}} + 1$ . On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 1 cm).

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et donner une interprétation graphique du résultat.
2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et démontrer que (C) admet une branche parabolique de direction(OI) en  $-\infty$ .
3. a) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .  
b) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation  
c) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ .  
d) Donner un encadrement de  $\beta$  d'amplitude  $10^{-1}$ .
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2 a pour équation :  
$$y = \frac{-x}{e} + \frac{6}{e} + 1.$$
5. Pour étudier les positions relatives de (C) et (T), on considère la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  
$$h(x) = f(x) + \frac{x}{e} - \frac{6}{e} - 1.$$
  
a) Calculer les dérivées successives  $h'(x)$  et  $h''(x)$  pour tout  $x$  élément de  $\mathbb{R}$ .  
b) Déterminer le signe de  $h''(x)$  et en déduire le tableau de variation de  $h'$ .  
c) En déduire le signe de  $h'(x)$  et le tableau de variation de  $h$ . (*on ne demande pas les limites*).  
d) Calculer  $h(2)$  puis en déduire le signe de  $h(x)$ .  
e) Déduire de ce qui précède les positions relatives de (C) et (T).
6. Construire (C) et (T) dans le même repère ainsi que d'éventuelle asymptote.

#### **PROBLEME 6**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x + 4 - e^x$ . On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans un plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). (Unité 1 cm).

1. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique des résultats.
2. a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et démontrer que la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x + 4$  est une asymptote oblique à ( $C_f$ ) en  $-\infty$ .  
b) Préciser la position relative de (C) par rapport à la droite ( $\Delta$ ).
3. a) Déterminer  $f'(x)$  et étudier son signe.  
b) Etudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variation.  
c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $[1 ; 2]$  une solution unique  $\alpha$ .  
d) Déterminer un encadrement de  $\alpha$  par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
4. Tracer la droite ( $\Delta$ ) et la courbe (C).

### **PROBLEME7(BAC SENEGAL Série L2)**

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 2}$  ..

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$  .  
b) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  puis en déduire que  $(C_f)$  admet trois asymptotes dont on donnera les équations.
- 2) a) Déterminer la dérivée  $f'(x)$  puis étudier son signe.  
b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  avec les axes du repère.
- 4) Construire  $(C_f)$  et ses asymptotes dans le même repère.
- 5) a. Trouver deux nombres réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in D_f$ ,  $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x - 2}$  .  
b. En déduire une primitive  $F$  de  $f$  sur  $] \ln 2 ; +\infty [$ .

### **PROBLEME 8**

On considère la fonction  $f$  de représentation graphique  $(C_f)$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + 1 + \ln x & \text{si } x \in ]0, 1[, \\ f(x) = x - 2 + e^{1-x} & \text{si } x \in ]1 ; +\infty [, \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  en 1.
- 2) Montrer que  $f$  est dérivable à gauche en 1.  $f$  est-elle dérivable en 1.
- 3) Justifier que la droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$ .
- 4) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$
- 5) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 2$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $+\infty$  .
- 6) Déterminer la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- 7) Etudier les variations de  $f$  puis tracer son tableau de variation.
- 8) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point de coordonnées  $(1 ; 0)$ .
- 9) Construire  $(C_f)$ ,  $(T)$  et toutes les asymptotes dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  unité 3 cm.

### **PROBLEME 9**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité 1 cm)

- 1°) Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$   
En déduire que  $(C)$  admet deux asymptotes dont on donnera les équations.
- 2°) Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe. Donner le tableau de variations de  $f$ .
- 3°) Justifier que la courbe  $(C)$  passe par l'origine  $O$  du repère.
- 4°) Donner le coefficient directeur de la tangente à  $(C)$  en  $O$ .
- 5°) Tracer  $(T)$  et  $(C)$  ainsi que ses asymptotes.
- 6°) a) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$  .  
b) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  .

### **PROBLEME 10**

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x - 2x}$  et  $(C)$  sa courbe représentative

dans le plan rapporté au repère orthonormé  $(O, I, J)$ . unité : 2 cm.

- 1°) a. On considère la fonction  $h$  dérivable et définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^x - 2x$ .  
En utilisant le sens de variation de la fonction  $h$ , démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $e^x - 2x > 0$ .  
b. En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .
- 2°) Soit  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = (2 - x)e^x - 2$ .

- a. Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = (1-x)e^x$ .
  - b. Etudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$  dresser son tableau de variation  $g$ .
  - c. Déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .
  - d. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ , appartenant à l'intervalle  $]1,59 ; 1,60[$
  - e. Calculer  $g(0)$  puis démontrer que pour tout  $x$  élément de  $]-\infty, 0[ \cup ]\alpha, +\infty[$   $g(x) < 0$  et pour tout  $x$  élément de  $[0 ; \alpha]$ ,  $g(x) \geq 0$ .
- 3°) a. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en déduire une interprétation graphique.
  - b. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y=1$  est une asymptote horizontale à (C) en  $+\infty$ .
  - c. Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).
- 4°) a. Démontrer que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ .
  - b. En déduire les variations et le tableau de variation de  $f$ .
- 5°) a. Justifier que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ .
  - b. En déduire un encadrement de  $f(\alpha)$  à  $10^{-2}$  près.
- 6°) Construire (D) et (C).
  - 7°) Soit  $t$  un nombre réel supérieur à 1 et  $A(t)$  l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations:  $x=1$  ;  $x=t$  ; la courbe (C) et la droite (D).
    - a. Calculer l'aire  $A(t)$  en  $\text{cm}^2$ .
    - b. Déterminer la limite de  $A(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

## **PROBLEME 11**

### **Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = 4e^x + x^2 - x$

- 1°) Calculer  $g'(x)$ , puis  $g''(x)$ , où  $g''$  désigne la fonction dérivée de  $g'$ .
- 2°) a) Etudier le signe de  $g''(x)$ , pour  $x$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$ .
- b) En déduire le sens de variation de la fonction  $g'$ .
- c) Calculer  $g'(0)$ , puis déterminer le signe de  $g'(x)$  pour  $x$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$ .
- 3°) Montrer que pour  $x$  appartenant à  $[0 ; +\infty[$ ,  $g(x)$  est strictement positif

### **Partie B**

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = 4\ln x + 1 - xe^{-x}$ .

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité 1 cm).

- 1°) a) Etudier la limite de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- b) En déduire que (C) admet une droite asymptote, dont on donnera une équation.

2°) Calculer  $f'(x)$  et vérifier que pour  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{xe^x}$ .

En déduire le sens de variation de  $f$

- 3°) Dresser le tableau des variations de la fonction  $f$ .
- 4°) Calculer la limite en  $+\infty$  de  $\frac{f(x)}{x}$ , puis en déduire une interprétation graphique.
- 5°) Construire la courbe (C)

### **Partie C**

1°) a) Vérifier que la fonction  $U$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $U(x) = x\ln x - x$ , est une primitive de la fonction logarithme népérien.

b) Vérifier que la fonction  $V$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $V(x) = (x+1)e^{-x}$ , est une primitive de la fonction  $v$ , définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $v(x) = -xe^{-x}$ .

c) Déduire des questions précédentes la primitive de la fonction  $f$ , s'annulant pour  $x=1$ .

2°) Calculer la valeur exacte de l'aire, en  $\text{cm}^2$ , de la surface comprise, sur le graphique, entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x=1$  et  $x=e$ .

## **PROBLEME 12**

### **Partie A**

Soit  $g$  la fonction numérique définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -2 + (2-x)e^x$ .

- 1) Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2) On admet que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $g'$  sa dérivée.
  - a) Déterminer  $g'$  et étudier son signe.
  - b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de  $g$ .
- 3) Calculer  $g(0)$ .
- 4) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1,5 ; 1,6[$ .
- 5) Déduire des questions précédentes que  $g$  est négative sur  $]-\infty ; 0[ \cup ]\alpha ; +\infty[$  et positive sur  $]0 ; \alpha[$ .

### **Partie B**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par : pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;  $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$  et  $f(0) = 0$ .

$(C_f)$  désigne la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité : 2cm.

- 1) a) Justifier que  $f$  est continue et dérivable en 0.
  - b) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.
- 2) a) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et donner une interprétation graphique.
  - b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique.
- 3) On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et soit  $f'(x)$  sa dérivée.
  - a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f'(x) = \frac{xg(x)}{(e^x - 1)^2}$ .
  - b) En déduire le signe de  $f'$  et les variations de  $f$ .
  - c) Etablir le tableau de variation de  $f$ .
  - d) Justifier que  $f(\alpha) = 2\alpha - \alpha^2$ .
- 4) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $]-\infty ; 0[$ .
  - a) Justifier que  $h$  est une bijection de  $]-\infty ; 0[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
  - b) Etudier la dérivabilité de  $h^{-1}$ , la réciproque de  $h$  en 0.
- 5) Construire  $(T)$ ,  $(C_f)$  et la représentation graphique  $(\Gamma)$  de  $h^{-1}$  dans le même repère.  
*On donne  $f(\alpha) \approx 0,7$ .*

## **PROBLEME 13**

### **Partie A**

On considère la fonction polynôme  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

1. Déterminer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$  .
2. a) Calculer  $g'(x)$  et déterminer son signe .
  - b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
3. a) Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]3,10 ; 3,11[$ .
  - b) Justifier que  $\forall x \in \mathbb{C}] \infty ; \alpha[$ ,  $g(x) < 0$  et  $\forall x \in ]\alpha ; +\infty [$ ,  $g(x) > 0$ .

### **Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1-x^3)e^{-x}$  et  $(C)$  désigne la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé . Unité : 2 cm .

1. a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et donner une interprétation graphique du résultat.
  - b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  et donner une interprétation graphique des résultats.
2. On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
  - a) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$ .
  - b) Déduire de la partie A le signe de  $f'(x)$  et le sens de variations de la fonction  $f$  .

- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Démontrer que  $f(\alpha) = -3\alpha^2 \cdot e^{-\alpha}$  puis justifier que  $-1,31 < f(\alpha) < -1,28$ .
4. a) Justifier qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est:  $y = -x + 1$ .  
 b) Vérifier que le point de (C) d'abscisse 1,5 est au-dessous du point de (T) de même abscisse.
5. a) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.  
 b) Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (OI).
6. On admet que (C) est au-dessus de (T) sur  $]0; 1[$ . Construire (T) et (C).

### Partie C

Soit  $F$  la fonction numérique définie par  $F(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)e^{-x}$ .

1. Déterminer les nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $F$  soit une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 2. On admet que  $a = 3$ ,  $b = 6$  et  $c = 5$ . Soit un nombre réel  $\lambda$  supérieur ou égal à 1.

On désigne par  $A(\lambda)$  l'aire de la partie du plan limitée par l'axe (OI), la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \lambda$ .

a) Justifier que  $A(\lambda) = -4(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda + 5)e^{-\lambda} + \frac{60}{e}$  cm<sup>2</sup>.

b) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$ .

### PROBLEME\* 14

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  [par :  $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

$(C_f)$  est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité 2cm.

- 1) Justifier que  $f$  est continue en 0.  
 2) Justifier que  $f$  est dérivable en 0 et déterminer  $f'(0)$ .  
 3) Calculer la limite de  $f(x)$  et celle de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $+\infty$  et en donner une interprétation graphique.  
 4) Calculer la limite de  $f(x)$  en  $-\infty$   
 5) Justifier que la droite (D) d'équation  $y = x + 1$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .  
 6) On admet que  $f$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .  
 a. Démontrer que  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[ , f'(x) > 0$ .  
 b. En déduire le sens de variation et le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$   
 7) Soit  $h$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0; +\infty[$  Démontrer que  $h$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.  
 8) Soit  $h^{-1}$ , la bijection réciproque de  $h$  de représentation graphique  $(C')$ .  
 Etudier la dérivabilité de  $h^{-1}$  en 0 et en donner une interprétation graphique.  
 9) Construire (D),  $(C_f)$  et  $(C')$  dans le même repère.

### PROBLEME 15

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x}{1 + xe^x}$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$

- 1 Soit  $\psi$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $\psi(x) = 1 + xe^x$   
 a) Etudier les variations de  $\psi$  puis dresser son tableau de variation. (Pas de calcul de limite).  
 b) Démontrer que pour tout nombre réel  $\psi(x) > 0$   
 c) En déduire l'ensemble de définition de  $f$ .  
 2. Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $g(x) = 1 - x^2 e^x$

- a) Calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$   
 b) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation  
 c) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  comprise entre 0,7 et 0,71.  
 d) En déduire que  $\forall x \in ]-\infty; \alpha[$ ,  $g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$ ,  $g(x) < 0$
- 3 On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- a) Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+xe^x)^2}$ .  
 b) Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .  
 c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 4 Soit (D) la droite d'équation  $y = x$ .
- a) Démontrer que (D) est asymptote à (C) en  $-\infty$   
 b) Etudier les positions de (C) par rapport à (D) (*on pourra utiliser la question 1.1.b*)  
 c) Démontrer que la droite (D) est tangente à (C) au point d'abscisse 0.  
 d) Tracer (D) et (C) On prendra  $OI = 2 \text{ cm}$  ;  $OJ = 5 \text{ cm}$  et  $\alpha = 0,7$ .

## **PROBLEME 16**

### **Partie 1**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} g(x) = xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ g(x) = \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C_g)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité = 2 cm.

- 1) Montrer que  $g$  est continue en 0
- 2) a) Etudier la dérivabilité de  $g$  en 0. En déduire les équations des demi-tangentes à  $(C_g)$  au point 0.  
 b) En utilisant les résultats de la partie 1, étudier la position relative de  $(C_g)$  et de la droite (D) d'équation  $y = -x$  sur  $]-\infty; 0[$ .  
 c) Etudier la position de  $(C_g)$  et de la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x$  sur l'intervalle  $]-\infty; 0]$ .
- 3) a) Calculer  $g'(x)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ .  
 b) Montrer que  $g$  est croissante uniquement sur l'intervalle  $[0; 1]$
- 4) a) Calculer les limites de  $g$  et dresser son tableau de variations.  
 b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$ . Interpréter ce résultat.  
 c) Préciser les asymptotes éventuelles à  $(C_g)$
- 5 Tracer soigneusement  $(C_g)$ .

### **Partie II**

Soit  $f$  la restriction de  $g$  à l'intervalle  $]-\infty; 0]$ .

- 1) a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]-\infty; 0]$  sur un intervalle K que l'on précisera.  
 b) Soit  $f^{-1}$  sa bijection réciproque, de représentation graphique (C).  
 Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  à partir de celui de  $g$ .
- 2) Sans expliciter  $f^{-1}(x)$ , Calculer  $(f^{-1})'(\ln 2)$ .
- 3) Soit  $x$  un nombre réel positif ou nul.  
 a) Montrer que  $f^{-1}(x) = 1 - e^x$ .  
 b) Calculer  $(f^{-1})'(x)$  et vérifier le résultat de la question 2).
- 4) Tracer (C) sur le même graphique que  $(C_g)$ .

**PROBLEME 17(Concours de CAFOP 2012)**

le plan est muni d' un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique :1cm).

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$  et définie par :  $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ .

**PARTIE A**

On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  sur  $]-\infty; 1[$ .

1. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ .
2. Justifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .
3. Interpréter graphiquement chacun des résultats trouvés aux question 1 et 2.
4. a) Justifier que  $\forall x \in ]-\infty; 1[, f'(x) = \frac{(2-x)e^x}{(1-x)^2}$ .
  - b) Démontrer que  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 1[$ .
  - c) En déduire le tableau de variation de  $f$  sur  $]-\infty; 1[$ .
5. Soit A le point d'intersection de (C) avec la droite (OJ).
  - a) Déterminer les coordonnées du point A.
  - b) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
6. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

$x$	-3	-2	-1	-0,75	-0,50	0,50	0,75
Arrondi d'ordre 2 de $f(x)$							

7. Construire sur  $]-\infty; 1[$ , la courbe (C) et la droite (T) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J).

**PARTIE B**

On désigne par (C') la courbe représentative de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ .

1. a) Justifier que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ .
  - b) Interpréter graphiquement ce résultat.
  - c) Justifier que  $f(x) = \frac{e^x}{x} \times \frac{1}{\frac{1}{x}-1}$ .
  - d) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .
2. a) Etudier les variations de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ . (On admet que  $\forall x \in ]1; +\infty[, f'(x) = \frac{(2-x)e^x}{(1-x)^2}$ ).
  - b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $]1; +\infty[$ .
3. Construire (C') dans le même repère que (C).

On utilisera le tableau ci-dessous :

$x$	1,5	2	2,5	3	3,5
$f(x)$	-8,9	-7,4	-8,1	-10	-12,2

**PROBLEME 18(BAC SENEGAL Série L2)**

**PARTIE A**

- 1) Etudier sur  $\mathbb{R}$  le signe de  $4e^{2x} - 5e^x + 1$ .
- 2) Soit  $\varphi$  la fonction définie par  $\varphi(x) = \ln x - 2\sqrt{x} + 2$ .
  - a) Déterminer son domaine de définition  $D\varphi$  et déterminer ses limites aux bornes de  $D\varphi$ .
  - b) Etudier ses variations et dresser son tableau de variation.
  - c) En déduire son signe.

## **PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x + \frac{e^x}{2e^x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = 1 - x + \sqrt{x} \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Unité : 2cm.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition  $D_f$  de  $f$ .  
b) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 2) a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$ .  
b) Étudier la position de  $(C_f)$  et de la droite  $(D)$  sur l'intervalle  $] -\infty ; 0 ]$ .
- 3) a) Étudier la continuité de  $f$  en 0.
- 4) Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0 et en donner une interprétation graphique.
- 5) Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 6) Construire  $(C_f)$  et  $(D)$  dans le même repère.

# CHAPITRE 5 : CALCUL INTEGRAL

## EXERCICE\* 1

Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_2^{-1} 5dx \quad ; \quad J = \int_2^{-1} (3x^2 - 2)dx \quad ; \quad K = \int_{-1}^{-2} \frac{1}{t^3} dt \quad ; \quad L = \int_1^{\frac{1}{2}} (2t + 2 - \frac{1}{t})dt \quad ;$$

$$M = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x e^{\sin x} dx \quad ; \quad N = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad ; \quad P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x - \frac{\pi}{2})dx \quad ; \quad Q = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx .$$

## EXERCICE 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{x+1}} \quad ; \quad J = \int_0^2 (\frac{1}{2}x - 5)dx \quad ; \quad K = \int_2^5 \frac{1}{(1-x)^2} dx \quad ; \quad L = \int_{-1}^1 (\frac{4x-2}{(x^2-x+1)^2})dx \quad ;$$

$$M = \int_0^{\pi} \cos^2 x dx \quad ; \quad N = \int_{-1}^0 \frac{2t}{t^2+1} dt \quad ; \quad O = \int_1^2 \frac{3-x}{x^2-6x+1} dx \quad ; \quad P = \int_1^2 \frac{x^2-x+3}{x} dx \quad ;$$

$$Q = \int_1^1 \frac{1}{t^2} dt \quad ; \quad R = \int_0^{\pi} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad ; \quad S = \int_{-3}^0 (-3x^2 + x) dx \quad ; \quad T = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1} dx \quad ;$$

$$U = \int_{\ln 3}^0 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad ; \quad V = \int_1^e \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad ; \quad W = \int_{e^2}^e \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

## EXERCICE\* 3

En effectuant une ou deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{\pi} x \cos x dx \quad ; \quad 2) \int_{-1}^1 (2x-3)e^x dx \quad ; \quad 3) \int_0^{\pi} (e^x \cos x) dx \quad ; \quad 4) \int_e^1 3x \ln x dx \quad ; \quad 5) \int_0^1 (x+2)^2 e^{-x} dx \quad .$$

## EXERCICE 4

En effectuant une ou deux intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$1) \int_1^0 (3x^2 e^x) dx \quad ; \quad 2) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx \quad ; \quad 3) \int_e^x \ln t dt \quad ; \quad 4) \int_{-\pi}^0 x^2 \sin(2x) dx \quad ; \quad 5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx$$

## EXERCICE 5

Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$  et  $I = \int_0^1 (h(x)) dx$ .

1) Démontrer que la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $[0;1]$  par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$  est  $h$ .

2) Calculer  $I$ .

## EXERCICE 6

On appelle valeur moyenne d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a ; b]$ , le réel  $\alpha$  défini par :

$$\alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \text{ lorsque } f \text{ est continue sur } [a ; b]. \text{ Soit } f \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par :}$$

$$f(x) = \frac{-6}{(x+1)^2} . \text{ Calculer valeur moyenne de } f \text{ sur } [0 ; 1],$$

## EXERCICE 7

1. Démontrer que pour tout  $x$  élément de  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ ,  $\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+\frac{\pi^2}{4}}$ .

2. En déduire un encadrement de  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ .

### **EXERCICE\* 8**

On pose  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \cos^2 x dx$  et  $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin^2 x dx$

- 1°) Calculer  $I + J$ .
- 2°) Calculer  $I - J$  à l'aide d'une intégration par parties.
- 3°) En déduire les valeurs de  $I$  et  $J$ .

### **EXERCICE 9**

1°) Calculer  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$  et  $\int_1^e \frac{1}{x+1} dx$

2°) Démontrer que pour tout  $x > 0$  on a :  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

3°) En déduire la valeur de  $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx$ .

### **EXERCICE 10**

1°) Justifier que pour tout réel  $x$  :  $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = e^x - \frac{e^x}{1+e^x}$

2°) Calculer  $\int_0^1 e^x dx$  et  $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$  ; 3°) En déduire  $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx$ .

### **EXERCICE 11**

1) Démontrer que pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$ .

2) En déduire que pour tout  $x \geq 0$  ;  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

### **EXERCICE 12**

1) Déterminer les nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  appartenant à  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ;  $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$

2) calculer l'intégrale  $A = \int_2^1 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$ .

3) A l'aide d'une intégration par partie calculer l'intégrale  $B = \int_2^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ .

### **EXERCICE\* 13**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2+x}$  et (Cf) sa courbe représentative

dans un repère orthogonal (O, I, J). (Unité :  $OI = 2$  cm et  $OJ = 4$  cm).

On se propose de trouver un encadrement de l'aire  $A$  (en  $\text{cm}^2$ ) de la partie du plan limitée par (Cf) ; (OI) et et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$ .

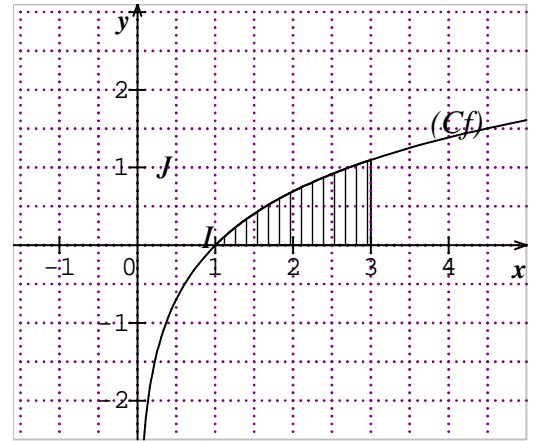
1) Démontrer que pour tout  $x \geq 1$  :  $\frac{\ln x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$ .

2) Calculer  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$  et  $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$ .

3) En déduire un encadrement de  $K = \int_1^2 f(x) dx$  puis un encadrement de  $A$  en  $\text{cm}^2$ .

**EXERCICE 14**

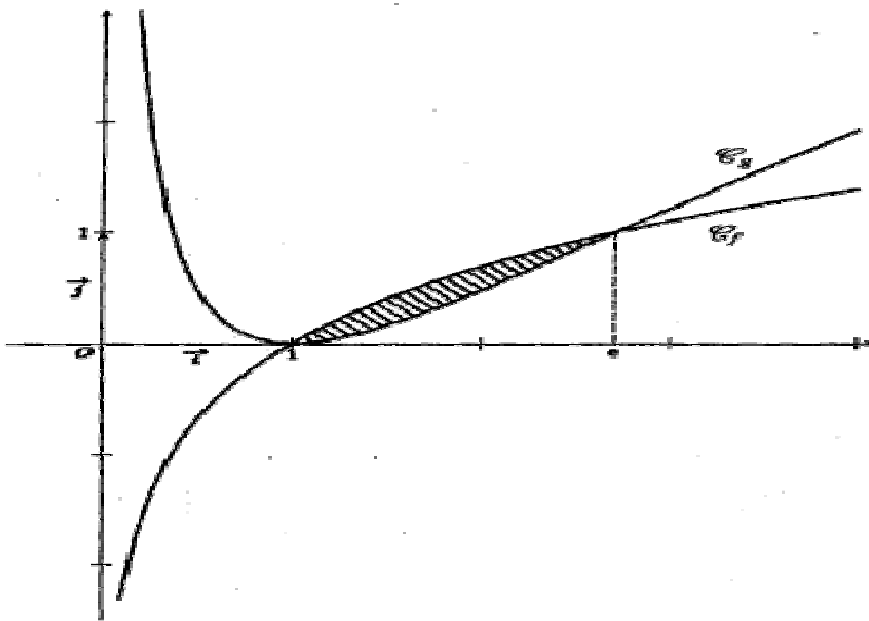
La courbe  $(C_f)$  donnée ci-dessous représente dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$ . L'unité est le cm. On cherche à déterminer l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan hachurée.



- 1) Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien.
- 2) En déduire  $A$ .

**EXERCICE\* 15**

Les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal  $(O, I, J)$ , les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \ln x$  et  $g(x) = (\ln x)^2$ .



. On cherche à déterminer l'aire  $A$  (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée.

On note  $I = \int_1^e (\ln x) dx$  et  $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$ .

- a) Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $F(x) = x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien.
- b) En déduire  $I$ .
- c) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que  $J = e - 2I$  et en déduire  $J$ .
- d) Donner la valeur de  $A$ .

**EXERCICE 16**

On donne la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$ .

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, I, J)$  unité 1cm.

Soit  $A$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par  $(C)$ ;  $(OI)$  et les droites d'équations  $x = e^{-1}$  et  $x = 2$ . On admet que  $(C)$  est au dessus de  $(OI)$  sur  $]0; +\infty[$ . Calculer  $A$ .

### **EXERCICE 17**

On donne la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x}{3} - 1 + \frac{\ln x}{x^2}$  et la droite (D) d'équation  $y = \frac{2}{3}x - 1$ . On

désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (O, I, J) unité 2cm.

$\alpha$  est un nombre réel strictement supérieur à 1.  $A(\alpha)$  désigne

l'aire de la partie du plan limitée par : (D), (C) et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .

On admet que (C) est au dessus de (D) sur  $]1; +\infty[$ .

1°) A l'aide d'une intégration par partie, calculer  $A(\alpha)$ .

2°) Déterminer la limite de  $A(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers  $+\infty$ .

### **EXERCICE 18**

On donne la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$  et la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = 2x - 1$ . On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (O, I, J) unité 2cm.

1°) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale  $I = \int_0^\lambda xe^{-x} dx$  où  $\lambda$  désigne un nombre réel strictement positif.

2°) On admet que (C) est au-dessous de ( $\Delta$ ) sur  $]0; +\infty[$ . Déterminer l'aire  $A(\lambda)$  en unité d'aire puis en  $cm^2$  de la partie du plan limitée par : ( $\Delta$ ), (C) et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

3°) Quelle est la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$  ?

### **EXERCICE 19**

On donne la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{2x - 2} \text{ et la droite (D) d'équation } y = \frac{1}{2}x.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (O, I, J) unité 1cm.

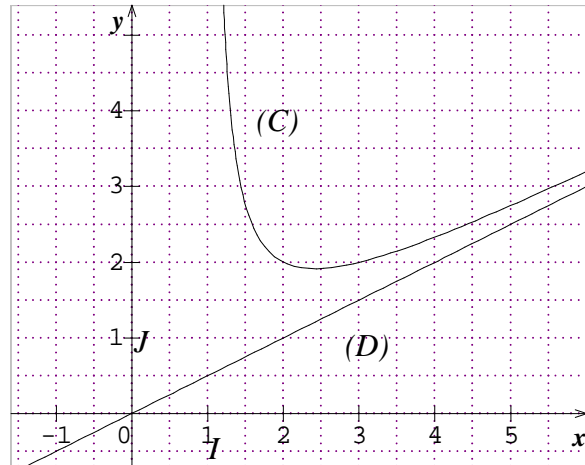
Soit  $A$  l'aire en  $cm^2$  de la partie limitée par (C) ; (D) et les droites d'équations  $x = 2$  et  $x = 4$ .

1) Hachurer  $A$ .

2) Justifier que pour tout nombre réel  $x$  de  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x-1}.$$

3) calculer  $A$ .



# CHAPITRE 6 : SUITES NUMERIQUES

## EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Représenter sur la droite (OI), et sans les calculer, les 4 premiers termes de chacune des suites numériques ci-dessous.

- 1°)  $U_0 = 7$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n$  ;      2°)  $V_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; V_{n+1} = -\frac{2}{3}V_n + 5$   
 3°)  $t_0 = 3$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; t_{n+1} = \frac{1}{t_n}$  ;      4°)  $W_0 = 8$  et  $\forall n \in \mathbb{N}; W_{n+1} = \ln(W_n)$ .

## EXERCICE 2

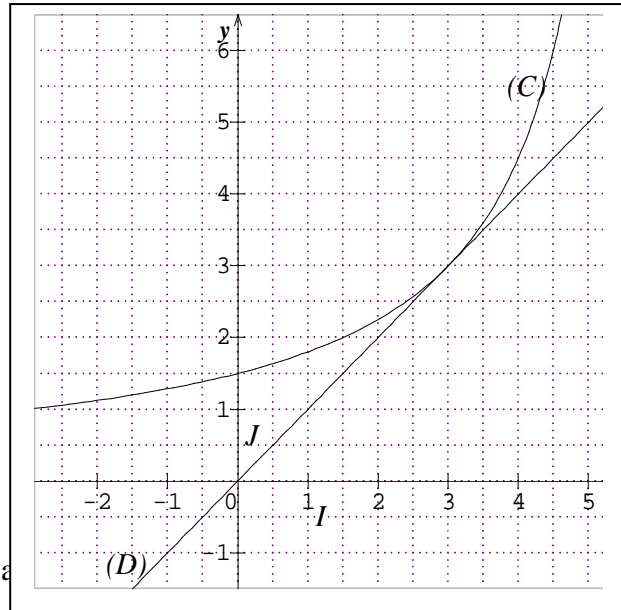
On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -3 ; 5[$

par  $f(x) = \frac{9}{6-x}$  et la suite  $(u_n)$  définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

La courbe représentative de la fonction  $f$  est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite (D) d'équation  $y = x$ . Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

Représenter sur la droite (OI), et sans les calculer, les 4 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .



## EXERCICE\* 3

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation

- a)  $U_n = \frac{n^2 + 1}{n + 1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ );    b)  $U_n = \frac{2^n}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ );    c)  $U_n = \frac{2}{2^{2n}}$  ( $n \in \mathbb{N}$ );    d)  $U_n = e^n - n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

## EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

- e)  $U_n = 2\ln(1+n) - \frac{n^2}{2}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ );    f)  $U_n = \frac{2n-1}{3n-2}$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ );    g)  $U_n = n^2 - n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ).

## EXERCICE\* 5

Montrer que la suite  $(U_n)$  définie par  $U_0 = \frac{1}{2}$  et la relation  $U_{n+1} = -U_n^2 + U_n$ , est décroissante.

## EXERCICE\* 6

On considère les suites  $(U_n)$ ;  $(V_n)$  et  $(W_n)$  définies par :

- a)  $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases}$  ;      b)  $\begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = \sqrt{2V_n + 35} \end{cases}$  ;      c)  $\begin{cases} W_0 = 10 \\ W_{n+1} = \frac{1 + W_n^2}{2W_n} \end{cases}$ .

Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq -\frac{1}{2}$  ;       $V_n = 7$  ;       $W_n > 1$ .

### **EXERCICE 7**

Démontrer que la suite  $(U_n)$  définie par  $U_n = \frac{2n+1}{n+2}$  est bornée par 0 et 2.

### **EXERCICE 8**

Démontrer que la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = \frac{2 + \sin n}{3 - \sin n}$  est bornée.

(On remarquera que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$ ).

### **EXERCICE\* 9**

Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$  dans chacun des cas suivants.

- a)  $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  ;                      b)  $U_n = \frac{2n^2 - 1}{(2n+1)^2}$  ;                      c)  $U_n = n - \sqrt{4n^2 + 1}$   
d)  $U_n = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$  ;                      e)  $U_n = \sin(n\pi)$  ;                      f)  $U_n = n^2 - n + 2$  ;                      g)  $U_n = (-1)^n$ .

### **EXERCICE 10**

Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$  dans chacun des cas suivants.

- a)  $U_n = n - \frac{1}{n+1}$  ;                      b)  $U_n = (1-n) \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$  ;                      c)  $U_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$  ;                      d)  $U_n = n - \sqrt{1+n^4}$   
e)  $U_n = \frac{6}{5} \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$  ;                      f)  $U_n = \frac{e^{n^2} - 1}{n^3}$  ;                      g)  $U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{e^n}\right)^n$  ;                      h)  $U_n = (2 \ln 2)^n$ .

### **EXERCICE 11**

On considère la suite définie par  $U_0 = 4$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{4}$

- a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = 1 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ .  
b) En déduire que la suite  $(U_n)$  est bornée.

### **EXERCICE \*12**

$U$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$ .

1. Démontrer par récurrence que  $U$  est bornée par -2 et 1.
2. Démontrer que  $U$  est décroissante. Que peut-on dire de la convergence de  $U$  ?

### **EXERCICE 13**

$U$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $1 < U_n < 2$
2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(U_{n+1})^2 \geq (U_n)^2$ .
2. En déduire que  $U$  est croissante. Que peut-on dire de la convergence de  $U$  ?

### **EXERCICE 14**

$U$  est la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1$ .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = -\frac{1}{2^n} + 2$ .
2. En déduire que  $U$  converge et préciser sa limite.

### **EXERCICE 15**

1°) Déterminer la raison  $r$  et le terme général de la suite arithmétique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sachant que :

$$U_3 = \frac{11}{4} \text{ et } U_6 = 5.$$

Calculer la somme  $S$  des 15 premiers termes de la suite  $(U_n)$ .

2°) Déterminer la raison  $q$  et le premier terme  $V_0$  de la suite géométrique  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sachant que :

$$V_2 = \frac{-5}{4} \text{ et } V_5 = \frac{-5}{32}.$$

Exprimer la somme  $S_n$  des  $n$  premiers termes de la suite  $(U_n)$  en fonction de  $n$ .

### **EXERCICE 16**

Soit  $(U_n)$  la suite définie par :  $U_0 = 1$  ;  $U_1 = 4$  et  $U_{n+1} = 2U_n - U_{n-1}$ .

1) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2) Exprimer en fonction de  $n$  la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $(U_n)$ .

### **EXERCICE 17**

Soit  $(U_n)$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases} (n \in \mathbb{N})$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $U_n \leq -1$

2) Démontrer que  $(U_n)$  est décroissante.

3) Soit la suite  $(V_n)$  définie par :  $V_n = U_n + 1$

a) Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison .

b) En déduire  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

c) Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .

### **EXERCICE 18**

On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases}$$

1°) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n > 1$ .

b) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante ;

c) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.

2°) On considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $V_n = \frac{1}{U_n - 1}$

a) Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme  $V_0$ .

b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

3°) Calculer la somme  $V_0 + V_1 + \dots + V_n$  en fonction de  $n$ .

