Fomesoutra.com
ça soutra!

collection
IRMA

MATHEMATIQUES
TERMINALE
C.E.

ANALYSE






CEDIC
NEA

Scanné avec CamScanner

Collection IRMA
sous la direction de Saliou TOURÉ
(Professeur à l'Université d'Abidjan
Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques)

BENGALY
KALIFA

Mathématiques

en classes de Terminales C et E

TOME 1

ANALYSE

Françoise VALETTE
François-Gilles CARPENTIER
Gilles VAUDELIN

Scanné avec CamScanner

ISBN : 2-7124-0382-2
2-7236-1410-7

© Cedic/Nathan — Les Nouvelles Editions Africaines — Abidjan 1987

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

N° d'éditeur : 602

Scanné avec CamScanner

SOMMAIRE

1. Fonction logarithme népérien
1) Rappels sur les primitives 1
2) Définition de la fonction ln 3
3) Propriété fondamentale 5
4) Variations et représentation graphique de ln 7
5) Fonction logarithme décimal 14
Thème d'étude 16
Exercices 18

2. Dérivabilité d'une fonction numérique
1) Étude d'une fonction numérique 22
2) Complément à la dérivation 33
Exercices 58

3. Extensions de la notion de limite. Fonctions continues sur un intervalle
1) Extensions de la notion de limite 63
2) Branches infinies d'une courbe d'équation $y = f(x)$ 85
3) Propriétés des fonctions continues sur un intervalle; fonctions réciproques 96
4) Fonctions puissances d'exposant rationnel 114
Thème d'étude 121
Exercices 124

4. Suites numériques. Convergence. Divergence
1) Rappels des notions de base 133
2) Suites convergentes 136
3) Suites divergentes de limite infinie 140
4) Suites numériques récurrentes 144
5) Comparaison des suites de terme général a^n et n^α 151
Thèmes d'étude 154
Exercices 158

5. Fonction exponentielle népérienne
1) Définition 166
2) Étude de la fonction exponentielle népérienne 170
3) Applications 175
Exercices 192

6. Aires de surfaces planes. Calcul intégral
1) Aires de surfaces planes 201
2) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle 205
3) Calcul intégral 211
4) Retour au calcul d'aires; interprétation graphique d'une intégrale 217
5) Fonctions de la forme : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ 224
6) Valeur approchée d'une intégrale 227
Activité 235
Exercices 239

Scanné avec CamScanner

Développements limités
duction 249
tés préliminaires 253
tions 262
4) Développements limités en 0 des fonctions usuelles 266
5) Applications 271
Exercices 283

8. Équations différentielles
1) Introduction 293
2) Définitions 294
3) Équations différentielles du premier ordre de la forme : $y' = \lambda y$ 296
4) Équations différentielles du second ordre de la forme : $y'' + \lambda y = 0$ 300
Exercices 306

9. Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$
1) Définitions 311
2) Étude d'une courbe donnée par une représentation paramétrique 315
3) Exemples et applications 334
4) Vocabulaire de la cinématique 344
Exercices 349

Index 358

Scanné avec CamScanner

PLAN DE L'OUVRAGE

ANALYSE

- Fonction logarithme népérien
- Dérivabilité d'une fonction numérique
- Extensions de la notion de limite. Fonctions continues sur un intervalle
- Suites numériques. Convergence. Divergence
- Fonction exponentielle népérienne
- Aires de surfaces planes. Calcul intégral
- Développements limités
- Équations différentielles
- Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

- Nombres entiers (1)
- Nombres complexes
- Rappels et compléments de géométrie
- Barycentres
- Applications affines
- Applications affines et activités géométriques
- Systèmes linéaires
- Isométries et similitudes dans le plan
- Coniques
- Géométrie descriptive (2)

(1) Ce chapitre ne figure pas au programme de Terminale E.
(2) Ce chapitre ne figure pas au programme de Terminale C.

Scanné avec CamScanner

REMERCIEMENTS

Il nous est agréable de remercier ici les personnes suivantes :

Mesdames : GUYON, Inspectrice de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire,
MARUCCO, professeur à l'ENS,
OUEDRAOGO-HADDAD, chercheur à l'IRMA.

Messieurs : N'DA, animateur pédagogique,
PIERROT, conseiller pédagogique,
PIL, chercheur à l'IRMA,
VINEL, assistant de Mathématiques à la Faculté des Sciences,

dont les suggestions et les critiques nous ont été précieuses.
Nos remerciements vont aussi à M. Daniel BOUTTE, Inspecteur Pédagogique qui, malgré ses charges, a bien voulu lire notre manuscrit et nous faire bénéficier de sa grande expérience.
Enfin, nous remercions particulièrement Madame Monique BRETON, chercheur à l'IRMA, qui a relu le manuscrit avec une scrupuleuse et vigilante attention et nous a fait profiter de ses remarques pertinentes.

Les auteurs

Scanné avec CamScanner

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du Ministère de l'Éduction Nationale et du Ministère de la Recherche Scientifique de Côte-d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain.

Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.

A travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Terminales C et E, se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Terminales C et E, à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.

- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.

- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.

L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

SALIOU TOURE

Scanné avec CamScanner

PROGRAMMES DE TERMINALES C ET E

9 heures hebdomadaires

ARITHMÉTIQUE (Ne concerne que les élèves de Terminale C)

— Anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs; multiples d'un entier relatif; notation $n\mathbb{Z}$. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
— Division euclidienne dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Numération décimale et binaire.
— Congruence modulo n. Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— Nombres premiers : si p est premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
— Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers; existence et unicité.
— Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple.

NOMBRES COMPLEXES

— Le corps des nombres complexes.
Bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$: $(a, b) \longmapsto a + ib$. Représentation géométrique d'un nombre complexe : affixe d'un point, d'un vecteur. Nombres complexes conjugués. Module; inégalité triangulaire. Module du produit. Nombres complexes de module 1. Argument d'un nombre complexe non nul. Notation $re^{i\theta}$. Relation $e^{i\varphi}e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')}$.
— Compléments de trigonométrie. Formule de Moivre. Exemples de linéarisation de polynômes trigonométriques. Conversion de produits en sommes et de sommes en produits. Réduction de $a \sin x + b \cos x$.
— Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe; interprétation géométrique. Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré.

SUITES NUMÉRIQUES

— Propriété fondamentale (admise) : toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.
— La composée d'une suite de limite l par une fonction f continue en l admet $f(l)$ pour limite.
— Suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$); comportement d'une suite somme d'une suite bornée et d'une suite divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$); comportement d'une suite produit d'une suite admettant un minorant strictement positif et d'une suite divergeant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
— Étude des suites $n \longmapsto a^n$ et $n \longmapsto n^n$. Croissance comparée.
— Suites récurrentes : exemples d'étude de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

FONCTIONS NUMÉRIQUES

— Fonction logarithme népérien : $x \longmapsto \ln x$; logarithme décimal; définition et utilisation en calcul numérique.
— Fonction continue sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues. Composée d'une fonction de limite l et d'une fonction continue en l.
— Si une fonction est croissante sur $]a, b[$ $(a < b)$ et si elle est majorée alors elle admet une limite à gauche en b (admis).
— Fonction tendant vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Comportement d'une fonction somme d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Comportement d'une fonction produit d'une fonction admettant un minorant strictement positif et d'une fonction qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Scanné avec CamScanner

— Propriétés globales des fonctions continues sur un intervalle (fermé ou non, borné ou non). L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (admis).
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment (admis).
Une application continue et strictement monotone sur un intervalle admet une application réciproque continue et strictement monotone sur l'intervalle image (continuité de la réciproque admise). Applications : $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

— Compléments sur la dérivation : nombre dérivé et fonction dérivée d'une fonction composée (admis).
Existence de la dérivée de la fonction réciproque (admis); formule.
Notation $\frac{df}{dx}$ et $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Applications : $x \longmapsto x^r$ où $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}^+$.

— Fonction exponentielle népérienne : $x \longmapsto \exp(x)$; notation e^x.
Fonctions $x \longmapsto a^x$ (définies par $e^{x \ln a}$) pour a élément de $\mathbb{R}^{+*}$.
Croissance comparée des fonctions $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ et $x \longmapsto e^x$.

— Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^\alpha \ln x$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \exp(x)$.

— Exemples de dérivées de fonctions composées du type

$$\ln \circ f, \quad \exp \circ f, \quad x \longmapsto [f(x)]^\alpha.$$

— Compléments sur l'étude des variations d'une fonction numérique; représentation graphique, applications à la résolution d'équations et d'inéquations : signe de la dérivée et sens de variations (admis), extrema; recherche des directions asymptotiques, des asymptotes; position de la courbe par rapport aux asymptotes pour les grandes valeurs de $|x|$.

— Étude locale d'une fonction : exemples de développements limités en 0 (on se bornera à en donner la définition); développements limités à l'ordre 3, en 0, des fonctions

$$x \longmapsto \cos x \qquad x \longmapsto \sin x \qquad x \longmapsto e^x$$
$$x \longmapsto \ln(1+x) \qquad x \longmapsto \sqrt{1+x}.$$

Activités : Position d'une courbe représentant une fonction par rapport à sa tangente; points d'inflexion (on se bornera au cas où $f''(x_0)=0$ et $f'''(x_0) \neq 0$).

INTÉGRATION

— Intégrale d'une fonction continue. Il est recommandé d'adopter la définition suivante : soit f une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On a admis en classe de Première que f possède des primitives sur I et que deux quelconques d'entre elles diffèrent d'une constante. Il résulte que, pour tout (a, b) de $I \times I$, le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F; on le note $\int_a^b f(t)\,dt$ et on l'appelle « intégrale » de a à b, de la fonction continue f.

En d'autres termes : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est donc l'unique primitive de f sur I qui prend la valeur 0 en a. On traitera les questions suivantes :
- relation de Chasles,
- linéarité par rapport aux fonctions,
- positivité : si $a \leqslant b$ et $f \geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$,

Scanné avec CamScanner

- inégalité de la moyenne, valeur moyenne,
- changements de variables affines,
- intégration par parties,
- exemple d'étude d'une fonction de la forme $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ où f n'a pas de primitive explicitée,
- valeur approchée d'une intégrale : méthode des rectangles avec majoration du reste,
- application de l'intégrale au calcul de l'aire d'une partie du plan définie par

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

où f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$; généralisation à une fonction continue de signe quelconque,
- équations différentielles; introduction des équations différentielles par l'équation $f' = kf$.

Activités : équations $f'' = 0$, $f'' = mf$; applications aux équations classiques de sciences physiques.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE A VALEURS DANS $\mathbb{R}^2$

— Définition; interprétation géométrique.
— Dérivation d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.
— Exemples d'étude et de tracés d'une courbe plane définie par une représentation paramétrique.

Application : Vocabulaire de la cinématique : trajectoire, vecteur vitesse, vecteur accélération, mouvement accéléré, retardé ou uniforme (définition et reconnaissance seulement).

ALGÈBRE LINÉAIRE

Systèmes d'équations linéaires. Matrice complète d'un système.
Résolution d'un système par opérations élémentaires sur les lignes.
Réduction de matrices à une forme triangulaire.
Structure vectorielle de $\mathbb{R}^n$.

Activités : Recherche de bases dans $\mathbb{R}^3$. Résolution de problèmes d'intersections de plans et droites de l'espace.

GÉOMÉTRIE

— Calculs barycentriques. Étude des fonctions

$$M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \qquad M \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\| \overrightarrow{MA_i} \right\|^2.$$

— Applications affines : conservation du barycentre; exemples.
Application linéaire associée. Expression dans un repère.
Image d'une droite, d'un plan, conservation du parallélisme. On montrera que les isométries sont des applications affines conservant le produit scalaire.
— Géométrie plane :
Translations, homothéties, rotations, symétries orthogonales. Classification des isométries. On fera utiliser ces transformations dans de nombreux problèmes de constructions et de lieux géométriques. On pourra traiter en activité quelques exemples d'affinités dans le plan.

Scanné avec CamScanner

— Exemples d'applications du plan définies par une application complexe $z \longmapsto f(z)$; cas des similitudes. Exemple d'application ne conservant pas le barycentre.
— Coniques :
Définitions géométriques (bifocale, foyer et directrice), équations cartésiennes réduites, équations de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, équations paramétriques, tangente en un point d'une conique.
Activités : Quelques exercices de régionnement du plan par une conique.
— Géométrie dans l'espace :
Étude sur des exemples de translations, homothéties, symétries orthogonales par rapport à un plan, par rapport à une droite; définition d'une rotation d'axe D.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (Ne concerne que les élèves de Terminale E)
— Rotation autour d'un axe vertical ou de bout.
— Rabattement sur un plan horizontal ou frontal : distance de deux points, d'un point à une droite, d'un point à un plan en vraie grandeur; angle de deux droites.
— Projection d'un cercle : épure.

Scanné avec CamScanner

1 Fonction logarithme népérien

1) RAPPELS SUR LES PRIMITIVES
2) DÉFINITION DE LA FONCTION LN
3) PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE
4) VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LN
5) FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

1 Rappels sur les primitives

Définition

Soit f et F deux fonctions numériques de la variable réelle et I un *intervalle* inclus dans $\mathcal{D}_f$, ensemble de définition de f; on dit que F est **une primitive de f sur l'intervalle I** si et seulement si F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemples

1) $F : x \longmapsto x^3$ est une primitive de $f : x \longmapsto 3x^2$ sur $\mathbb{R}$, car :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (x^3)' = 3x^2.$$

2) $G : x \longmapsto \tan x + \frac{1}{2}\sin 2x - 1$ est une primitive de :

$$g : x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 x} + \cos 2x \quad \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[.$$

3) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que

$$F : x \longmapsto (ax^2 + bx + c)\sqrt{x-1}$$

soit une primitive de :

$$f : x \longmapsto (5x-3)\sqrt{x-1} \quad \text{sur }]1; +\infty[.$$

Nous avons aussi utilisé en Première les résultats suivants :

1) Toute fonction continue sur un intervalle admet au moins une primitive sur cet intervalle.



Il y a lieu de faire attention au fait que ceci ne constitue qu'une condition suffisante, c'est-à-dire qu'une fonction non continue sur I peut admettre des primitives sur I.

Scanné avec CamScanner

2) Si une fonction admet une primitive sur un intervalle, alors elle en admet une infinité; deux quelconques d'entre elles diffèrent d'une constante.

3) Cependant si une fonction admet des primitives sur un intervalle, elle n'en possède qu'une seule prenant une valeur donnée en un point donné de cet intervalle.

4) Établissons alors le tableau des primitives usuelles :

$f(x)$	I	$F(x)$
a	$\mathbb{R}$	ax
$x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
x^n $n\in\mathbb{Z}$ $n\leqslant -2$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
	$\mathbb{R}_-^*$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$2\sqrt{x}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$

Dans chaque cas, F est une primitive de f sur I.

Exemple Trouver, sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ la primitive de $\left[f : x \longmapsto \dfrac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}\right]$ qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{3}$.

• f se présente sous la forme de la dérivée d'un rapport. On vérifie que :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\quad \left(\frac{x}{\cos x}\right)' = f(x),$$

donc la primitive cherchée F s'écrit : $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\ F(x)=\dfrac{x}{\cos x}+k$ où k est une constante.

La condition $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$, permet de trouver $k=-\dfrac{2\pi}{3}$, d'où :

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\quad F(x)=\frac{x}{\cos x}-\frac{2\pi}{3}.$$

Scanné avec CamScanner

Exercice Soit f la fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$f : x \longmapsto 1+2\sqrt{x^2}.$$

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

2 Définition de la fonction logarithme népérien

1) Introduction

C'est John NAPIER (ou NEPER) qui inventa le mot et le concept de logarithme dans sa : « Description de la stupéfiante règle des logarithmes » en 1614. Son but était la recherche d'une table de correspondance qui permette de simplifier les calculs en ramenant le calcul d'un produit à celui d'une somme.

Soit à déterminer une fonction numérique f définie sur $\mathcal{D}$ et vérifiant :

$$f(xy)=f(x)+f(y). \qquad (1)$$

— Si f est constante alors : $\forall x\in\mathcal{D}\ f(x)=0$, c'est-à-dire que f est la fonction nulle donc inintéressante pour notre problème.

— On prendra donc f non constante sur $\mathcal{D}$; si $f(0)$ existe alors $f(0)=0$ et toujours en utilisant (1) on aurait :

$$\forall x\in\mathcal{D}\quad f(x)=0$$

ce qui est contraire à notre condition. Ainsi 0 ne peut pas appartenir à $\mathcal{D}$. A l'aide de (1) on obtient $f(1)=0$. Calculer $f(-1)$. En déduire que si x et $-x$ sont éléments de $\mathcal{D}$: $f(-x)=f(x)$.
On peut donc se limiter à prendre pour ensemble de définition de f, $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+^*$.
Montrer alors, en utilisant $\frac{1}{x}\,x=1$, que cette fonction f, si elle existe, vérifie :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

et d'autre part :

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

et qu'en conséquence elle ramènera le calcul d'un quotient à celui d'une différence. On doit aussi remarquer que, pour que cette fonction soit utilisable en calcul numérique, il faut que, si a est une valeur approchée du nombre réel x, $f(a)$ soit une valeur approchée convenable de $f(x)$. Autrement dit, f doit être continue en chaque point de son ensemble de définition. De plus, et par commodité, on choisira f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

En conclusion, on recherche une fonction f, non constante, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant (1).
En remarquant alors que (1) est symétrique en x et y, et sachant f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, il nous vient à l'idée de dériver successivement (1) :

— en considérant x comme variable et y constante on obtient, y étant un nombre réel quelconque fixé :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad yf'(xy)=f'(x);$$

Scanné avec CamScanner

— puis en considérant y comme variable et x constante on obtient, x étant un nombre réel quelconque fixé :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad xf'(xy) = f'(y).$$

En égalant les deux valeurs de $f'(xy)$ à partir des deux égalités précédentes, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{f'(x)}{y} = \frac{f'(y)}{x}.$$

Quelle valeur suffit-il de donner à y, pour déterminer f'?
Ainsi, nous avons montré que, s'il existe une fonction f non constante, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant (1), sa dérivée est nécessairement de la forme :

$$x \longmapsto \frac{k}{x} \text{ où } k \text{ est une constante.}$$

Ceci nous conduit à étudier les primitives des fonctions de cette forme.

2) Définition de la fonction logarithme népérien

Considérons la fonction numérique : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et par conséquent possède des primitives sur cet intervalle.

Définition

On appelle **fonction logarithme népérien,** notée **ln** la fonction primitive de : $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln x$ est ainsi caractérisée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0.$$

Remarque 1. On admettra que cette fonction ne peut s'exprimer à l'aide de fonctions connues (on démontrera cependant, voir Problème n° 20 à la fin de ce chapitre, que ce n'est pas la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ d'une fonction rationnelle).

Remarque 2. La fonction logarithme népérien est aussi notée Log.

Conséquences de la définition

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ donc ln *est une fonction strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2) ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Si $x > 1$ alors $\ln x > \ln 1$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \ln x > 0$$

Scanné avec CamScanner

de même :

$$\forall x \in]0;1[\quad \ln x < 0.$$

4) Si $0 < a < b$ alors $\ln a < \ln b$. En conséquence :

$a \neq b \implies \ln a \neq \ln b$ et par contraposition : $\ln a = \ln b \implies a = b$

ce qui signifie que ln est une application injective définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et nous pouvons donc écrire :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad (\ln a = \ln b \iff a = b).$$

3 Propriété fondamentale de ln

Soit a un nombre réel strictement positif donné, et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_a(x) = \ln(ax)$.
Calculons sa fonction dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_a'(x) = a \frac{1}{ax}$$

$$= \frac{1}{x}.$$

Les deux fonctions f_a et ln ayant la même fonction dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$, il existe une constante k telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(ax) = \ln x + k.$$

Pour $x = 1$ on obtient $k = \ln a$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Comme a est un nombre réel strictement positif quelconque, le résultat ainsi obtenu s'énonce de la façon suivante :

Propriété fondamentale

Le logarithme népérien du produit de deux nombres réels strictement positifs est égal à la somme. des logarithmes népériens de ces deux nombres.

Autrement dit :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Remarque 1. La fonction ln est donc une solution au problème posé au paragraphe 2-1).

Remarque 2. Cette propriété fondamentale se prolonge, par récurrence, au logarithme du produit de n nombres réels strictement positifs. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des nombres réels strictement positifs, on a :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n$$

Scanné avec CamScanner

et en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(a^n) = n \ln a.$$

Remarque 3. D'une manière générale, a et b étant deux nombres réels non nuls, si $ab > 0$ alors $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$, en effet, dans ce cas : $ab = |a||b|$.

Remarque 4. Sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par :

$$[x \longmapsto \ln|x|] \text{ est une primitive de : } \left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right].$$

Conséquences de la propriété fondamentale

1) En se référant au paragraphe 2-1) on obtient :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$$

et

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b.}$$

2) Étendons la formule établie à la remarque 2 précédente à un entier relatif n. En choisissant n, élément de $\mathbb{Z}_-$, alors l'opposé n' de n est élément de $\mathbb{N}$ d'où :

$$\begin{aligned} \ln(a^n) &= \ln(a^{-n'}) \\ &= \ln \frac{1}{a^{n'}} \\ &= -\ln(a^{n'}) \\ &= -n' \ln a \\ &= n \ln a \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure sous la forme :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(a^n) = n \ln a.}$$

Exercice Déterminer les ensembles de définition des fonctions :

$$f : x \longmapsto \ln(x^2)$$
$$g : x \longmapsto \ln(x^3).$$

Transformer les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$ à l'aide de la propriété précédente (on rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R} \; x^2 = |x|^2$).

3) $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad a = (\sqrt{a})^2$ d'où :

$\ln a = 2 \ln(\sqrt{a})$ soit :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a.}$$

Scanné avec CamScanner

Application. Soit à résoudre l'équation :

$$(E) \qquad \ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2.$$

Cette équation n'est définie que pour : $x-3>0$ et $x-1>0$.
Soit D_E son ensemble de validité on a :

$$D_E=]3;+\infty[.$$

En utilisant la propriété fondamentale de la fonction ln et l'équivalence :

$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad \forall b\in\mathbb{R}_+^*\quad (\ln a=\ln b \iff a=b)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}(E)\quad & \ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2\\ & \ln\big[(x-3)(x-1)\big]=\ln 8\\ & (x-3)(x-1)=8\\ (E')\quad & x^2-4x-5=0\end{aligned}$$

⚠ Attention, les quatre équations ci-contre sont équivalentes sur D_E, mais la dernière (E') a pour ensemble de validité $\mathbb{R}$.

L'ensemble des solutions de (E') est $\{-1;5\}$. D'où :

$$S_{(E)}=\{-1;5)\cap D_E$$

soit :

$$S_{(E)}=\{5\}.$$

- En déduire la résolution des équations :

$$\ln|x-3|+\ln|x-1|=3\ln 2$$
$$\ln\big[(x-3)(x-1)\big]=3\ln 2.$$

Exercice Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln(\sin x)+\ln(\tan x)=\ln(\cos x)$

(2) $\ln|\sin x|-\ln|\tan x|=\ln|\cos x|$.

4 Variations et représentation graphique de ln

1) Tableau des variations de ln

Nous savons déjà que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Proposons-nous alors d'étudier le comportement de ln aux bornes de son ensemble de définition.

Remarques préliminaires

1) Nous savons que : $\lim(2^n)=+\infty$.

2) On démontre (et on le vérifie à la calculatrice) que :

$$\frac{2}{3}<\ln 2<1$$

donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{2}{3}n<n\ln 2<n$$

soit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{2}{3}n<\ln(2^n)$$

et, puisque $\lim\left(\frac{2}{3}n\right)=+\infty$, on en déduit que : $\lim(\ln 2^n)=+\infty$.

Scanné avec CamScanner

• Montrons que $\ln x$ prend des valeurs très grandes, lorsque x devient, lui aussi, très grand. Pour cela, justifions l'existence d'un nombre entier naturel n_0 tel que : A étant un nombre réel strictement positif donné, si $x > 2^{n_0}$ alors $\ln x > A$; on sait que :

$$x > 2^{n_0} \implies \ln x > n_0 \ln 2,$$

il suffit donc de choisir n_0, entier naturel, tel que : $n_0 > \dfrac{A}{\ln 2}$, ce qui est toujours possible.
Ainsi, la fonction ln n'est pas majorée et lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, il en est de même de $\ln x$, ce que l'on exprime en écrivant :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} \ln = +\infty.$$

Exemple numérique

Pour que $\ln x > 10$, il suffit de choisir n_0, entier naturel, tel que :

$$n_0 > \frac{10}{\ln 2} \quad \text{soit} \quad n_0 > 14{,}4.$$

Prenons $n_0 = 15$; dans ce cas comme $2^{15} = 32\,768$, on a donc :

$$x > 32\,768 \implies \ln x > 10.$$

Ce résultat nous montre la faible croissance de $\ln x$ vers $+\infty$.

• De la même manière, A étant un nombre réel strictement positif donné, il est possible de déterminer n_0, nombre entier naturel, tel que :

$$\text{si} \quad 0 < x < 2^{-n_0} \quad \text{alors} \quad \ln x < -A.$$

Ce résultat nous conduit à l'écriture :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty.$$

D'où le tableau de variation de ln :

x	0	1	$+\infty$
$(\ln)'(x)$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow +\infty$

2) Représentation graphique de ln

Soit (Γ) la représentation graphique de ln dans le plan muni du repère affine (O, I, J).

a) Intéressons-nous à l'allure de (Γ) au voisinage de I, point d'intersection de (Γ) avec la droite (OI). Une équation de la tangente (Δ) à (Γ) en ce point est :

$$(\Delta) \quad y = x - 1.$$

Scanné avec CamScanner

Déterminons alors la position de (Γ) par rapport à (Δ), en cherchant le signe de φ telle que :

$$\varphi : x \longmapsto x - 1 - \ln x.$$

Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x}$.

On a alors le tableau de variation suivant pour φ :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	‖	↘	0	↗	

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(x) \geqslant 0$

et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leqslant x - 1.$

• La courbe (Γ) est située en dessous de sa tangente (Δ) en I.

b) Nous avons vu que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Ce résultat est insuffisant pour positionner la courbe (Γ).
Nous allons montrer que les points d'abscisse supérieure à 1 de la courbe (Γ) sont situés dans la région du plan caractérisée par :

$$\begin{cases} x \geqslant 1 \\ 2\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant y \leqslant \sqrt{x-1}. \end{cases}$$

Autrement dit, nous allons établir que :

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 2\frac{x-1}{x+1} \leqslant \ln x \leqslant \sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

Soit α et β les deux fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$\alpha(x) = \ln x - 2\frac{x-1}{x+1}$$

$$\beta(x) = \ln x - \sqrt{x-1}.$$

Étudier ces fonctions. On obtient les tableaux de variation suivants :

x	1		$+\infty$
$\alpha'(x)$	0	$+$	
$\alpha(x)$	0	↗	

x	1		2		$+\infty$
$\beta'(x)$	‖	$-$	0	$-$	
$\beta(x)$	0	↘			

d'où l'encadrement (1) cherché.

Scanné avec CamScanner

Remarque. En faisant $x=2$ dans (1) on retrouve l'encadrement de ln 2 utilisé au paragraphe précédent.

c) De plus l'inégalité (1) conduit à :

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 \leqslant \ln x \leqslant \sqrt{x}$$

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{x}$$

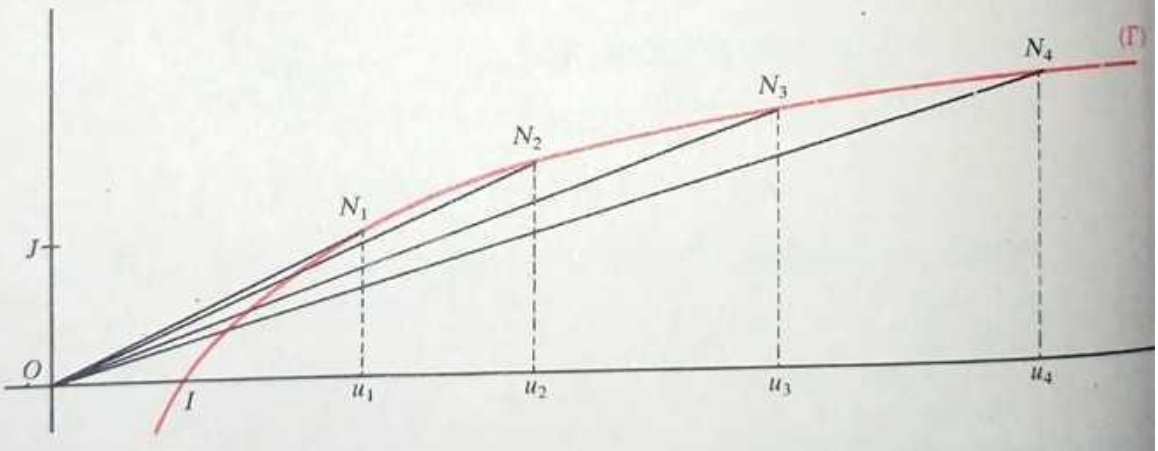
$$\forall x \in [1; +\infty[\quad 0 \leqslant \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0; il en est donc de même de $\frac{\ln x}{x}$; on exprime ce comportement par :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Remarque graphique

Pour un point $N(u; \ln u)$ de (Γ), le nombre réel $\frac{\ln u}{u}$ est le coefficient directeur de la droite (ON). Le résultat précédent nous permet, lorsque u varie, d'obtenir le schéma suivant et l'allure particulière de la branche de la courbe (Γ) correspondant aux grandes valeurs de x :



On pourra calculer les coefficients directeurs des droites (ON) pour, par exemple : $u=10$, $u=100$ ou $u=1\,000$. Tracer ces droites. Existe-t-il un point N de (Γ) pour lequel le coefficient directeur de la droite (ON) soit 10^{-10}?

d) Complétons notre étude par la détermination de points supplémentaires de (Γ).

Scanné avec CamScanner

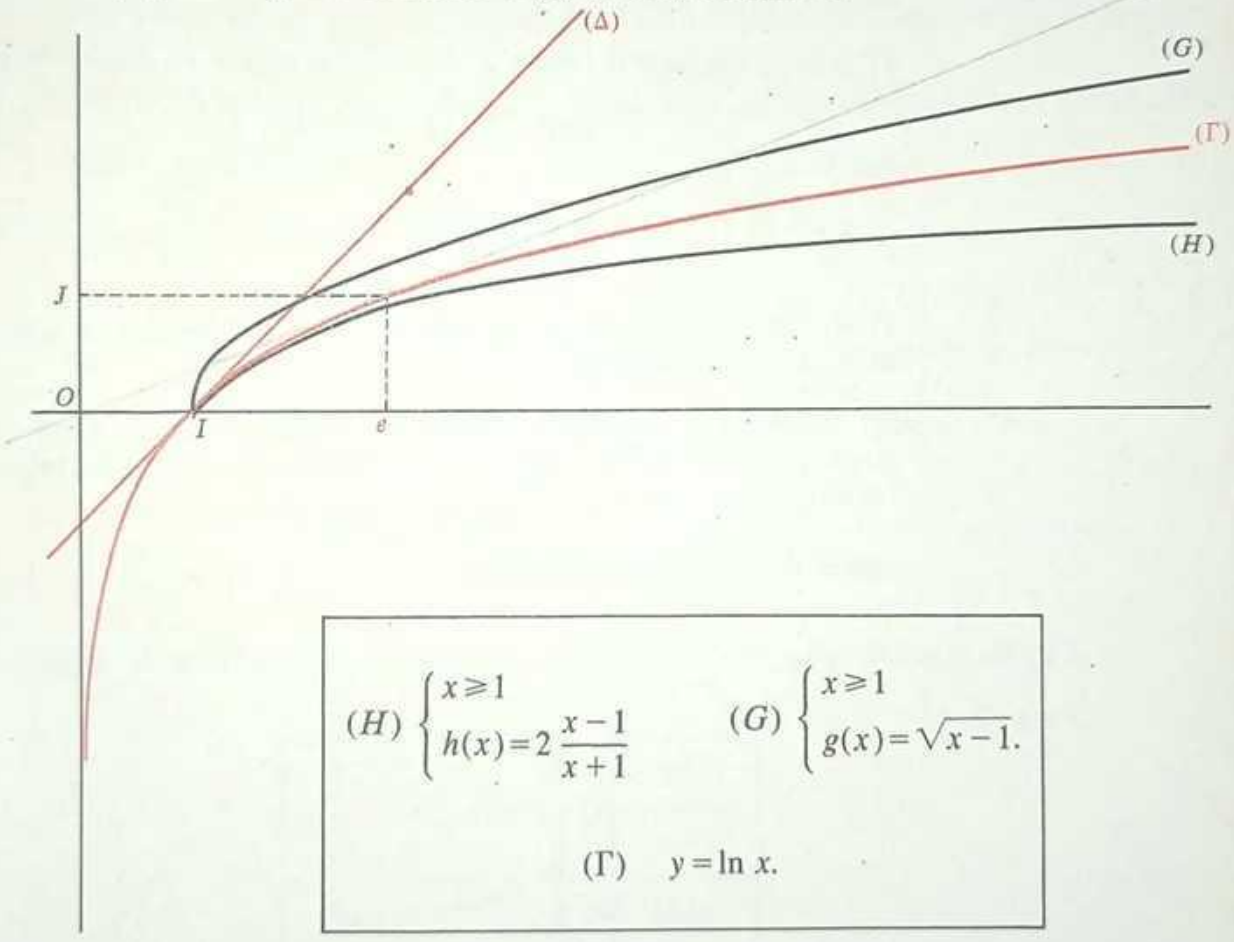
Les arrondis d'ordre 2 de ln 2 et ln 3 sont respectivement 0,69 et 1,10; compléter alors le tableau suivant par des valeurs approchées.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	2	3	4	6	8	9
$\sqrt{x-1}$					0						
$\ln x$					0	0,69	1,10				
$2\frac{x-1}{x+1}$					0						

Tracer les courbes représentatives des fonctions ci-dessus. On remarquera que :

— (OJ) est asymptote à (Γ);

— (Δ) est tangente commune à (Γ) et (H) au point I.



$$(H)\begin{cases} x \geqslant 1 \\ h(x) = 2\dfrac{x-1}{x+1} \end{cases} \qquad (G)\begin{cases} x \geqslant 1 \\ g(x) = \sqrt{x-1}. \end{cases}$$

$$(\Gamma) \quad y = \ln x.$$

3) Le nombre e

Nous constatons graphiquement (nous le justifierons par la suite) que la fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que tout nombre réel possède un unique antécédent dans $\mathbb{R}_+^*$ par la fonction ln.

Scanné avec CamScanner

En particulier, le nombre réel 1 admet un antécédent par ln; on démontre, et nous l'admettrons, que ce nombre ne peut pas s'exprimer à l'aide de symboles connus : c'est un nombre irrationnel que l'on note e; on a donc :

$$\ln e = 1.$$

Remarque 1. En utilisant (Γ) on obtient une valeur approchée de e, mais la calculatrice nous en fournit une bien meilleure. On retiendra pour arrondi d'ordre 4 de e la valeur 2,7183.

Remarque 2. $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln(e^n) = n.$

Remarque 3. La tangente à (Γ) au point $E(e, 1)$ contient l'origine O du repère. Déterminer une équation de cette tangente et vérifier cette remarque.

4) Activité

On se propose de représenter graphiquement sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par $f : x \longmapsto x \ln x$.

1) Soit la fonction définie par $\varphi : x \longmapsto \ln x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Montrer que :

$$\forall x \in]0; 1] \quad \varphi(x) \geqslant 0.$$

En déduire que :

$$\forall x \in]0; 1] \quad -2\sqrt{x} \leqslant x \ln x \leqslant 0 \quad \text{puis que :} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \ln x) = 0.$$

2) *a*) Déterminer la fonction dérivée de f; en déduire la primitive de ln qui s'annule pour 1.

b) Après avoir établi le tableau de variation de f, représenter graphiquement f. En déduire les valeurs de α pour lesquelles l'équation :

$$x \ln x - \alpha = 0$$

admet deux solutions distinctes.

• 1) $\forall x \in]0; 1] \quad \varphi'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x}}$ donc $\varphi'(x) \leqslant 0$, d'où le tableau de variation de φ sur $]0; 1]$:

x	0		1
$\varphi'(x)$	‖	−	0
$\varphi(x)$	‖	↘	2

D'après le tableau : $\forall x \in]0; 1] \ \varphi(x) \geqslant 2$, on en déduit que : $\forall x \in]0; 1] \ \varphi(x) \geqslant 0$. Comme $\ln x$ est négatif ou nul pour tout élément x de $]0; 1]$, on obtient :

$$\forall x \in]0; 1] \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} \leqslant \ln x \leqslant 0$$

Scanné avec CamScanner

et en multipliant par x :

$$\forall x \in]0; 1] \quad -2\sqrt{x} \leqslant x \ln x \leqslant 0.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-2\sqrt{x}) = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln x) = 0.$$

2) *a*) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \ln x + 1.$$

Donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de : $x \longmapsto \ln x + 1$ est f, d'où une primitive de ln est : $x \longmapsto x \ln x - x$.
La primitive F répondant à la question est alors définie par :

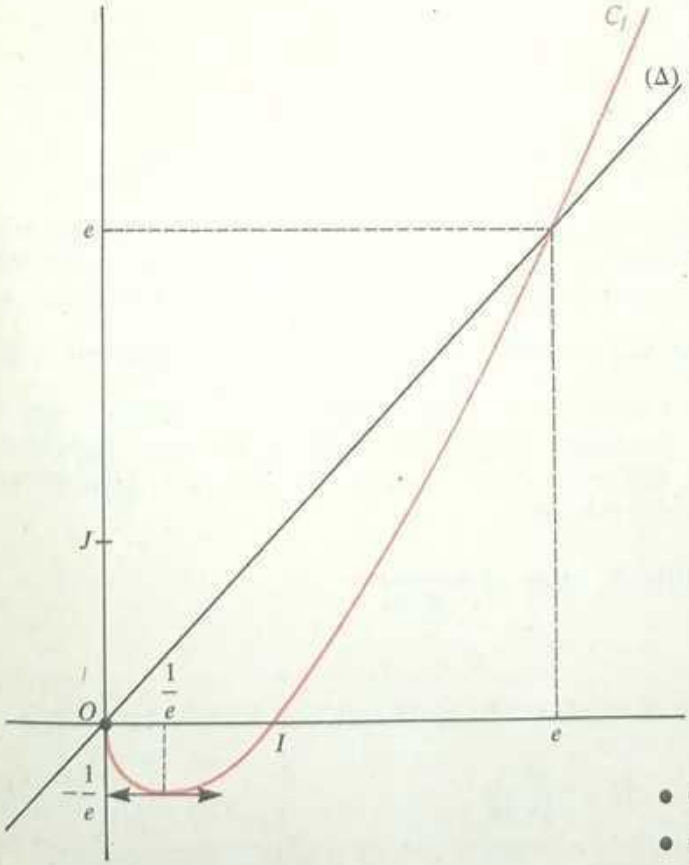
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = x \ln x - x + 1.$$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0$, d'autre part on peut remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) \geqslant x \iff x \geqslant e.$$

Nous utiliserons ce résultat pour placer la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On montre que : $f'(x) > 0 \iff x > \frac{1}{e}$, d'où le tableau de variation et ensuite la courbe représentative de f :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	



- en rouge, la courbe représentative de f
- en noir, la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Scanné avec CamScanner

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{2}$	1	2	e
$f(x)$	$-\frac{\ln 2}{2}$	$-\frac{1}{e}$	$-\frac{\ln 2}{2}$	0	$2 \ln 2$	e
arrondi d'ordre 2 de $f(x)$	−0,35	−0,37	−0,35	0	1,39	2,72

• Graphiquement, l'équation : $x \ln x = \alpha$, admet deux solutions distinctes si et seulement si :

$$\alpha \in \left]-\frac{1}{e}; 0\right[.$$

Nous retiendrons quatre limites de référence faisant intervenir ln; ce sont :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x \ln x) = 0.$$

5 Fonction logarithme décimal

Nous avons vu que la fonction ln est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et transformant le calcul d'un produit en celui d'une somme, c'est-à-dire une solution au problème posé au 2-1). Nous avons montré que toute solution à ce problème a nécessairement une fonction dérivée de la forme : $x \longmapsto \frac{k}{x}$, et s'annule en 1. Il en résulte que les solutions cherchées sont les fonctions f_k définies par : $x \longmapsto k \ln x$, où k est une constante réelle non nulle.. Elles sont appelées *fonctions logarithmes*. Parmi celles-ci, nous appellerons *fonction logarithme décimal* celle pour laquelle : $f_k(10) = 1$; or :

$$f_k(10) = 1 \iff k = \frac{1}{\ln 10}.$$

Définition

On appelle **fonction logarithme décimal,** notée lg, la fonction logarithme définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Scanné avec CamScanner

Conséquences

1) La fonction lg vérifie les propriétés de la fonction ln, c'est-à-dire que si a et b sont deux nombres réels non nuls :

$$ab>0 \implies \begin{cases} \lg(ab)=\lg|a|+\lg|b| \\ \lg\left(\frac{a}{b}\right)=\lg|a|-\lg|b| \end{cases}$$

et $$\forall n\in\mathbb{Z} \quad \forall a\in\mathbb{R}_+^* \quad \lg(a^n)=n\lg a$$

$$\lg\sqrt{a}=\frac{1}{2}\lg a.$$

2) Par définition $\lg 10=1$, d'où :

$$\forall n\in\mathbb{Z} \quad \lg 10^n=n$$

et comme lg est croissante :

$$10^n\leqslant x<10^{n+1} \iff n\leqslant \lg x<n+1.$$

Remarque. La propriété fondamentale des fonctions logarithmes en fait un outil commode pour les calculs numériques. Les nombres avec lesquels nous calculons étant écrits en base 10, c'est le logarithme décimal qui est le plus facile à utiliser. En effet, à partir de la table donnant, par exemple, les logarithmes décimaux des nombres entiers de 1 à 10 000, on peut obtenir une « bonne » valeur approchée du logarithme décimal de tout nombre réel strictement positif.
Soit à déterminer, par exemple, lg 1,214; en utilisant la valeur donnée par la table pour lg 1 214 on obtient :

$$\begin{aligned} \lg 1{,}214 &= \lg(1\,214\cdot 10^{-3}) \\ &= -3+\lg 1\,214 \\ &\cong 0{,}084\,22. \end{aligned}$$

Cette valeur fournit un encadrement beaucoup plus précis que celui obtenu en utilisant seulement la croissance de la fonction lg :

$$\begin{aligned} \lg 1<\lg 1{,}214<\lg 2 \\ 0<\lg 1{,}214<0{,}301\,03. \end{aligned}$$

Cependant l'utilisation de telles tables a perdu beaucoup de son intérêt avec l'apparition de la calculatrice.

Scanné avec CamScanner

THÈME D'ÉTUDE : ENCADREMENT D'UN LOGARITHME NÉPÉRIEN ET VALEUR APPROCHÉE DE e

Remarque liminaire

Nous admettrons (nous le justifierons dans le chapitre 3) l'existence de la fonction racine $n^{\text{ième}}$, notée $\sqrt[n]{\ }$, de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, définie par : pour n nombre entier naturel supérieur ou égal à 2,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n.$$

On remarquera que :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt[n]{y^n} = y.$$

• Considérons deux nombres réels, a et b, strictement positifs, tels que $a < b$, alors :

$$\forall x \in [a, b] \quad \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a},$$

c'est-à-dire que :

$$\forall x \in [a, b] \quad \frac{1}{b} \leqslant (\ln)'(x) \leqslant \frac{1}{a}.$$

Ainsi : $\forall x \in [a, b] \quad (\ln)'(x) - \frac{1}{b} \geqslant 0$ donc la fonction $\left[x \longmapsto \ln x - \frac{x}{b}\right]$ est croissante sur $[a, b]$, et nous avons en particulier :

$$\ln a - \frac{a}{b} \leqslant \ln b - \frac{b}{b} \quad \text{soit} \quad 1 - \frac{a}{b} \leqslant \ln b - \ln a.$$

On montrera de la même façon, en considérant la fonction $\left[x \longmapsto \ln x - \frac{x}{a}\right]$, que :

$$\ln b - \ln a \leqslant \frac{b}{a} - 1.$$

Ces deux inégalités nous conduisent à :

$$\text{si} \quad 0 < a < b \quad \text{alors} \quad 1 - \frac{a}{b} \leqslant \ln b - \ln a \leqslant \frac{b}{a} - 1. \tag{1}$$

α étant un nombre réel strictement supérieur à 1, considérons la subdivision suivante de l'intervalle $[1, \alpha]$:

$$x_0 = 1,\ x_1 = \sqrt[n]{\alpha},\ x_2 = \sqrt[n]{\alpha^2},\ \ldots,\ x_i = \sqrt[n]{\alpha^i},\ \ldots,\ x_n = \sqrt[n]{\alpha^n} \ (\text{soit } x_n = \alpha).$$

Appliquons alors à chaque intervalle de cette subdivision l'inégalité (1) :

$$1 - \frac{x_0}{x_1} \leqslant \ln x_1 - \ln x_0 \leqslant \frac{x_1}{x_0} - 1$$

$$1 - \frac{x_1}{x_2} \leqslant \ln x_2 - \ln x_1 \leqslant \frac{x_2}{x_1} - 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$1 - \frac{x_i}{x_{i+1}} \leqslant \ln x_{i+1} - \ln x_i \leqslant \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$1 - \frac{x_{n-1}}{x_n} \leqslant \ln x_n - \ln x_{n-1} \leqslant \frac{x_n}{x_{n-1}} - 1.$$

Remarquons que :

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \quad \text{donc} \quad \frac{x_{i+1}}{x_i} = \sqrt[n]{\alpha}$$

Scanné avec CamScanner

En faisant la somme membre à membre de ces n inégalités, on obtient :

$$n - n\frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}} \leqslant \ln x_n - \ln x_0 \leqslant n\sqrt[n]{\alpha} - n,$$

soit : $$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \forall \alpha \in]1; +\infty[, \quad n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha}}\right) \leqslant \ln \alpha \leqslant n(\sqrt[n]{\alpha} - 1). \qquad (2)$$

En choisissant pour n une puissance de 2 (2^{10} par exemple), on peut déterminer un encadrement de $\ln \alpha$ en n'utilisant que la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice et non la touche y^x dont le programme de calcul fait intervenir le logarithme. Ainsi $\sqrt[2^{10}]{\alpha}$ est obtenu en appuyant successivement sur :

α $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$

Pour $\alpha = 2$ on obtient l'encadrement suivant de $\ln 2$:

$$0{,}692\,91 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}693\,39.$$

Considérons maintenant, pour m entier naturel supérieur ou égal à 2, les nombres réels a_m et b_m définis par :

$$a_m = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m} \text{ ou encore } a_m = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

et $$b_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Après avoir montré que a_m et b_m sont des nombres réels strictement supérieurs à 1, vérifier que :

$$m\left(1 - \frac{1}{\sqrt[m]{a_m}}\right) = 1.$$

En utilisant (2) on en déduit que :

$$1 \leqslant \ln a_m \quad \text{c'est-à-dire que} \quad e \leqslant a_m$$

De même, vérifier que : $m(\sqrt[m]{b_m} - 1) = 1$, et en déduire que : $b_m \leqslant e$.
Ainsi on obtient l'encadrement suivant de e :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}.$$

En choisissant encore $m = 2^{10}$ (ce qui nous permettra de n'utiliser que la touche x^2 de notre calculatrice), on obtient l'encadrement suivant de e :

$$2{,}716\,95 \leqslant e \leqslant 2{,}719\,62.$$

La moyenne géométrique g des bornes de cet encadrement (la moyenne géométrique g de deux nombres réels strictement positifs x et y est définie par : $g = \sqrt{xy}$), nous fournit une « bonne » valeur approchée de e; on trouve en effet :

$$g \cong 2{,}718\,28.$$

Rappelons que :

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,352\,662...$$

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes (on précisera à chaque fois sur quel intervalle on se place) :

$$x \longmapsto x^2 + \frac{1}{x^2};$$

$$x \longmapsto \sin 3x - 4\cos 5x;$$

$$x \longmapsto \cos x - (x+1)\sin x;$$

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

2 1) a et b étant deux nombres réels, déterminer la fonction dérivée de :

$$x \longmapsto \ln(ax+b).$$

2) Soit f la fonction numérique définie par :

$$x \longmapsto \frac{x+2}{x^2(x+1)}.$$

Après avoir déterminé son ensemble de définition $\mathcal{D}$, montrer qu'il existe trois nombres réels α, β et γ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}.$$

En déduire, sur $]0; +\infty[$, la primitive de f qui s'annule en 1.

3 Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction dérivée de :

$$x \longmapsto x^2 \ln x.$$

En déduire, sur $\mathbb{R}_+^*$, la primitive de :

$$x \longmapsto x \ln x$$

qui prend la valeur $\frac{1}{2}\ln 2$ pour $\sqrt{2}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :

$$1 + \ln(x+3) \geqslant \ln(x^2+2x-3).$$

5 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \ln|x|;$$

$$f_2 : x \longmapsto \frac{1}{\ln|x|};$$

$$f_3 : x \longmapsto \ln(\ln x);$$

$$f_4 : x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln x + 1}.$$

6 *a*) Comparer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \ln(x^2-1);$$

$$f_2 : x \longmapsto \ln|x^2-1|;$$

$$f_3 : x \longmapsto \ln(x+1) + \ln(x-1).$$

b) Même question avec les fonctions :

$$g_1 : x \longmapsto \ln\frac{x+1}{x-1};$$

$$g_2 : x \longmapsto \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|;$$

$$g_3 : x \longmapsto \ln(x+1) - \ln(x-1).$$

7 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

(1) $2\ln(x-3) + \ln(x-1) = \ln(2x-2)$;

(2) $\ln(x+2) + \ln(-x) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$;

(3) $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$;

(4) $(\ln x)^2 + \ln(x^2) = 0$;

(5) $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 - 2\ln x + 9 = 0$;

(6) $(\ln x)^3 + 2(\ln x)^2 + \ln x + 2 = 0$.

8 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$, les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} x+y=25 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=130 \\ \ln(-x) + \ln(-y) = \ln 63 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \ln(\sin x) + \ln(\cos x) + \ln 2 = 0 \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}. \end{cases}$

9 A partir de la représentation graphique (Γ) de la fonction ln, construire dans le plan muni du repère (O, I, J) les représentations graphiques des fonctions suivantes, en utilisant une transformation géométrique simple :

$f_1 : x \longmapsto 1 + \ln x$; $f_4 : x \longmapsto |\ln x|$;

$f_2 : x \longmapsto \ln(x+1)$; $f_5 : x \longmapsto \ln(3x)$;

$f_3 : x \longmapsto \ln|x|$; $f_6 : x \longmapsto \ln(2x+1)$.

10 Soient (u) et (v) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \cdot 3^n \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

Montrer que (u) est une suite géométrique; en donner le premier terme et la raison.
Montrer que (v) est une suite arithmétique; en donner le premier terme et la raison.

Scanné avec CamScanner

11 Étudier les variations des fonctions suivantes :

$x \longmapsto \ln x - x$; $\quad x \longmapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$;

$x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$; $\quad x \longmapsto \dfrac{\ln x + 1}{\ln x}$.

12 Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$f_1 : x \longmapsto \dfrac{x}{\ln x}$; $\quad f_3 : x \longmapsto x(\ln x - 1)^2$;

$f_2 : x \longmapsto x^2 \ln x$; $\quad f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{(\ln x)^2 - 1}$.

13 Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$x \longmapsto \ln\left|\frac{x}{x-3}\right|.$$

Soit (C) sa courbe représentative. Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on déterminera.

14 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \ln|x|.$$

1) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition; tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit S la symétrie par rapport à la droite $D(O, \vec{j})$ et de direction le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Montrer que (C) est globalement invariante par S.

15 1) Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$x \longmapsto \frac{\ln x}{x}.$$

2) Montrer qu'il n'existe qu'un seul couple d'entiers naturels, (n, p) tels que :

$$n^p = p^n \quad \text{et} \quad n < p.$$

16 1) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (γ) représentative de la fonction lg (logarithme décimal) au point de (γ) d'abscisse x_0.

2) En déduire x_0 pour que (T) passe par l'origine du repère.

17 On désigne par lg la fonction logarithme décimal et l'on pose $\lg 2 = \alpha$. Calculer en fonction de α, les nombres réels suivants :

$\lg 4$; $\lg(0{,}2)$; $\lg\dfrac{1}{16}$; $\lg(0{,}000\,64)$; $\lg(3{,}2)$; $\lg 5$;

$\lg\dfrac{5}{4}$; $\lg 125$; $\lg(0{,}025\,6)$; $\lg(2{,}5 \cdot 10^{-3})$.

18 Soit la suite réelle (u) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 3.$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. Quelle conjecture peut-on faire?

2) Soit (v) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 4.$$

Montrer que (v) est une suite géométrique; en déduire une expression de u_n en fonction de n puis $\lim(u)$.

3) Déterminer la plus petite valeur n_0 de n pour laquelle :

$$u_n > 3{,}999\,9.$$

Scanné avec CamScanner

Problèmes

19 1) Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=x-2x\ln x.$$

Déterminer sa fonction dérivée et les variations de f.

Calculer $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x)=\frac{\ln x}{(x-2)^2}$$

et (C) sa représentation graphique dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g.

b) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'intersection de (C) avec $D(O, \vec{i})$. La construire.

c) Construire (C) (on mettra en évidence l'existence de trois asymptotes à (C)).

20 1) Montrer qu'il n'existe pas de fonction rationnelle f telle que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} xf(x)=0.$$

Indication. On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $[x \longmapsto P(x)]$ et $[x \longmapsto Q(x)]$ sont deux fonctions polynômes et supposer que : $P(0)\neq 0$ et $Q(0)=0$.

2) En déduire que la fonction ln n'est pas la restriction à $\mathbb{R}_+^*$ d'une fonction rationnelle.

21 Soit la famille de fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x)=1+\ln(1+\lambda x)$$

où λ est un nombre réel non nul.
On se propose de déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe (C_λ), représentative de f_λ, avec la droite (D) d'équation : $y=x$.

1) Donner l'ensemble de définition de f_λ (on distinguera les deux cas : $\lambda>0$ et $\lambda<0$).

2) *a*) Existe-t-il un lien entre les deux courbes C_λ et $C_{-\lambda}$?

b) Soit (Γ) la représentation graphique de ln. Trouver, lorsque $\lambda>0$, une translation qui transforme (Γ) en (C_λ).

3) On pose : $\varphi_\lambda(x)=f_\lambda(x)-x$.

a) *On suppose* $\lambda<0$
Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition. En déduire le nombre de points d'intersection de (C_λ) et (D).

b) *On suppose* $\lambda>0$
Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes de son ensemble de définition (on pourra par exemple, mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer la limite à l'infini). Établir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$, quand x décrit l'ensemble de définition est :

$$m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+\ln\lambda.$$

c) Étudier, quand λ décrit $]0;+\infty[$, les variations de $m(\lambda)$; en déduire son signe.

d) Combien, lorsque λ est positif, (C_λ) et (D) ont-elles de points communs?

(extrait Besançon. C. 85)

22 On considère l'application

$$f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1+2\ln x}{x^2}$$

et la fonction Φ : $]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

On désigne par (C) et (H) les courbes représentatives de f et Φ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

A) Étude de f. Tracé de (C)

1) Étudier le sens de variation de f.

2) *a*) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition. Préciser les droites asymptotes à la courbe (C).

b) Étudier la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses et donner une équation de la tangente à (C) au point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

3) Tracer la courbe (C) sur une feuille de papier millimétré en prenant 4 cm pour unité de longueur.

B) Position relative des courbes (C) *et* (H) : détermination d'une valeur approchée de l'abscisse de l'un des points d'intersection.

Scanné avec CamScanner

1) *a*) Démontrer que la position relative des courbes (C) et (H) peut se déduire du signe de

$$g(x)=(1+2\ln x)-x.$$

b) En utilisant les variations de g, prouver que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles $]0;2[$ et $]2;+\infty[$. On note α la solution appartenant à l'intervalle $]2;+\infty[$; justifier l'encadrement :

$$3<\alpha<4.$$

c) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x, et conclure sur la position des courbes (C) et (H).

2) On cherche une valeur approchée du nombre α défini précédemment.

a) Si on note h la fonction définie par

$$h(x)=1+2\ln x$$

vérifier que les équations $g(x)=0$ et $h(x)=x$ sont équivalentes.
Préciser le sens de variation de h.

b) On considère les nombres réels x' et x'' tels que :

$$1<x'<\alpha<x''.$$

Montrer que l'on a :

$$x'<h(x')<\alpha<h(x'')<x''.$$

On définit alors les deux suites (u) et (v) par :

- $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=h(u_n)$
- $v_0=4$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=h(v_n)$.

Établir les propriétés suivantes :

1) La suite (u) est strictement croissante.

2) La suite (v) est strictement décroissante.

3) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n<\alpha<v_n$.

4) Les suites (u) et (v) sont convergentes.

(On rappelle que toute suite croissante et majorée — respectivement décroissante et minorée — est convergente.)

c) Vérifier que, pour tout x élément de $[3;4]$ on a :

$$0<h'(x)\leqslant\frac{2}{3}.$$

En utilisant alors la fonction φ, définie sur $[3;4]$ par :

$$\varphi(x)=\frac{2}{3}x-h(x),$$

montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad h(v_n)-h(u_n)\leqslant\frac{2}{3}(v_n-u_n).$$

En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad 0<v_n-u_n\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Quelle est la limite des suites (u) et (v)?

d) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} et proposer une valeur approchée de α.

3) Tracer la courbe (H) sur le même graphique que la courbe (C).

(D'après Canada-U.S.A. C. 85)

à refaire

Scanné avec CamScanner

2 Dérivabilité d'une fonction numérique

1) ÉTUDE D'UNE FONCTION NUMÉRIQUE
2) COMPLÉMENT A LA DÉRIVATION

1 Étude d'une fonction numérique

1) Exemple d'étude d'une fonction

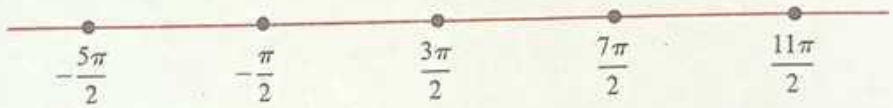
Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{3+\sin x}{1+\sin x}.$$

Soit D_f l'ensemble de définition de f.

On a : $\quad x \in D_f \iff 1+\sin x \neq 0,$

d'où : $\quad D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$



Il est souvent commode d'écrire D_f comme réunion d'intervalles disjoints; on a ici :

$$D_f = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ -\frac{\pi}{2}+2(n+1)\pi\right[.$$

De l'examen de D_f, on déduit que :

— f n'est ni paire ni impaire;

— f ne possède aucune période strictement positive inférieure à 2π.

De plus, pour tout élément x de D_f :

$$x+2\pi \in D_f \quad \text{et} \quad x-2\pi \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+2\pi)=f(x).$$

f est donc périodique, et la période de f est 2π.
Nous choisissons donc comme intervalle d'étude un intervalle de $\mathbb{R}$ d'amplitude 2π; prenons par exemple l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, que nous noterons I.

Sur l'intervalle ouvert I, f est le quotient des deux fonctions dérivables

$$[x \longmapsto 3+\sin x] \quad \text{et} \quad [x \longmapsto 1+\sin x].$$

Scanné avec CamScanner

Comme cette dernière fonction ne s'annule pas sur I, f est dérivable sur cet intervalle. Par ailleurs, sa fonction dérivée est donnée par :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}.$$

Son signe est celui de $(-\cos x)$.

Étudions le comportement de f aux bornes de l'intervalle I, c'est-à-dire au voisinage de $-\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{3\pi}{2}$.

Remarquons tout d'abord que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 3+\sin x > 0 \quad \text{et} \quad 1+\sin x \geqslant 0.$$

Par conséquent, pour tout nombre réel x de D_f, $f(x)$ est strictement positif.

D'autre part, la fonction $\frac{1}{f}$ est définie par :

$$\forall x \in D_f \quad \frac{1}{f}(x) = \frac{1+\sin x}{3+\sin x}.$$

D'où : $$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \frac{1}{f}(x) = 0.$$

(Il suffit de substituer $-\frac{\pi}{2}$ à x dans l'expression ci-dessus.)

D'après la remarque précédente, on a donc :

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty.$$

De même : $$\lim_{x \to 3\frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty.$$

En résumé, nous avons donc le tableau de variation suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	2	↗	‖ $+\infty$

Construction de la courbe représentative de f

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. En traçant la courbe (C_f) au brouillon, ou en constituant un tableau de valeurs de f, on a l'idée d'étudier si la droite (Δ) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f).

Soit Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Scanné avec CamScanner

Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$

et donc : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + X \\ y = Y. \end{cases}$

Par conséquent :

$$M \in (C_f) \iff y = f(x)$$

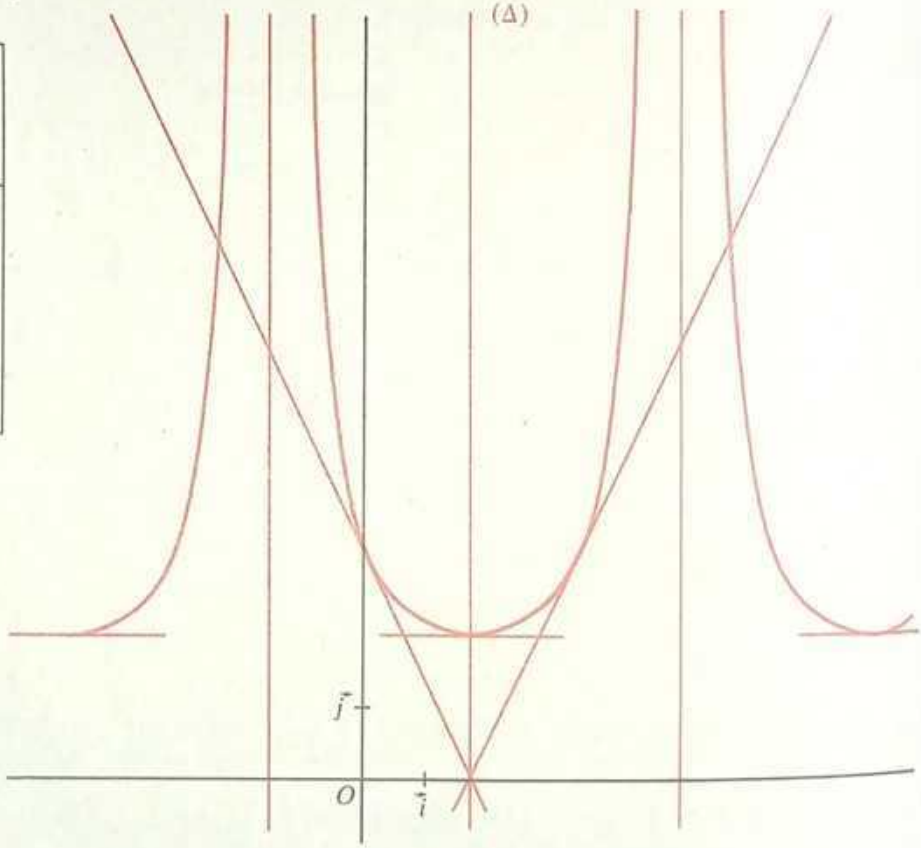
$$\iff Y = f\left(\frac{\pi}{2} + X\right)$$

$$\iff Y = \frac{3 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + X\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + X\right)}$$

$$\iff Y = \frac{3 + \cos X}{1 + \cos X}.$$

La fonction $\left[X \longmapsto \frac{3 + \cos X}{1 + \cos X}\right]$ est paire; on en déduit que (Δ) est un axe de symétrie de (C_f).

x	Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$
-1	13,6
$-0,9$	10,2
$-0,5$	4,8
0	3
0,5	2,4
1	2,1



Pour préciser le tracé de (C_f), recherchons une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

f est dérivable sur tout intervalle ouvert inclus dans D_f. Sa courbe représentative

Scanné avec CamScanner

admet donc une tangente en chacun de ses points. Plus précisément, au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, (C_f) admet pour tangente la droite d'équation :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Comme $f(0) = 3$ et $f'(0) = -2$, la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0 a donc pour équation :

$$y = -2x + 3.$$

D'après l'étude de la fonction f, les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ sont asymptotes à (C_f). On peut construire, en s'aidant d'un tableau de valeurs, la représentation graphique de la restriction de f à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, puis, en utilisant les translations de vecteurs $2n\pi\vec{i}$ $(n \in \mathbb{Z})$, la représentation graphique de f.

2) Des conventions de langage

a) **Intervalles**

Lorsqu'on désigne un intervalle à l'aide de deux nombres réels :

$$]a, b[\ ;\ [a, b]\ ;\ [a, b[\ ;\ ]a, b]$$

on suppose implicitement a strictement inférieur à b.

D'autre part, on adopte le vocabulaire et les notations suivantes :

intervalles	ouverts	fermés	semi-ouverts
bornés	$]a, b[$	$[a, b]$	$[a, b[\ ;\ ]a, b]$
non bornés	$]\leftarrow, a[$ ou $]-\infty, a[$ $]a, \rightarrow[$ ou $]a, +\infty[$ $\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	$]\leftarrow, a]$ ou $]-\infty, a]$ $[a, \rightarrow[$ ou $[a, +\infty[$ $\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$	

Étant donné un nombre réel x_0 et un nombre réel strictement positif r, l'intervalle ouvert de centre x_0 et de rayon r est $]x_0 - r, x_0 + r[$. C'est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ dont la distance à x_0 est strictement inférieure à r. Il est noté $I(x_0; r)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} I(x_0; r) &=]x_0 - r, x_0 + r[\\ &= \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / d(x, x_0) < r\}. \end{aligned}$$

b) **Fonctions**

Dans tout ce chapitre, le mot *fonction* désigne une fonction numérique d'une variable réelle.

La phrase :

« f est une fonction définie sur un intervalle I »

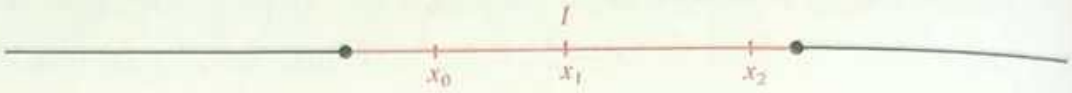
signifie que l'ensemble de définition de f contient l'intervalle I, sans nécessairement lui être égal. On utilise des conventions analogues pour la dérivabilité et la continuité.

Scanné avec CamScanner

La plupart des fonctions que nous étudions ont un ensemble de définition qui peut s'écrire comme réunion finie d'intervalles disjoints.
C'est pourquoi de nombreuses situations présentées dans ce chapitre font intervenir des fonctions définies sur un intervalle.
Nous utiliserons souvent des intervalles ouverts. En effet, les notions que nous étudions (limites, continuité ou dérivabilité pour une valeur x_0) décrivent le comportement d'une fonction « pour les valeurs proches de x_0 ». Or, tout intervalle ouvert I possède la propriété remarquable suivante :

pour tout élément x_0 de I, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 inclus dans I.

Autrement dit, I possède des éléments « à droite et à gauche de chacun de ses éléments ».



On se sert souvent de représentations géométriques pour illustrer certaines situations dans $\mathbb{R}$. Ainsi, on représente souvent $\mathbb{R}$ à l'aide d'une droite, un intervalle fermé borné à l'aide d'un segment, etc.

De même, on utilise souvent le mot *point* pour désigner un élément de $\mathbb{R}$ dans des phrases telles que :

« f est continue au point x_0 »
« f admet une limite au point x_0 ».

3) Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert

a) Comment montrer qu'une fonction est dérivable?

Nous avons établi en Première et au chapitre 1, que chacune des fonctions usuelles suivantes est dérivable sur tout intervalle *ouvert* inclus dans son ensemble de définition, et admet pour fonction dérivée, la fonction indiquée.

expression de $f(x)$	a	x	x^n	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\ln x$
expression de $f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$1+\tan^2 x$	$\frac{1}{x}$
remarques	$a\in\mathbb{R}$		$n\in\mathbb{N}^*$	$n\in\mathbb{N}^*$					

Attention! La fonction $[x \longmapsto \sqrt{x}]$ a pour ensemble de définition $[0; +\infty[$. Nous savons que cette fonction n'est pas dérivable en 0. Elle est dérivable, comme il a été indiqué ci-dessus, sur l'intervalle *ouvert* $]0; +\infty[$.

Les fonctions que nous étudions sont en général des sommes, produits, quotients et composées des précédentes. Nous disposons, pour étudier leur dérivabilité, des règles suivantes.

Scanné avec CamScanner

λ désigne un nombre réel, n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- λf, f^n, $f+g$ et $f\times g$ sont dérivables sur I.
- $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{g^n}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I, *si g ne s'annule pas sur I.*
- $\sqrt{f}$ est dérivable sur I, *si f est strictement positive sur I.*

Par ailleurs, leurs fonctions dérivées sont données par :

fonction	λf	f^n	$f+g$	$f\times g$	$\frac{1}{g}$	$\frac{1}{g^n}$	$\frac{f}{g}$	$\sqrt{f}$
dérivée	$\lambda f'$	$nf^{n-1}f'$	$f'+g'$	$f'g+fg'$	$-\frac{g'}{g^2}$	$-\frac{ng'}{g^{n+1}}$	$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Exercices

1) Montrer que chacune des fonctions suivantes est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa fonction dérivée :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1+\ln x}{1-\ln x} \; ; \quad f_2 : x \longmapsto \sqrt{3+\sin x}.$$

2) Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le plus grand intervalle ouvert sur lequel elle est dérivable et calculer sa fonction dérivée :

$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{1-x^3} \; ; \quad f_2 : x \longmapsto \sqrt{1-\ln x}.$$

3) Nous avons également vu en Première un théorème donnant la dérivée d'une fonction de la forme $[x \longmapsto f(ax+b)]$.
Rappeler ce résultat. (Nous généraliserons ce résultat dans le paragraphe 2.)
L'utiliser pour étudier la dérivabilité et calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \ln(3+2x) \; ; \quad g : x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

4) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -2] & f(x) = x^3 - 3x + 7 \\ \forall x \in]-2; +\infty[& f(x) = (x-2)(x+1)^2. \end{cases}$$

Écrire l'expression de $f'(x)$ sur $]-\infty; -2[$, puis sur $]-2; +\infty[$, sous forme réduite et ordonnée.
f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Pourquoi?

N.B. Cet exemple montre que ce n'est pas en calculant l'expression d'une dérivée que l'on justifie de la dérivabilité d'une fonction!

Scanné avec CamScanner

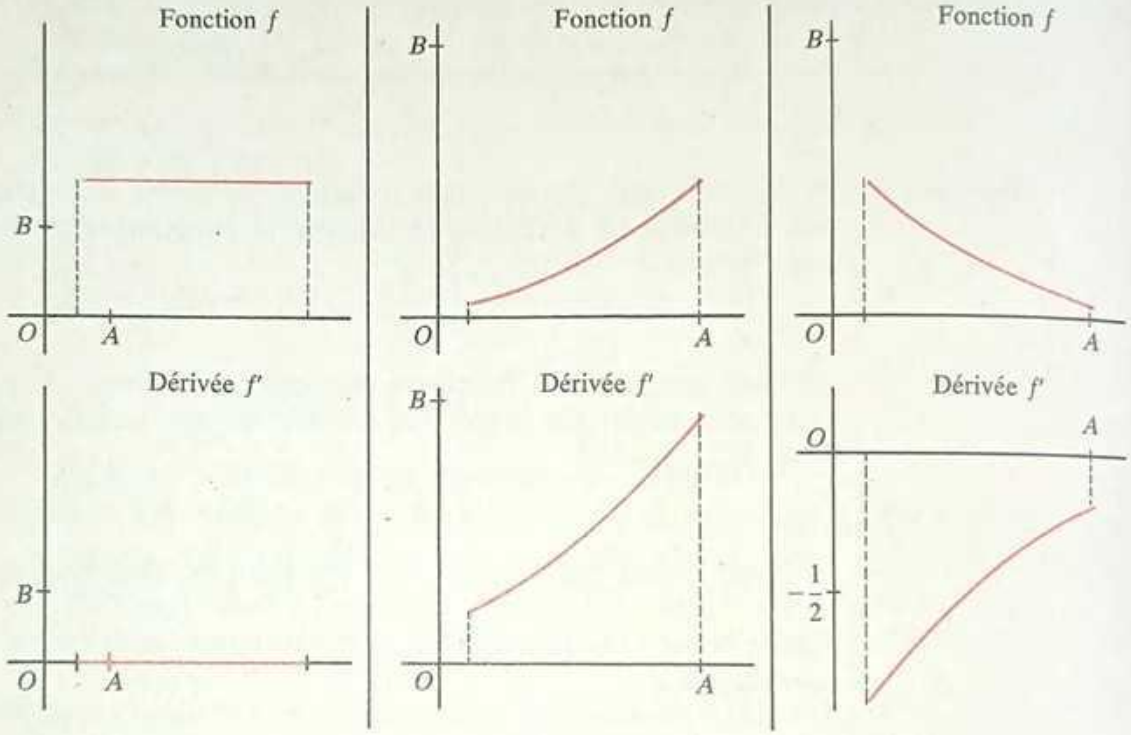
b) Sens de variation et fonction dérivée

Nous avons donné en Première plusieurs théorèmes reliant le signe de la dérivée au sens de variation et à l'existence d'extrémums.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et f' sa fonction dérivée.

- f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.
- f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I.
- f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.



Remarque 1. Lorsque la dérivée de f garde un signe constant sur I, et s'annule en un *nombre fini* de points de I, f n'est constante sur aucun intervalle contenu dans I.

Dans ce cas, on voit que f est en fait *strictement monotone* sur I.

Remarque 2. Soit une fonction f, définie sur un intervalle fermé $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Le théorème précédent donne des résultats concernant le sens de variation de f sur l'intervalle *ouvert* $]a, b[$; nous admettrons que ces résultats s'étendent à l'intervalle *fermé* $[a, b]$ pourvu que f soit continue à droite en a et à gauche en b. (La notion de continuité sera revue dans le paragraphe suivant. Dans ce paragraphe, il suffit de savoir qu'une fonction dérivable en un point x_0 est continue en ce point.)

Scanné avec CamScanner

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est
$x \longmapsto x^4$
$[x \longmapsto 4x^3]$.

Du signe de f', et de la continuité de f en 0, on déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice

Comme souvent en Analyse, le résultat énoncé dans la remarque 1 exprime une condition *suffisante* pour que la fonction soit strictement monotone.
Montrer par exemple que la dérivée de la fonction

$$f_* : x \longmapsto x + \sin x$$

possède une infinité de zéros sur $\mathbb{R}$, et que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Extrémums relatifs et fonction dérivée

Rappels

On désigne sous le nom générique d'*extrémum*, un maximum ou un minimum d'une fonction numérique.

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de son ensemble de définition D_f.
f possède un *minimum relatif* en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 tel que :

$$\forall x \in I \cap D_f \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

f possède un *maximum relatif* en x_0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 tel que :

$$\forall x \in I \cap D_f \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

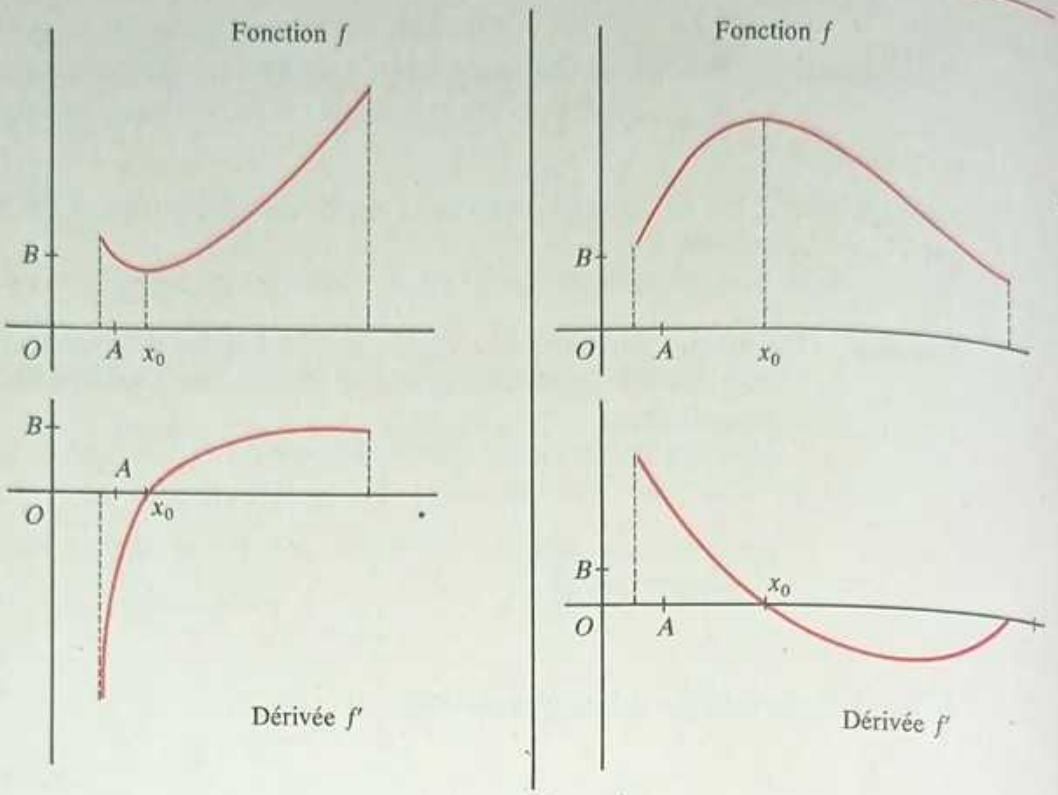
Les deux théorèmes suivants permettent de rechercher les extrémums relatifs d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert à l'aide de la fonction dérivée.

Théorèmes

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle *ouvert* I et x_0 un élément de I.

- Si la fonction f possède un extrémum relatif en x_0, alors sa fonction dérivée s'annule en x_0.
- Si la fonction dérivée de f s'annule en changeant de signe en x_0, alors f possède un extrémum relatif en x_0.

Scanné avec CamScanner



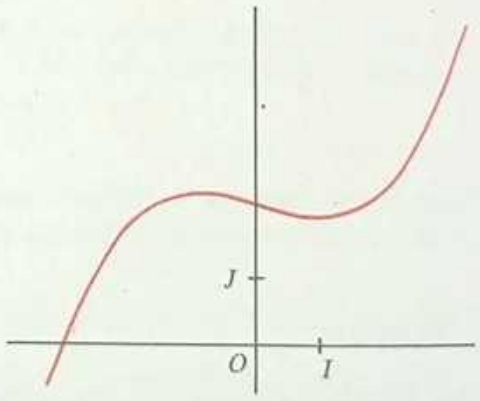
Remarque 1. Attention, le résultat précédent ne concerne que les *extrémums relatifs* d'une fonction sur un *intervalle ouvert.*

Ainsi, par exemple, considérons la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3}{9} - \frac{x}{3} + 2$. Sa dérivée s'annule en 1 et -1.
$f(-1)$ et $f(1)$ sont des extrémums relatifs de f sur $]-3; 3[$.

Par contre, ce ne sont pas des extrémums absolus, puisque :
$f(-2{,}5) < f(1)$; $f(2{,}5) > f(-1)$.

f ne possède d'ailleurs pas d'extrémums absolus sur l'intervalle ouvert $]-3; 3[$.

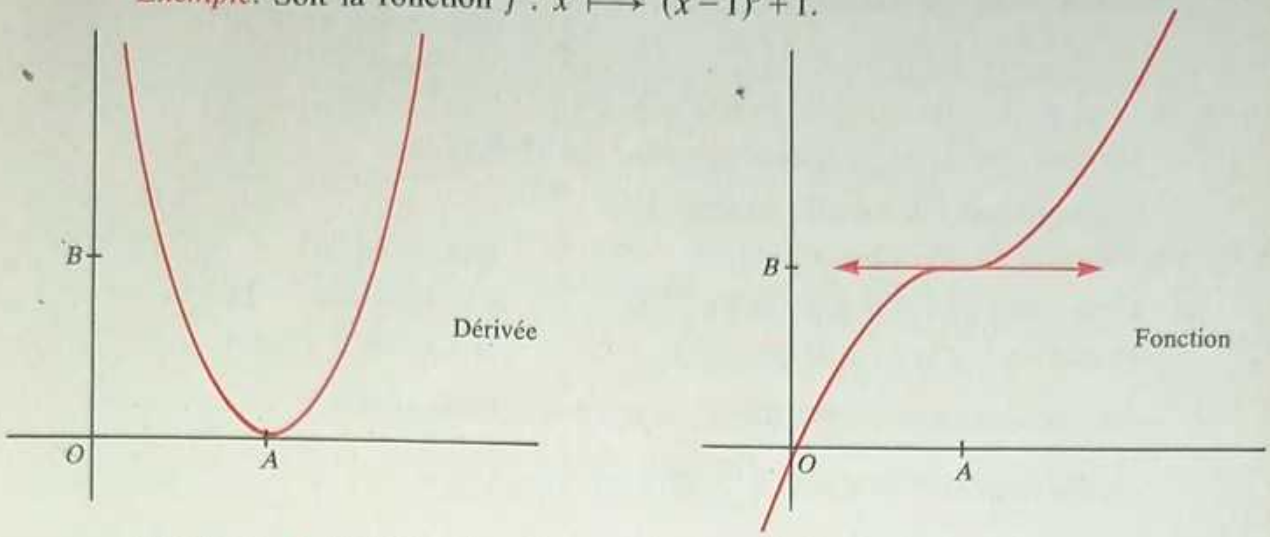
Sur l'intervalle fermé $[-3; 3]$, le maximum absolu de f est $f(3)$, son minimum absolu est $f(-3)$. Or, la dérivée de f ne s'annule ni en -3, ni en 3!



Remarque 2. Si f' s'annule en un point x_0, et garde un signe constant sur un intervalle ouvert de centre x_0 (c'est-à-dire s'annule sans changer de signe en x_0), alors f n'admet pas d'extrémum en x_0.

Scanné avec CamScanner

Exemple. Soit la fonction $f : x \longmapsto (x-1)^3+1$.



Exercices

1) Déterminer les extrémums relatifs de la fonction $[x \longmapsto x^3-5x]$ sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum absolus de la fonction $[x \longmapsto |3x-4|]$ sur $]1; 2[$.

3) Déterminer, s'ils existent, le maximum et le minimum absolus de la fonction $[x \longmapsto \cos 2x + 2\cos x]$ sur $[0; \pi]$.

d) **Trouver un encadrement de la valeur prise par une fonction en un point**

Exemple. On sait que : $1{,}098 < \ln 3 < 1{,}099$.
En déduire un encadrement d'amplitude 3×10^{-3} de $\ln 3{,}1$.

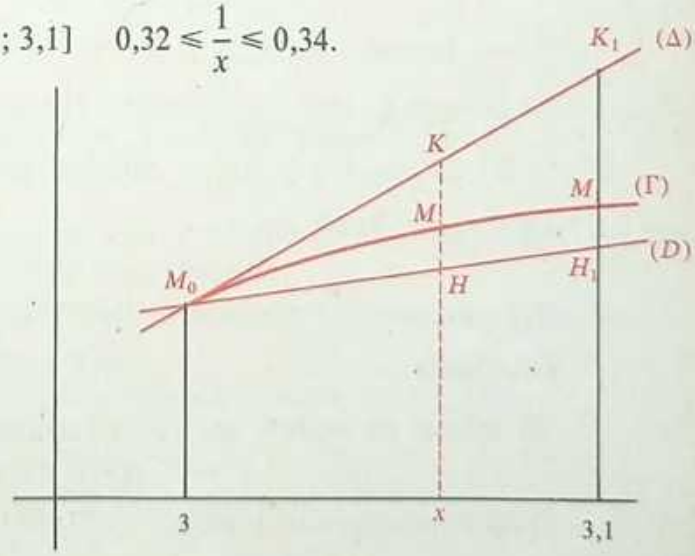
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, sa dérivée $\left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right]$ est une fonction simple, dont on peut facilement obtenir un encadrement sur un intervalle donné. Ainsi :

$$\forall x \in [3; 3{,}1] \quad \frac{1}{3{,}1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{3}.$$

En vue de notre calcul, recherchons un encadrement à l'aide de nombres décimaux :

$$\forall x \in [3; 3{,}1] \quad 0{,}32 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant 0{,}34.$$

(Γ) est la représentation graphique de la fonction ln.
(D) et (Δ) sont les droites passant par $M_0(3; \ln 3)$ et de coefficients directeurs respectifs 0,32 et 0,34. On voit sur le dessin que l'ordonnée de $M_1(3{,}1; \ln 3{,}1)$ est comprise entre celles des points H_1 et K_1. Nous allons montrer ce résultat en étudiant le sens de variation des fonctions $[x \longmapsto \overline{HM}]$ et $[x \longmapsto \overline{MK}]$.



Scanné avec CamScanner

Introduisons les fonctions auxiliaires :

$$g_1 : x \longmapsto \ln x - \ln 3 - 0{,}32(x-3)$$
$$g_2 : x \longmapsto 0{,}34(x-3) + \ln 3 - \ln x.$$

Montrer que g_1 et g_2 sont croissantes sur $[3; 3{,}1]$.

On en déduit les inégalités suivantes :

$g_1(3) \leqslant g_1(3{,}1)$	$g_2(3) \leqslant g_2(3{,}1)$
c'est-à-dire : $0 \leqslant \ln 3{,}1 - \ln 3 - 0{,}032$	$0 \leqslant 0{,}034 + \ln 3 - \ln 3{,}1$
ou encore : $\ln 3 + 0{,}032 \leqslant \ln 3{,}1$	$\ln 3{,}1 \leqslant \ln 3 + 0{,}034.$

Par conséquent : $1{,}098 + 0{,}032 \leqslant \ln 3{,}1 \leqslant 1{,}099 + 0{,}034$

c'est-à-dire : $\boxed{1{,}130 \leqslant \ln 3{,}1 \leqslant 1{,}133.}$

Le raisonnement utilisé précédemment avec la fonction ln permet en fait d'obtenir un encadrement de la valeur prise par une fonction en un point b dès que l'on connaît sa valeur en un point a, et un encadrement de sa dérivée sur l'intervalle fermé de bornes a et b. On a alors le résultat général suivant.

Théorème (Inégalité des accroissements finis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et f' sa fonction dérivée. Soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

S'il existe des nombres réels m et M tels que :

$$\forall x \in [a, b] \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

alors : $$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Démonstration

Introduisons les fonctions g_1 et g_2 définies sur I par :

$$g_1(x) = f(x) - mx; \quad g_2(x) = Mx - f(x).$$

g_1 est dérivable sur I, et pour tout élément x de I, $g_1'(x) = f'(x) - m$.

La dérivée g_1' étant une fonction positive sur $]a, b[$, la fonction g_1 est croissante sur $]a, b[$. Comme, de plus g_1 est continue en a et en b (car dérivable en a et en b), la fonction g_1 est en fait croissante sur $[a, b]$.

Comme $a < b$, on a :

$$g_1(a) \leqslant g_1(b)$$

c'est-à-dire : $$f(a) - ma \leqslant f(b) - mb$$

ou encore : $$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a).$$

De même, on montre en étudiant g_2, que :

$$f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

D'où l'encadrement cherché.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1) Trouver par la méthode précédente, un encadrement de $\sqrt{122}$ d'amplitude 3×10^{-3}.

2) Que devient l'énoncé du théorème précédent lorsque $a>b$?
Montrer que, quelle que soit la position relative de a et b, on a :

$$m\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant M.$$

3) Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I.
Soit a et b deux éléments de I tels que $a<b$.
Montrer que si $f(a)\leqslant g(a)$, et si $f'\leqslant g'$ sur $[a, b]$, alors :

$$\forall x\in[a, b]\quad f(x)\leqslant g(x).$$

En appliquant ce résultat sur $[0; x]$, montrer que :

$$\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\quad \sin x\leqslant x\leqslant\tan x.$$

2 Complément à la dérivation

1) Limite d'une fonction en un point

a) **Rappel**

Pour décrire le comportement de

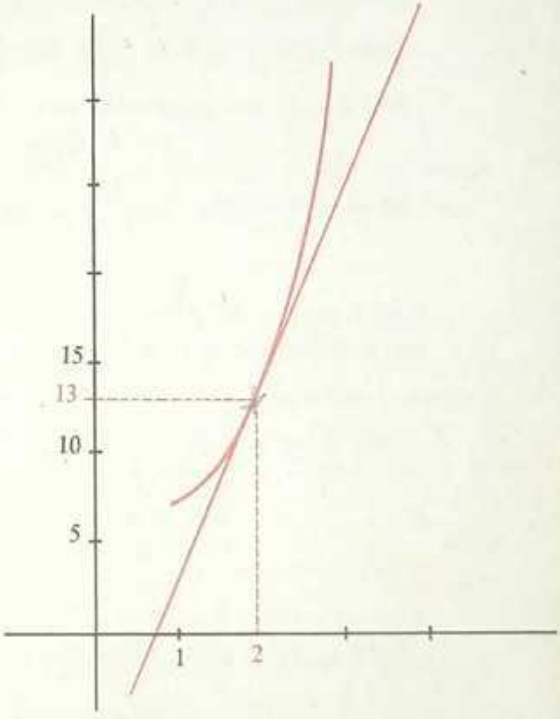
$$f : x \longmapsto x^3-x+7$$

au voisinage de 2, il suffit de donner les éléments suivants :

- $f(2)=13$
- $f'(2)=11$
- f admet :

$$x \longmapsto 11(x-2)+13$$

comme fonction affine tangente au point 2.



Dans certains cas, on ne peut pas décrire le comportement local d'une fonction de cette façon. Ainsi, on doit utiliser un autre outil :

— pour décrire le comportement d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition;

— pour décrire le comportement d'un taux d'accroissement tel que :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

lorsque h «devient de plus en plus proche de 0»;

Scanné avec CamScanner

— pour décrire le comportement d'une fonction pour les « grandes valeurs » de la variable.
On utilise alors la notion de limite, introduite en Première.

Rappelons les limites de référence suivantes :

$$\lim_{h\to 0} h=0; \quad \lim_{h\to 0} h^2=0; \quad \lim_{h\to 0} \sqrt{|h|}=0;$$

$$\lim_{h\to 0} 1=1; \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}=1;$$

$$\lim_{h\to 0} h^n=0 \ (n\in\mathbb{N}^*); \quad \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2}=\frac{1}{2}.$$

Le théorème suivant permet d'utiliser les limites de référence pour étudier d'autres fonctions au voisinage de 0.

Théorème fondamental

Soit g une fonction dont l'ensemble de définition contient un ensemble de la forme $]-r, 0[\cup]0, r[$ (où r est un nombre réel strictement positif).

Soit f une fonction telle que $\lim_0 f=0$ et k un nombre réel positif.

S'il existe un intervalle ouvert I de centre 0 tel que :

$$\forall h\in I-\{0\} \ |g(h)|\leqslant k\times|f(h)|$$

et si $g(0)=0$ lorsque g est définie en 0, alors $\lim_0 g=0$.

Cette notion se généralise dans le cas d'une limite non nulle, et d'une limite en un point autre que 0, de la façon suivante :

Soit ℓ un nombre réel et g une fonction numérique. Par définition :

$$\lim_{h\to 0} g(h)=\ell \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{h\to 0} \big(g(h)-\ell\big)=0.$$

Soit x_0 et ℓ deux nombres réels et f une fonction numérique. Par définition :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell.$$

Remarque 1. Pour que $\lim_{h\to 0} \big(g(h)-\ell\big)=0$, il faut que la fonction $\big[h \longmapsto g(h)-\ell\big]$ soit définie sur un ensemble de la forme $]-r, r[$, ou $]-r, 0[\cup]0, r[$. Il en est donc nécessairement de même pour g.
De façon similaire, le problème de l'éventuelle limite d'une fonction f en x_0 ne se pose que dans le cas où D_f contient un intervalle ouvert de centre x_0, ou un ensemble du type $]x_0-r, x_0[\cup]x_0, x_0+r[$.

Scanné avec CamScanner

Remarque 2. Lorsqu'une fonction f admet ℓ comme limite en x_0, $f(x)$ reste « proche de ℓ » pour x « proche de x_0 ».
Nous ne chercherons pas à formuler mathématiquement cet énoncé intuitif.
Cependant, nous utiliserons dans certains cas des conséquences de cette remarque telles que :

— si f admet une limite non nulle au point x_0, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f ne s'annule pas;

— si f admet une limite au point x_0, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f est bornée;

— si f admet une limite strictement positive au point x_0, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f prend des valeurs strictement positives.

b) **Continuité**

Soit x_0 un nombre réel. Lorsqu'une fonction f, *définie en* x_0, admet une limite en x_0, cette limite vaut nécessairement $f(x_0)$.

En effet, supposons que f soit définie en x_0, et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{h \to 0} \big(f(x_0+h) - \ell\big) = 0$.
La fonction $\big[\varphi : h \longmapsto f(x_0+h) - \ell\big]$ est définie en 0. Par conséquent, d'après le théorème fondamental, on doit avoir $\varphi(0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = \ell$.
Dans ce cas, on dit que f est *continue en* x_0.

Définition

Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert de centre x_0, est dite **continue** en x_0 si et seulement si f admet une limite en x_0 (qui est nécessairement égale à $f(x_0)$).

c) **Opérations sur les limites**

Nous avons donné en Première des théorèmes permettant de déterminer l'éventuelle limite en 0 d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions. On montre facilement, en utilisant la définition de la limite d'une fonction en x_0, que ces théorèmes s'étendent sans changement à ce cas. On obtient alors les théorèmes suivants.

Théorèmes généraux sur les limites

Soit x_0, ℓ et ℓ' des nombres réels.
Soit f et g deux fonctions définies l'une et l'autre sur un intervalle ouvert I centré en x_0, ou sur $I - \{x_0\}$.

Si : $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$ alors :

$$\lim_{x_0} (f+g) = \ell + \ell'; \quad \lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell';$$

si, de plus, $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $I - \{x_0\}$ et si ℓ' est non nul :

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 2. Lorsqu'une fonction f admet ℓ comme limite en x_0, $f(x)$ reste « proche de ℓ » pour x « proche de x_0 ».
Nous ne chercherons pas à formuler mathématiquement cet énoncé intuitif.
Cependant, nous utiliserons dans certains cas des conséquences de cette remarque telles que :

— si f admet une limite non nulle au point x_0, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f ne s'annule pas;

— si f admet une limite au point x_0, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f est bornée;

— si f admet une limite strictement positive au point x_0, il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel f prend des valeurs strictement positives.

b) **Continuité**

Soit x_0 un nombre réel. Lorsqu'une fonction f, *définie en* x_0, admet une limite en x_0, cette limite vaut nécessairement $f(x_0)$.

En effet, supposons que f soit définie en x_0, et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{h \to 0} \big(f(x_0+h) - \ell\big) = 0$.
La fonction $\big[\varphi : h \longmapsto f(x_0+h) - \ell\big]$ est définie en 0. Par conséquent, d'après le théorème fondamental, on doit avoir $\varphi(0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = \ell$.
Dans ce cas, on dit que f est *continue en* x_0.

Définition

Une fonction f, définie sur un intervalle ouvert de centre x_0, est dite **continue** en x_0 si et seulement si f admet une limite en x_0 (qui est nécessairement égale à $f(x_0)$).

c) **Opérations sur les limites**

Nous avons donné en Première des théorèmes permettant de déterminer l'éventuelle limite en 0 d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions. On montre facilement, en utilisant la définition de la limite d'une fonction en x_0, que ces théorèmes s'étendent sans changement à ce cas. On obtient alors les théorèmes suivants.

Théorèmes généraux sur les limites

Soit x_0, ℓ et ℓ' des nombres réels.
Soit f et g deux fonctions définies l'une et l'autre sur un intervalle ouvert I centré en x_0, ou sur $I - \{x_0\}$.

Si : $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$ alors :

$$\lim_{x_0} (f+g) = \ell + \ell'; \quad \lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell';$$

si, de plus, $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $I - \{x_0\}$ et si ℓ' est non nul :

$$\lim_{x_0} \frac{f}{g} = \frac{\ell}{\ell'}.$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 1. Si $\lim_{x_0} g \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert de centre x_0 sur lequel g ne s'annule pas. On peut donc choisir I de manière à rendre inutile l'hypothèse :

« $\frac{f}{g}$ est définie sur $I - \{x_0\}$ ».

Remarque 2. Il importe également de savoir reconnaître les situations dans lesquelles aucun des théorèmes précédents ne s'applique.

L'étude locale de la fonction $\frac{f}{g}$ lorsque f et g ont en x_0 des limites telles que :

$$\lim_{x_0} f \neq 0; \quad \lim_{x_0} g = 0$$

sera faite au chapitre suivant.

Dans le cas où f et g ont toutes deux pour limite 0, et où $\frac{f}{g}$ est définie sur $I - \{x_0\}$, il n'existe aucun théorème permettant de prévoir si la fonction $\frac{f}{g}$ a une limite, et la valeur de cette limite éventuelle.

Il est alors souvent utile de transformer l'écriture de $\frac{f(x)}{g(x)}$ pour appliquer d'une autre manière les théorèmes généraux.

Exemple 1. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3+1}{1-x^2}$.

Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

Simplifier l'expression de $f(x)$ sur D_f et en déduire $\lim_{-1} f$.

Exemple 2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x}$.

Quel est l'ensemble de définition D_f de f?

Pour étudier le comportement de f au voisinage de 1, transformons l'expression de $f(x)$ de la façon suivante :

$$\forall x \in]0; 2[- \{1\} \quad f(x) = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-x)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x^2-x)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{1}{x(\sqrt{x+3}+2)}.$$

On en déduit que : $\lim_{1} f = \frac{1}{4}$.

Exemple 3. Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{4 \tan x}{\sin x + \sin 3x}$.

Déterminer l'ensemble de définition de f.

Scanné avec CamScanner

Pour étudier le comportement de f au voisinage de 0, transformons l'expression de $f(x)$ en factorisant le dénominateur :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[- \{0\} \quad f(x) = \frac{4 \tan x}{2 \sin 2x \cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos^3 x}.$$

On en déduit que :

$$\lim_0 f = 1.$$

Exercice Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x^3 - 4x}$.

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{9 + x^2} - 5}{\sqrt{x} - 2}$.

c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 - \cos h}{\sin h}$.

Enfin, on pourra retenir le résultat suivant :

Théorème

Soit I un intervalle ouvert, x_0 un élément de I et ℓ un nombre réel.
Soit f, g_1 et g_2 trois fonctions définies sur I, ou sur $I - \{x_0\}$, telles que :

- $\lim\limits_{x_0} g_1 = \ell$; $\lim\limits_{x_0} g_2 = \ell$;
- il existe un nombre réel strictement positif r tel que :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[- \{x_0\} \quad g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x).$$

Si, de plus, $f(x_0) = \ell$ lorsque f est définie en x_0, alors $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Démonstration abrégée

Il revient au même de démontrer que la fonction $[h \longmapsto f(x_0 + h) - \ell]$ a pour limite 0 en 0. Or, d'après les hypothèses :

$$\forall h \in]-r, r[- \{0\} \quad g_1(x_0 + h) - \ell \leqslant f(x_0 + h) - \ell \leqslant g_2(x_0 + h) - \ell.$$

D'où : $\forall h \in]-r, r[- \{0\} \quad |f(x_0 + h) - \ell| \leqslant |g_1(x_0 + h) - \ell| + |g_2(x_0 + h) - \ell|$.

D'après les théorèmes généraux :

$$\lim_{h \to 0} \left(|g_1(x_0 + h) - \ell| + |g_2(x_0 + h) - \ell|\right) = 0.$$

Le résultat énoncé s'en déduit d'après le théorème fondamental.

Exemple. Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}.$$

Scanné avec CamScanner

On veut étudier le comportement de f au voisinage de 0.

• Étudier la parité de f.

• Dresser un tableau de valeurs donnant l'arrondi d'ordre 4 des images par f de 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3} et 10^{-4}.
Que constate-t-on?

• Ceci nous conduit à rechercher un encadrement de f par deux fonctions de limite nulle en 0.

On sait que : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad 0 < \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ (voir ex. 3 page 33).

D'où : $$\frac{1}{\tan x} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\sin x}$$

ou encore : $$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}.$$

Soit g la fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\right]$. Comme f et g sont impaires, on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad -|g(x)| \leqslant f(x) \leqslant |g(x)|.$$

Vérifier que :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad g(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

D'après l'exercice précédent, $\lim\limits_{0} g = 0$, et donc :

$$\lim_{0} f = 0.$$

Exercice Étudier, sur l'intervalle $[0; e-1]$, les fonctions :

$$g_1 : x \longmapsto \ln(1+x) - x; \quad g_2 : x \longmapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

En déduire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+|x|)}{|x|}.$$

2) Limite d'une fonction composée

a) Introduction

On considère les fonctions f_1 et f_2, définies pour tout élément x de $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_1(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}; \quad f_2(x) = \frac{\sin\sqrt{|x|}}{x}.$$

Étudier la parité de f_1 et f_2.
A l'aide d'une calculatrice (en mode radian!!), dresser un tableau donnant les arrondis d'ordre 6 de $f_1(x)$ et $f_2(x)$ pour x décrivant $\{0{,}1; 0{,}08; 0{,}06; 0{,}04; 0{,}02\}$.
Que constate-t-on?

Scanné avec CamScanner

Les expressions définissant les fonctions f_1 et f_2 nous rappellent la fonction de référence :

$$g : h \longmapsto \frac{\sin h}{h}$$

qui a pour limite 1 en 0.
Remarquons cependant que seule la fonction f_1 est la composée de la fonction g et d'une fonction de limite nulle en 0. Plus précisément, on a : $f_1 = g \circ u$, où u est la fonction $[x \longmapsto x^2]$.
Nous savons que, lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0, il en est de même de $u(x)$. De plus, l'image par g d'un nombre « très proche » de 0 est un nombre « très proche » de 1. Les images par $g \circ u$, c'est-à-dire par f_1, de nombres « très proches de 0 » sont donc « très proches » de 1.

b) **Limite d'une fonction composée**

Plus généralement on démontre, et nous admettrons, le résultat suivant.

Théorème

Soit x_0, ℓ et λ des nombres réels, et I un intervalle ouvert de centre x_0.
Soit f une fonction définie sur I, ou sur $I - \{x_0\}$.
S'il existe des fonctions g et u telles que :

- f coïncide avec $g \circ u$ sur $I - \{x_0\}$;
- $\lim\limits_{x_0} u = \ell$;
- $\lim\limits_{\ell} g = \lambda$;

et si $f(x_0) = \lambda$ lorsque f est définie en x_0, alors $\lim\limits_{x_0} f = \lambda$.

Remarque 1. Dans l'énoncé précédent, plusieurs hypothèses ont été sous-entendues. Ainsi, puisque f coïncide avec $g \circ u$ sur $I - \{x_0\}$, la fonction u est définie sur $I - \{x_0\}$, et pour tout x élément de $I - \{x_0\}$, $u(x)$ appartient à l'ensemble de définition de g. De même, puisque $\lim\limits_{\ell} g$ existe, g est définie sur un intervalle ouvert J de centre ℓ, ou sur $J - \{\ell\}$.

Exemple. Étudions le comportement en 1 de la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin(\ln x)}{\ln x}.$$

La fonction f est définie sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

De plus, f est la composée des fonctions :

$$u : x \longmapsto \ln x \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}.$$

Comme $\lim\limits_{1} u = 0$ et $\lim\limits_{0} g = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{1} f = 1$.

Scanné avec CamScanner

En pratique, on dit que l'on procède par *changement de variable* et l'on écrit : posons $u = \ln x$; lorsque x tend vers 1, u tend vers 0; par conséquent :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(\ln x)}{\ln x} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}$$
$$= 1.$$

Remarque 2. Lorsque les fonctions intervenant dans l'énoncé précédent sont définies aux points considérés (x_0 pour f et u, ℓ pour g), on obtient des énoncés plus simples en utilisant le langage de la continuité. Voici par exemple l'énoncé correspondant au cas où u est continue en x_0, et g continue en ℓ.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un point de I.
S'il existe des fonctions g et u telles que :

- f coïncide avec $g \circ u$ sur I;
- u est continue en x_0;
- g est continue en $u(x_0)$;

alors f est continue en x_0.

