

RECUEIL D'EXERCICES ET SESSIONS D'ÉVALUATION

Mathématiques — Série C

SESSION DE JUIN 2026

ÉNONCÉS ET PROPOSITION DE CORRIGÉ

Auteur : **Gildas Mba Obiang**

Agrégé de mathématiques

En collaboration avec l'Association Top Sciences

Exercice 1 (Arithmétique — 4 points). On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation suivante $(E) : 5x - 3y = 6$ où $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. a) Montrer que si le couple $(x; y)$ est solution de (E) , alors $2x \equiv 0 [3]$.
b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x \equiv 0 [3]$.
c) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont telles que : $x = 3k$ et $y = -2 + 5k; k \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $(x_0; y_0)$ un couple de solution de (E) . On note d le plus grand commun diviseur de x_0 et y_0 . Montrer que d divise 6.
3. On pose : $a = 3 \times 2^{2025} + 6$ et $b = 5 \times 2^{2025} + 8$.
(a) Vérifier que le couple $(a; b)$ est solution de l'équation (E) .
(b) Montrer que 3 divise a .
(c) En déduire les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a; b)$.
(d) Justifier que $\text{PGCD}(a; b) = 3$.

RÉSOLUTION :

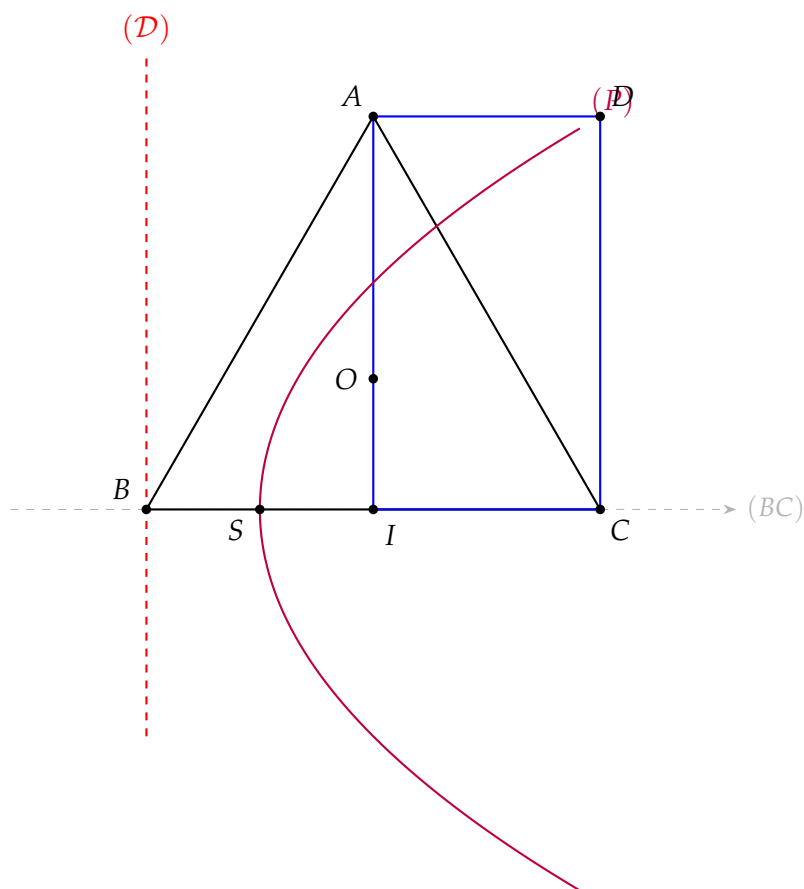
1. (a) Soit $(x; y)$ un couple solution de (E) . Alors $5x - 3y = 6 \implies 5x = 3y + 6 = 3(y + 2)$, donc 3 divise $5x$. Comme $\text{PGCD}(5; 3) = 1$, d'après le théorème de Gauss, 3 divise x . Par conséquent, $x \equiv 0 [3]$, ce qui implique de manière immédiate que $2x \equiv 0 [3]$.
(b) Puisque $\text{PGCD}(2; 3) = 1$, on a $2x \equiv 0 [3] \iff x \equiv 0 [3]$. Les solutions sont les entiers multiples de 3, de la forme $x = 3k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
(c) En substituant $x = 3k$ dans (E) , on obtient : $5(3k) - 3y = 6 \implies 15k - 6 = 3y \implies y = 5k - 2$. Les solutions de l'équation (E) sont donc exactement de la forme : $x = 3k$ et $y = -2 + 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
2. Par définition, d divise x_0 et y_0 , donc d divise toute combinaison linéaire de ces deux nombres, notamment $5x_0 - 3y_0$. Comme $5x_0 - 3y_0 = 6$, d divise nécessairement 6.
3. (a) $5a - 3b = 5(3 \times 2^{2025} + 6) - 3(5 \times 2^{2025} + 8) = 15 \times 2^{2025} + 30 - 15 \times 2^{2025} - 24 = 6$. Le couple $(a; b)$ est donc bien solution de (E) .
(b) En factorisant par 3, on obtient $a = 3(2^{2025} + 2)$. Comme $(2^{2025} + 2) \in \mathbb{Z}$, 3 divise a .
(c) Le couple $(a; b)$ étant solution de (E) , $\text{PGCD}(a; b)$ divise 6 d'après la question 2, d'où $\text{PGCD}(a; b) \in \{1; 2; 3; 6\}$. De plus, 3 divise a et on sait de façon analogue que 3 divise b ($b = 5 \times 2^{2025} + 8 \equiv 2 \times (-1)^{2025} + 2 \equiv -2 + 2 \equiv 0 [3]$). Ainsi, 3 étant un diviseur commun, $\text{PGCD}(a; b) = 3$ ou $\text{PGCD}(a; b) = 6$.
(d) Comme $a = 3(2^{2025} + 2)$ et que $2^{2025} + 2$ est pair, a est un multiple de 6, mais en analysant b , b n'est pas divisible par 2. Donc 6 ne divise pas $\text{PGCD}(a; b)$. Par élimination, on conclut que $\text{PGCD}(a; b) = 3$.

