*Le succès n'est pas final, l'échec n'est pas fatal. C'est le courage de continuer qui compte*

Fomesoutra.com
ça soutra!

# LE SECRET DU BAC

Volume 1

## EN MATH Serie D

*Écrit par siriki yeo*
*05 86 55 65 98*

---

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE,
DE L'ALPHABETISATION

# ANNALES

# MATHÉMATIQUES

# TERMINALE D

**AUTEURS** :

Yeo Katcheninfoa Siriki IES

**ISBN :**

**Tous droits réservés :**

© Ministre de l'Éducation Nationale, de l'Alphabétisation

**Edition :**

Direction Générale de la Recherche en Éducation et de l'Innovation Pédagogique

# AVANT-PROPOS

La présente annale destinée à la classe de terminale D a pour but d'aider le professeur dans son enseignement et le candidat au baccalauréat D de se préparer à l'épreuve de mathématiques.

Cette annale comporte trois parties :

Première partie : résumé du cours par chapitre ;

Deuxième partie : énoncés des épreuves du baccalauréat D ;

Troisième partie : propositions de corrigés des épreuves.

Les candidats ne tireront profit qu'en résolvant et trouvant par eux-mêmes les solutions sans avoir recours aux corrigés. Les corrigés sont pour confirmer leurs justes réponses ou donner d'autres pistes de résolution qui ne sont peut-être pas les leurs. Le succès résulte de l'effort et de la méthode.

Nous vous souhaitons du plaisir dans vos activités mathématiques et attendons vos critiques et suggestions pour des améliorations futures d'autres œuvres.

**Les auteurs**

# RAPPEL DE COURS

**Chapitre :** ***Les suites numériques***

**Objectifs :**

- Mettre en œuvre les énoncés admis sur les limites des suites ;
- Connaître les limites et les comportements asymptotiques comparés des suites numériques.

## 1. Généralités sur les suites numériques

### a) Définition

On appelle suite numérique, toute application $U$ définie de $\mathbb{N}$ (ou d'un sous ensemble $I$ de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$. On la note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(U_n)_{n\in I}$).

$$U : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto U(n) = U_n.$$

### b) Modes de détermination d'une suite

Une suite numérique peut être définie :

- ✓ Soit par une formule explicite qui permet de calculer ***les termes*** $U_n$ en fonction de $n$.

  ***Exemples :***

  - Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = 2n - 3$.
  - Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $U_n = \frac{3n^2-2}{n}$.

- ✓ Soit par la donnée ***d'un terme*** quelconque (en général son **1er *terme***) et d'une relation qui lie deux termes consécutifs (permettant de calculer un terme à partir du terme qui le précède).

  ***Exemples :***

  - Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{3}{2} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$.
  - Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\begin{cases} V_1 = 4 \\ V_{n+1} = \frac{3}{2}V_n + 5 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$.

### c) Sens de variation d'une suite

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n < U_{n+1}$) alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante).
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \leq U_n$ (resp. $U_{n+1} < U_n$) alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante).
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$ alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite constante.

### d) Comparaisons sur les suites

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques et $n_0 \in \mathbb{N}$.

- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $U_n \geq V_n$ (resp. $U_n > V_n$) on dit que la suite $(U_n)$ est supérieure $(V_n)$ (resp. $(U_n)$ est strictement supérieure à $(V_n)$).
- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq V_n$ (resp. $U_n < V_n$) on dit que la suite $(U_n)$ est inférieure $(V_n)$ (resp. $(U_n)$ est strictement inférieure à $(V_n)$).
- ✓ On dit que la suite $(U_n)$ est ***majorée*** s'il existe un réel $M$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq M$.
- ✓ On dit que la suite $(U_n)$ est ***minorée*** s'il existe un réel $m$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $m \leq U_n$.
- ✓ Si la suite $(U_n)$ est la fois minorée et majorée, on dit qu'elle ***bornée***.

***Remarque :*** Une suite *positive* (resp. *négative*) est *minorée* par 0 (resp. *majorée* par 0).

## 2. Suites arithmétiques et suites géométriques

### a) Suites arithmétiques

- Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique s'il existe un réel $r$ tel que tout $n \in \mathbb{N}$,
$$U_{n+1} = U_n + r.$$
Le réel $r$ s'appelle la raison de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de 1er terme $U_0$. On a :
$$U_n = U_0 + nr.$$

- ✓ Si le 1er terme est $U_1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$U_n = U_1 + (n-1)r.$$
- ✓ Pour tous entier $n$ et $k$ $(n > k)$;
$$U_n = U_k + (n-k)r.$$

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$.

- ✓ Si $r > 0$ alors la suite $(U_n)$ est croissante.
- ✓ Si $r < 0$ alors la suite $(U_n)$ est décroissante.
- ✓ Si $r = 0$ alors la suite $(U_n)$ est constante.

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de 1er terme $U_0$.

- ✓ La somme $S_n$ des $n$ 1er termes est : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1}$.
$$S_n = n \times \frac{(U_0 + U_{n-1})}{2}.$$
- ✓ Si le 1er terme est $U_1$ alors la somme $S_n$ des $n$ 1er termes est :
$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.
$$S_n = n \times \frac{(U_1 + U_n)}{2}.$$
- ✓ Si le 1er terme est $U_k$ alors la somme $S_{n+1}$ des $(n+1)$ 1er termes est :
$S_{n+1} = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \cdots + U_{n+k}$.
$$S_n = (n+1) \times \frac{(U_k + U_{n+k})}{2}.$$

**b) Suites géométriques**

- Une suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique s'il existe un réel $q$ tel que tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = qV_n.$$

Le réel $q$ s'appelle la raison de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de 1er terme $V_0$. On a :

$$V_n = V_0 q^n.$$

✓ Si le 1er terme est $V_1$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_n = V_1 q^{(n-1)}.$$

✓ Pour tous entier $n$ et $k$ $(n > k)$;

$$V_n = V_k q^{(n-k)}.$$

- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$.

✓ Si $q > 1$ alors la suite $(V_n)$ est croissante.

✓ Si $0 < q < 1$ alors la suite $(V_n)$ est décroissante.

✓ Si $q = 1$ alors la suite $(V_n)$ est constante.

✓ Si $q < 0$, $(V_n)$ est une suite alternée

- Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $q$ et de 1er terme $V_0$.

✓ La somme $S_n$ des $n$ 1er termes est : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$.

$$S_n = V_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

✓ Si le 1er terme est $V_1$ alors la somme $S_n$ des $n$ 1er termes est :

$S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$.

$$S_n = V_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

✓ Si le 1er terme est $V_k$ alors la somme $S_{n+1}$ des $(n+1)$ 1er termes est :

$S_{n+1} = V_k + V_{k+1} + V_{k+2} + \cdots + V_{n+k}$.

$$S_{n+1} = V_k \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

**3. Convergence des suites numériques**

**a) Définition**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

✓ On dit que la suite $(U_n)$ est convergent si elle admet une limite finie $l$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

✓ On dit que la suite $(U_n)$ est divergente si elle n'est pas convergente.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

**b) Limite par comparaison**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $n_0 \in \mathbb{N}$.

✓ S'il existe une suite $(V_n)$ telle que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \geq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

- ✓ S'il existe un suite $(W_n)$ telle que pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq W_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
- ✓ S'il existe un réel $l$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $W_n \leq U_n \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $|U_n - l| \leq V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$; alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
- ✓ Si pour tout $n \geq n_0$, $U_n \leq V_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l'$; alors $l \leq l'$.

**c) Limite des suites monotones**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ✓ Si $(U_n)$ est croissante et majorée alors $(U_n)$ converge.
- ✓ Si $(U_n)$ est décroissante et minorée alors $(U_n)$ converge.
- ✓ Si $(U_n)$ est monotone et bornée alors $(U_n)$ converge.

**d) Convergence des suites arithmétiques et géométriques**

- **Convergence des suites arithmétiques**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de 1er terme $U_0$.

- ✓ Si $r = 0$ alors la suite $(U_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = U_0$.
- ✓ Si $r \neq 0$ alors la suite $(U_n)$ est divergente et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty, \ r > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty, \ \text{si } r < 0 \end{cases}$

- **Convergence des suites géométriques**

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de 1er terme $V_0$.

- ✓ Si $q = 1$ alors la suite $(V_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = V_0$
- ✓ Si $|q| < 1$ alors la suite $(V_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$.
- ✓ Si $q \leq -1$, la suite $(V_n)$ est divergente n'a pas de limite.
- ✓ Si $q > 1$ alors la suite $(V_n)$ est divergente et $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty, \ V_0 > 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty, \ \text{si } V_0 < 0 \end{cases}$

**e) Opérations sur les limites des suites**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques.

Les propriétés sur les limites de la somme $(U_n + V_n)$, du produit $(U_n \times V_n)$ et du quotient $(\frac{U_n}{V_n})$, si $V_n \neq 0$; sont les mêmes que celles sur les limites des fonctions numériques.

**f) Limites des suites définies à l'aide d'une fonction**

- **Suite de type** $U_n = f(n)$

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $(U_n)$ une suite définie par $U_n = f(n)$.

Si $f$ admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

- **Suite de type** $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $(U_n)$ une suite numérique définie par $U_{n+1} = f(U_n)$.

Si la suite $(U_n)$ est convergente et de limite $l$, alors $l = f(l)$.

**Chapitre :** ***Courbes paramétrées***

**Objectifs** :

- mettre en évidence et exploiter les périodicités et les symétries éventuelles,
- dresser le tableau de variations des fonctions coordonnées x et y,
- calculer les coordonnées (x'(t), y'(t)) du vecteur dérivé,
- connaître l'interprétation cinématique du vecteur dérivé.

## 1. Notion de courbes paramétrées

### a) Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $x$ et $y$ deux fonctions de la variable réelle $t$.

A tout réel $t$, on associe le point $M(t)$ définie par le vecteur

$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

L'ensemble $(C)$ des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$ est appelée courbe paramétrée de paramètre $t$.

On note $M(t)$ $(x(t); y(t))$ le point de paramètre $t$.

Le système $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$ est la représentation paramétrique de la courbe (C) ou le système d'équations paramétrique de la courbe (C).

**Exemples de représentations paramétriques**

$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = -4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ y(t) = \cos t \end{cases}, t \in [-\pi; \pi]$

### b) Propriétés des fonctions coordonnées et interprétation graphique

✓ **Périodicité**

Soit (C) la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$

Si $x$ et $y$ sont deux fonctions périodiques qui admettent le réel positif T pour période commune, alors la courbe $(C)$ est obtenue complètement, en faisant varier $t$ dans un intervalle d'amplitude T.

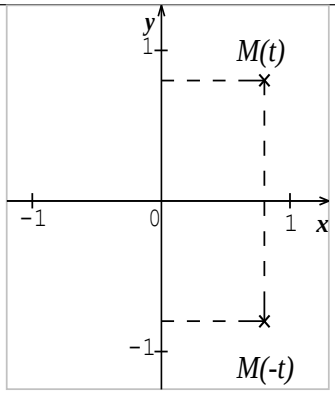
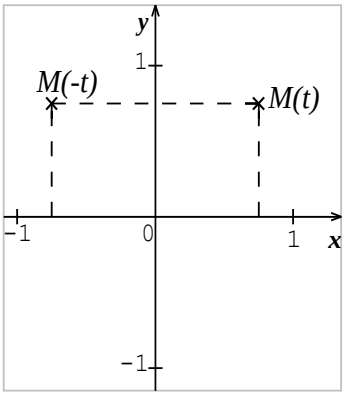
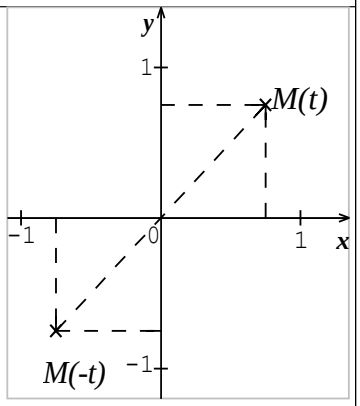
✓ **Parité**

Dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère la courbe paramétrée $(C)$ définie par :

$$M(t)\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I.$$

Lorsque les fonctions $x$ et $y$ sont paires ou impaires sur I, les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont des positions relatives remarquables, et la courbe possède alors certaines propriétés de symétrie.

**Tableau illustratif des propriétés de symétrie.**

| Si | $x(-t) = x(t)$ <br> $y(-t) = -y(t)$ | $x(-t) = -x(t)$ <br> $y(-t) = y(t)$ | $x(-t) = -x(t)$ <br> $y(-t) = -y(t)$ |
|---|---|---|---|
| alors (✓) est | Symétrique par rapport à $(ox)$. | Symétrique par rapport à $(oy)$. | Symétrique par rapport à $O$. |
| Illustration graphique |   |   |   |

Dans le cas où les fonctions $x$ et $y$ sont toutes paires, alors la courbe complète est obtenue sur l'intervalle $I$.

## 2. Vecteurs dérivés

### a) Vecteur dérivé du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ et tangente au point $M(t)$.

✓ **Définition**

Soit $(\Gamma)$ la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$ .

✓ La position du point $M(t)$ est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

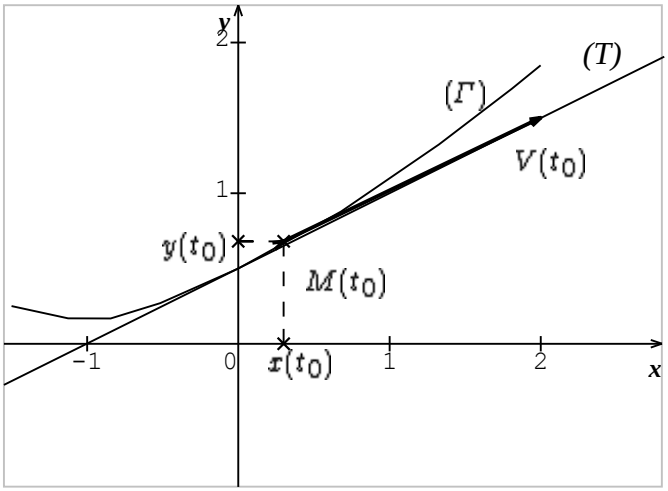
✓ Si les fonctions $x \longmapsto x(t)$ et $y \longmapsto y(t)$ sont dérivables sur $I$, alors pour tout $t_0 \in I$ , le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé vecteur dérivé du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ au point $M(t_0)(x_0(t_0), y_0(t_0))$. On le note $\overrightarrow{V}(t_0)$ : $\overrightarrow{V}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$.

✓ Pour tout $t \in I$, $\overrightarrow{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$.

Le vecteur $\overrightarrow{V}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe (Γ) au point $M(t_0)(x_0(t_0), y_0(t_0))$.

✓ **Tangente en un point**

Soit $M(t_0)(x_0(t_0), y_0(t_0))$ un point de la courbe (Γ), où le vecteur dérivé $\overrightarrow{V}(t_0)$ n'est pas nul. La tangente en $M(t_0)$ à (Γ) est la droite passant par $M(t_0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}(t_0)$.




✓ **Equation de la tangente en un point**

Soit $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ de coordonnées $(x'(t_0); y'(t_0))$ désigne le vecteur dérivé au point $M(t_0)$ et (T) la tangente à (Γ) au point $M(t_0)$.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)(x'(t_0); y'(t_0))$ | | (T) la tangente à (C) au point $M(t_0)$. |
| Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ | alors | (T) a pour pente : $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ ;<br>(T) : $y = \frac{y'(t0)}{x'(t_0)}(x - x(t_0)) + y(t_0)$ |
| Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$ | alors | (T) a pour équation $x = x(t_0)$<br>(T) est verticale |

| | | |
|---|---|---|
| Si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$ | alors | (T) a pour équation $y = y(t_0)$<br>(T) est horizontale |
| Si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$ | alors | (T) devrait être précisée dans l'énoncé |

**b) Vecteur dérivé du vecteur $\vec{V}(t)$**

Soit $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $(avec\ t \in I)$ le vecteur position d'un point $M(t)$ d'une courbe paramétré (Γ).

✓ Si les fonctions $x \longmapsto x(t)$ et $y \longmapsto y(t)$ sont deux fois dérivables sur $I$, alors pour tout $t_0 \in I$ le vecteur $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0)(x''(t_0), y''(t_0))$ est le vecteur dérivé du vecteur $\vec{V}(t)$ au point $M(t_0)(x_0(t_0), y_0(t_0))$.

On le note $\vec{\gamma}(t_0)$ : $\vec{\gamma}(t_0)(x''(t_0), y''(t_0))$.

✓ Pour tout $t \in I$, $\vec{\gamma}(t) = \vec{V}'(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$.

## 3. Interprétation cinématique

### a) Trajectoire d'un point mobile

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ :

- le point $M(t)(x(t); y(t))$ désigne un point mobile avec $t$ appartenant à un intervalle de temps I.
- la courbe (Γ) définie par : $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in I$ est la trajectoire du point mobile $M(t)$.

### b) Vecteur vitesse du mobile

- le vecteur $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)(x'(t_0), y'(t_0))$ est appelé vecteur vitesse du point mobile à l'instant $t_0$.

## Chapitre : *Statistiques à deux variables*

**Objectifs** :

- représenter un nuage de point et son point moyen ;
- mettre en place un ajustement affine.

### 1. Nuage de point et point moyen

Soit $(X, Y)$ une série statistique à deux variables prenant $n$ couples de valeurs $(x_i, y_i)$, où les $x_i$ sont les valeurs prises par X et les $y_i$ sont celles prises par $Y$.

- **Nuage de points**
  - ✓ La série statistique peut être représentée par un tableau.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Variable X | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | …. | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
| Variables Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | …. | $y_{n-1}$ | $y_n$ |

  - ✓ La série statistique peut être représentée dans un repère orthogonal :
    On appelle nuage de points associé à la série $(X, Y)$, l'ensemble des points $M_i(x_i; y_i)$ qui représentent la série statistique dans un repère orthogonal.
- **Point moyen**
  - ✓ La moyenne des valeurs prises par la variable X est $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$.
  - ✓ La moyenne des valeurs prises par la variable $Y$ est $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n y_i$.

On appelle point moyen de la série statistique, le point noté $G(\overline{x}, \overline{y})$.

### 2. Ajustement affine

Lorsque la forme du nuage de points d'une série statistique se présente tel qu'il soit possible de tracer une droite qui passe le près possible des points, on peut réaliser un ajustement affine ou linéaire du nuage de point. La droite obtenue est appelée droite d'ajustement.

On compte trois méthodes d'ajustement affine.

- **La méthode du tracé au jugé**

Elle consiste à tracer à la règle une droite que l'on juge passée le plus près possible des points du nuage.

- **La méthode du point moyen**

Elle consiste à tracer une droite qui passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$ et qui passe le plus près possibles des points du nuage.

- **La méthode du fractionnement du nuage ou méthode de Mayer**

Elle consiste à :

- ✓ Fractionner le nuage de points en deux nuages distincts $N_1$ et $N_2$ dont les effectifs sont égaux ou diffèrent d'au plus 1.
- ✓ Déterminer les points moyens respectifs $G_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ des deux nuages.
- ✓ Ajuster le nuage de points de la série statistique par la droite $(G_1G_2)$.

## Chapitre : *Géométrie dans l'espace*

**Objectifs :**

Les élèves doivent savoir calculer dans un repère orthonormal :

- La distance entre deux points A et B,
- La distance d'un point M à une droite (AB),
- La distance d'un point M à un plan (ABC),
- L'aire d'un parallélogramme (ou l'aire d'un triangle).

### 1. Extension du calcul vectoriel à l'espace

#### a) Ensemble des vecteurs de l'espace

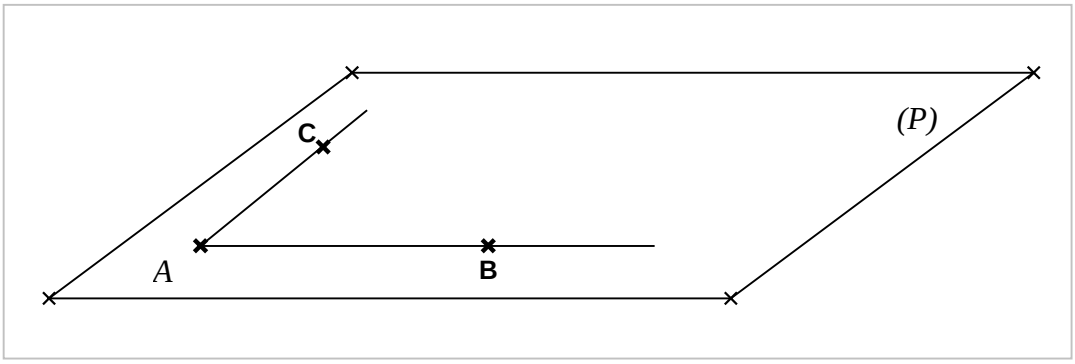
**NB:** Les propriétés et les règles de calculs vues en géométrie du plan restent valables pour la géométrie dans l'espace :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme
- O étant un point de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$; il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si il existe un réel non nul $k$ tel que $\vec{u} = k.\vec{v}$.
- La droite (Đ) passant par le $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
- Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont perpendiculaires si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- Trois points $A, B$ et $C$ sont alignés s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda.\overrightarrow{AB}$.

