Royaume du Maroc
Académie de Souss Massa
Direction Régionale d'Inzegan Ait Meloul
Lycée qualifiant Almajd

2BACSP+2BACSVT

Résumés des cours

Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

2025/2026

Version, 02/02/2026

Table des matières

Résumé 1 : Continuité

Continuité en un point :

- f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- f est continue à droite en a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- f est continue à gauche en a $\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
- f est continue en a $\Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

Continuité sur un intervalle :

- f est continue sur l'intervalle ouvert $]a;b[$, si elle est continue en tout élément de cet intervalle.
- f est continue sur $[a;b]$, si elle est continue sur l'intervalle $]a;b[$, continue à droite en a et à gauche en b

✓ Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

✓ Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

✓ Les fonctions constantes sont continues sur $\mathbb{R}$.

✓ Les fonctions $x \mapsto sin(x)$, $x \mapsto cos(x)$ et $x \mapsto |x|$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

✓ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

✓ La fonction $x \mapsto tan(x)$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Opérations sur les fonctions continues :

- Si u et v sont continues sur un intervalle I.

Alors les fonctions $u \pm v$, $u \times v$, $\alpha \times u$, $|u|$ et u^n sont continues sur I . $(\alpha \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*)$

- Si u est continue sur I et $(\forall x \in I)\ u(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{u}$ est continue sur I.
- Si u et v sont continues sur I et $(\forall x \in I)\ v(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{u}{v}$ est continue sur I.
- Si u est continue sur I et $(\forall x \in I)\ u(x) \geq 0$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur I.
- Si u est continue sur l'intervalle I et si v est continue sur un intervalle J et $u(I) \subset J$.

Alors la fonction $f = vou$ est continue sur l'intervalle I.

- $\begin{cases} lim(u(x)) = l \\ v \ \ est\ continue\ en l \end{cases} \Rightarrow lim(vou(x)) = v(l)$

L'image d'un intervalle :

✓ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

✓ L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment

✓ Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors :

$f([a;b]) = [m;M]$ tel que :

$m = \min_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a;b]} f(x)$

✓ Si f est une fonction continue sur I , alors :

L'intervalle I	$f(I)$: f est strictement croissante	$f(I)$: f est strictement décroissante
$I = [a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$I = [a;b[$	$\left[f(a);\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x);f(a)\right]$
$I =]a;b]$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$
$I =]a;b[$	$\left]\lim_{x\to a^+} f(x);\lim_{x\to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim_{x\to b^-} f(x);\lim_{x\to a^+} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires :

TVI (version 1) :

- $\begin{cases} f\ \ est\ continue\ sur\ [a;b] \\ k\ \ est\ compris\ entre\ f(a)\ et\ f(b) \end{cases} \Rightarrow$ L'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$
- Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.

TVI (version 2) :

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$

- $\begin{cases} f\ \ est\ continue\ sur\ [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a;b]$ (et dans $]a;b[$)

Si de plus f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors cette solution est unique.

Théorème de la bijection :

Si f est continue sur un intervalle I.

- Alors pour tout réel $k \in f(I)$ l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans I.
- Si de plus f est strictement monotone sur I, alors cette solution est unique.

Fonction réciproque :

- $\begin{cases} f \ est \ continue \ sur \ I \\ f \ est \ strictement \ monotone \ sur \ I \end{cases} \Rightarrow$ f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$
- Pour déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$, on résout l'équation $f(y) = x$ d'inconnue $y \in I$

✓ f^{-1} est continue sur l'intervalle $J = f(I)$.

✓ f^{-1} est strictement monotone sur $J = f(I)$,

✓ La monotonie de f^{-1} sur $J = f(I)$ est la même monotonie de f sur I

✓ $\left(\mathcal{C}_{f^{-1}}\right)$ est la symétrie de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ par rapport à la droite $y = x$

✓ $(\forall x \in I);\left(f^{-1} of\right)(x) = x$ • $(\forall x \in J);\left(fof^{-1}\right)(x) = x$

✓ $f^{-1}(J) = I$

✓ $f(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y$

Fonction racine nième :

✓ La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $x \mapsto x^n$ est appelée fonction racine n$^{\text{ième}}$ notée $\sqrt[n]{x}$

❖ $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

❖ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

❖ $\sqrt[n]{x} \le \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \le y$

❖ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

❖ La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

❖ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; • $\sqrt[n]{\dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{b}}$; • $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; • $\sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a}$; • $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I

✓ Si u est continue et positive sur I, alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I.

✓ Si $\lim u(x) = l \quad (l \ge 0)$, alors $\lim \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$.

- Si $\lim u(x) = +\infty$, alors $\lim \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$.
- Pour résoudre une équation ou inéquation contenant des racines nièmes on détermine premièrement son ensemble de définition.

Puissance rationnelle

- Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a : $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
- Pour tout $x;y \in]0;+\infty[$ et pour tout $r;r' \in \mathbb{Q}^*$ on a :

$x^r x^{r'} = x^{r+r'}$; $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{(r-r')}$; $(x^r)^{r'} = x^{rr'}$; $x^{-r} = \dfrac{1}{x^r}$; $x^r y^r = (xy)^r$; $\dfrac{x^r}{y^r} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^r$

Résumé 2 : Dérivation

Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable en a et $f'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à droite en a et $f_d'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f_d'(a)(x-a)+f(a)$; $x\geq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$	f est dérivable à gauche en a et $f_g'(a)=l$	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y=f_g'(a)(x-a)+f(a)$; $x\leq a$ au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$	f n'est pas dérivable en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à droite en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse a
$\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$	f n'est pas dérivable à gauche en a	$(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse a
f est dérivable en a $\Leftrightarrow$ f est à la fois dérivable à droite et à gauche en a et $f_d'(a)=f_g'(a)$		