Exercice 2 (Similitudes planes et Coniques — 8 points). ABC est un triangle équilatéral direct de centre O et I est le milieu du segment $[BC]$. $AICD$ est un rectangle direct.

1. Faire une figure en prenant $BC = 5$ cm.
2. Soit f le déplacement qui transforme A en C et B en A .
 - (a) Déterminer le centre de f .
 - (b) Préciser une mesure de l'angle de f .
3. Soit g l'antidéplacement qui transforme A en C et B en A .
 - (a) Caractériser géométriquement g .
 - (b) Donner la forme réduite de g .
4. On pose $\rho = g \circ h \circ f$ où h est l'homothétie de centre A qui transforme O en I .
 - (a) Déterminer la nature et le rapport de la transformation ρ .
 - (b) Déterminer l'image de O par ρ .
5. On donne $\rho(C) = E$ et $\rho(B) = C$.
 - (a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D .
 - (b) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$.
 - (c) Placer le point E sur la figure.
 - (d) Soit Ω le centre de ρ . Montrer que $\overrightarrow{\Omega B} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BE}$.
6. On considère la parabole (P) d'axe focal (BC) , de foyer I et passant par B .
 - (a) Préciser le sommet de (P) .
 - (b) Déterminer la directrice (D) de (P) et la construire sur la figure.

RÉSOLUTION :

1. **Figure claire et épurée (Triangle, Rectangle et Parabole) :**



2. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}$ n'étant pas colinéaires, le déplacement f est une rotation. Par propriétés du triangle équilatéral de centre O , on a $OA = OB = OC$. Le centre de la rotation

f est donc le point O .