3) Dérivée d'une fonction composée

a) Rappel

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant le nombre réel x_0. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si il existe un nombre réel a et une fonction j définie sur un intervalle I de centre 0 tels que :

$$\begin{cases} \forall h \in I \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + hj(h); \\ \lim\limits_{0} j = 0. \end{cases}$$

Le nombre réel a ainsi déterminé, s'il existe, est unique; c'est le *nombre dérivé de f en x_0*, noté $f'(x_0)$. On dit alors que f est dérivable en x_0.
Pour étudier la dérivabilité de f en x_0, on peut aussi raisonner en termes de limites. En effet :

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe;
- dans ce cas, $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Remarque 1. Par définition des limites en un point autre que 0, il revient au même d'étudier :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

f est dérivable en x_0 si et seulement si cette limite existe, et on a aussi :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Scanné avec CamScanner

Remarque 2. Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en ce point. La réciproque de cette propriété est fausse (étudier par exemple la fonction valeur absolue en 0).

Exemples. Les limites de certains rapports peuvent être obtenues en interprétant ces rapports comme des taux d'accroissement de fonctions dérivables.

• Par exemple, on *retrouve* que $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ en utilisant la valeur de la fonction dérivée de la fonction sin en 0.

On a :
$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = (\sin)'(0)$$
$$= \cos 0$$
$$= 1.$$

• Soit à déterminer : $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$.

$\frac{\ln(1+h)}{h}$ est le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+h$. La limite cherchée vaut donc $(\ln)'(1)$.

Ainsi :
$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.}$$

Nous retiendrons cette limite comme limite de référence.

De manière équivalente, on a aussi :
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1.$$

b) **Nombre dérivé en un point d'une fonction composée**

Activité 1. Soit f une fonction monotone sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J. Soit g une fonction monotone sur l'intervalle J.
Déterminer, selon les sens de variation respectifs de f et g, le sens de variation de $g \circ f$. A quelle règle élémentaire le résultat trouvé fait-il penser?

Activité 2. Sur une certaine période, le prix du cacao, en dollars, augmente de 10 %, et la valeur du dollar, exprimée en Francs CFA, diminue de 10 %.
Quelle est la variation du prix du cacao exprimé en Francs CFA?

Activité 3. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{2+\ln x}{1-\ln x}$.

Quel est son ensemble de définition? Est-elle dérivable sur D_f? Calculer f'.

Remarquons d'autre part que f est la composée $g \circ \ln$, où g est définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad g(x) = \frac{2+x}{1-x}.$$

Calculer $g'(x)$, puis $g'(\ln x)$. Comparer à f'. Que constate-t-on?

Scanné avec CamScanner

Remarquons enfin que le taux d'accroissement de f entre x et x_0 s'écrit, pour $x \neq x_0$:

$$t_f(x, x_0) = \frac{g(\ln x) - g(\ln x_0)}{x - x_0}$$
$$= \frac{g(\ln x) - g(\ln x_0)}{\ln x - \ln x_0} \times \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0}.$$

Ainsi, le taux d'accroissement de f entre x et x_0 est le produit de celui de h entre x et x_0 par celui de g entre $\ln x$ et $\ln x_0$.
Quelle est la limite de $t_f(x, x_0)$ lorsque x tend vers x_0? Retrouver ainsi l'expression de la dérivée de f.
Plus généralement, on dispose, pour calculer le nombre dérivé en un point d'une fonction composée, du théorème suivant :

Théorème

Soit x_0 un nombre réel, et f une fonction dérivable en x_0.
Soit g une fonction dérivable en $f(x_0)$.
La fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0, et son nombre dérivé en x_0 est donné par :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \times f'(x_0).$$

Démonstration

Bien que cette démonstration ne soit pas à retenir en Terminales C et E, nous la donnons à titre d'information. Il est intéressant de voir comment y sont utilisés les développements limités à l'ordre 1 et le théorème donnant la limite d'une fonction composée.

Choisissons tout d'abord quelques notations; posons :

$$y_0 = f(x_0); \quad a = f'(x_0); \quad b = g'(y_0).$$

f étant dérivable, de nombre dérivé a, en x_0, il existe un élément r_1 de $\mathbb{R}_+^*$ et une fonction j_1 tels que :

$$(1) \qquad \begin{cases} \forall h \in]-r_1, r_1[\quad f(x_0+h) = f(x_0) + ah + hj_1(h). \\ \lim\limits_0 j_1 = 0. \end{cases}$$

De même, il existe un élément r_2 de $\mathbb{R}_+^*$ et une fonction j_2 tels que :

$$(2) \qquad \begin{cases} \forall k \in]-r_2, r_2[\quad g(y_0+k) = g(y_0) + bk + kj_2(k). \\ \lim\limits_0 j_2 = 0. \end{cases}$$

Remarquons que, en posant pour tout h de $]-r_1, r_1[$:

$$\eta(h) = ah + hj_1(h)$$

on définit une fonction η telle que :

$$(3) \qquad \begin{cases} \forall h \in]-r_1, r_1[\quad f(x_0+h) = f(x_0) + \eta(h). \\ \lim\limits_0 \eta = 0. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Établir le résultat du théorème, c'est écrire $g \circ f(x_0+h)$ sous la forme d'un développement limité à l'ordre 1.

On sait que $\lim_0 \eta = 0$. Dans ces conditions, on admet que, si l'on prend h « suffisamment proche de 0 », $\eta(h)$ est un élément de $]-r_2, r_2[$. En d'autres termes, il existe un nombre réel r_3 vérifiant $0<r_3<r_1$, et tel que :

$$\forall h \in]-r_3, r_3[\quad \eta(h) \in]-r_2, r_2[.$$

La composée $g \circ f$ est donc définie sur $]-r_3, r_3[$. De plus, d'après (2) et (3), on a, pour tout élément h de $]-r_3, r_3[$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x_0+h) &= g\left[f(x_0)+\eta(h)\right] \quad (\text{avec } \eta(h) \in]-r_2, r_2[) \\ &= g(y_0) + b\eta(h) + \eta(h) j_2 \circ \eta(h). \end{aligned}$$

D'où, en remplaçant les deux premières occurences de $\eta(h)$ par $ah + hj_1(h)$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x_0+h) &= g(y_0) + b\left(ah + hj_1(h)\right) + \left(ah + hj_1(h)\right) j_2 \circ \eta(h) \\ &= g(y_0) + bah + h\left[bj_1(h) + \left(a + j_1(h)\right) j_2 \circ \eta(h)\right]. \end{aligned}$$

Soit j_3 la fonction définie sur $]-r_3, r_3[$ par :

$$j_3(h) = bj_1(h) + \left(a + j_1(h)\right) j_2 \circ \eta(h).$$

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a :

$$\lim_0 j_2 \circ \eta = 0.$$

Donc, d'après les théorèmes généraux :

$$\lim_0 j_3 = 0.$$

Finalement, on a trouvé un intervalle ouvert $]-r_3, r_3[$ et une fonction j_3 tels que :

$$\begin{cases} \forall h \in]-r_3, r_3[\quad g \circ f(x_0+h) = g \circ f(x_0) + bah + hj_3(h) \\ \lim_0 j_3 = 0 \end{cases}$$

ce qui établit le théorème.

c) Fonction dérivée d'une fonction composée

Le théorème précédent est évidemment utilisé pour justifier la dérivabilité et trouver la fonction dérivée d'une fonction composée de deux fonctions dérivables. En appliquant ce théorème pour chaque élément d'un intervalle I, on obtient l'énoncé suivant.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et g une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J contenant $f(I)$.
La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I, et sa fonction dérivée vérifie sur I :

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'.$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 1. Soit la fonction $f : x \longmapsto \sin(x^2)$.
f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est la composée des deux fonctions $[u : x \longmapsto x^2]$ et sin, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = [(\sin)' \circ u(x)] \times u'(x)$$
$$= 2x \cos(x^2).$$

Exemple 2. La fonction $f : x \longmapsto \ln|\sin x|$ est définie sur $\mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire sur la réunion des intervalles disjoints $]k\pi, (k+1)\pi[$, où k décrit $\mathbb{Z}$.
Soit n un élément quelconque de $\mathbb{Z}$. Sur l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$, la fonction sin ne s'annule pas, et garde un signe constant. La fonction $|\sin|$ est donc dérivable sur cet intervalle, et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
f est donc dérivable sur $]n\pi, (n+1)\pi[$; calculons sa fonction dérivée sur cet intervalle.

— Si n est pair, alors sin est positive sur $]n\pi, (n+1)\pi[$. On a alors :

$$\forall x \in]n\pi, (n+1)\pi[\quad f'(x) = \frac{1}{\sin x} \times \cos x$$
$$= \frac{\cos x}{\sin x}.$$

— Si n est impair, alors sin est négative sur $]n\pi, (n+1)\pi[$. On a alors :

$$\forall x \in]n\pi, (n+1)\pi[\quad f'(x) = \frac{1}{-\sin x} = (-\cos x)$$
$$= \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Finalement, la fonction f est dérivable sur tout intervalle ouvert de son ensemble de définition, et sa fonction dérivée est $\frac{\cos}{\sin}$. Cette dernière fonction est appelée fonction *cotangente*, et notée *cot*.

Exemple 3. On peut retrouver à l'aide de ce théorème divers résultats établis en Première.

— Sachant que la dérivée de la fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right]$ est $\left[x \longmapsto -\frac{1}{x^2}\right]$, retrouver le résultat concernant la dérivée de $\frac{1}{f}$.

— De même, retrouver le résultat concernant la dérivée de la fonction $\sqrt{u}$, où u est une fonction positive et dérivable sur un intervalle ouvert I.

— Le théorème établi en Première concernant la dérivée d'une fonction de la forme $[x \longmapsto f(ax+b)]$ est un cas particulier du théorème précédent.

Exemple 4. Soit u est une fonction dérivable, ne s'annulant pas sur un intervalle ouvert I ; on peut montrer que u garde un signe constant sur I (voir chapitre suivant).
La fonction $\ln \circ |u|$ est alors dérivable sur I, et a pour fonction dérivée $\frac{u'}{u}$.

Scanné avec CamScanner

Remarque. Le théorème ne donne aucune indication dans le cas où l'une des fonctions intervenant dans la composée n'est pas dérivable. Une étude directe est alors nécessaire.

Par exemple, les fonctions

$$f_1 : x \longmapsto \sqrt{x^2}; \quad f_2 : x \longmapsto \sqrt{x^4}$$

sont, sur $\mathbb{R}$, les composées respectives de $[u_1 : x \longmapsto x^2]$ et $[u_2 : x \longmapsto x^4]$ avec la fonction $[g : x \longmapsto \sqrt{|x|}]$.

u_1 et u_2 sont toutes deux dérivables, de nombre dérivé nul en 0. Le théorème précédent ne s'applique pas puisque g n'est pas dérivable en 0.

En utilisant les expressions simplifiées des fonctions f_1 et f_2 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = |x| \quad \text{et} \quad f_2(x) = x^2$$

on constatera que f_1 n'est pas dérivable en 0, alors que f_2 l'est.

Exercices

1) Étudier la dérivabilité et calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$x \longmapsto \tan\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]; \quad x \longmapsto \ln(\ln x);$$

$$x \longmapsto \cos\sqrt{|x|} \quad ; \quad x \longmapsto \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

2) Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \ln\frac{2x+1}{1-x}; \quad f_2 : x \longmapsto \sin(\cos x).$$

4) Dérivées successives; notation $\frac{df}{dx}$

a) Dérivées successives

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et si f' est elle-même dérivable sur I, la fonction dérivée de f' est appelée *dérivée seconde* de f. Elle est notée f''.

De même, si f'' est dérivable sur I, on définit la dérivée troisième $f^{(3)}$ (ou f''') par : $f^{(3)} = (f'')'$.

D'une manière générale, la dérivée d'ordre n de f, $f^{(n)}$, est, si elle existe, la dérivée de $f^{(n-1)}$. Ainsi, en notant $f^{(0)}$, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ respectivement f, sa dérivée, et sa dérivée seconde, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

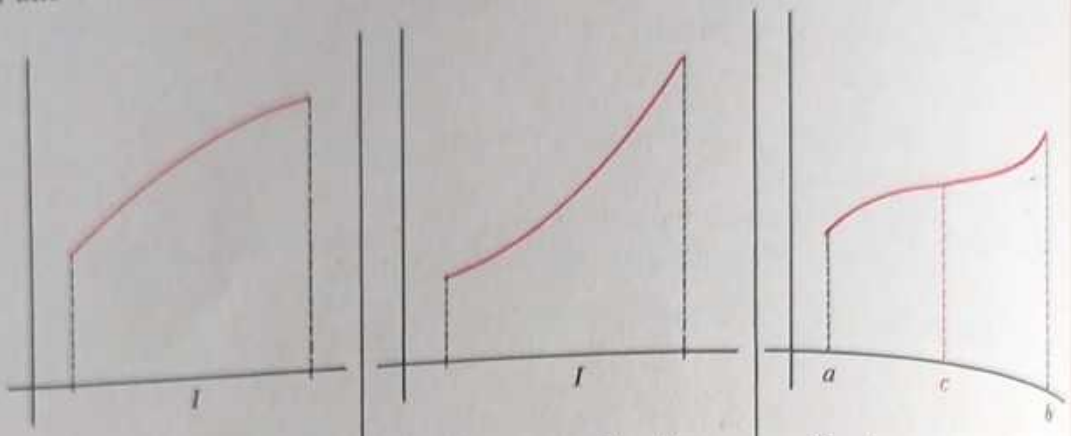
Nous verrons des utilisations de f'' et $f^{(3)}$ dans le chapitre 7.

La connaissance de la dérivée seconde d'une fonction peut permettre d'avoir des informations « qualitatives » sur l'allure de la courbe représentative de f.

Par exemple, soit f une fonction dont la dérivée f' est strictement positive sur un

Scanné avec CamScanner

intervalle ouvert I. La représentation graphique de f sur I peut avoir, par exemple, l'une des allures ci-dessous :



Croissance « de moins en moins forte » lorsque x croît. f' est décroissante sur I, et donc, dans ce cas :

$$\forall x \in I \quad f''(x) < 0$$

Croissance « de plus en plus forte » lorsque x croît. f' est croissante sur I, et donc, dans ce cas :

$$\forall x \in I \quad f''(x) > 0$$

Croissance « de moins en moins forte » sur $]a, c[$, puis « de plus en plus forte » sur $]c, b[$. f'' est négative sur $]a, c[$, positive sur $]c, b[$.

Exercices

1) Déterminer, par récurrence, la dérivée d'ordre n de : $\left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right]$

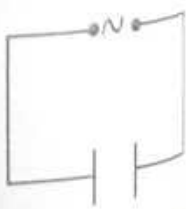
2) Montrer, par récurrence sur le nombre entier naturel n que, pour tout nombre réel x :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire $\cos^{(n)}$.

b) Notations $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$

La théorie des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'est développée en liaison avec l'étude des grandeurs physiques et de leurs variations. Notons toutefois que le point de vue du physicien est sensiblement différent de celui adopté, de nos jours, en mathématiques.
Ainsi, par exemple, considérons le circuit électrique ci-dessous.



La capacité du condensateur est C farads. Le générateur fournit un courant alternatif, de pulsation variable ω (en s^{-1}).

Dans ces conditions, l'impédance (en ohms) du condensateur est donné par :

$$Z = \frac{1}{C\omega}.$$

Scanné avec CamScanner

La pulsation étant liée à la période T du courant par la relation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

on écrit aussi :

$$Z = \frac{T}{2\pi C}.$$

Ainsi, à la grandeur physique Z peuvent être associées deux fonctions mathématiques :

— la fonction $f : \omega \longmapsto \frac{1}{C\omega}$;

— la fonction $g : T \longmapsto \frac{T}{2\pi C}$.

On a évidemment la relation :

$$g = f \circ h$$

où h est la fonction $\left[T \longmapsto \frac{2\pi}{T}\right]$.

De telles notations seraient très pénibles à utiliser en physique : l'intervention d'un autre paramètre, ou simplement un changement d'unités, obligerait à introduire de nouvelles notations.

Aussi, que l'on considère l'impédance comme fonction de la pulsation ou comme fonction de la période, on convient de garder la notation Z pour la désigner. On convient alors de noter $\frac{dZ}{d\omega}$ la dérivée de Z « considérée comme fonction de la pulsation » et $\frac{dZ}{dT}$ la dérivée de Z « considérée comme fonction de la période ».

Ainsi :

$$\frac{dZ}{d\omega} = f'; \quad \frac{dZ}{dT} = g'.$$

Attention! Dans la *définition mathématique* d'une fonction, le nom donné à la variable n'a aucune importance. Ainsi, les écritures :

$$\left[\omega \longmapsto \frac{1}{C\omega}\right] \text{ et } \left[T \longmapsto \frac{1}{CT}\right]$$

définissent la *même fonction mathématique*. Cependant, dans l'exemple précédent, $\frac{dZ}{d\omega}$ et $\frac{dZ}{dT}$ sont deux fonctions distinctes. En effet, Z n'est pas une fonction *au sens mathématique*.

Remarquons qu'avec ces notations, la formule donnant la dérivée d'une fonction composée, appliquée à Z, s'écrit simplement :

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{dZ}{d\omega} \times \frac{d\omega}{dT}.$$

Par tradition, en mathématiques, la dérivée d'une fonction dérivable f est parfois notée $\frac{df}{dx}$. Le nombre dérivé de f en x_0 est alors noté $\frac{df}{dx}(x_0)$.

De même, la fonction dérivée seconde de f est notée $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Scanné avec CamScanner

5) Limite à droite, limite à gauche, nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche

a) Limite à droite, limite à gauche

Exemple 1. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.
Son ensemble de définition est $[0, +\infty[$.
Les notions précédentes (limites, continuité, dérivabilité) permettent-elles de décrire le comportement de f en 0?
Quelle fonction, définie sur un intervalle ouvert contenant 0, peut-on utiliser pour décrire ce comportement?

Exemple 2. On rappelle que la fonction partie entière E est définie par :

$$\forall (x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad [E(x) = z \iff z \in \mathbb{Z} \text{ et } z \leqslant x < z + 1].$$

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = E(-x) + E(x).$$

Quelle est l'image par f d'un élément quelconque n de $\mathbb{Z}$?
Soit x un élément quelconque de l'intervalle $]n, n+1[$. Quelle est son image par f?
La fonction f admet-elle une limite en un point x_0 appartenant à $\mathbb{Z}$?

Pour décrire le comportement de telles fonctions, nous avons introduit en Première les notions de limite à droite et de limite à gauche, en 0, d'une fonction. Rappelons, et généralisons, les définitions données en Première.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]x_0, x_0 + r[$.
Si f coïncide sur I avec une fonction g de limite ℓ en x_0, on dit que f admet ℓ pour **limite à droite** en x_0, et on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell.$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]x_0 - r, x_0[$.
Si f coïncide sur I avec une fonction g de limite ℓ en x_0, on dit que f admet ℓ pour **limite à gauche** en x_0, et on écrit :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell.$$

Exemple 1. Nous avons vu au chapitre 1 que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0.$$

Exemple 2. Soit la fonction $f : x \longmapsto x - E(x)$.
Étudions son comportement au point 1.

Scanné avec CamScanner

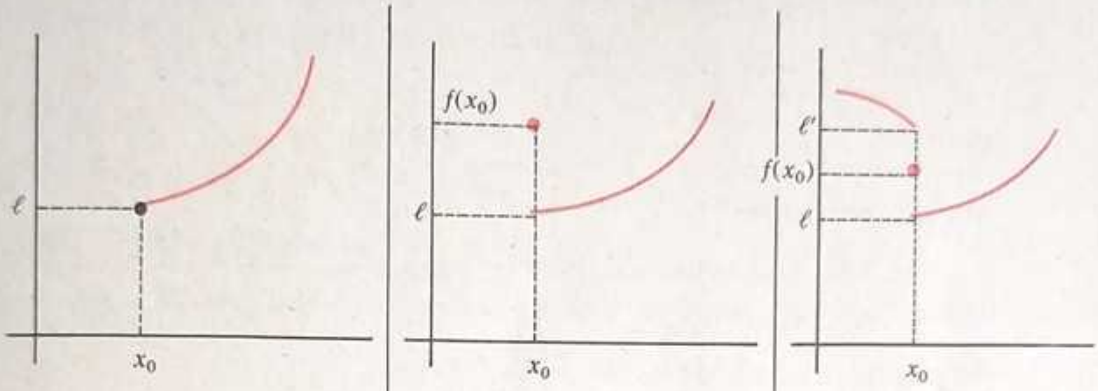
• Sur $]0; 1[$, f coïncide avec la fonction affine $[x \longmapsto x]$; donc :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = 1.$$

• Sur $]1; 2[$, f coïncide avec la fonction affine $[x \longmapsto x-1]$; donc :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = 0.$$

Attention. Un résultat énoncé en termes de limite à droite ne donne aucune indication concernant le comportement de f en x_0, et « à gauche de x_0 ».
On peut par exemple, se trouver dans l'une des situations suivantes :



f n'est définie ni en x_0, ni à gauche de x_0.

f est définie en x_0 et $f(x_0) \neq \ell$.

f est définie à gauche de x_0, et a une limite à gauche distincte de ℓ.

Remarque 1. Pour une fonction f *définie en* x_0 :

$$\lim_{x_0} f = \ell \iff \left[f(x_0) = \ell \text{ et } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell \right].$$

Pour une fonction f, *non définie en* x_0 :

$$\lim_{x_0} f = \ell \iff \left[\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \ell \right].$$

Remarque 2. Soit f une fonction définie en x_0, et telle que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$.

Si f est telle que $f(x_0) = \ell$, on dit que f est *continue à droite* en x_0.
On définit de même la *continuité à gauche.*
On notera qu'une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

Remarque 3. Les théorèmes généraux s'appliquent aux cas des limites à droite et à gauche, *à condition qu'il s'agisse de limites de même nature pour toutes les fonctions considérées.*

Ainsi, de : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} g(x) = \ell'$

Scanné avec CamScanner

on peut déduire que : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (f+g)(x) = \ell + \ell'$.

Mais, on ne peut rien déduire des hypothèses :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} g(x) = \ell'.$$

b) **Limite à droite ou à gauche dans une fonction composée**

Le théorème donnant la limite d'une fonction composée admet aussi des extensions au cas d'une limite à droite ou à gauche.
Si, sur un intervalle du type $]x_0, x_0 + r[$, une fonction f coïncide avec $g \circ u$, où u et g sont des fonctions telles que :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} u(x) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{\ell} g = \lambda$$

alors : $$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lambda.$$

Ainsi, par exemple :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1; \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Par contre, examinons le cas de la fonction :

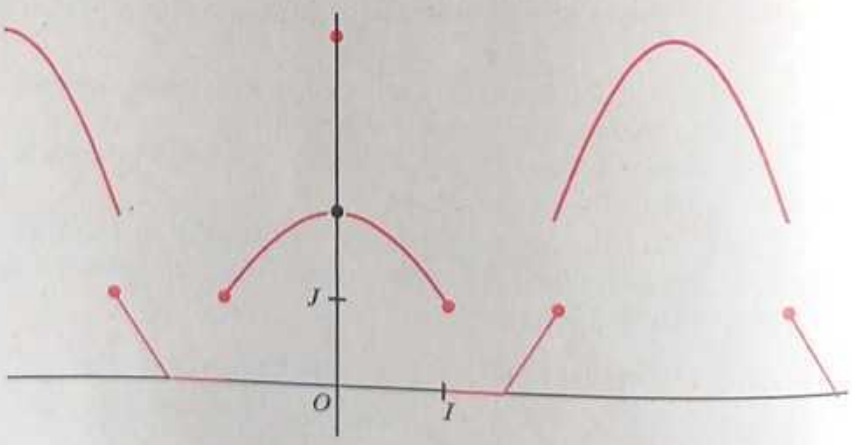
$$f : x \longmapsto (2 \cos x) E(2 \cos x).$$

On peut étudier f à un niveau élémentaire (sans utiliser de notion de limite).
Montrer que f est paire, périodique de période 2π.
On choisit alors comme intervalle d'étude $[0; \pi]$.
Montrer que f est définie sur cet intervalle par :
$f(0) = 4$

$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{3}\right]$ $\quad f(x) = 2 \cos x$; $\qquad$ $\forall x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ $\quad f(x) = -2 \cos x$;

$\forall x \in \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad f(x) = 0$; $\qquad$ $\forall x \in \left]\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ $\quad f(x) = -4 \cos x$.

f admet donc la représentation graphique ci-dessous.



Scanné avec CamScanner

D'après l'étude ci-dessus, le comportement de f aux points 0, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ est décrit par :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=2; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=2; \qquad f(0)=4$$

$$\lim_{\substack{x\to \pi/3\\ x<\pi/3}} f(x)=1; \qquad \lim_{\substack{x\to \pi/3\\ x>\pi/3}} f(x)=0; \qquad f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}} f=0.$$

Examinons de quelle manière ces résultats peuvent être retrouvés en utilisant le théorème donnant la limite d'une fonction composée.
La fonction f est la composée $g\circ u$, où g est la fonction $[x \longmapsto x\,E(x)]$ et u la fonction 2 cos.

Étude en $\frac{\pi}{2}$

On sait que : $\lim_{\frac{\pi}{2}} 2\cos=0.$

Montrer d'autre part que : $\lim_{x\to 0} x\,E(x)=0.$

En ce point, le théorème sur la limite d'une fonction composée s'applique sans restriction, et on a :

$$\boxed{\lim_{\frac{\pi}{2}} f=0.}$$

Étude en $\frac{\pi}{3}$.

On a : $$\begin{cases} \lim\limits_{\frac{\pi}{3}} 2\cos=1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} xE(x)=0; \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} xE(x)=1 \end{cases} \qquad (1)$$

Pour utiliser, dans un tel cas, le théorème donnant la limite d'une fonction composée, il faut étudier si la première fonction (ici, la fonction 2 cos) prend ou non ses valeurs dans un intervalle « concerné par la limite considérée pour la deuxième fonction » (ici, l'intervalle [0; 1[lorsque l'on considère la limite à gauche de g, et]1; 2[lorsque l'on considère la limite à droite de g).

Sur tout intervalle ouvert de centre $\frac{\pi}{3}$, la fonction 2 cos prend des valeurs « à droite et à gauche » de 1. Il est impossible de déduire un résultat quelconque des seules hypothèses (1).
Par contre, les hypothèses :

- $\lim\limits_{\substack{x\to \pi/3\\ x<\pi/3}} 2\cos x=1$ (que l'on déduit de $\lim\limits_{\pi/3} 2\cos=1$)
- $\forall x\in\left]0;\frac{\pi}{3}\right[\qquad 2\cos x\in]1;2[$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} xE(x)=1$

Scanné avec CamScanner

permettent de conclure : $\boxed{\lim_{\substack{x\to\pi/3\\x<\pi/3}} f(x)=1.}$

En effet, le résultat concernant la limite de g décrit le comportement de g lorsque la variable reste dans un intervalle de la forme $]1; 1+\rho[$. Or, précisément lorsque x tend vers $\frac{\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $u(x)$ décrit un tel intervalle.

De même, des hypothèses :

- $\lim_{\substack{x\to\pi/3\\x>\pi/3}} 2\cos x = 1$
- $\forall x \in \left]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad 2\cos x \in [0; 1[$
- $\lim_{\substack{x\to 1\\x<1}} xE(x)=0$

on déduit : $\boxed{\lim_{\substack{x\to\pi/3\\x>\pi/3}} f(x)=0.}$

Étude en 0.

On sait que : $\lim_{0} 2\cos = 2.$

De plus : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 2\cos x \leqslant 2.$

D'autre part : $\lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} g(x)=1.$

Mais, comme $u(0)=2$, on ne peut pas appliquer directement le théorème (qui conduirait à un résultat erroné!).

Par contre, comme :

$\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} 2\cos x = 2$; $\quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ $\quad 2\cos x < 2$; $\quad \lim_{\substack{x\to 2\\x<2}} g(x)=1$

on a : $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=2.}$

Et, de même, $\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=2.}$

On termine l'étude par le calcul de $f(0)$. Comme $f(0)=4$, ceci montre que f n'admet pas de limite en 0.

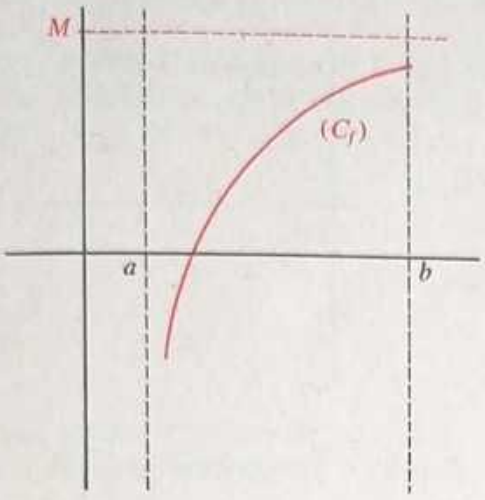
c) **Limites aux bornes d'un intervalle d'une fonction monotone sur cet intervalle**

Signalons enfin le théorème suivant, que nous admettrons.

Soit f une fonction monotone croissante sur un intervalle ouvert $]a, b[$.
Si f est majorée, alors elle admet une limite à gauche en b.
Si f est minorée, alors elle admet une limite à droite en a.

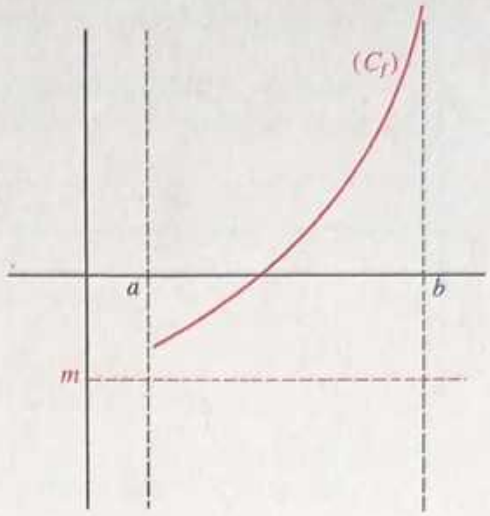
Scanné avec CamScanner

Illustration



f est croissante
$\forall x \in]a, b[\quad f(x) \leqslant M$

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x)$ existe



f est croissante
$\forall x \in]a, b[\quad m \leqslant f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ existe

Remarque 1. Énoncer un résultat analogue dans le cas d'une fonction décroissante.

Remarque 2. Le cas où f n'est pas bornée sera traité au paragraphe suivant. Ce théorème pourrait permettre de justifier l'existence de limites à droite ou à gauche pour des fonctions dont on a peu de renseignements. Nous n'aurons guère l'occasion de l'utiliser sous cette forme en Terminale. Par contre, son intérêt est de nous rassurer : une fonction f, définie et bornée sur $]a, b[$ et n'ayant pas de limite lorsque x tend vers b par valeurs inférieures n'est monotone sur aucun intervalle de la forme $]b-r, b[$. Une telle fonction est difficile à concevoir, et n'appartient pas aux types que nous étudions habituellement. La construction de tels exemples de fonctions dépasse en effet le cadre du programme de Terminale.

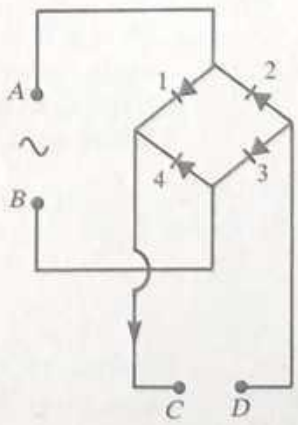
d) Dérivée à droite, dérivée à gauche

Introduction

Considérons le montage électrique suivant :

Le circuit est alimenté entre les bornes A et B par un générateur de courant alternatif sinusoïdal de période T. La tension U entre les bornes A et B est une fonction du temps donnée par :

$$U(t) = U_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right).$$



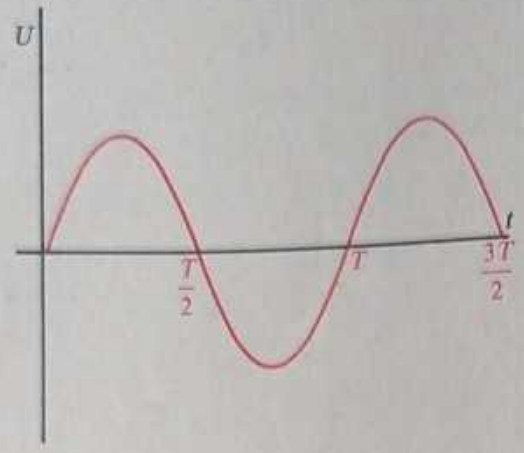
Le montage en pont des diodes 1, 2, 3 et 4 permet d'obtenir entre C et D, une tension redressée V telle que :

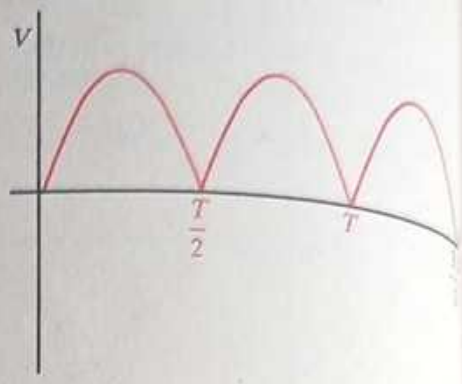
$$V(t) = U_0 \left|\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right|.$$

(On néglige la chute de tension dans les diodes.)

Scanné avec CamScanner

La courbe représentative de V se déduit de celle de U.





La fonction V n'est visiblement pas dérivable aux points 0, $\frac{T}{2}$, T, ...

Par contre, comme V coïncide sur $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ par exemple, avec la fonction U dérivable en $\frac{T}{2}$, on dit que V est *dérivable à gauche* en $\frac{T}{2}$.

De même, en utilisant la fonction $-U$, on montre que V est *dérivable à droite* en $\frac{T}{2}$.

Plus généralement, nous avons donné en Première les définitions suivantes.

Définitions

Soit x_0 un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r, x_0]$.
f est **dérivable à gauche** en x_0, et admet le nombre réel ℓ pour **nombre dérivé à gauche** en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

De même, soit x_0 un nombre réel, et f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0 + r[$.
f est **dérivable à droite** en x_0, et admet le nombre réel ℓ pour **nombre dérivé à droite** en x_0 si et seulement si :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell.$$

Remarque 1. Si une fonction admet un nombre dérivé à droite (respectivement à gauche) en un point, alors elle est continue à droite (respectivement à gauche) en ce point. La réciproque de ce résultat est fausse (exemple : $[x \longmapsto \sqrt{x}]$ en 0).

Scanné avec CamScanner

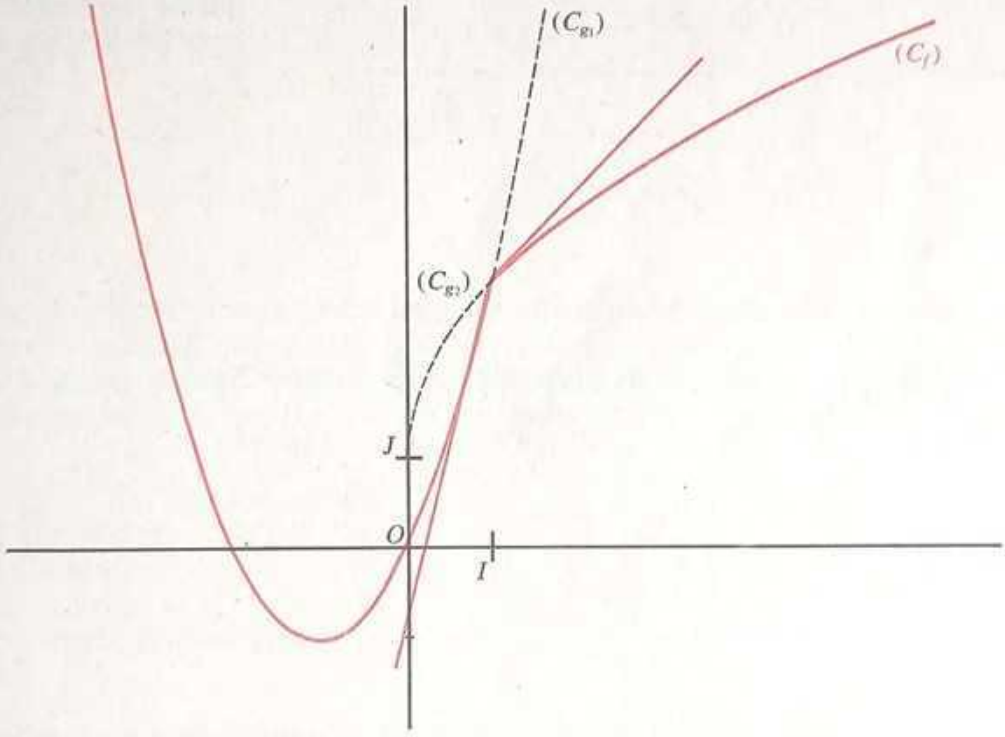
Remarque 2. D'après la définition d'une limite à droite, f est dérivable à droite en x_0 si et seulement si elle coïncide sur un intervalle de la forme $[x_0, x_0+r[$ avec une fonction g dérivable en x_0. Le nombre dérivé à droite de f en x_0 est alors $g'(x_0)$.
Une remarque analogue peut être faite pour la dérivabilité à gauche.
C'est souvent de cette manière que l'on justifiera, en pratique, la dérivabilité à droite ou à gauche d'une fonction.

Exemple 1. Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 1] & f(x) = x^2 + 2x; \\ \forall x \in]1; +\infty[& f(x) = 1 + 2\sqrt{x}. \end{cases}$$

Soit : $g_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2 + 2x$ $\quad$ $x \longmapsto 1 + 2\sqrt{x}$.

Nous savons représenter graphiquement g_1 et g_2. La représentation graphique de f est donc la suivante :



• f coïncide sur $]-\infty; 1]$ avec la fonction g_1, dérivable sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable à gauche en 1 et le nombre dérivé de f à gauche en 1 est $g_1'(1)$, c'est-à-dire 4.

• Comme $g_2(1) = f(1)$, f coïncide sur $[1; +\infty[$ avec g_2, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable à droite en 1, et le nombre dérivé de f à droite en 1 est $g_2'(1)$, c'est-à-dire 1.

• f n'est pas dérivable au point 1. Géométriquement, on dit que (C_f) admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes à gauche et à droite, de coefficients directeurs respectifs 4 et 1.

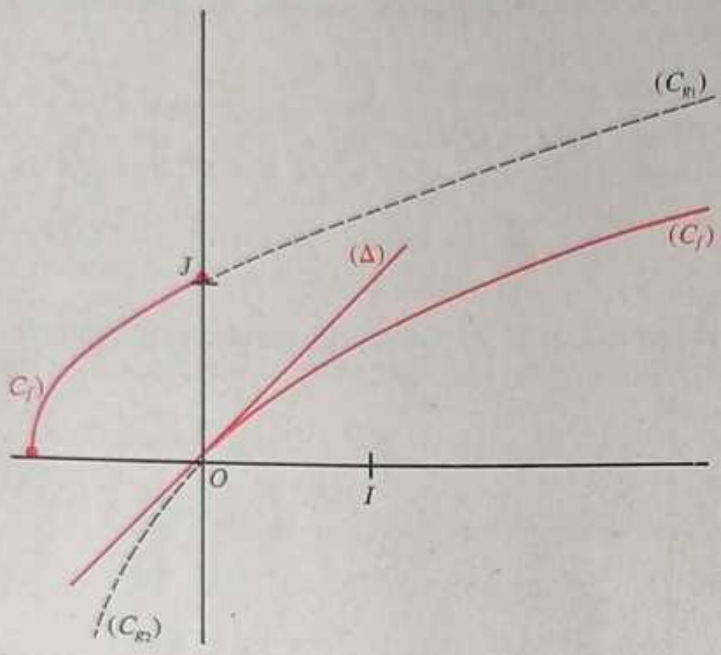
Exemple 2. Soit la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [-1; 0] & f(x) = \sqrt{1+x}; \\ \forall x \in]0; +\infty[& f(x) = \ln(1+x). \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

On représente graphiquement f en utilisant les courbes représentatives des fonctions :

$$g_1 : x \longmapsto \sqrt{1+x} \quad \text{et} \quad g_2 : x \longmapsto \ln(1+x).$$



On peut vérifier que f est dérivable à gauche en 0, mais non dérivable à droite en ce point. Cependant, la droite (Δ), tangente à (C_{g_2}) en O, constitue un élément géométrique remarquable permettant d'améliorer la précision du tracé de (C_f).

Exemple 3. Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x\left(x \ln |x| + 1\right).$$

On sait que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0.$

On en déduit que : $\lim\limits_{0} f = 0.$

On ne peut évidemment pas envisager la dérivabilité de f en 0, puisque f n'y est pas définie. Il serait toutefois utile, pour construire la courbe représentative (C_f) de f, de connaître sa forme au voisinage de 0.

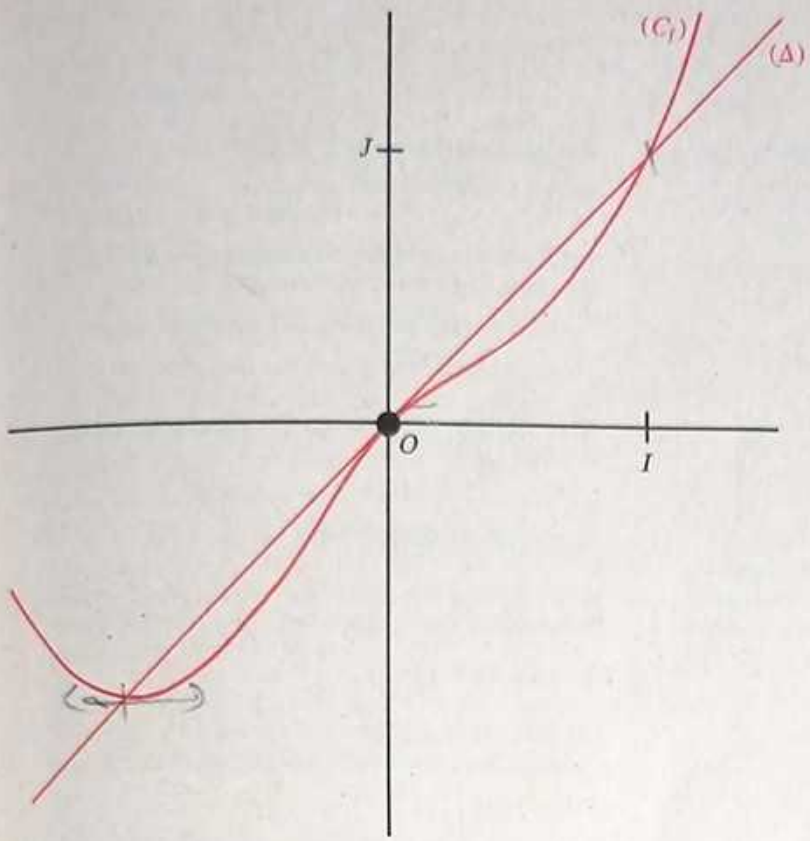
Pour cela, considérons la prolongée φ de f à $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* & \varphi(x) = f(x) \\ & \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

φ est continue en 0. On dit que φ est obtenue *en prolongeant f par continuité* en 0. D'autre part, une étude directe montre que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 1.$$

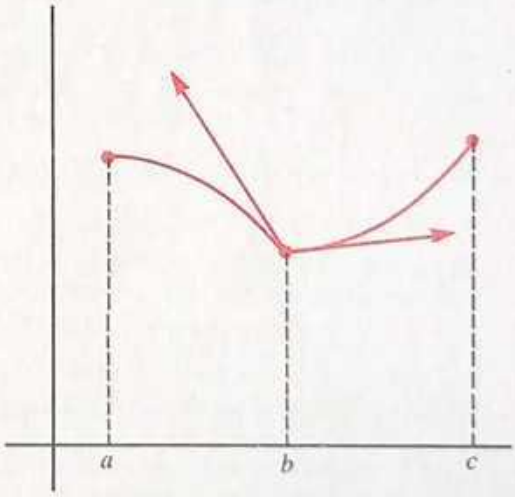
Scanné avec CamScanner



Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
La courbe représentative (C_φ) de φ admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ comme tangente en O.
(Δ) n'est pas tangente à (C_f) en O, puisque O n'appartient pas à (C_f). Par contre, (Δ) est un élément géométrique qui permet d'améliorer la précision du tracé de (C_f).

Remarque. Nous savons que, lorsqu'on dit qu'une fonction est dérivable sur un intervalle *ouvert* I, cela signifie que f est dérivable en tout point de I.
Une fonction *dérivable sur un intervalle fermé* $[a, b]$ est une fonction dérivable en chaque point de $]a, b[$, dérivable à droite en a et à gauche en b.

Attention! On notera qu'une fonction peut être dérivable sur deux intervalles fermés consécutifs $[a, b]$ et $[b, c]$ sans pour autant être dérivable en b.



Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Étudier les fonctions f et g définies par :

$$f(x)=\sin x-\sin^2 x;\quad g(x)=\frac{\sin x}{2-\cos^2 x}.$$

Construire leurs représentations graphiques dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

2 Étudier les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \sin x+\frac{\sin 3x}{3};$$

$$f_2 : x \longmapsto \sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5};$$

$$f_3 : x \longmapsto \sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}.$$

Tracer sur un même dessin les courbes représentatives (C_1), (C_2) et (C_3) de f_1, f_2 et f_3 et la courbe d'équation $y=\sin x$.

3 Étudier les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \sin x-\frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$f_2 : x \longmapsto \sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x;$$

$$f_3 : x \longmapsto \sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x.$$

Tracer sur un même dessin les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2, f_3 et celle de la fonction $[x \longmapsto \sin x]$.

4 *a*) Étudier la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x^4}{9}-\frac{x}{3}+2.$$

(On admet qu'il existe un unique nombre réel α tel que $\alpha^3=\frac{3}{4}$; on obtient une valeur approchée de ce nombre à l'aide d'une calculette en appuyant sur : 0.75 x^y 0.33333 =.)

b) Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 de la courbe (C).
Soit g la fonction affine dont (T) est la représentation graphique.
Encadrer $f(x)-g(x)$ pour x élément de $[-1; 1]$, de $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
Tracer la courbe (C).

5 L'expression $\psi(x)$ définie par :

$$\psi(x)=2-\sin^2 x-\sin^2(a+x)-2\cos a\cos x\cos(a+x)$$

est indépendante de x. Le démontrer au moyen de deux méthodes différentes :

— en utilisant les formules de transformation;

— en considérant ψ comme une fonction de x.

6 Justifier la dérivabilité et calculer la fonction dérivée de :

$$f : x \longmapsto \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x.$$

Expliquer le résultat obtenu.

7 *a*) Soit la fonction $f : x \longmapsto |x-1|+|2x|$. Déterminer les extrémums absolus de f sur $[-1; 2]$, puis sur $\left]-2; \frac{8}{3}\right]$.

b) Soit la fonction $g : x \longmapsto |x^4-5x^2+4|$. Déterminer le maximum absolu de f sur l'intervalle $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

8 Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels distincts. Comment faut-il choisir le nombre réel x pour que la somme :

$$(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

soit minimale?

9 Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit A le point de coordonnées (3; 1). Une droite variable (Δ) passant par A coupe les demi-droites ouvertes $]OI)$ et $]OJ)$ respectivement en B et C.
Déterminer (par une équation) la droite (Δ) de façon que le triangle ABC ait une aire minimum.

10 Un circuit électrique comporte en série une résistance R, une inductance L et une capacité C. Lorsque ce circuit est parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω, son impédance Z est donnée par :

$$Z=\sqrt{R^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}.$$

Trouver le minimum de Z lorsque ω varie.

11 Étant donné un triangle ABC, on désigne respectivement par a, b et c les mesures des longueurs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, et par α, β et γ les mesures (en radians) des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Scanné avec CamScanner

Soit un triangle variable ABC tel que b et c soient fixes, et α variable.
Montrer que la dérivée de a par rapport à α est la mesure h de la longueur de la hauteur issue de A.

12 Soit a et b deux nombres réels tels que : $0<a<b$.

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$.

1) Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{R}$ la fonction f est-elle définie? dérivable? Déterminer f'.

2) Soit la fonction :

$$g : x \longmapsto a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1).$$

Calculer g'. En déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

3) Démontrer que :

$$\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right)<(\ln 2)^2.$$

13 Déterminer un intervalle de la forme $]-r, r[$ et une constante k tels que :

$$\forall x\in]-r, r[\quad |f(x)|\leqslant k|x|$$

dans chacun des cas suivants :

$f(x)=5x^2-3x$; $\quad f(x)=\dfrac{3x}{1+x}$;

$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$; $\quad f(x)=\dfrac{2x}{1+3|x|}$;

$f(x)=\dfrac{4x}{3+\cos x}$.

14 Étudier le comportement des fonctions suivantes au voisinage du point x_0 indiqué :

a) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x+7}-3}$; $\quad x_0=1$;

b) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; $\quad x_0=1$;

c) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\tan x-1}$; $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

d) $x \longmapsto \dfrac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3\sin x}$; $\quad x_0=0$;

e) $x \longmapsto \dfrac{1}{2(1-\cos x)}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$; $\quad x_0=0$.

15 Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{4-x}}; \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{(2+x)^3}-2\sqrt{2}}{x}.$$

16 Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (Γ) la parabole d'équation $y=x^2$.
Soit $M_h(h, h^2)$ un point de (Γ) distinct de O.

a) Montrer qu'il existe un unique cercle (C_h) tangent en O à (OI) et passant par M_h.
Construire géométriquement son centre Ω_h.

b) Calculer en fonction de h le rayon $R(h)$ du cercle (C_h).

Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} R(h)$.

N.B. Cette limite est appelée *rayon de courbure en O* de la parabole (Γ).

17 Dans une entreprise, le coût de production C d'une certaine denrée est donné, en fonction de la quantité produite Q par :

$$C(Q)=16{,}68+0{,}125\,Q+0{,}004\,39\,Q^2.$$

a) Quel est le coût de production lorsque $Q=50$?
En choisissant comme approximation de $C(Q)$, le développement limité à l'ordre 1 de C au voisinage de 50, évaluer $C(51)-C(50)$.

b) La fonction C' est appelée *coût marginal*.
La fonction M définie par :

$$M(Q)=\frac{C(Q)}{Q}$$

est appelée *coût moyen*.
Déterminer Q_0 tel que $C'(Q_0)=M(Q_0)$.
Il est intéressant pour l'entreprise de produire la quantité Q_0. Pourquoi?

18 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, ne s'annulant pas sur I. La *variation relative* de f entre les points x_0 et x_0+h de I est la quantité :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0)}.$$

On la note $E_f(x_0, x_0+h)$.
De même, la variation relative de la variable entre x_0 et x_0+h est $\dfrac{h}{x_0}$, notée $E(x_0, x_0+h)$.

Scanné avec CamScanner

Les variations relatives sont souvent exprimées en pourcentages.

a) On suppose f dérivable en x_0.

Exprimer $\lim_{h\to 0} \frac{E_f(x_0, x_0+h)}{E(x_0, x_0+h)}$ à l'aide de x_0, $f'(x_0)$ et $f(x_0)$.

b) On suppose dans cette question que :

$$I=]1;3[; \quad f(x)=1+x+x^2.$$

En choisissant comme approximation de $f(x)$ le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 2, donner une valeur approchée de la variation relative de $f(x)$ lorsque la variation relative de x est de 1 % à partir du point 2.

Lorsque f est dérivable sur I, la fonction $\left[x \longmapsto x\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$ est appelée *élasticité* de la fonction f.

2) L'exemple classique est l'élasticité de la demande d'un produit par rapport au prix. Pour un produit donné sur un marché donné, la demande Q (c'est-à-dire la quantité que l'on peut espérer vendre) est fonction du prix de vente p : plus ce dernier est élevé, et plus la demande est faible.

a) Une fonction de demande Q d'un certain produit par rapport à son prix p est donnée par :

$$Q(p)=200\,000-100p-10p^2.$$

Calculer l'élasticité de la fonction Q.
Déterminer une valeur approchée de la variation de la demande correspondant à une augmentation de prix de 1 % à partir de $p=100$.

b) Quelles sont les fonctions Q ayant une élasticité nulle?
Que peut-on penser d'un produit pour lequel l'élasticité de la demande serait nulle?

c) On suppose la demande Q liée au prix p par une relation de la forme :

$$Qp^n=b$$

où n est un nombre entier naturel et b un nombre réel. Calculer l'élasticité de Q.

19 On considère une fonction numérique f de la variable réelle x vérifiant la double condition :

$$(1)\ \begin{cases} f \text{ est dérivable au point 0;} \\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy. \end{cases}$$

1) Montrer que $f(0)=0$.

2) Montrer qu'en tout point x appartenant à $\mathbb{R}$, f est dérivable et que :

$$f'(x)=f'(0)+4x$$

où f' désigne la dérivée de f.

3) En déduire que f vérifie la condition (1) si, et seulement si, pour tout x élément de $\mathbb{R}$:

$$f(x)=mx+2x^2$$

où m est un paramètre réel.

Bac C - Congo - 1980 (Extrait)

20 Soit f et g deux fonctions dérivables en un point a d'un intervalle ouvert I. On suppose que g ne s'annule pas sur $I-\{a\}$.

a) Démontrer que, si $f(a)=g(a)=0$, et si $g'(a)\neq 0$, alors:

$$\lim_a \frac{f}{g}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

b) Utiliser ce résultat pour calculer :

$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^5-3x^4+4x^2-5x}{x^9-x^7};$$

$$\lim_{x\to 64} \frac{x^2-10x-3456}{\sqrt{x}-8}.$$

21 1) Soit la fonction $f : x \longmapsto x+\sqrt{1+x^2}$. Déterminer son ensemble de définition et son sens de variation.
Quel est le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$?

2) Étudier le sens de variation sur $\mathbb{R}_+^*$ des fonctions :

$$g : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right); \quad h : x \longmapsto \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

3) Soit n un nombre entier naturel non nul et P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad P_n(x)=\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{1+x^2})^n + (x-\sqrt{1+x^2})^n\right].$$

a) Montrer que P_n est une fonction polynôme dont on précisera le degré.

b) Soit φ_n la fonction $[x \longmapsto x^n]$.
Montrer que l'on a, suivant la parité de n :

$$P_n=g\circ\varphi_n\circ f \quad \text{ou} \quad P_n=h\circ\varphi_n\circ f.$$

En déduire le sens de variation de P_n.

22 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, et ne s'annulant pas sur I.

a) Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction $\ln\circ|f|$. Cette dérivée est appelée *dérivée logarithmique* de f.

Scanné avec CamScanner

b) On suppose que $f = g_1 g_2$, où g_1 et g_2 sont deux fonctions dérivables sur I. Calculer la dérivée logarithmique de f en fonction de celles de g_1 et g_2.

c) On suppose que $f = \frac{g_1}{g_2}$, où g_1 et g_2 sont deux fonctions dérivables sur I.
Calculer la dérivée logarithmique de f en fonction de celles de g_1 et g_2.

d) On suppose que $f = g^n$, où g est une fonction dérivable sur I et où n est un nombre entier relatif.
Calculer la dérivée logarithmique de f en fonction de celle de g.

e) Montrer que, si f est positive sur I, son sens de variation se déduit de l'étude du signe de sa dérivée logarithmique.

23 Soit I, J et K trois intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur I, à valeurs dans J, g une fonction dérivable sur J à valeurs dans K et h une fonction dérivable sur K.
Montrer que $(h \circ g) \circ f$ est dérivable sur I et exprimer sa fonction dérivée à l'aide de f, g, h, f', g' et h'.

24 Soit I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I, à valeurs dans J, et g une fonction deux fois dérivable sur J.
Monter que $g \circ f$ est deux fois dérivable sur I et exprimer $(g \circ f)''$ à l'aide de f'', g'', f', g' et f.

Application. Calculer la dérivée seconde de la fonction $\left[x \longmapsto \ln(\tan x)\right]$ sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

25 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = x^{n-1} \ln x.$$

26 *Formule de Leibniz.*
Soit f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle ouvert.

a) On suppose que $n = 4$.
Calculer $(fg)'$, $(fg)''$, $(fg)^{(3)}$ et $(fg)^{(4)}$.

b) On revient au cas général. Montrer que :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}.$$

27 En utilisant la méthode envisagée dans le cours, trouver un encadrement d'amplitude 2×10^{-3} de $\ln(e^4 + 2)$.

28 *a*) Montrer que :

$$0{,}1 \cos\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}1\right) \leqslant \sin\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}1\right) - \sin\frac{\pi}{6} \leqslant 0{,}1 \cos\frac{\pi}{6}.$$

b) Procéder de même pour trouver un encadrement de $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}1\right) - \cos\frac{\pi}{6}$.

c) En déduire un encadrement d'amplitude 7×10^{-3} de $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0{,}1\right)$ par des nombres décimaux.

29 Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2|x|$.
Étudier la dérivabilité de f en 0.
Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative.

30 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -1] \quad f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^3 - 1} \\ \forall x \in]-1; +\infty[\quad f(x) = (x+1)\ln(x+1). \end{cases}$$

Étudier la continuité de f en -1.
Étudier la dérivabilité de f.
Construire la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-2; 2]$.

31 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in [-\infty; 1[\quad f(x) = x \\ \forall x \in]2; +\infty[\quad f(x) = 2x + 1 \\ f \text{ coïncide avec une fonction polynôme } g \text{ sur } [1; 2]. \end{cases}$$

Déterminer g de façon que f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et que le degré de g soit le plus bas possible.
Représenter graphiquement la fonction f.

32 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert centré en x_0.

a) On suppose f dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0)$ en ce point.
Trouver la limite en 0 de la fonction :

$$h \longmapsto \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h^2}.$$

b) On suppose que la fonction :

$$h \longmapsto \frac{f(x_0 + h^2) - f(x_0)}{h^2}$$

admet une limite en 0.
f est-elle nécessairement dérivable en x_0 ?

Scanné avec CamScanner

c) On suppose f dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0)$ en ce point.
Trouver la limite en 0 de la fonction :

$$\varphi : h \longmapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}.$$

d) On suppose f dérivable à gauche et à droite en x_0, de nombres dérivés à gauche et à droite respectifs a et b.

Déterminer : $\lim_{h \to 0} \varphi(h)$.

e) On suppose que φ admet une limite en 0. f est-elle nécessairement dérivable en x_0? Admet-elle nécessairement un nombre dérivé à gauche et un nombre dérivé à droite en x_0?

33 E désigne la fonction partie entière. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leqslant f(x) \leqslant x.$$

a) Que vaut $f(n)$ pour n élément de $\mathbb{Z}$?

b) On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit n un élément de $\mathbb{Z}$.

Montrer, en encadrant $\frac{f(n+h)-f(n)}{h}$ pour $h \in]0; 1[$, puis pour $h \in]-1; 0[$, que $f'(n)=1$.

c) Soit la fonction : $x \longmapsto x - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2}$.

Montrer qu'elle vérifie l'inégalité envisagée au *a*) et tracer sa représentation graphique.

Scanné avec CamScanner

3 Extensions de la notion de limite. Fonctions continues sur un intervalle

1) EXTENSIONS DE LA NOTION DE LIMITE
2) BRANCHES INFINIES D'UNE COURBE PLANE D'ÉQUATION $y = f(x)$
3) PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE. FONCTIONS RÉCIPROQUES
4) FONCTIONS PUISSANCES D'EXPOSANT RATIONNEL

1 Extensions de la notion de limite

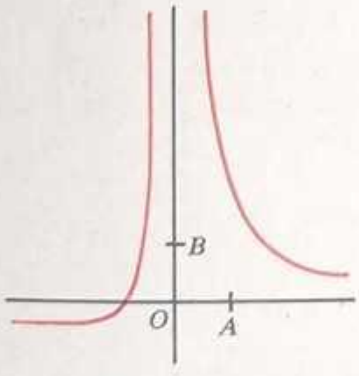
1) Fonctions non bornées au voisinage d'un point

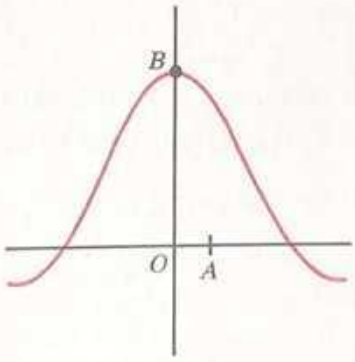
a) **Introduction**

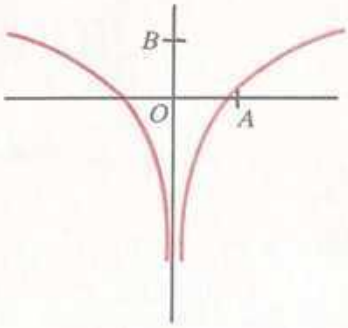
Considérons les fonctions :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{x+1}{x^2}; \quad f_2 : x \longmapsto \frac{\sin x}{x}; \quad f_3 : x \longmapsto \ln|x|$$

et leurs représentations graphiques respectives :







Ces trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^*$. On peut montrer que f_2 vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leqslant f_2(x) \leqslant 1.$$

Par contre, on constate graphiquement (en imaginant ce qu'il se passe « en dehors » de la feuille de papier) que f_1 et f_3 ne sont pas bornées au voisinage de 0.

Scanné avec CamScanner

Par exemple, soit I l'intervalle $]-1; 1[$, et M un nombre réel positif quelconque. Montrons qu'il existe des éléments x de $I-\{0\}$ tels que $|f_3(x)|>M$.
Soit n la partie entière de M. C'est un élément de $\mathbb{N}$.

Par conséquent : $e^{-(n+1)} \in]-1; 1[$.

D'autre part : $|f_3(e^{-(n+1)})| = n+1$,

d'où : $|f_3(e^{-(n+1)})| > M$.

$|f_3|$ n'est donc majorée par aucun nombre réel positif M sur $I-\{0\}$.

b) **Fonctions admettant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en x_0**

Lorsqu'une fonction f n'est pas bornée au voisinage d'un point x_0, le cas usuel est celui où $|f(x)|$ prend des valeurs de plus en plus grandes lorsque x se rapproche de x_0. Ce cas est aussi celui où $\dfrac{1}{|f(x)|}$ prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0.

Par exemple, dans le cas de la fonction f_1 précédente, on a :

x	-10^{-1}	-10^{-3}	-10^{-5}	0	10^{-5}	10^{-3}	10^{-1}
$f_1(x)$	90	$9{,}99\times10^{5}$	$9{,}9999\times10^{9}$	‖	$1{,}00001\times10^{10}$	$1{,}001\times10^{6}$	110
valeur approchée de $\dfrac{1}{\lvert f_1(x)\rvert}$	0,011	$1{,}001\times10^{-6}$	10^{-10}	‖	10^{-10}	$9{,}99\times10^{-7}$	$9{,}09\times10^{-3}$

Pour décrire le comportement de telles fonctions, nous avons donné en Première la définition suivante.

Définition

Soit x_0 un nombre réel, et I un intervalle ouvert de centre x_0. Soit f une fonction définie sur $I-\{x_0\}$, non définie en x_0.

On dit que **la limite de $|f|$ en x_0 est $+\infty$** si et seulement si :

$$\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0.$$

On écrit alors : $\lim\limits_{x_0} |f| = +\infty$.

Remarque. La condition $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = 0$ exige évidemment qu'il existe un ensemble de la forme $]x_0-r, x_0+r[-\{x_0\}$ sur lequel f ne s'annule pas.

Scanné avec CamScanner

Exemples. Les limites suivantes pourront être considérées comme des limites de référence.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty; \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}|\tan x|=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x^n|}=+\infty \quad (n\in\mathbb{N}^*); \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{|x|}}=+\infty.$$

Conséquence graphique. Lorsqu'une fonction f vérifie $\lim_{x_0}|f|=+\infty$, sa représentation graphique au voisinage de x_0 a souvent l'une des allures suivantes :

Figure 1

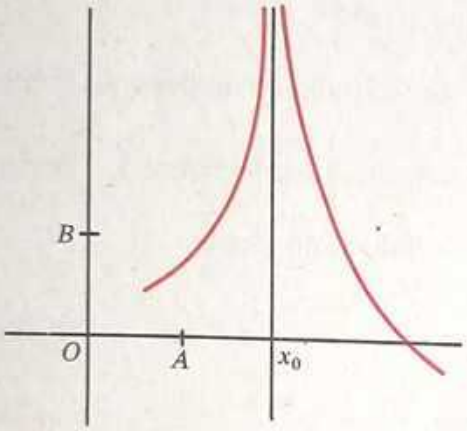


Figure 2

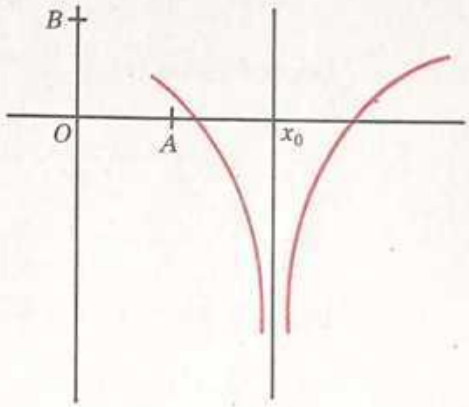


Figure 3

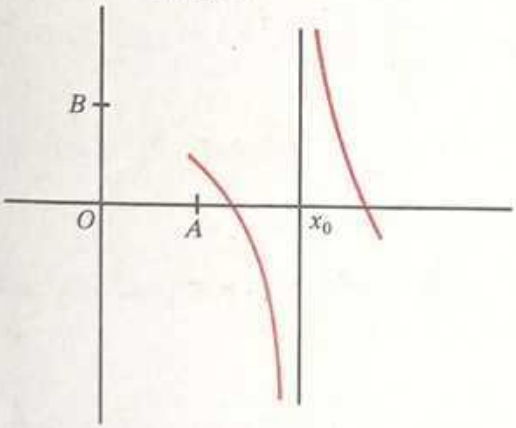
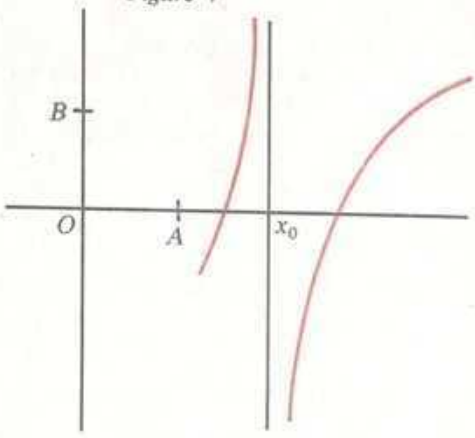


Figure 4



On dit que la droite d'équation $x=x_0$ est *asymptote à la courbe représentative de f.*

Pour placer la courbe, il est intéressant de connaître le signe de $f(x)$ lorsque x décrit $I-\{x_0\}$.

— S'il existe un intervalle J de centre x_0 tel que :

$$\forall x\in J-\{x_0\} \quad f(x)>0$$

alors (C_f) a l'allure représentée sur la figure 1.

Scanné avec CamScanner

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

— S'il existe un intervalle J de centre x_0 tel que :

$$\forall x \in J - \{x_0\} \quad f(x) < 0$$

alors (C_f) a l'allure représentée sur la figure 2.

On écrit alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

— Si f ne garde pas un signe constant autour de x_0, le *cas usuel* est celui où le signe de f est décrit par l'un des tableaux suivants :

1er cas

x	$x_0 - r$		x_0		$x_0 + r$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

2e cas

x	$x_0 - r$		x_0		$x_0 + r$
$f(x)$		$+$	‖	$-$	

On précise alors le comportement de f en utilisant les notions de limite à droite et à gauche.

Dans le premier cas, (C_f) a l'allure représentée sur la figure 3. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = +\infty.$$

Dans le second cas, (C_f) a l'allure représentée sur la figure 4. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = -\infty.$$

Exemples

1) On a vu que : $\lim\limits_{x \to 0} \ln|x| = -\infty$.

2) Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Si n est pair : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

Si n est impair : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.

3) $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x < \pi/2}} \tan x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to \pi/2 \\ x > \pi/2}} \tan x = -\infty$.

Exercice Soit f une fonction numérique.

Montrer, à l'aide de la définition, que si $\lim\limits_{x_0} |f| = +\infty$ et si λ est une constante réelle non nulle, alors :

$$\lim_{x_0} |\lambda f| = +\infty.$$

Scanné avec CamScanner

c) Théorèmes généraux

Lorsqu'une fonction f semble ne pas être bornée au voisinage d'un point x_0, l'utilisation de la définition, c'est-à-dire l'étude de $\frac{1}{f}$, permet de conclure quant à la limite de f (ou de $|f|$) en x_0 dans de nombreux cas.
On peut aussi utiliser une fonction auxiliaire, et les propriétés suivantes.

Propriétés

Soit un intervalle ouvert I de centre x_0.
Soit f et g deux fonctions définies sur $I-\{x_0\}$, non définies en x_0.

1) Si :
- $\forall x \in I-\{x_0\} \quad f(x) \leqslant g(x)$
- $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$

alors : $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.

2) Si :
- $\forall x \in I-\{x_0\} \quad g(x) \leqslant f(x)$
- $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$

alors : $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$.

Remarque. Ces propriétés s'appliquent également aux cas des limites à droite et à gauche.

Démonstration de la propriété 1

Comme $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, il existe un intervalle J de centre x_0, inclus dans I, tel que :

$$\forall x \in J-\{x_0\} \quad f(x) > 0.$$

La fonction g est positive sur $J-\{x_0\}$, et on a :

$$\forall x \in J-\{x_0\} \quad 0 < \frac{1}{g}(x) \leqslant \frac{1}{f}(x).$$

Par conséquent, par application de la propriété fondamentale :

$$\lim_{x_0} \frac{1}{g} = 0$$

et donc, puisque g est positive sur $J-\{x_0\}$:

$$\lim_{x_0} g = +\infty.$$

Exemple. Étudions le comportement au voisinage de 0 de :

$$f : x \longmapsto \frac{1}{\ln(1+x)} + \frac{1}{\tan x}.$$

— On sait que : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \frac{1}{\tan x} > 0.$

Scanné avec CamScanner

On en déduit que : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad \frac{1}{\ln(1+x)} \leqslant f(x).$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\ln(1+x)} = +\infty$, on peut conclure que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty.$$

— En raisonnant de la même façon, on montre que :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty.$$

Remarque. Ce type de raisonnement est applicable notamment chaque fois que la fonction f que l'on étudie est la somme de deux fonctions g_1 et g_2 telles que :

$$\lim_{x_0} g_1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x_0} g_2 = +\infty$$

$\left(\text{respectivement } \lim\limits_{x_0} g_1 = -\infty \text{ et } \lim\limits_{x_0} g_2 = -\infty\right)$.

On notera toutefois qu'il ne s'applique pas dans le cas où :

$$\lim_{x_0} g_1 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x_0} g_2 = -\infty.$$

Pour étudier le comportement au voisinage d'un point x_0 d'une somme de deux fonctions, on peut aussi utiliser le théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème 1

Soit I un intervalle ouvert de centre x_0.
Soit f et g deux fonctions définies sur $I - \{x_0\}$.

- Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, et si g est bornée sur $I - \{x_0\}$, alors $\lim\limits_{x_0} (f+g) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x_0} f = -\infty$, et si g est bornée sur $I - \{x_0\}$, alors $\lim\limits_{x_0} (f+g) = -\infty$.

Remarque. La condition [g est bornée sur $I - \{x_0\}$] est vérifiée notamment dans le cas où g admet une limite finie (c'est-à-dire un nombre réel) en x_0.

Exemple

Soit $f : x \longmapsto x + \frac{1}{\ln x}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

Étude au voisinage de 1

La fonction $[x \longmapsto x]$ est bornée sur tout intervalle ouvert centré en 1.

La fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{\ln x}\right]$ vérifie :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{1}{\ln x} = -\infty; \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{1}{\ln x} = +\infty.$$

Scanné avec CamScanner

Le théorème 1 s'étend facilement au cas des limites à droite et à gauche et permet de conclure que :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty.$$

Étude au voisinage de 0

Nous avons vu au chapitre 1 que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

D'après la définition, on a donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\ln x} = 0.$$

D'où :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 0.$$

Remarque. D'après la définition, on a, d'une manière générale :

si $\lim_{x_0} |f| = +\infty$ alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0.$

Étudions maintenant un théorème permettant de déterminer l'éventuelle limite en x_0 d'un produit de fonctions.

Théorème 2

Soit I un intervalle ouvert de centre x_0.
Soit f et g deux fonctions définies sur $I - \{x_0\}$.
Si $\lim_{x_0} |f| = +\infty$, et si $|g|$ possède un minorant strictement positif sur $I - \{x_0\}$,
alors $\lim_{x_0} |f \times g| = +\infty$.

Démonstration abrégée

Par hypothèse, il existe un élément m de $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in I - \{x_0\} \quad |g(x)| \geqslant m.$$

Par conséquent, pour tout élément x de $I - \{x_0\}$:

$$|f(x) \times g(x)| \geqslant |m \times f(x)|.$$

D'après l'exercice page 66, $\lim_{x \to x_0} |m \times f(x)| = +\infty$.

Et donc, d'après la propriété énoncée en début de ce paragraphe, $\lim_{x_0} |f \times g| = +\infty$.

Attention! Ne pas confondre les propositions :

$[|g|$ possède un minorant strictement positif sur $I - \{x_0\}]$
$[|g|$ est strictement positive sur $I - \{x_0\}]$.

Scanné avec CamScanner

Exemple. Soit $f : x \longmapsto x \ln x$.

On sait que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} |\ln x| = +\infty$.

On a évidemment : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x > 0$.

Par contre, la fonction $[x \longmapsto x]$ n'admet de minorant strictement positif sur aucun intervalle de la forme $]0; r[$, et on sait par ailleurs que $|f|$ n'admet pas $+\infty$ comme limite à droite en 0.

Remarque 1. Pour obtenir l'éventuelle limite de $f \times g$, on complétera l'étude par celle du signe de $f \times g$.

Remarque 2. L'hypothèse :

$[|g|$ possède un minorant strictement positif sur $I - \{x_0\}]$

est vérifiée notamment dans le cas où $|g|$ admet comme limite en x_0, un nombre réel strictement positif ou $+\infty$.

En particulier :

Si $\lim\limits_{x_0} |f| = +\infty$ et $\lim\limits_{x_0} |g| = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} |f \times g| = +\infty$.

Exemple 1. Étudions le comportement au voisinage de 0 de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin x}$.

• On sait que :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty; \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\quad -\frac{1}{\sin x} > 0.$$

D'après la propriété énoncée page 67, on a donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty. \tag{1}$$

• Par contre, cette propriété ne s'applique plus pour la limite à droite.
Exprimons f sous forme d'un produit :

$$\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sin x}\right).$$

Comme $\left[x \longmapsto \dfrac{x}{\sin x}\right]$ est bornée au voisinage de 0, d'après le théorème 1, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) = +\infty.$$

D'où, d'après le théorème 2 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty. \tag{2}$$

• On réunit les résultats (1) et (2) en disant que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 2. Soit α un élément quelconque fixé de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

• Étudier le comportement au voisinage de 0 de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\cos(\alpha+x)}{x}$$

$\left(\text{attention aux cas } \alpha=-\frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$.

• Étudions maintenant le comportement au voisinage de 0 de la fonction :

$$f : \longmapsto \frac{\cos(\alpha+x)}{x}-\frac{\cos(\alpha-x)}{x}.$$

Le théorème 1 ne pouvant s'appliquer, transformons l'expression de $f(x)$, pour tout élément α de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\forall x \in]-\pi, \pi[-\{0\} \quad f(x)=-2\frac{\sin x}{x}\sin\alpha.$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-2\sin\alpha.$$

Remarque. Pour α élément de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction f est la différence de deux fonctions non bornées au voisinage de 0. On voit que, selon les valeurs prises par le paramètre α élément de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la limite de f en 0 peut être n'importe quel nombre réel de l'intervalle $[-2; 2]$.

Exemple 3. Étudions le comportement au voisinage de 0 de $f : x \longmapsto \frac{x}{\ln(1+x^2)}$.

f est définie sur $\mathbb{R}^*$, et se présente comme le produit des fonctions $[x \longmapsto x]$ et $\left[x \longmapsto \frac{1}{\ln(1+x^2)}\right]$, qui vérifient :

$$\lim_{x\to 0} x=0; \quad \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\ln(1+x^2)}\right|=+\infty.$$

Aucun théorème du cours ne permet de conclure directement.

Remarquons alors que $\frac{1}{f(x)}$ est le taux d'accroissement de la fonction $[g : x \longmapsto \ln(1+x^2)]$ entre 0 et x.

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=g'(0)$$
$$=0$$

et donc :

$$\lim_{0}|f|=+\infty.$$

Scanné avec CamScanner

L'étude du signe de f permet de préciser ce résultat :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty; \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=-\infty.$$

Remarque. Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, aucun théorème ne permet d'étudier directement les situations suivantes :

— le comportement de $f+g$ en x_0 lorsque $\lim_{x_0} f=+\infty$ et $\lim_{x_0} g=-\infty$;

— le comportement de $f\times g$ en x_0 lorsque $\lim_{x_0} |f|=+\infty$ et $\lim_{x_0} g=0$.

Dans ces situations, il importe de trouver une autre écriture de la fonction à étudier pour se ramener dans le champ d'application de l'un des théorèmes.

Exercices

Dans chacun des cas suivants, étudier le comportement de la fonction au voisinage du point x_0 indiqué :

a) $x \longmapsto x\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$ $\qquad x_0=0$;

b) $x \longmapsto (1-\sin x)\tan^2 x$ $\qquad x_0=\dfrac{\pi}{2}$;

c) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ $\qquad x_0=0$;

d) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^n x}\ (n\in\mathbb{N}^*)$ $\qquad x_0=0$.

d) **Fonctions monotones sur un intervalle ouvert $]a, b[$**

Soit f une fonction croissante sur un intervalle ouvert $]a, b[$.
Nous avons vu au chapitre précédent que, si f est majorée sur $]a, b[$, alors f possède une limite (réelle) à droite en b.

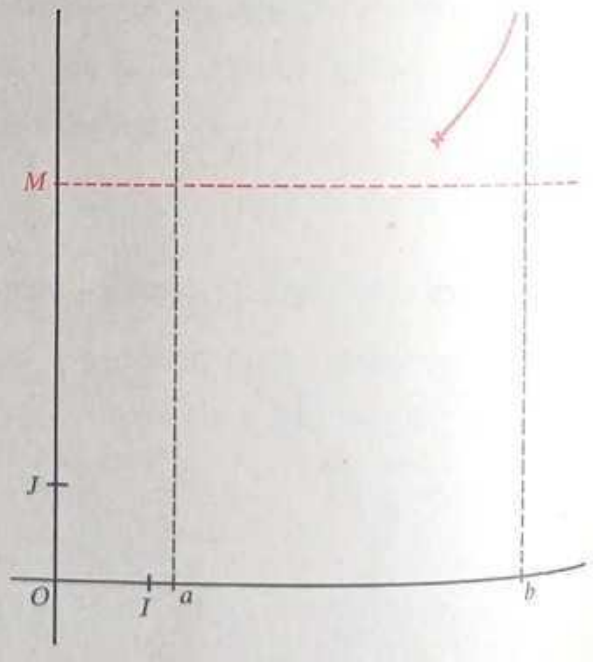
Supposons maintenant f non majorée. Cette hypothèse signifie que, si l'on se donne un nombre réel M, celui-ci n'est pas un majorant de f sur $]a, b[$.

Autrement dit, il existe un élément x_0 de $]a, b[$ tel que :

$$f(x_0)>M.$$

Puisque f est croissante, on a alors :

$$\forall x\in]x_0, b[\quad f(x)>M.$$



Scanné avec CamScanner

Ainsi, même si l'on choisit un nombre réel M très grand, on peut trouver un intervalle ouvert d'extrémité b sur lequel les valeurs prises par f sont supérieures à M. Cette étude nous donne l'intuition du théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème

Soit f une fonction monotone croissante sur un intervalle ouvert $]a, b[$.

Si f n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} f(x) = +\infty$.

Énoncer des résultats analogues :

— pour une fonction croissante et non minorée;

— pour une fonction décroissante et non minorée;

— pour une fonction décroissante et non majorée.

Exemple. Ces théorèmes permettent de retrouver que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.

En effet, la fonction ln est croissante sur $]0; 1[$. Montrons d'autre part qu'elle n'est pas minorée sur $]0; 1[$.

Soit m un élément quelconque, fixé, de $\mathbb{R}$.

Il s'agit de trouver un élément particulier x_0 de $]0; 1[$ tel que $\ln x_0 < m$. On peut se contenter de rechercher x_0 parmi les valeurs de la forme e^{-n}, où n est élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que, comme $e > 1$, le nombre e^{-n} appartient à $]0; 1[$ pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$.

On sait que : $\ln e^{-n} = -n$.

L'inégalité : $\ln e^{-n} < m$

équivaut à : $n > -m$.

Il suffit donc de prendre :

$$\begin{array}{ll} n_0 = 1 & \text{si } m > 0 \\ n_0 = 1 + E(-m) & \text{si } m < 0 \end{array}$$

pour que le nombre e^{-n_0} soit un élément de $]0; 1[$ vérifiant :

$$\ln e^{-n_0} < m.$$

e) **Application : tangentes parallèles à la droite des ordonnées**

Exemple. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1 + \dfrac{x - x^2}{2}}$.

Montrer que f est définie et continue sur $[-1; 2]$.

Justifier, à l'aide des théorèmes du cours, la dérivabilité de f sur $]-1; 2[$.

Étudier les variations de f.

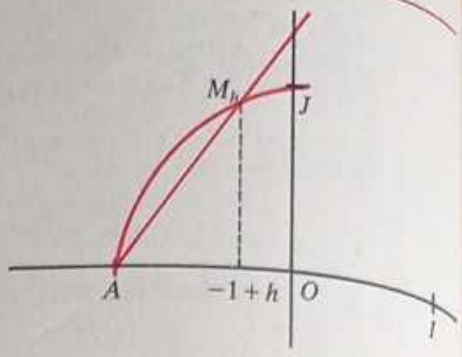
Pour tracer la courbe représentative (C_f) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé, il est utile d'étudier la forme de la courbe au voisinage des points d'abscisses -1 et 2.

Scanné avec CamScanner

Pour l'étude en -1, on introduit le rapport $t_f(-1, -1+h)$ défini pour h élément de $]0; 3]$ par :

$$t_f(-1, -1+h)=\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

et on recherche sa limite éventuelle lorsque h tend vers 0 à droite.



Géométriquement, $t_f(-1, -1+h)$ représente le coefficient directeur de la droite (AM_h) (voir les notations sur la figure).

On a :

$$t_f(-1, -1+h)=\frac{1}{h}\times\sqrt{\frac{3h-h^2}{2}}$$

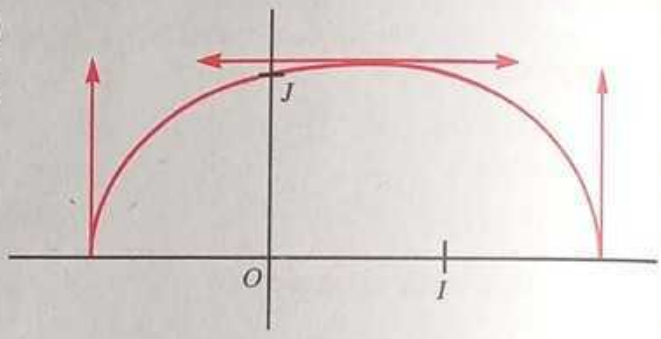
$$=\frac{\sqrt{3-h}}{\sqrt{2h}}.$$

Ce dernier rapport est positif, et la limite de son inverse en 0 est 0. D'où :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} t_f(-1, -1+h)=+\infty.$$

Nous avons vu en Première l'interprétation graphique de ce résultat : la courbe (C_f) admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente parallèle à la droite (OJ).

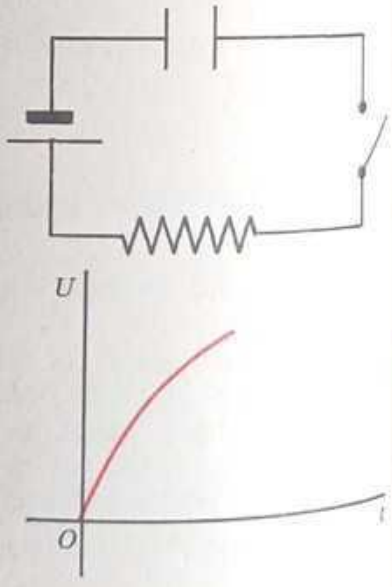
L'étude au point de (C_f) d'abscisse 2 conduit à un résultat analogue, d'où le tracé de (C_f).



2) Comportement asymptotique des fonctions

Introduction

Considérons le circuit électrique ci-contre. Au départ, la charge du condensateur est nulle. Lorsque l'interrupteur est fermé, le condensateur se charge progressivement, et la tension entre ses bornes augmente.



Scanné avec CamScanner

Le constructeur du condensateur indique une valeur maximum U_0 pour la tension que celui-ci peut subir sans dommages.
Si un tel circuit est utilisé dans une application pratique, il faut donc connaître l'évolution «à long terme» du circuit. Par exemple, il faut savoir si la tension aux bornes du condensateur «devient de plus en plus grande», si cette tension «reste inférieure à la valeur U_0», lorsque le circuit reste en fonctionnement durant plusieurs heures.

En mathématiques, étudier le comportement d'une fonction lorsque la variable prend des valeurs «positives de plus en plus grandes» ou «négatives de plus en plus petites», c'est étudier son *comportement asymptotique.*
Évidemment, l'étude du comportement asymptotique d'une fonction f n'a de sens que si f est définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$.

a) **Étude expérimentale de quelques exemples**

Considérons les fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto \frac{1}{(x+1)^2}; \qquad f_2 : x \longmapsto x\sqrt{\frac{x}{x-2}};$$
$$f_3 : x \longmapsto \frac{\ln x + 1}{\ln x - 2}; \qquad f_4 : x \longmapsto 1 + \sin x.$$

Dresser un tableau de valeurs indiquant une valeur approchée des images de :

$$10;\ 10^2;\ 10^3;\ 10^4;\ 10^5;\ 10^6$$

par chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.
A partir du tableau obtenu, quelles suppositions peut-on faire concernant le comportement de chacune de ces quatre fonctions lorsque x «devient de plus en plus grand»?

b) **Définitions**

A l'exception du cas de f_4, le comportement des fonctions traitées ci-dessus, lorsque x «devient de plus en plus grand», est analogue à ce que nous avons observé pour d'autres fonctions «lorsque x se rapproche d'une valeur x_0».
Un tel comportement a été décrit en termes de *limite lorsque x tend vers* x_0, notion qui a été définie à partir de celle de limite en 0. D'où l'idée, pour décrire en termes de limites, le comportement asymptotique d'une fonction f, d'utiliser le comportement en 0 d'une fonction auxiliaire g.
Observons alors que, pour tout élément a de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \left(x \in]a, +\infty[\iff \frac{1}{x} \in \left]0; \frac{1}{a}\right[\right).$$

De même, pour tout élément a de $\mathbb{R}_-^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \left(x \in]-\infty, a[\iff \frac{1}{x} \in \left]\frac{1}{a}; 0\right[\right).$$

Intuitivement, dire que x prend des valeurs positives de plus en plus grandes revient à dire que $\frac{1}{x}$ prend des valeurs positives de plus en plus proches de 0; dire que x prend des valeurs négatives de plus en plus éloignées de 0 revient à dire que $\frac{1}{x}$ prend des valeurs négatives de plus en plus proches de 0.
Ces différentes remarques motivent l'adoption des définitions suivantes.

Scanné avec CamScanner

Définitions

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On dit que f **admet une limite** (réelle, ou égale à $+\infty$ ou $-\infty$) **en** $+\infty$ si et seulement si la fonction :

$$g : x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet une limite à droite en 0.
De plus :

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de la forme $]-\infty, a[$ inclus dans $\mathbb{R}_-^*$.
On dit que f **admet une limite** (réelle, ou égale à $+\infty$ ou $-\infty$) **en** $-\infty$ si et seulement si la fonction :

$$g : x \longmapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet une limite à gauche en 0.
De plus :

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Exemples. Reprenons les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 précédentes.

Cas de la fonction f_1

On a : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad f_1(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad f_1\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^2}$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^2}.$$

On en déduit aisément que : $\lim_{+\infty} f_1 = 0$.

Cas de la fonction f_2

On a : $\forall x \in]2, +\infty[$ $\quad f_2(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

D'où : $\forall x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ $\quad f_2\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{1-2x}}$.

Scanné avec CamScanner

La fonction $\left[x \longmapsto \sqrt{\frac{1}{1-2x}}\right]$ admet la limite 1 en 0. Elle admet donc un minorant strictement positif sur un intervalle du type $]0, r[$.

La limite à droite en 0 de la fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{x}\right]$ est $+\infty$.

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_2\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Et donc : $\lim\limits_{+\infty} f_2 = +\infty$.

Cas de la fonction f_3

On sait que : $\forall x \in]e^2, +\infty[\quad f_3(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x - 2}$.

D'où : $\forall x \in]0, e^{-2}[\quad f_3\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln x + 2}$.

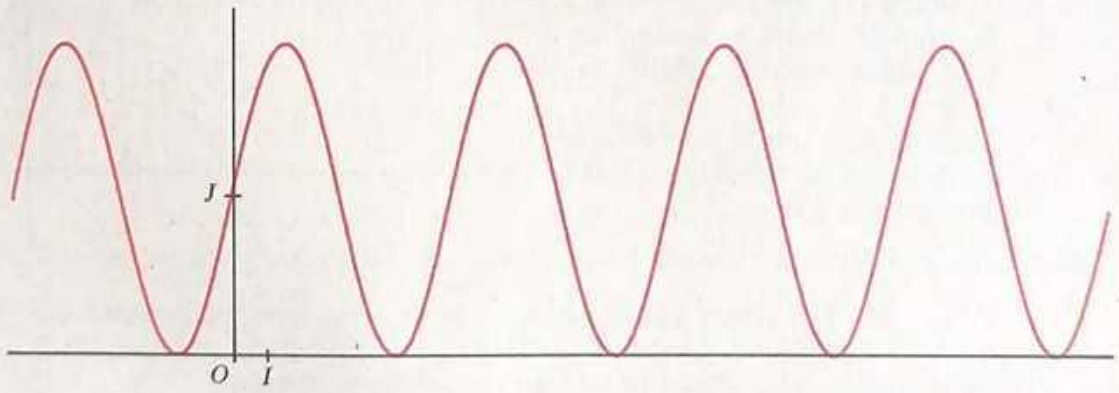
En remarquant que : $f_3\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{3}{\ln x + 2}$

on trouve facilement que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f_3\left(\frac{1}{x}\right) = 1$.

D'où : $\lim\limits_{+\infty} f_3 = 1$.

Cas de la fonction f_4

f_4 est définie sur $\mathbb{R}$, et périodique de période 2π. Sa représentation graphique est la suivante :



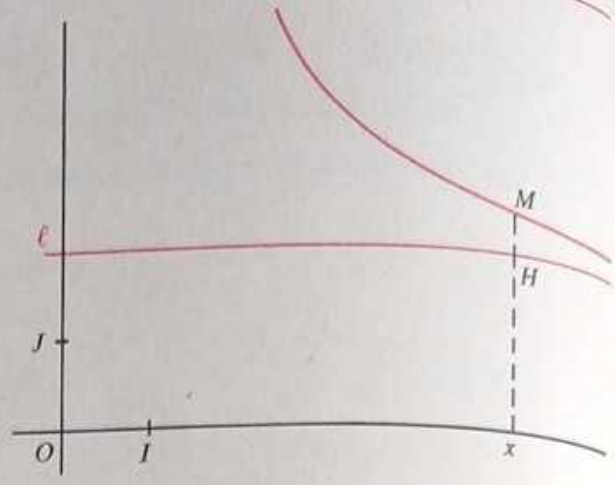
Lorsque x « devient de plus en plus grand », $f_4(x)$ reste compris entre 0 et 2, mais semble ne se rapprocher d'aucun nombre réel.
On démontre, et nous admettrons, que f_4 n'a pas de limite en $+\infty$.

c) **Conséquences graphiques**

• Soit une fonction f admettant pour limite le nombre réel ℓ en $+\infty$.
Soit (C_f) la courbe représentative de f, et (Δ) la droite d'équation $y = \ell$ dans un repère orthogonal (O, I, J) du plan.

Scanné avec CamScanner

Lorsque x « devient de plus en plus grand », $f(x)-\ell$ devient « de plus en plus proche de 0 ». Or $f(x)-\ell$ est égal à $\overline{HM}$, où H et M sont respectivement le point de la droite (Δ) et le point de la courbe (C_f) de même abscisse x.
(La mesure algébrique sur la parallèle à (OJ) passant par M est évidemment calculée en utilisant $\overrightarrow{OJ}$ comme vecteur pour définir un repère de cette droite.)



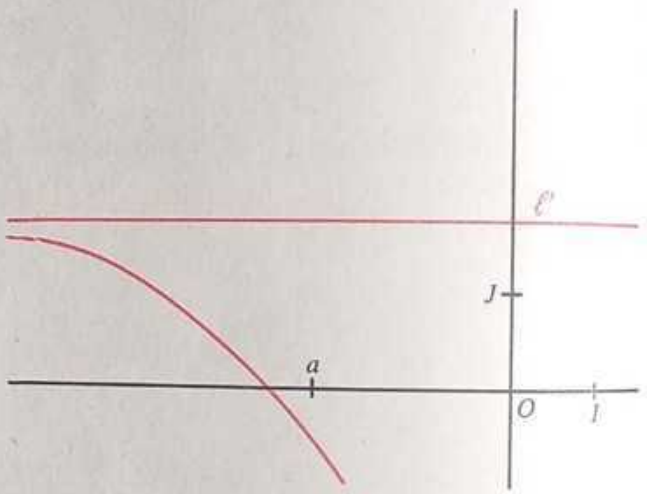
On dit que la droite (Δ) est *asymptote à la branche de la courbe (C_f) décrite par le point $M(x, f(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$*, ou plus simplement que la droite (Δ) est asymptote à (C_f).
Pour construire (C_f), il est souvent intéressant de connaître le signe de $\overline{HM}$, c'est-à-dire le signe de $f(x)-\ell$ suivant les valeurs de x.
En effet, si pour tout x élément d'un intervalle ouvert $]a, +\infty[$, $f(x)-\ell$ est positif (respectivement négatif) la partie correspondante de (C_f) est « au-dessus » (respectivement « au-dessous ») de l'asymptote (Δ).

• On raisonne de façon analogue pour une fonction f admettant une limite réelle ℓ' en $-\infty$.

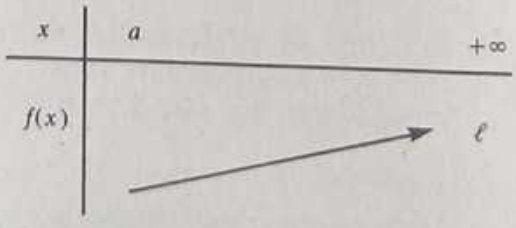
Par exemple, si :

$$\lim_{-\infty} f = \ell'$$

et si $f(x)-\ell'$ est négatif lorsque x décrit l'intervalle $]-\infty, a[$, la branche correspondante de (C_f) peut avoir l'allure ci-contre.
Dans ce cas, on dit encore que la droite d'équation $y=\ell'$ est asymptote à (C_f).



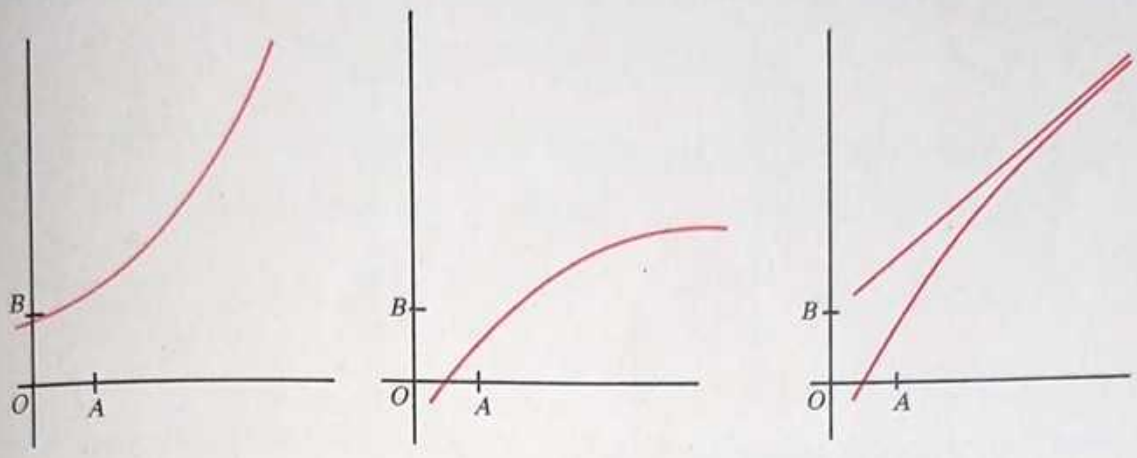
Remarque. Lorsque f est monotone sur $]a, +\infty[$ (respectivement sur $]-\infty, a[$), le signe de $f(x)-\ell$ se déduit facilement du tableau de variation de f.
Par exemple, si f admet le tableau de variation suivant :



la partie de la courbe (C_f) située dans le demi-plan caractérisé par $[x>a]$ est « en dessous » de l'asymptote d'équation $y=\ell$.

Scanné avec CamScanner

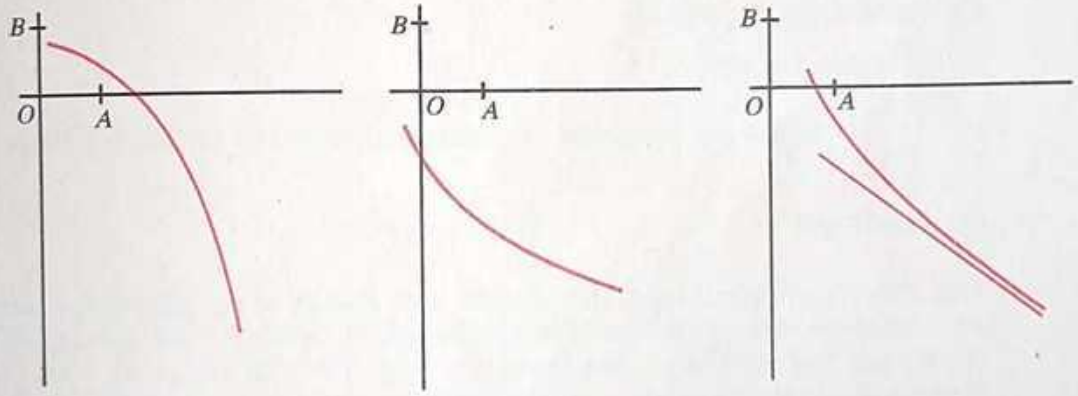
• Soit f une fonction admettant pour limite $+\infty$ en $+\infty$. La courbe représentative (C_f) de f peut avoir, par exemple, l'une des allures suivantes :



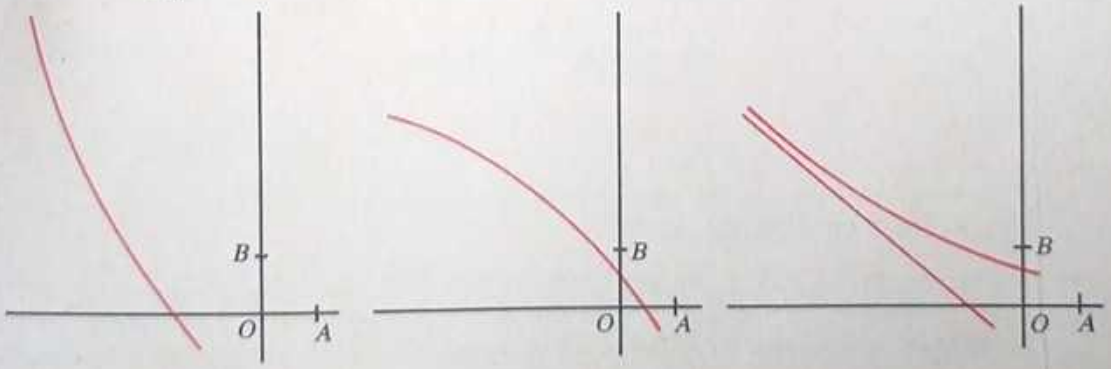
Il est alors utile de faire une étude complémentaire pour préciser le tracé de (C_f). Cette étude sera l'objet du paragraphe suivant.

• De même :

— voici quelques allures possibles pour la représentation graphique d'une fonction f telle que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$;

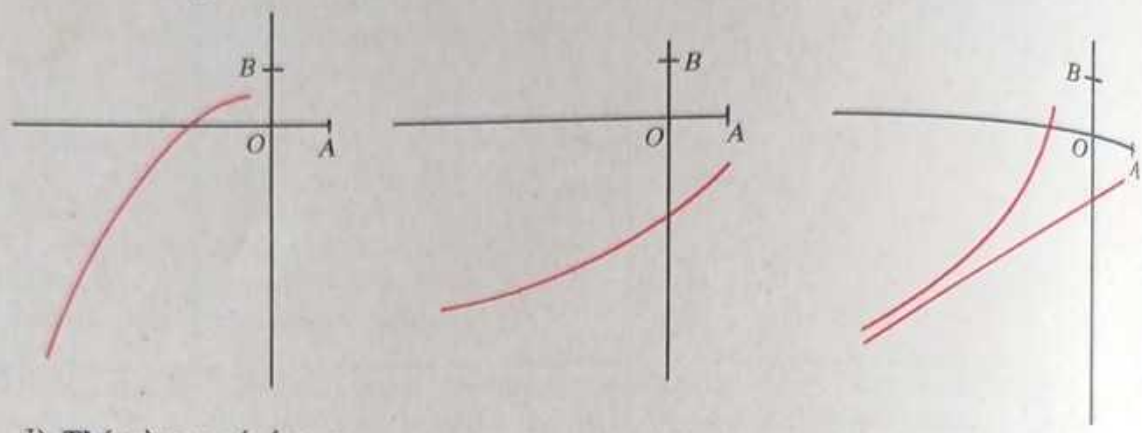


— voici quelques allures possibles pour la représentation graphique d'une fonction f telle que $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$;



Scanné avec CamScanner

— voici quelques allures possibles pour la représentation graphique d'une fonction f telle que $\lim_{-\infty} f = -\infty$;



d) **Théorèmes généraux**

Les théorèmes donnés précédemment dans le cas de limites en un point x_0 réel, s'étendent aux cas des limites en $+\infty$ et des limites en $-\infty$.
Ainsi, par exemple, si ℓ et ℓ' sont deux nombres réels tels que :

$$\lim_{+\infty} f = \ell; \quad \lim_{+\infty} g = \ell'$$

alors : $$\lim_{+\infty} (f+g) = \ell + \ell'.$$

De même, des hypothèses :

- $\lim_{+\infty} f = +\infty$
- g admet un minorant strictement positif sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$

on déduit que : $$\lim_{+\infty} (f \times g) = +\infty.$$

Les théorèmes concernant les limites aux bornes d'un intervalle ouvert $]a, b[$ de fonctions monotones sur l'intervalle $]a, b[$ restent vrais lorsqu'on remplace $]a, b[$ par des intervalles des types $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, +\infty[$.
Pour utiliser ces théorèmes, nous retiendrons les limites suivantes comme *limites de référence :*

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*); \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

n étant un élément de $\mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Scanné avec CamScanner

Exemple 1. Étudions le comportement asymptotique de $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 2$. Les théorèmes concernant la limite d'une somme ne permettent pas de conclure quant à la limite de f en $+\infty$. Transformons l'expression de $f(x)$:

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) = x^3\left[1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right].$$

La fonction $\left[x \longmapsto 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right]$ admet pour limite 1 en $+\infty$. Elle admet donc un minorant strictement positif sur un intervalle $]a, +\infty[$ convenablement choisi.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, on en déduit que :

$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

Pour la limite en $-\infty$, l'application directe des théorèmes permet de conclure que :

$$\lim_{-\infty} f = -\infty.$$

Exemple 2. Étudions le comportement asymptotique de $f : x \longmapsto \dfrac{x^3+2}{x^4-1}$.

L'ensemble de définition de f contient les intervalles $]-\infty; -1[$ et $]1; +\infty[$.

Comme précédemment, on ne peut pas conclure directement. On écrit :

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) = \frac{x^3\left(1 + \frac{2}{x^3}\right)}{x^4\left(1 - \frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^4}}.$$

De : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^4}} = 1$,

on déduit que : $\lim\limits_{+\infty} f = 0.$

Le même raisonnement montre que :

$$\lim_{-\infty} f = 0.$$

Remarque. Cette méthode de transformation permet d'étudier le comportement asymptotique des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles. Elle peut également être utilisée pour d'autres fonctions (voir l'exercice ci-dessous).

