

CORRIGES DES EXERCICES



Fomesoutra.com  
ça soutra !

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

CORRIGES DES EXERCICES

# MATHS

## TLE D

BY TEHUA  
2025

 **Fomesoutra.com**  
ça soutra !

**EXERCICE 1** Résolution des équations différentielles suivantes :

$$① f' + 3f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{-3x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$② f' - 6f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{6x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$③ 2f' - 3f = 0 \Rightarrow f' - \frac{3}{2}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{\frac{3}{2}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$④ -7f' + f = 0 \Rightarrow f' - \frac{1}{7}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{\frac{1}{7}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$⑤ 3f' + \frac{2}{3}f = 0 \Rightarrow f' + \frac{2}{9}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{-\frac{2}{9}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$⑥ f' + \sqrt{5}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{-\sqrt{5}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$⑦ 2f' = 5f \Rightarrow f' - \frac{5}{2}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{\frac{5}{2}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$⑧ -2f' = \frac{2}{5}f \Rightarrow f' + \frac{1}{5}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{-\frac{1}{5}x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

**EXERCICE 2** Résolution d'équations différentielles vérifiant les conditions initiales données.

$$① f' - 2f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{2x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow ke^{2 \times 0} = 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = e^{2x}$$

$$② f' + 7f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{-7x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow ke^{-7} = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{e^{-7}} = 2e^7 \Rightarrow f(x) = 2e^7 e^{-7x} = 2e^{7-7x}$$

$$③ 2f' - 5f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{\frac{5}{2}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow ke^{\frac{5}{2} \times 1} = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$④ -f' + 6f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{6x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(3) = 3 \Rightarrow ke^{18} = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{e^{18}} = 3e^{-18} \Rightarrow f(x) = 3e^{-18} \times e^{6x} = 3 \times e^{6x-18}$$

$$5 \quad 2f' - \frac{4}{5}f = 0 \Rightarrow f' - \frac{2}{5}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{\frac{2}{5}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow ke^{-\frac{2}{5}} = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{e^{-\frac{2}{5}}} = 2e^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f(x) = 2e^{\frac{2}{5}} \times e^{\frac{2}{5}x} = 2e^{\frac{2}{5}(1+x)}$$

$$6 \quad f' + \sqrt{3}f = 0 \Rightarrow f_k(x) = ke^{-\sqrt{3}x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = -5 \Rightarrow ke^0 = -5 \Rightarrow k = -5 \Rightarrow f(x) = -5e^{-\sqrt{3}x}$$

### EXERCICE 3 Résolution des équations différentielles suivantes

Résolvons chacune des équations différentielles suivantes :

$$1 \quad f'' - 4f = 0 \Leftrightarrow f'' - 2^2f = 0$$

les solutions de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

$$2 \quad f'' + 3f = 0 \Leftrightarrow f'' + (\sqrt{3})^2f = 0$$

les solutions de  $(E_2)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x) \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

$$3 \quad -3f'' + 15f = 0 \Leftrightarrow f'' - 5f = 0 \Leftrightarrow f'' - (\sqrt{5})^2f = 0$$

les solutions de  $(E_3)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = Ae^{\sqrt{5}x} + Be^{-\sqrt{5}x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

$$4 \quad 2f'' + f = 0 \Leftrightarrow f'' + \frac{1}{2}f = 0 \Leftrightarrow f'' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2f = 0$$

les solutions de  $(E_4)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = A\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

### EXERCICE 4

Dans chacun des cas suivants, déterminons la solution de l'équation différentielle

$$1 \quad 4f'' + f = 0 \quad f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0$$

$$4f'' + f = 0 \Leftrightarrow f'' + \frac{1}{4}f = 0 \Leftrightarrow f'' + \left(\frac{1}{2}\right)^2f = 0$$

les solutions de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = A\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

$$\text{On a : } f'(x) = -\frac{1}{2}A\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}B\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos 0 + B\sin 0 = 1 \\ -\frac{1}{2}A\sin 0 + \frac{1}{2}B\cos 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$\textcircled{2} \quad f'' - f = 0 \quad f(0) = 2 \text{ et } f'(0) = 1$$

$$f'' - f = 0 \Leftrightarrow f'' - (1)^2 f = 0$$

les solutions de  $(E_2)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = Ae^x + Be^{-x} \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

$$\text{On a : } f'(x) = Ae^x - Be^{-x}$$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^0 + Be^{-0} = 2 \\ Ae^0 - Be^{-0} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 3 \\ 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x) = f(x) = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{3e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad f'' + \frac{1}{9}f = 0 \quad f(\pi) = 1 \text{ et } f'(\pi) = 0$$

$$f'' + \frac{1}{9}f = 0 \Leftrightarrow f'' + \left(\frac{1}{3}\right)^2 f = 0$$

les solutions de  $(E_3)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$f(x) = A\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{3}x\right) \quad (A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R})$$

$$\text{On a : } f'(x) = -\frac{1}{3}A\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{3}B\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$\begin{cases} f(\pi) = 1 \\ f'(\pi) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ -\frac{1}{3}A\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}B\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 1 \\ -\frac{A}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{3} \times \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

### PROBLEME

Partie A du problème du bac 2002. Session normale

**1** Montrons que la fonction définie par  $g(x) = x - 1$  est solution de (E).

$g(x) = x - 1$  est solution de (E) si et seulement si  $g'(x) + 2g(x) = 2x - 1$

On a :  $g(x) = x - 1$  donc  $g'(x) = 1$

$$g'(x) + 2g(x) = 1 + 2x - 1 = 1 + 2x - 2 = 2x - 1$$

$g'(x) + 2g(x) = 2x - 1$  d'où  $g(x) = x - 1$  est solution de (E).

**2** On donne l'équation différentielle (E') :  $f'(x) + 2f(x) = 0$ .

**Résolution de (E').**

(E') est de la forme  $f' + af = 0$  avec  $a = 2$ .

Les solutions de (E') sont donc les fonctions de la forme  $ke^{-2x}$   $k \in \mathbb{R}$

**b** Montrons que les fonctions  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1 \text{ sont solutions de (E).}$$

$f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$  est solution de (E) si et seulement si

$$f_k'(x) + 2f_k(x) = 2x - 1.$$

On a:  $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$  donc  $f_k'(x) = -2ke^{-2x} + 1$

$$f_k'(x) + 2f_k(x) = -2ke^{-2x} + 1 + 2(ke^{-2x} + x - 1) = 2x - 1$$

$f_k'(x) + 2f_k(x) = 2x - 1$  d'où les fonctions  $f_k(x) = ke^{-2x} + x - 1$  sont solutions de (E).

**3 a** Montrons que si  $f$  est solution de (E) alors  $f - g$  est solution de (E').

Si  $f$  est solution de (E) alors  $f'(x) + 2f(x) = 2x - 1$

Or:  $g'(x) + 2g(x) = 2x - 1$ . D'où:  $f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$

$$(f'(x) + 2f(x)) - (g'(x) + 2g(x)) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) - g'(x) - 2g(x) = 0$$

$$f'(x) - g'(x) + 2f(x) - 2g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - g'(x) + 2(f(x) - g(x)) = 0$$

Donc  $f - g$  est solution de (E').

**b** Déduisons-en les solutions de (E).

D'après la question 2.a) Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme  $ke^{-2x}$   
 $k \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc: } f - g(x) = ke^{-2x}.$$

$$\text{D'où: } f(x) = ke^{-2x} + g(x) = ke^{-2x} + x - 1$$