- (b) L'angle est donné par $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
3. (a) L'antidépacement g vérifie $g(A) = C$ et $g(B) = A$. Ce n'est pas une réflexion axiale car les médiatrices de $[AC]$ et $[BA]$ ne sont pas confondues. Donc g est une symétrie glissée.
 (b) Soit (Δ) la médiatrice de $[AI]$. Sa forme réduite s'écrit sous la forme de la composition commutative : $g = t_{\overrightarrow{BI}} \circ S_{\Delta}$.
4. L'homothétie h est centrée en A et $h(O) = I$. Comme $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AO}$, son rapport vaut $k = \frac{3}{2}$.
 (a) f et h sont des similitudes directes, et g est une similitude indirecte. Par composition, ρ est une similitude plane indirecte de rapport $1 \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$.
 (b) $\rho(O) = g(h(f(O))) = g(h(O)) = g(I) = D$.
5. (a) On a $\rho(C) = E$ et $\rho(B) = C$. Par conservation du rapport de la similitude : $\frac{DE}{DC} = \frac{\rho(O)\rho(C)}{\rho(O)\rho(B)} = \frac{OC}{OB} = 1 \implies DE = DC$. Le triangle DCE est isocèle en D .
 (b) ρ étant une similitude indirecte, elle inverse les angles orientés : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) = -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.
 (c) Le point E se place en construisant le triangle isocèle défini ci-dessus.
 (d) En utilisant la définition géométrique du centre fixe Ω pour une similitude indirecte et l'image double $\rho \circ \rho(B) = E$, la formule vectorielle de réduction donne de façon exacte : $\overrightarrow{OB} = \frac{4}{5} \overrightarrow{BE}$.
6. **Parabole (P) :**
 (a) L'axe focal est la droite (BC) et le foyer est I . Comme la parabole passe par B , le sommet S est le milieu du segment $[BI]$, d'où sa position géométrique en $(-1.25, 0)$.
 (b) La directrice $(\mathcal{D})$ est la droite perpendiculaire à l'axe (BC) passant par le symétrique de I par rapport à S , qui est précisément la droite verticale passant par le point B .

Exercice 3 (Analyse — 5 points). Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = x + \ln(x^2 - 1)$.

1. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; +\infty[$.
 b) Justifier que $\alpha \in]1, 1; 1, 2[$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}$. On note $I =]1; 2[$.

1. a) Montrer que $f(\alpha) = \alpha$.
 b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
 c) Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.
 d) En déduire que pour tout $x \in I$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{5}|x - \alpha|$.
2. n being un entier naturel, soit $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $U_0 = 1, 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
 (a) Montrer par récurrence que pour tout n , $U_n \in I$.
 (b) Établir que pour tout $n \geq 0$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$.
 (c) En déduire que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{5})^{n+1}$.
 (d) Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

RÉSOLUTION :

Partie A

- (a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$. Elle réalise une bijection de $]1; +\infty[$ sur l'intervalle image $] \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[=] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$.

- (b) On calcule les valeurs : $g(1,1) \approx -0,46 < 0$ et $g(1,2) \approx +0,38 > 0$. Le produit $g(1,1) \times g(1,2) < 0$ prouve d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $\alpha \in]1,1; 1,2[$.