Scanné avec CamScanner

Exercice Étudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes :

$x \longmapsto x^4 - 3x^3 + x + 1$; $\quad x \longmapsto (1-\sqrt{2})x^3 - \sqrt{3}$;

$x \longmapsto \dfrac{x^3+x+1}{x^2+x+1}$; $\quad x \longmapsto \dfrac{1}{x^4+1}$;

$x \longmapsto (\ln x)^2 - 3\ln x + 7$; $\quad x \longmapsto \dfrac{x+2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+4}}$;

$x \longmapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2-1}$; $\quad x \longmapsto x - \ln x$.

Exemple 3. Étudions le comportement asymptotique de

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x}.$$

Les théorèmes concernant la limite d'une somme ne permettent pas de conclure. On notera que la méthode précédente ne permet pas de conclure non plus.

L'ensemble de définition de f est $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Transformons l'expression de $f(x)$:

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = \frac{(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{-x-1}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{x}{|x|} \times \frac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}.$$

Pour x élément de $[1; +\infty[$, $\quad f(x) = \dfrac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$,

d'où : $\quad \lim\limits_{+\infty} f = -\dfrac{1}{2}$.

Pour x élément de $]-\infty; -1]$, $\quad f(x) = -\dfrac{-1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}$,

d'où : $\quad \lim\limits_{-\infty} f = \dfrac{1}{2}$.

Exercice Étudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes :

$x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$; $\quad x \longmapsto x + \sqrt{x^2+1}$.

Le théorème donnant la limite d'une fonction composée s'étend aux cas faisant intervenir des limites en $+\infty$ ou $-\infty$. Donnons quelques exemples.

Scanné avec CamScanner

Exemple 1

Soit la fonction : $f : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2x-4}{x+3}\right)$.

L'ensemble de définition de f est $]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[$.

D'autre part, f est la composée des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{2x-4}{x+3} \quad \text{et} \quad x \longmapsto \ln x.$$

• *Comportement asymptotique de f*

On vérifie facilement que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+3} = 2$.

Comme $[x \longmapsto \ln x]$ est continue en 2, on a :

$$\lim_{x \to 2} \ln x = \ln 2.$$

On en déduit alors : $\lim\limits_{+\infty} f = \ln 2$.

Un raisonnement en tout point analogue permet d'affirmer que :

$$\lim_{-\infty} f = \ln 2.$$

• *Étude de f au voisinage de −3*

La fonction f n'est définie qu'à gauche de -3. Les résultats de l'étude s'exprimeront donc en termes de limite à gauche en -3.

On vérifie que : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} \dfrac{2x-4}{x+3} = +\infty$.

Comme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

on en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} f(x) = +\infty$.

Exercice { Étudier le comportement de f au voisinage du point 2.
Compléter l'étude de f et construire sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

Exemple 2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$.

On se ramène à la limite de référence $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ à l'aide d'un changement de variable.

En posant $u = \sqrt{x}$, on obtient :

$$f(x) = \frac{\ln(u^2)}{u}$$

$$= 2\,\frac{\ln u}{u}.$$

Scanné avec CamScanner

Comme $\lim_{x \to +\infty} u = +\infty$, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{u \to +\infty} 2\frac{\ln u}{u}$$
$$= 0.$$

Exemple 3

Soit la fonction : $g : x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$.

Montrer que g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Établir les résultats suivants :

$$\lim_{-\infty} g = -1; \quad \lim_{+\infty} g = +1. \qquad (1)$$

Considérons alors la fonction : $f : x \longmapsto \frac{\tan x}{1+|\tan x|}$.

f est la fonction composée $g \circ \tan$. L'expression de $f(x)$ est définie si et seulement si $\tan x$ est définie. D'où :

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

En particulier, f est définie sur $]0, \pi[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. Le problème se pose donc d'étudier son comportement au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

La fonction tan n'admet pas de limite en $\frac{\pi}{2}$. Cependant, on sait que :

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x<\pi/2}} \tan x = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x>\pi/2}} \tan x = -\infty. \qquad (2)$$

De (1) et (2), on déduit alors :

$$\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x<\pi/2}} f(x) = 1; \quad \lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x>\pi/2}} f(x) = -1.$$

Exercice

Étudier la parité et la périodicité de f.
En déduire un intervalle d'étude convenable pour la fonction f.
Construire sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On précisera la forme de la courbe au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ en déterminant, à l'aide du changement de variable $u = x - \frac{\pi}{2}$, $\lim_{\substack{x \to \pi/2 \\ x<\pi/2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

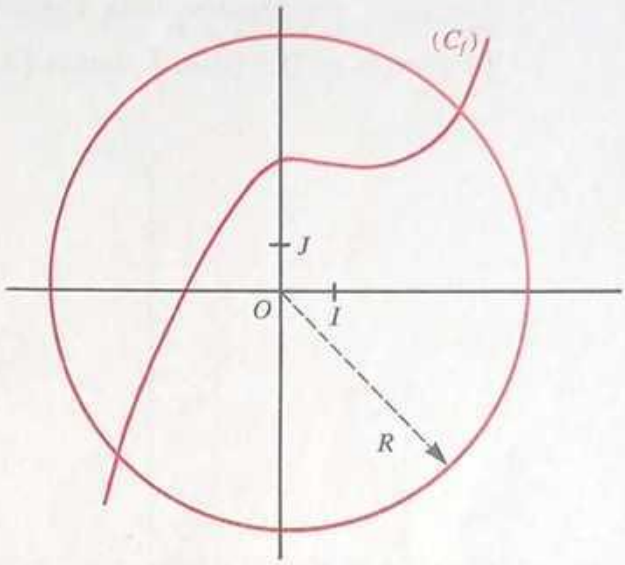
Scanné avec CamScanner

2 Branches infinies d'une courbe plane d'équation $y = f(x)$

1) Introduction

Soit f une fonction numérique et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

On dit que (C_f) *admet des branches infinies* si (C_f) possède des points «aussi éloignés que l'on veut» de l'origine O. Cela revient à dire que, quel que soit le nombre réel positif R, la courbe (C_f) possède des points situés à l'extérieur du disque de centre O et de rayon R.
La courbe (C_f) n'est définie que relativement à un repère. Nous admettrons que la propriété précédente est indépendante du repère considéré.



Remarquons que, pour que la courbe représentative (C_f) d'une fonction f admette une branche infinie, il suffit que l'une des composantes du couple de coordonnées $(x, f(x))$ puisse prendre des valeurs «aussi grandes que l'on veut en valeur absolue» lorsque x décrit D_f. Nous connaissons plusieurs situations de ce type :

— lorsque, en un point x_0, la limite de f est $+\infty$ ou $-\infty$;

— lorsque f est définie sur $]a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a[$) et que f admet une limite réelle ℓ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$);

— lorsque f est définie sur $]a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a[$) et que f admet comme limite $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).
Les deux premiers cas ont été étudiés dans les paragraphes précédents. Nous avons vu que le tracé d'une *asymptote* (d'équation $x = x_0$ dans le premier cas, d'équation $y = \ell$ dans le second cas) permet de préciser le tracé de (C_f).
Nous nous proposons donc, dans ce paragraphe, d'étudier plus spécialement le troisième cas.

2) Asymptote non parallèle aux droites de coordonnées

En classe de Première, nous avons étudié des fonctions telles que, par exemple :

$$f : x \longmapsto \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}.$$

Étudier la dérivabilité et le sens de variation de f.

Montrer que : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

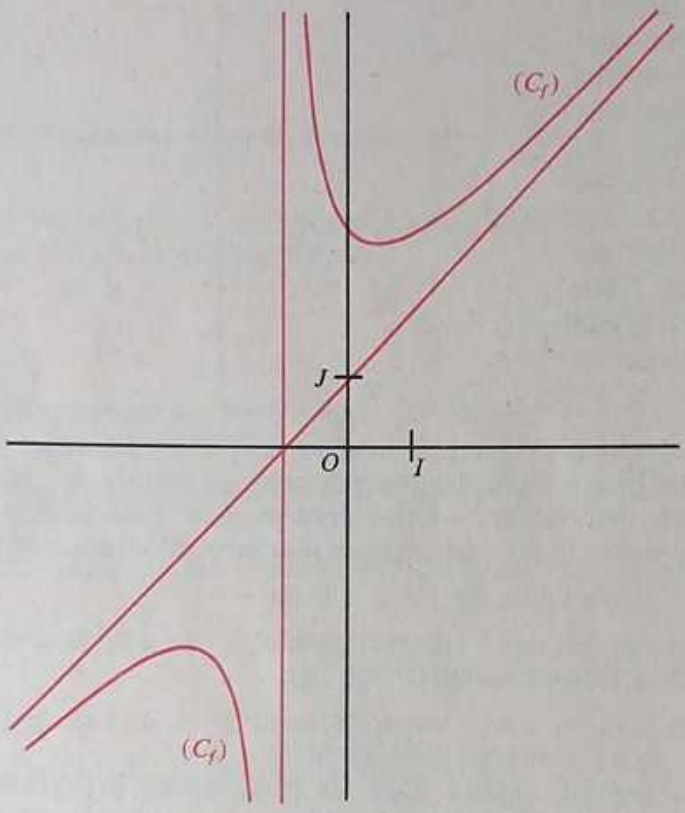
Scanné avec CamScanner

Ainsi, la courbe (C_f) admet deux branches infinies décrites par le point $M(x, f(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

Nous savons que nous pouvons obtenir une autre expression de $f(x)$ en utilisant la division euclidienne des fonctions polynômes. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+1}.$$

Sur cette expression, nous voyons que f est la somme de la fonction affine $[x \longmapsto x+1]$ et de la fonction $\left[x \longmapsto \frac{2}{x+1}\right]$.



Lorsque x prend des valeurs positives ou négatives de plus en plus éloignées de 0, $\frac{2}{x+1}$ prend des valeurs de plus en plus proches de 0.

Plus précisément, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} = 0;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

On exprime cette situation en disant que la droite d'équation $y = x+1$ est *asymptote* à la courbe (C_f).

Exercice

Quels sont les nombres réels x pour lesquels $x+1$ est une valeur approchée de $f(x)$ à 10^{-2} près?

Dresser un tableau donnant des valeurs approchées à 10^{-2} près des images par f de :

50; 100; 500; 1 000; 1 300; 1 500.

Plus généralement, la situation précédente se reproduit chaque fois qu'une fonction f, définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a[$) coïncide sur cet intervalle avec la somme d'une fonction affine et d'une fonction de limite nulle en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Scanné avec CamScanner

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a[$), et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
Soit α et β deux nombres réels.
On dit que la droite (D) d'équation :

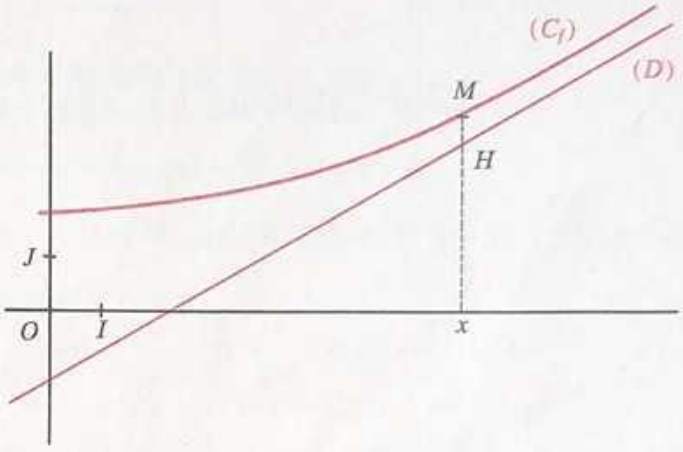
$$y = \alpha x + \beta$$

est **asymptote à la courbe** (C_f) si et seulement si il existe une fonction g telle que :

- $\forall x \in D_f \quad f(x) = \alpha x + \beta + g(x)$
- $\lim\limits_{+\infty} g = 0$ (respectivement : $\lim\limits_{-\infty} g = 0$).

Interprétation graphique

Soit x un élément de D_f. Désignons par M et H les points d'abscisse x, appartenant respectivement à (C_f) et à (D). $f(x) - (\alpha x + \beta)$, c'est-à-dire $g(x)$, représente $\overline{HM}$.
(Pour calculer la mesure algébrique $\overline{HM}$, on utilise un repère de vecteur $\overrightarrow{OJ}$ sur la parallèle à (OJ) passant par M).
On voit de plus que l'étude du signe de g permet de placer (C_f) et (D) l'une par rapport à l'autre.



Exemple. Considérons la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Le vérifier, puis étudier ses variations. On trouvera, en étudiant f, que :

$$\lim_{+\infty} f = +\infty; \quad \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

On peut donc se demander si (C_f) admet des asymptotes non parallèles aux droites de coordonnées.
Notons que, la définition précédente ne donnant aucun moyen pratique de déterminer α et β, nous allons devoir recourir à une méthode « expérimentale ». Calculons par exemple, quelques valeurs de $f(x)$ pour x « grand en valeur absolue ».

x	10	100	500	1 000
valeur approchée de $f(x)$	12,04	102	502	1 002

x	-10	-100	-500	$-1\,000$
valeur approchée de $f(x)$	8,06	98	498	998

Scanné avec CamScanner

Après examen de ces valeurs, on décide d'étudier si les droites d'équations respectives $y=x+2$ et $y=-x-2$ sont asymptotes à la courbe (C_f).

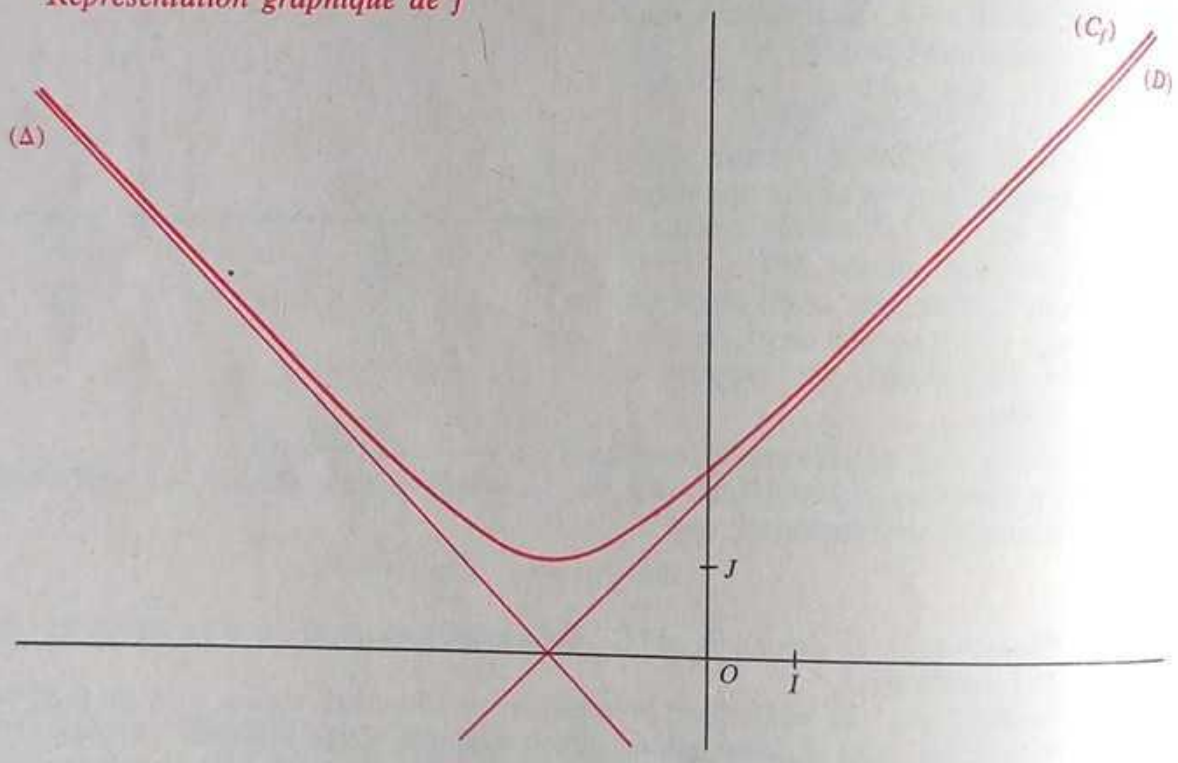
Pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, $f(x)$ et $x+2$ sont strictement positifs, et donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad f(x)-(x+2)=\sqrt{x^2-4x+5}-(x+2)$$
$$=\frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}.$$

On vérifie que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)=+\infty$

et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+2)=0.$

Représentation graphique de f



La fonction f est donc la somme de la fonction affine $[x \longmapsto x+2]$ et d'une fonction de limite 0 en $+\infty$. Par conséquent, la droite (D) d'équation $y=x+2$ est asymptote à la branche infinie de la courbe (C_f) décrite par le point $M(x, f(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.

De plus, on voit que $f(x)-(x+2)$ reste positif sur $\mathbb{R}_+$. La courbe (C_f) est donc « au-dessus » de (D) dans le demi-plan caractérisé par $x\geqslant 0$.

De même, pour tout élément x de $]-\infty;-2[$, $f(x)$ et $-x-2$ sont strictement positifs, et :

$$\forall x\in]-\infty;-2[\quad f(x)-(-x-2)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+(-x-2)}.$$

Scanné avec CamScanner

Nous avons ici encore : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+4x+5}+(-x-2)=+\infty$

et donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)-(-x-2)=0.$

La droite (Δ) d'équation $y=-x-2$ est donc asymptote à la branche infinie de la courbe (C_f) décrite par le point $M(x, f(x))$ lorsque x tend vers $-\infty$.
De plus, dans le demi-plan caractérisé par $x \leqslant -2$, la courbe (C_f) est au-dessus de l'asymptote (Δ).

L'examen d'un tableau de valeurs de f nous a permis de trouver facilement des droites qui, vérification faite, sont effectivement asymptotes à (C_f).
Toutefois, le problème se pose de trouver une méthode plus systématique d'étude d'une branche infinie.

3) Étude d'une branche infinie d'une courbe d'équation $y=f(x)$

Remarque préliminaire

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, +\infty[$, $(a>0)$.
Soit $[x \longmapsto \alpha x+\beta]$ une fonction affine et g une fonction telles que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x)=\alpha x+\beta+g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} g=0.$$

La courbe représentative (C_f) de f admet la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ comme asymptote.
Remarquons que, dans ces conditions :

$$\forall x \in]a; +\infty[\quad \frac{f(x)}{x}=\alpha+\frac{\beta}{x}+\frac{g(x)}{x} \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=\alpha;$$

$$\forall x \in]a; +\infty[\quad f(x)-\alpha x=\beta+g(x) \quad \text{et donc} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x)-\alpha x)=\beta.$$

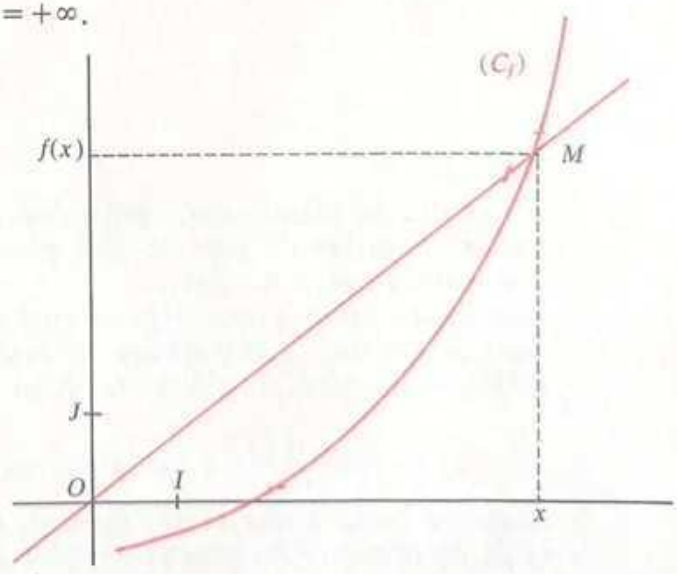
a) Étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Considérons alors une fonction f, définie sur un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ $(a>0)$ et vérifiant $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe représentative (C_f) de f $(x>a)$.

Le nombre réel $\dfrac{f(x)}{x}$ représente le coefficient directeur de la droite (OM).

L'étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ donne des indications sur la forme de la branche infinie de la courbe (C_f) correspondant aux grandes valeurs de x.



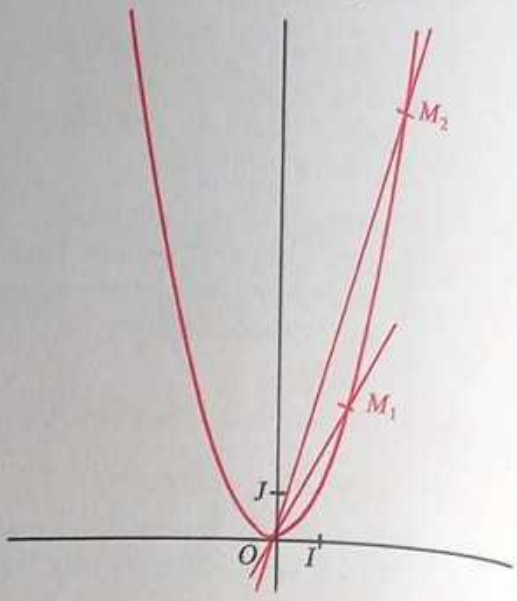
Scanné avec CamScanner

1er cas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, alors le coefficient directeur de la droite (OM) devient de plus en plus grand lorsque M s'éloigne de O en restant sur (C_f).

On dit alors que (C_f) *admet une branche parabolique de direction* (OJ).

Ce cas est notamment celui de la parabole d'équation :

$$y = x^2.$$



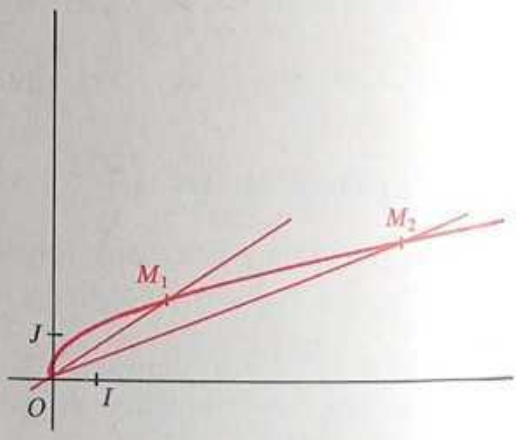
Au niveau du calcul, cela signifie que $f(x)$ prend des valeurs « beaucoup plus grandes que x », pourvu que x soit assez grand.

2e cas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, alors le coefficient directeur de la droite (OM) devient de plus en plus proche de 0 lorsque M s'éloigne de O en restant sur (C_f).

On dit alors que (C_f) *admet une branche parabolique de direction* (OI).

Ce cas est notamment celui de l'arc de parabole d'équation :

$$y = \sqrt{x}.$$



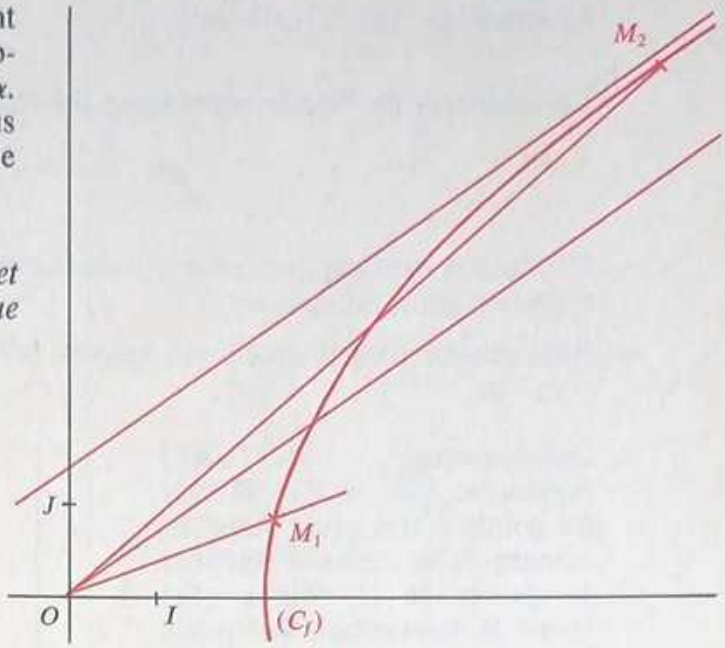
Au niveau du calcul, cela signifie que $f(x)$ prend, lorsque x est assez grand, des valeurs positives de plus en plus grandes, mais qui, toutefois, sont « beaucoup plus petites que x lui-même ».
Notons que nous avons déjà rencontré un autre exemple de fonction classique dont la courbe représentative présente une branche parabolique de direction (OI) : la fonction logarithme népérien.

3e cas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha$, où α est un nombre réel non nul, alors le coefficient directeur de la droite (OM) devient, lorsque M s'éloigne de O en restant sur (C_f), de plus en plus proche de celui de la droite d'équation $y = \alpha x$.

Scanné avec CamScanner

Ce cas se produit notamment lorsque (C_f) admet une asymptote de coefficient directeur α. Toutefois, nous verrons plus loin que ce n'est pas la seule conclusion possible.

On dit alors que (C_f) *admet comme direction asymptotique la droite d'équation* $y = \alpha x$.



4e cas. Enfin, si $\dfrac{f(x)}{x}$ n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, ce procédé d'étude ne donne pas de renseignement sur la forme de (C_f). On cherchera alors à préciser le tracé de (C_f) par d'autres moyens.

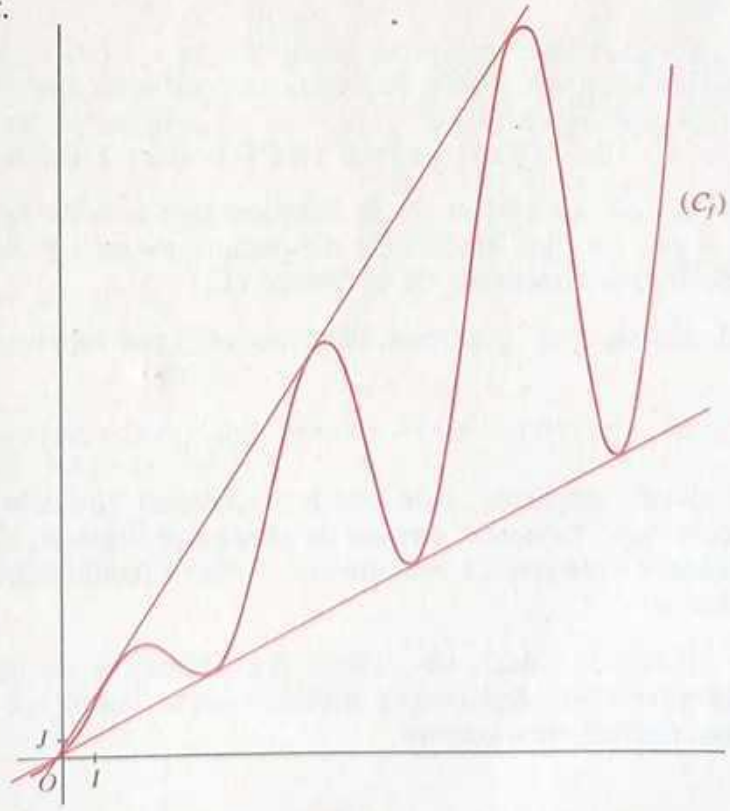
Exemple. Soit la fonction $f : x \longmapsto x(2+\sin x)$.

Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et que $\dfrac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Après avoir établi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x \leqslant f(x) \leqslant 3x$$

on construit la courbe représentative (C_f) de f à l'aide des droites d'équations $y = x$ et $y = 3x$.



Scanné avec CamScanner

b) Étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x)$

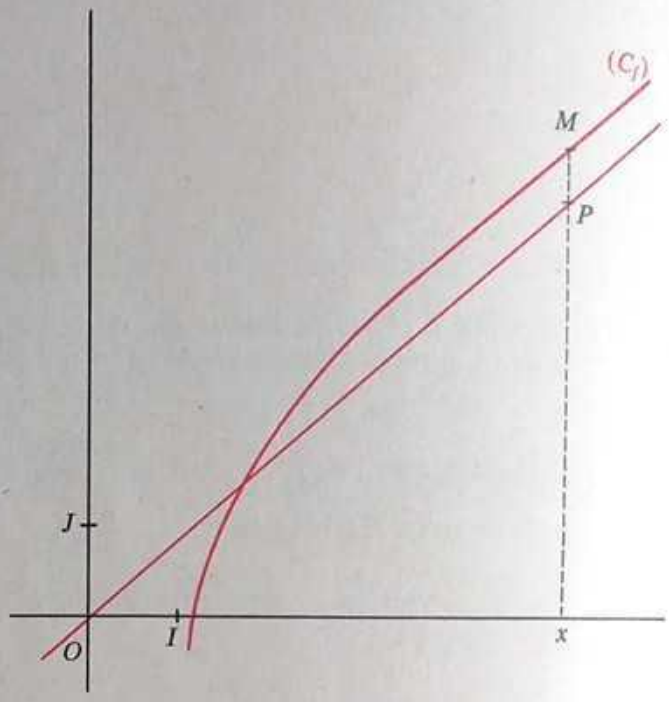
Les résultats de l'étude précédente méritent d'être complétés dans le cas où :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*).$$

Ce résultat exprime que, pour x « assez grand », $f(x)$ prend des valeurs « du même ordre de grandeur que αx ».

Pour étudier plus finement les valeurs prises par f, on forme alors la différence $f(x) - \alpha x$.

Graphiquement, $(f(x) - \alpha x)$ représente $\overline{PM}$, où P et M sont les points d'abscisse x respectivement de la droite d'équation $y = \alpha x$ et de la courbe (C_f) (avec la convention habituelle pour la mesure algébrique).



1er Cas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta$ $(\beta \in \mathbb{R})$, alors f est la somme de la fonction affine $[x \longmapsto \alpha x + \beta]$ et de la fonction $[g : x \longmapsto f(x) - \alpha x - \beta]$ qui a pour limite 0 en $+\infty$. La droite (D) d'équation $y = \alpha x + \beta$ est alors asymptote à la branche infinie concernée de la courbe (C_f).

L'étude du signe de g permet de placer (C_f) par rapport à l'asymptote (D).

2e Cas. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = -\infty$, alors :

— au niveau graphique, bien que le coefficient directeur des sécantes (OM) se rapproche de α lorsque x devient de plus en plus grand, la courbe (C_f) « s'éloigne indéfiniment » de toutes les droites de la direction définie par le coefficient directeur α;

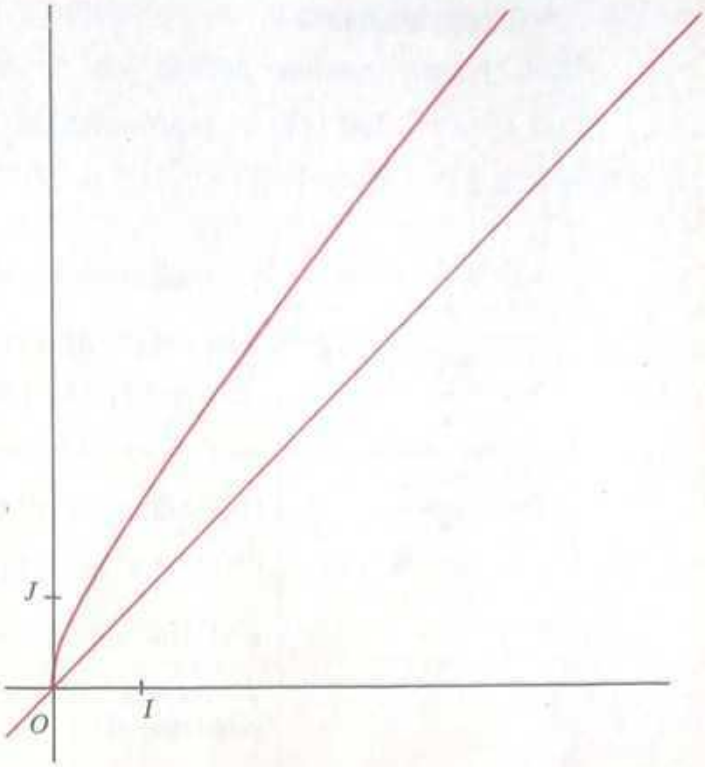
— au niveau du calcul, les valeurs $f(x)$, bien que du même ordre de grandeur que αx pour x assez grand, en diffèrent cependant d'une quantité qui, en valeur absolue, devient très grande.

Scanné avec CamScanner

Dans ce cas, on dit que (C_f) admet une direction asymptotique sans admettre d'asymptote.

Un exemple de cette situation est donné par :

$$f : x \longmapsto x + \sqrt{x}.$$



On notera de plus que :

— si $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - \alpha x\big) = +\infty$, alors, pour x_0 « assez grand », l'intersection de (C_f) et du demi-plan caractérisé par $x \geqslant x_0$ est « au-dessus » de la droite d'équation $y = \alpha x$;

— si $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - \alpha x\big) = -\infty$, alors, pour x_0 « assez grand », l'intersection de (C_f) et du demi-plan caractérisé par $x \geqslant x_0$ est « au-dessous » de la droite d'équation $y = \alpha x$.

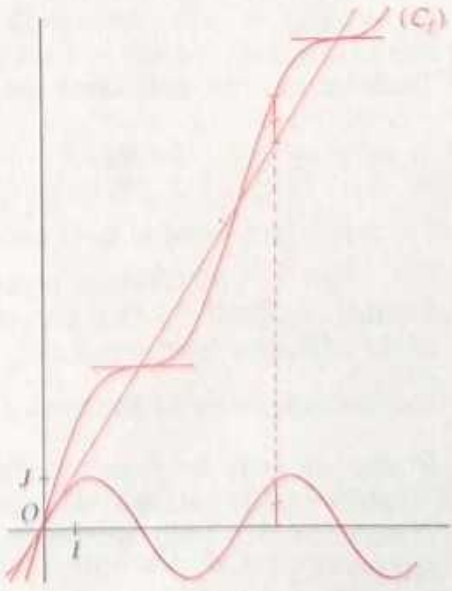
3e cas. Si $\big(f(x) - \alpha x\big)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, on dira encore que (C_f) admet une direction asymptotique sans admettre d'asymptote.
L'observation de la fonction $\big[x \longmapsto f(x) - \alpha x\big]$ permet de préciser la forme de la courbe (C_f).

Un exemple de cette situation est donné par :

$$f : x \longmapsto x + \sin x.$$

(C_f) admet comme direction asymptotique la droite d'équation $y = x$.

La différence $f(x) - x$ vaut $\sin x$; on peut donc donner l'allure de (C_f) en utilisant la représentation graphique de la fonction sinus.



Scanné avec CamScanner

c) Récapitulation

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$, et vérifiant $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Soit (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	(C_f) admet une branche parabolique de direction (OJ);
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	(C_f) admet une branche parabolique de direction (OI);
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$	(C_f) admet comme direction asymptotique la droite d'équation $y = \alpha x$. Dans ce cas : • si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta (\beta \in \mathbb{R})$, alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote à la branche infinie correspondante de (C_f). • si $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x)$ est infinie, ou n'existe pas, alors la branche infinie correspondante de (C_f) n'admet pas d'asymptote.
$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ n'existe pas	(C_f) n'admet ni direction asymptotique, ni branche parabolique; on utilise alors d'autres procédés pour préciser le tracé de (C_f).

Remarque 1. L'étude ci-dessus a été menée pour une fonction f vérifiant $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

Traduire ces résultats dans les cas suivants :

$$\lim_{+\infty} f = -\infty; \quad \lim_{-\infty} f = +\infty; \quad \lim_{-\infty} f = -\infty.$$

Trouver, dans chaque cas, une fonction correspondant à la situation décrite.

Remarque 2. Les résultats précédents, exprimés en termes de limites, ne sont que d'ordre qualitatif : il faut parfois que x soit vraiment « très grand » pour que $f(x)$ ait le comportement annoncé.

Par exemple, soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{\sqrt{\sqrt{x}}}$.

Étudier le sens de variation de f.
Montrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à (C_f).
Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul n tel que $f(10^{4n})$ soit inférieur à 0,1.

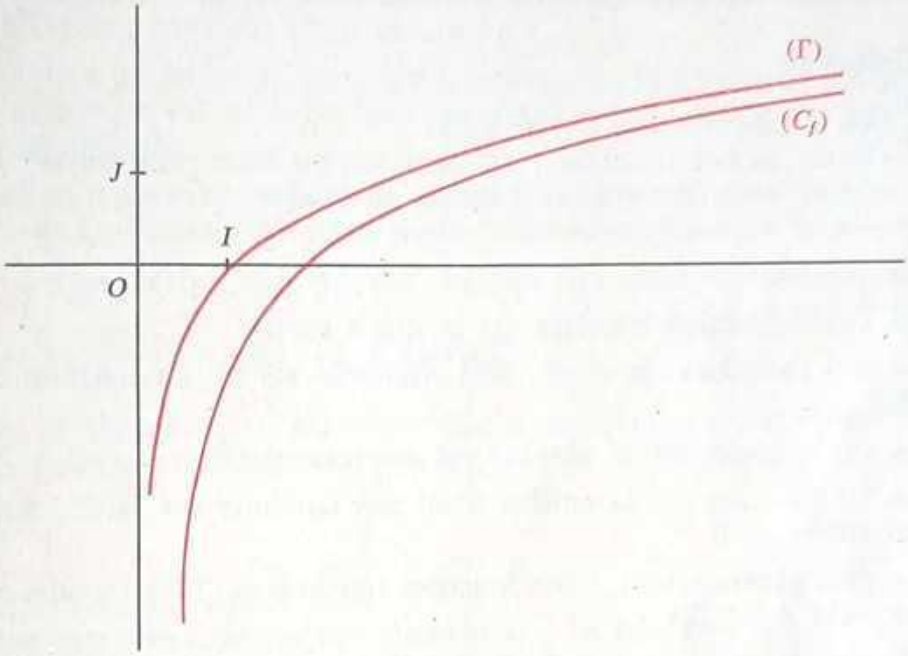
Scanné avec CamScanner

Remarque 3. La notion de droite asymptote à une courbe d'équation $y = f(x)$ peut être généralisée.

Exemple. Soit la fonction $f : x \longmapsto \ln x - \frac{1}{x}$.
Étudier les variations de f. Montrer que (C_f) admet une branche parabolique de direction (OI).
On peut remarquer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \ln x\right) = 0.$$

Ainsi, la courbe (Γ) d'équation $y = \ln x$ peut être utilisée pour préciser le tracé de (C_f).



D'une manière générale, si f et g sont deux fonctions telles que :

$$\lim_{+\infty} (f - g) = 0 \quad \left(\text{respectivement } \lim_{-\infty} (f - g) = 0\right)$$

on dit que les courbes (C_f) et (C_g) sont *asymptotes l'une à l'autre.*
Cette notion n'a évidemment d'intérêt que dans le cas où f (ou g) est une fonction simple, dont la représentation graphique est aisée à tracer.

Exercices

Étudier les fonctions suivantes. Construire leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère (O, I, J) après avoir étudié leurs branches infinies :

$f_1 : x \longmapsto x + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$; $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$;

$f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^3+x^2+x}{2x+1}$; $f_4 : x \longmapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$;

$f_5 : x \longmapsto 1 + \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$; $f_6 : x \longmapsto x + \sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}}$.

(Pour déterminer le signe de f_5' on étudiera ses variations.)

Scanné avec CamScanner

3 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle. Fonctions réciproques

1) Définition et théorèmes généraux

a) Continuité d'une fonction sur un intervalle

On rappelle qu'une fonction f, définie sur un intervalle ouvert, est *continue en un point* x_0 de cet intervalle si et seulement si elle admet une limite en ce point. Dans ce cas, cette limite est nécessairement $f(x_0)$.

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction f est **continue sur l'intervalle ouvert** I si et seulement si f est définie sur I, et continue en chaque point de I.

Exemples

- Toute fonction monôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière n'est pas continue sur $]0; 2[$, puisqu'elle n'est pas continue en 1.
- Plus généralement, toute fonction dérivable sur un intervalle ouvert est continue sur cet intervalle.

Cette définition peut être étendue au cas d'une fonction définie sur un intervalle fermé, ou semi-ouvert.
Ainsi, soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est **continue sur** $[a, b]$ si et seulement si f est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.
On définit à l'aide de conventions analogues, la continuité d'une fonction sur un intervalle I lorsque I est de l'un des types suivants :

$$]a, b]; \quad [a, b[; \quad [a, +\infty[; \quad]-\infty, a].$$

Exemples

- La fonction $\left[x \longmapsto \sqrt{x}\right]$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $\left[x \longmapsto \sqrt{1-x^2}\right]$ est continue sur $[-1; 1]$.
- La fonction $\left[x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right]$ est continue sur $]-1; 1]$.

b) Théorèmes généraux

Rappeler les théorèmes généraux concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
En appliquant ces théorèmes en chaque point d'un intervalle I, on obtient les résultats suivants.

Scanné avec CamScanner

Théorèmes généraux

Soit f et g deux fonctions continues sur un même intervalle I.
- $f+g$ est continue sur I;
- $f\times g$ est continue sur I;
- si, de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Exemples

- Les fonctions polynômes sont des sommes de fonctions monômes. Toute fonction polynôme est donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont des quotients de fonctions polynômes. Toute fonction rationnelle est donc continue sur chacun des intervalles composant son ensemble de définition.
- La fonction tan est le quotient de la fonction sin par la fonction cos, qui sont continues sur $\mathbb{R}$. Comme les zéros de la fonction cos sont les nombres réels de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, la fonction tan est continue sur chacun des intervalles de la forme $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$, où k décrit $\mathbb{Z}$.

De même, le théorème donnant la limite d'une fonction composée permet de justifier le théorème suivant.

Théorème

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle I, et telle que $f(I)\subset J$.
Soit g une fonction continue sur l'intervalle J.
Alors, la fonction $g\circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Exemple

La fonction $f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ a pour ensemble de définition $]-1; 1[$.

La fonction $\left[x \longmapsto \frac{1+x}{1-x}\right]$ est continue sur cet intervalle, et l'image de $]-1; 1[$ par cette fonction est contenue dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
En conséquence, la fonction f est continue sur $]-1; 1[$.

Exercices

1) Étudier la continuité des fonctions suivantes :
a) $f_1 : \longmapsto |x-1|+5x$;
b) $f_2 : \longmapsto \ln|x^2-5x+6|$.
2) Étudier la continuité de la fonction f déninie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x\in\mathbb{R}^* \quad f(x)=\dfrac{|x|}{x}\sin x \\ f(0)=0. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

2) Image d'un intervalle par une fonction continue

a) Image directe d'un ensemble par une application

Rappel. Soit une fonction f, d'ensemble de définition D_f, et A une partie de D_f. L'*image directe* de A par f est l'ensemble des images par f de tous les éléments de A. Elle est notée $f(A)$. Ainsi :

$$f(A)=\{y\in\mathbb{R}/\exists x\in A \quad f(x)=y\}.$$

Exemple 1. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2+1$.

On veut déterminer l'image directe de $[-2; 4[$ par f.

Pour cela, on procède en deux étapes :

— on encadre, le plus précisément possible, l'image d'un élément quelconque de $[-2; 4[$ par f; on détermine ainsi un intervalle J tel que $f([-2; 4[)\subset J$;

— on étudie si chaque élément de J possède un antécédent dans $[-2; 4[$.

On a, pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned} x\in[-2; 4[&\iff -2\leqslant x\leqslant 0 \quad \text{ou} \quad 0\leqslant x<4 \\ &\Longrightarrow 0\leqslant x^2\leqslant 4 \quad \text{ou} \quad 0\leqslant x^2<16 \\ &\Longrightarrow 0\leqslant x^2<16 \\ &\Longrightarrow 1\leqslant f(x)<17. \end{aligned}$$

On a ainsi établi que $f([-2; 4[)\subset[1; 17[$.

Réciproquement, soit y un élément quelconque de $[1; 17[$.

On a :

$x^2+1=y \iff x^2=y-1$.

$y-1$ est un élément de $[0, 16[$.

Donc $\sqrt{y-1}$ est un élément de $[0, 4[$.

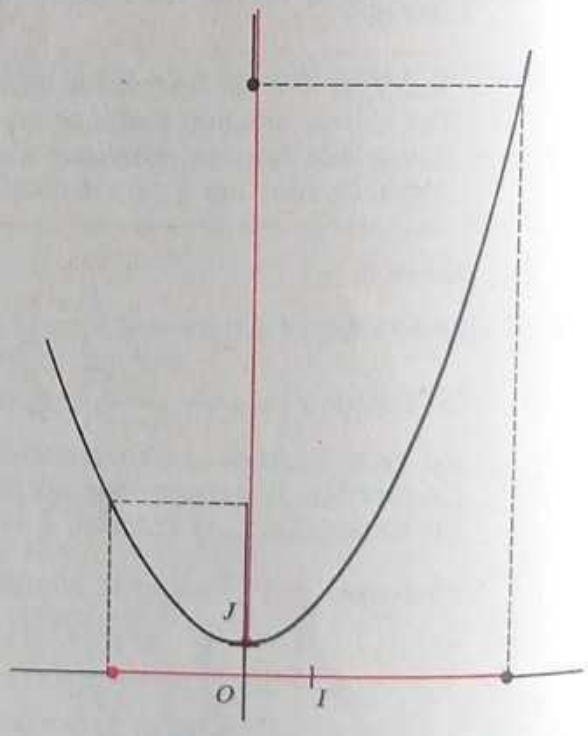
$\sqrt{y-1}$ est alors un antécédent de y par f, et $\sqrt{y-1}$ appartient à $[0; 4[$, donc à $[-2; 4[$.

Tout élément de $[1; 17[$ admet un antécédent dans $[-2; 4[$. Par conséquent :

$$[1; 17[\subset f([-2; 4[).$$

Finalement :

$$f([-2; 4[)=[1; 17[.$$



Exemple 2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x+1}{4}$.

Quelle est l'image de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels par f?

Scanné avec CamScanner

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui possèdent une écriture sous la forme $\frac{p}{q}$ où p est un élément de $\mathbb{Z}$ et q un élément de $\mathbb{N}^*$.

Soit $\frac{p}{q}$ un élément quelconque de $\mathbb{Q}$. Son image par f est le nombre réel y donné par :

$$y = \frac{3\frac{p}{q}+1}{4}$$
$$= \frac{3p+q}{4q}.$$

y est donc aussi un nombre rationnel. D'où : $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Réciproquement, soit y un élément quelconque de $\mathbb{Q}$, et $\frac{u}{v}$ une écriture de y sous forme de fraction $(u \in \mathbb{Z},\ v \in \mathbb{N}^*)$.

On a : $$\frac{3x+1}{4} = \frac{u}{v} \iff x = \frac{1}{3}\left(4\frac{u}{v} - 1\right)$$
$$\iff x = \frac{4u-v}{3v}.$$

L'unique antécédent de $\frac{u}{v}$ par f est $\frac{4u-v}{3v}$; c'est encore un nombre rationnel.

D'où : $\mathbb{Q} \subset f(\mathbb{Q})$.

Et, finalement : $f(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

b) **Théorème fondamental**

Déterminons algébriquement, ou graphiquement, des images d'intervalles par diverses fonctions.

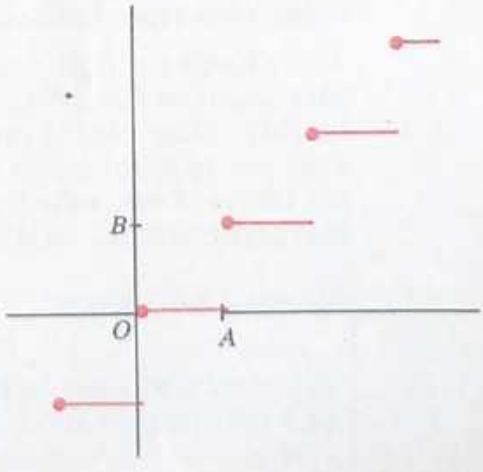
Exemple 1. Soit $f_1 : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$.
Représenter graphiquement f_1 sur l'intervalle $[-2; 2]$, et déterminer graphiquement les images des intervalles suivants :

$$\left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[; \quad [0; 1[; \quad [-2; 2].$$

Exemple 2. La représentation graphique ci-contre est celle de la fonction partie entière E.

Déterminer l'image par E des intervalles suivants :

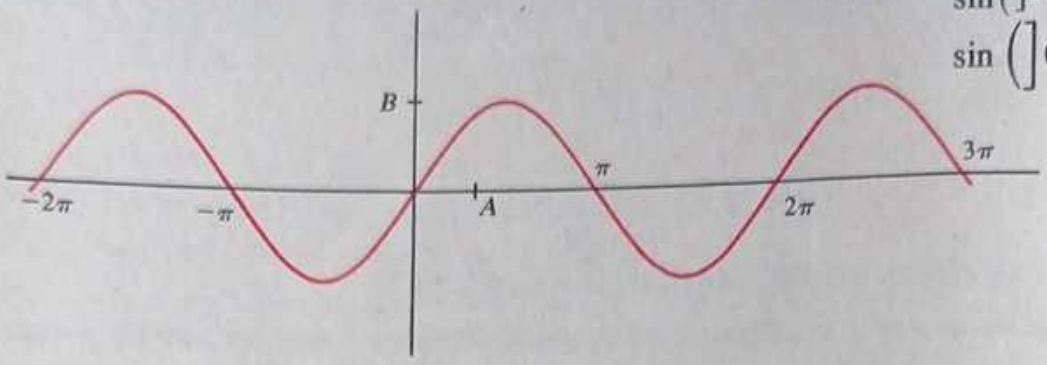
$[0; 2]$; $[0; 1[$; $[-1; 3]$.



Scanné avec CamScanner

Exemple 3. On considère la fonction sinus.

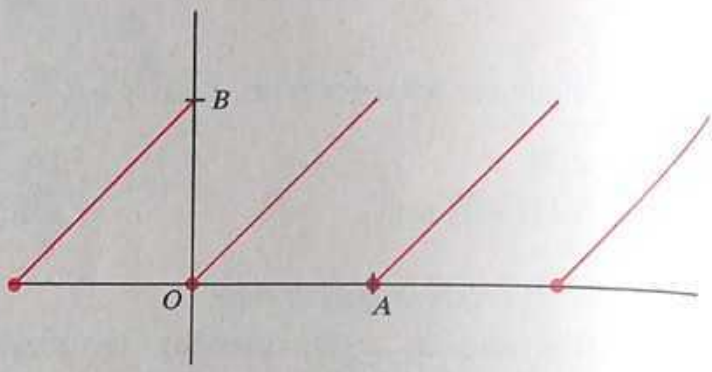
On sait que, par exemple :
$\sin(]0; \pi]) = [0; 1]$;
$\sin(]-\pi; 2\pi[) = [-1; 1]$;
$\sin\left(\left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0; 1[$.



Peut-on trouver un intervalle dont l'image par la fonction sin ne soit pas un intervalle?
Peut-on trouver un intervalle fermé borné dont l'image par la fonction sin ne soit pas un intervalle fermé borné?

Exemple 4. On indique ci-contre la représentation graphique de la fonction

$$f_4 : x \longmapsto x - E(x).$$



Déterminer un intervalle I_1 dont l'image par f_4 est un intervalle.

Déterminer un intervalle I_2 dont l'image par f_4 n'est pas un intervalle.

L'application f_4 est-elle continue sur I_2?

Déterminer un intervalle fermé borné $[a, b]$ dont l'image par f_4 est un intervalle semi-ouvert.

En conclusion des exemples étudiés ci-dessus, nous pouvons remarquer que :

— les fonctions f_1 et sin sont continues sur $\mathbb{R}$; les images d'intervalles que nous avons recherchées étaient des intervalles;

— les fonctions E et f_4 ne sont pas continues sur $\mathbb{R}$; les images d'intervalles que nous avons recherchées n'étaient pas nécessairement des intervalles.

De plus, même dans le cas des fonctions continues f_1 et sin, l'image d'un intervalle n'est pas nécessairement un intervalle de même nature. Par contre, nous n'avons pas trouvé d'intervalle fermé borné dont l'image par sin soit d'une autre nature. Plus généralement, on démontre le théorème suivant, que nous admettrons.

Théorème fondamental

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I, non constante sur I. Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Scanné avec CamScanner

Remarque 1. Ce théorème donne la nature de l'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle, mais ne donne pas de moyen pratique pour déterminer explicitement l'intervalle image. Il faut, pour cela, disposer de renseignements complémentaires tels que le sens de variation de f, ses extrémums relatifs, ...etc.

Exemple. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et admettant le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	-1				-2		

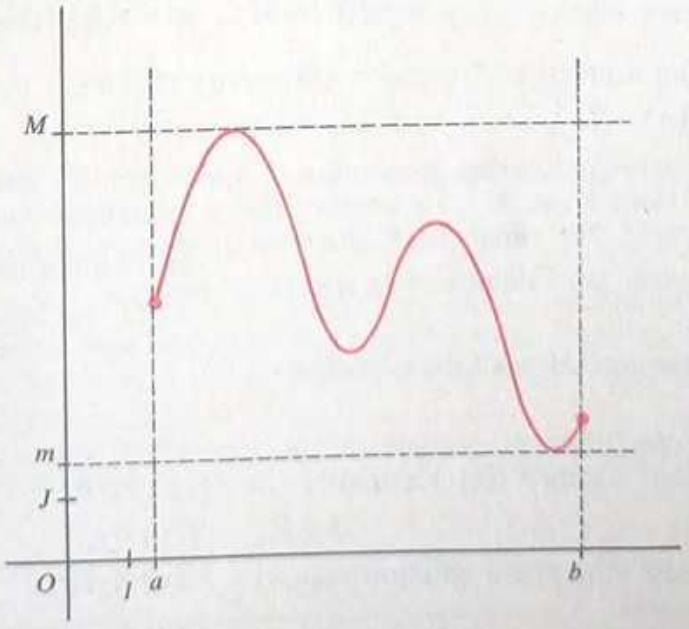
L'image par f de l'intervalle $]-1; 1]$ est $[-2; 2]$. Justifier.

Remarque 2. Lorsqu'une fonction f n'est pas continue sur un intervalle I, aucun théorème ne permet de prévoir la forme de $f(I)$. Notons que, dans certains cas, $f(I)$ peut être un intervalle (voir l'exemple 4 ci-dessus).

Remarque 3. Lorsque f est continue sur I, les intervalles I et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature. Ainsi, nous avons vu que l'image par la fonction sin de l'intervalle *ouvert* $]-\pi, 2\pi[$ est l'intervalle *fermé* $[-1; 1]$. Notons toutefois que, pour les intervalles *fermés bornés*, on a le résultat plus précis suivant, que nous admettrons.

Théorème

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur $[a, b]$, non constante sur $[a, b]$.
Si f est continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$.



Scanné avec CamScanner

Attention! En général, f n'est pas monotone sur $[a, b]$, et les valeurs m et M ne sont pas forcément $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque 1. Les valeurs m et M sont respectivement le minimum et le maximum absolus de f sur $[a, b]$. Ainsi, une fonction continue sur un intervalle fermé borné est *bornée* sur cet intervalle et admet un *minimum* et un *maximum absolus* sur cet intervalle.

Remarque 2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x}$.

Quelle est l'image de l'intervalle $[1, +\infty[$ par f?

On voit que le résultat du théorème n'est plus nécessairement vérifié lorsque l'intervalle I est fermé, non borné.

Exercice

Soit f une fonction continue sur $]-\infty, 3]$, et telle que :

- f est croissante (au sens large) sur $]-\infty, 0]$;
- f est strictement décroissante sur $[0; 3]$;
- $f(0)=2$; $f(3)=1$;
- $\lim\limits_{-\infty} f = 1$.

Les renseignements fournis sont-ils suffisants pour déterminer $f(]-\infty, 3[)$? pour déterminer $f([-1; 3])$?

c) Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue non constante sur un intervalle I. Soit a et b deux points distincts de I. On peut supposer que : $a<b$. D'après le théorème précédent, l'image de l'intervalle $[a, b]$ par f est un intervalle fermé borné $[m, M]$.

Comme a et b sont des éléments de $[a, b]$, on a :

$$m \leqslant f(a) \leqslant M; \quad m \leqslant f(b) \leqslant M.$$

Soit y un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

— Si $f(a)=f(b)$, alors on a nécessairement $y=f(a)$.

— Si $f(a)\neq f(b)$, alors le nombre y appartient à l'intervalle de bornes $f(a)$ et $f(b)$, et donc à $[m, M]$. Le nombre réel y appartient donc à l'image de l'intervalle $[a, b]$ par f. Par conséquent, il existe un élément ξ de $[a, b]$ tel que $f(\xi)=y$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant.

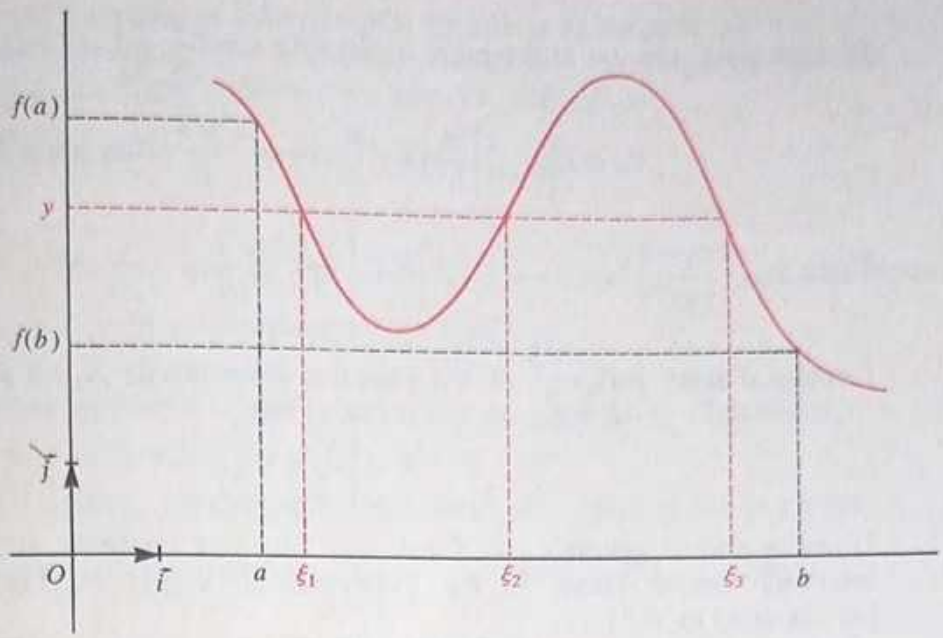
Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I; soit a et b deux éléments de I. Pour tout nombre réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=y$$

admet au moins une solution comprise entre a et b.

Scanné avec CamScanner



Exercice Soit la fonction $f : x \longmapsto 8x^3 - 12x^2 - 4$.
Montrer qu'il existe au moins un élément x_0 de $\mathbb{R}$ tel que
$$f(x_0) = -\sqrt{17}.$$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. S'il existe deux nombres réels a et b $(a<b)$, éléments de I, tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires, alors l'équation :
$$x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=0$$
admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Exemple. Considérons l'équation : (E) $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = x$.
Utiliser la fonction $[\varphi : x \longmapsto \cos x - x]$ pour montrer que (E) admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Image d'un intervalle par une fonction continue et monotone

a) Exemples de déterminations

Dans le cas général, les théorèmes précédents ne permettent pas de déterminer explicitement l'image d'un intervalle I par une fonction continue. La situation est différente lorsque la fonction est monotone sur I, comme nous allons le voir sur les exemples ci-dessous.

Exemple 1. Déterminer l'image de l'intervalle fermé $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ par la fonction tangente.

La fonction tan est continue sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$; par conséquent, l'image de cet intervalle par la fonction tan est un intervalle fermé borné K.

Scanné avec CamScanner

D'autre part, tan est strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. D'où :

$$\forall x \in D_{\tan} \quad \left[\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \implies \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \tan x \leqslant \sqrt{3}\right].$$

Donc : $$K \subset \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right].$$

Comme d'autre part, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$ sont des éléments de K, on en déduit que :

$$K = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right].$$

D'une manière générale, si f est une fonction continue et monotone sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, l'intervalle $f([a, b])$ est l'intervalle fermé de bornes $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple 2. Déterminer l'ensemble image de la fonction ln.

Soit I l'ensemble image cherché.
La fonction ln est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
L'ensemble I est donc un intervalle.

Comme

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty,$$

x	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖ +	
$\ln x$	‖ $-\infty$ ↗	$+\infty$

l'intervalle I ne peut admettre un nombre réel comme origine ou comme extrémité. D'où, nécessairement : $I = \mathbb{R}$.

Exemple 3. Déterminer l'image de l'intervalle $[1; +\infty[$ par la fonction f : $x \longmapsto \frac{2x+5}{x+2}$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Par conséquent, $f([1, +\infty[)$ est un intervalle I.

D'autre part, puisque f est décroissante sur $[1; +\infty[$:

$$\forall x \in D_f \quad \left[x \geqslant 1 \implies f(x) \leqslant \frac{7}{3}\right].$$

x	$-\infty$		-2		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		
$f(x)$	2	↘	‖ $+\infty$	↘	$\frac{7}{3}$	↘ 2
			‖ $-\infty$			

Comme $\frac{7}{3}$ est un élément de I, c'est nécessairement l'extrémité de I.

Scanné avec CamScanner

Comme f est strictement décroissante, et admet la limite 2 en $+\infty$, $f(x)$ prend des valeurs «aussi proches que l'on veut de 2», mais qui restent *strictement supérieures à 2* lorsque x devient de plus en plus grand.

D'où finalement : $f([1; +\infty[) = \left]2; \frac{7}{3}\right]$.

Exercice Montrer que la fonction $\left[f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]$ est monotone sur $]-1; 0]$ et déterminer $f(]-1; 0])$.

b) **Résolution approchée d'une équation par la méthode de dichotomie**

Exemple. Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 4x - 6$.

Étudier la fonction. Montrer que son tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	M	↘	m	↗	$+\infty$

$$M = \frac{16\sqrt{3}}{9} - 6;$$

$$m = -\frac{16\sqrt{3}}{9} - 6.$$

On constate graphiquement que f admet un unique zéro. Justifions ce résultat :

- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- on a : $f(2) < 0$; $f(3) > 0$.

L'équation : $(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 0$

admet donc au moins une solution dans l'intervalle [2; 3].

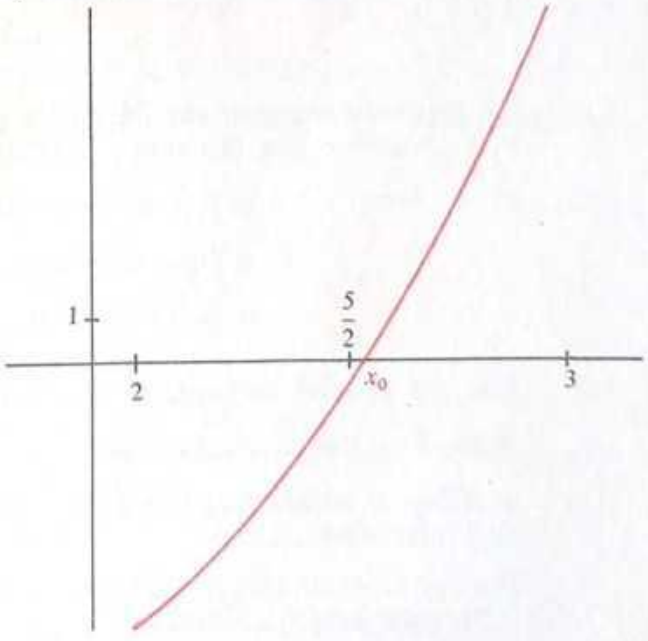
De plus, comme f est strictement monotone sur cet intervalle, l'équation (E) admet en fait une *unique* solution x_0 dans cet intervalle.

Le centre de l'intervalle [2; 3] est $\frac{5}{2}$.

Calculons son image par f.

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -0{,}375.$$

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ est négatif. Par conséquent x_0 appartient à $\left[\frac{5}{2}; 3\right]$.



Scanné avec CamScanner

On peut alors itérer le procédé. D'une manière générale :

- sachant que : $x_0 \in [a_n, b_n]$, on calcule $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$;
- si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) > 0$, alors $x_0 \in \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$;
- si $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$, alors $x_0 \in \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$.

Dans les deux cas, on détermine ainsi un encadrement de x_0 d'amplitude deux fois plus petite que celle de l'encadrement précédent.

On peut présenter les calculs sous forme de tableau de la manière suivante :

n	a_n	b_n	$\frac{a_n + b_n}{2}$	$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$
0	2	3	2,5	−0,375
1	2,5	3	2,75	3,797
2	2,5	2,75	2,625	1,588
3	2,5	2,625	2,562 5	0,576
4	2,5	2,562 5	2,531 25	0,093
5	2,5	2,531 25	2,515 625	−0,143
6	2,515 625	2,531 25	2,523 437 5	−0,025
7	2,523 437 5	2,531 25		

On obtient : $2{,}523\,437\,5 \leqslant x_0 \leqslant 2{,}531\,25$.

D'où, en éliminant les « décimales inutiles » :

$$2{,}523 \leqslant x_0 \leqslant 2{,}532.$$

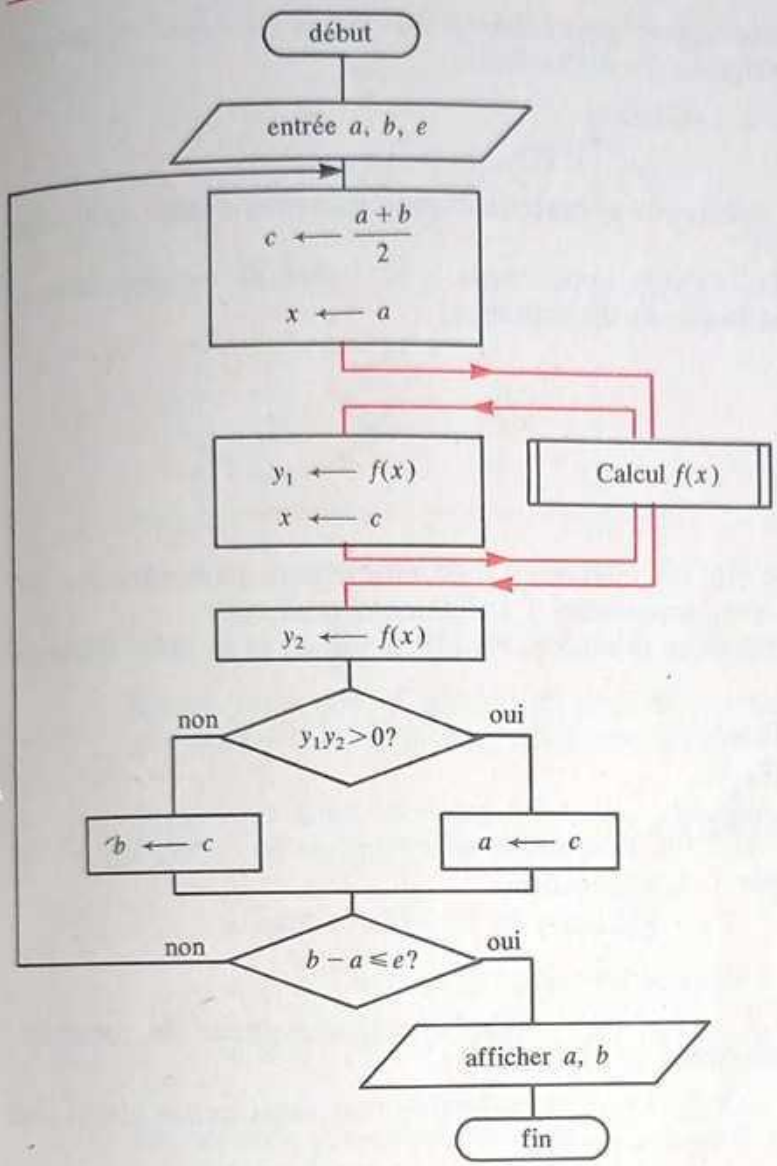
La méthode exposée sur l'exemple précédent peut être utilisée chaque fois que l'on considère une fonction f vérifiant les hypothèses suivantes :

- f est continue sur un intervalle $[a, b]$;
- f est strictement monotone sur $[a, b]$;
- $f(a) \times f(b) < 0$.

Elle est appelée **méthode de dichotomie.** Le mot *dichotomie* signifie *partage en deux.* En effet, à chaque étape, la considération du signe de $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ permet de situer la solution x_0 soit dans la première moitié, soit dans la deuxième moitié de l'intervalle $[a_n, b_n]$.

Sur une calculatrice programmable, on pourra réaliser un programme correspondant à l'organigramme suivant :

Scanné avec CamScanner



Commentaire

• e est l'amplitude de l'encadrement cherché.

• En utilisant comme test :

$$f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0?$$

on construit un programme qui accepte toutes les fonctions, qu'elles soient croissantes ou décroissantes.

• On utilisera un sous-programme pour calculer $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, etc.

Remarquer que ce programme traite aussi le cas exceptionnel où x_0 serait l'une des valeurs $\frac{a_n + b_n}{2}$ déterminées par le calcul. En effet, dans le cas où $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$, comment le programme choisit-il les intervalles $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, $[a_{n+2}, b_{n+2}]$...?

Exercices

1) On a vu que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = x$$

admet une unique solution dans l'intervalle [0; 1].
Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution en utilisant la méthode de dichotomie.

2) Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad \tan x = x$$

admet une unique solution dans l'intervalle [4; 4,6].

Scanné avec CamScanner

Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution en utilisant la méthode de dichotomie.

3) Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}^*_+, \quad \ln(x^3) = x$$

admet deux solutions appartenant respectivement aux intervalles [1; 2] et [4; 5].
Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près de ces solutions en utilisant la méthode de dichotomie.

4) Fonctions réciproques

a) Théorème d'existence

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et strictement monotone sur cet intervalle. Pour fixer les idées, supposons f strictement croissante.
La restriction $f_{|I}$ de f à I est alors injective. En effet, soit x_1 et x_2 deux éléments distincts de I.

— Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

— Si $x_1 > x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

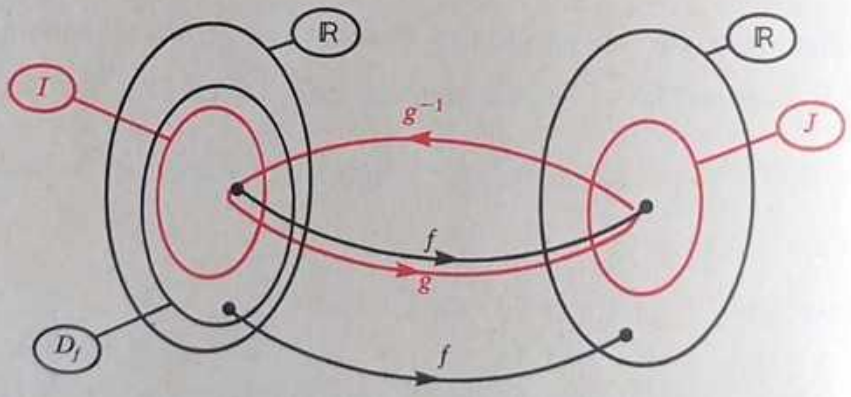
Et, dans les deux cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Soit alors J l'image de I par f. L'application :

$$g : I \longrightarrow J$$
$$x \longmapsto f(x)$$

n'est en général ni égale à f, ni égale à $f_{|I}$ (sauf mention explicite du contraire, f et donc $f_{|I}$ ont comme ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$).

Cependant, g est injective (car $f_{|I}$ l'est) et surjective (car nous avons choisi son ensemble d'arrivée pour qu'il en soit ainsi).

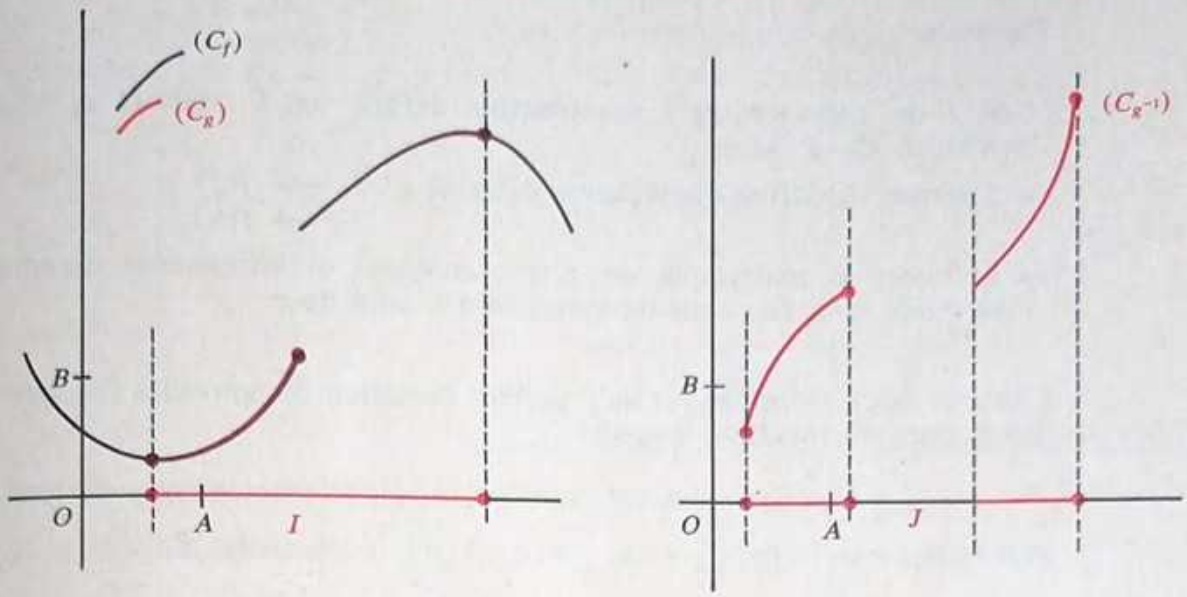


On dit que f permet de définir une bijection g de I sur J.
On obtient un résultat analogue pour une fonction strictement décroissante.

La bijection réciproque de g est l'application g^{-1} de J dans I définie par :

$$\forall x \in J \quad \forall y \in I \quad \left[g^{-1}(x) = y \iff x = g(y)\right].$$

Scanné avec CamScanner



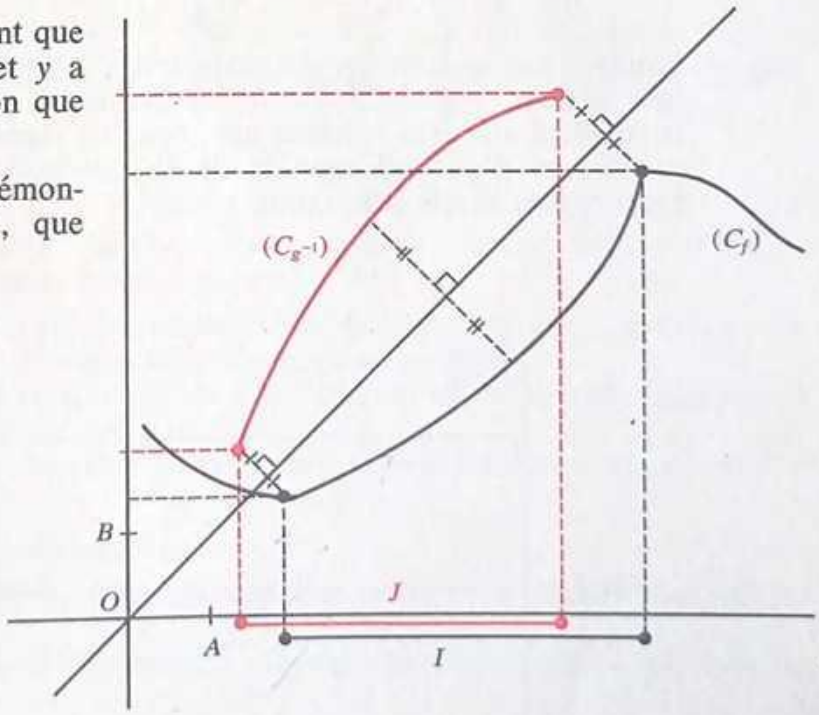
Remarquons que, J n'étant en général pas un intervalle, nous ne pouvons même pas énoncer de résultat général concernant le sens de variation de g^{-1}.

Supposons alors en outre f continue sur l'intervalle I. Dans ce cas, l'image J de I par f est un intervalle et on peut alors se demander :

- quel est le sens de variation de g^{-1} sur J;
- si g^{-1} est continue sur l'intervalle J;
- si g^{-1} est dérivable sur J lorsque f l'est sur I.

On constate graphiquement que g^{-1} est continue sur J, et y a le même sens de variation que f sur I.

Plus généralement, on démontre le théorème suivant, que nous admettrons.



Scanné avec CamScanner

Théorème

Soit I un intervalle, et f une fonction définie sur I, continue et strictement monotone sur I. Alors :

- f permet de définir l'application *bijective* $g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & f(I) \\ x & \longmapsto & f(x); \end{array}$
- la bijection réciproque de g est continue et strictement monotone sur l'*intervalle* $f(I)$; son sens de variation est celui de g.

L'intérêt de ce théorème est qu'il permet de définir de nouvelles fonctions comme réciproques de fonctions usuelles.

Exemple La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, et strictement monotone sur tout intervalle de la forme $\left[\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+(n+1)\pi\right]$, n décrivant $\mathbb{Z}$.

Le plus simple de ces intervalles est $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

L'application $g : \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1; 1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est donc une bijection.

Sa bijection réciproque est une application continue et strictement croissante de $[-1; 1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; elle est traditionnellement notée *Arcsin* (lire arc sinus).

La fonction Arcsin est caractérisée par l'équivalence :

$$\forall x \in [-1; 1] \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left[\text{Arcsin } x = y \iff \begin{cases} \sin y = x \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}\right]$$

Montrer que la fonction Arcsin, comme la fonction sin, est impaire.
Son tableau de variation, et sa représentation graphique, se déduisent de ceux de la fonction sin. (On rappelle que, dans un repère orthonormé, les représentations graphiques d'une bijection et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.)

Fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

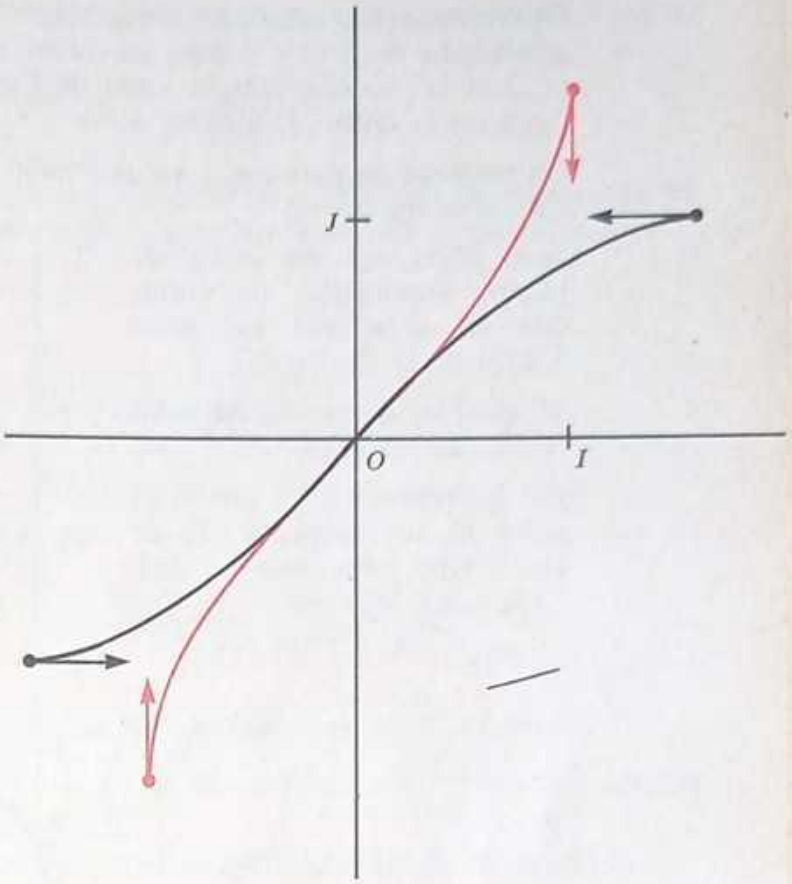
x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	↗	0	↗	1

Fonction Arcsin

x	-1		0		1
Arcsin x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

Scanné avec CamScanner

x	Arcsin x
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{\pi}{2}$



En noir : courbe représentative de la fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En rouge : courbe représentative de la fonction Arcsin.

Remarque Cette fonction est présente sur le clavier des calculatrices. C'est la fonction correspondant à la touche $\boxed{\sin^{-1}}$ ou aux touches $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{\sin}$ (lorsque la calculatrice est en mode radian).

Exercices

1) *a*) Calculer, pour x élément de $[-1; 1]$, $\sin(\text{Arcsin } x)$.

b) A l'aide d'une calculatrice, calculer les images par la fonction (Arcsin∘sin) de :

$$0; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi.$$

Montrer que la fonction (Arcsin∘sin) est impaire et construire sa représentation graphique sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2) Quel est le plus grand intervalle de centre 0 sur lequel la fonction tangente est continue et strictement monotone?
La bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à cet intervalle est notée Arctan.
Définir cette fonction et construire sa représentation graphique.

b) **Dérivabilité de la fonction réciproque**

Il semble, au vu de la représentation graphique de la fonction Arcsin, que celle-ci soit dérivable sur $]-1; 1[$.
Ceci nous amène à étudier, d'une manière générale, la dérivabilité de g^{-1} lorsque g est elle-même dérivable.

Scanné avec CamScanner

On reprend les notations précédentes. Soit (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ les représentations graphiques de g et g^{-1} dans un même repère orthonormé (O, A, B) du plan. (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont images l'une de l'autre par la symétrie orthogonale S dont l'axe est la droite d'équation $y = x$.

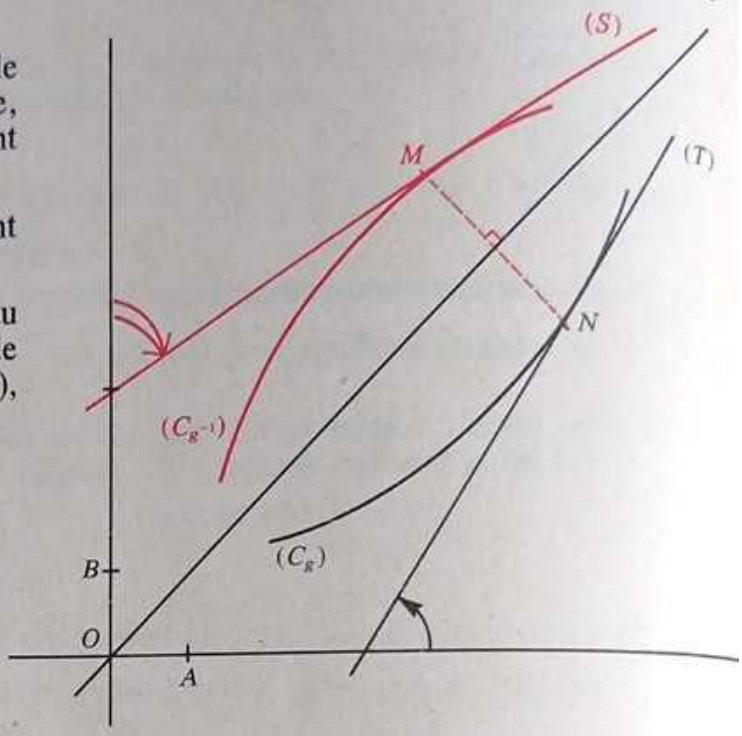
On suppose de plus que f est dérivable sur I. La fonction g est alors également dérivable sur I.

Soit $M(x_0, y_0)$ un point de $(C_{g^{-1}})$. Supposons, en outre, que M n'est pas un point d'arrêt de la courbe $(C_{g^{-1}})$.

M est l'image par S du point $N\ (y_0, x_0)$ de (C_g).

Par hypothèse, (C_g) admet au point N une tangente (T) de coefficient directeur $f'(y_0)$, c'est-à-dire telle que :

$$\tan\left(\widehat{(OA), (T)}\right) = f'(y_0).$$



On admet que les symétries orthogonales « conservent les tangentes ». La courbe $(C_{g^{-1}})$ admet donc au point M une tangente (S) telle que :

$$\tan\left(\widehat{(OB), (S)}\right) = -f'(y_0).$$

Or :
$$\left(\widehat{(OB), (S)}\right) = \left(\widehat{(OB), (OA)}\right) + \left(\widehat{(OA), (S)}\right)$$
$$= \left(\widehat{(OA), (S)}\right) + \widehat{\delta} \qquad (\widehat{\delta} \text{ est l'angle droit}).$$

Deux cas sont alors possibles.

Premier cas. $f'(y_0) \neq 0$.

Dans ce cas, $\left(\widehat{(OB), (S)}\right) \neq \widehat{0}$ et donc $\left(\widehat{(OA), (S)}\right) \neq \widehat{\delta}$.

La tangente (S) à $(C_{g^{-1}})$ en M a alors pour coefficient directeur $\tan\left(\widehat{(OA), (S)}\right)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{f'(y_0)}$.

Deuxième cas. $f'(y_0) = 0$.

Dans ce cas, $\left(\widehat{(OA), (S)}\right) = \widehat{\delta}$.

La tangente (S) à $(C_{g^{-1}})$ est parallèle à la droite des ordonnées.

Pour en tirer des conséquences quant à la dérivabilité de g^{-1}, remarquons tout d'abord que $y_0 = g^{-1}(x_0)$, et donc $f'(y_0) = f'\left(g^{-1}(x_0)\right)$.

Par conséquent, pour tout point x_0 de $f(I)$, autre que les bornes éventuelles de $f(I)$:

Scanné avec CamScanner

— si $f'(g^{-1}(x_0)) \neq 0$, alors g^{-1} est dérivable en x_0, et son nombre dérivé en x_0 est donné par :

$$(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(g^{-1}(x_0))};$$

— si $f'(g^{-1}(x_0)) = 0$, alors g^{-1} n'est pas dérivable en x_0 et sa courbe représentative admet au point d'abscisse x_0 une tangente parallèle à la droite des ordonnées.

Théorème

On reprend les notations et les hypothèses du théorème précédent.
Si f est dérivable sur I, alors g^{-1} est dérivable en tout point x de $f(I)$ tel que :

$$f'(g^{-1}(x)) \neq 0$$

et sa fonction dérivée est donnée par :

$$(g^{-1})' = \frac{1}{f' \circ g^{-1}}.$$

Exemple. Reprenons la fonction Arcsin définie dans l'exemple précédent.

La fonction sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, et sur cet intervalle, sa fonction dérivée ne s'annule qu'aux points $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire en $\text{Arcsin}(-1)$ et $\text{Arcsin}\, 1$.

La fonction Arcsin est donc dérivable sur $]-1; 1[$, et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}\, x)}.$$

Remarquons que, pour tout élément t de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \geqslant 0$, et donc :

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}.$$

On peut donc encore écrire :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \cos(\text{Arcsin}\, x) = \sqrt{1 - (\sin(\text{Arcsin}\, x))^2}.$$

D'où :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad (\text{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Par contre, la fonction Arcsin n'est ni dérivable à droite en -1, ni dérivable à gauche en 1. Aux points d'abscisses -1 et 1, sa courbe représentative admet deux demi-tangentes parallèles à la droite des ordonnées.

Exercice Montrer que la fonction Arctan (voir l'exercice 2 du paragraphe précédent) est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Scanné avec CamScanner

4 Fonctions puissances d'exposant rationnel

1) Les fonctions puissances d'exposant entier et leurs réciproques

a) Fonction puissance $n^{\text{ième}}$

Soit n un élement de $\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par :

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^n.$$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$; son tableau de variation est donné, selon la parité de n, par :

n impair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

n pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Dans les deux cas, f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, définir la *bijection :*

$$g_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x^n.$$

b) Fonction racine $n^{\text{ième}}$

La bijection réciproque de g_n est l'application g_n^{-1} définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \left[y = g_n^{-1}(x) \iff y^n = x \right].$$

g_n^{-1} est l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui, à tout nombre réel positif x, associe l'unique nombre réel positif dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est x. La fonction g_n^{-1} est appelée *fonction racine $n^{ième}$*.

On note : $g_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$.

Ainsi, la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel positif est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall y \in \mathbb{R}_+ \quad \left[y = \sqrt[n]{x} \iff y^n = x \right].$$

Cas particuliers. Pour $n = 1$, la fonction g_1^{-1} est

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto x.$$

Pour $n = 2$, la fonction g_2^{-1} est la fonction racine carrée.

Le tableau de variation de la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est donné par :

x	0		$+\infty$
$\sqrt[n]{x}$	0	↗	$+\infty$

Scanné avec CamScanner

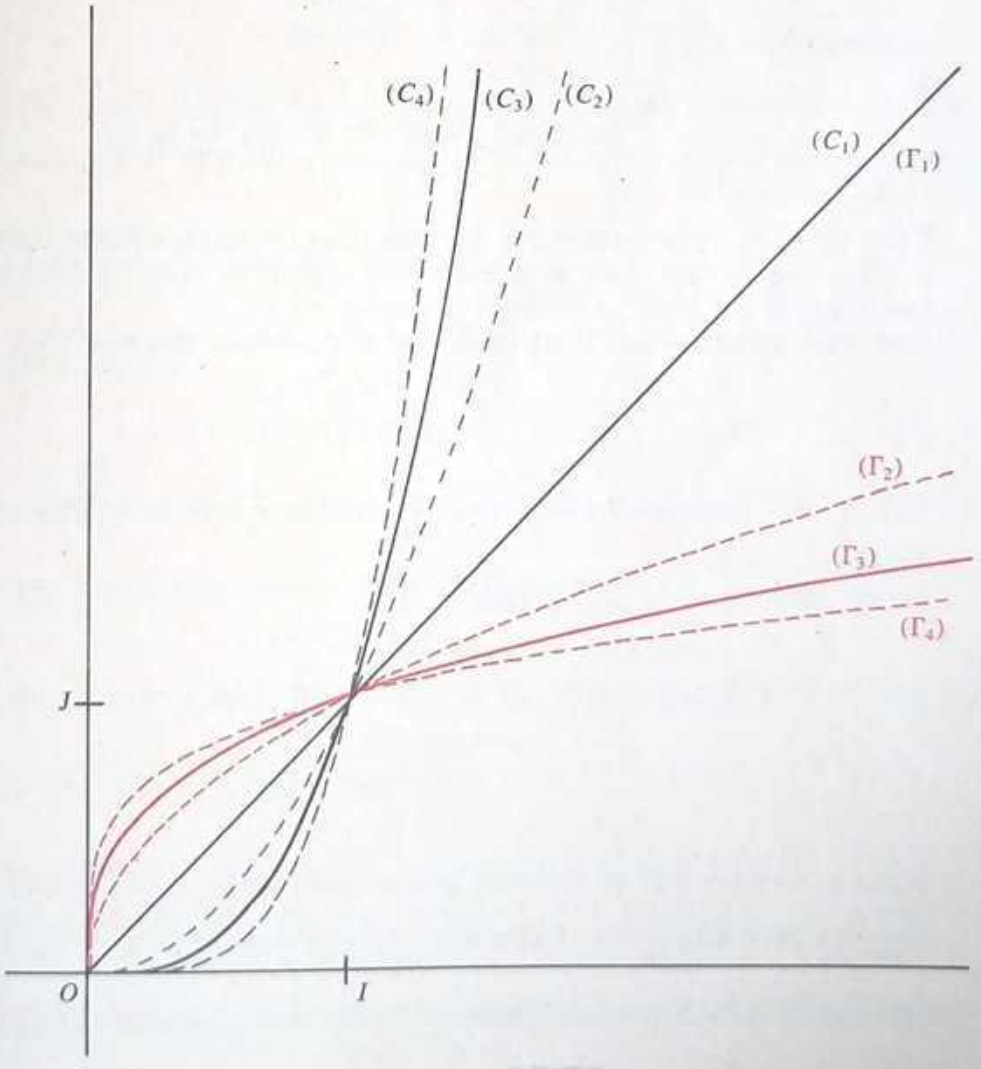
Pour $n \geqslant 2$, nous savons que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, et nulle en 0.
Pour $n \geqslant 2$, la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, non dérivable en 0, et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

Construisons, sur un même dessin, les représentations graphiques (C_n) des fonctions g_n, et les représentations graphiques (Γ_n) des fonctions g_n^{-1}.
Pour placer l'une par rapport à l'autre les courbes (C_n), il est utile de remarquer que, si n et n' désignent deux éléments de $\mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0; 1] \quad [n < n' \implies f_n(x) \geqslant f_{n'}(x)]$$
$$\forall x \in [1; +\infty[\quad [n < n' \implies f_n(x) \leqslant f_{n'}(x)].$$

D'où le tracé des courbes (C_n) et (Γ_n).



Scanné avec CamScanner

On constate graphiquement, et on pourra vérifier par le calcul, que pour $n \geq 2$, (C_n) admet une branche parabolique de direction (OJ), et (Γ_n) une branche parabolique de direction (OI).

2) Fonctions puissances d'exposant rationnel

a) Exposants rationnels

On vérifie à l'aide de la définition des racines $n^{\text{ièmes}}$ que celles-ci satisfont les propriétés algébriques suivantes :

Pour tous nombres entiers naturels n et p, pour tous nombres réels positifs x et y :

$$\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \times y} \quad (1)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}. \quad (2)$$

D'autre part, soit x un nombre réel strictement positif, et y sa racine $n^{\text{ième}}$.

On a : $y^n = x$

et donc : $\ln y^n = \ln x$

$n \ln y = \ln x.$

Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x.$$

Cette formule est à rapprocher de celle donnant le logarithme d'une puissance de x d'exposant entier. Elle nous suggère d'utiliser la notation $x^{\frac{1}{n}}$ pour désigner $\sqrt[n]{x}$.
Les égalités (1) et (2) s'écrivent alors :
Pour tous nombres entiers naturels n et p, pour tous nombres réel positifs x et y :

$$x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{n}} = (x \times y)^{\frac{1}{n}} \quad (1')$$

$$(x^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{np}}. \quad (2')$$

Ces égalités prolongent aux exposants du type $\frac{1}{n}$ des propriétés connues pour les exposants entiers.
Qu'en est-il alors de la propriété :

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \ ?$$

Soit m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Pour tout nombre réel positif x :

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{n}} \times x^{\frac{1}{m}} &= \sqrt[n]{x} \times \sqrt[m]{x} \\ &= \sqrt[mn]{x^m} \times \sqrt[mn]{x^n} \\ &= (x^{m+n})^{\frac{1}{mn}}. \end{aligned}$$

Nous sommes tentés de noter ce dernier nombre x^α, où α est le nombre rationnel $\frac{m+n}{mn}$, c'est-à-dire $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Cependant, un problème se pose car un nombre rationnel strictement positif possède plusieurs écritures sous forme de fraction : $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \ldots$ Si

Scanné avec CamScanner

$\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ (p, p', q et q' étant éléments de $\mathbb{N}^*$) sont deux écritures sous forme de fraction d'un même nombre rationnel strictement positif α, les écritures $(x^p)^{\frac{1}{q}}$ et $(x^{p'})^{\frac{1}{q'}}$ désignent-elles alors le même nombre réel?

Remarquons que :

— si $x=0$, alors $(x^p)^{\frac{1}{q}}=0$ et $(x^{p'})^{\frac{1}{q'}}=0$;

— si $x\neq 0$:

$$\ln\left((x^p)^{\frac{1}{q}}\right)=\frac{1}{q}\ln(x^p) \qquad \ln\left((x^{p'})^{\frac{1}{q'}}\right)=\frac{1}{q'}\ln(x^{p'})$$
$$=\frac{p}{q}\ln x \qquad =\frac{p'}{q'}\ln x.$$

Comme la fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\frac{p}{q}=\frac{p'}{q'} \implies (x^p)^{\frac{1}{q}}=(x^{p'})^{\frac{1}{q'}}.$$

On peut donc poser, *par définition :*

$$\forall \alpha\in\mathbb{Q}_+^* \quad \forall x\in\mathbb{R}_+ \quad x^\alpha=\sqrt[q]{x^p}$$

où $\frac{p}{q}$ est une écriture du nombre rationnel α sous forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers strictement positifs.

Avec cette nouvelle notation, on a :

$$\forall \alpha\in\mathbb{Q}_+^* \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad \ln(x^\alpha)=\alpha\ln x.$$

On a alors aussi :

$$\forall \alpha\in\mathbb{Q}_+^* \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad \ln\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)=-\alpha\ln x$$

ce qui conduit à poser :

pour tout nombre rationnel *strictement négatif* β :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad x^\beta=\frac{1}{x^{-\beta}}.$$

On maintient évidemment la convention :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad x^0=1.$$

Nous avons ainsi donné un sens à l'écriture x^r pour :

- x élément de $\mathbb{R}_+$ et r élément de $\mathbb{Q}_+^*$;
- x élément de $\mathbb{R}_+^*$ et r élément de $\mathbb{Q}_-$.

Il reste à étudier si les propriétés connues des puissances d'exposant entier restent vraies avec ces « nouveaux exposants ».

Scanné avec CamScanner

On montrera aisément en utilisant la fonction ln et en traitant à part, si besoin est, le cas $x=0$, les propriétés énoncées dans le tableau récapitulatif suivant.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^0 = 1$$
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall q \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, pour tous nombres rationnels r et r' :

$$x^r = \frac{1}{x^{-r}}$$
$$x^r \times y^r = (x \times y)^r$$
$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$$
$$(x^r)^{r'} = x^{rr'}$$
$$\ln(x^r) = r \ln x.$$

Exercice

Calculer : $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[5]{1\,024}$.

Trouver une valeur approchée de :

$$\sqrt[4]{7}; \quad 8^{\frac{1}{3}}; \quad 20^{\frac{3}{7}}; \quad \pi^{\frac{1}{3}}$$

a étant un nombre réel strictement positif, simplifier :

$$\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}; \quad a^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[3]{a}; \quad \left(a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}}\right)^8.$$

Remarque 1. Nous avons vu que, pour n impair, la fonction $[x \longmapsto x^n]$ est en fait strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On peut, pour n impair, définir la fonction racine $n^{\text{ième}}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. C'est pourquoi l'on trouve parfois des notations telles que :

$$\sqrt[3]{-2}; \quad \sqrt[5]{-7}; \quad \sqrt[7]{-14}.$$

On se ramènera facilement aux notations introduites dans ce paragraphe en remarquant que les fonctions ainsi définies sont impaires, et donc que :

$$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[5]{-7} = -\sqrt[5]{7}; \quad \sqrt[7]{-14} = -\sqrt[7]{14}; \text{ etc.}$$

Notons par contre que l'on n'utilise *jamais* les puissances d'exposant rationnel de nombres négatifs, car cela conduirait à des contradictions. Ainsi, par exemple, si l'on acceptait de noter $(-2)^{\frac{1}{3}}$ l'unique nombre réel dont le cube est -2, on aurait aussi : $(-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}}$. Or, ce dernier nombre pourrait encore s'écrire :

- sous la forme $\sqrt[6]{(-2)^2}$, qui est parfaitement définie;
- sous la forme $\left(\sqrt[6]{-2}\right)^2$, qui, elle, n'est pas définie.

Remarque 2 Les puissances d'exposant décimal d'un nombre strictement positif sont disponibles sur les calculatrices scientifiques (touche x^y). Ainsi, la séquence de touches :

$$\boxed{2} \quad \boxed{x^y} \quad \boxed{0.4} \quad \boxed{=}$$

donne comme résultat 1,319 5 qui est une valeur approchée de $2^{\frac{2}{5}}$.

On notera toutefois que la plupart des calculatrices, utilisant la fonction ln dans leurs calculs, ne donnent pas de sens à x^r pour $x=0$, même si r est strictement positif.

Scanné avec CamScanner

b) **Fonctions $x \longmapsto x^r$, $r \in \mathbb{Q}^*$**

Soit r un nombre rationnel non nul fixé. On désigne par $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*)$ une écriture de r sous forme de fraction.

Soit la fonction : $f_r : x \longmapsto x^r$.

f_r est définie sur $\mathbb{R}_+$ si r est élément de $\mathbb{Q}_+^*$, et sur $\mathbb{R}_+^*$ si r est élément de $\mathbb{Q}_-^*$.

De plus : $$\forall x \in D_f \quad x^r = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p.$$

Ainsi, f_r est la composée $f_p \circ f_{\frac{1}{q}}$ des fonctions :

$$f_{\frac{1}{q}} : x \longmapsto \sqrt[q]{x} \quad \text{et} \quad f_p : x \longmapsto x^p.$$

On en déduit que :

- si $r \in \mathbb{Q}_+^*$ alors $f_r(0) = 0$ et f_r est continue à droite en 0;
- si $r \in \mathbb{Q}_-^*$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f_r(x) = +\infty$.
- f_r est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Notons que, sur son ensemble de définition, f_r coïncide aussi avec la composée $f_{\frac{1}{q}} \circ f_p$.

Étudions, pour r élément de $\mathbb{Q}_+^*$, la dérivabilité de f_r en 0.

On a : $$\forall x \in]0; 1[\quad t_{f_r}(0, x) = \frac{f_r(x)}{x} = f_{r-1}(x).$$

Il en résulte que :

— si $r > 1$, alors f_r est dérivable à droite en 0 et $f_r'(0) = 0$;

— f_1 est dérivable à droite en 0 et son nombre dérivé à droite en 0 vaut 1;

— si $0 < r < 1$, alors f_r n'est pas dérivable à droite en 0.

Pour trouver l'expression de la dérivée de f_r sur $]0; +\infty[$, on peut utiliser le théorème donnant la dérivée d'une fonction composée.

En effet : $$f_r = f_p \circ f_{\frac{1}{q}}$$

avec : $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_p'(x) = px^{p-1} \text{ et } f_{\frac{1}{q}}'(x) = \frac{x^{\frac{1}{q}}}{qx}.$$

D'où : $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_r'(x) = p\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^{p-1} \frac{x^{\frac{1}{q}}}{qx} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (x^r)' = rx^{r-1}.}$$

Remarque Cette formule prolonge celle trouvée pour la dérivée de $[x \longmapsto x^n]$, n élément de $\mathbb{N}^*$. En particulier, on obtient ainsi une nouvelle expression de la dérivée de la fonction racine $n^{\text{ième}}$.

Scanné avec CamScanner

Selon la valeur de r, la fonction f_r admet donc l'un des tableaux de variation suivants :

$1<r$

x	0		$+\infty$
$f'_r(x)$	0	$+$	
$f_r(x)$	0	↗	$+\infty$

$0<r<1$

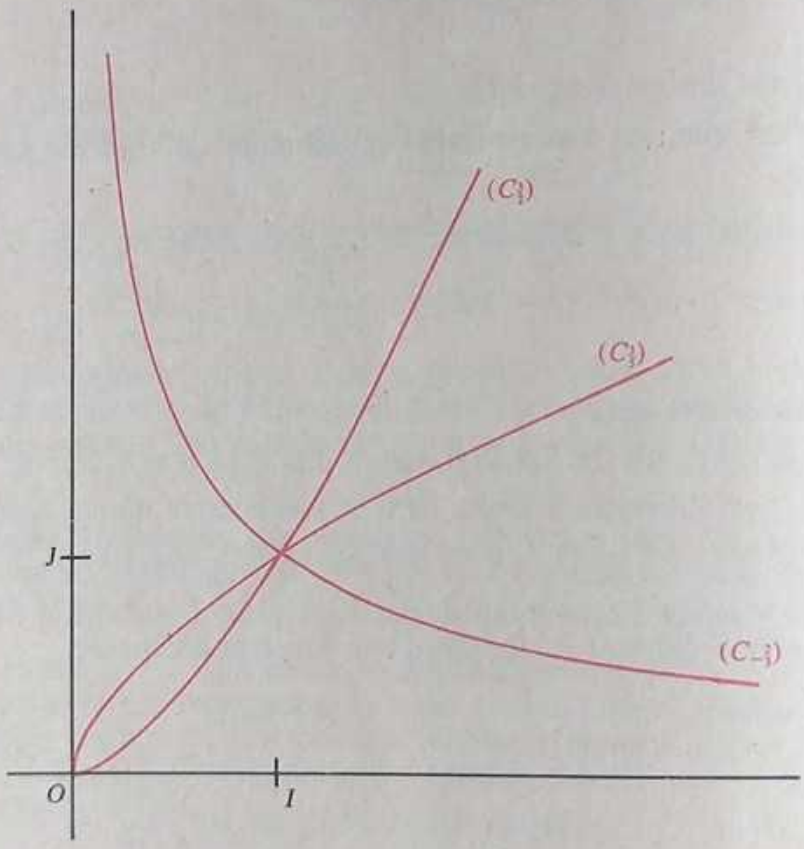
x	0		$+\infty$
$f'_r(x)$	‖	$+$	
$f_r(x)$	0	↗	$+\infty$

$r<0$

x	0		$+\infty$
$f'_r(x)$	‖	$-$	
$f_r(x)$	$+\infty$	↘	0

Représentations graphiques

On a rassemblé sur un même dessin les représentations graphiques de $f_{3/2}$, $f_{3/5}$ et $f_{-2/3}$.



