

CORRIGES DES EXERCICES



Fomesoutra.com
ça soutra !

SUITE NUMÉRIQUE

CORRIGES DES EXERCICES

MATHS

TLE D

BY TEHUA
2025

 **Fomesoutra.com**
ça soutra !

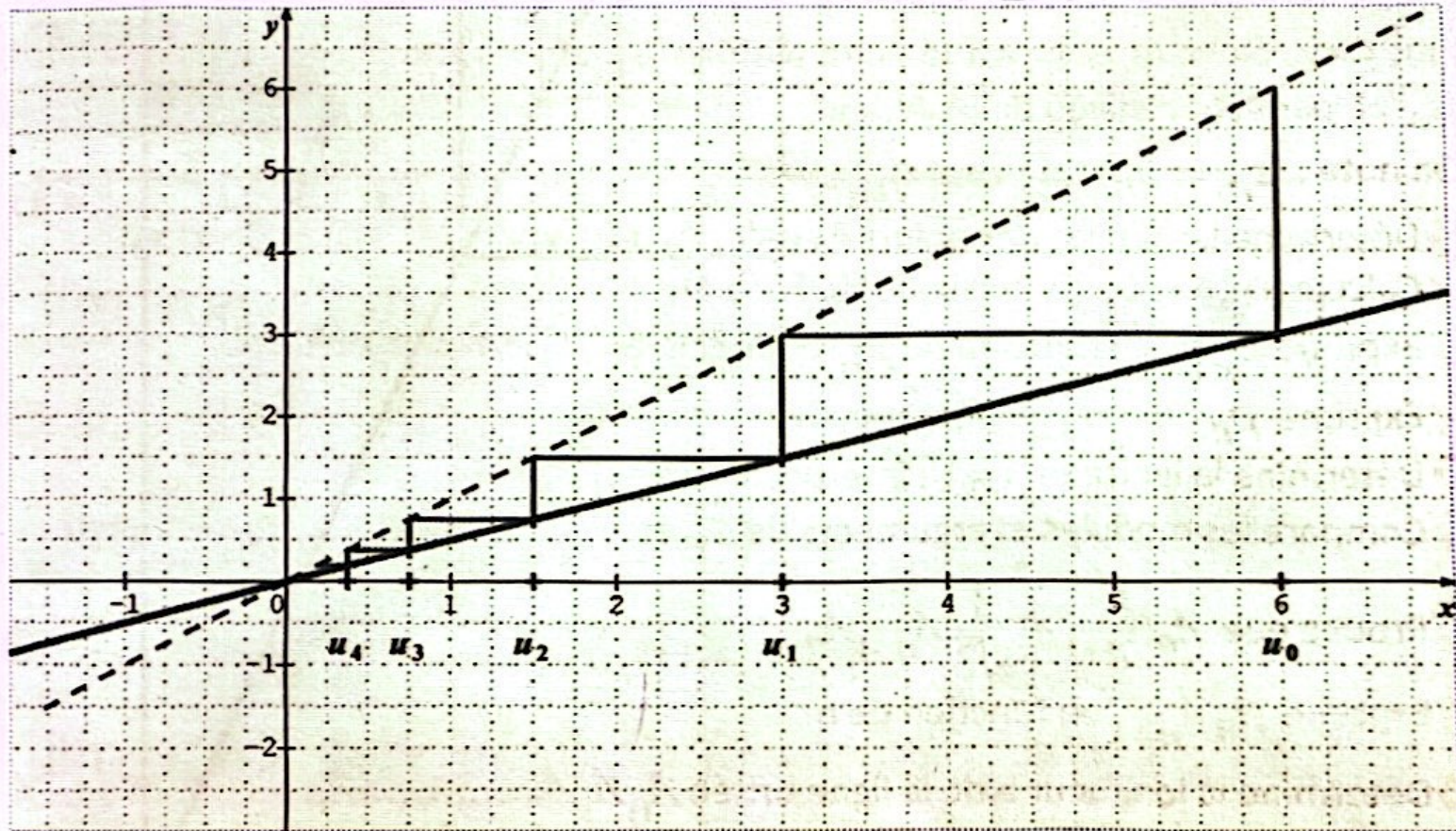
EXERCICE

1

Représentation des termes des suites (U_n) et (V_n) .

