

CORRIGE D'EXERCICES



Fomesoutra.com
ça soutra !

NOMBRES COMPLEXES

CORRIGES D'EXERCICES

MATHS

TLE D

BY TEHUA
2025

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

EXERCICE 1

Déterminons la forme algébrique.

$$Z_1 = (1-2i)(4+5i) = 4+5i-8i-10i^2 = 4+5i-8i-10 \times (-1) = 4-3i+10 = 14-3i$$

$$Z_2 = \frac{(3-5i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{12-6i-20i+10i^2}{4^2+2^2} = \frac{12-6i-20i-10}{16+4} = \frac{2-26i}{20} = \frac{1}{10} - \frac{13i}{10}$$

EXERCICE 2**1** Déterminons le module et un argument des nombres complexes.

$$\bullet |Z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\bullet |Z_3| = |5| = \sqrt{5^2+0^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{5}{5} = 1 \\ \sin \theta = \frac{0}{5} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 0$$

$$\bullet |Z_2| = |2i| = \sqrt{0^2+2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\bullet |Z_4| = |1-\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{0}{2} = 0 \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$$

2 Déduisons-en leurs formes trigonométrique et exponentielle.

$$Z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$; \quad Z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$; \quad Z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_3 = 5(\cos 0 + i \sin 0)$$

$$; \quad Z_3 = 5e^{i0}$$

$$Z_4 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

$$; \quad Z_4 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

EXERCICE 3

$$Z_1 = 1+i \text{ et } Z_2 = 1+\sqrt{3}i$$

$$\bullet |Z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\bullet |Z_2| = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Arg}(Z_1) = \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Arg}(Z_2) = \theta = \frac{\pi}{3}$$

③ Calcul du module et d'un argument des nombres complexes suivants:

$$\bullet |Z_3| = |(1+i)(1+i\sqrt{3})| = |1+i| \times |1+i\sqrt{3}| = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_3) = \arg(1+i)(1+i\sqrt{3}) = \arg(1+i) + \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\bullet |Z_4| = \left| \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} \right| = \frac{|1+i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(Z_4) = \arg\left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}\right) = \arg(1+i) - \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$$

$$\bullet |Z_5| = |(1+i)^7| = |1+i|^7 = \sqrt{2}^7 = \sqrt{2}^6 \times \sqrt{2} = 2^3 \times \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\arg(Z_5) = \arg(1+i)^7 = 7 \times \arg(1+i) = 7 \times \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

2001

EXERCICE

4

Calcul de $Z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

Point méthode :

Pour déterminer la forme algébrique de $Z = (Z_1)^n$, on peut procéder comme suit :

1. Détermine la forme trigonométrique de Z_1
2. Utilise la formule de Moivre pour déterminer la forme trigonométrique de Z
3. Détermine $\text{Arg}(Z)$ la mesure principale de $\arg(Z)$
4. Reviens à la forme algébrique de Z

On pose: $Z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $|Z_1| = 1$; $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Arg}(Z_1) = \frac{\pi}{6}$

$$Z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

$$Z = (Z_1)^{2001} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right)^{2001} = \left(\cos\left(\frac{2001\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2001\pi}{6}\right) \right)$$

$$\frac{2001}{6} = 334 - \frac{3}{6} = 334 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2001\pi}{6} = 334\pi - \frac{\pi}{2}$$

La mesure principale de $\frac{2001\pi}{6}$ est donc $-\frac{\pi}{2}$.

$$Z = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) = 0 + i \times (-1) = -i$$

EXERCICE 5

On donne $z = -1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 + i$

① Calculons le module puis un argument des nombres complexes z et z'

$$|z| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

Soit θ un argument de z

$$\left. \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$|z'| = |1 + i| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Soit θ' un argument de z'

$$\left. \begin{array}{l} \cos\theta' = \frac{\text{Re}(z')}{|z'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta' = \frac{\text{Im}(z')}{|z'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \theta' = \frac{\pi}{4}$$

② Ecrivons $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{8\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\frac{z}{z'} = \sqrt{2} \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} \right)$$