Fonction dérivée des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivée :

$(c)'=0$ $(ax)'=a$ $(ax+b)'=a$ $(x)'=1$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\left(\sqrt[n]{u}\right)'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $\left(x^r\right)'=r.x^{r-1}$ $\left(u^r\right)'=r\times u^{r-1}\times u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u+v)'=u'+v'$ $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ $(\alpha\times u)'=\alpha\times u'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$(cos(x))'=-sin(x)$		$(sin(x))'=cos(x)$		$(tan(x))'=1+tan^2(x)$	

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a\in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer $f'(a)$

Méthode 1 : Si on a calculé $f'(x)$ pour tout $x\in I$, on remplace x par a dans l'expression de $f'(x)$

Méthode 2 : $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Méthode 3 : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse a :

Si $A(x_A;y_A)\in(T)$ et $B(x_B;y_B)\in(T)$, alors $f'(a)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Dérivabilité et continuité :

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I .

Dérivée et sens de variation :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f\,'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f\,'(x) \leq 0$
- f est constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x \in I)\ f\,'(x) = 0$

Dérivée et extremums :

f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

- f admet un maximum local en a si, et seulement s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : $(\forall x \in J) \quad f(x) \leq f(a)$.
- f admet un minimum local en a si, et seulement s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que : $(\forall x \in J) \quad f(x) \geq f(a)$.
- Si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en a , alors $f\,'(a) = 0$.
- Si $f\,'(a) = 0$ et si $f\,'$ change de signe a , alors la fonction f admet un extremum local en a .

Approximation affine :

Soit f une fonction dérivable en a .

- La fonction g tel que $g(x) = f\,'(a)(x-a) + f(a)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de a .
- Pour tout réel h voisin de a on a : $f(h) \simeq g(h)$

Dérivée d'une fonction composée :

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable en } a \\ v \text{ est dérivable en } u(a) \end{cases} \Rightarrow vou$ est dérivable en a

  $(vou)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ v \text{ est dérivable sur } u(I) \end{cases} \Rightarrow vou$ est dérivable sur I

  Pour tout $x \in I$: $(vou)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

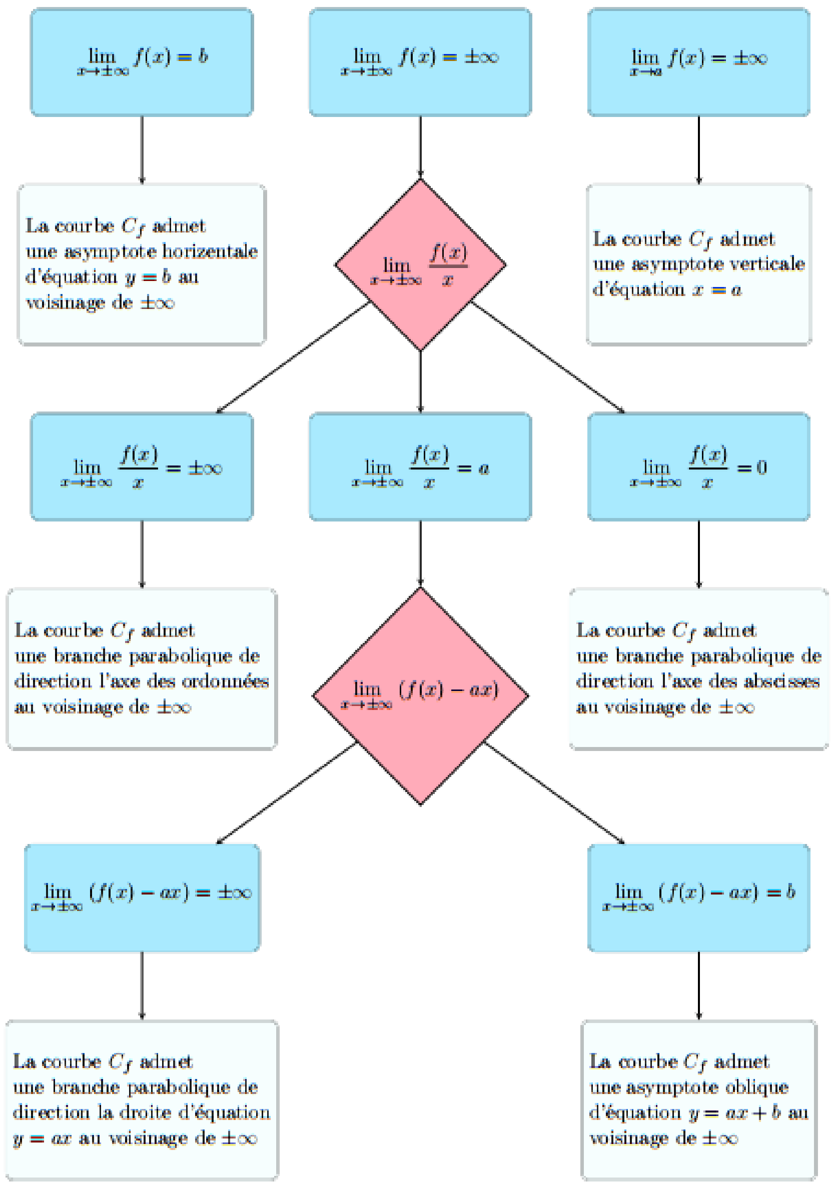
Dérivée de la fonction réciproque :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$.