Scanné avec CamScanner

THÈME D'ÉTUDE : APPROXIMATION D'UN ZÉRO D'UNE FONCTION PAR LA MÉTHODE DES PARTIES PROPORTIONNELLES ET PAR LA MÉTHODE DE NEWTON

a) Méthode des parties proportionnelles

On se place dans les mêmes hypothèses que pour la méthode de dichotomie décrite dans le cours. Soit donc f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, et telle que $f(a) \times f(b) < 0$.
Soit x_0 l'unique solution de l'équation :

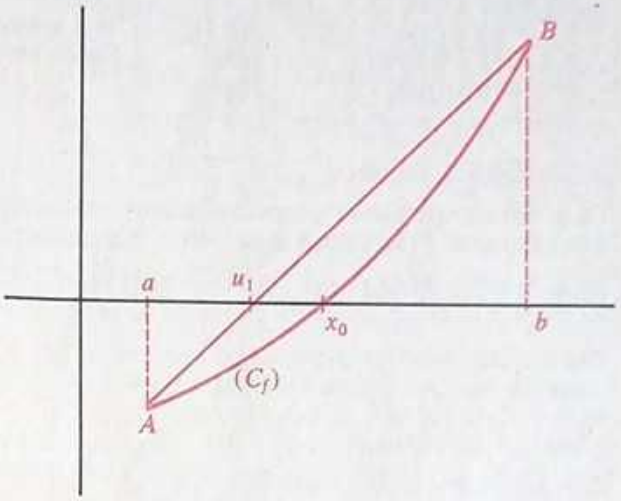
$$x \in [a, b], \quad f(x) = 0.$$

L'idée consiste à remplacer f sur $[a, b]$, par la fonction affine dont la représentation graphique passe par :

$$A(a, f(a)) \quad \text{et} \quad B(b, f(b)).$$

Trouver une équation de la droite (AB) et montrer que l'abscisse u_1 de son point d'intersection avec la droite (OI) vérifie :

$$u_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$



On dit que u_1 est une valeur approchée de x_0 obtenue par la *méthode des parties proportionnelles.*

On peut alors itérer le procédé en utilisant l'intervalle $[a_1, b_1]$, égal à $[a, u_1]$ si $f(a)$ et $f(u_1)$ sont de signes contraires, et à $[u_1, b]$ si $f(a)$ et $f(u_1)$ sont de même signe. On détermine ainsi une nouvelle valeur approchée u_2, etc.
On pourra choisir de s'arrêter lorsque la différence entre deux valeurs trouvées consécutives est jugée suffisamment petite.
On notera que, dans les cas usuels que nous rencontrerons (c'est-à-dire lorsque f est dérivable, et que f' est monotone sur $[a, b]$), toutes les valeurs u_n seront situées d'un même côté de x_0, ce qui facilite le choix des intervalles successifs.

Exemple. On considère l'équation :

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \frac{1}{x}.$$

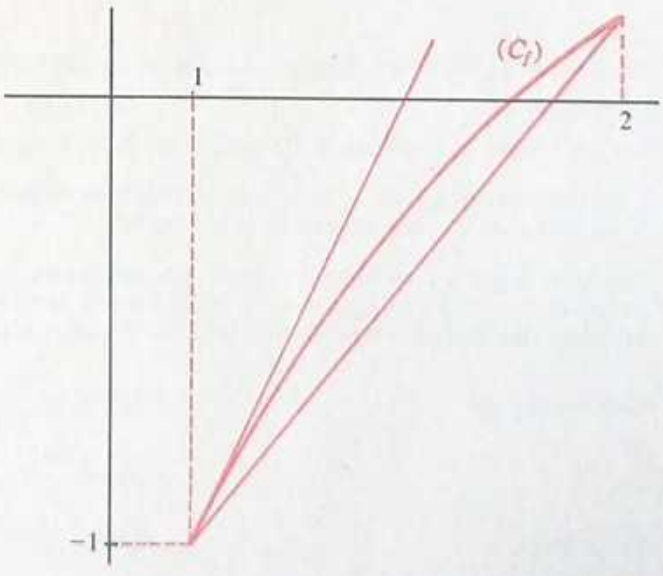
- Montrer que cette équation possède une unique solution x_0, et que celle-ci appartient à $[1; 2]$.

- Déterminons une valeur approchée de cette solution.

Considérons la fonction f définie sur $[1; 2]$ par :

$$\forall x \in [1; 2] \quad f(x) = \ln x - \frac{1}{x}.$$

f admet la représentation graphique ci-contre. La méthode des parties proportionnelles fournira une valeur approchée par excès de x_0.



Scanné avec CamScanner

En appliquant la méthode des parties proportionnelles sur l'intervalle [1; 2], puis sur les intervalles $[1; b_n]$, on obtient :

b_n	$f(b_n)$	$\frac{af(b_n)-b_nf(a)}{f(b_n)-f(a)}$
2	0,193 1	1,838 2
1,838 2	0,064 8	1,787 2
1,787 2	0,021 1	1,770 9
1,770 9	0,006 8	1,765 7
1,765 7	0,002 2	1,764 0
1,764 0	0,000 7	1,763 5

Dans cet exemple, $a = 1$ et $f(a) = -1$.
Compte-tenu de la précision limitée des calculs, on se limite à 6 itérations.
On obtient : $x_0 \simeq 1{,}763\,5$.

b) Méthode de Newton

La méthode précédente permet d'obtenir une valeur approchée de la solution, mais ne permet pas de déterminer l'incertitude associée à cette valeur approchée.

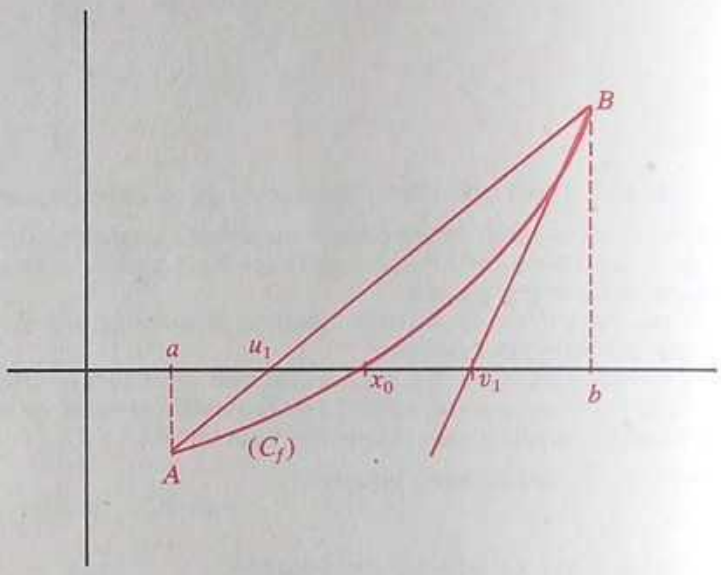
Si la fonction étudiée est « suffisamment régulière » (dérivable, de fonction dérivée monotone sur $[a, b]$), on peut améliorer la méthode de la façon suivante.

Dans le cas de la figure ci-contre, la méthode des parties proportionnelles fournit une valeur approchée par défaut de x_0 : la valeur u_1.

On remarque que la tangente en B à la courbe (C_f) coupe la droite (OI) en un point d'abscisse v_1, et que v_1 est une valeur approchée par excès de x_0.

Trouver une équation de cette tangente et vérifier que :

$$v_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$



On dit que v_1 est une valeur approchée de x_0 obtenue par la *méthode de Newton*.

On a alors : $u_1 < x_0 < v_1$.

On peut itérer la méthode en faisant jouer à u_1 et v_1 (puis u_2 et v_2...) les rôles tenus par a et b.

Attention! Selon la forme de la courbe représentative de f, on choisira soit la tangente en A, soit la tangente en B pour appliquer la méthode.

Exemple. Dans l'exemple précédent, on appliquera évidemment la méthode en considérant la tangente au point d'abscisse 1, et on obtiendra ainsi une valeur approchée par défaut de x_0; la méthode des parties proportionnelles fournit quant à elle une valeur approchée par excès.

Rappelons que : $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{x+1}{x^2}.$$

On prend : $v_0 = 1$; $u_0 = 2$.

Scanné avec CamScanner

Pour $n \geqslant 0$:

$$v_{n+1} = v_n - \frac{f(u_n)}{f'(v_n)}$$

$$u_{n+1} = \frac{v_n f(u_n) - u_n f(v_n)}{f(u_n) - f(v_n)}.$$

n	0	1	2	3	4
v_n	1	1,5	1,735 081 403	1,762 915 391	1,763 222 798
u_n	2	1,838 119 568	1,770 986 635	1,763 307 373	1,763 222 844
$f(v_n)$	−1	−0,261 201 56	−0,025 287 51	−0,000 273 29	$-3{,}244\,6 \times 10^{-8}$
$f(u_n)$	0,193 147 181	0,064 708 826	0,006 879 812	$7{,}513\,49 \times 10^{-5}$	$8{,}921\,45 \times 10^{-9}$
$f'(v_n)$	2	1,111 111 111	0,908 511 746	0,889 005 908	0,888 794 827
v_{n+1}	1,5	1,735 081 403	1,762 915 391	1,763 222 798	1,763 222 834
u_{n+1}	1,838 119 568	1,770 986 635	1,763 307 373	1,763 222 844	1,763 222 834

Avec la précision choisie pour les calculs, on trouve $u_5 = v_5$. Il est impossible de poursuivre la méthode des parties proportionnelles, et on choisit donc de prendre 1,763 222 834 comme valeur approchée de x_0.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 1) Étudier le comportement des fonctions suivantes au voisinage du point x_0 indiqué.

a) $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x \ln x}$; $\quad x_0 = 0$;

b) $x \longmapsto x(\ln x)^2$; $\quad x_0 = 0$;

c) $x \longmapsto (\cos x + a \sin x)\tan 2x$; $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

(on discutera selon les valeurs du paramètre réel a).

2) Soit a un paramètre décrivant $\mathbb{R}_+^*$. Étudier, selon les valeurs de a, le comportement asymptotique de la fonction :

$$x \longmapsto x \ln x - x \ln(x+a).$$

2 Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{3\sqrt{x}+2}$.

Quel est l'ensemble de définition de f?

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad |f(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

En déduire la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.

Déterminer un nombre réel A tel que :

$$x > A \implies |f(x)| \leqslant 10^{-10}.$$

3 Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x}+x; \qquad \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x}+x;$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}; \qquad \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}.$$

4 Trouver l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi x+1}{3x-2}\right).$$

Étudier le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$.

5 Soit n un nombre entier naturel non nul et f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{x^n+1}{x+1}.$$

Étudier, selon les valeurs de n, le comportement de f_n au voisinage de -1.

6 Étudier les variations et construire la représentation graphique des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;

b) $g : x \longmapsto \ln|\sin x|$.

7 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \tan x.$$

a) Étudier la fonction f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Soit (C) la représentation graphique de f. Comparer $f(x)$ et $f(x+\pi)$. Interpréter le résultat relativement à la représentation graphique (C) et construire (C).

8 Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f : x \longmapsto \frac{2x}{x^3-3x+2}$$

puis la fonction :

$$g : x \longmapsto \frac{2\tan x}{\tan^3 x - 3\tan x + 2}.$$

En quels points de $\mathbb{R}$ la fonction g peut-elle être prolongée par continuité? Le prolongement γ de g ainsi défini est-il dérivable en ces points?

9 Dans chacun des cas suivants, étudier la fonction indiquée et tracer sa courbe représentative :

a) $x \longmapsto \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$;

b) $x \longmapsto \ln|\ln x|$;

c) $x \longmapsto \sqrt{\sin 2x}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer :

- un intervalle de la forme $]a, +\infty[$
- une fonction affine $g : x \longmapsto \alpha x + \beta$
- une constante réelle k

tels que :

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad |f(x) - \alpha x - \beta| \leqslant \frac{k}{|x|} :$$

a) $f : x \longmapsto x + \sqrt{x^2-1}$;

b) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$;

c) $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+3x-1}{x^2-2}$.

Scanné avec CamScanner

11 Étudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions suivantes :

a) $f_1 : x \longmapsto \dfrac{x^2+|x|+1}{|x|-2}$;

b) $f_2 : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$;

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{x^3+x+2}{x+1}$;

d) $f_4 : x \longmapsto 2x\sqrt{5-2x}$;

e) $f_5 : x \longmapsto \dfrac{\ln(x+a)}{\ln x}$ $(a>0)$;

f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{x^2-1-x\ln x}{x}$.

12 Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f : x \longmapsto 2x+\sqrt{|x^2-1|}.$$

On étudiera avec soin les branches infinies et les tangentes aux points remarquables de la courbe (C_f).

13 Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^* & f(x)=x^2\sqrt{|\ln x|} \\ f(0)=0. \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b) Étudier la dérivabilité de f en 1.

c) Étudier f et construire sa courbe représentative.

14 Soit la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{4}(2x-3+\sqrt{4x^2+20x+9}).$$

1) Étudier la fonction f; on étudiera en particulier la dérivabilité de f aux bornes réelles de son ensemble de définition.

2) Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Étudier les branches infinies de (C) et construire (C).

3) Déterminer une équation de la courbe (C'), image de (C) dans la symétrie centrale de centre $\Omega\left(-\frac{5}{2}; -2\right)$.

(C') est-elle la représentation graphique d'une fonction?

4) Montrer que $(C)\cup(C')$ est la courbe d'équation :

$$2y^2-2xy-4x+3y=0.$$

15 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+4x+2}{x^2+x+1}$$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

a) Étudier les variations de la fonction f et les branches infinies de la courbe (Γ).

b) Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad f''(x)=0$$

admet trois solutions x_1, x_2 et x_3.

c) Que peut-on dire des trois points A, B et C de (Γ) d'abscisses respectives x_1, x_2 et x_3? Montrer que (Γ) admet un centre de symétrie.

d) Étudier la position de la courbe (Γ) par rapport à ses tangentes en A, B et C (on pourra utiliser un repère ayant pour origine le centre de symétrie de (Γ)).

16 Soit (C) la courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=\frac{x}{2}+2+\frac{\ln x}{x}.$$

1) On considère la fonction

$$h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2-2\ln x+2.$$

Étudier les variations de h et préciser le signe de $h(x)$ (on ne demande pas de tracer la courbe représentative de h).

2) Étudier les variations de la fonction g. Montrer que la courbe (C) a deux asymptotes que l'on déterminera. Montrer que (C) coupe l'une de ces asymptotes en un point que l'on précisera. Tracer la courbe (C).

Bac - Montpellier - 1982

17 Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{x^2+bx+c}{x^2-3x+2},$$

où b et c sont deux paramètres réels.

1) Déterminer b et c pour que f admette un extrémum égal à 0 au point 0.

2) Pour les valeurs de b et c ainsi trouvées, étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthogonal.

3) Préciser, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de points communs à (C) et à la droite (D) d'équation $y=m$.

Scanné avec CamScanner

4) Quand (D) coupe (C) en deux points M et M', déterminer les coordonnées du milieu I de $[MM']$. Quel est l'ensemble des points I lorsque M varie sur $\mathbb{R}$?

On représentera cet ensemble sur le même graphique que (C).

18 1) Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=ax-bx\ln x$$

et soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). Déterminer les nombres réels a et b pour que la courbe (C) passe par le point de coordonnées (e, e^2), et admette en ce point une tangente parallèle à la droite des abscisses.

2) Étudier cette fonction et construire la courbe (C).
En quel point la courbe (C) coupe-t-elle la droite des abscisses? Donner l'équation de la tangente en ce point.

19 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases}\forall x\in[2;+\infty[& f(x)=\ln[(x-1)^2]\\ \forall x\in]-\infty;2[& f(x)=x^2-2x.\end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point 2.
Étudier les variations de f. Tracer sa courbe représentative.

20 Pour tout nombre entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases}f_n(x)=x(\ln x)^n & \text{pour } x\neq 0\\ f_n(0)=0.\end{cases}$$

On appelle (C_n) la courbe de f_n dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

1) Étudier la dérivabilité et la continuité de f_n en 0.

2) Étudier les variations de f_1 et construire la courbe (C_1).

3) Étudier les variations de f_n pour $n>1$ (on distinguera deux cas suivant la parité de n).

4) Démontrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes.

5) Étudier les positions relatives des parties des courbes (C_n) et (C_{n+1}) situées dans le demi-plan caractérisé par : $x\geqslant 1$.

6) Construire la courbe (C_2) dans le repère précédent.

21 On se propose d'étudier une fonction numérique f et de préciser sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
ln désigne la fonction logarithme népérien.
f est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}_+^* & f(x)=x\ln\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\\ f(0)=0.\end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2) On considère la fonction g définie pour x appartenant à $[1;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x$ et on appelle (Γ) sa courbe représentative dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Étudier g et tracer (Γ).

3) Étudier la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
Montrer que les courbes (Γ) et (C) sont asymptotes et préciser leurs positions relatives.

4) Déterminer f' et f'' puis étudier le sens de variation de f' et montrer que f' est positive.
Achever l'étude de la fonction f.
Tracer la courbe (C) sur la même figure que (Γ).

Bac C - Montpellier - 1984

22 1) Soit f la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x)=e\ln x-x.$$

Étudier f (continuité, dérivabilité, sens de variation, représentation graphique).

2) Soit g la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x)=(\ln x)^2.$$

a) Étudier la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de g. Rassembler les résultats dans un tableau de variation.

b) Étudier la limite de la fonction $\left[x\longmapsto\dfrac{g(x)}{x}\right]$ quand x tend vers $+\infty$ (on peut poser $u=\sqrt{x}$).

c) Déterminer une équation de la tangente (D) à la courbe (C) représentant graphiquement g au point d'abscisse e.

d) Soit h la fonction définie dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h(x)=g(x)-\frac{2}{e}x+1.$$

En se servant du 1), déterminer le sens de variation de h, puis le signe de $h(x)$. En déduire la position de la courbe (C) par rapport à (D).

5) Construire (C) et (D) dans un repère orthonormé en prenant 5 cm comme unité graphique.

Scanné avec CamScanner

23 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -2\sqrt{1-x\,|x|} & \text{pour } x \leqslant 1 \\ f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) & \text{pour } x > 1. \end{cases}$$

1) Vérifier que les formules précédentes définissent $f(x)$ pour tout nombre réel x. La fonction f est-elle continue?

2) *a*) Démontrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$, $]0; 1[$, $]1; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b) Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

c) Étudier le comportement du rapport $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ quand x tend vers 1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour la représentation graphique, on adoptera pour unité de longueur 2 cm.
Étudier les variations de f et tracer la courbe (C) représentative de f. Préciser les tangentes à la courbe (C) aux points d'intersection avec les droites de coordonnées.

Bac E - 1984 (extrait)

24 1) Étudier la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x}{x-1}\sqrt{63+2x-x^2}.$$

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on écrira $f'(x)$ sous la forme $\dfrac{N(x)}{D(x)}$, où $N(x)$ est un polynôme du troisième degré. On écrira ensuite $N(x)$ sous la forme a^3-b^3, où b est indépendant de x.

2) Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J), tracer la représentation graphique de f après en avoir précisé les branches infinies et les tangentes aux points remarquables.

25 1) Étudier la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x}{x-1}\sqrt{2x-x^2}.$$

2) Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Tracer la représentation graphique de f après en avoir précisé les branches infinies et les tangentes aux points remarquables.
En déduire la représentation graphique (Γ) de la fonction :

$$g : x \longmapsto \frac{x}{|x-1|}\sqrt{2x-x^2}.$$

3) Soit t un paramètre décrivant $\mathbb{R}_+^*$ et (Δ_t) la droite d'équation $y = tx$.
Soit M_t' et M_t'' les points d'intersection, autres que O, de (Δ_t) et (Γ).
Écrire une équation du second degré ayant pour solutions les abscisses des points M_t' et M_t''.
Montrer que le milieu de $[M_t'M_t'']$ appartient à une droite fixe.
Montrer de même, sans calculer explicitement les abscisses de M_t' et M_t'', que $d^2(M_t', M_t'')$ est une constante indépendante de t.

26 1) Déterminer l'image de l'intervalle $[1; 3]$ par la fonction :

$$\varphi : x \longmapsto x^3-6x^2+12x-6.$$

2) Étudier la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x}{x-2}\sqrt{4x-3-x^2}.$$

3) Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Tracer la représentation graphique de f après en avoir précisé les branches infinies et les tangentes aux points remarquables.
En déduire la construction de la courbe (Γ) d'équation :

$$y^2(x-2)^2 = x^2(4x-3-x^2).$$

4) Soit t un paramètre réel et (Δ_t) la droite d'équation $y = tx$.
On constate graphiquement que (Δ_t) coupe (Γ) en O et en deux points M_t' et M_t'' distincts de O.
Écrire une équation du second degré ayant pour solutions les abscisses des points M_t' et M_t''.
Sans résoudre cette équation, montrer que le milieu de $[M_t'M_t'']$ appartient à une droite fixe et que la distance $M_t'M_t''$ est une constante indépendante de t.

27 Dans tout le problème, n étant un nombre entier naturel, f_n désigne la fonction numérique définie par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f_n et étudier sa continuité et sa dérivabilité.

2) Donner le tableau de variation de f_n, pour $n \geqslant 1$, en distinguant les deux cas : n pair et n impair.
Déterminer l'unique élément α_n de $]0; 1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$, pour $n \geqslant 1$.

3) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f_0, f_1 et f_2.

4) Étudier, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation :

$$f_1(x) = k.$$

Scanné avec CamScanner

5) Montrer que l'équation :

$$(E) \qquad |x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

admet trois solutions x_1, x_2 et x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0; \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

6) Pour $i \in \{1; 2; 3\}$, on pose alors :

$$u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right).$$

Montrer qu'il existe alors un unique nombre réel θ_i élément de $[0; \pi]$ tel que :

$$u_i = \cos \theta_i.$$

7) Montrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont les solutions de l'équation :

$$\theta \in [0; \pi], \quad \cos 3\theta = \frac{1}{2}.$$

Donner alors une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1, x_2 et x_3.

Bac E - Rouen - 1984 (extrait)

28 Étudier la continuité de la fonction :

$$f : x \longmapsto 2x - 1 - 2E(x),$$

puis celle de la fonction $|f|$.
Tracer leurs représentations graphiques.
Déterminer les images des intervalles :

$$[0; 1]; \quad \left[0; \frac{1}{2}\right]; \quad \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$$

par f et par $|f|$.

29 *a*) Soit f une fonction numérique. Soit A et B deux sous-ensembles inclus dans D_f.

Montrer que : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

b) Utiliser le résultat précédent pour déterminer l'image de l'intervalle $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ par la fonction $\left[x \longmapsto \frac{2(x^2+6x)}{x^2+4}\right]$.

30 *a*) Montrer que la fonction cos est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[0; \pi]$. Déterminer $\cos([0; \pi])$.

b) En déduire que la fonction :

$$f : [0; \pi] \longrightarrow [-1; 1]$$
$$x \longmapsto \cos x$$

est une bijection.
Sa bijection réciproque est notée Arccos. Déterminer son sens de variation. Construire sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

c) Étudier la dérivabilité de la fonction Arccos. Déterminer sa fonction dérivée. Comparer le résultat avec celui obtenu en cours pour la fonction Arcsin, et en déduire une relation entre les fonctions Arccos et Arcsin.

d) Simplifier :

Arccos(sin x) pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

Arccos(cos($\pi - x$)) pour $x \in [0; \pi]$.

31 On rappelle que la fonction Arctan est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tan à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Arctan})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(voir les exercices pages 111 et 113).

1) Soit la fonction

$$f : x \longmapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}.$$

a) Déterminer son ensemble de définition. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

b) Étudier la dérivabilité de la fonction f et calculer sa fonction dérivée.
Qu'en déduit-on?

2) Étudier la fonction

$$g : x \longmapsto \text{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

et tracer sa courbe représentative.

32 Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation considérée admet une seule solution réelle et déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution par la méthode de dichotomie.

a) $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 12x - 21 = 0$;

b) $x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1{,}51x^2 + 1{,}15x - 1 = 0$;

c) $x \in \mathbb{R}$, $x^5 + x^2 - 1{,}831\,72 = 0$.

33 On considère l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{R}, \quad (2x+1)\cos^2 x = x + \sin x.$$

a) Calculer les images des nombres :

0; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7

par la fonction $\left[x \longmapsto \sqrt{\frac{x+\sin x}{2x+1}}\right]$, en formant un tableau de calcul.

Scanné avec CamScanner

b) Tracer sur un même graphique la courbe représentative correspondante ainsi que celle de la fonction $[x \longmapsto |\cos x|]$ en prenant pour unité 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.
En déduire des valeurs approchées des quatre premières solutions positives de l'équation (E).

c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de chacune de ces solutions, par la méthode de dichotomie (on se contentera de considérations graphiques pour justifier du sens de variation de la fonction à laquelle on appliquera la méthode).

34 Calculer :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[5]{x^4}-1}{\sqrt[7]{x^5}-1}.$$

35 Étudier et représenter graphiquement la fonction :

$$f : x \longmapsto x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2.$$

En déduire la courbe représentative de :

$$g : x \longmapsto f(|x|).$$

36 Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $[x \longmapsto \sqrt[n]{x}]$.

Cette primitive est-elle dérivable en 0?

37 Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 et f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sqrt[2n]{1-x^{2n}}.$$

1) Étudier la fonction f_n.
Soit (C_n) la courbe représentative de f_n. Préciser les tangentes aux points remarquables de (C_n).

2) Soit n_0 et n_1 deux valeurs distinctes du paramètre n.

a) Quels sont les points d'intersection de (C_{n_0}) et (C_{n_1})?

b) On suppose $n_0 < n_1$. Étudier la position relative de (C_{n_0}) et (C_{n_1}).

3) Soit P_n le point d'intersection de (C_n) et de la droite d'équation $y = x$. Soit A le point de coordonnées (1; 1).

a) Déterminer les coordonnées de P_n.

b) Déterminer le nombre entier n à partir duquel la distance AP_n est inférieure ou égale à 10^{-1}.

4) Tracer sur un même dessin (C_1), (C_2) et (C_5).

38 Pour un produit donné, sur un marché donné, la demande (c'est-à-dire la quantité que l'on peut espérer vendre) est fonction du prix de vente : plus ce dernier est élevé, et plus la demande est faible.
Ainsi, l'on estime que la loi de demande du sucre aux États-Unis de 1915 à 1929 vérifie la relation suivante dans laquelle p est le prix unitaire et Q la quantité demandée :

$$p = \frac{6{,}75 \times 10^6}{Q^{2{,}9}}.$$

1) Étudier la fonction qui à p, fait correspondre Q.

2) Le revenu R est égal au produit $p \times Q$.
Étudier la fonction qui, à Q, fait correspondre R.

Scanné avec CamScanner

Problèmes

39 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit (D) la droite d'équation $x = 1$.

1) Étant donné un point M quelconque d'abscisse non nulle du plan, on appelle P le point d'intersection des droites (OM) et (D), et M' le point défini par :

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MP}.$$

On définit ainsi une fonction f de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ qui à M associe le point M'.

a) Construire géométriquement les images par f des points de coordonnées (1; 0), (2; 2) et (−1; −2).
Évaluer leurs coordonnées sur le dessin et vérifier par le calcul.

b) Quelle est l'image d'un point de (D) par f?

c) Soit $\mathcal{P}^*$ le plan privé des droites (D) et (OJ).
Étant donné un point M quelconque de $\mathcal{P}^*$, montrer que $f(M)$ appartient à $\mathcal{P}^*$ et déterminer $f \circ f(M)$.
En déduire que l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}^*$ associée à f est une bijection involutive. Dans la suite du problème, cette bijection est encore notée f.

2) Soit (x, y) les coordonnées d'un point quelconque M d $\mathcal{P}^*$.
Montrer que les coordonnées (x', y') de son image M' par f sont données par :

$$\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = y\dfrac{1-x}{x}. \end{cases}$$

3) Soit a un paramètre réel strictement positif et (C_a) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Soit (C_a^*) l'intersection de (C_a) et de $\mathcal{P}^*$.

a) On suppose, dans cette question, que $a = 2$.
Quelle position remarquable la droite (D) occupe-t-elle par rapport au cercle (C_2)?
Trouver une équation de l'image (Γ_2) de (C_2^*) par f.
Étudier la fonction numérique

$$\varphi : x \longmapsto x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

et construire (Γ_2).
La courbe (Γ_2) est appelée *strophoïde droite*.

b) On suppose, dans cette question, que $a = 1$.
Quelle position remarquable la droite (D) occupe-t-elle par rapport au cercle (C_1)?
Trouver une équation de l'image (Γ_1) de (C_1^*) par f.
Étudier la fonction numérique

$$\psi : x \longmapsto x\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

et construire (Γ_1).
La courbe (Γ_1) est appelée *cissoïde droite* ou *cissoïde de Dioclès*.

c) On suppose, dans cette question, que $a = \frac{1}{2}$.
Trouver une équation de l'image $(\Gamma_{1/2})$ de $(C_{1/2}^*)$ par f.
Étudier la fonction numérique

$$\xi : x \longmapsto x\sqrt{\frac{2x-1}{2-2x}}$$

et construire $(\Gamma_{1/2})$.

N.B. On placera des points de (Γ_2), (Γ_1) et $(\Gamma_{1/2})$ en utilisant la définition géométrique de f. L'étude des fonctions φ, ψ et ξ permettra notamment de préciser les branches infinies et les tangentes aux points remarquables des courbes (Γ_2), (Γ_1) et $(\Gamma_{1/2})$.

40 Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

A) On désigne par f l'application de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x.$$

1) Étudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.
Dresser le tableau de variation de f.
Dessiner la courbe (F) représentant f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit n un nombre entier naturel non nul.
Pour tout nombre entier naturel i compris entre 1 et n, on note A_i le point de (F) d'abscisse 10^i.
Soit G_n l'isobarycentre des n points $A_1, \ldots, A_n$.
Calculer en fonction de n les coordonnées x_n et y_n de G_n.

3) Vérifier que l'application ln admet pour primitive sur $]0; +\infty[$ l'application qui à x associe $x \ln x - x$.
Déterminer les primitives de f sur $]0; +\infty[$.

B) On désigne par $\mathcal{P}'$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ d'abscisse non nulle et par θ l'application de $\mathcal{P}'$ dans $\mathcal{P}'$ qui associe à tout point M de coordonnées x et y le point M' de coordonnées x' et y' vérifiant

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ y' = -y. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1) Vérifier que θ est bijective et égale à sa bijection réciproque.

2) On désigne par (E) le sous-ensemble de $\mathcal{P}$ d'équation $xy=-9$.
Trouver l'ensemble $\theta(E)$.
Est-ce que θ conserve l'alignement?

3) Pour tout nombre réel a, on note g_a l'application de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$g_a(x)=x^2-\frac{1}{x^2}-4a \ln x,$$

et (G_a) sa courbe représentative dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer l'égalité $\theta(G_a)=(G_a)$.

Bac C - 1986

41 Soit f et g les fonctions de la variable réelle x définies par :

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x \ln x}; \quad g(x)=\frac{\ln x}{1+x-\ln x}.$$

A) Étude de la fonction f.

1) Étudier les variations de la fonction

$$d : x \longmapsto 1+x \ln x.$$

En déduire l'ensemble de définition de f.

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) *a*) Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition, et que sa dérivée a le signe de la fonction :

$$u : x \longmapsto 1-x(\ln x)^2.$$

b) Étudier la fonction u. Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad u(x)=0$$

admet une unique solution α, et que $\alpha \in [2; 2{,}1]$.

c) En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

d) Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

B) Étude de la fonction g.

1) Étudier les variations de la fonction

$$\delta : x \longmapsto 1+x-\ln x.$$

En déduire l'ensemble de définition de g.

2) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

3) *a*) Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition, et que sa dérivée a le signe de la fonction :

$$v : x \longmapsto 1+x-x \ln x.$$

b) Étudier la fonction v. Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad v(x)=0$$

admet une unique solution β, et que

$$\beta \in [3{,}5; 3{,}6].$$

c) En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de β d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

d) Déterminer le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

C) Construction des courbes représentatives des fonctions f et g.
Soit respectivement (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left|\frac{g(x)+1}{x}\right|$. Que peut-on en déduire concernant (C_g)?

2) *a*) Montrer que :

$$\forall x \in]0; 1[\quad \left[f(x)<g(x) \iff \ln x-\frac{x}{x+1}<0\right]$$

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad \left[f(x)<g(x) \iff \ln x-\frac{x}{x+1}>0\right]$$

b) Étudier les variations de la fonction :

$$w : x \longmapsto \ln x-\frac{x}{x+1}.$$

Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad w(x)=0$$

possède une unique solution γ, et que $\gamma \in [1{,}9; 2]$.

c) En utilisant la méthode de dichotomie, trouver un encadrement de γ d'amplitude inférieure à 10^{-2}.

3) Construire les courbes (C_f) et (C_g).

42 1) Soit λ un paramètre réel.
Étudier la fonction :

$$f_\lambda : t \longmapsto t^3+t+\lambda.$$

Montrer que, pour tout nombre réel λ, l'équation :

$$t \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(t)=0$$

admet une unique solution.

2) Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit (C) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$x+y+y^3-x^5=0.$$

Scanné avec CamScanner

a) En utilisant la question 1), montrer qu'il existe une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout point $M(x, y)$ de (C), on ait :

$$y = g(x)$$

(on ne recherchera pas l'expression de $g(x)$ en fonction de x).

b) Étudier la parité de g et le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

c) On admet que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Exprimer $g'(x)$ à l'aide de x et $g(x)$. Calculer $g'(0)$ et $g'(1)$.
Déterminer le sens de variation de g.

d) Montrer que g a une limite en $+\infty$.
La fonction g est-elle bornée sur $\mathbb{R}_+$?

En déduire $\lim\limits_{+\infty} g$.

e) Donner l'allure de la courbe (C).

43 L'objet du problème est de montrer la proposition (P) suivante : il n'existe pas de fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et telle que l'équation :

$$(E_\lambda) \quad x \in [a, b], \quad f(x) = \lambda$$

ait exactement deux solutions pour tout élément λ de l'intervalle $f([a, b])$.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'une telle fonction existe. Soit respectivement m et M le minimum et le maximum absolus de f sur $[a, b]$.

1) Montrer que l'un des nombres m et M, au moins, est atteint en un point intérieur à $[a, b]$ (c'est-à-dire qu'il existe x_0 élément de $]a, b[$ tel que $f(x_0) = m$ ou $f(x_0) = M$).

2) Supposons qu'il existe un élément x_0 de $]a, b[$ tel que $f(x_0) = M$.

a) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif r tel que :

$$[x_0 - r, x_0 + r] \subset]a, b[$$
$$\forall x \in [x_0 - r, x_0[\cup]x_0, x_0 + r] \quad f(x) < M.$$

b) Montrer qu'il existe un intervalle $[\mu, M[$ tel que, pour tout λ appartenant à $[\mu, M[$, les deux solutions de l'équation (E_λ) appartiennent l'une à $[x_0 - r, x_0[$, l'autre à $]x_0, x_0 + r]$.

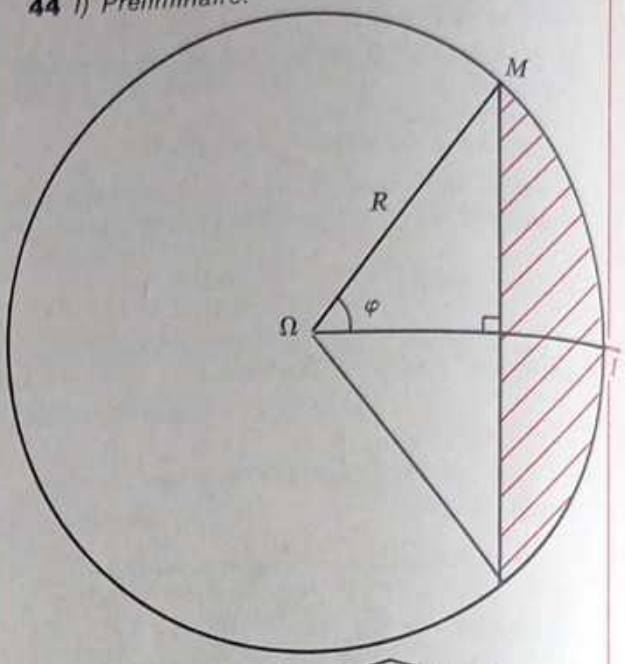
c) Que peut-on alors dire de $f([a, x_0 - r])$ et de $f([x_0 + r, b])$?

d) En déduire que, dans ces conditions, x_0 est l'unique solution de l'équation :

$$x \in [a, b], \quad f(x) = M.$$

3) Que peut-on en conclure quant à la proposition (P)?

44 *I) Préliminaire.*



φ est la mesure de l'angle $\widehat{I\Omega M}$. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré est donnée par :

$$\mathcal{A} = R^2(\varphi - \sin\varphi \cos\varphi).$$

II) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre O_1 appartenant à $\mathcal{C}$ et de rayon ρ vérifiant $0 < \rho < 2r$.
Soit respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ les disques de frontières respectives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$. Le but du problème est de trouver, en valeur approchée, le rayon ρ de façon que l'aire de $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$ soit la moitié de celle de $\mathcal{D}$.

1) *a*) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont sécants.
Soit A et B leurs points d'intersection.

b) On désigne par α la mesure de l'angle $\widehat{O_1OA}$ et par β celle de l'angle $\widehat{OO_1A}$.
Trouver une relation entre α et β.

c) Exprimer ρ à l'aide de r et α.

d) Exprimer en fonction de r, ρ, α et β, puis de r et α seulement, l'aire de $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$ (on pourra remarquer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$ est la réunion de deux domaines du type envisagé au *I*).

2) Montrer que l'aire de $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$ est la moitié de celle de $\mathcal{D}$ si et seulement si α est solution de l'équation :

$$(E) \quad x \in [0; \pi], \quad \sin x + (\pi - x)\cos x - \frac{\pi}{2} = 0.$$

3) *a*) Montrer que (E) admet une unique solution α_0 et trouver un encadrement de α_0 d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}, par la méthode de dichotomie.

b) En supposant que $r = 1$, donner un encadrement de la valeur de ρ correspondant à α_0.

Scanné avec CamScanner

4 Suites numériques convergence-divergence

1) RAPPELS DES NOTIONS DE BASE
2) SUITES CONVERGENTES
3) SUITES DIVERGENTES DE LIMITE INFINIE
4) SUITES NUMÉRIQUES RÉCURRENTES
5) COMPARAISON DES SUITES DE TERME GÉNÉRAL a^n ET n^α

Préliminaire

Dans ce chapitre, ne travaillant que sur des suites infinies, on choisit de prendre $\mathbb{N}$ pour ensemble de départ (les résultats obtenus s'étendent sans changement pour les suites définies à partir d'un rang donné).
Ainsi on appelle (à chaque fois que ceci n'entraîne pas d'ambiguité), (u) la suite définie sur $\mathbb{N}$ et de terme général noté u_n.

1 Rappels des notions de base

Nous allons, par quelques activités, rappeler les objectifs essentiels de l'étude d'une suite; à savoir :

— variations,

— majoration, minoration et encadrement, conduisant à la recherche de la limite, lorsqu'elle existe.

Activité 1

Considérons la suite (u) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1-5n}{1+n}.$$

Étudions ses variations en introduisant la fonction f telle que : $f(x) = \frac{1-5x}{1+x}$.
Comme $u_n = f(n)$ et que f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) < f(n), \quad \text{c'est-à-dire que :}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$$

(u) est donc une suite monotone décroissante.

Remarque. Si (u) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = f(n)$ et si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$ alors les variations de (u) sont celles de f.

Scanné avec CamScanner

Essayons maintenant, à l'aide de la calculatrice, de prévoir l'éventuelle limite de (u).

n	1	5	10	50	100	1 000	10^5	$5 \cdot 10^5$	10^6
Arrondi d'ordre 4 de u_n	−2	−4	−4,4545	−4,4824	−4,9406	−4,994	−4,9999	−5	−5

−5 est-elle une valeur prise par la suite (u)? Ces résultats nous confirment la décroissance de la suite (u) et nous permettent de penser que la suite (u) converge vers −5. Démontrons-le.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - (-5)| = \frac{6}{n+1};$$

ainsi plus n devient grand et plus la distance de u_n à −5 devient petite, et comme d'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{6}{n+1} < \frac{6}{n} \quad \text{et que} \quad \lim\left(\frac{6}{n}\right) = 0$$

nous en déduisons que la suite (u) converge vers −5.

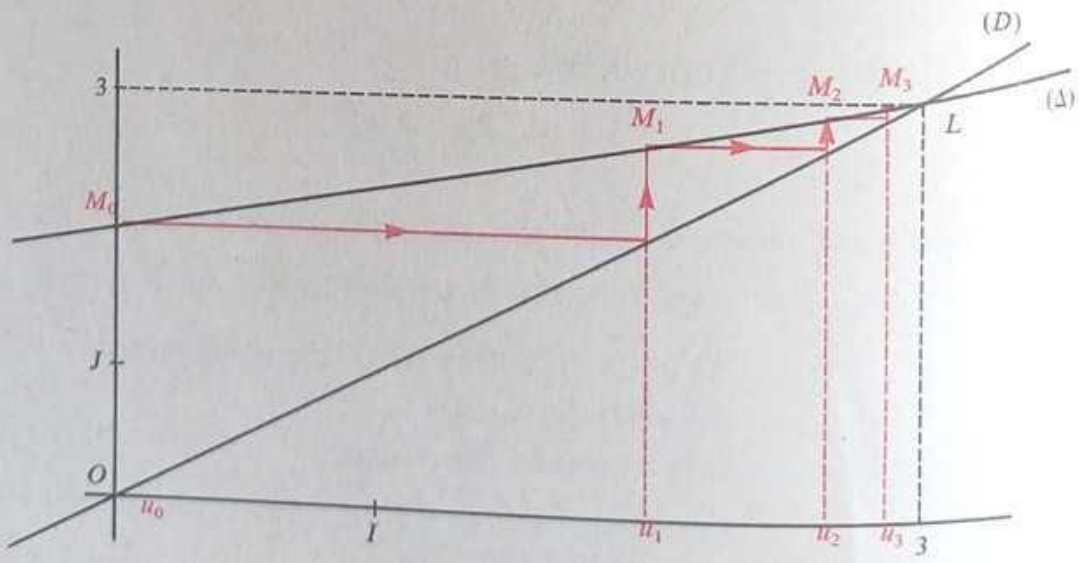
Activité 2

Considérons la suite (u) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2.$$

On remarque que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction : $x \longmapsto \frac{1}{3}x + 2$.

On trace la droite (Δ) d'équation : $y = \frac{1}{3}x + 2$; u_{n+1} est l'ordonnée du point de (Δ) d'abscisse u_n; la droite (D) d'équation : $y = x$, nous permet de reporter u_{n+1} en abscisse pour déterminer u_{n+2}.



Scanné avec CamScanner

Plaçons les points M_0, M_1, M_2 et M_3 de (Δ) ayant pour abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3. Que constate-t-on pour la suite des points (M_n)? Que semble être la limite de la suite (u)?
On remarque alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(u_n - 3),$$

c'est-à-dire que la suite (v) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 3,$$

est la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme -3; d'où pour tout nombre entier naturel n on a :

$$v_n = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{et} \quad u_n = 3\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Remarquons que nous obtenons ainsi u_n explicitement en fonction de n, et comme d'autre part, (v) est une suite géométrique de raison q telle que : $|q| < 1$; (v) converge vers 0; d'où (u) converge vers 3.

$$\lim(u) = 3.$$

• Déterminer le rang à partir duquel : $|u_n - 3| < 10^{-5}$.

Activité 3

On considère la suite (u) définie par :

$$u_0 = a \quad (0 < a < 1) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (u_n)^2.$$

1) Déterminer u_n en fonction de a et de n.

2) Soit la suite (v) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_0 u_1 u_2 \ldots u_n.$$

Calculer v_n en fonction de a et de n. En déduire la convergence de la suite (v).

• 1) $u_1 = a^2$, $u_2 = a^4$, $u_3 = a^8$, $u_4 = a^{16}$

il *semble* que : $u_n = a^{(2^n)}$.

Montrons, par récurrence, la propriété $P(n)$ suivante : $u_n = a^{(2^n)}$.

• On vérifie que pour n égale 0 la propriété est vraie :

$$a = a^{(2^0)} \quad \text{et} \quad u_0 = a.$$

• Soit p un nombre entier naturel pour lequel la propriété est vraie; c'est-à-dire tel que :

$$u_p = a^{(2^p)}.$$

• Démontrons la propriété pour $(p+1)$ c'est-à-dire que :

$$u_{p+1} = a^{(2^{p+1})}.$$

Sachant que : $u_{p+1} = (u_p)^2$ et $(u_p)^2 = (a^{(2^p)})^2$, on en déduit que :

$$u_{p+1} = a^{(2^p \times 2)}$$
$$= a^{(2^{p+1})}.$$

Scanné avec CamScanner

On a ainsi démontré que la propriété est vraie pour 0, et que, si elle est vraie pour un nombre entier naturel p, alors elle est vraie pour son successeur $(p+1)$; on a donc, par récurrence, montré que pour tout nombre entier naturel n :

$$u_n = a^{(2^n)}.$$

Remarque. On peut aussi établir ce résultat de la façon suivante. Un raisonnement par récurrence élémentaire permet de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0,$$

d'où : $$u_{n+1} = (u_n)^2 \implies \ln(u_{n+1}) = 2\ln(u_n).$$

Et ainsi, la suite de terme général $\ln(u_n)$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\ln a$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(u_n) = 2^n \ln a$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(u_n) = \ln\left(a^{(2^n)}\right)$$

d'où : $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^{(2^n)}.$$

• 2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = a \times a^2 \times a^{(2^2)} \times \ldots \times a^{(2^n)}$
$= a^\alpha \quad$ où $\quad \alpha = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots + 2^n.$

Rappelons que la somme des termes d'une suite géométrique finie de raison q $(q \neq 1)$ est donnée par la formule :

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

d'où : $$\alpha = 2^{n+1} - 1$$

et : $$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = a^{(2^{n+1}-1)}.$$

D'autre part, comme $0 < a < 1$,

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad a^{p+1} < a^p$$

et d'une manière générale, pour q nombre entier naturel, on a :

$$q > p \implies a^q < a^p;$$

or : $$2^{n+1} > n+1 \implies 2^{n+1} - 1 > n,$$

d'où : $$2^{n+1} - 1 > n \implies a^{(2^{n+1}-1)} < a^n,$$

on obtient alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < v_n < a^n$; et comme $\lim (a^n) = 0$ car $|a| < 1$, on a, par encadrement :

$$\lim (v) = 0$$

(v) est une suite convergente vers 0.

2 Suites convergentes

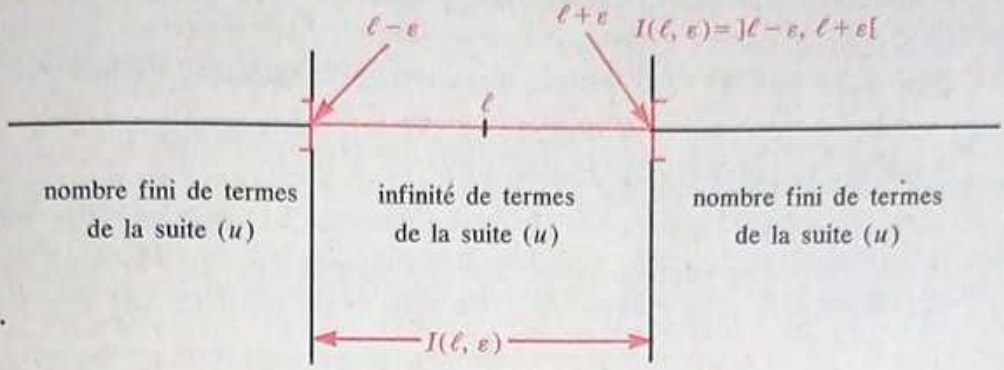
Rappelons que l'on dit que la suite (u) converge vers le nombre réel ℓ (ou a pour limite le nombre réel ℓ) si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Cette définition peut aussi s'énoncer.

Scanné avec CamScanner

La suite (u) converge vers le nombre réel ℓ, si et seulement si, tout intervalle ouvert de centre ℓ et de rayon ε positif quelconque, contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux :



Pour montrer que la suite (u) converge vers ℓ, on utilise souvent la suite (v) telle que : $v_n = u_n - \ell$ et l'on montre que la suite (v) converge vers 0.

Exemple 1. Soit (u) la suite des approximations décimales successives par défaut d'un nombre réel donné A, c'est-à-dire tel que le terme général de la suite, u_n, soit l'approximation décimale d'ordre n par défaut de A, donc défini par :

$$u_n \in \mathbb{D}_n \quad \text{et} \quad u_n \leqslant A < u_n + \frac{1}{10^n}, \text{ on a alors :}$$

$$0 \leqslant A - u_n < \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

A l'aide de cet encadrement et sachant que $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique convergeant vers zéro, nous en déduisons que :

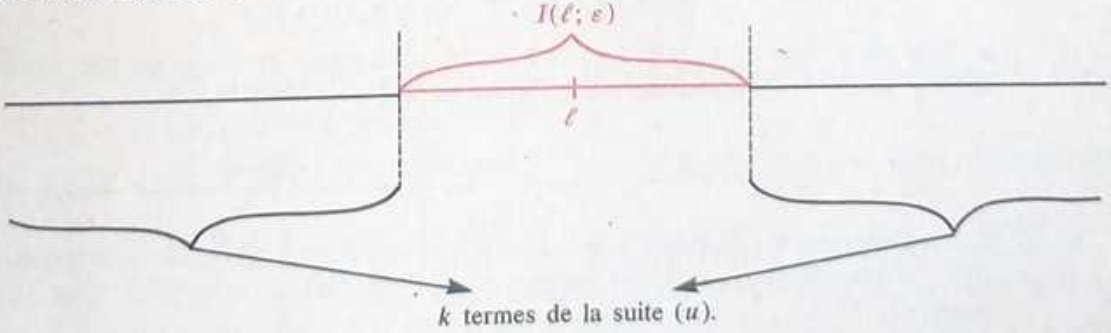
$$\lim (A - u_n) = 0, \text{ c'est-à-dire que :}$$

$$\lim (u) = A.$$

Exemple 2. Soit (u) une suite admettant comme limite ℓ et (v) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}.$$

Montrons en utilisant la définition que : $\lim (v) = \ell$.
Soit ε un nombre réel strictement positif quelconque; nous savons qu'il existe un nombre fini de termes de la suite (u) situés à l'extérieur de l'intervalle $I(\ell; \varepsilon)$; soit k ce nombre :



Scanné avec CamScanner

Comme seul u_0 ne correspond pas à un terme de la suite (v), il y a au plus k termes de la suite (v) situés à l'extérieur de l'intervalle $I(\ell; \varepsilon)$ et ainsi :

$$\lim(v) = \ell.$$

• De même, la suite (w) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_{n+2}$, converge vers ℓ.

Application

Soit a un nombre réel donné, considérons la suite (u) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 5u_{n+1} - 2u_n.$$

Avec les notations précédentes on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2w_n = 5v_n - 2u_n \quad \text{c'est-à-dire :} \quad 2(w) = 5(v) - 2(u).$$

Si (u) converge vers un nombre réel ℓ alors : $2\ell = 5\ell - 2\ell$ soit $\ell = 0$.

Calculons quelques termes de cette suite pour les deux cas $u_1 = 1$ puis $u_1 = 4$.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2	$a = 1$	0,5	0,25	0,125	0,062 5
2	$a = 4$	8	16	32	64

D'après le tableau, lorsque $a = 1$ la suite semble effectivement converger vers 0, par contre, lorsque $a = 4$ elle semble divergente.

Pour appliquer des raisonnements du type précédent, il est indispensable de disposer de critères permettant d'affirmer l'existence de la limite d'une suite sans nécessairement connaître cette limite.

• Envisageons la suite définie de la manière suivante :

$$u_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} \text{si } n \text{ n'est pas un carré parfait :} & u_n = u_{n-1} \\ \text{si } n \text{ est un carré parfait :} & u_n = u_{n-1} + 10^{-n}. \end{cases}$$

Calculons les 10 premiers termes de cette suite. Nous remarquons que, par définition, cette suite est croissante et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant \underbrace{1{,}111\ldots1}_{n \text{ chiffres } 1}$$

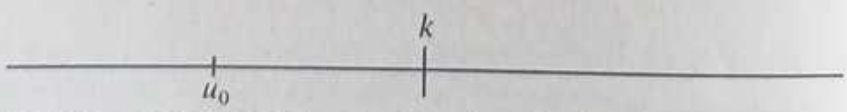
donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 2$.

• Ainsi (u) est croissante et majorée par 2.

Nous savons d'autre part que cette suite admet pour limite le nombre réel suivant défini par son développement décimal illimité :

$$1{,}100\,100\,001\,000\,000\,100\ldots$$
$$(n=1)\ (n=4)\ (n=9)\ (n=16)\ \ldots$$

• Plus généralement, soit (u) une suite croissante et majorée par un nombre réel k. Sur une droite graduée plaçons u_0 et k :



En respectant les hypothèses faites sur la suite (u), indiquer une position possible des 20 premiers termes de cette suite. Puis des 20 suivants. Que semble-t-il se passer?

Scanné avec CamScanner

La convergence des suites étudiées précédemment peut être établie par le théorème suivant que nous admettrons.

Théorème

Toute suite de nombres réels *croissante et majorée* (respectivement *décroissante et minorée*) est convergente.

Remarque 1. Lorsqu'une suite est croissante et majorée, sa limite est le plus petit des majorants de l'ensemble de ses termes. Toutefois pour prouver l'existence de ce plus petit majorant, il est nécessaire de connaître certaines propriétés de $\mathbb{R}$ que nous ne possédons pas. De même, si une suite est décroissante et minorée alors sa limite est le plus grand des minorants de l'ensemble de ses termes. On notera, en particulier, qu'une suite (u) décroissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0$, ne converge pas nécessairement vers 0.

Exemple : la suite (u) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Remarque 2. Une suite de nombres réels, croissante et majorée (ou décroissante et minorée) dont les termes sont des nombres rationnels n'admet pas nécessairement pour limite un nombre rationnel (voir problème n° 36).

Remarque 3. Ce théorème permet d'affirmer l'existence de la limite d'une suite de nombres réels, mais ne donne pas les moyens de la calculer.

Exercices

1) On considère les deux suites (u) et (v) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

a) Montrer que (u) est croissante et que (v) est décroissante.

b) Montrer que : $\forall (m, p) \in \mathbb{N}^{*2} \quad u_m < v_p$.

c) En déduire que (u) et (v) sont convergentes. Montrer qu'elles ont la même limite ℓ.

d) Déterminer un encadrement de ℓ en prenant $n = 7$ (on démontrera dans le problème n° 43 du chapitre 6 que la limite de cette suite est le nombre réel e, comme l'encadrement précédent pouvait le laisser penser).

2) Soit la suite (u) définie par :

$$u_0 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - u_n}.$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 0$, et qu'ainsi la suite (u) est parfaitement définie sur $\mathbb{N}$.

b) Étudier les variations de (u). Montrer que (u) est convergente.

c) Soit la suite (v) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1 + u_n}{u_n}$. Montrer que (v) est une suite arithmétique. Calculer v_n puis u_n en fonction de n; en déduire la limite de la suite (u).

Scanné avec CamScanner

3 Suites divergentes de limite infinie

Toute suite non convergente est dite divergente.
Du théorème suivant : « Toute suite convergente est bornée », on déduit facilement le critère ci-dessous permettant de montrer que certaines suites sont divergentes :

« Toute suite non bornée est divergente. »

⚠ Il existe des suites à la fois bornées et divergentes, comme par exemple la suite (u) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (-1)^n$.

Plus précisément, il existe deux manières pour une suite d'être divergente :

— soit elle n'admet pas de limite (et dans ce cas elle peut être bornée);

— soit elle tend vers « plus l'infini » ou « moins l'infini » (et dans ce cas elle n'est pas bornée).

Dans ce paragraphe nous n'étudierons que les propriétés des suites de limite infinie. Rappelons que la suite (u) tend vers « plus l'infini » si et seulement si :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \implies u_n > A)$$

on écrit alors : $\lim (u) = +\infty$.

Rappelons aussi que (u) tend vers « moins l'infini » si et seulement si $(-u)$ tend vers « plus l'infini »; on écrit alors :

$$\lim (u) = -\infty.$$

Remarque. Si une suite (u) est définie sous la forme : $u_n = f(n)$ alors pour étudier (u), on peut utiliser les propriétés de f et en particulier :

si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim (f(n)) = +\infty$

c'est-à-dire $\lim (u) = +\infty$.

De même si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim (u) = -\infty$.

Citons, par exemple, la suite (u) de terme général : $u_n = \ln n$; sachant que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, nous en déduisons que : $\lim (\ln n) = +\infty$.

Pour montrer qu'une suite tend vers l'infini on utilisera bien sûr la définition, mais aussi, et surtout, les théorèmes suivants :

Théorème 1

Si une suite (u) est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang et si $\left(\frac{1}{u}\right)$ converge vers 0, alors (u) tend vers $+\infty$.

Remarque. De même si la suite (u) est à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang et si $\left(\frac{1}{u}\right)$ converge vers 0, alors (u) tend vers $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

Notons D l'ensemble de définition de la suite $\left(\frac{1}{u}\right)$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels n tels que $u_n \neq 0$.
Soit n_1 le nombre entier naturel tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_1 \implies u_n > 0)$.
On veut établir que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \implies u_n > A).$$

Soit donc un nombre réel strictement positif A; par hypothèse la suite $\left(\frac{1}{u}\right)$ converge vers 0, donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in D \quad \left(n > p \implies \left|\frac{1}{u_n}\right| < \varepsilon\right),$$

en particulier, pour la valeur $\frac{1}{A}$ de ε, il existe un nombre entier naturel n_2, tel que :

$$\forall n \in D \quad \left(n > n_2 \implies \left|\frac{1}{u_n}\right| < \frac{1}{A}\right).$$

En prenant alors $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$ on a : $n > n_0 \implies 0 < \frac{1}{u_n} < \frac{1}{A}$ ou encore :

$$n > n_0 \implies u_n > A, \quad \text{donc} \quad \lim(u) = +\infty.$$

Théorème 2. Divergence par comparaison

Si (u) et (v) sont deux suites telles que :
- $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_1 \implies u_n \leqslant v_n)$;
- $\lim(u) = +\infty$

alors : $\lim(v) = +\infty$.

Remarque

De même si :
- $\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_1 \implies u_n \leqslant v_n)$;
- $\lim(v) = -\infty$

alors : $\lim(u) = -\infty$.

Soit A un nombre réel strictement positif, comme (u) tend vers $+\infty$ il existe un nombre entier naturel n_2 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_2 \implies u_n > A).$$

En prenant alors $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \implies A < u_n \leqslant v_n).$$

On a ainsi établi que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \implies v_n > A)$$

c'est-à-dire que : $\lim(v) = +\infty$.

Scanné avec CamScanner

Exemple

1) Montrer que :

$$\forall x \in]0;1] \quad x - \ln(1+x) > 0$$

et que :

$$\forall x \in]0;1[\quad x + \ln(1-x) < 0.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

2) On considère les deux suites (u) et (v) suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \ln(n).$$

a) Montrer que : $\lim(u) = +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < v_n \leqslant 1$.

c) En déduire que (v) est une suite convergente.

1) En étudiant les variations des fonctions :

$$x \longmapsto x - \ln(1+x) \text{ et } x \longmapsto x + \ln(1-x)$$

puis en posant $x = \frac{1}{n}$ dans la première et $x = \frac{1}{n+1}$ dans la seconde, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

2) *a*) En écrivant successivement, la deuxième inégalité de (1) pour 1, 2, 3... et n puis en faisant la somme membre à membre de ces n inégalités, on obtient après simplification :

$$\ln(n+1) < \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}}_{u_n}$$

comme nous savons que : $\lim\big(\ln(n+1)\big) = +\infty$, en utilisant le théorème 2, nous en déduisons que :

$$\lim(u) = +\infty.$$

b) Nous venons de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n > \ln(n+1),$$

et comme ln est une fonction strictement croissante : $\ln(n+1) > \ln(n)$, d'où :

$u_n > \ln(n)$ et comme $v_n = u_n - \ln(n)$ on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n > 0$.

En écrivant successivement la première inégalité de (1) pour 1, 2, 3... et $n-1$, puis en faisant la somme membre à membre de ces $(n-1)$ inégalités, on obtient après simplification, pour n élément de $\mathbb{N}^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \ln(n) \quad \text{d'où :} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n) < 1,$$

soit : $v_n < 1$ et comme de plus $v_1 = 1$, la suite (v) est bornée; on a :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < v_n \leqslant 1.}$$

Scanné avec CamScanner

Étudions les variations de (v) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

donc d'après la première inégalité de (1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_{n+1} - v_n < 0.$$

Ainsi *la suite* (v) *est décroissante et minorée par* 0 et en conséquence est convergente; de plus la limite de la suite (v) est comprise entre 0 et 1.

Remarque 1. Ce résultat qui permet de comparer deux suites de limite infinie : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ et $w_n = \ln n$, apparaît pour la première fois dans l'ouvrage : « Introduction à l'Analyse infinitésimale » publié en 1748 par Leonhard Euler.

Remarque 2. La limite de la suite (v) est notée c, et elle est appelée constante d'Euler; le début de l'écriture décimale de c est : 0,577 215...
On pense généralement que ce nombre est irrationnel; notons toutefois que ce résultat n'est pas encore démontré.

Théorème 3

La divergence d'une suite vers $+\infty$ n'est pas modifiée par :

— l'*addition* d'une *suite bornée*

— la *multiplication* par une suite admettant, à partir d'un certain rang, un *minorant strictement positif.*

Autrement dit :

si $\lim(u) = +\infty$ et (v) bornée alors $\lim(u+v) = +\infty$,
et s'il existe un nombre réel m strictement positif tel que :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_1 \implies v_n > m)$$

alors : $\lim(u \times v) = +\infty$.

Remarque. De même :

si $\lim(u) = -\infty$ et (v) bornée alors $\lim(u+v) = -\infty$,
et s'il existe un nombre réel m strictement positif tel que :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_1 \implies v_n > m)$$

alors : $\lim(u \times v) = -\infty$.

Citons la démonstration de la deuxième partie de ce théorème.
Supposons que la suite (v) admette à partir du rang n_1, un minorant m strictement positif, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_1 \implies v_n > m) \quad \text{et} \quad m > 0.$$

Scanné avec CamScanner

Soit A un nombre réel strictement positif, alors $\frac{A}{m}$ est aussi un nombre réel strictement positif et comme la suite (u) tend vers $+\infty$:

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n > n_2 \implies u_n > \frac{A}{m}\right).$$

Si l'on choisit $n_0 = \text{Max}\{n_1, n_2\}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(n > n_0 \implies u_n > \frac{A}{m} \text{ et } v_n > m\right).$$

En résumé, nous avons démontré que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n > n_0 \implies u_n \times v_n > A)$$

c'est-à-dire que : $\lim (u \times v) = +\infty$.

Exercice Étudier la nature de la suite (u) dans les cas suivants :

— $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n + (-1)^n$

— $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sin(n) - n$

— $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n - \ln(n)$.

4 Suites numériques récurrentes

Nous allons nous intéresser, plus particulièrement, à l'étude de la convergence des suites récurrentes de la forme :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

où a est un nombre réel et f une fonction numérique.

• Si l'on peut calculer u_n en fonction de n, le problème de la convergence de (u) s'étudie par les procédés vus précédemment (c'est le cas, en particulier, pour les suites arithmétiques et les suites géométriques).

• Si l'on ne peut pas calculer u_n en fonction de n, alors on se donne une idée du comportement de (u) en traçant la courbe représentative de f et celle de la droite (D) d'équation $y = x$ (ce qui nous permet le passage de u_n à u_{n+1}, puis de reporter u_{n+1} sur la droite (OI)).

Le plus souvent, l'une des deux situations graphiques suivantes se présente :

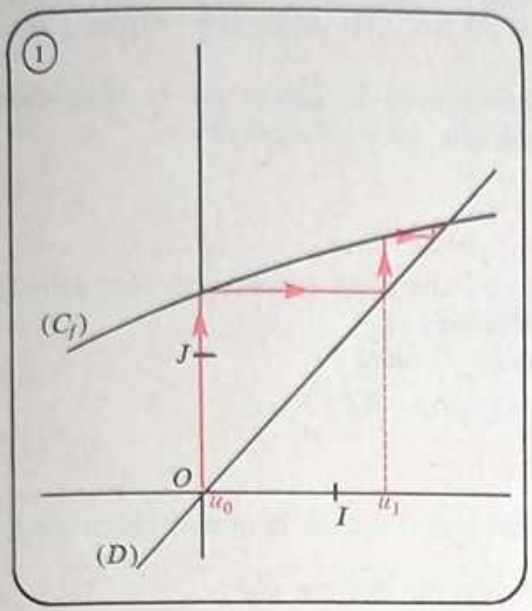
— soit on obtient une allure « en escalier »

— soit on obtient une allure « en spirale ».

En voici quelques exemples dont nous ferons une étude détaillée dans les pages suivantes :

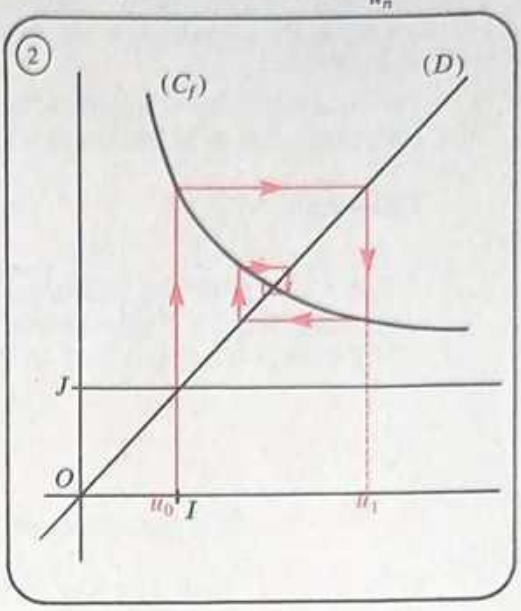
Scanné avec CamScanner

$u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$



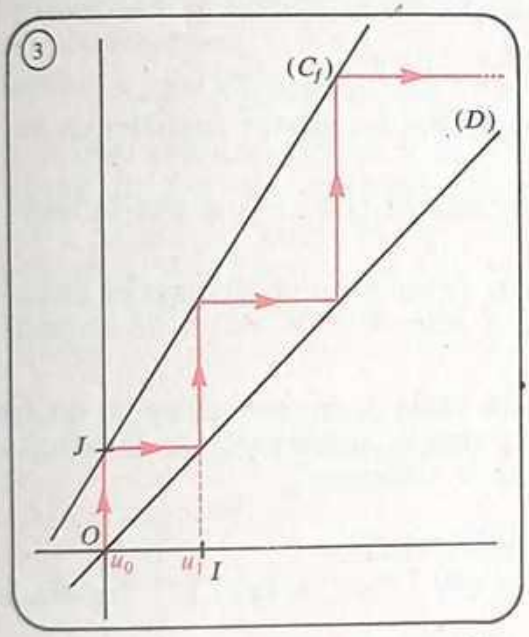
convergence «en escalier»

$u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\frac{2}{u_n}+1$



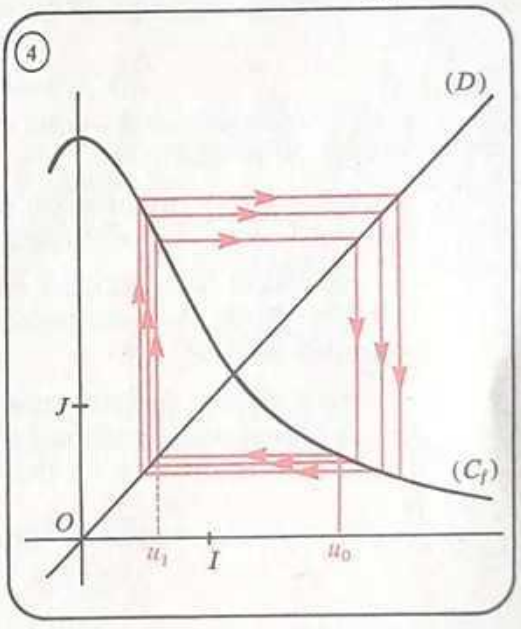
convergence «en spirale»

$u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ 2u_{n+1}=3u_n+2$



divergence «en escalier»

$u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ u_{n+1}=\frac{3}{u_n^2+1}$



divergence «en spirale»

Le dessin nous permet de prévoir le comportement de la suite, mais ne constitue pas une démonstration; nous devons justifier la convergence ou la divergence selon le cas de figure constaté.

Remarque. Le texte nous fournira, en général, la méthode à adopter. Si ce n'est pas le cas, alors on utilisera les théorèmes précédents et dans le cas d'une convergence présumée vers ℓ, on introduira la suite de terme général $u_n-\ell$ et on essaiera de montrer qu'elle converge vers 0.

Scanné avec CamScanner

D'une manière générale, on sait que la suite (u) et la suite (v) définie par : $v_n = u_{n+1}$ ont le même comportement. Dans le cas d'une suite (u) définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, la suite (v) définie ci-dessus est la suite $(f \circ u)$.
Par analogie avec le théorème concernant la limite de la composée de deux fonctions, on a le théorème suivant que nous admettrons :

Théorème

Soit f une fonction numérique et (u) une suite numérique dont tous les termes appartiennent à l'ensemble de définition de f.
Si $\lim(u) = \ell$ et si f est continue en ℓ, alors :

$$\lim(f \circ u) = f(\ell).$$

Remarque 1. Ce théorème ne permet pas d'établir la convergence de la suite (u).

Remarque 2. Soit (u) une suite récurrente définie par :

$$u_0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)),$$

où f est une fonction continue.

- Si (u) est convergente alors sa limite ℓ est solution de l'équation :

$$(E) \quad f(x) = x.$$

- Ce théorème permet donc de déterminer les valeurs possibles de $\lim(u)$, *si elle existe*. On pourra alors :

— soit montrer qu'aucune des solutions de (E) ne peut être la limite de (u), et dans ce cas (u) est divergente,

— soit établir la convergence à l'aide du théorème concernant les suites monotones bornées; il restera éventuellement à déterminer la valeur de la limite parmi les solutions de (E),

— soit à choisir judicieusement ℓ (à l'aide de la calculatrice ou du dessin) parmi les solutions de l'équation (E) et établir la convergence de la suite (u) vers ℓ à l'aide de la définition ou des suites de référence.

Exemple 1. Reprenons la suite (u) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+1} = 3u_n + 2 \qquad \text{(dessin 3-page 145).}$$

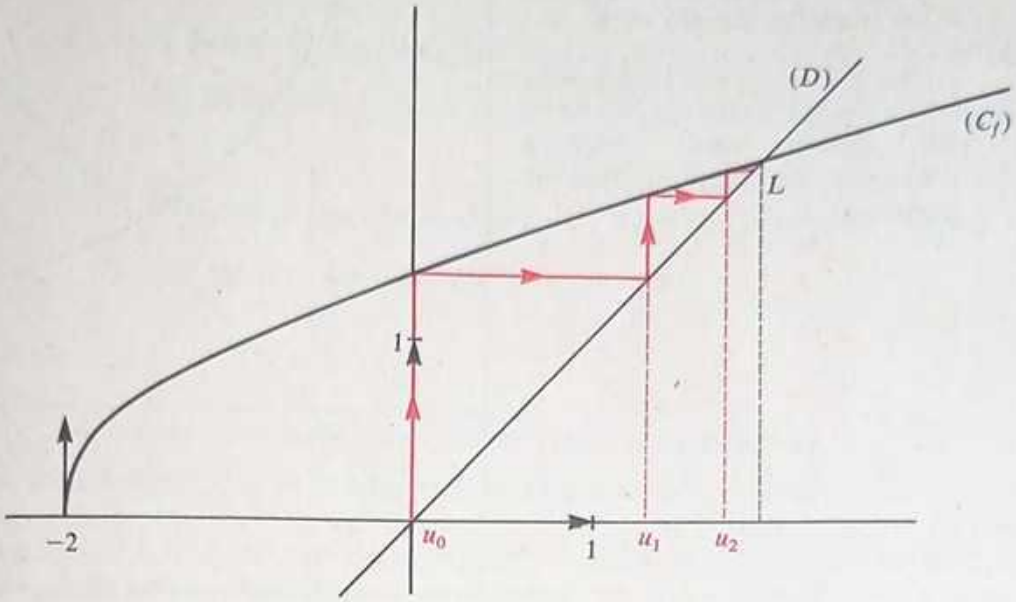
Dans ce cas f est la fonction : $\left[x \longmapsto \frac{3}{2}x + 1\right]$ et l'équation $f(x) = x$, admet pour unique solution -2. Un raisonnement par récurrence élémentaire montre que tous les termes de la suite sont positifs. Ainsi -2 ne peut pas être la limite de la suite (u); d'après la remarque 2 précédente, aucun autre nombre réel ne peut être la limite de la suite (u), donc la suite (u) est divergente. On pourra montrer qu'en fait $\lim(u) = +\infty$.

Exemple 2. Soit la suite (u) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \qquad \text{(dessin 1-page 145).}$$

Scanné avec CamScanner

L'étude de la fonction $\left[f : x \longmapsto \sqrt{2+x}\right]$, nous permet de construire la courbe représentative (C_f) ci-dessous :



Le tracé de (C_f) et de (D) fait apparaître une convergence « en escalier »; justifions cette convergence.

Démontrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_n < 2$.

De même, étudions à l'aide d'un raisonnement par récurrence, les variations de la suite (u). On voit facilement que f est croissante sur $[-2, +\infty[$ et que $u_0 < u_1$.

Soit k un nombre entier naturel non nul quelconque tel que : $u_{k-1} < u_k$; f étant croissante, on a $f(u_{k-1}) < f(u_k)$ c'est-à-dire $u_k < u_{k+1}$. Nous avons ainsi établi, par récurrence, que la suite (u) est croissante.

La suite (u), étant croissante et majorée par 2, est convergente.

Posons $\lim (u) = \ell$ en remarquant que : $0 \leqslant \ell \leqslant 2$. Sachant que f est continue sur $[-2, +\infty[$, donc en particulier en ℓ, nous obtenons la valeur de ℓ comme solution de :

$$\begin{cases} f(x) = x \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \ell = 2$$

$$\text{donc} \quad \lim (u) = 2.$$

Exemple 3

Soit la suite (u) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + 1 \qquad \text{(dessin 2-page 145).}$$

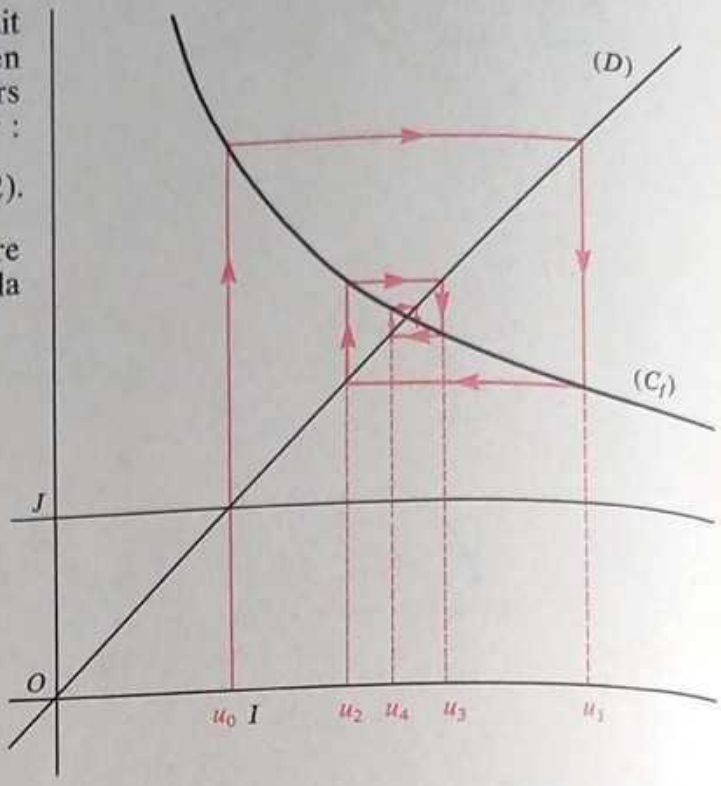
L'étude de la fonction $\left[f : x \longmapsto \frac{2}{x} + 1\right]$, nous conduit à la courbe représentative (C_f) suivante :

Scanné avec CamScanner

Le tracé de (C_f) et de (D) fait apparaître une convergence en « spirale ». Si $\lim(u)=\ell$, alors ℓ est solution de $f(x)=x$; or :

$f(x)=x \iff (x=-1 \text{ ou } x=2)$.

Le dessin nous suggère d'essayer de montrer que la limite est 2.



Comme : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n-2| = \left|\frac{u_{n-1}-2}{u_{n-1}}\right|$,

il paraît intéressant de minorer le dénominateur $|u_{n-1}|$, par un nombre réel supérieur à 1. Après examen du dessin, montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^* \quad u_p \geqslant \frac{5}{3}$; d'où :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad |u_p-2| \leqslant \frac{3}{5}|u_{p-1}-2|,$$

et en faisant le produit membre à membre des $(n-1)$ inégalités obtenues pour $p=2, 3, \ldots, n$:

$$|u_2-2| \leqslant \frac{3}{5}|u_1-2|$$

$$|u_p-2| \leqslant \frac{3}{5}|u_{p-1}-2|$$

$$|u_n-2| \leqslant \frac{3}{5}|u_{n-1}-2|,$$

comme $u_1=3$, nous obtenons : $|u_n-2| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$.

Nous savons que : $\lim \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}=0$ et conséquence $\lim(u)=2$.

Scanné avec CamScanner

Exercice

Soit (u) la suite définie par :

$$u_0=2 \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{3}{u_n^2+1}$$ (dessin 4-page 145).

1) Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$. Montrer que l'équation $f(x)=x$ n'admet qu'une seule solution réelle x_0 telle que :

$$1{,}2<x_0<1{,}3.$$

2) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leqslant\frac{3}{5}$ ou $u_n\geqslant 2$.

Que peut-on en conclure?

Remarque

⚠ *Attention aux indications fournies par la calculatrice.*

Il est bien évident que la calculatrice fournit une aide précieuse pour conjecturer la limite de la suite (u), lorsqu'elle existe, et nous ne manquerons pas de l'utiliser. Cependant il faut être très prudent sur le résultat obtenu et penser que ceci ne nous fournit qu'une indication, à nous ensuite de la justifier. La meilleure preuve en est l'exemple suivant :
(u) est la suite définie par :

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Cherchons alors, de proche en proche, les termes de la suite (u). La calculatrice nous fournit les résultats suivants :

U⟨N+2⟩=U⟨N+1⟩+U⟨N⟩

U0= 1,000000000
U1= .....−0,618033989
U2= 0,381966012
U3= .....−0,236067977
U4= 0,145898035
U5= .....−0,090169943
U6= 0,055728092
U7= .....−0,034441851
U8= 0,021286242
U9= .....−0,013155609
U10= 0,008130633
U11= .....−0,005024977
U12= 0,003105656

U40= 0,025572783
U41= 0,041377622
U42= 0,066950404
U43= 0,108328026
U44= 0,175278430
U45= 0,283606455
U46= 0,458884885
U47= 0,742491340
U48= 1,201376224
U49= 1,943867564
U50= 3,145243788
U51= 5,089111352
U52= 8,234355140
U53= 13,32346649
U54= 21,55782163
U55= 34,88128812

U56= 56,43910975
U57= 91,32039787
U58= 147,7595076
U59= 239,0799055
U60= 386,8394131
U61= 625,9193186
U62= 1012,758732
U63= 1638,678051
U64= 2651,436783
U65= 4290,114834
U66= 6941,551617
U67= 11231,66645
U68= 18173,21807
U69= 29404,88452
U70= 47578,10259
U71= 76982,98711

Il semble alors naturel de penser que (u) diverge vers $+\infty$. Calculons maintenant la valeur exacte des termes de la suite :

$$u_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{or} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{d'où} \quad u_2=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

on montre de même que : $u_3=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3$.

Scanné avec CamScanner

Démontrons alors, par récurrence, que (u) est une suite géométrique de raison $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} u_n.$$

- La propriété est vraie pour n égale 0.
- Supposons la propriété vraie pour le nombre entier naturel p, soit :

$$u_{p+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} u_p.$$

- Démontrons alors la propriété pour $(p+1)$, c'est-à-dire que :

$$u_{p+2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} u_{p+1}.$$

On a : $u_{p+2} = u_{p+1} + u_p$ donc $u_{p+2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} u_p$ et $u_{p+2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 u_p$,

c'est-à-dire que : $$u_{p+2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} u_{p+1}.$$

Ainsi (u) est une suite géométrique de raison q, telle que $|q| < 1$, donc (u) converge vers 0.
Nous venons de *démontrer* que (u) est convergente vers 0, ce qui contredit le résultat fourni par la calculatrice. Cherchons à comprendre pourquoi la calculatrice se trompe.
Elle effectue de façon exacte les additions permettant le calcul des termes de rang 2, 3, 4, etc., à partir des deux premiers termes. Par contre u_1 valant $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ c'est un nombre irrationnel; la calculatrice remplace u_1 par son arrondi d'ordre k (k étant le nombre de chiffres utilisés par la calculatrice) donc par une valeur approchée v_1 telle que :

$$v_1 = u_1 + \delta \quad \text{où} \quad \delta \neq 0 \quad \text{et} \quad |\delta| < 10^{-k}.$$

Ainsi la calculatrice calcule les termes successifs de la suite (v) définie par :

$$v_0 = 1 \quad v_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \delta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n.$$

Comme la calculatrice nous le laisse prévoir, montrons que la suite (v) diverge. Introduisons la suite (w) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = v_n - \left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{5}}\right) u_n.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+2} = w_{n+1} + w_n,$$

puis que la suite (w) est géométrique de raison $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. En déduire que (w) et (v) sont divergentes.

On remarquera que, suivant que la calculatrice utilise une valeur approchée par excès ou par défaut, la suite (v) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

Notons que cette situation est assez exceptionnelle et provient du fait que la formule de récurrence que nous avons utilisée est mal adaptée au calcul numérique des termes de cette suite (u).
Ainsi la calculatrice nous guide souvent et dans le cas contraire, elle nous impose un travail mathématique supplémentaire non dénué d'intérêt.

5 Comparaison des suites de terme général a^n et n^α où $\alpha \in \mathbb{N}^*$

1) Suite géométrique (u) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n = a^n$

Rappelons que cette suite (u) est convergente vers 0 si $|a|<1$ et vers 1 pour $a=1$. Dans le cas où a est strictement supérieur à 1, posons : $a=1+b$, où $b>0$. Il vient alors : $a^n=(1+b)^n$, et, en appliquant la formule du binôme on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a^n > bn,$$

et comme $\lim(bn)=+\infty$, en appliquant le théorème 2 du paragraphe 3, on obtient :

$$\lim(u)=+\infty.$$

En résumé :

> Si (u) est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a^n$
> et $a>1$ alors $\lim(u)=+\infty$.

Exercice Étudier la nature (convergence ou divergence) de la suite (u) pour $a=-1$, puis pour $a<-1$.

Remarque. Nous utiliserons cette suite géométrique (u) comme suite de référence; elle complète la liste des suites de référence vues en Première.

2) Suite numérique (v) telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \; v_n = n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*$

Démontrer, par un raisonnement par récurrence, que pour α nombre entier naturel non nul fixé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^\alpha \geqslant n$$

et comme $\lim(n)=+\infty$, alors $\lim(n^\alpha)=+\infty$.

3) Comparaison des suites (u) et (v)

Ces deux suites (u) et (v), pour a nombre réel strictement supérieur à 1 et α nombre entier naturel non nul, divergent vers $+\infty$. Comparons alors leur comportement pour les grandes valeurs de n. Étudions d'abord l'exemple suivant

$$u_n = 1{,}7^n \quad \text{et} \quad v_n = n^2$$

et considérons la suite (w) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

Scanné avec CamScanner

La calculatrice fournit les résultats suivants (arrondi d'ordre 2) :

n	1	2	3	4	5	6	7	10	15	20
$1{,}7^n$	1,7	2,89	4,91	8,35	14,2	24,14	41,03	201,6	2862,42	40642,31
n^2	1	4	9	16	25	36	49	100	225	400
$\frac{1{,}7^n}{n^2}$	1,7	0,72	0,55	0,52	0,57	0,67	0,84	2,02	12,72	101,61

Il semble donc, sur cet exemple, que (w) tende vers $+\infty$, c'est-à-dire que $(1{,}7^n)$ tende plus « efficacement » vers $+\infty$ que (n^2).

Revenons au cas général, en notant (u) (v) et (w) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{array}{l} u_n = a^n \quad \text{et} \quad a > 1 \\ v_n = n^\alpha \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{N}^* \\ w_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}. \end{array}$$

En remarquant que (w) est une suite strictement positive, on a :

$$\ln(w_n) = n\left(\ln a - \alpha \frac{\ln n}{n}\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\lim \left(\ln a - \alpha \dfrac{\ln n}{n}\right) = \ln a$.

Or $\ln a > 0$ d'où : $\lim (\ln(w_n)) = +\infty$.

Ainsi : $\forall A \in \mathbb{R}_+^* \ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ (n > n_0 \implies \ln(w_n) > \ln A)$

et comme ln est strictement croissante, on en déduit que :

$$(n > n_0 \implies w_n > A) \quad \text{soit} \quad \lim(w) = +\infty.$$

En résumé :

> Si a est un nombre réel strictement supérieur à 1 et α un nombre entier naturel non nul, alors :
>
> $$\lim \left(\frac{a^n}{n^\alpha}\right) = +\infty.$$

Remarque 1. Nous dirons que (a^n) tend vers $+\infty$ plus efficacement que (n^α).

Remarque 2. Si $|a| < 1$ alors $\lim (a^n) = 0$ et $\lim \left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right) = 0$, donc $\lim \left(\dfrac{a^n}{n^\alpha}\right) = 0$. Il est alors plus intéressant de se poser le problème de la nature de la suite produit, à savoir $(a^n n^\alpha)$,

— si $a \neq 0$ posons $a = \dfrac{1}{b}$ où $|b| > 1$, de sorte que : $|a^n n^\alpha| = \dfrac{n^\alpha}{b^n}$; d'après le résumé précédent on a donc : $\lim |a^n n^\alpha| = 0$, d'où :

$$\lim (a^n n^\alpha) = 0$$

— si $a = 0$ alors $\lim (a^n n^\alpha) = 0$.

Scanné avec CamScanner

En conclusion,

Si $|a|<1$ et si α est un nombre entier naturel non nul, alors :

$$\lim (a^n n^\alpha)=0.$$

Exercices

1) Étudier la nature (convergence ou divergence) de la suite (w) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = \frac{a^n}{n^\alpha},$$

pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $a=-1$, puis pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $a<-1$.

2) On considère les suites (u) et (v) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n^\alpha}{n!} \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{N}^*$$

$$v_n = \frac{a^n}{n!}$$

avec a nombre réel strictement supérieur à 1.
Étudier la nature des suites (u) et (v).
Comparer alors les efficacités de divergence vers $+\infty$ des suites de terme général : a^n, n^α et $n!$

Scanné avec CamScanner

THÈME D'ÉTUDE : SUITES ADJACENTES

Application

— moyenne arithmético-géométrique
— série harmonique alternée.

Suites adjacentes

Soit (u) et (v) deux suites telles que :

— (u) soit croissante
— (v) soit décroissante
— $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$.

En déduire alors que ces deux suites sont convergentes. Si de plus, $\lim (v-u)=0$, montrer qu'elles ont même limite ℓ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq \ell \leq v_n$.
On dit que (u) et (v) sont des *suites adjacentes*.

Application

1 — *Moyenne arithmético-géométrique*

Considérons deux suites (u) et (v) telles que :

$$0<u_0<v_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}. \end{cases}$$

On montrera, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_n \text{ existe} \\ u_n>0 \\ v_n>0. \end{cases}$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes.

Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n^2-u_n^2=\left(\dfrac{v_{n-1}-u_{n-1}}{2}\right)^2$;

comme u_n et v_n sont des nombres réels positifs, on obtient : $v_n-u_n \geq 0$, ce qui signifie que la moyenne arithmétique de deux nombres réels positifs est toujours supérieure à sa moyenne géométrique.

Comme $u_{n+1}=\sqrt{u_n v_n}$ on a : $u_{n+1} \geq \sqrt{u_n^2}$, de plus $u_n \geq 0$, d'où :

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

De même comme $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$, on en déduit : $v_{n+1} \leq v_n$.

Nous avons ainsi démontré que la suite (u) est croissante, la suite (v) décroissante et que :

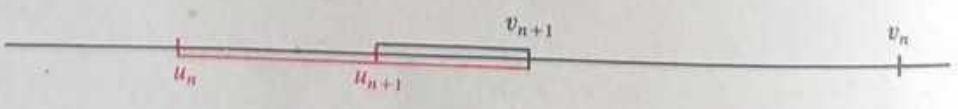
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n.$$

Pour démontrer que (u) et (v) sont adjacentes il faut encore prouver que :

$$\lim (v-u)=0.$$

Nous savons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n.$$



Scanné avec CamScanner

Donc : $0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n$, mais $v_{n+1} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

Montrer alors, par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0).$$

Puis, comme $\lim \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 0$, nous en déduisons, par encadrement, que :

$$\lim (v - u) = 0.$$

• Ainsi les deux suites (u) et (v) sont des suites adjacentes, et par conséquent :

$$\lim (u) = \lim (v) = I(u_0, v_0).$$

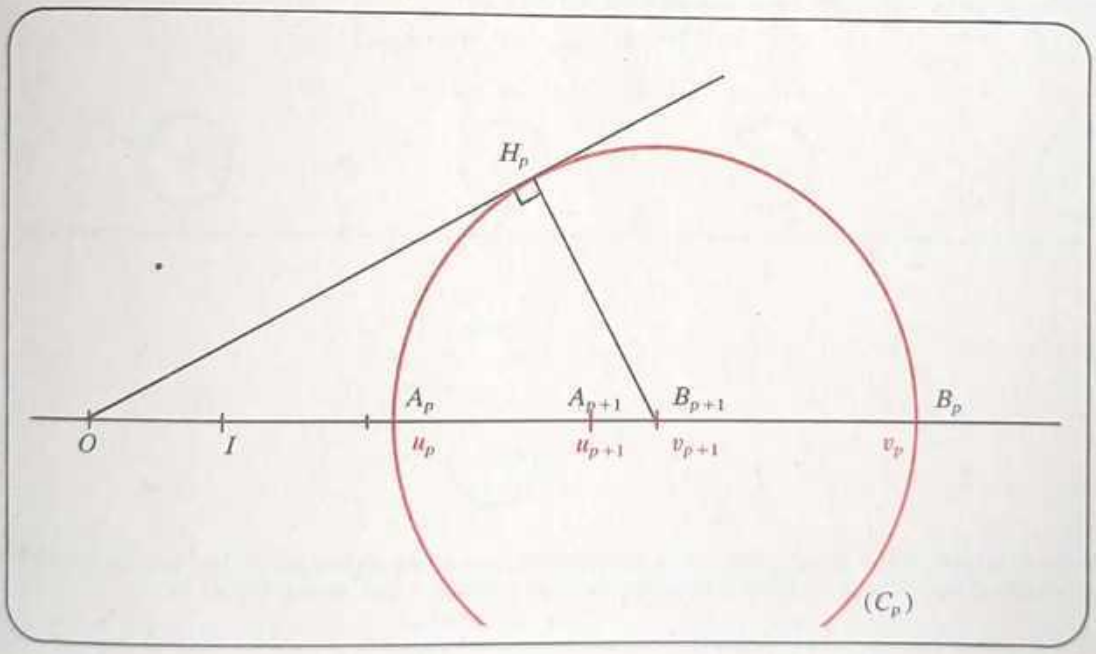
Remarque 1. $I(u_0, v_0)$ qui dépend évidemment de u_0 et v_0 est appelé la *moyenne arithmético-géométrique* de u_0 et v_0. Par exemple en choisissant $u_0 = 1$ et $v_0 = 4$, on constatera que la moyenne arithmético-géométrique de 1 et 4 est telle que :

$$2{,}243\,02 < I(1; 4) < 2{,}243\,04.$$

Remarque 2. Soit sur la droite de repère (O, I) les points A_p et B_p d'abscisses respectives u_p et v_p. Proposons-nous de déterminer la position des points A_{p+1} et B_{p+1} d'abscisses respectives u_{p+1} et v_{p+1} avec :

$$u_{p+1} = \sqrt{u_p v_p} \quad \text{et} \quad v_{p+1} = \frac{u_p + v_p}{2}.$$

B_{p+1} est le milieu du segment $[A_p B_p]$. Considérons alors le cercle (C_p) centré en B_{p+1} et passant par A_p, donc par B_p, puis construisons une tangente à ce cercle, issue de O. Désignons par H_p le point de contact.



Montrer que : $OH_p^2 = OA_p \times OB_p$.

En déduire la position du point A_{p+1} sur la droite (OI).

Scanné avec CamScanner

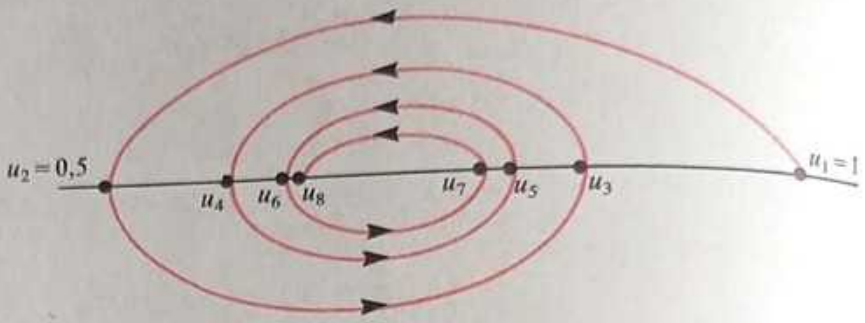
2 — *Série harmonique alternée*

Considérons la suite (u) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

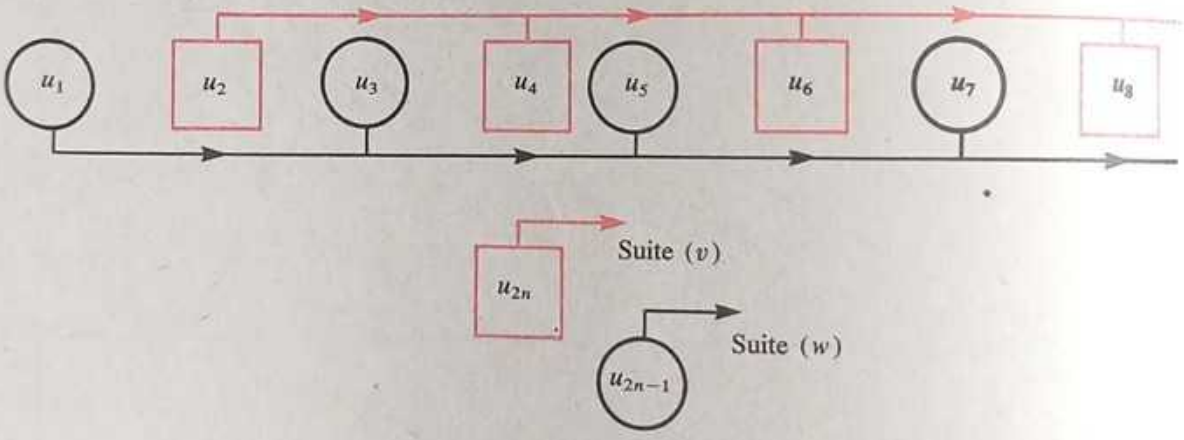
appelée *série harmonique alternée.*
Calculons les premiers termes de cette suite.

n	Arrondi d'ordre 2 de u_n
1	1
2	0,5
3	0,83
4	0,58
5	0,78
6	0,62
7	0,76
8	0,63



Nous remarquons que (u) est une suite bornée (ce qui est une condition nécessaire de convergence) et que d'autre part elle oscille autour d'une certaine valeur en s'en approchant de plus en plus; la figure précédente, nous donne l'idée d'étudier la suite (v) des termes de rang pair et celle (w) des termes de rang impair (tout terme de la suite (u) étant soit un terme de la suite (v), soit un terme de la suite (w)). Ces deux suites sont définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n-1}$$



Comme le dessin nous le suggère, nous admettrons que si les suites (v) et (w) ont la même limite ℓ, alors (u) a pour limite ℓ. Définissons les termes généraux des suites (v) et (w) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n}$$

$$w_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \quad + \frac{1}{2n-1}.$$

Scanné avec CamScanner

Montrer alors que :

— (v) est croissante

— (w) est décroissante

— $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant w_n$.

— $\lim (w - v) = 0$.

• Ainsi (v) et (w) sont deux suites adjacentes, extraites de (u) et ayant la même limite ℓ qui est donc aussi la limite de (u) :

$$\lim (u) = \ell.$$

Cherchons alors un encadrement de ℓ, d'amplitude inférieure, par exemple, à $4 \cdot 10^{-2}$. Nous savons que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant \ell \leqslant w_n$ et $w_n - v_n = \dfrac{1}{2n}$, donc :

$$(w_n - v_n < 4 \cdot 10^{-2}) \iff (n > 12).$$

Si l'on choisit $n = 13$ alors :

$$(v_{13} \leqslant \ell \leqslant w_{13}) \iff (u_{26} \leqslant \ell \leqslant u_{25}).$$

La calculatrice nous fournit le résultat suivant :

$$0{,}6743 \leqslant \ell \leqslant 0{,}7127.$$

Remarque. • La moyenne géométrique des bornes de cet encadrement est :

$$0{,}6932.$$

• On démontre et nous l'admettrons que la série harmonique alternée a pour limite $\ln 2$.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, non nul, on a les égalités suivantes :

$$1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1;$$

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1};$$

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2 On pose pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$a_n = 1\times 3\times 5\times 7\times \ldots \times (2n-1).$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \times n! \times 2^n = (2n)!$$

En déduire que le produit

$$(n+1)\times(n+2)\times\ldots\times 2n$$

est divisible par 2^n.

3 a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $a > b$.

1) En utilisant l'égalité :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b)$$

montrer que $a^n - b^n$ est divisible par $a-b$, pour tout nombre entier naturel n.

2) Montrer, de même, que $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ est divisible par $a+b$ pour tout entier naturel n.

4 On dit qu'*une propriété P est héréditaire* si et seulement si étant vrai pour un nombre entier naturel p alors elle est vraie pour $(p+1)$.

1) Montrer que les deux propriétés suivantes sont héréditaires :

(1) $10^n - 1$ est divisible par 9

(2) $10^n + 1$ est divisible par 9.

Peut-on en déduire que (1) est vraie pour tout entier naturel n? Que peut-on dire de (2)?

2) Soit a un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2; montrer que : « $a^n - 1$ est divisible par $(a-1)$ » est une propriété héréditaire. Est-elle vraie pour tout nombre entier naturel n?

3) Montrer, de même, que : « $a^n + 1$ est divisible par $(a-1)$ » est une propriété héréditaire. Montrer qu'elle n'est vraie pour tout entier naturel n, que pour $a=2$ ou $a=3$.

5 Soit (Δ_1), (Δ_2), ..., (Δ_n) n droites d'un plan $\mathcal{P}$, sécantes deux à deux en des points distincts. Soit u_p le nombre de régions du plan, déterminées par p de ces droites. Établir une relation entre u_{p+1} et u_p.
En déduire u_n en fonction de n.

6 Soit (u) et (v) les suites définies par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 5}{3} \\ v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{3} \end{cases}$$

1) Montrer que (v) est une suite géométrique.

2) Soit (S) la suite dont le terme général S_n est la somme des n premiers termes de la suite (v).

a) Montrer que (S) est convergente; trouver sa limite.

b) En déduire que (u) est convergente; trouver sa limite.

7 Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout nombre entier n supérieur à n_0 on ait :

(1) $\left|\dfrac{2n-3}{1-n} + 2\right| < 10^{-3}$;

(2) $\dfrac{n! + 2n}{3\cdot n!} - \dfrac{1}{3} < 10^{-4}$;

(3) $\dfrac{n^3 + 2n^2 + 1}{n^2 + n} > 10^4$;

(4) $\dfrac{n^2 - n + 12}{1-n} < -10^5$.

8 n_0 étant un nombre entier naturel non nul fixé, et E désignant la fonction partie entière, montrer que la suite (u) de terme général :

$$u_n = n - n_0 \; E\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

est périodique.

9 1) Soit u_n le chiffre des unités de n^2. Montrer que la suite (u) est périodique.

2) De même, soit r_n, s_n et t_n le chiffre des unités de n^3, n^4 et n^5. Montrer que (r), (s) et (t) sont périodiques.
En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^5 - n \text{ est divisible par } 10.$$

Scanné avec CamScanner

10 1) Montrer que si la suite (u) vérifie la formule de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

alors elle est périodique.

Ce résultat est-il conservé pour les suites (u) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} + u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0.$$

2) Que peut-on dire des suites (u) qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 1.$$

Peut-on généraliser ce résultat?

11 Étant donnés deux nombres complexes a et b tels que : $a \neq 0$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$, on définit la suite (z) de nombres complexes par :

$$z_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = az_n + b.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad z_n = \dfrac{b(1-a^n)}{1-a}$.

2) Dans cette question, on pose :

$$a = \cos\frac{2\pi}{p} + i \sin\frac{2\pi}{p}$$

où p est un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.
Montrer qu'alors la suite (z) est périodique de période p.

12 Soit (u) une suite de nombres réels ayant pour limite ℓ. On considère alors la suite (v) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}.$$

1) Supposons $\ell = 0$.

a) ε étant un nombre réel strictement positif, montrer qu'il existe un nombre entier naturel p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n > p \implies |u_n| < \varepsilon).$$

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; n > p \implies |v_n| < \frac{|u_1 + u_2 + \ldots + u_p|}{n} + \varepsilon.$$

c) Montrer alors qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$n > n_0 \implies |v_n| < 2\varepsilon;$$

en déduire que : $\lim(v) = 0$.

2) On suppose $\ell \neq 0$.
On considère alors les deux suites (u') et (v') suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u'_n = u_n - \ell \quad \text{et} \quad v'_n = v_n - \ell.$$

a) Montrer que :

$$v'_n = \frac{u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n}{n}.$$

b) En utilisant le 1), montrer que : $\lim(v) = \ell$.

c) Énoncer le résultat obtenu.

3) (x) est une suite de nombres réels, de premier terme x_1.

On choisit : $u_n = x_{n+1} - x_n$.

Montrer que si la suite (u) converge vers ℓ, alors la suite (t), de terme général : $t_n = \dfrac{x_n}{n}$ converge aussi vers ℓ.

4) Démontrer que, si la suite (u), à termes strictement positifs, converge vers ℓ, alors la suite (w) de terme général :

$$w_n = \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n}$$

converge aussi vers ℓ.

13 Soit a et b, deux nombres réels tels que : $a + b \neq 0$. On définit la suite (u) par :

$$u_1 = a + b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}.$$

1) Si l'on suppose que (u) converge vers ℓ, quelles sont les valeurs possibles de ℓ.

2) On suppose $a \neq b$.
Calculer u_1, u_2 et u_3 uniquement en fonction de : $a - b$, $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$. Généraliser le résultat obtenu. (Le justifier par récurrence.)
En déduire que dans ce cas (u) est convergente; calculer sa limite.

3) On suppose $a = b$.
Calculer u_1, u_2 et u_3 uniquement en fonction de a.
Généraliser le résultat obtenu. (Le justifier par récurrence.)
Déterminer dans ce cas la limite de (u).

14 Soit (u) la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 5.$$

1) Déterminer la « limite éventuelle » ℓ de la suite (u).