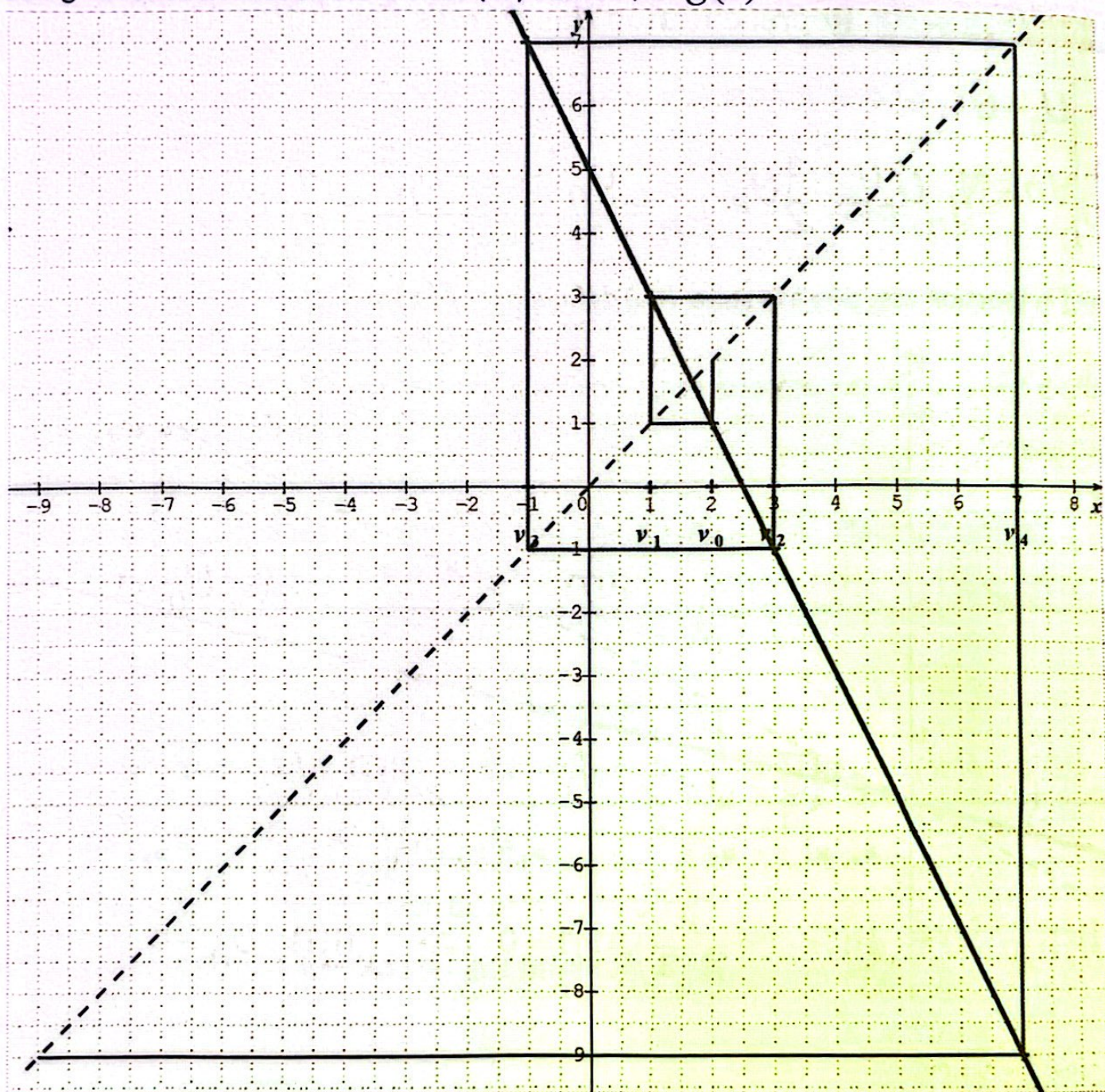
$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \end{cases}$$

Soit f la fonction associée à la suite (U_n) définie par $f(x) = \frac{1}{2}x$



$$b \begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = -2V_n + 5 \end{cases}$$

Soit g la fonction associée à la suite (V_n) définie par $g(x) = -2x + 5$



EXERCICE

2

Étudions les variations des suites suivantes :

1 Étudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = ((n+1)^2 - 2(n+1) + 5) - (n^2 - 2n + 5) = 2n - 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = 2n - 1 > 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$$

Donc la suite (U_n) est une suite croissante.

② Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = [(n+1)^3 - (n+1)^2 + (n+1)] - (n^3 - n^2 + n) = 3n^2 + n + 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} - U_n = 3n^2 + n + 1 > 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$$

Par conséquent, la suite (U_n) est croissante.

③ Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n^2 + 1}{U_n} - U_n = \frac{U_n^2 + 1 - U_n^2}{U_n} = \frac{1}{U_n} < 0$$

car (U_n) est une suite à valeurs négatives.

Par conséquent, la suite (U_n) est décroissante.

EXERCICE 3 Calcul de la limite des suites (U_n) définies sur \mathbb{N}^* .

① $U_n = \frac{n+1}{n-5}$

On pose: $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

② $U_n = \sqrt{3 + \frac{2}{n}}$

On pose: $f(x) = \sqrt{3 + \frac{2}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3 + \frac{2}{x}} = \sqrt{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{3}$$

③ $U_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

On pose: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

EXERCICE 4

$$U_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Leftrightarrow n+1 \geq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-1 \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1+0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$. Donc la suite (U_n) est minorée par 0 et majorée par 1.

Par conséquent, la suite (U_n) est bornée par 0 et 1.

EXERCICE 5

(U_n) est définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier n , $U_{n+1} = \sqrt{3+U_n}$

① **Démontrons par récurrence que, on a : $0 \leq U_n \leq 3$**

• Initialisation

$U_0 = 1 \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 3$ la propriété est vraie à l'ordre 0.

• Transmission

On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}, 0 \leq U_k \leq 3$

$$0 \leq U_k \leq 3 \Leftrightarrow 3+0 \leq 3+U_k \leq 3+3 \Leftrightarrow 3 \leq 3+U_k \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{3+U_k} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq U_{k+1} \leq \sqrt{6}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{3} \leq U_{k+1} \leq \sqrt{6} \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq U_{k+1} \leq 3$$

• Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 3$

② **Démontrons que la suite (U_n) est strictement croissante.**

On note P_n la propriété : " $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$ "

Montrons par récurrence que : $U_{n+1} > U_n$

• Initialisation

$U_0 = 1 ; U_1 = 2 \Rightarrow U_1 > U_0$ la propriété est vraie à l'ordre 0.

• Transmission

On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} > U_k$

$$U_{k+1} > U_k \Leftrightarrow 3+U_{k+1} > 3+U_k \Leftrightarrow \sqrt{3+U_{k+1}} > \sqrt{3+U_k} \Leftrightarrow U_{k+2} > U_{k+1}$$

• Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} > U_n$ donc (U_n) est strictement croissante.

③ **En déduisons que (U_n) est convergente.**

(U_n) est croissante et majorée par 3 donc (U_n) est convergente.

EXERCICE 6

① **Montrons que (U_n) est une suite arithmétique.**

$$U_{n+1} = -4(n+1) + 7 = -4n - 4 + 7 = -4n + 3$$

$$U_{n+1} - U_n = -4n + 3 - (-4n + 7) = -4n + 3 + 4n - 7 = -4$$

$U_{n+1} - U_n = -4$ qui est une constante indépendante de n .