- $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$
- $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$
- $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I' \\ (\forall x \in I') \quad f'(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur $J' = f(I')$
- $(\forall x \in J') \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Résumé 3 : Etude de fonctions

Branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$



$(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$ si $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$

Concavité de $(\mathcal{C}_f)$

La concavité de $(\mathcal{C}_f)$ se déduit par **l'étude de signe de** $f''(x)$ **:**

- $(\mathcal{C}_f)$ ***est convexe sur I*** $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I)\;\; f''(x) \geq 0$
- $(\mathcal{C}_f)$ ***est concave sur I*** $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in I)\;\; f''(x) \leq 0$
- ***Si*** $f''(a) = 0$ ***et*** f'' ***change de signe au voisinage de*** a ***alors le point*** $A(a; f(a))$ $(\mathcal{C}_f)$

Positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et $y = ax + b$

Les positions relatives de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) : $y = ax + b$ se déduit par **l'étude de signe de** $f(x) - (ax+b)$ **:**

- ***Si*** $(\forall x \in I)\;\; f(x) - (ax+b) > 0$ ***alors*** $(\mathcal{C}_f)$ ***est au-dessus de*** (D) ***sur*** I.
- ***Si*** $(\forall x \in I)\;\; f(x) - (ax+b) < 0$ ***alors*** $(\mathcal{C}_f)$ ***est au-dessous de*** (D) ***sur*** I.
- ***Si*** $f(x) - (ax+b) = 0$ ***, alors*** $(\mathcal{C}_f)$ ***et*** (D) ***sont confondues aux points d'abscisses*** x .

Construction de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$:

$(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ sur $J = f(I)$ est le symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ sur I par rapport à la droite $y = x$

Eléments de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$

$\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = 2b - f(x)$
$x = a$ est un axe de symétrie de $(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f$: $2a - x \in D_f$ et $f(2a-x) = f(x)$

Méthode de construction de $(\mathcal{C}_f)$:

- Construire **les asymptotes** et **les branches paraboliques** ;
- Construire **les tangentes** et **les demi-tangentes** ;
- Construire **les points remarquables de** $(\mathcal{C}_f)$ s'ils existent : **(Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)**
- Construire $(\mathcal{C}_f)$ à **partir du tableau de variations de** f

N.B : N'oublier pas de **respecter l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité** et **tenant compte le centre ou l'axe de symétrie** (s'il existe).

Résumé 4 : Suites numériques

1) Monotonie d'une suite numérique :

- $(u_n)_{n\ge n_0}$ est croissante $\Leftrightarrow (\forall n \ge n_0)\ \ u_{n+1}-u_n \ge 0$.
- $(u_n)_{n\ge n_0}$ est décroissante $\Leftrightarrow (\forall n \ge n_0)\ u_{n+1}-u_n \le 0$.
- $(u_n)_{n\ge n_0}$ est constante $\Leftrightarrow (\forall n \ge n_0)\ \ u_{n+1}=u_n$.

2) Suite majorée-suite minorée-suite bornée :

- Une suite $(u_n)_{n\ge p}$ est majorée par $M \Leftrightarrow (\forall n \ge p)\ \ u_n \le M$.
- Une suite $(u_n)_{n\ge p}$ est minorée par $m \Leftrightarrow (\forall n \ge p)\ \ u_n \ge m$.
- La suite $(u_n)_{n\ge p}$ est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

3) Principe de récurrence :

Question :	Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_n > a$	Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ u_n > a$
Réponse	**Initialisation** On a $u_0 = ...$ donc $u_0 > a$ **Hérédité** Soit $n\in\mathbb{N}$ Supposons que $u_n > a$ Et montrons que $u_{n+1} > a$ On a $u_{n+1}-a = ...$ $= ....$ $= .... > 0$ car …………. Donc $(\forall n\in\mathbb{N}):\ u_n > a$	**Initialisation** On a $u_1 = ...$ donc $u_1 > a$ **Hérédité** Soit $n\in\mathbb{N}^*$ Supposons que $u_n > a$ Et montrons que $u_{n+1} > a$ On a $u_{n+1}-a = ...$ $= ....$ $= .... > 0$ car …………. Donc $(\forall n\in\mathbb{N}^*):\ u_n > a$

6) La limite de la suite $\left(a^n\right)_n$:

	$a>1$	$-1<a<1$	$a=1$	$a\le -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n$	$+\infty$	0	1	*N'existe pas*

7) La limite de la suite $\left(n^\alpha\right)_n$:

	$\alpha>0$	$\alpha<0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha$	$+\infty$	0

4) Suite arithmétique - Suite géométrique

	Arithmétique	*Géométrique*
Montrer que $(v_n)_{n\in I}$ *est une suite :*	$v_{n+1}-v_n = ...$ $= .....$ $= ..... = r\in\mathbb{R}$	$v_{n+1} = ...$ $= .....$ $= ..... = q\times v_n$
Déterminer v_n *en fonction de* n *si* $(v_n)_{n\in I}$ *est une suite :*	$v_n = v_p + (n-p)r$ $(p=0\ \ ou\ \ p=1\ ou.......)$	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ $(p=0\ \ ou\ \ p=1\ ou.......)$
Calculer la somme	$v_p+v_{p+1}+\ldots+v_n = \dfrac{(n-p+1)}{2}\times\left(v_p+v_n\right)$	$v_p+v_{p+1}+\ldots+v_n = v_p\times\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

5) Critères de convergence

$\begin{cases} \bullet\ \textit{à partir d'un certain rang}:\ v_n > u_n \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
$\begin{cases} \bullet\ \textit{à partir d'un certain rang}:\ u_n < v_n \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
$\begin{cases} \bullet\ \textit{à partir d'un certain rang}:\ v_n < u_n < w_n \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$
$\begin{cases} \bullet\ \textit{à partir d'un certain rang}:\ \lvert u_n - l\rvert < v_n \\ \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