### EXERCICE 19

I On considère la suite numérique U définie par :

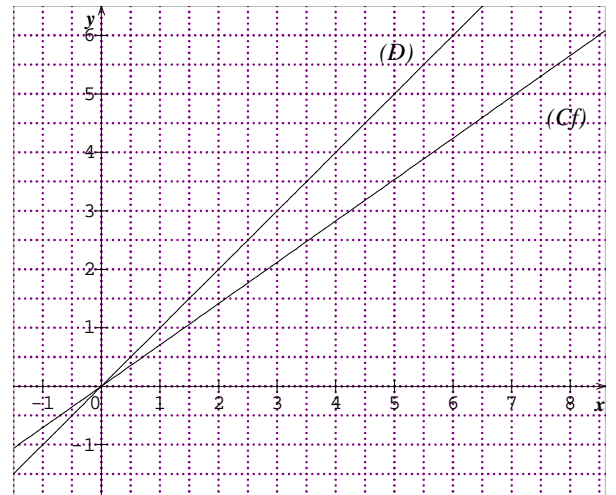
$$U_0 = 6 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_n.$$

(Cf) est la représentation graphique de la fonction

numérique f définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} x$ . (D) est la

droite d'équation :  $y = x$ . (Voir ci-contre).

Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite U.



II Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Unité : 1cm. On considère les points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  d'affixes respectives  $6; 3+3i$  et  $3i$ .

Soit S la similitude directe qui transforme  $A_1$  en  $A_2$  et  $A_2$  en  $A_3$ .

1) Justifier que l'écriture complexe de S est :  $z' = \frac{1+i}{2} z$ .

2) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

3) On considère la suite de points  $(A_n)$  définie par  $A_{n+1} = S(A_n)$ .

Placer les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , et  $A_5$ .

4) On considère la suite numérique  $(d_n)$  définie par :  $d_n = |z_{n+1} - z_n|$ ,  $z_n$  étant l'affixe de  $A_n$ .

a) Démontrer que  $(d_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme  $d_1$ .

b) Exprimer  $d_n$  en fonction de n et étudier la convergence de la suite  $(d_n)$ .

c) Calculer la longueur  $L_n$  de la ligne brisée  $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ .

### EXERCICE \*20

Soit  $(U_n)$  et  $(V_n)$  deux suites numériques définies sur  $\mathbb{N}$  par :

$$U_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n, U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \text{ et } V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$$

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,  $U_n \neq 1$ .

2) Démontrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

3) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de n.

4) Déterminer la limite de  $(V_n)$  et celle de  $(U_n)$ .

### EXERCICE 21

Soit U la suite numérique définie par :  $U_1 = 6$  et  $U_{n+1} = \frac{U_n + 16}{5}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

a) Démontrer que la suite V définie par  $V_n = U_n - 4$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de n.

c) Calculer les sommes ci-dessous en fonction de n.

$$S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n; \quad T_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

### EXERCICE 22

On considère la suite U définie par :  $U_0 = e$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2}{e} U_n + e^{-n}$ .

1) Calculer  $U_1$  et démontrer que  $U_2 = \frac{7}{e}$

2) On considère la suite V définie par :  $V_n = \frac{1}{e} U_n + e^{-n}$

a) Démontrer que V est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

- b) Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
 c) La suite  $U$  est-elle convergente ? Justifier votre réponse.  
 3) On pose :  $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$  et  $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ . Calculer  $S_n$  et  $T_n$  en fonction de  $n$ .

### **EXERCICE 23**

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par  $a_0=1$ ,  $b_0=8$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4}.$$

- 1) Calculer  $a_1$  et  $b_1$
- 2) Soit la suite  $(d_n)$  définie par :  $d_n = b_n - a_n$ 
  - a) Démontrer que la suite  $(d_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison .
  - b) En déduire une expression de  $d_n$  en fonction de  $n$  puis en déduire que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $d_n \geq 0$ .
  - c) Calculer la limite de  $(d_n)$ .
- 3) a) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $U_n \leq -1$ ,  $a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ , et  $b_{n+1} - b_n = \frac{-d_n}{4}$ .
  - b) En déduire le sens de variation des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .
  - c) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_0 < a_n < b_n < b_0$ .
  - d) En déduire que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont convergentes.
- 4) a) Déduire de la question 3) a) que  $\forall n \geq 1$ ,  $a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \dots + d_n)$ .
  - b) En déduire les limites des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

### **EXERCICE 24**

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_0 = \frac{2}{3}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n+2}{2\sqrt{2}}$

- 1) Calculer  $U_1$  et  $U_2$
- 2) Soit  $(V_n)$  la suite définie par :  $V_n = U_n \sqrt{2} - n$ 
  - a) Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison .
  - b) En déduire  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - c) Etudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .
- 3) Soit  $S_{0,n}$  la somme  $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ .  
 Exprimer  $S_{0,n}$  en fonction de  $n$  puis calculer sa limite.

### **EXERCICE 25**

Soit  $\theta$  un nombre réel tel que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  et  $(U_n)$  la suite numérique définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 2 \cos \theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de  $\theta$ . ( on rappelle que  $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ ).
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $U_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
- 3) Soit  $(V_n)$  la suite définie par :  $V_n = \frac{\theta}{2^n}$ .
  - a) Déterminer la limite de la suite  $(V_n)$ .
  - b) En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente ; quelle est sa limite ?

### **EXERCICE 26**

On considère les suites numériques  $U$  et  $V$  définies par :

$$U_0 = -1 \text{ Et } \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{U_n + 6}{U_n + 2} \text{ et } V_n = \frac{2 - U_n}{3 + U_n}$$

1. a) Calculer les quatre premiers termes de la suite  $U$
- b) Justifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = 1 + \frac{4}{U_n + 2}$ .
- c) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq U_n \leq 5$ .
- d) Etudier le sens de variation de la suite  $U$ .
- e) Que peut-on dire de la convergence de  $U$  ?
2. a) Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
- b) En déduire  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- c) En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

### **EXERCICE 27 (concours de CAFOP 2012)**

Monsieur Koudou, fondateur d'une école secondaire a recruté des enseignants. Il leur propose un salaire de 750 000 F CFA. Après quelques mois de travail, une grève des enseignants pour la revalorisation de leur salaire amène le fondateur à faire deux propositions de contrat au choix afin de relever les salaires.

1. Le premier contrat stipule que les enseignants auront chaque année une augmentation de 4% du salaire de l'année précédente.
  - a) On pose  $U_0 = 750\,000$  F CFA. Justifier que le salaire annuel  $U_1$  d'un enseignant au bout de la deuxième année est 780 000 CFA.
  - b) Calculer le salaire  $U_2$  d'un enseignant au bout de la troisième année.
  - c) Justifier que le salaire annuel  $U_n$  en francs CFA d'un enseignant au bout de la  $(n+1)^{\text{ième}}$  année est  $U_n = 750\,000 (1,04)^n$ .
  - d) Calculer le salaire annuel d'un enseignant au bout de la 9<sup>ème</sup> année.
2. Le deuxième contrat consiste à faire chaque année une augmentation forfaitaire de 30 000 F CFA. du salaire de l'année précédente.
  - a) On pose  $V_0 = 750\,000$  F CFA. Justifier que le salaire annuel  $V_1$  d'un enseignant au bout de la deuxième année est 780 000 CFA.
  - b) Justifier que le salaire annuel  $V_n$  en francs CFA d'un enseignant au bout de la  $(n+1)^{\text{ième}}$  année est  $V_n = 750\,000 + 30\,000n$ .
3. Monsieur Yao, professeur d'anglais, veut s'engager pour 9 ans.
  - a) Calculer le cumul de son salaire sur les 9 ans s'il choisit le premier contrat.
  - b) Calculer le cumul de son salaire sur les 9 ans s'il choisit le deuxième contrat.
  - c) Monsieur Yao hésite à faire un choix entre les deux contrats. Aidez-le à choisir le contrat le plus avantageux.

### **EXERCICE\* 28 BAC SENEGAL SERIE L2**

Le prix d'un livre est de 2000 F CFA en l'an 2010 ; ce prix augmente de 8% chaque année. Soit  $P_0 = 2000$  F le prix en l'an 2010 et  $P_n$  le prix de ce livre en 2010 +  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). (Les résultats seront arrondis à l'ordre 0).

1. Calculer les prix  $P_1$  et  $P_2$  de ce livre en 2011 et 2012.
2. a) Exprimer  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$ . En déduire la nature de la suite  $(P_n)$ .
- b) Exprimer  $P_n$  en fonction de  $n$ .
3. Un parent d'élève décide d'acheter un exemplaire de ce livre chaque année. Quelle somme dépenserait-il de 2010 à 2020 ?
4. A partir de quelle année le prix de ce livre dépasserait-il 10 000 F CFA ?

## EXERCICE 29 BAC FRANCE 2012 SERIE S

### Partie A

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

1. déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .

Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur  $[1, +\infty[$ ,

### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier strictement positif par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_{n+1} - u_n = f(n)$  où  $f$  est la fonction définie dans la partie A. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. a. Soit  $k$  un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité  $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$ .

En déduire que  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ .

Démontrer l'inégalité  $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  (1).

b. Ecrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement  $k$  par  $1, 2, \dots, n$  et démontrer que

pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ .

c. En déduire que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

3. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

# CHAPITRE 7 :EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## EXERCICE\* 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)  $f' + 3f = 0$  ;      2)  $2y' = 3y$  ;      3)  $f'' = 0$  ;      4)  $y'' - 4y = 0$  ;      5)  $f'' = -3f$  .

## EXERCICE 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)  $4f' - f = 0$  ;    2)  $y' - 2y = 0$  ;    3)  $f' = f$  ;    4)  $9y'' = -\pi y$  ;    5)  $f'' = -25f$  ;    6)  $f'' = f$

## EXERCICE 3

$f$  étant une fonction numérique inconnue, résoudre les équations différentielles suivantes et préciser dans chaque cas la solution particulière vérifiant les conditions initiales données.

1)  $f' = 3f$  ;     $f(0) = 4$  ;      2)  $3f' + 7f = 0$  ;     $f(2) = -5$  .

3)  $f'' = 0$  ;     $f(0) = 1$  et  $f(-1) = 2$  ;      4)  $9f'' + 64f = 0$  ;     $f(\pi) = 0$  et  $f'(2\pi) = -\frac{1}{3}$  .

## EXERCICE 4

On donne les deux équations :  $E_1 : y' = 3y$  et  $E_2 : y' = 2y$

1°) Donner la solution générale de l'équation différentielle  $E_1$  et celle de l'équation différentielle  $E_2$ .

2°) Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  où  $f_1$  désigne une solution de l'équation différentielle  $E_1$  et  $f_2$  désigne une solution de l'équation différentielle  $E_2$ .

Déterminer  $f(x)$  sachant que  $f(0) = -2$  et  $f'(0) = -3$ .

## EXERCICE \*5

On se propose de chercher les fonctions dérivables  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , solution de l'équation différentielle

$$(E) : y' + 2y = 3e^{-3x} .$$

1) Démontrer que la fonction numérique  $g$  définie par  $g(x) = -3e^{-3x}$  est solution de  $(E)$ .

2) Soit  $(E')$  l'équation différentielle  $y' + 2y = 0$

Résoudre  $(E')$

3) a) Démontrer qu'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E')$ .

b) En déduire les solutions de  $(E)$ .

## EXERCICE6

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E') : f' = f$ .

2. On considère l'équation différentielle  $(E) : f'(x) - f(x) = -x$ .

a) Déterminer une fonction polynôme  $g$  de degré un solution de  $(E)$ .

b) Démontrer qu'une fonction  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E')$ .

c) En déduire les solutions de  $(E)$ .

3. Déterminer la solution  $f$  de l'équation différentielle  $(E)$  telle que  $f'(0) = 2$ .

## EXERCICE 7

On se propose de trouver les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telles que pour tout nombre réel  $x$  :

$$(E) : f'(x) + 3f(x) = x^2 - 1 .$$

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E')$   $f' + 3f = 0$ .
2. Déterminer une fonction polynôme  $g$  du second degré solution de  $(E)$ .
3. a) Démontrer qu'une fonction  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E')$ .  
 b) En déduire les solutions de  $(E)$ .  
 c) Déterminer la solution  $h$  de l'équation différentielle  $(E)$  qui s'annule en 0.

### **EXERCICE 8**

On se propose de trouver les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  telles que pour tout nombre réel  $x$  :

$(E)$  :  $f'(x) - 2f(x) = 5\sin(x)$ .

1. Résoudre l'équation différentielle  $(F)$  :  $f' - 2f = 0$ .
2. Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$  soit solution de  $(E)$ .
3. a) Démontrer qu'une fonction  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - g$  est solution de  $(E')$ .  
 b) En déduire les solutions de  $(E)$ .  
 c) Déterminer la solution  $h$  de l'équation différentielle  $(E)$  qui s'annule en 0.

### **EXERCICE\* 9**

On considère les équations différentielles  $(E)$  :  $f'' + 4f = 3\cos x$  et  $(E')$  :  $f'' + 4f = 0$ ,  
 où  $f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Résoudre l'équation différentielle  $(E')$  :  $f'' + 4f = 0$ .
2. Vérifier que la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \cos(x)$  est solution de  $(E)$ .
3. a)  $h$  étant une solution de  $(E')$ , démontrer que toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = h(x) + g(x)$  est solution de  $(E)$ .  
 b) En déduire la solution  $f$  de  $(E)$  telle que  $f(\frac{\pi}{2}) = 0$  et  $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$ .

### **EXERCICE 10**

Après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie (*taux de glucose sanguin*) décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi  $g' + kg = 0$  où  $g$  désigne la fonction glycémique dépendant du temps  $t$  ( $t \geq 0$ ) et  $k$  une constante strictement positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.

1. Déterminer l'expression de  $g(t)$  à l'instant  $t$  sachant que  $g(0) = 2$ .
2. Etudier les variations de  $g$  et donner l'allure de sa représentation graphique.

### **EXERCICE 11**

Soient les équations différentielles  $(E_0)$  :  $y' + y = 0$  et  $(E)$  :  $y' + y = e^{-x}\cos x$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $h$  soit solution de  $(E)$ , avec  $h(x) = (a\cos x + b\sin x)e^{-x}$ .
- 2) Démontrer qu'une fonction  $f$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $f - h$  est solution de  $(E_0)$ .
- 3) Résoudre  $(E_0)$ .
- 4) En déduire les solutions de  $(E)$ .
- 5) Déterminer la solution  $g$  de l'équation différentielle  $(E)$  qui s'annule en 0.

## CHAPITRE 8 :            PROBABILITES

### EXERCICE 1

Les 6 lettres du mot « MANQUE » sont inscrits sur 6 cartes portant chacune une lettre. Tout alignement de 6 de ces cartes est appelé anagramme du mot « MANQUE » qu'il est une signification ou non.

- 1) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot « MANQUE » ?
- 2) Combien y en a-t-il si ces mots doivent commencer par M ?
- 3) Combien y en a-t-il si ces mots doivent commencer par M et se terminer par E ?
- 4) Combien y en a-t-il si ces mots doivent commencer par M une consonne ?

### EXERCICE 2

On considère une classe de terminale D formée 30 élèves dont 20 garçons et 10 filles dans un lycée. Cette classe désire former une délégation de cinq élèves pour rencontrer le proviseur.

- 1) Déterminer le nombre de différentes délégations au total qu'on peut former.
- 2) Déterminer le nombre de différentes délégations possibles composées de 3 garçons et 2 filles.
- 3) Déterminer le nombre de différentes délégations possibles composées uniquement de filles.
- 4) Déterminer le nombre de différentes délégations possibles contenant au moins une fille.

### EXERCICE 3

On lance 3 fois de suite un dé numéroté de 1 à 6. Le premier indique les centaines le deuxième indique les dizaines et le troisième indique les unités. On obtient ainsi un nombre de 3 chiffres.

- 1) Combien de nombres de 3 chiffres peut-on avoir au total ?
- 2) Combien de ces nombres se terminant par 6 peut-on avoir au total ?
- 2) Combien de ces nombres qui sont inférieurs à 300 peut-on avoir au total ?

### EXERCICE 4

Résoudre dans  $N$  :  $C_n^2 = 66$ .

### EXERCICE 5

Un numéro de téléphone est composé de huit chiffres. Exemple : 09886211.

- 1) Combien de numéros de téléphone au total peut-on avoir ?
- 2) Parmi ces numéros, combien y en a-t-il qui sont:
  - a) composés de chiffres distincts ?
  - b) contiennent au moins une fois le chiffre « 5 » ?

### EXERCICE\* 6

On utilise un dé pipé, à 6 faces numérotées de 1 à 6.

Lorsqu'on le lance :

- ▶ les faces portant un chiffre pair ont la même probabilité d'apparition,
- ▶ les faces portant un chiffre impair ont la même probabilité d'apparition,
- ▶ la probabilité d'apparition d'un chiffre impair est le double de la probabilité d'apparition d'un chiffre pair.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- A « voir apparaître le chiffre 1 ».
- B « voir apparaître le chiffre 2 ».
- C « voir apparaître un chiffre pair ».
- D « voir apparaître un multiple de 3 ».

### EXERCICE 7

Une urne contient 5 boules rouges, 4 noires, 3 vertes toutes indiscernable au toucher.

1. On tire simultanément au hasard trois boules de cette urne.

- Quel est le nombre de tirages possibles ?
- Calculer la probabilité des événements suivants :
  - « obtenir trois boules rouges ».
  - « obtenir exactement deux boules rouges ».
  - « obtenir au moins une boule rouge ».
  - « obtenir deux boules vertes et une noire ».
  - « obtenir trois boules de la même couleur ».
  - « obtenir trois boules de trois couleurs différentes ».

2. On tire trois boules de cette urne, successivement, en remettant chaque boule tirée dans l'urne avant de prendre la suivante (*tirage avec remise*).

- Quel est le nombre de tirages possibles ?
- Calculer la probabilité de chacun des événements A, B et C définis en 1.b).

### EXERCICE 8

Une association d'amis du quartier Résidentiel d'ANYAMA est composé de 10 membres. Elle désire formé son bureau composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire général.

Parmi ces membres il y a 7 garçons et 3 filles. On suppose que tous les membres ont la même chance d'être choisis.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- « les membres choisis sont tous garçons ».
- « les membres choisis sont de même sexe ».
- « le président est un garçon et les autres sont des filles ».
- « le bureau est constitué de deux filles et d'un garçon ».

### EXERCICE\* 9

A et B sont deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.

On sait que  $p(A) = 0,6$  ;  $p(B) = 0,5$  ;  $p(A \cap B) = 0,18$

Déterminer :  $p(\bar{A})$  ;  $p_A(B)$  ;  $p_A(\bar{B})$  ;  $p(\bar{A} \cap B)$  ;  $p_{\bar{A}}(B)$  ;  $p_{\bar{A}}(\bar{B})$  ;  $p_B(\bar{A})$ .

(On pourra s'aider d'un arbre de probabilité)

### EXERCICE 10

$\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont deux événements associés à une épreuve aléatoire  $\Omega$ .

A et B sont leurs événements contraires.

On considère l'arbre de probabilité ci-contre :

1°) a) Que représentent x et y ?      b) Complète cet arbre.

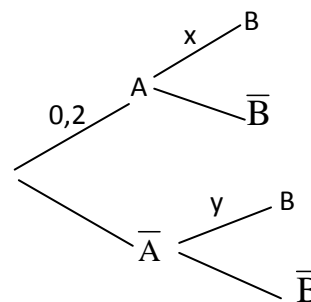
2°) Exprimer  $P(B)$  en fonction de x et y.

3°) Quelle relation doivent vérifier x et y pour que A et B soient indépendants ?

4°) Exprimer  $P_B(A)$  en fonction de x et y.

5°) On suppose que  $y = 0,6$ .

Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles  $P_B(A) = P_A(B)$ .



### EXERCICE\* 11

Dans un village 80% de la population à été vaccinée contre une maladie. Une enquête a révélé les résultats suivants :

15% de la population vaccinée a la maladie.

40% de la population non vaccinée a la maladie.

On choisit au hasard une personne dans le village et on considère les événements suivants :

V : « La personne choisie a été vaccinée ».

M : « La personne choisie a la maladie »

1) a) Déterminer les probabilités :  $P(V)$  et  $P_V(M)$ .

b) Déterminer  $P(V \cap M)$ ,  $P(\bar{V} \cap M)$  et en déduire que  $P(M) = \frac{1}{5}$ .

2) Une personne choisie au hasard est malade.

Déterminer la probabilité qu'elle soit vaccinée.

### **EXERCICE 12**

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.

2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.

3. On soumet au test un individu pris au hasard.

Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.

4. On contrôle 5 individus au hasard.

a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.

b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

5. On contrôle  $n$  individus pris au hasard, ( $n$  est un entier naturel non nul).

Déterminer  $n$  pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98

### **EXERCICE 13**

La serrure d'un coffre est munie d'un dispositif portant les touches 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 et A ; B ; C ; D.

La porte du coffre s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres puis deux lettres, choisis par l'utilisateur du coffre qui forme le code d'ouverture. Les chiffres sont nécessairement distincts mais les lettres non. Une personne se présente devant la porte du coffre et sait uniquement qu'il faut appuyer sur trois chiffres distincts puis sur deux lettres non nécessairement distinctes.

1) Quelle est la probabilité pour que cette personne ouvre la porte au premier essai dans chacun des cas suivants :

a) Elle ignore le code.

b) Elle se souvient uniquement que les trois chiffres du code sont pairs.

c) Elle se souvient de plus que les deux lettres du code sont identiques.

2) La porte du coffre est équipée d'un système d'alarme qui se déclenche lorsque l'un des trois chiffres choisis ne figure pas sur la liste des chiffres du code.

a) Quelle est la probabilité pour que la personne qui ignore le code, déclenche l'alarme à l'issue d'un essai ?

b) La personne tente quatre fois d'ouvrir le coffre à des intervalles de temps suffisants pour avoir oublié la combinaison sur laquelle elle avait appuyé la fois précédente.

Quelle est la probabilité pour qu'elle déclenche au moins une fois l'alarme ?

### **EXERCICE \*14**

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs.

Les expériences précédentes ont montré que :

- S'il arrête le  $n^{\text{ième}}$  tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0,8.

- S'il n'arrête pas le  $n^{\text{ième}}$  tir, la probabilité qu'il arrête le suivant est 0,6.

La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7. On note  $A_n$  l'événement :

« le gardien arrête le  $n^{\text{ième}}$  tir » et  $P_n$  sa probabilité.

1. Donner les valeurs de  $P(A_1)$ ,  $P(A_{n+1}/A_n)$ ,  $P(A_{n+1} / \bar{A}_n)$ .

2. Calculer  $P(A_{n+1} \cap A_n)$  en fonction de  $P_n$ .
3. Démontrer que  $P_{n+1} = 0,2 P_n + 0,6$ .
4. Un spectateur arrive juste au deuxième tir qui est arrêté par le gardien.  
Quelle est la probabilité pour que le premier tir soit arrêté avant son arrivée ?

### **EXERCICE\* 15**

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement deux jetons rouges et huit (8) jetons verts indiscernables au toucher et d'autre part un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- ▶ si le jeton est rouge, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- ▶ si le jeton est vert, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

Soit  $R$  l'évènement " le jeton tiré est rouge " et  $G$  l'évènement « le joueur gagne le jeu ».

L'évènement contraire d'un évènement  $E$  sera noté  $\bar{E}$ .

La probabilité d'un événement  $E$  sera notée  $p(E)$ .

1. Montrer que  $p(G) = \frac{3}{10}$ . On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton rouge sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.  
Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près par défaut.
4. Un joueur fait  $n$  parties de façon indépendantes ( $n \geq 2$ ).
  - a) Démontrer que la probabilité pour que le joueur gagne au moins une partie est  $p_n = 1 - (0,7)^n$ .
  - b) Déterminer le nombre minimal  $n$  de parties pour que  $p_n$  soit supérieure à 0,99.

### **EXERCICE 16**

Dans un sac se trouve 10 jetons dont 6 rouges et 4 blanches. On admet que la sortie d'un jeton rouge fait gagner 1000F et la sortie d'un jeton blanc fait perdre 500F. Un jeu consiste à tirer simultanément deux jetons du sac. Soit  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme totale obtenue.

1. Justifier que les valeurs prises par  $X$  sont : -1000, 500 et 2000.
2. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
3. Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$ , la variance et l'écart-type de  $X$ .

### **EXERCICE \*17**

Une urne est composée de 4 boules noires, 3 boules blanches et 5 boules rouges toutes indiscernables au toucher.

I. On tire successivement sans remise trois boules et on observe les couleurs tirées.

- 1) Justifier qu'il y a 1320 tirages possibles.
- 2) Calculer la probabilité d'avoir une seule boule noire parmi les trois boules tirées.

II. Un jeu consiste à miser une somme  $S$  et à tirer simultanément 3 boules de l'urne.

- 1) Justifier qu'il y a 220 tirages possibles.
- 2) Une boule rouge fait gagner 200 f et toute autre boule fait perdre 100f. Soit  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain algébrique du joueur.  
C'est-à-dire la différence entre la somme totale reçue et la somme mise par le joueur.
  - a) Justifier que les valeurs prises par  $X$  sont :  $500-S$  ;  $300-S$  ;  $-S$  et  $-300-S$
  - b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - c) Déterminer  $S$  pour que le jeu soit équitable.
  - d) Pour  $S=100$  f, déterminer et représenter la fonction de répartition  $F$ .

### **EXERCICE 18**

Un autobus rencontre sur son trajet habituel 4 feux tricolores de circulation.

- Le rouge dure 30 secondes - L'orange dure 10 secondes - Le vert dure 20 secondes.

On suppose que chacun de ces feux est indépendants des autres et en état de marche.

- 1) Lorsque l'autobus se présente devant l'un de ces 4 feux tricolores, quelle est la probabilité pour que le feu soit vert ? Orange ? Rouge ?
- 2) Soit  $X$  la variable aléatoire qui à un parcours donné de l'ensemble du trajet associe le nombre de fois que l'autobus a rencontré le feu vert.
  - a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
  - b) Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de  $X$ .

### **EXERCICE 19**

- 1) Une urne contient neuf boules indiscernables au toucher. Deux boules portant le numéro 1, quatre boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3.

On prend au hasard une boule dans l'urne. Soit  $X$  la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le numéro de la boule tirée.

Déterminer la loi de probabilité de  $X$  et calculer l'espérance mathématique  $E(X)$ .

- 2) Les boules sont maintenant réparties dans deux urnes A et B. L'urne A contient deux boules portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2. L'urne B contient deux boules portant le numéro 2 et trois boules portant le numéro 3.

On tire au hasard une boule de l'urne A qu'on met dans l'urne B et ensuite on tire au hasard une boule de l'urne B qu'on met dans l'urne A. On considère les événements suivants :

$A_1$  : « la boule tirée dans l'urne A porte le numéro 1 »

$A_2$  : « la boule tirée dans l'urne A porte le numéro 2 »

$B_1$  : « la boule tirée dans l'urne B porte le numéro 1 »

$B_2$  : « la boule tirée dans l'urne B porte le numéro 2 »

a) Déterminer la probabilité de  $A_1$ .

b) Déterminer la probabilité de  $B_1$  sachant que  $A_1$  est réalisé.

c) Démontrer que la probabilité de  $A_1 \cap B_1$  est  $\frac{1}{12}$ .

d) Déterminer la probabilité de  $A_2 \cap B_2$ .

e) Calculer la probabilité que, à l'issue de l'épreuve l'urne A se retrouve dans son état initial.

C'est à dire qu'elle contienne à nouveau deux boules portant le numéro 1 et deux boules portant le numéro 2.

### **EXERCICE 20**

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

#### **Partie A**

Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour  $i = 1$  ou  $i = 2$ , on note  $E_i$  l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Est le  $i$ -ème jour » et  $O_i$  l'événement : « Le touriste se dirige vers l'Ouest le  $i$ -ème jour ».

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes :  $p(E_1)$  ;  $P_{E_1}(O_2)$  ;  $P(E_1 \cap E_2)$  ;  $P(E_2)$  et  $P_{E_2}(E_1)$ .

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

#### **Partie B**

On suppose maintenant que  $n$  touristes ( $n \geq 3$ ) se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces  $n$  touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.

On note  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

- Déterminer la probabilité que  $k$  touristes ( $0 \leq k \leq n$ ) partent en direction de l'Est.
- On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

- Peut-il y avoir deux touristes heureux ?
- Démontrer que la probabilité (notée  $p$ ) qu'il y ait un touriste heureux parmi ces  $n$  touristes vaut

$$p = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

- Application numérique

Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

### **EXERCICE 21**

Une urne contient 8 jetons indiscernables au toucher :

(Chaque jeton est marqué d'un unique montant)

5 jetons verts marqués : 1000 CFA ; 2000 CFA ; 2000 CFA ; 2000 CFA et 2000 CFA .

2 jetons jaunes marqués : 2000 CFA et - 5000 CFA.

1 jeton rouge marqué : - 5000 CFA.

Un joueur tire au hasard et simultanément 4 jetons de l'urne.

#### **Partie A**

On donne les événements :

A : « Obtenir, exactement, un jeton jaune et 4 jetons marqués 2000 CFA » ;

B : « Obtenir, exactement, un jeton jaune et 3 jetons marqués 2000 CFA » ;

C : « Obtenir 4 jetons de même montant » ;

D : « Obtenir 4 jetons de 3 montants »

E : « Obtenir 4 jetons de 2 montants exactement ».

- Vérifier que :  $P(A) = \frac{2}{35}$  et que  $P(B) = \frac{8}{35}$ .

- Démontrer que :  $P(C) + P(D) + P(E) = 1$ .

- Calculer sous forme de fraction irréductible, la probabilité de chacun des événements C, D et E.

#### **Partie B**

Le joueur mise une somme  $S$  (en CFA) et obtient le cumul des montants marqués sur les jetons Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le résultat financier du joueur à l'issue d'un tirage de 4 jetons.

Résultat financier = Somme obtenue – somme mise.

- Trouver les valeurs prises par  $X$  en fonction de  $S$ .

- Vérifier que :  $P(X = 8000 - S) = \frac{1}{14}$ .

- Dresser le tableau de distribution de la loi de probabilité de  $X$ .

- Vérifie que  $E(X) = 500 - S$

- Dresser le tableau de variation de  $E(X)$  en fonction de  $S$  et déterminer le signe de  $E(X)$  suivant les valeurs de  $S$ .

- Quelle doit être la mise pour que le jeu soit équitable ? (Justifier votre réponse)

- Pour  $S = 500$ , déterminer et représenter la fonction de répartition  $F$ .

### **EXERCICE 22**

Un jeu de loterie dispose de deux urnes **1** et **2** contenant chacune 20 billets.

- Dans l'urne **1**, il y a 12 billets gagnant 500f chacun et 8 gagnant 1000f chacun.

- L'urne **2** contient 14 billets gagnant 500f chacun et 6 billets gagnant 1000f chacun.

La règle de jeu est la suivante : Le joueur tire un billet dans l'urne **1** :

- S'il obtient un billet gagnant 1000f, il tire un autre billet dans l'urne **2** et la partie s'arrête.
- S'il obtient un billet de 500f, il le remet dans l'urne **1** et tire un second billet dans la même urne **1** et la partie s'arrête.

**I - (l'on pourra utiliser un arbre de probabilité).**

1) Déterminer la probabilité pour que le joueur gagne 1500f à l'issue d'une partie sachant qu'il a obtenu un billet gagnant 500f au premier tirage.

- 2) On note les événements suivants : A « A l'issue de la partie, le joueur obtient 2000f »  
 B « A l'issue de la partie le joueur obtient 1500f »

Montrer que  $P(A) = \frac{3}{25}$  et  $P(B) = \frac{13}{25}$ .

**II-** Pour une partie de jeu, le joueur doit miser 1000f.

- si le joueur tire 2 billets gagnant 1000f chacun, il reçoit le montant des deux billets tirés et l'organisateur lui rembourse sa mise.
- Si le joueur tire un billet gagnant 1000f et un billet gagnant 500f, il reçoit le montant des deux billets tirés mais perd la mise.
- Dans les autres cas, le joueur ne gagne rien.

Soit X la valeur aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

- 1- Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
- 2- Déterminer l'espérance mathématique E(X) de la variable X puis interpréter le résultat.
- 3 – Définir la fonction de répartition F de la variable X puis la représenter graphiquement.

**III-** Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (*n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2*).

1- Démontrer que la probabilité  $p_n$  qu'il tire au moins une fois un billet de l'urne 2 est  $p_n = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$ .

2- Quelle est la plus petite valeur  $n_0$  de l'entier n pour laquelle  $p_n > 0,99$ .

**EXERCICE23**

*Tous les résultats seront arrondis à  $10^{-2}$  près.*

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

- a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
- b) Calculer la probabilité des événements suivants :  
**A** : " il n'y a aucun stylo avec un défaut " ;  
**B** : " il y a au moins un stylo avec un défaut " ;  
**C** : " il y a exactement deux stylos avec un défaut " .

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement " le stylo présente un défaut " et E l'événement " le stylo est accepté " .

- a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.
- b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.
- c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à  $0,02$  à  $10^{-3}$  près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, n stylos parmi les stylos acceptés. ( $n \geq 2$ ).

- a) Justifier que la probabilité  $P_n$  pour qu'il y ait au moins un stylo avec un défaut dans

ce prélèvement de n stylos est  $P_n = 1 - (0,98)^n$  .

- b) Déterminer la valeur minimale  $n_0$  de n pour laquelle  $P_n > 0,4$  .

**EXERCICE 24 SENEGAL SERIE S2**

Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Toutes les paires de chaussures sont de modèles différents, mais indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément deux chaussures au hasard et l'on admet l'équiprobabilité des tirages.
  - a) Calculer la probabilité de l'événement A « tirer deux chaussures de même couleur ».
  - b) Calculer la probabilité de l'événement B « tirer un pied gauche et un pied droit ».
  - c) Montrer que la probabilité de l'événement C « tirer les deux chaussures d'un même modèle » est  $\frac{1}{19}$ .
2. On ne conserve plus dans le tiroir qu'une paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire successivement et sans remise une chaussure du tiroir jusqu'à ce que le tiroir soit vide. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.
  - a) Justifier que X prend les valeurs 2, 3 et 4.
  - b) Montrer que la loi de probabilité X est  $P(X=2) = \frac{1}{6}$  ;  $P(X=3) = \frac{1}{3}$  et  $P(X=4) = \frac{1}{2}$ .
  - c) Calculer son espérance mathématique et son écart-type.

# CHAPITRE 9 : NOMBRES COMPLEXES

## EXERCICE 1

On donne les nombres complexes suivants

$$z_1 = -i ; \quad z_2 = 2+i ; \quad z_3 = -2 ; \quad z_4 = 2\sqrt{2}+i ; \quad z_5 = -3i ; \quad z_6 = -i\sqrt{3} ; \quad z_7 = 0.$$

- 1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun de ces nombres complexes .
- 2) Calculer chacun des nombres suivants :  $z_1 + z_2$  ;  $z_1 \times z_2$  ;  $z_1 + z_3$  ;  $z_4 - z_6$  ;  $z_4 \times z_2$  ;  $z_5 \times z_7$ .