U_n est donc une suite arithmétique de raison $r = -4$

et de premier terme $U_0 = -4 \times 0 + 7 = 7$

② **En déduisons les variations et la limite de (U_n) .**

U_n est une suite arithmétique.

$r = -4 < 0 \Rightarrow U_n$ est strictement décroissante.

$r = -4 < 0 \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

③ Calcul de S_{10} la somme des 10 premiers termes.

S_n = nombre de termes \times demie somme des termes extrêmes.

$$\text{Donc } S_{10} = 10 \times \frac{U_0 + U_9}{2} = 10 \times \frac{7 + (-29)}{2} = 10 \times \frac{-22}{2} = -110$$

EXERCICE

7

Montrons que les suites suivantes sont géométriques :

$$U_n = (-4)^{2n+1}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-4^{2(n+1)+1}}{-4^{2n+1}} = \frac{-4^{2n+2+1}}{-4^{2n+1}} = \frac{-4^{2n+3}}{-4^{2n+1}} = -4^{2n+3-2n+1} = (-4^2) = 16$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 16$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite

géométrique de raison 16.

$$U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1+1}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}} = 2^{n+1-n} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2-n+1}$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite

géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

$$U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-1^{n+1} \times 2^{3(n+1)+1}}{-1^n \times 2^{3n+1}} = \frac{-1^{n+1} \times 2^{3n+4}}{-1^n \times 2^{3n+1}}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{-1^{n+1}}{-1^n} \times \frac{2^{3n+4}}{2^{3n+1}} = -1^{(n+1)-n} \times 2^{(3n+4)-(3n+1)} = -1 \times 2^3$$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} = -(2^3)$ qui est une constante indépendante de n donc (U_n) est une suite

géométrique de raison $-(2^3) = -8$.

EXERCICE 8

① Montrons que (V_n) est une suite géométrique.

Exprimons V_{n+1} en fonction de V_n .

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - 1}{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} + 3} = \frac{\frac{2U_n + 3 - U_n - 4}{U_n + 4}}{\frac{2U_n + 3 + 3U_n + 12}{U_n + 4}} = \frac{U_n - 1}{5U_n + 15}$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 4} \times \frac{U_n + 4}{5U_n + 15} = \frac{U_n - 1}{5U_n + 15} = \frac{U_n - 1}{5(U_n + 3)} = \frac{1}{5} \times \frac{U_n - 1}{U_n + 3} = \frac{1}{5} \times V_n$$

D'où $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{5}$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

② Exprimons V_n en fonction de n .

$$q = \frac{1}{5} \quad ; \quad V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow V_n = V_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Exprimons U_n en fonction de n .

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \Rightarrow U_n - 1 = V_n (U_n + 3) \Rightarrow U_n - 1 = V_n \times U_n + 3 \times V_n$$

$$\Rightarrow U_n - V_n \times U_n = 3 \times V_n + 1 \Rightarrow U_n (1 - V_n) = 3 \times V_n + 1 \Rightarrow U_n = \frac{3 \times V_n + 1}{1 - V_n}$$

$$\text{Or, } V_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{d'où } U_n = \frac{3 \times V_n + 1}{1 - V_n} = \frac{3 \times \left(-\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + 1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)} = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^n + 1}{1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$U_n = \frac{\frac{-1}{5^n} + 1}{1 + \frac{1}{3 \times 5^n}} = \frac{\frac{-1 + 5^n}{5^n}}{\frac{1 + 3 \times 5^n}{5^n}} = \frac{-1 + 5^n}{5^n} \times \frac{5^n}{1 + 3 \times 5^n} = \frac{5^n}{5^n} \times \frac{-1 + 5^n}{1 + 3 \times 5^n} = \frac{-1 + 5^n}{1 + 3 \times 5^n}$$

EXERCICE 9

① Calculons U_1 , U_2 et U_3 .

$$U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 1 = \frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1$$

$$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 1 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$U_3 = \frac{1}{2}U_2 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$$

2 a Calculons V_0 , V_1 et V_2 .

$$V_0 = U_0 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$V_1 = U_1 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$V_2 = U_2 - 2 = \frac{3}{2} - 2 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$$

b Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$V_n = U_n - 2$$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}U_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n - 1 = \frac{1}{2}(U_n - 2) = \frac{1}{2}V_n$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

et premier terme $V_0 = -2$

c Exprimons V_n puis U_n en fonction de n .

$$V_n = V_0 \times q^n = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = U_n - 2 \Rightarrow U_n = V_n + 2 = -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

3 On pose: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

a Exprimons S_n en fonction de n .

(V_n) est une suite géométrique

$$S_n = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = V_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = -4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

b Déduisons-en T_n en fonction de n .

$$V_n = U_n - 2 \Rightarrow U_n = 2 + V_n$$

$$T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$T_n = (2 + V_0) + (2 + V_1) + \dots + (2 + V_n)$$