2) Montrer que la suite (v) de terme général : $v_n = u_n - \ell$ est une suite géométrique.
Calculer u_n en fonction de n. Que peut-on en conclure quant à la nature de la suite (u).

15 Soit (u) la suite telle que :

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n(1 + u_n).$$

Scanné avec CamScanner

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 0.$$

2) Étudier les variations de la suite (u).

3) En déduire que (u) est convergente; déterminer sa limite.

16 On définit les deux suites (u) et (v) par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 12 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = v_n - u_n$.
Démontrer que (w) est une suite géométrique. Exprimer w_n en fonction de n, pour tout entier naturel n non nul. En déduire la limite de (w).

2) Démontrer que (u) est une suite croissante et (v) une suite décroissante. Que peut-on en conclure à l'aide de 1)?

3) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que (t) est une suite stationnaire. En déduire la limite des suites (u) et (v).

Rouen-E-82

17 Soit (u) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt[3]{3u_n + 1} - 1.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.

2) Étudier les variations de la suite (u).

3) En déduire que (u) est convergente; déterminer sa limite.

18 Étudier graphiquement les suites (u) suivantes, puis démontrer le résultat conjecturé :

(1) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$

(on pourra utiliser la suite (v) de terme général : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 1}$).

(2) $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 3}{u_n}$.

(3) $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 15}$.

(4) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 1}$.

(5) $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{4} + 1$.

(6) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n}$.

19 Soit la suite (u) de premier terme $u_0 = 3$ et définie par la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

pour tout nombre entier naturel n.

1) Démontrer que tous les termes de la suite (u) sont positifs.

2) Si la suite (u) est convergente, démontrer que sa limite ℓ est solution de l'équation : $x^2 + x - 2 = 0$.

3) Soit la suite (v) de terme général :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

pour tout entier naturel n. Démontrer que (v) est une suite géométrique. Préciser sa limite.

4) En déduire que la suite (u) est convergente et déterminer sa limite.

Besançon-C-85

20 Soit α un paramètre réel et (u) la suite définie par :

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n - 10}{u_n - 6}.$$

On appelle D_α l'ensemble de définition de la suite (u).

1) *a*) On prend $\alpha = \dfrac{106}{21}$; calculer les termes successifs de la suite (u). Quel est son ensemble de définition?

b) On choisit α strictement inférieur à 2. Montrer, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \text{ existe.}$$

Quel est alors l'ensemble de définition de (u)?

c) Montrer que D_α est différent de $\mathbb{N}$ si et seulement si il existe un entier naturel n de D_α tel que : $u_n = 6$.
Quel est alors l'ensemble D_α?

2) *a*) Montrer qu'il existe deux valeurs réelles a et b $(a < b)$ de u_0 pour lesquelles la suite (u) est constante.

b) Montrer que si α est différent de a et de b alors il n'existe pas d'entier naturel p de D_α tel que : $u_p = a$ ou $u_p = b$.

3) On suppose : $\alpha \neq a$ et $\alpha \neq b$. On considère la suite (v) définie sur D_α par :

$$v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}.$$

Scanné avec CamScanner

a) Montrer que (v) est une suite géométrique. Calculer v_n en fonction de α et de n.

b) Montrer que :

$$D_\alpha = \{0, 1, 2, ..., p\} \iff v_p = 4.$$

c) Quel est l'ensemble F des valeurs de α pour lesquelles D_α est fini. Montrer que : $F \subset]5; 6]$.

d) Soit α n'appartenant pas à F. Montrer qu'alors (u) est une suite convergente et calculer sa limite.

21 On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2u_{n-1} - 9}$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1) Représenter graphiquement la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x-8}{2x-9}$.

Utiliser cette représentation graphique pour conjecturer le comportement de la suite (u).

2) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < 1$.

3) Démontrer que la suite (u) est croissante et qu'elle converge.
Déterminer sa limite.

Paris-C-85

22 Soit la suite (u) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

En déduire que (u) est convergente. Calculer sa limite.

23 Soit la suite (u) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n! \geqslant 2^{n-1}$.

En déduire que (u) est convergente et que sa limite est comprise entre $\dfrac{8}{3}$ et 3.

24 1) Soit (u) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}.$$

Calculer alors : $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$; en déduire $\lim(S)$.

2) Par une méthode analogue, calculer $\lim(S')$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S'_n = 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n\times(n+1)}.$$

3) On considère la suite (v) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Montrer que (v) est une suite croissante et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant S'_n.$$

En déduire que (v) est convergente et que sa limite ℓ est telle que : $1{,}5 < \ell \leqslant 2$.

N.B. On montre que $\lim(v) = \dfrac{\pi^2}{6}$ (résultat dû à Bernouilli).

25 Soit la suite (u) définie par :

$$u_2 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$
$$(n+1)^2 u_{n+1} - (n-1)^2 u_n + n = 0.$$

1) Montrer qu'il existe un nombre réel k, tel que si l'on pose :

$$v_n = u_n - k$$

on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad (n+1)^2 v_{n+1} - (n-1)^2 v_n = 0.$$

2) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad v_n = \frac{4v_2}{n^2(n-1)^2}.$$

3) En déduire que la suite (u) est convergente; déterminer sa limite.

26 a est un nombre réel donné. Soit (u) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1$$

et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + (1-a) u_n$

et (v) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1) Montrer que (v) est une suite géométrique.

2) On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} v_i$.

a) Calculer S_n en fonction de a et de n.

Scanné avec CamScanner

b) Calculer S_n en fonction de u_n.

c) En déduire u_n en fonction de a et de n.

3) Comment faut-il choisir a pour que la suite (u) soit convergente. Quelle est alors sa limite?

27 Soit (u) la suite définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1) Montrer que u_n est un entier naturel non nul.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant n$.
En déduire $\lim(u)$.

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = (-1)^n.$$

4) On pose :

$$v_p = \frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} \quad \text{et} \quad w_p = \frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}}.$$

• Montrer que (v) est une suite croissante, (w) une suite décroissante et que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad v_p < w_p.$$

• Montrer que (v) et (w) sont convergentes et ont la même limite.

28 1) On considère l'ensemble S des suites (u), définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n.$$

a) Montrer que, si deux suites (x) et (y) sont éléments de S, alors leur somme et le produit de l'une par un réel, sont également éléments de S.

b) Déterminer les deux suites géométriques (v) et (w) de premier terme égal à 1, éléments de S.

c) En déduire que, si de plus, u_0 et u_1 sont donnés, alors il n'existe qu'un seul couple de nombres réels (α, β) tel que la suite (u), de terme général :

$$u_n = \alpha v_n + \beta w_n,$$

soit élément de S. Expliquer pourquoi.

2) On considère la suite (t) définie par :

$t_0 = -1$ et $t_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2t_{n+2} = 3t_{n+1} + 2t_n$.

Exprimer le terme général t_n de cette suite en fonction de n; en déduire la nature de la suite (t).

29 Soit Σ l'ensemble des suites (u) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 9u_{n+2} - 6u_{n+1} + u_n = 0.$$

1) Trouver une suite géométrique de premier terme égal à 1, et élément de Σ.

2) Montrer que la suite (r) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad r_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

est élément de Σ.

3) Soit (u) la suite de Σ telle que : $u_0 = u_1 = 1$.
Exprimer son terme général u_n en fonction de n.
En déduire la nature de la suite (u).

30 Soit S' l'ensemble des suites (u) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n.$$

Quel que soit (u) élément de S', montrer qu'il existe deux valeurs de q, telles que la suite (v), définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - qu_n,$$

soit une suite géométrique.
En déduire u_n en fonction de u_0, u_1 et n.

Scanné avec CamScanner

Problèmes

31 1) n étant un nombre entier naturel non nul, on considère le produit :

$$P_n = (1+1)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Constater que P_n s'exprime très simplement en fonction de n.

En déduire la valeur de :

$$P'_n = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Les suites (P) et (P') tendent-elles vers une limite? Si oui, laquelle?

2) Soit, pour n entier naturel non nul, le produit :

$$R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\times\ldots\times\frac{1}{1-\frac{1}{n}}.$$

Constater que R_n s'exprime très simplement en fonction de n.

En déduire la valeur de :

$$R'_n = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Les suites (R) et (R') tendent-elles vers une limite? Si oui, laquelle?

3) n étant un entier naturel non nul, calculer :

$$Q'_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{4^2}\right) + \ldots + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

La suite (Q') tend-elle vers une limite? Si oui, laquelle?

En déduire la limite, si elle existe, de la suite (Q) de terme général :

$$Q_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Bordeaux-E-80

***32** 1) Soit k un nombre réel vérifiant : $0<k<1$ et (u) une suite telle que :

$$u_0\in\mathbb{R}_+^* \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad 0<\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant k.$$

Déterminer les variations de la suite (u). Montrer qu'elle est convergente. Calculer $\lim(u)$.

2) Soit (t) la suite définie par :

$$t_0=2 \quad\text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad t_{n+1}=\frac{5}{2t_n+3}.$$

Montrer que tous les termes de la suite (t) sont positifs.

Représenter graphiquement sur $[0;+\infty[$ la fonction $\left[f : x \longmapsto \frac{5}{2x+3}\right]$, ainsi que la droite (D) d'équation $y=x$.

Quelle limite la suite (t) semble-t-elle avoir? On considère alors la suite (v) définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n = t_n - 1.$$

Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n\neq 0$, puis trouver un nombre réel k, strictement inférieur à 1, tel que :

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|\leqslant k.$$

En déduire la limite de la suite (t).

3) Soit a un nombre réel strictement positif et (w) la suite définie par :

$$w_1\in\mathbb{R} \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}^*\ (n+1)(n+a)\,w_{n+1} = n w_n.$$

Montrer que cette suite (w) est convergente et calculer sa limite.

***33** On désigne par F la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = x^2 - 3x + 2.$$

On se propose de montrer que pour tout nombre entier naturel n, il existe des nombres réels a_n et b_n et une fonction polynôme g_n, à coefficients réels tels que l'on ait :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall x\in\mathbb{R}\quad x^n = g_n(x)F(x) + a_n x + b_n$$
$$\text{et } \forall x\in\mathbb{R}\quad 1 = g_0(x)F(x) + a_0 x + b_0.$$

1) Déterminer g_0, a_0, b_0, g_1, a_1, b_1 et g_2, a_2, b_2.

2) Démontrer par récurrence, l'existence de g_n, a_n, b_n pour tout nombre entier naturel n; on établira notamment les égalités :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n. \end{cases}$$

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n + b_n = 1$.

4) Montrer que la suite (u) de terme général $u_n = a_n + 1$ est une suite géométrique. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Nice-C-80

Scanné avec CamScanner

34 Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de A dans A. On considère la suite (u) définie par :

$$u_0 \in A \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1) *a*) Démontrer que si f est croissante sur A alors (u) est monotone.

b) Vérifier le résultat obtenu sur les deux suites (r) et (s) :

$$r_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n^2$$

$$s_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad s_{n+1} = \frac{1}{2} s_n^2.$$

2) *a*) Si f est décroissante sur A, montrer que (u) n'est monotone que si u_0 est choisi de façon à ce que (u) soit constante.

b) Si f est décroissante sur A, soit (v) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{2n}.$$

Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = f \circ f(v_n).$$

En déduire les variations de la suite (v)..

c) Même question qu'au *b*) avec la suite (w) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

3) On considère la suite (u) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n < 1$.

b) Soit (v) et (w) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

Étudier les variations des suites (v) et (w). Montrer que ces deux suites sont convergentes.

c) On pose : $\ell_1 = \lim (v)$ et $\ell_2 = \lim (w)$. Montrer que ℓ_1 et ℓ_2 sont solutions de l'équation :

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x = 0.$$

Calculer ℓ_1 et ℓ_2. Que peut-on en conclure quant à la nature de la suite (u).

35 Soit θ un nombre réel élément de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et les suites de nombres complexes (z) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+2} - 2z_{n+1} \cos \theta + z_n = 0 \quad (1)$$

On appelle $\mathcal{P}$ le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et l'on notera M_n le point de ce plan ayant pour affixe z_n.
Soit $z_0 = 3 + i$ et $z_1 = 1 + 2i$.

1) Lorsque $\theta = 0$, construire dans $\mathcal{P}$ les points M_0, M_1, M_2 et M_3. Démontrer que, dans ce cas, (z) est une suite arithmétique.
Calculer $\overrightarrow{M_0M_n}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M_1}$ et de n.
Que peut-on en déduire sur la suite des points M_n pour n entier naturel?

2) Lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$, construire dans $\mathcal{P}$ les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6. Démontrer que, dans ce cas, (z) est périodique.

3) Lorsque $\theta = \frac{2\pi}{3}$, construire dans $\mathcal{P}$ les points M_0, M_1, M_2 et M_3. Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, O est l'isobarycentre des points M_n, M_{n+1} et M_{n+2}.
Démontrer que, dans ce cas, (z) est périodique.

4) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^2 - 2z \cos \theta + 1 = 0.$$

Soit α et β les solutions. Démontrer que, pour λ et μ, nombres complexes quelconques si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \lambda \alpha^n + \mu \beta^n$$

alors la suite (z) vérifie la relation (1). Calculer λ et μ à l'aide de z_0 et z_1.

36 Soit a un nombre réel fixé strictement positif et (u) la suite réelle définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^* \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$.
Déterminer u_0 de façon à ce que la suite (u) soit constante.

2) Dans toute la suite du problème on choisira u_0 tel que : $u_0^2 \neq a$.

a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n - \sqrt{a})^2$$

$$u_{n+1} + \sqrt{a} = \frac{1}{2u_n}(u_n + \sqrt{a})^2.$$

b) Démontrer que (u) est strictement décroissante pour $n \geqslant 1$. En déduire que (u) converge.

3) Soit (v) la suite définie par :

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

a) Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

b) Calculer v_n en fonction de v_1 et de n.
En déduire $\lim (v)$.

4) Déterminer $\lim (u)$.

Scanné avec CamScanner

5) Soit $u_0=2$ et $a=2$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Démontrer que : $u_1-\sqrt{2}<10^{-1}$

en déduire que: $u_2-\sqrt{2}<\frac{1}{3}\cdot 10^{-2}$.

Déterminer une majoration de l'erreur commise en prenant u_3 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$.

Extrait-Côte-d'Ivoire-E-79

37 1) x étant un nombre réel strictement positif, on considère la sute $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad [x_0=x \text{ et } x_n=\sqrt{x_{n-1}}].$$

a) On suppose que : $x\geqslant 1$; on choisit donc $x=1+h$ avec $h\geqslant 0$. Montrer que : $\sqrt{x}\leqslant 1+\frac{h}{2}$, puis par récurrence que :

$$1\leqslant x_n\leqslant 1+\frac{h}{2^n}.$$

En conclure que, dans ce cas : $\lim(x_n)=1$.

b) On suppose maintenant que : $0<x\leqslant 1$; on choisit donc $\frac{1}{x}=1+h$ avec $h\geqslant 0$.

Montrer que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ tend vers 1.

En conclure que dans ce cas : $\lim(x_n)=1$.

c) Vérifier graphiquement ces résultats à partir de la courbe représentative de la fonction $[x\longmapsto\sqrt{x}]$.

2) Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. Soit les trois suites de terme général, x_n, y_n et $(xy)_n$ de premiers termes respectifs x, y et xy, et définies comme au 1). Montrer par récurrence que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad (xy)_n=x_n y_n.$$

3) x étant un nombre réel strictement positif, on considère les deux suites $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}a_n(x)=2^n(x_n-1)\\ b_n(x)=2^n\left(1-\frac{1}{x_n}\right)\end{cases}$$

avec (x_n) définie comme au 1).

a) Montrer que $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $b_n(x)\leqslant a_n(x)$ quel que soit l'entier naturel n. (Dans chaque cas on fera apparaître un carré parfait.)

b) En déduire que les suites $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Montrer qu'elles convergent vers une même limite.

4) *a*) Vérifier l'égalité :

$$2^n[(xy)_n-1]=2^n(x_n-1)y_n+2^n(y_n-1).$$

b) On note $f(x)$ la limite commune des suites $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$f(1)=0$$

et, pour x et y nombres réels strictement positifs :

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$$
$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y).$$

5) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad 1-\frac{1}{x}\leqslant f(x)\leqslant x-1$.

En déduire que la fonction f est continue au point 1, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$.

En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée. Que peut-on en conclure quant à la fonction f?

Scanné avec CamScanner

5 Fonction exponentielle népérienne

1) DÉFINITION
2) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE NÉPÉRIENNE
3) APPLICATIONS

1 Définition

1) Définition de la fonction exponentielle népérienne

a) **Introduction**

Le premier janvier de chaque année, le relevé de la population d'un pays est publié. On s'aperçoit au 1er janvier 1985 que depuis 5 ans, le taux d'accroissement de la population d'une année sur l'autre est de 29 °/oo (vingt-neuf pour mille).

• 1) Soit E_0 l'effectif de la population au 1er janvier 1985. En admettant que le taux d'accroissement reste le même dans les années à venir, déterminer pour un entier naturel quelconque n, la population de ce pays au premier janvier de l'année $1985+n$.

Soit (E) la suite des effectifs de la population au 1er janvier de chaque année à partir de l'année 1985; E_n est donc l'effectif au 1er janvier de l'année $1985+n$.

On a
$$E_n = E_{n-1} + 0{,}029E_{n-1}$$
$$E_n = 1{,}029E_{n-1}.$$

(E) est donc la suite géométrique de raison 1,029 et de premier terme E_0; donc
$$E_n = (1{,}029)^n E_0.$$

• 2) A ce rythme combien faudra-t-il d'années pour doubler la population du pays?

Il s'agit donc de résoudre l'inéquation :

(I) $\qquad n \in \mathbb{N}, \quad (1{,}029)^n \geqslant 2.$

L'utilisation de la fonction logarithme népérien permet d'écrire :

$$(I) \iff n \geqslant \frac{\ln 2}{\ln 1{,}029}.$$

L'arrondi d'ordre 3 de $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}029}$ est 24,246.

Scanné avec CamScanner

Donc, la population n'aura pas doublé au 1er janvier 2009, mais au 1er janvier 2010. Cependant la croissance de la population ne se fait pas une fois par an, ni même une fois par mois, elle a lieu d'une manière « presque continue »; on préférerait donc une date approximative, au cours de l'année 2009, à laquelle la propriété cherchée serait réalisée.

Or la fonction utilisée précédemment est la fonction :

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto (1{,}029)^n E_0.$$

Nous savons qu'elle peut être prolongée à l'ensemble $\mathbb{Q}$, $(1{,}029)^q$, $(q \in \mathbb{Q})$, ayant été défini au chapitre 3.

Utilisons une calculatrice :

x	24,2	24,24	...	x_0	...	24,25	24,3
arrondi d'ordre 4 de $(1{,}029)^x$	1,997 3	1,999 6		2		2,000 2	2,003 1

Soit x_0 le résultat calculé par la machine pour $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}029}$; effectuons le calcul $(1{,}029)^{x_0}$; la machine affiche 2.

Pour étudier un modèle mathématique correspondant à la situation envisagée, il est donc intéressant de définir une fonction $[x \longmapsto (1{,}029)^x]$, sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et de donner ainsi un sens à $(1{,}029)^x$ où x est un nombre réel non rationnel.

• 3) Dans le cadre d'un programme d'étude de natalité, à quel taux faut-il ramener l'accroissement de la population pour qu'elle ne soit pas doublée avant 2020?

Il s'agit donc de déterminer les nombres réels positifs k tels que :

$$(1+k)^{35} \leqslant 2,$$

c'est-à-dire tels que

$$k \leqslant \sqrt[35]{2} - 1.$$

Par ailleurs on remarque que : $(1+k)^{35} \leqslant 2 \iff \ln(1+k) \leqslant \dfrac{\ln 2}{35}$.

Il paraît donc intéressant de définir une nouvelle fonction qui à tout nombre réel x associe son antécédent par la fonction ln.

b) **Définition**

Nous avons vu au chapitre 1 que la fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur l'intervalle image, c'est-à-dire $\mathbb{R}$ et admet une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle fonction **exponentielle népérienne** la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Elle est notée **exp** et définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad [y = \exp(x) \iff x = \ln(y)].$$

Scanné avec CamScanner

De la définition de la fonction exponentielle népérienne résulte la propriété suivante :

Propriété

La fonction exp est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) > 0.$

2) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad [\exp(x) = \exp(y) \iff x = y].$

3) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad [\exp(x) < \exp(y) \iff x < y].$

4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(\ln(x)) = x.$

Ces deux propriétés peuvent s'écrire : $\ln \circ \exp = I_{\mathbb{R}}$ et $\exp \circ \ln = I_{\mathbb{R}_+^*}$.

5) $\ln 1 = 0$ et donc $\exp(0) = 1$
$\ln e = 1$ et donc $\exp(1) = e.$

Exercice Préciser les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \exp\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$g : x \longmapsto \exp\left(\sqrt{x^2-4}\right)$$

$$h : x \longmapsto \sqrt{\exp(x) - \exp(2x)}$$

$$l : x \longmapsto \frac{\exp(3x+2)}{1-3\exp(x)}.$$

2) Propriété fondamentale et notation

Nous savons que la fonction logarithme népérien ramène le calcul d'un produit à celui d'une somme, il est naturel de penser à transformer $\exp(x+y)$.
Soit x et y deux nombres réels quelconques; $\exp(x)$, $\exp(y)$ et $\exp(x+y)$ sont des nombres réels strictement positifs :

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x+y)) &= x + y \\ &= \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) \\ &= \ln(\exp(x) \times \exp(y)). \end{aligned}$$

La fonction logarithme népérien étant bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit :

Propriété fondamentale

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y). \qquad (1)$$

Scanné avec CamScanner

Par conséquent, étant donné un nombre réel x quelconque :

$$\exp(x+(-x))=\exp(x)\times\exp(-x),$$

or $\exp(0)=1$, donc :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\quad \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}.} \qquad (2)$$

Soit x un nombre réel quelconque, calculer en utilisant la propriété fondamentale, $\exp(2x)$, $\exp(3x)$, puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence, $\exp(nx)$ où n est un nombre entier naturel quelconque.
Plus généralement, soit r un nombre rationnel quelconque;

$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad \ln a^r=r\times\ln a$$

donc pour tout nombre réel x :

$$\begin{aligned}\ln\left[(\exp(x))^r\right]&=r\times\ln(\exp(x))\\&=rx\\&=\ln(\exp(rx)).\end{aligned}$$

Conclusion. $\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall r\in\mathbb{Q}\quad (\exp(x))^r=\exp(rx)$.

En particulier : $(\exp(1))^r=\exp(1\times r)$

or $\exp(1)=e$

d'où $\forall r\in\mathbb{Q}\quad \exp(r)=e^r$.

Cette propriété peut s'exprimer en disant que la fonction exponentielle népérienne coïncide sur $\mathbb{Q}$ avec la fonction : $[r\longmapsto e^r]$.
Or cette propriété, les propriétés (1) et (2) vues précédemment et $[\exp(0)=1;\ \exp(1)=e]$, sont des propriétés analogues à celles que nous connaissons des puissances d'exposant rationnel d'un nombre réel strictement positif :

$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad a^0=1$$
$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad a^1=a$$
$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad\forall x\in\mathbb{Q}\quad\forall y\in\mathbb{Q}\quad a^{x+y}=a^x\times a^y$$
$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad\forall x\in\mathbb{Q}\quad a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$
$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad\forall x\in\mathbb{Q}\quad\forall p\in\mathbb{Q}\quad (a^x)^p=a^{xp}.$$

La fonction exponentielle népérienne a donc, pour x élément de $\mathbb{R}$, les propriétés de la fonction : $[r\longmapsto e^r]$, pour r élément de $\mathbb{Q}$.
Ceci nous conduit à poser **par définition** : $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\quad e^x=\exp(x)$;
on peut donc écrire :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x=\exp(x).$$

Ainsi nous savions que : $e^{\frac{3}{2}}=\exp\left(\frac{3}{2}\right)$, nous pouvons maintenant donner un sens à : $e^{\sqrt{2}}$, $e^{\sqrt{3}}$, e^{π}, e^{e}.
Par exemple, $e^{\pi}=\exp(\pi)$, c'est-à-dire que e^{π} est le nombre réel strictement positif dont le logarithme népérien est égal à π, la calculatrice nous en fournit l'arrondi d'ordre 4 : 23,1407.

Scanné avec CamScanner

Avec cette notation nous pouvons écrire :

$$\begin{array}{l}\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x>0\\ e^0=1 \text{ et } e^1=e\\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad e^{\ln x}=x\\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \ln(e^x)=x\\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\quad e^{x+y}=e^x\times e^y\\ \forall x\in\mathbb{R}\quad e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}\\ \forall x\in\mathbb{R}\quad \forall r\in\mathbb{Q}\quad (e^x)^r=e^{xr}.\end{array}$$

Attention nous venons de définir les puissances d'exposant réel du nombre e seulement, de sorte que si x est un nombre réel, $(e^x)^y$ étant une puissance du nombre réel strictement positif e^x, n'a pour l'instant un sens que si y est un nombre rationnel. Une extension de cette notation sera l'objet d'un prochain paragraphe.

Exercices

1) Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

$x\in\mathbb{R},\quad 4e^{-5x}+3e^{-3x}-e^{-x}=0;$

$x\in\mathbb{R},\quad e^{4x+2}-e^{-4x}>e^2-1;$

$x\in\mathbb{R},\quad e^{\sin x}-2e^{-\sin x}=1;$

$x\in\mathbb{R},\quad e^{4x}<3e^{2x}-2.$

2) Discuter selon les valeurs du nombre réel a, l'existence des solutions et résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} e^x e^y=a\\ 2xy=1.\end{cases}$$

2 Étude de la fonction exponentielle népérienne

Nous avons vu au paragraphe 1, que la fonction exponentielle népérienne est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En tant que réciproque de la fonction logarithme népérien nous savons de plus que, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, sa représentation graphique est l'image de celle de la fonction logarithme népérien par la symétrie orthogonale ayant pour axe la première bissectrice. Il s'agit donc d'un cas où il n'est pas nécessaire d'étudier la fonction pour connaître sa représentation graphique.

Cependant l'étude des fonctions du type $[x \longmapsto e^{u(x)}]$, nous conduit à faire l'étude habituelle de cette nouvelle fonction afin de pouvoir traiter les différents problèmes de limites et de dérivabilité.

Scanné avec CamScanner

1) Étude des limites aux bornes de l'intervalle de définition

L'allure de la représentation graphique nous permet de penser que :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Ceci nous donne l'idée de chercher à minorer e^x sur $]0, +\infty[$.
Nous avons vu au chapitre 1 que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x < x.$$

La fonction exponentielle népérienne étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{\ln x} < e^x$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x < e^x. \tag{1}$$

Comme $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ nous en déduisons :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$$

Soit maintenant un nombre réel quelconque x strictement négatif, pour déterminer $\lim_{x \to -\infty} e^x$, nous utiliserons la méthode du changement de variable déjà expliquée au chapitre 2.

Posons $u = -x$ alors $f(x) = e^{-u}$, c'est-à-dire que l'on considère la fonction $[x \longmapsto e^x]$, comme la composée de la fonction u et de la fonction g définies par :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{e^x} \qquad x \longmapsto -x.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, u tend vers $+\infty$, et comme : $\lim_{u \to +\infty} e^u = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{e^u}$$

donc :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0}$$

Exercice Retrouver la limite précédente en démontrant à partir de (1), que pour x strictement négatif : $0 < e^x < -\frac{1}{x}$.

Branches infinies

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction exponentielle népérienne dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J).

- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Scanné avec CamScanner

Ceci nous permet d'affirmer que la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la branche correspondante de la courbe $(\mathcal{C})$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

$(\mathcal{C})$ possède une branche infinie qu'il convient de préciser; déterminons donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}$. Posons $u=e^x$;

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall u\in\mathbb{R}_+^*\quad [u=e^x \iff x=\ln u].$$

On a donc : $$\frac{e^x}{x}=\frac{u}{\ln u}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$, de plus nous savons que :

$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ et que $\forall u\in]1,+\infty[\ \dfrac{u}{\ln u}>0$ donc :

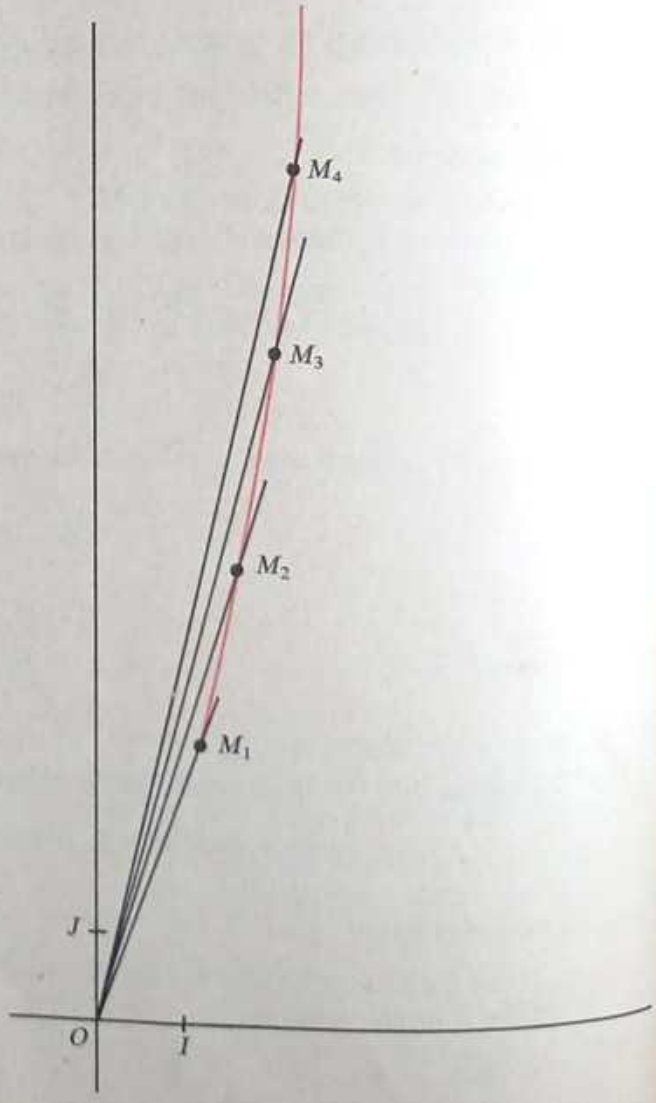
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{\ln u}$$

d'où nous pouvons conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty.}$$

Soit $M(x, e^x)$ un point quelconque de $(\mathcal{C})$. La droite (OM) a pour coefficient directeur $\dfrac{e^x}{x}$; le résultat précédent montre donc que la droite (OM) a un coefficient directeur de plus en plus grand lorsque x tend vers $+\infty$; d'où l'allure suivante de la courbe pour les grandes valeurs de x.

Rappelons que dans cette situation, on dit que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique dans la direction (OJ).



Scanné avec CamScanner

Exercice

a) Démontrer que : $\forall x \in]2, +\infty[\quad \frac{2}{x} < 1$.

b) Déterminer sur $[2, +\infty[$, une primitive F de la fonction $\left[x \longmapsto \frac{2}{x} - 1\right]$.

c) Déduire de *a*) le sens de variation de F sur $[2, +\infty[$, et justifier ainsi que :

$$\forall x \in]2, +\infty[\quad x^2 < e^x.$$

d) Utiliser le résultat précédent pour retrouver que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

2) Dérivabilité de la fonction exponentielle népérienne

Nous disposons des éléments suivants :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto \ln x \qquad x \longmapsto e^x$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [y = e^x \iff x = \ln y].$$

La fonction logarithme népérien est dérivable en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$; la fonction exponentielle népérienne en étant la bijection réciproque, elle est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \frac{1}{(\ln' \circ \exp)(x)}$$
$$= \frac{1}{\ln'(e^x)}$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{e^x}}$$
$$= e^x.$$

Propriété

La fonction exponentielle népérienne est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

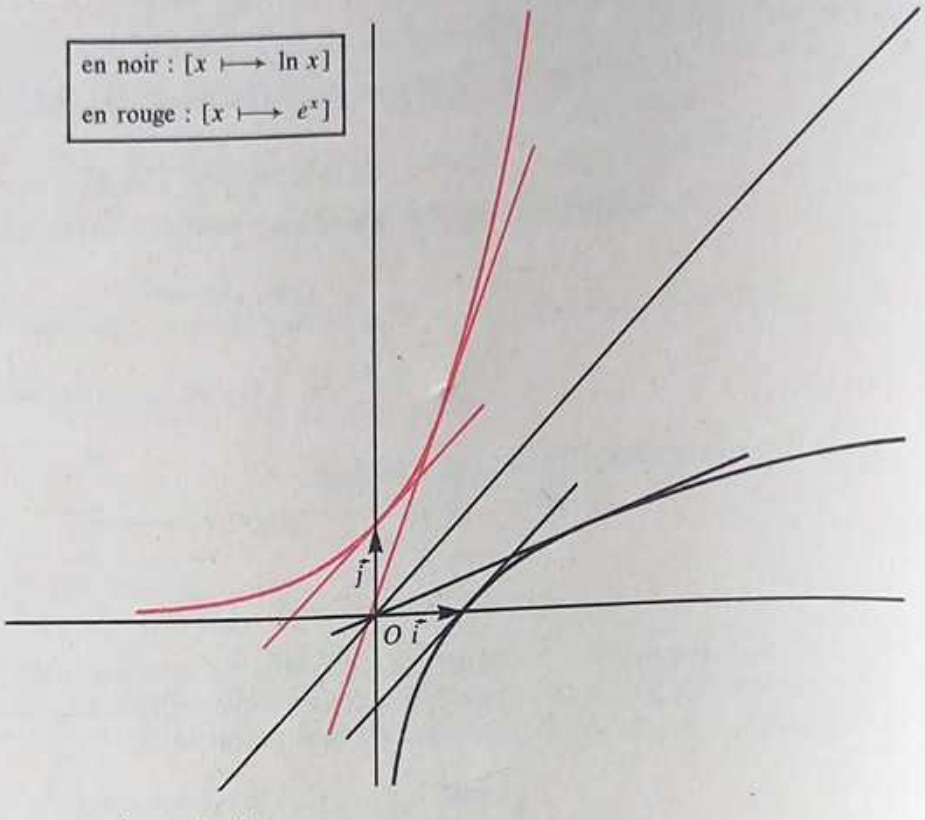
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = e^x$$

D'où le tableau de variation suivant qui corrobore les renseignements déjà donnés par les propriétés géométriques de sa courbe représentative

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	↗	$+\infty$

Scanné avec CamScanner

x	-3	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	3
arrondi d'ordre 2 de e^x	0,05	0,14	0,37	1	1,65	2,72	4,48	7,39	20,09



Deux tangentes importantes

Au point de coordonnées $(1, e)$
$y - e = e(x-1)$
Soit : $y = ex$

Au point de coordonnées $(0, 1)$
$y - 1 = 1(x-0)$
Soit : $y = x + 1$

Exercices

1) *a*) Utiliser la représentation graphique précédente pour montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant x + 1.$$

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < e^{-x} < \dfrac{1}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-x} \geqslant -x + 1$$

b) Soit f la fonction définie par : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x^2 - e^{-x}}{2x^3 + x^2 \sin x}$$

démontrer que : $\forall x \in [1, +\infty[\quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$

2) Soit la suite (u) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 100 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{1}{n} \times \exp(-u_{n-1}) \end{cases}$$

Déterminer un encadrement de u_n; en déduire que (u) est une suite convergente dont on précisera la limite.

Scanné avec CamScanner

3 Applications

1) Fonctions du type : $x \longmapsto e^{u(x)}$

Soit u une fonction numérique.
La fonction $[x \longmapsto e^{u(x)}]$, est la composée de la fonction $[x \longmapsto u(x)]$, et de la fonction $[x \longmapsto e^x]$.
Cette dernière étant définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, nous pouvons utiliser les théorèmes vus aux chapitres II et III pour affirmer que la fonction $[x \longmapsto e^{u(x)}]$, est définie, continue et dérivable en tout point où u l'est.
De plus en utilisant la formule $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$, nous obtenons en désignant par $D_{u'}$ l'ensemble des nombres réels où u est dérivable :

Propriété

$$\forall x \in D_{u'} \quad (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exercices Étudier les fonctions suivantes :

$x \longmapsto e^{3x+1}$;
$x \longmapsto e^{-x}$;
$x \longmapsto e^{-x^2+1}$;
$x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$;
$x \longmapsto \dfrac{e^{x+2}}{1-3e^x}$.

2) Étude de limites

Dans les exercices précédents nous avons rencontré quelques problèmes de limites que nous allons ici regrouper.

a) **Des limites importantes**

— La fonction exponentielle népérienne est dérivable au point 0. En utilisant la définition du nombre dérivé en ce point nous obtenons :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

— Recherche de $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x$.

La fonction $[x \longmapsto x e^x]$, est définie sur $\mathbb{R}$. Les théorèmes sur les limites d'un produit ne nous permettent pas de conclure directement pour la limite de cette fonction lorsque x tend vers $-\infty$.

Utilisons le changement de variable suivant : posons $u = -x$ alors $x e^x = -\dfrac{u}{e^u}$.

Scanné avec CamScanner

Lorsque x tend vers $-\infty$, u tend vers $+\infty$ et comme $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}=+\infty$, alors :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=\lim_{u\to+\infty}-\frac{u}{e^u}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x=0}$$

Récapitulons les limites importantes relatives à la fonction exponentielle népérienne :

$$\boxed{\begin{array}{lll}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0; & \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty; & \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0; & \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty; & \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1.\end{array}}$$

Étude d'un exemple

Étudions la fonction $f : x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}}$.
Elle est définie continue et dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Sa fonction dérivée est définie par : $\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f'(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$; f est donc strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$.

Étude des limites aux bornes de D_f

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et la fonction exp est continue au point 0, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$; la fonction $\left[x\longmapsto e^{\frac{1}{x}}\right]$, admet donc un minorant strictement positif sur un intervalle du type $]a,+\infty[$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• De même on montre que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$;

les théorèmes ne permettent donc pas de conclure directement.
Posons $\dfrac{1}{x}=u$ alors $f(x)=\dfrac{e^u}{u}$;

lorsque x tend vers 0 avec $x>0$, u tend vers $+\infty$; or $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u}=+\infty$ donc :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=+\infty.$$

Scanné avec CamScanner

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$ et par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f. Le point O est un *point d'arrêt* de $(\mathcal{C}_f)$; f n'étant pas définie au point d'abscisse 0, ce n'est pas un point de $(\mathcal{C}_f)$.

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, il n'est pas possible de déterminer un prolongement continu de f au point d'abscisse 0.

Cependant, soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* & g(x) = f(x) \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$; elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, mais est continue en 0 à gauche.

Il est donc possible d'étudier la dérivabilité de g à gauche en 0;

$$\forall x \in]-1; 0[\quad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = e^{\frac{1}{x}}$$

donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0.$$

g est donc dérivable à gauche en 0 et $(\mathcal{C}_g)$ admet à gauche au point O une demi-tangente de coefficient directeur 0.
f ne coïncidant pas avec g sur $]-\infty, 0]$ mais sur $]-\infty, 0[$, on ne peut pas parler de demi-tangente pour $(\mathcal{C}_f)$ en O, mais ce renseignement important concernant g permet de mieux tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage du point O à gauche : $(\mathcal{C}_f)$ présente à gauche de O la même allure qu'une courbe admettant une demi-tangente portée par la droite d'équation $y = 0$, en ce point. On pourra remarquer que ce renseignement est confirmé en calculant quelques images par f de nombres réels négatifs et très proches de 0.

Branches infinies

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$;

la branche correspondante de la courbe admet donc l'asymptote d'équation $x = 0$.

Scanné avec CamScanner

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

pour connaître la nature de la branche infinie correspondante, déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1;$$

dans cette situation nous savons qu'il faut ensuite déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) - x = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right).$$

Posons $u = \dfrac{1}{x}$ alors $f(x) - x = \dfrac{e^u - 1}{u}$; quand x tend vers $+\infty$, u tend vers 0 et comme $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$, nous en déduisons que :

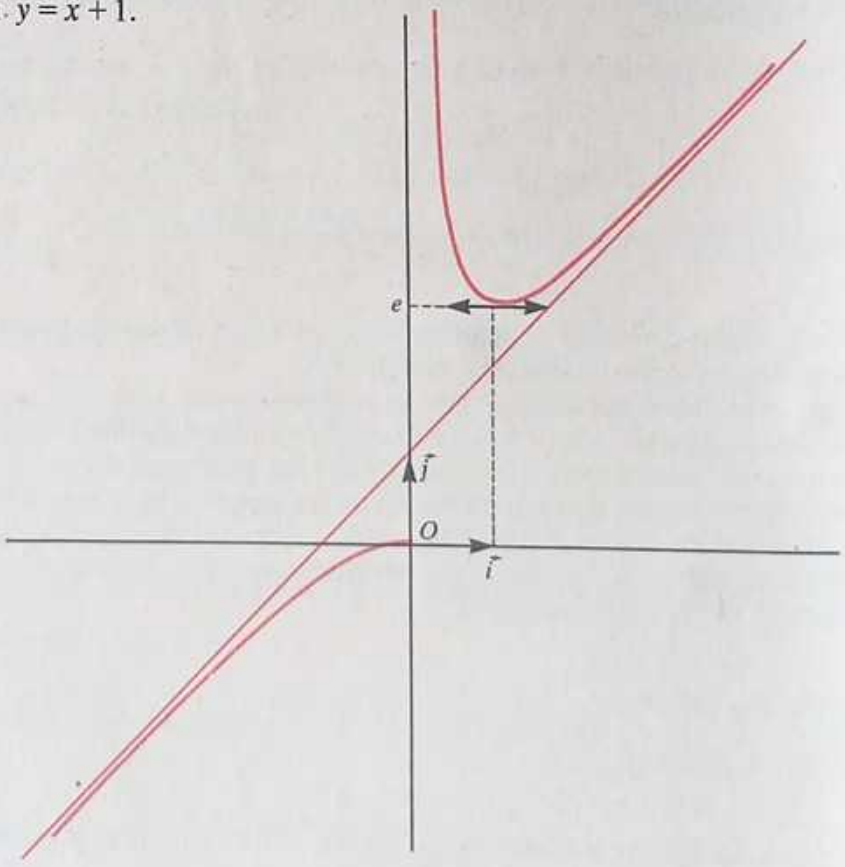
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 1.$$

Ainsi la branche correspondante de la courbe admet pour asymptote la droite d'équation : $y = x + 1$.

On montre de façon analogue que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 1, \end{cases}$$

et qu'ainsi la branche correspondante de la courbe admet aussi l'asymptote d'équation $y = x + 1$.



Scanné avec CamScanner

Cherchons quelques valeurs particulières de $f(x)$ et traçons la courbe de f.

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}25$	$0{,}5$	$0{,}75$	1	2	3	4	5
arrondi d'ordre 2 de $f(x)$	$-3{,}12$	$-2{,}15$	$-1{,}21$	$-0{,}37$	$-0{,}07$	$13{,}65$	$3{,}69$	$2{,}85$	$2{,}72$	$3{,}30$	$4{,}19$	$5{,}14$	$6{,}11$

Exercices

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$.

2) Étudier les fonctions numériques suivantes :

$$x \longmapsto xe^x;$$
$$x \longmapsto xe^{-x};$$
$$x \longmapsto (x^2+1)e^x.$$

b) **Limites d'expressions du type $\dfrac{e^x}{x^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{Q}_+^*)$, lorsque x tend vers $+\infty$**

Nous avons vu que e^x tend vers $+\infty$ plus «efficacement» que x, c'est-à-dire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

On peut se demander s'il en est de même pour e^x relativement à x^n, $(n \in \mathbb{N})$.

Activité

1) Dresser un tableau de valeurs de la fonction $\left[x \longmapsto \dfrac{e^x}{x^{10}}\right]$, pour x élément de

$$\{1; 10; 20; 30; 40; 50; 100\}.$$

Ces résultats rendent plausible l'égalité :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = +\infty,$$

que nous allons maintenant démontrer.

2) Recherche de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{10}}$.

On effectue le changement de variable $x = 10u$ alors $\dfrac{e^x}{x^{10}} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{10} \left(\dfrac{e^u}{u}\right)^{10}$;

lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$ et comme $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \left(\frac{e^u}{u}\right)^{10}.$$

Et donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{10}} = +\infty.}$$

Scanné avec CamScanner

Conclusion. Cette méthode pourra être utilisée pour toute limite du type : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ lorsque α est un nombre rationnel strictement supérieur à 1.

Remarque. Lorsque α est un nombre rationnel vérifiant : $0 < \alpha \leqslant 1$, il est inutile d'utiliser un changement de variable; il suffit d'écrire :

$$\frac{e^x}{x^\alpha} = \frac{e^x}{x} \times x^{1-\alpha}.$$

On pourra retenir que, pour déterminer la limite d'une expression du type $\frac{e^x}{x^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{Q}_+^*)$, quand x tend vers $+\infty$, on cherchera à se ramener à la limite de $\frac{e^x}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, à l'aide d'un changement de variable ou d'opérations permettant d'utiliser les théorèmes sur les limites.

Autres exemples

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$.

La fonction $\left[x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}\right]$ est définie en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

On effectue le changement de variable $\sqrt{x} = u$ alors $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{e^u}{u^4}$; lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers $+\infty$.

Nous sommes ainsi ramenés au même principe qu'à l'exercice précédent; en posant $u = 4X$ on trouve : $\lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^4} = +\infty$; comme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \lim_{u \to +\infty} \frac{e^u}{u^4}$$

donc

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = +\infty.}$$

Notons qu'en posant directement $\sqrt{x} = 4u$, on aurait eu : $\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{1}{16^2} \times \left(\frac{e^u}{u}\right)^4$, ce qui eût permis de résoudre l'exercice au moyen d'un seul changement de variable. Ceci n'est pas une obligation et on peut procéder par étapes successives.

• Étudier la fonction $f : x \longmapsto \exp\left(\frac{2x^2 + x - 2}{4x + 2}\right)$.

Pour déterminer la nature de la branche infinie correspondant à « x tend vers $+\infty$ », cherchons : $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + x - 2}{4x + 2} = +\infty$; de plus, le comportement asymptotique de la fonction

$$g : x \longmapsto \frac{2x^2 + x - 2}{4x + 2}$$

Scanné avec CamScanner

apparaît clairement en écrivant :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x+1}.$$

On peut alors écrire :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \times \exp\left(-\frac{1}{2x+1}\right);$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x+1} = 0$, et comme la fonction exponentielle est continue au point 0, nous pouvons affirmer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp\left(-\frac{1}{2x+1}\right) = 1$ et qu'ainsi la fonction

$$x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{2x+1}\right)$$

admet un minorant strictement positif sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$.

En posant maintenant $\frac{x}{2} = u$, on montre que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} = +\infty$.

Conclusion. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, et la branche correspondante de la courbe représentative de la fonction f est une branche parabolique de direction (OJ).

Remarque

Les limites du type $\frac{(e^x)^\beta}{x^\alpha}$, $((\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*)$, seront traitées de manière analogue car :

$$\frac{(e^x)^\beta}{x^\alpha} = \frac{e^{x\beta}}{x^\alpha}.$$

Exercice Étudier les fonctions numériques suivantes :

$$x \longmapsto e^{\sqrt{x}};$$

$$x \longmapsto \frac{e^x}{x^2};$$

$$x \longmapsto \frac{e^{x+2}}{x^2-1};$$

$$x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{e^x}}{x^4};$$

$$x \longmapsto \exp\left(\frac{x^2+1}{2x-1}\right).$$

c) **Limites d'expressions du type $|x|^\alpha e^x$ lorsque x tend vers $-\infty$**

Ces limites pourront se ramener aux précédentes en posant $u = -x$. Il est aussi possible d'effectuer le changement de variable $x = \alpha u$ pour obtenir une limite de la forme $|ue^u|^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{Q}_+^*)$, lorsque u tend vers $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

Exemple

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x.$$

La fonction $[x \longmapsto x^2 e^x]$ est définie sur $\mathbb{R}$.
On effectue le changement de variable $x = 2u$; alors $x^2 e^x = 4(ue^u)^2$; lorsque x tend vers $-\infty$, u tend vers $-\infty$ et comme : $\lim_{u \to -\infty} ue^u = 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim_{u \to -\infty} 4(ue^u)^2;$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = 0.}$$

Les limites d'expressions du type $(x^\alpha (e^x)^\beta)$, $((\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q}_+^*)$, seront traitées de manière analogue car :

$$(x^\alpha (e^x)^\beta) = x^\alpha e^{x\beta}.$$

Autre exemple

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 1) e^{x+2}.$$

La fonction $[f : x \longmapsto (x^3 - 1) e^{x+2}]$, est définie sur $\mathbb{R}$.

On écrira par exemple :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x+2)^3} \times (x+2)^3 e^{x+2}.$$

Pour trouver $\lim_{x \to -\infty} (x+2)^3 e^{x+2}$, on effectuera le changement de variable $X = x + 2$, puis $u = \frac{X}{3}$ pour conclure enfin : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

d) **Limites d'expressions du type $\frac{e^x}{(\ln x)^\alpha}$, $(\alpha \in \mathbb{Q}_+^*)$, lorsque x tend vers $+\infty$**

Nous savons comparer les croissances quand x tend vers $+\infty$, d'une part de e^x par rapport à x, d'autre part de x par rapport à $\ln x$; le procédé consiste pour ces limites, à faire apparaître des rapports du type $\frac{e^x}{x}$ et $\frac{x}{\ln x}$.

• Précisons pour commencer $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\ln x}$.

La fonction $\left[x \longmapsto \frac{e^x}{\ln x}\right]$, est définie en tout point de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \frac{e^x}{\ln x} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\ln x}.$$

Scanné avec CamScanner

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$.

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}=+\infty.}$

• Recherche de : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(\ln x)^3}$.

Nous utiliserons des procédés analogues à ceux rencontrés aux paragraphes *b* et *c*, par exemple :

$$\forall x\in]1,+\infty[\quad \frac{e^x}{(\ln x)^3}=\frac{e^x}{x^3}\times\left(\frac{x}{\ln x}\right)^3.$$

Nous avons vu que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$, et que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x}=+\infty$, d'où la conclusion $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{(\ln x)^3}=+\infty$.

Autre exemple

Soit à déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2-3x+2}}{(\ln x)^3}$.

La fonction $\left[f : x\longmapsto\dfrac{e^{x^2-3x+2}}{(\ln x)^3}\right]$ est définie en tout point de $\mathbb{R}_+^*-\{1\}$.

$$\forall x\in]2,+\infty[\quad f(x)=\frac{e^{x^2-3x+2}}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2-3x+2}{(\ln x)^3}$$
$$=\frac{e^{x^2-3x+2}}{x^2-3x+2}\times\frac{x^2}{(\ln x)^3}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$$

$\dfrac{e^{x^2-3x+2}}{x^2-3x+2}$ est du type $\dfrac{e^u}{u}$ avec u tendant vers $+\infty$;

en posant $x^2=X^3$, nous pouvons montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{(\ln x)^3}=+\infty$ donc :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

3) Primitives faisant intervenir la fonction exponentielle népérienne

De l'étude de la fonction exponentielle népérienne, nous pouvons déduire que :

— une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $[x\longmapsto e^x]$, est la fonction $[x\longmapsto e^x]$.

— une primitive sur l'intervalle I ouvert où la fonction u est dérivable, d'une fonction du type $[x\longmapsto u'(x)e^{u(x)}]$, est la fonction

$$[x\longmapsto e^{u(x)}].$$

Scanné avec CamScanner

Exercices

1) Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé.

$x \longmapsto e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$;

$x \longmapsto \sin(2x) \times e^{\cos^2 x}$ sur $\mathbb{R}$;

$x \longmapsto (x^2+1)e^{x^3+3x+1}$ sur $\mathbb{R}$;

$x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} \times e^{\tan x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{1}{1+e^x} \qquad g(x)=\frac{e^x}{1+e^x}.$$

Déterminer une primitive de g et de $(f+g)$ sur $\mathbb{R}$; en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

4) Les fonctions du type : $x \longmapsto a^x$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

a) Définition et propriétés

Comme nous l'avons vu en introduction au paragraphe *I*, l'un des buts de ce chapitre est de définir a^x pour x élément de $\mathbb{R}$.
Soit a un nombre réel strictement positif et r un nombre rationnel quelconque

$$\ln a^r = r \ln a.$$

La fonction exp étant bijective sur $\mathbb{R}$,

$$\exp(\ln a^r) = \exp(r \ln a)$$

soit

$$a^r = e^{r \ln a}.$$

C'est-à-dire que la fonction $[r \longmapsto a^r]$, coïncide sur $\mathbb{Q}$ avec la fonction $[x \longmapsto e^{x \ln a}]$. Or cette dernière est définie sur $\mathbb{R}$ et nous permet ainsi de définir a^x pour x réel par :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = e^{x \ln a}.$$

Pour justifier cette définition, vérifions que les nombres réels ainsi définis ont bien les propriétés déjà connues des puissances.

On remarquera que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad a^x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$a^0 = e^{0 \ln a} = 1$$
$$a^1 = e^{1 \ln a} = a.$$

Soit x et y deux nombres réels quelconques :

$$\begin{aligned} a^x \times a^y &= e^{x \ln a} \times e^{x \ln a} \\ &= e^{(x+y)\ln a} \\ &= a^{x+y}. \end{aligned}$$

De cette propriété, nous déduisons : $\forall x \in \mathbb{R} \quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= e^{y \ln(a^x)} \\ &= e^{y \ln(e^{x \ln a})} \\ &= e^{y(x \ln a)} \\ &= a^{xy}. \end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

En particulier $(e^x)^y$ a maintenant un sens lorsque x et y sont des nombres réels, et vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (e^x)^y = e^{xy}.$$

Soit a et b des nombres réels quelconques strictement positifs et x un nombre réel quelconque;

$$\begin{aligned}(ab)^x &= e^{x \ln(ab)} \\ &= e^{x \ln a + x \ln b} \\ &= e^{x \ln a} \times e^{x \ln b} \\ &= a^x \times b^x.\end{aligned}$$

De cette dernière propriété, nous déduisons :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

b) **Étude de la fonction $x \longmapsto a^x$**

Soit a un nombre réel quelconque strictement positif et f_a l'application définie par :

$$\begin{aligned}f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto a^x.\end{aligned}$$

L'application f_a est appelée **exponentielle de base *a*.**

Un cas particulier

Lorsque a égale 1, f_1 est la fonction particulière constante égale à 1, en effet :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad 1^x &= e^{x \ln 1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ce cas simple sera éliminé de la suite de l'étude.

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

Utilisons la définition : $f_a(x) = e^{x \ln a}$.
Il est clair que le signe de $\ln a$ intervient, d'où les deux cas suivants;

— *Premier cas :* $0 < a < 1$

Dans ce cas $\ln a$ est un nombre réel strictement négatif.
Posons $u = x \ln a$ alors $e^{x \ln a} = e^u$.

Quand x tend vers $-\infty$, u tend vers $+\infty$ et comme : $\lim\limits_{u \to +\infty} e^u = +\infty$,

alors $$\lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty.$$

Quand x tend vers $+\infty$, u tend vers $-\infty$ et comme : $\lim\limits_{u \to -\infty} e^u = 0$,

alors $$\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = 0.$$

Donc : $$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Scanné avec CamScanner

— *Deuxième cas : $a>1$*

On montre de façon analogue que :

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty.$$

— *Continuité et dérivabilité des fonctions f_a sur $\mathbb{R}$*

La fonction $[x \longmapsto x \ln a]$ est pour tout a élément de $\mathbb{R}_+^*$, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}$; la fonction $[u \longmapsto e^u]$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc compte-tenu des théorèmes sur la continuité et la dérivabilité des fonctions composées, nous pouvons affirmer que les fonctions f_a sont, pour tout nombre réel a strictement positif donné, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus :
$$\forall x\in\mathbb{R}\ (a^x)'=(e^{x\ln a})'$$
$$=(\ln a)\times a^x.$$

Nous pouvons donc établir les tableaux de variation suivants :

$0<a<1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(a^x)'$		$-$	
(a^x)	$+\infty$	↘	0

$a>1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(a^x)'$		$+$	
(a^x)	0	↗	$+\infty$

Étude des branches infinies

Soit $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de la fonction f_a.

— *Premier cas : $0<a<1$*

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=0$;

dans ce cas la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la branche correspondante de la courbe $(\mathcal{C}_a)$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=+\infty$;

pour déterminer la nature de la branche infinie correspondante recherchons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

$$\forall x\in]-\infty, 0[\quad \frac{a^x}{x}=\frac{e^{x\ln a}}{x}$$
$$=\frac{e^{x\ln a}}{x\ln a}\times\ln a$$

d'où en posant $u=x\ln a$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{a^x}{x}=\lim_{u\to-\infty}\left(\ln a\times\frac{e^u}{u}\right)=-\infty.$$

Scanné avec CamScanner

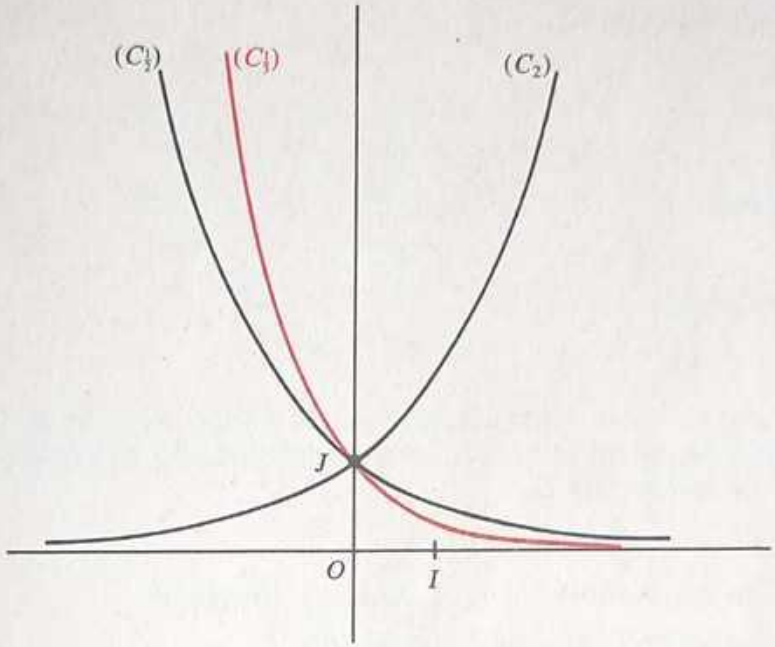
La branche correspondante de $(\mathcal{C}_a)$, présente donc une branche parabolique de direction (OJ).

— *Deuxième cas :* $a > 1$

On montre de façon analogue que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la branche de courbe décrite par le point $M(x, f_a(x))$ quand x tend vers $-\infty$.

On montre ensuite que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x} = +\infty$, ce qui signifie que la branche infinie décrite par ce même point M quand x tend vers $+\infty$ est de nature parabolique de direction (OJ).

Nous pouvons donc réaliser les représentations graphiques suivantes selon les valeurs de a.



Pour construire ces courbes, on n'oubliera pas que pour les valeurs entières de x, a^x est ce que nous connaissons depuis la classe de Cinquième; par exemple la fonction $[x \longmapsto 2^x]$, donne pour image de 3, la valeur 2^3, c'est-à-dire 8.

Remarque 1

Soit a un nombre réel quelconque strictement positif et distinct de 1. Soit f et g les applications définies par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x \qquad x \longmapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = a^{-x}$$
$$= g(x)$$

de même, $$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = f(x).$$

Ceci signifie que les représentations graphiques de f et g s'échangent dans une symétrie d'axe (OJ).

Scanné avec CamScanner

Remarque 2. Comparaison de a^x et de b^x

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et distincts. Comparons a^x et b^x pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

— *1er cas* : $0<a<1<b$

Une étude rapide des représentations graphiques des deux fonctions $[x \longmapsto a^x]$ et $[x \longmapsto b^x]$ dans ce cas, nous permet d'affirmer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad b^x < a^x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad a^x < b^x.$$

— *2e cas* : $0<a<b<1$ ou $0<1<a<b$

Les fonctions ln et exp étant strictement croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs,

$$a<b \iff \ln a < \ln b$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x \ln a < x \ln b$

et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad e^{x \ln a} < e^{x \ln b}$

de même $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad x \ln a > x \ln b$

et $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad e^{x \ln a} > e^{x \ln b}$.

Conclusion. $\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad b^x < a^x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad a^x < b^x$.

Remarque 3. La suite géométrique de raison a et de premier terme 1 est, par construction dans le cas où a est un nombre réel strictement positif, la restriction à $\mathbb{N}$ de la fonction f_a.

On retrouve ainsi facilement que :

— si a est supérieur à 1, la suite est divergente;

— si a égale 1, la suite est constante;

— si a est élément de $]0; 1[$, la suite est convergente vers 0.

On peut remarquer que la propriété fondamentale d'une suite géométrique (u) de raison a et de premier terme u_0 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n$$

peut aussi s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = (a-1)\, u_n.$$

Cette propriété sert dans de nombreux exercices et est aussi vérifiée par les fonctions f_a $(a \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x+1) - f_a(x) = (a-1) f_a(x).$$

c) **Applications**

• *Étude de la fonction $f : x \longmapsto x^x$*

C'est une fonction du type $\left[x \longmapsto u(x)^{v(x)}\right]$, elle est définie pour tout x tel que $v(x)$ est défini et $u(x)$ est strictement positif.

Ainsi : $$D_f =]0, +\infty[.$$

Notons que les valeurs prises par la fonction sont nécessairement positives.

Scanné avec CamScanner

L'étude de cette fonction se fera en utilisant l'expression suivante de $f(x)$:

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad x^x = e^{x \ln x}$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ et comme la fonction exp est continue au point 0, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^{x \ln x} = 1$.

Donc

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^x = 1.$$

Ceci permet en particulier de définir le prolongement par continuité g de la fonction f, par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[\quad g(x) = x^x \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Étude de la dérivabilité de g à droite en 0

$$\forall x \in]0; 1[\quad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x^x - 1}{x}$$

$$= \frac{e^{x \ln x} - 1}{x}$$

$$= \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \times \ln x.$$

Posons $u = x \ln x$, on sait que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$ et que $\lim\limits_{u \to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, de plus

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$; donc :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\infty.$$

Le prolongement continu ainsi défini n'est pas dérivable à droite en 0, mais la courbe $(\mathcal{C}_g)$ admet au point $J(0; 1)$, une demi-tangente à droite portée par la droite des ordonnées. Ce n'est pas le cas de $(\mathcal{C}_f)$ puisque f n'est pas définie au point 0, mais cette remarque nous permet de connaître de façon plus précise l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage du point $J(0; 1)$.

— *Calcul de la dérivée et tableau de variation*

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = (1 + \ln x)x^x.$$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 1	↘	$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$	↗	$+\infty$

Scanné avec CamScanner

— *Étude de la branche infinie*

On sait que :

$$x > e \iff x^x > e^x$$

donc :

$$\forall x \in]e, +\infty[\quad f(x) > e^x$$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ alors

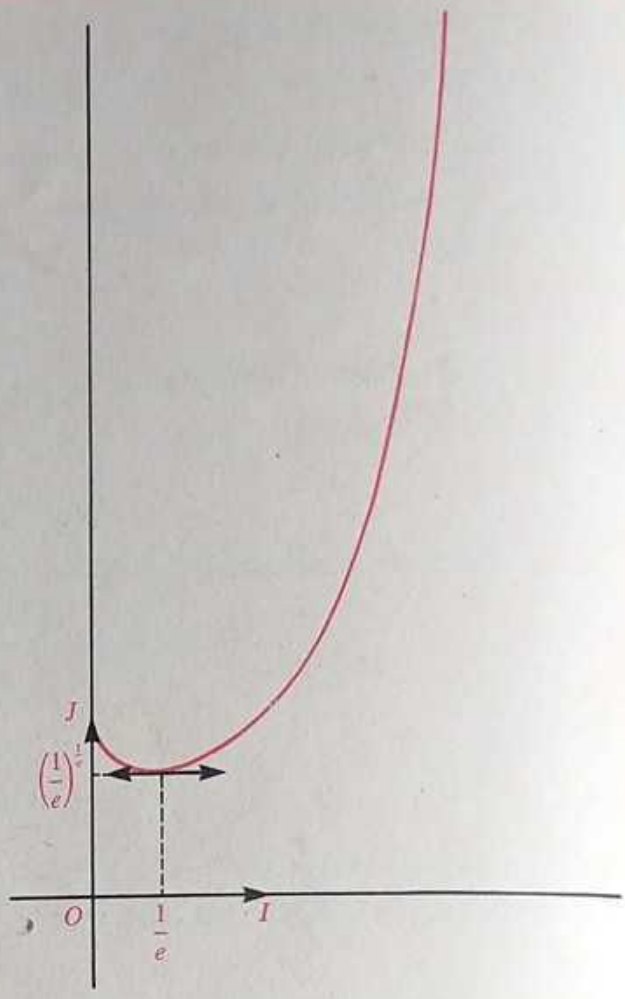
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^x = +\infty$.

$$\forall x \in]e, +\infty[\quad \frac{f(x)}{x} = x^{x-1}$$

$$\forall x \in]e, +\infty[\quad x^{x-1} > e^{x-1}$$

ceci montre donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, et qu'ainsi la branche correspondante de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est parabolique dans la direction (OJ).

Le point de coordonnées (0; 1) est un point d'arrêt de la courbe.



• *Recherche de* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

La fonction : $\left[x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$, est définie en tout point de $\mathbb{R}_+^*$.

Or $$\forall x \in]0, +\infty[\quad \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Posons $\frac{1}{x} = u$; alors $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\frac{\ln(1+u)}{u}}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, u tend vers 0; or $\lim\limits_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, et comme la fonction exp est continue au point 1 :

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{u \to 0} e^{\frac{\ln(1+u)}{u}}$$

donc $$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Nous voyons que si une fonction se présente sous la forme $\left[x \longmapsto u(x)^{v(x)}\right]$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 1$, bien que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1^x = 1$, la limite en $+\infty$ de la fonction considérée n'est pas nécessairement égale à 1.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2^x}; \quad \lim_{x \to -\infty} 3^x x^2; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x x^3; \quad \lim_{x \to +\infty} 2^x (\ln x)^2.$$

2) Étudier la fonction f définie par : $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Résoudre les équations suivantes :

$x \in \mathbb{R}$, $2e^{2x+1} + e^{x+1} = e^{1+\ln 2}$;

$x \in \mathbb{R}$, $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0$;

$x \in \mathbb{R}$, $e^{x} - 3{,}75e^{-x} - 1{,}75 = 0$;

$x \in \mathbb{R}$, $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1$.

2 1) Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 - e^x$.

a) Démontrer que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduire du signe de $f''(x)$ les variations puis le signe de $f'(x)$.

c) Déterminer les variations de f et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x^2 < e^x.$$

Retrouver ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

2) Soit n un nombre entier naturel quelconque; on désigne par f_n la fonction :

$$x \longmapsto \sqrt[n+1]{e^x} - x.$$

a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner ses variations.

b) Déduire du tableau de variation de f_n qu'il existe un nombre réel strictement positif a tel que :

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad f_n(x) > 0.$$

c) Démontrer que

$$\forall x \in]a, +\infty[\quad e^x > x^{n+1},$$

et justifier ainsi que pour tout nombre entier naturel n,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

3 Soit la suite (u) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad u_n = \sqrt[n]{n}.$$

a) Démontrer que cette suite est bornée. Quel est le plus grand terme de cette suite?

b) Démontrer que (u) est convergente vers une limite que l'on précisera.

4 Soit (u) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (3n^2 + n)e^{-n}.$$

Montrer que (u) est une suite décroissante à partir d'un certain rang, et bornée. En déduire qu'elle est convergente vers une limite que l'on précisera.

5 Soit la suite (u) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{\exp(\sqrt{n^2+2})}{\exp(n)}.$$

1) Démontrer que : $\forall x \in [0; 1] \quad 1 \leqslant e^x \leqslant 1 + ex$.

2) Soit (v) la suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{n^2+2} = n + v_n.$$

Montrer que (v) est bornée et convergente vers une limite que l'on précisera.

3) Déterminer un nombre entier naturel n_0 vérifiant :

$$n > n_0 \Longrightarrow 1 \leqslant u_n \leqslant 1{,}001.$$

6 Dans chacun des cas suivants, étudier les variations et tracer la courbe représentative de la fonction f définie par :

a) $f(x) = 2^{x+2}|2^x - 1|$.

b) $f(x) = 1 - |e^x - e^{3x}|$.

c) $f(x) = 3x - 3\ln|2e^x - 1|$.

d) $f(x) = e^x + x(\ln x - 1 - e)$.

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

f) $f(x) = x + 1 + 2e^{-2x}$.

g) $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\ln|2e^x - 1|$.

h) $f(x) = x^2 e^{|x-1|}$.

i) $f(x) = e^x - |x+1|$.

j) $f(x) = (x-1)e^{-x}$.

k) $f(x) = x + \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$.

7 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{3e^x + 5}{e^x + 2}$.

a) Étudier f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera, donner l'expression de $f^{-1}(x)$ et tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de f^{-1} sur le même dessin.

8 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + x - \ln|e^x - e|.$$

a) Soit D_f l'ensemble de définition de f, montrer que :

$$\begin{cases} \forall x \in D_f \quad f(x) = 1 - \ln|1 - e^{1-x}| \\ \forall x \in D_f \quad f(x) = x - \ln|e^{x-1} - 1|. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

b) Dresser le tableau des variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{e^x-e^{2x}}.$$

a) Rappeler $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$; en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{f(x)}{x}$.

La fonction f est-elle dérivable à gauche en 0?

b) Terminer l'étude de f et donner sa représentation graphique relativement à un repère orthogonal.

10 Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\ln|e^x-1|.$$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Montrer qu'il existe une fonction φ telle que :

$$\begin{cases}\forall x\in D_f \quad f(x)=x+\varphi(x)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.\end{cases}$$

c) Terminer l'étude de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ relativement à un repère orthonormé.

d) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ et tracer la représentation graphique de g^{-1} relativement au même repère.

11 On définit, pour n élément de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n par :

$$f_n : \mathbb{R}-\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto\frac{e^x}{(x+1)^n}.$$

a) Étudier la dérivabilité de f_n et déterminer la fonction dérivée f_n' en fonction de f_n et f_{n+1}.

b) Étudier les variations de f_n ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition D_f (on distinguera les cas n pair et n impair).

c) On appelle $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n, montrer que lorsque n varie, toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un même point.

d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; que peut-on en déduire pour les courbes $(\mathcal{C}_n)$?

e) Tracer $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ sur un même dessin.

12 1) Résoudre l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $e^{\frac{1}{x}}-2=0$.

2) x_0 étant la solution précédente, on désigne par R_1 l'ensemble des nombres réels positifs dont on a exclu le nombre x_0.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases}\forall x\in R_1 \quad f(x)=\dfrac{2}{e^{\frac{1}{x}}-2}\\ f(0)=0.\end{cases}$$

a) Étudier la continuité de f au point 0.

b) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ relativement à un repère orthonormé. On montrera que $(\mathcal{C}_f)$ admet une demi-tangente au point d'abscisse 0.

13 Soit g la fonction définie par :

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^* \quad g(x)=|x|^{\frac{1}{x}}\\ g(0)=0.\end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g au point 0.

b) Déterminer les variations de g ainsi que l'équation de la tangente aux points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_g)$ représentative de g et de la droite d'équation $y=1$.

c) Tracer $(\mathcal{C}_g)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.

14 Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{cases}\text{pour } x\neq 0, \quad f(x)=\dfrac{x-1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\\ f(0)=0.\end{cases}$$

a) Donner l'ensemble de définition D_f de f et étudier les limites aux bornes des intervalles composant D_f.

Étudier le problème de la continuité de f au point 0.

b) Déterminer les variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

15 1) Soit φ l'application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}^* \quad \varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1.$$

Étudier les variations de φ dans $\mathbb{R}^*$; en déduire le signe de $\varphi(x)$ dans $\mathbb{R}^*$.

2) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}^* \quad f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\\ f(0)=0.\end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.

Scanné avec CamScanner

b) Donner les variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ relativement à un repère orthonormé. On déterminera avec précision les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$; (unité graphique : 5 centimètres).

16 1) Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 0$. On appellera E l'ensemble solution.

2) Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} - E \quad f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) \\ \forall x \in E \quad f(x) = 0. \end{cases}$$

Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative relativement à un repère orthonormé. On montrera en particulier que la courbe admet au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ une demi-tangente que l'on précisera.

17 Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x).$$

1) *a*) Étudier les variations de φ.

b) Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera.

c) Soit $(\mathcal{C}_\varphi)$ la courbe représentative de φ, déterminer ses branches infinies et tracer $(\mathcal{C}_\varphi)$ relativement à un repère orthonormé.

2) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x).$$

Étudier les variations de g et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$.

18 Soit g l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[\quad g(x) = x^2 \ln|x| \\ \forall x \in [0, +\infty[\quad g(x) = \ln(e^x - x). \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}$.

2) Étudier les variations de g et tracer la courbe $(\mathcal{C}_g)$ relativement à un repère orthonormé.

3) Vérifier que g n'admet pas de dérivée seconde au point 0.

19 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x + 2x \sin x).$$

a) Étudier les variations de cette fonction sur $[0, \pi]$ et tracer sa courbe représentative correspondante $(\mathcal{C})$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (Unité graphique : sur (OI), π est représenté par 12 centimètres; sur (OJ), 1 est représenté par 4 centimètres).

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution x_0 dans $[0, \pi]$, et vérifier que x_0 est élément de $\left]\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right[$.

c) Calculer pour tout élément k de $\mathbb{Z}$, $f(2k\pi)$, $f(\pi + 2k\pi)$, $f(2\pi + 2k\pi)$. Montrer que sur l'intervalle $]2k\pi, 2(k+1)\pi[$, f admet exactement un maximum et un minimum relatifs qui sont de signes contraires.
En déduire que pour tout k élément de $\mathbb{Z}$, l'équation $f(x) = 0$ admet sur l'intervalle $]k\pi, k\pi + \pi[$ une unique solution.

20 *A*) *a*) Étudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Tracer sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

b) Soit (E) l'équation définie par :

$$(E) : \quad x \in \mathbb{R}, \quad e^{ax} - x = 0.$$

Déduire de l'étude précédente le nombre de solutions de l'équation (E), suivant les valeurs du paramètre réel a.

B) On considère la suite (u) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{au_n}. \end{cases}$$

a) Démontrer que si la suite (u) est convergente, sa limite ℓ est solution de l'équation (E).

b) On suppose a positif.

— Montrer que la suite (u) est croissante.

— On suppose que a vérifie : $a > \dfrac{1}{e}$, que peut-on dire de la suite (u)?

— On suppose que a vérifie : $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{e}$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant e$. Que peut-on alors dire de la suite (u)?

21 A tout nombre réel λ non nul, on associe la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \frac{e^{2x} - \lambda}{e^{2x} + \lambda}.$$

1) Étudier la fonction f_1 et construire sa courbe représentative $(\mathcal{C}_1)$ relativement à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Scanné avec CamScanner

2) Soit x_0 un nombre réel quelconque et M le point de $(\mathcal{C}_1)$ d'abscisse x_0. On appelle m le projeté orthogonal de M sur la droite (D) d'équation $y = 1$, et μ le projeté orthogonal de M sur la droite (Δ) d'équation $y = -1$.

La tangente en M à $(\mathcal{C}_1)$ coupe (D) en P et (Δ) en Q.

Calculer en fonction de x_0 les deux nombres réels $\overline{mP}$ et $\overline{\mu Q}$. (On prendra pour sens positif sur (D) et (Δ) celui de la droite des abscisses.)

En déduire que, pour tout point M de $(\mathcal{C}_1)$, on a la relation :

$$\frac{1}{\overline{mP}} - \frac{1}{\overline{\mu Q}} = 2.$$

3) Le nombre réel λ étant strictement positif, démontrer que la courbe $(\mathcal{C}_\lambda)$ représentative de la fonction f_λ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ se déduit de $(\mathcal{C}_1)$ par une translation dont le vecteur est colinéaire à $\vec{i}$. (On pourra poser $\lambda = e^{2a}$.)

Scanné avec CamScanner

Problèmes

22 Soit (u) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}. \end{cases}$$

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1) Expliciter les variations de f et déterminer l'image de $[0; 1]$ par f.

2) *a*) Démontrer que :

$$\forall x \in [0; 1] \quad \frac{1}{4} \leqslant f'(x) < \frac{2}{3}.$$

b) En déduire un encadrement de f sur $[0; 1]$ par deux fonctions affines que l'on précisera.

3) *a*) Montrer que si u admet une limite ℓ alors $f(\ell) = \ell$; donner une valeur approchée de ℓ à 10^{-1} près.

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \leqslant \frac{2}{3};$$

en déduire que (u) est convergente vers ℓ et déterminer le plus petit nombre entier naturel n_0 tel que :

$$n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}.$$

23 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x.$$

1) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}.$$

2) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentative de f avec la droite des abscisses.

3) Soit $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ les courbes représentatives respectives des fonctions

$$[x \longmapsto -e^{-x}] \text{ et } [x \longmapsto e^{-x}].$$

a) Déterminer l'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$ et montrer qu'en chacun de ces points ces deux courbes admettent une tangente commune.

b) Même question pour les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

4) Donner les variations de f dans $[0; 2\pi]$, esquisser les arcs des courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_f)$ correspondant à cet intervalle relativement à un repère orthogonal.
On prendra comme unité graphique : 20 cm sur la droite des ordonnées et 2 cm sur celle des abscisses.

24 Le nombre entier naturel n variant dans $\mathbb{N}$, on se propose d'étudier la famille de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}.$$

On pourra remarquer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}.$$

A) 1) *a*) Étudier les variations de f_n ainsi que les branches infinies de sa courbe représentative $(\mathcal{C}_n)$; (on ne tracera pas cette courbe mais on établira un tableau de variations pour chacun des cas $n = 0$; $n = 1$; $n \geqslant 2$).

b) Démontrer que lorsque n décrit $\mathbb{N}$, les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un point fixe Ω que l'on déterminera.

2) Étude des fonctions f_0 et f_1.

a) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = f_0(-x)$; que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$?
Calculer la dérivée seconde f_0'' de f_0. Pour quelle valeur x_0 a-t-on : $f''(x_0) = 0$. Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_0)$ au point d'abscisse x_0.

b) Démontrer que le point Ω est centre de symétrie de $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$.

c) Construire $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ relativement au même repère orthonormé; on prendra 4 cm comme unité graphique.

3) Étude de f_2.

a) Démontrer que f_2 admet une application réciproque notée φ dont on donnera seulement l'ensemble de définition et quelques propriétés : continuité, sens de variation et dérivabilité.

b) Soit (Γ) la courbe représentative de φ. Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_2)$ au point d'abscisse 0 et une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse $\frac{1}{2}$. Construire $(\mathcal{C}_2)$ et (Γ) relativement à un même repère (dessin distinct de celui où sont représentées $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$, même unité).

25 Un nombre entier naturel k étant donné, on désigne par f_k la fonction définie par :

$$f_k(x) = \ln(e^x - k).$$

On note D_k l'ensemble de définition de f_k.

A) 1) Quelle est la fonction correspondant à $k = 0$?

Scanné avec CamScanner

2) Étudier f_1.

3) On suppose à présent k quelconque dans $\mathbb{N}$.

a) Déterminer D_k.

b) Démontrer que pour tout k la fonction f_k est une bijection strictement croissante de D_k sur un ensemble que l'on précisera.

c) Soit f_k^{-1} la fonction réciproque de f_k, déterminer $f_k^{-1}(x)$.

4) Soit $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_1')$ les courbes représentatives de f_1 et f_1^{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_1)$ au point d'ordonnée 0 et tracer $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_1')$.

B) Un nombre entier naturel non nul p étant donné, on désigne par g_p la fonction définie par : $g_p(x) = \ln(p - e^x)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition Δ_p de g_p.

2) Montrer que g_p prend ses valeurs dans Δ_p et que :

$$\forall x \in \Delta_p \quad (g_p \circ g_p)(x) = x.$$

3) Démontrer que g_p est une bijection décroissante de Δ_p sur Δ_p.

4) On donne à p la valeur 1.

a) Étudier g_1.

b) Démontrer que la courbe (Γ_1) représentative de g_1 admet la droite (D) d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

c) Déterminer le point d'intersection de (D) et (Γ_1) et donner l'équation de la tangente à (Γ) en ce point. Tracer (Γ) sur le même dessin que celui où sont représentées $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_1')$.

26 Soit f la fonction définie sur [0, 1] par :

$$f(x) = \frac{1-x}{3} e^x.$$

On se propose d'étudier un algorithme d'approximation de la solution de l'équation :

(E) : $\quad x \in [0, 1], \quad f(x) = x.$

1) Étude de f.

a) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

b) Déterminer l'image de [0, 1] par f et démontrer que l'équation (E) admet une seule solution a qui appartient à $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

2) On considère la suite (u) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3}. \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$.

b) Démontrer que $u_1 \leqslant a$ et en déduire que :

$$|u_0 - a| \leqslant u_0 - u_1 \leqslant 2{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

c) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel p, que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad u_{2p+1} \leqslant a \leqslant u_{2p}.$$

3) Convergence de (u) vers a.

a) Démontrer que, pour tout élément x de $\left[0, \frac{1}{3}\right]$: $-0{,}16 \leqslant f'(x) \leqslant 0$; et en déduire que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad |f(x) - f(a)| \leqslant 0{,}16|x - a|.$$

b) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad |u_n - a| \leqslant (0, 16)^n |u_0 - a|;$$

et en déduire que (u) converge vers a.

c) Calculer une valeur approchée de a à 10^{-3} près, et déterminer un entier p tel que :

$$|u_p - a| \leqslant 10^{-12}$$

(on ne demande pas de calculer u_p).

(Baccalauréat 1985 - Groupe 1)

27 *I)* Soit a un paramètre réel, on considère la suite (u_a) définie par :

$$\begin{cases} u_a(0) = a \\ u_a(1) = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_a(n+2) = u_a(n+1) - \frac{1}{4} u_a(n). \end{cases}$$

La relation de récurrence définissant (u_a) sera notée (R).

1) Calculer $u_a(2)$. Déterminer la valeur a_0 de a pour laquelle les trois premiers termes de la suite (u_a) sont en progression géométrique.

2) Montrer que la suite (u_{a_0}) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3) Soit la suite (v) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = n u_{a_0}(n).$$

Donner l'expression de v_n en fonction de n, et montrer que la suite (v) vérifie la relation (R). En déduire la valeur de a pour laquelle : $(v) = (u_a)$.

4) Étudier $\lim(u_{a_0})$ et $\lim(v)$.

II) Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = (x+2)2^{-x}.$$

Scanné avec CamScanner

1) Étudier la fonction f. On démontrera que f admet un maximum pour une valeur α de la variable et on calculera des valeurs approchées de α et $f(\alpha)$.

2) Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

III) On reprend l'étude de la suite (v) définie au I).

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = f(n-1) - f(n).$$

2) Écrire les $(n+1)$ égalités :

$$v_k = f(k-1) - f(k) \quad 0 \leqslant k \leqslant n;$$

en déduire la valeur de S_n définie par :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

28 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + ae^{-|x|}$$

où a est un nombre réel strictement positif donné. On désigne par $(\mathcal{C}_a)$ la courbe représentative de cette fonction dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A) Dans cette partie $a = 1$.

1) Étudier la fonction f; on citera avec précision les théorèmes utilisés pour justifier les résultats obtenus concernant la continuité, la dérivabilité et les limites.

2) Construire la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en précisant la nature des branches infinies et la situation au point O.

3) Sur l'axe des abscisses on partage l'intervalle [0; 1] en n intervalles de même amplitude ($n \geqslant 2$); soit $\frac{i}{n}$ l'abscisse de l'un des points de la subdivision ($i \in \{0; 1; 2; \ldots; n\}$).

La droite d'équation $x = \frac{i}{n}$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point A_i et la courbe $(\mathcal{C}_1)$ au point B_i; déterminer les coordonnées du point M_i isobarycentre des points A_i et B_i pour i donné dans $\{0; 1; 2; \ldots; n\}$.

Déterminer les coordonnées (x_n, y_n) de l'isobarycentre G_n de tous les points A_i et B_i lorsque i varie dans $\{0; 1; 2; \ldots; n\}$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$; en donner une valeur approchée à 0,001 près.

B) Dans cette partie a est quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$.

1) Pour quelles valeurs de a la fonction f présente-t-elle un minimum relatif?

Déterminer et tracer l'ensemble des points des courbes $(\mathcal{C}_a)$ où la tangente est parallèle à la droite des abscisses.

2) Pour quelles valeurs de a la courbe $(\mathcal{C}_a)$ présente-t-elle un maximum relatif?

3) Tracer sur le même dessin la courbe $(\mathcal{C}_e)$.

4) Une courbe $(\mathcal{C}_a)$ étant tracée (a est donc fixé), une droite variable (Δ) parallèle à la droite d'équation $y = x$ coupe $(\mathcal{C}_a)$ éventuellement en deux points P et Q.
Déterminer lorsque ces points existent, l'abscisse du milieu I de $[PQ]$. En déduire l'ensemble des points I lorsque (Δ) varie.

29 *I*) Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = e^{-x} \ln x.$$

1) Déterminer la fonction dérivée de f et vérifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$ défini par :

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}.$$

2) Étudier les variations de la fonction g, et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique, notée α, comprise entre $\frac{3}{2}$ et 2.

2. Quel est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, \alpha[$? sur l'intervalle $]\alpha, +\infty[$?

3) Vérifier l'égalité : $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$ et déduire de l'inégalité $\frac{3}{2} < \alpha < 2$, un encadrement de $f(\alpha)$.

4) Achever l'étude de la fonction f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II) *Recherche d'une valeur approchée de* α

1) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ est équivalente à l'équation $h(x) = x$, où h est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad h(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

2) Calculer $h'(x)$ et vérifier que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad -\frac{4}{9} e^{\frac{2}{3}} \leqslant h'(x) \leqslant -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}.$$

En déduire qu'il existe un nombre réel k de $]0; 1[$ tel que :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad |h'(x)| \leqslant k.$$

3) Prouver que, pour tout couple (x, y) de nombres réels distincts compris entre $\frac{3}{2}$ et 2,

Scanné avec CamScanner

on a :

$$|h(x)-h(y)| \leqslant k \times |x-y|.$$

4) Soit (u) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = h(u_n). \end{cases}$$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

b) En appliquant au couple (u_n, α) l'inégalité du 3), prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant k|u_n-\alpha|.$$

c) En déduire par un raisonnement par récurrence, l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \leqslant k^n|u_0-\alpha|,$$

et montrer que la suite (u) est convergente vers α.

5) Montrer en utilisant les variations de h que $u_{n+1}-\alpha$ et $u_n-\alpha$ sont de signes contraires et en déduire que α est compris entre les nombres u_n et u_{n+1}.
En justifiant la méthode utilisée, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

(Baccalauréat C - Amiens 1984)

30 Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}); \quad g(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

1) *a*) Étudier la parité de f et de g.
Déterminer les fonctions dérivées de f et de g.
Que peut-on dire de f pour g et de g pour f?

b) Déterminer les variations de f puis de g, et tracer leurs courbes représentatives relativement à un repère orthonormé.

2) Calculer $g^2(x)-f^2(x)$.
Exprimer $g(a+b)$ et $f(a+b)$ en fonction de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ et $g(b)$. En déduire $g(a-b)$ et $f(a-b)$.
Ces fonctions s'appellent *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique* et sont notées respectivement sh et ch; on a donc :

$$f(x)=\text{sh } x; \quad g(x)=\text{ch } x.$$

3) On définit la fonction *tangente hyperbolique* par :

$$\text{th } x=\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}.$$

a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{th } x=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1<\text{th } x<1.$$

b) Étudier la parité puis les variations de th et démontrer que th est une application bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
Déterminer l'application réciproque th^{-1}, et tracer les représentations graphiques de th et th^{-1} relativement au même repère orthonormé.

c) Étudier la dérivabilité et calculer la fonction dérivée de la fonction th^{-1}.

d) Exprimer à l'aide de la fonction th^{-1}, les primitives de la fonction

$$\left[x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}\right]$$

sur $]-\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$.

e) Déterminer $\text{th}(a+b)$ et $\text{th}(a-b)$ en fonction de th a et th b.

31 Soit n un nombre entier naturel non nul et f la fonction définie par :

$$f(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right).$$

1) *a*) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
Comparer $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}<e.$$

b) Soit g la fonction définie par :

$$g(x)=f(x)+e^{-x}\frac{x^n}{n!}.$$

Étudier les variations de g sur $[0; 1]$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad e<1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{2}{n!}.$$

c) Soit (u) et (v) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{n!}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n=u_n+\frac{1}{n!}.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e-u_n<\frac{1}{n!} \text{ et } v_n-e<\frac{1}{n!}.$$

En déduire que :

$$\lim(u)=\lim(v)=e.$$

Scanné avec CamScanner

2) *a*) Déduire du résultat précédent que pour tout nombre entier naturel non nul n, il existe un nombre réel θ_n élément de]0; 1[tel que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1+\theta_n}{n!}.$$

b) *Le but de cette question est de montrer que e n'est pas un nombre rationnel.*

Supposons que e soit un nombre rationnel; soit p et q des nombres entiers naturels non nuls tels que :

$$e = \frac{p}{q}.$$

Utiliser la question 2) *a*) pour montrer qu'il existe un nombre réel θ_q élément de]0; 1[tel que e s'écrivent comme quotient d'un nombre réel qui n'est pas un nombre entier naturel et du nombre entier $q!$. On arrive ainsi à une contradiction. Conclure.

Scanné avec CamScanner

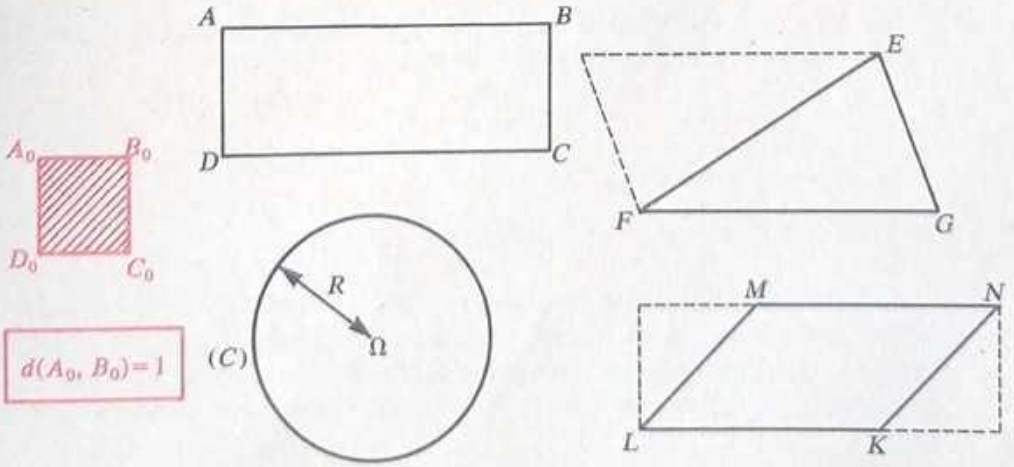
6 Aires de surfaces planes Calcul intégral

1) AIRES DE SURFACES PLANES
2) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE
3) CALCUL INTÉGRAL
4) RETOUR AU CALCUL D'AIRES; INTERPRÉTATION GRAPHIQUE D'UNE INTÉGRALE
5) FONCTIONS DE LA FORME : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$
6) VALEUR APPROCHÉE D'UNE INTÉGRALE

1 Aires de surfaces planes

1) Introduction

On a de la notion d'aire d'une surface de $\mathcal{S}$, une connaissance intuitive, déjà utilisée dans les classes antérieures. On a associé à certaines surfaces particulières un nombre réel positif dont le calcul dépend de la forme de la surface.
Par définition, la surface limitée par un carré de côté 1 (ou par abus de langage le carré de côté 1) a pour aire le nombre réel 1. Rappeler les formules permettant de calculer l'aire d'un rectangle, d'un triangle, d'un parallélogramme et d'un disque.



Scanné avec CamScanner

Afin d'étendre cette notion d'aire à d'autres parties de $\mathcal{P}$, donnons un sens plus précis à ce que nous appelons *l'aire d'une surface plane*. On adopte l'axiome suivant :
il existe une famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de $\mathcal{P}$ et une application σ de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{R}_+$, satisfaisant les propriétés suivantes :

1) $\forall \mathcal{D}_1 \in \mathcal{F} \quad \forall \mathcal{D}_2 \in \mathcal{F} \quad [\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \implies \sigma(\mathcal{D}_1) \leqslant \sigma(\mathcal{D}_2)]$.

2) Si $\mathcal{D}_2$ est l'image de $\mathcal{D}_1$ par une isométrie alors :

$$\sigma(\mathcal{D}_1) = \sigma(\mathcal{D}_2).$$

3) Tout segment de droite $[AB]$ est élément de $\mathcal{F}$ et vérifie :

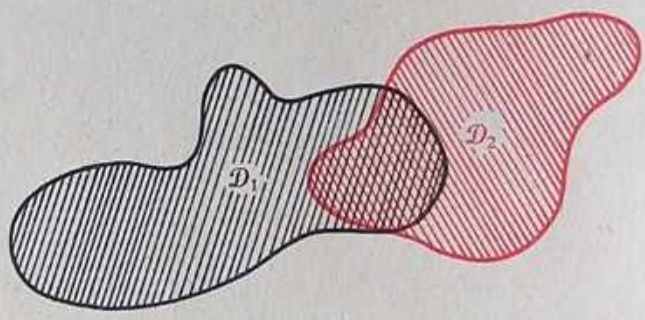
$$\sigma([AB]) = 0.$$

4) Si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont des éléments disjoints de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ est un élément de $\mathcal{F}$ et vérifie :

$$\sigma(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \sigma(\mathcal{D}_1) + \sigma(\mathcal{D}_2).$$

Plus généralement, si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux éléments de $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ sont éléments de $\mathcal{F}$ et vérifient :

$$\sigma(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \sigma(\mathcal{D}_1) + \sigma(\mathcal{D}_2) - \sigma(\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2).$$



On dit alors que pour tout élément $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}$, *le nombre réel positif* $\sigma(\mathcal{D})$ *est l'aire de* $\mathcal{D}$.

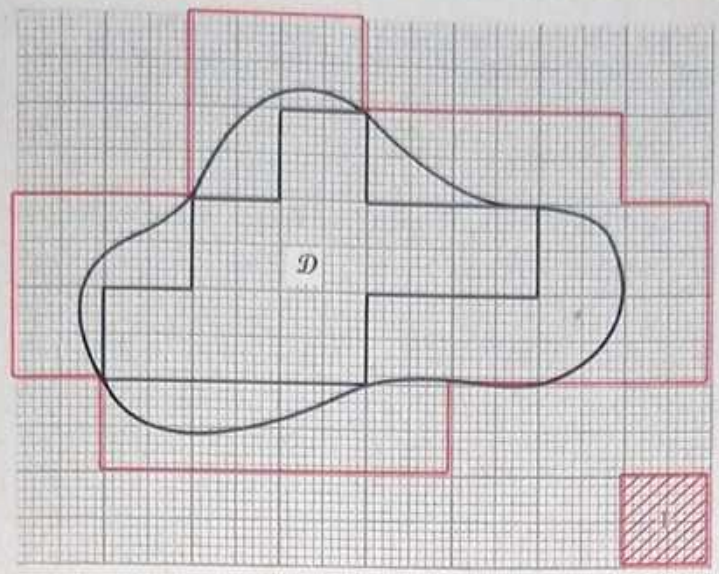
Remarque 1. $\mathcal{F}$ ne contient pas toutes les parties du plan $\mathcal{P}$ (par exemple un demi-plan n'appartient pas à $\mathcal{F}$). Les éléments de $\mathcal{F}$ sont souvent appelés surfaces planes.

Remarque 2. La notion d'aire peut être étendue à certaines parties de l'espace; par exemple l'aire d'une sphère de rayon r est $4\pi r^2$.

2) Recherche de l'aire d'une surface plane

Considérons maintenant une surface plus « compliquée », comme celle $\mathcal{D}$ de la figure ci-dessous, non décomposable en rectangles, triangles, parallélogrammes et disques. Un quadrillage permet d'obtenir un encadrement de l'aire de $\mathcal{D}$ en comptant les carrés, intérieurs à $\mathcal{D}$ d'une part, puis ceux rencontrant $\mathcal{D}$ d'autre part.

Scanné avec CamScanner



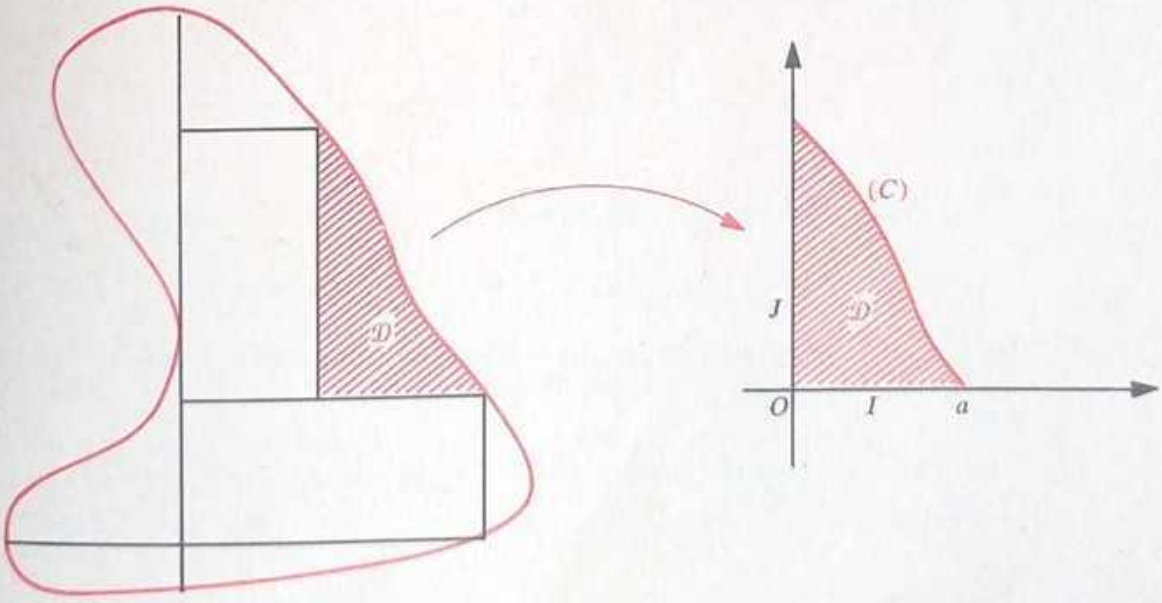
On obtient sur le dessin ci-dessus :

— avec des carrés de côté 1 : $8 < \mathcal{A} < 27$

— avec des carrés de côté $\frac{1}{2}$: $45\frac{1}{4} < \mathcal{A} < 91\frac{1}{4}$

soit $11{,}25 < \mathcal{A} < 22{,}75$ et ainsi de suite.
Cette méthode empirique nous fournit l'idée, pour une meilleure précision du calcul de l'aire d'une surface donnée, d'en effectuer des encadrements par des réunions de surfaces élémentaires l'approchant de plus en plus près.

• Notons que l'évaluation de l'aire d'une surface plane peut souvent se ramener à la recherche de l'aire d'une surface $\mathcal{D}$ du type ci-dessous :



Scanné avec CamScanner

Cette surface peut être caractérisée à l'aide de la fonction f dont la représentation graphique dans (O, I, J) est (C). Ainsi, le point $M(x, y)$ est élément de $\mathcal{D}$, si et seulement si :

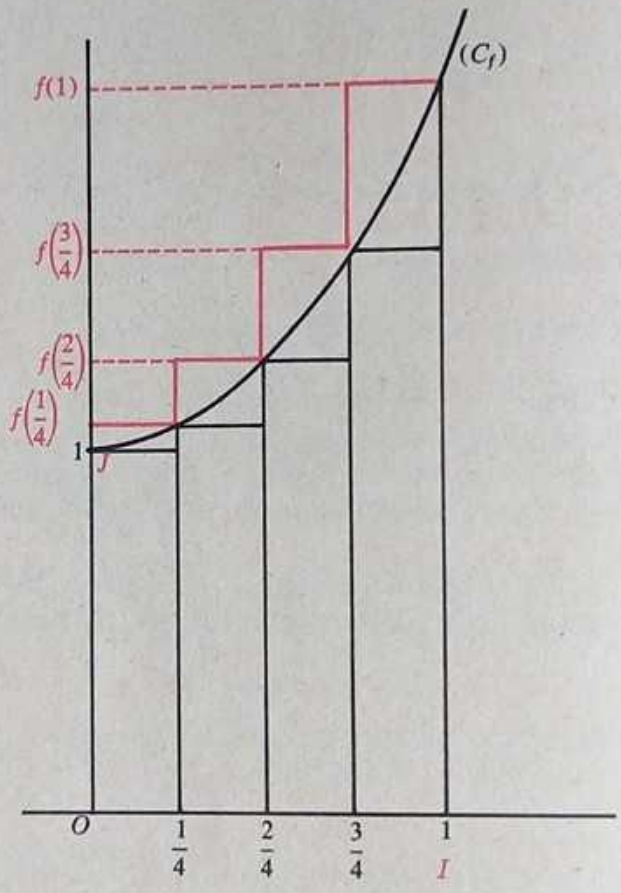
$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

d'où l'intérêt de chercher à déterminer l'aire de surfaces de ce type.

Exemple

Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 1$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie $\mathcal{D}$ du plan, ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$



Considérer la figure ci-dessus et justifier l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] \leqslant \mathcal{A} \leqslant \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1)\right].$$

De façon analogue, lorsque l'on découpe l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles consécutifs de même amplitude, on met en évidence deux suites (u) et (v) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$v_n = \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f(1)\right]$$

Scanné avec CamScanner

et vérifiant : $u_n \leqslant \mathcal{A} \leqslant v_n$.

En utilisant l'égalité : $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2=\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$, montrer que :

$$u_n=\frac{8n^2-3n+1}{6n^2} \quad \text{et} \quad v_n=u_n+\frac{1}{n}.$$

En déduire que les deux suites (u) et (v) sont adjacentes et que :

$$\lim(u)=\lim(v)=\frac{4}{3}.$$

L'appartenance de la partie $\mathcal{D}$ du plan à la famille $\mathcal{F}$ est corroborée par l'existence des suites adjacentes (u) et (v); les propriétés 1 et 4 nous permettent alors d'affirmer que :

$$\mathcal{A}=\frac{4}{3}.$$

Remarque. Cette méthode a été utilisée par les Grecs pour déterminer l'aire de certaines surfaces planes. L'exemple précédent a été traité par ARCHIMÈDE (287-212 avant J.-C.) de cette façon.
A partir du XVII^e siècle, des mathématiciens ont développé un nouvel outil, plus puissant, permettant le calcul de l'aire d'une surface plane : *l'intégration*. Le reste de ce chapitre est consacré à l'étude élémentaire de cette théorie.

2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

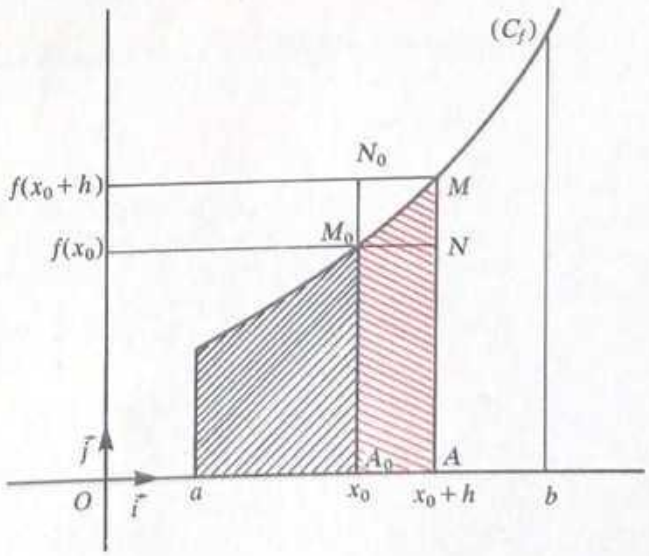
1) Introduction

Considérons une fonction f continue, croissante et positive sur un intervalle ouvert I et $[a, b]$ un intervalle inclus dans I. Soit (C_f) sa représentation graphique dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Recherchons l'aire de la surface $\mathcal{D}$ définie par : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$

Pour ce faire, introduisons l'application $\mathcal{A}$, qui à tout x_0 élément de $[a, b]$ associe l'aire de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant x_0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Sur la figure ci-contre, on a hachuré en noir, pour une valeur x_0 de $[a, b]$ la partie du plan d'aire $\mathcal{A}(x_0)$.