## EXERCICE 2

Soit  $z = 3a - 2bi$  et  $z' = b + i$ , avec  $a$  et  $b$  réels.

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que les nombres complexes  $z$  et  $z'$  soient égaux.

## EXERCICE 3

Soit les points  $A(-3;5)$  et  $B(2;-1)$ . Déterminer les affixes des points A et B et celle du vecteur  $\overline{AB}$ .

## EXERCICE 4

Placer dans le plan complexe, les points A, B, C, D, E, F d'affixes respectives :

$$z_1 = -2 + i, \quad z_2 = 3 - 2i, \quad z_3 = 1 + 2i, \quad z_4 = -2 + i, \quad z_5 = -i, \quad z_6 = 1$$

## EXERCICE 5

Soit le nombre complexe  $z = -3 + 2i$

Sans calcul, représenter graphiquement  $z$ , son conjugué  $\bar{z}$ , son opposé  $-z$  et l'opposé de son conjugué  $-\bar{z}$ .

## EXERCICE 6

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + 3i - (-6 + 5i), \quad z_2 = (3 + i)^3 ; \quad z_3 = \frac{2+i}{3-2i} ; \quad z_4 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}) .$$

## EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants écrire le nombre complexe  $z$  sous forme algébrique .

$$\text{a) } z = \frac{1}{1-i} ; \quad \text{b) } z = \frac{1}{1-i} ; \quad \text{c) } z = \frac{1}{1-i} ; \quad \text{d) } z = \frac{1}{(1+2i)(3-i)} ;$$

$$\text{e) } z = \frac{i-7}{(3+7i)} ; \quad \text{f) } z = \frac{2+i}{3-i} - \frac{3-i}{2+i} ; \quad \text{g) } z = \frac{1+18i}{3+4i} + \frac{7-26i}{3-4i} ;$$

$$\text{h) } Z = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) ; \quad \text{i) } Z = 2[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})] ; \quad \text{j) } Z = \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ).$$

## EXERCICE 8

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe, avec  $x$  et  $y$  des réels non nuls.

Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe  $Z = \frac{z+1}{z-1}$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

## EXERCICE 9

Calculer et écrire sous forme algébrique les inverses des nombres complexes suivants :

$$\text{a) } -3 + 2i \quad \text{b) } -8i \quad \text{c) } \sqrt{5}(-1+i) \quad \text{d) } -\sqrt{7} + i$$

### EXERCICE\* 10

Ecrire sous forme algébrique le conjugué des nombres complexes suivantes :

$$z_1 = i-2 ; \quad z_2 = -5 ; \quad z_3 = 3i ; \quad z_3 = (4-i\sqrt{3})(1-i) ; \quad z_4 = \frac{2+i}{3-i}$$

### EXERCICE 11

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$(E_1) : 3z - 5 + 2iz = 2i - 3z + 4iz ; \quad (E_2) : \frac{1}{z-1} = \frac{i}{z+i} ; \quad (E_3) : 3\bar{z} - 2iz = 2 - 3i ;$$
$$(E_4) : Z^2 - \bar{Z} + 5 = 0 ; \quad (E_5) : iZ - 2\bar{Z} + 1 = i ; \quad (E_6) : iz^2 - 2\bar{z} - i = 0 ;$$

### EXERCICE 12

Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 4i ; \quad z_2 = 1 - i ; \quad z_3 = 5 - \frac{i}{2} ; \quad z_4 = 3 ; \quad z_5 = i - 4 ; \quad z_6 = i ; \quad z_7 = -5 ; \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$z_9 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad z_{10} = \frac{3i}{2-i} ; \quad z_{11} = (1-i)^3$$

### EXERCICE 13

Déterminer la forme algébrique puis la forme trigonométrique du nombre complexe

$$z = (\sqrt{3} + i)(1 + i).$$

En déduire la valeur exacte de  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{5\pi}{12}$ .

### EXERCICE\* 14

Ecrire sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$$a = 2 - 2i ; \quad b = \frac{\sqrt{2}}{1-i} ; \quad c = -1 + i\sqrt{3} ;$$
$$d = 2(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}) ; \quad e = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} ; \quad f = 2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}).$$

### EXERCICE15

Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$a) \quad z = 1 + i \quad b) \quad z = \frac{21(5i - \sqrt{3})}{2 - i\sqrt{3}} ; \quad c) \quad z = \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4} ; \quad d) \quad z = -3 + 3i ;$$
$$e) \quad z = \sqrt{2} + i\sqrt{6} ; \quad f) \quad z = -6i ; \quad g) \quad Z = -2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}). \quad h) \quad z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$$

### EXERCICE 16

On considère les complexes:  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} ; \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$  et  $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1°) Donner la forme exponentielle de Z.

2°) Donner les formes algébriques de  $z_1$  et  $z_2$ . En déduire la forme algébrique de Z.

3°) En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

### **EXERCICE \*17**

Soit le nombre complexe  $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$ . Montrer que  $z^{45}$  est un nombre réel.

### **EXERCICE18**

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivant :

$$z_1 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{100} ; \quad z_2 = (1+i)^{200} ; \quad z_3 = (-1+i)^{300} ; \quad z_4 = \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{400} .$$

### **EXERCICE 19**

Linéariser :

$$A = \cos^2 x ; \quad B = \sin^2 x ; \quad C = \cos^3 x ; \quad D = \cos^2 x \sin^3 x ; \quad E = \cos^4 x .$$

### **EXERCICE 20**

Déterminer les racines carrées sous forme algébrique de chacun des nombres complexes :

$$Z_1 = 8 - 6i ; \quad Z_2 = -8 + 6i ; \quad Z_3 = -3 - 4i ; \quad Z_4 = 2i ; \quad Z_5 = 4 ; \quad Z_6 = 8 ; \quad Z_7 = -4 ; \\ Z_8 = -5 ; \quad Z_9 = \frac{1}{2} - i\sqrt{2} ; \quad Z_{10} = 5 + 12i .$$

### **EXERCICE \*21**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$(E_1) \quad z^2 - 3z + 2 = 0 ; \quad (E_2) \quad -z^2 - (1-2i)z + 2i = 0 ; \quad (E_3) \quad z^2 + z + 1 = 0 ; \\ (E_4) : \quad iz^2 + (2+6i)z + 2 + 11i = 0 ; \quad (E_5) : \quad z^2 + 2iz - 1 = 0$$

### **EXERCICE 22**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$(E_1) : \quad z^2 + 4 = 0 ; \quad (E_2) : \quad iz^2 + (1+3i)z + 3 = 0 ; \quad (E_3) : \quad Z^2 + 4Z + 5 = 0 ; \\ (E_4) : \quad 4Z^2 - 2Z + 1 = 0 ; \quad (E_5) : \quad Z^2 + 2iZ + 1 = 0 ; \quad (E_6) : \quad iZ^2 - 2Z + 3i = 0 ; \\ (E_7) \quad Z^2 + 2(1+i)Z + 2i = 0 ; \quad (E_8) : \quad 2iz^2 + 6z - 7i = 0 ; \quad (E_{10}) : \quad z^2 + (\sqrt{3} - 7i)z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0 .$$

### **EXERCICE 23**

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 + Z - 2 = 0$
2. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  des équations suivantes.
  - a)  $(z-1)^2 + z - i - 2 = 0$  ;
  - b)  $\frac{2i}{z^2} + \frac{1+i}{z} - 2 = 0$ .

### **EXERCICE\*24**

Soit P le polynôme défini par :  $P(Z) = Z^3 - (11+2i)Z^2 + 2(17+7i)Z - 42$

1. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel  $\alpha$  solution de l'équation :  $P(Z) = 0$
2. Déterminer le polynôme Q tel que  $P(Z) = (Z - \alpha)Q(z)$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(Z) = 0$

### **EXERCICE 25**

Soit P le polynôme défini par :  $P(Z) = Z^3 - 2(1+2i)Z^2 + 7iZ + 3(1-3i)$ .

1. Démontrer qu'il existe un imaginaire pur  $i\beta$  solution de l'équation :  $P(Z) = 0$ .
2. Déterminer le polynôme Q tel que  $P(Z) = (Z - i\beta)Q(z)$ .
3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(Z) = 0$ .

### **EXERCICE 26**

Pour tout nombre complexe  $Z$ , On pose :  $P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$

1.a) Calculer  $P(-1)$

b) Déterminer les réels  $a, b$  tels que pour tout nombre complexe  $Z$  on ait :  $P = (Z+1)(Z^2 + aZ + b)$

c) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(Z) = 0$

### **EXERCICE 27**

Soit  $P$  le polynôme défini par :  $P(Z) = Z^4 + (5 - 2i)Z^3 + (8 - 10i)Z^2 + (6 - 16i)Z - 12i$

1. Vérifier que :  $P(2i) = P(-3) = 0$ .

2. Déterminer le polynôme  $Q$  du second degré tel que pour tout nombre complexe  $Z$ , on a

$$P(Z) = [Z^2 + (3 - 2i)Z - 6i]Q(z).$$

3. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(Z) = 0$ .

### **EXERCICE 28**

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(E) : 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$ .

1- Déterminer les racines carrées de  $6 + 6i\sqrt{3}$

2- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$

3- a) Développer réduire et ordonner  $(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$ .

b) En déduire les solutions de (E).

### **EXERCICE 29**

On considère l'équation :  $(E) z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$  où  $z$  est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe  $i$  est solution de cette équation.

2. Déterminer les nombres réels  $a, b$  et  $c$  tels que, pour tout nombre complexe  $z$  on ait :

$$z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c).$$

3. Résoudre l'équation (E).

### **EXERCICE 30**

Soit le polynôme  $P(z) = z^3 - (5 + 7i)z^2 + (-6 + 26i)z + 24 - 24i$  et (E) l'équation :  $z \in \mathbb{C}, P(z) = 0$ .

a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle que l'on déterminera.

b) Déterminer trois nombres complexes  $a, b$  et  $c$  tel que  $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$ .

c) En déduire la résolution de l'équation (E).

### **EXERCICE 31**

On considère dans  $\mathbb{C}$  le polynôme  $P$  défini par :  $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$ .

$\alpha$  désigne un nombre complexe quelconque.

1. Montrer que  $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$ .

2. En déduire que si  $\alpha$  est un zéro de  $P$ , alors  $\bar{\alpha}$  est aussi un zéro de  $P$ .

3. Calculer  $P(1+i)$  et en déduire deux zéros de  $P$ .

4. Résoudre l'équation (E) :  $P(z) = 0$ .

### **EXERCICE \*32**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ . Dans chacun des cas suivants déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  dont l'affixe  $Z$  vérifie la condition proposée :

a)  $|Z+1+2i|=|Z-4|$  ; b)  $|Z-3i|=2$  ; c)  $|\bar{z}-2+i|=1$  ; d)  $|iZ-(1+i)|=1$  ; e)  $\left| \frac{Z+(2-i)}{Z} \right|=1$ .

**EXERCICE 33**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ . Dans chacun des cas suivants déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma)$  des points M dont l'affixe Z vérifie la condition proposée :

f)  $|z-3i|=2$ ; g)  $|\bar{z}-2+i|=1$ ; h)  $|(1-i)z+2i|=2$ ; i)  $|(1-i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i|=6$ .

**EXERCICE 34**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O, e_1, e_2)$

1. Déterminer et construire l'ensemble  $(\Delta)$  des points M d'affixe Z tel que :  $|Z+4-2i|=|3i-Z|$ .

2. Justifier que le point  $E(-3+\frac{13}{2}i)$  appartient à  $(\Delta)$

**EXERCICE 35**

On munit le plan d'un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$

1. Déterminer et construire l'ensemble  $(C)$  des points M d'affixe z tel que :  $|2iz+1+i|=2$ .

2. Déterminer les points d'intersection de l'ensemble  $(C)$  et de l'axe des imaginaires.

**EXERCICE 36**

le plan complexe muni du repère orthonormé direct  $(O, I, J)$ .

A tout nombre complexe z distinct de  $-i$ , on associe le nombre complexe  $Z = \frac{z+1-2i}{z+i}$ .

Déterminer et représenter :

a) L'ensemble  $(E_1)$  des points M d'affixes z telle que Z soit un réel.

b) L'ensemble  $(E_2)$  des points M d'affixes z telle que Z soit un imaginaire pur.

c) L'ensemble  $(E_3)$  des points M d'affixes z telle que  $|Z|=1$ .

d) L'ensemble  $(E_4)$  des points M d'affixes z telle que Z soit un réel strictement négatif.

e) L'ensemble  $(E_5)$  des points M d'affixes z telle que  $\text{ARG}(Z) = \frac{\pi}{2}$

**EXERCICE 37**

Déterminer les racines cubiques de  $A = 2\sqrt{2}i$  et les racines quatrièmes de

$B = -8\sqrt{3}+8i$  et placer leurs points images sur le cercle trigonométrique.

**EXERCICE 38**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :  $(E_1) Z^3-8=0$  et  $(E_2) : z^3=8i$  ;  $(E_3) : z^3+i=0$

**EXERCICE 39**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ,

On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $a = 1$ ,  $b = 1 + 2i$  et  $c = 1 + \sqrt{3} + i$

Calculer  $\frac{c-a}{b-a}$  et l'écrire sous la forme exponentielle. En déduire la nature du triangle ABC.

### **EXERCICE\* 40**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 1cm

Soit A, B, C, trois points du plan d'affixes respectives :  $Z_A$ ,  $Z_B$  et  $Z_C$ .

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre complexe  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$  et en déduire

la nature du triangle ABC.

1)  $Z_A = 2+4i$ ,  $Z_B = 3-i$  et  $Z_C = 4+4i$ ;    2)  $Z_A = 4+4i$ ,  $Z_B = 1+i$  et  $Z_C = 3-i$  ;

3)  $Z_A = 1+i$ ,  $Z_B = 1-i$  et  $Z_C = 3-i$ ;    4)  $Z_A = 3-2\sqrt{3}+2i$ ,  $Z_B = 3$  et  $Z_C = 3-2\sqrt{3}-2i$ .

### **EXERCICE 41**

Soient A, B, C des points d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

1. Préciser la nature du triangle ABC dans chacun des cas suivants.

a)  $\frac{c-a}{b-a} = -i$  ;    b)  $\frac{a-c}{b-c} = 3i$  ;    c)  $\frac{c-b}{a-b} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$  ;    d)  $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

### **EXERCICE 42**

Soit le polynôme défini dans C par :

$$P(z) = z^3 - (1-i)z^2 + z - 1 + i ; z \in \mathbb{C}$$

1°) Montrer que l'équation  $p(z) = 0$  admet deux solutions imaginaires pures à déterminer.

2°) Factoriser  $P(z)$  puis résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

3°) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on donne les points A, B et C d'affixes respectives  $i$  ;  $-i$  et  $1-i$ .

a. Placer les points A, B et C.

b. Déterminer la nature du triangle ABC.

### **EXERCICE\*43**

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct (O, I, J), on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :  $a = -i$ ,  $b = -2 + 3i$ ,  $c = 2 + 5i$  et  $d = 2 - i$ .

1°) Faire une figure et placer les points A, B, C et D.

2°) Calculer  $\frac{a-b}{c-b}$  ; En déduire la nature du triangle ABC.

3°) Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques et déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit à ABCD.

4°) Soit E le point d'affixe  $e = -1 + \frac{7}{2}i$

Calculer le rapport  $\frac{b-e}{c-e}$  et donner une interprétation géométrique.

### **EXERCICE44**

I. 1) Résoudre l'équation  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^2 - (2+i)z + 2i = 0$ .

2) On considère le polynôme définie de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathbb{C}$  par  $P(z) = z^4 - (1-i)z^3 - iz^2 - (2+2i)z - 4$ .

a) Calculer  $P(-1)$  et vérifier que  $P(-2i) = 0$ .

b) En utilisant les résultats précédents, résoudre l'équation  $P(z) = 0$ .

II. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). unité 2 cm, on donne les points A, B et K d'affixes respectives  $-2i$  ;  $2$  et  $-1$

1) Faire une figure soignée

2) Démontrer que le quadrilatère ABJK est un trapèze isocèle

# CHAPITRE 10 : NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

## EXERCICES\* 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).  
Déterminer l'écriture complexe de chacune des transformations suivantes :

- a) t la translation de vecteur  $\vec{u}(-3;5)$ .
- b) h l'homothétie de centre  $\Omega(1;2)$  et de rapport  $-3$ .
- c) r la rotation d'angle  $\frac{-\pi}{3}$  et de centre le point K d'affixe  $i$ .
- d) S la similitude directe de rapport  $\sqrt{2}$ , d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de centre le point I.

## EXERCICES \*2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T du plan dont l'écriture complexes est donnée par :

- a)  $z' = -2iz + 3 + i$  ;      b)  $z' = z - 1 + i$  ;      c)  $z' = -3z - i$  ;      d)  $z' = -iz - 1 + 2i$

## EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F du plan dont l'écriture complexes est donnée par :

- a)  $z' = \left(\frac{1-i}{2}\right)z - 1 - i$  ;      b)  $z' = -2z + i - 1$  ;      c)  $z' = \frac{-1}{2}z + \frac{2}{3}i$  ;      d)  $z' = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)z$  ;      e)  $z' = z$  .
- f)  $z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}$  ;      g)  $z' = 2z + 5$  ;      h)  $z' = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)z$  ;      i)  $z' = (2-2i)z + 1 + i$  ;

## EXERCICE 4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).  
Soit T la transformation du plan d'écriture complexe  $z' = z + 1 - 2i$ .

- a) Reconnaître T et déterminer les affixes des points A' et B', images respectives des points A(-1 ;1) et B(2 ;2) par T.
- b) Soit (D) la droite d'équation  $y = x - 1$  et (D') l'image de (D) par T.  
Déterminer une équation de (D').

## EXERCICE 5

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).  
On donne A et B les points d'affixes respectives  $z_A = 1 + i$  et  $z_B = -1 + i\sqrt{3}$

- a) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
- b) Déterminer le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B.
- c) Quelle est l'écriture complexe de S ?
- d) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S' qui applique O sur A et B sur O.
- e) Déterminer les éléments caractéristiques de S'.

## EXERCICE 6

### Partie A

On considère l'équation : (E)  $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = 0$  où z est un nombre complexe.

- 1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
- 2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :  
 $z^3 - (4 + i)z^2 + (13 + 4i)z - 13i = (z - i)(az^2 + bz + c)$ .
- 3. En déduire les solutions de l'équation (E).

## **Partie B**

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormal direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives  $i$ ,  $2 + 3i$  et  $2 - 3i$ .

1. Soit  $r$  la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ . Déterminer l'affixe du point A', image du point A par  $r$ .
2. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture complexe de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

### **EXERCICE\* 7**

Le plan est muni du repère orthogonal (O, I, J). Unité 2 cm.

1°) On considère les points A, B, et K du plan d'affixes respectives :  $1 + i$  ;  $3 - i$  et  $3 + i$ .

- a) Placer les points A, B et K puis montrer que le triangle ABK est isocèle rectangle.
- b) Soit  $(\Gamma)$  le cercle circonscrit au triangle ABK.  
Déterminer le centre G et le rayon  $r$  de  $(\Gamma)$ .

2°) Soit (D) l'ensemble des points M d'affixes  $z$  vérifiant  $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$ .

- a) Justifier que F d'affixe  $4 + 2i$  appartient à (D).
  - b) Caractériser géométriquement (D).
  - c) Démontrer que (D) a pour équation  $-x + y + 2 = 0$
  - d) Déterminer l'affixe du point E de (D) situé sur l'axe des ordonnées.
- 3°) Soit S la similitude directe du plan qui applique K sur B et qui a pour centre A.
- a) Démontrer que l'écriture complexe de S est  $z' = (1 - i)z - 1 + i$ .
  - b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S
- 4°) a) Déterminer et construire (D') l'image de (D) par S.  
b) Déterminer et construire  $(\Gamma')$  l'image de  $(\Gamma)$  par S.

### **EXERCICE 8**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J). Unité 2 cm.

1°) On considère l'équation (E) :  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z^3 - 2iz^2 + 4(1 + i)z + 16 + 16i = 0$

- a) Montrer que (E) admet une solution réelle
- b) Déterminer les racines carrées de  $-8 - 6i$ .
- c) Résoudre l'équation (E)

2°) Soit A, B et C les points d'affixes respectives  $-2$  ;  $4i$  et  $2 - 2i$

- a) faire une figure
- b) Soit K le milieu de [BC]

On considère la similitude directe S de centre A, qui applique B sur K.

Déterminer et construire l'image (C') du cercle (C) de diamètre [AB] par la similitude S.

Déterminer l'écriture complexe de S puis en déduire ses éléments caractéristiques

### **EXERCICE 9**

1) On considère le polynôme  $P(z) = z^3 - (5 + 7i)z^2 + (-6 + 26i)z + 24 - 24i$  et (E) l'équation :  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = 0$ .

- a) Démontrer que (E) admet une unique solution réelle que l'on déterminera.
- b) Déterminer trois nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $P(z) = (z - 2)(az^2 + bz + c)$ .
- c) En déduire la résolution de l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2cm.

Soit B et C deux points d'affixes respectives  $Z_B = 3 + 3i$  et  $Z_C = 4i$ .

a) Placer les points B et C.

b) Soit  $(\Gamma)$  l'ensemble des points M du plan d'affixe  $z$  tel que  $|z - 3 - 3i| = \sqrt{10}$

Justifier que C appartient à  $(\Gamma)$  et déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma)$ .

### **EXERCICE 10**

1) Soit le polynôme  $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2-6i)z + 8$  et (E) l'équation :  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = 0$ .

- Démontrer que (E) admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
- Déterminer deux nombres complexes  $b$  et  $c$  tel que  $P(z) = (z+2i)(z^2+bz+c)$ .
- En déduire la résolution de l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 2cm.

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives  $Z_A = -2i$ ,  $Z_B = -1-i$  et  $Z_C = 2+2i$ .

- Déterminer le nombre complexe  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$  sous forme exponentielle.
  - En déduire la nature du triangle ABC.
  - Soit D et E les symétriques respectifs de C et B par rapport à (OI).  
Placer les points A, B, C et D et démontrer qu'ils appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
  - Démontrer que le quadrilatère ABED est un trapèze isocèle.
- 3) On considère la similitude directe S de centre A qui transforme C en B .
- Démontrer que l'écriture complexe de S est :  $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - (1+i)$ .
  - En déduire les éléments caractéristiques de S.
  - Soit  $(\Gamma)$  le cercle de centre O et de rayon  $2\sqrt{2}$ .  
Justifier que C appartient à  $(\Gamma)$  et construire  $(\Gamma)$ .
  - Déterminer et construire l'image de  $(\Gamma)$  par S.

### **EXERCICE\* 11**

Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 1cm

1. On considère la transformation  $h$  du plan qui à tout point M(x;y) associe le point M'(x';y')

$$\text{tel que : } \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = 2y - 1 \end{cases} ; z \text{ et } z' \text{ sont les affixes respectives de M et M' .}$$

Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$  et donner la nature de  $h$ .

2. Soit la transformation  $r$  du plan qui au point M d'affixe  $z$  associe le point  $M_1$  d'affixe  $z_1$

$$\text{tel que : } z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}z + 2.$$

Reconnaître la nature et ses éléments caractéristiques de  $r$ .

3. Soit la transformation  $roh$  du plan qui à tout point M(x ; y) d'affixe  $z$  associe le point  $M_2(x_2 ; y_2)$  d'affixe  $z_2$ .

- Exprimer  $z_2$  en fonction de  $z$  puis  $x_2$  et  $y_2$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
- En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $roh$ .

### **EXERCICE 12**

1) On considère le polynôme  $P(z) = iz^3 + (-2+7i)z^2 + (-4+23i)z + 6+33i$ .

- Déterminer les trois nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $P(z) = (az+b)(iz^2+(2+4i)z+3i+6)$ .
- Résoudre l'équation (E) :  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z)=0$ .

2) Le plan complexe est muni du repère orthonormé (O, I, J). Unité : 1cm.

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives  $Z_A = -1+2i$ ,  $Z_B = -3$  et  $Z_C = -3-4i$ .

- Placer les points A, B et C.
- On considère la similitude plane directe S qui applique A sur B et B sur C.  
Déterminer l'écriture complexe associée à S.
- En déduire les éléments caractéristiques de S.
- Quelle est l'image par S du cercle de centre O et de rayon 1 ?

### **EXERCICE13**

A ) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  ,l'équation (E) sachant quelle admet une solution réelle que l'on déterminera d'abord. (E)  $z^3 - (2 + 3i)z^2 + (5i - 1)z + 2 - 2i = 0$

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé.(O,I,J) On donne les points  $A_0(0;2)$ ;  $A_1(1;1)$  et  $A_2(1;0)$

1) Faire une figure unité graphique : 6 cm

2) Démontrer que le triangle  $OA_0A_1$  est rectangle et isocèle.

3) Soit  $S$  la similitude directe qui applique  $A_0$  sur  $A_1$  et  $A_1$  sur  $A_2$

On définit la suite des points  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :  $S(A_n) = A_{n+1}$

a) Construire  $A_3$ ;  $A_4$ ;  $A_5$ ;  $A_6$ ;  $A_7$  et  $A_8$

b) Exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $z_n$ .Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la suite  $(z_n)$ .

c) Exprimer  $z_n$  en fonction de  $n$

4 ) On pose  $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_nA_{n+1}$

Exprimer  $L_n$  en fonction de  $n$  et calculer sa limite

### **EXERCICE 14 SENEGAL SERIE S2**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  ; unité graphique : 2 cm.

1. a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $z^3 = 1$ . Les solutions seront données sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

b) en remarquant que  $2^3 = 8$ , déduire de 1.a) les solutions de l'équation  $z^3 = 8$ .

2. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives  $-1 + i\sqrt{3}$  , 2 et  $-1 - i\sqrt{3}$  .

a) Placer ces points dans le repère.

b) Calculer le module et un argument de  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  .

c) En déduire la nature du triangle ABC.

3. On considère f, la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe  $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$  .

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) Déterminer les affixes des points A' et C' images respectives de A et C par f.

c)En déduire l'image de la droite (AC) par f.

1. On considère l'équation (E) :  $z^3 + (-6 - 4i)z^2 + (12 + 21i)z + 9 - 45i = 0$

a) Déterminer la solution imaginaire pure  $z_0$  de l'équation (E).

b) Achever la résolution de (E).

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o, \vec{u}, \vec{v})$  ; unité graphique : 2 cm.

On considère les points A , B et C les points d'affixes respectives  $3i$  ,  $3 + 3i$  et  $3 - 2i$  .

a) Placer ces points dans le repère.

b) Calculer  $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$  et en déduire la nature du triangle ABC.

3. On considère la similitude directe S qui applique A sur C et laisse B invariant.

a) Déterminer une écriture complexe de S.

b ) En déduire les éléments caractéristiques de S.

### **EXERCICE 15**

On considère le point A d'affixe  $z_A = 2 + i$  et le cercle  $(\Gamma)$  de centre A et de rayon  $\sqrt{2}$  .

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2 d'intersection de  $(\Gamma)$  et de l'axe  $(O; \vec{u})$ .

b) On désigne par B et C les points d'affixes respectives  $z_B = 1$  et  $z_C = 3$ .

Déterminer l'affixe  $z_D$  du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle  $(\Gamma)$ .

3. Soit M le point d'affixe  $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ .

a) Calculer le nombre complexe  $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ .

b) Interpréter géométriquement un argument du nombre  $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ ; en déduire que le point M appartient au cercle  $(\Gamma)$ .

4. On note  $(\Gamma')$  le cercle de diamètre [AB].

La droite (BM) recoupe le cercle  $(\Gamma')$  en un point N.

a) Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b) Déterminer l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

a) Déterminer l'affixe du point M'.

b) Montrer que le point M' appartient au cercle  $(\Gamma')$ .

# CHAPITRE 11 : STATISTIQUES

## EXERCICE 1

Dans une classe de TD les notes au premier devoir de math ont été regroupées dans le tableau ci-dessous

Notes	0	2	3	5	8	9	10	11	13	14	15	16	18
Nombre d'élèves	2	6	7	7	6	8	6	6	4	3	2	2	1

- 1) Déterminer l'effectif de la classe.
- 2) Déterminer le mode et la médiane de cette série statistique.
- 3) Déterminer la moyenne notée  $m$ .
- 4) Déterminer la variance et l'écart-type.

## EXERCICE\* 2

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à l'ordre 2.

Le tableau suivant donne l'évolution de 1991 à 1999 du prix du kilogramme d'une denrée alimentaire.

Année (X)	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Prix (Y) en franc CFA	120	170	180	225	260	275	325	330	365

- 1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double.  
Echelle : Axe des abscisses : Origine 1990 et 1 cm  $\rightarrow$  1 an.  
Axe des ordonnées : Origine 100 et 1 cm  $\rightarrow$  20 f.
- 2) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.
- 3) En quelle année la valeur de la denrée dépassera 500 f ? Préciser cette valeur.

## EXERCICE 3

Un pharmacien observe durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en million de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où X désigne le numéro du mois et Y le chiffre d'affaire correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

- 1) Calculer les moyennes  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  respectivement des variables X et Y.
- 2) Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G  
(Unité graphique : 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnées)
- 3) Calculer la variance  $V(X)$  de X et la covariance  $COV(X, Y)$  de X et Y.
- 4) Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de Y en fonction de X est  $Y = \frac{78}{35}X + 9,2$
- 5) En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaire de cette pharmacie à la fin du 7<sup>ème</sup> mois.

## EXERCICE 4

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2008,  $X_i$  est la note en mathématiques,  $Y_i$  la note en sciences physiques.

$X_i$	4	6	7	9	11	14	12	17
$Y_i$	3	4	6	8	10	12	9	14

1°) Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 0,5 cm.

2°) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.

3°) a) Vérifier que la covariance  $\text{cov}(x, y)$  de la série statistique est égale à  $\frac{57}{4}$

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et donner une interprétation du résultat.

### **EXERCICE\* 5**

Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge de dix personnes choisies au hasard dans une population

X	36	38	40	42	45	47	50	52	60	70
y	11,8	12,0	12,2	12,0	12,5	12,3	13,1	14,0	15,5	15,4

1) Calculer les moyennes  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  respectivement des variables X et Y.

2) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double (X ;Y) ainsi que le point moyen G. (Unité graphique : 0,5 cm pour un an et 3cm pour l'unité de tension artérielle).

3) Calculer la variance  $V(X)$  de X et la covariance  $\text{COV}(X,Y)$  de X et Y.

4) a) Déterminer une équation de la droite (D) de regression de Y en fonction de X .

b) Construire (D).

5) En utilisant la droite (D), calculer une estimation de la tension artérielle d'une personne âgée de 65 ans.

### **EXERCICE\* 6**

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aura en stock en l'an 2015.

L'évolution du stock de ses articles, au cours des six dernières années , est donnée par le tableau statistique ci-dessous.

Années	2005	2006	2007	2008	2009	2010
$x_i$	1	2	3	4	5	6
$y_i$	3810	3860	3940	4020	4100	4180

$x_i$  = Ordre des années et  $y_i$  = nombre d'articles en stock.

1. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.

(On prendra l'arrondi d'ordre zéro pour l'ordonnée de G).

2. Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni d'un repère orthogonal.

(Unité 2 cm en abscisse et 200 articles pour 1 cm en ordonnées).

3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en fonction de x.

(On donnera l'arrondi d'ordre 2 des résultats).

4. Quel serait à partir de ces études le nombre d'articles en stock de l'entreprise en 2015 ?

(On donnera l'arrondi d'ordre 0 du résultat).

### **EXERCICE7 (concours de CAFOP 2012)**

Le tableau ci-dessous donne l'ancienneté  $x_i$  en année et le salaire  $y_i$  en millier de francs CFA par mois de chacun des huit ouvriers d'une exploitation agricole.

$x_i$	3	5	7	9	12	14	16	18
$y_i$	68	74	89	101	120	130	135	155

1. Représenter le nuage de point en portant en abscisse les valeurs  $x_i$  et en ordonnée les  $y_i$ .  
Unité : 1 cm pour 1 an en abscisse et 1 cm pour 10 milliers de francs CFA en ordonnées.
- 2.a) calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points.  
b) placer G sur le graphique.
- 3.a) Vérifier que la covariance de la série double  $(x_i, y_i)$  est égale à 145.  
b) Démontrer qu' une équation de la droite de régression de  $y$  en fonction de  $x$  par la méthode des moindres carrés est :  $y = \frac{580}{101}x + \frac{4919}{101}$ .
- c) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  puis interpréter le résultat.
- d) Déterminer le salaire d' un ouvrier dans sa 24<sup>ème</sup> année.

**XERCICE\* 8(Sénégal série L2)**

Au cours d' une séance d'essais un pilote d' automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.

Au moment du top sonore, on mesure la vitesse  $V_i$  en km/h de l' automobile puis la distance  $Y_i$  en mètre nécessaire pour arrêter le véhicule. On obtient les résultats suivants pour six essais.

$V_i$ (km/h)	27	43	62	80	98	115
$Y_i$ (m)	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8

On pose pour les six valeurs de  $V_i$ ,  $X_i = V_i^2$  et on considère la série double  $(X_i, Y_i)$ .

1. Compléter le tableau suivant :

$X_i$						
$Y_i$						

2. Construire le nuage de points associé à la série statistique double  $(X_i ; Y_i)$   
( $X_i$  en abscisse avec 1 cm pour 1000 et  $Y_i$  en ordonnée avec 1cm pour 10).
- 3.a) Déterminer une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$  puis la tracer dans le repère précédent..  
b) En déduire la valeur estimée de  $X$  pour une distance d'arrêt de 180m puis la vitesse du véhicule.  
c) Quelle est la distance d'arrêt estimée pour une vitesse de 150 km/h ?

**EXERCICE9 (Sénégal série S2)**

Le tableau ci-dessous donne le poids moyen ( $y$ ) d' un enfant en fonction de son âge ( $x$ ).

$x$ (année)	0	1	2	4	7	11	12
$Y$ (kg)	3,5	6,5	9,5	14	21	32,5	34

- 1) Représenter le nuage de point de cette série statistique dans le plan muni d' un repère orthogonal.  
(Unité graphique : en abscisse 1 cm pour 1 année et en ordonnée 1 cm pour 2kg .
- 2) calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points puis placer G.
- 3) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  et interpréter le résultat.
- 4) Déterminer une équation de la droite de régression (D) de  $y$  en  $x$  puis la tracer (D).
- 5) a. Déterminer graphiquement, à partir de quel âge le poids sera supérieur à 15 kg.  
b. Retrouver ce résultat par le calcul.

# BACCALAUREAT SESSION 2008

## EXERCICE 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

On considère l'équation (E) :  $Z \in \mathbb{C}, Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14-5i = 0$

1. a. Vérifier que  $i$  est solution de l'équation (E).  
b. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $Z^2 + (6-4i)Z + 5-14i = 0$   
c. Résoudre à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E)
2. On considère les points A, B et D d'affixes respectives  $u = i; v = -2+3i$  et  $t = -4+i$ 
  - a. Placer les points A, B et D dans le repère.
  - b. Ecrire le nombre complexe  $Z = \frac{u-v}{t-v}$  sous forme trigonométrique
  - c. En déduire que le triangle ABD est rectangle isocèle en B.
3. Soit la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S.
  - a. Justifier que le triangle ABB' est rectangle isocèle en B.
  - b. En déduire la construction du point B'.
4. Déterminer l'écriture complexe de S et calculer l'affixe de B'.