$$T_n = 2 + 2 + \dots + 2 + V_0 + V_1 + \dots + V_n = 2n + 1 + S_n$$

$$T_n = 2n + 1 - 4 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

c Calculons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = -4(1-0) = -4$$

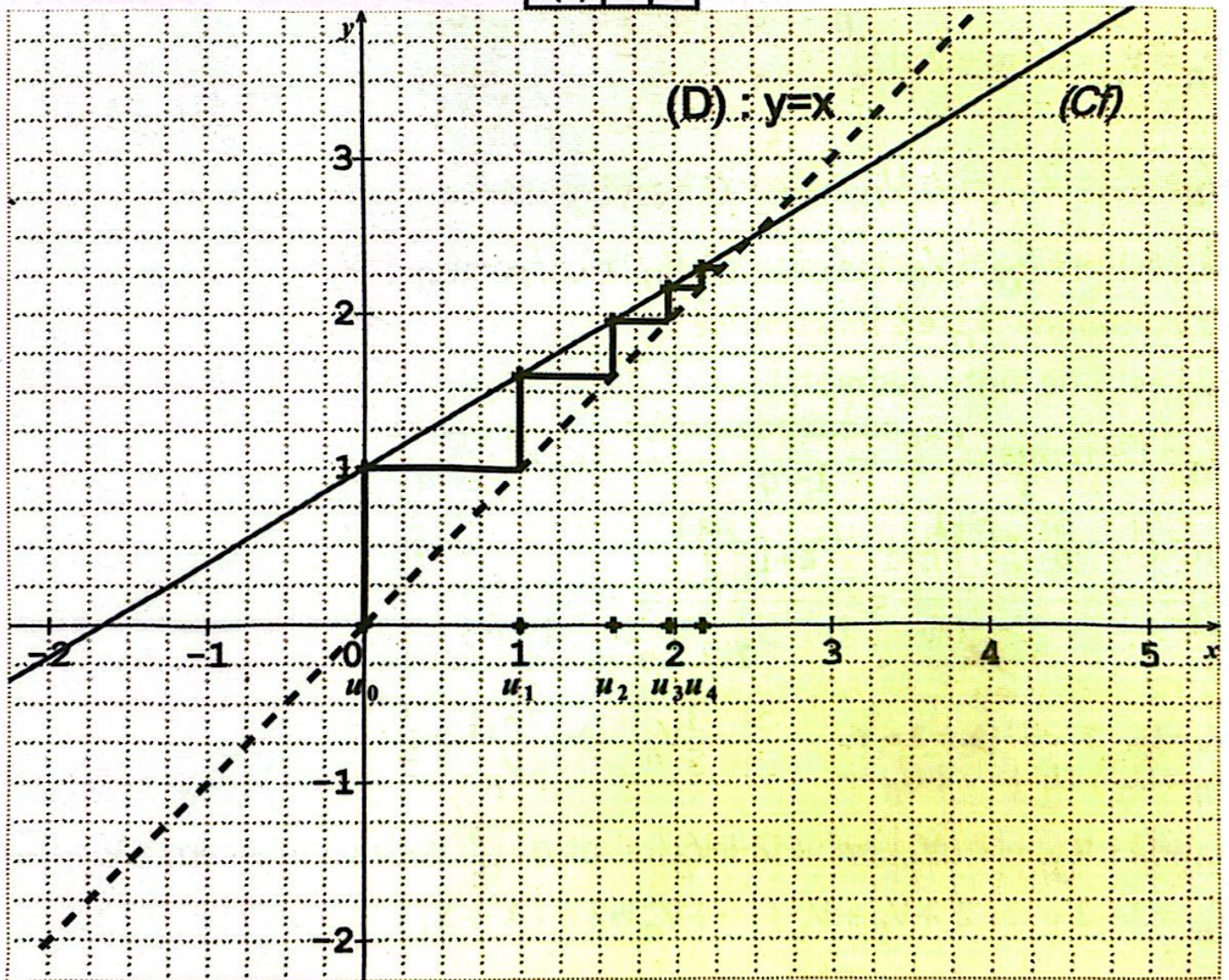
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} -4 \times \left| 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| = -4$$

EXERCICE 10 BAC 2009 Session normale

① $U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$ on en déduit: $f(x) = \frac{3}{5}x + 1$

x	0	5
f(x)	1	4



2 a Démontrons par récurrence que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

$U_0 = 0 < \frac{5}{2}$ donc U_0 est majorée par $\frac{5}{2}$: la propriété est vraie à l'ordre 0.

Supposons que pour tout k élément de \mathbb{N} , U_k est majorée par $\frac{5}{2}$

$$\text{On a : } U_k < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow \frac{3}{5}U_k + 1 < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow U_{k+1} < \frac{5}{2} \text{ donc } U_{k+1} \text{ est également majorée par } \frac{5}{2}.$$

Finalement, pour tout n appartenant à \mathbb{N} , (U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$

b Démontrons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

(U_n) est majorée par $\frac{5}{2}$ donc (U_n) converge si est elle croissante.

Etudions les variations de la suite (U_n) .

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - U_n = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{5}U_n = \frac{-2}{5}U_n + 1$$

$$U_n < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n > \frac{-2}{5} \times \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n > -1 \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n + 1 > -1 + 1 \Rightarrow \frac{-2}{5}U_n + 1 > 0$$

Donc $U_{n+1} - U_n > 0$; par suite (U_n) est croissante.

(U_n) est croissante et majorée donc elle converge.

3 Soit la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a Démontrons que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

$$V_n = U_n - \frac{5}{2} \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 - \frac{5}{2} \text{ car } U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{3}{5}U_n - \frac{3}{2} = \frac{3}{5} \left(U_n - \frac{5}{2} \right) = \frac{3}{5}V_n \Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{3}{5}$$

$\Rightarrow (V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = -\frac{5}{2}$

b Exprimons V_n puis U_n en fonction de n .

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{-5}{2}$

$$\Rightarrow V_n = V_0 q^n \Rightarrow V_n = \frac{-5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$V_n = U_n - \frac{5}{2} \Rightarrow U_n = \frac{5}{2} + V_n$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{5}{2} + \left| \frac{-5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n \right| \Rightarrow U_n = \frac{5}{2} \left| 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \right|$$

c Déterminons la limite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$.

$$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim V_n = 0$$

$$\text{Or } U_n = \frac{5}{2} + V_n \Rightarrow \lim U_n = \frac{5}{2} + \lim V_n$$

$$\text{Donc } \lim U_n = \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}$$

EXERCICE 11

1 Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $V_n > 0$.