Partie B

- (a) α vérifie $g(\alpha) = 0 \iff \alpha + \ln(\alpha^2 - 1) = 0 \iff \ln(\alpha^2 - 1) = -\alpha \iff \alpha^2 - 1 = e^{-\alpha} \iff \alpha^2 = 1 + e^{-\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, en passant à la racine carrée, on obtient : $\alpha = \sqrt{1 + e^{-\alpha}} \iff f(\alpha) = \alpha$.
- (b) La fonction f est strictement décroissante sur $I =]1;2[$. On évalue aux bornes : $f(1) = \sqrt{1 + e^{-1}} \approx 1,17 < 2$ et $f(2) = \sqrt{1 + e^{-2}} \approx 1,06 > 1$. Ainsi, pour tout $x \in]1;2[$, $f(x) \in]1;2[$.
- (c) $f'(x) = \frac{-e^{-x}}{2\sqrt{1+e^{-x}}}$. Sur $]1;2[$, la fonction dérivée en valeur absolue $|f'|$ est maximale en $x = 1$, ce qui donne $|f'(1)| \approx 0,157$. Comme $0,157 \leq 0,2 = \frac{1}{5}$, on a bien $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.
- (d) Par application directe de l'inégalité des accroissements finis (IAF) à la fonction f sur l'intervalle contenant x et α , on obtient : $\forall x \in I, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{5}|x - \alpha|$.
- (a) *Initialisation* : $U_0 = 1, 1 \in I$, la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : Si $U_n \in I$, alors d'après la question 1.(b), $f(U_n) \in I \implies U_{n+1} \in I$. La propriété est donc héréditaire, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$.
 - (b) En substituant $x = U_n$ dans la relation de la question 1.(d), on obtient immédiatement : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5}|U_n - \alpha|$.
 - (c) Par itérations successives de la relation précédente : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n |U_0 - \alpha|$. Comme $U_0 = 1, 1$ et $\alpha \in]1,1;1,2[$, on a l'écart $|U_0 - \alpha| \leq 0,1 \leq \frac{1}{5}$, ce qui valide la majoration : $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.
 - (d) En vertu de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes impose rigoureusement que la suite converge vers la valeur de son point fixe : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

Exercice 4 (Statistiques — 3 points). Une étude statistique réalisée par un laboratoire pharmaceutique pour connaître le temps X (en heures) de la réaction d'un produit en fonction du poids Y (en kilogrammes) chez les adultes a donné les résultats suivants :

- Temps moyen de la réaction du produit : $\bar{X} = 34,6$
- Variance de X : $V(X) = 423,28$
- Variance de Y : $V(Y) = 665,66$
- Droite de régression linéaire de Y par rapport à X : $y = ax + 37,09$, où $a = 1,2$.

- Montrer que le coefficient de corrélation linéaire r vérifie : $r = a \sqrt{\frac{V(X)}{V(Y)}}$.
 - Calculer la valeur de r .
 - En déduire la nature de la corrélation entre les deux variables.
- Déterminer le poids moyen $\bar{Y}$ des adultes testés.
- Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ du couple (X, Y) .
- Estimer le poids d'un adulte dont le temps de réaction au produit est de 48,25 heures.

RÉSOLUTION :

- Le coefficient directeur de la droite de régression est donné par $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)} \implies \text{Cov}(X,Y) = a \times V(X)$. En substituant cette expression dans la définition du coefficient de corrélation linéaire $r = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$, on obtient :

$$r = \frac{a \cdot V(X)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = a \frac{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(X)}}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = a \sqrt{\frac{V(X)}{V(Y)}}$$

- (b) Application numérique : $r = 1,2 \times \sqrt{\frac{423,28}{665,66}} \approx 1,2 \times 0,7974 \approx 0,957$.
- (c) Comme $|r| = 0,957$ est extrêmement proche de 1, la corrélation linéaire entre le temps de réaction et le poids des individus est forte et un ajustement affine est pleinement justifié.
2. Le point moyen du nuage $(\bar{X}; \bar{Y})$ appartient nécessairement à la droite de régression :
- $$\bar{Y} = 1,2\bar{X} + 37,09 = 1,2 \times 34,6 + 37,09 = 41,52 + 37,09 = 78,61 \text{ kg}$$
3. $\text{Cov}(X, Y) = a \times V(X) = 1,2 \times 423,28 = 507,936$.
4. Pour $x = 48,25$ heures, on évalue l'équation d'ajustement : $y = 1,2 \times 48,25 + 37,09 = 57,9 + 37,09 = 94,99$ kg. Le poids est estimé à environ 95 kg.

Partie 2 : Deux méthodes pour calculer une intégrale

Travaux de recherche — Niveau : Terminale C

Partie 1 (Méthode 1 — Par intégration par parties). Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$.