③ Écrivons $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique

$$\frac{z}{z'} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(-1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1+i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{1^2+1^2} = \frac{-1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i}{1^2+1^2}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{(-1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i}{2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

④ Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\frac{z}{z'} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \text{ et } \frac{z}{z'} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Donc: } \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{D'où: } \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

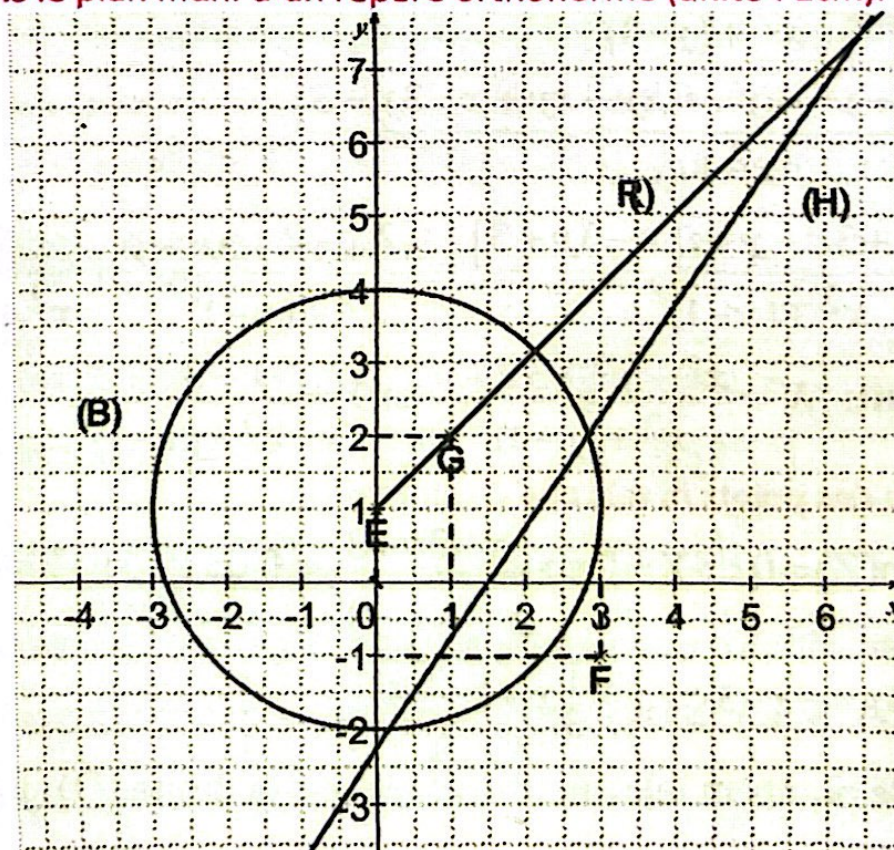
On en déduit:

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

EXERCICE 6 BAC Blanc 2001. Cours UNESCO Plateau

① Construction des points E, F et G puis construction des ensembles de points de la question 2. dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1cm).



2 Déterminons :

a $|Z-i|=3 \Leftrightarrow |Z-Z_E|=3 \Leftrightarrow (B)$ est le cercle de centre $E(i)$ et de rayon 3.

b $|Z-i|=|Z-3+i| \Leftrightarrow |Z-i|=|Z-(3-i)| \Leftrightarrow |Z-Z_E|=|Z-Z_F|$

$\Rightarrow (H)$ est la médiatrice du segment $[EF]$.

c $\text{Arg}(Z-i) = \text{Arg}(Z_G - Z_E) \Leftrightarrow \text{Arg}(Z_M - Z_E) = \text{Arg}(Z_G - Z_E)$
 $\Leftrightarrow \text{Arg}\left(\frac{Z_M - Z_E}{Z_G - Z_E}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Mes}(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{EM}) = 0$

Le point $M \in]EG$ donc R est la demi-droite $]EG$.