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = 4 > 0 \\ V_0 = 9 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{la propriété est vraie à l'ordre } 0$$

On suppose que: $\forall p \in \mathbb{N}, U_p > 0$ et $V_p > 0$

Montrons alors que $U_{p+1} > 0$ et $V_{p+1} > 0$

$$U_p > 0 \text{ et } V_p > 0 \Rightarrow U_p + V_p > 0 \text{ et } U_p \times V_p > 0$$

$$\text{d'où } \frac{2U_p \times V_p}{U_p + V_p} > 0 \text{ donc } U_{p+1} > 0$$

$$U_p > 0 \text{ et } V_p > 0 \Rightarrow U_p + V_p > 0$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2}(U_p + V_p) > 0 \text{ donc } V_{p+1} > 0$$

On conclue: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $V_n > 0$

2 a Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n^2}{2U_n + V_n}$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + V_n - \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} = \frac{U_n + V_n^2 - 4U_n V_n}{2U_n + V_n}$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_n^2 + V_n^2 + 2U_n V_n - 4U_n V_n}{2U_n + V_n} = \frac{U_n^2 + V_n^2 - 2U_n V_n}{2U_n + V_n}$$

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$$

b Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = 4 \\ V_0 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow U_0 \leq V_0 \text{ donc la propriété est vraie à l'ordre } 0$$

On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}, U_p \leq V_p$

Montrons alors que $\forall p \in \mathbb{N}, U_{p+1} \leq V_{p+1}$

$$\forall p \in \mathbb{N}, V_{p+1} - U_{p+1} = \frac{(V_p - U_p)^2}{2(U_p + V_p)} \geq 0$$

$$\Rightarrow V_{p+1} - U_{p+1} \leq 0 \text{ donc } U_{p+1} \leq V_{p+1}$$

On conclue : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$

• Montrons que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{1}{2}(V_n - U_n) \frac{V_n - U_n}{U_n + V_n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow V_n - U_n \geq 0$$

$$\text{cependant } \forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq V_n + U_n$$

$$\text{d'où } \frac{V_n - U_n}{U_n + V_n} \leq 1$$

$$\text{donc } V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}(V_n - U_n) \frac{(V_n - U_n)}{(U_n + V_n)} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n) \times 1$$

Finalemnt : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

• Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$

$$V_0 - U_0 = 9 - 4 = 5 \leq \frac{5}{2^0} \text{ donc la propriété est vraie à l'ordre } 0$$

$$\text{On suppose que } \forall p \in \mathbb{N}, V_p - U_p \leq \frac{5}{2^p}$$

$$\text{Montrons alors que } \forall n \in \mathbb{N}, V_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{5}{2^{p+1}}$$

$$V_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{1}{2}(V_p - U_p) \Rightarrow V_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{1}{2} \times \frac{5}{2^p}$$

$$\left(\text{car on a supposé que: } V_p - U_p \leq \frac{5}{2^p} \right)$$

$$\Rightarrow V_{p+1} - U_{p+1} \leq \frac{5}{2^{p+1}} \text{ la propriété est vraie à l'ordre } n+1$$

$$\text{On conclue : } \forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$$

3 • Démontrons que la suite (U_n) est croissante

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{2U_n V_n - U_n^2 - U_n V_n}{U_n + V_n} \\ &= \frac{U_n V_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n + V_n} \end{aligned}$$

$$V_n > U_n \Rightarrow V_n - U_n > 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} - U_n = \frac{U_n}{U_n + V_n} (V_n - U_n) > 0 \text{ donc } U_{n+1} - U_n > 0$$

Finalement, (U_n) est croissante.

• Démontrons que la suite (V_n) est décroissante

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2} U_n + V_n - V_n = \frac{1}{2} U_n + \frac{1}{2} V_n - V_n = \frac{1}{2} U_n - \frac{1}{2} V_n = \frac{1}{2} (U_n - V_n)$$

$$\text{Or } U_n \leq V_n \Rightarrow U_n - V_n \leq 0$$

$$\text{Donc } V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2} (U_n - V_n) \leq 0$$

Finalement, V_n est décroissante.

b Montrons que la suite (U_n) converge.

La suite (V_n) est décroissante d'où $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq V_0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow U_n \leq V_0 \Rightarrow (U_n)$ est majorée par V_0 .

(U_n) est croissante et majorée par V_0 donc (U_n) converge.

• Montrons que la suite (V_n) converge.

La suite U_n est croissante d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_0 \leq U_n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n \Rightarrow U_0 \leq V_n \Rightarrow (V_n)$ est minorée par U_0 .

V_n est décroissante et minorée par U_0 donc V_n converge.

Démontrons que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ

$$V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n} \quad \text{or} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2^n} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0.$$

$$\text{Par suite,} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Donc les suites U_n et V_n ont la même limite notée ℓ .

4 a Démontrons que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

$$U_{n+1} \cdot V_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{1}{2} (U_n + V_n) = \frac{2U_n V_n (U_n + V_n)}{2(U_n + V_n)} = U_n \cdot V_n$$

b Déterminons la valeur exacte de ℓ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$$

$$\text{d'où } U_n \cdot V_n = U_{n-1} \cdot V_{n-1} = \dots = U_1 \cdot V_1 = U_0 \cdot V_0 = 4 \times 9 = 36$$

$$\lim U_n \cdot V_n = 36$$

$$\text{Or } \lim U_n \cdot V_n = \lim U_n \cdot \lim V_n = \lim U_n \cdot \lim U_n = (\lim U_n)^2 = \ell^2$$

$$\text{Donc } \ell^2 = 36 \Rightarrow \ell = \sqrt{36} = 6 \quad (\text{car } U_n > 0 \text{ et } V_n > 0)$$

$$\text{Finalement, } \lim U_n = \lim V_n = \ell = 6$$

1 On pose : $\alpha = 1$.

a Démontrons que la suite (V) est constante et donnons sa valeur.

$$\text{On a: } V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} \text{ or } U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n$$

$$\text{donc } V_{n+1} = 2U_{n+1} - U_n - U_{n+1} = U_{n+1} - U_n = V_n$$

$$V_{n+1} = V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ donc } (V) \text{ est constante.}$$

La suite (V) est constante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n = V_0 = U_1 - U_0 = 2$$

b Déduisons-en que (U) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

$$\text{ona: } \forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_{n+1} - U_n \text{ or } V_n = 2$$

$$\text{d'où: } U_{n+1} - U_n = 2$$

(U) est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $U_0 = 3$.

c On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

Exprimons U_n en fonction de n .