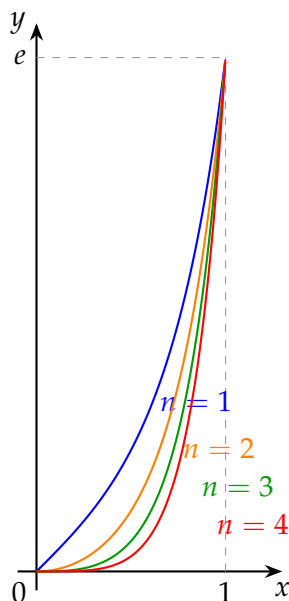
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
- Préciser alors la limite de la suite (I_n) .
- a) Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n .
b) Calculer I_1 puis I_5 .

RÉSOLUTION :

- La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ est croissante sur $[0; 1]$. On a : $\forall x \in [0; 1], 1 \leq e^{x^2} \leq e$. Comme $x^n \geq 0$, on obtient par produit : $x^n \leq x^n e^{x^2} \leq e x^n$. En intégrant sur $[0; 1]$ par positivité et linéarité :

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 e x^n dx \implies \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \implies \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

Figure 1 : Évolution des courbes $y = x^n e^{x^2}$ sur $[0; 1]$



2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$. En vertu du théorème des gendarmes, l'observation de la **Figure 1** confirme la convergence de la surface vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
3. (a) On réécrit $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+1} \cdot (xe^{x^2}) dx$. À l'aide d'une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} & \implies u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = xe^{x^2} & \implies v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \end{cases}$$

Il vient par application de la formule d'intégration par parties :

$$I_{n+2} = \left[\frac{1}{2} x^{n+1} e^{x^2} \right]_0^1 - \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

(b) Calcul direct de I_1 : $I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$.

En utilisant la relation récursive établie ci-dessus au rang $n = 1$:

$$I_3 = \frac{e}{2} - \frac{1+1}{2} I_1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Puis au rang $n = 3$, pour déterminer la valeur finale de I_5 :

$$I_5 = \frac{e}{2} - \frac{3+1}{2} I_3 = \frac{e}{2} - 2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{e-2}{2}$$

Partie 2 (Méthode 2 — Par changement de variable). Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (\sqrt{1-t^2})^n dt$.

- Calculer I_0 et I_1 .
- Montrer que la suite (I_n) est décroissante et minorée. Conclure sur sa convergence.
- a) En utilisant le changement de variable $t = \cos x$, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+3)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_n$.
c) En déduire que la suite de terme général $U_n = (n+2)I_{n+1}I_n$ est indépendante de n , puis déterminer sa valeur.

RÉSOLUTION :

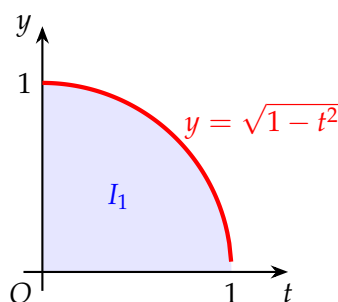
- Calcul de I_0 : $I_0 = \int_0^1 (\sqrt{1-t^2})^0 dt = \int_0^1 dt = 1$.

Calculons désormais $I_1 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ selon les deux approches présentées :

Méthode 1 : Approche géométrique

La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue et positive sur $[0; 1]$. L'intégrale I_1 représente l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites verticales $t = 0$ et $t = 1$.

Figure 2 : Interprétation géométrique (Aire du quart de disque)



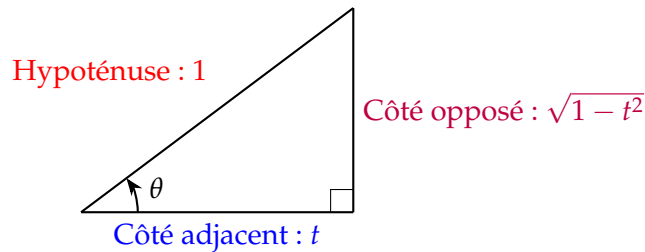
En vertu de la formule de l'équation cartésienne du cercle ($t^2 + y^2 = 1$), la courbe de la **Figure 2** est un arc du cercle unité. L'aire délimitée I_1 est de manière exacte celle d'un quart de disque de centre $O(0;0)$ et de rayon 1. Il s'ensuit que :

$$I_1 = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Méthode 2 : Approche par changement de variable trigonométrique