8) Limite de la suite $(v_n)_{n\ge n_0}$ tel que $v_n = f(u_n)$:

$$\begin{cases} \bullet\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \bullet\ f\ \ est\ \ continue\ \ en\ \ l \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = f(l)$$

9) Limite de la suite $(u_n)_{n\ge n_0}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\begin{cases} \bullet\ u_{n_0} \in I \\ \bullet\ f\ \ est\ \ continue\ \ sur\ \ I \\ \bullet\ f(I)\subset I \\ \bullet\ (u_n)_{n\ge n_0}\ \ est\ \ convergente \end{cases} \Rightarrow \text{La limite de } (u_n)_{n_0} \text{ est une solution de l'équation } f(x)=x \text{ dans } I$$

Résumé 5 : Primitives

Soient f et F deux fonctions définies sur un même intervalle I .

- On dit que F est une primitive de f sur I , si : F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur I .

Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I .

- Les primitives de f sur I sont de la forme : $x \mapsto F(x)+c$ où c est une constante réelle.

Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

$f(x)$	$F(x)$	I
0	c	$\mathbb{R}$
a	ax	$\mathbb{R}$
$x^r \qquad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$.	$\frac{1}{r+1}x^{r+1}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$ln(\lvert x \rvert)$	$]0;+\infty[$ ou $]-\infty;0[$
$sin(x)$	$-cos(x)$	$\mathbb{R}$
$cos(x)$	$sin(x)$	$\mathbb{R}$
$1+tan^2(x)$	$tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ tel que $k \in \mathbb{Z}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonction primitives

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I .

Si u et v sont deux fonctions définies sur I alors

f	F	Conditions
$u'+v'$	$u+v$	• u et v sont dérivables sur I
$\alpha \times u'$	αu	• u est dérivable sur I
$u' \times v + u \times v'$	$u \times v$	• u et v sont dérivables sur I
$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	• u et v sont dérivables sur I • $(\forall x \in I) \quad v(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$
$u' \times u^r \qquad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$.	$\frac{1}{r+1}u^{r+1}$	• u^r est définie et dérivable sur I .
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}} \qquad n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$ln(\lvert u \rvert)$	• u est dérivable sur I • $(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$
$u'e^u$	e^u	• u est dérivable sur I

Résumé 6 : Fonctions logarithmes

Logarithme népérien :

- La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1, on la note ***ln***.

- *La fonction ln est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

- $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow ln(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow ln(x) < 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow ln(x) = 0 \end{cases}$.

- $(\forall X,Y \in]0;+\infty[)\ ln(X) = ln(Y) \Leftrightarrow X = Y$

- $(\forall X,Y \in]0;+\infty[)\ ln(X) > ln(Y) \Leftrightarrow X > Y$

- Soient x et y deux réels strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$ln(xy) = ln(x) + ln(y) \qquad ln(\frac{x}{y}) = ln(x) - ln(y)$

$ln(\frac{1}{x}) = -ln(x) \qquad ln(x^r) = rln(x)$

Limites de référence :

Soit n un entier naturel non nul :

• $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$	• $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x) = +\infty$
• $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n ln(x) = 0^-$	• $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0^+$
• $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ ln(x) = 0^-$	• $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0^+$

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{ln(x)}{x-1} = 1$; • $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$

Propriétés :

- La fonction $x \mapsto ln(x)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a : $(\forall x \in]0;+\infty[)\ \left(ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$.

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I\ )\ u(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ La fonction $x \mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I

- Si la fonction $x \mapsto ln(u(x))$ est dérivable sur I alors $(\forall x \in I)\ \left(ln(u(x))\right)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

- Soit u une fonction continue et ne s'annule pas sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $(\forall x \in I)\ u(x) \neq 0$)

Les primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions F définies sur I par :

$(\forall x \in I)\ F(x) = ln(|u(x)|) + c \qquad / c \in \mathbb{R}$

Fonction exponentielle de base a :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- La fonction logarithme de base a est la fonction numérique, notée par log_a définie sur $]0,+\infty[$ par :

$log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$

Propriétés :

Pour tous réels strictement positifs x et y , et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :

- $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$; • $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$

- $log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a(x)$; • $log_a(x^r) = rlog_a(x)$

Logarithme de base 10

- La fonction logarithme de base 10 est appelée logarithme décimal. On la note log ; $(\forall x \in]0;+\infty[)$

$log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$

- $log(10) = 1$; • $(\forall r \in \mathbb{Q})\ log(10^r) = r$

Résumé 7 : Les nombres complexes

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, • Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, vérifiant : $i^2 = -1$,
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Forme algébrique	Conjugué	Module	Argument	Forme trigonométrique	Forme Exponentielle	Forme polaire	Cas particulier
$z = x + iy$ Tel que $x, y \in \mathbb{R}$	$\bar{z} = x - iy$	• $\lvert z\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$ • $\lvert z\rvert = \sqrt{z\bar{z}}$ • $\lvert z\rvert = OM$	• $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ Tel que $\begin{cases} cos(\theta) = \dfrac{x}{\lvert z\rvert} \\ sin(\theta) = \dfrac{y}{\lvert z\rvert} \end{cases}$ • $arg(z) \equiv \overline{(\vec{u};\overrightarrow{OM})}[2\pi]$	$z = r(cos(\theta) + isin(\theta))$	$z = re^{i\theta}$	$z = [r;\theta]$	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$ $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0[2\pi]$ $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow arg(z) \equiv \pi[2\pi]$ $z \in i\mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ $z \in i\mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
		Tel que M est le point d'affixe z		Tel que $r = \lvert z\rvert$ et $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$			

