RESUME ET EXERCICES

Fomesoutra.com
ça soutra !

SUITE NUMÉRQUE

SUJETS ET RESUME DE COURS

MATHS

TLE D

BY TEHUA
2025

FICHE DE COURS

GENERALITES SUR LES SUITES

1 Suites croissantes, suites décroissantes

Définition

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si pour tout entier n, $U_{n+1} \geq U_n$.

Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si pour tout entier n, $U_{n+1} \leq U_n$.

Remarques

a. Une suite croissante, une suite décroissante sont dites monotones.
b. Il existe des suites ni croissantes, ni décroissantes.

Exemple La suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ est une suite ni croissante, ni décroissante.

Méthode

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) :

a. On étudie le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$.

b. Si tous les termes de (U_n) sont strictement positifs, on compare $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et 1.

Théorème

Soit (U_n) une suite définie par $U_n = f(n)$, avec f définie sur $[0 ; +\infty[$

Si f est strictement croissante, alors (U_n) est strictement croissante.

Si f est strictement décroissante, alors (U_n) est strictement décroissante.

Remarque

a. Ce théorème ne s'applique pas si la suite (U_n) est définie par récurrence
b. On dit qu'une suite est stationnaire si elle est constante.

2 Suites croissantes, suites décroissantes

Les règles opératoires sur les limites de suites (somme, produit, quotient) sont les mêmes que pour les limites en $+\infty$ d'une fonction.

SUITES ARITHMETIQUES, SUITES GEOMETRIQUES

	Suites arithmétiques	Suites géométriques
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$ r est appelé la raison de la suite	$U_{n+1} = qU_n$ q est appelé la raison de la suite
Expression du terme général	$U_n = U_0 + nr$ $U_n = U_k + (n-k)r$	$U_n = U_0 \times q^n$ $U_n = U_k \times q^{n-k}$
Identification	Etablir que $U_{n+1} - U_n$ est un réel indépendant de **n**.	Etablir que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ est un réel indépendant de **n**.
Sens de variation	• Si $r > 0$: U est croissante • Si $r < 0$: U est décroissante • Si $r = 0$: U est constante	• *Si* $q=1$: *U est* constante • *Si* $q<0$: *U n'est pas* monotone * *Si* $U_0 > 0$ • *Si* $0<q<1$: *U est* décroissante • *Si* $q>1$: *U est* croissante * *Si* $U_0 < 0$ • *Si* $0<q<1$: *U est* croissante • *Si* $q>1$: *U est* décroissante
Limite	• Si $r > 0$: $\lim U_n = +\infty$ • Si $r < 0$: $\lim U_n = -\infty$ • Si $r = 0$: $\lim U_n = U_0$	• *Si* $q<-1$: pas de limite • *Si* $-1<q<1$: $\lim U_n = 0$ • *Si* $q=1$: $\lim U_n = U_0$ • *Si* $q>1$ $\begin{cases} U_0 > 0 \text{ alors } \lim U_n = +\infty \\ U_0 < 0 \text{ alors } \lim U_n = -\infty \end{cases}$
Convergence	U_n converge si $r = 0$	U_n converge si $-1 < q < 1$ ou si $q = 1$
Somme de termes consécutifs	La somme des **n** termes consécutifs est égale au produit par **n** de la demie somme des termes extrêmes	$S = 1^{er}\text{terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

METHODES PRATIQUES

M1 Comment étudier les variations d'une suite ?

Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut :

- Etudier les variations de f si $U_n = f(n)$
- Calculer puis comparer la différence $\mathbf{U_{n+1} - U_n}$ à 0 et conclure.
- Calculer puis comparer le rapport $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1 et conclure. (À utiliser dans les cas où tous les termes de la suite sont positifs).
- Faire une démonstration par récurrence.

M2 Comment faire une démonstration par récurrence ?

Pour démontrer qu'une propriété $\mathbf{P_n}$, qui dépend d'un entier naturel n, est vraie pour tout n, on peut procéder en trois étapes, comme suit :

Initialisation : Prouver que la propriété est vraie pour le terme initial ($\mathbf{P_0}$ est vraie)

Transmission : Supposer que la propriété $\mathbf{P_k}$ est vraie pour tout entier k et ensuite démontrer que la propriété $\mathbf{P_{k+1}}$ est vraie.