#### b) Vecteurs et plans de l'espace

- **Vecteur directeur d'un plan**

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

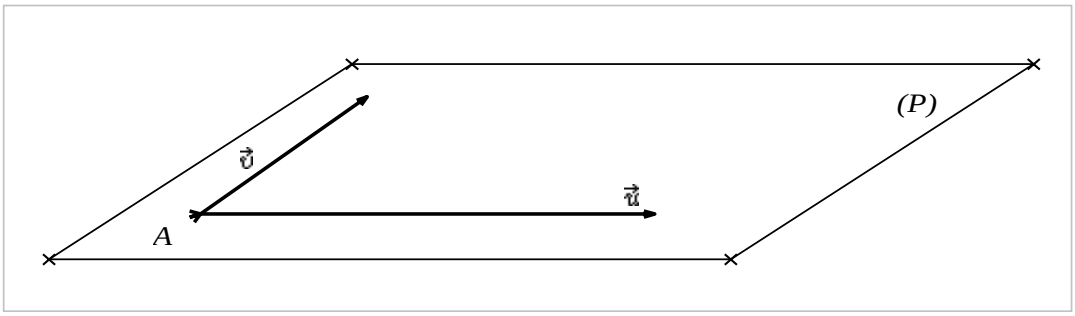


**Propriétés**

✓ M appartient au plan (ABC) si et seulement si, il existe deux réels $x$ et $y$ tels que: $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$

✓ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, et A est un point de l'espace.

Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent un plan (P) passant par $A$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.




- **<u>Vecteurs coplanaires</u>**

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et quatre points A, B, C, D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ; $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ ; $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ; et $\vec{w}$ sont coplanaires (appartiennent au même plan) si et seulement si A, B, C et D sont coplanaires.

**c) <u>Bases et repères de l'espace</u>**

**Définitions**

- On appelle base de l'espace $(\mathcal{E})$, tout triplet $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de l'espace.
- Soit $O$ un point de l'espace. On dit que $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est un repère de l'espace $(\mathcal{E})$ si $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est une base. $O$ désigne l'origine du repère.
- Soit $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ un repère de $(\mathcal{E})$.
  Pour tout point M, il existe un triplet de réels $(x; y; z)$ tel que
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

Le triplet $(x; y; z)$ est le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O ; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$.

✓ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ ; $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$

✓ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel $k$ tel que : $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = k$

✓ $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de $(\mathcal{E})$.

Soient M$(x; y; z)$ et M'$(x'; y'; z')$.

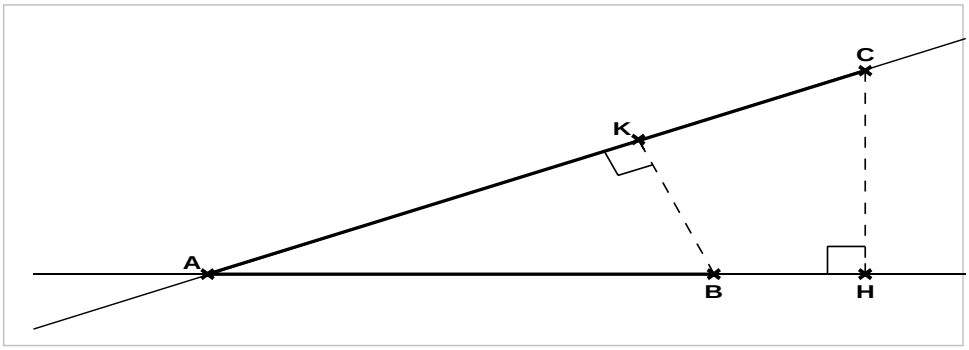
- ✓ le vecteur $\overline{MM'}\begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix}$.
- ✓ si I est milieu de [MM'] alors I $\left(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}; \frac{z+z'}{2}\right)$

**d) <u>Produit scalaire dans l'espace</u>**

- **<u>Définition</u>**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soient les points A, B, C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal au produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan contenant les points A, B et C.




$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK}$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$

**<u>Propriétés</u>**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- ✓ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- ✓ $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
- ✓ $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$ et $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- ✓ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

- **<u>Expression analytique</u>**

- ✓ Une base $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de l'espace est orthonormal si les vecteurs de base sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

✓ Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs d'une base orthonormale $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. alors on a :

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

✓ Si A $(x_A; y_A; z_A)$ et B $(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, alors on a : $AB=\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

**e) <u>Orthogonalité dans l'espace</u>**

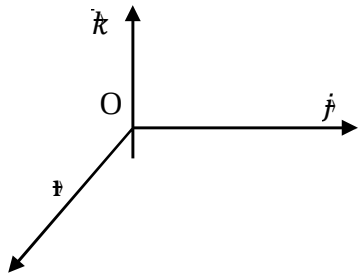
Soient (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

- ✓ les droites (D) et (D') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.
- ✓ si (D) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et (P) un plan de vecteurs directeurs $(\vec{v};\vec{w})$, alors (D) ⊥ (P)$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$

**2. <u>Produit Vectoriel</u>**

**a) <u>Espace orienté</u>**

- Tout triplet $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de vecteurs non nuls et non coplanaires détermine une base de l'espace.
- Si $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est une base de l'espace, tout quadruplet $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ détermine un repère de l'espace.
- Le repère $(O, \vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est dit direct si un homme (règle du bonhomme d'ampère), traversé par le vecteur $\vec{k}$ des pieds à la tête et regardant dans le sens du vecteur $\vec{i}$ a le vecteur $\vec{j}$ à sa gauche.




**b) <u>Produit vectoriel : Définition</u>**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ (pris dans cet ordre) le vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors,

- ✓ Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$ et la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base directe.
- ✓ La norme du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\||\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$

### c) Propriétés du produit vectoriel

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ ; $\vec{v}$ ; $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel $\lambda$, on a :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{w}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- $(\lambda\vec{u}) \wedge \vec{v} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$

### d) Coordonnées du produit vectoriel

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthogonale directe de l'espace.

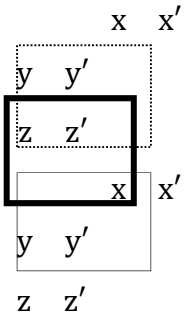
Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées dans cette base

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

**Disposition pratique pour calculer les coordonnées du produit vectoriel.**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace orienté.

Pour calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ on peut disposer les coordonnées comme ci-dessous :




$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\vec{k}$$

## 3. Application du produit vectoriel

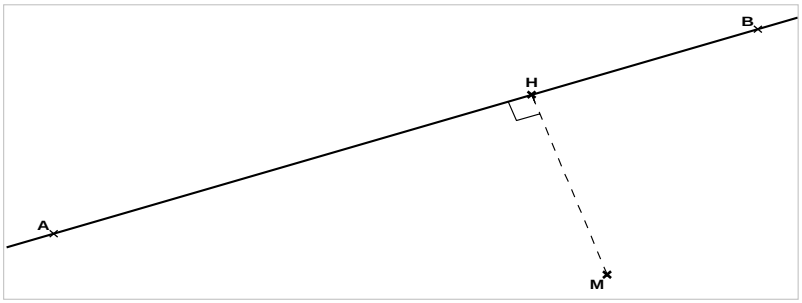
### a) Aire d'un parallélogramme, aire d'un triangle

- L'aire d'un parallélogramme ABDC est $S = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.
- L'aire d'un triangle ABC est $S' = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

**b) <u>Distance d'un point à une droite</u>**

**<u>Activité</u>**

Dans l'espace, on considère une droite (AB) ; un point M et le projeté orthogonal H de M sur (AB).



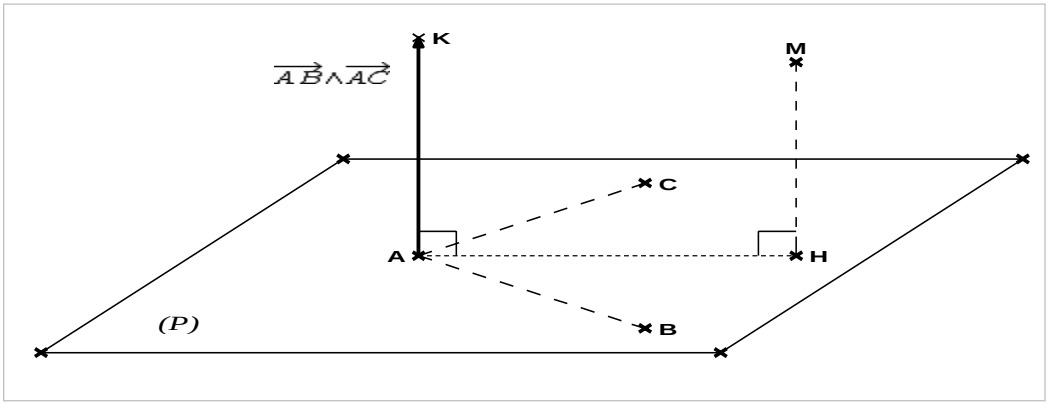

La distance du point M à la droite (AB) est la distance du point M à son projeté orthogonal H sur la droite (AB).

La distance du point M à la droite (AB) est : **d(M ;(AB)) =** $\frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

**c) <u>Distance d'un point à un plan</u>**

On considère dans l'espace le plan (P). Soient A, B, C trois points de ce plan, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (P).

On désigne par d(M ;(ABC)) la distance du point M au plan (P).

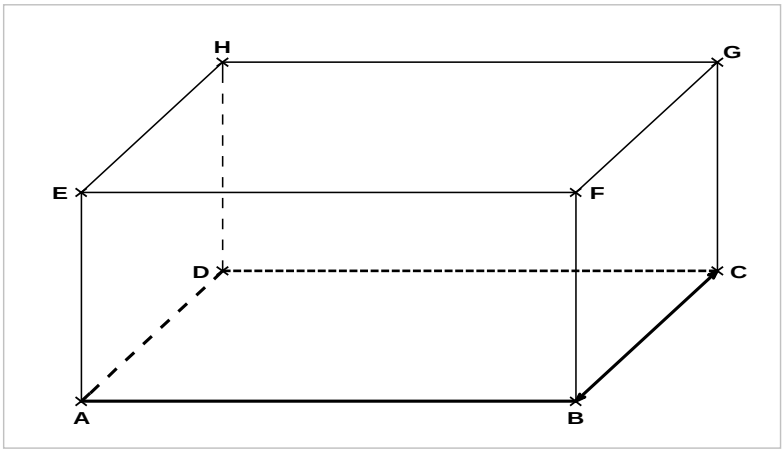



La distance du point M au (P) est la distance du point M à son projeté orthogonal H sur le plan (P).

La distance du point M au plan (ABC) est : **d (M; (ABC))=** $\frac{|\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$

**d) Calcul de volume**

**a) <u>Volume d'un parallélépipède</u>**



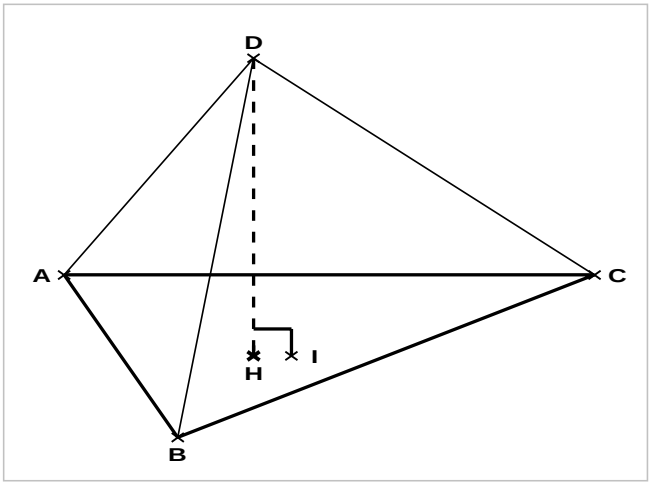

Volume = (surface de base)× hauteur

= Aire (ABCD)× $d$(E ; (ABC))

= $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \times \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}$

Volume = $|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AE})|$

**b) <u>Volume d'un tétraèdre</u>**




Volume = $\frac{1}{3}$(surface de base)× hauteur

= $\frac{1}{3}$ Aire (ABC) × $d$(D ; (ABC))

= $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \times \frac{|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|}{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}\right]$

Volume = $\frac{1}{6}|\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$

## Chapitre : *Probabilités*

### 1. Vocabulaire des probabilités

#### a) Définitions

- Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue (le résultat) ne peut être prévue à l'avance.
- Les résultats possibles sont appelés des éventualités. On note $\omega$ l'éventualité.
- L'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire est appelé l'univers des cas possibles. On le note généralement $\Omega$.

**Exemple :** Dans une expérience de lancé d'un dé à six (6) faces, l'ensemble des cas possibles est $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- On appelle évènement toute partie (sous-ensemble) de $\Omega$.
- On appelle évènement élémentaire, tout singleton de $\Omega$.

**Exemple :** Dans le lancé du dé à six faces, les singletons $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ sont des évènements élémentaires.

- $\Omega$ est l'évènement certain.
- L'ensemble vide $\emptyset$ est l'évènement impossible.
- Etant donné deux évènements distincts $A$ et $B$.
  - ✓ L'évènement "$A$ ou $B$" défini par $A \cup B$.
  - ✓ L'évènement "$A$ et $B$" défini par $A \cap B$.
  - ✓ L'évènement contraire de $A$ est noté $\overline{A}$.
  - ✓ Les évènement $A$ et $B$ sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

#### b) Language des ensembles et language des probabilités

**Tableau de correspondance**

| Language des probabilités | Language des ensembles | Notations |
|---|---|---|
| univers des cas possibles | ensemble $\Omega$ | $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ |
| éventualité | élément de $\Omega$ | $\omega, (\omega \in \Omega)$ |
| évènement | partie de $\Omega$ | A, $(A \subset \Omega)$ |
| évènement élémentaire | singleton de $\Omega$ | $\{\omega\}, (\omega \in \Omega)$ |
| évènement certain | partie pleine de $\Omega$ | $\Omega$ |
| évènement impossible | partie vide de $\Omega$ | $\emptyset$ |
| évènement "$A$ ou $B$" | réunion de $A$ et $B$ | $A \cup B$ |
| évènement "$A$ et $B$" | intersection de $A$ et $B$ | $A \cap B$ |
| évènements $A$ et $B$ incompatibles | Parties $A$ et $B$ disjointes | $A \cap B = \emptyset$ |
| évènement contraire de $A$ | Complémentaire de $A$ dans $\Omega$ | $\overline{A}$ |

## 2. Probabilités sur un ensemble fini

### a) Définition

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

Une probabilité sur l'univers $\Omega$ est une application $p$ définie de $P(\Omega)$ vers $[0; 1]$ qui à tout évènement $A$ de $\Omega$ associe le nombre $p(A)$.

$$p : P(A) \longrightarrow [0; 1]$$
$$A \longmapsto p(A)$$ .

La probabilité $p$ vérifie les conditions suivantes :

- ✓ $P(\Omega) = 1$
- ✓ $P(\emptyset) = 0$
- ✓ $\forall A \subset \Omega, 0 \leq p(A) \leq 1$
- ✓ $\forall A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}; p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(\{a_i\})$.

Le couple $(\Omega, p)$ est appelé espace probabilisé et le nombre $p(A)$ désigne la probabilité de l'évènement $A$.

### b) Propriétés

Soit $p$ une probabilité définie sur un univers $\Omega$, et deux évènements $A$ et $B$.

- ✓ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- ✓ $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ ( ou $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ )
- ✓ Si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

### c) Equiprobabilité

- **Définition**

Il arrive que tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire aient la même probabilité. On dit alors qu'il y a **équiprobabilité**. Cette valeur commune est $\frac{1}{Card(\Omega)}$.

Pour tout évènement $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, on a :

$$p(A) = p(\{a_1\}) + p(\{a_2\}) + \cdots + p(\{a_k\}).$$
$$= \frac{1}{Card(\Omega)} + \frac{1}{Card(\Omega)} + \cdots + \frac{1}{Card(\Omega)}. \text{ (la somme de } k \text{ termes égaux)}$$
$$= \frac{k}{Card(\Omega)} = \frac{Card(Æ)}{Card(\Omega)}.$$

- **Propriété**

Soit $p$ une probabilité uniforme sur un univers $\Omega$. Pour tout évènement $A$,

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}.$$

On dit que $p(A) = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables\ à\ A}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$.

**d) Evènements indépendants- expériences indépendantes**

- **Définition**

Soient $p$ une probabilité définie sur un univers Ω, et deux évènement $A$ et $B$.

Les évènements $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $p$ si la réalisation de $A$ n'affecte pas celle de $B$.

- **Propriété**

Soient $p$ une probabilité définie sur un univers Ω.

- ✓ Si $A$ et $B$ sont deux évènements indépendants alors :

  $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- ✓ Si $n$ expériences aléatoires sont indépendantes, alors pour tous évènements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ de chacun des univers associés à ces épreuves :

  $p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \times p(A_2) \times p(A_3) \dots \times p(A_n)$.

**e) Probabilités conditionnelles**

- **Définition**

Soient $p$ une probabilité définie sur un univers Ω, et $B$ un évènement de probabilité non nulle.

Pour tout évènement $A$, la probabilité d'obtenir $A$ sachant que $B$ est réalisée (ou probabilité de $A$ conditionnée par $B$) est :

$p(A/B) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

**Remarque :**

- ✓ $p_B(A) \neq p_A(B)$
- ✓ S'il y a équiprobabilité $p_B(A) = \frac{Card(A)}{Card(\mathrm{B})}$

- **Propriété**

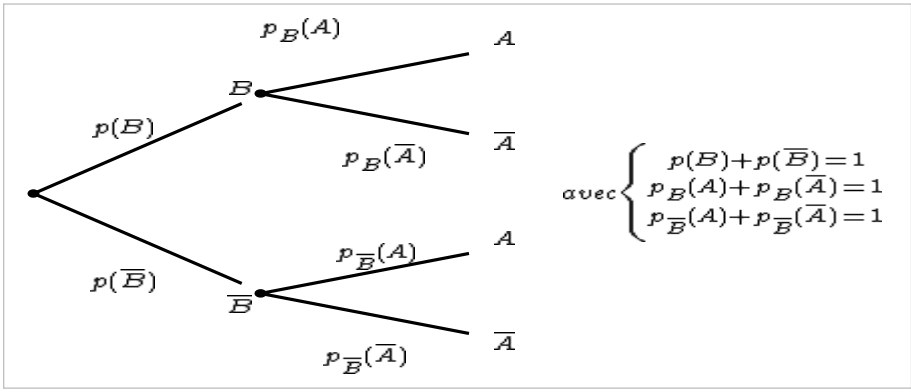
Soient $p$ une probabilité définie sur un univers Ω, et deux évènement $A$ et $B$ de probabilités non nulles.

Si $A$ et $B$ sont deux évènements indépendants alors :

$p_B(A) = p(A/B) = p(A)$.

de même $p_A(B) = p(B/A) = p(B)$.

***Arbre pondéré de calcul des probabilités conditionnelles.***




**f) Epreuves de Bernoulli et schéma de Bernoulli**

- **Epreuve de Bernoulli**

On appelle épreuve de Bernoulli, toute expérience aléatoire à deux éventualités : l'une désignée par Succès (S) de probabilité $p= p(S)$ et l'autre désignée par Echec (E) de probabilité $q=(1-p)$.

**Exemple :** Dans l'expérience du lancé d'une pièce de monnaie, $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$.

- **Schéma de Bernoulli**

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire qui consiste à réaliser $n$ épreuves identiques de Bernoulli et indépendantes les unes des autres, dans les mêmes conditions. On s'intéresse au nombre $k$ $(0 \leq k \leq n)$ de succès obtenus à l'issu des $n$ épreuves.

**Exemple :** On lance sept (7) fois une pièce de monnaie parfaite. Quelle la probabilité d'obtenir trois (3) fois Face?

- **Propriétés**

Soit un schéma de Bernoulli à $n$ épreuves, où la probabilité d'obtenir succès dans chaque épreuve est $p$.

La probabilité d'obtenir $k$ succès au cours des $n$ épreuves est : $p_k = C_n^k \, p^k q^{n-k}$.

**3. Variable aléatoire**

**a) Définition**

Soient $p$ une probabilité définie sur un univers $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$.

On appelle variable aléatoire, toute application X définie de $\Omega$ vers $\mathbb{R}$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\{\omega_i\} \longmapsto X(\omega_i) = x_i.$$

- ✓ L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
- ✓ $\{X = x_i\}$ ou $(X = x_i)$ désigne l'évènement : '' X **prend la valeur** $x_i$ ''. Sa probabilité est :

$$p(X = x_i) = p_i$$

- ✓ $\{X \leq x_k\}$ désigne l'évènement : '' X **prend une valeur inférieure ou égale à** $x_k$ ''. Sa probabilité est :

$$p(X \leq x_i) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

**b) Loi de probabilité d'une variable aléatoire**

Soit $(\Omega, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $\Omega$.

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X l'application qui à toute valeur $x_i$ prise par X, associe la probabilité $p(X = x_i) = p_i$. On présente souvent la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_{n-1}$ | $p_n$ |

**c) Fonction de répartition d'une variable aléatoire**

Soit $(\Omega, p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire définie sur $\Omega$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F$ définie par :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$$
$$x \longmapsto F(x) = p(X \leq x)^{\cdot}$$

On a :

$\forall x \in ]-\infty;\ x_1[, \quad F(x) = 0;$

$\forall x \in [x_1;\ x_2[, \quad F(x) = p_1;$

$\forall x \in [x_2;\ x_3[, \quad F(x) = p_1 + p_2;$

$\forall x \in [x_3;\ x_4[, \quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3;$

$\vdots$

$\forall x \in [x_i;\ x_{i+1}[, \quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_i;$

$\vdots$

$\forall x \in [x_n;\ +\infty[, \quad F(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{i-1} + p_i + p_{i+1} + \cdots + p_n = 1.$

**Remarque :** la fonction de répartition $F$ est une fonction en escalier, croissante sur $\mathbb{R}$.

**d) Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire**

Soit X une variable aléatoire de loi probabilité présentée par le tableau suivant :

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | … | $p_{n-1}$ | $p_n$ |

- **Espérance mathématique**

On appelle espérance mathématique de X, le réel noté $E(\mathrm{X})$ et défini par :

$$E(\mathrm{X}) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_\mathrm{i}p_\mathrm{i}.$$

- **Variance et écart type**
  - ✓ On appelle variance de X, le réel noté $V(\mathrm{X})$ et défini par :

$$V(\mathrm{X}) = (x_1 - E(\mathrm{X}))^2p_1 + (x_2 - E(\mathrm{X}))^2p_2 + \cdots + (x_n - E(\mathrm{X}))^2p_n = \sum_{1=1}^{n}(x_\mathrm{i} - E(\mathrm{X}))^2 p_\mathrm{i}.$$

  - ✓ L'écart type de X est la racine carrée de la variance. On la note $\sigma(\mathrm{X})$.