(U) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $U_0 = 3$.

$$\text{Donc: } U_n = U_0 + nr = 3 + 2n.$$

Exprimons S_n en fonction de n .

S_n désigne la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite arithmétique (U) .

$$\text{Donc } S_n = (n+1) \times \frac{U_0 + U_n}{2} = (n+1) \times \frac{3 + 3 + 2n}{2} = (n+1) \times (3+n)$$

2 On pose : $\alpha = -5$.

a Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 7$.

Montrons que le rapport $\frac{V_{n+1}}{V_n}$ est égal à 7.

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

$$V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} \text{ avec } U_{n+2} = 8U_{n+1} - 7U_n$$

$$V_{n+1} = 8U_{n+1} - 7U_n - U_{n+1} = 7U_{n+1} - 7U_n = 7(U_{n+1} - U_n) = 7V_n$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 7$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 7$.

b Exprimons V_n en fonction de n .

(V) est une suite géométrique de raison $q = 7$ et de premier terme $V_0 = 7$.

$$\text{Donc } V_n = V_0 \cdot q^n = 2 \times 7^n$$

c) Exprimons en fonction de n , $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.

T_n désigne la somme des n premiers termes de la suite géométrique (V) .

$$\text{Donc } T_n = V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 2 \times \frac{1-7^n}{1-7} \Rightarrow T_n = 2 \times \frac{1-7^n}{-6} = 2 \times \frac{7^n-1}{6} = \frac{7^n-1}{3}$$

d) Exprimons U_n en fonction de T_n .

$$\text{On a: } V_n = U_{n+1} - U_n$$

$$\text{D'où: } V_0 = U_1 - U_0$$

$$V_1 = U_2 - U_1$$

$$V_2 = U_3 - U_2$$

$$V_3 = U_4 - U_3$$

⋮

$$V_{n-1} = U_n - U_{n-1}$$

$$V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} = U_n - U_0$$

$$\text{Donc } U_n - U_0 = T_n$$

$$\text{On en déduit: } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + T_n = 3 + T_n$$

e) Dédisons-en que la suite (U) est divergente.

$$\text{On a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7^n - 1}{3} = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$$

Alors U diverge vers $+\infty$

EXERCICE 13 BAC D 1998. Session normale.

$$1) a_1 = \frac{2a_0 + b_0}{3} = \frac{2 \times 1 + 8}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{et} \quad b_1 = \frac{a_0 + 3b_0}{4} = \frac{1 + 3 \times 8}{4} = \frac{25}{4}$$

2) a) Soit la suite (d_n) définie sur \mathbb{N} par : $d_n = b_n - a_n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} = \frac{3a_n + 9b_n}{12} - \frac{8a_n + 4b_n}{12} \\ &= \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12} = \frac{-5a_n + 5b_n}{12} = \frac{5b_n - 5a_n}{12} = \frac{5}{12} (b_n - a_n) \\ &= \frac{5}{12} d_n \end{aligned}$$

Donc (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = b_0 - a_0 = 8 - 1 = 7$ et c

raison $q = \frac{5}{12}$.

b (d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$

$$\Rightarrow d_n = q^n \times d_0 = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times 7$$

$$d_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times 7 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{car } 7 > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$$

c $-1 < q = \frac{5}{12} < 1 \Rightarrow \lim d_n = 0.$

3 a $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n + b_n}{3} - a_n = \frac{2a_n + b_n - 3a_n}{3} = \frac{b_n - a_n}{3} = \frac{d_n}{3}$
 $b_{n+1} = \frac{a_n + 3b_n}{4} \Rightarrow b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + 3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n + 3b_n - 4b_n}{4} = \frac{-b_n + a_n}{4} = -\frac{d_n}{4}$

Déduisons-en les variations des suites (a_n) et (b_n) .

$$a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3} \quad \text{or on a montré que } d_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_n \text{ est strictement croissante.}$$

$$b_{n+1} - b_n = -\frac{d_n}{4} \quad \text{or on a montré que } d_n > 0 \Rightarrow b_{n+1} - b_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_{n+1} - b_n < 0 \Rightarrow b_n \text{ est strictement décroissante.}$$

b Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_0 < a_n < b_n < b_0$.

$$a_n \text{ est strictement croissante} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, a_0 < a_n \quad \textcircled{1}$$

$$b_n \text{ est strictement décroissante} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, b_n < b_0 \quad \textcircled{2}$$

$$d_n > 0 \Rightarrow b_n - a_n > 0 \Rightarrow b_n > a_n \Leftrightarrow a_n < b_n \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ et } \textcircled{3} \Rightarrow a_0 < a_n < b_n < b_0$$

c Déduisons de 3-a. et 3-b. que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

$$a_0 < a_n < b_n < b_0 \Rightarrow a_n < b_0 \Rightarrow a_n \text{ est majorée par } b_0$$

De plus, a_n est strictement croissante

a_n est strictement croissante et majorée par b_0 donc a_n est convergente.

$$a_0 < a_n < b_n < b_0 \Rightarrow a_0 < b_n \Rightarrow b_n \text{ est minorée par } a_0$$

De plus, b_n est strictement décroissante

b_n est strictement décroissante et minorée par a_0 donc b_n est convergente.

4 **Déduisons de la question 3-a. que :** $\forall n > 1, a_n - a_0 = \frac{1}{3} d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}$

$$\begin{aligned}
 & a_1 - a_0 = \frac{d_0}{3} \\
 + & a_2 - a_1 = \frac{d_1}{3} \\
 + & a_3 - a_2 = \frac{d_2}{3} \\
 & \vdots \\
 + & \vdots \\
 & a_n - a_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{3} \\
 \hline
 & a_n - a_0 = \frac{1}{3} (d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1})
 \end{aligned}$$

b) Déduisons la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n) .