Conclusion : Conclure alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P_n}$ est vraie.

M3 Comment représenter graphiquement une suite donnée par une relation du type $U_{n+1} = f(U_n)$?

- Représenter (C_f) la courbe de f.
- Représenter (Δ) la première bissectrice des axes d'équation : $y = x$.
- Placer U_0 sur l'axe (OI).
- **Projeter verticalement U_0 sur (C_f), puis projeter le point obtenu horizontalement sur (Δ) et enfin projeter ce nouveau point verticalement sur (OI) : on obtient ainsi** U_1.
- Pour obtenir U_2, refaire ce même processus avec U_1. Et ainsi de suite...

M4 Comment montrer qu'une suite est convergente ?

Pour montrer qu'une suite est convergente, on peut procéder comme suit :

- Calculer sa limite et montrer que cette limite existe et est finie.
- Montrer que la suite est **croissante et majorée**.
- Montrer que la suite est **décroissante et minorée.**

REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE.

EXERCICE 1

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J), représente sur la droite (OI), et sans les calculer, les termes d'indices 0 à 5 de chacune des suites numériques ci-dessous :

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \end{cases} \qquad \begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = -2V_n + 5 \end{cases}$$

SENS DE VARIATION D'UNE SUITE.

EXERCICE 2

Les suites ci-dessous sont-elles croissantes, décroissantes ? Justifie.

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = n^2 - 2n + 5$ (2) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = n^3 - n^2 + n$

(3) $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + 1}{U_n} \end{cases}$

CALCUL DE LIMITES.

EXERCICE 3

Calcule la limite des suites (U_n) définies sur $\mathbb{N}^*$par :

1. $U_n = \dfrac{n+1}{n-5}$; 2. $U_n = \sqrt{3 + \dfrac{2}{n}}$; 3. $U_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

RECURRENCE /CONVERGENCE / SUITES BORNEES.

EXERCICE 4

La suite (U_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \dfrac{n}{n+1}$ est-elle majorée, minorée, bornées?

Justifie.

EXERCICE 5

Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 1$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = \sqrt{3 + U_n}$

1. Démontre par récurrence que, on a : $0 \leq U_n \leq 3$
2. Démontre que la suite (U_n) est strictement croissante.
3. Déduis-en que (U_n) est convergente.

SUITES ARITHMETIQUES.

EXERCICE 6

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = -4n + 7$.

1. Montre que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison.
2. Déduis-en les variations et la limite de (U_n).
3. Calcule S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

SUITES GEOMETRIQUES.

EXERCICE 7

Montre que chacune des suites ci-après est géométrique, et précise sa raison :

a $U_n = (-4)^{2n+1}$ b $U_n = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ c $U_n = (-1)^n \times (2)^{3n+1}$

EXERCICE 8

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$

1 On pose, pour tout entier n : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

Montre que (V_n) est une suite géométrique.

2 Exprime V_n, puis U_n, en fonction de n.

EXERCICE 9

On considère la suite (V_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 Calcule U_1, U_2 et U_3.

Pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on pose: $V_n = U_n - 2$.

2 a Calcule V_0, V_1 et V_2.

b Démontre que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c Exprime V_n puis U_n en fonction de n.

3 On pose : $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ et $T_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$

Exprime S_n en fonction de n puis déduis T_n en fonction de n.

PROBLEMES DE SYNTHESE RESOLUS

EXERCICE 10 BAC 2009 Session normale

Soit la suite définie $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5}U_n + 1 \end{cases}$

1 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représente sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (unité : 2 cm).

2 a Démontre par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

b Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = U_n - \frac{5}{2}$

a Démontre que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprime V_n puis U_n en fonction de n.

c) Détermine la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 11

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n+V_n}$ et $V_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + V_n$

1) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 0$ et $V_n > 0$

2) a) Démontre que : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} = \dfrac{{V_n - U_n}^2}{2\,U_n + V_n}$

b) Déduis-en que : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \leq V_n$ et que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

c) Déduis-en que : $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n - U_n \leq \dfrac{5}{2^n}$

3) a) Démontre que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante

b) Déduis-en que les suites (U_n) et (V_n) convergent.

c) Démontre que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ

4) a) Démontre que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \cdot V_{n+1} = U_n \cdot V_n$

b) Déduis-en la valeur exacte de ℓ .