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{V(\mathrm{X})}.$$

Remarque : $E(\mathrm{X})$ correspond à la moyenne en statistique.

**Propriété :**

Soit X une variable aléatoire de variance $V(\mathrm{X})$.

$$V(\mathrm{X}) = E(\mathrm{X}^2) - [E(\mathrm{X})]^2.$$

**e) Loi binomiale**

- **Définition**

Soit un schéma de Bernoulli à $n$ épreuves auquel on associe une variable aléatoire X. Alors,

$\mathrm{X}(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots, \mathrm{n}\}$.

$\forall\, \mathrm{k} \in \mathrm{X}(\Omega)$, $p(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = C_n^{\mathrm{k}}p^{\mathrm{k}}(1-p)^{n-\mathrm{k}}$; où $p$ est la probabilité d'obtenir un succès à une épreuve et $k$ est le nombre de succès au cours des $n$ épreuves.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée ***loi binomiale de paramètres*** $n$ et $p$.

- **Propriété**

Soit X une variable aléatoire dont loi de probabilité est une *loi binomiale de paramètres* $n$ et $p$.

$E(\mathrm{X}) = np$ et $V(\mathrm{X}) = np(1-p)$.

## Chapitre : *Fonctions numériques*

### I. Limites et continuité

#### 1) Limites et propriétés

***Propriété***

f et u et v étant des fonctions numériques

* si f(x)≥g(x) ∀x et $\lim_{x->+\infty} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x->+\infty} f(x) = +\infty$

*si pour $x$ assez grand, $l \in \mathbb{R}$, $|f(x) - l| \leq u(x)$ et si $\lim_{x->+\infty} u(x) = 0$ alors $\lim_{x->+\infty} f(x) = l$ .

*si pour n assez grand $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x->+\infty} u(x) = \lim_{x->+\infty} v(x) = l$ alors $\lim_{x->+\infty} f(x) = l$

***Compatibilité avec l'ordre***

Si pour $x$ assez grand, f(x)≤g(x) et $\lim_{x->+\infty} f(x) = L$ et $\lim_{x->+\infty} g(x) = L'$ alors L≤ L' f et g étant des fonctions numériques.

***Fonction composée***

Si f et g sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{x->a} f(x) = b$ et $\lim_{x->b} g(x) = c$ alors $\lim_{x->a} (gof)(x) = c$

#### 2) Continuité

**Définition**

Une fonction f est continue en $x_0$ si $\lim_{x->x_0} f(x) = f(x_0)$

f est continu sur un intervalle I si f est continu en tout point de I

#### 3) prolongement par continuité

Si f une fonction continue sur ]a,b] admet une limite $l$ en $a$ alors la fonction $g$ définie sur [a,b] par $f(x) = g(x)$si $x \neq$ et $g(a) = l$ est une fonction continue sur [a,b]; appelée prolongement par continuité de f en a.

### II. DERIVATION

#### 1) Dérivabilité sur un intervalle I

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in$I. On dit que $l$ est dérivable en $x_0$si $\lim_{x->x0} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = l$, $l \in \mathbb{R}$.

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

Remarque : $l$ est le nombre dérivé en $x_0$ notée $f'(x_0)$.

### 2) Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

soit f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

#### a) Dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à gauche de $x_0$ si

$\lim_{x->x_0^-} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = l, l \in \mathbb{R}.$

#### b) Dérivabilité à droite

On dit que f est dérivable à droit de $x_0$ si

$\lim_{x->x_0^+} \frac{f(x)-f(x0)}{x-x0} = l, l \in \mathbb{R}.$

#### c) Fonction dérivée

Si f est dérivable sur un intervalle I, la fonction f' définie par

$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f'(x)$ est la fonction dérivée sur I de f

#### d) Dérivée seconde

Si f' est dérivable sur I la fonction f'' définie par

$f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f''(x)$ avec $\lim_{x->x0} \frac{f'(x)-f'(x0)}{x-x0} = f''(x_0)$

f'' est la dérivée seconde de f sur I

***Notation***

f' est notée $\frac{df}{dx}$ et f'' est aussi notée $\frac{d^2f}{dx2}$

### 3) Propriétés de la dérivation

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de R

On a les propriétés suivantes

(u+v)'=u'+v'

(uv)'=u'v+uv'

Si v≠0, $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-u\,v'}{v^2}$

(uov)'=(u'ov).v'

## Propriétés

Si f est une fonction numérique strictement monotone sur I intervalle de ℝ alors f réalise une bijection de I sur f(I).

### 4) Primitive d'une fonction

### a) Définition

Soit f une fonction définie sur I un intervalle de R et F une fonction définie sur I.F est une primitive de f si F'=f

### b) Propriété

Deux primitives d'une fonction diffère entre elles par une constante

# Chapitre : *Nombres complexes*

**Théorème (admis)**

Il existe un ensemble, appelé ensemble des nombres complexes et noté $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$ et vérifiant :

i) $\mathbb{R}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

ii) L'équation $x^2+1=0$ admet une racine dans $\mathbb{C}$ que l'on note ***i***, appelée **solution imaginaire**.

iii) Tout élément $z$ de $\mathbb{R}$, s'écrit d'une manière unique sous la forme $z=a+ib$, où $a$ et $b$ sont des réels.

**Vocabulaire**

Soit $z=a+ib$ un nombre complexe.

Le réel $a$ est appelé **partie réelle** de **z**. On le note $\mathbf{Re}(\mathbf{z})$.

Le réel $b$ est appelé **partie imaginaire** de **z**. On le note $\mathbf{Im}(\mathbf{z})$.

L'écriture $z=a+ib$ s'appelle **forme cartésienne** (**forme algébrique)** du nombre complexe $z$.

**Notations**

Pour tout nombre naturel non nul n, on pose : $z^n = z\times z\times ...\times z$ ($n$ fois). De plus si $z$ est un

nombre complexe non nul, on pose : $\mathbf{z^{-n} = \frac{1}{z^n}}$ et on convient que $\mathbf{z^0 = 1}$

**Propriétés**

## 1. Opérations sur les nombres complexes

a) Le nombre complexe *i* étant solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$, on a : $\boldsymbol{i^2 = -1}$ ; $\boldsymbol{(-i)^2 = -1}$.

b) L'addition et la multiplication suivent dans $\mathbb{C}$, les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$.

Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux nombres complexes, alors : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ ;

$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$ (car $i^2 = -1$)

c) Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, il existe un unique nombre complexe $z'$ appelé opposé de *z* et noté $-z$ tel que $z + z' = 0$ et on a : $-z = -a - ib$.

d) Pour tout nombre complexe non nul *z*, il existe un nombre complexe unique $z'$ appelé inverse de *z* et noté $\frac{1}{z}$ tel que $zz' = 1$, et on a : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$.

e) $z = 0$ si et seulement si $a = b = 0$.

f) Si $b = 0$ alors *z* est réel.

g) Si $a = 0$ alors *z* est dit imaginaire pur.

- oints du plan P sont confondus si et seulement s'ils ont même affixe.
- Le nombre complexe $z = 0$ a pour image le point *O*.
- Le nombre complexe *z* est réel si et seulement si $M(z)$ appartient à la droite $(0, u)$.
- Le nombre complexe *z* est imaginaire pur si et seulement si $M(z)$ appartient à la droite $(0, v)$.
- La transformation du plan P qui, à un point *M* d'affixe *z* associe le point $M'$ d'affixe $-z$ est la symétrie centrale de centre *O*.

**Théorème**

Soit $v$ un vecteur du plan. Soient *A* et *B* deux points tels que $v = AB$. On a : $z_{\vec{v}} = z_B - z_A$ ou $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ où $z_B$ et $z_A$ sont les affixes respectives des points *B* et *A*.

**Translation**

Soit $T$ un vecteur d'affixe *t*. L'image d'un point *M* d'affixe *z* par la translation de vecteur $T$ est le point $M'$ d'affixe $z + t$.

**Théorème** Pour tous nombres complexes *z* et

$z'$, on a :

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\left(z + \bar{z}\right)$
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left(z - \bar{z}\right)$
- $z$ est réel si et seulement si $\bar{z} = z$
- $z$ est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$

**Théorème**

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan. Soient $A$ et $B$ deux points tels que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. On a : $z_{\vec{v}} = z_B - z_A$ ou $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ où $z_B$ et $z_A$ sont les affixes respectives des points $B$ et $A$.

**Définition**

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe d'image $M$. On appelle **module de *z*** la distance $OM$ et on note $|\mathbf{z}| = \mathbf{OM} = \sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}$ .

**Cas particulier**

Si $b = 0$, alors $z$ est réel et $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ (valeur absolue de $a$).

**Conséquences**

Pour tout nombre complexe $z$, on a :

- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ ; $|z| = |\bar{z}|$ ; $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ ; $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
- Si $M(z)$ est l'image de $z$ alors $OM = |z|$
- Si $A$ et $B$ sont deux points du plan complexe alors : $AB = |z_B - z_A|$.
- Pour tout nombre complexe $z$ non nul, on a : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

**Théorème**

**1.** Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

- $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $|\lambda z| = |\lambda||z|$, pour tout réel $\lambda$

**2.** Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, on a :

$|zz'| = |z||z'|$ ; $|z^n| = |z|^n$ ; $n \in \mathbb{N}^*$

**3.** Pour tout nombre complexe non nul $z$ et pour tout nombre complexe $z'$,on a :

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ ; $|z^{-n}| = |z|^{-n}$ ; $n \in \mathbb{N}^*$

**Théorème (admis)**

Soit $z$ un nombre complexe non nul et $M$ son image dans P. On a : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = (\vec{u}, \vec{OM})$ [$2\pi$].

Réciproquement si le nombre complexe $z$ s'écrit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta$ réel, alors : $r = |z|$ et $\theta = (\vec{u}, \vec{OM})$ [$2\pi$] où $M$ est l'image de $z$ dans le plan complexe P.

**Vocabulaire**

L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r > 0$ est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe $z$.

**Notation**

On note parfois $\mathbf{z = [r, \theta]}$.

**Définition**

**Soit *z* un nombre complexe non nul et *M* son** image dans P. On appelle **argument** de *z* et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{OM})$. On écrit : $\arg(z) = \theta\ [2\pi] = \theta + 2k\pi$ ; $k \in \mathbb{Z}$.

$Arg(z)$ est la mesure principale de $\arg(z)$ non utilisé dans ce document.

**Conséquence**

Pour tous nombres complexes non nuls $z$ et $z'$, $z = z'$ si et seulement si $|z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z')[2\pi]$.

**Propriétés**

Pour tout nombre complexe *z* non nul et tout réel $\alpha$ strictement positif, on a :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\alpha z) = \arg(z)[2\pi]$
- $\arg(-\alpha z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$

**Cas particulier**

Soit $\alpha$ un réel strictement positif.

- $\arg(\alpha) = 0[2\pi]$
- $\arg(-\alpha) = \pi\ [2\pi]$
- $\arg(i\alpha) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

$\arg(-i\alpha) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

**Théorème**

Soient *z* et $z'$ deux nombres complexes non nuls. On a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$ ; $n \in \mathbb{Z}$

**Propriétés**

Pour tous réels $\theta$ et $\theta'$ et pour tout entier relatif $n$, on a :

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$,

$e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$,

$e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$,

$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$

**Remarque**

Soit $z$ un nombre complexe non nul. Soit $M$ son image dans le plan complexe. Si $r = |z|$ et $\theta = (OI, OM)[2\pi] = \arg(z)$ alors $z = re^{i\theta}$.

**Conséquence**

Pour tout réel $r > 0$ et tout réel $\theta$, on a : $-re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi)}$ ; $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.

**Propriété**

Soient trois points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $c, b$ et $c$ tels que $B \neq A$ et $C \neq A$.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)$

**Propriété**

Soit un réel $\theta$. L'image d'un point $M$ d'affixe $z$ par la rotation de centre $O$ (origine du repère) et d'angle $\theta$ est le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que : $z' = z(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta} z$.

L'application f: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \cdot z'$ est dite associée à la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.

**Formule d'Euler**

Pour tout réel $\theta$, on a : $\mathbf{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$ et $\mathbf{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$.

**Conséquences**

Pour tout entier $n$, on a : $\mathbf{\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$ ; $\mathbf{\sin n\theta = \dfrac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$.

**Vocabulaire**

Le procédé qui consiste à écrire $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ est appelé **linéarisation**.

**Théorème**

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a$, $b$ et $c$ complexes et $a \neq 0$) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ : $z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sigma}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\sigma$ est une racine carrée de $\Delta$.

# Chapitre : *FONCTIONS LOGARITHME NEPERIEN*

## 1) DEFINITION ET CONSEQUENCES

**Définition :** La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction définie et continue sur ]0 ; + ∞[ . Elle admet donc une primitive et une seule définie sur ]0 ; +∞[ qui s'annulant en $x_0 = 1$. Cette primitive, notée ln, est appelée logarithme népérien.

**Propriété 1 :**

- L'ensemble de définition de la fonction ln est ]0 ; + ∞[.
- La fonction ln est dérivable sur ]0 ; +∞[ et pour tout nombre réel x de ]0 ; +∞[, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$
- ln 1 = 0.

ln est dérivable sur ]0 ; +∞[ donc ln est continue sur ]0 ; +∞[. On a $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\forall x \in ]0 : +\infty[, \frac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur ]0 ; + ∞[ ; ce qui permet de dire que ln est une bijection de ]0 ; + ∞[ sur ln(]0 ; + ∞[)

**Propriété 2 :** Quels que soient les nombres réels a et b strictement positifs :

- ln a = ln b si et seulement si a = b
- ln a > ln b si et seulement si a > b

**Remarque :** Puisque ln1 = 0, la propriété 2 implique que :

- ln x < 0 si et seulement si 0 < x < 1
- ln x > 0 si et seulement si x > 1

## 2) PROPRIETES LIEES A LA DERIVATION

La fonction ln est dérivable sur ]0 ; + ∞[ et $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$(\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} \Leftrightarrow (\ln)'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Exemple : Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Solution : $\forall x > 0, f(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ or $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$

*a)* **Dérivée de** $\ln \circ u$

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I et $(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$ .

Exemple : Soit f la fonction définie sur ]- ∞ ; - 3[ par $f(x) = \ln \frac{x+3}{x-2}$ . Calculons f '(x).

Posons $u(x) = \frac{x+3}{x-2}$ donc $u'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$ ; alors $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \times \frac{x-2}{x+3} = \frac{-5}{(x-2)(x+3)}$

**b) Recherche de primitives**

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors les primitives de la fonction $f = \frac{u'}{u}$ sont les fonctions $F_k$ définies sur I par $F_k(x) = (\ln \circ u)(x) + k$ où k est une constante réelle.

## Chapitre : *Fonctions exponentielles- Fonctions puissances*

**Définition**

**La fonction exponentielle**, notée **exp**, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

$ln : ]0;\ +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $exp : \mathbb{R} \longrightarrow ]0;\ +\infty[$ ou encore :

Pour tout réel $x$ et pour tout réel $y > 0$, $y = \exp x$ si et seulement si $x = \ln y$.

∗ En particulier on a :

- **exp0 = 1 car ln1 = 0**
- **exp1 = e car lne = 1**
- $\mathbf{exp(-1) = \frac{1}{e}}$ **car** $\mathbf{\ln\frac{1}{e} = -1}$

**Conséquences**

- Pour tout réel $x$, $\mathbf{\ln(\exp x) = x}$
- Pour tout réel $x$ de $]0 ; +\infty[$, $\mathbf{\exp(\ln x) = x}$
- Pour tout réel $x$, $\mathbf{\exp x > 0}$

**Remarque**

La fonction $exp : \mathbb{R} \longrightarrow ]0;\ +\infty[$ est, comme la fonction $\ln$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On déduit : $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty}$ et $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0}$.

**Notation $\mathbf{e^x}$**

Pour tout entier relatif n, $\ln e^n = n$. Par définition de la fonction $\exp$.

$\ln e^n = n \Leftrightarrow e^n = \exp(n)$.

On convient d'étendre cette égalité à tout réel $x$.

**Définition**

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $e^x = \exp(x)$. D'où on a :

- $e^1 = e$
- $e^0 = 1$
- $e^{-1} = \frac{1}{e}$
- Pour tout réel $x$, $\ln e^x = x$
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
- Pour tout réel $x$, $e^x > 0$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

**Formules fondamentales**

Pour tous réels *a* et *b*, on a :

- $\mathbf{e}^{a+b} = \mathbf{e}^a \times \mathbf{e}^b$
- $\mathbf{e}^{-b} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}^b}$
- $\mathbf{e}^{a-b} = \dfrac{\mathbf{e}^a}{\mathbf{e}^b}$
- $\left(\mathbf{e}^a\right)^p = \mathbf{e}^{ap}$ ; $p \in \mathbb{Z}$

Ces formules montrent l'intérêt de la notation $e^x$, car ces résultats se retiennent en utilisant les règles habituelles sur les exposants.

**Théorème**

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

**Théorème**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

**Ensemble de définition**

Soit *u* une fonction définie sur un intervalle *I*. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto u(x)$.

**Limites**

a. Soient *u* et *f* deux fonctions numériques définies sur un intervalle *I*. Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} e^{u(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} e^{u(x)} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} e^{u(x)} = e^a$

**Théorème**

Si *u* est une fonction dérivable sur un intervalle *I*, alors la fonction $e^u$ est dérivable sur *I* et :

$\left(e^u\right)' = u'e^u$

**Théorème**

Soit une fonction $u$ dérivable sur un intervalle $I$. La fonction $f$ définie sur $I$ par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives sur $I$ et ces primitives $F$ sont définies par : $F(x) = e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

**Equations**

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$, $a$ et $b$ sont des réels.
- $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$, $a > 0$

**Inéquations**

- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$, $a$ et $b$ sont des réels.
- $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$, $a > 0$

**Définition**

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel $b$ : $\mathbf{a^b = e^{blna}}$.

**Règles de calcul**

Si $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors :

$a^x \cdot b^x = (ab)^x$ ; $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ; $a^x \cdot a^{-x} = 1$ ; $(a^x)^y = a^{xy}$ ; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

**Définition**

On appelle **fonction puissance** $\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) la fonction : $f_\alpha : ]0 ; +\infty[ \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^\alpha$ avec $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

**Conséquence**

Pour tout $x > 0$, $x^\alpha > 0$.

**Théorème**

Si $u$ est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $u^\alpha$ est dérivable sur $I$ et $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

**Conséquence**

Sur l'intervalle $I$, $u^\alpha$ est une primitive de $\alpha u^{\alpha-1}u'$, ce que l'on peut énoncer :

Si $\alpha \neq -1$, alors $\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1}$ est une primitive de $u^\alpha u'$ ($u > 0$).

**Cas particulier**

Si $\alpha = -1$ on a : $u'u^{-1} = \frac{u'}{u}$ et une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u| + k$ ; $k \in \mathbb{R}$.

**Théorème**

Pour $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^{+}} x^{\alpha} \ln x = 0$.

**Théorème**

Pour tout réel $\alpha$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e_x}{x^{\alpha}} = +\infty$ et.

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0$

# Chapitre : *Calcul intégral*

**Définition**

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I*, et *F* une primitive de *f* sur *I*. Etant donnés deux éléments *a* et *b* de *I*, on pose : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ .

**Notation**

Ce nombre est appelé intégrale de $f$ entre *a* et *b*. On note souvent $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b$.

**Remarque 1**

La fonction $g : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de *f* définie sur *I*, s'annulant en *a*.

**Remarque 2**

Dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,dx$ , on peut remplacer la lettre *x* par n'importe quelle lettre. On a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(z)\,dz = ...$On dit que *x* est une **variable "muette".**

**Théorèmes**

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* ; *a*, *b* et *c* sont trois réels de *I*. *F* et *G* des primitives respectives des fonctions *f* et *g* ; $\alpha$ et $\beta$ deux réels quelconques. On a :

* $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (inversion des bornes)
* $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ (relation de Chasles)
* $\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$ (linéarité de l'intégrale)
* Si $a \le b$ et $f \ge 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ (positivité)

**Remarque**

La réciproque est fausse.

**Conséquence**

Si $a \leq b$ et $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (comparaison d'intégrales).

**Remarque**

La réciproque est fausse.

**Propriété 1**

Soient *m* et *M* des nombres réels. Soit *f* une fonction continue et bornée sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel *x* de $[a\ ;\ b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Si $a < b$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

**Propriété 2**

Soit *k* un nombre réel positif, *f* une fonction continue et bornée sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout réel *x* de $[a\ ;\ b]$, $|f(x)| \leq k$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq k(b-a)$.

**Théorème**

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle *I* centré en 0. Soit *a* un élément de *I*.

- Si *f* est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si *f* est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$

**Théorème**

Soit *f* une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période *T*. Pour tout réel *a*, on a : $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$

**Théorème**

Soient *u* et *v* deux fonctions dérivables sur un intervalle *I* et dont les fonctions dérivées sont continues sur *I*.