EXERCICE 7

1 Expression des coordonnées de X et Y de M à l'aide des coordonnées x et y de m .

On pose: $Z = X + iY$ et $z = x + iy$

$$Z = \frac{z+3}{z-i} = \frac{x+iy+3}{x+iy-i} = \frac{(x+3)+iy}{x+i(y-1)} = \frac{[(x+3)+iy][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]}$$

$$Z = \frac{x(x+3)+ixy-i(x+3)(y-1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z = \frac{x(x+3)+y(y-1)+i[xy-(x+3)(y-1)]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z = \frac{x^2+3x+y^2-y+i[xy-xy+x-3y+3]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$Z = \frac{x^2+y^2+3x-y+i[x-3y+3]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+3x-y}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2} i$$

On en déduit: $X = \frac{x^2+y^2+3x-y}{x^2+(y-1)^2}$ et $Y = \frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2}$

2 a Ensemble des points m tels que Z soit réel.

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow Y = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3y+3}{x^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x-3y+3=0$$

$$Z \text{ réel} \Leftrightarrow -3y = -x-3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x+1$$

L'ensemble de points m tels que Z soit réel est la droite (D) : $y = \frac{1}{3}x+1$

b Ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur.

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 3x - y}{x^2 + y - 1} = 0$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 3x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2$$

L'ensemble des points m tels que Z soit imaginaire pur est le cercle

de centre $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

EXERCICE 8

Déterminons $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Point méthode :

Pour écrire $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$,

- On pose la formule de Moivre $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos \theta + i\sin \theta)^n$
- On développe le second membre de cette égalité au moyen du binôme de Newton.
- On identifie $\cos(n\theta)$ avec la partie réelle du second membre développé et $\sin(n\theta)$ avec la partie imaginaire du second membre développé.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos \theta + i\sin \theta)^3 \\ &= 1\cos^3 \theta + 3\cos^2 \theta i\sin \theta + 3\cos \theta i\sin^2 \theta + 1i\sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta + 3i\cos^2 \theta \sin \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta - i\sin^3 \theta \\ &= \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta + i(3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)\end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta \quad ; \quad \sin(3\theta) = 3\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

EXERCICE 9 Linéarise $\cos^3 \theta$

Point méthode :

Pour linéariser $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$, on peut procéder comme suit :

• Pose la formule d'Euler $\cos \theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ou $\sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

• Puis écris $\cos^n \theta = \left[\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right]^n$ ou $\sin^n \theta = \left[\frac{1}{2i}(z - \bar{z})\right]^n$

• Développe ensuite le second membre de l'égalité au moyen du binôme de Newton.

• Utilise les formules d'Euler $\cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + \bar{z}^n)$ ou $\sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - \bar{z}^n)$

pour revenir à des expressions avec $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} z + \bar{z} \Rightarrow \cos^3 \theta = \left[\frac{1}{2} z + \bar{z} \right]^3 = \frac{1}{8} (z^3 + 3z^2\bar{z} + 3z\bar{z}^2 + \bar{z}^3)$$

$$\Rightarrow \cos^3 \theta = \frac{1}{8} (z^3 + 3z + 3\bar{z} + \bar{z}^3) \quad \text{car } z\bar{z} = 1$$

$$\Rightarrow \cos^3 \theta = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} (z^3 + \bar{z}^3) + 3 \frac{1}{2} z + \bar{z} \right) = \frac{1}{4} \cos 3\theta + 3 \cos \theta$$

EXERCICE 10 Déterminons les racines carrées de $Z = 3 - 4i$

$$|Z| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Soit $z = x + iy$ une racine carrée de Z , on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(Z) \\ 2xy = \operatorname{Im}(Z) \end{cases}$$

Pour tout $z = x + iy$ une racine carrée de $Z = 3 - 4i$, le système devient :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = -4 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 & (1) + (2) \\ 2y^2 = 2 & (1) - (2) \\ xy = -2 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires.} \end{cases}$$

Les racines carrées de $Z = 3 - 4i$ sont $z = 2 - i$ et $z' = -2 + i$.