EXERCICE 12 Bac D 2003

Soit a un nombre réel donné.
On considère les suites U et V définies respectivement par :

- $U_0 = 3,\ U_1 = 5$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+2} = \frac{1}{2}(a+1)^2 U_{n+1} + (a-2)U_n$
- $\forall n\in\mathbb{N},\ V_n = U_{n+1} - U_n$

1) On pose : **a = 1.**

a) Démontre que la suite (V) est constante et donner sa valeur.

b) Déduis-en que (U) est une suite arithmétique dont la raison est égale à 2.

c) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n$.

Exprime U_n puis S_n en fonction de n.

2) On pose : **a = -5.**

a) Démontre que la suite (V_n) est une suite géométrique dont la raison est 7.

b) Exprime V_n en fonction de n.

c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprime en fonction de n la somme $\mathbf{T_n}$ **où:**

$T_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$

d) Exprime U_n en fonction de $\mathbf{T_n}$.

e) Déduis-en que la suite (U) est divergente.

EXERCICE 13 BAC D 1998. Session normale.

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur ℕ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

1. Calcule a_1 et b_1.
2. Soit la suite (d_n) définie sur ℕ par : $d_n = b_n - a_n$
   - a) Démontre que (d_n) est une suite géométrique. Détermine le premier terme d_0 et la raison q.
   - b) Déduis-en une expression de d_n en fonction de n. Puis Déduis-en que : $\forall n \in \mathbb{N},\ d_n > 0$
   - c) Calcule la limite de la suite (d_n).
3. a) Démontre que, $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = -\dfrac{d_n}{4}$

   Déduis-en les variations des suites (a_n) et (b_n).
   - b) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_0 < a_n < b_n < b_0$
   - c) Déduis des questions 3.a et 3.b que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
4. a) Déduis de la question 3.a. que : $\forall n > 1,\ a_n - a_0 = \dfrac{1}{3}\, d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1}$
   - b) Déduis la limite de la suite (a_n) puis celle de la suite (b_n).

EXERCICE 14 BAC D 2000. Session de remplacement.

On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{3}{2}(U_n)^2 \end{cases}$$

et $V_n = \ln\left(\dfrac{3}{2}U_n\right)$

1. Calcule V_0
2. Démontre que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.
3. Exprime V_n en fonction de n.
4. Calcule la limite de (V_n).
5. Exprime U_n en fonction de V_n et déduis-en la limite de (U_n) .
6. Pour tout entier naturel n, on pose :

$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_{n-1}$ et $T_n = U_0 \times U_1 \times \ldots \times U_{n-1}$

a) Démontre que : $S_n = (1-2^n)\ln 2$

b) Justifie que : $T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n e^{S_n}$

c) Exprime T_n en fonction de n.

EXERCICE 15 Bac D 2003. Deuxième session

On considère la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1) Calcule u_1

2) Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J) (unité 2 cm).

a) Trace les droites (D) et (Δ) d'équations respectives $y = x$ et $y = \frac{1}{4}x + 3$

b) Utilise (D) et (Δ) pour placer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 sur l'axe des abscisses.
(On laissera les traits de construction en pointillés sur le dessin).

c) Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite u ?

3) a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$.

b) Démontre que la suite u est strictement croissante.

c) La suite u est-elle convergente ? Justifie.

4) On pose : pour tout entier naturel n, $\mathbf{v_n = u_n - 4}$.

a) Démontre que v est une suite géométrique.
Donne son premier terme et sa raison.

b) Démontre que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{-2}{4^{n-1}}$.

c) Détermine la limite de la suite v.

d) Déduis-en la limite de la suite u.

5) a) Exprime u_n en fonction de n.

b) Trouve une valeur de l'entier naturel k telle que : $|u_k - 4| < 10^{-10}$.