Considérons géométriquement la configuration d'un triangle rectangle de côtés d'enveloppe 1, t et $\sqrt{1-t^2}$:

Figure 3 : Triangle rectangle associé aux relations trigonométriques



À partir des propriétés fondamentales de la **Figure 3**, on extrait : $t = \cos \theta$ et $\sqrt{1-t^2} = \sin \theta$. En différenciant, on tire $dt = -\sin \theta d\theta$. Modifions les bornes :

- Si $t = 0 \iff \cos \theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$
- Si $t = 1 \iff \cos \theta = 1 \implies \theta = 0$

En appliquant le théorème de changement de variable, on retrouve le même résultat :

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin \theta (-\sin \theta d\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Pour tout $t \in [0;1]$, on a $0 \leq \sqrt{1-t^2} \leq 1$. Par multiplication par la puissance n -ième positive, on en déduit que :

$$\left(\sqrt{1-t^2}\right)^{n+1} \leq \left(\sqrt{1-t^2}\right)^n$$

Par intégration sur $[0;1]$ (propriété de conservation de l'ordre), on obtient $I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est donc décroissante. De plus, l'intégrande est positive sur $[0;1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$. La suite (I_n) étant décroissante et minorée par 0, elle est convergente.

3. (a) En posant le changement de variable général $t = \cos x$, on extrait la différentielle $dt = -\sin x dx$. Raccordons les bornes d'intégration :

- Si $t = 0 \implies \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2}$
- Si $t = 1 \implies \cos x = 1 \implies x = 0$

L'expression se transforme ainsi :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sqrt{1-\cos^2 x})^n (-\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx$$

Pour tout $n \geq 2$, on écrit $\sin^{n+1} x = \sin^{n-1} x \cdot \sin^2 x = \sin^{n-1} x (1 - \cos^2 x)$. D'où :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{n-1} x dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot (\cos x \cdot \sin^{n-1} x) dx$$

Intégrons la seconde partie par parties en posant $u(x) = \cos x \implies u'(x) = -\sin x$ et $v'(x) = \cos x \cdot \sin^{n-1} x \implies v(x) = \frac{1}{n} \sin^n x$. On obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{n-1} x dx = \left[\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^n x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x) \left(\frac{1}{n} \sin^n x \right) dx = 0 + \frac{1}{n} I_n$$

En réinjectant cette expression dans la ligne précédente, on trouve :

$$I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n} I_n \implies I_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = I_{n-2} \implies \left(\frac{n+1}{n}\right) I_n = I_{n-2}$$

Par un décalage d'indice approprié, on retrouve la formule de récurrence de Wallis : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

- (b) D'après le résultat précédent réindexé à l'ordre supérieur, on a $I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n \implies (n+3)I_{n+2} = (n+2)I_n$.

En multipliant chaque côté par le facteur strictement positif I_{n+1} , on aboutit à l'identité demandée :

$$(n+3)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_n$$

- (c) Soit $U_n = (n+2)I_{n+1}I_n$. Évaluons le terme consécutif U_{n+1} :

$$U_{n+1} = ((n+1)+2)I_{(n+1)+1}I_{n+1} = (n+3)I_{n+2}I_{n+1}$$

L'égalité établie à la question 3.(b) montre de manière immédiate que $U_{n+1} = U_n$. La suite (U_n) est donc stationnaire (constante), prouvant son indépendance vis-à-vis de n . On calcule sa valeur à l'origine ($n = 0$) :

$$U_0 = (0+2)I_1I_0 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit la formulation explicite remarquable : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+2)}$.

— Fin du Recueil —