EXERCICE 11 Sénégal 2003

① Posons $z = ix, x \in \mathbb{R}$

$$\text{on a } -ix^3 - x^2 + 8ix^2 - 23ix + 4x - 3 + 24i = 0$$

$$(-x^2 + 4x - 3) + i(-x^3 + 8x^2 - 23x + 24) = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 + 4x - 3 = 0 \\ -x^3 + 8x^2 - 23x + 24 = 0 \end{cases}$$

$x = 3$ est solution commune aux deux équations $z_0 = 3i$

② A l'aide du schéma de Horner, on montre que $1 + 2i$ est solution de (E)

	1	1-8i	-23-4i	-3+24i
1+2i		1+2i	14-2i	3-24i
	1	2-6i	-9-6i	0

par la même méthode, on montre que $-2 + 3i$ est solution de (E).

③ L'ensemble des solutions de (E) est : $\{3i; 1 + 2i; -2 + 3i\}$

EXERCICE 12

① Déterminons le module et un argument du nombre : $U = \frac{S-T}{R-T}$

$$U = \frac{S-T}{R-T} = \frac{(3-2\sqrt{3}-2i)-3}{(3-2\sqrt{3}+2i)-3} = \frac{-2\sqrt{3}-2i}{-2\sqrt{3}+2i} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2\sqrt{3}-2i} = \frac{(2\sqrt{3}+2i)(2\sqrt{3}+2i)}{(2\sqrt{3}-2i)(2\sqrt{3}+2i)}$$

$$U = \frac{(2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 2i + (2i)^2}{16} = \frac{12 + 8\sqrt{3}i - 4}{16} = \frac{8 + 8\sqrt{3}i}{16} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$U = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- $|U| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

- $\theta = \arg(U)$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \arg(U) = \frac{\pi}{3}$$

② Dédisons-en la nature du triangle RST .

- $|U| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{S-T}{R-T} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|S-T|}{|R-T|} = 1 \Leftrightarrow |S-T| = |R-T| \Leftrightarrow ST = RT \quad (1)$

- $\arg(U) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{S-T}{R-T}\right) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \text{mes}(\overline{TR}, \overline{TS}) = \frac{\pi}{3} \quad (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow RST$ est un triangle équilatéral.

EXERCICE 13

① $z^3 - 1 = 0$ si et seulement si $z - 1(z^2 + z + 1) = 0$

Réolvons l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2. \text{ Donc } z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } z^3 - 1 = 0 \text{ si et seulement si } z = 1 \text{ ou } z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

② a Développons $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$

$$(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})(-4i) = 4\sqrt{2}(-1 - i)$$

$$b) z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$$

$$\text{On pose : } u = \frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = u(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$

$$\text{Donc } z^3 = u^3(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^3 = 4\sqrt{2}(-1-i). \text{ On en déduit que : } u^3 = 1$$

$$\text{D'après 1). On a : } u = 1 \text{ ou } u = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \text{ ou } u = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\text{Or } z = u\sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } z = \sqrt{2}-i\sqrt{2} \text{ ou } z = (\sqrt{2}-i\sqrt{2})\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = (\sqrt{2}-i\sqrt{2})\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{C'est-à-dire } z = \sqrt{2}-i\sqrt{2} \text{ ou } z = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} \text{ ou}$$

$$z = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \text{ qui sont les racines de (E) sous forme algébrique.}$$

Exprimons ces racines sous forme trigonométrique.

$$\text{On a : } z = u\sqrt{2}-i\sqrt{2} = u \times 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2ue^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{donc : Pour } u = 1, \text{ on obtient } z = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Pour } u = e^{-i\frac{2\pi}{3}}, \text{ on obtient } z = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

$$\text{Pour } u = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \text{ on obtient } z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

d'où les racines de (E) sous forme trigonométrique sont : $2e^{-i\frac{\pi}{4}}, 2e^{-i\frac{11\pi}{12}}, 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$

③ Déduisons-en les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

$$\text{On a eu : } 2e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Donc } e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{D'où } \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$