## EXERCICE 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématique et en sciences physiques par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005.

$X_i$  est la note de mathématique,  $Y_i$  la note en sciences physiques.

$X_i$	4	6	7	9	11	14	12	17
$Y_i$	3	4	6	8	10	12	9	14

1. Représenter graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 1cm.
2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage puis le placer dans le repère.
3. a. Vérifier que la covariance  $\text{cov}(X, Y)$  de la série statistique est égale à  $\frac{57}{4}$ .  
b. Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
4. Démontrer qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est :  $Y = \frac{19}{22}X - \frac{17}{44}$ .
5. Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, calculer la note probable de mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en sciences physiques.

## PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  [et définie par :

$$f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$$

On note (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité graphique 1 cm).

### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction dérivable sur  $]0; +\infty[$  [et définie par :  $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$ .

- 1°) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- 2°) Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ g(x) > 0$ .

## PARTIE B

- 1°) a) Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis interpréter graphiquement le résultat.
- 2°) a) Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote à (C) en  $+\infty$ .  
b) Préciser la position de (C) par rapport à (D).
- 3°) a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif  $x$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .  
b) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.  
c) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est :  $y = 3x - 4$ .
- 4°) a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
b) Justifier que :  $1,3 < \alpha < 1,4$ .

## PARTIE C

On pose :  $\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$  et  $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$ .

- 1°) a) Déterminer le sens de variation de  $h$  sur  $]0; +\infty[$   
b) Calculer  $h(1)$  puis justifier que :  $\forall x \in ]0; 1[, h(x) > 0$ ; et  $\forall x \in ]1; +\infty[, h(x) < 0$ .
- 2°) a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$   
b) Etudier les variations de  $\varphi$  puis en déduire le signe de  $\varphi(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .  
c) Déterminer la position de (C) par rapport à (T).

## PARTIE D

- 1°) Tracer la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T). On prendra  $\alpha = 1,35$ .  
2°) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = e$ .

# BACCALAUREAT SESSION 2009

## EXERCICE 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre plaqués en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffre d'affaire X (en million de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coût de production Y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1. Représenter graphiquement le nuage de point associé à la série double (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).  
*On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisse et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.*
2. Calculer le chiffre d'affaire moyen  $\bar{X}$  et le coût moyen  $\bar{Y}$ .
3. a) Vérifier qu'un arrondi à l'entier de  $\text{cov}(X, Y)$  de la série statistique est égale à **1193**.  
b) Justifier l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y.
4. a) Déterminer une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.  
b) Construire (D) dans le repère (O, I, J).
5. Utiliser l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaire de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

## **EXERCICE 2**

Soit la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$$

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Représenter sur l'axe des abscisses les termes  $U_0; U_1; U_2$  et  $U_3$  de la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (unité graphique 2 cm).
2. a) Démontrer par récurrence que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par  $\frac{5}{2}$ .  
b. Démontrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.
3. Soit la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$ 
  - a. Démontrer que la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera raison et le premier terme.
  - b. Exprimer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. Déterminer la limite de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

## **PROBLEME**

### **PARTIE A**

On considère la fonction  $g$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par :  $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1. Justifier que la limite de  $g$  en  $+\infty$  est  $-1$  et déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$ .
2. a) Démontrer que l'équation  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .  
b) Justifier que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .

3. En déduire que : 
$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$$

### **PARTIE B**

On considère la fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et définie par  $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ .

Unité graphique est 2 cm.

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. a) Démontrer que  $f$  est une primitive de  $g$ .  
b) Etudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$ .  
b) Etudier la position relative de  $(D)$  et  $(C)$ .
4. Démontrer que  $(C)$  admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction  $(OJ)$ .
5. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
6. Démontrer que  $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1 - \alpha}$ .
7. Justifier que, pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(-x + 2) = e^{x-1} f(x)$ .
8. On admet que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions.  
On appelle  $\beta$  l'une de ces solutions. Démontrer que  $-\beta + 2$  est l'autre solution.
9. Tracer  $(D)$ ,  $(T)$  et  $(C)$ . (On prendra  $\alpha = 0,4$  et  $\beta = 2,5$ ).

### **PARTIE C**

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif et  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C)$ , la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$

1. Calculer  $A(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties.
2. Déterminer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

# BACCALAUREAT SESSION 2010

## EXERCICE 1

### Partie A

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(E) : 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4 = 0$ .

- 1- Déterminer les racines carrées de  $6 + 6i\sqrt{3}$
- 2- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$
- 3- a) Développer, réduire et ordonner  $(2z+1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$ .  
b) En déduire les solutions de (E).
- 4- Soit  $z_0 = -\frac{1}{2}$ ,  $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ ;  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ .

Exprimer chacun des nombres complexes  $z_0$ ;  $z_1$ ;  $z_2$ ; sous forme trigonométrique.

### Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  où l'unité est 1 cm, on considère les points :  $M_0$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$  et  $1 + i\sqrt{3}$

S est la similitude directe de centre O, d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  et de rapport 2.

- 1- a) Déterminer l'écriture complexe de S.  
b) Justifier que  $S(M_0) = M_1$  et  $S(M_1) = M_2$
- 2- Soit  $M_n$  un point du plan d'affixe  $z_n$ . On pose pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $M_{n+1} = S(M_n)$ .  
Justifier que  $z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3})z_n$  où  $z_{n+1}$  est l'affixe de  $M_{n+1}$ .

## EXERCICE 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.

Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8 ; on ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3. On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.
4. On contrôle 5 individus au hasard.
  - a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
  - b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.
5. On contrôle  $n$  individus pris au hasard, ( $n$  est un entier naturel non nul).  
Déterminer la plus petite valeur  $n_0$  de  $n$  pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

## PROBLEME

### Partie A

Soit la fonction  $g$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  et définie par :  $g(x) = 1 + x \ln x$ .

1. a) Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $g'(x) = 1 + \ln x$   
b) Etudier les variations de  $g$  puis dresser son tableau de variation.

2. En déduire que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , g(x) > 0$ .

**Partie B**

Soit f la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \forall x \in ]0; +\infty[ , f(x) = \frac{x}{1+x \ln x} \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans la plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).  
(Unité : 4 cm)

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.  
b) Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est :  $y = x$ .  
d) Démontrer que : (C) est au-dessus de (T) sur  $]0; 1[$  et (C) est au-dessous de (T) sur  $]1; +\infty[$
2. Démontrer que la droite (OI) est asymptote à (C) en  $+\infty$ .
3. a) On admet que f est dérivable sur  $]0; +\infty[$ . Démontrer que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , f'(x) = \frac{1-x}{(1+x \ln x)^2}$ .  
b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Construire la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).

**Partie C**

1. Justifier que :  $\forall x \in ]0; +\infty[ , f(x) \leq 1$  et démontrer que :  $\forall x \in ]1; e[ , 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$ .
2. Soit A l'aire en  $cm^2$  de la partie du plan limitée par (C), (OI), et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ . Démontrer que :  $16(e-1) + 16 \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$ .

**BACCALAUREAT SESSION 2011\***

**EXERCICE 1**

On considère la suite numérique (Vn) définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$ .

- 1- a) Démontrer que la suite (Vn) est convergente et donner sa limite.  
b) Démontrer que la suite (Vn) est croissante.  
c) Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{3}{4} \leq V_n < 1$ .
- 2- On pose pour tout entier naturel non nul n :  $a_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ .  
a) Démontrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* ,$  on a :  $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ .  
b) En déduire la limite de la suite (a<sub>n</sub>).
- 3- On pose pour tout entier naturel non nul n :  $b_n = \ln(V_1) + \ln(V_2) + \dots + \ln(V_n)$ .  
a) Démontrer que la suite (b<sub>n</sub>) est une suite à termes négatifs.  
b) Calculer la limite de la suite (b<sub>n</sub>).

**EXERCICE 2**

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé.  
Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g).  
La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci- dessous. ( a et b sont deux nombres réels).

$x_i$ (en g)	220	230	240	250	260	270	280
$P_i$	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

$X_i$  représente la masse du sachet de lait et  $P_i$  la probabilité qu'un sachet de ce lait ait la masse  $x_i$ .

1- a) Calculer l'espérance mathématique  $E(X)$  de  $X$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

b) Sachant que  $E(X)=250$ , justifier que :  $a=0,14$  et  $b=0,33$ .

( Dans la suite de l'exercice on prendra les valeurs de  $a$  et  $b$  ci-dessus )

2- Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calculer la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

3- Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard et de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calculer la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

( On prendra l'arrondi d'ordre 3 du résultat ).

4- Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine. Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait caillé de masse strictement inférieure à 250.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.

- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.

- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.

- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure à 250g, il est systématiquement accepté.

a) Justifier que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 250 g soit éliminé est de 0,098.

b) Calculer la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

## **PROBLEME**

### **Partie A**

Soit la fonction numérique dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  et définie par :  $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$ .

1- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ .

2-a) Démontrer que :  $\forall x \in ]0 ; +\infty[ , g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$ .

b) En déduire le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation..

3-a) Démontrer que l'équation :  $x \in ]0 ; +\infty[ , g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

b) Justifier que  $2,25 < \alpha < 2,26$ .

c) Démontrer que :  $\forall x \in ]0 ; \alpha[ , g(x) < 0 ; \forall x \in ]\alpha ; +\infty[ , g(x) > 0$ .

### **Partie B**

On considère la fonction dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  et définie par :  $f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)e^{-x}$ .

On note ( C ) la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal ( O , I , J ) .

Unités graphiques :  $OI = 2cm$  et  $OJ = 10cm$ .

1-a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  puis donner une interprétation graphique du résultat.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  , puis donner une interprétation graphique du résultat.

2- Démontrer que  $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}$ .

3- a) Démontrer que  $x \in ]0 ; +\infty[ , f'(x) = e^{-x} . g(x)$ .

b) En utilisant la partie A, déterminer les variations de  $f$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4- Démontrer qu'une équation de la tangente ( T ) à ( C ) au point d'abscisse 1 est :  $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$ .

5- Construire ( C ) et ( T ) dans le même repère ( O,I,J ). On prendra  $\alpha = 2,6$ .

### **Partie C**

1- Soit  $h$  la fonction numérique dérivable sur  $]0 ; +\infty [$  et définie par :  $h(x) = e^{-x} \ln x$ .

Démontrer que  $h$  est une primitive de  $f$  sur  $]0 ; +\infty [$ .

2- Soit  $\lambda$  un nombre réel tel que  $\lambda > 3$ .

a) Calculer en  $\text{cm}^2$  et en fonction de  $\lambda$ , l'aire  $A(\lambda)$  de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équations  $x = 3$  et  $x = \lambda$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

## BACCALAUREAT SESSION 2012\*

### EXERCICE 1

Madame Kouamé, statisticienne à créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011 elle a fait l'état des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous:

Type de collier	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix $x_i$ de vente en centaines de francs CFA du collier de type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre $y_i$ de dizaines de colliers vendus au prix $x_i$	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :

X le caractère « prix de vente du collier » ;

Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X ».

- Représenter graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour 10 centaines
- Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.
- Calculer la variance  $V(X)$  de X .
  - Calculer covariance  $COV(X, Y)$  de X et Y de la série statistique double (X ; Y) .
  - On admet que  $V(Y) = 14,50$ . Démontrer que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à -0,99.
- Soit (D) la droite (D) de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.
  - Justifier que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.
  - Démontrer qu'une équation de la droite (D) est  $y = -0,23x + 29,94$ .
- Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de collier qu'elle vendrait à 11500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

### EXERCICE 2

On considère la suite numérique U définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_n + \frac{4}{U_n} \right). \end{cases}$$

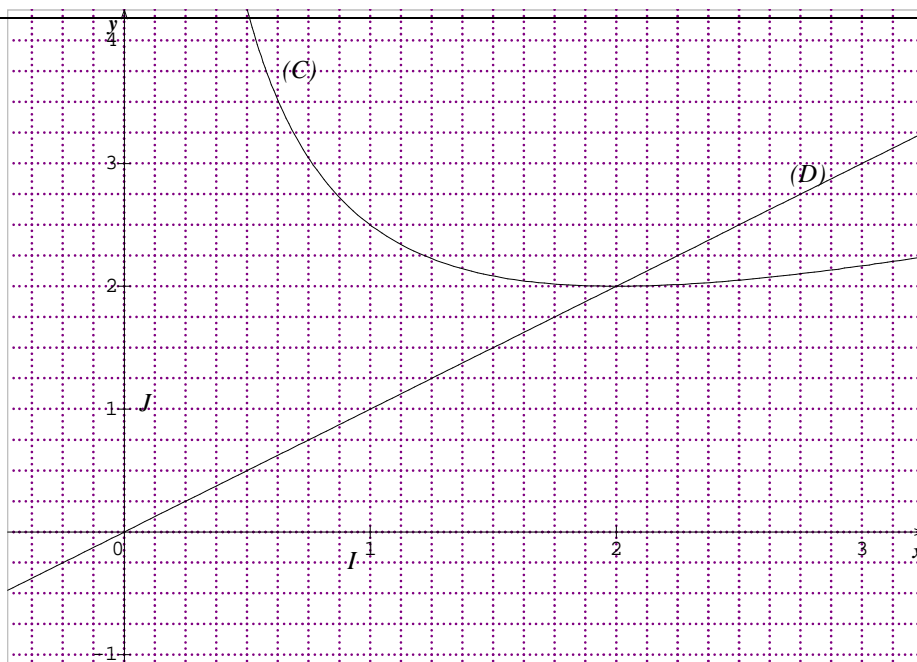
1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{4}{x} \right)$ . On appelle (C)

la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

Unité : 4cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

La courbe (C) et la droite (D) d'équation  $y = x$  sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

a) Représenter sur l'axe des abscisses (OI) les termes  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$  en utilisant (C) et (D).



- b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite  $U$  ?
2. On admet que  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[2 ; 3]$ .
- Démontrer que  $f([2 ; 3]) \subset [2 ; 3]$ .
  - En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $2 \leq U_n \leq 3$ .
3. a) Démontrer que  $U$  est une suite décroissante.  
b) En déduire que  $U$  est convergente.
4. Soit  $V$  la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$ .
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $V_{n+1} = (V_n)^2$ .
  - Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$   $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}$ .
  - Calculer  $V_1$  puis exprimer  $V_n$  en fonction de  $n$ .
  - Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
  - Démontrer que  $\lim V = 0$ . En déduire la limite de  $U$ .

## **PROBLEME**

### **Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = e^x + 2\ln x$ .

- Déterminer les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$ .
  - Calculer  $g'(x)$ .
  - Etudier le sens de variation de  $g$  puis dresser son tableau de variation.
- Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
  - Vérifier que  $0,4 < \alpha < 0,5$ .
  - Démontrer que : pour tout  $x \in ]0 ; \alpha]$ ,  $g(x) < 0$  ;  
pour tout  $x \in ]\alpha ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$ .

### **Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x \ln x - 2x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On appelle (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé

(O, I, J). (Unité 4 cm).

1. a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .

b) Interprétation graphique les résultats.

2. a) Démontrer que  $f$  est continue en 0.

b) Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$ .

c) La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ? Justifier la réponse.

d) Interprétation graphique le résultat de la question 2.b).

3. On admet que  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty [$ .

a) Démontrer que pour tout  $x \in ]0 ; +\infty [$ ,  $f'(x) = g(x)$ .

b) Etudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe (C) sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ . ( On prendra  $\alpha = 0,45$  et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6)

5. a) On pose  $K = \int_1^2 x \ln x dx$ . A l'aide d'une intégration par partie, démontrer que  $K = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$ .

b) Soit A l'aire en cm<sup>2</sup> l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations:  $x = 1$  ;  $x = 2$  ; la courbe (C) et la droite (OI).

Calculer A puis donner l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

# CORRIGE DES EXERCICES MARQUES PAR UNE ETOILE(\*)

## CHAPITRE 1 LIMITES ET CONTINUITÉ

### EXERCICE 1

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x - 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ .
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (-3) = -3$ .
- 4)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x - 1} = \frac{2(-1) + 1}{-1 - 1} = \frac{1}{-2}$ .
- 5)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 = 3 + 3 = 6$
- 6)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 8) \left( \frac{1}{x - 2} \right) = +\infty$   
 car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 8) = 3 \times 2 - 8 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x - 2} \right) = -\infty \end{cases}$
- 7)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{-x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x + 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) \left( \frac{1}{x - 3} \right)$   
 $= -\infty$ , car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} (-x + 2) = -3 + 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x - 3} \right) = +\infty \end{cases}$
- 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3) \times \frac{1}{(x - 1)^2} = -\infty$   
 car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3) = 1^3 - 3 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} = +\infty \end{cases}$

### EXERCICE 3

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 15}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 15 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ .  
 donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 15} = +\infty$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x + 8} - 3)(\sqrt{x + 8} + 3)}{(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x + 8} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + 8} + 3} = \frac{1}{6}$$

- 3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{2 + x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{2 + x^2})(x - \sqrt{2 + x^2})}{x - \sqrt{2 + x^2}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x - \sqrt{2 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x - \sqrt{x^2 \left( \frac{2}{x^2} + 1 \right)}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x - |x| \sqrt{\left( \frac{2}{x^2} + 1 \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{x + x \sqrt{\left( \frac{2}{x^2} + 1 \right)}}$   
 $= 0$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -\infty$ .
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - 4x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 4x$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 4x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 4 \right) = -\infty$   
 car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)} - 4 = -3$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1})(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1})}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}} = 0$   
 car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} = +\infty$ .

### EXERCICE 4

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sin(x - 2)}$ . Posons  $X = x - 2$  ;  
 quand  $x \rightarrow 2$  ;  $X \rightarrow 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sin(x - 2)}$   
 $= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X}{\sin X} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin X}{X}} = 1$  car  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ .
- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . Posons  $\frac{1}{x} = X$  ;  $\Rightarrow x = \frac{1}{X}$ ,  
 quand  $x \rightarrow +\infty$  ;  $X \rightarrow 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{X} \sin X = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1.$

3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \cos(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \cos'(\frac{\pi}{2})$   
 $= -\sin'(\frac{\pi}{2}) = -1$

4)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2(\sin x - \frac{1}{2})}{6(x - \frac{\pi}{6})}$   
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} \left( \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}} \right) = \frac{1}{3} \sin'(\frac{\pi}{6})$   
 $= \frac{1}{3} \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$

5)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi(-1)}{2} = \frac{-\pi}{2}.$

6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$ . Posons  $3x = X$ ;  $\Rightarrow x = \frac{X}{3}$ ,  
 quand  $x \rightarrow 0$ ;  $X \rightarrow 0$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{2(\frac{X}{3})} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{3 \sin X}{2 X} = \frac{3}{2}.$

**EXERCICE 7**

$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

1)  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[.$

2) •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2} = 2$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2} = 2.$

•  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+2) \left( \frac{1}{x-1} \right)$   
 $= -\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x+2 = 2 \times 1 + 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{cases}.$

•  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+2) \left( \frac{1}{x-1} \right)$   
 $= +\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x+2 = 2 \times 1 + 2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{cases}.$

- 3) • La droite d'équation  $x = 1$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$ .  
 • La droite d'équation  $y = 2$  est une asymptote horizontale à  $(C_f)$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

4)  $\forall x \in D_f,$

$f'(x) = \frac{(2x+2)'(x-1) - (2x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}$   
 $= \frac{2(x-1) - (2x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-4}{(x-1)^2}.$

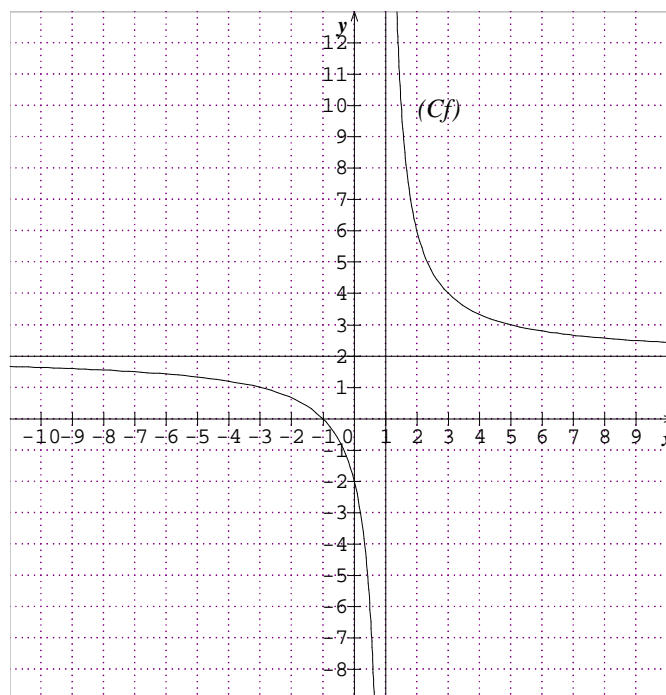
$\forall x \in D_f, (x-1)^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui du numérateur -4. Donc  $\forall x \in D_f, f'(x) < 0$ .

$f$  est donc strictement décroissante sur les intervalles  $]-\infty; 1[$  et  $]1; +\infty[.$

**Tableau de variation de  $f$**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
f(x)	2	2	$-\infty$

**5) Constructions**



**EXERCICE 9**

$f(x) = x + \sqrt{4x^2 - 1}$

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} - 2x$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 1} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 1} + 2x)}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{4x^2} + 2x} = 0$$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 1} + 2x = +\infty$ .

Donc la droite (D) d'équation  $y = 3x$  est une asymptote horizontale à (Cf) en  $+\infty$ .

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - 1)}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x - \sqrt{4x^2 - 1}} = 0$$

Car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 1} = -\infty$ .

Donc la droite d'équation  $y = -x$  est une asymptote horizontale à (Cf) en  $-\infty$ .

### EXERCICE 13

1)  $f(x) = \frac{x^4 + 5x^2 + 7}{x^2 + 3x + 8}$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 + 3x + 8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 5x^2 + 7}{x^3 + 3x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Donc (Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ) en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2)  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{x-1}{x+2}$ . Df =  $[0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} + \frac{x-1}{x+2} = +\infty$$

car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x-1}{x^2 + 2x} = 0$$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc (Cf) admet une branche parabolique de direction (OI) en  $+\infty$ .

### EXERCICE 15

1)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$

Or  $f(2) = 0 \neq 4$ . Donc f n'est pas continue en 2.

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ . Posons  $X = 2x$ ;  $x = \frac{X}{2}$

Quand  $x \rightarrow 0$ ;  $X \rightarrow 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{\frac{X}{2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{2 \sin X}{X} = 2$

Car  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1$  et  $f(0) = 2$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(2)$ , donc f est continue en 0.

3)  $f(x) = \frac{|x+1|}{x}$ . Df =  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  donc f n'est pas continue en 0.

4)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = 0$  et

$f(1) = \sqrt{1-1} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ , par conséquent f est continue en 1.

### EXERCICE 18

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$

Df =  $] -\infty; -2[ \cup ] 2; +\infty[$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x+2}{x-2}} \end{aligned}$$

or  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) \times \frac{1}{(x-2)} = +\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ . Par

conséquent f n'admet pas de prolongement par continuité en 2.

b)  $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ . Df =  $] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} [ \setminus \{0\}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 \end{aligned}$$

car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$ .

Donc f admet un prolongement par continuité en 0.  
Le prolongement par continuité de f en 0 est la fonction

g définie par :  $\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ \setminus \{0\}, g(x) = \frac{\tan x}{x}$  et  $g(0) = 1$ .

**EXERCICE 20**

$f(x) = x^3 - x^2 + 1$   
1) Df =  $\mathbb{R}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ .

$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\frac{2}{3}; +\infty[ f'(x) > 0$

$\forall x \in ]0; \frac{2}{3}[, f'(x) < 0$

**Tableau de variatio de f**

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	1	$\frac{22}{27}$	$+\infty$	

• Sur  $]-\infty; 0[$ , f est continue et strictement croissante et  $f(]-\infty; 0[) = ]-\infty; 1[$ . Or  $0 \in ]-\infty; 1[$ , donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une seule solution dans  $]-\infty; 0[$ .

• Sur  $]0; \frac{2}{3}[$  f est continue et strictement décroissante et  $f(]0; \frac{2}{3}[) = ]\frac{22}{3}; 1[$  or  $0 \notin ]\frac{22}{3}; 1[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $]0; \frac{2}{3}[$ .

• Sur  $]\frac{2}{3}; +\infty[$ , f est continue et strictement croissante et  $f(]\frac{2}{3}; +\infty[) = ]\frac{22}{3}; +\infty[$  or  $0 \notin ]\frac{22}{3}; +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $]\frac{2}{3}; +\infty[$ .

Conclusion : l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]-\infty; 0[$ .

2)  $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$

$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$

$f(-1) \times f(0) < 0$ , donc  $-1 < \alpha < 0$ .

3) Encadrement de  $\alpha$  par la méthode de balayage.

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	.....	0
f(x)	-	-	-	+	.....	+

$f(-0,8) \times f(-0,7) < 0$  donc  $-0,8 < \alpha < -0,7$

**EXERCICE 24**

$f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ . Df =  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ .

1)  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{(x-1)'(2x+3) - (x-1)(2x+3)'}{(2x+3)^2}$   
 $= \frac{2x+3 - 2(x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{5}{(x+3)^2}$ .

$\forall x \in Df, f'(x) > 0$  donc f est strictement croissante sur  $]-\infty; -\frac{3}{2}[$  et sur  $]-\frac{3}{2}; +\infty[$

**Tableau de variatio de f**

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
f'(x)	+		+
f(x)	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

• Sur  $]-\frac{3}{2}; 1]$ , f est continue et strictement croissante, donc  $f(]-\frac{3}{2}; 1]) = ]\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x); f(1)[ = ]-\infty; 0]$

• Sur  $]-\infty; -\frac{3}{2}[$ , f est continue et strictement croissante, donc  $f(]-\infty; -\frac{3}{2}[) = ]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^-} f(x)[ = ]\frac{1}{2}; +\infty[$ .

**EXERCICE 28**

1) Df =  $\mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$ .

2)  $f(]-\infty; -2]) = [f(-2); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[ = [1; +\infty[$ .

•  $f(]0; 1[) = ]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)[ = ]-\infty; -3[$ .

•  $f(]3; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ]-\infty; +\infty[$ .

3) Sur  $]-2; 0]$  f est continue et strictement croissante,  $f(]-2; 0]) = ]\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)[ = ]1; +\infty[$

donc

f réalise une bijection de  $]-2; 0]$  sur  $]1; +\infty[$ .

4) Sur  $]3; +\infty[$  f est continue et strictement croissante,  $f(]3; +\infty[) = ]-\infty; +\infty[$ . Or  $0 \in ]-\infty; +\infty[$ , donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]3; +\infty[$ .

**5) Signe de f(x).**

Sur  $] -\infty; 0[$ , 1 est le minimum de f et  $1 > 0$ , donc

$$\forall x \in ] -\infty; 0[ , f(x) > 0.$$

Sur  $] 0; 3[$ , -3 est le maximum de f et  $-3 < 0$ , donc

$$\forall x \in ] 0; 3[ , f(x) < 0.$$

Sur  $] 3; +\infty[$  f est continue et strictement croissante et

$f(\alpha) = 0$  avec  $\alpha \in ] 3; +\infty[$ . donc  $\forall x \in ] 3; \alpha[ , f(x) < f(\alpha)$

et  $\forall x \in ] \alpha; +\infty[ f(x) > f(\alpha)$ .

conclusion :  $\forall x \in ] -\infty; 0[ \cup ] \alpha; +\infty[ f(x) > 0$  et

$$\forall x \in ] 0; 3[ \cup ] 3; \alpha[ , f(x) < 0$$

**CHAPITRE 2 DERIVEES et PRIMITIVES**

**EXERCICE 2**

Déterminons la fonction dérivée  $g'$  de la fonction numérique  $g$  dans chacun des cas suivants :

$$1) g'(x) = (\sqrt{2x^2 + 1})' = \frac{(2x^2 + 1)'}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$2) g'(x) = (\cos(x^2 - 1))' = -(x^2 - 1)' \sin(x^2 - 1) = -2x \sin(x^2 - 1).$$

$$3) g(x) = (x\sqrt{2-x^2})' = x'\sqrt{2-x^2} + x(\sqrt{2-x^2})' = \sqrt{2-x^2} + x(\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}) = \sqrt{2-x^2} + x(\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}) = \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$4) g'(x) = (\sin(\frac{\pi}{x}))' = (\frac{\pi}{x})' \cos(\frac{\pi}{x}) = -\frac{\pi}{x^2} \cos(\frac{\pi}{x})$$

$$5) g'(x) = (\sqrt{\frac{2+x}{1-x}})' = \frac{(\frac{2+x}{1-x})'}{2\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}} = \frac{\frac{3}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}} = \frac{3}{2(1-x)^2 \sqrt{\frac{2+x}{1-x}}}$$

$$6) g'(x) = [(2 - \sin(5x))^3]'$$
$$= 3(2 - \sin(5x))'(2 - \sin(5x))^2$$
$$= 3(-5\cos(5x))(2 - \sin(5x))^2$$
$$= -15\cos(5x)(2 - \sin(5x))^2$$
$$7) g'(x) = (\frac{1}{\tan x})' = \frac{-(\tan x)'}{(\tan x)^2} = \frac{-1}{\cos^2 x \tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

**EXERCICE 4**

- 1) f est dérivable en 2. ; 2) f est dérivable en 0.
- 3) f n'est pas dérivable en 1; 4) f est dérivable en 2.

**EXERCICE 5**

continuité et dérivabilité de f au point a

**1) •Continuité**

$$Df = ] -\infty; -1[ \cup ] 1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{(-1)^2 - 1} = 0$$

$$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 1} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$  Donc f est continue en -1.

**•Dérivabilité**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{(x + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = -\infty.$$

Car  $\lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$

donc f n'est pas dérivable en -1

**• Interprétation graphique :**

La courbe représentative de f dans un repère orthogonal admet une tangente verticale au point d'abscisse -1.

**2) •continuité**

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1^2 = 1 ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

et  $f(1) = 1^2 = 1$ .  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Donc  $f$  est continue en 1.

**•Dérivabilité**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{x(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ Donc } f \text{ n'est pas}$$

dérivable 1

**•Interprétation graphique.**

La courbe représentative de  $f$  admet deux demi tangents au point d'abscisse 1.

**3) • continuité**

$$Df = \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 1 = 0^2 + 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{3x + 9} = 2\sqrt{3 \times 0 + 9} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ Donc } f \text{ n'est pas continue en } 0.$$

**• Dérivabilité**

$f$  n'est pas continue en 0 donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**4) • continuité**

$$Df = [-1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt{x+1} = 0 \times \sqrt{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{0+1} = 0$$

$$f(0) = 1 - \frac{1}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

**•Dérivabilité**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 1$

**EXERCICE 8**

Soit  $h$  la bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$  définie

par  $h(x) = \frac{1}{x}$ .

1) Calculons  $h\left(\frac{1}{2}\right)$ .  $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .

2) Sachant que  $h^{-1}$  est dérivable en 2, calculons

$$(h^{-1})'(2)$$

On a  $h(x) = \frac{1}{x}$  ;  $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$(h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'[(h^{-1})(2)]} \text{ or } h\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$h^{-1}(2) = \frac{1}{2} \text{ Donc } (h^{-1})'(2) = \frac{1}{h'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \text{ Donc } (h^{-1})'(2) = -\frac{1}{4}$$

3) Justifions que  $h^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{3}$  et

calculons

$$(h^{-1})'(3) \text{ Résolvons l'équation } h(x) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 3 \text{ ; On a } h(3) = \frac{1}{3} \Rightarrow h^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 3.$$

Calculons  $h'(h^{-1}\left(\frac{1}{3}\right))$

$$h'(h^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)) = h'(3) = -\frac{1}{9} \quad h'(3) \neq 0 \text{ Donc } h^{-1} \text{ est}$$

$$\text{dérivable en } \frac{1}{3} \text{ et } (h^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{9}} = -9.$$

**EXERCICE 13**

1) Soit  $f(x) = \frac{-2x+3}{x-1}$   $Df = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x} = -2$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} (-2x+3) \left( \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} -2x+3 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} \frac{1}{x-1} = -\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} (-2x+3) \left( \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} -2x+3 = 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

Interpréter graphiquement des résultats.

La droite d'équation  $y = -2$  est une asymptote horizontale à (Cf) en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

La droite d'équation  $x = 1$  est une asymptote verticale à (Cf).

$$\begin{aligned} 2) \forall x \in Df : f'(x) &= \left( \frac{-2x+3}{x-1} \right)' \\ &= \frac{-2(x-1) - (-2x+3)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x+2+2x-3}{(x-1)^2} \\ f'(x) &= \frac{-1}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

$\forall x \in Df \quad f'(x) < 0$  donc  $f$  est continue et strictement décroissant sur  $] -\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$

$$f(]1; +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ >}} f(x)[ = ] -2; +\infty[$$

Donc  $f$  réalise une bijection  $g$  de  $]1; +\infty[$  sur l'intervalle  $J = ] -2; +\infty[$

**3) Justifions que  $g^{-1}$  est dérivable en 1**

Résolvons l'équation  $g(x) = 1$ .

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x+1} = 1$$

$$-2x+3 = x+1 \quad \text{Donc } x = \frac{2}{3}$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \Rightarrow g^{-1}(1) = \frac{2}{3}.$$

Calculons  $g'(g^{-1}(1))$

$$g'(g^{-1}(1)) = g'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2} = -9$$

$g'(g^{-1}(1)) \neq 0$  Donc  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et on a

$$(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = -\frac{1}{9}.$$

**4) Explicitons  $g^{-1}(x)$  et retrouvons le résultat précédent.**

Soit  $x \in ]1; +\infty[$  et  $y \in ] -2; +\infty[$  tel que  $g(x) = y$ .

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{-2x+3}{x-1} = y \Leftrightarrow -2x+3 = y(x-1)$$

$$\Leftrightarrow -2x - yx = -y - 3$$

$$\Leftrightarrow x(-2-y) = -y-3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+3}{y+2}. \quad \text{Donc } g^{-1}(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

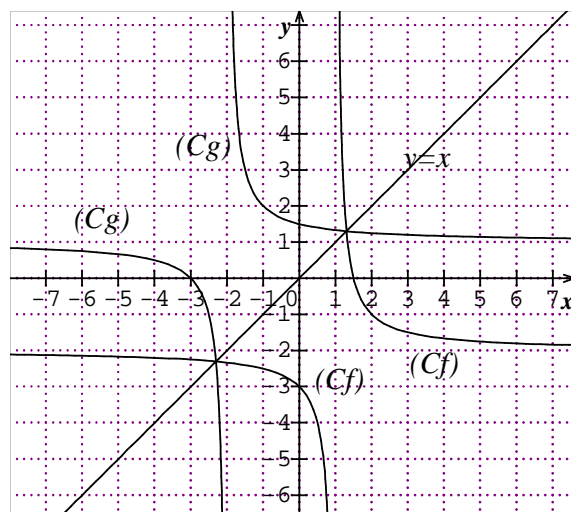
Retrouvons le résultat précédent.

$$(g^{-1})'(x) = \left( \frac{x+3}{x+2} \right)' = \frac{x+2-(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} \quad \text{et } (g^{-1})'(1) = \frac{-1}{(1+2)^2}$$

$$\text{Soit } (g^{-1})'(1) = -\frac{1}{9}.$$

**5) Construction  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère.**



**EXERCICE 18**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur

$$[0; +\infty[ \text{ par } f(x) = (x-3)\sqrt{2x}$$

**1. Etudions la continuité de  $f$  en 0**

$$f(0) = (0-3)\sqrt{2 \times 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-3)\sqrt{2x}$$

$$= (0-3)\sqrt{2 \times 0} = 0$$

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  Donc  $f$  est continue en 0

## 2. Etudions la dérivabilité de $f$ en 0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{(x-3)\sqrt{2x}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (x-3)\sqrt{\frac{2x}{x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} (x-3)\sqrt{\frac{2}{x}} = -\infty$$

Car  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \frac{2}{x} = +\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} x - 3 = -3$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

### Interprétation graphique.

( $C_f$ ) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

## 3. Déterminons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)\sqrt{2x} = +\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)\sqrt{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)\sqrt{2x}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

### Interprétation graphique

( $C_f$ ) admet une branche parabolique de direction (OJ) en  $+\infty$ .