Si *a* et *b* sont deux éléments de *I*, alors : $\int_a^b \mathbf{u'(t)v(t)dt} = \left[\mathbf{u(t)v(t)}\right]_a^b - \int_a^b \mathbf{u(t)v'(t)dt}$

**Théorème**

Soit *f* une fonction continue et positive sur $[a\ ;\ b]$. Dans un repère orthogonal $(0\ ;\ i\ ;\ j)$, l'aire du domaine défini par $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$ est $\int_a^b f(t)dt$. u.a

**Théorème**

Soit $f$ une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ telle que pour tout $x$ de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leq 0$. Dans un repère orthogonal l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de $f$ et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $\int_a^b -f(x)\,dx \ \ u \cdot a$

**Théorème 3 (admis)**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$ telles que pour tout $x$ de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leq g(x)$. Dans un repère orthogonal l'aire de la surface limitée par la représentation graphique de $f$ et $g$ et les deux droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$ est : $\mathcal{T} = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx \ \ u \cdot a$

# Chapitre : *EQUATIONS DIFFERENTIELLES*

## I. DEFINITION

On appelle équation différentielle, une équation où l'inconnue est une fonction f de IR vers IR et dans laquelle apparaît au moins une des dérivées successives de f.
Exemples : $y' + 2y = x^2$ est une équation différentielle du premier ordre et
$y'' - 4y' + 7y = 0$ est une équation différentielle du second ordre.
Remarque : résoudre ou intégrer une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation.

## II. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE y' – my = 0 (m ϵ IR ).

- La fonction nulle est solution de (E).
- Déterminons les solutions non nulles de (E).

On a : $y \neq 0$, $y' - my = 0 \Leftrightarrow y' = my \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = m \Leftrightarrow \ln|y| = mx + c$ ; $c \in IR \Leftrightarrow |y| = e^{mx+c}$ ; $c \in IR$
$\Leftrightarrow y = e^{mx+c}$ ou $y = -e^c e^{mx} \Leftrightarrow y = Ke^{mx}$ avec $K \in IR^*$.

**Propriétés**

- Les solutions de l'équation différentielle $y' - my = 0$ sont les fonctions $x \cdot Ke^{mx}$ avec $K \in IR$.
- Il existe une unique solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$ ($x_0$ et $y_0$ sont des réels donnés).

## III. EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE : $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in IR^*$)

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega \in IR^*$) sont les fonctions :
$x \cdot A\cos\omega x + B\sin\omega x$ avec A et B des nombres réels.
Il existe une unique solution f de cette équation différentielle vérifiant des conditions initiales données.

**3)** Equation de la forme $y''+\omega^2 y = 0$ $\omega \in R$

Les solutions sont de la forme $A\cos\omega x + B\cos$

# EPREUVES

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
.....
Série D

Année 2011
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1 (4 points)**

Dans le tableau suivant figurent les résultats d'une enquête réalisée dans un magasin pour déterminer le nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures, en fonction de son prix de vente.

| Prix en francs: $x_i$ | 350 | 400 | 450 | 500 | 550 | 600 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre d'acheteurs potentiels: $y_i$ | 140 | 120 | 100 | 90 | 80 | 55 |

**1)** Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i, y_i)$ correspondant à cette série statistique dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que 1cm représente 100 francs sur l'axe des abscisses et 1cm représente 20 acheteurs sur l'axe des ordonnées.

**2)** On appelle $G_1$ et $G_2$ les points moyens des sous-nuages constitués d'une part par les trois premiers points, d'autre part par les trois derniers points.

**a)** Calculer les coordonnées de $G_1$ et $G_2$.

**b)** Placer les points $G_1$ et $G_2$ sur la figure et tracer la droite $(G_1G_2)$.

**c)** Déterminer une équation de la forme $y = mx + p$ de la droite $(G_1G_2)$.

**3)** Déduire du **2-c)** une estimation :

**a)** du nombre d'acheteurs potentiels d'un modèle de chaussures vendu 650 F.

**b)** du prix d'un modèle dont le nombre d'acheteurs potentiels est 150.

**Exercice 2 (4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les nombres complexes : $a = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + \dfrac{i(\sqrt{3}-1)}{4}$ et $z_0 = 6 + 6i$.

On note $A_0$ le point d'affixe $z_0$ et pour tout $n$ entier naturel non nul, on désigne par $A_n$ le point d'affixe $z_n$ définie par : $z_n = a^n z_0$.

**1)**

**a)** Exprimer $z_1$ et $a^2$ sous forme algébrique. Ecrire $z_1$ sous forme exponentielle et montrer que $a^2 = \dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

**b)** Exprimer $z_3$ et $z_7$ en fonction de $z_1$ et $a^2$ ; en déduire l'expression de $z_3$ et $z_7$ sous forme exponentielle.

**2)** Pour tout $n$ entier naturel, on pose $|z_n| = r_n$.

**a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = 12 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

**b)** En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

**c)** Déterminer la limite de la suite $(r_n)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

**Problème (12 points)**

Soit $f$ la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et de courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan (unité graphique : 4 cm).

**Partie A**

**1)**

**a)** Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

**b)** Calculer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

**2)** Etudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation.

**3)** Soit $A$ le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 0.

**a)** Déterminer l'équation réduite de la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C})$ en $A$.

**b)** Montrer que le point $A$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

**4)** Tracer $(T)$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

**Partie B**

Soit $n$ un entier naturel. On désigne par $D_n$ le domaine du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $y = 1$ ; $x = 0$ ; $x = n$. $\mathcal{A}_n$ désigne l'aire de la région $D_n$ exprimée en unité d'aire.

**1)** Hachurer la région $D_2$ sur le graphique (pour $n = 2$).

**2)** Montrer que $\mathcal{A}_n = \ln 2 - \ln(1+e^n) + n$.

**3)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathcal{A}_n$.

**Partie C**

**1)** Déterminer les nombres réels $a$ et $b$ tels que :

$$\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2}.$$

**2)** Soit $\alpha$ un réel négatif. On note $V(\alpha)$ le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe $(\mathcal{C})$ obtenue pour $\alpha \leq x \leq 0$. $V(\alpha)$ est exprimé en unité de volume.

**a)** Exprimer $V(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.

**b)** Déterminer la limite de $V(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers $-\infty$.

**Partie D**

Soit $(\Gamma)$ la courbe paramétrée de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \dfrac{1}{1+t} - 1 \end{cases}, t \geq 1.$$

**1)** Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma)$.

**2)** Expliquer comment à partir de $(\mathcal{C})$ on obtient $(\Gamma)$.

Construire $(\Gamma)$ en pointillés.

On donne : $f\left(\frac{1}{2}\right) \backsimeq 0,62$ ; $f(1) \backsimeq 0,73$ ; $f(2) \backsimeq 0,88$.

*Fin*

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
.....
Série D

Année 2012
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1** (4points)

On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : y'' + 4y = 0 \text{ et } (E_2) : y'' + y = 0$$

**1)** Déterminer la solution de l'équation $(E_1)$ dont la courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ passe par le point $A(0, -2)$ et admet en ce point une tangente horizontale.

**2)** Déterminer la solution $g$ de l'équation $(E_2)$ vérifiant : $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

**3)** Soit $(C)$ la courbe définie par le système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = -2\cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

**a)** Déterminer la période commune des fonctions $x$ et $y$ ; comparer la position des points $M(t)$ et $M(t+\pi)$, puis en déduire un élément de symétrie de $(C)$.
Justifier le choix de $[0, \pi]$ comme ensemble d'étude.

**b)** Etudier les fonctions $x$ et $y$ sur $[0, \pi]$ et dresser leur tableau de variations conjoint.

**c)** Réprésenter la courbe $(C)$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
(unité graphique : 2 cm).
On précisera les tangentes particulières ainsi que les tangentes en $O$.
NB : $\sqrt{2} \backsimeq 1,4$

**Exercice 2** (4 points)

On lance un dé tétraédrique dont les quatre faces portent les nombres 1, 2, 3 et 4. On s'intéresse au nombre porté par la face cachée.

Pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note $P_k$ la probabilité d'obtenir le nombre $k$ sur la face cachée. Le dé est déséquilibré de telle sorte que les nombres $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ dans cet ordre forment une progression arithmétique.

**1)** Sachant que $P_4 = 0,4$ ; montrer que $P_1 = 0,1$ ; $P_2 = 0,2$ et $P_3 = 0,3$.

**2)** On lance le dé trois (3) fois de suite. On suppose que les lancers sont deux à deux indépendants.

**a)** Quelle est la probabilité d'obtenir dans l'ordre les nombres 1, 2, 4 ?

**b)** Quelle est la probabilité d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant ?

**3)** On lance dix (10) fois de suite le dé. On suppose les lancers deux à deux indépendants. On note $X$ la variable aléatoire qui décompte le nombre de fois où le chiffre 4 est obtenu.

**a)** Pour $0 \leq i \leq 10$, exprimer en fonction de $i$ la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

b) Calculer l'espérance mathématique de $X$. Interpréter le resultat obtenu.

c) Calculer la probabilité de l'évènement $(X \geq 1)$.

On donnera une valeur arrondie au millième.

**4)** On lance $n$ fois le dé, les lancers étant supposés indépendants. On note $u_n$ la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au $n^{ième}$ lancer.

a) Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique et qu'elle converge.

b) Calculer $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de $n$ puis étudier la convergence de la suite $(S_n)$.

c) Déterminer le plus petit entier $n$ tel que $S_n \geq 0,999$.

NB : On donne : $(0,6)^{10} \backsimeq 0,00604$ ; $\ln(0,001) \backsimeq -6,90$ ; $\ln(0,6) \backsimeq -0,51$.

**Problème (12 points)**

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

**Partie A**

**1)** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
En déduire les asymptotes à $(\mathcal{C})$.

**2)** Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$, calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.
En déduire le sens de variation de $f$.

**3)** Dresser le tableau de variations de $f$.

**4)** Montrer que le point $I(1,-1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

**5)** Tracer $(\mathcal{C})$ et les asymptotes.

**Partie B**

Soit les fonctions $u$ et $v$ définies sur l'intervalle $]1,\infty[$ par : $u(x) = \dfrac{-1}{1-x}$ et $v(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$

**1)** Déterminer une primitive de chacune des fonctions $u$ et $v$ sur $]1,+\infty[$.

**2)** Vérifier que pour tout réel $x > 1$ ; $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$.

**3)** Calculer, en $cm^2$, la valeur exacte de l'aire $S$ du domaine plan compris entre $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations respectives $y = -1$, $x = 2$ et $x = 3$

**Partie C**

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 4 - e^{-u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

**1)** Montrer, par récurrence, que pour tout entier non nul $n$, $3 < u_n < 4$.

**2)**

a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_{n+1} - u_n$ et $u_n - u_{n-1}$ sont de même signe.

b) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

**3)** Etudier la convergence de la suite $(u_n)$.

NB : On donne : $e^{-3} \backsimeq 0,05$ et $e^{-4} \backsimeq 0,02$.

*Fin*

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
.....
Série D

Année 2013
Session normale
Epreuve du 1er tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES**

*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*

Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1 (4 points)**

L'espace ~~Le plan complexe~~ est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$.

Soient $A(1,2,3)$ ; $B(3;0;3)$ et $C(3,2,1)$.

**1)** Calculer $AB$ ; $BC$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

**2)** Soit $D$ le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Trouver les coordonnées de $D$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$ ?

En déduire que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

**3)** Déterminer la distance séparant le point $O$ au plan du quadrilatère $ABCD$.

**4)** Soit $I$ le milieu de $[AC]$. Calculer $OI$, en déduire que $I$ est le projeté orthogonal de $O$ sur le plan $(ABCD)$.

**5)** Démontrer que les plans $(OAC)$ et $(OBD)$ sont orthogonaux.

**6)** Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

**7)** Déterminer le volume de la pyramide de sommet $O$ et de base, le quadrilatère $ABCD$.

**Exercice 2 (4 points)**

On considère la suite de terme général $(U_n)$ défini par : $U_n = \dfrac{3U_{n-1} - 1}{U_{n-1} + 1}$ ; $n \geq 3$ et par son premier terme $U_2 = 3$.

**1)** Calculer $U_3$ ; $U_4$ et en déduire que la suite $(U_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

**2)**

**a)** Montrer que $(U_n)$ est minorée par 1.

**b)** Montrer que $(U_n)$ est décroissante.

**c)** En déduire que $(U_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**3)** On pose $V_n = \dfrac{U_n + 1}{U_n - 1}$

**a)** Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison. (On pourra exprimer $V_n$ et $V_{n-1}$ en fonction de $U_{n-1}$)

**b)** Exprimer $V_n$, puis $U_n$ en fonction de $n$.

**c)** Déterminer la limite de $(U_n)$.

**Problème (12 points)**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x\ln(1+x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe de $f$ dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, unité graphique 2 cm.

**Partie A**

**1)** Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{x+1}$ si $x \geq 0$.

Déterminer le sens de variation de $g$ sur $[0, +\infty[$ et en déduire son signe sur $[0, +\infty[$.

2)

a) Etudier la continuité de $f$ en 0.

b) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0.

3)

a) Calculer $f'(x)$ suivant les valeurs de $x$ et vérifier que pour tout $x \geq 0$ ; $f'(x) = g(x)$.

b) Montrer que pour tout $x < 0$, on a $f'(x) > 0$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$.

d) Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$

e) Dresser le tableau de variation de $f$.

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a $f'(x) \geqslant 0$
Montrer que pour tout $x > 0$, on a $f'(x) > 0$

4)

a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right]$. (On pourra poser $X = \frac{1}{x}$)

c) Montrer que la droite $(D)$ d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

d) Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(D)$ pour $x < 0$. (On admettra que $x(e^{\frac{1}{x}} - 1) \leq 1$ pour $x < 0$).

5) Tracer $(\Delta) : y = x$ ; $(D) : y = x + 1$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, unité graphique 2 cm.

**Partie B**

1)

a) Déterminer trois réels $a, b$ et $c$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}+$, on a :

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b) Déduire au moyen d'une intégration par parties le calcul de $\int_0^{e-1} f(x)dx$.

2) Calculer en cm$^2$, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par $(\Delta)$ ; $(\mathcal{C})$ et les droites d'équation : $x = 0$ et $x = e - 1$.

3) Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $[0, +\infty[$

a) Montrer que $h$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle $I$ que l'on précisera.

b) Construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de $h^{-1}$dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4) Quelle est l'aire $\mathcal{A}'$ en cm$^2$ de la boucle délimitée par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

**Partie C**

On considère la courbe $(\Gamma)$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\ln(-t)} \\ y(t) = \dfrac{t}{\ln(-t)} \end{cases} \text{ avec } t \in ]-1, 0[$$

1) Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma)$.

2) Comment obtient-on la courbe $(\Gamma)$ à partir de la courbe $(\mathcal{C})$ de $f$.

3) Construire $(\Gamma)$ en pointillés dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

*Fin*

**UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU**
**Office du Baccalauréat**
.....
**Série D**

**Année 2011**
**Session normale**
**Epreuve du 2ème tour**
**Durée: 4 heures**
**Coefficient: 5**

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1 (4 points)**

On considère la suite $(I_n)$ définie par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad , \quad (n \in \mathbb{N}).$$

**1)** Calculer $I_0$, $I_0 + I_1$ et en déduire $I_1$.
**2)** Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n$.
**3)** Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et positive.
**4)** Montrer que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**5)** En déduire que la suite $(I_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 2 (4 points)**

L'espace étant rapporté au repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ unité de longueur 1cm, on considère les points : $A(3;2;4)$ ; $B(0;3;5)$ ; $C(0;2;1)$ ; $D(3;1;0)$ et $F(1;2;3)$
**1)** Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
**2)** Soit $E$ le point défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. Calculer les coordonnées de $E$.
**3)** Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en $cm^2$ du parallélogramme $ABCD$.
**4)** Calculer le volume $V$ en $cm^3$ du prisme droit de base $ABCD$ et de hauteur $[AE]$.
**5)** Le point $F$ appartient-il à la droite $(AB)$ ? Justifier la réponse.

**Problème (12 points)**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et l'unité est 2 cm.

On placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille.

**Partie A**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par :
$f(x) = (2 - \frac{2}{x})(\ln x - 1)$ · $(\mathcal{C})$ désigne sa courbe représentative relative au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
**1)** Déterminer les limites de $f$ en 0 et en $+\infty$.
**2)** Montrer que $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
**3)** Soit $g$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln x + 2x - 4$.
**a)** Etudier le sens de variation de $g$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
**b)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $[1;2]$.
**c)** En déduire le signe de $g$ sur $]0;+\infty[$.

**4)**

**a)** Etudier le sens de variation de $f$ et dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$.

**b)** Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

**c)** Calculer $f(1)$ et $f(e)$.

**5)**

**a)** Etudier le signe de $f$ sur $]0;+\infty[$.

**b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation du résultat obtenu.

**c)** Construire $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha = 1,75$ et $f(\alpha) = -0,6$.

**6)** Soit $h$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = -f(x)$, $(\mathcal{C}')$ désigne sa courbe représentative. Sans étudier $h$, construire $(\mathcal{C}')$ dans le même repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Justifier la construction de $(\mathcal{C}')$.

**Partie B**

Soit $F$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$. $(\Gamma)$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

**1)**

**a)** Que représente $F$ pour $f$ ?

**b)** Sans calculer $F(x)$, donner le sens de variation de $F$.

**c)** Que peut-on dire des tangentes à $(\Gamma)$ aux points d'abscisses 1 et $e$ ?

(on pourra utiliser **4-c)** de la partie **A)**

**2)**

**a)** Le nombre réel $x$ étant strictement positif, calculer $\int_1^x \ln t\,dt$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

**b)** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f(x) = 2\ln x - 2\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{2}{x} - 2$.

**c)** En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de $x$.

**3)** Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en $cm^2$ du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On donne : $\ln 2 \backsimeq 0,7$ et $\ln 3 \backsimeq 1,1$.

*Fin*

UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU
Office du Baccalauréat
.....
Série D

Année 2012
Session normale
Epreuve du 2ème tour
Durée: 4 heures
Coefficient: 5

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Les calculatrices ne sont pas autorisées.
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1 (5 points)**

**1)**
On considère le polynôme $P$ défini pour tout $Z$ de l'ensemble $\mathbb{C}$ par :

$$P(Z) = Z^3 - 6Z^2 + 12Z - 16$$

**a)** Soit $Z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si $P(Z_0) = 0$ alors $P(\overline{Z}_0) = 0$ où $\overline{Z}_0$ est le conjugué de $Z_0$.
**b)** Calculer $P(1 + i\sqrt{3})$ ; puis factoriser $P(Z)$.
**c)** Déduire les solutions de l'équation $P(Z) = 0$.

**2)** Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{v}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
Soit $A$, $B$, et $C$ les points d'affixes respectives $a = 4$ ; $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \overline{b}$ ou $\overline{b}$ est le conjugué de $b$.

**a)** Placer les points $A$ ; $B$ et $C$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
**b)** Quelle est la nature exacte du triangle $ABC$?

3) Soit $K$ le point d'affixe $Z_K = -\sqrt{3} + i$, le point $F$ image de $K$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $G$ l'image de $K$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

**a)** Déterminer les affixes respectives de $F$ et $G$.
**b)** Montrer que les droites $(OC)$ et $(OF)$ sont perpendiculaires.

**4)** Soit $H$ le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$
**a)** Calculer l'affixe $Z_H$ de $H$ puis montrer que le parallélogramme $COFH$ est un carré.
**b)** Quelle est la nature du triangle $AGH$ ?

On donne $\sqrt{3} = 1,7$.

**Exercice 2 (3 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\right)$. On donne les points $A(2,0,0)$ ; $B(0;3;0)$ et $C(0;0;-2)$.

**1)** Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

**2)** Soit $H(a;b;c)$ le projeté orthogonal de $O$ sur le plan $(ABC)$.

**a)** Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ ?
En déduire que : $3a + 2b - 3c - 6 = 0$.

**b)** Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{u}$ ?
En déduire qu'il existe un réel $t$ tel que :

$$\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$$

c) Déterminer la valeur de $t$ puis donner les coordonnées de $H$.

d) Calculer la distance du point $O$ au plan $(ABC)$.

**3)** Calculer le volume du tétraèdre de base $ABC$ et de sommet $O$.

**Problème (12 points)**

On considère la fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$$

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

**Partie A**

Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = -x^2 + 1 - \ln|x|$

**1)** Etudier les variations de la fonction $g$ et dresser le tableau de variations.

**2)** Calculer $g(-1)$ et $g(1)$ puis déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**Partie B**

**1)** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. En déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale.

**2)**

a) Montrer que la droite $(D)$ d'équation $y = x - 2$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$.

b) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(D)$.

**3)**

a) Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire le sens de variation de $f$.

b) Dresser le tableau de variations de $f$.

**4)**

a) Montrer que le point $I$, intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C})$.

b) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que les asymptotes.

**5)**

Discuter graphiquement et en fonction du paramètre $m$, le nombre de solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$, $f(x) = m \quad (m \in \mathbb{R})$.

**Partie C**

Soit $\alpha$ un réel tel que $-1 \leq \alpha < 0$ et soit $(\Delta)$ la région du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, les droites d'équations respectives $x = -1$ ; $x = \alpha$ ; $y = x - 2$.

**1)**

a) Calculer en fonction de $\alpha$ l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de $(\Delta)$.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha < 0}} \mathcal{A}(\alpha)$ et interpréter graphiquement le résultat.

**2)** On donne la suite définie pour tout entier $n > 0$ par : $u_n = \int_1^n f(x)\,dx$.

a) Calculer $u_n$ en fonction de $n$.

b) La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Justifier.

*Fin*

**UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU**
**Office du Baccalauréat**
.....
**Série D**

**Année 2013**
**Session normale**
**Epreuve du 2ème tour**
**Durée: 4 heures**
**Coefficient: 5**

## EPREUVE DE MATHEMATIQUES

*(Les calculatrices ne sont pas autorisées)*
Cette épreuve comporte deux (2) pages.

**Exercice 1 (4 points)**

**1)** Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher, dont quatre portent le chiffre 1 et six portent le chiffre 5.
On tire simultanément deux de ces boules.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : << tirer deux boules portant chacune le chiffre 1 >>
B : << tirer deux boules portant chacune le chiffre 5 >>
C : << tirer deux boules portant des chiffres différents>>.

**2)** On suppose maintenant que l'urne contient $a$ boules portant le chiffre 1 et $b$ boules portant le chiffre 5 avec $a+b=10$ $(1 \leq a \leq 9)$ et $(1 \leq b \leq 9)$.
Soit $X$ la variable aléatoire égale au total des points marqués sur les deux boules tirées simultanément.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
b) Déterminer l'espérance mathématique $E(X)$ en fonction de $a$.
c) Pour quelles valeurs de $a$, a-t-on $6 < E(X) < 8$ ?