(d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 7$ et de raison $q = \frac{5}{12}$

$$\begin{aligned}
 d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1} &= d_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = 7 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} \\
 &= 7 \times \frac{5}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = \frac{35}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right]
 \end{aligned}$$

$$a_n - a_0 = \frac{1}{3} (d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{3} (d_0 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}) + a_0 = \frac{1}{3} \times \frac{35}{3} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + a_0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{35}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + 1$$

$$\lim a_n = \lim \frac{35}{9} \times \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right] + 1 = \frac{35}{9} + 1 = \frac{35 + 9}{9} = \frac{44}{9} \quad \text{car } \lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{On a : } d_n = b_n - a_n \Rightarrow b_n = d_n + a_n$$

$$\lim b_n = \lim d_n + \lim a_n \quad \text{or } \lim d_n = 0 \Rightarrow \lim b_n = \lim a_n = \frac{44}{9}$$

1 $V_0 = \ln\left(\frac{3}{2}U_0\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

2 Démontrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow V_{n+1} = \ln\left(\frac{3}{2}U_{n+1}\right) = \ln\left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} U_n^2\right) = \ln\left[\left(\frac{3}{2}U_n\right)^2\right] = 2\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)} = 2 \Rightarrow V_n \text{ est une suite géométrique de raison 2.}$$

3 Expression de V_n en fonction de n .

V_n est une suite géométrique de raison 2.

L'expression du terme général de la suite V_n est donc :

$$V_n = q^n V_0 = 2^n \times (-\ln 2) = -\ln 2 \times 2^n$$

4 Calculons la limite de (V_n) .

$$V_n = -\ln 2 \times 2^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln 2 \times 2^n = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty \\ -\ln 2 < 0 \end{cases}$$

5 Expression de U_n en fonction de V_n et déduction de la limite de (U_n) .

- $V_n = \ln\left(\frac{3}{2}U_n\right) \Rightarrow e^{V_n} = e^{\ln\left(\frac{3}{2}U_n\right)} = \frac{3}{2}U_n \Rightarrow \frac{3}{2}U_n = e^{V_n} \Rightarrow U_n = \frac{2}{3}e^{V_n}$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{V_n} = 0 \text{ car } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0.$

Enfin, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \times e^{V_n} = 0$

6 Pour tout entier naturel n , on pose :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1} \text{ et } T_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1}$$

a. Montrons que : $S_n = (1 - 2^n) \ln 2$

Il s'agit, ici, de calculer la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique (V_n)

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \times V_0 = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \times (-\ln 2) = \frac{1 - 2^n}{-1} \times (-\ln 2) = (1 - 2^n) \ln 2$$

Justifions que : $T_n^+ = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

$$T_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1} \Rightarrow \ln T_n = \ln(U_0 \times U_1 \times \dots \times U_{n-1})$$

$$\ln T_n = \ln U_0 + \ln U_1 + \dots + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow n \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln T_n = n \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_0 + \ln U_1 + \dots + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow n \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln T_n = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_0 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_1 + \dots + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{3}{2}\right)^n + \ln(T_n) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_0 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_1 + \dots + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln U_{n-1}$$

$$\Rightarrow \ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right] = \ln\left(\frac{3}{2} \times U_0\right) + \ln\left(\frac{3}{2} \times U_1\right) + \dots + \ln\left(\frac{3}{2} \times U_{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right] = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$$

$$\Rightarrow \ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right] = S_n$$

$$\Rightarrow e^{\ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n\right]} = e^{S_n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^n \times T_n = e^{S_n}$$

$$\Rightarrow T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{S_n}$$

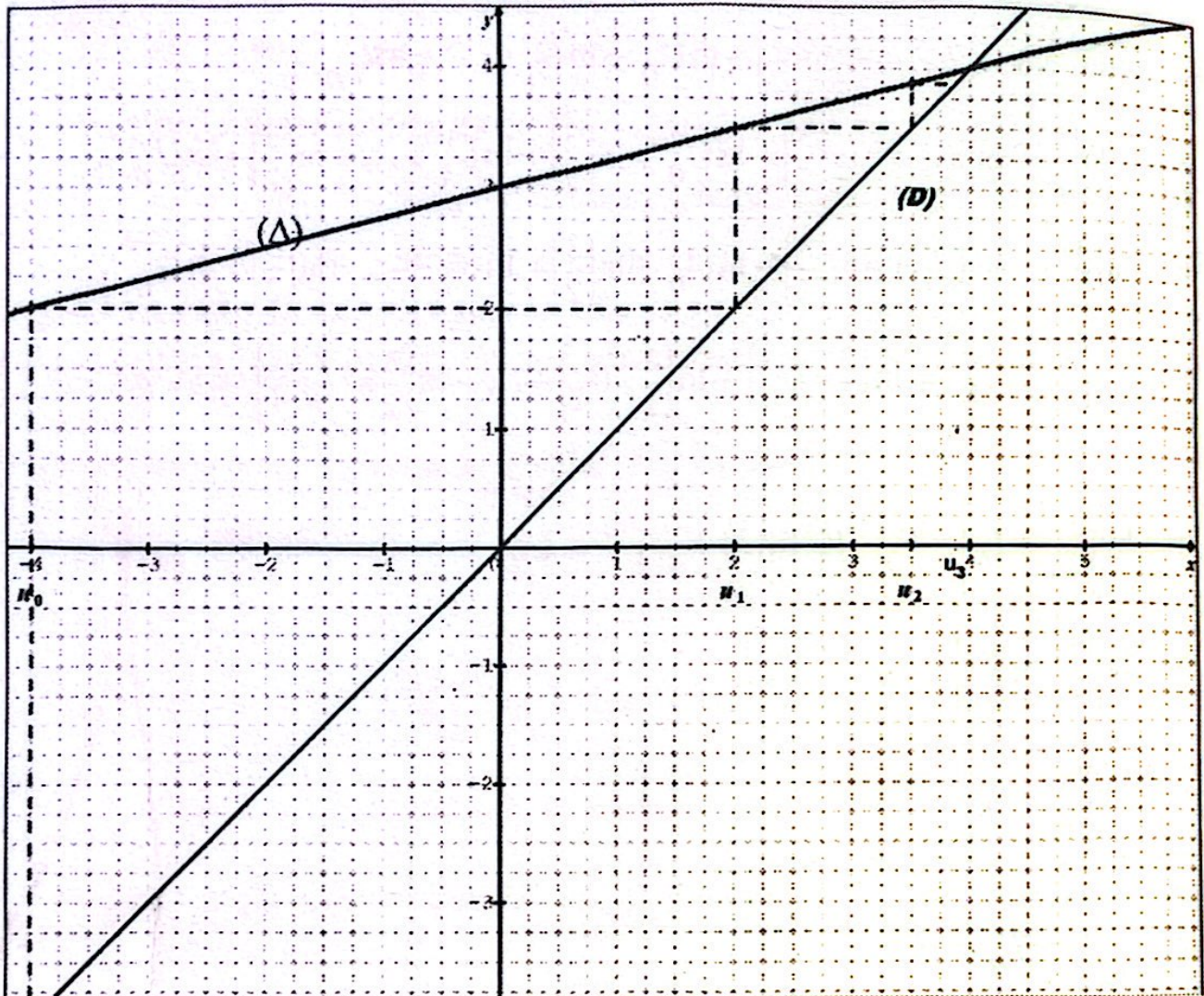
Exprimons (T_n) en fonction de n .