Les propriétés du conjugué

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$	$z + \bar{z} = 2Re(z)$ $z - \bar{z} = 2iIm(z)$

Les propriétés du module

$\lvert z \times z'\rvert = \lvert z\rvert \times \lvert z'\rvert$ $\left\lvert\dfrac{1}{z}\right\rvert = \dfrac{1}{\lvert z\rvert}$ $\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$ $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\lvert z\rvert \in \mathbb{R}^+$ $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert = \lvert -z\rvert = \lvert -\bar{z}\rvert$ $z \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \lvert z\rvert = z$ $z \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow \lvert z\rvert = -z$ $\lvert z + z'\rvert \le \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$

Les propriétés de l'argument

$arg(z \times z') \equiv arg(z) + arg(z')[2\pi]$

$arg(\frac{1}{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$

$arg(\frac{z}{z'}) \equiv arg(z) - arg(z')[2\pi]$

$arg(z^n) \equiv n \cdot arg(z)\,[2\pi]$

$arg(-z) \equiv \pi + arg(z)[2\pi]$

$arg(\bar{z}) \equiv -arg(z)[2\pi]$

Les propriétés de $e^{i\theta}$

$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\dfrac{1}{e^{i\theta}} \equiv e^{-i\theta}$ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \equiv e^{i(\theta-\theta')}$ $\left(e^{i\theta}\right)^n \equiv e^{in\theta}$	$\lvert e^{i\theta}\rvert = 1$ $arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi]$ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $-e^{i\theta} = e^{i(\pi+\theta)}$

Affixe d'un vecteur-points alignés-angle-orthogonalité et parallélisme

- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_B - z_A}{z_c - z_A} \in \mathbb{R}$
- $AB = \lvert z_B - z_A\rvert$; • $\overline{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$
- $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$; • $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Barycentre-Centre de gravité-Points cocycliques

- Si $G = bar\{(A;a);(B;b)\}$ alors $z_G = \dfrac{az_A + bz_B}{a+b}$
- Si G est le centre de gravité de ABC alors $z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- Les points A, B, C et D sont cocycliques $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \dfrac{z_B - z_D}{z_C - z_D} \in \mathbb{R}$
- Formules d'Euler $cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Quadrilatères remarquables

	$ABCD$ est un parallélogramme	$ABCD$ est un rectangle	$ABCD$ est un losange	$ABCD$ est un carré
Démonstration complexe	$z_B - z_A = z_C - z_D$	$\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_B - z_D}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \end{cases}$	$\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i \end{cases}$ ou $\begin{cases} z_B - z_A = z_C - z_D \\ \dfrac{z_B - z_D}{z_C - z_A} = \pm i \end{cases}$

Triangles remarquables

	ABC est rectangle en A	ABC est rectangle et isocèle en A	ABC est isocèle en A	ABC est équilatéral
Démonstration complexe	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R}$	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$	$\lvert z_B - z_A \rvert = \lvert z_C - z_A \rvert$	$\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

Equation de second degré dans $\mathbb{C}$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnu z où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$

	Si $\Delta > 0$	Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$
Solution	$z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
Ensemble de solutions dans $\mathbb{C}$	$S = \{z_1 ; z_2\}$	$S = \{z_1 ; z_2\}$	$S = \{z_0\}$
Somme et produit des solutions	$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$; $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$		
Factorisation de $az^2 + bz + c$	$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$		$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$

Écritures complexes des transformations usuelles

Transformation plane et ses éléments caractéristiques	Écriture complexe
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, b son affixe et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$:	$z' = z + b$
h l'homothétie de centre $\Omega(z_\Omega)$ et de rapport k :	$z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$
R la rotation de centre Ω et d'angle θ :	$z' = e^{i\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$

Ensembles des points remarquables

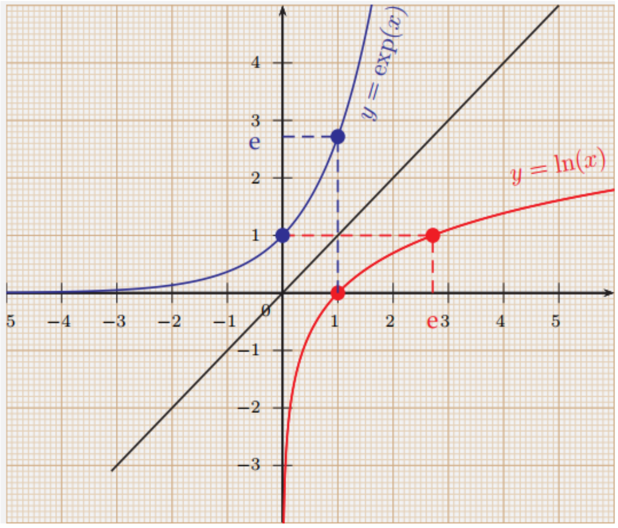
L'ensemble des points M tel que	Nature
$\lvert z - z_A \rvert = R$	Le cercle du centre A et de rayon R
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	La médiatrice du segment $[AB]$
$\dfrac{z - z_A}{z - z_B} \in \mathbb{R}$	La droite (AB) privée du point B
$\dfrac{z - z_A}{z - z_B} \in i\mathbb{R}$	Le cercle de diamètre $[AB]$ privé du point B

Résumé 8 : Fonctions exponentielles

Définition :

On appelle **fonction exponentielle népérienne,** notée exp, la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien ln et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[)$; $exp(x) = y \Leftrightarrow x = ln(y)$.