Scanné avec CamScanner

Étudions les variations de $\mathcal{A}$.

• Choisissons un nombre réel h, strictement positif tel que x_0+h soit élément de $[a, b]$. En comparant les aires des rectangles A_0M_0NA et A_0N_0MA, à la différence $\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)$ (qui est hachurée en rouge sur la figure), on obtient :

$$hf(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$$

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

f étant continue en x_0, nous en déduisons, pour x_0 élément de $[a, b[$, que :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

• Vérifier de même que, pour x_0 élément de $]a, b]$ on a :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0).$$

D'où $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b et son nombre dérivé en tout point x_0 de l'intervalle $[a, b]$ est $f(x_0)$.
Comme de plus $\mathcal{A}(a)=0$, on en déduit que $\mathcal{A}$ est la primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule en a.
Cette étude montre que le calcul d'une aire d'une surface plane est liée à la recherche des primitives.

Exercice

1) Quelle est la primitive de : $x \longmapsto x^2+1$, sur $[0; 1]$ qui s'annule en 0?

2) Retrouver l'aire calculée dans l'exemple du paragraphe précédent.

2) Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et F une primitive de f sur I; nous savons que toute primitive G de f sur I est de la forme $F+k$ où k est une fonction constante. Montrer que, pour tout couple (a, b) de I^2 on a :

$$G(b)-G(a)=F(b)-F(a).$$

Ainsi, cette différence est indépendante de la primitive de f choisie.

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et F une primitive de f sur I. Quel que soit le couple (a, b) de I^2, le nombre réel $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F de f; on l'appelle **l'intégrale de a à b de la fonction f** et on le note $\int_a^b f(x)\,dx$; on écrit alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Notation $F(b)-F(a)$ est souvent noté $\left[F(x)\right]_a^b$; cette notation est particulièrement

Scanné avec CamScanner

intéressante lorsque l'on ne donne pas de nom à la primitive de la fonction considérée, comme par exemple pour :

$$\int_0^1 (x^2+2x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right)-(0)=\frac{4}{3}.$$

Remarque 1. Le nombre réel $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ » ou aussi pour des raisons historiques « somme de a à b de $f(x)\,dx$ ».

Remarque 2. La lettre x intervenant dans l'écriture de l'intégrale représente une variable. Elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre à condition que celle-ci n'introduise pas de confusion. On dit que *la variable x est muette.* Ainsi on a par exemple :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque 3. Le groupement dx, dt ou du, fait partie de la notation de l'intégrale et ne doit pas être omis. Son utilité pratique apparaîtra à propos du changement de variable affine.

Exercice Calculer les nombres réels suivants :

$$\int_1^2 (t^2+3t-2)\,dt; \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx; \quad \int_1^{-2} e^{-x}\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x\,dx.$$

Conséquences de la définition

1) Si f est continue sur l'intervalle ouvert I, alors pour tout couple de nombres réels (a, b) de I^2, $\int_a^b f(x)\,dx$ existe; on dit que f **est intégrable sur** I. La notion d'intégrabilité, limitée ici au cas des fonctions continues sur un intervalle, peut être étendue à d'autres fonctions; un exemple en sera donné par la suite.

2) La notion d'intégrale a été définie à partir de la notion de primitive; inversement, a étant un point de I, considérons la fonction G définie sur I par :

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Par définition de l'intégrale : $G(x)=F(x)-F(a)$, où F est une primitive de f sur I. Donc G est une primitive f sur I; plus précisément c'est *la primitive de f qui s'annule en a.*

Exercices

1) Pourquoi une intégrale telle que : $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$ n'a-t-elle aucun sens?

2) Définir la fonction ln à partir d'une intégrale.

3) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto e^x-2$; définir F à l'aide d'une intégrale.

3) A partir de la définition, on montrera aisément que :

$$\forall (a, b)\in I^2 \quad \int_a^a f(x)\,dx=0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$$

Scanné avec CamScanner

3) Propriétés de l'intégrale

a) Linéarité

f et g étant deux fonctions continues sur I, nous savons qu'il en est de même pour les fonctions $f+g$ et αf, où α est un nombre réel quelconque. D'autre part, si F et G sont des primitives respectives de f et g alors $F+G$ et αF sont des primitives respectives de $f+g$ et αf. On en déduit alors les propriétés suivantes.

Propriétés de linéarité de l'intégrale

$$\forall (a, b) \in I^2 \quad \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Égalité de Chasles

f étant une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et F une de ses primitives, on a, quels que soient les nombres réels a, b et c de I :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\\ &= \int_a^c f(x)\,dx.\end{aligned}$$

On en déduit la formule suivante dite **égalité de Chasles** sur les intégrales :

Pour toute fonction f, continue sur un intervalle ouvert I, on a :

$$\forall (a, b, c) \in I^3 \quad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Exemple d'utilisation

Après avoir vérifié que la fonction f définie par : $f(x) = x + |x-1|$ est continue sur $\mathbb{R}$, calculer :

$$\int_0^3 (x + |x-1|)\,dx.$$

En utilisant l'égalité de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^3 (x+|x-1|)\,dx &= \int_0^1 (x+|x-1|)\,dx + \int_1^3 (x+|x-1|)\,dx\\ &= \int_0^1 (x-x+1)\,dx + \int_1^3 (x+x-1)\,dx\\ &= [x]_0^1 + [x^2-x]_1^3 = 7.\end{aligned}$$

Scanné avec CamScanner

c) Positivité d'une intégrale

Soit (a, b) un couple de I^2 tel que : $b > a$. Supposons que f soit continue sur I et positive sur $[a, b]$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geqslant 0.$$

Si F est une primitive de f sur I, on a : $\forall x \in [a, b]\ F'(x) = f(x)$, ainsi F est croissante sur $[a, b]$.

Comme $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, on a donc : $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Propriété de positivité d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et (a, b) un couple de I^2.
Si a est inférieur à b et f positive sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Remarque. Avec les hypothèses de cette propriété (f continue sur I et positive sur $[a, b]$), la nullité de l'intégrale n'est possible que si f est nulle sur $[a, b]$. Signalons que l'hypothèse de continuité est fondamentale comme nous le verrons page 224 (exercice 2).

Conséquences.

1) Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle ouvert I et a et b deux points de I, a étant inférieur à b, tels que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Alors la fonction $(g - f)$ est positive sur $[a, b]$, d'où :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle ouvert I et (a, b) un couple de I^2.
Si a est inférieur à b et f inférieure à g sur $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice

Soit (u) la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx.$$

1) Montrer que (u) est décroissante et minorée par 0. Que peut-on en conclure?

2) Démontrer que quel que soit n entier naturel on a :

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n\,dx \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,dx.$$

En déduire la limite de la suite (u).

Scanné avec CamScanner

2) Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I; nous savons alors que $|f|$ est aussi continue sur I et que, d'autre part, si a et b sont deux éléments de I tel que a soit inférieur à b, on a :

$$\forall x \in [a, b] \quad -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

d'où en appliquant le résultat de la conséquence précédente :

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

c'est-à-dire :

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et (a, b) un couple de points de I^2.
> Si a est inférieur à b, alors :
>
> $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

d) **Théorème de la moyenne**

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I, a et b deux éléments de I tels que a soit inférieur à b; de ce fait l'image par f de l'intervalle $[a, b]$ est un intervalle fermé borné $[m, M]$; nous en déduisons que :

$$\forall x \in [a, b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

De la conséquence 1 précédente, il résulte que :

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

d'où

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

soit :

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

ce qui prouve que le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est une valeur prise par f sur l'intervalle $[a, b]$. Cette valeur est appelée *valeur moyenne de f sur* $[a, b]$.

Théorème de la moyenne

> Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et (a, b) un couple de points de I^2.
>
> Lorsque a est inférieur à b, le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé valeur **moyenne de f sur $[a, b]$**; de plus, il existe un nombre réel c de l'intervalle $[a, b]$, tel que :
>
> $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

Scanné avec CamScanner

Exercices

1) Montrer que, si F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors il existe c appartenant à $[a, b]$ tel que :

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(c).$$

2) Montrer que, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et si g conserve un signe constant sur $[a, b]$, alors il existe un nombre réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

3 Calcul intégral

Les propriétés que l'on vient d'établir, nous aident à calculer ou à encadrer les intégrales. Le calcul d'une intégrale se ramène souvent à la recherche de primitives d'une fonction continue. Pour faciliter cette recherche, nous allons ajouter deux techniques particulières :

— le changement de variable affine
— l'intégration par parties.

1) Choisir une bonne écriture de la fonction à intégrer

Rappelons que la dérivée d'une fonction composée vérifie :

$$(g\circ u)'=(g'\circ u)\,u'.$$

Dans certains calculs de primitives, on s'efforcera de faire apparaître la fonction à intégrer sous cette forme; en particulier on notera que :

$$\forall n\in\mathbb{Q}-\{-1\}\quad u^n u'=\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right)';\quad \frac{u'}{u}=(\ln|u|)'\quad\text{et}\quad u'e^u=(e^u)'.$$

Exercice

Calculer les nombres réels suivants :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx;\quad \int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx\quad\text{pour } n \text{ élément de } \mathbb{N} \text{ et } \int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx.$$

Voyons maintenant deux procédés classiques de transformation de fonctions à intégrer.

• Soit à calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^3 x\,dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$.

Montrer que la première intégrale se ramène à une somme de termes de la forme $u^n u'$ avec $u=\cos$; terminer le calcul. Ce procédé s'applique aux intégrales de la forme $\int_a^b \sin^p x\cos^q x\,dx$ lorsque l'un des entiers naturels p et q est impair.

Scanné avec CamScanner

Dans la deuxième intégrale, $\cos^4$ pose un problème du fait que n'intervient plus la dérivée de cos; le procédé consiste à utiliser la linéarisation, que nous avons étudiée au chapitre 2 d'Algèbre. Ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4\cos 2x + 3)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x + 2\sin 2x + 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{3\pi}{16}.$$

• Considérons la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)^2}$ et calculons $\displaystyle\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx$.

Pour ce faire, nous allons transformer l'expression de $f(x)$, sur son ensemble de définition, sous la forme :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2},$$

où a, b et c sont trois nombres réels à déterminer. Par identification, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 0\} \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2},$$

d'où :
$$\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x(x+1)^2}\,dx = \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x}\,dx - \int_{-4}^{-2} \frac{1}{x+1}\,dx + \int_{-4}^{-2} \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx$$
$$= \left[\ln|x|\right]_{-4}^{-2} - \left[\ln|x+1|\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{1}{x+1}\right]_{-4}^{-2}$$
$$= \ln\frac{3}{2} - \frac{2}{3}.$$

Remarquons que nous obtenons un nombre réel négatif comme résultat, ce qui est en conformité avec le fait que la fonction f est négative sur l'intervalle $[-4; -2]$; ce type de constatation permet quelquefois d'éviter des erreurs de calcul.

Exercices

1) Calculer les nombres réels suivants :

$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,dx$; $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos x)^4(1-\cos x)^3\,dx$

2) Soit g la fonction définie par : $g(t) = -\dfrac{1}{t^2(t+1)}$.

a) Montrer qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1; 0\} \quad g(t) = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t+1}.$$

b) En déduire le calcul de $I(x, y)$ tel que :

$$I(x, y) = \int_x^y g(t)\,dt$$

pour x strictement positif et x strictement inférieur à y.
Puis, x étant fixé, trouver la limite de $I(x, y)$ quand y tend vers plus l'infini.

Scanné avec CamScanner

2) Changement de variable affine

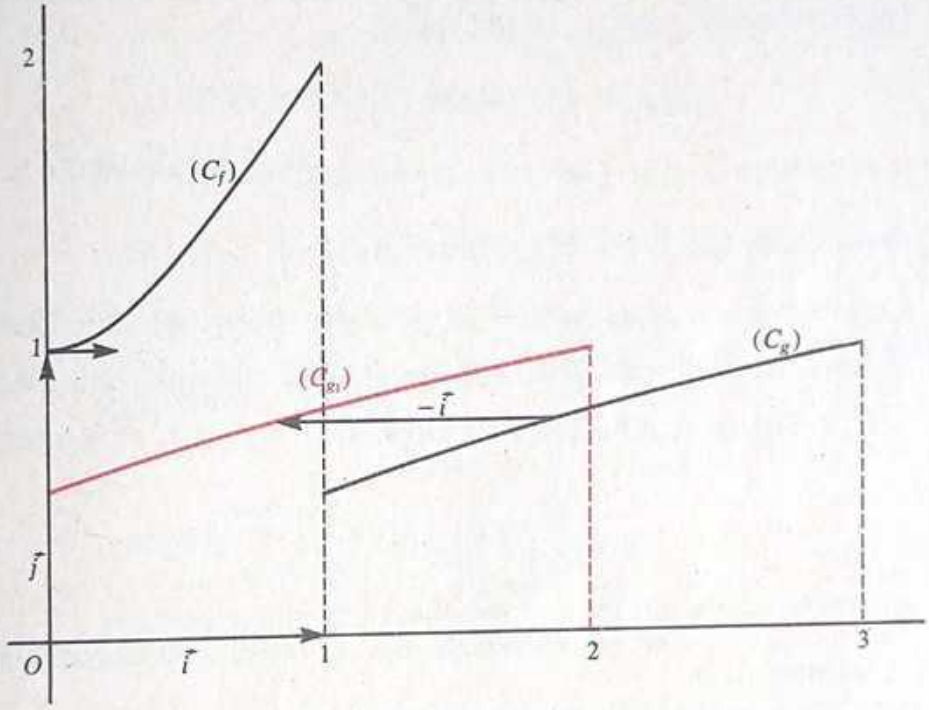
Soit à comparer les intégrales I et J suivantes :

$$I = \int_0^1 \sqrt{3x^2+1}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_1^3 \sqrt{\frac{3x-1}{8}}\,dx.$$

La première fonction à intégrer n'admet pas de primitive connue; par contre, on peut calculer J; vérifier que J vaut $\frac{14}{9}$.

Traçons les parties utiles des représentations graphiques des fonctions

$$f : x \longmapsto \sqrt{3x^2+1} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto \sqrt{\frac{3x-1}{8}}.$$



On voit que : $1 \leqslant I \leqslant 2$; mais ceci ne suffit pas pour comparer les intégrales I et J. L'idée consiste alors à remplacer J par une intégrale de mêmes bornes que I. L'image de (C_g) par la translation de vecteur $-\vec{i}$ est la représentation graphique de la fonction $g_1 : [0; 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \sqrt{\frac{3x+2}{8}}.$$

On vérifie que : $\displaystyle\int_0^2 g_1(x)\,dx = \frac{14}{9}$.

On cherche alors une fonction g_2 prenant sur $[0; 1]$ les mêmes valeurs que g_1 sur $[0; 2]$; le plus simple est de choisir $g_2(x) = g_1(2x)$, c'est-à-dire :

$g_2(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{4}}$, mais on constate que : $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{3x+1}{4}}\,dx = \frac{7}{9}$ donc :

$$\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx = \frac{14}{9}.$$

Scanné avec CamScanner

Ainsi on a : $$J=\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,dx.$$

I et J sont alors exprimées comme intégrales de deux fonctions sur un même intervalle; enfin comme :

$$\forall x\in[0;\,1] \quad 3x^2+1\leqslant 3x+1,$$

on en déduit que : $$I<J.$$

Nous avons, par tâtonnements, ramené I et J à des intégrales de fonctions définies sur un même intervalle; nous allons développer un procédé plus systématique permettant cette transformation.

Nous avons appris à calculer les intégrales de fonctions continues du type : $(f\circ g)\times g'$ lorsque l'on connaît une primitive F de f sur un intervalle contenant les valeurs prises par g; on sait que :

$$\int_a^b f\circ g(x)\times g'(x)\,dx=\big[F(g(x))\big]_a^b$$
$$=F(g(b))-F(g(a)).$$

Remarquons que : $$F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Cette remarque nous permet dans le cas où g est une fonction affine, de transformer l'intégrale de la manière pratique suivante : soit l'intégrale $\int_a^b f(px+q)\,dx$ et g l'application affine $x\longmapsto px+q$, on a alors :

$$\boxed{\int_a^b f(px+q)\,dx=\frac{1}{p}\int_{pa+q}^{pb+q} f(u)\,du}$$

Commentaires. On ne cherchera pas à retenir cette formule; on retiendra simplement que :

— les nouvelles bornes s'obtiennent comme images des précédentes par la fonction affine considérée;

— le facteur $\frac{1}{p}\,du$ s'obtient de manière formelle en écrivant :

$$u=px+q \quad \text{d'où} \quad du=p\,dx,$$

c'est-à-dire : $$dx=\frac{1}{p}\,du.$$

Exemple d'utilisation.

Soit à calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$.

On pose : $u=1+2x$.

• Cherchons les nouvelles bornes

$$x=0 \iff u=1$$
$$x=1 \iff u=3$$

Scanné avec CamScanner

• $u = 1 + 2x$, d'où $dx = \frac{1}{2}\,du$.

Ainsi :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \frac{1}{4}\int_1^3 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 2\sqrt{u}\right]_1^3$$
$$= \frac{1}{3}.$$

Exercices

1) En utilisant un changement de variable affine, calculer :

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,dx \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Soit f une fonction continue sur $[-a; a]$; montrer que :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a \big(f(t) + f(-t)\big)\,dt.$$

Qu'en conclure si f est impaire?

3) Si f est continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T, montrer que pour tout x_0 réel on a :

$$\int_{x_0}^{x_0+nT} f(x)\,dx = n\int_{x_0}^{x_0+T} f(u)\,du \quad (n \in \mathbb{N})$$

et

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(u)\,du$$

(on pourra utiliser l'égalité de Chasles en faisant intervenir x_0, T et $x_0 + T$).

3) Intégration par parties

Introduction

Soit à calculer l'intégrale I égale à $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$. Introduisons alors les deux intégrales J et K définies par :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x + \sin x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx.$$

En remarquant que la fonction à intégrer dans J est la dérivée d'un produit, calculer J, puis K; en déduire I.

Plus généralement, étudions un procédé qui, dans certains cas, permet de déterminer l'intégrale d'une fonction qui s'exprime comme produit de deux fonctions.

Soit deux fonctions f et g dérivables sur l'intervalle ouvert I; nous savons que leur produit est dérivable sur I et que :

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Scanné avec CamScanner

Si de plus, les fonctions f' et g' sont continues sur I, alors il en est de même des fonctions $f'g$ et fg'; ainsi, quels que soient les éléments a et b de I, on a :

$$\int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = \int_a^b (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))\,dx$$

d'où $$[f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

ou encore $$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

C'est la **formule d'intégration par parties.**

Théorème

Si les fonctions f et g admettent des fonctions dérivées continues sur l'intervalle ouvert I et si a et b sont éléments de I, on a :

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Méthode pratique d'utilisation

Soit à calculer : $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Posons : $$f'(x)=e^x \quad \text{et} \quad g(x)=x$$

d'où : $$f(x)=e^x \quad \text{et} \quad g'(x)=1.$$

Ainsi :
$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx\\ &= e-[e^x]_0^1\\ &= 1.\end{aligned}$$

Remarque 1. La difficulté dans l'application de ce théorème est de choisir convenablement f' et g. Ainsi, dans l'exemple précédent, si l'on pose :

$$f'(x)=x \quad \text{et} \quad g(x)=e^x$$

on a $$f(x)=\frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad g'(x)=e^x$$

on obtient alors

$$\int_0^1 xe^x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}e^x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^x\,dx.$$

On s'aperçoit que l'on est ramené à calculer $\int_0^1 x^2e^x\,dx$, qui est plus difficile à déterminer que l'intégrale initiale.

Remarque 2. f, qui est une primitive de f', n'est définie qu'à une constante près; dans l'exemple précédent nous avons choisi de prendre cette constante nulle afin de faciliter la suite des calculs; cependant, pour certaines intégrations par parties, il peut être intéressant de donner à la constante une valeur particulière non nulle.

Scanné avec CamScanner

Par exemple, soit à calculer : $\int_{-2}^{0} \ln(x+3)\,dx$.

Choisissons : $f'(x)=1 \qquad g(x)=\ln(x+3)$

$f(x)=x+3 \qquad g'(x)=\dfrac{1}{x+3}$

d'où : $\int_{-2}^{0} \ln(x+3)\,dx=\big[(x+3)\ln(x+3)\big]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0} dx$

$=3\ln 3-2.$

Exercices

1) En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx \qquad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x}\,dx$

$\int_{1}^{3} x\ln x\,dx \qquad \int_{0}^{3} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}\,dx$

2) Soit (u) la suite numérique définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx.$$

a) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

b) Calculer u_0; en déduire le calcul de u_n en fonction de n.

4 Retour au calcul d'aires. Interprétation graphique d'une intégrale

1) Calculs d'aires

Nous avons établi, dans l'introduction du paragraphe 2, le résultat suivant :

• $\mathcal{P}$ est le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si f est une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle ouvert I et si $[a, b]$ est un intervalle inclus dans I, alors l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x) \end{cases}$$

est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$.

Si, maintenant, f est décroissante sur $[a, b]$, appelons $\mathcal{D}$ la surface caractérisée par :

$$a\leqslant x\leqslant b \quad \text{et} \quad 0\leqslant y\leqslant f(x).$$

Montrer que : $\int_a^b f(x)\,dx=\int_{-b}^{-a} f(-u)\,du.$

Scanné avec CamScanner

En remarquant que la fonction $[x \longmapsto f(-x)]$ est une fonction croissante, interpréter cette dernière intégrale comme l'aire d'une surface isométrique à $\mathcal{D}$.

• Si f est continue sur I, négative et monotone sur $[a, b]$, alors $(-f)$ est continue, monotone et positive sur $[a, b]$. Ainsi, le nombre réel positif $\int_a^b (-f)(x)\,dx$ représente l'aire de la partie du plan caractérisée par :

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant -f(x).$$

La symétrie orthogonale étant une isométrie, nous en déduisons que l'aire A, de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$$

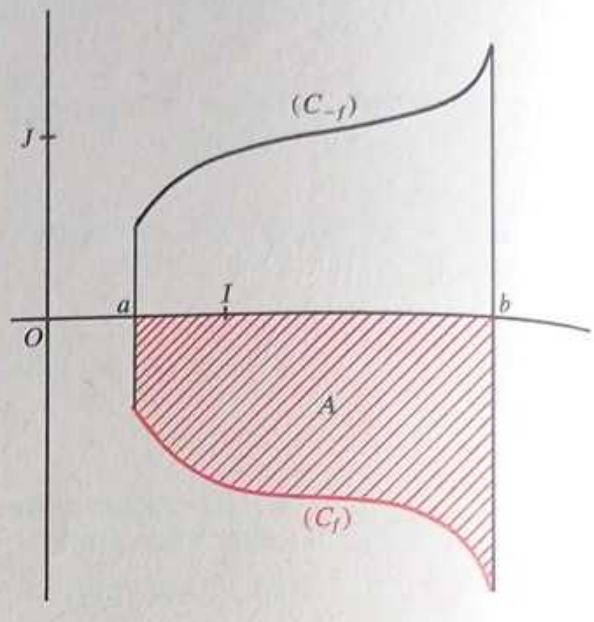
est aussi égale à :

$$\int_a^b (-f)(x)\,dx$$

d'où :

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarquons que f étant négative sur $[a, b]$, A est un nombre réel positif.



• Dans le cas d'une fonction continue, de signe constant, mais non monotone sur $[a, b]$, il est possible, en utilisant l'égalité de Chasles, de montrer que les résultats précédents restent vrais. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème

Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction continue de signe constant sur l'intervalle ouvert I et $[a, b]$ un intervalle inclus dans I; l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe représentative de f, la droite $D(O, \vec{i})$ et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, vaut :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

Exemple

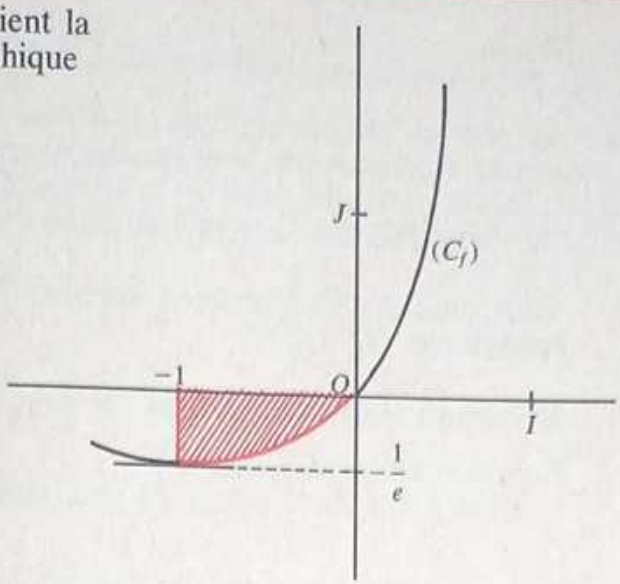
Soit f la fonction définie par $f(x) = xe^x$. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

• On veut déterminer l'aire A_1 de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Sur $[-1; 0]$ on obtient la représentation graphique suivante de f :



On a : $$A_1 = \left| \int_{-1}^{0} xe^x \, dx \right|.$$

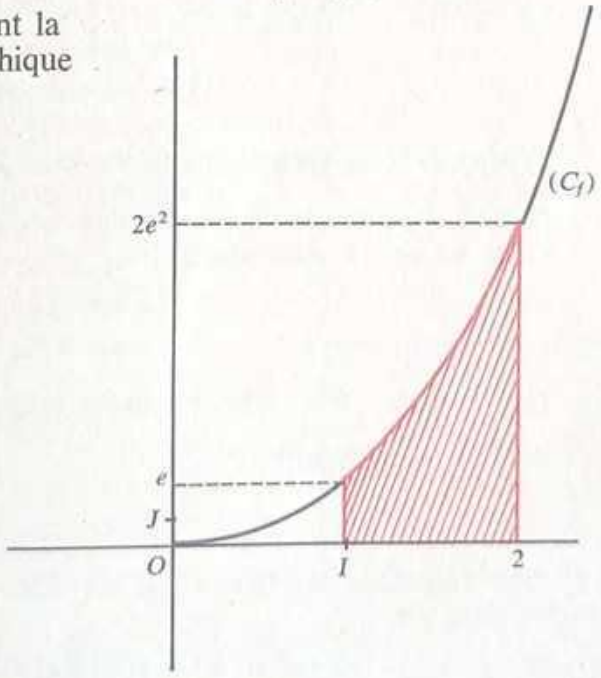
En intégrant par parties (voir méthode pratique d'utilisation de la formule d'intégration par parties), on obtient : $A_1 = 1 - \frac{2}{e}$.

L'arrondi d'ordre 2 de A_1 est 0,26.
Pour contrôler ce résultat, il est intéressant d'utiliser le dessin précédent. Comme nous avons choisi 2 cm pour unité graphique de longueur, une aire égale à 1, sur ce dessin, vaut 4 cm^2; il en résulte que l'aire A_1 de la partie hachurée correspond, en valeur approchée à $4 \times 0{,}26$ cm^2, c'est-à-dire 1,04 cm^2.

• Calculons, de même, l'aire A_2 de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$$

Sur $[1; 2]$ on obtient la représentation graphique suivante de f :



Scanné avec CamScanner

On a : $A_2=\int_1^2 xe^x\,dx$ soit $A_2=e^2$. L'arrondi d'ordre 2 de A_2 est 7,39.

Compte tenu des valeurs prises par f sur [1; 2], ce dessin a été tracé en prenant 2 cm pour une unité graphique sur la droite des abscisses et 0,25 cm sur la droite des ordonnées. Ainsi, une aire égale à 1, sur ce dessin correspond à 0,5 cm^2, donc l'aire de la partie hachurée correspond ici, en valeur approchée à 3,69 cm^2.

Exercices

Dans chacun des exercices suivants le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

1) Soit f l'application définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

Représenter graphiquement f.
Calculer l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases}-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0\leqslant y\leqslant f(x).\end{cases}$$

On pourra montrer l'existence de deux nombres réels α et β tels que pour tout élément x de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on ait :

$$f(x)=\frac{\alpha\cos x}{1+\sin x}+\frac{\beta\cos x}{1-\sin x}.$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=x^2\ln|x|$ si x est un nombre réel non nul

et $f(0)=0$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Représenter graphiquement f.

c) Calculer l'aire de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ f(x)\leqslant y\leqslant -f(x).\end{cases}$$

3) Représenter graphiquement la fonction $f : x\longmapsto\frac{1}{x^2}$.

Soit m un nombre réel supérieur ou égal à 1; calculer l'aire $A(m)$ de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant m\\ 0\leqslant y\leqslant f(x).\end{cases}$$

En déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} A(m)$; quelle interprétation graphique peut-on donner de ce résultat?

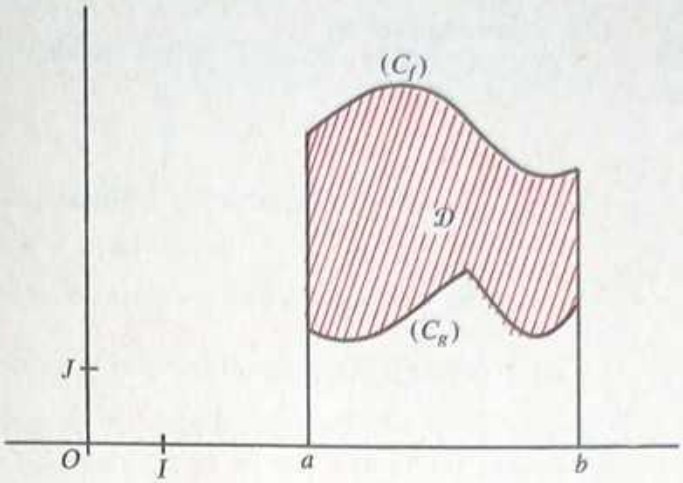
2) Aire d'une partie de $\mathcal{S}$ comprise entre deux courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I, et $[a, b]$ un intervalle inclus dans I.

Supposons que : $\forall x\in[a, b]\quad f(x)\geqslant g(x)$.

Scanné avec CamScanner

Appelons $\mathcal{D}$ la partie du plan caractérisée par : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b \\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$



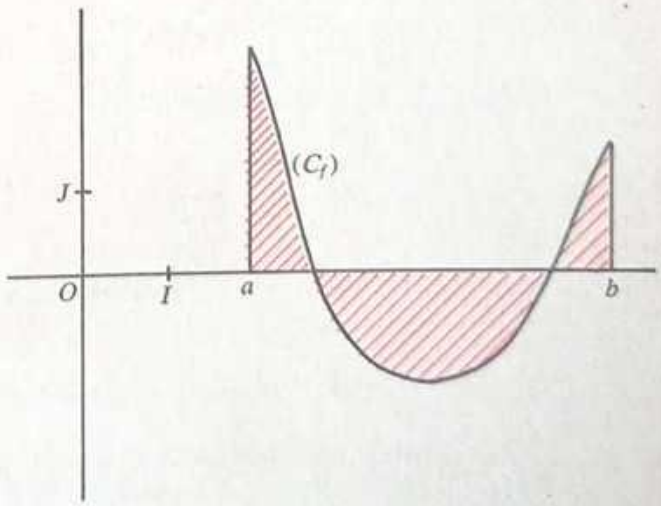
Montrer que l'aire de la surface $\mathcal{D}$ est $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.

• Nous rencontrerons des exemples où $(f-g)$ ne conserve pas un signe constant sur l'intervalle $[a, b]$; dans ce cas, on partagera $[a, b]$ en intervalles dans lesquels $(f-g)$ garde un signe constant, puis on utilisera l'égalité de Chasles pour déterminer l'aire de la surface comprise entre ces deux courbes. D'une manière générale, montrer que cette aire est égale à :

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

Cas particulier

Si la fonction continue f change de signe sur $[a, b]$, la partie hachurée $\mathcal{D}$ de la figure ci-contre est la partie du plan comprise entre (C_f), la droite (OI) qui est la représentation graphique de la fonction nulle, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Ainsi, l'aire de $\mathcal{D}$ est égale à : $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Scanné avec CamScanner

Exercices

Dans les exercices suivants le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J).

1) Calculer l'aire limitée par les courbes représentatives des fonctions suivantes :
$f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\sin x$ et les droites d'équation :

$$x=-\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad x=\frac{\pi}{2}.$$

2) On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=(x-3)\sqrt{x}.$$

a) Étudier f et construire sa courbe représentative (C).

b) La droite (D) d'équation $y=\frac{x}{2}$, coupe la courbe (C) en deux points O et A. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par le segment $[OA]$ et l'arc de la courbe (C) d'extrémités O et A.

3) Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$.

a) Étudier f et construire sa courbe représentative (Γ).

b) On appelle (D) la droite d'équation $y=x$ et (Δ_m) la droite d'équation $x=m$, où m est un nombre réel supérieur à 2.
Calculer, en fonction de m, l'aire $\mathcal{A}(m)$ de la partie du plan limitée par (Γ), et les droites (D), (OI) et (Δ_m). En déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathcal{A}(m)$; interpréter graphiquement ce résultat.

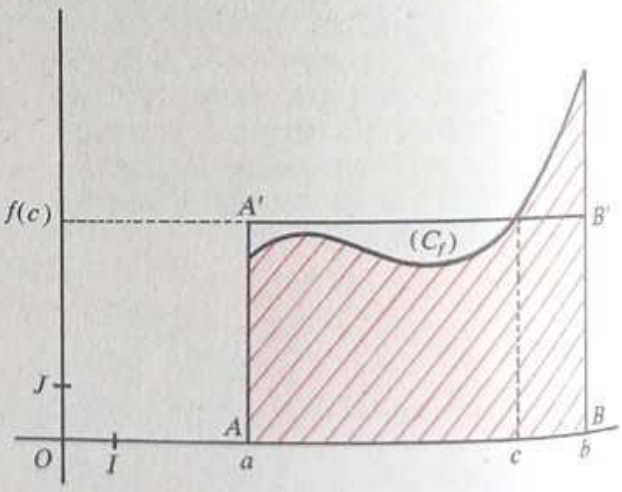
3) Interprétation graphique de la valeur moyenne d'une fonction positive

Nous avons vu que si f est continue, positive sur l'intervalle $[a, b]$, il existe un nombre réel c de cet intervalle tel que :

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

$f(c)$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c).$$



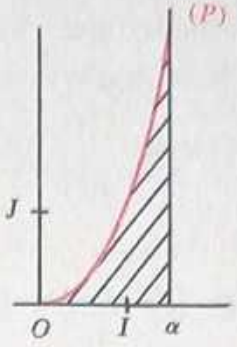
Le premier membre de cette égalité est l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$; le deuxième membre est l'aire du rectangle $AA'B'B$. Nous pouvons ainsi donner une interprétation graphique de la valeur moyenne d'une fonction continue positive sur $[a, b]$. C'est la mesure d'un côté du rectangle ayant même aire que la partie du plan comprise entre (C_f),

Scanné avec CamScanner

(OI) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$; l'autre côté de ce rectangle ayant pour mesure $(b-a)$.

Exercice

Soit (P) la courbe d'équation : $(x, y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\ y=x^2$.
Déterminer un nombre réel positif α, pour que l'aire de la partie hachurée de la figure ci-dessous soit l'aire d'un carré de côté α.



4) Cas d'intégration de fonctions présentant des discontinuités sur un intervalle.

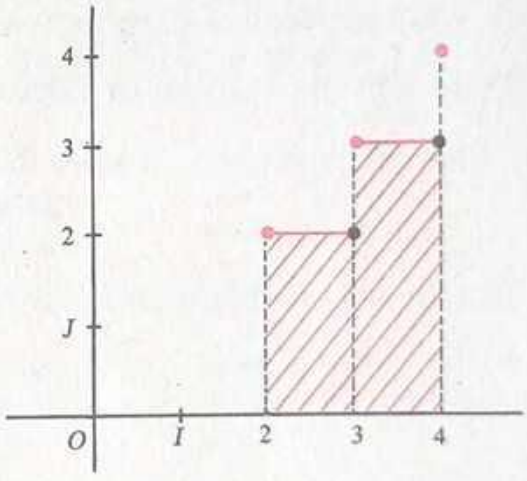
L'interprétation graphique, que nous venons de donner d'une intégrale, permet de prolonger cette notion à certains cas de fonctions présentant des discontinuités sur un intervalle.

• Considérons par exemple, la restriction de la fonction partie entière E, à l'intervalle $[2; 4]$; elle est discontinue en 3 et 4. Cependant l'aire de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4\\0\leqslant y\leqslant E(x)\end{cases}$$

est égale à la somme des aires de deux rectangles.
On peut donc donner un sens à l'intégrale de E sur $[2; 4]$.
On écrit :

$$\int_2^4 E(x)\,dx=5.$$



⚠ *Cette extension de la notion d'intégrale n'est pas définie à partir d'une primitive.*

Déterminer explicitement sur $[0; 3[$ la fonction F définie par :

$$F(x)=\int_0^x E(t)\,dt.$$

F est-elle dérivable sur $[0; 3[$?
F est-elle une primitive de E sur $[0; 3[$?
On montre que E ne possède pas de primitive sur $[0; 3[$.

Scanné avec CamScanner

Remarque. L'égalité de Chasles et les propriétés de linéarité s'étendent alors sans changement à ces fonctions.

Exercices

1) Calculer en fonction de n : $\int_0^n E(x)\,dx$ où $n \in \mathbb{Z}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto E(\sin^2 x)$.

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$.

b) Montrer que, sur l'intervalle $[0, \pi]$, f n'est pas la fonction nulle.

c) Calculer : $\int_0^\pi f(x)\,dx$. Quelle remarque peut-on faire?

5 Fonctions de la forme : $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$

f est une fonction continue sur l'intervalle I et a est un point de I.
On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

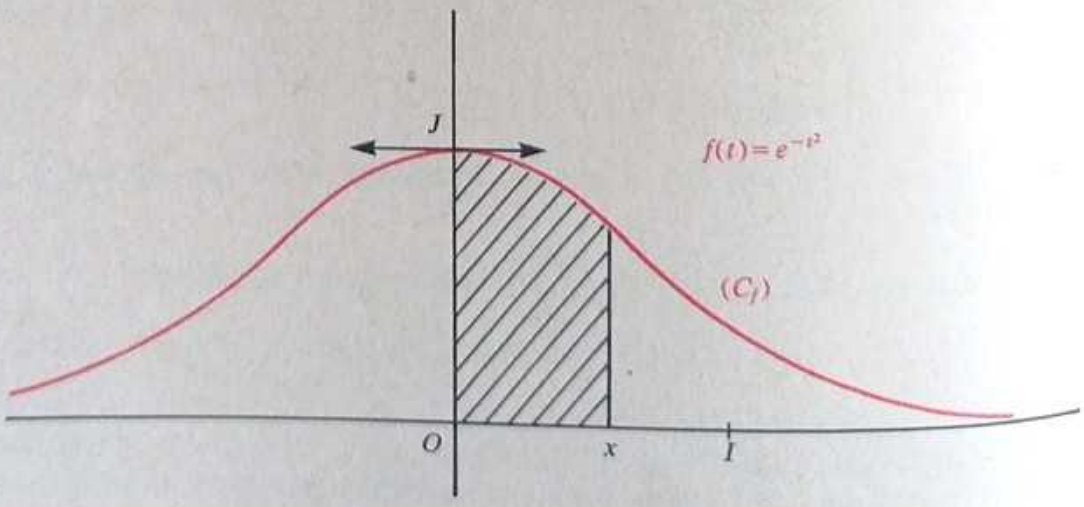
F est définie sur I; c'est la primitive de f sur I qui s'annule en a.
— Si f possède une primitive connue, F est déterminée sous forme explicite.
— Si f ne possède pas de primitive connue, l'étude de F se fait en utilisant les propriétés des intégrales et celles de la fonction f.

Étudions un exemple; soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{-t^2}$ ne possède pas de primitive connue.

Une rapide étude de f nous conduit à sa courbe représentative (C_f), qui est la suivante :



Scanné avec CamScanner

L'interprétation graphique d'une intégrale nous permet alors, pour un nombre réel positif x, de déterminer la partie du plan (hachurée sur la figure ci-dessus) dont l'aire est égale à $F(x)$. Remarquons que pour x nombre réel négatif, $\int_0^x f(t)\,dt$ est un nombre réel négatif car f est positive sur l'intervalle $[x; 0]$.

a) **Ensemble de définition de F**

f étant continue sur $\mathbb{R}$, F est définie sur $\mathbb{R}$.
La parité de f et les remarques graphiques précédentes nous incitent à étudier la parité de F.
On fait dans l'intégrale le changement de variable $u = -t$; on obtient :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{-x} -f(-u)\,du \\ &= -\int_0^{-x} f(u)\,du \\ &= -F(-x). \end{aligned}$$

Ainsi F est une fonction impaire; nous ne l'étudierons donc que sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) **Variations de F**

F est la primitive de f qui s'annule en 0, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = f(x).$$

Comme f est strictement positive sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) **Étude aux bornes de l'ensemble d'étude**

$$F(0) = 0.$$

Pour x supérieur à 1, montrer que : $\forall t \in [1; x] \quad e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.
Nous en déduisons que :

$$\int_1^x e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_1^x e^{-t}\,dt \quad \text{d'où} \quad \int_1^x e^{-t^2}\,dt \leqslant \frac{1}{e}.$$

Comme : $F(x) = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt$, on obtient finalement pour tout x supérieur à 1 :

$$F(x) \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{e}.$$

Ainsi F est une fonction croissante et majorée sur l'intervalle $[0, +\infty[$; elle admet donc une limite réelle ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ et en conséquence la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la branche infinie correspondante de (C_F).

Remarque. Cette limite est calculée au cours du problème n° 47 en fin de ce chapitre. Elle vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

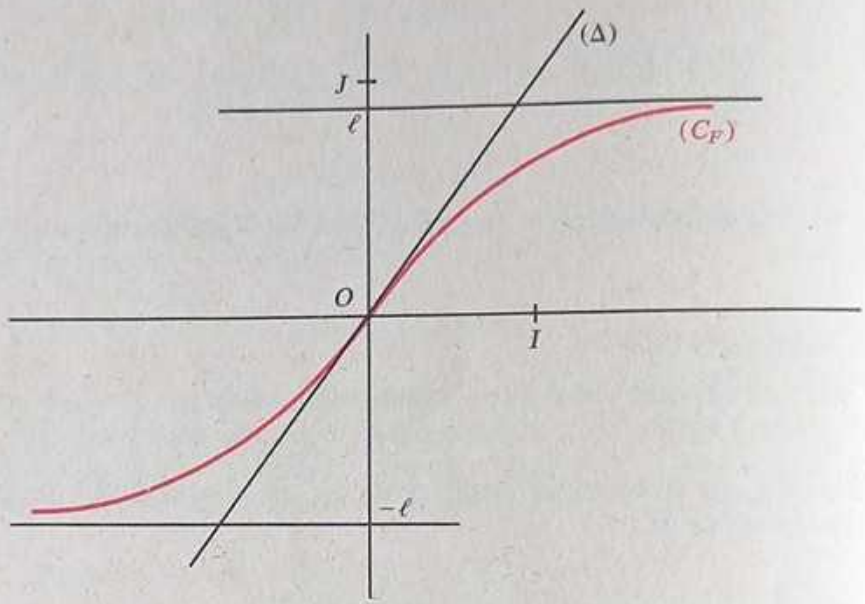
Scanné avec CamScanner

d) **Tableau de variation; allure de la courbe représentative de F**

x	0		$+\infty$
$F'(x)$	1	$+$	
$F(x)$	0	↗	ℓ

On remarquera que $F'(0)=f(0)$ et que $f(0)=1$; la droite (Δ) d'équation $y=x$ est donc tangente à (C_F) en O.

Après avoir construit la courbe sur $[0; +\infty[$ on complète par symétrie relativement à O car F est une fonction impaire; on obtient alors la courbe (C_F) suivante :



Remarque 1. Position de (C_F) par rapport à (Δ).

$$\forall t \in [0, x] \quad e^{-t^2} \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad F(x) \leqslant x.$$

Ainsi pour x positif la courbe (C_F) est située en dessous de (Δ), pour x négatif la courbe (C_F) est située au-dessus de (Δ), par raison de symétrie.

Remarque 2. Cette fonction F est utilisée en Statistique et en Probabilité; elle est appelée fonction de Gauss.

Exercices

1) Soit f une fonction continue et impaire sur l'intervalle $[-a; a]$; étudier la parité de la fonction F définie par :

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier graphiquement le résultat obtenu.

2) *a*) Étudier les variations de la fonction $g : x \longmapsto x - \ln x$.

b) Soit :
$$F(x)=\int_x^{2x} \frac{1}{t-\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer l'ensemble de définition de F.
Étudier les variations de F.

Scanné avec CamScanner

Montrer que F est minorée sur $[1, +\infty[$; en déduire qu'elle admet une limite ℓ lorsque x tend vers plus l'infini; donner un encadrement de cette limite.
Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} F(x) = 0$.
On pose $F(0) = 0$; donner l'allure de la courbe représentative de la fonction F.

• Penser pour les trois dernières questions à utiliser le théorème de la moyenne.

6 Valeur approchée d'une intégrale

1) Étude d'un exemple

Soit à calculer le nombre réel K égal à $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$; la fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, K existe, mais l'ignorance d'une primitive de f ne nous permet pas d'en donner la valeur exacte. Cherchons-en une valeur approchée.

D'après le théorème de la moyenne :

$$f(1)(1-0) < K < f(0)(1-0)$$

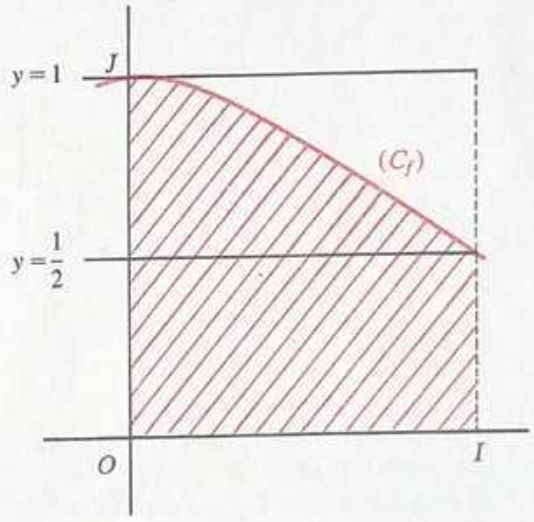
c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{2} < K < 1.$$

Remarquons que cet encadrement consiste à utiliser les fonctions constantes

$$\left[x \longmapsto \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad [x \longmapsto 1]$$

comme fonctions minorant et majorant f.



On obtient ainsi un encadrement grossier de K; pour améliorer cet encadrement on peut penser à :

— utiliser comme fonctions minorante et majorante des fonctions usuelles mais plus « voisines » de f;

— partager l'intervalle $[0; 1]$ en intervalles plus « petits » sur chacun desquels f varie peu, et utiliser la technique précédente d'encadrement par des fonctions constantes sur chaque intervalle ainsi défini.

La deuxième méthode conduit à des calculs simples; elle est d'autre part facilement adaptable à d'autres fonctions et s'avère efficace.

Partageons l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$; les bornes x_0, x_1, ..., x_i... et x_n de ces intervalles sont donc définies par :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \ \ldots, \quad x_i = \frac{i}{n}, \ \ldots \quad \text{et} \quad x_n = 1.$$

Scanné avec CamScanner

Soit i un nombre entier naturel compris entre 1 et n; comme f est décroissante sur l'intervalle [0; 1], on a, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$:

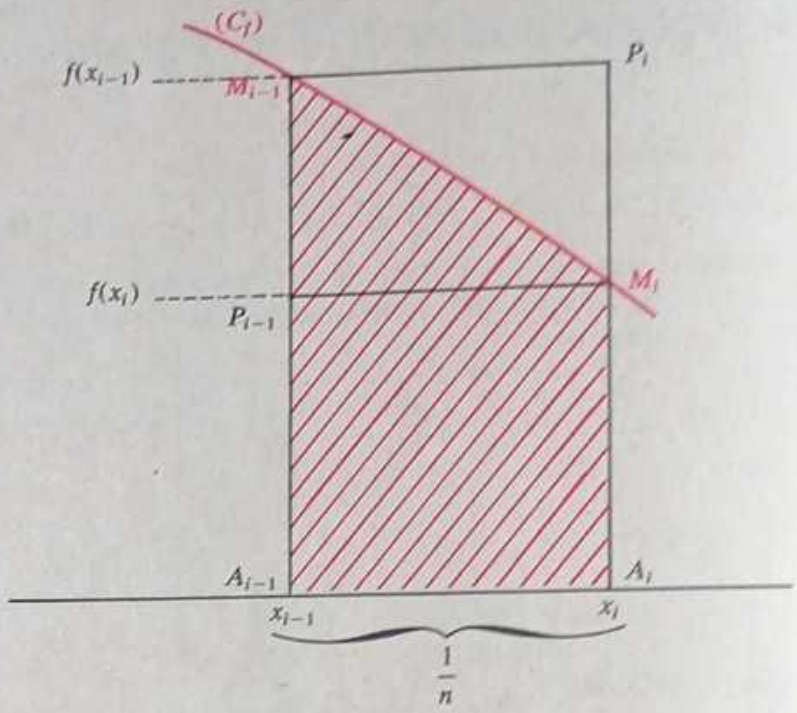
$$f(x_i) \leqslant f(t) \leqslant f(x_{i-1}),$$

d'où :

$$(x_i - x_{i-1}) f(x_i) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

ou encore,

$$\frac{1}{n} f(x_i) \leqslant \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f(x_{i-1}).$$



On constate alors, que l'inégalité précédente traduit le fait que l'aire de la partie du plan limitée par (C_f), (OI) et les droites d'équation $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$, est comprise entre les aires des rectangles $A_{i-1}P_{i-1}M_iA_i$ et $A_{i-1}M_{i-1}P_iA_i$. Ajoutons membre à membre les inégalités obtenues en donnant à i les valeurs 1, 2, 3... n, dans l'inégalité précédente; en utilisant alors l'égalité de Chasles, on obtient un encadrement de K; en effet :

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{n} f(x_1) \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt & \leqslant \frac{1}{n} f(x_0) \\
\frac{1}{n} f(x_2) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(t)\,dt & \leqslant \frac{1}{n} f(x_1) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \\
\frac{1}{n} f(x_n) \leqslant \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(t)\,dt & \leqslant \frac{1}{n} f(x_{n-1}) \\
\hline
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt & \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})
\end{array}$$

Scanné avec CamScanner

c'est-à-dire : $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Application numérique. Choisissons $n = 10$.

i	x_i	$d_2(f(x_i))$	$e_2(f(x_i))$
0	0		1
1	0,1	0,99	1
2	0,2	0,96	0,97
3	0,3	0,91	0,92
4	0,4	0,86	0,87
5	0,5	0,80	0,80
6	0,6	0,73	0,74
7	0,7	0,67	0,68
8	0,8	0,60	0,61
9	0,9	0,55	0,56
10	1	0,50	
TOTAUX		7,57	8,15

$d_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par défaut de $f(x_i)$,
$e_2(f(x_i))$ = approximation décimale d'ordre 2 par excès de $f(x_i)$.

• On obtient l'encadrement suivant de K :

$$0{,}757 < K < 0{,}815.$$

• Ainsi 0,79 est une valeur approchée à $4 \cdot 10^{-2}$ près de K.

2) Étude du cas général

Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I et $[a, b]$ un intervalle inclus dans I.
Supposons que f ne possède pas de primitive connue; utilisons la méthode précédente pour déterminer une valeur approchée de K définie par :

$$K = \int_a^b f(t)\,dt.$$

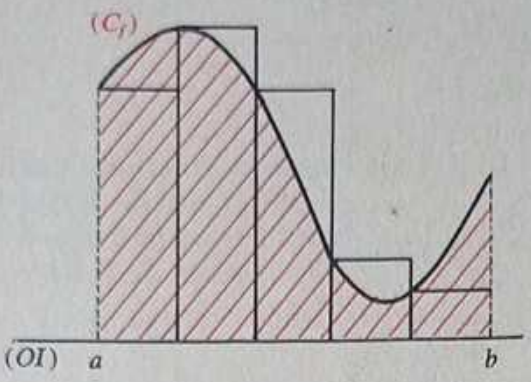
Partageons l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même amplitude $\frac{b-a}{n}$. Les bornes x_0, x_1, x_2... et x_n de ces intervalles sont ainsi définies par :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ \ldots, \ x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \ \ldots, \ x_n = b.$$

On remarquera que $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$ et x_n sont les termes d'une suite arithmétique de raison $\frac{b-a}{n}$.

Scanné avec CamScanner

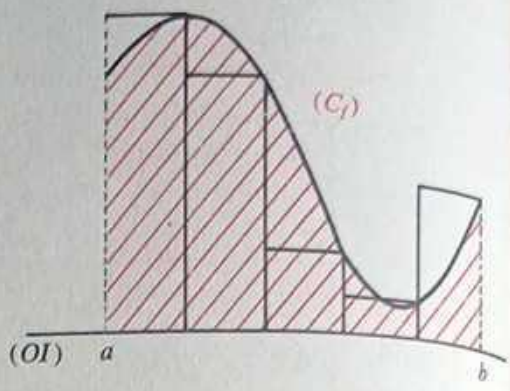
Nous avons alors deux façons de déterminer une valeur approchée de K :



On choisit pour tout nombre réel t de $[x_{i-1}, x_i]$, $f(x_{i-1})$ comme valeur approchée de $f(t)$; ainsi on obtient :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

comme valeur approchée de K.



On choisit pour tout nombre réel t de $[x_{i-1}, x_i]$, $f(x_i)$ comme valeur approchée de $f(t)$; ainsi on obtient :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

comme valeur approchée de K.

On dit que ces deux valeurs approchées de K sont obtenues par la méthode des **rectangles.**

Remarque. Si f est monotone sur $[a, b]$ les deux valeurs précédentes réalisent un encadrement de K. Ce n'est plus le cas lorsque f n'est pas monotone (on ne peut d'ailleurs pas préciser laquelle de ces deux valeurs est la meilleure valeur approchée de K).
Cela nous conduit à étudier l'erreur commise en remplaçant K par l'une de ces valeurs.

3) Majoration de l'erreur

L'erreur commise en prenant $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$ comme valeur approchée de K est le nombre réel δ défini par :

$$\delta = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

On se propose d'établir une majoration de $|\delta|$.

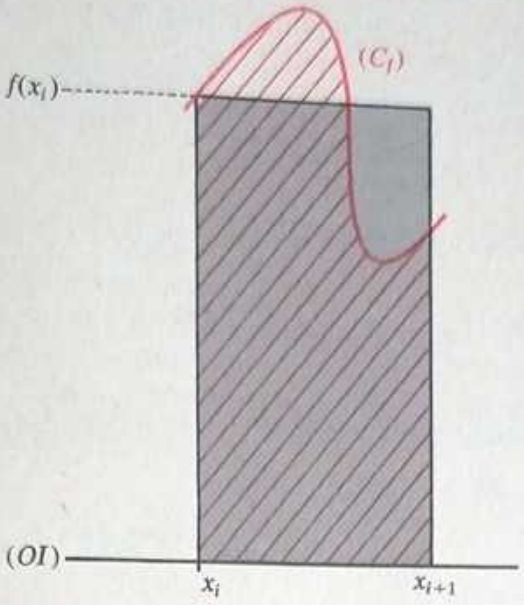
- Étudions d'abord une majoration de l'erreur δ_i sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$; on a

$$\delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - (x_{i+1}-x_i)f(x_i)$$

c'est-à-dire :

$$\delta_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(t)-f(x_i)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Scanné avec CamScanner



 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt$  $(x_{i+1}-x_i)f(x_i)$

On obtient une majoration intéressante de $|f(t)-f(x_i)|$ lorsque *f est dérivable sur I* et que *sa fonction dérivée est bornée sur* $[a, b]$. En effet, nous savons que s'il existe un nombre réel M tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad -M \leqslant f'(x) \leqslant M,$$

alors pour tout t de $[x_i, x_{i+1}]$, on a :

$$-(t-x_i)M \leqslant f(t)-f(x_i) \leqslant (t-x_i)M$$

c'est-à-dire : $$|f(t)-f(x_i)| \leqslant (t-x_i)M.$$

Or : $$|\delta_i| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t)-f(x_i)|\,dt$$

ainsi : $$|\delta_i| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t-x_i)M\,dt$$

d'où : $$|\delta_i| \leqslant M\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2}$$

c'est-à-dire : $$|\delta_i| \leqslant M\frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

Remarquons que nous obtenons comme majorant de $|\delta_i|$ un nombre réel qui ne dépend pas de i.

Scanné avec CamScanner

• Comme $\delta = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i$, on a :

$$|\delta| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |\delta_i|$$

$$|\delta| \leqslant n \frac{(b-a)^2}{2n^2} M$$

soit :
$$|\delta| \leqslant M \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

• On montre de même que l'erreur δ' commise en choisissant $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ comme valeur approchée de K vérifie :

$$|\delta'| \leqslant M \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

En résumé, f étant une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I et $[a, b]$ étant un intervalle inclus dans I, pour calculer, par la méthode des rectangles, l'intégrale K, égale à $\int_a^b f(t)\,dt$:

1) on choisit un nombre entier naturel n;

2) on calcule l'une ou l'autre des deux sommes K_1 et K_2 définies par

$$K_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$K_2 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Alors les erreurs commises en prenant K_1 ou K_2 comme valeur approchée de K vérifient, si f' est bornée sur $[a, b]$:

$$|K - K_1| \leqslant M \frac{(b-a)^2}{2n},$$

$$|K - K_2| \leqslant M \frac{(b-a)^2}{2n},$$

où M est un majorant de $|f'|$ sur $[a, b]$.

Remarque. Si l'on veut obtenir une valeur approchée de K avec une incertitude α, donnée à l'avance, on recherche un majorant M de $|f'|$ sur $[a, b]$ puis l'on choisit n de façon que : $M \frac{(b-a)^2}{2n} \leqslant \alpha$.

• Reprenons l'exemple précédent, c'est-à-dire le calcul de K définie par $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. Quelle valeur de n peut-on choisir pour obtenir une valeur approchée de K à 10^{-2} près?

La fonction dérivée de la fonction $\left[t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}\right]$ est donnée par $t \longmapsto \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$

Scanné avec CamScanner

Montrer que pour tout t élément de $[0; 1]$:

$$\frac{2t}{(1+t^2)^2} \leqslant \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{puis que} \quad \frac{2t}{(1+t^2)^2} \leqslant 1.$$

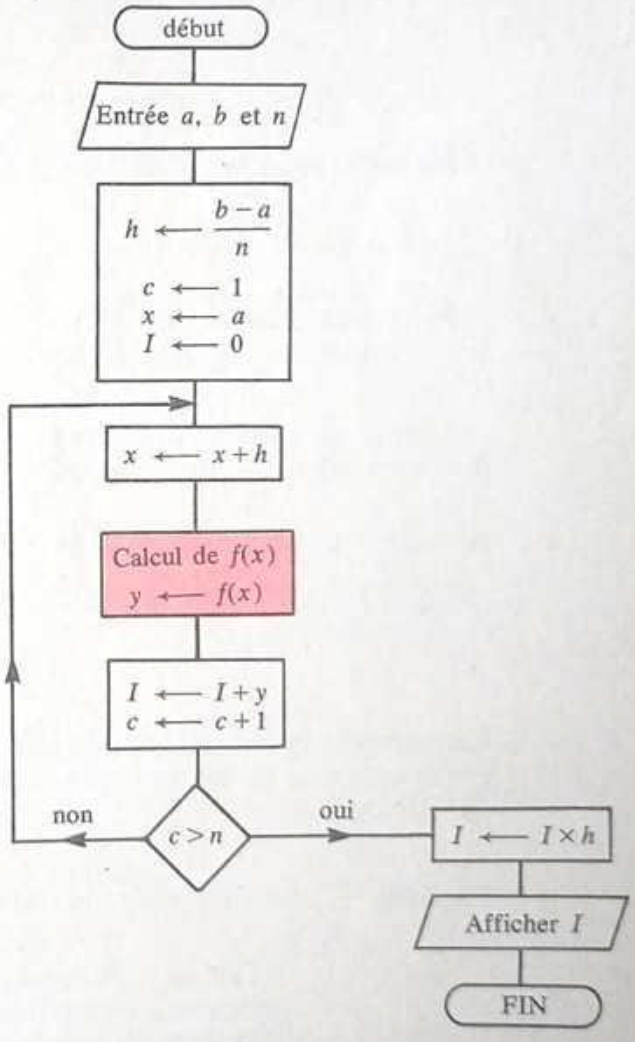
On a donc : $\forall t \in [0; 1] \quad |f'(t)| \leqslant 1.$

Ainsi pour obtenir K à 10^{-2} près, il suffit de choisir n tel que $\frac{1}{2n} \leqslant 10^{-2}$; on pourra donc prendre 50 pour valeur de n.
Il serait long et fastidieux d'effectuer de tels calculs « à la main ». Comme il s'agit de répéter un grand nombre de fois des calculs simples, la calculatrice programmable est particulièrement adaptée; on pourra réaliser un programme correspondant à l'organigramme ci-dessous pour calculer K_2, c'est-à-dire :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Commentaires

- c est un compteur qui prend les valeurs : 1, 2, ..., $n+1$; il permet de tester « quand s'arrêter ».
- x contient successivement toutes les valeurs x_i.
- I contient les sommes partielles de $f(x_i)$, puis la valeur K_2.



On obtient alors comme valeur approchée de K, à 10^{-2} près, la valeur 0,78.

- Notons que nous ne tenons pas compte des erreurs introduites par le calcul approché des valeurs de $f(x_i)$; lorsque n reste « raisonnable » ces erreurs sont

Scanné avec CamScanner

négligeables devant l'erreur de méthode; on se gardera de croire qu'en choisissant n très grand on obtient une meilleure approximation.
En général, un compromis satisfaisant entre le temps de calcul et la qualité du résultat est obtenu en donnant à n des valeurs entre 50 et 100.

4) Autre méthode d'approximation

Nous avons vu que la méthode des rectangles permettait d'obtenir deux valeurs approchées K_1 et K_2 d'une intégrale K avec :

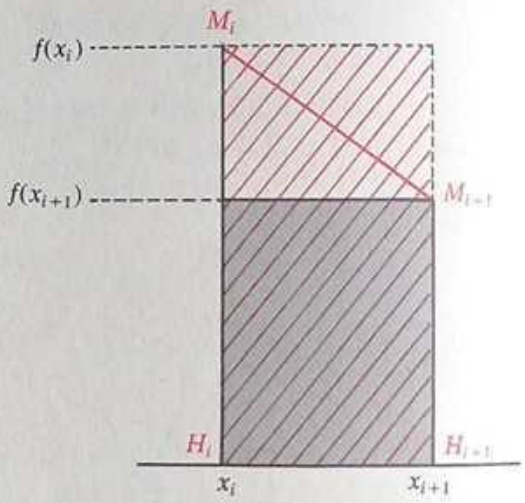
$$K=\int_a^b f(t)\,dt, \quad K_1=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad K_2=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Lorsque f est monotone sur $[a, b]$, K_1 et K_2 sont les bornes d'un encadrement de K; la valeur approchée de K correspondant à cet encadrement est le centre $\frac{K_1+K_2}{2}$ de l'intervalle de bornes K_1 et K_2. Notons que :

$$\frac{K_1+K_2}{2}=\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right].$$

Cette approximation s'interprète graphiquement de façon simple :

- K_1 est la somme des aires des rectangles hachurés en rouge.
- K_2 est la somme des aires des rectangles en tramé noir.
- $\frac{K_1+K_2}{2}$ correspond donc à la somme des aires des trapèzes du type $H_iM_iM_{i+1}H_{i+1}$.



Cette méthode de calcul porte le nom de **méthode des trapèzes;** on constatera graphiquement sur les exemples usuels qu'elle est plus performante que la méthode des rectangles.

Exercice

Soit I l'intégrale définie par : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

1) Donner un encadrement de I, en utilisant la méthode des rectangles, d'amplitude $6\cdot10^{-2}$. Quelle valeur approchée obtient-on avec la méthode des trapèzes, en utilisant la même subdivision de $[0; 1]$?

2) Dériver la fonction $\left[x \longmapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$.
Calculer I.
Commenter les résultats obtenus au 1).

Scanné avec CamScanner

ACTIVITÉ. CALCUL DU VOLUME DE CERTAINES PARTIES DE $\mathcal{E}$

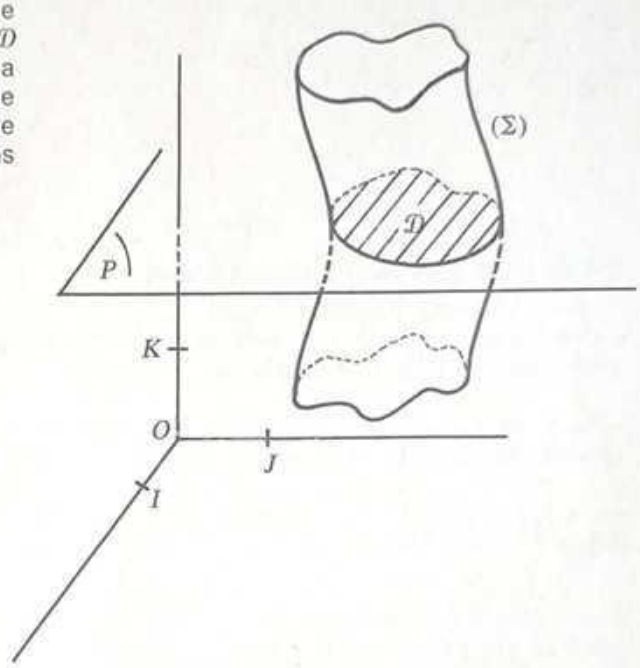
$\mathcal{E}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J, K).

1) De la notion de volume

Comme pour l'aire d'une surface de $\mathcal{T}$, nous avons du volume d'une partie de $\mathcal{E}$ une connaissance intuitive. Il existe, de même, une famille $\mathcal{G}$ de sous-ensembles de $\mathcal{E}$, et une application g de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+$, satisfaisant à des propriétés analogues à celles énoncées à propos des aires. Ainsi, pour tout élément (Σ) de $\mathcal{G}$, le nombre réel positif $g(\Sigma)$ est le volume de (Σ).

Comme l'indique la figure ci-contre, supposons que (Σ) soit tel que son intersection avec le plan (P) d'équation $z = t$ soit une surface $\mathcal{D}$ d'aire $S(t)$. Nous admettrons alors que, si la fonction $S : t \longmapsto S(t)$ est définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, le volume v de la partie de (Σ) comprise entre les plans d'équations respectives $z = a$ et $z = b$, est :

$$v = \int_a^b S(t)\,dt.$$



Le plan (P) a pour équation : $z = t$
$(P) \cap (\Sigma) = \mathcal{D}$; $\mathcal{D}$ a pour aire $S(t)$

Remarque. Le rôle joué par z peut être tenu indifféremment par x ou par y, l'intervalle d'intégration étant adapté à la variable choisie.

Exemple
Soit à calculer le volume de la partie (Σ) de $\mathcal{E}$ caractérisée par :

$$\begin{cases} |x| + |y| \leqslant 1 - z \\ 0 \leqslant z \leqslant 1. \end{cases}$$

• Montrer que (Σ) est la pyramide de sommet K et de base le carré $IJI'J'$ du plan (OIJ).

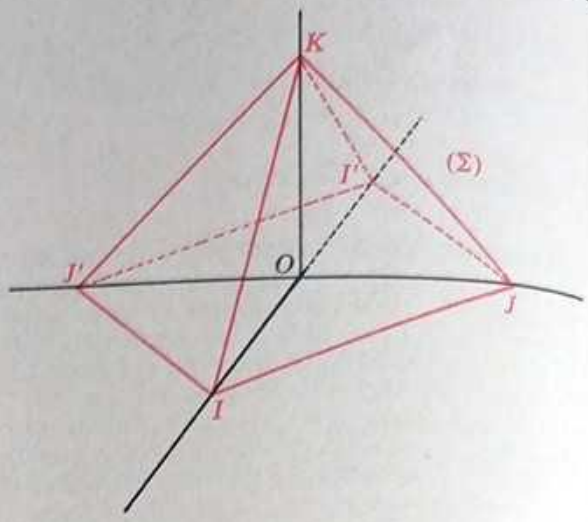
• Soit t un élément de $[0; 1]$; montrer que l'intersection de (Σ) avec le plan (P) d'équation $z = t$ est un carré dont la longueur d'une diagonale est : $2(1 - t)$; en déduire que l'aire de ce carré est $2(1-t)^2$.

Scanné avec CamScanner

Comme $[t \longmapsto 2(1-t)^2]$ est une fonction définie et continue sur [0; 1], nous en déduisons que le volume de (Σ) est

$$V = \int_0^1 2(1-t)^2 \, dt$$

soit $V = \frac{2}{3}$.



2) Cas particulier des « solides de révolution »

• Une partie de $\mathcal{E}$ est un « solide de révolution d'axe (D) » si sa surface-frontière est invariante par toute rotation d'axe (D). Citons par exemple :

— le cône d'axe (D) (engendré par le mouvement de rotation autour de (D) d'une génératrice (Δ) sécante à (D) en S, sommet du cône),

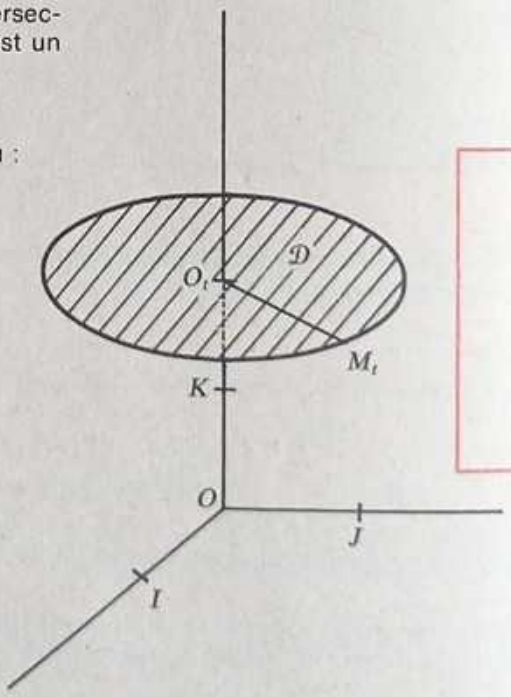
— la sphère de diamètre $[AB]$ (engendrée par le mouvement de rotation autour de (AB) de tout demi-cercle de diamètre $[AB]$).

• Soit (Σ) un solide de révolution d'axe (OK). Dans ce cas particulier, la surface $\mathcal{D}$, intersection de (Σ) avec le plan d'équation $z = t$, est un disque; on a alors :

$$S(t) = \pi (R(t))^2$$

où $R(t)$ est le rayon d'un tel disque; d'où :

$$v = \pi \int_a^b (R(t))^2 \, dt.$$



$OO_t = t$
$O_tM_t = R(t)$
$\mathcal{D}$ disque de centre O_t, de rayon $R(t)$

Scanné avec CamScanner

Exemple 1. Volume d'une boule

Soit $(\mathcal{B})$ la boule de centre O et de rayon ρ; c'est un solide de révolution d'axe (OK). Elle est caractérisée par : $x^2+y^2+z^2 \leqslant \rho^2$.

• L'intersection de $(\mathcal{B})$ avec le plan (P) d'équation $z=t$ (t élément de $[-\rho; \rho]$) est le disque $\mathcal{D}$ de rayon $R(t)$ tel que :

$$R^2(t)=\rho^2-t^2.$$

D'où le volume V de la boule $(\mathcal{B})$ est :

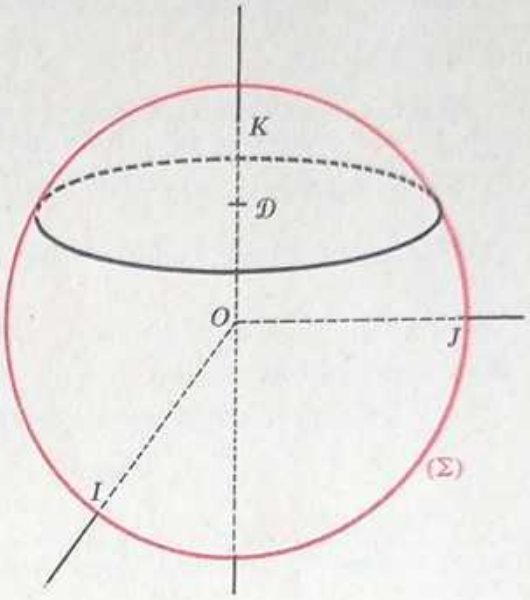
$$V=\pi\int_{-\rho}^{\rho}(\rho^2-t^2)\,dt,$$

soit :

$$V=2\pi\left[\rho^2 t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\rho}$$

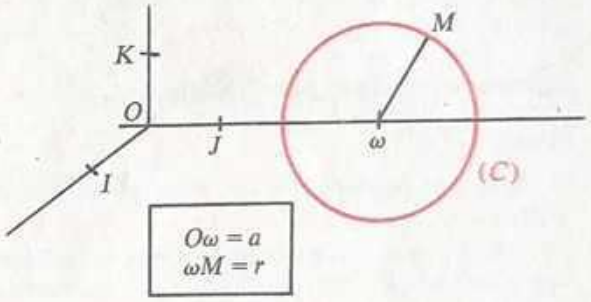
c'est-à-dire :

$$V=\frac{4}{3}\pi\rho^3.$$



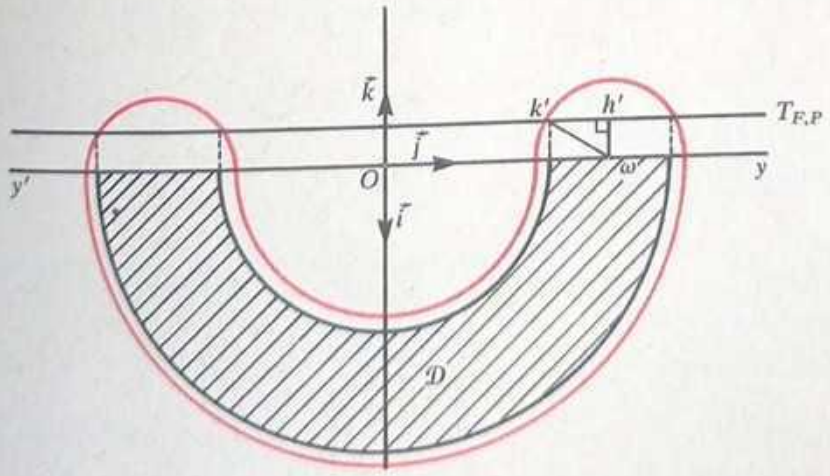
Exemple 2. Volume d'un tore

Soit $(\mathcal{C})$ le disque du plan (OJK), de centre $\omega(0, a, 0)$, a non nul, et de rayon r $(r<a)$.
Le solide de révolution engendré par le mouvement de rotation de $(\mathcal{C})$ autour de (OK) est appelé *un tore*, noté $(\mathcal{T})$.



$O\omega = a$
$\omega M = r$

Soit t un élément de $[-r, r]$. Calculons l'aire de la surface $\mathcal{D}$, intersection du tore $(\mathcal{T})$ avec le plan (P) d'équation $z=t$.



$O\omega = a$
$\omega h' = |t|$
$\omega k' = r$

Scanné avec CamScanner

L'épure de la situation montre que $\mathcal{D}$ est une couronne circulaire (hachurée sur l'épure). On obtient aisément son aire $S(t)$ en fonction de a, r et t; on a :

$$S(t) = \pi 4a\sqrt{r^2 - t^2}.$$

D'où le volume V du tore est :

$$V = \pi 4a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\, dt.$$

Remarquons alors que la fonction $[t \longmapsto \sqrt{r^2 - t^2}]$ admet pour représentation graphique dans le plan $\mathcal{P}$, muni du repère (O, I, J), le demi-cercle de centre O de rayon r constitué des points d'ordonnée positive; ainsi $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - t^2}\, dt$ est l'aire du demi-disque correspondant, c'est-à-dire : $\frac{1}{2}\pi r^2$. D'où l'on obtient le volume V du tore $(\mathcal{C})$:

$$V = 2a\pi^2 r^2.$$

3) Formule des trois niveaux

• Soit f une fonction polynôme du second degré, et a et b deux nombres réels; montrer que :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

• Ce résultat s'applique évidemment aux calculs de volume, dans le cas où l'aire $S(t)$ est une fonction polynôme du second degré de la variable t; on obtient alors, avec a inférieur à b :

$$V = \int_a^b S(t)\, dt$$

$$V = \frac{b-a}{6}\left(S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

appelée *formule des trois niveaux.*

Exercices

1) Retrouver les volumes de la pyramide à base carrée, de la boule et du tore en utilisant cette formule.

2) Soit (Σ) un tronc de cône à bases parallèles, tel que ses sections soient des disques de rayons respectifs r et r'; on donne, de plus, la hauteur h de (Σ); déterminer son volume V.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \frac{dx}{x}; \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}; \quad \int_{e^2}^{2e} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

2 Calculer les nombres réels suivants (on déterminera au préalable leur signe et l'on vérifiera avec le résultat trouvé) :

$$\int_{-1}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x+1}\,dx;$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x+3}\,dx.$$

3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx; \quad \int_{\frac{1}{2}}^{2} (1-|\ln x|)\,dx;$$

$$\int_{-1}^{1} \sin^3 x \cos^6 x\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx;$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x((\ln x)^2+1)^2}\,dx; \quad \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

4 En utilisant un changement de variable affine, calculer les nombres réels suivants :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)dt;$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx; \quad \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx, \text{ où } n\in\mathbb{N}^*;$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx.$$

5 En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx; \quad \int_0^4 x^2\sqrt{2x+1}\,dx;$$

$$\int_{-2}^{-1} x^2 \ln|x|\,dx; \quad \int_0^1 (x+1)^2 e^x\,dx.$$

6 En utilisant une ou plusieurs intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1+\cos x)\,dx; \quad \int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\,dx;$$

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx \left(\text{poser } u'=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\right); \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, e^x\,dx.$$

7 1) En utilisant une intégration par parties calculer I_1 et I_2 telles que :

$$I_1=\int_0^x e^{2t}\cos 2t\,dt \quad \text{et} \quad I_2=\int_0^x e^{2t}\sin 2t\,dt.$$

2) On pose :

$$I=\int_0^x e^{2t}\cos^2 t\,dt \quad \text{et} \quad J=\int_0^x e^{2t}\sin^2 t\,dt.$$

Calculer $I+J$ puis $I-J$; en déduire I et J.

8 Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert I; a et b sont deux points de I tels que : $a<b$.
On suppose que :

$$\forall x\in[a,b] \quad f(a+b-x)=f(x).$$

Montrer que :

$$\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

En déduire, en utilisant ce procédé, la valeur de : $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x\,dx$.

9 1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout u nombre réel différent de $\frac{1}{2}$, on ait :

$$\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}.$$

2) Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}\,dx$.

3) Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}\,dx$.

(Marseille. E. 86)

10 Soit α un nombre réel distinct de -1 et de 2. Déterminer suivant les valeurs de α, l'ensemble de définition de la fonction f telle que :

$$f(x)=\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{t^2-t-2}\,dt.$$

11 1) Montrer que :

$$\forall t\in\mathbb{R}^* \quad \frac{1}{t(1+t^2)}=\frac{1}{t}-\frac{t}{1+t^2}.$$

Scanné avec CamScanner

2) En intégrant par parties, calculer $I(x)$ définie par :

$$I(x)=\int_1^{\sqrt{x}} \frac{2t \ln t}{(1+t^2)^2}\,dt \quad \text{où} \quad x\in\mathbb{R}_+^*.$$

3) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} I(x)$.

12 On pose :

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx \quad \text{et} \quad I_2=I_1+I.$$

a) Calculer I_2.

b) Calculer I_1.

c) Calculer I.

13 Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x\,dx.$$

1) Sans calculer I_n,

a) montrer que la suite (I) est monotone;

b) comparer I_n et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\,dx$.

Montrer alors que la suite (I) converge vers une limite que l'on déterminera.

2) Calculer I_0 et I_1. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et de n.

14 1) n étant un entier naturel non nul, calculer l'intégrale I_n suivante :

$$I_n=\int_0^{\pi} x\cos(2nx)\,dx.$$

2) Linéariser $\sin^6 x$.

3) En utilisant les questions précédentes, calculer I telle que :

$$I=\int_0^{\pi} x\sin^6 x\,dx.$$

15 Pour n, nombre entier naturel non nul, on considère I_n telle que :

$$I_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx.$$

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad (2n+3)I_{n+1}+2(n+1)I_n=0.$$

2) En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

16 Le but de l'exercice est le calcul de l'intégrale I définie par :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^5 x}.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}.$$

1) Montrer l'existence de nombres réels a et b tels que :

$$\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right] \quad \frac{1}{\cos x}=\frac{a\cos x}{1-\sin x}+\frac{b\cos x}{1+\sin x}.$$

En déduire le calcul de I_0.

2) Montrer, par une intégration par parties, que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 2nI_n=(2n-1)I_{n-1}+\frac{2^n}{\sqrt{2}}.$$

En déduire le calcul de I.

17 Soit (I) la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad I_n=\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\,dx.$$

1) Calculer I_0+I_1 et I_1. En déduire la valeur de I_0.

2) Calculer I_n+I_{n+1} en fonction de n. En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

3) *a*) En comparant e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque x est élément de l'intervalle [0; 1], montrer que la suite (I) est croissante.

b) Montrer que, pour x élément de l'intervalle [0; 1], on a :

$$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{1+e^x}\leqslant\frac{1}{2}.$$

En déduire un encadrement de I_n.

c) Quelle est la nature de la suite (I)?

18 Soit α et β deux nombres réels non nuls. Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, la fonction

$$[x\longmapsto e^{\alpha x}(a\cos\beta x+b\sin\beta x)]$$

admet sur $\mathbb{R}$ une primitive de la forme

$$[x\longmapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)],$$

où A et B sont deux nombres réels que l'on déterminera en fonction de α, β, a et b.
En déduire le calcul de :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{2x}(\cos x-\sin x)\,dx.$$

Scanné avec CamScanner

19 λ étant un nombre réel strictement positif, montrer que l'on peut calculer

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_1^{\lambda}\frac{x+1}{x}\,e^{-\frac{1}{x}}\,dx,$$

en intégrant par partie $\displaystyle\int_1^{\lambda} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$.

Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda>0}}\mathcal{A}(\lambda)$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

20 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx;\quad I_2=\int_{-\frac{1}{3}}^{-1}\frac{2x+1}{(3x+2)^3}\,dx.$$

Pour le calcul de I_2, on pourra effectuer un changement de variable affine.

(Japon. C. 86)

21 n étant un nombre entier naturel, soit I_n tel que :

$$I_n=\int_0^1 x^n e^x\,dx.$$

a) Calculer I_1.

b) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

c) Calculer J tel que :

$$J=\int_0^1 (x^3+2x^2-2x)\,e^x\,dx.$$

22 Soit la fonction

$$f: x\longmapsto\frac{\ln x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}.$$

1) Déterminer son ensemble de définition D_f; montrer que f est continue sur D_f.

2) Calculer : $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

23 Pour tout nombre entier naturel n, on définit les nombres réels x_n et y_n par :

$$x_n=\int_0^1 t^n\cos t\,dt;\quad y_n=\int_0^1 t^n\sin t\,dt.$$

1) Calculer x_0 et x_1.

2) Montrer que les suites (x) et (y) de termes généraux respectifs x_n et y_n, sont décroissantes; en déduire qu'elles sont convergentes.

3) Montrer que pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$x_{n+1}=-(n+1)\,y_n+\sin 1$$
$$y_{n+1}=(n+1)\,x_n-\cos 1.$$

En déduire que : $\lim(x)=\lim(y)=0$ et que :

$$\lim n\cdot(x)=\cos 1;\quad \lim n\cdot(y)=\sin 1.$$

24 On considère les deux suites (u) et (v) définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et $\displaystyle v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\,u_n$.

1) Montrer les inégalités :

si $p\in\mathbb{N}$ et $p\geqslant 1$, alors $\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{p}}$;

si $p\in\mathbb{N}$ et $p\geqslant 2$, alors $\displaystyle\int_{p-1}^{p}\frac{dx}{\sqrt{x}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{p}}$.

2) En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 2\sqrt{n+1}-2\leqslant u_n\leqslant 2\sqrt{n}-1.$$

3) Déterminer les limites éventuelles des suites (u) et (v).

(La Réunion. C. 85)

25 1) Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=1-x+\sqrt{x^2+3}.$$

Étudier f et tracer sa courbe représentative (C_f) dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J).

2) Déduire de l'étude précédente que f admet une réciproque g. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_g$. Montrer que :

$$\forall x\in\mathcal{D}_g\quad g(x)=\frac{3-(x-1)^2}{2(x-1)}.$$

Tracer sa courbe représentation (C_g).

3) *a*) Calculer $\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} g(x)\,dx$.

b) En déduire $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ puis $\displaystyle\int_0^1\sqrt{x^2+3}\,dx$.

26 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x\,(1-\ln|x|) & \text{si}\quad x\in\mathbb{R}^*\\ f(0)=0.\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Construire sa courbe représentative (C_f) dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J).

3) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre (C_f), (OI) et les droites d'équation $x=-1$ et $x=e$.

Scanné avec CamScanner

27 Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

1) Étudier f et construire sa courbe représentative (C_f) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Montrer qu'une primitive de f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ où $0<\alpha<\beta<\pi$ est la fonction F définie par :

$$F(x)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-g(x)$$

où g désigne une fonction simple que l'on déterminera.

3) En déduire l'aire du domaine caractérisé par :

$$\begin{cases}\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{3\pi}{4}\\ f(x)\leq y\leq 0.\end{cases}$$

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}f(x)=\frac{1}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{|x|}\right) \text{ si } x\in\mathbb{R}^*\\ f(0)=0.\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Étudier f et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J).

3) Soit m un nombre réel strictement supérieur à 1.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(m)$ de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases}\frac{1}{m}\leq x\leq m\\ 0\leq y\leq f(x).\end{cases}$$

En déduire $\lim\limits_{m\to+\infty}\mathcal{A}(m)$.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases}f(n)=x\left|\ln|x|\right| \text{ si } x\in\mathbb{R}^*\\ f(0)=0.\end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

2) Étudier f et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J).

3) Calculer l'aire de la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases}-e\leq x\leq e\\ |y|\leq|f(x)|.\end{cases}$$

30 Soit f l'application définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=4x-\tan^2 x.$$

1) Étudier f et construire sa représentation graphique dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthogonal (O, I, J) tel que π soit représenté par 6 cm sur la droite des abscisses et 1 par 1 cm sur la droite des ordonnées.

2) Calculer sur le dessin, en cm^2, l'aire de la surface caractérisée par :

$$0\leq x\leq\frac{\pi}{3} \text{ et } 0\leq y\leq f(x).$$

31 1) Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$u_n=\int_n^{n+1}(x+1)e^{-x}\,dx.$$

a) Justifier l'existence des termes de la suite (u).

b) Calculer u_n en fonction de n.

c) Déterminer la nature de la suite (u).

2) Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$S_n=\sum_{i=0}^{n}u_i.$$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la nature de la suite (S).

c) Déterminer un nombre entier naturel n_0 tel que :

$$n>n_0 \implies |S_n-2|<10^{-4}.$$

32 Soit f_λ la fonction définie par :

$$f_\lambda(x)=e^x\cos(x+\lambda).$$

1) Montrer que f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et mettre $f'_\lambda(x)$ sous la forme :

$$f'_\lambda(x)=Ae^x\cos(x+\lambda+a)$$

où A et a sont des nombres réels que l'on déterminera.

2) Calculer la dérivée huitième de f_0.

3) Déterminer une fonction F vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad F'(x)=f_0(x) \quad \text{et} \quad F(0)=\frac{1}{2}.$$

Application : Calculer $\int_0^x\left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{u}e^t\cos t\,dt\right)du$.

33 1) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\int_1^{1+x^2}\ln t\,dt.$$

Calculer la dérivée $F'(x)$ de F au point x.

Scanné avec CamScanner

2) En utilisant une intégration par parties, calculer explicitement $F(x)$. Retrouver l'expression de $F'(x)$.

34 Pour n nombre entier naturel non nul, on considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \int_1^x t^{-n} \ln t \, dt.$$

1) Calculer $f_1(x)$, puis $\lim_{+\infty} f_1$.

2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $f_n(x)$.

3) Pour n strictement supérieur à 1, montrer que f_n admet une limite en $+\infty$; la calculer.

35 1) Soit f la fonction définie par :

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \tan x.$$

Montrer que f est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$; soit f^{-1} sa réciproque.

2) Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt$$

et h la fonction définie par $h = g \circ f$.

a) Déterminer les ensembles de définition des fonctions g et h; calculer $h(0)$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; déterminer sa fonction dérivée.

c) En déduire que : $g = f^{-1}$.

d) Calculer : $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

36 1) Montrer que la fonction $[x \longmapsto e^x \ln x]$ est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

2) On veut calculer $\int_1^2 e^x \ln x \, dx$ par la méthode des rectangles; quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu en partageant $[1; 2]$ en dix intervalles de même amplitude? Déterminer cet encadrement.

37 Donner une valeur approchée de :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1+x^2} \, dx.$$

(Utiliser la méthode des rectangles en choisissant $n = 15$.)

38 ⋆ *Calculatrice programmable indispensable.*

Sachant que $\int_1^5 \frac{dx}{x} = \ln 5$, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-2} de $\ln 5$, en utilisant la méthode des rectangles.

39 Soit $I = \int_{\frac{3}{5}}^{\frac{4}{5}} \sqrt{1-x^2} \, dx$.

1) Donner un encadrement de I, en utilisant la méthode des rectangles, avec $n = 10$.

2) Déterminer une valeur de n pour obtenir, par cette méthode un encadrement de I d'amplitude inférieure à $2 \cdot 10^{-3}$.

40 Soit J l'intégrale définie par :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\cos^2 t} \, dt.$$

1) Montrer que : $\sqrt{3}\,\frac{\pi}{8} \leqslant J \leqslant \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$.

2) Déterminer, par la méthode des trapèzes, une valeur approchée de J, en décomposant l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ en dix intervalles de même amplitude.

Scanné avec CamScanner

Problèmes

41 Pour n, nombre entier naturel, on considère le nombre réel I_n défini par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx.$$

1) Calculer I_0, puis I_1.

2) Établir, pour n, nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, la relation de récurrence suivante :

$$n I_n = (n-1) I_{n-2}.$$

3) En déduire I_{2p} et I_{2p+1} pour p nombre entier naturel.

4) Établir que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p} \geqslant I_{2p+1} \geqslant I_{2p+2}.$$

En déduire que :

$$\lim_{p \to +\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1.$$

5) Calculer :

$$\lim_{p \to +\infty} \left[\frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2p} \right]^2 (2p+1).$$

42 *A*) 1) Soit f la fonction définie par :

$$f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto \sqrt{\tan x}.$$

Étudier f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J).

2) Montrer que f admet une réciproque g définie et dérivable sur $\mathbb{R}^+$; calculer $g'(x)$.
Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
Tracer (C'), courbe représentative de g, dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé (O, I, J).

B) 1) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = 2\int_0^x \frac{t}{1+t^4} \, dt.$$

Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$; calculer $G'(x)$.
Préciser $G(0)$.
Reconnaître la restriction de G à $\mathbb{R}_+$.

2) Étudier la parité de G.
Construire la représentation graphique (γ) de G dans $\mathcal{P}$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} \, dt$.

43 1) Montrer que, pour tout nombre réel x, on a :

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t) e^t \, dt.$$

2) *a*) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x, on a :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \, dt.$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul, et pour tout nombre réel x, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

3) Pour tout nombre entier naturel non nul n, on considère :

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt.$$

Montrer que : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n!}$.

(On remarquera que : $\forall t \in [0; 1] \quad e^t \leqslant e$.)

4) Soit (u) la suite de terme général u_n tel que :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Déduire des questions précédentes que :

$$\lim (u) = e.$$

44 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}.$$

1) Déterminer son ensemble de définition.
Étudier les variations de f.
Tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe (C) admet-elle des axes de symétrie?
Soit Ω le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Déterminer une équation de (C) dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Calculer le nombre réel I tel que :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos t} \, dt.$$

En déduire l'aire de la région du plan limitée par (C), la droite $D(O, \vec{i})$, et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \pi$.

Scanné avec CamScanner

3) Soit A le nombre réel défini par :

$$A=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}\,dx.$$

a) Justifier l'existence de A.

b) En effectuant le changement de variable $t=\pi-x$, déterminer une relation entre A et I; en déduire A.

45 Pour tout nombre entier naturel non nul, n, on considère :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^n\,dx.$$

1) *a*) Justifier l'existence de I_n et montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n\geqslant 0.$$

b) Montrer que la suite (I), de terme général I_n, est décroissante. Que peut-on en conclure?

2) *a*) Pour tout nombre entier naturel non nul n, et pour tout x élément de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, calculer la dérivée de $(\tan x)^{n+1}$. En déduire l'expression de I_n+I_{n+2} en fonction de n.

b) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

En déduire $\lim(I)$.

3) *a*) Calculer I_2.

b) On pose $f(n)=I_{n+4}-I_n$ pour n élément de $\mathbb{N}^*$.
Exprimer $f(n)$ en fonction de n.

c) Pour k, nombre entier naturel non nul, calculer :

$$f(2)+f(6)+f(10)+\ldots+f(4k-2),$$

en fonction de I_2 et de I_{4k+2}.

d) Soit (S) la suite de terme général :

$$S_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n+1}.$$

Déduire des résultats précédents $\lim(S)$.

46 Soit F l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}\,dt.$$

1) Étudier les variations de F; en déduire le signe de $F(x)$ pour x élément de $\mathbb{R}_+^*$.

2) Déterminer, sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de la fonction f définie par :

$$f(x)=F(x)-\ln x.$$

En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

3) Soit (C_F) la courbe représentative de F dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

a) Déterminer une équation de la tangente à (C_F), au point de (C_F) d'abscisse 1. Préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe.

b) En utilisant la méthode des rectangles (choisir $n=10$), donner un encadrement de $F(2)$, puis de $F(6)$.

c) Montrer que :

$$\forall t\in]1;+\infty[\quad e^t>t\,e^{\frac{t}{2}}.$$

En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$.

d) Construire la courbe (C_F).

47 *I*) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\,dt.$$

Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}_+\quad f(x)\leqslant e^{-x}$.
Quelle est la limite de f en $+\infty$?

II) 1) Montrer que, pour tout nombre réel b strictement positif,

$$\forall X\in\mathbb{R}\quad\left[-b\leqslant X\leqslant b\right.$$
$$\left.\Longrightarrow\quad 0\leqslant e^X-1-X\leqslant\frac{1}{2}e^bX^2\right].$$

2) Soit a un nombre réel, montrer que pour tout nombre réel h on a :

$$f(a+h)-f(a)+h\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos 2t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}\left[e^{-\frac{h}{\cos^2 t}}-1+\frac{h}{\cos^2 t}\right]dt.$$

Montrer qu'il existe une fonction φ vérifiant :

$$\begin{cases}f(a+h)-f(a)=h\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\,dt+\varphi(h)\right]\\ \lim\limits_0\varphi=0.\end{cases}$$

En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et définir f'.

III) Soit P une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application $[u\longmapsto e^{-u^2}]$. Pour tout nombre réel x, on considère l'application Q_x définie par :

$$Q_x:\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$t\longmapsto P(x\tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; expliciter sa fonction dérivée. Prouver que,

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\int_0^x e^{-u^2}\,du=x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}\,dt.$$

Scanné avec CamScanner

IV) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=f(x^2)$, et g' sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$g'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Que peut-on dire de la fonction h définie par :

$$h(x)=g(x)+\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2.$$

En déduire que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(D'après groupe I bis. 78)

48 Pour tout nombre entier naturel k, on note f_k l'application de [0; 1] dans $\mathbb{R}$ définie par :

Si $k\neq 0$ $f_k(x)=x^k\sqrt{1-x}$

et $f_0(x)=\sqrt{1-x}$.

A) 1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f_k.

2) Donner, en distinguant suivant la valeur de k, le tableau de variation de f_k. Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) représentatives de f_0, f_1 et f_2; préciser la position relative de ces trois courbes.

3) Calculer $\int_0^1 f_0(x)\,dx$.

4) Pour k élément de $\mathbb{N}$, on pose :

$$I_k=\int_0^1 f_k(x)\,dx;$$

montrer, en intégrant par parties que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*\quad I_k=\frac{2k}{2k+3}I_{k-1}.$$

En déduire une expression de I_k (que l'on ne cherchera pas à simplifier).

5) Montrer que, pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on a :

$$I_k\leqslant\frac{1}{k+1}.$$

En déduire la limite de la suite (I), de terme général I_k.

B) On considère l'application F, définie sur [0; 1] par :

$$\begin{cases}F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ si } x\in[0;1[\\ F(1)=0.\end{cases}$$

1) Étudier la continuité de F sur [0; 1]. Présenter le tableau de variation.

2) Dans la suite du problème, pour tout nombre entier naturel non nul n, on note F_n la fonction définie sur [0; 1] par :

$$F_n(x)=f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_{n-1}(x).$$

Calculer $F_n(x)$ et montrer que, pour tout x réel fixé dans [0; 1], $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.

3) Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on désigne par A_n l'intégrale :

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,dx.$$

Calculer A_n. Déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$.

4) Établir que $\int_0^1 F_n(x)\,dx$ tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$.

On pourra écrire :

$$\int_0^1 F_n(x)\,dx=\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}-\int_0^{1-\frac{1}{n}}\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,dx+\int_{1-\frac{1}{n}}^1 F_n(x)\,dx,$$

majorer la deuxième intégrale du second membre en majorant $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ par $\sqrt{n}$, et majorer la dernière intégrale en majorant $F_n(x)$ par $\sqrt{n}$.

(Aix-en-Provence. 82)

49 *A) Étude d'une fonction numérique définie par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.*

1) Démontrer que pour tout nombre réel x élément de l'ensemble

$$\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[,$$

l'intégrale $\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,dt$ est définie.

2) On considère l'application :

$$f:\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$$

$$x\longmapsto\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}\,dt.$$

Démontrer que f est dérivable en tout point de l'ensemble de définition, et que pour tout x élément de $\left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{\ln\frac{x}{2}}{(\ln 2x)(\ln x)}.$$

Déterminer le sens de variation de f.

Scanné avec CamScanner

3) *a*) Démontrer que pour tout x élément de $\left]0; \frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$:

$$\frac{x}{\ln 2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\ln x}.$$

b) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers zéro.

c) Déterminer les limites respectives de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4) On considère l'application

$$\Phi :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto 2 - 2t + \ln t.$$

De l'étude des variations de Φ sur $]0; 1]$ (sens de variation et limites aux bornes de l'intervalle de définition) déduire l'existence d'un unique nombre réel α, élément de $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ tel que $\Phi(\alpha) = 0$ et justifier que pour tout nombre réel t, élément de $[\alpha, 1]$, on a : $\ln t \geqslant 2t - 2$.
Utiliser l'inégalité précédente pour démontrer que pour tout x élément de $\left[\alpha, \frac{1}{2}\right[$:

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}.$$

En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{1}{2}$.

5) Démontrer que pour tout nombre réel t élément de $[1, +\infty[$:

$$\ln t \leqslant t - 1.$$

Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

6) *a*) Résumer dans un tableau l'étude de la fonction f.

b) On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(C') = (C) \cup \{O\}$.
Donner l'allure de la courbe (C') en précisant la tangente en O et les droites asymptotes.

B) Étude d'une famille de fonctions numériques définies par une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer.

On considère, pour chaque nombre entier n supérieur ou égal à 2, l'application :

$$g_n :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_x^{nx} \frac{1}{\ln t} dt$$

et on désigne par (Γ_n) la courbe représentative de g_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1) n et m étant des nombres entiers tels que : $2 \leqslant n \leqslant m$, étudier la position relative des courbes (Γ_n) et (Γ_m).

2) Démontrer que g_n est dérivable en tout point de l'intervalle $]1, +\infty[$ et expliciter sa fonction dérivée.
En déduire que (Γ_n) admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses en un point d'abscisse $u_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ et d'ordonnée $v_n = g_n(u_n)$.

3) *a*) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$ est convergente et préciser sa limite.

b) Montrer que pour tout nombre entier naturel n, supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} < e \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < 1$$

(on pourra utiliser le résultat :

$$\forall t \in]1, +\infty[\quad \ln t < t - 1).$$

En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

c) Étudier la limite de la suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$.

(Bordeaux. 85)

50 *Approximation de la valeur d'une intégrale par la méthode de Simpson.*
Soit f une fonction continue et dérivable jusqu'à l'ordre 4 sur un intervalle ouvert I; considérons alors deux nombres réels a et b $(a < b)$ de I tels que la fonction $f^{(4)}$ soit majorée par M_4 en valeur absolue sur l'intervalle $[a; b]$.

On pose $c = \frac{a+b}{2}$ et pour h élément de $[0; b-a]$:

$$R(h) = \int_{c-\frac{h}{2}}^{c+\frac{h}{2}} f(t)\,dt - \frac{h}{6}\left[f\left(c - \frac{h}{2}\right) + 4f(c) + f\left(c + \frac{h}{2}\right)\right].$$

1) Montrer que, pour tout h de l'intervalle $[0; b-a]$, on a :

$$\left|f^{(3)}\left(c - \frac{h}{2}\right) - f^{(3)}\left(c + \frac{h}{2}\right)\right| \leqslant M_4\, h.$$

Scanné avec CamScanner

2) Montrer que R est dérivable sur $[0; b-a]$ et que l'on a :

$$R'(h)=\frac{1}{3}f\left(c+\frac{h}{2}\right)+\frac{1}{3}f\left(c-\frac{h}{2}\right)-\frac{2}{3}f(c)+\frac{h}{12}\left[f'\left(c-\frac{h}{2}\right)-f'\left(c+\frac{h}{2}\right)\right].$$

3) Calculer $R^{(3)}(h)$ et en déduire que :

$$|R^{(3)}(h)| \leqslant \frac{M_4 h^2}{48}.$$

4) Vérifier que $R(0)$, $R'(0)$ et $R''(0)$ sont nuls.

5) Montrer alors que :

$$\forall h \in [0; b-a], \quad |R(h)| \leqslant \frac{M_4 h^5}{2880}.$$

6) On considère la suite :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ \ldots,$$

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = b,$$

et l'on désigne par x'_i le centre de $[x_{i-1}, x_i]$.

a) Montrer que :

$$\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dt - \frac{b-a}{6n}\left(f(x_{i-1})+4f(x'_i)+f(x_i)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^5}.$$

b) Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5 M_4}{2880n^4}.$$

Ainsi $\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n} f(x_i)+4\sum_{i=1}^{n} f(x'_i)\right)$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,dt$; de plus on obtient une majoration de l'erreur commise, dans la mesure où $f^{(4)}$ est majorée en valeur absolue; cette méthode est appelée **méthode de Simpson.**

c) En utilisant cette méthode (et en choisissant $n=5$), calculer une valeur approchée de :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

On sait que cette intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$ (voir exercice 35). Quelle est la précision du résultat trouvé par la méthode de Simpson?

7) Montrer que si f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 on a alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

Scanné avec CamScanner

7 Développements limités

1) INTRODUCTION
2) ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES
3) DÉFINITIONS
4) DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS EN 0 DES FONCTIONS USUELLES
5) APPLICATIONS

1 Introduction

1) Rappels

Soit f une fonction dérivable au point 0.
Il existe donc un intervalle ouvert de centre 0 et de rayon r, noté $I(0; r)$, inclus dans l'ensemble de définition de f, et une fonction numérique ε tels que :

$$(1) \qquad \begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = f(0) + x\ f'(0) + x\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Cette écriture constitue le développement limité d'ordre 1 de f au point 0.
Nous avons vu en classe de Première que l'existence du développement limité d'ordre 1 de f en 0 est équivalente à la dérivabilité de f en 0 et donc à l'existence de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f; la fonction affine

$$g : x \longmapsto f(0) + xf'(0)$$

a pour représentation graphique la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

Soit R la fonction définie par : $\forall x \in I(0; r) \quad R(x) = f(x) - g(x)$.