**Exercice 2 (4 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

**1)** Soit le nombre complexe $z_0 = 1+i$.

a) Montrer que $z_0$ est solution de l'équation $(E)$ définie par
$z^3-(7+i)z^2+2(8+3i)z-10(1+i)=0$.

b) Résoudre l'équation $(E)$ dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

**2)** On considère les points $A, B$ et $C$ du plan , d'affixes respectives $1+i$, $3+i$ et $3-i$.

a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

b) En déduire la nature exacte du triangle $ABC$.

c) Placer les points $A, B$ et $C$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et compléter la figure au fur et à mesure.

d) Soit $(\Gamma)$ le cercle circonscrit au triangle $BAC$.
Déterminer l'affixe du centre $G$ et le rayon $r$ du cercle.

**3)** Soit $(\Delta)$ l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ vérifiant la relation $|z-1-i| = |z-3+i|$.

a) Caractériser géométriquement l'ensemble $(\Delta)$.
b) Justifier que le point $F$ d'affixe $4+2i$ appartient à $(\Delta)$.
c) Déterminer l'affixe du point $E$ de $(\Delta)$ situé sur l'axe des ordonnées.

**4)** Quelle est la nature exacte du quadrilatère $CEAF$ ? Justifier votre réponse.

**Problème (12 points)**

**Partie A**

On considère l'équation différentielle $(E)$ définie par : $(E) : \dfrac{1}{2}y' + y = 3e^{-2x} + 2$.

**1)** Déterminer le réel $a$, tel que la fonction $v$ définie par $v(x) = axe^{-2x} + 2$ soit une solution de l'équation $(E)$.

**2)** Donner les solutions de l'équation $(E')$ : $\frac{1}{2}y' + y = 0$

**3)**

**a)** Montrer que $u$ est solution de $(E)$ si et seulement si $v - u$ est solution de $(E')$.

**b)** En déduire les solutions de $(E)$.

**4)** Déterminer la solution particulière $h$ de l'équation $(E)$ vérifiant $h(0) = 0$.

**Partie B**

On définit la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 \text{ si } x \leq 0 \\ \dfrac{x \ln x}{1+x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Unité graphique : 4 cm.

**I) Etude d'une fonction auxiliaire**

On définit la fonction $g$ sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

**1)**

**a)** Calculer les limites de $g$ en 0 et en $+\infty$.

**b)** Déterminer le sens de variations de $g$.

**c)** Dresser le tableau de variations de $g$.

**2)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $]0; +\infty[$. Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle $]0,2; 0,3[$.

**3)** En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

**II) Etude et représentation graphique de $f$.**

**1)** Etudier la continuité de $f$ en 0.

**2)** Etudier la dérivabilité de $f$ en 0. Donner une interprétation graphique.

**3)** Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**4)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu.

**5)** Etudier le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

(On montrera que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$)

**6)** Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$ et déterminer le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe $(Ox)$.

**7)** Dresser le tableau de variations de $f$.

**8)** Construire $(\mathcal{C}_f)$.

**Partie C**

Soit $\lambda < 0$. On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équations : $x = \lambda$, $x = 0$, $y = 0$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

**1)** On pose $F(x) = (ax + b)\, e^{-2x}$. Déterminer $a$ et $b$ pour que $F'(x) = (3x - 1)\, e^{-2x}$.

**2)** Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$ en $\text{cm}^2$.

**3)** Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

On donne : $\ln 2 = 0,70$ ; $\ln 3 = 1,10$ ; $\ln 5 = 1,61$.

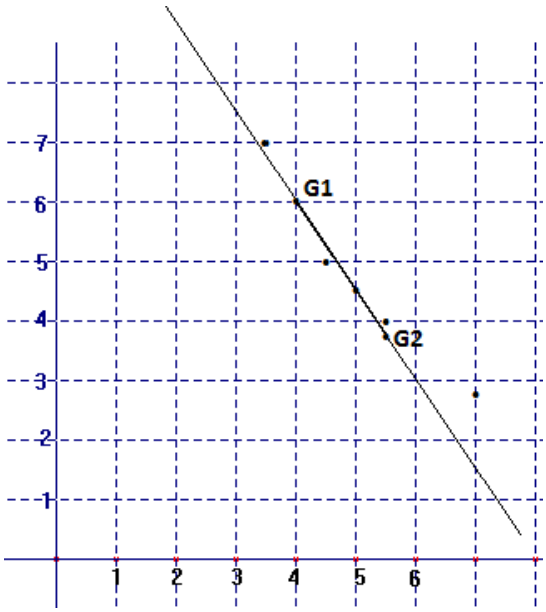
*Fin*

CORRIGE

## Session Normale 2011 ; 1er tour

## PROPOSITION DE CORRIGE

### EXERCICE 1




1) Voir figure ci- contre

2) a) $G_1(400,120)$ $G_2(550, 75)$

b) Voir figure ci-contre

c) $y = mx + p$ $\quad m = -\frac{3}{10}$ ; p = 240

3) a) $650 \times (-0,3) + 240 = 45$

### EXERCICE 2

1)

a) $z_1 = az_0 = (6+6i)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right) = 3+3i\sqrt{3} = 6e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{4}+\frac{i(\sqrt{3}-1)}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}+i}{4} = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z_3 = a^3z_0 = a^2(az_0) = a^2z_1$ ; $\quad z_7 = a^7z_0 = (a^2)^3z_1$. $z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; $z_7 = \frac{3}{4}e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

2)

a) $r_n = |z_n| = |a^n| \times |z_0| = |a^{n-1}| \times |z_1| = |a^2|^{\frac{n-1}{2}} \times |z_1| = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} = 12\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$.

b) La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $6\sqrt{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$. Quand n tend vers $+\infty$, le point $A_n$ tend vers le point O.

## PROBLEME

**PARTIE A**

1) a) $D_f = IR$ ; b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$ ; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$.

2) $f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. $f'(x) > 0$ sur IR ; f est donc strictement croissante.

Tableau de variation

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | |
| f | 0 | ↗ | 1 |

3) a) Equation de (T) $y = xf'(0) + f(0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

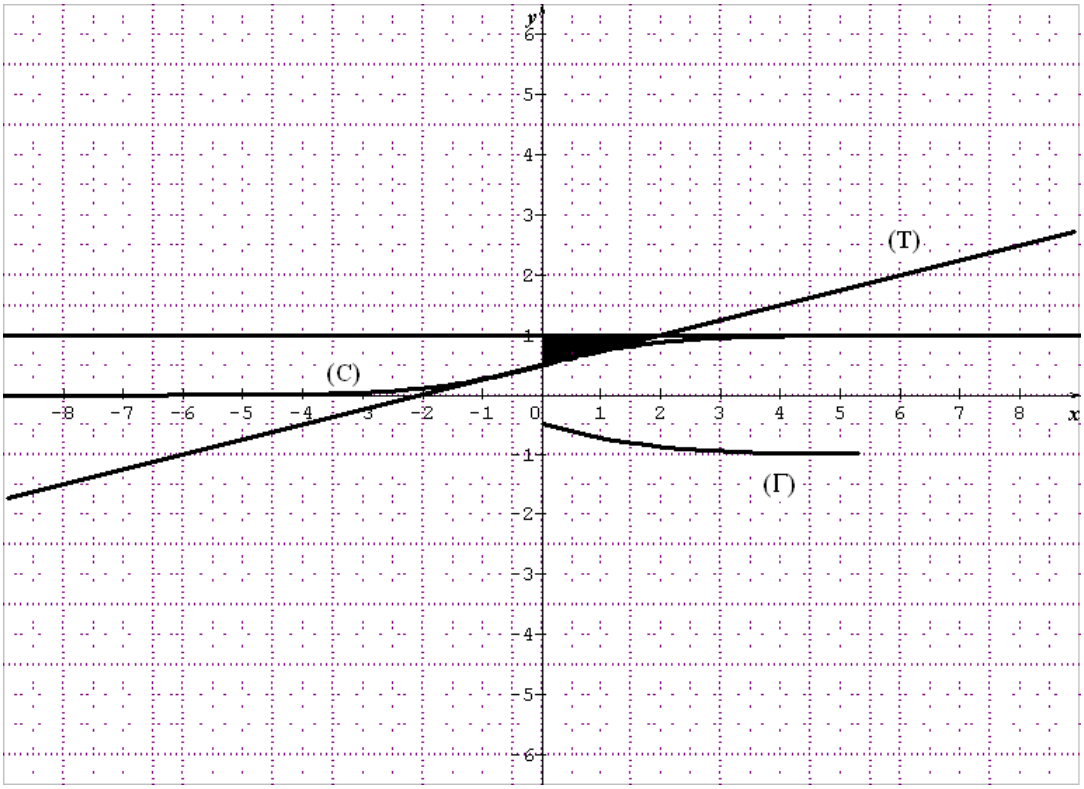
b) Montrer que A $(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie pour ( C ).

Soit M un point de ( C ) de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X,Y) dans $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ donne $\begin{cases} x = X \\ y = Y + \frac{1}{2} \end{cases}$.

y = f(x) équivaut à : $Y = -\frac{1}{2} + \frac{e^X}{1+e^X} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^X - 1}{e^X + 1}\right)$. La fonction $F : X \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{e^X - 1}{e^X + 1}\right)$ est définie sur 3 et pour tout $X \in 3$, $-X \in 3$, on a : $F(-X) = F(X)$ ; F est impaire ; donc A $(0, \frac{1}{2})$ est bien un centre de symétrie pour ( C ).

4)




**PARTIE B**

1) Voir figure

2) $A_n = \int_0^n [1-f(x)]dx\, ua = [x]_0^n - \int_0^n \frac{e^x}{1+e^x}dx = \left[x - \ln(1+e^x)\right]_0^n = n - \ln(1+e^n) + \ln 2$

$= \ln 2 - \ln(1+e^n) + n$

3) $-\ln(e^n+1)+n = -\ln(e^n+1) + \ln e^n = \ln\frac{e^n}{1+e^n}$ ; $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[\ln 2 + \ln\frac{e^n}{1+e^n}] = \ln 2$

**PARTIE C**

1) $\frac{ae^x}{1+e^x} + \frac{be^x}{(1+e^x)^2} = \frac{ae^{2x}+(a+b)e^x}{(1+e^x)^2}$. On en déduit que a = 1 et b = - 1.

2) a) $V(\alpha) = \pi\int_\alpha^0 [f(x)]^2 dx\, uv$.

$$\int_\alpha^0 [f(x)]^2 dx = \int_\alpha^0 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}dx = \int_\alpha^0 \frac{e^x}{1+e^x}dx - \int_\alpha^0 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \left[\ln(1+e^x)\right]_\alpha^0 + \left[\frac{1}{1+e^x}\right]_\alpha^0$$

$V(\alpha) = \pi\left[\ln 2 - \ln(1+e^\alpha) + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^\alpha}\right] \times 64\text{cm}^3$.

b) $\lim_{\alpha \to -\infty} V(\alpha) = 64\pi(-\frac{1}{2} + \ln 2)$

**PARTIE D**

1) $t = e^x$ avec $x \geq 0$. $y = \frac{1}{1+e^x} - 1 = \frac{-e^x}{1+e^x}$.
2) L'équation de ($\Gamma$) est $y = -f(x)$ avec $x \geq 0$.. On obtient ($\Gamma$) en prenant le symétrique de (C) par rapport à l'axe des abscisses pour $x \geq o$. Pour la construction, voir figure.

## Session Normale 2012 ; 1er tour

## PROPOSITION DE CORRIGE

**Exercice 1**

$(E_1): y''+4y=0;\ (E_2): y''+y=0$

**1.** La solution recherchée est la fonction f définie sur · par $f(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ ,

$A\ et\ B$ réels, et vérifiant $f(0) = -2\ et\ f'(0) = 0$ ;

$f(0) = -2$ donne $A = -2$

Pour tout réel $x$, $f'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ ; donc, $f'(0) = 0$ donne $B = 0$

Par conséquent, pour tout réel $x$, $f(x) = -2\cos 2x$

**2.** La solution $g$ de $(E_2)$ est telle que pour tout réel $x$, $g(x) = C\cos x + D\sin x$ avec les conditions initiales : $g(\frac{\pi}{2}) = -1\ et\ g'(\frac{\pi}{2}) = -1$ ; ce qui conduit à $g(x) = \cos x - \sin x$ .

***3.*** $(C): \begin{cases} x(t) = -2\cos 2t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases}, t \in$ .

**a)** La période commune des fonctions $x$ et $y$ est $2\pi$ car pour tout réel $t$,

$x(t + 2\pi) = -2\cos 2(t + 2\pi) = -2\cos(2t + 2\times 2\pi) = -2\cos 2t = x(t)$ et

$y(t + 2\pi) = \cos(t + 2\pi) - \sin(t + 2\pi) = \cos t - \sin t = y(t)$

Comparaison de la position de $M(t)\ et\ M(t+\pi)$

Pour tout réel $t$, les coordonnées du point $M(t+\pi)$ sont telles que

$x(t + \pi) = -2\cos 2(t + \pi) = -2\cos(2t + 2\pi) = -2\cos 2t = x(t)$ et

$y(t + \pi) = \cos(t + \pi) - \sin(t + \pi) = -\cos t + \sin t = -y(t)$ ; par suite, les points

$M(t)\ et\ M(t+\pi)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

L'axe des abscisses est un élément de symétrie de $(C)$ .

Ensemble d'étude : [0,π] car d'une part la période est 2π et d'autre part la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

***b)*** Etude de $x$ et $y$ sur [0,π]

Cas de $x$

$x(t) = -2\cos 2t,\ donc\ x'(t) = 4\sin 2t$

$x'(t) = 0$ pour $t = 0\ ou\ t = \frac{\pi}{2}\ ou\ t = \pi$

Pour tout $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, $x'(t) > 0$ ; donc $X$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Pour tout $t \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$, $x'(t) < 0$ ; donc $X$ est strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Cas de $y$

$y(t) = \cos t - \sin t;\ donc\ y'(t) = -(\sin t + \cos t) = -\sqrt{2}\cos(t - \frac{\pi}{4})$

$y'(t) = 0\ pour\ t = \frac{3\pi}{4}$

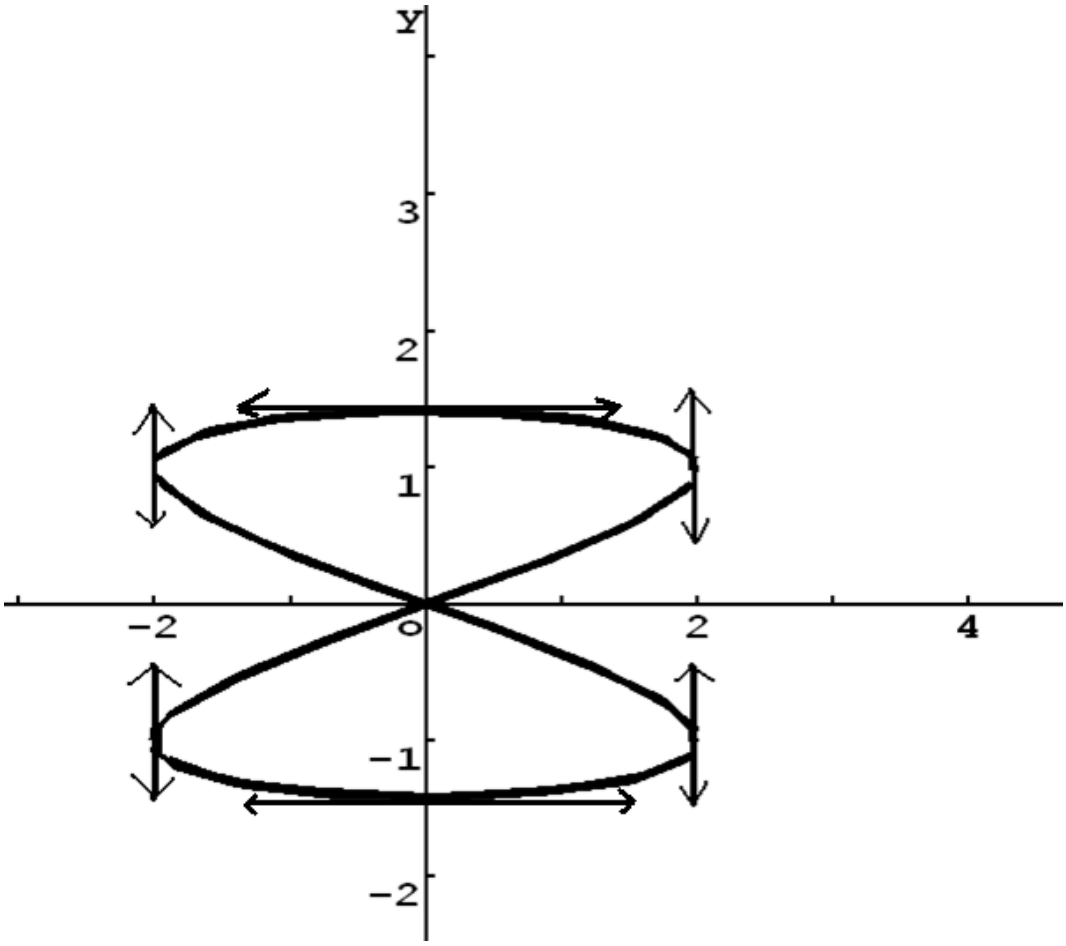
Pour tout $t \in [0, \frac{3\pi}{4}[$, $y'(t) < 0$ ; donc $y$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{3\pi}{4}]$

Pour tout $t \in ]\frac{3\pi}{4}, \pi]$, $y'(t) > 0$ ; donc $y$ est strictement croissante sur $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$

Tableau de variations de $X$ et $y$

| $t$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{3\pi}{4}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | 0 | + | 0 | - | (-4) | - | 0 |
| $x(t)$ | (-2) | ↗ | 2 | ↘ | 0 | ↘ | (-2) |
| $y'(t)$ | (-1) | - | (-1) | - | 0 | + | 1 |
| $y(t)$ | 1 | ↘ | (-1) | ↘ | $(-\sqrt{2})$ | ↗ | (-1) |

**c)** Représentation graphique




**Exercice 2**

**1.** Soit $r$ la raison de la progression arithmétique, alors $p_3 = p_4 - r$ ; $p_2 = p_4 - 2r$ ; $p_1 = p_4 - 3r$ ; $p_4 = 0,4$. Or, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, donc $r = \frac{4p_4 - 1}{6} = \frac{1,6 - 1}{6} = 0,1$ ; par suite, $p_1 = 0,1; p_2 = 0,2; p_3 = 0,3$.

**2.** **a)** Les lancers étant deux à deux indépendants, la probabilité d'obtenir dans l'ordre croissant les nombres 1, 2, 4 est $p_1 \times p_2 \times p_4$ ; ce qui donne

$p_1 \times p_2 \times p_4 = 0,1 \times 0,2 \times 0,4 = 0,008$.

**b)** Les différentes possibilités d'obtenir trois nombres distincts rangés dans l'ordre croissant sont : 1, 2, 3 ; 1, 2, 4 ; 1, 3, 4 et 2, 3, 4. Par conséquent, la probabilité recherchée est : $p_1 \times p_2 \times p_3 + p_1 \times p_2 \times p_4 + p_1 \times p_3 \times p_4 + p_2 \times p_3 \times p_4$, ce qui donne $0,05$.

**3.** $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n=10\,et\,p=p_4=0,4$.

**a)** Pour tout $i$ tel que $0 \le i \le 10$, $p(X=i)=C_{10}^{i}\times(0,4)^{i}\times(0,6)^{10-i}$

**b)** L'espérance mathématique de $X$ est $E(X)=n\times p=10\times 0,4=4$

Cela signifie qu'en moyenne, en lançant dix fois le dé, on obtiendra 4 fois la face numérotée 4.

**c)** $p(X\ge 1)=1-p(X=0)=1-(0,6)^{10}=1-0,00604=0,99396$, d'où

$p(X \ge 1)=0,994$ .

**4.a)** Soit $n$ un entier naturel non nul. On obtient 4 pour la première fois au $n^{ième}$ lancer si et seulement si on ne l'a pas obtenu aux éventuels lancers précédents et qu'on l'a obtenu au $n^{ième}$. Comme les lancers sont indépendants, alors $u_n=(0,6)^{n-1}\times 0,4$.

La suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison 0,6.

Comme $|0,6|<1$, la suite $(u_n)$ converge vers 0.

***b)*** $S_n=u_1+u_2+.....+u_n,\ n\in \blacksquare^{*}$

$S_n$ est la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $u_1=0,4$ ; donc $S_n=u_1\dfrac{1-(0,6)^n}{1-0,6}=0,4\times\dfrac{1-(0,6)^n}{0,4}=1-(0,6)^n$.

Comme $|0,6|<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,6)^n=0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$.

***c)*** $S_n\ge 0,999$ *équivaut à* $1-(0,6)^n\ge 0,999$ ; ce qui donne $(0,6)^n\le 0,001$. Par suite, comme ln est croissante, on obtient $\ln(0,6)^n\le\ln 0,001$ ou encore

$n\ln(0,6)\le\ln 0,001$ .

Finalement, comme $\ln(0,6)<0$ à cause du fait que 0<0,6<1, l'inégalité $n\ln(0,6)\le\ln 0,001$ équivaut à $n\ge\dfrac{\ln 0,001}{\ln(0,6)}$ ; ce qui donne $n\ge\dfrac{-6,90}{-0,51}$, conduisant ainsi à $n\ge 13,529$ .

La plus petite valeur recherchée de $n$ est 14.