Propriétés :

- La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$: $e^x > 0$.
- $(\forall x \in]0;+\infty[)(\forall y \in \mathbb{R})$: $e^y = x \Leftrightarrow ln(x) = y$.
- $(\forall x \in \mathbb{R})$: $ln(e^x) = x$ et $(\forall x \in]0;+\infty[)$; $e^{ln(x)} = x$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $e^a > e^b \Rightarrow a > b$.
- $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$: $e^a = e^b \Rightarrow a = b$.
- Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad (e^x)^r = e^{rx}$$

Limites de référence :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Propriétés :

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :$(\forall x \in \mathbb{R})$ $(e^x)' = e^x$.

- Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$(\forall\ x \in I)$: $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$.

- Soit u une fonction dérivable sur I.

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + c$ tel que $c \in \mathbb{R}$.

Fonction exponentielle de base a :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

- La fonction réciproque de $x \mapsto log_a(x)$ est appelée **fonction exponentielle de base** a qui est définie sur $\mathbb{R}$ et notée par $exp_a(x)$ ou a^x.
- Pour tout réel x on a : $a^x = e^{x ln(a)}$
- Soient x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad ; \quad a^{rx} = (a^x)^r \quad ; \quad exp_e(x) = e^x$$

Résumé 9 : Equations différentielles

Equation différentielle linéaire du 1er ordre : $y' = ay + b$

Définitions :

1) L'équation suivante :$(E): y' = ay + b$ ou a et b deux constante, est appelé équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1, ou y est la fonction inconnue.

2) On appelle solution de l'équation différentielle (E), toute fonction f qui vérifie (E)

Propriétés :

- Les solutions de $(E): y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel.
- L'équation différentielle (E) admet une **unique** solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$ où $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Equation différentielle linéaire du 2nd ordre : $y'' + ay' + by = 0$

- L'équation $r^2 + a.r + b = 0$, s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(E): y'' + ay' + by = 0$
- **Résolution d'une équation** $(E): y'' + ay' + by = 0$:

Soit Δ le discriminant de l'équation **caractéristique**.

Δ	L'équation **caractéristique** admet	Les solutions de (E) sont les fonctions
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$y : x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta = 0$	Une seule solution réelle r	$y : x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{rx}$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $p \pm iq$	$y : x \mapsto e^{px}\left(\alpha cos(qx) + \beta sin(qx)\right)$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

Cas particulier :

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$, sont les fonctions :

$y : x \mapsto a cos(\omega x) + b sin(\omega x) y$ où $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة سوس ماسة

مادة الرياضيات

الأستاذ

عيسى هياب

Résumé 10 : Calcul intégral

Intégrale d'une fonction sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé **intégrale** de f de a à b et on écrit : $\boxed{1}$ $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Intégrales de base :

$\int_a^b c\,dx=[cx]_a^b$	$\int_a^b u'(x)dx=[u(x)]_a^b$
$\int_a^b x^r\,dx=\left[\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right]_a^b$	$\int_a^b (u'+v')dx=[u+v]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b$	$\int_a^b (\alpha\times u')dx=\alpha[u]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{u^2}dx=\left[\frac{1}{u}\right]_a^b$
$\int_a^b \frac{1}{x}dx=[ln(\lvert x\rvert)]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{u}dx=[ln(\lvert u\rvert)]_a^b$
$\int_a^b sin(x)dx=[-cos(x)]_a^b$	$\int_a^b u'e^u dx=[e^u]_a^b$
$\int_a^b cos\,(x)dx=[sin(x)]_a^b$	$\int_a^b u'\times u^r dx=\left[\frac{1}{r+1}u^{r+1}\right]_a^b$
$\int_a^b (1+tan^2(x))dx=[tan(x)]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{\sqrt{u}}dx=\left[2\sqrt{u}\right]_a^b$
$\int_a^b e^x dx=[e^x]_a^b$	$\int_a^b \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}dx=\left[n\sqrt[n]{u}\right]_a^b$
$\int_a^b u'sin(u)dx=[-cos(u)]_a^b$; $\int_a^b u'cos(u)dx=[sin(u)]_a^b$	

Propriétés de l'intégrale :

- $\int_a^a f(x)dx=0$.
- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.
- **Linéarité de l'intégrale :**
  $\boxed{2}$ $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ et
  $\boxed{3}$ $\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$
- **Additivité ou relation de Chasles** :
  $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- **Positivité de l'intégrale** : Si $f(x)\geq 0$ sur I et si $a\leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx\geq 0$
- **Intégrale et ordre :** Si $f(x)\leq g(x)$ sur I et si $a\leq b$, alors $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.
- **Valeur moyenne d'une fonction** :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.

- Il existe au moins un réel $c\in[a,b]$ tel que :

$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

- Le nombre $\boxed{4}$ $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé **valeur moyenne** de la fonction f sur l'intervalle $[a,b]$

Techniques de calcul d'une intégrale :

- **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive.**
  La connaissance des primitives de fonctions usuelles permet de calculer des intégrales. $\boxed{5}$ $\int_a^b u'(x)dx=[u(x)]_a^b$
- **Intégration par parties :** $\boxed{6}$ $\int_a^b u'(x)\times v(x)dx=[u(x)\times v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)\times v'(x)dx$
- **Décomposition des fractions rationnelles en une somme de fractions rationnelles**
- **Linéarisation des fonctions trigonométrique.**

Quelques applications du calcul intégral :

Aires de surfaces planes

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.