## 4 a) Démontrons que $\forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{2x}}$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) = [(x-3)\sqrt{2x}]'$$

$$= (x-3)' \sqrt{2x} + (x-3)(\sqrt{2x})'$$

$$= \sqrt{2x} + (x-3)\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)$$

$$= \sqrt{2x} + \frac{x-3}{\sqrt{2x}} = \frac{2x+x-3}{\sqrt{2x}}$$

Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) = \frac{x-3}{\sqrt{2x}}$ .

## b) Signe de $f'(x)$ et le sens de variation de $f$ .

$\forall x \in ]0; +\infty[ \sqrt{2x} > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $3x-3$ .

Donc  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

$\forall x \in ]0; 1[ f'(x) < 0$ .  $\forall x \in ]1; +\infty[ f'(x) > 0$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]0; 1[$  et strictement croissante sur  $]1; +\infty[$

## c) Dressons le tableau de variation de $f$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$\frac{0}{0}$	-	0
$f(x)$	0	$-2\sqrt{2}$	$+\infty$

## 5.a) Justifions que $f$ réalise une bijection $g$

Sur  $]1; +\infty[ f$  est continue et strictement croissante et

$$f(]1; +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = [-2\sqrt{2}; +\infty[$$

Donc  $f$  réalise une bijection  $g$  de  $]1; +\infty[$  sur l'intervalle  $K = [-2\sqrt{2}; +\infty[$

## 6.a) Justifions que $g^{-1}$ est dérivable en 0

Résolvons l'équation  $g(x) = 0$ .

$$x \in ]1; +\infty[; g(x) = 0$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{2x} = 0$$

$$x-3 = 0 \text{ ou } \sqrt{2x} = 0 \text{ Donc } x = 3 \text{ ou } x = 0$$

Or  $x \in ]1; +\infty[$  Donc  $x = 3$

$$g(3) = 0 \Rightarrow g^{-1}(0) = 3.$$

Calculons  $g'(g^{-1}(0))$

$$g'(g^{-1}(0)) = g'(3) = \frac{3 \times 3 - 3}{\sqrt{2 \times 3}} = \frac{6}{\sqrt{6}} \text{ Or } \frac{6}{\sqrt{6}} \neq 0$$

Donc  $g^{-1}$  est dérivable en 0 et on a

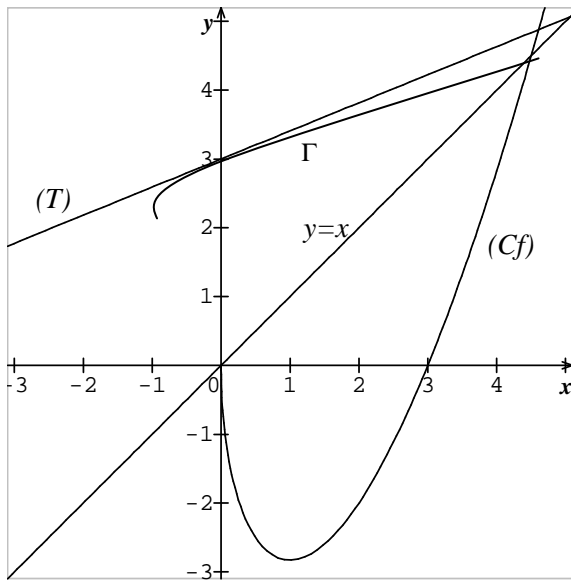
$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{6}{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

## b) Equation de la tangente (T)

$$(T): y = (g^{-1})'(0)(x-0) + (g^{-1})(0).$$

$$(T): y = \frac{\sqrt{6}}{6}x + 3$$

## 7. Construction de (Cf), ( $\Gamma$ ) et (T)



### EXERCICE 19

Déterminons une primitive  $F$  de la fonction  $f$

1)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$f(x) = (2x+1)^{-4} = \frac{1}{2}(2)(2x+1)^{-4}$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)'(2x+1)^{-4}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^{-4+1}}{-4+1}$$

$$F(x) = -\frac{1}{6}(2x+1)^{-3}$$

2)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$$

$$f(x) = \frac{2}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) = 2(\sqrt{x})' \sin(\sqrt{x})$$

$$\text{Donc } F(x) = -2 \cos(\sqrt{x})$$

3)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$$f(x) = x+1 - \frac{x-1}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$f(x) = x+1 - \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2-2x+5}$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2x^2-4x+10}$$

4)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x = (\sin' x)(\sin x)^4$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{(\sin x)^5}{5}$$

5)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \frac{3}{4} \times \frac{4x}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$$f(x) = \frac{3}{4} \times \frac{(2x^2+3)'}{\sqrt{2x^2+3}}$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{3}{4}(2\sqrt{2x^2+3} + 3) = \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+3}$$

6)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \cos^2 x$$

$$\text{La forme linéaire de } f(x) \text{ est } f(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin(2x) + x \right) = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2} x$$

7)  $F$ , une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \cos^2 x \cdot \sin^3 x = \cos^2 x (\sin x \cdot \sin^2 x)$$

$$= \sin x (\cos^2 x) (\sin^2 x)$$

$$= \sin x (\cos^2 x) (1 - \cos^2 x)$$

$$= \sin x (\cos^2 x - \cos^4 x)$$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot \cos^4 x$$

$$f(x) = -(\cos x)' \cos^2 x + (\cos x)' \cos^4 x$$

$$\text{Donc } F(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}$$

### EXERCICE 23

$$f(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$$

$$1) f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$a + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x + 5}{(x-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow a(x-1)^2 + b = 3x^2 - 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow a(x^2 - 2x + 1) + b = 3x^2 - 6x + 5$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - 2ax + a + b = 3x^2 - 6x + 5$$

$$\text{Par identification on a: } a = 3, -2a = -6 \text{ et } a + b = 5$$

$$\text{Soit } a = 3 \text{ et } b = 2 \text{ Donc, } f(x) = 3 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

2) Soit  $F$  la primitive de  $f$  qui prend la valeur 1 en 0.

$$F(x) = 3x + 2 \times \frac{1}{x-1} + c$$

$$\text{Or } F(0) = 1. \text{ Donc } F(0) = 3 \times 0 + 2 \times \frac{1}{0-1} + c \text{ Soit}$$

$$-2 + c = 1 ; c = 3$$

$$\text{Donc } F(x) = 3x + \frac{2}{x-1} + 3$$

## CHAPITRE 3

### FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

#### EXERCICE 2

Déterminons les ensembles de définition.

1)  $f(x) = \ln(-x+5)$ .  $x \in Df \Leftrightarrow -x+5 > 0$

$$\Leftrightarrow -x > -5 \Leftrightarrow x < 5$$

Donc  $Df = ]-\infty; 5[$ .

2)  $f(x) = \ln(-x)+5$

$$x \in Df \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Donc  $Df = ]-\infty; 0[$ .

3)  $f(x) = \ln(x^2-1)$

$$x \in Df \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$$

Donc  $Df = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .

4)  $f(x) = x + \ln(x^2)$

$$x \in Df \Leftrightarrow x^2 > 0. \text{ Donc } Df = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

5)  $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$$x \in Df \Leftrightarrow x-2 \neq 0 \text{ et } \frac{1}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Donc  $Df = ]2; +\infty[$ .

6)  $f(x) = \ln|2x-3|$

$$x \in Df \Leftrightarrow 2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$$

Donc  $Df = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ .

7)  $f(x) = \ln(x+1)$

$$x \in Df \Leftrightarrow x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

Donc  $Df = ]-1; +\infty[$ .

8)  $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

$$x \in Df \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Donc  $Df = ]1; +\infty[$

9)  $f(x) = \left(\frac{\ln x}{1+\ln x}\right)$

$$x \in Df \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1+\ln x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e^{-1}$$

Donc  $Df = ]0; +\infty[ \setminus \{e^{-1}\}$ .

#### EXERCICE 4

Résolution d'équations et d'inéquations

a)  $\ln(3x-1) = \ln(x+1)$

Soit  $Ev$  l'ensemble de validité.  $x \in Ev \Leftrightarrow 3x-1 > 0$

$$\text{et } x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \text{ et } x > -1. Ev = ]\frac{1}{3}; +\infty[$$

$$x \in Ev : \ln(3x-1) = \ln(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = x+1. \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$1 \in Ev$  Donc  $S_{\mathbb{R}} = \{1\}$ .

b)  $\ln x = -5$ .  $Ev = ]0; +\infty[$

$$x \in Ev : \ln x = -5$$

$$x = e^{-5} \text{ et } e^{-5} \in Ev \text{ Donc } S_{\mathbb{R}} = \{e^{-5}\}$$

c)  $\ln(-2x+1) = 2$

$$x \in Ev \Leftrightarrow -2x+1 > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$$Ev = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$$

$$x \in Ev : \ln(-2x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = e^2 \Leftrightarrow -2x = e^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{e^2 - 1}{-2}$$

$$x = \frac{1-e^2}{2} \in Ev. \text{ Donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1-e^2}{2} \right\}$$

d)  $\ln(1-x) + \ln(x+5) = \ln(-8x)$

$$x \in Ev \Leftrightarrow 1-x > 0; x+5 > 0 \text{ et } -8x > 0 \text{ donc}$$

$$x < 1; x > -5; x < 0. Ev = ]-5; 0[$$

$$x \in Ev : \ln(1-x) + \ln(x+5) = \ln(-8x)$$

$$\ln[(1-x)(x+5)] = \ln(-8x)$$

$$(1-x)(x+5) = -8x$$

$$-x^2 + 4x + 5 = 0. \Delta = 4^2 - 4(-1)(5) = 36$$

$$x_1 = \frac{-4+6}{-2} = -1; x_2 = \frac{-4-6}{-2} = 5$$

$-1 \in Ev$  et  $5 \notin Ev$ . Donc  $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$ .

e)  $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

$$Ev = ]0; +\infty[.$$

$$x \in Ev : (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$$

$$\text{Posons } X = \ln x$$

$$X^2 - X - 2 = 0. \Delta = (-1)^2 - 4(-2) = 9$$

$$X_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad X_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$\ln x = 2 \text{ ou } \ln x = -1$$

$$x = e^2 \text{ ou } x = e^{-1}$$

$$e^2 \in Ev \text{ et } e^{-1} \in Ev. \text{ Donc } S_{\mathbb{R}} = \{e^2; e^{-1}\}$$

f)  $\ln(x^2+x) = 1$

$$x \in Ev \Leftrightarrow x^2+x > 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) > 0 . Ev = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$$

$$x \in Ev : \ln(x^2 + x) = 1$$

$$x^2 + x = e \Leftrightarrow x^2 + x - e = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-e) = 1 + 4e$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4e}}{2} ; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4e}}{2}$$

$$x_1 \in Ev \quad \text{Et} \quad x_2 \in Ev$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1+4e}}{2} ; \frac{-1 + \sqrt{1+4e}}{2} \right\}$$

**g)**  $\ln x < -1$

$$Ev = ]0; +\infty[$$

$$x \in Ev : \ln x < -1$$

$$x < e^{-1} \Leftrightarrow x \in ]-\infty; e^{-1}[$$

$$S_{\mathbb{R}} = Ev \cap ]-\infty; e^{-1}[ . \quad S_{\mathbb{R}} = ]0; e^{-1}[$$

**h)**  $\ln|2x-1| \leq 0$

$$x \in Ev \Leftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

$$Ev = ]-\infty; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$x \in Ev : \ln|2x-1| \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |2x-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$$

$$S_{\mathbb{R}} = [0; 1] \cap Ev . \quad S_{\mathbb{R}} = [0; \frac{1}{2}[ \cup ]\frac{1}{2}; 1]$$

**i)**  $\ln(x^2 - x + 1) \geq \ln(2 - x)$

$$x \in Ev \Leftrightarrow x^2 - x + 1 > 0 \text{ et } 2 - x > 0$$

• résolvons  $x^2 - x + 1 > 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 . \text{ Or } -3 < 0$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x + 1 > 0$$

•  $2 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -2 . x < 2$

$$Ev = ]-\infty; 2[$$

$$x \in Ev : \ln(x^2 - x + 1) \geq \ln(2 - x)$$

$$x^2 - x + 1 \geq 2 - x \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

$$S_{\mathbb{R}} = Ev \cap ( ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[ )$$

$$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; -1] \cup [1; 2[$$

**j)**  $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 > 0$

$$Ev = ]0; +\infty[$$

$$x \in Ev : 2(\ln x)^2 - 3\ln x - 2 > 0$$

Posons  $X = \ln x$

$$2X^2 - 3X - 2 > 0 . \quad \Delta = (-3)^2 + 4(2)(2) = 25$$

$$X_1 = \frac{3+5}{4} = 2 ; X_2 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$X \in ]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\ln x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \ln x > 2$$

$$x < e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad x > e^2$$

$$S_{\mathbb{R}} = Ev \cap ( ]-\infty; e^{-\frac{1}{2}}[ \cup ]e^2; +\infty[ )$$

$$S_{\mathbb{R}} = ]0; e^{-\frac{1}{2}}[ \cup ]e^2; +\infty[$$

### EXERCICE 8

Calcul de limites

**a)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} - 2x \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{1}{3} - 2 \ln x \right) = -\infty$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln x = -\infty \end{cases}$$

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln x + \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (x \ln x + 1 - x) = +\infty$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1 \end{cases}$$

**c)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (\ln x) = -\infty$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

**d)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \ln|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(-x)$

Posons  $X = -x ; x = -X$

quand  $x \rightarrow -\infty ; X \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -X - \ln(X)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -(X + \ln X) = -\infty$$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \end{cases}$$

**e)**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$

$$\text{car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

**f)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) = \ln(1 + \sqrt{1+0^2}) = \ln 2$

**g)**  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$

Posons  $x-1 = X$  ;  $x = X + 1$

quand  $x \rightarrow 1$  ;  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} X + 1 - \frac{\ln|X|}{X} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} X + 1 - \frac{\ln X}{X} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} X + 1 - \frac{1}{X} (\ln X) = +\infty \end{aligned}$$

Car  $\lim_{X \rightarrow 0} X + 1 = 1$ ,  $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$

**h)**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$

Posons  $x-1 = X$  ;  $x = X + 1$

quand  $x \rightarrow -\infty$  ;  $X \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1} &= \lim_{X \rightarrow -\infty} X + 1 - \frac{\ln|X|}{X} \\ &= \lim_{X \rightarrow -\infty} X + 1 - \frac{\ln(-X)}{X} \end{aligned}$$

Posons  $-X = Y$  ;  $X = -Y$

quand  $X \rightarrow -\infty$  ;  $Y \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow -\infty} X + 1 - \frac{\ln(-X)}{X} &= \lim_{Y \rightarrow +\infty} -Y + 1 - \frac{\ln(Y)}{-Y} \\ &= \lim_{Y \rightarrow +\infty} -Y + 1 + \frac{\ln(Y)}{Y} = -\infty \end{aligned}$$

car  $\begin{cases} \lim_{Y \rightarrow +\infty} -Y + 1 = -\infty \\ \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{\ln Y}{Y} = 0 \end{cases}$

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{\ln|x-1|}{x-1} = -\infty$

**EXERCICE 12**

$$f(x) = -2x - 2 + \frac{2 + 2 \ln(x+2)}{x+2}$$

$$g(x) = (x+2)^2 + \ln|x+2|$$

$\forall x \in ]-2; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 + \frac{\frac{2}{x+2}(x+2) - (2 + 2 \ln(x+2))}{(x+2)^2} \\ &= -2 + \frac{2 - 2 - 2 \ln(x+2)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{-2(x+2)^2 - 2 \ln(x+2)}{(x+2)^2} \\ &= -2 \times \frac{(x+2)^2 + \ln(x+2)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Or  $g(x) = (x+2)^2 + \ln(x+2)$

Donc  $\forall x \in ]-2; +\infty[$  ,  $f'(x) = \frac{-2g(x)}{(x+2)^2}$

**EXERCICE 16**

1)  $f(x) = \frac{3}{2-x} = -3 \left( \frac{-1}{2-x} \right)$

$$f(x) = -3 \times \frac{(2-x)'}{2-x}$$

$$F(x) = -3 \ln|2-x| = -3 \ln(-2+x)$$

2)  $f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1}$

$$f(x) = -2 \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} = -2 \times \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}$$

$$F(x) = -2 \ln|x^2+x+1| = -2 \ln(x^2+x+1)$$

3)  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1}$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} (\ln(x+1)) = (\ln(x+1))' \ln(x+1)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} (\ln(x+1))^2$$

**PROBLEME 1**

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

1.a)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (x \ln x) = -\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

**b) Interprétations graphiques**

\*La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $(Cf)$ .

\*La droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à  $(Cf)$  en  $+\infty$ .

2.a)  $\forall x \in ]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' x - (\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) x - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

b)  $\forall x \in ]0; +\infty[$   $x^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1 - \ln x$ .  $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow -\ln x > -1 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$

$$\forall x \in ]0; e[ : f'(x) > 0, \forall x \in ]e; +\infty[ : f'(x) < 0$$

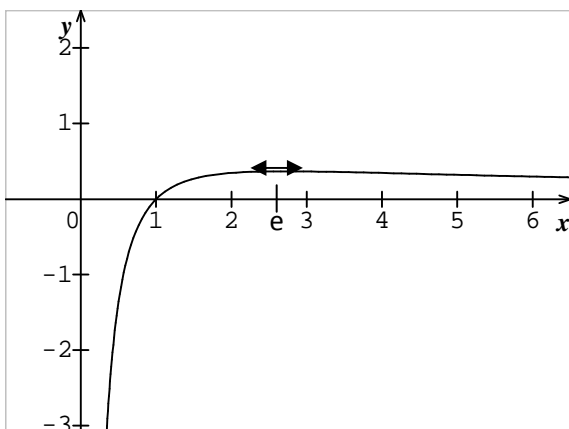
$$f'(e) = 0$$

$f$  est donc strictement croissante sur  $]0; e[$  et strictement décroissante sur  $]e; +\infty[$ .

**Tableau de variation de  $f$**

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

**Construction**



**PROBLEME 2**

$$f(x) = -x + \ln x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

**1.a) continuité en 0**

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x + x \ln x = 0$$

et  $f(0) = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$   
par conséquent  $f$  est continue en 0.

**b) dérivabilité en 0**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + x \ln x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -1 + \ln x = -\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

**Interprétation graphique :**  $(C_f)$  admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + x \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-1 + \ln x) = +\infty$$

car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \ln x = +\infty$$

**Interprétation graphique :**  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction  $(OJ)$  en  $+\infty$

**3.a)**  $\forall x \in ]0; +\infty[ : f'(x) = (-x + x \ln x)'$   
 $f'(x) = -1 + \ln x + 1 = \ln x$ .

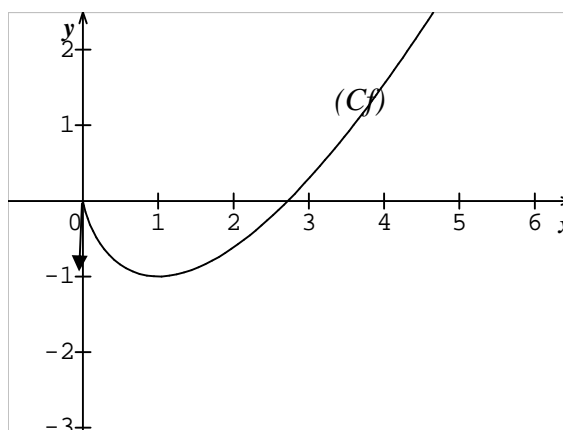
**b)**  $\forall x \in ]0; +\infty[ : f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$   
 $\forall x \in ]0; 1[ : f'(x) < 0$  et  $\forall x \in ]1; +\infty[ : f'(x) > 0$   
 $f'(1) = 0$

$f$  est donc strictement décroissante sur  $]0; 1[$  et strictement croissante sur  $]1; +\infty[$

**Tableau de variation de  $f$**

$x$	0	$e$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	-1	$+\infty$

**Construction de la courbe de  $f$**



**PROBLEME 6**

**Partie A**

$$g(x) = x^2 - 2 + 2 \ln x$$

1) \*  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2 + 2 \ln x = -\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 2 = -2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 + 2 \ln x = +\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

2-a)  $\forall x \in ]0; +\infty[ g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 2}{x}$$

$\forall x \in ]0; +\infty[ x > 0$  et  $2x^2 + 2 > 0$

Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ g'(x) > 0$

b)  $\forall x \in ]0; +\infty[ g'(x) > 0$  donc sur  $]0; +\infty[$  g est strictement croissante

**Tableau de variation de g**

x	0	$+\infty$
g'(x)		+
g(x)	$-\infty$	$+\infty$

3-a) sur  $]0; +\infty[$  g est continue et strictement croissante

en particulier sur  $]1,24; 1,25[$ .

$$g(1,24) = (1,24)^2 - 2 + 2 \ln(1,24) = -0,03$$

$$g(1,25) = (1,25)^2 - 2 + 2 \ln(1,25) = 0,008$$

$g(1,24) \times g(1,25) < 0$ . Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]1,24; 1,25[$ .

b) **Signe de g.**

Sur  $]0; +\infty[$  g est continue et strictement croissante

Donc  $\forall x \in ]0; \alpha[, x < \alpha \Rightarrow g(x) < g(\alpha)$

$\forall x \in ]\alpha; +\infty[, x > \alpha \Rightarrow g(x) > g(\alpha)$

Or  $g(\alpha) = 0$  donc  $\forall x \in ]0; \alpha[ g(x) < 0$ ,

$\forall x \in ]\alpha; +\infty[ g(x) > 0$

**Partie B**

$$f(x) = x - 2 - \frac{2 \ln x}{x}$$

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 2 - \frac{2 \ln x}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 2 - \frac{2}{x} (\ln x) \right) = +\infty$$

car  $\lim_{x \rightarrow 0} x - 2 = \alpha - 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

**Interprétation graphique.**

La droite d'équation  $x = 0$  est asymptote verticale à (Cf).

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 - \frac{2 \ln x}{x} = +\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

**Asymptote ( $\Delta$ ).**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{2 \ln x}{x} = 0$$

Donc la droite d'équation  $y = x - 2$  est asymptote oblique (Cf). en  $+\infty$ .

3) **Position relative.**

$$\forall x \in ]0; +\infty[ f(x) - (x - 2) = -\frac{2 \ln x}{x}$$

$x > 0$ , donc le signe de  $f(x) - (x - 2)$  est celui de  $-\ln x$

$-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\forall x \in ]0; 1[ f(x) - (x - 2) > 0$

$\forall x \in ]1; +\infty[ f(x) - (x - 2) < 0$

Donc sur  $]0; 1[$  (Cf) est au-dessus de ( $\Delta$ ) et sur

$]1; +\infty[$  (Cf) est au-dessous de ( $\Delta$ ).

4.a)  $\forall x \in Df; f'(x) = \left( x - 2 - \frac{2 \ln x}{x} \right)'$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left( \frac{2}{x} \right) x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - (2 - 2 \ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2 + 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b)  $\forall x \in Df, x^2 > 0$ . Donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$ .

Donc d'après la **partie A**,

$\forall x \in ]0; \alpha[ f'(x) < 0$   $\forall x \in ]\alpha; +\infty[ f'(x) > 0$ .

f est donc strictement décroissante sur  $]0; \alpha[$  et strictement croissante sur  $]\alpha; +\infty[$ .

c) **Tableau de variation de  $f$ .**

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

5. a) On a  $f(\alpha) = \alpha - 2 - \frac{2 \ln \alpha}{\alpha}$

Or  $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2 + 2 \ln \alpha = 0$

$\Leftrightarrow 2 \ln \alpha = -\alpha^2 + 2$

$\Leftrightarrow \ln \alpha = -\frac{\alpha^2 + 2}{2}$ . Donc

$$f(\alpha) = \alpha - 2 - \frac{2(-\frac{\alpha^2 + 2}{2})}{\alpha} = \alpha - 2 - \frac{-\alpha^2 + 2}{\alpha}$$

$$= \alpha - 2 + \frac{\alpha^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} = 2\alpha - 2 - \frac{2}{\alpha}$$

b) **Encadrement de  $f(\alpha)$**

$1,24 < \alpha < 1,25$

$2,48 < 2\alpha < 2,50$

$0,48 < 2\alpha - 2 < 0,50$  (1)

$\frac{1}{1,25} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1,24}$

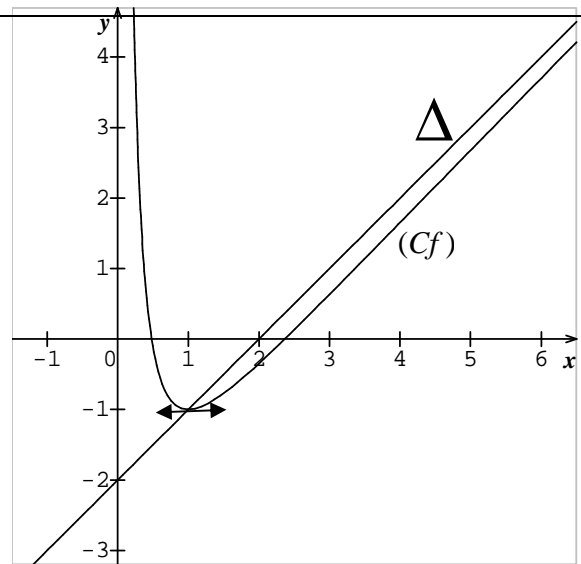
$\frac{-2}{1,24} < \frac{-2}{\alpha} < \frac{-2}{1,25}$  (2)

$(1) + (2) \Rightarrow 0,48 - \frac{2}{1,24} < f(\alpha) < 0,5 - \frac{2}{1,25}$

$-1,1329... < f(\alpha) < -1,10$

Donc  $-1,2 < f(\alpha) < -1,1$

6) **Constructions.**



**CHAPITRE 4**

**FONCTIONS EXPONENTIELLES NEPERIENNES**

**Exercice 2** Calcul de limites

1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + x + 1 = -\infty$  Car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \end{cases}$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (1 - \frac{x^2}{e^x}) = +\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 1) \frac{(e^x - 1)}{x}$

Or  $= \lim_{x \rightarrow 0} e^x + 1 = e^0 + 1 = 2$  et  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Donc  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 2$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| x^{\frac{x}{2}} - e^x \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| e^{\frac{x}{2}} (1 - e^{\frac{x}{2}}) \right|$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} \left| (1 - e^{\frac{x}{2}}) \right| \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{2}} \left( -1 + e^{\frac{x}{2}} \right)$

Posons  $\frac{x}{2} = X$  Quand  $x \rightarrow +\infty$  ;  $X \rightarrow +\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{\frac{x}{2}} - e^x| = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X (-1 + e^X) = +\infty$ .

Car  $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e^1}{x - 1}$

Posons  $e^x = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$

Or  $f'(x) = e^x$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = e^1 = e$ .

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$ . Posons  $\frac{1}{x} = X$ ;  $x = \frac{1}{X}$

Quand  $x \rightarrow 0$ ;  $X \rightarrow +\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X^2} e^X = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$ .

8)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (\frac{x}{e^x} - 1)}{e^x (1 + \frac{1}{e^x})}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{e^x} - 1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{-1}{1} = -1$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$

**EXERCICE 4** Résolution d'équations

a)  $e^{3x+2} = e$   
 $\Leftrightarrow 3x + 2 = \ln e \Leftrightarrow 3x + 2 = 1 \Leftrightarrow 3x = -1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$  donc  $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$ .

b)  $e^{2x} - 9 = 0$   
 $\Leftrightarrow (e^x)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (e^x - 3)(e^x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 3 = 0$  car  $e^x + 3 \neq 0$ .

$\Leftrightarrow e^x = 3$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$  donc  $S_{\mathbb{R}} = \{ \ln 3 \}$

c)  $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

Posons  $e^x = X$  (avec  $X > 0$ )

$X^2 - 5X + 4 = 0$ .  $\Delta = (-5)^2 - 4(4) = 9$

$X_1 = \frac{5-3}{2} = 1$  et  $X_2 = \frac{5+3}{2} = 4$

$e^x = 1$  ou  $e^x = 4$

$x = \ln 1$  ou  $x = \ln 4$ . donc  $S_{\mathbb{R}} = \{0; \ln 4\}$

d)  $e^x = -\frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = \emptyset$  car  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

e)  $e^x + 3 = 4e^{-x}$   
 $\Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^x - \frac{4}{e^x} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ . Posons  $X = e^x$  ( $X > 0$ )

$X^2 + 3X - 4 = 0$ .  $\Delta = 3^2 - 4(-4) = 25$

$X_1 = \frac{-3+5}{2} = 1$  et  $X_2 = \frac{-3-5}{2} = -4$

$e^x = 1$  ou  $e^x = -4$  (Impossible)

$x = 0$ . Donc  $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$ .

f)  $\ln(e^x - 5) = 0$

Soit  $Ev$  l'ensemble de validité

$x \in Ev \Leftrightarrow e^x - 5 > 0 \Leftrightarrow e^x > 5 \Leftrightarrow x > \ln 5$

$Ev = ]\ln 5; +\infty[$ .

$x \in Ev : \ln(e^x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow e^x - 5 = 1 \Leftrightarrow e^x = 6 \Leftrightarrow x = \ln 6$

$\ln 6 \in Ev$ . Donc  $S_{\mathbb{R}} = \{ \ln 6 \}$ .

**EXERCICE 6** Résolution d'inéquations

a)  $e^{x-3} \geq 1$

$\Leftrightarrow x - 3 \geq \ln 1 \Leftrightarrow x \geq 3$ .  $S_{\mathbb{R}} = [3; +\infty[$

b)  $\frac{e^x + 3}{e^x - 1} < e^x$

Soit  $Ev$  l'ensemble de validité

$x \in Ev \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .  $Ev = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \in Ev : \frac{e^x + 3}{e^x - 1} < e^x$

$\Leftrightarrow \frac{e^x + 3}{e^x - 1} - e^x < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x + 3 - e^{2x} + e^x}{e^x - 1} < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{e^{2x} + 2e^x + 3}{e^x - 1} < 0 \Leftrightarrow$

$-\frac{(e^x + 1)(e^x - 3)}{e^x - 1} < 0$

$\Leftrightarrow -\frac{(e^x - 3)}{e^x - 1} < 0$  car  $(e^x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{e^x - 3}{e^x - 1} > 0$

**Tableau de signe**

$x$	$-\infty$	$0$	$\ln 3$	$+\infty$
$e^x - 3$	-	0	+	+
$e^x - 1$	-	0	+	+
$\frac{e^x - 3}{e^x - 1}$	+	0	+	+

$S_{\mathbb{R}} = ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 3; +\infty[$

c)  $e^{4-x} < 0 \quad S_{\mathbb{R}} = \emptyset \quad \text{Car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

d)  $e^{2x} + e^x - 2 \geq 0$

Posons  $X = e^x (X > 0)$

On a:  $X^2 + X - 2 \geq 0$

$\Delta = 1^2 - 4(-2) = 9. \quad X_1 = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = -2$

Soit  $(X - 1)(X + 2) \geq 0$

$(e^x - 1)(e^x + 2) \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \quad \text{Car } \forall x \in \mathbb{R}, e^x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0. \quad S_{\mathbb{R}} = [0; +\infty[$

e)  $(e^{2x} - 1)(3 - e^x) > 0$

**Tableau de signe**

$e^{2x} - 1 > 0 \quad 3 - e^x > 0$

$e^{2x} > 1 \quad -e^x > -3$

$2x > 0 \quad e^x \leq 3$

$x > 0 \quad x < \ln 3$

$x$	$-\infty$	$0$	$\ln 3$	$+\infty$
$e^{2x} - 1$	-	0	+	+
$3 - e^x$	+	+	0	-
$(e^{2x} - 1)(3 - e^x)$	-	0	+	0

$S_{\mathbb{R}} = ]0; \ln 3[$

f)  $e^x - e^{-x} > 0$

$\Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{e^x} > 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x > 0$

$\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R} \quad e^x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{donc } S_{\mathbb{R}} = ]0; +\infty[$

**EXERCICE 11**

$f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^x + x + 1$

$Df = \mathbb{R}$

$\forall x \in Df : f'(x) = \frac{(xe^x)'(1+e^x) - (xe^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(1+e^x) - (xe^x)e^x}{(1+e^x)^2}$   
 $= \frac{e^x + e^{2x} + xe^x + xe^{2x} - xe^{2x}}{(1+e^x)^2}$

$= \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(1+e^x)^2} \quad \text{Or } g(x) = e^x + x + 1$

Donc  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(1+e^x)^2}$

**EXERCICE 13**

1)  $f(x) = e^{1-x} = -(e^{1-x})'$

$f(x) = -(1-x)'e^{(1-x)}$

Donc  $F(x) = -e^{1-x} \quad I = \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \frac{-e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = -\frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}}$

Donc  $F(x) = -\ln|e^x + e^{-x}|$

$F(x) = -\ln(e^x + e^{-x}) \quad I = \mathbb{R}$

3)  $f(x) = (-2x + 5)e^{-x^2 + 5x - 2}$

$f(x) = (-x^2 + 5x - 2)'e^{-x^2 + 5x - 2}$

Donc  $F(x) = e^{-x^2 + 5x - 2} : I = \mathbb{R}$

4)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} e^x = -\left(\frac{-1}{x^2}\right)' e^x = -\left(\frac{1}{x}\right)' e^x$

Donc  $F(x) = -e^x \quad I = ]0; +\infty[$

5)  $f(x) = \frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

$f(x) = 1 - \frac{(1+e^x)'}{1+e^x}$

Donc  $F(x) = x - \ln|1+e^x|$

$= x - \ln(1+e^x) \quad I = \mathbb{R}$

6)  $f(x) = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 3e^x - 1}{e^x}$

$f(x) = e^{2x} + 2e^x + 3 - \frac{1}{e^x} = e^{2x} + 2e^x + 3 - e^{-x}$

Donc  $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + 3x + e^{-x} \quad I = \mathbb{R}$

**PROBLEME 1**

$f(x) = (2-x)e^x \quad Df = \mathbb{R}$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x = 0$$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{cases}$$

La droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote horizontale à  $(Cg)$  en  $-\infty$ .

$$2) \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = -\infty$$

$$\text{Car} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2-x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2-x}{x} \right) e^x = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

**Interprétation graphique :**

$(Cg)$  admet une branche parabolique de direction  $(OJ)$  en  $+\infty$

$$3) \text{ a. } \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = ((2-x)e^x)'$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-x)'e^x + (2-x)(e^x)' \\ &= -e^x + (2-x)e^x = -e^x + 2e^x - xe^x \\ &= e^x - xe^x \end{aligned}$$

$$f'(x) = e^x(1-x)$$

b.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1-x$

$$1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{Donc } \forall x \in ]-\infty; 1[ \mid f'(x) > 0$$

$$\forall x \in ]1; +\infty[ \mid f'(x) < 0 \text{ et } f'(1) = 0$$

Donc sur  $]-\infty; 1[$   $f$  est strictement croissante et

sur  $]1; +\infty[$   $f$  est strictement décroissante.