**Problème**

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(x) = \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x}$

**Partie A**

**1.** Calcul des limites de $f$ aux bornes de $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln|1-x|}{1-x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{1-x}\right]$$

Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$ *et* $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ avec X=1-x ; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \frac{x+\ln|1-x|}{1-x} = -\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(x+\ln|1-x|) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}(1-x) = 0^+$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}} \frac{x+\ln|1-x|}{1-x} = +\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}(x+\ln|1-x|) = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}(1-x) = 0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln(x-1)}{-(x-1)} = -1 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = -1 \text{ et - } \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ avec } X = x-1$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$ ; alors, la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote pour $(C)$.

De même, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$ ; donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $(C)$.

**2.** Calcul de $f'(x)$ puis étude de son signe, et déduction du sens de variation de $f$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, on a : $f'(x) = \dfrac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(1-x)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\ln|1-x|$.

Ainsi, on a : $f'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ *ou* $x = 2$ ; pour tout $x \in ]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x \in ]0,1[\cup]1, 2[$, $f'(x) < 0$.

A la lumière du signe de $f'$ ; $f$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ *et* $[2, +\infty[$, et $f$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $[0,1[$ *et* $]1, 2]$.

***3.*** Tableau de variations de $f$

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | ‖ | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | -1 | ↗ | 0 | ↘ | ‖ | ↘ | -2 | ↗ | -1 |
| | | | | | | $+\infty$ | | | |
| | | | | $-\infty$ | | | | | |

**4.** Démonstration du fait que $I(1,-1)$ est un centre de symétrie pour $(C)$.

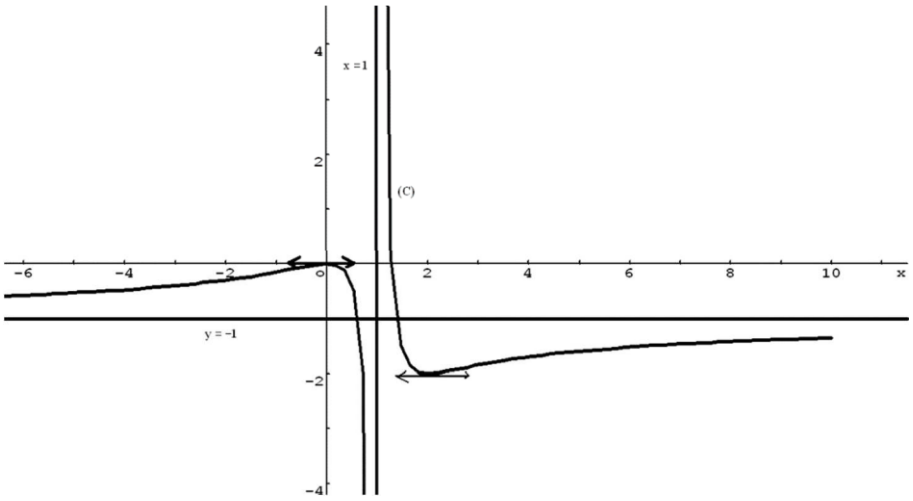
Soit $M$ un point de $(C)$ de coordonnées $(x,y)$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et $(X,Y)$ dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$. On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$, ce qui donne $x = 1+X$ *et* $y = -1+Y$.

Par suite, $y = f(x)$ équivaut à $-1+Y = \dfrac{1+X+\ln|X|}{-X}$ *car* $|-X| = |X|$, ce qui donne

$Y = -\dfrac{1+\ln|X|}{X}$.

La fonction $F : X \mapsto -\dfrac{1+\ln|X|}{X}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $X \in \mathbb{R}^*, -X \in \mathbb{R}^*$ et $F(-X) = -F(X)$. $F$ est impaire, donc $I(1,-1)$ est bien un centre de symétrie pour $(C)$.

**5.** Tracé de $(C)$ avec les asymptotes



**Partie B**

$u$ et $v$ sont définies sur ]1,+∞[ par $u(x) = -\dfrac{1}{1-x}$ et $v(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x-1}$ .

**1.** Détermination d'une primitive pour chacune des fonctions $u$ et $v$.

Une primitive de $u$ sur ]1,+∞[ est, par exemple, la fonction définie sur ]1,+∞[ par : $x \mapsto \ln(x-1)$. Une primitive de $v$ sur ]1,+∞[ est, par exemple, la fonction définie sur ]1,+∞[ par : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln^2(x-1)$ où $\ln^2(x-1) = \ln(x-1)\times\ln(x-1) = [\ln(x-1)]^2$ .

**2.** Vérification de l'égalité $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$ pour tout réel $x > 1$ .

On a, d'une part $-1 - f(x) = -1 - \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x} = -1 - \dfrac{x+\ln(x-1)}{-(x-1)}$ car pour $x > 1$ ,

$|1-x| = x-1$ ; donc $-1 - f(x) = -1 + \dfrac{x+\ln(x-1)}{x-1} = \dfrac{1-x+x+\ln(x-1)}{x-1} = \dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}$ et

d'autre part $u(x)+v(x) = -\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\ln(x-1)}{x-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{\ln(x-1)}{x-1} = \dfrac{1+\ln(x-1)}{x-1}$ .

On a bien l'égalité $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$ pour tout réel $x > 1$ .

**3.** Calcul de la valeur exacte en cm² de l'aire $S$ .

$S = 4\int_2^3 |f(x) - (-1)|dx\ cm^2 = 4\int_2^3 (-1 - f(x))dx\ cm^2$ car la droite d'équation $y = -1$ est au dessus de $(C)$ sur [2,3]. Or, pour tout réel $x > 1$ , $-1 - f(x) = u(x) + v(x)$ ; par suite,

$S = 4\int_2^3 (u(x)+v(x))dx\ cm^2 = 4\left[\ln(x-1) + \dfrac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]_2^3 = (4\ln 2 + 2(\ln 2)^2)\ cm^2$ .

**Partie C**

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4 - e^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ .

**1.** Démonstration par récurrence du fait que $3 < u_n < 4$ pour tout entier $n \geq 1$.

On a : $u_1 = 4 - e^{-u_0} = 4 - e^{-1}$ ; or $2 < e < 3$, d'où $-\dfrac{1}{2} < -e^{-1} < -\dfrac{1}{3}$

$$4 - \frac{1}{2} < u_1 < 4 - \frac{1}{3}$$

$$3 < 4 - \frac{1}{2} < u_1 < 4 - \frac{1}{3} < 4$$

On a bien $3 < u_1 < 4$.

Supposons que $3<u_n<4$ ; que peut-on dire de $u_{n+1}$ ?

$u_{n+1}=4-e^{-u_n}$ ; or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $3<u_n<4$

d'où : $-4<-u_n<-3$

$$e^{-4}<e^{-u_n}<e^{-3}$$

$$-e^{-3}<-e^{-u_n}<-e^{-4}$$

$$4-e^{-3}<4-e^{-u_n}<4-e^{-4}$$

$$4-0,05<4-e^{-u_n}<4-0,02$$

$$3,95<4-e^{-u_n}<3,98$$

$$3<3,95<u_{n+1}<3,98<4$$

$$3<u_{n+1}<4$$

On peut bien conclure que pour tout entier $n\geq 1$, $3<u_n<4$.

**2.** **a)** Démonstration du fait que, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_{n+1}-u_n$ et $u_n-u_{n-1}$ sont de même signe.

Soit $n\geq 1$, $u_{n+1}-u_n=e^{-u_{n-1}}-e^{-u_n}$.

Supposons $u_n-u_{n-1}>0$, c'est-à-dire $u_{n-1}<u_n$, alors on aura : $-u_{n-1}>-u_n$

$$e^{-u_{n-1}}>e^{-u_n}$$

$$e^{-u_{n-1}}-e^{-u_n}>0$$

$u_{n+1}-u_n>0$, d'où

$u_{n+1}-u_n$ et $u_n-u_{n-1}$ ont le même signe dans ce cas.

En supposant $u_n-u_{n-1}<0$, on aboutit également à $u_{n+1}-u_n<0$.

En conclusion, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_{n+1}-u_n$ et $u_n-u_{n-1}$ sont bien de même signe.

**b)** Etude du sens de variation de la suite $(u_n)$.

On a : $u_1-u_0=(4-e^{-1})-1=3-e^{-1}=\frac{3e-1}{e}$ ; donc $u_1-u_0>0$.

Comme $u_1-u_0>0$, alors d'après **2. a)** on a $u_n-u_{n-1}>0$, ce qui donne $u_{n-1}<u_n$ ;

donc la suite $(u_n)$ est strictement croissante sur ·  .

**3.** Etude de la convergence de la suite $(u_n)$.

D'après **2. b)** , la suite $(u_n)$ est strictement croissante sur ▪ ; donc elle est croissante sur ▪ .

D'après **1.** , la suite $(u_n)$ est majorée, par 4 par exemple.

Comme toute suite croissante et majorée est convergente, alors la suite $(u_n)$est convergente car elle est croissante et majorée.

**Session Normale 2013 ; 1er tour**

**PROPOSITION DE CORRIGE**

**EXERCICE 1**

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$. AB = $\sqrt{4+4+0}=2\sqrt{2}$ ; BC = = $\sqrt{0+4+4}=2\sqrt{2}$ ;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ = 2 × 0 + (-2) × 2 + 0 × (-2) = -4.

2) Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ les coordonnées du point D. $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\y-2=2\\z-3=-2\end{cases}$ .D(1, 4, 1).

ABCD est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs (AB et BC) égaux. C'est un losange.

Dans un losange, les diagonales sont médiatrices l'une de l'autre. On a donc (AC) ⊥(BD) donc $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ .

3) d[O, (ABC)] = $\frac{\left|\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AO}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ = -24 ; $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ = $4\sqrt{3}$. On en déduit que d([O, (ABC)] = $2\sqrt{3}$.

4) I(2, 2, 2) ; OI = $2\sqrt{3}$. OI = d[O, (ABC)], donc I est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

5) 1ère solution : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}-4\\8\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}-12\\0\\12\end{pmatrix}$. $(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OC}).(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OD})$ = 48 – 48 =0

Les plans (OAC) et (OBD) sont orthogonaux

2ième solution : Dans le losange ABCD, les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires en leur milieu I. Donc I ∈(BD).

(AC)⊥(BD) et (AC)⊥(OI) donc (AI) ⊥(OBD). Le plan (AOC) contient une droite (AI) qui est perpendiculaire au plan (OBD). Donc (OBD)⊥(OAC).

4) L'aire du quadrilatère ABCD = $\left\|AB\wedge AC\right\|$ = $4\sqrt{3}$.

5) Le volume de la pyramide est égale à $\frac{1}{3}$ OI × Aire de ABCD = $\frac{1}{3}\times 2\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}$ = 8.

**EXERCICE 2**

1) $U_3 = \frac{3\times 3-1}{3+1} = 2$ ; $U_4 = \frac{3\times 2-1}{2+1} = \frac{5}{3}$. $U_4 - U_3 \neq U_3 - U_2$ donc la suite $(U_n)$ n'est pas arithmétique. De même $\frac{U_4}{U_3} = \frac{5}{6}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \frac{2}{3}$. $\frac{U_4}{U_3} \neq \frac{U_3}{U_2}$ donc la suite $(U_n)$ n'est pas géométrique.

2)

a) Procédons par une démonstration par récurrence. On constate que $U_2 > 1$. Supposons que $U_{n-1} > 1$. Démontrons que $U_n > 1$. $U_n - 1 = \frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1} - 1 = \frac{3U_{n-1}-1-U_{n-1}-1}{U_{n-}+1} = \frac{2(U_{n-1}-1)}{U_{n-1}+1}$. Puisque $U_{n-1} - 1 > 0$, et $U_{n-1} + 1 > 0$, $\frac{2(U_{n-1}-1)}{U_{n-1}+1} > 0$ et par suite $U_n > 1$.

b) $U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n-1}{U_n+1} - U_n = \frac{3U_n-1-U^2{}_n-U_n}{U_n+1} = \frac{-(U_n-1)^2}{U_n+1} < 0$. La suite $(U_n)$ est donc décroissante.

c) $(U_n)$ est une suite décroissante et minorée. Elle est donc convergente. Soit l sa limite. Nous aurons alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3U_n-1}{U_n+1} = \frac{\lim_{n\to+\infty} 3U_n-1}{\lim_{n\to+\infty} U_n+1}$. Il s'en suit que $l = \frac{3l-1}{l+1}$. La transformation de cette égalité donne l'équation $l^2 - 2l + 1 = 0$ ; soit $(l-1)^2 = 0$. $l = 1$.

3)

a) Pour tout $n \geq 2$, on a :

$V_n - V_{n-1} = \frac{U_n+1}{U_n-1} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1} = \frac{\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}+1}{\frac{3U_{n-1}-1}{U_{n-1}+1}-1} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1} = \frac{4U_{n-1}}{2(U_{n-1}-1)} - \frac{U_{n-1}+1}{U_{n-1}-1}$

$= \frac{U_{n-1}-1}{U_{n-1}-1} = 1$.

$(V_n)$ est donc une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $V_2 = 2$.

b) Pour tout $n \geq 2$, $V_n = V_2 + (n-2)r = 2 + (n-2) = n$. $V_n = n$.

$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-1} \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n+1}{V_n-1}$. Donc $U_n = \frac{n+1}{n-1}$ pour tout $n \geq 2$.

*c)* $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n-1} = 1$.

**PROBLEME**

**Partie A**

1) g'(x) = $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}$. g'(x) > 0 sur [0, +∞[ car pour tout x∈[0, +∞[, 1 + x > 0. La fonction g est donc croissante strictement sur cet intervalle. De plus, g(0) = 0. Donc g(x) > 0 sur [0, +∞[.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = (\lim\limits_{x\to 0^-} x)\times(\lim e^{\frac{1}{x}})$. En posant X = $\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}[x\ln(1+x)]$ == 0. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

En conclusion $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. La fonction f est continue en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} e^X = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(1+x) = 0$. La dérivée à gauche de f est égale à sa dérivée à droite. La fonction est donc dérivable en 0.

3) a) pour x < 0, f'(x) = $(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}$ ; pour x ≥ 0, f'(x) = $\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$ = g(x).

b) Pour x < 0, - $\frac{1}{x}$ > 0 et (1 - $\frac{1}{x}$) > 0. Par suite $(1-\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}} > 0$ car la fonction exponentielle est toujours positive. On a donc f'(x) > 0 pour tout x < 0.

c) En se référant au résultat du 1) on a pour tout x > 0, f'(x) > 0.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = (\lim\limits_{x\to -\infty} x)\times(\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(1+x)$ - +∞.

e) Tableau de variations

| x | -∞ | | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | + | |
| f(x) | | ↗ | 0 | ↗ | +∞ |

-∞

4) a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+x)$ =+ ∞. La courbe de la fonction f admet une branche parabolique à +∞.

b) Calculons $\lim_{x\to-\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]$. Posons X = $\frac{1}{x}$. On a alors $\lim_{x\to-\infty}[x(e^{\frac{1}{x}}-1)]=\lim_{X\to0^-}\frac{e^X-1}{X}=1.$

c) (D) est la droite d'équation y = x + 1.

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=\lim_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1$. Posons X = $\frac{1}{x}$ On obtient alors

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to-\infty}(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=\lim_{x\to-\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1=\lim_{X\to0^-}\frac{(e^X-1)}{X}-1$=0. La droite (D) est donc une asymptote oblique de la courbe (C) de f à - ∞.

d) $f(x)-(x+1)=(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1$. Si nous admettons que $x(e^{\frac{1}{x}}-1)\le1\ \forall$ x < 0, il vient que $f(x)-(x+1)=(xe^{\frac{1}{x}}-x-1)=x(e^{\frac{1}{x}}-1)-1\le0$. La courbe (C) est donc en dessous de la droite (D) quand x < 0.

5) Voir figure à la fin

**PARTIE B**

1)a) $\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$ implique a = 1, a + b = 0 et b + c = 0 ;

Soit a = c = 1 et b = -1. On obtient $\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$.

b) $\int_0^{e-1}f(x)dx=\int_0^{e-1}x\ln(1+x)dx$. Posons u(x) = ln(1 + x) et v'(x) = x ; on a alors u'(x) = $\frac{1}{1+x}$ et

v(x) = $\frac{1}{2}x^2$ . Appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e1}\frac{x_2}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e1}[x-1+\frac{1}{x+1}]dx=$

$\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^{e-1}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]_0^{e-1}=$

$\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{4}(e-1)^2+\frac{1}{2}(e-1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(e^2-3)$.

2) A = $4cm^2\times\int_0^{e-1}[x-f(x)]dx=4cm^2\times[\frac{1}{2}(e-1)^2-\int_0^{e-1}f(x)dx]$ =(e²-4e+5)cm²

3)a) La fonction h, restriction de f sur [0, +∞[, est continue et strictement croissante sur cet intervalle. Elle est donc bijective. h(0) = 0 et $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Donc I = [0, +∞[.

b) (C') est le symétrique de la partie de (C) pour $x \geq 0$ par rapport à la droite d'équation y = x. (Voir ( C' ) sur la figure ).

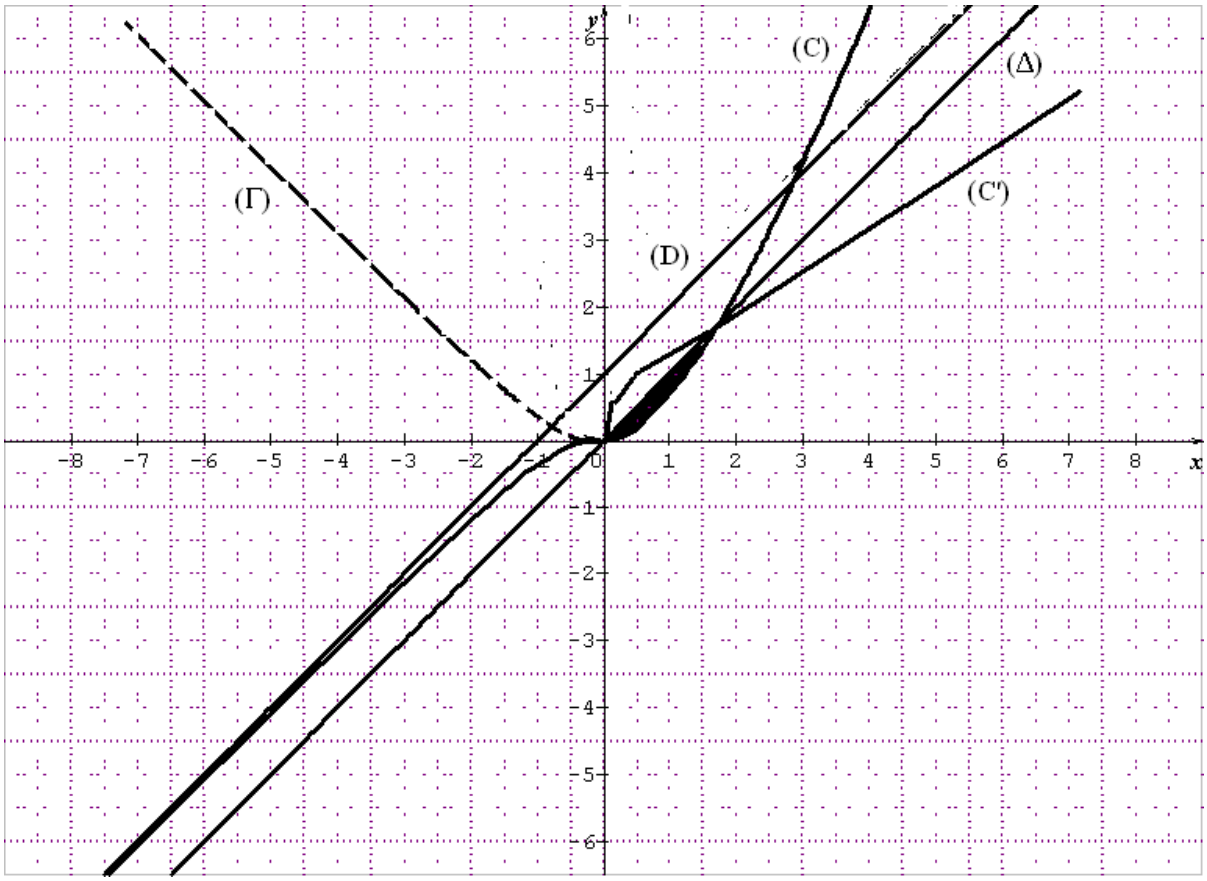
4) A' = 2A, donc A' = $2(e^2-4e+5)cm^2$.

**Partie C**

On tire que $\ln(-t) = \frac{1}{x}$ et $t = -e^{\frac{1}{x}}$ On en déduit que l'équation cartésienne de $(\Gamma)$ est $y = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -xe^{\frac{1}{x}}$.

L'équation est $y = -xe^{\frac{1}{x}}$ pour $x < 0$.

1) L'équation de la courbe $(\Gamma)$ peut s'écrire y = - f(x) pour $x < 0$.
2) On obtient la courbe $(\Gamma)$ en prenant le symétrique de la partie de la courbe (C) qui correspond à $x < 0$ par rapport l'axe des abscisses.
3) Voir courbe.



**Session Normale 2011 ; 2nd tour**

**PROPOSITION DE CORRIGE**

**EXERCICE 1**

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$ ; E(2 ; -2 ; 5).

3) $A = \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 9\sqrt{2}$ cm².

4) $V = \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 3\sqrt{2}\times 9\sqrt{2} = 54$ cm³

5) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AF} \neq \vec{0}$ donc le point F∉ (AB).

**EXERCICE 2**

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

2) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\-1\\-4\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\-12\\3\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix}$ ; E(2 ; -2 ; 5).

3) $A = \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 9\sqrt{2}$ cm².

4) $V = \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 3\sqrt{2}\times 9\sqrt{2} = 54$ cm³

5) $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AF} \neq \vec{0}$ donc le point F∉ (AB).