- L'aire de la surface délimitée par (C_f) , l'axe des **abscisses** et les droites $(D): x=a$ et $(\Delta): x=b$ est
  $\boxed{7}$ $\mathcal{A}=\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$
- L'aire de la surface délimitée par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$ et les droites $(D): x=a$ et $(\Delta): x=b$

Est égale à $\boxed{8}$ $\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

Volume d'un solide de révolution

- Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné

par la formule : $\boxed{9}$ $V=\pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (**unité de volume**)

Résumé 11 : Géométrie de l'espace

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ de l'espace on a :

- $\boxed{1}$ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.
- $\boxed{2}$ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace, alors $\boxed{3}$ $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
- $\boxed{4}$ $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
- $\boxed{5}$ Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad / t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a,b,c)$, on le note par $D(A;\vec{u})$
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$
- Si le point I est le milieu du segment $[AB]$ alors : $I\left(\dfrac{x_B+x_A}{2};\dfrac{y_B+y_A}{2};\dfrac{z_B+z_A}{2}\right)$

Plan et vecteur normal

- $\boxed{6}$ Toute vecteur directeur d'une droite orthogonale à un plan est appelé vecteur normal a ce plan.
- Tout plan de l'espace peut être défini par un point et un vecteur normal.
- $\boxed{7}$ Le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal au plan d'équation cartésienne (P): $ax+by+cz+d=0$
- L'équation cartésienne du plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ se déduit par l'équivalence

suivant : $\boxed{8}$ $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

- $\boxed{9}$ Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Soient (P) un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace.

La distance du point A au plan (P) est : $\boxed{10}$ $d(A,(P)) = \dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Sphère

Soit Ω un point de l'espace et R un réel strictement positif.

- L'ensemble des points de l'espace $M(x,y,z)$ tel que $\boxed{11}$ $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R.
- L'équation cartésienne du sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R est $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$
- On peut écrire l'équation cartésienne du sphère (S) de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon R sous la forme :

$\boxed{12}$ $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ où $d = a^2+b^2+c^2-R^2$

- Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points distincts de l'espace :

La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

L'équation cartésienne de la sphère de diamètre $[AB]$ est : $\boxed{13}$ $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

Etude de l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$\boxed{14}$ Soient a, b, c et d des réels tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$.

- Si $a^2+b^2+c^2-4d>0$, (S) est une sphère de centre $\Omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d=0$, (S) est le point $\Omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)$.
- Si $a^2+b^2+c^2-4d<0$, (S) est l'ensemble vide.

Positions relatives d'un plan et d'une sphère

Pour étudier la position relative d'un plan (P) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R. Il suffit de comparer $d(\Omega,(P))$ au rayon R.

$\boxed{15}$ Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R et (P) un plan dans l'espace.

- Si $d(\Omega;(P)) > R$, alors (P) ne coupe pas (S).
- Si $d(\Omega;(P)) = R$, alors (P) est tangent à (S) en un point H le projeté orthogonale de Ω sur (P).
- Si $d(\Omega;(P)) < R$, alors (P) coupe (S) suivant un cercle de centre H le projeté orthogonale de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Remarque

Pour déterminer les coordonnées du point H de la propriété précédente, on résout le système contenant l'équation cartésienne du plan (P) et une représentation paramétrique de la droite passant par Ω le centre de la sphère (S) et dirigé par un vecteur normal du plan (P))

Produit vectoriel

Définition

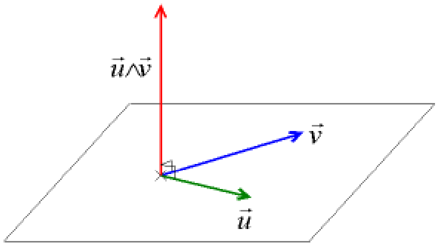
Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors le vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que :

→ $\vec{w} \perp \vec{u}$ et à $\vec{w} \perp \vec{v}$.

→ La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de sens direct.

→ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left| sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \right|$.



Propriétés

• $\boxed{16}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$ • $\boxed{17}$ A, B et C sont des points alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ • $\boxed{18}$ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal du plan (ABC)	• L'aire du triangle ABC est égale à $\boxed{19}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$ • La distance du point M à la droite $D(A;\vec{u})$ est : $\boxed{20}$ $d(M,(D)) = \frac{\left\| \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} \right\|}{\|\vec{u}\|}$

Positions relatives d'une droite et d'une sphère

$\boxed{21}$ Soient (S) la sphère de centre Ω et de rayon R $(R > 0)$, (D) une droite de l'espace, $d(\Omega,(D))$ la distance du point Ω à la droite (D) et H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (D).

- Si $d(\Omega,(D)) = R$, alors $(D) \cap (S) = \{H\}$. On dit que la droite (D) est tangente à la sphère (S) au point H.
- Si $d(\Omega,(D)) < R$, alors $(D) \cap (S) = \{A;B\}$. On dit que la droite (D) perce la sphère (S) aux points A et B.
- Si $d(\Omega,(D)) > R$, alors $(D) \cap (S) = \varnothing$. On dit que la droite (D) est située à l'extérieur de la sphère (S).

Pour étudier la position relative d'une droite (D) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R. Il suffit de comparer $d(\Omega,(D))$ au rayon R.

Remarque

Pour déterminer les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de la droite (D) et la sphère (S), on résout le système contenant l'équation cartésienne la sphère (S) et une représentation paramétrique de la droite (D)

Intersection de deux plans

$\boxed{22}$ Soient (P) et (Q) deux plans de l'espace, $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont respectivement deux vecteurs normaux aux plans (P) et (Q)

Si $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}$, alors (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

Résumé 12 : Probabilités

1) Dénombrement :

Principe fondamental de dénombrement :

Si une situation de dénombrement nécessite p étapes.