**c. Tableau de variation de  $f$ .**

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$			

$$4) \bullet (Cf) \cap (OJ).$$

$$f(0) = (2-0)e^0 = 2$$

Donc  $(Cf)$  et  $(OJ)$  se coupent au point  $A(0; 2)$

$\bullet (Cf) \cap (OI)$ . Résolvons l'équation  $f(x) = 0$

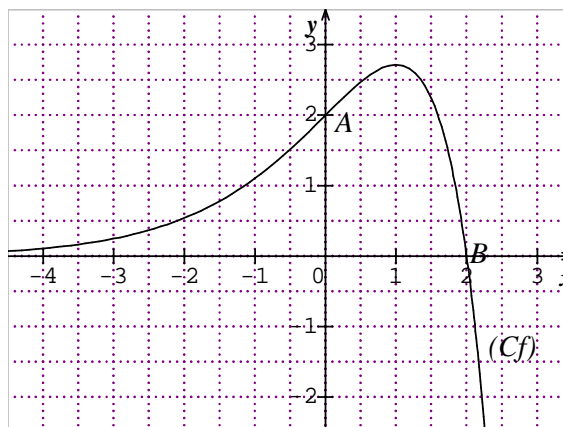
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2-x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Donc  $(Cf)$  et  $(OI)$  se coupe au point  $B(2; 0)$

**5) construction de  $(Cf)$**



**PROBLEME 5**

$$(f) = (x+2)e^{\frac{x}{2}} + 1$$

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{\frac{x}{2}} + 1$$

Posons  $X = -\frac{x}{2}; x = -2X$ , quand  $x \rightarrow +\infty : x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{X \rightarrow -\infty} (-2X+2)e^X + 1 \\ &= \lim_{X \rightarrow -\infty} -2Xe^X + 2e^X + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim_{X \rightarrow -\infty} Xe^X = 0 \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$$

**Interprétation graphique** la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale à  $(C)$  en  $+\infty$ .

$$2. \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{\frac{x}{2}} + 1$$

Posons  $X = -\frac{x}{2}; x = -2X$ , Quand

$$x \rightarrow -\infty; X \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-2X+2)e^X + 1 = -\infty$$

$$\text{Car} \begin{cases} \lim_{X \rightarrow +\infty} -2X + 2 = -\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty \end{cases}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+2}{x} \right) e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

**Interprétation graphique**

$(C)$  admet une branche parabolique de direction  $(OI)$  en  $-\infty$ .

$$3. \text{ a) } \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = ((x+2)e^{\frac{x}{2}} + 1)'$$

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + (x+2) \left( -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \right)$$

$$= e^{-\frac{x}{2}} \left( 1 - \frac{1}{2}x - 1 \right) = -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}}$$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}; e^{-\frac{x}{2}} > 0$ . Donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $-\frac{1}{2}x$ .

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

$$\forall x \in ]-\infty; 0[ f'(x) > 0 \text{ et } \forall x \in ]0; +\infty[ f'(x) < 0$$

$$f'(0) = 0$$

Sur  $]-\infty; 0[$   $f$  est strictement croissante

Sur  $]0; +\infty[$   $f$  est strictement décroissante

**Tableau de variation de  $f$ .**

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f(x)$			

c) Sur  $]-\infty; 0[$   $f$  est continue et strictement croissante

$$f(]-\infty; 0[) = ] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(0) [ = ]-\infty; 3[$$

$0 \in ]-\infty; 3[$  Donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $]-\infty; 0[$

\* Sur  $]0; +\infty[$   $f$  est continue et strictement décroissante

$$f(]0; +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(0) [ = ]1; 3[$$

$f$  réalise donc une bijection  $]0; +\infty[$  sur  $]1; 3[$ . Or

$0 \notin ]1; 3[$  Donc l'équation  $f(x) = 0$  n'admet pas de solution dans  $]0; +\infty[$ .

**Conclusion :** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $\mathbb{R}$ .

**d) Encadrement de  $\beta$**

Sur  $[-3; -2]$   $f$  est continue et strictement croissante

$$f(-3) = -e^{\frac{3}{2}} + 1 < 0, \quad f(-2) = 1 > 0$$

$$f(-3) \times f(-2) < 0. \text{ Donc } \beta \in ]-3; -2[$$

Encadrement de  $\beta$  par la méthode de balayage

$x$	-3	-2,4	-2,3	-2,2	-2,1	-2
$f(x)$	-	-	+	+	+	+

$$f(-2,4) \times f(-2,3) < 0. \text{ Donc } -2,4 < \beta < -2,3$$

**4. Equation de (T)**

$$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = -e^{-1} \quad ; \quad f(2) = 4e^{-1} + 1$$

$$(T) : y = -e^{-1}(x-2) + 4e^{-1} + 1$$

$$= -e^{-1}x + 2e^{-1} + 4e^{-1} + 1$$

$$(T) : y = -\frac{x}{e} + \frac{6}{e} + 1$$

**5. a)**  $h(x) = f(x) + \frac{x}{e} - \frac{6}{e} - 1$

$$h'(x) = f'(x) + \frac{1}{e} = -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{e}$$

$$h''(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}x\right) \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$h''(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} + \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$$

$$h''(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right)$$

**b)**  $h''(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x > \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x > 2$$

$$\forall x \in ]-\infty; 2[ h''(x) < 0 \text{ et } \forall x \in ]2; +\infty[ h''(x) > 0$$

**Tableau de variation de  $h'$**

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$h''(x)$	$-$	$0$	$+$
$h'(x)$			

c) D'après le tableau de variation de  $h'$ , 0 est le

minimum de  $h'$  sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) \geq 0$

Donc  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**Tableau de variation de  $h$**

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$0$	$+$
$h(x)$			

$$d) h(2) = (2+2)e^{-1} + 1 + \frac{2}{e} - \frac{6}{e} - 1 = 0$$

$h$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$\text{Donc } \forall x \in ]-\infty; 2[, h(x) < h(2)$$

$$\forall x \in ]2; +\infty[, h(x) > h(2) \text{ .Or } h(2) = 0$$

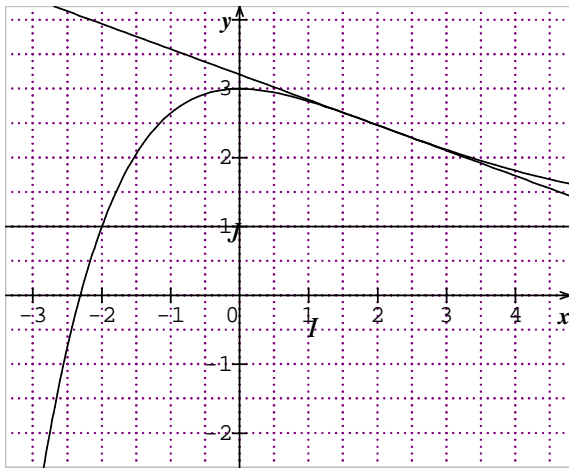
$$\text{Donc } \forall x \in ]-\infty; 2[, h(x) < 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in ]2; +\infty[, h(x) > 0$$

$$e) \text{ On sait que : } h(x) = f(x) - \left( -\frac{x}{e} + \frac{6}{e} + 1 \right)$$

Donc d'après 5.d), sur  $] -\infty; 2[$  (C) est au-dessous de (T) et sur  $]2; +\infty[$  (C) est au dessus de (T).

## 6. Construction



### PROBLEME 14

$$\begin{cases} f(x) = xe^x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x \ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} xe^x. \text{ Posons } \frac{1}{x} = X; x = \frac{1}{X}$$

$$\text{Quand } x \rightarrow 0; X \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{X} e^X = 0 \text{ Car } \begin{cases} \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{X} = 0 \\ \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1+x) = 0 \times \ln(1) = 0$$

$$f(0) = 0 \ln(1+0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Donc  $f$  continue en 0.

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x$$

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x} \text{ Quand } x \rightarrow 0; X \rightarrow -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Donc  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1+x) = +\infty$$

$$\text{Car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$$

### Interprétation graphique :

(Cf) admet une branche Parabolique de direction (OJ) en  $+\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}}. \text{ Posons } \frac{1}{x} = X; x = \frac{1}{X}$$

$$\text{Quand } x \rightarrow -\infty; X \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} e^X = -\infty$$

$$\text{Car } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$$

### 5) Asymptote oblique (D): $y = x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} - x - 1$$

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x}; x = \frac{1}{X}, \text{ Quand } x \rightarrow -\infty; X \rightarrow 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} e^X - \frac{1}{X} - 1$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} - 1 = 0 \text{ Car } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

Donc la droite ( $\Delta$ ) d'équation  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à (Cf) en  $-\infty$

$$6) a. \forall x \in ]-\infty; 0[ f'(x) = x'(e^x) + x(e^x)'$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + x \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^x = e^x - \frac{e^x}{x} \\ &= e^x \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = e^x \left( \frac{x-1}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Or } x < 0, \text{ donc } x-1 < 0 \text{ et } e^x > 0$$

Donc  $\forall x \in ]-\infty; 0[$ ,  $f'(x) > 0$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in ]0; +\infty[; f'(x) &= (x \ln(1+x))' \\ &= x' \ln(1+x) + x(\ln(1+x))' \\ &= \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \end{aligned}$$

Or  $x > 0$  Donc  $\ln(1+x) > 0$  et  $x+1 > 0$

Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .

**Conclusion**

$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   $f'(x) > 0$

b.  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   $f'(x) > 0$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

**Tableau de variation de  $f$**

$X$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

7) Sur  $]0; +\infty[$   $f$  est continue et strictement croissante

$$f(]0; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = ]0; +\infty[.$$

Donc  $h$  est une bijection de  $]0; +\infty[$  sur l'intervalle

$$J = ]0; +\infty[.$$

8) On a  $h(0) = 0 \Leftrightarrow h^{-1}(0) = 0$

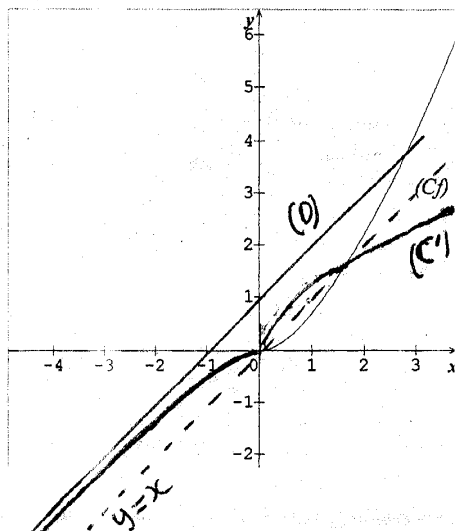
et  $h'(h^{-1}(0)) = h'(0) = f'(0) = 0$

Donc  $h^{-1}$  n'est pas dérivable en 0.

**Interprétation graphique.**

( $C'$ ) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

**9) Constructions**



**CHAPITRE 5 : CALCUL INTEGRAL**

**EXERCICE 1**

$$I = \int_{-1}^{-1} 5dx = [5x]_{-1}^{-1} = 5(-1) - (5)(-2) = -5 - 10 = -15$$

$$\begin{aligned} J &= \int_{-2}^{-1} (3x^2 - 2)dx = [x^3 - 2x]_{-2}^{-1} \\ &= (-1)^3 - 2(-1) - (2^3 - 2 \times 2) = -3 \end{aligned}$$

$$K = \int_{-1}^{-1} \frac{1}{t^3} dx = \left[ \frac{-1}{2t^2} \right]_{-1}^{-1} = \frac{-1}{2(-2)^2} - \left( \frac{-1}{2(-1)^2} \right) = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_1^{\frac{1}{2}} (2t + 2 - \frac{1}{t}) dt = [t^2 + 2t - \ln t]_1^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - (1^2 + 2 - \ln 1) = -\frac{7}{4} + \ln 2 \end{aligned}$$

$$M = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos(x) e^{\sin x} dx = [e^{\sin x}]_{\frac{\pi}{2}}^0 = e^0 - e^1 = 1 - e$$

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} \\ N &= -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (1) = 0 \end{aligned}$$

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x - \frac{\pi}{2}) dx = \left[ \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{2}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$P = \frac{1}{2} \sin(\pi - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2} \sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$P = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$$

$$Q = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$= \frac{1}{2} [2\sqrt{x^2+1}]_0^1 = [\sqrt{x^2+1}]_0^1$$

$$Q = \sqrt{1^2+1} - \sqrt{0^2+1} = \sqrt{2} - 1$$

**EXERCICE 3**

$$1) I = \int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

Posons  $U(x) = x$  ;  $U'(x) = 1$

$V'(x) = \cos(x)$  ;  $V(x) = \sin(x)$

$$I = [x \sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

$$I = \pi \sin \pi - 0 \sin 0 + [\cos(x)]_0^{\pi}$$

$$I = 0 - 0 + \cos(\pi) - \cos(0) = -2$$

$$2) I = \int_{-1}^1 (2x-3)e^x dx$$

Posons  $U(x) = 2x-3$  ;  $U'(x) = 2$

$$V'(x) = e^x ; V(x) = e^x$$

$$I = \left[ (2x-3)e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x dx$$

$$I = (2-3)e^1 - (-2-3)e^{-1} - 2[e^x]_{-1}^1$$

$$I = -e + 5e^{-1} - 2(e^1 - e^{-1})$$

$$I = -3e + 7e^{-1} = -3e + \frac{7}{e}$$

$$3) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [e^x \cos(x)] dx$$

Posons  $U(x) = e^x$  ;  $U'(x) = e^x$

$$V'(x) = \cos(x) ; V(x) = \sin(x)$$

$$I = \left[ \sin(x) \times e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$$

$$I = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \times e^{\frac{\pi}{2}} - \sin 0 \times e^0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$$

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx \quad (1)$$

$$\text{Soit } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin(x) dx$$

Posons  $f(x) = e^x$  ;  $f'(x) = e^x$

$$g'(x) = \sin(x) ; g(x) = -\cos(x)$$

$$J = \left[ -\cos(x) \times e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \times \cos(x) dx$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{\frac{\pi}{2}} - (-\cos 0 \times e^0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$$

$$J = 1 + I \quad \text{Or } I = e^{\frac{\pi}{2}} - J$$

$$\text{donc } I = e^{\frac{\pi}{2}} - (1 + I)$$

$$I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 - I$$

$$\Leftrightarrow 2I = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$$

$$4) I = \int_e^1 3x \ln(x) dx$$

Posons  $U(x) = \ln x$  ;  $U'(x) = \frac{1}{x}$

$$V'(x) = 3x ; V(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$I = \left[ \frac{3}{2}x^2 \ln x \right]_e^1 - \int_e^1 \frac{3}{2}x dx$$

$$I = \frac{3}{2}(1)^2 \ln 1 - \frac{3}{2}(e)^2 \ln e - \left[ \frac{3}{4}x^2 \right]_e^1$$

$$I = 0 - \frac{3}{2}(e)^2 - \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^2 \right)$$

$$I = -\frac{3}{4}$$

$$5) I = \int_0^1 (x+2)^2 e^{-x} dx$$

Posons  $U(x) = (x+2)^2$  ;  $U'(x) = (2x+4)$

$$V'(x) = e^{-x} ; V(x) = -e^{-x}$$

$$I = \left[ -e^{-x}(x+2)^2 \right]_0^1 + \int_0^1 (2x+4)e^{-x} dx$$

$$= -e^{-1}(1+2)^2 - (-e^0(0+2)^2) + \int_0^1 (2x+4)e^{-x} dx$$

$$I = 4 - 9e^{-1} + \int_0^1 (2x+4)e^{-x} dx$$

$$\text{Soit } J = \int_0^1 (2x+4)e^{-x} dx$$

Posons  $P(x) = 2x+4$  ;  $P'(x) = 2$

$$q'(x) = e^{-x} ; q(x) = -e^{-x}$$

$$J = \left[ -e^{-x}(2x+4) \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} dx$$

$$= -e^{-1}(2+4) - (-e^0(4)) + \left[ -2e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -6e^{-1} + 4 + (-2e^{-1} + 2e^0)$$

$$J = -8e^{-1} + 6$$

$$\text{Donc } I = 4 - 9e^{-1} + (-8e^{-1} + 6)$$

$$I = 10 - 17e^{-1}$$

$$I = \frac{10e - 17}{e}$$

**EXERCICE 8**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \cos^2(x) dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin^2(x) dx$$

$$\begin{aligned} 1) \quad I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)(\cos^2 x + \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$I + J = \frac{\pi^2 + 6\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad I - J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3)(\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \cos(2x) dx \end{aligned}$$

Posons  $U(x) = x+3$  ;  $U'(x) = 1$

$$V'(x) = \cos(2x) ; V(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$\begin{aligned} I - J &= \left[ (x+3) \left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + 3\right) \left(\frac{1}{2} \sin \pi\right) - 3 \times \frac{1}{2} \sin 0 - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx \\ &= 0 + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} (\cos \pi - \cos 0) \end{aligned}$$

$$I - J = -\frac{1}{2}$$

$$3) \begin{cases} I + J = \frac{\pi^2 + 6\pi}{4} \\ I - J = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi^2 + 6\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 + 6\pi - 2}{4}$$

$$\text{donc } I = \frac{\pi^2 + 6\pi - 2}{8}$$

$$J = I + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 + 6\pi - 2}{8} + \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{\pi^2 + 6\pi + 2}{8}$$

**EXERCICE 13**

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

1) • Pour tout  $x > 1$

$$\begin{aligned} \text{On a: } f(x) - \frac{\ln x}{x^2} &= \frac{2 \ln x}{x^2 + x} - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln x}{x(x+1)} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2x \ln x}{x^2(x+1)} - \frac{(x+1) \ln x}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{x \ln x - \ln x}{x^2(x+1)} = \frac{(x-1) \ln x}{x^2(x+1)} \end{aligned}$$

or  $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0, \ln x > 0$  et  $x^2(x+1) > 0$

$$\text{donc } f(x) - \frac{\ln x}{x^2} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > \frac{\ln x}{x^2} \quad (1)$$

• Pour  $x > 1$  on a :  $f(x) - \frac{\ln x}{x} = \frac{2 \ln x}{x(x+1)} - \frac{(x+1) \ln x}{x(x+1)}$

$$= \frac{\ln x - x \ln x}{x(x+1)} = \frac{(1-x) \ln x}{x(x+1)}$$

Or  $x > 1 \Rightarrow 1-x < 0, \ln x > 0$  et  $x(x+1) > 0$

$$\text{Donc } f(x) - \frac{\ln x}{x} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{\ln x}{x} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{\ln x}{x^2} < f(x) < \frac{\ln x}{x}$$

2)  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$  **intégration par partie .**

Posons  $U(x) = \ln x$  ;  $U'(x) = \frac{1}{x}$

$$V'(x) = \frac{1}{x^2} ; V(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[ \frac{-\ln x}{x} \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \left[ \frac{-1}{x} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \left( \frac{-1}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$I = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} (\ln x) dx = \int_1^2 (\ln x)' \ln x dx \\ &= \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} \end{aligned}$$

$$3) \quad K = \int_1^2 f(x) dx$$

**EXERCICE 3**

a)  $U_{n+1} - U_n$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 1}{n+1+1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n+2}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n^2 + 2n + 2}{n+1+1} - \frac{n^2 + 1}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2 + 2n + 2)(n+1) - (n^2 + 1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n^2 + 3n}{(n+2)(n+1)}$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n > 0$

$(U_n)$  est donc une suite croissante.

b)  $U_n = \frac{2^n}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

$(U_n)$  est une suite à termes positifs.

Comparons  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  à 1.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{2n}{n+1} - 1 = \frac{n-1}{n+1}$$

Or  $n \geq 1$  Donc  $\frac{n-1}{n+1} \geq 0$  D'où  $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

Donc  $(U_n)$  est une suite croissante.

c)  $U_n = \frac{3^{n+2}}{2^{2n}} \quad (n \in \mathbb{N})$

$(U_n)$  est une suite à termes positifs.

Comparons  $\frac{U_{n+1}}{U_n}$  à 1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{3^{n+3}}{2^{2n+2}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+3}}{2^{2n+2}} \cdot \frac{2^{2n}}{3^{n+2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

Donc  $(U_n)$  est une suite décroissante.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq K \leq \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I \leq K \leq G$$

$$\text{donc } \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \leq K \leq \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

**Encadrement de A.**

$$\text{On a } A = \int_1^2 |f(x)| dx \times 8 \text{ cm}^2$$

$$A = \int_1^2 f(x) dx \times 8 \text{ cm}^2$$

$$A = 8K \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow \frac{8 - 8 \ln 2}{2} \leq A \leq \frac{8(\ln 2)^2}{2}$$

$$\text{Donc } 4 - 4 \ln 2 \text{ cm}^2 \leq A \leq 4(\ln 2)^2 \text{ cm}^2$$

**EXERCICE 15**

$$f(x) = \ln x \quad ; \quad g(x) = (\ln x)^2$$

a.  $\forall x \in ]0; +\infty[ : F'(x) = (x \ln x - x)'$

$$F'(x) = x' \ln x + x(\ln x)' - x' = \ln x + \frac{x}{x} - 1$$

$$F'(x) = \ln x$$

Donc  $F$  est une primitive de  $\ln x$

b) Déduction de I

$$I = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e$$

$$I = e \ln e - e - (1 \ln(1) - 1) = 1$$

c)  $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

Posons  $U(x) = (\ln x)^2 ; U'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$

$$V'(x) = 1 ; V(x) = x$$

$$J = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2 \ln(x) dx$$

$$J = e - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - 2I$$

$$\text{Donc } J = e - 2$$

d)  $A = \int_1^e f(x) - g(x) dx$

$$= \int_1^e \ln(x) dx - \int_1^e g(x) dx = I - J = 1 - (e - 2)$$

$$\text{Donc } A = 3 - e$$

d)  $U_n = e^n - n$

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = e^x - x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Sur  $]0; +\infty[$   $f$  est strictement croissante donc  $(U_n)$  est aussi croissante.

**EXERCICE 5**

$$U_0 = \frac{1}{2}; U_{n+1} = -U_n^2 + U_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} U_{n+1} - U_n = -U_n^2 + U_n - U_n = -U_n^2$$

$$\text{D'ou } U_{n+1} - U_n < 0$$

Donc  $(U_n)$  est décroissante.

**EXERCICE 6**

**Démonstration par récurrence**

$$a) \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n - 5} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} U_n \geq -\frac{1}{2}$

$$* U_0 = 1 \text{ et } 1 \geq -\frac{1}{2} \text{ Donc } U_0 \geq -\frac{1}{2}$$

\*Supposons que pour un entier naturel quelconque  $k$  :

$$U_k \geq -\frac{1}{2} \text{ et démontrons que } U_{k+1} \geq -\frac{1}{2}$$

$$U_k \geq -\frac{1}{2} \text{ or } U_{k+1} = 1 - \frac{6}{2U_k + 5}$$

$$U_k \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2U_k \geq -1 \Leftrightarrow 2U_k + 5 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2U_k + 5} \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6}{2U_k + 5} \geq \frac{-6}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{6}{2U_k + 5} \geq 1 - \frac{6}{4}$$

$$\Leftrightarrow U_{k+1} \geq -\frac{1}{2}$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N} U_n \geq -\frac{1}{2}$

$$b) \begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = \sqrt{2V_n + 35} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} V_n = 7$$

$$* V_0 = 7$$

\*Supposons que pour un entier naturel quelconque  $k$   $V_k = 7$  et démontrons que  $V_{k+1} = 7$ .

$$V_k = 7 \Leftrightarrow 2V_k = 14 \Leftrightarrow 2V_k + 35 = 49$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2V_k + 35} = 7$$

$$\Leftrightarrow V_{k+1} = 7$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N} V_n = 7$

$$c) \begin{cases} W_0 = 10 \\ W_{n+1} = \frac{1 + W_n^2}{2W_n} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que  $W_n > 1$

$$* W_0 = 10 \text{ et } 10 > 1. \text{ Donc } W_0 > 1.$$

\*Supposons que pour un entier naturel quelconque  $k$  ;  $W_k > 1$  et démontrons que  $W_{k+1} > 1$ .

$$W_k > 1$$

$$W_{k+1} = \frac{1 + W_k^2}{2W_k}$$

$$W_{k+1} - 1 = \frac{1 + W_k^2}{2W_k} - 1 = \frac{W_k^2 + 2W_k + 1}{2W_k}$$

$$W_{k+1} - 1 = \frac{(W_k + 1)^2}{2W_k} \text{ Or } W_k > 1$$

$$\text{Donc } W_{k+1} - 1 > 0 \Rightarrow W_{k+1} > 1$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N} W_n > 1$

**EXERCICE 9**

$$a) U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \forall n \in \mathbb{N} U_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ et } 0 \in \mathbb{R}$$

$(U_n)$  est donc convergente.

$$b) U_n = \frac{2n^2 - 1}{(2n + 1)^2}$$

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{(2x + 1)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}$$

$(U_n)$  est donc convergente car  $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ .

$$c) U_n = n - \sqrt{4n^2 + 1}$$

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x - \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}\right) = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} = -1 \end{cases}$$

Donc  $(U_n)$  est divergente .

$$d) U_n = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 . \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2 \text{ et } \ln 2 \in \mathbb{R}$$

donc  $(U_n)$  est convergente.

$$e) U_n = \sin(n\pi)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin(n\pi) = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

donc  $(U_n)$  est convergente.

$$f) U_n = n^2 - n + 2$$

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc  $(U_n)$  diverge.

$$g) U_n = (-1)^n$$

$$\text{Si } n \text{ est pair } (-1)^n = 1$$

$$\text{Si } n \text{ est impair } (-1)^n = -1$$

Donc  $(U_n)$  n'admet pas de limite

$(U_n)$  est donc divergente .

### EXERCICE 12

$$* U_0 = 1 \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 1$$

1 Démontrons par récurrence que

$U$  est bornée par  $-2$  et  $1$ . c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 \leq U_n \leq 1$$

\*On a  $U_0 = 1$  donc  $-2 \leq U_0 \leq 1$

\*Soit  $k$  un entier naturel quelconque tel que :

$-2 \leq U_k \leq 1$ , démontrons que  $-2 \leq U_{k+1} \leq 1$ .

$$-2 \leq U_n \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{1}{2}U_k \leq \frac{1}{2}$$

$$-1 - 1 \leq \frac{1}{2}U_k - 1 \leq \frac{1}{2} - 1$$

$$-2 \leq U_{k+1} \leq -\frac{1}{2}$$

$$-2 \leq U_{k+1} \leq 1$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 \leq U_n \leq 1$

$(U_n)$  est donc bornée par  $-2$  et  $1$

### 2. Sens de variation de $U$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n - 1 - U_n = -\frac{1}{2}U_n - 1$$

$$= -\frac{(U_n + 2)}{2} \text{ Or } U_n \geq -2 \text{ donc } U_n + 2 \geq 0$$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

Donc  $U$  est décroissante.

\* $U$  est décroissante et minorée par  $-2$ . Donc  $U$  est Convergente.

### EXERCICE 20

$$U_0 = 1 ; U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$$

#### 1. Démontrons par récurrence que $U_n \neq 1$

\*  $U_0 = 3$  . Donc  $U_0 \neq 1$

\* Soit  $k$  un entier naturel quelconque tel que  $U_k \neq 1$

Démontrons que  $U_{k+1} \neq 1$

$$U_{k+1} = 4 - \frac{6}{U_k + 1}$$

$$U_k \neq 1$$

$$U_k + 1 \neq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_k + 1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-6}{U_k + 1} \neq -3$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{6}{U_k + 1} \neq 1 \Leftrightarrow U_{k+1} \neq 1$$

**Conclusion :**  $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \neq 1$

$$2. \forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} - 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{4U_n - 2}{U_n + 1} - 2}{\frac{4U_n - 2}{U_n + 1} - 1} = \frac{2U_n - 4}{3U_n - 3}$$

$$V_{n+1} = \frac{2(U_n - 2)}{3(U_n - 1)} = \frac{2}{3}V_n$$

Donc est une suite géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$

et de premier terme  $V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 - 1} = \frac{1}{2}$ .

$$3. \forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = V_0 q^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$* V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$$

$$V_n(U_n - 1) = U_n - 2$$

$$V_n U_n - V_n - U_n + 2 = 0$$

$$U_n(V_n - 1) = 2 - V_n$$

$$U_n = \frac{-V_n + 2}{V_n - 1}$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 2}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$

4.  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $-1 < q < 1$   
donc  $\lim V_n = 0$

$$U_n = \frac{-V_n + 2}{V_n - 1} \text{ .Donc } \lim U_n = \frac{0 + 2}{0 - 1} = -2.$$

### EXERCICE 28. BAC Sénégal

$$1. * P_1 = P_0 + \frac{8}{100} \times P_0$$

$$P_1 = 200 + \frac{2}{25} \times 2000 = 2160.$$

$$* P_2 = P_1 + \frac{8}{100} P_1$$

$$P_2 = 2160 + \frac{2}{25} \times 2160 = 2333.$$

$$2.a) P_{n+1} = P_n + \frac{8}{100} P_n = 1,08 P_n$$

$(P_n)$  est donc une suite géométrique de raison 1,08

$$b) P_n = P_0 \cdot q^n = 2000 \times (1,08)^n$$

3. Il s'agit de la somme

$$S = P_0 + P_1 + \dots + P_{10}$$

$$S = P_0 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q}$$

$$S = 2000 \times \frac{1 - (1,08)^{11}}{1 - (1,08)} = 33291$$

4. Le prix dépasse 10000 si  $P_n > 10000$

$$2000 \times (1,08)^n > 10000$$

$$(1,08)^n > 5$$

$$n \ln(1,08)^n > \ln 5$$

$$n > \frac{\ln 5}{\ln(1,08)^n}$$

$$n > 20,9$$

Donc à partir de  $n = 21$ . Soit  $2010 + 21 = 2031$ .

Donc le prix dépasserait 10000 à partir de 2031.

## CHAPITRE 7

### EQUATIONS DIFFERENTIELLES

#### EXERCICE 1

Résolutions d'équations différentielles

$$1) f' + 3f = 0$$

Les solutions sont les fonctions  $f$  définies sur

$$\mathbb{R} \text{ par : } f(x) = ke^{-3x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

$$2) 2y' = 3y$$

$$2y' - 3y = 0$$

$$y' - \frac{3}{2}y = 0$$

Les solutions sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$

$$\text{par : } f(x) = ke^{\frac{3}{2}x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

$$3) f'' = 0$$

$$f' = k \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = kx + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Les solutions sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$

$$\text{par : } f(x) = kx + c \quad (k \in \mathbb{R}; c \in \mathbb{R})$$

$$4) y'' - 4y = 0$$

$$y'' - (2^2)y = 0$$

Les solutions sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$

$$\text{par : } f(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-2x} \quad (k_1 \in \mathbb{R}; k_2 \in \mathbb{R}).$$

$$5) f'' = -3f$$

$$f'' + 3f = 0$$

Les solutions sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = A \cos(\sqrt{3}x) + B \sin(\sqrt{3}x) \text{ avec } (A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R}).$$

#### EXERCICE 5

$$(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$$

$$1) g(x) = 3e^{-3x}$$

$$g'(x) = 9e^{-3x}$$

$$g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} + 2(-3)e^{-3x}$$

$$g'(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$$

Donc  $g$  est solution de  $(E)$

2)  $(E') : y' + 2y = 0$

Les solutions de  $(E')$  sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = ke^{-2x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

3.a)  $f - g$  est solution de  $(E')$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 2f(x) - 2g(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x) \\ &= 9e^{-3x} + 2(-3)e^{-3x} \\ \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) &= 3e^{-3x} \\ \Leftrightarrow f \text{ est solution de } (E). \end{aligned}$$

b)  $f$  est solution de  $(E)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (f - g) \text{ est solution } (E') \\ \Leftrightarrow (f - g)(x) = ke^{-3x} \\ \Leftrightarrow f(x) = g(x) + ke^{-3x} \\ \Leftrightarrow f(x) = -3e^{-3x} + ke^{-3x} \end{aligned}$$

Donc les solutions  $(E)$  sont les fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = ke^{-3x} - 3e^{-3x}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**EXERCICE 9**

1.  $(E') : f'' + 4f = 0$

Les solutions de  $(E')$  sont les fonctions  $f$  définies sur

$$\mathbb{R} \text{ par : } f(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$$

$(A \in \mathbb{R}; B \in \mathbb{R})$

2.  $g(x) = \cos(x)$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(x) \\ g''(x) &= -\cos(x) \\ g''(x) + 4g(x) &= -\cos(x) + 4\cos(x) \\ g''(x) + 4g(x) &= 3\cos(x) \end{aligned}$$

Donc  $g$  est solution de  $(E)$

3a)  $f(x) = h(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x) + g'(x) \\ f''(x) &= h''(x) + g''(x) \\ f''(x) + 4f(x) &= h''(x) + g''(x) + 4(h(x) + g(x)) \\ &= h''(x) + g''(x) + 4h(x) + 4g(x) \end{aligned}$$

Or  $h''(x) + 4h(x) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f''(x) + 4f(x) &= g''(x) + 4g(x) \\ &= -\cos(x) + 4\cos(x) \end{aligned}$$

$f''(x) + 4f(x) = 3\cos(x)$

Donc  $f$  est solution de  $(E)$

3) b)  $f(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \cos(x)$

$$f'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x) - \sin(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow A \sin \pi + B \cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow -2A \sin \pi + 2B \cos \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\begin{cases} -A = 0 \\ -2B - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

Donc  $f(x) = -2 \sin(2x) + \cos(x)$

**CHAPITRE 8 : PROBABILITES**

**EXERCICE 6**

• Soit  $p$  la probabilité d'apparition d'un chiffre pair et  $q$  la probabilité d'apparition d'un chiffre impair On a :

$$3p + 3q = 1 \text{ et } q = 2p$$

$$\begin{cases} 3p + 3q = 1 \\ 2p - q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p + 3q = 1 \\ 6p - 3q = 0 \end{cases}$$

$9p = 1$ . Donc  $p = \frac{1}{9}$  et  $q = \frac{2}{9}$ .