**PROBLEME**

**PARTIE A**

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2-\frac{2}{x}) \times \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - 1) = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}(2-\frac{2}{x}) \times \lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x - 1) = +\infty$

2) f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

f'(x) = $\frac{2}{x^2}(\ln x - 1) + \frac{1}{x}(2-\frac{2}{x}) = \frac{2\ln x - 2 + 2x - 2}{x^2} = \frac{2\ln x + 2x - 4}{x^2}$ .

3)

a) g'(x) = $\frac{2}{x} + 2 = \frac{2(1+x)}{x}$ . Pour x∈]0, + ∞[ g'(x) > 0 donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

Tableau de variation

$(\Gamma)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ car $\left|\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4) = +\infty\end{array}\right.$ .

| x | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|
| g'(x) | \|\| | + | |
| g(x) | \|\| | ↗ | +∞ |
| | \|\| | | |
| | \|\| - ∞ | | |

b) Sur l'intervalle]0, +∞] la fonction g est continue et strictement croissante. De plus g(1) × g(2) = -2ln2 qui est négatif. Il existe donc un unique réel $\alpha \in [1, 2]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

c) Sur] 0, $\alpha$[, g(x) < 0 et sur ]$\alpha$, +∞[, g(x) > 0.

4) a) f'(x) = $\frac{g(x)}{x^2}$ . f'(x) est donc du signe de g(x). f est donc croissante sur ]0, $\alpha$] et décroissante sur [$\alpha$, +∞[. Tableau de variation :

| x | 0 | | $\alpha$ | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | \|\| | - | 0 | + | |
| f(x) | +∞ | ↘ | f($\alpha$) | ↗ | +∞ |

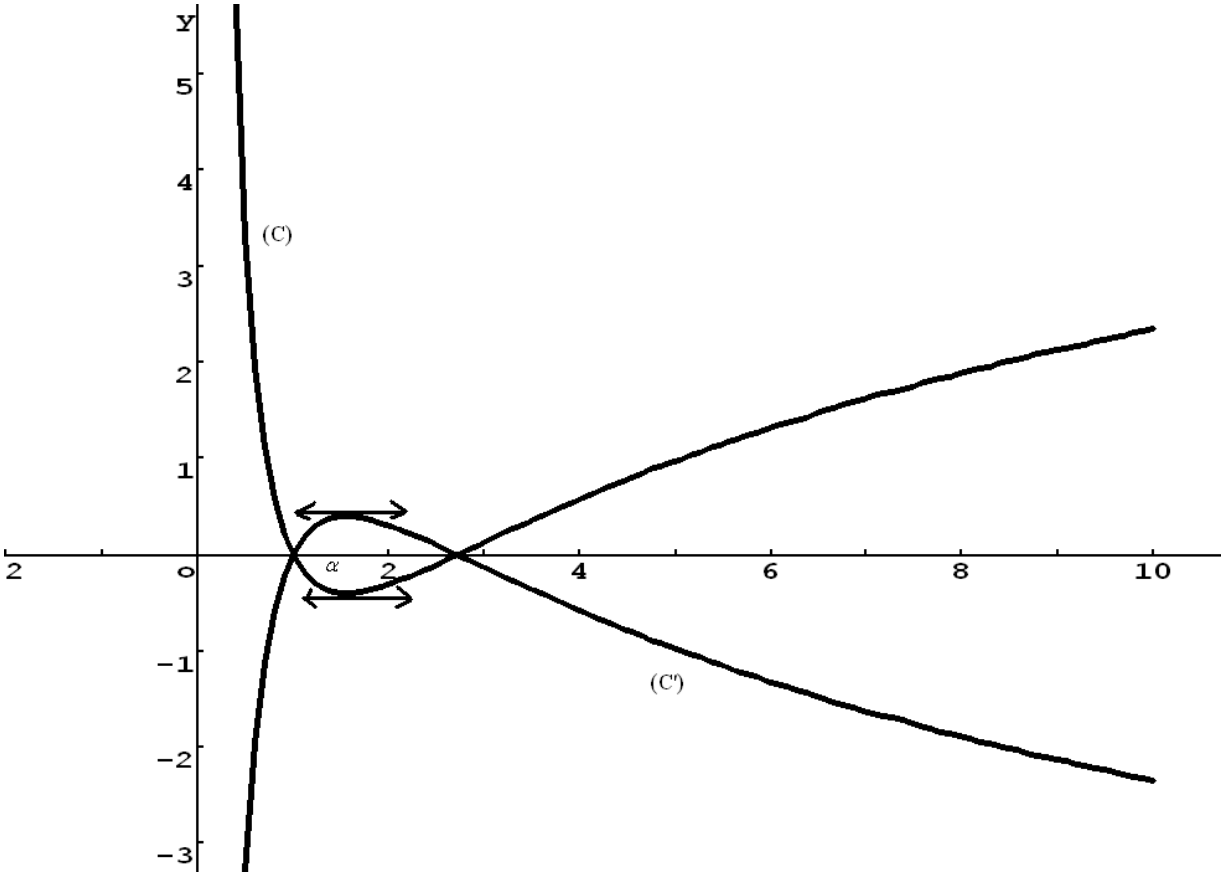
b) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 2 - \alpha$. On en déduit que $f(\alpha) = \left(2-\frac{2}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 1) = \frac{(2\alpha-2)(2-\alpha-1)}{\alpha} = \frac{-2(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

c) f(1) = f(e) = 0.

5) a) Sur]0, 1[∪]e, +∞[ f(x) > 0 ; sur ]1, e[ f(x) < 0.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}[\frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x^2} + \frac{2}{x^2}] = 0$ . La courbe de f a une direction parabolique d'axe y = 0.

c) Courbe de (C).




6) (C') s'obtient par symétrie orthogonale d'axe (x'x). (Voir figure).

**PARTIE B**

1) a) F est la primitive de f qui s'annule pour x = 1.

b) F'(x) = f(x). On en déduit que F est croissante sur ]0, 1] et sur [e, +∞[, et décroissante sur [1, e].

c) D'après 4) c) de la partie A, f(1) = f( e ) = 0, c'est-à-dire, F'(1) = F'( e ) = 0, donc les tangentes aux points d'abscisses 1 et e de $(\Gamma)$ sont parallèles à l'axe des abscisses.

2)

a) $\int_1^x \ln t dt = -x + x\ln x + 1$

b) En développant l'expression de f(x), on obtient f(x) = $2\ln x - \frac{2\ln x}{x} - 2 + \frac{2}{x} = 2\ln x - 2\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$

c) $\int_1^x f(t)dt = \int_1^x [2\ln t - \frac{2\ln t}{t} - 2 + \frac{2}{t}]dt = \left[-2t + 2t\ln t - (\ln t)^2 - 2t + 2\ln t\right]_1^x$

=- (lnx)² + 2xlnx + 2lnx – 4x + 4

3) A = $-2\int_1^e f(x)dx \times 4cm^2 = -8cm^2\left[F(x)\right]_1^e =$ -8F( e ) cm².

A= -8cm$^2$ (5-2e) = (16e – 40) cm$^2$.

**Session Normale 2012 ; 2nd tour**

**PROPOSITION DE CORRIGE**

**Exercice 1**

$P(Z)=Z^3-6Z^2+12Z-16$

**1. a)** Démonstration du fait que si $P(Z_0)=0$ alors $P(\overline{Z_0})=0$

Soit $Z_0$ un nombre complexe tel que $P(Z_0)=0$.

On a : $P(\overline{Z_0})=\overline{Z_0}^3-6\overline{Z_0}^2+12\overline{Z_0}-16=\overline{Z_0^3-6Z_0^2+12Z_0-16}=\overline{P(Z_0)}=\overline{0}=0$.

Donc, si $Z_0$ un nombre complexe tel que $P(Z_0)=0$, alors on a bien $P(\overline{Z_0})=0$.

***b)*** Calcul de $P(1+i\sqrt{3})$ et factorisation de $P(Z)$

$P(1+i\sqrt{3})=(1+i\sqrt{3})^3-6(1+i\sqrt{3})^2+12(1+i\sqrt{3})-16$

$P(1+i\sqrt{3})=(1+3i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}-9)-6(1+2i\sqrt{3}-3)+12(1+i\sqrt{3})-16$

$P(1+i\sqrt{3})=(1-9-6+18+12-16)+i(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-12\sqrt{3}+12\sqrt{3})$

$P(1+i\sqrt{3})=0+0\,i$

$P(1+i\sqrt{3})=0$

Comme $P(1+i\sqrt{3})=0$, alors $1+i\sqrt{3}$ est une racine de $P(Z)$. D'après **1. a)**,

$\overline{1+i\sqrt{3}}=1-i\sqrt{3}$ est également une racine de $P(Z)$. De plus, le coefficient de $Z^3$ est égal à 1 dans $P(Z)$. Par conséquent, il existe un nombre complexe $\alpha$ tel que pour tout $Z\in\mathbb{C}$, $P(Z)=(Z-(1+i\sqrt{3}))\times(Z-(1-i\sqrt{3}))\times(Z+\alpha)$. On obtient, par la méthode des coefficients indéterminés ou par la division euclidienne, $\alpha=-4$ ; ce qui donne

$P(Z)=(Z-(1+i\sqrt{3}))\times(Z-(1-i\sqrt{3}))\times(Z-4)$.

**c)** Déduction des solutions de l'équation $P(Z)=0$

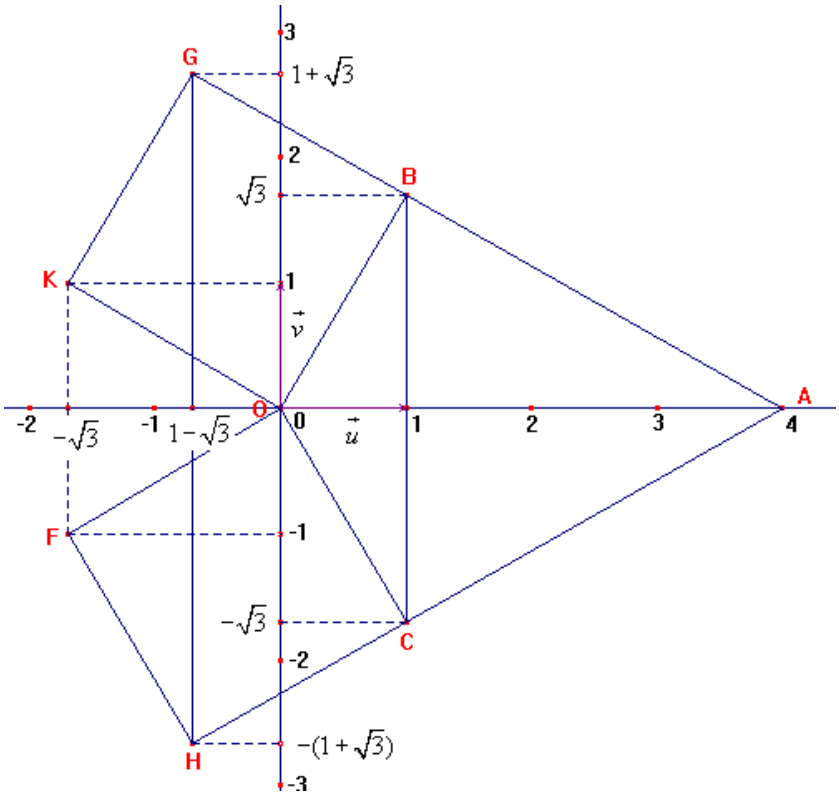
Comme $P(Z)=(Z-(1+i\sqrt{3}))\times(Z-(1-i\sqrt{3}))\times(Z-4)$, les solutions de l'équation $P(Z)=0$ sont les nombres complexes suivants : $1+i\sqrt{3},\ 1-i\sqrt{3},\ 4$.

$S=\{1+i\sqrt{3},1-i\sqrt{3},4\}$

**2.** $A,\ B$ *et* $C$ sont les points d'affixes respectives $a=4;\ b=1+i\sqrt{3}$ *et* $c=\overline{b}$ dans un repère

orthonormal $(O,u,v)$ du plan.

**a)** Figure




**b)** Nature exacte du triangle ABC

$$AB=|b-a|=|-3+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-3)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$AC=|c-a|=|-3-i\sqrt{3}|=\sqrt{(-3)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$BC=|c-b|=|-2i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

On a $AB=AC=BC$ ; donc le triangle ABC est un triangle équilatéral.

**3. a)** Détermination des affixes des points $F$ et $G$ .

$$Z_F=e^{i\frac{\pi}{3}}\times Z_K=(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\times(-\sqrt{3}+i)=-\sqrt{3}-i$$

$KG=OB$ ; donc $Z_G-Z_K=Z_B-Z_O$, ce qui donne

$$Z_G=Z_B+Z_K-Z_O=(1+i\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+i)=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$$

$Z_F=-\sqrt{3}-i$ et $Z_G=1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$

**b)** Démonstration du fait que les droites $(OC)$ et $(OF)$ sont perpendiculaires.

$(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OC}) = \arg(\frac{Z_C}{Z_F}) = \arg(\frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i}) = \arg i = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi$ , $k \in$ ; donc les vecteurs $OF$ et $OC$ sont orthogonaux. Par conséquent les droites $(OC)$ et $(OF)$ sont perpendiculaires.

***4.*** **a)** Calcul de l'affixe $Z_H$ de $H$ et démonstration du fait que $COFH$ est un carré.

Comme $COFH$ est un parallélogramme, alors $OC = FH$ ; ce qui donne $Z_C = Z_H - Z_F$

et donc $Z_H = Z_C + Z_F = (1-i\sqrt{3})+(-\sqrt{3}-i) = (1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3})$

$Z_H = 1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})$

$OC = |c| = |1-i\sqrt{3}| = 2$

$OF = |Z_F| = |-\sqrt{3}-i| = 2$

On a donc $OC = OF$ .

Les droites $(OC)$ et $(OF)$ sont perpendiculaires d'après **3. b)**.

$COFH$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux et perpendiculaires ; c'est un carré.

**b)** Nature du triangle $AGH$

$AG = |Z_G - Z_A| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$AH = |Z_H - Z_A| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

$GH = |Z_H - Z_G| = \sqrt{16+8\sqrt{3}}$

On a $AG = AH = GH$ , donc $AGH$ est un triangle équilatéral.

**Exercice 2**

**1.** Détermination des coordonnées du vecteur $u$ défini par $u = AB \wedge AC$ .

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ . Donc $u\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&0\\0&-2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&-2\\-2&-2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2&-2\\3&0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = u\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$

**2. a)** Le vecteur $u = AB \wedge AC$ est un vecteur normal du plan $(ABC)$. $H$ étant un point du

plan $(ABC)$ car projeté orthogonal de $O$ sur ce plan, alors les vecteurs $AH$ et $u$ sont orthogonaux.

Déduction du fait que $3a+2b-3c-6=0$

On a : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} a-2 \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Comme les vecteurs $AH$ et $u$ sont orthogonaux, alors $u.AH = 0$ ; ce qui donne $-6(a-2)-4b+6c=0$, conduisant après simplification à $3a+2b-3c-6=0$.

**b)** Les vecteurs $AH$ et $u$ sont orthogonaux. De même, les vecteurs $AH$ et $OH$ sont orthogonaux. Par conséquent, les vecteurs $OH$ et $u$ sont colinéaires.

Comme les vecteurs $OH$ et $u$ sont colinéaires, il existe alors un réel $t$ tel que $OH = tu$,

ce qui donne : $\begin{cases} a=-6t \\ b=-4t \\ c=6t \end{cases}$

**c)** Détermination de la valeur de $t$, puis des coordonnées de $H$.

En remplaçant $a,\ b\ et\ c$ par leurs expressions respectives en fonction de $t$ dans $3a+2b-3c-6=0$, on obtient $t=-\frac{3}{22}$ ; d'où $H(\frac{9}{11},\frac{6}{11},-\frac{9}{11})$.

**d)** Calcul de la distance du point $O$ au plan $(ABC)$.

$H$ étant le projeté orthogonal du point $O$ sur le plan $(ABC)$, la distance de $O$ à $(ABC)$ est égale à $OH$.

$$d(O,(ABC)) = OH = \sqrt{(\frac{9}{11})^2+(\frac{6}{11})^2+(-\frac{9}{11})^2} = \sqrt{\frac{198}{121}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}$$

**3.** Calcul du volume du tétraèdre de base $ABC$ et de sommet $O$.

Soit $V$ ce volume en unité de volume ; $V = \frac{1}{3}\times(aire\ du\ triangle\ (ABC)\times hauteur)$.

Or, $aire(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\Lambda\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{u}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(-4)^2+6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{88} = \sqrt{22}$ et

hauteur = $OH = \frac{3\sqrt{22}}{11}$ ; donc $V = \frac{1}{3}\times\sqrt{22}\times\frac{3\sqrt{22}}{11} = \frac{22}{11} = 2$.

$V = 2\ u.v$

**Problème**

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{-\ln|x|}{x}+x-2$

**Partie A**

La fonction $g$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=-x^2+1-\ln|x|$

**1.** Etude des variations de $g$ et tableau de variations

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+1)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\ln|x|)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} g(x)=+\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(-x^2+1)=1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}(-\ln|x|)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=+\infty$ *car* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x^2+1)=1$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-\ln|x|)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ *car* $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2+1)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln|x|)=-\infty$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $g'(x)=-2x-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{2x^2+1}{x}$

Pour tout réel $x<0$, $g'(x)>0$ ; donc $g$ est strictement croissante sur ]- ∞,0[

Pour tout réel $x>0$, $g'(x)<0$ ; donc $g$ est strictement décroissante sur ]0,+∞[

Tableau de variations de $g$

| $x$ | -∞ | 0 | +∞ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | ‖ | - |
| $g(x)$ | -∞ ↗ +∞ | ‖ | +∞ ↘ -∞ |

**2.** Calculs de $g(-1)$ *et* $g(1)$ et déduction du signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$.

$g(-1)=0$ *et* $g(1)=0$ ; Par suite, on déduit du tableau de variations de $g$ ce qui suit :

Pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $g(x)<0$ et pour tout $x\in]-1,0[\cup]0,1[$, $g(x)>0$

**Partie B**

**1.** Calcul des limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2\right)=-\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0 \; et \; \lim_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2\right)=-\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{-\ln|x|}{x}=-\infty \; et \; \lim_{\substack{x\to0\\x<0}}(x-2)=-2$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2\right)=+\infty \; car \; \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-\ln|x|}{x}=+\infty \; et \; \lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-2)=-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2\right)=+\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \; et \; \lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty$ , alors la droite d'équation $x=0$ (axe des ordonnées) est une asymptote verticale pour la courbe $(C)$.

**2. a)** Démonstration du fait que la droite $(D): y=x-2$ est asymptote à $(C)$.

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-2))=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{(-x)}=0 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-2))=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln|x|}{x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$ ; donc la droite $(D)$ d'équation $y=x-2$ est bien une asymptote pour $(C)$.

**b)** Etude des positions relatives de $(C)$ par rapport à $(D)$.

$f(x)-(x-2)=-\dfrac{\ln|x|}{x}$ ; par conséquent, on a :

$(C)\cap(D)=\{(-1,-3);(1,-1)\}$

Pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]0,1[$ , $(f(x)-(x-2))>0$ ; donc $(C)$ est au dessus de $(D)$

Pour tout $x\in]-1,0[\cup]1,+\infty[$ , $(f(x)-(x-2))<0$ ; donc $(C)$ est en dessous de $(D)$

**3. a)** Calcul de $f'(x)$, en fonction de $g(x)$, puis déduction du sens de variation de $f$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel non nul $x$,

$$f'(x)=\frac{-1+\ln|x|}{x^2}+1=\frac{x^2-1+\ln|x|}{x^2}=-\frac{(-x^2+1-\ln|x|)}{x^2}=-\frac{g(x)}{x^2}$$

Pour tout réel non nul $x$, $x^2>0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de (- $g(x)$ ). On obtient alors d'après la question **2.) de la partie A** ce qui suit :

$f'(-1) = f'(1) = 0$

Pour tout $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$, $f'(x) > 0$ ; donc $f$ est strictement croissante sur chacun des intervalles ]-∞, -1] et [1, +∞[

Pour tout $x \in ]-1, 0[ \cup ]0,1[$, $f'(x) < 0$ ; donc $f$ est strictement décroissante sur chacun des intervalles [-1, 0[ et ]0, 1].

**b)** Tableau de variations de $f$

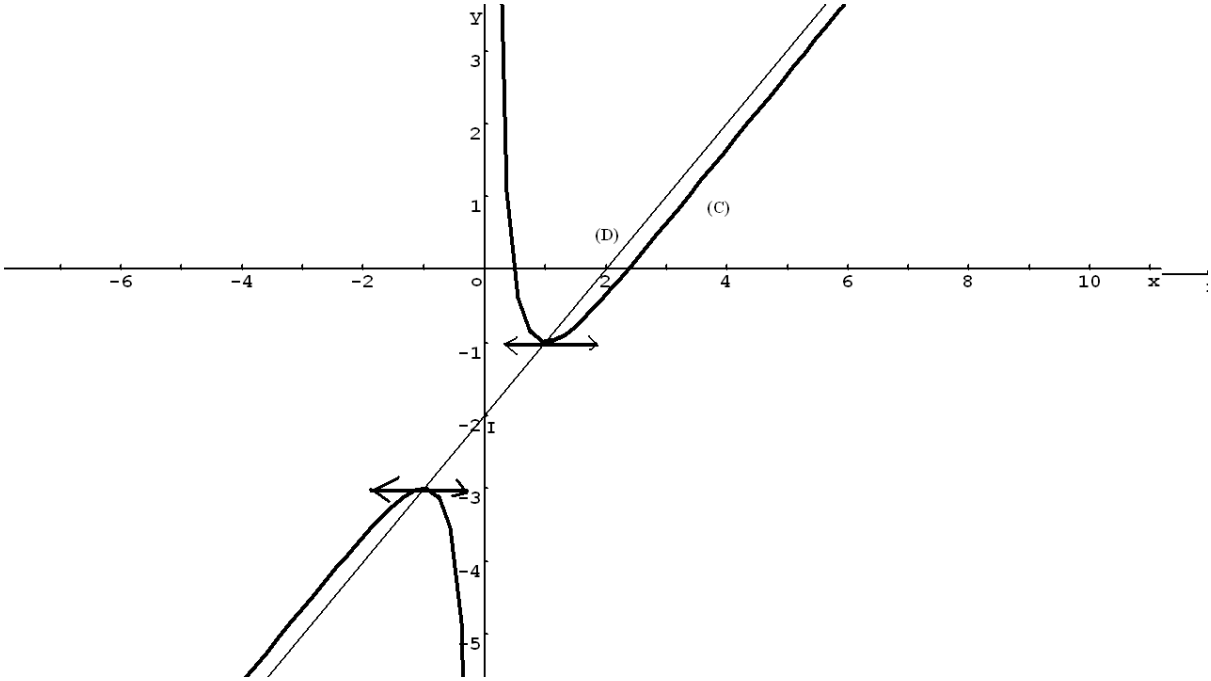
| $x$ | -∞ | -1 | 0 | 1 | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | - | 0 + |
| $f(x)$ | -∞ ↗ | -3 | ↘ +∞ | +∞ ↘ | -1 ↗ +∞ |

**4. a)** Démonstration du fait que $I$, point d'intersection des asymptotes, est un centre de symétrie pour la courbe $(C)$.