Et qu'il y a n_1 façons possibles de réaliser la première étape,

Et qu'il y a n_2 façons possibles de réaliser la seconde étape,

....et qu'il y a n_p façons possibles de réaliser la p ième étape,

Alors le nombre total des possibilités pour cette situation de dénombrement est $N = n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$

Arrangement sans répétition :

- Tout élément de la forme $(x_1;x_2;....;x_p)$ tel que $x_1, x_2, ..., x_p$ sont deux à deux distincts s'appelle un arrangement sans répétition de p éléments de E.
- Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments de E est l'entier naturel noté par A_n^p tel que :

$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$

Combinaison :

- Une combinaison de p éléments pris parmi les n élément de E est une partie dont le cardinal est p.
- Le nombre de combinaison de p éléments parmi n est noté C_n^p et on a $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

Propriétés :

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1$; • $n! = A_n^n$
- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$; • $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

Avec la calculatrice :

- C_n^p s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{p}$ $\boxed{=}$
- A_n^p s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{\text{nPr}}$ $\boxed{p}$ $\boxed{=}$
- $n!$ s'obtient par les boutons : $\boxed{n}$ $\boxed{\text{shift}}$ $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{=}$

Formule de binôme de Newton :

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul.

On a : $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$

Avec le tirage : On tire p éléments parmi n :

Type de tirage	$Card(\Omega)$	L'ordre
Simultané	C_n^p	N'est pas important
Successif sans remise	A_n^p	Important
Successif avec remise	n^p	Important

2) Probabilités :

Probabilité d'un événement.

- Pour tous événements A et B on a : $\boxed{1}$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Pour tout événement A, $\boxed{2}$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Equiprobabilité.

Dans une expérience aléatoire, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisée, on dit qu'on est dans une **situation d'équiprobabilité**.

La probabilité d'un évènement A de Ω est : $\boxed{3}$ $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Probabilité conditionnelle

$\boxed{4}$ $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $\boxed{5}$ $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

$\boxed{7}$ On dit que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\boxed{8}$ A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$

Probabilités totales

Formule des probabilités totales :

Soit P une probabilité définie sur un univers Ω

$\boxed{6}$ $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$ (On peut généraliser cette formule pour plus de deux événements)

Arbre de probabilité :

C'est un arbre sur lequel on place des probabilités conditionnelles d'événements, cette présentation permet de rendre plus simple le calcul de probabilité :

Variables aléatoires

Définition : Une variable aléatoire est une fonction de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui à chaque issue de Ω associe un nombre. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles de X .

Remarque : Si X est une variable aléatoire et $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3;.....;x_n\}$ l'ensemble des valeurs possibles de X

Alors : $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n)=1$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω d'une expérience aléatoire et $X(\Omega)=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

- L'espérance mathématique de X est le nombre :

$$\boxed{9}\quad E(X)=x_1\times P(X=x_1)+x_2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n\times P(X=x_n)$$

- La variance de X est le nombre positif : $\boxed{10}$ $V(X)=\left(x_1^2\times P(X=x_1)+x_2^2\times P(X=x_2)+\ldots+x_n^2\times P(X=x_n)\right)-\left(E(X)\right)^2$
- L'écart-type de X est le nombre : $\boxed{11}$ $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Loi Binomiale

Définition : On réalise n fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles : succès de probabilité p et échec de probabilité $(1-p)$

Donc $\forall k\in\{0,1,\ldots,n\}$: $\boxed{12}$ $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

X : nombre de succès obtenu est appelée une variable aléatoire **binomiale** de paramètre n et p.

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre n et p . On a :

$\boxed{13}$ $E(X)=n\times p$; $\boxed{14}$ $V(X)=n\times p\times(1-p)$

Tronc commun sciences et tronc commun technologique
15 Cours bien détaillés
15 Résumés bien précis
15 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
06 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac sciences expérimentales
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2BACSPF & 2BACSVTF
12 Cours bien détaillés
12 Résumés bien précis
12 Séries d'exercices corrigées
06 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Extraits du bac
05 Examens blancs corrigés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac Sciences Mathématiques
14 Cours bien détaillés
14 Résumés bien précis
14 Séries d'exercices
8 Devoirs libres corrigés
16 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2BSM A&B
Résumés des cours
8 Séries d'exercices et problèmes
8 Devoirs libres corrigés
Extraits du bac
Examen blanc corrigé
Astuces pour les concours
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Première année Bac sciences économiques et la gestion
10 Cours bien détaillés
10 Résumés bien précis
10 Séries d'exercices
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
2025/2026
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Mathématiques
Exercices résolus pour
Tronc commun sciences et tronc commun technologique
Correction bien detaillée de 185 exercices
15 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
6 Devoirs surveillés
Programme Marocain
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Mathématiques
Exercices résolus pour
Première année Bac sciences expérimentales
Correction bien detaillée de 156 exercices
12 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
Programme Marocain
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Mathématiques
Exercices résolus pour
2BACSPF & 2BACSVTF
Correction bien detaillée de 177 exercices
12 Séries d'exercices corrigées
6 Devoirs libres corrigés
12 Devoirs surveillés
5 Examens blancs corrigés
Programme Marocain
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de première année Bac Sciences mathématiques
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026
Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de deuxième année Bac Sciences mathématiques A & B
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026
Mathématiques
Correction des devoirs libres du livre de première année Bac Sciences économiques et Gestion
Programme Marocain-BIOF
Préparé par Aissa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant
2025/2026