Donc.  $p(A) = q = \frac{2}{9}$  et  $p(B) = p = \frac{1}{9}$

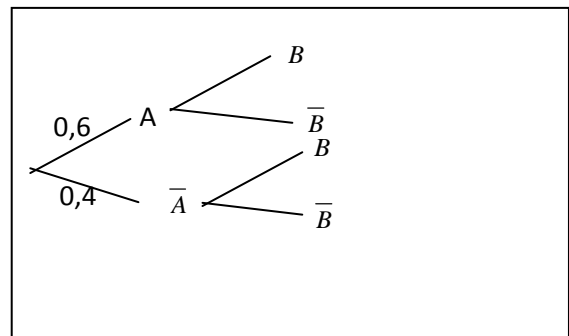
• Il y a 3 chiffres pairs

$$\text{Donc } p(C) = 3p = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

• Il y a deux multiples de 3 qui sont 3 et 6, donc

$$p(D) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

**EXERCICE 9**



•  $P(A) = 1 - p(A) = 1 - 0,6 = 0,4$

•  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,6} = 0,3$

•  $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,3 = 0,7$

•  $P(\bar{A} \cap B)$

On a :  $P(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$

Donc  $p(\bar{A} \cap B) = p(B) - p(B \cap A)$

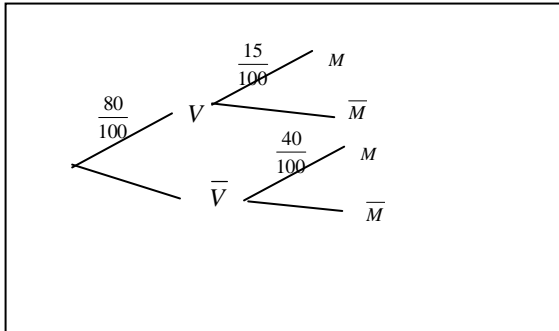
$p(\bar{A} \cap B) = 0,5 - 0,18 = 0,32$

$$\bullet \cdot P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,32}{0,4} = 0,8$$

$$\bullet \cdot P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,8 = 0,2$$

$$\bullet \cdot P_B(\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(B)} = \frac{0,32}{0,5} = 0,64$$

### EXERCICE 11



$$1) a) \cdot P(V) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}, \quad \cdot P_V(M) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

$$b) \cdot P(V \cap M) = P(V) \times P_V(M) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{20} = \frac{3}{25}$$

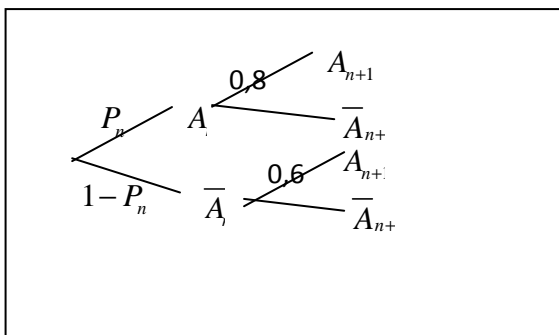
$$\cdot P(\bar{V} \cap M) = P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(M) = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{2}{25}$$

$$p(M) = p(M \cap V) + p(M \cap \bar{V}) = \frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{1}{5}$$

2) IL s'agit de la probabilité de l'évènement  $V$  sachant  $M$

$$\text{Donc } P_M(V) = \frac{P(M \cap V)}{P(M)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

### EXERCICE 14



$$1. P(A_1) = 0,7$$

$$P(A_{n+1} / A_n) = 0,8 \text{ et } P(A_{n+1} / \bar{A}_n) = 0,6$$

$$2. P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_n) \times P(A_{n+1} / A_n) = P_n \times 0,8$$

$$P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) = 0,8P_n$$

$$\begin{aligned} 3. P_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \bar{A}_n) \\ &= 0,8P_n + P(\bar{A}_n) \times P(A_{n+1} / \bar{A}_n) \\ &= 0,8P_n + (1 - P_n) \times 0,6 \\ &= 0,8P_n + 0,6 - 0,6P_n \\ P_{n+1} &= 0,2P_n + 0,6 \end{aligned}$$

4. Il s'agit de la probabilité de l'évènement  $A_1$  sachant  $A_2$

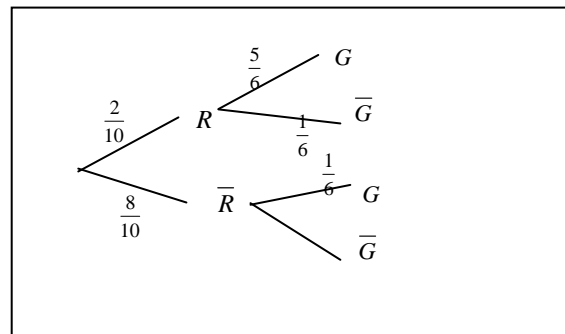
$$P(A_1 / A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_2)}$$

$$\text{Or } P(A_2 \cap A_1) = 0,8 \times P_1 = 0,8 \times 0,7 = 0,56$$

$$P(A_2) = 0,2P_1 + 0,6 = 0,2 \times 0,7 + 0,6 = 0,74$$

$$\text{Donc } P(A_1 / A_2) = \frac{0,56}{0,74} = \frac{28}{37}$$

### EXERCICE 15



$$1. P(G) = P(G \cap R) + P(G \cap \bar{R})$$

$$\text{Or } P(G \cap R) = P(R) \times P_R(G) = \frac{2}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{60}$$

$$P(G \cap \bar{R}) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(G) = \frac{8}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{60}$$

$$\text{Donc } P(G) = \frac{10}{60} + \frac{8}{60} = \frac{3}{10}$$

2. IL s'agit de la probabilité de l'évènement  $R$  Sachant  $G$

$$P_G(R) = \frac{P(G \cap R)}{P(G)} = \frac{\frac{10}{60}}{\frac{3}{10}} = \frac{5}{9}$$

3. IL s'agit d'un schéma de Bernoulli.

L'évènement considéré comme succès est  $G$ .

La probabilité d'avoir exactement deux succès

$$\text{est : } P_2 = C_4^2 P(G)^2 (1 - P(G))^{4-2}$$

$$P_2 = C_4^2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{1323}{5000} = 0,264$$

4.a) IL s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètre

$$n \text{ et } \frac{3}{10}$$

Soit  $q_n$  la probabilité de gagner aucune partie sur les  $n$

$$q_n = C_n^0 \left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{10}\right)^n = \left(\frac{7}{10}\right)^n$$

$$\text{Donc } P_n = 1 - q_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - (0,7)^n$$

$$\text{b) } P_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - (0,7)^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow -(0,7)^n \geq 0,99 - 1$$

$$\Leftrightarrow -(0,7)^n \geq -0,01$$

$$\Leftrightarrow (0,7)^n \leq 0,01$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,7) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 12,91$$

le nombre minimal  $n$  est donc 13.

### EXERCICE 17

**I.1.)** Un tirage est un arrangement de 3 éléments pris parmi les 12. Donc le nombre de tirages possibles est  $A_{12}^3 = 1320$

**2)** Soit  $\Omega$  l'univers des éventualités,

$$\text{Card } \Omega = 1320$$

Soit  $A$  l'événement :

« Avoir une seule boule noire parmi les 3 »

La seule boule noire peut occuper le 1<sup>er</sup> rang, le 2<sup>er</sup> rang ou le 3<sup>e</sup> rang, les deux autres boules occupent les deux autres places.

$$\text{Card } A = (A_4^1 \times A_8^2) \times 3 = 672$$

$$\text{Donc } P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{672}{1320} = \frac{28}{55}$$

**II 1)** Un tirage est une combinaison de 3 éléments pris parmi les 12.

Donc le nombre de tirages possibles est  $C_{12}^3 = 220$ .

**2)a)** • Si on tire 0 boule rouge parmi les 3.

$$X = 0 - 300 - S = -300 - S$$

• Si on tire une boule rouge parmi les 3.

$$X = 200 - 200 - S = -S$$

• Si on tire deux boules rouges parmi les 3.

$$X = 400 - 100 - S = 300 - S$$

• Si on tire 3 boules rouges

$$X = 600 - S$$

Donc les valeurs prises par  $X$  sont :

$300 - S$  ;  $100 - S$  ;  $-100 - S$  et  $-300 - S$ .

**b) Loi de probabilité de  $X$ .**

$$P(X = 300 - S) = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{22}$$

$$P(X = 100 - S) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{C_{12}^3} = \frac{7}{22}$$

$$P(X = -100 - S) = \frac{C_5^1 \times C_7^2}{C_{12}^3} = \frac{21}{44}$$

$$P(X = -300 - S) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{7}{44}$$

$x_i$	$-300 - S$	$-S$	$300 - S$	$600 - S$
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

**c)** Le jeu est équitable si  $E(X) = 0$

$$E(X) = \frac{7}{44}(-300 - S) + \frac{21}{44}(-S)$$

$$+ \frac{7}{22}(300 - S) + \frac{1}{22}(600 - S)$$

$$E(X) = -S + 75. \quad E(X) = 0 \Leftrightarrow S = 75$$

Donc le jeu est équitable si  $S = 75$ .

**d)** Pour  $S = 100F$ , Soit  $F$

La fonction de répartition de  $X$

$F$  est définie de  $\mathbb{R}$  vers  $[0;1]$  Par :

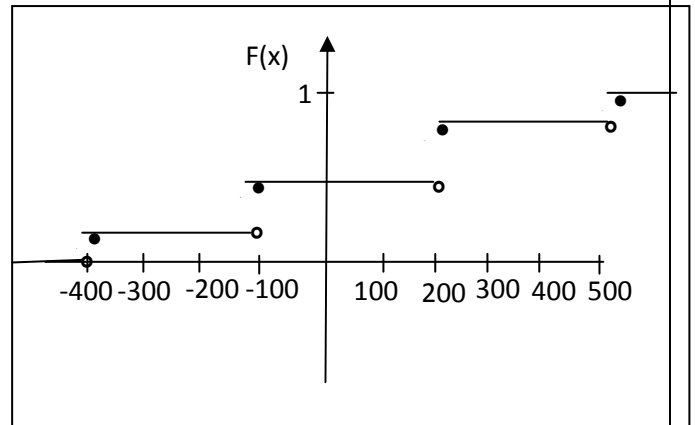
$$\forall x \in ]-\infty; -400[; F(x) = 0$$

$$\forall x \in [-400; -100[; F(x) = \frac{7}{44}$$

$$\forall x \in [-100; 200[; F(x) = \frac{7}{44} + \frac{21}{44} = \frac{7}{11}$$

$$\forall x \in [200; 500[; F(x) = \frac{7}{11} + \frac{21}{22} = \frac{21}{22}$$

$$\forall x \in [500; +\infty[; F(x) = 1$$



**EXERCICE 10** Conjugué de nombres complexes

•  $Z_1 = i - 2 : \bar{Z}_1 = \overline{i - 2} = -2 - i$

•  $Z_2 = -5 : \bar{Z}_2 = \overline{-5} = -5$

•  $Z_3 = 3i : \bar{Z}_3 = \overline{3i} = -3i$

•  $Z_4 = (4 - i\sqrt{3})(1 - i) = 4 - 4i - i\sqrt{3} - \sqrt{3}$

$Z_4 = 4 - \sqrt{3} + i(-4 - \sqrt{3})$

$\bar{Z}_4 = 4 - \sqrt{3} + i(4 + \sqrt{3})$

•  $Z_5 = \frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{3^2 - i^2} = \frac{6+2i+3i-1}{10}$

$Z_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i : \bar{Z}_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

**EXERCICE 14** Forme trigonométrique et exponentielle

$a = 2 - 2i$

$|a| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

$a = 2\sqrt{2} \left( \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$

Soit  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$

$a = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$

$a = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$b = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$|b| = 1$

Soit  $\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$b = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$b = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$c = -1 - i\sqrt{3}$

$|c| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$c = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Soit  $\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$c = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$c = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$d = 2 \left( \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

$= \frac{2}{i} \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

$= -2 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$

$d = [2(\cos \pi + i \sin \pi)] \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]$

$d = 2 \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$d = 2 \left( \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \right)$

$d = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

$e = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{6}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}} \left( e^{-i\frac{\pi}{12}} + e^{i\frac{\pi}{12}} \right)}{e^{i\frac{\pi}{12}} \left( e^{-i\frac{\pi}{12}} - e^{i\frac{\pi}{12}} \right)}$

$e = \frac{e^{i\frac{\pi}{12}} + e^{-i\frac{\pi}{12}}}{- \left( e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{12}}{-2i \sin \frac{\pi}{12}} = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} i$

$e = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

$e = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} e^{i\frac{\pi}{2}}$

$f = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$

$$f = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

**EXERCICE 17**

$$Z = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$Z^{45} = \left(3e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^{45} = 3^{45} \times e^{\frac{45i\pi}{3}}$$

$$Z^{45} = 3^{45} \times e^{i15\pi} = 3^{45} \times e^{i(14\pi+\pi)} = 3^{45} \times e^{i\pi} = 3^{45}(\cos \pi + i \sin \pi) \quad Z^{45} = -3^{45}$$

Donc  $Z^{45} \in \mathbb{R}$ .

**EXERCICE 21**

Résolution d'équation dans  $\mathbb{C}$ .

$$(E_1): Z^2 - 3Z + 2 = 0. \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$$

$$Z_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2}; Z_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2}. \quad \text{Donc } S_{\mathbb{C}} = \{2; 1\}$$

$$(E_2): -Z^2 - (1 - 2i)Z + 2i = 0$$

$$\Delta = (1 - 2i)^2 - 4(-1)(+2i). \quad \Delta = -3 + 4i$$

Soit  $\delta = x + iy$  une racine carrée de  $\Delta$  Sous forme algébrique.

$$\delta^2 = \Delta \quad \text{et} \quad |\delta^2| = |\Delta|$$

$$(x + iy)^2 = -3 + 4i \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2) \\ 2xy = 4 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1:$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Pour  $x = 1$ ,  $2xy = 4 \Leftrightarrow y = 2$ , donc  $\delta = 1 + 2i$

$$Z_1 = \frac{1 - 2i + \delta}{-2} = \frac{1 - 2i + 1 + 2i}{-2} = -1$$

$$Z_2 = \frac{1 - 2i - \delta}{-2} = \frac{1 - 2i - 1 - 2i}{-2} = 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-1; 2i\}$$

$$(E_3): Z^2 + Z + 1 = 0. \quad \Delta = 1^2 - 4(1) = -3$$

Une racine carrée de  $\Delta$  est  $\delta = i\sqrt{3}$ . Donc

$$Z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad Z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$(E_4) \quad iZ^2 + (2 + 6i)Z + 2 + 11i = 0$$

$$\Delta = (2 + 6i)^2 - 4(i)(2 + 11i)$$

$$\Delta = 12 + 16i$$

Soit  $\delta = x + iy$  une racine

carrée de  $\Delta$  sous forme algébrique.

$$\text{On a } \delta^2 = \Delta \quad \text{et} \quad |\delta^2| = |\Delta|$$

$$(x + yi)^2 = 12 + 16i \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = 20$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 & (1) \\ x^2 + y^2 = 20 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} x^2 + y^2 = 20 & (2) \\ 2xy = 16 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 12 & (1) \\ 2xy = 16 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

Pour  $x = 4$  on a  $2xy = 16 \Rightarrow y = 2$

$$\delta = 4 + 2i$$

$$Z_1 = \frac{-2 - 6i + \delta}{2i} = \frac{-2 - 6i + 4 + 2i}{2i} = -2 - i$$

$$Z_2 = \frac{-2 - 6i - \delta}{2i} = \frac{-2 - 6i - 4 - 2i}{2i} = -4 + 3i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2 - i; -4 + 3i\}$$

$$(E_5): Z^2 + 2iZ - 1 = 0. \quad \Delta = (2i)^2 - 4(-1) =$$

$$-4 + 4 = 0$$

$$Z_0 = \frac{-2i}{2} = -i. \quad S_{\mathbb{C}} = \{-i\}$$

**EXERCICE 24**

$$P(Z) = Z^3 - (11 + 2i)Z^2 + 2(17 + 7i)Z - 42$$

1. Soit  $\alpha$  un nombre réel solution de l'équation (E) :

$$P(Z) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - (11 + 2i)\alpha^2 + 2(17 + 7i)\alpha - 42 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 11\alpha^2 - 2\alpha^2i + 34\alpha + 14\alpha i - 42 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha^3 - 11\alpha^2 + 34\alpha - 42 = 0 & (1) \\ -2\alpha^2 + 14\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow -2\alpha^2 + 14\alpha = 0$$

$$\alpha(-2\alpha + 14) = 0$$

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha = 7$$

$$\text{Dans (1) On a : } 0^3 - 11 \times 0^2 + 34 \times 0 - 42 \neq 0$$

$$7^3 - 11 \times 7^2 + 34 \times 7 - 42 = 0$$

Donc  $\alpha = 7$

7 est donc le seul nombre réel solution de (E).

2. Soit  $Q$  le polynôme tel  $P(Z) = (Z - 7)Q(Z)$

Déterminons  $Q$  par la méthode d'identification

$$P(Z) = (Z - 7)Q(Z) \quad \text{avec} \quad Q(Z) = aZ^2 + bZ + c$$

$$P(Z) = (Z - 7)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 7aZ^2 - 7bZ - 7c$$

$$P(Z) = aZ^3 + (b - 7a)Z^2 + (c - 7b)Z - 7c$$

Par identification On a :

$$\begin{cases} a=1 \\ b-7a=-11-2i \\ c-7b=34+14i \\ -7c=-42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4-2i \\ c=6 \end{cases}$$

Donc  $Q(Z) = Z^2 - (4+2i)Z + 6$

$$3. (E) \Leftrightarrow (Z-7)(Z^2 - (4+2i)Z + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow Z = 7 \text{ ou } (Z^2 - (4+2i)Z + 6) = 0$$

Réolvons  $Z^2 - (4+2i)Z + 6 = 0$

$$\Delta = (4+2i)^2 - 4 + 6 = -12 + 16i$$

Soit  $\delta = x + yi$  une racine carrée de  $\Delta$  sous forme algébrique

$$\text{On a } \delta^2 = \Delta \text{ et } |\delta^2| = |\Delta|$$

$$(x + yi)^2 = 12 + 16i \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20$$

$$\text{Soit } \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 & (1) \\ x^2 + y^2 = 20 & (2) \\ 2xy = 16 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \\ x = 2 \text{ ou } x = -2$$

Pour  $x = 2$  on a  $2xy = 16 \Rightarrow y = 4$

$$\delta = 2 + 4i$$

$$Z_1 = \frac{4 + 2i + 2 + 4i}{2} = 3 + 3i$$

$$Z_2 = \frac{4 + 2i - 2 - 4i}{2} = 1 - i$$

L'ensemble de solution de (E) est donc

$$S_C = \{7; 3 + 3i; 1 - i\}$$

### EXERCICE 32 Lieu géométrique

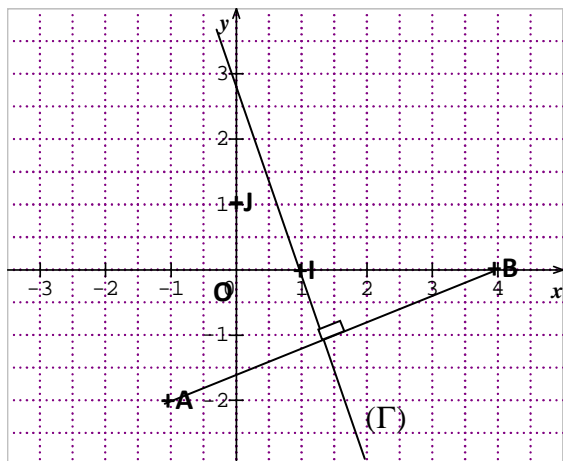
$$a) |Z + 1 + 2i| = |Z - 4|$$

Soit A le point d'affixe  $Z_A = -1 - 2i$

et B le point d'affixe  $Z_B = 4$

$$\text{On a } |Z - Z_A| = |Z - Z_B| \Leftrightarrow MA = MB$$

( $\Gamma$ ) est donc la médiatrice du segment [AB].

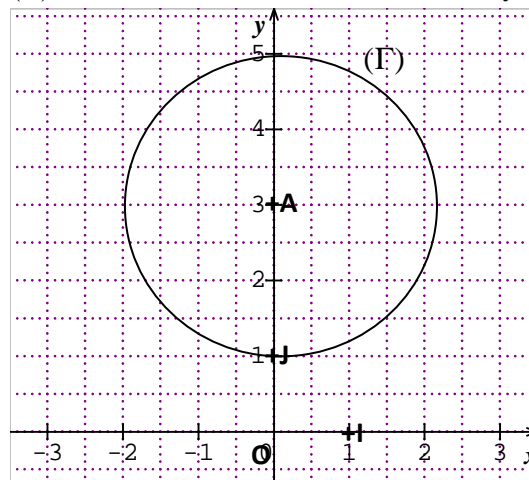


$$b) |Z - 3i| = 2$$

Soit A le point d'affixe  $Z_A = 3i$

$$\text{On a } |Z - Z_A| = 2 \Leftrightarrow MA = 2$$

( $\Gamma$ ) est donc le cercle de centre A et de rayon 2.



$$c) |\bar{Z} - 2 + i| = 1$$

Posons  $Z = x + yi$  et  $\bar{Z} = x - yi$  avec  $M(x; y)$

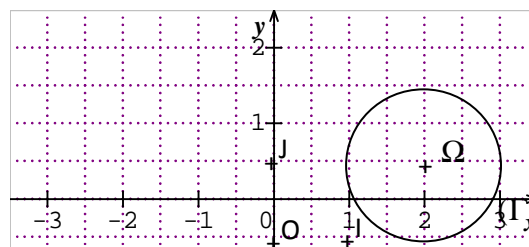
$$|x - yi - 2 + i| = 1 \Leftrightarrow |x - 2 + i(1 - y)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (1-y)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (1-y)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

( $\Gamma$ ) est donc le cercle de centre  $\Omega(2; 1)$  et de rayon 1.



$$d) |iZ - (1+i)| = |Z+1|$$

Posons  $Z = x + yi$  et  $\bar{Z} = x - yi$  avec  $M(x; y)$

$$|i(x - iy) - 1 - i| = |x + iy + 1|$$

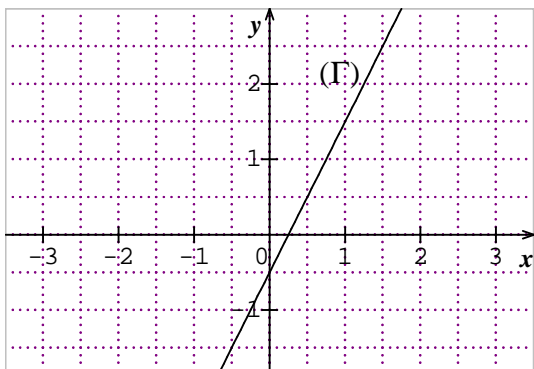
$$|xi - y - 1 - i| = |x + 1 + iy|$$

$$\sqrt{(-y-1)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$y^2 + x + 2y - 2x + 2 = x^2 + y^2 + 2x + 1$$

$$2y - 4x + 1 = 0 \text{ Donc } y = 2x - \frac{1}{2}$$

( $\Gamma$ ) est donc la droite d'équation  $y = 2x - \frac{1}{2}$



e)  $\left| \frac{Z + (2-i)}{Z} \right| = 1$  Avec  $Z \neq 0$

On  $|Z + (2-i)| = |Z|$

Soit A le point d'affixe  $Z_A = -2+i$

et O le point d'affixe  $Z_O = 0$

On a  $|Z - Z_A| = |Z - Z_O| \Leftrightarrow MA = MO$

(Gamma) est donc la médiatrice du segment [OA]

#### EXERCICE 40

1)  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{2+4i-3+i}{4+4i-3+i} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2} = 1$$

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow AB = BC$$

Donc ABC est un triangle Isocèle en B.

2)  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{4+4i-1-i}{3-i-1-i} = \frac{3+3i}{2-2i} = \frac{3}{2}i$

$$Z = \frac{3}{2}i ; Z \in i\mathbb{R}^*$$

Donc ABC est un triangle rectangle en B.

3)  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{1+i-1+i}{3-i-1+i} = \frac{2i}{2} = i$

$$Z \in i\mathbb{R}^* \text{ et } |Z| = 1$$

Donc,  $(AB) \perp (BC)$  et  $AB = BC$

ABC est donc un triangle rectangle et isocèle en

B

4)  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$

$$Z = \frac{3-2\sqrt{3}+2i-3}{3-2\sqrt{3}-2i-3}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3}+2i}{-2\sqrt{3}-2i} = \frac{-\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$$

$$Z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$|Z| = 1 \text{ et } \text{ARG}(Z) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow BA = BC \text{ et } \text{mes } \angle ABC = \frac{\pi}{3}$$

Donc ABC est un triangle équilatéral.

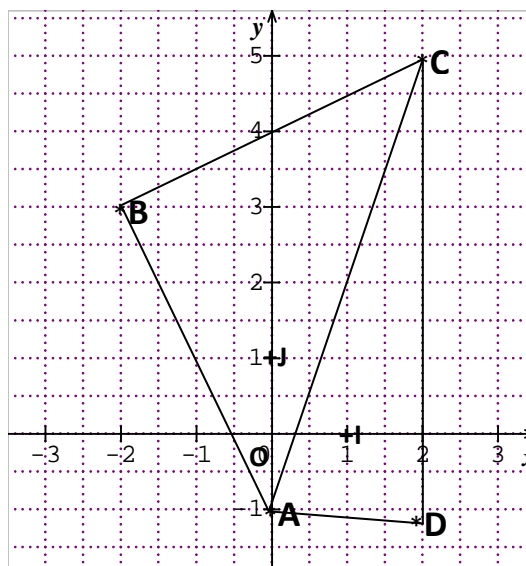
#### EXERCICE 43

1) Voir figure

2)  $\frac{a-b}{c-b} = \frac{-i+2-3i}{2+5i+2-3i} = -i$

$$\left| \frac{a-b}{c-b} \right| = 1 \text{ et } \frac{a-b}{c-b} \in i\mathbb{R}^*$$

Donc ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.



3) D'après 2) ABC est un triangle rectangle en B.

Soit  $\Omega$  le milieu du segment [AC]

$$Z_\Omega = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{-i+2+5i}{2} = 1+2i$$

$$\text{On a } \Omega A = |Z_A - Z_\Omega| = |-i-1-2i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega D = |Z_D - Z_\Omega| = |2-i-1-2i| = \sqrt{10}$$

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D = \sqrt{10}$$

Donc A, B, C et D Sont cocycliques

Car ils appartiennent au cercles de centre  $\Omega$  et de rayon  $\sqrt{10}$ .

4)  $\frac{b-e}{c-e} = \frac{-2+3i+1-\frac{7}{2}i}{2+5i+1-\frac{7}{2}i}$

$$\frac{b-e}{c-e} = -\frac{1}{3}$$

**Interprétation graphique.**

$\frac{b-e}{c-e} \in \mathbb{R}^*$  donc les points B,E et C sont alignées.

**CHAPITRE 10 : NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN**

**EXERCICE 1**

**Écritures complexes**

a) Translation de vecteur  $\vec{u}(-3;5)$ .

$$Z' = Z - 3 + 5i$$

b) Homothétie de centre  $\Omega(1;2)$  et de rapport  $-3$ .

$$Z' = -3Z + (1+2i)(1+3)$$

$$Z' = -3Z + 4 + 8i$$

c) Rotation d'angle  $-\frac{\pi}{3}$  et de centre le point

K d'affixe  $i$ .

$$Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} Z + i(1 - e^{-i\frac{\pi}{3}})$$

$$Z' = e^{-i\frac{\pi}{3}} Z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

d) Similitude directe de rapport  $\sqrt{2}$ , d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et

de centre I.

$$Z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} Z + 1(1 - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$$Z' = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} Z - i$$

**EXERCICE 2**

**Nature et éléments caractéristiques.**

a)  $Z' = -2iZ + 3 + i$

$$-2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ et } |-2i| = 2 \neq 1$$

Donc F est la similitude directe de rapport 2,

d'angle  $\alpha = \text{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2}$  et de centre le point

$$\Omega \text{ d'affixe : } \omega = \frac{3+i}{1+2i} = 1-i$$

b)  $Z' = Z - 1 + i$

F est la translation de vecteur  $\vec{u}(-1;1)$

c)  $Z' = -3Z - i$

$-3 \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$  Donc F est l'homothétie de rapport

$-3$  et de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{-i}{1+3} = -\frac{i}{4}$

d)  $Z' = -iZ - 1 + 2i$

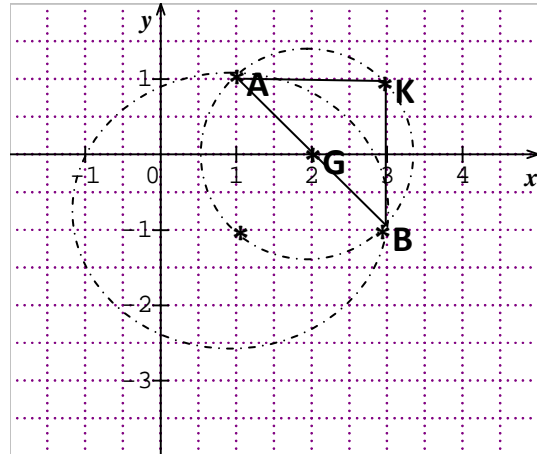
$$-i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ et } |-i| = 1$$

Donc F est la rotation d'angle  $\alpha = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$  et

de centre le point  $\Omega$  d'affixe :  $\omega = \frac{-1+2i}{1+i} =$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

**EXERCICE 7**



$$\frac{Z_A - Z_K}{Z_B - Z_K} = \frac{1+i-3-i}{3-i-3-i} = -i$$

$$\frac{Z_A - Z_K}{Z_B - Z_K} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \text{ . Donc ABK est un triangle}$$

rectangle et isocèle en K.

b) ABK étant un triangle rectangle en K, le milieu de [AB] est le centre du cercle circonscrit au

triangle ABK. Donc G a pour affixe :  $Z_G = \frac{Z_A + Z_B}{2}$

$$= \frac{1+i+3-i}{2} = 2. \quad Z_G = 2$$

Le rayon  $r$  de  $(\Gamma)$  est  $GA = |Z_A - Z_G| = |1+i-2|$

$$\text{Donc } r = \sqrt{2}$$

$$2^\circ) (D) : |Z - 1 - i| = |Z - 3 + i|$$

a) Soit F d'affixe  $4+2i$ . Justifions  $F \in (D)$ .

$$\text{On a : } |Z_F - 1 - i| = |4+2i-1-i| = |3+i| = \sqrt{10}$$

$$|Z_F - 3 + i| = |4+2i-3+i| = |3i+1| = \sqrt{10}$$

$$|Z_F - 1 - i| = |Z_F - 3 + i|$$

Donc  $F \in (D)$ .

$$\text{b) } |Z - 1 - i| = |Z - 3 + i| \Leftrightarrow$$

$$|Z - (1+i)| = |Z - (3-i)|$$

$$\Leftrightarrow |Z - Z_A| = |Z - Z_B|$$

$$\Leftrightarrow MA = MB$$

(D) est donc la médiatrice du segment [AB].

c) Equation de (D).

Soit  $M(x; y)$

$$M \in (D) \Leftrightarrow |x+iy-1-i| = |x+iy-3+i|$$

$$|x-1+i(y-1)| = |x-3+i(y+1)|$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = (x-3)^2+(y+1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-2y+1 = x^2-6x+9+y^2+2y+1$$

$$\text{Soit } -x+y+2=0$$

Donc (D) a pour equation  $-x+y+2=0$

d) E est sur l'axe des ordonnées, donc E a pour abscisse 0. Soit  $0+y+2=0 \Leftrightarrow y=-2$  donc E a pour coordonnées  $(0; -2)$  et pour affixe  $2i$

3)a) Soit  $S$  la similitude directe telle que :  $S(K) = B$  et  $S(A) = A$  d'écriture complexe  $Z' = aZ + b$

$$\text{On a } \begin{cases} Z_B = aZ_K + b \\ Z_A = aZ_A + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+i)a + b = 3-i \\ (1+i)a + b = 1+i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+i)a + b = 3-i \\ -(1+i)a - b = -1-i \end{cases}$$

$$(3+i-1-i)a = 3-i-1-i \Leftrightarrow 2a = 2-2i$$

$$a = 1-i \text{ et } b = 3-i-(3+i)a$$

$$= 3-i-(3+i)(1-i)$$

$$b = -1+i$$

Donc  $S$  a pour écriture complexe.

$$Z' = (1-i)Z - 1 + i$$

b) Eléments caractéristiques de  $S$ .

$$|1-i| = \sqrt{2}. \quad 1-i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc  $S$  a pour rapport  $\sqrt{2}$ , pour angle  $-\frac{\pi}{4}$  et pour centre A.

4)a) Image (D') de (D).

Déterminons deux points de (D)

On a  $E(0; -2)$  et  $G(2; 0)$ . (D) = (EG).

Soit  $S(E) = E'$  et  $S(G) = G'$

$$E' \text{ a pour affixe } Z_{E'} = (1-i)Z_E - 1 + i = -3-i$$

$$G' \text{ a pour affixe } Z_{G'} = (1-i)Z_G - 1 + i = 1-i$$

$E'(-3; -1)$  et  $G'(1; -1)$

Donc (D') est la droite (E'G')

b) Image de (Γ) par  $S$

(Γ) a pour centre  $G$  et pour rayon  $\sqrt{2}$ .

Donc (Γ') a pour centre  $G'$  et pour rayon

$k \times r = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ . (Γ') est donc le cercle de centre  $G'$  et de rayon 2.

### EXERCICE 11

$$1) h(M) = M', \quad \begin{cases} x' = 2x-1 \\ y' = 2y-1 \end{cases}$$

$$Z' = x' + iy'$$

$$= 2x-1 + i(2y-1)$$

$$= 2x + 2yi - 1 - i$$

$$= 2(x+yi) - 1 - i$$

$$Z' = 2Z - 1 - i$$

Donc  $h$  est l'homothétie de rapport 2 et de centre  $\Omega$

$$\text{d'affixe } \omega = \frac{-1-i}{1-2} = 1+i.$$

2)  $M(Z) \rightarrow M_1(Z_1)$

$$Z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}Z + 2$$

$r$  est la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre le point A

$$\text{d'affixe } \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1+i.$$

$r$  est la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre  $\Omega$ .