$$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{S_n} \text{ et } S_n = 1 - 2^n \ln 2 \text{ (voir question 6.a)}$$

$$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(1-2^n)\ln 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(1-2^n)} \times e^{\ln 2}$$

$$T_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times e^{(1-2^n)}$$

- 1 Calcul de u_1 : $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{4} \times u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times -4 + 3 = -1 + 3 = 2$
- 2 Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm).
- a Tracé des droites (D) et (Δ) (voir ci-dessous)
- b Utilisons (D) et (Δ) pour placer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 sur l'axe des abscisses.



- c Conjecture quant à la convergence de la suite u .

La représentation graphique de la suite nous permet de conjecturer que la suite u converge vers 4.

- 3 a Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$.

$$u_0 = -4 < 4$$

(la propriété est vraie à l'ordre 0).

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$ et montrons que $u_{n+1} < 4$

$$u_n < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n < \frac{1}{4} \times 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n + 3 < 1 + 3 \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n + 3 < 4$$

$$\Rightarrow f(u_n) < 4 \Rightarrow u_{n+1} < 4 \quad (\text{la propriété est vraie à l'ordre } n+1).$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 4$

b Démontrons que la suite u est strictement croissante.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

$$u_0 = -4 ; u_1 = 2$$

$$u_1 > u_0 \quad (\text{la propriété est vraie à l'ordre } 0).$$

Supposons que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n-1}$ et montrons que $u_{n+1} > u_n$

$$u_n > u_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n > \frac{1}{4} \times u_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{4} \times u_n + 3 > \frac{1}{4} \times u_{n-1} + 3$$

$$\Rightarrow f(u_n) > f(u_{n-1}) \Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad (\text{la propriété est vraie à l'ordre } n+1).$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

On en déduit que la suite u est strictement croissante.

c Etude de la convergente de la suite u .

La suite u est convergente car elle croissante (question 3.b) et majorée par 4 (question 3.a).

4 On pose : pour tout entier naturel $n, v_n = u_n - 4$.

a Démontrons que v est une suite géométrique.

Donner son premier terme et sa raison.

$$v_n = u_n - 4$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \left(\frac{1}{4} u_n + 3 \right) - 4 = \frac{1}{4} u_n - 1 = \frac{1}{4} (u_n - 4) = \frac{1}{4} v_n$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{4}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -8$.

b Démontrons que pour tout entier naturel $n, v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$.

v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = -8$.

$$v_n = q^n v_0 = \left(\frac{1}{4} \right)^n \cdot -8 = \frac{1}{4^n} \cdot -8 = \frac{-8}{4^n} = \frac{-2 \times 4}{4^{n-1} \times 4} = \frac{-2}{4^{n-1}}$$

c Déterminons la limite de la suite v .

v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

$$-1 < q < 1 \Rightarrow \lim v_n = 0$$

d Dédisons-en la limite de la suite u .

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4 \Rightarrow \lim u_n = \lim v_n + 4 = \lim v_n + 4 = 0 + 4 = 4$$

5 a Exprimons u_n en fonction de n .

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4 \Rightarrow u_n = \frac{-2}{4^{n-1}} + 4$$

b Trouvons une valeur de l'entier naturel k telle que : $|u_k - 4| < 10^{-10}$.

$$|u_k - 4| < 10^{-10} \Rightarrow |v_k| < 10^{-10} \Rightarrow \frac{2}{4^{k-1}} < 10^{-10} \Rightarrow \frac{1}{4^{k-1}} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4^{k-1}} < \frac{10^{-10}}{2} \Rightarrow \frac{2}{10^{-10}} < 4^{k-1} \Rightarrow \ln \frac{2}{10^{-10}} < \ln 4^{k-1}$$

$$\Rightarrow \ln 2 - \ln 10^{-10} < k-1 \ln 4 \quad \Rightarrow \ln 2 + 10 \ln 10 < k-1 \ln 4$$

$$\Rightarrow k-1 > \frac{\ln 2 + 10 \ln 10}{\ln 4} \quad \Rightarrow k > \frac{\ln 2 + 10 \ln 10}{\ln 4} + 1$$

$$\frac{\ln 2 + 10 \ln 10}{\ln 4} + 1 \simeq 18,11 \quad \Rightarrow k \geq 19$$