Scanné avec CamScanner

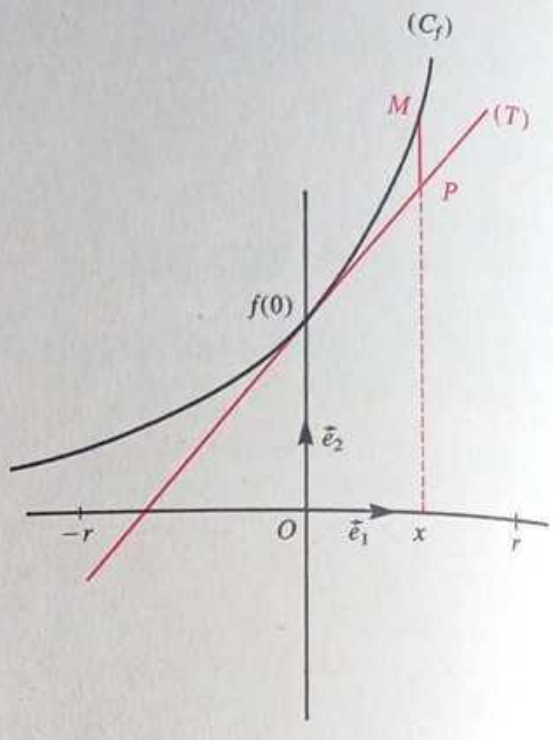
Les fonctions f et g étant continues au point 0, R l'est aussi et vérifie :

(2) $\lim_0 R = 0$

de plus (1) permet d'écrire :

$$(3)\begin{cases}\forall x \in I(0; r) \quad R(x) = x\varepsilon(x)\\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{x} = 0.\end{cases}$$

La propriété (3) est plus forte que la propriété (2). On peut interpréter ce résultat géométriquement en disant :
quand x tend vers 0, $\overline{PM}$ tend vers 0 « plus efficacement » que x (voir dessin ci-contre).



Notons que g est la seule fonction affine réalisant les conditions :

$$\begin{cases}\forall x \in I(0; r) \quad f(x) = g(x) + R(x)\\ R(0) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R(x)}{x} = 0.\end{cases}$$

En effet, supposons qu'il existe une fonction affine g_1 vérifiant ces conditions; il existe alors des nombres réels a et b, et une fonction R_1 définie sur $I(0; r)$, tels que :

$$\begin{cases}\forall x \in I(0; r) \quad g_1(x) = b + ax\\ \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = g_1(x) + R_1(x)\\ R_1(0) = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_1(x)}{x} = 0.\end{cases}$$

On a donc : $f(x) = ax + b + R_1(x)$

d'où l'on déduit immédiatement $f(0) = b$ et $f(x) = f(0) + ax + R_1(x)$.

De plus : $\forall x \in I(0; r) - \{0\} \quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = a + \dfrac{R_1(x)}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_1(x)}{x} = 0$, on obtient $a = f'(0)$.

Finalement : $\forall x \in I(0; r) \quad g_1(x) = g(x)$

et donc $\forall x \in I(0; r) \quad R_1(x) = R(x)$.

Scanné avec CamScanner

Il y a donc unicité de la fonction affine g vérifiant les conditions (2) et (3) et du développement limité de f d'ordre 1 en 0.

Remarque. La condition (3) privilégie la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ parmi toutes les droites passant par le point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 0.

Exemple. Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 + 2x + x^2.$$

Le développement limité d'ordre 1 de f en 0 s'écrit :

$$\forall x \in I(0; r) \qquad f(x) = 1 + 2x + x\varepsilon(x),$$

où r est un nombre réel strictement positif quelconque et ε la fonction définie par :

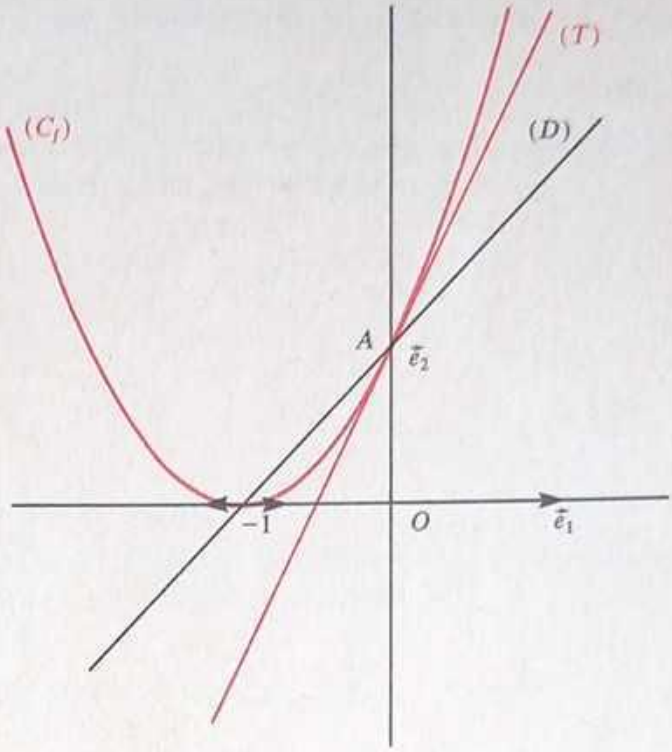
$$\forall x \in I(0; r) \quad \varepsilon(x) = x.$$

Nous pouvons aussi écrire :

$$\forall x \in I(0; r) \qquad f(x) = 1 + x + x + x^2,$$

soit en appelant $R_1(x)$ le nombre réel $x + x^2$,

$$\forall x \in I(0; r) \qquad f(x) = 1 + x + R_1(x).$$



Remarquer que dans ces conditions, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_1(x)}{x} \neq 0$ alors que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\varepsilon(x)}{x} = 0$.

Nous voyons apparaître ici la nécessité de la condition (3) pour caractériser la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ parmi les droites passant par $A(0; 1)$.
Cependant une droite passant par A, même s'il s'agit de la tangente au point A, n'est assimilable à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ que tout près du point A.
Il pourrait être intéressant, pour avoir une meilleure approximation des valeurs prises par f, de chercher à l'approcher par une fonction autre qu'une fonction affine, en particulier par une fonction polynôme de degré 2 adéquate.

2) Exemple de recherche d'une approximation polynomiale de degré 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

Le développement limité d'ordre 1 de f en 0 s'écrit :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = 1 + x + x\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Cherchons une fonction polynôme P_2 de degré 2 approchant f au voisinage de 0.
Elle doit vérifier :

$$P_2(0) = 1 \quad \text{et} \quad P_2'(0) = 1;$$

Scanné avec CamScanner

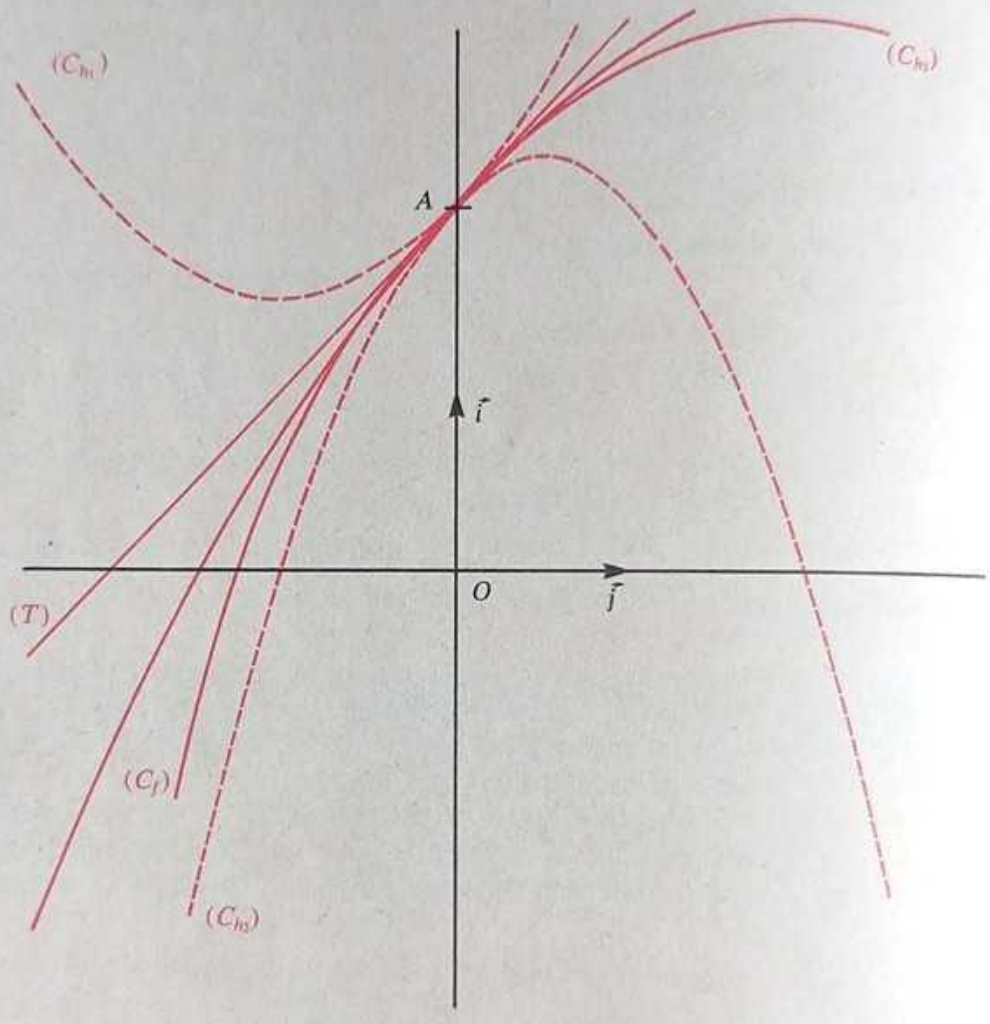
donc P_2 est du type :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_2(x) = 1 + x + \gamma x^2$$

où γ est un nombre réel.
Il reste à s'assurer que le fait de chercher à approcher f permet de déterminer γ.
Soit h_1 et h_2 les fonctions polynômes définies par :

$$h_1(x) = 1 + x + x^2; \quad h_2(x) = 1 + x - 2x^2,$$

elles vérifient les conditions énoncées précédemment.
Traçons les représentations graphiques $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_{h_1})$ et $(\mathcal{C}_{h_2})$ respectivement de f, h_1 et h_2 relativement au même repère.



Remarquons déjà que les paraboles telles que $(\mathcal{C}_{h_1})$ ne semblent pas convenir. En effet au voisinage du point $A(0; 1)$, la différence entre les courbes $(\mathcal{C}_{h_1})$ et $(\mathcal{C}_f)$ peut s'exprimer en constatant que pour x élément de $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$, les tangentes à $(\mathcal{C}_{h_1})$ ont un coefficient directeur croissant alors que celles à $(\mathcal{C}_f)$ ont un coefficient directeur décroissant.

Constater que pour x élément de $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$, les tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ et à $(\mathcal{C}_{h_2})$ ont des coefficients directeurs qui varient dans le même sens.

Scanné avec CamScanner

Il paraît donc intéressant de choisir une parabole ayant, pour des points voisins de A, des tangentes de coefficients directeurs variant dans le même sens que ceux des tangentes à $(\mathcal{C}_f)$.
Or, pour tout x_0 élément de $I(0; r)$, le coefficient directeur de la tangente à la parabole recherchée au point d'abscisse x_0 est $P_2'(x_0)$.
La fonction P_2' est affine et on souhaite qu'elle soit assimilable à f'; or f' est définie par $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, elle admet donc un développement limité d'ordre 1 en 0.
Il paraît satisfaisant que P_2' coïncide sur $I(0; r)$ avec la fonction affine intervenant dans ce développement limité.
Celui-ci s'écrit

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) & \dfrac{1}{1+x}=1-x+x\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon=0; \end{cases}$$

on obtient donc : $\gamma=-\dfrac{1}{2}$.

Soit h_3 la fonction polynôme de degré 2 définie par : $h_3(x)=1+x-\dfrac{1}{2}x^2$; traçons la représentation graphique $(\mathcal{C}_{h_3})$ de h_3, nous pouvons constater que $(\mathcal{C}_{h_3})$ réalise une meilleure approximation que $(\mathcal{C}_{h_2})$ au voisinage du point A.
Il nous reste à écrire :

$$\forall x \in I(0; 1) \quad f(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2+R_3(x),$$

où R_3 est définie par :

$$\forall x \in I(0; 1) \quad R_3(x)=f(x)-\left(1+x-\frac{1}{2}x^2\right).$$

Mais remarquons que l'on peut aussi écrire :

$$\forall x \in I(0; 1) \quad f(x)=1+x-x^2+R_2(x).$$

Il nous reste donc à trouver une condition portant sur R_3, permettant de caractériser h_3 parmi toutes les fonctions polynômes de degré 2 dont les courbes représentatives passent par A (de la même façon que la condition (3) du début du paragraphe permettait de caractériser (T) parmi les droites passant par A).

2 Activités préliminaires

1) Comparaison de fonctions ayant la même approximation affine en 0

a) **Activité 1**

Soit f_1, f_2, f_3 et f_4 les fonctions définies par :

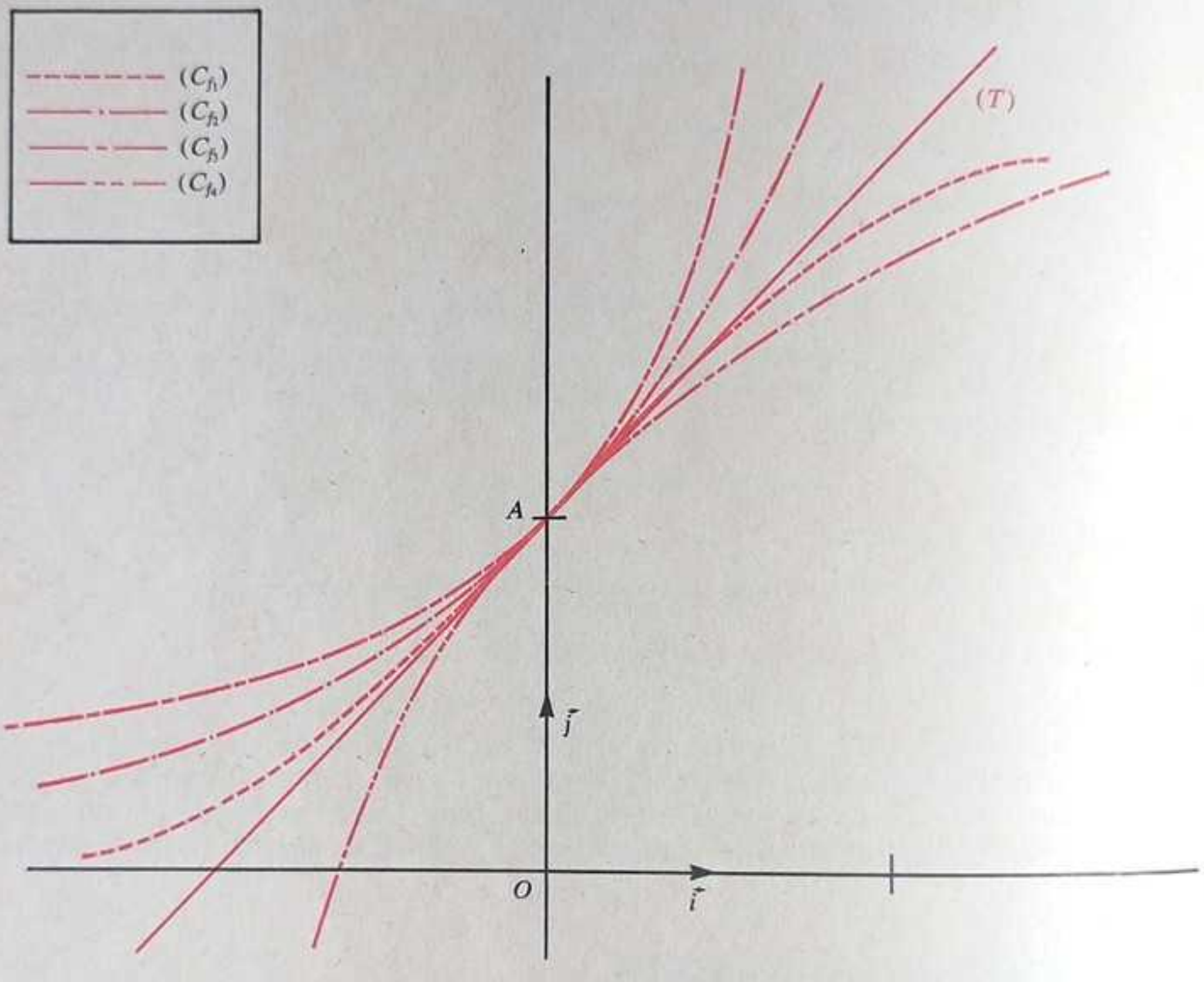
$$f_1(x)=1+\sin x;$$
$$f_2(x)=e^x;$$
$$f_3(x)=\frac{1}{1-x};$$
$$f_4(x)=1+\ln(1+x).$$

Scanné avec CamScanner

Montrer que pour chaque fonction f_i, $i \in \{1; 2; 3; 4\}$, il existe un intervalle $I(0; r_i)$ et une fonction ε_i tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_i) & f_i(x) = 1 + x + x\varepsilon_i(x) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon_i = 0. \end{cases}$$

Ces quatre fonctions ont donc la même approximation affine au point 0.
Traçons les représentations graphiques $(\mathcal{C}_{f_1})$, $(\mathcal{C}_{f_2})$, $(\mathcal{C}_{f_3})$ et $(\mathcal{C}_{f_4})$ de ces quatre fonctions relativement au même repère.



Celles-ci permettent de vérifier que :

— au point $A(0; 1)$ les quatre courbes admettent la même tangente (T);

— les courbes ne se positionnent pas de la même façon par rapport à cette tangente.

$(\mathcal{C}_{f_2})$ et $(\mathcal{C}_{f_3})$ ont des allures du même type; par contre l'allure de $(\mathcal{C}_{f_1})$ ainsi que celle de $(\mathcal{C}_{f_4})$ est différente de celle de $(\mathcal{C}_{f_2})$.
Ces allures différentes se traduisent au niveau des ε_i :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in I(0; r_2) & x\varepsilon_2(x) \geqslant 0; \\ \forall x \in I(0; r_3) & x\varepsilon_3(x) \geqslant 0; \\ \forall x \in I(0; r_4) & x\varepsilon_4(x) \leqslant 0; \end{array}$$

Scanné avec CamScanner

quant à $(\mathcal{C}_{f_i})$ remarquons que : $\begin{cases}\forall x\in]-r_1, 0[& x\varepsilon_1(x)\geqslant 0\\ \forall x\in [0, r_1[& x\varepsilon_1(x)\leqslant 0.\end{cases}$

Pour améliorer la distinction entre ces quatre fonctions au voisinage de A, il paraît donc nécessaire d'étudier plus précisément les fonctions ε_i.

b) **Activité 2. Étude particulière de la fonction f_3**

Prenons $I(0, r_3)=]-1; 1[$.
Vérifier que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in]-1; 1[\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

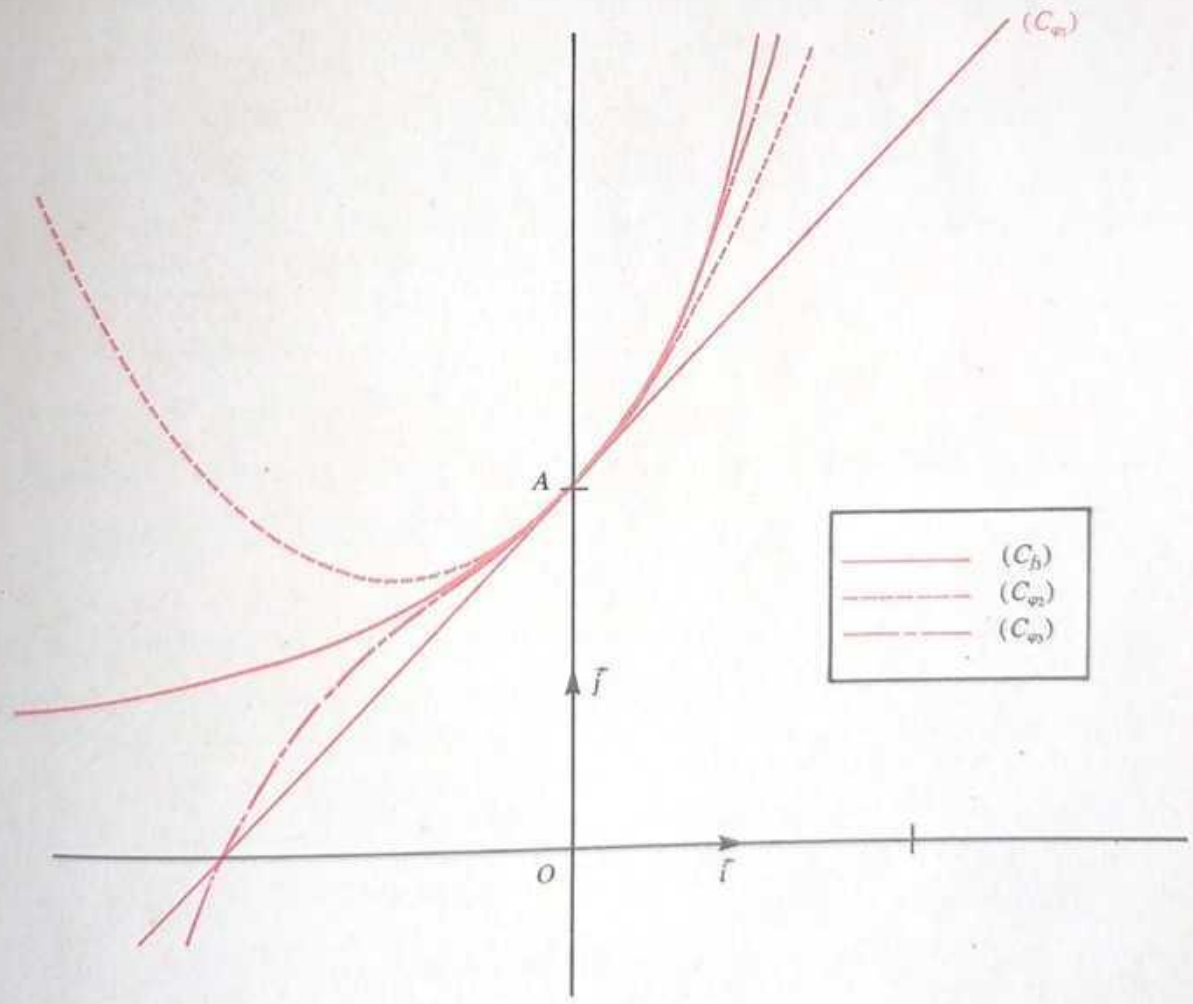
Pour n égale 1, nous retrouvons le développement limité d'ordre 1 de f_3 en 0.
Soit φ_1, φ_2 et φ_3 les fonctions polynômes définies par :

$$\varphi_1(x)=1+x;\qquad \varphi_2(x)=1+x+x^2;\qquad \varphi_3(x)=1+x+x^2+x^3.$$

Soit R_1, R_2 et R_3 les fonctions définies par :

$$\forall x\in]-1; 1[\quad \begin{aligned} f_3(x)&=\varphi_1(x)+R_1(x)\\ &=\varphi_2(x)+R_2(x)\\ &=\varphi_3(x)+R_3(x).\end{aligned}$$

Dans chaque cas nous pouvons vérifier que : $\lim\limits_{x\to 0} R_i(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{R_i(x)}{x}=0$.
Traçons les représentations graphiques $(\mathcal{C}_{\varphi_1})$, $(\mathcal{C}_{\varphi_2})$ et $(\mathcal{C}_{\varphi_3})$.



Scanné avec CamScanner

Celles-ci nous permettent de constater que les fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 réalisent des approximations polynomiales de f_3 au point 0, et que $(\mathcal{C}_{\varphi_2})$ et $(\mathcal{C}_{\varphi_3})$ admettent $(\mathcal{C}_{\varphi_1})$ comme tangente au point A.
De plus pour x proche de 0, φ_2 semble meilleure que φ_1, et φ_3 semble meilleure que φ_2.

Pour comparer φ_1 et φ_2 relativement à f_3, formons le rapport $\dfrac{f_3-\varphi_2}{f_3-\varphi_1}$ c'est-à-dire $\dfrac{R_2}{R_1}$.

Comme $$\forall x\in\,]-1;\,1[\quad \frac{R_2(x)}{R_1(x)}=x,$$

on a $\lim\limits_0 \dfrac{R_2}{R_1}=0$, et R_2 tend vers 0 plus efficacement que R_1.
Ceci permet d'expliquer que φ_2 est une approximation polynomiale de f_3 au voisinage de 0, meilleure que φ_1.
On a de même :

$$\forall x\in\,]-1;\,1[\quad \frac{R_3(x)}{R_1(x)}=x^2 \quad\text{et}\quad \frac{R_3(x)}{R_2(x)}=x.$$

Donc φ_3 est une approximation polynomiale de f_3 au voisinage de 0, meilleure que φ_2 et φ_1.
On peut aussi comparer R_1, R_2 et R_3, en comparant chacun d'entre eux aux puissances de x.

Les limites quand x tend vers 0 de $\dfrac{R_i(x)}{x^n}$, $n\in\{1, 2, 3\}$, sont rassemblées dans le tableau ci-contre.

i	1	2	3
$\dfrac{R_i(x)}{x}$	0	0	0
$\dfrac{R_i(x)}{x^2}$	1	0	0
$\dfrac{R_i(x)}{x^3}$	non borné	1	0

Ainsi, nous avons trouvé des fonctions polynômes φ_i de degré i vérifiant :

$$(p_i)\quad \begin{cases} \forall x\in I(0;\,1)\quad f_3(x)=\varphi_i(x)+R_i(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_i(x)}{x^i}=0. \end{cases}$$

On sait que φ_1 est la seule fonction affine vérifiant les conditions (p_1), voyons s'il en est de même pour φ_2 et φ_3.
Supposons qu'il existe un intervalle $I(0; r)$, des nombres réels α, β et γ, et une fonction R_2' tels que :

$$\begin{cases} \forall x\in I(0;\,r)\quad f_3(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+R_2'(x) \\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_2'(x)}{x^2}=0. \end{cases}$$

Nous pouvons écrire :

$$\forall x\in I(0;\,r)\quad f_3(x)=\alpha+\beta x+x\left(\gamma x+\frac{R_2'(x)}{x}\right);$$

Scanné avec CamScanner

comme $\lim_{x\to 0}\left(\gamma x+\frac{R_2'(x)}{x}\right)=0$, l'unicité du développement limité d'ordre 1 permet d'affirmer que $\alpha=\beta=1$.
On a donc en appelant m le minimum de $\{1, r\}$,

$$\forall x\in I(0;\, m)\quad f_3(x)=1+x+\gamma x^2+R_2'(x)$$
$$\forall x\in I(0;\, m)\quad f_3(x)=1+x+x^2+R_2(x);$$

en effectuant la différence de ces deux égalités, nous obtenons :

$$\forall x\in I(0;\, m)\quad (\gamma-1)x^2+(R_2'-R_2)(x)=0,$$

donc

$$\forall x\in I(0;\, m)-\{0\}\quad \gamma-1+\frac{(R_2'-R_2)(x)}{x^2}=0;$$

sachant que $\lim_{x\to 0}\frac{(R_2'-R_2)(x)}{x^2}=0$, nous pouvons en déduire que $\gamma=1$ et que R_2 et R_2' coïncident sur $I(0;\, m)$.
Il existe donc une seule fonction φ_2 vérifiant la condition (p_2).
On montre de même que φ_3 est unique.

De l'étude précédente, il ressort que la condition $\lim_{x\to 0}\frac{R_i(x)}{x^i}=0$, permet de caractériser φ_i parmi toutes les fonctions polynômes de degré i vérifiant :

$$\forall x\in I(0;\, r)\quad f_3(x)=\varphi_i(x)+R_i(x).$$

Problème. Est-il possible de trouver pour d'autres fonctions que f_3, des approximations par des fonctions polynômes réalisant les conditions précédentes. C'est-à-dire, étant donnée une fonction f, peut-on trouver un intervalle $I(0;\, r)$ inclus dans D_f, une fonction polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n et une fonction R_n, tels que pour n donné dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases}\forall x\in I(0;\, r)\quad f(x)=P_n(x)+R_n(x)\\ \lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}=0.\end{cases}$$

2) Cas des fonctions cos et sin

Le développement limité d'ordre 1 de la fonction cos en 0 s'écrit :

$$\begin{cases}\forall x\in I(0;\, r_1)\quad \cos x=1+x\varepsilon_1(x),\\ \lim_{0}\varepsilon_1=0.\end{cases}$$

Pour utiliser les conclusions de l'activité précédente nous cherchons donc un nombre réel a et une fonction R_2 tels que :

$$(p_2)\quad\begin{cases}\forall x\in I(0;\, r_2)\quad \cos x=1+ax^2+R_2(x)\\ \lim_{x\to 0}\frac{R_2(x)}{x^2}=0.\end{cases}$$

On aura donc :

$$\forall x\in I(0;\, r_2)-\{0\}\quad \frac{\cos x-1}{x^2}=a+\frac{R_2(x)}{x^2},$$

Scanné avec CamScanner

et (p_2) impose

$$a = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Nous savons que cette limite est égale à $-\frac{1}{2}$, donc $a = -\frac{1}{2}$.

Soit ε_2 la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_2) - \{0\} & \varepsilon_2(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2} + \dfrac{1}{2} \\ \varepsilon_2(0) = 0, \end{cases}$$

on obtient ainsi

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_2) & \cos x = 1 - \dfrac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

A l'étape suivante, il nous faudrait donc déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x^2}{x^3}$; ne sachant pas calculer simplement cette limite, pour trouver une approximation de cos par une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3, nous allons exposer ici une méthode utilisant le calcul intégral.

La fonction cos est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

— *Premier cas :* $x \in \mathbb{R}_+$

Nous pouvons écrire :

$$-\int_0^x \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \cos t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{d}t$$

d'où

$$-x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

De même, la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x -t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t \, \mathrm{d}t,$$

on obtient ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Il est bien sûr préférable d'utiliser l'encadrement

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

Scanné avec CamScanner

En continuant ce type de travail, nous obtenons successivement pour x élément de $\mathbb{R}_+$:

$$x-\frac{x^3}{3!}\leqslant \sin x\leqslant x. \tag{1}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}. \tag{2}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}. \tag{3}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\leqslant \cos x\leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}. \tag{4}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}. \tag{5}$$

— *Deuxième cas* : $x\in\mathbb{R}_-$

Nous remarquons que les fonctions suivantes sont paires :

$$x\longmapsto 1-\frac{x^2}{2!};\quad x\longmapsto 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!};\quad x\longmapsto 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!};$$

de même les fonctions suivantes sont impaires :

$$x\longmapsto x;\quad x\longmapsto x-\frac{x^3}{3!};\quad x\longmapsto x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!};\quad x\longmapsto x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}.$$

La fonction cos étant paire et la fonction sin impaire, nous obtenons les mêmes encadrements pour la fonction cos, et pour la fonction sin,

$$\forall x\in\mathbb{R}_-\quad x\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!} \tag{1}'$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!} \tag{3}'$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}. \tag{5}'$$

Démontrons l'un de ces résultats à titre d'exemple;
soit x un nombre réel négatif quelconque, posons $x'=-x$,

$x'\in\mathbb{R}_+$ donc

$$x'-\frac{x'^3}{3!}\leqslant \sin x'\leqslant x'$$

$$-x'+\frac{x'^3}{3!}\geqslant -\sin x'\geqslant -x'$$

et nous obtenons donc

$$x-\frac{x^3}{3!}\geqslant \sin x\geqslant x$$

ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R}_-\quad x\leqslant \sin x\leqslant x-\frac{x^3}{3!}.$$

Les autres inégalités se démontrent de façon analogue.

Scanné avec CamScanner

Soit $I(0; r)$ un intervalle ouvert de centre 0, nous avons vu (encadrement (2)) que :

$$\forall x \in I(0; r) \quad 1-\frac{x^2}{2!} \leqslant \cos x \leqslant 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$$

donc $$\forall x \in I(0; r) \quad 0 \leqslant \cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}\right) \leqslant \frac{x^4}{4!}.$$

Soit R_3 la fonction définie sur $I(0; r)$ par $R_3(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$,

$$\forall x \in I(0; r) \quad 0 \leqslant |R_3(x)| \leqslant \left|\frac{x^4}{4!}\right|,$$

donc $$\lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3}=0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(p_3) \quad \begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+0x^3+R_3(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_3(x)}{x^3}=0. \end{cases}$$

$1-\frac{x^2}{2}+0x^3$ est l'approximation polynomiale de degré au plus 3 de la fonction cos au point 0.

De même en utilisant (4), soit R_4 la fonction définie sur $I(0; r)$ par :

$$R_4(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right),$$

$$\forall x \in I(0; r) \quad 0 \leqslant |R_4(x)| \leqslant \left|\frac{x^6}{6!}\right|,$$

donc $$\lim_{x \to 0} \frac{R_4(x)}{x^4}=0.$$

Ainsi nous pouvons écrire :

$$(p_4) \quad \begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+R_4(x) \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_4(x)}{x^4}=0. \end{cases}$$

$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ est l'approximation polynomiale de degré 4 de la fonction cos au point 0.

Exercices

1) *a*) Montrer qu'il existe une fonction ε_3 telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+0x^3+x^3\varepsilon_3(x) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon_3=0. \end{cases}$$

b) Montrer qu'il existe une fonction ε_4 telle que :

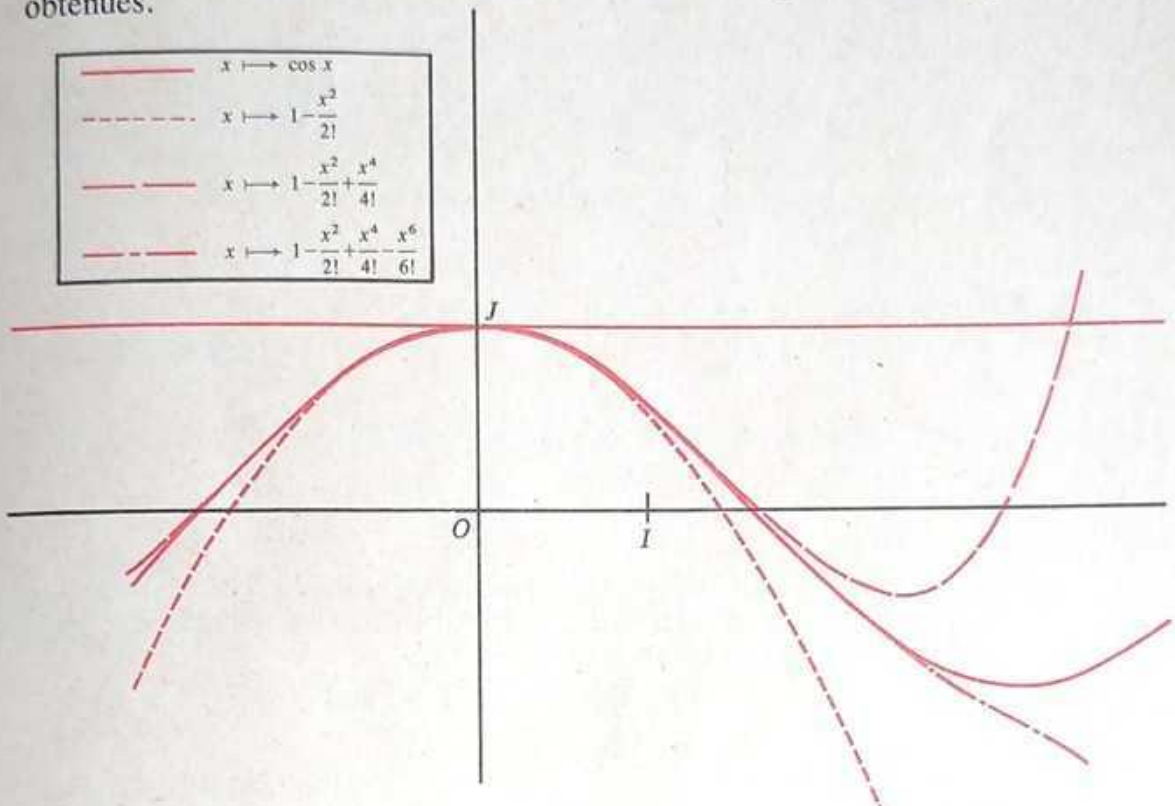
$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad \cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon_4(x) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon_4=0. \end{cases}$$

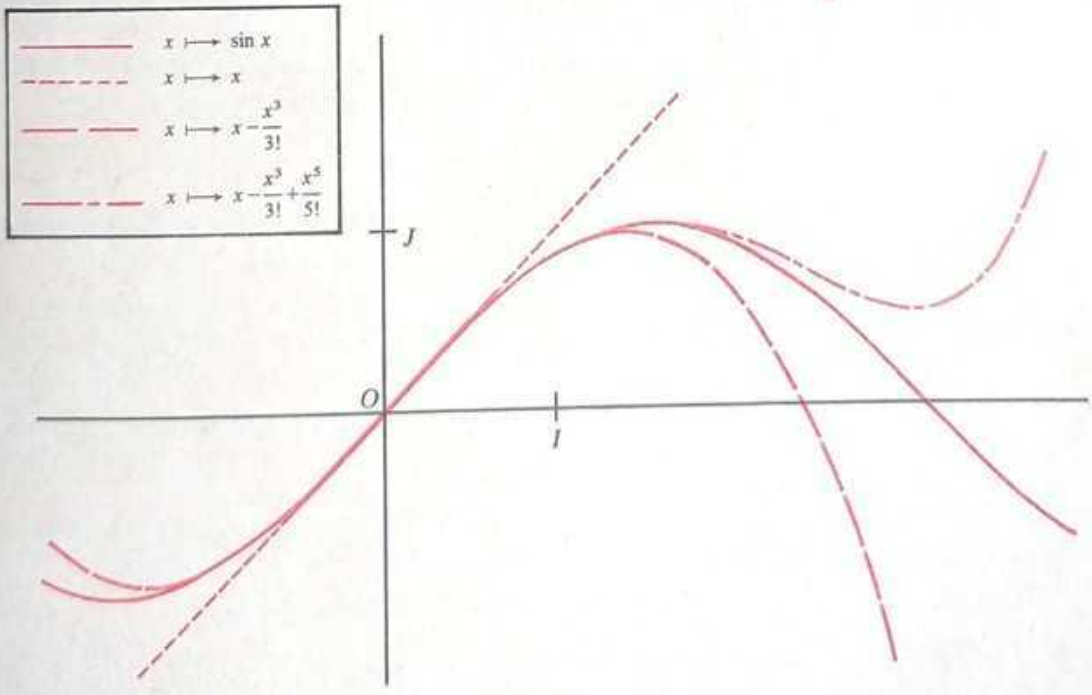
Scanné avec CamScanner

c) Déterminer l'approximation polynomiale de degré 5 de la fonction cos.

2) En utilisant (3) et (5) déterminer les approximations polynomiales de degré 3, 4 et 5 de la fonction sin et écrire les résultats obtenus sous la même forme que pour la fonction cos.

Remarque 1. Les résultats de l'exercice précédent sont regroupés sur les représentations graphiques suivantes. Constater la qualité des approximations obtenues.





Scanné avec CamScanner

Remarque 2. Les résultats précédents permettent de trouver les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^3}=0;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^4}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^5}=0,$$

limites que l'on ne pouvait pas obtenir directement.

Exercice { Donner des limites du type précédent faisant intervenir la fonction sin.

3 Définitions

1) Développement limité d'ordre *n* en 0

Définition

Dire qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, $(n\in\mathbb{N})$, signifie qu'il existe un intervalle $I(0; r)$, une fonction polynôme P_n nulle ou de degré n au plus, et une fonction ε, tels que:

$$\begin{cases}\forall x\in I(0; r) & f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)\\ \lim\limits_0 \varepsilon=0.\end{cases}$$

L'écriture de $f(x)$ sous la forme $P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$, s'appelle **développement limité d'ordre n en 0 de f.**
P_n s'appelle **la partie régulière** du développement limité, et la fonction $[x\longmapsto x^n\varepsilon(x)]$ s'appelle **le reste** du développement limité.

Exemples. Nous avons vu dans le paragraphe II plusieurs exemples de développements limités en 0; ainsi,

- l'écriture : $\forall x\in I(0; 1)\quad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^3\frac{x}{1-x}$

réalise un développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $\left[x\longmapsto\frac{1}{1-x}\right]$;

- nous avons vu qu'il existe une fonction ε telle que :

$$\begin{cases}\forall x\in I(0; r) & \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)\\ \lim\limits_0 \varepsilon=0;\end{cases}$$

la fonction cos admet donc un développement limité d'ordre 4 en 0;

Scanné avec CamScanner

• une fonction f admet un développement limité en 0 d'ordre 0 si et seulement si elle est continue en 0;

• la définition donnée dans ce paragraphe généralise celle donnée en Première et rappelée au I pour le développement limité d'ordre 1 en 0.

2) Premières propriétés

Propriété 1

Si une fonction admet un développement limité d'ordre n en 0, elle admet des développements limités en 0 de tous ordres inférieurs à n.
Un développement limité à l'ordre m, $(m \leqslant n)$, a pour partie régulière la fonction polynôme P_m obtenue en conservant tous les monômes de degré inférieur ou égal à m.

On dit que le développement limité d'ordre m est obtenu à partir de celui d'ordre n par *troncature*.

Démonstration
Soit f une fonction de développement limité d'ordre n en 0 donné par :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0, \end{cases}$$

où a_0, a_1, $\ldots a_m$, $\ldots a_n$ sont des nombres réels et m un nombre entier naturel inférieur à n.

$$\forall x \in I(0; r) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + x^m \left(a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \ldots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x)\right).$$

Soit ε' la fonction définie par :

$$\forall x \in I(0; r) \quad \varepsilon'(x) = a_{m+1} x + a_{m+2} x^2 + \ldots + a_n x^{n-m} + x^{n-m} \varepsilon(x)$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + x^m \varepsilon'(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon' = 0, \end{cases}$$

ce qui constitue bien l'écriture d'un développement limité d'ordre m de f en 0.

Remarque. Une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre n et ne pas en avoir à l'ordre $n+1$.
Ainsi, une fonction continue non dérivable en 0, admet un développement limité d'ordre 0 en 0 et n'en admet pas à l'ordre 1.

Propriété 2

Si une fonction admet un développement limité en 0, celui-ci est unique.

Démonstration (Par récurrence sur n)

• Toute fonction continue en 0 admet un développement limité d'ordre 0 en 0, et celui-ci est unique.

Scanné avec CamScanner

• Pour n égale 1, nous savons déjà que, s'il existe, le développement d'ordre est unique.

• Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0; nous savons qu'elle admet des développements limités de tous ordres inférieurs à Supposons que le développement limité d'ordre m, $(m<n)$, soit unique montrons que celui d'ordre $m+1$ l'est.
Imaginons que l'on ait trouvé deux développements limités de f d'ordre $m+1$ 0; il existe donc des intervalles $I(0; r_1)$ et $I(0; r_2)$, des nombres réels $a_0, a_1 \ldots a_{m+1}$ $b_0, b_1 \ldots b_{m+1}$, et des fonctions ε_1 et ε_2, tels que :

$$(1)\quad \begin{cases} \forall x \in I(0; r_1) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + x^{m+1}\varepsilon_1(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \forall x \in I(0; r_2) \quad f(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + b_{m+1} x^{m+1} + x^{m+1}\varepsilon_2(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Le développement limité d'ordre m étant unique, d'après la propriété 1,

$$\forall i \in \{0, \ldots m\} \quad a_i = b_i.$$

Posons $r = \text{Min}(r_1, r_2)$ et $R_m(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$.

(1) permet d'écrire : $\quad \forall x \in I(0; r) \quad \dfrac{R_m(x)}{x^{m+1}} = a_{m+1} + \varepsilon_1(x);$

de même en utilisant (2) : $\quad \forall x \in I(0; r) \quad \dfrac{R_m(x)}{x^{m+1}} = b_{m+1} + \varepsilon_2(x);$

donc $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_m(x)}{x^{m+1}} = a_{m+1} \quad$ et $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{R_m(x)}{x^{m+1}} = b_{m+1}.$

On en déduit $a_{m+1} = b_{m+1}$, ce qui entraîne l'unicité de la fonction polynôme P_{m+1} de degré $m+1$ et les égalités :

$$\forall x \in I(0; r) \quad f(x) = P_{m+1}(x) + x^{m+1}\varepsilon_1(x)$$
$$\forall x \in I(0; r) \quad f(x) = P_{m+1}(x) + x^{m+1}\varepsilon_2(x),$$

nous permettent de conclure que ε_1 et ε_2 sont égales sur $I(0; r)$.
Le développement limité de f d'ordre $m+1$ en 0 est donc unique.

Exercices

1) Écrire les développements limités d'ordre 1, d'ordre 2 et d'ordre des fonctions sin et cos en 0.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + x + |x|^3$.

a) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

b) Étudier le comportement de $\dfrac{f(x) - 1 - x}{x^3}$ au voisinage de 0; admet-elle un développement limité d'ordre 3 en 0?

Remarque 1. Toute fonction polynôme P admet un développement limité en 0 un ordre k $(k \in \mathbb{N})$, quelconque.

Scanné avec CamScanner

Soit n le degré de P, si k vérifie, $k \geqslant n$, le développement limité d'ordre k en 0 de P s'écrit :

$$\forall x \in I(0; r) \quad P(x) = P(x) + x^k \varepsilon(x),$$

où ε est la fonction nulle sur $I(0; r)$.

Remarque 2. Nous avons vu que la fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{1-x}\right]$ a des développements limités d'ordre 1, 2 et 3 en 0 dont les restes sont connus (cf. activité 2); l'intérêt des développements limités est d'écrire une fonction comme somme d'une fonction polynôme et d'un reste dont on sait seulement qu'il est du type $x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$.

Exemple. Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\} \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x}.$$

Écrivons le développement limité d'ordre 3 de la fonction sin en 0; il existe un intervalle $I(0; r)$ et une fonction ε tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) & \sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x) \\ \lim_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

$$\forall x \in I\left(0; \frac{\pi}{2}\right) - \{0\} \quad \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{\frac{x^3}{6} - x^3 \varepsilon(x)}{x^2 - \frac{x^4}{6} + x^4 \varepsilon(x)}$$

$$= \frac{\frac{x}{6} - x\varepsilon(x)}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2 \varepsilon(x)}.$$

Bien que la fonction ε ne soit pas connue explicitement, sachant que $\lim_0 \varepsilon = 0$, nous pouvons conclure :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Exercice En utilisant le développement limité d'ordre 3 de sin en 0,

1) retrouver $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$;

2) étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* & f(x) = \frac{\sin x}{x} \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

4 Développements limités en 0 des fonctions usuelles

Nous connaissons les développements limités en 0 jusqu'à l'ordre 3 des fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{1-x}; \quad x \longmapsto \sin x; \quad x \longmapsto \cos x.$$

Nous avons vu qu'une méthode pour rechercher les développements limités d'ordres successifs en 0, consistait à chercher $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_1(x)}{x^2}$ où R_1 est le reste du développement limité d'ordre 1 en 0, puis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R_2(x)}{x^3}$ où R_2 est le reste du développement limité d'ordre 2 en 0, c'est-à-dire les limites successives quand x tend vers 0 de $\dfrac{R_i(x)}{x^{i+1}}$. Mais cette méthode n'est pas toujours réalisable (fonctions trigonométriques en particulier), de plus lorsqu'elle l'est, son utilisation est souvent longue et fastidieuse.

Exercice En utilisant la méthode énoncée ci-dessus trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $\left[x \longmapsto \sqrt{1+x}\right]$.

Nous allons exposer ici d'autres méthodes plus performantes.

Exemple 1. Les primitives d'une fonction polynôme s'expriment facilement. Il paraît naturel, si l'on connaît un développement limité en 0 d'une fonction f, de chercher à trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$.

Nous allons ici appliquer ce principe pour la fonction $\left[x \longmapsto \ln(1+x)\right]$, qui est une primitive de la fonction $\left[x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}\right]$ sur tout intervalle inclus dans $]-1; +\infty[$.

Nous pouvons donc écrire :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt.$$

Sachant que $\forall x \in]-1; 1[\quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \dfrac{x}{1-x}$

nous pouvons en déduire que :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2 \frac{-x}{1+x}$$

Posons $\forall x \in]-1; 1[\quad \varepsilon_1(x) = \dfrac{-x}{1+x}$;

Scanné avec CamScanner

le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{1+x}\right]$ s'écrit :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1;1[\quad \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2\varepsilon_1(x). \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0, \end{cases}$$

de sorte que :

$$\forall x \in]-1;1[\quad \ln(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 + t^2\varepsilon_1(t))\,dt$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x t^2\varepsilon_1(t)\,dt.$$

La fonction $\left[x \longmapsto \frac{-1}{1+x}\right]$ est bornée sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, il existe donc un nombre réel strictement positif k tel que :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\quad |\varepsilon_1(x)| \leqslant k\,|x|,$$

de plus $\varepsilon_1(x)$ est du signe de $-x$ sur cet intervalle.

1er cas : $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$

$$\forall t \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\quad 0 \geqslant t^2\varepsilon_1(t) \geqslant -kt^3,$$

donc
$$0 \leqslant -\int_0^x t^2\varepsilon_1(t)\,dt \leqslant k\frac{x^4}{4}.$$

2e cas : $x \in \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$

On montre de même que $0 \leqslant -\int_0^x t^2\varepsilon_1(t)\,dt \leqslant k\frac{x^4}{4}$.

D'où
$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[- \{0\} \quad 0 \leqslant \left|\frac{1}{x^3}\int_0^x t^2\varepsilon_1(t)\,dt\right| \leqslant k\left|\frac{x}{4}\right|.$$

Soit ε la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[- \{0\} \quad \varepsilon(x) = \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x t^2\varepsilon_1(t)\,dt \\ \varepsilon(0) = 0, \end{cases}$$

on obtient
$$\begin{cases} \forall x \in I\left(0; \frac{1}{2}\right) \quad \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0, \end{cases}$$

ce qui constitue le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto \ln(1+x)]$.

Scanné avec CamScanner

Remarque 1. En poursuivant le développement limité en 0 de la fonction $\left[x \longmapsto \frac{1}{1+x}\right]$ à un ordre supérieur, on pourrait obtenir un développement limité de $[x \longmapsto \ln(1+x)]$ en 0 à l'ordre 4, puis 5, etc.

Remarque 2. Cette méthode nous montre que si une fonction continue f admet un développement limité d'ordre n en 0 dont le reste $x^n\varepsilon(x)$ vérifie sur un intervalle $I(0; r)$, une majoration du type

$$|\varepsilon(x)| \leqslant k\,|x|,$$

la fonction $\left[x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt\right]$, admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0.

Exercice En utilisant le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction cos, retrouver le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction sin (on majorera le reste du développement limité d'ordre 2 en 0 de cos en utilisant un développement limité d'ordre supérieur).

Exemple 2

Nous allons dans cet exemple rechercher les développements limités d'ordres successifs en 0 de la fonction exponentielle.

Nous savons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp^{(4)}(x) = \exp(x)$

donc la fonction $[x \longmapsto \exp^{(4)}(x)]$ est continue sur $\mathbb{R}$.
L'image d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ par cette fonction est donc un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
La fonction $[x \longmapsto \exp^{(4)}(x)]$ est donc bornée sur $[-2; 2]$; il existe donc des nombres réels m et M tels que :

$$\forall x \in [-2; 2] \quad m \leqslant \exp^{(4)}(x) \leqslant M$$

a fortiori

$$\forall x \in I(0; 2) \quad m \leqslant \exp^{(4)}(x) \leqslant M.$$

1er cas : $x \in \mathbb{R}_+$

$$\forall x \in]0; 2[\quad \int_0^x m\,dt \leqslant \int_0^x \exp^{(4)}(t)\,dt \leqslant \int_0^x M\,dt$$

$$mx \leqslant \left[\exp^{(3)}(t)\right]_0^x \leqslant Mx,$$

soit

$$\forall x \in]0; 2[\quad mx \leqslant \exp^{(3)}(x) - \exp^{(3)}(0) \leqslant Mx.$$

Nous allons réitérer cette opération jusqu'à exprimer $\exp(x)$;

$$\forall x \in]0; 2[\quad m\frac{x^2}{2} \leqslant \int_0^x \left(\exp^{(3)}(t) - \exp^{(3)}(0)\right)dt \leqslant M\frac{x^2}{2}$$

$$m\frac{x^2}{2} \leqslant \exp^{(2)}(x) - \exp^{(2)}(0) - x\,\exp^{(3)}(0) \leqslant M\frac{x^2}{2}.$$

A l'étape suivante nous aurons

$$m\frac{x^3}{3!} \leqslant \exp'(x) - \exp'(0) - x\,\exp^{(2)}(0) - \frac{x^2}{2}\exp^{(3)}(0) \leqslant M\frac{x^3}{3!}$$

pour obtenir finalement, pour tout élément x de $]0; 2[$:

$$m\frac{x^4}{4!} \leqslant \exp(x) - \exp(0) - x\,\exp'(0) - \frac{x^2}{2!}\exp^{(2)}(0) - \frac{x^3}{3!}\exp^{(3)}(0) \leqslant M\frac{x^4}{4!}.$$

Scanné avec CamScanner

2e cas : $x \in \mathbb{R}_-$

On montre de même que, pour tout élément x de $]-2; 0[$:

$$m\frac{x^4}{4!} \leqslant \exp(x) - \exp(0) - x\exp'(0) - \frac{x^2}{2!}\exp^{(2)}(0) - \frac{x^3}{3!}\exp^{(3)}(0) \leqslant M\frac{x^4}{4!}.$$

Soit ε la fonction définie sur $I(0; 2)$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \neq 0 \quad \varepsilon(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(\exp(x) - \exp(0) - x\exp'(0) - \dfrac{x^2}{2!}\exp^{(2)}(0) - \dfrac{x^3}{3!}\exp^{(3)}(0)\right) \\ \varepsilon(0) = 0, \end{cases}$$

on a $$\forall x \in I(0; 2) \quad |\varepsilon(x)| \leqslant \frac{|x|}{4!} M$$

donc $$\lim_0 \varepsilon = 0.$$

De plus $$\exp(0) = 1; \quad \exp'(0) = 1; \quad \ldots$$

nous pouvons donc écrire :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; 2) \quad \exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0, \end{cases}$$

et nous disposons ainsi du développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction exponentielle.

Remarque 1. Nous avons trouvé le développement limité d'ordre 3 en 0 de exp en utilisant le fait que $\exp^{(4)}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée sur un intervalle $I(0; r)$. Comme cette propriété est encore vraie pour la fonction $\exp^{(n)}$, $(n \in \mathbb{N})$, nous pourrions trouver par la même méthode un développement limité en 0 de la fonction exp à un ordre supérieur à 3.
Ainsi la fonction exp admet un développement limité d'ordre n en 0 pour tout nombre entier naturel n.

Remarque 2. En utilisant le même procédé, nous voyons que toute fonction f dont la dérivée d'ordre $n+1$ est continue sur un intervalle fermé borné de centre 0, admet un développement limité d'ordre n en 0.
Pour justifier la continuité sur un intervalle fermé borné de centre 0 de la dérivée d'ordre $n+1$ d'une fonction, on pourra, lorsqu'elle existe, utiliser la dérivée d'ordre $n+2$.
En particulier nous pouvons retenir que pour une fonction f admettant une dérivée quatrième continue sur $[-r, r]$, $(r \in \mathbb{R}_+^*)$, il existe une fonction ε telle que :

$$(F) \qquad \begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + \dfrac{x^3}{3!}f'''(0) + x^3\varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0 \end{cases}$$

et écrire ainsi le développement limité d'ordre 3 en 0 de f.

Remarque 3. Nous savons qu'il y a équivalence entre les propositions « f est dérivable en 0 » et « f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 », il est utile de savoir que cette équivalence n'est plus vérifiée à partir de l'ordre 2.
Ainsi une fonction peut admettre un développement limité d'ordre 2 en 0 et ne pas être dérivable deux fois en 0.

Scanné avec CamScanner

On montrera dans les classes ultérieures que c'est par exemple le cas de la fonction f définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = x^3 \sin \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Par contre, on démontre, et nous l'admettrons, qu'une fonction deux fois (respectivement trois fois) dérivable en 0 admet un développement limité d'ordre 2 (respectivement d'ordre 3) en 0. Ainsi, la formule (F) ci-dessus est vraie dès que $f''(0)$ existe.

Exercices

1) Utiliser la formule (F) pour retrouver le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto \sqrt{1+x}]$.

2) La fonction exp étant dérivable à tout ordre, elle admet en particulier un développement limité d'ordre 3 en 0.
Connaissant ce résultat, nous pouvons retrouver ce développement limité d'ordre 3 en 0 sans utiliser la formule (F), à l'aide de la méthode de l'exemple 1.
On cherche donc les nombres réels a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que :

$$\begin{cases} \exp(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Pour trouver a_0, a_1, a_2 et a_3, on utilisera

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = 1 + \int_0^x e^t \, dt.$$

3) En utilisant la formule (F) donner les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt[3]{1+x};$$
$$f(x) = \sqrt[n]{1+x}, \quad (n \in \mathbb{N}^*);$$
$$f(x) = 3^x.$$

Il est utile de connaître les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions « usuelles ». Nous les regroupons donc dans le tableau suivant :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \varepsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_1 = 0$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_2(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_2 = 0$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_3(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_3 = 0$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_4(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_4 = 0$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \varepsilon_5(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_5 = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_6(x) \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_6 = 0.$$

Scanné avec CamScanner

On remarquera que les développements limités des fonctions cos et sin nous sont connus à un ordre supérieur à 3 car nous savons que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\eta_5(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_0 \eta_5 = 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\eta_6(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_0 \eta_6 = 0.$$

5 Applications

1) Opérations sur les fonctions et développements limités

a) Addition

Problème. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{x}{2} + \ln(1+x) - \sqrt{1+x}}{x^2}$.

L'idée consiste à utiliser des développements limités en 0 des fonctions $[x \longmapsto \ln(1+x)]$ et $[x \longmapsto \sqrt{1+x}]$.
On sait qu'il existe un intervalle $I(0; r_1)$ et une fonction ε_1 tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_1) \quad \ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_1(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0. \end{cases}$$

De même il existe un intervalle $I(0; r_2)$ et une fonction ε_2 tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_2) \quad \sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon_2(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Posons $r = \text{Min}(r_1, r_2)$, on a

(1) $\forall x \in I(0; r) \quad \ln(1+x) - \sqrt{1+x} = -1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{13}{48}x^3 + x^3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x);$

sachant que $\lim\limits_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 0$, et que le développement limité en 0 à un ordre donné, s'il existe, est unique, nous pouvons affirmer que (1) réalise le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto \ln(1+x) - \sqrt{1+x}]$. Ce dernier permet d'écrire

$$\forall x \in I(0; r) - \{0\} \quad \frac{1 - \frac{x}{2} + \ln(1+x) - \sqrt{1+x}}{x^2} = -\frac{3}{8} + \frac{13}{48}x + x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(x),$$

et d'affirmer ainsi que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{x}{2} + \ln(1+x) - \sqrt{1+x}}{x^2} = -\dfrac{3}{8}$.

Scanné avec CamScanner

Remarque. On pourra noter qu'il suffisait d'un développement limité d'ordre 2 en 0 pour résoudre cet exercice, mais par contre, qu'un développement limité d'ordre 1 en 0 était insuffisant.

Exercice Montrer que si f et g sont des fonctions admettant un développement limité d'ordre n en 0, la fonction $f+g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 ayant pour partie régulière la somme des parties régulières et pour reste la somme des restes.

b) **Multiplication**

Problème. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{x^2}$.

Lorsqu'on écrit les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions exp et sin, on montre comme précédemment qu'il existe un intervalle $I(0; r)$ et des fonctions ε_1 et ε_2 tels que :

$$\forall x \in I(0; r) \quad e^x \sin x = \left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)\right]\left[x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_2(x)\right].$$

En effectuant le produit et en regroupant les termes on trouve pour tout nombre réel x élément de $I(0; r)$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\left[-\frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{36} + \varepsilon_1(x)\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \varepsilon_2(x)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_1(x)\right)\right]$$

avec $$\lim_0 \varepsilon_1 = 0 \text{ et } \lim_0 \varepsilon_2 = 0.$$

On peut donc écrire : $$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad e^x \sin x = x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0, \end{cases}$$

ce qui constitue le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto e^x \sin x]$, et permet de démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x}{x^2} = 1$.

Remarque 1. Bien que des monômes de degré supérieur à 3 apparaissent dans le produit, il n'est en général pas possible à partir de deux développements limités d'ordre 3 en 0, d'obtenir un développement limité en 0 d'ordre supérieur à 3. Il est facile de remarquer dans l'exemple précédent, que la présence du terme $x^3\varepsilon_2(x)$ dans le produit, interdit une partie régulière de degré supérieur à 3;

ce ne sont pas des termes de la partie régulière d'un développement limité de $e^x \sin x$

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{12} - \frac{x^6}{36} + x^3\varepsilon_2(x) + x^4\varepsilon_2(x) + x^4\varepsilon_1(x) + \frac{x^5}{2}\varepsilon_2(x) + \frac{x^6}{6}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(x) + x^6(\varepsilon_1\varepsilon_2)(x).$$

l'ordre du développement limité obtenu est au plus 3

Scanné avec CamScanner

Pour des raisons analogues, pour obtenir un développement limité d'ordre 3 en 0 du produit, il faudra donc prendre les développements limités d'ordre 3 en 0 des deux fonctions;
utiliser un développement limité d'ordre supérieur à 3 en 0 pour l'une des deux fonctions, serait inutile;
utiliser un développement limité d'ordre inférieur à 3 en 0 pour l'une des deux fonctions, ne permet en général pas d'obtenir un développement limité d'ordre 3 en 0 pour le produit.

Remarque 2. Avec un peu de pratique on évitera d'écrire tous les termes intervenant dans le produit des deux développements limités d'ordre 3 en 0. En effet lorsqu'on conserve pour partie régulière du produit les monômes de degré inférieur ou égal à 3, les autres termes sont soit des monômes de degré supérieur à 3, donc du type $x^3 \times x^p$, $(p \in \mathbb{N}^*)$, soit des termes du type $x^3 \varepsilon_i(x) k(x)$ avec

$$\begin{cases} \lim\limits_0 \varepsilon_i = 0 \\ k \text{ borné sur } I(0; r). \end{cases}$$

Il est donc facile de constater qu'après la « mise en facteur » du monôme x^3 dans tous les termes autres que ceux qui constitueront la partie régulière du développement limité produit, l'expression de ce produit est donc : $P_3(x) + x^3 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$.

On écrira par exemple :

$$\forall x \in I(0; r) \quad \ln(1+x) \times \sqrt{1+x} = \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_1(x)\right]\left[1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon_2(x)\right]$$

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_0 \varepsilon = 0,$$

et on réduira les termes de la partie régulière.

Remarque 3. Dans le cas particulier où les deux fonctions f et g intervenant dans le produit sont du type $[x \longmapsto x^k h(x)]$, $(k \in \mathbb{N}^*)$ et h continue en 0, on pourra obtenir un développement limité en 0 d'ordre supérieur à n du produit fg à partir d'un développement limité d'ordre n en 0 des deux fonctions f et g.

Exemple. Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \cos x - 1$; $g(x) = \sin x$. Le produit des deux développements limités d'ordre 3 en 0 donne

$$\forall x \in I(0; r) \quad (\cos x - 1) \sin x = \left(\frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_2(x)\right)$$

$$= \frac{x^3}{2} + R(x)$$

où l'on remarquera que $R(x)$ est du type $x^4 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_0 \varepsilon = 0$; il s'agit donc d'un développement limité d'ordre 4 en 0 de fg.
On rencontre une situation analogue lorsqu'on fait le produit d'un monôme par une fonction.

Exemple

Écrivons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto x \sin x]$

$$\forall x \in I(0; r) \quad x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)\right)$$

Scanné avec CamScanner

on obtient
$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) & x \sin x = x^2 - \dfrac{x^4}{6} + x^4 \varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0; \end{cases}$$

nous obtenons ainsi un développement limité d'ordre 4 en 0 de cette fonction. Le développement limité d'ordre 3 en 0 pourra, si nécessaire, être obtenu par troncature à partir du précédent.

Exercices

1) Calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x \cos x}{x^3}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \cos x - x - 1}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x^2) \sin x - x}{x^3}$

2) Écrire le développement limité d'ordre 3 en 0 des fonctions $[x \longmapsto \sin^2 x]$ et $[x \longmapsto \cos^2 x]$.

c) Développement limité de la fonction tan

Exercice

Montrer par récurrence la proposition suivante :

- pour tout nombre entier naturel n non nul, tan est dérivable à l'ordre n sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$;
- $(\tan)^{(n)}$ est de la forme $(P \circ \tan)$ où P est une fonction polynôme.

La fonction tan étant dérivable à tous ordres sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, elle admet donc un développement limité d'ordre n en 0 $(n \in \mathbb{N}^*)$.
En particulier elle admet un développement limité d'ordre 3 en 0, c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels a_0, a_1, a_3 et une fonction ε tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) & \tan x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Or
$$\forall x \in I\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \tan x \times \cos x = \sin x.$$

Écrivons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction
$$x \longmapsto \tan x \times \cos x$$
en fonction de a_0, a_1, a_2, a_3 et ε.

$$\forall x \in I\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \tan x \times \cos x = \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x)\right]\left[1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon_1(x)\right]$$
$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_0 \frac{x^2}{2} - \frac{a_1}{2} x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$
$$= a_0 + a_1 x + \left(a_2 - \frac{a_0}{2}\right) x^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2}\right) x^3 + x^3 \varepsilon_2(x)$$

avec
$$\lim_0 \varepsilon_2 = 0;$$

Scanné avec CamScanner

ceci réalise donc le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction sin; on en déduit donc :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 - \dfrac{a_0}{2} = 0 \\ a_3 - \dfrac{a_1}{2} = -\dfrac{1}{6}; \end{cases}$$

ainsi le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction tan est donné par :

$$\begin{cases} \forall x \in I\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Exercices

1) Retrouver le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction tan en utilisant la formule (F) de la page 269.

2) Après avoir justifié son existence, donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

d) **Développements limités des fonctions du type $x \longmapsto f(\lambda x^k)$**

Problème

Écrire le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto \sin 2x]$.

Le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction sin étant connu, il paraît naturel de poser $X = 2x$ et d'écrire successivement :

$$\begin{cases} \forall X \in I(0; r) \quad \sin X = X - \dfrac{X^3}{6} + X^3 \varepsilon(X) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Or : $$X \in I(0; r) \iff x \in I\left(0; \frac{r}{2}\right).$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \forall x \in I\left(0; \frac{r}{2}\right) \quad \sin 2x &= 2x - \frac{(2x)^3}{6} + (2x)^3 \varepsilon(2x) \\ &= 2x - \frac{4}{3} x^3 + x^3 \gamma(x) \end{aligned}$$

où la fonction γ définie sur $I\left(0; \dfrac{r}{2}\right)$ par $\gamma(x) = 8\varepsilon(2x)$, vérifie bien $\lim\limits_0 \gamma = 0$.

Le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $[x \longmapsto \sin 2x]$ est donc donné par :

$$\begin{cases} \forall x \in I\left(0; \dfrac{r}{2}\right) \quad \sin 2x = 2x - \dfrac{4}{3} x^3 + x^3 \gamma(x) \\ \lim\limits_0 \gamma = 0. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Le travail précédent consiste donc à trouver le développement limité d'ordre 3 en 0 d'une fonction du type $f \circ P$ où f est une fonction dont on connaît le développement limité d'ordre 3 en 0 et P une fonction monôme du type $[x \longmapsto \lambda x^k]$, $(k \in \mathbb{N}^*)$.

On effectuera toujours un tel exercice en posant $X = \lambda x^k$, en substituant X à x dans le développement limité de la fonction f, puis en remplaçant X par sa valeur.

Ainsi le développement limité d'ordre 3 en 0 de f s'écrit :

$$\begin{cases} \forall X \in I(0; r_1) \quad f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + X^3 \varepsilon_1(X) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0; \end{cases}$$

comme il existe un intervalle $I(0; r)$ tel que :

$$x \in I(0; r) \implies \lambda x^k \in I(0; r_1)$$

on obtient :

$$f \circ P(x) = a_0 + \lambda a_1 x^k + \lambda^2 a_2 x^{2k} + \lambda^3 a_3 x^{3k} + \lambda^3 x^{3k} \varepsilon_1(\lambda x^k).$$

Sachant que :

$$\lim_{x \to 0} \lambda^3 \varepsilon_1(\lambda x^k) = 0,$$

nous obtenons donc le développement limité d'ordre $3k$ en 0 de la fonction $f \circ P$.

Exercice traité. Écrire le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction définie par $f(x) = \sin x^2$.

On écrira successivement :

$$\begin{cases} \forall X \in I(0; r) \quad \sin X = X - \dfrac{X^3}{6} + X^3 \varepsilon_1(X) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0. \end{cases}$$

On pose $X = x^2$

$$X \in I(0; r) \iff x \in I\left(0; \sqrt{r}\right)$$

$$\forall x \in I\left(0; \sqrt{r}\right) \quad \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + x^6 \varepsilon_1(x^2).$$

Soit ε la fonction définie par $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x^2)$,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0 \end{cases} \implies \lim_0 \varepsilon = 0.$$

Nous obtenons ainsi le développement limité d'ordre 6 en 0 de la fonction $[x \longmapsto \sin x^2]$; le développement limité d'ordre 3 en 0 s'obtient si nécessaire par troncature, soit :

$$\begin{cases} \forall x \in I\left(0; \sqrt{r}\right) \quad \sin x^2 = x^2 + x^3 \gamma(x) \\ \lim\limits_0 \gamma = 0. \end{cases}$$

Exercices 1) Déterminer les développements limités d'ordre 3 en 0 des fonctions suivantes :

(1) $f(x) = e^{2x}$; (4) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

Scanné avec CamScanner

(2) $f(x)=4^x$; (5) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $f(x)=\ln(1-x)$ (6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

2) *a*) Soit f une fonction paire admettant un développement limité d'ordre 3 en 0; en écrivant le développement limité d'ordre 3 en 0 de $f(-x)$, montrer, que le développement limité d'ordre 3 en 0 de f a une partie régulière ne comportant que des monômes d'exposants pairs.

b) Soit g une fonction impaire admettant un développement limité d'ordre 3 en 0; en écrivant le développement limité d'ordre 3 en 0 de $g(-x)$, montrer que le développement limité d'ordre 3 en 0 de g a une partie régulière ne comportant que des monômes d'exposants impairs.

3) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-2x)}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-x}{x^2}$.

2) Développement limité en un point x_0

Nous avons vu que le développement limité d'ordre 3 en 0, d'une fonction f, permettait de connaître le comportement local de cette fonction en 0, et en particulier de calculer des limites en 0 d'expressions où intervient $f(x)$.
Il peut donc paraître intéressant d'avoir un procédé analogue au voisinage d'un point quelconque x_0.

Exemple. Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, on désire obtenir le comportement local de f au voisinage de 2.

On pose $x=2+h$.
Soit r un nombre réel vérifiant $0\leqslant r\leqslant 1$,

$$x\in I(2;r) \iff h\in I(0;r)$$

$$\forall x\in I(2;r)\quad \forall h\in I(0;r)\quad \frac{1}{1-x}=-\frac{1}{1+h}.$$

On connaît le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $\left[h\longmapsto\dfrac{1}{1+h}\right]$; il est donné par :

$$\begin{cases}\forall h\in I(0;r)\quad \dfrac{1}{1+h}=1-h+h^2-h^3+h^3\varepsilon_1(h)\\ \lim\limits_0\varepsilon_1=0.\end{cases}$$

Remplaçons h par $x-2$, on obtient en notant ε la fonction définie sur $I(2;r)$ par $\varepsilon(x)=\varepsilon_1(x-2)$,

$$\begin{cases}\forall x\in I(2;r)\quad \dfrac{1}{1-x}=-1+(x-2)-(x-2)^2+(x-2)^3+(x-2)^3\varepsilon(x)\\ \lim\limits_2\varepsilon=0.\end{cases}$$

De façon générale. Soit f une fonction définie au voisinage de x_0.
Pour obtenir le développement limité d'ordre n en x_0 de f, on pose $x=x_0+h$.

Scanné avec CamScanner

Si la fonction g définie par $g(h)=f(x_0+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0, il existe un intervalle $I(0; r_n)$ et une fonction ε_n tels que :

$$\begin{cases} \forall h \in I(0; r_n) \quad g(h)=P_n(h)+h^n\varepsilon_n(h) \\ \lim\limits_{0} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

Comme $$h \in I(0; r_n) \iff x \in I(x_0; r_n)$$

on pourra écrire, en appelant ε la fonction définie sur $I(x_0; r_n)$ par $\varepsilon(x)=\varepsilon_1(x-x_0)$,

$$\forall x \in I(x_0; r_n) \quad f(x)=P_n(x-x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

de plus $$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)=0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x_0} \varepsilon = 0.$$

On obtient de cette façon un développement limité d'ordre n en x_0 de f.

Remarque 1. Il est souvent pratique de conserver le développement limité écrit avec la variable auxiliaire h.
En particulier, il est maladroit de développer les termes du type $(x-x_0)^k$.

Remarque 2. Si f admet une dérivée troisième en x_0, elle admet un développement limité d'ordre 3 en 0 qui s'écrit (en utilisant la formule (F) de la page 269) : pour tout nombre réel x de $I(x_0; r)$

$$\begin{cases} f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\dfrac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0)+(x-x_0)^3\varepsilon(x) \\ \lim\limits_{x_0} \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Exercices

1) Déterminer les développements limités d'ordre 3 en x_0 des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\ln x$ $\quad x_0=1$; $\quad$ *e)* $f(x)=\cos x$ $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

b) $f(x)=\ln x$ $\quad x_0=2$; $\quad$ *f)* $f(x)=\sin x$ $\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

c) $f(x)=\sqrt{1+x}$ $\quad x_0=1$; $\quad$ *g)* $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$ $\quad x_0=2$;

d) $f(x)=e^x$ $\quad x_0=1$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\exp(x-1)-x}{(x-1)^2}$.

3) Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Nous savons étudier les variations d'une fonction sur son ensemble de définition, et tracer sa représentation graphique. Pour préciser celle-ci, nous allons examiner son tracé au voisinage d'un point x_0 où f est dérivable et plus précisément positionner localement la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse x_0.
Nous effectuons cette étude dans le cas où $x_0=0$; dans le cas contraire, on se ramènera à cette situation en posant $x=x_0+h$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle J contenant 0 et dérivable au point 0.
On appelle (C_f) sa courbe représentative et (T) la tangente au point d'abscisse 0.

Scanné avec CamScanner

Une équation de (T) est donc : $y = f(0) + xf'(0)$.

(T) partage le plan $\mathcal{P}$ en deux demi-plans; nous allons rechercher dans quelle région se trouve un point M de coordonnées $(x, f(x))$ pour x proche de 0.
Notons que les points de coordonnées (x, y) tels que :

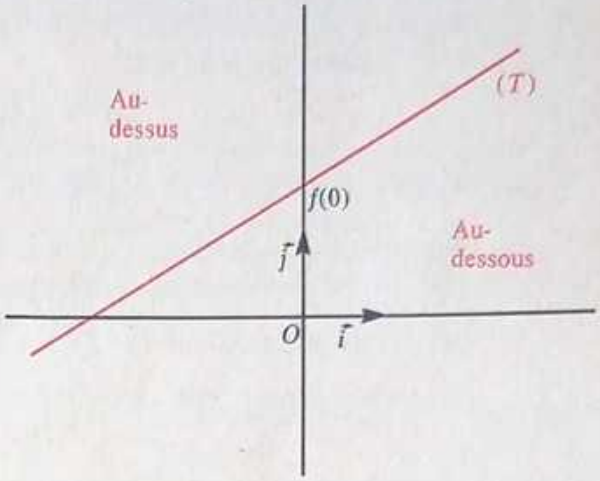
$$y > f(0) + xf'(0)$$

sont dits «au-dessus de la tangente (T)»; ceux vérifiant

$$y < f(0) + xf'(0)$$

sont dits «au-dessous de la tangente (T)».
Pour connaître la position de (C_f) par rapport à (T), on cherche donc le signe de $\varphi(x)$ défini par :

$\forall x \in J$
$\varphi(x) = f(x) - \big(f(0) + xf'(0)\big)$.



Nous avons déjà vu à l'activité 1 page 254, que le développement limité d'ordre 1 en 0, s'il permet de vérifier qu'un point de (C_f) d'abscisse proche de 0 est très voisin de celui de (T) ayant la même abscisse, il est insuffisant pour positionner la courbe par rapport à sa tangente en ce point.
L'écriture du développement limité d'ordre 1 en 0 permet d'affirmer qu'il existe un intervalle $I(0; r)$ et une fonction ε_1 tels que

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad \varphi(x) = x\varepsilon_1(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_1 = 0, \end{cases}$$

mais ne donne aucun renseignement sur le signe de $x\varepsilon_1(x)$.
Nous avions même observé plusieurs fonctions admettant le même développement limité d'ordre 1 en 0 et dont les courbes se positionnaient différemment par rapport à leur tangente commune.
Pour plus de précisions, il paraît donc naturel d'utiliser, s'il existe, un développement limité de f en 0 d'ordre supérieur à 1.

Exemple 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + \ln(1 + x)$.
Écrire le développement limité d'ordre 2 en 0 de f et montrer ainsi qu'il existe une fonction ε_2 telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; 1) \quad \varphi(x) = x^2\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)\right) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0$, on peut affirmer qu'il existe un intervalle $I(0; \alpha)$ inclus dans $I(0; 1)$ tel que

$$\forall x \in I(0; \alpha) \quad |\varepsilon_2(x)| < \frac{1}{2}.$$

Sur $I(0; \alpha)$, l'expression $-\frac{1}{2} + \varepsilon_2(x)$ reste négative et donc :

$$\forall x \in I(0; \alpha) \quad \varphi(x) < 0.$$

Scanné avec CamScanner

Conclusion. Les points de (C_f) dont l'abscisse est élément de $I(0; \alpha)$ sont donc situés sous la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

Exemple 2

Soit g définie par $g(x)=1+\sin x$.
Écrire le développement limité d'ordre 2 en 0 de g et montrer ainsi qu'il existe une fonction η_2 telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) & h(x)=x^2\eta_2(x) \\ \lim\limits_0 \eta_2 = 0. \end{cases}$$

Nous voyons que dans ce cas le développement limité d'ordre 2 en 0 n'est pas plus performant que le développement limité d'ordre 1, car nous ne connaissons pas le signe de η_2 sur $I\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

On pense alors à utiliser un développement limité d'ordre 3 en 0 de g.

Cas général

— Si f admet un développement limité d'ordre 2 en 0, il existe un intervalle $I(0; r_2)$, un nombre a_2 et une fonction ε_2 tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_2) & f(x)=f(0)+xf'(0)+a_2x^2+x^2\varepsilon_2(x) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

De celui-ci on déduit que

$$\forall x \in I(0; r_2) \quad \varphi(x)=x^2\big(a_2+\varepsilon_2(x)\big).$$

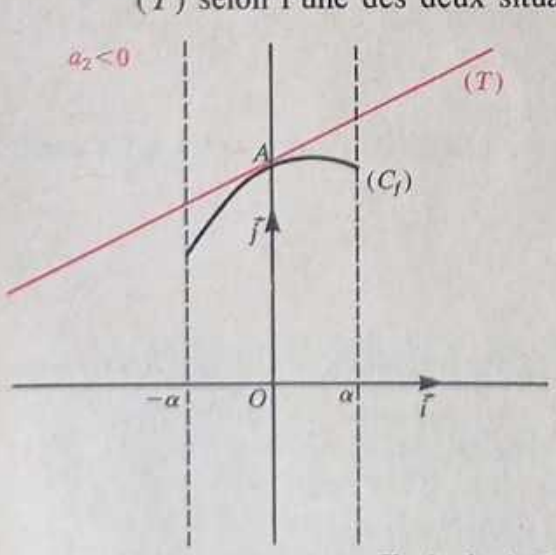
1er cas : $a_2 \neq 0$.

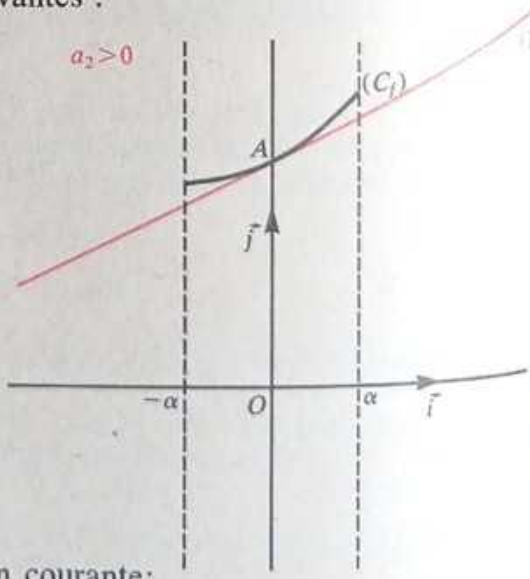
Comme $\lim\limits_0 \varepsilon_2 = 0$, il existe un intervalle $I(0; \alpha)$ inclus dans $I(0; r_2)$ sur lequel

$$|\varepsilon_2(x)| < |a_2|;$$

ainsi $a_2+\varepsilon_2(x)$, donc $\varphi(x)$, gardent un signe constant sur $I(0; \alpha)$, celui de a_2.

Conclusion. La courbe (C_f) reste localement dans un même demi-plan de bord (T) selon l'une des deux situations suivantes :





Il s'agit de la situation courante;
on dit que le point $A(0, f(0))$ est un point ordinaire de (C_f).

Scanné avec CamScanner

2e cas : $a_2 = 0$.

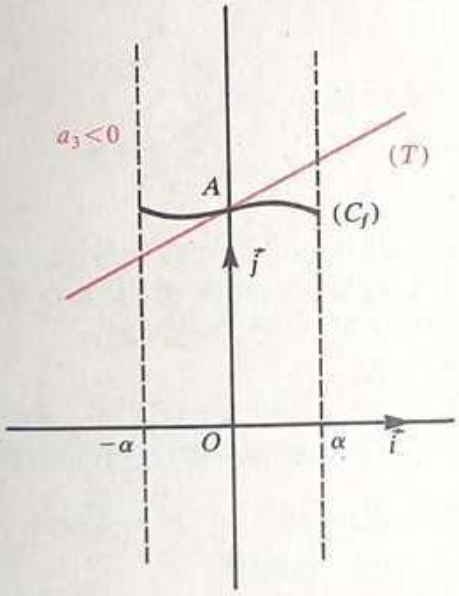
On utilise, s'il existe, le développement limité d'ordre 3 en 0 de f.
Il existe alors un intervalle $I(0; r_3)$, un nombre réel a_3 et une fonction ε_3 tels que :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r_3) \quad \varphi(x) = x^3(a_3 + \varepsilon_3(x)) \\ \lim\limits_0 \varepsilon_3 = 0. \end{cases}$$

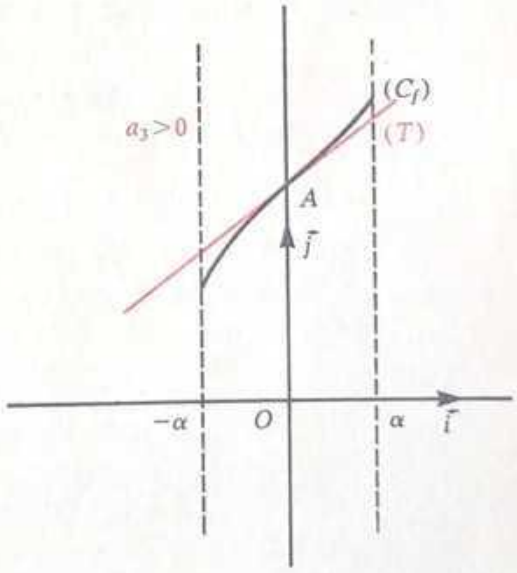
— Si $a_3 \neq 0$, un raisonnement analogue au précédent, montre qu'il existe un intervalle $I(0; \beta)$ sur lequel $a_3 + \varepsilon_3(x)$ garde un signe constant, celui de a_3.
Mais x^3 change de signe sur $I(0; r_3)$; on a donc plus précisément

$$\forall x \in]-\beta, 0[\quad \varphi(x) \times a_3 < 0$$
$$\forall x \in]0, \beta[\quad \varphi(x) \times a_3 > 0.$$

Conclusion. Les deux branches de la courbe (C_f) correspondant aux intervalles $]-\beta, 0[$ et $]0, \beta[$ sont situées de part et d'autre de (T). La courbe (C_f) « traverse » sa tangente au point A d'abscisse 0, selon l'une des deux situations suivantes.



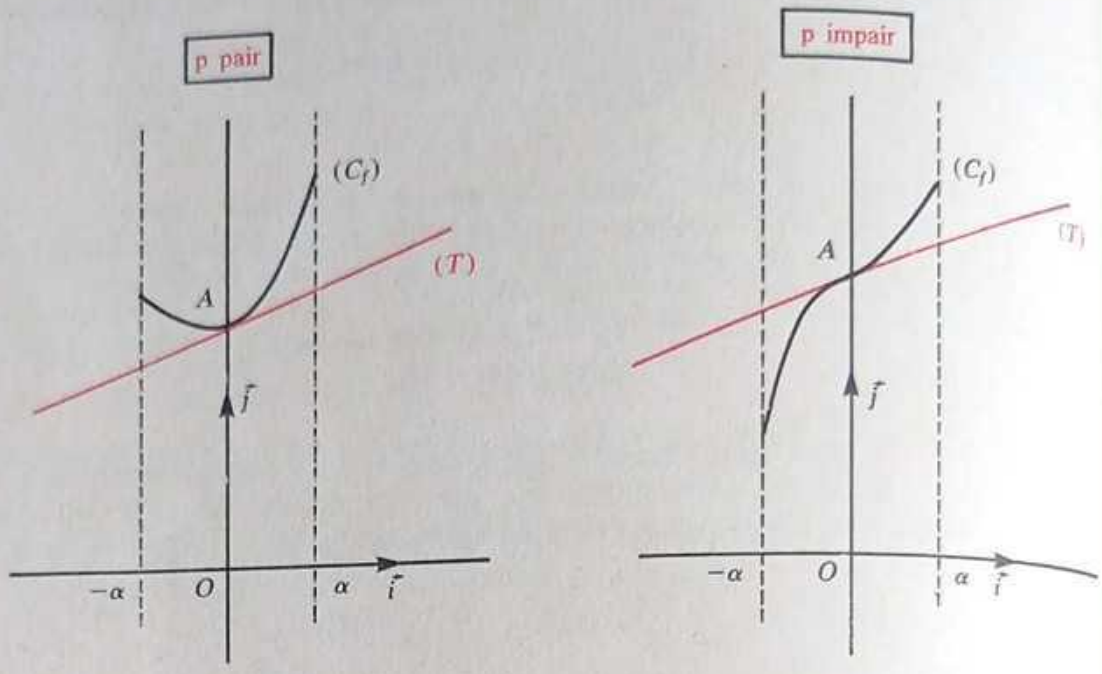
On dit que le point A est un *point d'inflexion* de (C_f).



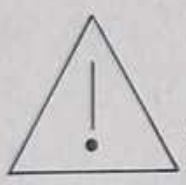
— Si $a_3 = 0$ et si f admet des développements limités d'ordre supérieur à 3, on continue le raisonnement précédent.

Scanné avec CamScanner

Si $a_p x^p$ désigne le monôme de plus bas degré non nul d'un développement limité en 0 de φ, on obtient l'une des situations suivantes :



Ces deux graphiques correspondent à des cas où $a_p > 0$.



Toutes les propriétés ici énoncées sont locales, c'est-à-dire qu'elles ne se réalisent que sur un intervalle $I(0; \alpha)$. De plus si on peut affirmer que $I(0; \alpha)$ existe, on ne peut en général pas déterminer α explicitement.

Remarque 1. Si l'expression de la fonction f le permet, l'étude du signe de φ sur D_f permet de positionner globalement la courbe par rapport à sa tangente.

Remarque 2. Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

— Tout point x_0 tel que $f''(x_0) \neq 0$ est un point ordinaire.

— On fera éventuellement une étude locale aux points x_0 tels que $f''(x_0) = 0$; on utilisera pour cela un développement limité d'ordre 3 en x_0, s'il existe.

Exercices

1) Montrer que le point $A(0; 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_g) de l'exemple 2.

2) Préciser la position locale en 0 de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = 1 - x^4$.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{\sqrt{(1-\cos x)^2}}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x-\sin x}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(e^x - \dfrac{x^2}{2} - 1 - \sin x\right)$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2 - x}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x-\cos x+1}{\tan x - x}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sqrt{1+x}-1}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-(1+\sin x)}{x^2}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{e^x-1-x}$;

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} + x}{x^3}$.

2 Déterminer les limites suivantes :

$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x - \sqrt{2}}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$;

$\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

$\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$;

$\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{e}{e^x-e} - \dfrac{1}{x-1}\right)$;

$\lim_{x\to \pi} \dfrac{\sin\frac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}$;

$\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

3 Démontrer que si f est une fonction deux fois dérivable en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-2f(x)+f(0)}{x^2} = f''(0).$$

4 Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.

5 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 2\ln x + x^2 - 4x + 3.$$

1) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

2) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe (C_f) de f.

3) Étude au point d'abscisse 1.
Écrire un développement limité de f au point 1. En déduire la nature particulière du point de (C_f) d'abscisse 1 et la position de (C_f) par rapport à la tangente en ce point.

4) Tracer, relativement au même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (C_f) et la courbe représentative de la fonction

$$x \longmapsto x^2 - 4x + 3.$$

6 1) Soit g la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$g(x) = x\cos x - \sin x;$$

donner les variations de g; en déduire le signe de $g(x)$ sur $[-\pi, \pi]$.

2) Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\begin{cases} \forall x \in [-\pi, \pi] - \{0\} \quad f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f au point 0.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.

c) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \dfrac{(1+x)e^x - 1}{e^x - 1} \\ f(0) = 2. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

1) Montrer :

a) qu'on a, pour $x \neq 0$, $f(x) = 1 + \left(\frac{x}{e^x - 1}\right) e^x$;

b) que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer :

a) que f est dérivable au point zéro et que $f'(0) = \frac{1}{2}$ (on pourra utiliser le développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro de la fonction qui à x associe e^x);

b) que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$ pour tout x.

3) *a*) Soit α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\alpha(x) = e^x - x - 1$. Étudier les signes de $\alpha'(x)$ et de $\alpha(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire le tableau de variation de f.

c) Déterminer la nature des branches infinies de la courbe C représentative de f.

d) Tracer C relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

8 Soit l'application f, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall x \in]-\infty, 0[\quad f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}; \\ \bullet\ \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \cos^2 \pi x; \\ \bullet\ \forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) = 1 + \dfrac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. On pourra utiliser un développement limité de la fonction $[x \longmapsto e^x]$ en 0.

2) Justifier l'existence de I définie par

$$I = \int_0^e f(x)\,dx.$$

Calculer I.

(Baccalauréat, Bordeaux 1984.)

9 On donne la fonction numérique f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(la notation ln désigne le logarithme népérien). On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) En utilisant un développement limité d'ordre 3 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0, démontrer que f est continue et dérivable en 0. Préciser la tangente à $\mathcal{C}$ au point O et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.

2) *a*) Étudier le sens de variation de la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = -x + (1+x)\ln(1+x)$$

et en déduire que $\forall x \in]-1, +\infty[\quad \varphi(x) \geq 0$.

b) Étudier les variations de la fonction f et tracer la courbe $\mathcal{C}$.

10 Soit f, g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$f : x \longmapsto \ln|x+1| - e^x;$$

$$g : x \longmapsto 1 - (x+1)e^x.$$

1) Étudier les variations de g puis étudier f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Trouver un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de f. En déduire une valeur approchée de $f(e^{-2})$.

3) α étant un nombre réel de $]-1; 0[$, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$, $y = 0$, $x = \alpha$. Cette aire admet-elle une limite quand α tend vers -1?

11 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_0^1 e^{tx^2}\,dt.$$

1) Calculer $F(x)$ pour $x \neq 0$ et $F(0)$. Démontrer que F est continue en 0.

2) Écrire un développement limité à l'ordre 2 de e^x au voisinage de 0. En déduire un développement limité à l'ordre 2 de $F(x)$ au voisinage de 0. Démontrer alors que : $F'(0) = 0$.

3) Démontrer que :

si $0 \leq x \leq x'$ alors $F(x) \leq F(x')$ et que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty.$$

4) Donner, en tenant compte des résultats précédents, l'allure du graphe de F.

(D'après Baccalauréat Besançon, 1984)

12 1) Soit h la fonction définie par

$$h(x) = e^x - 1 - xe^x;$$

étudier les variations de h sur son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On précisera la nature des branches infinies.

2) Soit g la fonction définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \\ g(0) = 1. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de g au point 0, puis sur son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g sur son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

13 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$$\begin{cases} \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[- \{0\} \quad f(x) = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0, puis sur son ensemble de définition.

b) Justifier que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad 0 < \sin^2 x < x^2$; en déduire les variations de f sur son ensemble de définition et tracer sa courbe représentative relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

14 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right);$$

le but de l'exercice est de déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

1) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$; calculer $f(10^{-1})$; $f(10^{-2})$; $f(10^{-4})$; $f(10^{-5})$; $f(10^{-6})$; $f(10^{-7})$; $f(10^{-8})$. Que remarquez-vous?

2) *a*) Rappeler le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0.

b) Écrire $\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$ sous la forme $\ln(1+X)$ et montrer en utilisant un développement limité à l'ordre 2 de e^x que :

$$\lim_{x \to 0} X = 0; \quad \lim_{x \to 0} \frac{X}{x} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \to 0} \frac{X^2}{x} = 0.$$

c) En utilisant le développement limité d'ordre 2 en 0 de $[X \longrightarrow \ln(1+X)]$ et les limites précédentes, calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Note : Cet exercice montre une fois de plus, que si les machines à calculer constituent un outil précieux dans les calculs de limites, il faut se garder de toute conjecture trop rapide.

15 1) Soit f la fonction définie par

$$f(x) = e^{-x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}.$$

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs positives sur $\mathbb{R}^*$.

b) Justifier que la fonction définie par

$$g(x) = \ln f(x)$$

a $\mathbb{R}^*$ pour ensemble de définition et montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = -x + x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

2) *a*) Rappeler le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $u \longmapsto \ln(1+u)$.

b) Le nombre réel x étant élément de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $u = \frac{1}{x}$.

Exprimer $g(x)$ en fonction de u et utiliser le développement limité précédent pour déterminer $\lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} g\left(\frac{1}{u}\right)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

16 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

1) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

2) Le but de cette question est l'étude des branches infinies de (C_f), courbe représentative de f.

a) Démontrer que lorsque x tend vers $+\infty$ (C_f) admet une direction asymptotique d'équation $y = x$.

b) Montrer que pour x strictement supérieur à 1 :

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 1\right).$$

Poser $u = \frac{1}{x}$ et utiliser un développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $[u \longmapsto \sqrt{1-u}]$ pour déterminer

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ u > 0}} f\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{1}{u} \text{ puis } \lim_{x \to +\infty} f(x) - x.$$

c) Démontrer que la droite d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et déterminer la position de (C_f) par rapport à cette asymptote en cherchant le signe de $f(x) - x + \frac{1}{2}$ pour x assez grand.

3) Effectuer une étude analogue pour étudier le comportement de f lorsque x tend vers $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

17 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}.$$

1) Étudier f sur son ensemble de définition.

2) Le but de cette question est d'étudier la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

a) Écrire les développements limités à l'ordre 2 en 0 des fonctions

$$[u \longmapsto \sqrt{1+u}] \text{ et } [u \longmapsto \sqrt{1-u}].$$

b) Soit x un nombre réel strictement supérieur à 1; on pose $u=\frac{1}{x}$; exprimer $f(x)$ en fonction de u et utiliser les développements limités du *a*) pour déterminer $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} f\left(\frac{1}{u}\right)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
En déduire le comportement de f lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Effectuer une étude analogue pour préciser le comportement de f lorsque x tend vers $-\infty$.

3) Tracer $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

18 *a*) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction définie par :

$$\varphi(u)=\sqrt{1+u}.$$

b) Montrer que

$$\forall u\in D_\varphi \quad \varphi^{(3)}(u)=\frac{3}{8}(1+u)^{-\frac{5}{2}}$$

et que

$$\forall u\in I\left(0;\frac{1}{4}\right) \quad 0\leqslant\varphi^{(3)}(u)\leqslant 1.$$

2) Soit f la fonction définie par :

$$f(u)=\sqrt{1+u}-\left(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}\right).$$

a) Vérifier que f, f' et f'' s'annulent en 0 et que $f^{(3)}=\varphi^{(3)}$.

b) Par intégrations successives, établir que :

$$\forall u\in I\left(0;\frac{1}{4}\right) \quad |f(u)|\leqslant\frac{|u^3|}{6}.$$

(Distinguer les cas $u\geqslant 0$ et $u\leqslant 0$.)
Interpréter ce résultat en termes de valeurs approchées.

3) On considère l'équation du second degré :

(E) $\qquad at^2+bt+c=0$

où a est non nul, et où $\left|\frac{c}{a}\right|$ est « petit devant $\left|\frac{b}{a}\right|$ ».

a) On suppose, plus précisément, que

$$\frac{|ac|}{b^2}\leqslant\frac{1}{16}.$$

Quel est alors le signe du discriminant Δ de (E)?
Soit δ la racine carrée de Δ qui a le même signe que b; après avoir écrit δ sous la forme $b\sqrt{1+u}$, montrer que δ admet pour valeur approchée :

$$b-\frac{2ac}{b}-\frac{2a^2c^2}{b^3},$$

avec une erreur associée ε vérifiant :

$$|\varepsilon|\leqslant\frac{32}{3}\left|\frac{a^3c^3}{b^5}\right|.$$

b) Écrire, à l'aide de la valeur approchée précédente, des valeurs approchées des deux solutions de l'équation (E).
Quelle est celle des deux solutions qui est la plus proche de 0?
Donner un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise sur chacune des deux solutions.

c) Application : trouver des valeurs approchées des solutions de l'équation :

$$t^2-1\,000t+1=0.$$

19 1) En étudiant les variations de la fonction $[x \longmapsto \tan x-x]$, montrer que l'équation :

$$x\in\mathbb{R},\ \tan x=x$$

a une solution et une seule dans chaque intervalle $\left[k\pi, k\pi+\frac{\pi}{2}\right[$, où k est élément de $\mathbb{N}^*$.
Cette solution est désignée par x_k.
On pose $t_k=k\pi+\frac{\pi}{2}-x_k$.

2) Montrer que t_k est la solution appartenant à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation :

$$t\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{\tan t}=k\pi+\frac{\pi}{2}-t.$$

En déduire l'encadrement suivant de t_k :

$$\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}<t_k<\frac{1}{k\pi}.$$

Quelle est la limite de la suite $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$?

Scanné avec CamScanner

3) Écrire un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction f définie par $f(t)=\dfrac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}-t}$

(on utilisera le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction

$$\left[u \longmapsto \frac{1}{1-u}\right].$$

En déduire un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction définie par :

$$f_k(t)=\tan t-\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}-t}.$$

En assimilant f_k à son développement limité à l'ordre 1 en 0, trouver une valeur approchée de t_k, puis une valeur approchée de x_k.

Scanné avec CamScanner

Problèmes

20 Soit le plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}=(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans tout le problème on note, pour tout $p\in\mathbb{Z}$, f_p la fonction définie par

$$\begin{cases} f_p(x)=x^p \ln|x| \text{ si } x\in\mathbb{R}^* \\ f_p(0)=0. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}_p$ la courbe représentative de f_p dans $\mathcal{R}$.

A) 1) Étudier, suivant les valeurs de p, la continuité et la dérivabilité de f_p en 0.

2) Étudier la parité de f_p.
Calculer $f'_p(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

3) *a*) Calculer la limite de f_p quand x tend vers $+\infty$.

b) Étudier les variations de f_p.
(On distinguera 4 cas : $p<0$, $p=0$, $p=1$, $p>1$.)

4) En calculant un développement limité d'ordre 1 de $(1+h)^p$ en zéro, et un développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+h)$ en zéro, déduire un développement limité d'ordre 2 de $f_p(1+h)$ en zéro.
En déduire l'équation de la tangente D à toutes les courbes $\mathcal{C}_p$ au point d'abscisse 1, ainsi que les positions relatives de $\mathcal{C}_p$ et de D suivant les valeurs de p.

5) Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-2}$.
On fera trois figures différentes, et l'on prendra 2 cm comme unité.

6) Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, déterminer, en intégrant par parties, l'aire de la partie de plan limitée par la droite $D\ (O, \vec{i})$, les droites d'équations $x=1$ et $x=e^{\frac{1}{p+1}}$ et la courbe $\mathcal{C}_p$.

(D'après Baccalauréat. Nice 84)

21 A tout nombre entier naturel n non nul, on associe l'application f_n ainsi définie :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ 0 \longmapsto 0 \\ x<0 : x \longmapsto (1+x)^n e^{\frac{1}{(n+1)x}} \end{cases}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur : 4 cm).

I) Dans cette première partie, l'entier naturel n prend les valeurs 1 et 2.

1) Étudier la dérivabilité de f_1 et f_2 au point 0.

2) Étudier les variations de f_1 et f_2.

3) Quel est le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 3 de la fonction exponentielle : $x \longmapsto e^x$?

En effectuant le changement de variables $X=\frac{1}{nx}$, justifier la propriété :
pour tout réel x strictement négatif,

$$e^{\frac{1}{nx}}=1+\frac{1}{nx}+\frac{1}{2n^2x^2}+\frac{1}{6n^3x^3}+\frac{1}{x^3}\varepsilon(x),$$

où ε désigne une application définie sur $\mathbb{R}_-^*$ telle que $\lim_{-\infty}\varepsilon=0$.

a) Prouver l'existence d'un unique triplet (a, b, c) et d'un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de nombres réels tels que, sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$f_1(x)=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon_1(x), \qquad \lim_{-\infty}\varepsilon_1=0.$$

$$f_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\delta}{x}+\frac{1}{x}\varepsilon_2(x), \quad \lim_{-\infty}\varepsilon_2=0.$$

b) En déduire l'existence d'une droite asymptote D_1 pour la courbe C_1 et d'une parabole asymptote Γ_2 pour la courbe C_2.
On précisera les positions relatives des courbes asymptotes.

4) Tracer dans un repère, la courbe C_1, puis, dans un autre repère, les courbes C_2 et Γ_2.

(D'après Baccalauréat groupe 1 bis-1984)

22 L'objectif est d'étudier la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2} \text{ si } t\neq 0. \\ f(0)=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On rappelle qu'au voisinage de 0 :

$$\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+t^3\mathcal{E}(t), \text{ où } \lim_{t\to 0}\mathcal{E}(t)=0.$$

1) *a*) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en -1.

b) Montrer que f est continue et dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

2) *a*) Montrer que f est dérivable sur $]-1; 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout élément t de l'un de ces intervalles,

$$f'(t)=\frac{g(t)}{t^3} \quad \text{où} \quad g(t)=\frac{t^2}{1+t}-2t+2\ln(1+t).$$

b) Étudier le signe de $g(t)$. (On pourra pour cela étudier la monotonie de g.)

c) En déduire les variations de f sur $]-1, +\infty[$.

Scanné avec CamScanner

3) Dresser le tableau de variations de f et construire sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

4) Soit x un élément de $]0, 1[$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_x^1 f(t)\,dt$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 f(t)\,dt$.

23 Soit p un nombre entier naturel non nul, pour p donné on appelle f_p la fonction définie par

$$f_p(x) = x^p e^x.$$

On désigne par (C_p) la courbe représentative de f_p relativement au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que pour tout p élément de $\mathbb{N}^*$, (C_p) admet une tangente au point d'abscisse 0, et discuter selon les valeurs de p, la position de (C_p) relativement à cette tangente.

2) *a*) Étudier les variations des fonctions f_1, f_2 et f_3.

b) Écrire les développements limités d'ordre 3 en x_0 distinct de 0 des fonctions f_1, f_2 et f_3. En déduire que (C_1) admet un point d'inflexion, (C_2) deux points d'inflexion et (C_3) trois points d'inflexion.

c) Tracer (C_1), (C_2) et (C_3) relativement au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) *a*) Écrire le développement limité d'ordre 3 en x_0 non nul de la fonction f_p pour p strictement supérieur à 3. En déduire que pour tout p vérifiant cette condition les points de (C_p) d'abscisses $-p+\sqrt{p}$ et $-p-\sqrt{p}$ sont des points d'inflexion.

b) Discuter selon la parité de p l'allure des courbes (C_p).