3)  $r \circ h \quad M \rightarrow M_2$

$$r \circ h(M) = M_2$$

a) Soit  $M_1 = h(M)$  avec  $M_1(x_1; y_1)$

On a  $r \circ h(M) = r(M_1)$

$$h(M) = M_1 \Leftrightarrow Z_1 = 2Z - 1 - i$$

$$r(M_1) = M_2 \Leftrightarrow Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}Z_1 + 2$$

$$\text{Donc } Z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}(2Z - 1 - i) + 2$$

$$Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}Z - (1+i)e^{i\frac{\pi}{2}} + 2$$

$$Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}Z + 3 - i$$

$$x_2 + iy_2 = 2i(x + yi) + 3 - i$$

$$x_2 + iy_2 = 2ix + 2yi^2 + 3 - i$$

$$x_2 + iy_2 = 2ix - 2y + 3 - i$$

$$x_2 - 2y - 3 + i(y_2 - 2x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x_2 - 2y - 3 = 0 \\ y_2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2y + 3 \\ y_2 = 2x - 1 \end{cases}$$

**b) Eléments caractéristiques de  $r \circ h$**

L'écriture complexe de  $r \circ h$  est :

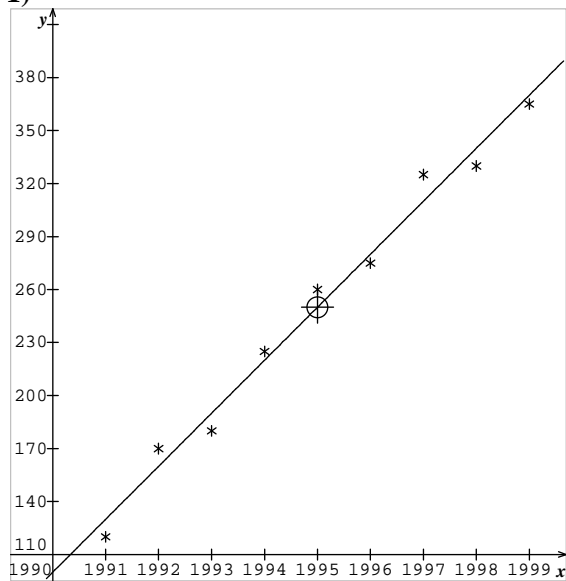
$Z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}Z + 3 - i$ . Donc  $r \circ h$  est la Similitude directe de rapport 2, d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de centre le point

$$\Omega \text{ d'affixe } \omega = \frac{3-i}{1-2e^{i\frac{\pi}{2}}} = 1+i.$$

**CHAPITRE 11 STATISTIQUES**

**EXERCICE 2**

1)



2) Equation de la droite (D) d'ajustement de  $y$  en  $x$

(D) :  $Y = aX + b$

$$a = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1991 + \dots + 1999}{9} = 1995$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{9} = \frac{120 + 170 + \dots + 365}{9} = 250$$

$$Cov(X;Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y} = \frac{1991 \times 120 + \dots + 1999 \times 365}{9} - 1995 \times 250$$

$$Cov(X;Y) = 200$$

$$V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{1991^2 + \dots + 1999^2}{9} - 1995^2$$

$$V(X) = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

$$\text{Donc : } a = \frac{200}{\frac{20}{3}} = \frac{600}{20} = 30$$

$$b = 250 - 30 \times 1995 = -59600$$

Donc (D) :  $Y = 30X - 59600$

3) Soit à résoudre l'équation  $y > 500$

$$30X - 59600 > 500$$

$$30X > 500 + 59600$$

$$X > \frac{60100}{30}$$

$$X > 2003$$

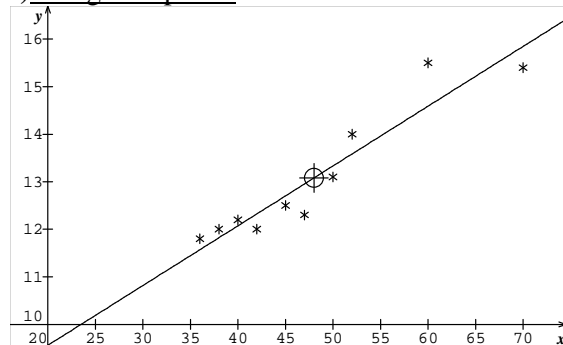
Donc le kg de la denrée alimentaire dépassera 500f à partir de 2004

**EXERCICE 5**

$$1) \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{36 + 38 + \dots + 70}{10} = 48$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{11,8 + 12,0 + \dots + 15,4}{10} = 13,08$$

2) Nuage de points



$$3) V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{36^2 + \dots + 70^2}{10} - 48^2$$

$$V(X) = \frac{24042}{10} - 2304 = 100,2$$

$$Cov(X;Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y} = \frac{36 \times 11,8 + \dots + 70 \times 15,4}{10} - 48 \times 13,08$$

$$Cov(X;Y) = 12,6$$

4) a. (D) a pour équation  $Y = aX + b$

$$\text{avec } a = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$a = \frac{12,6}{100,2} = \frac{126}{1002} = \frac{21}{167} = 0,126$$

$$b = 13,08 - 0,126 \times 48 = 7,032$$

$$\text{Donc } (D): Y = 0,126X + 7,032$$

b. Voir courbe

5) Pour 65 ans  $X = 65$

$$Y = 0,126 \times 65 + 7,032 = 15,2$$

Donc à 65 ans on estime la tension artérielle à 15,2

### EXERCICE 6

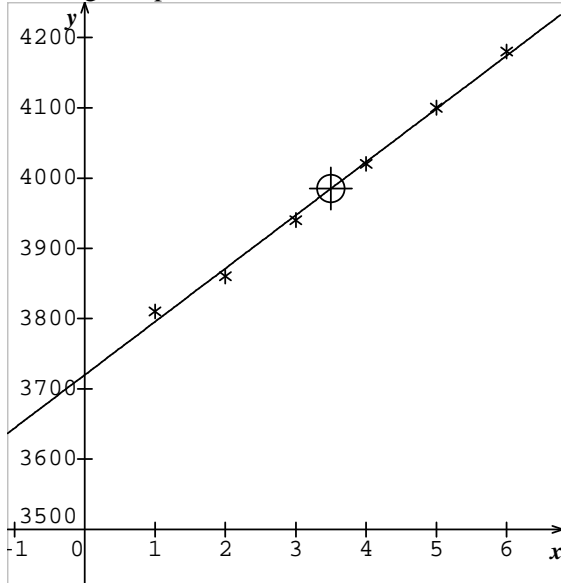
1) Coordonnées du point moyen G.  $G(\bar{X}; \bar{Y})$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{3810 + \dots + 4180}{6} = 3985$$

$G(3,5; 3985)$

2) Nuage de point



3) Equation de la droite (D) de régression de Y en X

(D)  $Y = aX + b$  avec

$$a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6} - (3,5)^2$$

$$V(X) = 2,92$$

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \bar{X} \bar{Y}$$

$$= \frac{1 \times 3810 + \dots + 6 \times 4180}{6} - 3,5 \times 3985 = 220,83$$

$$\text{Donc } a = \frac{220,83}{2,92} = 75,62$$

$$b = 3985 - 75,62 \times 3,5 = 3720,33$$

$$\text{Donc } (D): Y = 75,62X + 3720,33$$

### 4) Nombres d'articles en 2015

En 2015  $x = 11$

$$\text{Donc } Y = 75,62(11) + 3720,33 = 4552$$

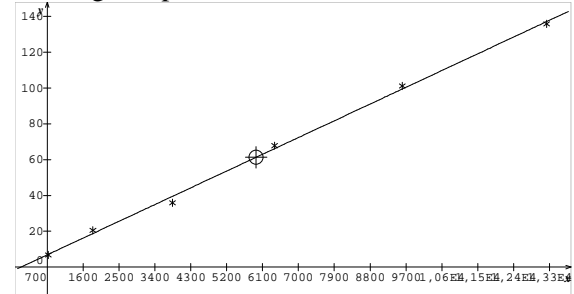
En 2015 on aura donc 4552 articles.

### EXERCICE 8

1) Tableau à compléter

$x_i$	729	1849	3844	6400	9604	13225
$y_i$	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8

2) Nuage de point



3) a. Soit  $(\Delta)$  la droite de régression de Y en X

$(\Delta)$  a pour équation  $Y = aX + b$

$$\text{avec } a = \frac{\text{Cov}(X; Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$V(X) = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{X}^2$$

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \bar{X} \bar{Y}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{729 + \dots + 13225}{6} = 5941,8$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{N} = \frac{6,8 + \dots + 135,8}{6} = 61,3$$

$$V(X) = \frac{729^2 + \dots + 13225^2}{6} - 5941,8^2$$

$$V(X) = 19165132,8$$

$$\text{Cov}(X; Y) = \frac{729 \times 6,8 + \dots + 13225 \times 135,8}{6} - 5941,8 \times 61,3$$

$$\text{Cov}(X; Y) = 199344$$

$$a = \frac{199344}{19165132,8} = 0,01$$

$$b = 61,3 - 0,01 \times 5941,8 = 1,8$$

Donc  $(\Delta): Y = 0,01X + 1,8$

b. Pour une distance d'arrêt de 180m  $Y = 180$

$$\text{Donc } 180 = 0,01X + 1,8$$

$$X = \frac{180 - 1,8}{0,01} = 17820$$

Donc la vitesse du véhicule sera  $V = \sqrt{X} = \sqrt{17820}$

$$V = 133,5 \text{ km/h}$$

c. Pour une vitesse de 150 km/h

$$X = 150^2 = 22500$$

$$Y = 0,01 \times 22500 + 1,8 = 226,8$$

la distance d'arrêt sera donc 226,8 m

## **BAC 2011**

### **EXERCICE 1**

On considère la suite  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :

$$V_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}.$$

1.a. Démontrons que la suite  $(v_n)$  est convergente après avoir déterminé sa limite.

Soit  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$  avec  $f$  une fonction de

numérique.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1. \text{ Donc } \lim v_n = 1 \end{aligned}$$

$\lim v_n$  existe et est finie donc la suite  $(v_n)$  est convergente.

b. Démontrons que la suite  $(v_n)$  est croissante.

$$\text{avec } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2},$$

on a  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+2x+1) - (x^2+2x)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2} \\ &= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ .  $f$  est donc croissante sur  $]0; +\infty[$ . Par conséquent  $(v_n)$  est croissante.

c. Démontrons que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{3}{4} \leq v_n \leq 1$ .

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n - 1 = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} - 1 = \frac{-1}{(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - 1 \leq 0 \Rightarrow v_n \leq 1.$$

• La suite  $(v_n)$  est croissante. Son terme le plus petit est son premier terme  $v_1$ .

c'est -à-dire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_1 \leq v_n$ . Or

$$v_1 = \frac{1^2 + 2 \times 1}{(1+1)^2} = \frac{1+2}{(2)^2} = \frac{3}{4} \text{ d'ou } \frac{3}{4} \leq v_n.$$

$$\text{Finalement : } \frac{3}{4} \leq v_n < 1$$

2. On pose pour entier naturel non nul,  $a_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

a. Démontrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\text{on a : } a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\bullet a_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n \Rightarrow a_1 = v_1 = \frac{3}{4}.$$

$$\frac{1+2}{2(1+1)} = \frac{3}{2(2)} = \frac{3}{4} \text{ donc } a_1 = \frac{1+1}{2(1+1)}. \text{ La}$$

propriété est donc vraie à l'ordre 1.

• Supposons que pour un entier naturel non

$$\text{nul } k \text{ on a : } a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$\text{et démontrons que } a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}.$$

$$a_k = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_k$$

$$a_{k+1} = (v_1 \times v_2 \times \dots \times v_k) \times v_{k+1}$$

$$a_{k+1} = a_k \times v_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)^2 + 2(k+1)}{((k+1)+1)^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)((k+1)+2)}{(k+2)^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+2) \times (k+1)(k+3)}{2(k+1)(k+2)^2} = \frac{(k+3)}{2(k+2)}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)+2}{2((k+1)+1)}$$

$$\text{Conclusion } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

b. En déduisons la limite de la suite  $(a_n)$ .

$$a_n = \frac{n+2}{2(n+1)} \Rightarrow \lim a_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{2x+2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

3. On pose pour tout entier naturel  $n$  :

$$b_n = 1n(v_1) + 1n(v_2) + \dots + 1n(v_n).$$

a. Démontrons que  $(b_n)$  est une suite à terme négatifs.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n < 1 \Rightarrow v_n < 1 \Rightarrow$$

$$\ln v_n < \ln 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \ln v_n < 0,$$

donc  $(b_n)$  est une suite à terme négatifs. (car somme de valeurs toutes négatives)

b. Calculons la limite de la suite  $(b_n)$ .

$$a_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$\ln a_n = \ln(v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n)$$

$$\ln a_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \dots + \ln(v_n) = b_n$$

$$\Rightarrow \lim b_n = \lim(\ln a_n) = \ln(\lim(a_n)) = \ln \frac{1}{2}$$

$$= -\ln 2.$$

### EXERCICE 2

1. a. Calculons  $E(X)$  l'espérance mathématique de  $x$  en fonctions de  $a$  et  $b$ .

$$E(X) = 220 \times 0,08 + 230 \times 0,10 + 240 \times a + 250 \times b + 260 \times 0,16 + 270 \times 0,15 + 280 \times 0,04.$$

$$E(X) =$$

$$= 17,6 + 23 + 240a + 250b + 41,6 + 40,5 + 11,2$$

$$E(X) = 133,9 + 240a + 250b$$

b. Sachant que  $E(X) = 250$ , justifions que  $a = 0,14$  et  $b = 0,33$ .

$$E(X) = 250 \Leftrightarrow 133,9 + 240a + 250b = 250$$

$$\text{De plus } \sum_{i=1}^7 p_i = 1 \Leftrightarrow$$

$$0,08 + 0,1 + a + b + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 1$$

$$\Leftrightarrow 0,53 + a + b = 1$$

On en déduit le système :

$$\begin{cases} 133,9 + 240a + 250b = 250 \\ 0,53 + a + b = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne  $a = 0,14$  et  $b = 0,33$

2. Calculons la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250g.

$$P(X \geq 250) = b + 0,16 + 0,15 + 0,04$$

$$= 0,33 + 0,16 + 0,15 + 0,04 = 0,68.$$

3. Calculons la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g.

Chaque choix conduit à deux éventualités : soit le sachet a 220g ou non. Cette épreuve se répète de façon indépendante. C'est donc un schéma de Bernoulli de paramètres 5 et 0,08.

la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220g est donc

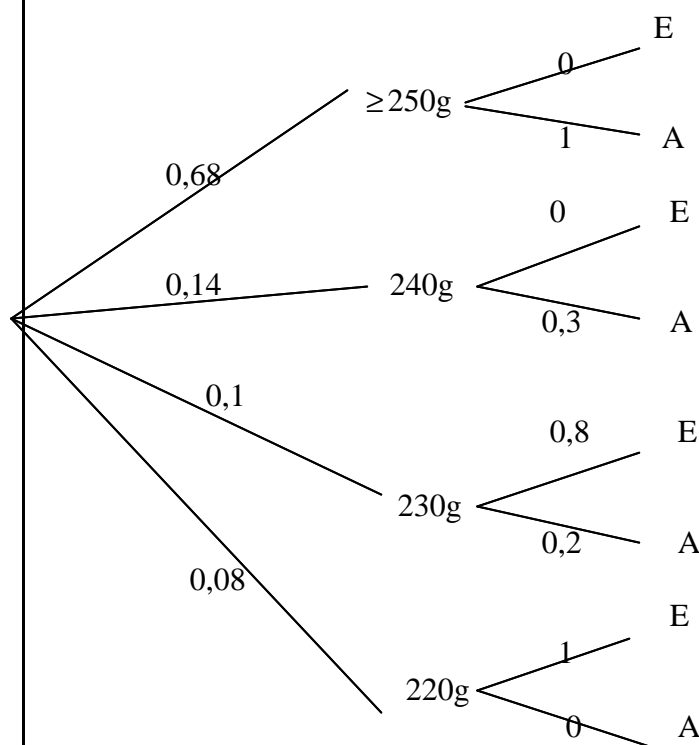
$$P_3 = C_5^3 (0,08)^3 \times (0,92)^2 = 0,004.$$

4. Arbre de probabilité.

Soit  $A$  l'événement « le sachet est accepté ».

$E$  l'événement « le sachet est éliminé ».

$G$  l'événement « le sachet a 250g ».



a. Il s'agit de l'événement  $G \cap E$ .

$$P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E) = 0,14 \times 0,7 = 0,098$$

b. Il s'agit de l'événement  $E$ .

$$P(E) = 0,14 \times 0,7 + 0,1 \times 0,8 + 0,08 \times 1 = 0,258.$$

### Problème

**Partie A**  $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$

1.a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0 \end{cases}$$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2x-1) \times \frac{1}{x^2} = -\infty \end{cases}$$

2.a)  $\forall x \in ]0; +\infty[ , g'(x) = \left( -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x \right)'$

$$= -\frac{2(x^2) - (2x+1)(2x)}{x^4} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x^2+2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}.$$

$$\text{Donc } g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}.$$

b) Sens de variation de g

$\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $x^3 > 0$  donc le signe de  $g'(x)$  est celui de  $x^2+2x+2$

Etudions le signe de  $x^2+2x+2$ .

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$$

donc  $\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $x^2+2x+2 > 0$  car le coefficient de  $x^2$  est positif.

On en déduit que  $\forall x \in ]0; +\infty[$   $g'(x) > 0$ . g est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

**c) Tableau de variation de g**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3.a. 2.a) Sur  $]0; +\infty[$  g est continue et strictement croissante .

$$g(]0; +\infty[) = ]\lim_{x \rightarrow 0} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[ \\ = ]-\infty; +\infty[ \text{ et } 0 \in ]-\infty; +\infty[ .$$

Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$  .

b) Sur  $]2,25; 2,26[$  g est continue et strictement croissante.

$$g(2,25) = -0,002. \quad g(2,26) = 0,006. \\ g(2,25) \times g(2,26) < 0 \text{ donc } 2,25 < \alpha < 2,26.$$

c) Sur  $]0; +\infty[$  g est continue et strictement croissante

et  $g(\alpha) = 0$  avec  $\alpha \in ]0; +\infty[$  .donc  $\forall x \in ]0; \alpha[$  ,  $g(x) < g(\alpha)$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$   $g(x) > g(\alpha)$ . Or  $g(\alpha) = 0$  donc  $\forall x \in ]0; \alpha[$  ,  $g(x) < 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$   $g(x) > 0$ .

**Partie B**

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}.$$

$$1.a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x} = +\infty$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln x = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = e^0 = 1.$$

**Interprétation graphique**

La droite d'équation  $x=0$  est une asymptote verticale à (C).

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x}\right) \\ = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0.$$

**Interprétation graphique**

La droite d'équation  $y = 0$  est une asymptote verticale à (C) en  $+\infty$  .

2. Démontrons que  $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$  .

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \ln \alpha\right) e^{-\alpha} . \text{ or } g(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$$

Donc

$$f(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\alpha^2} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha} = \\ -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha} .$$

3. a. Démontrons que  $\forall x \in ]0; +\infty[$  ,  $f'(x) = e^{-x} g(x)$  .

$$f'(x) = \left(\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) e^{-x}\right)' =$$

$$\left(\frac{1}{x} - \ln x\right)' (e^{-x}) + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) (e^{-x})' =$$

$$\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) (e^{-x}) + \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) (-e^{-x})$$

$$= \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x\right) e^{-x} = \left(-\frac{2x+1}{x^2} + \ln x\right) e^{-x}$$

$$\text{or } g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x . \text{ donc } f'(x) = e^{-x} g(x) .$$

b. Sens de variation de f

$\forall x \in ]0; +\infty[$  ,  $e^{-x} > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$ .

D'après la **partie A**  $\forall x \in ]0; \alpha[$  ,  $f'(x) < 0$  et

$$\forall x \in ]\alpha; +\infty[ \quad f'(x) > 0 \quad f'(\alpha) = 0.$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur  $]0; \alpha[$  et strictement croissante sur  $]\alpha; +\infty[$  .

**c) Tableau de variation de f**

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	0

4. Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

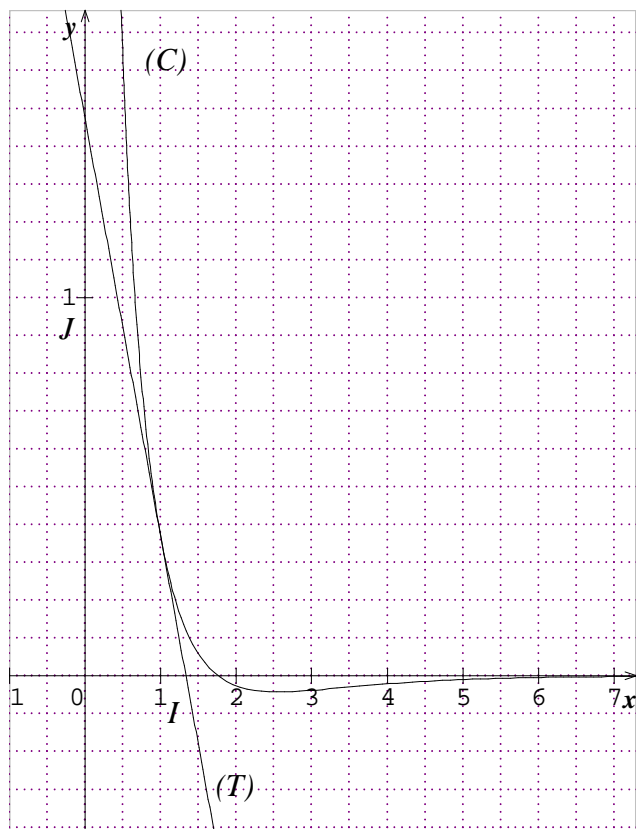
$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f'(1) = f'(1) = \left( -\frac{1+2 \times 1}{1^2} + \ln 1 \right) = \frac{-3}{e}$  et

$f(1) = \left( \frac{1}{1} - \ln 1 \right) e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Donc  $(T) : y = \frac{-3}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$ . Soit  $(T) : y = \frac{-3}{e}x + \frac{4}{e}$ .

**5. Représentations graphiques**



**Partie C**

1.  $h(x) = e^{-x} \ln x$

Démontrons que  $h$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

Il s'agit de démontrer que  $h'(x) = f(x)$ .

$h'(x) = (e^{-x} \ln x)' = (e^{-x})' \ln x + e^{-x} (\ln x)'$

$= (-e^{-x}) \ln x + e^{-x} \left( \frac{1}{x} \right) = e^{-x} \left( \frac{1}{x} - \ln x \right) = f(x)$ .

Donc  $h$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

2. a.  $A(\lambda) = \int_3^\lambda |f(x)| dx \times U.A$

avec  $U.A = 2 \times 10 \text{cm}^2 = 20 \text{cm}^2$ .

$\int_3^\lambda |f(x)| dx = -\int_3^\lambda f(x) dx$  car sur  $]0; +\infty[$  (C) est au dessous de (OI).

$-\int_3^\lambda f(x) dx = -[h(x)]_3^\lambda = -(h(\lambda) - h(3))$   
 $= -(e^{-\lambda} \ln \lambda - e^{-3} \ln 3) = \frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda}$ .

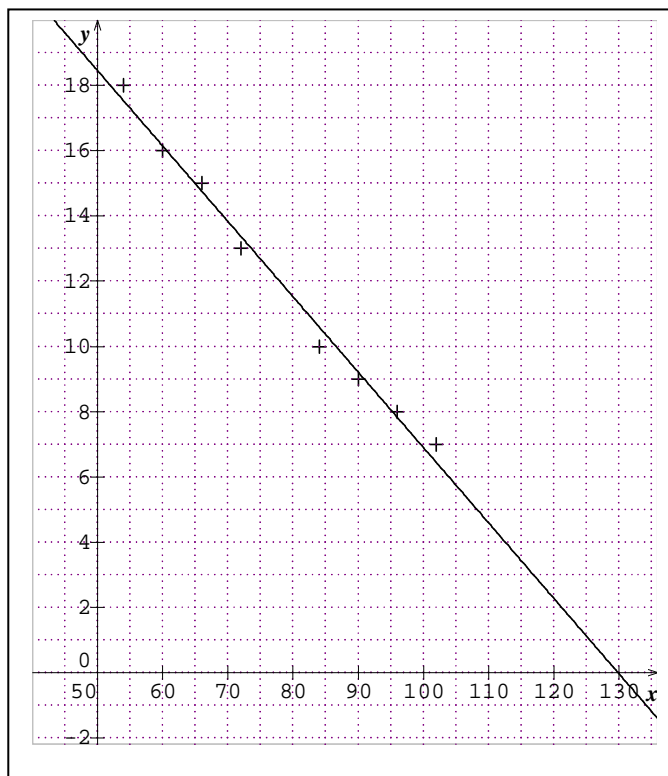
Donc  $A(\lambda) = \left( \frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda} \right) \times 20 \text{cm}^2$ .

b.  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln 3}{e^3} - \frac{\ln \lambda}{e^\lambda} \right) \times 20 \text{cm}^2$   
 $= \frac{\ln 3}{e^3} \times 20 \text{cm}^2$  car  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln \lambda}{e^\lambda} \right) = 0$ .

**BAC 2012**

**EXERCICE 1**

1. Nuage de points



2. coordonnées du point moyen G.

$G(\bar{x}; \bar{y})$

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{54 + 60 + \dots + 102}{8} = 78$

$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{17 + 16 + \dots + 7}{8} = 12$

Donc  $G(78;12)$

3.a) Variance  $V(X) = \frac{\sum (x_i)^2}{N} - (\bar{x})^2$

$V(X) = \frac{54^2 + 60^2 + \dots + 10^2}{8} - 78^2$

$V(X) = 270$

b)  $COV(X,Y) = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$

$= \frac{54 \times 18 + \dots + 102 \times 7}{8} - 78 \times 12$

$= -62,25$

c) Le coefficient de corrélation linéaire est

$r = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{-62,25}{\sqrt{270 \times 14,5}} = -0,99.$

4. a) La droite (D) a pour coefficient directeur

$a = \frac{COV(X,Y)}{V(X)} = \frac{-62,25}{270} = -0,23.$

b) (D) a pour équation  $y = ax + b$  avec

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 12 - (-0,23) \times 78 = 29,94$

donc (D) a pour équation  $y = -0,23x + 29,94.$

5. Un type de collier de 11500, correspond à  $x=115$ . On

A alors  $y = -0,23 \times 115 + 29,94 = 3,49$  dizaines.

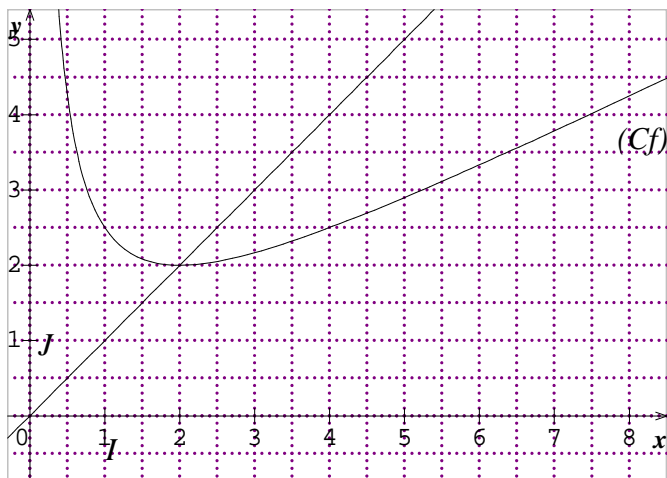
Donc elle pourrait vendre  $3,49 \times 10$ , soit 35 colliers.

**EXERCICE 2**

$U_1 = 3 ; U_{n+1} = \frac{1}{2} \left( U_n + \frac{4}{U_n} \right)$  pour  $n \geq 1$

1.  $f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{4}{x} \right)$

a) Représentation graphique :



b) On peut conjecturer que U converge vers 2.

2. a)  $\forall x \in ]0; +\infty[ , f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 4}{x^2}.$

Donc sur  $]2; +\infty[$  f est continue et strictement

Croissante en particulier sur  $]2; 3[$

$f(]2; 3[) = ]f(2); f(3)[ = ]2; \frac{13}{5}[.$

Or  $]2; \frac{13}{5}[ \subset ]2; 3[.$  Donc  $f(]2; 3[) \subset ]2; 3[.$

b) Démontrons par récurrence que  $2 \leq U_n \leq 3$

•  $U_1 = 3$  donc  $2 \leq U_1 \leq 3.$

• Soit k un entier naturel non nul tel que  $2 \leq U_k \leq 3,$   
démontrons que  $2 \leq U_{k+1} \leq 3.$

$2 \leq U_k \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq f(U_k) \leq 3$  d'après 2. a)

Or  $f(U_k) = U_{k+1}$  donc  $2 \leq U_{k+1} \leq 3$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}^* , 2 \leq U_n \leq 3.$

3.a) Sens de variation de U

$\forall n \in \mathbb{N}^* U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} \left( U_n + \frac{4}{U_n} \right) - U_n$

$= \frac{-(U_n + 2)(U_n - 2)}{2U_n}.$  Or  $\forall n \in \mathbb{N}^* , U_n \geq 2$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^* , U_{n+1} - U_n \leq 0.$  U est donc décroissante.

b) U est une suite décroissante et minorée par 2 donc elle est convergente.

4.  $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a)  $\forall n \in \mathbb{N}^* , V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 2} = \frac{\frac{1}{2} U_n + \frac{2}{U_n} - 2}{\frac{1}{2} U_n + \frac{2}{U_n} + 2}$   
 $= \frac{(U_n)^2 - 4U_n + 4}{(U_n)^2 + 4U_n + 4} = \frac{(U_n - 2)^2}{(U_n + 2)^2}$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^* , V_{n+1} = (V_n)^2.$

b) Démontrons par récurrence que  $V_n = (V_1)^{2^{n-1}}.$

•  $(V_1)^{2^{1-1}} = (V_1)^{2^0} = (V_1)^1 = V_1$

Donc  $V_1 = (V_1)^{2^{1-1}}$

• Soit k un entier naturel non nul. Supposons que,

$V_k = (V_1)^{2^{k-1}}$  et démontrons que  $V_{k+1} = (V_1)^{2^{k+1-1}}.$

$$V_k = (V_1)^{2^{k-1}}, \text{ or } V_{k+1} = (V_k)^2$$

$$\text{Donc } V_{k+1} = \left[ (V_1)^{2^{k-1}} \right]^2 = (V_1)^{2^k} = (V_1)^{2^{k+1-1}}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}^*, V_n = (V_1)^{2^{n-1}}.$$

$$\text{c) } V_1 = \frac{U_1 - 2}{U_1 + 2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}. \text{ Donc } V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} &\Leftrightarrow V_n(U_n + 2) = U_n - 2 \\ &\Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = 2 - 2V_n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{2 - 2V_n}{V_n - 1}$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{2 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}} - 1}$$

$$\text{e) } V_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{2^{n-1}}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* V_n = \frac{1}{(5)^{2^{n-1}}} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (5)^{2^{n-1}} = +\infty$$

donc  $\lim V = 0$ . Par conséquent

$$\lim U = \frac{2-0}{0-1} = 2.$$

## PROBLEME

**Partie A**  $g(x) = e^x + 2 \ln x$

$$1. \text{a) } \bullet \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\text{b) } g'(x) = e^x + \frac{2}{x}$$

$$\text{c) } \forall x \in ]0; +\infty[ , g'(x) = e^x + \frac{2}{x}$$

donc  $\forall x \in ]0; +\infty[ , g'(x) > 0$ .  $g$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

## c) Tableau de variation de $g$

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2.a) Sur  $]0; +\infty[$   $g$  est continue et strictement croissante

$$\begin{aligned} g(]0; +\infty[) &= ]\lim_{x \rightarrow 0} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[ \\ &= ]-\infty; +\infty[ \text{ et } 0 \in ]-\infty; +\infty[. \end{aligned}$$

Donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $] -\infty; +\infty[$ .

b) Sur  $]0, 4; 0, 5[$   $g$  est continue et strictement croissante.

$$g(0,4) = -0,34. \quad g(0,5) = 0,26.$$

$$g(0,4) \times g(0,5) < 0 \text{ donc } 0,4 < \alpha < 0,5.$$

c) Sur  $]0; +\infty[$   $f$  est continue et strictement croissante

et  $f(\alpha) = 0$  avec  $\alpha \in ]0; +\infty[$ . donc  $\forall x \in ]0; \alpha[$ ,

$g(x) < g(\alpha)$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$   $g(x) > g(\alpha)$ . Or  $g(\alpha) = 0$

donc  $\forall x \in ]0; \alpha[$ ,  $g(x) < 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[$   $g(x) > 0$ .

## Partie B

$$f(x) = e^x + 2x \ln x - 2x \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

$$1. \text{a) } \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 \ln x - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} + 2 \ln x - 2 \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + 2 \ln x - 2 = +\infty$$

$$\text{car, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

b) Interprétation graphique

(C) admet une branche parabolique de direction

(OJ) en  $+\infty$ .

2.a) Démontrons que  $f$  est continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x + 2 \ln x - 2x = 1 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1, \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -2x = 0$$

On a donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . F est donc continue en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2x \ln x - 2x - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + 2 \ln x - 2 = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln x = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty \text{ et } -\infty \notin \mathbb{R}, \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.$$

d) (Cf) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

$$3. a) \forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = (e^x + 2x \ln x - 2x)' = e^x + 2(\ln x + 1) - 2 = e^x + 2 \ln x.$$

Donc  $f'(x) = g(x)$ .

b) Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $g(x)$ , donc d'après la partie A  $\forall x \in ]0; \alpha[, f'(x) < 0$  et

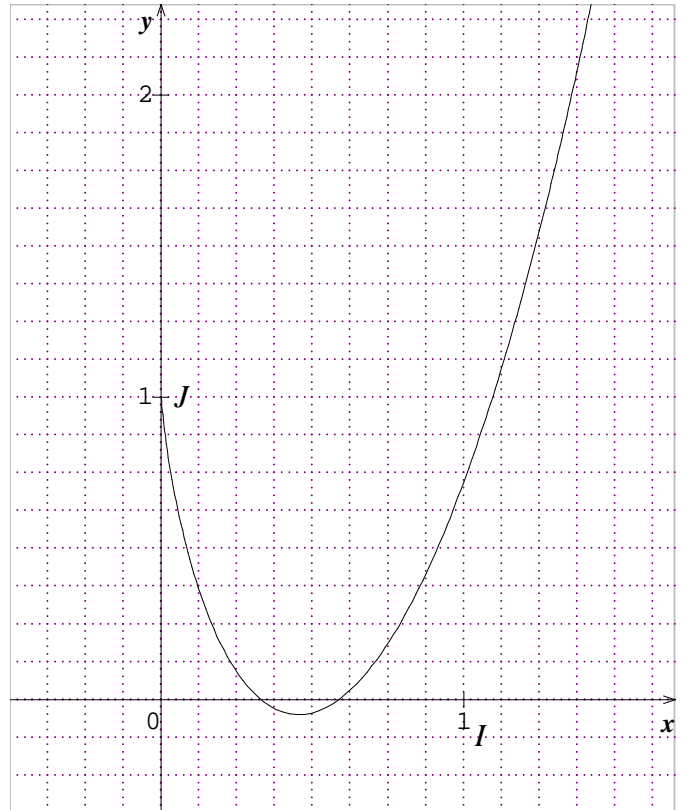
$$\forall x \in ]\alpha; +\infty[ f'(x) > 0.$$

f est donc strictement décroissante sur  $]0; \alpha[$  et strictement croissante sur  $]\alpha; +\infty[$ .

**c) Tableau de variation de f**

x	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$f(\alpha)$	$+\infty$

**4. Courbe de f**



$$5.a) K = \int_1^2 x \ln x dx.$$

Posons  $U(x) = \ln x$  et  $u'(x) = \frac{1}{x}$

$$V'(x) = x \text{ et } V(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$K = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \times 4 \ln 2 - \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{4} (2^2 - 1) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

$$b) A = \int_1^2 |f(x)| dx \times U.A$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 |f(x)| dx &= \int_1^2 e^x + 2x \ln x - 2x dx \\ &= \int_1^2 e^x - 2x dx + 2 \int_1^1 x \ln x dx \\ &= \left[ e^x - x^2 \right]_1^2 + 2K \\ &= e^2 - 4 - (e - 1) + 2(2 \ln 2 - \frac{3}{4}) \\ &= e^2 + 4 \ln 2 - e - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } A = (e^2 + 4 \ln 2 - e - \frac{9}{2}) \times 16 \text{ cm}^2$$

Soit  $A = 35,89 \text{ cm}^2$ .