Les asymptotes ayant pour équations $x = 0$ *et* $y = x - 2$, on obtient alors $I(0,-2)$.

Soit $M$ un point de $(C)$, de coordonnées $(x, y)$ dans le repère $(O,i,j)$ et $(X, Y)$ dans le repère $(I,i,j)$. On a, d'après la relation de Chasles, $OM = OI + IM$ ; ce qui donne $x = X$ et $y = -2 + Y$. Par suite, $y = \frac{-\ln|x|}{x} + x - 2$ équivaut à $-2 + Y = \frac{-\ln|X|}{X} + X - 2$ ou encore $Y = X - \frac{\ln|X|}{X}$. La fonction $F : X \mapsto X - \frac{\ln|X|}{X}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $X \in \mathbb{R}^*$, $-X \in \mathbb{R}^*$, $F(-X) = -F(X)$ ; F est impaire et donc $I(0,-2)$ est bien un centre de symétrie de $(C)$.

**b)** Construction de $(C)$, ainsi que des asymptotes.




**5.** Discussion graphique du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

Graphiquement, l'équation $f(x) = m$ est l'équation aux abscisses des points d'intersection de $(C)$ et la droite d'équation $y = m$.

Si $m \in ]-\infty, -3[ \cup ]-1, +\infty[$, $(C)$ et la droite d'équation $y = m$ ont deux points communs, donc l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions

Si $m \in ]-3, -1[$, $(C)$ et la droite d'équation $y = m$ n'ont pas de point commun, donc l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solutions

Si $m \in \{-3, -1\}$, $(C)$ et la droite d'équation $y = m$ ont un seul point commun, donc l'équation $f(x) = m$ admet une seule solution ( $x = -1 \; si \; m = -3 \; et \; x = 1 \; si \; m = -1$).

**Partie C**

**1. a)** Calcul de $A(\alpha)$ en fonction de $\alpha$

$A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}|f(x)-(x-2)|dx=\int_{-1}^{\alpha}[(x-2)-f(x)]dx$ car $(D): y = x - 2$ est au-dessus de $(C)$ sur $[-1,\alpha]$ ; donc $A(\alpha)=\int_{-1}^{\alpha}\frac{\ln|x|}{x}dx=[\frac{1}{2}(\ln|x|)^2]_{-1}^{\alpha}=\frac{1}{2}(\ln\alpha))^2=\frac{1}{2}(\ln(-\alpha))^2$

$A(\alpha)=\frac{1}{2}(\ln(-\alpha))^2$ en unités d'aire et $A(\alpha) = 2(\ln(-\alpha))^2$ cm²

**b)** Calcul de $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} A(\alpha)$

$\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} A(\alpha)=\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}}\frac{1}{2}(\ln|\alpha|)^2=+\infty$

**2. a)** Calcul de $u_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel non nul.

$u_n=\int_1^n f(x)dx=\int_1^n(\frac{-\ln|x|}{x}+x-2)dx=[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{1}{2}x^2-2x]_1^n=-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n+\frac{3}{2}$

$u_n=-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n+\frac{3}{2}$

**b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}(\ln n)^2+\frac{1}{2}n^2-2n+\frac{3}{2})=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{2}n^2\times(-(\frac{\ln n}{n})^2+1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}))=+\infty$ car

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-(\frac{\ln n}{n})^2+1-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2})=1$ à cause du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ d'une part et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2})=0$ d'autre part.

La suite $(u_n)$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

**EXERCICE 1**

1) Soit Ω l'univers des éventualités. Card(Ω) = $C_{10}^2$ = 45

P(A)= $\frac{\text{Card(A)}}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_4^2}{45} = \frac{6}{45}$; p(B) = $\frac{C_6^2}{45} = \frac{15}{45}$ ; p(C) = $\frac{C_4^1 \times C_6^1}{45} = \frac{24}{45}$.

2)

a) Loi de probabilité de X

Les valeurs prises par X sont 2, 6 et 10. P(X = 2) = $\frac{C_a^2}{45} = \frac{a(a-1)}{90}$; p(X = 6) = $\frac{C_a^1 \times C_b^1}{45} = \frac{ab}{45} = \frac{a(10-a)}{45}$ ;

p(X = 10) = $\frac{C_b^2}{45} = \frac{b(b-1)}{90} = \frac{(10-a)(9-a)}{90}$. On remarquera que pour a = 1 p(X = 2) = 0 et que pour a = 9 p(X = 10) = 0. On en déduit :

| $x_i$ | 2 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{a(a-1)}{90}$ | $\frac{a(10-a)}{45}$ | $\frac{(9-a)(10-a)}{90}$ |

b) E(X) = $2 \times \frac{a(a-1)}{90} + 6 \times \frac{a(10-a)}{45} + 10 \times \frac{(9-a)(10-a)}{90} = \frac{450-36a}{45} = 10 - \frac{4a}{5}$.

c) $6 < E(X) < 8 \Leftrightarrow 6 < 10 - \frac{4a}{5} < 8$. Ce qui donne $2 < \frac{4a}{5} < 4$. $a \in ]2{,}5 ; 5[$. $a \in \{3, 4\}$.

**EXERCICE 2**

1)

a) $(1 + i)^3 – (7 + i)(1 + i)^2 + 2(8 + 3i)(1 + i) – 10(1 + i) =$
$(-i – 3 + 3i + 1) – (14i – 2) + (10 + 22i) - 10 – 10i = 0$
Donc $z_0 = 1 + I$ est solution de l'équation (E).

a) Résolution de l'équation

Le complexe $z_0$ est solution de (E), donc $z^3 – (7 + i)z^2 + 2(8 + 3i)z – 10(1 + i) = [z-(1 + i)](az^2 + bz + c)$ où a, b et c sont des nombres complexes. On trouve par identification a = 1, b = -6 , c = 10.

Considérons donc l'équation $z^2 - 6z + 10 = 0$. $\Delta = 36 – 40 = -4 = 4i^2 = (2i)^2$.

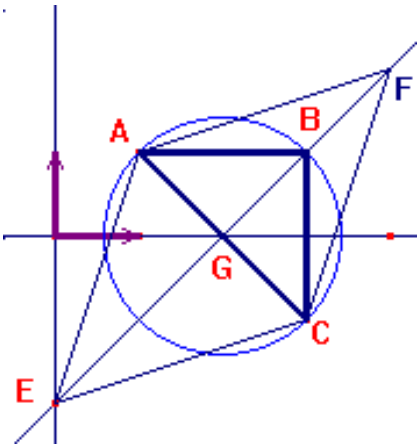
On trouve z' = 3 + i et z" = 3 – i. $S_\forall$ = {1 + i ; 3 + i ; 3 – i}.

2)

a) $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1+i-3-i}{3-i-3-i} = \frac{-2}{-2i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = -i \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BA}{BC} = 1 \\ (\vec{BC}, \vec{BA}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$ ABC est donc un triangle rectangle et isocèle de sommet B.

c)




d) ($\Gamma$) est le cercle qui a pour centre le milieu G de l'hypoténuse [AC] , et pour rayon la moitié de AC. G(2i) et r = $2\sqrt{2}$.

3) Bnn

a) ($\Delta$) est l'ensemble des points équidistants de A et C. C'est la médiatrice du segment [AC].

b) FA = $|3+i| = \sqrt{10}$ ; FC = $|1+3i| = \sqrt{10}$. FA = FC donc F appartient à la médiatrice ($\Delta$) de [AC].

c) Le point étant sur l'axe des ordonnées, il a pour affixe iα. EA = EB $\Leftrightarrow |1+i-i\alpha| = |3-i-i\alpha|$.

$1 + (1-\alpha)^2 = 9 + (1+\alpha)^2$. Soit $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = \alpha^2 + 2\alpha +$ 10.L'affixe de E est – 2i.

4) Nature exacte du quadrilatère CEAF.

EA = $|1+i+2i| = \sqrt{10}$ =AF. Donc CEAF est un losange.

**PROBLEME**

**PARTIE A**

1) $v(x) = axe^{-2x} + 2$ ; $v'(x) = ae^{-2x} - 2axe^{-2x}$. $\frac{1}{2}y' + y = \frac{a-2ax}{2}e^{-2x} + axe^{-2x} + 2 = \frac{a-2ax+2ax}{2}e^{-2x} + 2$.

La fonction v est solution de (E) si $\frac{a}{2} = 3$. On trouve $a = 6$.

2) $\frac{1}{2}y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ ou $\frac{y'}{y} = -2$. Cette équation donne comme solution générale $y = Ae^{-2x}$ où A est un réel quelconque

3)

a) u est solution de (E) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}u' + u = 3e^{-2x} + 2$. Par ailleurs $\frac{1}{2}v' + v = 3e^{-2x} + 2$ .

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}u' + u = \frac{1}{2}v' + v$. Cette égalité peut se mettre sous la forme :

$\frac{1}{2}(v'-u') + (v-u) = 0$. D'où le résultat.

b) Les solutions de (E) sont telles que $-u(x) + v(x) = Ae^{-2x}$où A est un réel quelconque. Donc $u(x) = 6xe^{-2x} + 2 - Ae^{-2x}$.

4) $h(x) = (6x - A)e^{-2x} + 2$. $h(0) = 0 \Leftrightarrow A = 2$. $h(x) = 6x - 2)e^{2x} + 2$.

**PARTIE B**

**1) Etude d'une fonction auxiliaire**

1)

a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1 + x + \ln x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 + x + \ln x) = +\infty$.

b) $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Sur ]0,+∞[, g'(x) est strictement positif. La fonction g est croissante sur ]0,+∞[.

c)

| x | 0 | | +∞ |
|---|---|---|---|
| g'(x) | \|\| | + | |
| g(x) | \|\| | ↗ | +∞ |

- ∞

**2)** La fonction g est continue et strictement croissante su]0,+∞[. Elle réalise donc une bijection de ]0, +∞[ sur IR. On en déduit que 0 possède un antécédent unique α dans] 0, -∞[

g(0,2) = -0,4 ; g(0,3) = 0,09. g(0,2) × g(0,3) < 0. Donc α∈]0,2 ; 0,3[.

**3)** La fonction g étant strictement croissante avec g(α) = 0. Donc, ∀x, x <α ⇔g(x) < g(α) ou encore g(x) < 0 ; et ∀x, x > α ⇔ g(x) > g(α) ou g(x) > 0. On en conclut que : g(x) est négatif sur ]0, α[ et g(x) est positif sur ]α, +∞[.

## II- Etude et représentation graphique de f

1) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ ; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{1+x} = 0$ ; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ ; f est continue en 0.

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1+x} - 0}{x} = -\infty$ $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2(3x-1)e^{-2x}}{x} = 10$ ;

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1+x} - 0}{x} = -\infty$ .

La fonction f est donc dérivable à gauche en 0, mais n'est pas dérivable à droite. F n'est pas dérivable en 0. La courbe ($C_f$) de f admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et une demi-tangente verticale à droite.

3) $\lim_{x\to -\infty} 2(3x-1)e^{-2x} + 2 = -\infty$ ; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x \ln x}{1+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+x} \times \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

4) $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x/\ln x}{x/(1+x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{1+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}{\lim_{x\to +\infty} \frac{1+x}{x}} = 0$.

La courbe ($C_f$) de f possède une branche parabolique de direction (Ox).

5) Pour tout x ∈]0 , +∞ [, f'(x) = [6 -4(3x-1)]$e^{-2x}$ = (10 -12x)$e^{-2x}$

Pour tout x ∈]0, +∞[, f'(x) = $\frac{(1+x)(\ln x+1) - x\ln x}{(1+x)^2} = \frac{\ln x+1+x\ln x+x-\ln x}{(1+x)^2}$ =

$\frac{1+\ln x+x}{(1+x)^2} = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$.

Pour tout x ∈]-∞, 0], le signe de f'(x) dépend du signe de 10-12x qui est positif pour x $\leq \frac{5}{6}$.

Donc f'(x) > 0 sur ]-∞, 0]. f est croissante sur cet intervalle.

Pour x ∈ ]0, +∞[, f'(x) = $\frac{g(x)}{(1+x)^2}$. Le signe de f' est celui de g(x). D'après le B 3) on peut dire que : ∀x∈]0, α[, f'(x) < 0 et f est décroissante ; ∀x∈]α, +∞[, f'(x) > 0 et donc f est croissante.

6) f(α) = $\frac{\alpha \ln \alpha}{1+\alpha}$ ; comme g(α) = 0, nous avons lnα = -1 –α. f(α) = $\frac{\alpha(-1-\alpha)}{1+\alpha} = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{1+\alpha}$ = - α.

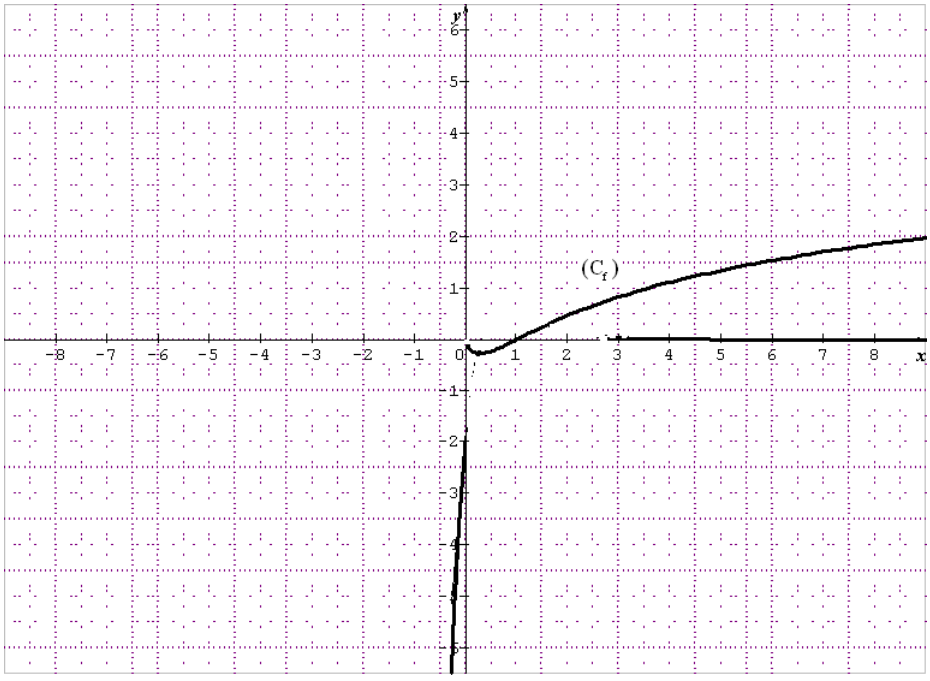
Le point d'intersection de ($C_f$) avec l'axe (Ox) est tel que f(x) = 0. f(0) = 0 ;

par ailleurs $\frac{x \ln x}{x}$ = 0 implique que lnx = 0, soit x = 1. Il y a donc deux points d'intersection : O(0,0) et le point de coordonnées (1,0).

7)

| x | -∞ | | 0 | | α | | + ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 1\|0 | -∞ \| | - | 0 | + |
| f(x) | -∞ | ↗ | 0 | ↘ | -α | ↗ | + ∞ |

8)




**PARTIE C**

1) F'(x) =(-2ax-2b+a)$e^{-2x}$ = [-2ax – (2b – a)]$e^{-2x}$ . F'(x) = (3x - 1)$e^{-2x}$⇔ -2a = 3 et 2b – a = 1. On trouve a = -$\frac{3}{2}$ et b = -$\frac{1}{4}$ . Donc F(x) = $-\frac{1}{2}(3x+\frac{1}{2})e^{-2x}$ .

2) $A(\lambda) = -\int_{\lambda}^{0} f(x)dx$ u.a $= \left[2F(x) + 2x\right]_{0}^{\lambda}$ u.a = ([ - (3λ+ $\frac{1}{2}$ )$e^{-2\lambda}$ + 2λ] + $\frac{1}{2}$ ) × 16 cm² = 8 – (48λ+ 8)$e^{-2\lambda}$ + 32λ = 8 + 32λ - 8(6λ + 1)$e^{-2\lambda}$

3) $\lim [8 + 32\lambda - 8(6\lambda + 1)e^{-2\lambda}] = \lim [\frac{8 + 32\lambda}{e^{-2\lambda}} - 8(6\lambda + 1)]e^{-2\lambda}$

$= \left[\lim_{\lambda \to -\infty} \frac{8+32\lambda}{e^{-2\lambda}} - \lim_{x \to -\infty} 8(6\lambda+1)\right] \times \lim_{\lambda \to -\infty} e^{-2\lambda} = +\infty .$

**BACCALAURÉAT**
**SESSION 2022**

**Durée : 4 H**
**Coefficient : 4**

# MATHÉMATIQUES

## SÉRIE D

***Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3, 3 sur 3 et une feuille annexe à rendre avec la copie. Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.***
*Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.*

**EXERCICE 1** **(2 points)**

On donne les groupes de mots (la droite de régression, des primitives, une bijection, fonction dérivable, extremum relatif) et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous :

| N° | Phrases incomplètes |
|---|---|
| 1. | Toute fonction $f$ continue et strictement croissante sur un intervalle K définit ..... de K sur $f$(K). |
| 2. | Soit (X, Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y et telle que V(X) ≠ 0. Une équation de ..... de Y en X est $y = ax + b$ où $a = \frac{cov(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y. |
| 3. | Toute fonction continue sur un intervalle I admet ..... sur I. |
| 4. | Toute ..... en un point $a$ est continue en $a$. |

Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que la phrase soit vraie.

**EXERCICE 2** **(2 points)**

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des colonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

| N° | Enoncés | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| 1. | Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-2x+5}$ est ... | $x \mapsto -2e^{-2x+5}$. | $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$. | $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$. |
| 2. | Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont de la forme ... | $x \mapsto ke^{2x}+k'e^{-2x}$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. | $x \mapsto kcos(2x) + k'\sin(2x)$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. | $x \mapsto ke^{4x}+k'e^{-4x}$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. |
| 3. | $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - e^x)$ est égale à ... | $-\infty$. | $+\infty$. | 0. |
| 4. | La forme exponentielle du nombre complexe $-1 + i$ est ... | $2e^{i\frac{\pi}{4}}$. | $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. | $\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. |

**EXERCICE 3** **(3 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
A, B, C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\sqrt{2}$ ; $1+i$ ; $1-i$ ; $3+i$ et 1.

**1.** Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.

**2.** Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe : $z' = (1+i)z + 1 - 3i$.
*a*) Justifie que : S(D) = D et S(B) = C.
*b*) Détermine les éléments caractéristiques de S.
*c*) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre [BD] par S.

**EXERCICE 4** **(4 points)**

On donne la fonction numérique $f$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{5x+2}{4x+7}$.
(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la suite $(u_n)$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

**1.** Sur la feuille annexe à rendre avec la copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$, les quatre premiers termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$ de la suite $(u_n)$ sur l'axe des abscisses.

**2.** On admet que la fonction $f$ est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.
*a*) Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$.
*b*) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$.
*c*) Déduis de 2.*a*) et 2.*b*) que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**3.** *a*) Déduis de 2.*a*) et 2.*c*) que la suite $(u_n)$ est convergente.
*b*) Justifie que la limite de la suite $(u_n)$ est égale à $\frac{1}{2}$.

**EXERCICE 5** **(4 points)**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln x - 2x, \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.
On note $(C_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

**1.** *a*) Justifie que $f$ est continue en 0.
*b*) Justifie que : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$.
*c*) Interprète graphiquement le résultat de 1. *b*).

**2.** On admet que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
Interprète graphiquement ces résultats.

**3.** *a*) On suppose que $f$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Justifie que : $\forall\, x \in ]0 ; +\infty[, f'(x) = -1 + \ln x$.
*b*) Étudie les variations de $f$.
*c*) Dresse le tableau de variation de $f$.

**4.** Trace la courbe $(C_f)$.

*(Tu pourras tracer l'axe des abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).*

**5.** *a*) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que

$K = \int_1^2 xlnxdx$ est égale à $2ln2 - \frac{3}{4}$.

*b*) On admet que, sur [1 ; 2], $(C_f)$ est au-dessous de l'axe des abscisses (OI).

Calcule l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe $(C_f)$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

**EXERCICE 6** **(5 points)**

Lors de la kermesse en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse.
Le jeu comprend quatre épreuves.
Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 100 F CFA.
Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m.
Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.
On suppose que les 4 lancers sont indépendants.
À chaque épreuve :

- si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets.
- s'il ne réussit pas à loger la boule dans le trou, il ne gagne aucun ticket.

On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.
Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2 500 F CFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.
Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2 500 F CFA.
À l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.

CORRIGE

siriikiyeo548@gmail.com

*Écrit par siriki yeo*