24 1) Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Écrire les développements limités de f et g à l'ordre 4 en 0.

2) Soit h la fonction définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h(x) = \cos\sqrt{x} \\ \forall x \in \mathbb{R}_- \quad h(x) = \dfrac{e^{\sqrt{-x}} + e^{-\sqrt{-x}}}{2}. \end{cases}$$

a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Écrire le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $[u \longrightarrow \cos u]$.
En substituant $\sqrt{x}$ à u, exprimer $\cos\sqrt{x}$ en fonction de x élément de $\mathbb{R}_+$.
Montrer que l'on peut ainsi obtenir le développement limité à l'ordre 2 de $[x \longmapsto \cos\sqrt{x}]$ à droite en 0.

c) Procéder de façon analogue en utilisant le développement limité à l'ordre 4 de f en 0, pour exprimer $h(x)$ en fonction de x élément de $\mathbb{R}_-$.
Montrer ainsi que l'on obtient le développement limité de h à l'ordre 2 à gauche en 0.

d) Constater que les développements limités de h à gauche et à droite en 0, ont la même partie régulière.
En déduire que h est dérivable en 0 et préciser $h'(0)$.

3) *a*) Étudier les variations de h sur $\left]-\infty, \dfrac{\pi^2}{4}\right]$ et tracer la courbe représentative (C_h) de h relativement à cet intervalle.

b) Tracer la tangente (T) à (C_h) au point d'abscisse 0. Utiliser la question 2 pour préciser la position de (C_h) par rapport à (T).

25 Soit f la fonction numérique déterminée par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

A) 1) En utilisant le développement limité d'ordre 2 de e^x au voisinage de 0, montrer que f est continue et dérivable en 0. Calculer $f'(0)$.

2) Pour tout x réel, on pose

$$g(x) = xe^x - e^x + 1.$$

Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x réel.

3) Étudier les variations de f et représenter $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm). (Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et étudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$).

B) On définit la suite (u_n), par récurrence, par

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1) Représenter, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $M_1(u_0, u_1)$, $M_2(u_1, u_2)$ et $M_3(u_2, u_3)$. (On tracera la droite d'équation $x = y$.)

2) Soit $F(x) = e^x - x^2 - 1$.

a) Étudier les variations de F', fonction dérivée de F, sur $[0; +\infty[$.

Scanné avec CamScanner

b) En déduire que F est croissante sur $[0; +\infty[$ puis que

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) \geqslant 0.$$

3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{F(u_n)}{u_n}. \qquad (1)$$

En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4) Supposons que la suite (u_n) converge vers un nombre réel ℓ non nul.
Utiliser (1) pour prouver qu'alors $F(\ell) = 0$.
Que peut-on conclure?

C) On pose

$$G(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right).$$

Soit $G_1 = G'$, $G_2 = G_1'$, $G_3 = G_2'$, $G_4 = G_3'$.

1) Exprimer $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$, $G_4(x)$ pour tout x réel.

2) Étudier le signe de $G_4(x)$ pour x variant dans $]-\infty; 0]$.
Étudier successivement les variations puis le signe de chacune des fonctions G_3, G_2, G_1 et G sur $]-\infty, 0]$.

3) En déduire, pour tout x négatif :

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} \leqslant f(x) \leqslant 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!}.$$

4) *Application.* Trouver une valeur approchée à $\frac{1}{100}$ près par défaut, en cm², de l'aire de $\mathcal{A}$ définie par :

$$\mathcal{A} = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big/ -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0; \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x) \right\}.$$

(Bac. Rouen. 84)

26 *Méthode de Newton améliorée*
Cet exercice utilise le résultat établi dans l'exercice **18.**

lorsque $\frac{|ac|}{b^2}$ est « petit », l'équation du second degré :

$$t \in \mathbb{R}, \quad at^2 + bt + c = 0,$$

a deux solutions admettant pour valeurs approchées respectives les nombres t_1 et t_2 donnés par :

$$t_1 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}; \quad t_2 = -\frac{b}{a} - t_1;$$

la solution approchée par t_1 est celle qui est « proche de 0 ».

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[u, v]$, et telle que $f(u) \times f(v) < 0$.
Dans ces conditions, l'équation :

$$(E) \qquad x \in [u, v], \quad f(x) = 0,$$

admet une unique solution.

1) On suppose de plus que f est dérivable sur un intervalle ouvert I contenant $[u, v]$, et que $f'(v) \neq 0$.

a) Écrire le développement limité à l'ordre 1 de f au point v.

b) Quelle valeur approchée de x_0 obtient-on en assimilant f sur $[u, v]$ à la partie régulière de ce développement limité?

N. B. On retrouve ainsi la formule obtenue par la méthode de Newton (cf. thème d'étude du chapitre **3**).

c) Quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtient-on par cette méthode en prenant pour f la fonction

$$[x \longmapsto x^2 - 2]$$

et pour $[u, v]$ l'intervalle $[1; 1{,}5]$?

2) Les hypothèses de la question 1 étant toujours vérifiées, on suppose de plus que f est deux fois dérivable sur I et admet un développement limité à l'ordre 2 en v, donné par :

$$\begin{cases} \forall h \in I\ (0; r) \\ \quad f(v+h) = f(v) + f'(v)\,h + \dfrac{1}{2} f''(v)\,h^2 + h^2 \varepsilon(h) \\ \lim\limits_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

On pose :

$$\beta_0 = f(v); \ \beta_1 = f'(v); \ \beta_2 = f''(v); \ h_0 = x_0 - v.$$

On suppose que $|h_0| < r$, et que $\frac{|\beta_2 \beta_0|}{2\beta_1^2}$ est « proche de 0 ».
Notons que cela revient à supposer que $\beta_1 \neq 0$, et que v est déjà une valeur approchée « convenable » de x_0.

a) Pour trouver une valeur approchée de h_0, on assimile f à son développement limité à l'ordre 2 en v.
Montrer que cela revient à prendre comme valeur approchée de h_0, la solution la plus proche de 0 de l'équation du second degré :

$$h \in \mathbb{R}, \quad \frac{\beta_2}{2} h^2 + \beta_1 h + \beta_0 = 0.$$

b) Exprimer à l'aide de β_0, β_1 et β_2 une valeur approchée de cette solution (utiliser le résultat rappelé au début de l'exercice).

Scanné avec CamScanner

c) En utilisant la valeur précédente comme valeur approchée de h_0, montrer qu'une valeur approchée x_1 de x_0 est donnée par :

$$x_1 = v - \frac{f(v)}{f'(v)} - \frac{f''(v)(f(v))^2}{2(f'(v))^3}.$$

On dit que x_1 est une valeur approchée de x_0 obtenue par la *méthode de Newton améliorée*.

d) En prenant comme précédemment

$$f : [x \longmapsto x^2 - 2] \quad \text{et} \quad [u, v] = [1; 1{,}5],$$

quelle valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtient-on à l'aide de la méthode de Newton améliorée? Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 1) *c*).
En itérant le procédé, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à la précision permise par la calculatrice.

27 *Partie I*
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Le but de cette partie est de trouver un cercle qui approche « le mieux possible » la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de l'origine.

1) Quelle est la tangente (D) en O à $(\mathcal{C}_f)$?
Rappeler le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.

2) Quel est l'ensemble (Δ) des centres des cercles passant par O et tangents à (D)?
Quel est l'ensemble (Δ^+) des centres des cercles vérifiant les conditions précédentes et situés du même côté que $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ)?
Montrer qu'un tel cercle (C_λ) admet une équation du type :

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x - y) = 0$$

où λ est élément de $\mathbb{R}_+^*$.

3) Comparer (C_λ) à la représentation graphique (Γ_λ) de la fonction φ_λ définie par :

$$\varphi_\lambda(x) = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda x - x^2}.$$

Calculer $\varphi'_\lambda(0)$ et $\varphi''_\lambda(0)$.
Montrer que φ_λ admet un développement limité d'ordre 2 en 0; le déterminer.

4) Pour quelle valeur λ_0 de λ, la fonction φ_λ admet-elle le même développement limité d'ordre 2 en 0 que f?
Quel est le rayon du cercle (C_{λ_0})?
Tracer, sur un même dessin, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et le cercle (C_{λ_0}).

Partie II
Dans cette partie, f désigne une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I(0; r)$ vérifiant $f(0) = 0$ et admettant en 0 un développement limité d'ordre 2 donné par :

$$\begin{cases} \forall x \in I(0; r) \quad f(x) = ax + bx^2 + x^2\varepsilon(x) \\ \lim_0 \varepsilon = 0. \end{cases}$$

On appelle $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) *a*) Quel est l'ensemble des cercles $(C_{\lambda, \mu})$ admettant une équation de la forme :

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y = 0$$

où (λ, μ) est un élément quelconque de $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$?

b) Soit Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Phi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y.$$

Soit $M(x_0, y_0)$ un point quelconque du plan. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de $\Phi(x_0, y_0)$?

2) *a*) A chaque nombre réel x de l'intervalle $I(0; r)$, on associe le nombre réel $\Phi(x, f(x))$. On définit ainsi une fonction φ de $I(0; r)$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que φ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 et déterminer ce développement limité.

b) A quelle condition existe-t-il un couple (λ_0, μ_0) de $\mathbb{R}^2 - \{(0; 0)\}$ tel que la partie régulière du développement limité précédent soit la fonction polynôme nulle?
Montrer que ce couple, s'il existe, est unique.

3) On suppose la condition du 2) *b*) vérifiée, et on appelle (C_0) le cercle (C_{λ_0, μ_0}).
Soit (T) la tangente en O à $(\mathcal{C}_f)$, $\vec{u}$ le vecteur directeur de (T) de coordonnées $(1; f'(0))$ et (N) la perpendiculaire à (T) en O.
Montrer que le centre Ω_0 de (C_0) appartient à (N) et que :

si $f''(0) > 0$ alors $\text{MES}(\vec{u}, \overrightarrow{O\Omega_0}) = \frac{\pi}{2}$

si $f''(0) < 0$ alors $\text{MES}(\vec{u}, \overrightarrow{O\Omega_0}) = -\frac{\pi}{2}$.

Calculer le rayon R_0 de (C_0) en fonction de a et b, puis en fonction de $f'(0)$ et $f''(0)$.
Le nombre R_0 est appelé **rayon de courbure** en O de $(\mathcal{C}_f)$; le cercle (C_0) est appelé **cercle de courbure** en O de $(\mathcal{C}_f)$.

Scanné avec CamScanner

4) Calculer le rayon de courbure en O de $(\mathcal{C}_f)$ et tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et son cercle de courbure en O dans chacun des cas suivants :

a) $f(x)=2x-x^2$;

b) $f(x)=e^x-1$;

c) $f(x)=-3+\sqrt{9+6x-x^2}$.

5) *a*) *Généralisation*
Comment peut-on généraliser la notion précédente et définir de même :

— le rayon de courbure et le cercle de courbure au point de $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 0 dans le cas où $f(0)\neq 0$;

— le rayon de courbure et le cercle de courbure en un point de coordonnées (x_0, y_0) quelconque de $(\mathcal{C}_f)$?

b) *Exemple*
Soit α et β deux nombres réels strictement positifs et soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}.$$

On appelle (E) sa représentation graphique. Calculer le rayon de courbure de (E) au point $B(0, \beta)$.
En déduire une construction géométrique de son cercle de courbure en ce point, les points $A(\alpha, 0)$ et $B(0, \beta)$ étant placés sur le dessin.

28 *I*) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases}\text{si } x\neq 0 & f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}\\ f(0)=1.\end{cases}$$

1) Montrer, à l'aide de développements limités, que f est continue et dérivable en 0.

2) *a*) Étudier les variations de l'application u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad u(x)=e^x-1-xe^x.$$

b) Étudier la fonction f.

c) Soit (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Étudier les branches infinies de (C).
Tracer la courbe (C).

3) Soit v l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=f(x)+\frac{x}{2}.$$

Montrer que v est une fonction paire.

II) Le but de cette partie est de montrer que f admet des dérivées de tous ordres en 0 et d'établir une relation de récurrence permettant le calcul de ces dérivées.

1) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases}\text{si } x\neq 0 & g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}\\ g(0)=1.\end{cases}$$

a) g est-elle continue en 0?

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad g(x)=e^x-\frac{1}{x}\int_0^x te^t\,dt.$$

2) *a*) Établir, pour tout k élément de $\mathbb{N}$ et tout x élément de $\mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$\int_0^x t^k e^t\,dt=\frac{x^{k+1}e^x}{k+1}-\frac{1}{k+1}\int_0^x t^{k+1}e^t\,dt.$$

b) Soit n un nombre entier naturel non nul. Montrer par récurrence que g est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$\forall x\in\mathbb{R}^*$

$$g^{(n)}(x)=\frac{e^x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)x^{n+1}}\int_0^x t^{n+1}e^t\,dt.$$

c) Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \left|\int_0^x t^{n+1}e^t\,dt\right|\leqslant |x|^{n+2}e^{|x|}.$$

d) En déduire que $g^{(n)}(0)$ existe. Calculer ce nombre.

3) *a*) Montrer par récurrence que, si φ et ψ sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n fois dérivables sur $\mathbb{R}$, le produit $\varphi\cdot\psi$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$(\varphi\cdot\psi)^{(n)}=C_n^0\varphi^{(n)}+C_n^1\varphi^{(n-1)}\psi'+\ldots+C_n^k\varphi^{(n-k)}\psi^{(k)}+\ldots+C_n^n\varphi\psi^{(n)}.$$

b) En considérant la fonction $f\cdot g$, montrer que f est n fois dérivable en 0 et que l'on a la relation :

$$f^{(n)}(0)+C_n^1\frac{f^{(n-1)}(0)}{2}+\ldots+C_n^k\frac{f^{(n-k)}(0)}{k+1}+\ldots+\frac{f(0)}{n+1}=0.$$

c) Calculer $f^{(n)}(0)$ pour $n\in\{2; 3; 4; 5; 6\}$.

Scanné avec CamScanner

8 Équations différentielles

1) INTRODUCTION
2) DÉFINITIONS
3) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE DE LA FORME : $y' = \lambda y$
4) ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE DE LA FORME : $y'' + \lambda y = 0$

1 Introduction

Nous allons, au cours de ce chapitre, introduire et résoudre dans certains cas, de nouveaux types d'équations : les équations différentielles, dont l'importance et l'utilité apparaît dans beaucoup de Sciences. Leur étude constitue une partie considérable et souvent absconse des Mathématiques; les notions introduites en Terminale sont succinctes et ont seulement pour but de nous familiariser avec ce nouvel outil et d'assurer la résolution de certains cas simples d'équations différentielles.
Citons des exemples où interviennent ces « équations différentielles » :

• En Physique nucléaire : appelons N la fonction qui associe à chaque instant le nombre de noyaux radioactifs que possède un corps; on modélise mathématiquement l'évolution du nombre de ces noyaux en écrivant que N vérifie l'équation :

$$N' = -\lambda N$$

où λ est une constante réelle positive et N' la dérivée de la fonction inconnue N. La détermination de N pose le problème de la résolution de cette équation dans laquelle apparaît aussi N'.

• En Électricité : considérons un circuit oscillant LC et appelons q la charge électrique du condensateur qui est une fonction du temps. On montre alors que la fonction q obéit à « l'équation différentielle » :

$$Lq'' + \frac{1}{C} q = 0.$$

Si, de plus, on introduit une résistance R dans le circuit oscillant alors q vérifie :

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C} q = 0.$$

La connaissance de q passe donc par la résolution de cette équation où q intervient à la fois par sa dérivée première q', et par sa dérivée seconde q''.

• Nous avons vu à l'exercice 18 page 60 que l'élasticité d'une fonction f est la fonction $\left[x \longmapsto x \dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]$.

Scanné avec CamScanner

Proposons-nous de déterminer les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$, ne s'annulant pas sur cet intervalle et ayant une élasticité constante α ($\alpha \in \mathbb{R}^*$); une fonction f est solution du problème posé si et seulement si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha.$$

On dit que f est une solution, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle :

$$(1) \qquad x\frac{y'}{y} = \alpha,$$

où l'inconnue y désigne une fonction de la variable réelle x et y' sa fonction dérivée.

> On notera l'abus d'écriture qui consiste à écrire y et y' en lieu et place de $y(x)$ et $y'(x)$ dans une phrase implicitement quantifiée en x (x décrit $\mathbb{R}_+^*$).

On a alors :

$$(1) \iff \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \quad \ln|y| = \alpha \ln x + k$$

c'est-à-dire :

$$|y| = e^k x^\alpha.$$

Comme $[x \longmapsto e^k x^\alpha]$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$, et que y doit être une fonction dérivable, ne s'annulant pas sur cet intervalle, y garde nécessairement un signe constant, on a donc : $y = \lambda x^\alpha$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Ainsi les solutions de l'équation différentielle (1) sont les fonctions f_λ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_\lambda(x) = \lambda x^\alpha \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre réel non nul.}$$

• Nous allons maintenant donner un cadre mathématique précis à ces équations introduites par quelques exemples et fournir des procédés permettant de les résoudre dans certains cas simples.

2 Définitions

1) Équations différentielles du premier ou du second ordre

Définitions

1) Toute équation :

— dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,

— dans laquelle apparaissent l'inconnue et des dérivées successives de l'inconnue, s'appelle **une équation différentielle.**

2) Si la seule dérivée de l'inconnue apparaissant dans l'équation différentielle est sa dérivée première, l'équation est dite du *premier ordre.*
De même, si les seules dérivées de l'inconnue sont ses dérivées première et seconde, l'équation est dite du *second ordre.*

Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=2x$.

L'équation : $$3y'-\varphi y+2\varphi=0,$$

est une équation différentielle du premier ordre d'inconnue y; on remarque que les coefficients figurant dans l'équation peuvent être des fonctions. Par commodité, et pour ne pas introduire de notations auxiliaires, on note cette équation :

$$3y'-2xy+4x=0.$$

Voici d'autres exemples :

(1) $2y'-3y=0$; (3) $xy''+2y'=0$;

(2) $y''=0$; (4) $y'-2x(1+y)=0$.

(1) et (4) sont des équations différentielles du premier ordre, alors que (2) et (3) sont des équations différentielles du second ordre.

Remarque. Dans une équation différentielle du premier ordre, (respectivement du second ordre) y' (respectivement y'') doit apparaître, mais pas nécessairement y et x (respectivement y', y et x).

Soit (E) une équation différentielle du premier ordre (respectivement du second ordre) et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ sur lequel toutes les fonctions figurant dans les coefficients de (E) sont définies.
Toute fonction f, une fois dérivable sur I (respectivement deux fois dérivable sur I) vérifiant (E) est *une solution* de (E).

Exemple. Soit l'équation différentielle :

$$x^2y''+2xy'-2y=0. \quad (E)$$

Montrer que la fonction $\left[x \longmapsto \frac{2-x^3}{x^2}\right]$ est, sur $]0, +\infty[$, une solution de (E).

Exercices

1) Vérifier que la fonction $\left[x \longmapsto -\frac{\ln x}{x}\right]$ est, sur $]0, +\infty[$, une solution de l'équation différentielle :

$$(x \ln x)y'-y-xy^2=0.$$

2) Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$2xy'+y=7x^3-3x.$$

On cherche les solutions s'exprimant sous forme de fonction polynôme.
Pourquoi est-il suffisant de choisir une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3?
Déterminer l'unique fonction polynôme de degré 3 solution de cette équation différentielle.

On dit que l'on a *résolu* ou *intégré* l'équation différentielle (E) sur I, lorsque l'on a déterminé l'ensemble de ses solutions définies sur I.

Remarque. Il va de soi que la donnée d'une équation différentielle impose de chercher des solutions sur un intervalle I où cette donnée a un sens.

Scanné avec CamScanner

2) Un cas particulier déjà vu

Si l'équation différentielle se présente sous la forme :

$$y' = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad y'' = \varphi(x),$$

alors la résolution de cette équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des primitives de φ sur I (pour le cas $y'' = \varphi(x)$ on appliquera, bien sûr, deux fois ce procédé).

Soit par exemple à résoudre : $y'' = 0 \quad (E)$.

On obtient successivement : $y' = C_1$, $y = C_1 x + C_2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = 0$ est l'ensemble des fonctions $[x \longmapsto C_1 x + C_2]$.

Remarquons que les courbes représentatives des solutions, appelées *courbes intégrales*, sont des droites et qu'ainsi pour obtenir une solution particulière il faut deux conditions compatibles et indépendantes.

- Déterminer la solution de (E) dont la courbe intégrale passe par les points de coordonnées $(-1; 0)$ et $(1; 1)$.
- Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 3$ et $f'(0) = -5$.

Exercices

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(a) $\sin 2x + 3y' = 0$ $\quad (b)$ $y'' + 6x^2 = 0$

(c) $(1 + e^{-x})\, y' = 0$ $\quad (d)$ $y^{(4)} = 0$.

2) a) Déterminer la solution de l'équation différentielle : $x - y' = 0$, dont la courbe intégrale passe par le point $A(-1; 0)$.

b) Déterminer la solution de l'équation différentielle : $x - y'' = 0$, dont la courbe intégrale passe par l'origine et le point $A(-1; 0)$.

3 Équations différentielles du premier ordre de la forme : $y' = \lambda y$

1) Résolution de l'équation différentielle : (A) $\quad y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

- Nous savons que la fonction $[p : x \longmapsto e^{\lambda x}]$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie : $p' = \lambda p$; c'est donc une solution particulière de (A).

- En outre :

$$y' = \lambda y \iff y' - \lambda y = 0,$$

et

$$y' - \lambda y = 0 \iff e^{-\lambda x} y' + (-\lambda e^{-\lambda x})\, y = 0$$

$$\iff (y e^{-\lambda x})' = 0.$$

Ainsi la fonction $\left[x \longmapsto y(x) e^{-\lambda x}\right]$ est constante sur $\mathbb{R}$, puisque sa fonction dérivée est nulle sur cet intervalle.

D'où : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) e^{-\lambda x} = C$, où C est une constante réelle.

Soit : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = C e^{\lambda x}$.

Scanné avec CamScanner

Théorème

L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y' = \lambda y,$$

où λ est un nombre réel donné, est l'ensemble des fonctions :

$$[x \longmapsto Ce^{\lambda x}]$$

où C est une constante réelle.

Remarque.
Notons (Γ_C) la courbe représentative de la fonction $[x \longmapsto Ce^{\lambda x}]$.

- Pour $C \neq 0$, (Γ_C) est l'image de (Γ_1) par l'affinité orthogonale d'axe $D(O, \vec{i})$ et de rapport C, dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- (Γ_0) est la droite $D(O, \vec{i})$.

2) Condition pour obtenir une solution unique

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J). Ce point appartient à une courbe intégrale (Γ_C) si et seulement si :

$$y_0 = Ce^{\lambda x_0}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad C = y_0 e^{-\lambda x_0}.$$

Ainsi, par tout point du plan $\mathcal{P}$, il passe une unique courbe représentative d'une solution de l'équation différentielle (A).
Autrement dit :

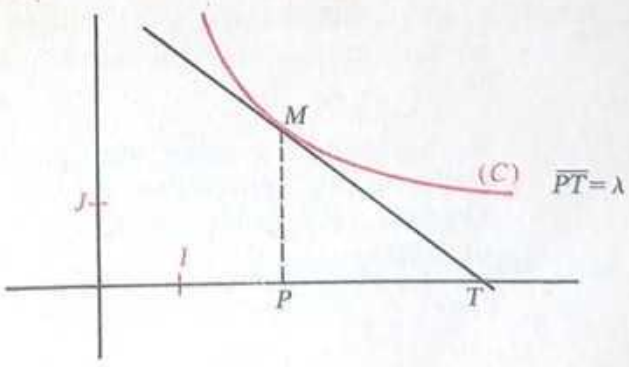
Il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y' = \lambda y$, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exercices

1) Déterminer les fonctions, dérivables sur $\mathbb{R}$, qui sont égales à leur fonction dérivée.

2) Déterminer la solution f de l'équation différentielle : $2y' + 3y = 0$, telle que $f(1) = -\frac{1}{2}$.

3) Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J).
Déterminer les fonctions dont les courbes représentatives (C) sont telles qu'en chacun de leurs points, la tangente (Δ) coupe (OI) en T, avec $\overline{PT} = \lambda$ où λ est un nombre réel donné (voir figure ci-contre).



Scanné avec CamScanner

3) Exemple : détermination de la loi de désintégration d'un corps radioactif

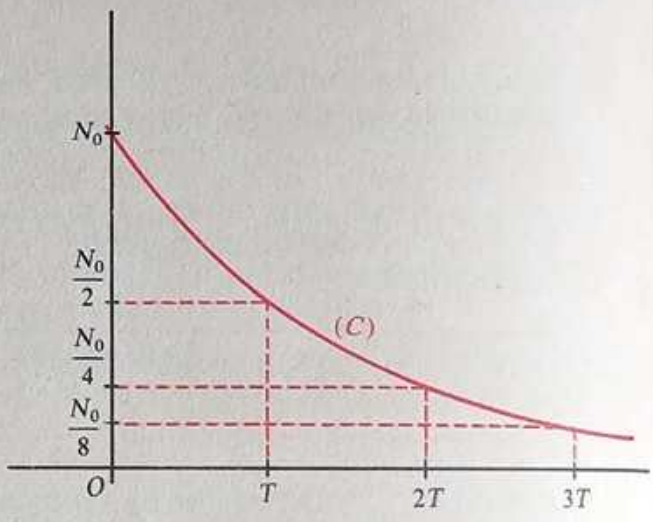
Nous avons vu, au cours de l'introduction, que la fonction N permettant de connaître la loi de désintégration d'un corps radioactif était une solution de l'équation différentielle :

$$y' = -\lambda y \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

(λ, constante radioactive, est relative au corps observé).
La détermination explicite de N nécessite, comme nous venons de le voir, la connaissance d'une condition supplémentaire; elle nous est fournie par le fait qu'à l'instant initial nous connaissons le nombre N_0 de noyaux radioactifs du corps observé, c'est-à-dire que : $N(0) = N_0$. En conséquence, nous en déduisons aisément que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

qui constitue la loi de désintégration radioactive du corps observé.
Graphiquement on obtient la courbe (C) suivante :



• Vérifier algébriquement, que le temps T au bout duquel le corps a perdu la moitié de sa radioactivité est constant et égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

• Ce temps T, appelé *période* du radionucléïde, peut s'obtenir expérimentalement; ceci permet alors d'avoir une « bonne » valeur approchée de la constante radioactive λ.

Exercice Les déchets radioactifs à haute activité des centrales nucléaires comportent notamment du césium de période 2,1 années. Sachant que l'activité après 10 années de stockage est de $1{,}65 \cdot 10^5$ Ci par tonne, déterminer l'activité après 100 ans de stockage (l'activité étant la vitesse de désintégration).

4) Exercices résolus

a) Soit l'équation différentielle (E) suivante :

$$y' + 3y = -3x^2.$$

Recherchons s'il existe une fonction polynôme vérifiant (E).
Cette fonction polynôme, si elle existe, est nécessairement de degré 2; pourquoi?
Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme p, de degré 2, vérifiant (E); on obtiendra :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}.$$

Scanné avec CamScanner

Remarquons que p étant solution de (E), on a : $p'+3p=-3x^2$.
Si f désigne une autre solution de (E), on a aussi : $f'+3f=-3x^2$, et donc :

$$(f-p)'+3(f-p)=0.$$

Étudier la réciproque, et en déduire que f est solution de (E) si et seulement si $(f-p)$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) \quad y'+3y=0.$$

Résoudre (E_0), et en déduire que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions

$$\left[x \longmapsto -x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}+Ce^{-3x}\right]$$

où C est une constante réelle.

b) Soit l'équation différentielle (F) suivante :

$$y'-y=2\cos x.$$

Existe-t-il des solutions de (F) de la forme $[x \longmapsto k\cos x]$?
Montrer qu'il existe une unique solution de la forme

$$[x \longmapsto k_1\cos x+k_2\sin x].$$

En procédant comme ci-dessus, montrer que les solutions de (F) sont les fonctions :

$$[x \longmapsto -\cos x+\sin x+Ce^x]$$

où C est une constante réelle.

c) Soit a un paramètre réel et (G_a) l'équation différentielle :

$$y'-4y=e^{ax}.$$

Rechercher pour quelles valeurs de a, (G_a) admet des solutions de la forme $[x \longmapsto ke^{ax}]$. Terminer la résolution de (G_a) dans ce cas.

• On choisit maintenant $a=4$; nous savons qu'aucune fonction $[x \longmapsto ke^{4x}]$ n'est solution de (G_4); on peut toutefois penser qu'il existe peut-être une solution s'exprimant simplement à l'aide de e^{4x}.

Recherchons une solution de la forme ze^{4x} où z est une fonction (non constante) de x.

$$y=ze^{4x} \implies y'=(z'+4z)e^{4x}$$

d'où :

$$(G_4) \iff (z'+4z)e^{4x}-4ze^{4x}=e^{4x}$$
$$\iff z'=1.$$

Remarquons que la proposition précédente étant une équivalence, on obtient ainsi toutes les solutions de (G_4); ce sont les fonctions de la forme :
$[x \longmapsto (x+C)e^{4x}]$ où C est une constante réelle.

Scanné avec CamScanner

4 Équations différentielles du second ordre de la forme : $y'' + \lambda y = 0$

1) Résolution de l'équation différentielle : (B) $y'' + \lambda y = 0$

Soit (B) l'équation différentielle :

$$y'' + \lambda y = 0,$$

où λ est un élément de $\mathbb{R}^*$. Recherchons, comme précédemment, s'il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme :

$$[f_r : x \longmapsto e^{rx}].$$

• Montrer que f_r est une solution de (B) si et seulement si $r^2 + \lambda = 0$.
Ceci nous conduit à distinguer deux cas suivant le signe de λ. Dans le cas où λ est négatif on pose $\lambda = -\omega^2$ (ω positif), et dans le cas où λ est positif on pose $\lambda = \omega^2$ (ω positif).

a) Étude de l'équation différentielle : (B_1) $y'' - \omega^2 y = 0$

D'après le raisonnement précédent les fonctions :

$$[x \longmapsto e^{\omega x}] \text{ et } [x \longmapsto e^{-\omega x}], \quad \text{sont solutions de } (B_1).$$

Pour trouver l'ensemble des solutions de (B_1), procédons par comparaison avec la solution particulière $[x \longmapsto e^{\omega x}]$ en recherchant ses solutions sous la forme : $[x \longmapsto z(x)e^{\omega x}]$, où z est une fonction deux fois dérivable.

Comme la fonction $[x \longmapsto e^{\omega x}]$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, déterminer toutes les solutions de (B_1) revient à déterminer toutes les fonctions z telles que :

$$(ze^{\omega x})'' - \omega^2(ze^{\omega x}) = 0$$

c'est-à-dire vérifiant : $z'' + 2\omega z' = 0 \quad (B_1')$.

Cette équation différentielle a été résolue au paragraphe précédent, z' jouant le rôle de l'inconnue; d'où z' est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z'(x) = Ce^{-2\omega x},$$

où C est une constante réelle.
Par intégration, z vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = -\frac{C}{2\omega} e^{-2\omega x} + C_1,$$

où C_1 est une constante réelle.

$-\dfrac{C}{2\omega}$ est une constante réelle quelconque; appelons-la C_2.

Ainsi, les solutions de (B_1') sont les fonctions z définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = C_1 + C_2 e^{-2\omega x} \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Scanné avec CamScanner

Conclusion

L'ensemble des solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y'' - \omega^2 y = 0,$$

est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$[x \longmapsto C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}]$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

Conditions pour obtenir une solution unique

Soit x_0 une valeur donnée de la variable, recherchons les solutions f de (B_1) vérifiant $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.
Le couple de constantes (C_1, C_2) est alors solution du système :

$$(S) \qquad \begin{cases} e^{\omega x_0} C_1 + e^{-\omega x_0} C_2 = a \\ \omega e^{\omega x_0} C_1 - \omega e^{-\omega x_0} C_2 = b. \end{cases}$$

Comme le déterminant de ce système vaut -2ω et qu'en conséquence il est différent de 0, (S) admet une unique solution.
Autrement dit :

Il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(x_0) = a \quad \text{et} \quad f'(x_0) = b.$$

Exercices

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 4y = 0$.

2) Déterminer la solution f de : $y'' - 9y = 0$, vérifiant les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$.

3) Déterminer la solution f de : $y'' - (\ln 2)^2 y = 0$, vérifiant $f(0) = 1$ et $f(2) = 1$.

b) Étude de l'équation différentielle : (B_2) $y'' + \omega^2 y = 0$

Il n'existe pas de solutions de la forme $[x \longmapsto e^{rx}]$ où r est un nombre réel; par contre remarquons que les fonctions $[x \longmapsto \cos \omega x]$ et $[x \longmapsto \sin \omega x]$ sont solutions de (B_2); on en déduit que les fonctions :

$$[x \longmapsto C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x]$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles, sont solutions de (B_2). Appelons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de ce type.
Le problème est de montrer qu'il n'existe pas d'autres formes pour une fonction solution de (B_2).

• Soit x_0 une valeur donnée de la variable, montrer qu'il existe une unique fonction f, élément de $\mathcal{F}$, vérifiant les conditions initiales $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.

Scanné avec CamScanner

• Soit g une solution de (B_2), dont on ne sait pas si elle est ou non élément de $\mathcal{F}$; on sait qu'il existe une unique fonction f de $\mathcal{F}$ vérifiant :

$$f(0)=g(0) \quad \text{et} \quad f'(0)=g'(0).$$

• Montrer que $f-g$ est une solution de (B_2) vérifiant :

$$(f-g)(0)=0$$
$$(f-g)'(0)=0.$$

Nous sommes donc ramenés à chercher les solutions de (B_2), vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.

$$(B_2) \Longrightarrow y'y''+\omega^2 y'y=0$$
$$\Longrightarrow y'^2+\omega^2 y^2=K,$$

où K est une fonction constante.
Les conditions initiales imposent à K d'être nulle. On a alors :

$$y'^2+\omega^2 y^2=0,$$

et donc : $$\forall x\in\mathbb{R} \quad y(x)=0.$$

La fonction nulle est évidemment solution de (B_2) et ainsi l'unique solution de (B_2) vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$ et $y'(0)=0$, est la fonction nulle. Il en résulte que $f-g$ est la fonction nulle; par conséquent $f=g$ et ainsi g est élément de $\mathcal{F}$.

Conclusion

L'ensemble des solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :

$$y''+\omega^2 y=0,$$

est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$[x \longmapsto C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x]$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

D'autre part :

Il existe une unique solution f de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$f(x_0)=a \quad \text{et} \quad f'(x_0)=b.$$

Exercices

1) Résoudre l'équation différentielle : $y''+4y=0$.

2) Déterminer la solution f de l'équation différentielle : $y''+9y=0$, vérifiant les conditions initiales $f(0)=0$ et $f'(0)=-1$.

3) Soit (E) l'équation différentielle : $4y''+y=0$. Déterminer la solution f de (E) telle que :

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

Scanné avec CamScanner

2) Application : résolution de l'équation différentielle : (C) $ay'' + by' + cy = 0$

Soit l'équation différentielle :

$$(C) \qquad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont trois nombres réels, a non nul.
Comme précédemment, posons $y(x) = e^{rx} z(x)$, où r est un nombre réel que nous fixerons ultérieurement, et z une fonction deux fois dérivable.

• Montrer que y est solution de (C) si et seulement si z est solution de :

$$(C') \qquad az'' + (2ar + b)z' + (ar^2 + br + c)z = 0.$$

Choisissons alors pour valeur de r la valeur r_0 égale à $-\frac{b}{2a}$; (C') devient :

$$az'' - \frac{b^2 - 4ac}{4a} z = 0.$$

Introduisons le discriminant Δ du trinôme $ar^2 + br + c$; on a alors :

$$z'' - \frac{\Delta}{4a^2} z = 0.$$

D'après 1), on obtient les trois cas suivants :

1er cas : si $\Delta > 0$,

(C') est du type (B_1) avec $\omega = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$.

• Écrire les solutions de (C') et montrer que les solutions de (C) sont les fonctions de la forme :

$$\left[x \longmapsto e^{-\frac{b}{2a}x}(C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x})\right]$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

Remarque
Les solutions de (C) peuvent aussi s'écrire sous la forme :

$$[x \longmapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}]$$

où r_1 et r_2 sont les zéros, réels et distincts, du trinôme $ar^2 + br + c$.

2e cas : si $\Delta = 0$,

(C') devient $z'' = 0$.
Les solutions de (C) sont donc les fonctions :

$$\left[x \longmapsto (C_1 x + C_2) e^{-\frac{b}{2a}x}\right].$$

3e cas : si $\Delta < 0$,

(C') est du type (B_2), en posant $\omega = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a^2}}$.

• Écrire les solutions de (C') et montrer que les solutions de (C) sont les fonctions de la forme :

$$\left[x \longmapsto e^{-\frac{b}{2a}x}(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)\right].$$

Scanné avec CamScanner

En conclusion

Pour résoudre une équation différentielle de la forme :

$$ay'' + by + cy = 0,$$

on cherche les solutions sous la forme $[x \longmapsto z(x)e^{rx}]$ et l'on choisit r de manière que la nouvelle équation différentielle obtenue soit du type :

$$z'' + \lambda z = 0.$$

Exercice Résoudre, en utilisant ce procédé, les équations différentielles suivantes :

(1) $y'' + 3y' = 0$; (3) $3y'' - 5y' + 2y = 0$;

(2) $-y'' + 2y' - y = 0$; (4) $y'' + y' + y = 0$.

3) Exemple : détermination de la charge q d'un condensateur en circuit oscillant

Nous avons vu, au cours de l'introduction, que dans un circuit LC la charge q d'un condensateur était une fonction du temps et que q était solution de l'équation différentielle :

$$Lq'' + \frac{1}{C}q = 0.$$

Cette équation différentielle est de la forme (B_2). On pose alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (\omega_0 \text{ est la pulsation propre du circuit}).$$

On obtient :

$$q(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

• Montrer que l'on a aussi : $q(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, où A et φ sont des nombres réels que l'on déterminera en fonction de C_1 et C_2.
La charge du condensateur est maximum lorsque $\sin(\omega_0 t + \varphi) = 1$; on posera donc : $A = Q_m$, d'où :

$$q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Dans un circuit LC, la charge d'un condensateur est une fonction sinusoïdale du temps, de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, c'est-à-dire $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

• Dans un circuit oscillant RLC (introduction d'une résistance R dans le circuit précédent) q est alors solution de l'équation différentielle :

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0.$$

Étudions l'influence de la valeur de la résistance sur la charge du condensateur (en considérant donc L et C comme constants).

Le discriminant du trinôme $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C}$ est $R^2 - 4\frac{L}{C}$; notons R_C (résistance critique) la valeur de la résistance qui annule ce discriminant.

Scanné avec CamScanner

Si $R < R_C$,

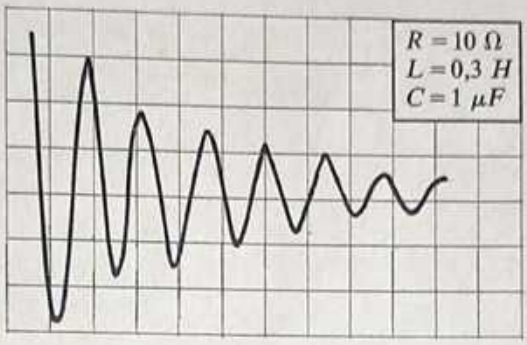
q est de la forme :

$$q(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

avec $\alpha = -\dfrac{R}{2L}$ et $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$,

ou encore : $q(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$.

Justifier l'allure de la courbe suivante obtenue sur l'écran d'un oscillographe dans le cas indiqué :

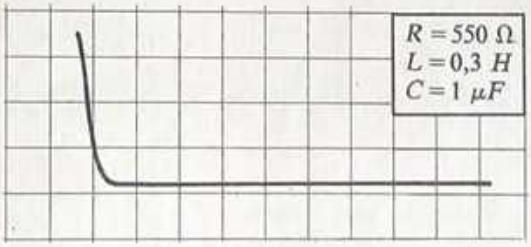


Si $R = R_C$,

q est de la forme :

$$q(t) = (C_1 t + C_2)\, e^{-\frac{R}{2L}t}.$$

Justifier l'allure de la courbe suivante obtenue sur l'écran d'un oscillographe, dans le cas indiqué :

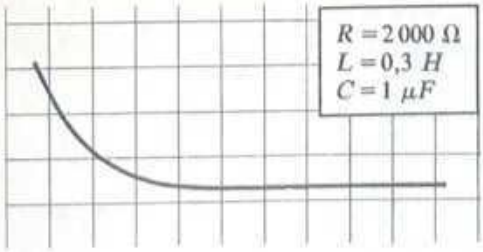


Si $R > R_C$,

le trinôme $Lr^2 + Rr + \dfrac{1}{C}$ admet deux zéros, réels distincts et strictement négatifs r_1 et r_2; q est alors de la forme :

$$q(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Justifier l'allure de la courbe suivante obtenue sur l'écran d'un oscillographe, dans le cas indiqué :



Cette étude permet donc de constater l'amortissement de la charge du condensateur en fonction de l'importance de la résistance introduite dans le circuit oscillant.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Montrer que les fonctions f_i sont solutions des équations différentielles (E_i) suivantes :

$f_1(x)=2x^2-1$ (E_1) $(1-x^2)y'+2xy=2x$

$f_2(x)=\sin^3 x$ (E_2) $y''+9y=6\sin x$

$f_3(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$ (E_3) $x^2y''+3xy'+y=0$

$f_4(x)=x(\ln|x|+1)$ (E_4) $xy'-y=x$.

2 Résoudre, sur l'intervalle I, les équations différentielles suivantes :

a) $x^3y'-x^2+1=0$ $\quad I=\mathbb{R}_+^*$

b) $e^xy+e^{-x}=0$ $\quad I=\mathbb{R}$

c) $y''=x^2+x$ $\quad I=\mathbb{R}$

d) $y''=\tan^2 x$ $\quad I=\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

3 Déterminer la fonction f_i, solution de l'équation différentielle (E_i) vérifiant, la ou les conditions données :

(E_1) $y'+y=0$ $\quad f_1(1)=1$

(E_2) $y''=0$ $\quad f_2(1)=1$ et $f_2(-1)=1$

(E_3) $y''+y=0$ $\quad f_3(0)=1$ et $f_3'(0)=0$

(E_4) $(x^2+1)y'=x$ $\quad f_4(0)=0$.

4 Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $3y'=y$.

b) $y'+(\ln 2)y=0$.

c) $y''+y'=0$.

d) $4y''-4y'+y=0$.

e) $y''+y'+y=0$.

5 Sachant que l'on obtient la solution générale des équations différentielles suivantes, en ajoutant à une solution particulière de l'équation complète, la solution générale de l'équation sans second membre, résoudre :

a) $y'-2y=1$.

b) $y'+y=x$.

c) $y'-y=e^x$.

d) $y''-2y'+y=2x$.

e) $y''+3y'+2y=-\sin 2x$.

f) $y''+4y=3e^x$.

6 Soit l'équation différentielle : $y'=\lambda y$ où λ est un paramètre réel non nul.

1) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation; on note f_k la solution prenant la valeur k pour x nul et (C_k) sa courbe représentative.

2) Soit x_0 un nombre réel fixé.

a) Déterminer l'équation de la tangente à (C_k) au point de (C_k) d'abscisse x_0.

b) Montrer que, lorsque k décrit $\mathbb{R}$ (x_0 restant fixé), ces tangentes sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées en fonction de λ et de x_0.

7 Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=x\sin x+\cos x.$$

- Calculer f' et f''.
- Former une équation différentielle du second ordre dont f est une solution.

8 Montrer que les fonctions

$$[f_1 : x \longmapsto e^{-x\ln x+x}]$$

et

$$[f_2 : x \longmapsto xe^{-x\ln x+x}]$$

sont, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, solutions de l'équation différentielle :

$$y''+2(\ln x)y'+\left(\frac{1}{x}+(\ln x)^2\right)y=0.$$

9 On suppose que y et z sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

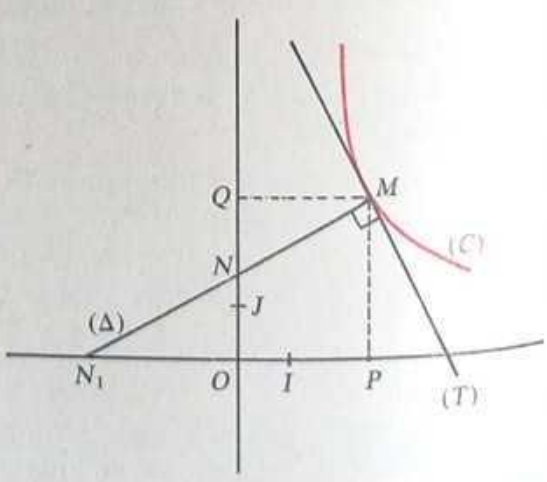
$$\begin{cases} y'=2y+z \\ z'=2y+3z. \end{cases}$$

1) Montrer que : $y''-5y'+4y=0$.

2) En déduire les expressions de y et de z en fonction de x sachant que : $y(0)=1$ et $z(0)=-1$.

10 Le plan $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f.

On considère un point M de (C), la tangente (T) à (C) en M, et la normale (Δ) (droite passant par M et perpendiculaire à (T)) à (C) en M, comme la figure ci-dessous l'indique.



Scanné avec CamScanner

1) Soit N le point d'intersection, lorsqu'il existe, de (Δ) avec (OJ).
Déterminer la fonction f de façon que :

— sa courbe représentative (C) passe par le point $A(1; 1)$;

— pour chacun des points de (C) on ait : $\overline{NQ}=1$.

2) Soit N_1 le point d'intersection, lorsqu'il existe, de (Δ) avec (OI).
Déterminer la fonction f de façon que :

— sa courbe représentative (C) passe par le point $A(1; 1)$;

— pour chacun des points de (C) on ait : $\overline{N_1P}=2$.

3) Dans cette question, on se propose de déterminer, si elles existent, des fonctions f, définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et dont la représentation graphique vérifie en chacun de ses points : $N_1M=1$.

a) Montrer qu'une telle fonction est une solution sur I de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y^2(1+y'^2)=1.$$

b) On recherche dans cette question les solutions f vérifiant les deux conditions supplémentaires suivantes :

(1) f n'est constante sur aucun intervalle inclus dans I;

(2) f est deux fois dérivable sur I, et f'' est continue sur I.

Montrer qu'une telle solution de (E) vérifie nécessairement l'équation différentielle :

$$(E') \qquad y'^2+y''y+1=0.$$

Exprimer l'abscisse de N, en fonction de x et $f(x)$.
Montrer que, si f vérifie (E'), alors l'abscisse de N_1 est constante.
Caractériser géométriquement la courbe (C), et en déduire l'ensemble des fonctions recherchées.

c) Trouver une solution de (E), définie sur $\mathbb{R}$, qui vérifie (2) mais ne vérifie pas (1).

d) Soit la fonction f, définie sur $]-5; 5[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-5; -4[& f(x)=\sqrt{1-(x+4)^2}; \\ \forall x \in [-4; 4] & f(x)=1; \\ \forall x \in]4; 5[& f(x)=\sqrt{1-(x-4)^2}. \end{cases}$$

f est-elle dérivable sur $]-5; 5[$? deux fois dérivable sur $]-5; 5[$?
Montrer que f est une solution de (E).

11 $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé (O, I, J). On se propose de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que :

— f soit positive sur $\mathbb{R}$;

— si (C) est la courbe représentative de f, M un point de (C), M_1 son symétrique par rapport à (OI), alors la tangente en M à (C) et la droite (OM_1) soient perpendiculaires.

1) Déterminer l'équation différentielle (E) vérifiée par f, solution du problème.

2) Montrer que l'on peut résoudre cette équation en posant $g=f^2$.

3) Déterminer alors la fonction f_0, telle que (C) passe par le point de coordonnées $(0; 2)$.
Étudier f_0 et tracer (C), sans calculer $f_0'(x)$.
Pour un point M de (C) indiquer une construction simple de la tangente en M à (C).

12 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=(1+x)e^{-2x}.$$

Quels doivent être les coefficients a et b, pour que la fonction f soit une solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$(E) \qquad y''+ay'+by=0?$$

Démontrer qu'alors, toutes les fonctions dérivées de f vérifient (E).
Calculer l'ensemble des primitives de f et chercher si l'une de ces primitives vérifie (E).

(Extrait. Groupe I. 86)

13 On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'''-6y''+12y'-8y=0$$

dont on note S l'ensemble solution.

1) Montrer que si f_1 et f_2 sont deux éléments de S, alors il en est de même de (f_1+f_2) et $(\lambda \cdot f)$, quel que soit le nombre réel λ.

2) *a*) Vérifier que la fonction

$$[f_0 : x \longmapsto e^{2x}]$$

est élément de S.

b) Montrer que f appartient à S si et seulement si la fonction

$$[g : x \longmapsto e^{-2x}f(x)]$$

est solution de $y'''=0$.

c) En déduire la forme générale des éléments de S.

d) Déterminer l'élément f de S tel que :

$$f(0)=0 \quad f'(0)=0 \quad f''(0)=1.$$

Scanné avec CamScanner

14 Soit les équations différentielles :

(E_0) $\qquad y' + \lambda y = 0$

(E) $\qquad y' + \lambda y = \varphi(x)$

où λ est un nombre réel donné et φ une fonction numérique.
((E_0) est l'équation « sans second membre » associée à (E).)

1) Montrer que si f_0 est une solution particulière non nulle de (E_0) alors la solution générale de (E_0) est $k \cdot f_0$ où k est une constante réelle.

2) Montrer que si g_1 est une solution particulière de (E) et f la solution générale de (E_0) alors $g_1 + f$ est la solution générale de (E).

3) Montrer que, si g_1 et g_2 sont deux solutions particulières de (E), alors $g_1 - g_2$ est une solution particulière de (E_0).
En déduire la forme de la solution générale de (E) à partir des deux solutions particulières g_1 et g_2.

15 On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions numériques g, dérivables sur $\mathbb{R}$, et vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) - g(x) = x - \frac{e-2}{e-1}. \qquad (1)$$

1) Déterminer l'unique fonction affine g_0 vérifiant (1).

2) On note h la fonction : $h = g - g_0$.
Démontrer que g vérifie (1) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle :

$$y' - y = 0 \qquad (2)$$

3) Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (2) et en déduire l'ensemble des fonctions g vérifiant (1).
Déterminer la fonction vérifiant (1) qui s'annule en zéro.

(Extrait Amérique du Sud. 86)

16 On se propose de résoudre l'équation suivante, d'inconnue la fonction numérique f, continue sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + x. \qquad (E)$$

1) Montrer que si f est solution de (E) alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que toute solution de (E) est solution d'une équation différentielle (E') que l'on déterminera.

3) Réciproquement, quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être solution de (E)?

4) Résoudre (E).

17 On appelle S l'ensemble des fonctions numériques f admettant des dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

1) Montrer que si f appartient à S, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad f^{(3)}(x) = f''(x).$$

En déduire que si f est un élément de S alors $f^{(3)} = f''$, puis que f'' est solution d'une équation différentielle de la forme :

$$y' - my = 0 \quad (m \in \mathbb{R}).$$

2) A l'aide de deux intégrations, montrer que les éléments de S sont de la forme :

$$f(x) = ax + be^x \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

(Extrait Amiens. E. 86)

18 Soit les équations différentielles :

(E_0) $\qquad y - y' = 1$

(E_n) $\qquad y - y' = \dfrac{x^n}{n!}$,

où n est un nombre entier naturel non nul.

1) Résoudre (E_0).

2) Montrer que, si (E_n) admet pour solution une fonction polynôme f_n, alors f_n est de degré n.

3) Quelle est la fonction dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ d'une fonction polynôme de degré n?

4) Montrer que, si f est solution de (E_n) alors f' est solution de (E_{n-1}); déterminer alors la fonction polynôme f_n solution de (E_n).
Résoudre (E_n). (On obtient l'ensemble des solutions de (E_n), en ajoutant à une solution particulière de (E_n), la solution générale de $y - y' = 0$.)

19 On considère l'équation différentielle :

(1) $\qquad y'' - y' - 6y = -6x - 1.$

1) Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction polynôme g, définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax + b$ soit solution de l'équation (1).

2) *a*) Démontrer que f, fonction numérique de la variable réelle, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (1) si et seulement si $f - g$ est solution de l'équation différentielle :

(2) $\qquad y'' - y' - 6y = 0.$

b) Résoudre l'équation différentielle (2).

c) En déduire l'ensemble des solutions de (1).

d) Trouver la solution de (1) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$.

Scanné avec CamScanner

3) Soit f la fonction numérique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x-3} + x.$$

Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On choisira 2 cm pour unité de longueur.)
Préciser la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

(Lille. 86)

20 1) Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

(1) $$y'' + y = 0.$$

2) Étant donné une fonction g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$, on définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x\,g\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exprimer $f''(x)$ à l'aide $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et x.

3) On considère l'équation différentielle :

(2) $$y'' = -\frac{1}{x^4}\,y.$$

Démontrer que la fonction g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est solution de (2) si et seulement si la fonction f, définie, sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x\,g\left(\frac{1}{x}\right).$$

est solution de (1).

4) En déduire l'ensemble des solutions de (2) définies sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

5) Soit g une solution de (2) définie sur $]0; +\infty[$.
Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction :

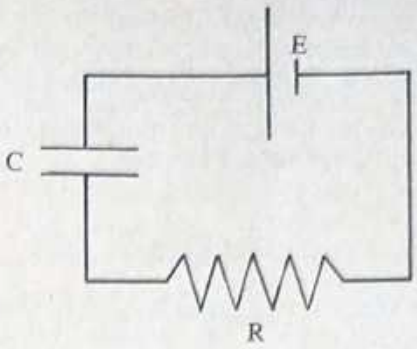
$$\left[x \longmapsto \frac{1}{x^4} g(x)\right].$$

Calculer l'intégrale :

$$J = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

(Extrait. La Réunion. 85)

21 *Charge d'un condensateur*
On se propose d'étudier les variations de la charge d'un condensateur de capacité C, initialement déchargé, et aux bornes duquel on connecte un générateur de force électromotrice constante E, de résistance intérieure négligeable, et en série avec une résistance R.



Soit q la fonction représentant la charge de ce condensateur en fonction du temps t.

1) Montrer que q est solution de l'équation différentielle :

(1) $$Ry' + \frac{1}{C}\,y = E.$$

2) *Résolution de* (1) *et détermination de* q

a) Soit z la fonction telle que : $z = f - CE$.
Montrer que f est solution de (1) si et seulement si z vérifie

(2) $$Rz' + \frac{1}{C}\,z = 0.$$

Résoudre (2) et en déduire l'ensemble des solutions de (1).

b) Montrer alors que la fonction q est définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad q(t) = CE\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right).$$

3) *Allure de la courbe représentative* (C) *de* q

a) Étudier les variations de la fonction q sur $\mathbb{R}_+$.

b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à (C) en O; en déduire que le condensateur se charge d'autant plus lentement que la résistance R est grande (R joue ainsi le rôle d'un coefficient d'amortissement).

c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} q(t)$ (en déduire que la charge « maximale » du condensateur est indépendante de la résistance R).

d) Donner l'allure de la courbe (C).

22 *A*) Soit (e) l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

1) *a*) Quelles sont les solutions de (e)?

b) Quelle est la solution de (e), dont la courbe représentative (C) admet au point d'abscisse 0, la même tangente que la courbe (C') représentative de $y = e^{3x}$?
On dit que (C) et (C') sont tangentes.

Scanné avec CamScanner

2) Représenter dans un même repère orthonormé les courbes (C) et (C') dont on précisera les positions relatives.

3) λ étant un nombre réel strictement positif, soit h_λ les fonctions telles que :

$$h_\lambda(x) = -\lambda^2 e^x + 2\lambda e^{2x}.$$

a) Montrer que h_λ est solutions de (e).

b) Soit (C_λ) la courbe représentative de h_λ. Après avoir calculé en fonction de λ les coordonnées du point commun à (C_λ) et (C'), montrer que ces courbes sont tangentes en ce point.

c) Préciser les positions relatives de (C_λ) et (C').

B) Soit (e') l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2.$$

1) Trouver une fonction polynôme du second degré, solution de (e').

2) On pose : $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$. Montrer que f est solution de (e'), si et seulement si g est solution de (e).
En déduire l'ensemble des fonctions f, solutions de (e').

3) Déterminer la solution de (e') dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées (0; 2) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 1.

(Amérique du Nord. 86)

Scanné avec CamScanner

9 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

1) DÉFINITIONS
2) ÉTUDE D'UNE COURBE DONNÉE PAR UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE
3) EXEMPLES ET APPLICATIONS
4) VOCABULAIRE DE LA CINÉMATIQUE

1 Définitions

1) Introduction

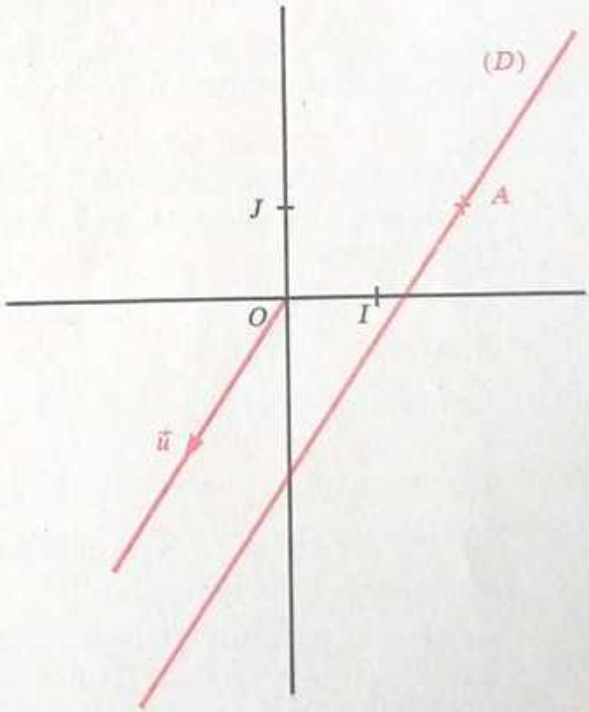
Depuis la classe de Seconde, nous avons utilisé des représentations paramétriques de certains sous-ensembles du plan.

Ainsi, par exemple, dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la droite (D) passant par $A(2; 1)$ et de vecteur directeur

$$\vec{u}\,(-2; -3)$$

admet la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 - 3t. \end{cases}$$



Un point $M(x, y)$ quelconque du plan appartient à (D) si et seulement si :

$\exists t \in \mathbb{R} \quad (x, y) = (2 - 2t, 1 - 3t).$

Autrement dit, un point du plan appartient à la droite (D) si et seulement si ses coordonnées appartiennent à l'ensemble image de l'application :

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (2 - 2t, 1 - 3t).$$

Rappelons que c'est l'application F qui est appelée représentation paramétrique de la droite (D).

Scanné avec CamScanner

De même, nous avons vu que, si (O, I, J) est un repère orthonormé, l'application :

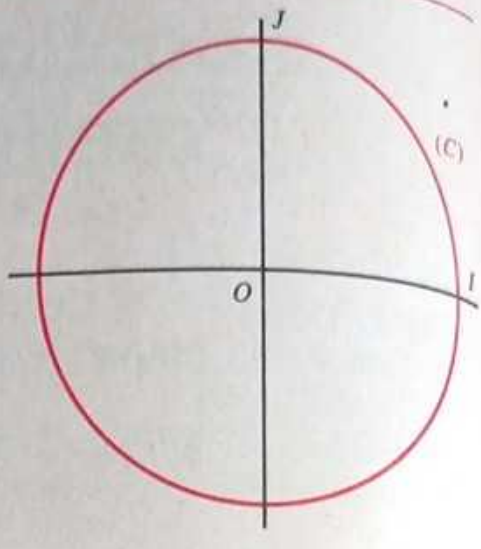
$$G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (\cos t, \sin t)$$

est une représentation paramétrique du cercle (C) de centre O et de rayon 1.

Cette phrase signifie que l'ensemble :

$\{M(x, y) \in \mathcal{P} / \exists t \in \mathbb{R}(x, y) = (\cos t, \sin t)\}$

est le cercle (C).



Le but de ce chapitre est d'étudier des procédés permettant de construire un sous-ensemble de $\mathcal{P}$ caractérisé par une représentation paramétrique.

2) Définitions

a) Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.
A chaque élément t de son ensemble de définition D_F, on peut associer respectivement la première et la deuxième composante du couple $F(t)$. La donnée de F définit donc les deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall t \in D_F \quad F(t) = (f(t), g(t)).$$

Réciproquement, la donnée de deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, d'ensembles de définitions respectif D_f et D_g, permet de définir la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$:

$$F : t \longmapsto (f(t), g(t)).$$

L'ensemble de définition de F est $D_f \cap D_g$.
Se donner une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ revient donc à se donner deux fonctions numériques.

On écrira parfois : $F = (f, g)$.

Exemple

Soit la fonction $F : t \longmapsto \left(t + \ln t, \dfrac{1}{t-1}\right)$.

Les fonctions $[f : t \longmapsto t + \ln t]$ et $\left[g : t \longmapsto \dfrac{1}{t-1}\right]$ sont définies respectivement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R} - \{1\}$. L'ensemble de définition de F est donc $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

b) Courbes paramétrées

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J).
Soit $F : t \longmapsto (f(t), g(t))$ une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, et soit D son ensemble de définition.
On obtient une représentation géométrique de la fonction F en associant à chaque valeur t de D le point du plan de coordonnées $F(t)$, c'est-à-dire $(f(t), g(t))$. D'où la définition suivante.

Scanné avec CamScanner

Définition

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, d'ensemble de définition D.
Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont éléments de $F(D)$ est appelé **indicatrice** de F.

Inversement, lorsqu'un ensemble (C) de points du plan est l'indicatrice d'une fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$, on dit que (C) admet F comme **représentation paramétrique**, que (C) est une **courbe paramétrée** par F, ou que F est un **paramétrage** de (C).

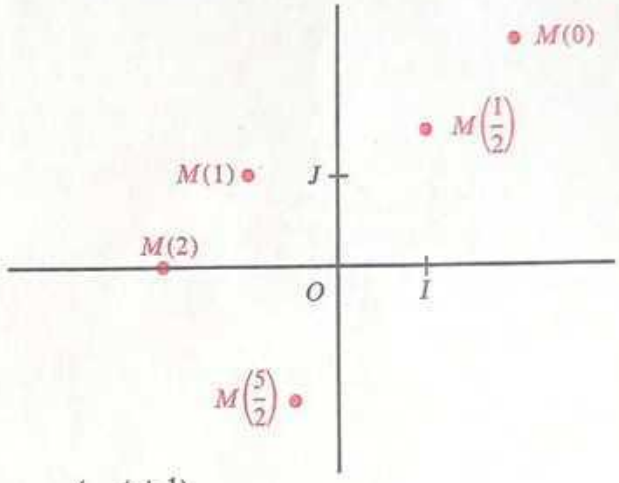
On désigne souvent par $M(t)$ le point de (C) de coordonnées $(f(t), g(t))$. Un point de (C) est ainsi caractérisé par son abscisse et son ordonnée, qui dépendent de la variable t, appelée **paramètre.**

Exemple 1

Quelques valeurs de F

t	$F(t)$
0	$\left(2; \frac{5}{2}\right)$
$\frac{1}{2}$	$\left(1; \frac{3}{2}\right)$
1	$(-1; 1)$
2	$(-2; 0)$
$\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Les points correspondants de (C)



Exemple 2

L'indicatrice de la fonction : $F : t \longmapsto \left(t; \frac{t+1}{t}\right)$

est l'hyperbole d'équation : $y = \frac{x+1}{x}$.

Exemple 3

La courbe (C) paramétrée par :

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases}$$

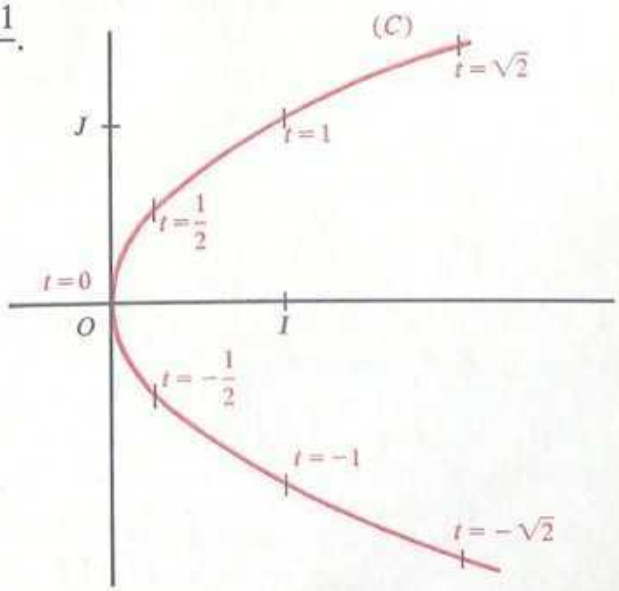
est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$y^2 = x.$$

C'est la réunion des courbes représentatives des fonctions :

$$x \longmapsto \sqrt{x}$$

et $$x \longmapsto -\sqrt{x}.$$



Scanné avec CamScanner

Remarque 1. Toute représentation graphique d'une fonction numérique φ peut être considérée comme une courbe paramétrée. C'est en effet l'indicatrice de :

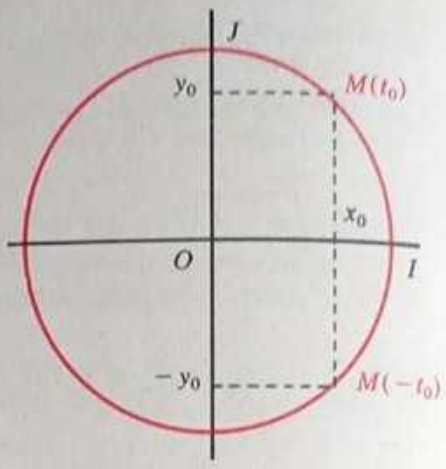
$$F : t \longmapsto (t, \varphi(t)).$$

Attention! La réciproque de ce résultat est fausse. Les courbes paramétrées ne sont pas toutes des représentations graphiques de fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ainsi, nous avons vu que, en repère orthonormé, la courbe de représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

est le cercle de centre O et de rayon 1, qui n'est pas la représentation graphique d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.



Remarque 2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et (C_f) sa courbe représentative. Il n'existe pas d'autre fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admettant (C_f) comme courbe représentative.
Autrement dit, la donnée de (C_f) détermine entièrement f.
Au contraire, une même courbe (C) peut être l'indicatrice de plusieurs fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exemple. Montrer que les fonctions :

$$F_1 : t \longmapsto (1+t, 2t);$$
$$F_2 : t \longmapsto (1+t^3, 2t^3);$$
$$F_3 : t \longmapsto (1+\tan t, 2\tan t);$$

admettent toutes trois comme indicatrice la droite d'équation : $2x - y - 2 = 0$.

Exercices

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Soit (C) la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t. \end{cases}$$

Le point $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ appartient-il à (C)?

Quelles sont les valeurs du paramètre t pour lesquelles $M(t) = A$?

2) Reconnaître les indicatrices des fonctions suivantes :

a) $t \longmapsto (e^t, t)$;

b) $t \longmapsto (3 - 2\cos t; 4 - 2\sin t)$.

3) *a*) Comparer les indicatrices des fonctions :

$F : t \longmapsto (1+3t, 1-2t)$ et $G : t \longmapsto (4+6t, -1-4t)$.

Scanné avec CamScanner

b) Caractériser géométriquement l'indicatrice de :

$$F_1 : t \longmapsto (1+3t^2,\ 1-2t^2).$$

c) Caractériser géométriquement l'indicatrice de :

$$F_2 : t \longmapsto (1+3\sin t,\ 1-2\sin t).$$

2 Étude d'une courbe donnée par une représentation paramétrique

Dans les exemples donnés précédemment, les indicatrices des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ considérées étaient des courbes simples, bien connues, que nous pouvions tracer sans faire référence à la fonction.
Cependant, l'intérêt des notions étudiées dans ce chapitre est de permettre le tracé de courbes nouvelles, autres que des droites, des cercles, ou des représentations graphiques de fonctions numériques.
Pour construire ces courbes, l'outil essentiel est l'étude des propriétés (parité, périodicité) et des variations des fonctions numériques f et g telles que $F=(f, g)$.
Les seuls cas que nous rencontrerons cette année sont ceux où la fonction F est définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, et où les fonctions f et g sont dérivables sur tout intervalle de D_F.

1) Exemple d'étude d'une courbe paramétrée

Construisons, dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) la courbe (C) admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Désignons par F la fonction $[t \longmapsto (\sin 2t, \sin t)]$ et par f et g respectivement les fonctions $[t \longmapsto \sin 2t]$ et $[t \longmapsto \sin t]$.
Pour tout nombre réel t, notons $M(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$.

Étude des propriétés des fonctions f et g. Détermination de l'intervalle d'étude des fonctions f et g.

- La fonction F, comme les fonctions f et g, est définie sur $\mathbb{R}$.
- D'autre part, f et g sont périodiques. f a pour période π, g a pour période 2π. La plus petite période positive commune à f et g est 2π. La fonction F est donc périodique, de période 2π.

Interprétons graphiquement ce résultat. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t)=F(t+2\pi).$$

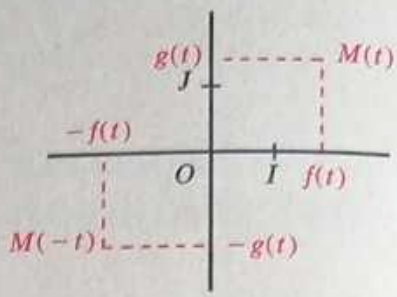
Toutes les valeurs (de $\mathbb{R}^2$) prises par la fonction F sont atteintes lorsqu'on fait varier t dans un intervalle d'amplitude 2π. Il en résulte qu'on obtient la courbe (C) tout entière en faisant varier t dans un intervalle de la forme $[\alpha, \alpha+2\pi]$. Il est donc inutile (et même nuisible) d'étudier F sur un intervalle d'amplitude plus grande.
De manière à pouvoir tirer parti des propriétés de parité de f et g, nous choisirons un intervalle centré en 0, c'est-à-dire l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Scanné avec CamScanner

Remarque. L'interprétation graphique de la périodicité de la fonction F diffère radicalement de celle que l'on peut donner de la périodicité d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

• D'autre part, les deux fonctions f et g sont toutes deux impaires.
Pour tout nombre réel t, les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont pour coordonnées respectives

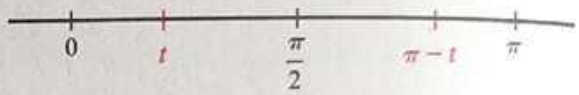
$\big(f(t), g(t)\big)$ et $\big(-f(t), -g(t)\big)$.



Ces deux points sont donc symétriques par rapport à l'origine O du repère.

Les parties (C_1) et (C_2) de la courbe (C) obtenues en faisant varier t dans $[-\pi; 0]$ et dans $[0; \pi]$ sont donc symétriques par rapport à O. Il suffit de construire, par exemple, la partie (C_1) de (C) obtenue lorsque t décrit $[0, \pi]$, puis de compléter par symétrie par rapport à O.

On peut encore remarquer que, si t est un élément de $[0; \pi]$, il en est de même de $\pi - t$, et que :

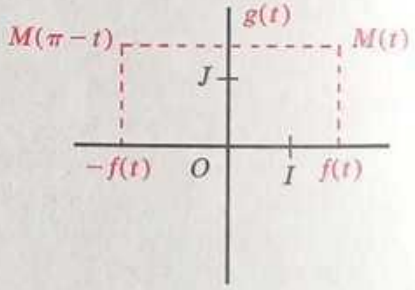


$$F(\pi - t) = \big(\sin\big(2(\pi - t)\big), \sin(\pi - t)\big)$$
$$= (-\sin 2t, \sin t)$$

c'est-à-dire :

$$\big(f(\pi - t), g(\pi - t)\big) = \big(-f(t), g(t)\big).$$

Les points $M(t)$ et $M(\pi - t)$ sont donc images l'un de l'autre dans la symétrie orthogonale d'axe (OJ). On peut donc réduire une nouvelle fois l'intervalle d'étude. On obtient toute la courbe (C_1) en construisant la partie (C_1') de la courbe obtenue en faisant varier t dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, puis en complétant par symétrie orthogonale d'axe (OJ).



• *En conclusion*

— Nous étudierons F sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

— La courbe (C) toute entière sera obtenue en effectuant successivement :

— la symétrie orthogonale d'axe (OJ);
— la symétrie centrale de centre O.

Scanné avec CamScanner

Étude des variations de f et g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Le calcul et l'étude du signe des dérivées de f et g sont immédiats. Pour tirer parti des renseignements résultant de l'étude des variations de f et g, il est intéressant de regrouper dans un même tableau les résultats obtenus, de la façon suivante :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	1	↘	0
$g(t)$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1
$g'(t)$	0	$+$		$+$	0

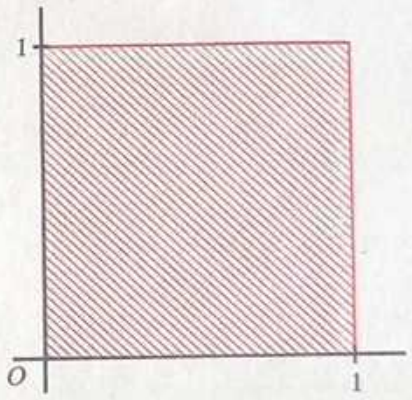
Il reste à construire (C_1') en utilisant les indications fournies par ce tableau.

— On constate que, lorsque t décrit $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

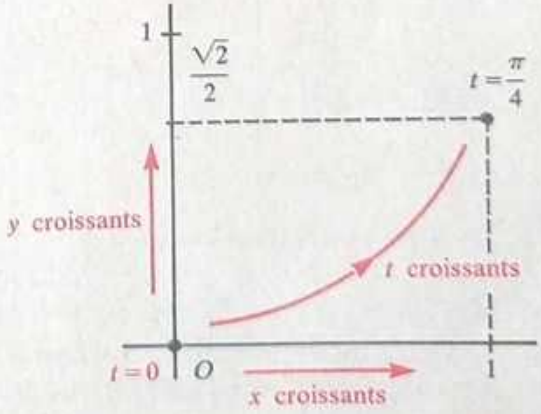
$$\begin{cases} 0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \\ 0 \leqslant g(t) \leqslant 1. \end{cases}$$

(C_1') est donc contenue dans la partie du plan caractérisée par :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

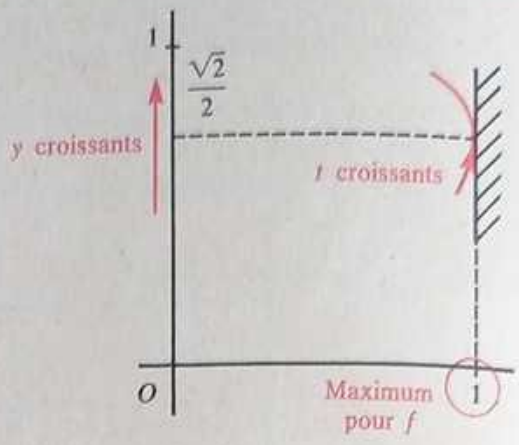


— Sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, les fonctions f et g sont toutes deux croissantes, la première de 0 à 1, la seconde de 0 à $\frac{\sqrt{2}}{2}$. A cet ensemble de valeurs correspond donc un arc de courbe ayant l'allure ci-contre.



Scanné avec CamScanner

— Au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, g est croissante, alors que f admet un maximum.

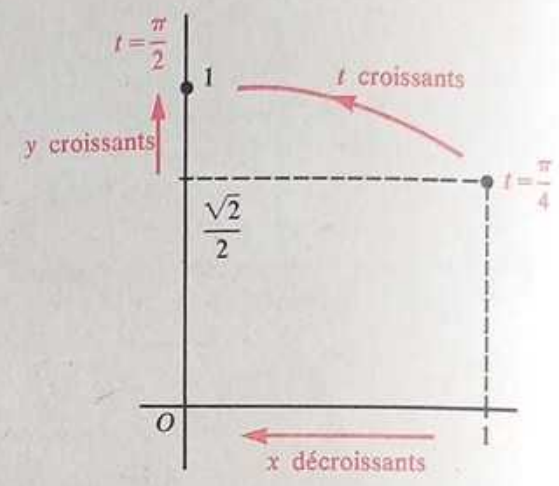


— Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, f est décroissante et g est croissante.
De plus :

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0; 1).$$

L'arc de courbe correspondant a donc l'allure ci-contre.



A ce stade de notre étude, nous n'avons aucun moyen théorique de préciser la forme de la courbe au voisinage des points remarquables O, J et $A\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Nous nous contenterons donc de calculer les images par F de quelques valeurs de t proches de 0, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$.

t	arrondis d'ordre 3 de $f(t)$	$g(t)$
0,05	0,1	0,05
0,1	0,199	0,1
0,15	2,296	0,149
0,2	0,389	0,199

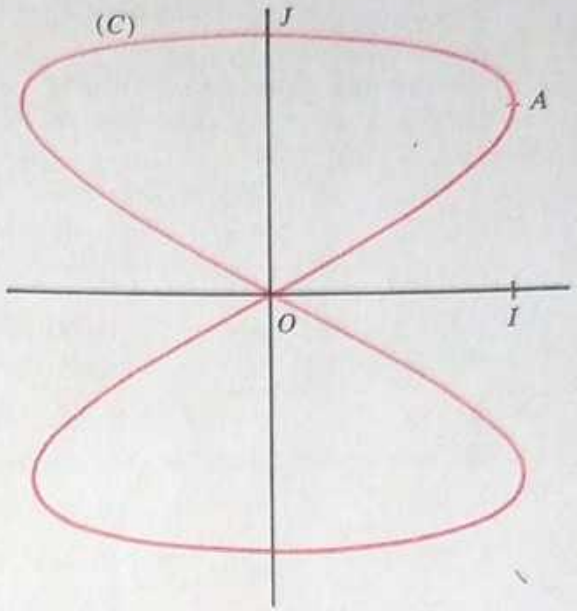
t	arrondis d'ordre 3 de $f(t)$	$g(t)$
0,7	0,985	0,644
0,75	0,997	0,682
$\frac{\pi}{4}$	1	0,707
0,82	0,998	0,731
0,85	0,992	0,751

t	arrondis d'ordre 3 de $f(t)$	$g(t)$
1,45	0,239	0,993
1,5	0,141	0,997
1,53	0,082	0,999
$\frac{\pi}{2}$	0	1

On peut alors construire la courbe (C'_1) puis la courbe (C) en effectuant la symétrie orthogonale d'axe (OJ) suivie de la symétrie centrale de centre O.

Scanné avec CamScanner

t	Arrondis d'ordre 2 de $f(t)$	$g(t)$
0,5	0,84	0,48
0,6	0,93	0,56
0,9	0,97	0,79
1	0,90	0,84
1,1	0,80	0,89
1,2	0,67	0,93
1,3	0,51	0,96
1,4	0,33	0,98



Il semblerait que la courbe (C) admette une tangente en chacun de ses points (et même deux en O, où deux arcs distincts de la courbe (C) se coupent). La connaissance de ces tangentes nous aurait permis de préciser le tracé de (C). L'étude des tangentes à une courbe paramétrée est l'objet du paragraphe suivant.

2) Tangente en un point d'une courbe paramétrée

a) Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit (C) la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$F : t \longmapsto \big((1+t)^2, (1+t)^3\big).$$

On pose : $f(t)=(1+t)^2$; $g(t)=(1+t)^3$.

• Donner l'allure de l'arc de la courbe (C) obtenu lorsque t décrit l'intervalle $[-1; 1]$.

• On veut étudier plus précisément la forme de la courbe au voisinage de $M(0)$.

— Calculer les images par f et g des nombres :

$-0{,}05$; $-0{,}04$; $-0{,}03$; $-0{,}02$; $-0{,}01$; 0; 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05.

— Reporter sur un dessin (unités : 5 cm représentent 0,1) les points correspondants.

— Les points ainsi construits semblent « presque alignés » sur une droite (D). Comment peut-on obtenir une représentation paramétrique de cette droite à partir des développements limités à l'ordre 1 en 0 de f et g?

b) Tangente en un point régulier

Soit F une fonction définie sur un intervalle ouvert I, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et (C) la courbe paramétrée par F dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On suppose que les fonctions numériques f et g telles que $F=(f, g)$ sont dérivables sur I, et on veut étudier le comportement de F au voisinage d'un point t_0 de I.

Posons : $x_0=f(t_0)$; $y_0=g(t_0)$; $\alpha=f'(t_0)$; $\beta=g'(t_0)$.

Scanné avec CamScanner

Soit r un nombre réel strictement positif tel que $]t_0-r,\ t_0+r[\subset I$, et M_0 le point de coordonnées $(x_0,\ y_0)$.
On sait que, dans ces conditions, f et g admettent des développements limités à l'ordre 1 en t_0, c'est-à-dire qu'il existe deux fonctions ε_1 et ε_2, définies sur $]-r,\ r[$, telles que :

$$\forall h\in\,]-r,\ r[\quad \begin{cases} f(t_0+h)=x_0+\alpha h+h\varepsilon_1(h)\\ g(t_0+h)=y_0+\beta h+h\varepsilon_2(h)\end{cases}$$

$$\lim_0 \varepsilon_1=0;\qquad \lim_0 \varepsilon_2=0.$$

Nous savons que, lorsque h est suffisamment proche de 0, on peut légitimement choisir comme valeurs approchées des valeurs prises par les fonctions

$$h\longmapsto f(t_0+h)\quad\text{et}\quad h\longmapsto g(t_0+h)$$

les valeurs prises par les fonctions affines

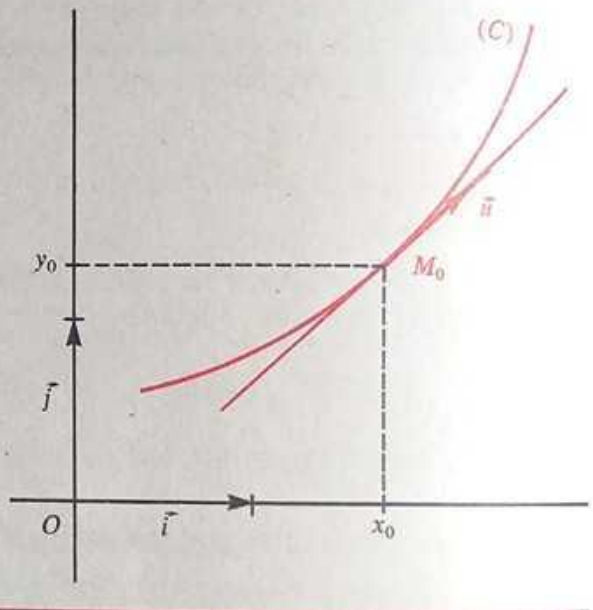
$$h\longmapsto x_0+\alpha h\quad\text{et}\quad h\longmapsto y_0+\beta h.$$

Lorsque α et β ne sont pas tous les deux nuls, l'application :

$$h\longmapsto (x_0+\alpha h,\ y_0+\beta h)$$

est une représentation paramétrique de la droite (D) passant par M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}\,(\alpha,\ \beta)$.

Graphiquement, l'approximation précédente revient à assimiler, au voisinage du point M_0, les points de la courbe (C) et ceux de la droite (D).
Par analogie avec le cas déjà rencontré de la tangente en un point d'une courbe d'équation $y=\varphi(x)$, où φ est une fonction numérique dérivable, nous dirons que la droite (D) est tangente en M_0 *à* (C).



Définitions

Soit f et g deux fonctions numériques dérivables sur un même intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall t\in I\quad F(t)=\big(f(t),\ g(t)\big).$$

L'application F' de I dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall t\in I\quad F'(t)=\big(f'(t),\ g'(t)\big)$$

est appelée **fonction dérivée** de F.
Si, en un point t_0 de I, on a :

$$\big(f'(t_0),\ g'(t_0)\big)\neq(0;\ 0)$$

alors, la droite passant par $M_0\big(f(t_0),\ g(t_0)\big)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,\big(f'(t_0),\ g'(t_0)\big)$ est appelée **tangente en M_0** à l'indicatrice (C) de F dans le plan muni d'un repère.

Scanné avec CamScanner

En posant :

$$f(t_0)=x_0; \quad g(t_0)=y_0; \quad f'(t_0)=x'_0; \quad g'(t_0)=y'_0$$

on obtient comme équation de la tangente à (C) en M_0 :

$$\boxed{y'_0(x-x_0)-x'_0(y-y_0)=0.}$$

Exemples

Reprenons la courbe étudiée précédemment, définie par la représentation paramétrique

$$F : t \longmapsto (\sin 2t, \sin t).$$

• Prenons $t=\frac{\pi}{6}$:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}; \quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1; \quad g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La courbe (C) admet donc la droite d'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x-y-\frac{1}{4}=0$$

comme tangente au point de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

• Prenons $t=\frac{\pi}{4}$:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1; \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0; \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comme nous l'avions déjà constaté, la courbe (C) admet au point de coordonnées $\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ une tangente parallèle à la droite des ordonnées.

• Le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a pour coordonnées (0; 1). En ce point, (C) admet une tangente parallèle à la droite des abscisses. Le vérifier.

• Le cas du point O est particulier. En effet, en ce point passent deux arcs de la courbe (C), l'un correspondant à t voisin de 0, l'autre à t voisin de π. On dit que O est un *point double* de (C).
En utilisant les valeurs prises par les fonctions f, g, f' et g' en 0 et π, on obtient des équations des tangentes en O aux deux arcs de (C) :

$$y=\frac{1}{2}x; \quad y=-\frac{1}{2}x.$$

Remarque 1. Le point $M(t_0)$ de la courbe (C) est dit :

— *régulier* si $(f'(t_0), g'(t_0)) \neq (0; 0)$;

— *stationnaire* si $(f'(t_0), g'(t_0))=(0; 0)$.

L'étude précédente ne précise pas ce qu'il se passe au voisinage d'un point stationnaire. Ce cas sera étudié brièvement dans le prochain paragraphe.

Scanné avec CamScanner

Remarque 2. Lorsqu'une courbe est définie par une représentation paramétrique, les tangentes parallèles à la droite des ordonnées n'apparaissent pas comme des cas particuliers.

Remarque 3. Soit t un élément de I distinct de t_0. Lorsque $M(t) \neq M_0$, le vecteur $\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M_0M(t)}$ est un vecteur directeur de la sécante $(M_0M(t))$ à la courbe (C).

Les composantes de son couple de coordonnées $\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}, \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right)$ ont pour limites respectivement $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ lorsque t tend vers t_0.
Ainsi, la tangente en M_0 à la courbe (C) apparaît, d'une certaine manière, comme la « position limite » d'une sécante passant par M_0.

Exercices

1) Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Soit a un élément de I.
Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a.

b) La courbe (C_f) peut également être définie par la représentation paramétrique telle que :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t). \end{cases}$$

En utilisant la définition précédente, déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point correspondant à la valeur a du paramètre.
Que remarque-t-on? Ce résultat est-il étonnant?

2) On reprend les notations de la définition.
Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et φ une bijection dérivable de J sur I.
On appelle G l'application définie sur J par :

$$\forall u \in J \quad G(u) = (f \circ \varphi(u), g \circ \varphi(u)).$$

a) Comparer l'indicatrice (Γ) de G et la courbe (C).

b) Soit u_0 l'élément de J tel que $\varphi(u_0) = t_0$.
Calculer la dérivée de G en u_0 à l'aide de $\varphi'(u_0)$, $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$.
Que peut-on en déduire concernant la tangente en M_0 à (Γ)?

c) Tangente en un point stationnaire

Exemple 1

Soit (C) la courbe admettant pour représentation paramétrique la fonction F définie par :

$$\begin{cases} f(u) = 1 + u^3 \\ g(u) = 1 + 2u^3 + u^6. \end{cases}$$

- Que vaut $F'(0)$?
- Reconnaître la courbe (C). Le point $M(0)$ est-il un point particulier de (C)?
- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à (C) en ce point. Calculer $F''(0)$, $F^{(3)}(0)$. Que constate-t-on?

Scanné avec CamScanner

Exemple 2

Soit (Γ) la courbe admettant pour représentation paramétrique la fonction F définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 2 + t^3 \\ g(t) = 1 + t^2. \end{cases}$$

• Étudier les variations des fonctions f et g. Calculer $F'(0)$ et $F''(0)$.

La définition précédente ne permet pas de préciser la forme de la courbe (Γ) au voisinage du point $A(2; 1)$.

Cependant, en examinant le tableau de variation, on voit que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$:

$$\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} t = f^{-1}(x) \\ y = g(t) \end{cases}$$

$$\iff y = g \circ f^{-1}(x).$$

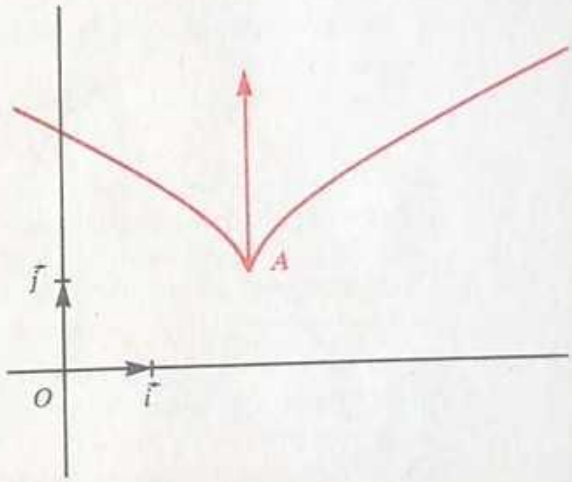
(Γ) est donc aussi la représentation graphique de la fonction $g \circ f^{-1}$.

• Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g \circ f^{-1}(x) = |x-2|^{\frac{3}{2}} + 1.$

• Étudier le comportement de $g \circ f^{-1}$ au voisinage de 2.

La forme de la courbe (Γ) au voisinage de A est représentée sur le dessin ci-contre.

Remarquer que $F''(0)$ représente encore les coordonnées d'un vecteur directeur de la demi-tangente en A.



En conclusion, nous voyons que :

— dans les deux cas, la courbe considérée admet une tangente en son point stationnaire (plus précisément, une demi-tangente dans l'exemple 2);

— dans l'exemple 1, le point qui apparaît comme stationnaire n'est pas un point particulier de la courbe (C); il n'apparaît comme tel qu'en raison du paramétrage particulier choisi pour représenter (C);

— dans l'exemple 2, le point stationnaire considéré est un point particulier de la courbe appelé *point de rebroussement*.

Étude du cas général

Reprenons les notations du paragraphe précédent. Supposons en outre que f et g soient deux fois dérivables sur I, et que l'on ait, en t_0 :

$$\begin{cases} (f'(t_0),\ g'(t_0)) = (0; 0) \\ (f''(t_0),\ g''(t_0)) \neq (0; 0). \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Posons : $\alpha_2 = f''(t_0)$; $\beta_2 = g''(t_0)$.
Dans ce cas, f et g admettent des développements limités à l'ordre 2 en t_0, et il existe deux fonctions η_1 et η_2 définies sur I, telles que :

$$\left\| \begin{array}{l} \forall h \in]-r, r[\quad \begin{cases} f(t_0+h) = x_0 + \dfrac{\alpha_2}{2} h^2 + h^2 \eta_1(h) \\ g(t_0+h) = y_0 + \dfrac{\beta_2}{2} h^2 + h^2 \eta_2(h) \end{cases} \\ \lim\limits_0 \eta_1 = 0; \quad \lim\limits_0 \eta_2 = 0. \end{array} \right.$$

Raisonnons de la même façon que dans le cas d'un point régulier.
Pour h « proche de 0 », la fonction $[h \longmapsto F(t_0+h)]$ prend des valeurs « très proches » de celles prises par la fonction :

$$h \longmapsto \left(x_0 + \frac{\alpha_2}{2} h^2,\ y_0 + \frac{\beta_2}{2} h^2\right).$$

Or, l'indicatrice de cette dernière fonction est contenue dans la droite (D) passant par $M_0(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha_2, \beta_2)$. Plus précisément, cette indicatrice est la demi-droite d'origine M_0 et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Comme précédemment dans le cas d'un point régulier, on dit que (D) est tangente en M_0 à (C).
Nous admettrons que le résultat ci-dessus s'étend au cas où F, n fois dérivable sur I, vérifie :

$$\begin{cases} F'(t_0) = F''(t_0) = \ldots = F^{(n-1)}(t_0) = (0; 0) \\ F^{(n)}(t_0) \neq (0; 0). \end{cases}$$

Ainsi, si F est « suffisamment dérivable », son indicatrice admet une tangente en M_0, et la valeur de la première dérivée non nulle en t_0 est le couple des coordonnées d'un vecteur directeur de cette tangente.

Remarque 1. Comme nous l'avons vu dans les exemples précédents, la courbe peut, dans certains cas, avoir une allure particulière au voisinage d'un point stationnaire.
On précise alors son tracé au voisinage de ce point en tenant compte :
— des symétries de la courbe;
— du sens de variation de f et g;
— du calcul de quelques images par F d'éléments proches de t_0.

Remarque 2. Pour une courbe paramétrée, nous ne ferons pas de distinction entre tangente et demi-tangente.

Exercice Soit (C) la courbe admettant pour représentation paramétrique la fonction F définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t - \sin t \\ g(t) = 1 - \cos t. \end{cases}$$

1) Quelle transformation géométrique simple donne pour image du point $M(t)$ le point $M(t+2\pi)$?
Comment obtient-on la courbe (C) tout entière à partir de l'arc (C_1) obtenu pour t décrivant $[-\pi, \pi]$?

Scanné avec CamScanner

2) Étudier la parité des fonctions f et g. En déduire l'intervalle D_E sur lequel on étudiera F.

3) Étudier les variations des fonctions f et g sur D_E. Préciser la forme de la courbe (C) au voisinage du point O. Construire (C).

3) Branches infinies d'une courbe paramétrée

a) **Exemple**

Soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{t^2-t+3}{2(t+2)} \\ g(t)=\dfrac{t-1}{t+2}. \end{cases}$$

Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}-\{-2\}$. Elles n'ont aucune propriété remarquable de parité ou de périodicité. Notre ensemble d'étude sera donc $\mathbb{R}-\{-2\}$. L'étude des fonctions f et g est résumée dans le tableau suivant :

t	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	$-\frac{11}{2}$	↘	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$
$g(t)$	1	↗	2	↗	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1
$g'(t)$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	

On constate sur ce tableau que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$. Par conséquent, lorsque t tend vers $+\infty$, le point $M(t)$, tout en restant sur (C), s'éloigne «aussi loin que l'on veut» de O.

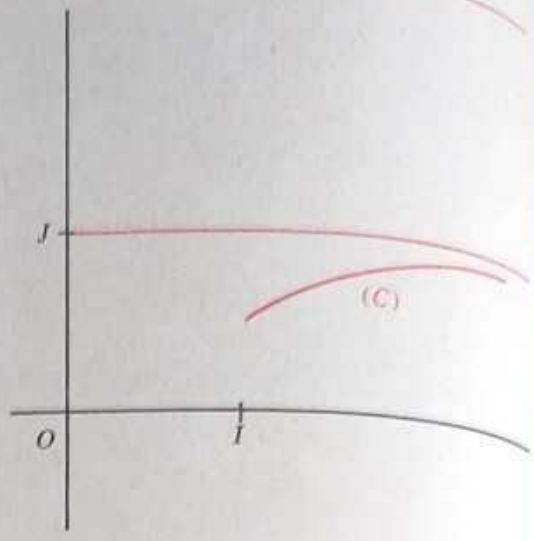
Nous dirons, comme dans le cas d'une courbe d'équation $y=f(x)$, que le point $M(t)$ décrit alors une *branche infinie* de la courbe (C).

L'examen du tableau permet de trouver trois autres branches infinies de (C), décrites respectivement par $M(t)$ lorsque :

- t tend vers -2 par valeurs supérieures;
- t tend vers -2 par valeurs inférieures;
- t tend vers $-\infty$.

Scanné avec CamScanner

Par ailleurs, lorsque t tend vers $+\infty$, l'abscisse de $M(t)$ devient de plus en plus grande, alors que son ordonnée devient de plus en plus proche de 1. Le point $M(t)$ devient donc de plus en plus proche de la droite d'équation $y=1$.
Nous dirons que la droite d'équation $y=1$ est *asymptote* à la branche de la courbe (C) décrite par le point $M(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.



De même, cette droite est asymptote à la branche de la courbe (C) décrite par le point $M(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$.

Étudions les branches infinies de (C) décrites par le point $M(t)$ lorsque t tend vers -2 par valeurs inférieures et supérieures.
Au voisinage de -2, les fonctions f et g sont toutes deux non bornées. Pour comparer les valeurs prises par ces deux fonctions, effectuons le changement de variable donné par :

$$t=-2+u.$$

On a : $$f(-2+u)=\frac{u}{2}-\frac{5}{2}+\frac{9}{2u}; \quad g(-2+u)=1-\frac{3}{u}.$$

Lorsque u est voisin de 0, les termes prépondérants dans les expressions des fonctions

$$[u \longmapsto f(-2+u)] \text{ et } [u \longmapsto g(-2+u)]$$

sont respectivement $\frac{9}{2u}$ et $-\frac{3}{u}$.
Ces termes s'éliminent lorsqu'on forme la combinaison linéaire

$$g(-2+u)+\frac{2}{3}f(-2+u).$$

Plus précisément : $$g(-2+u)+\frac{2}{3}f(-2+u)=-\frac{2}{3}+\frac{u}{3}$$

et donc : $$\lim_{u\to 0}\left(g(-2+u)+\frac{2}{3}f(-2+u)\right)=-\frac{2}{3}$$

ou encore : $$\lim_{t\to -2}\left(g(t)+\frac{2}{3}f(t)+\frac{2}{3}\right)=0.$$

Rappelons que $f(t)$ et $g(t)$ représentent l'abscisse et l'ordonnée du point $M(t)$.
Introduisons la droite (D) d'équation :

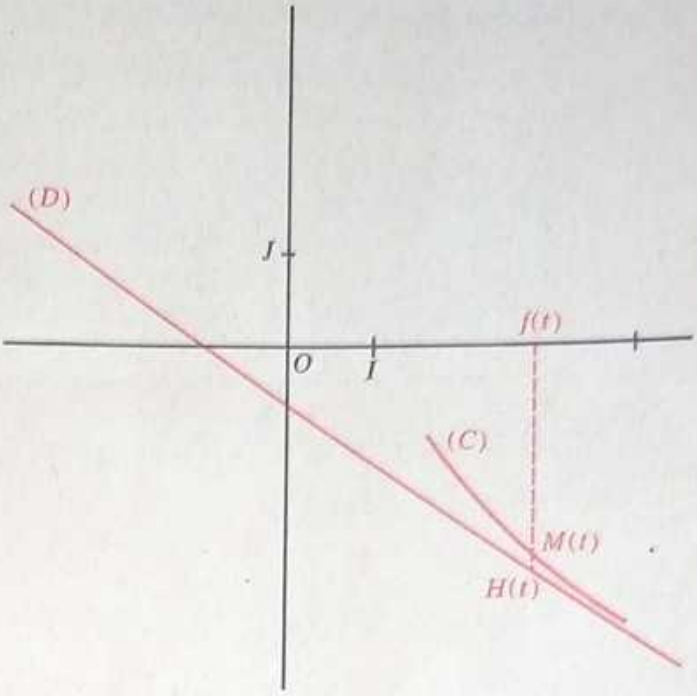
$$y+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=0.$$

Scanné avec CamScanner

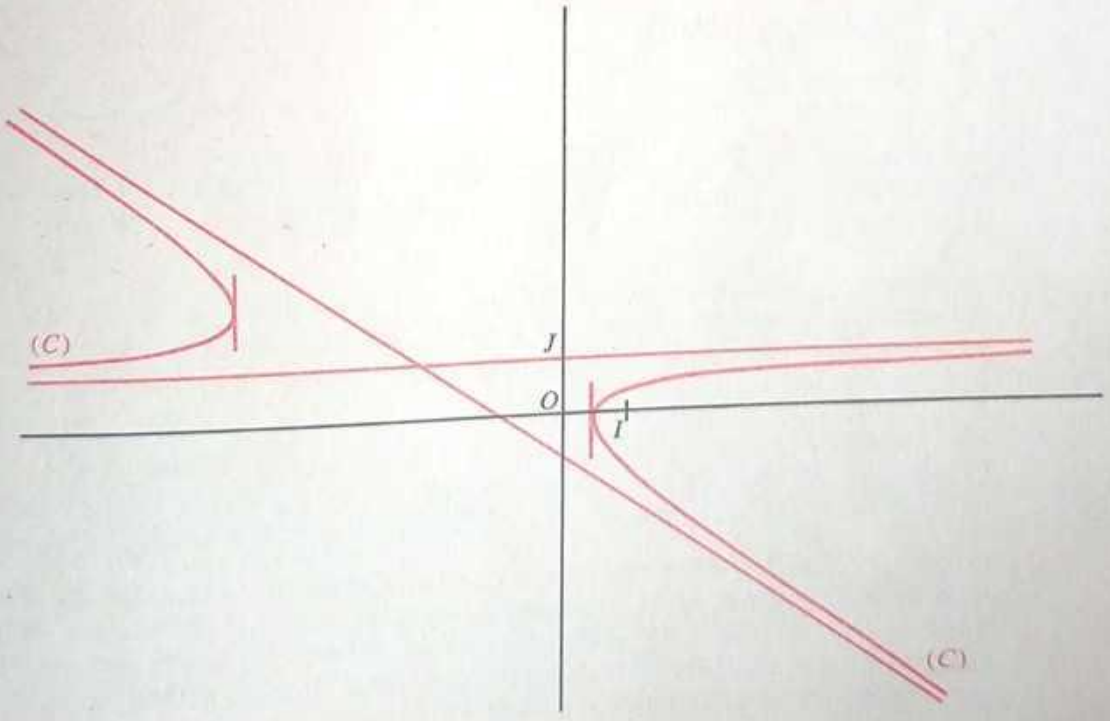
La quantité :

$$g(t)+\frac{2}{3}f(t)+\frac{2}{3}$$

représente $\overline{H(t)M(t)}$, où $H(t)$ est le point de (D) d'abscisse $f(t)$.
Comme $\overline{H(t)M(t)}$ prend des valeurs « aussi proches que l'on veut » de 0 lorsque t est voisin de -2, nous dirons encore que la droite (D) est asymptote aux deux branches infinies correspondantes de la courbe (C).



L'étude du signe de $g(t)+\frac{2}{3}f(t)+\frac{2}{3}$ (qui est égal à $\frac{u}{3}$, c'est-à-dire à $\frac{t+2}{3}$) permet de déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).
Nous avons montré que la courbe (C) admet pour asymptotes les droites d'équations $y=1$ et $y+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}=0$. Nous obtenons ainsi le tracé suivant de (C).



Scanné avec CamScanner

b) **Cas général**

Soit (C) une courbe admettant comme représentation paramétrique :

$$F : t \longmapsto (f(t), g(t)).$$

Au voisinage de t_0 (ou lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$), le point $M(t)$ décrit une **branche infinie** de (C) si l'une des fonctions f et g au moins est non bornée.
Bien que les branches infinies d'une courbe paramétrée et celles d'une courbe d'équation $y = f(x)$ s'étudient de façon analogue, nous n'en ferons pas d'étude systématique dans ce chapitre. Toutefois, on retiendra les résultats suivants :

si	alors
$\lim_{t \to t_0} f(t) = +\infty$ (ou $-\infty$) $\lim_{t \to t_0} g(t) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$	la droite d'asymptote $y = \ell$ est asymptote à (C)
$\lim_{t \to t_0} f(t) = \ell$ $(\ell \in \mathbb{R})$ $\lim_{t \to t_0} g(t) = +\infty$ (ou $-\infty$)	la droite d'équation $x = \ell$ est asymptote à (C)
f et g ont des limites infinies en t_0 et il existe des nombres réels a et b tels que : $\lim_{t \to t_0} (g(t) - af(t) - b) = 0$	la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C).

Les résultats de ce tableau restent vrais lorsqu'on remplace « t tend vers t_0 » par « t tend vers t_0 à droite », « t tend vers t_0 à gauche », « t tend vers $+\infty$ » ou « t tend vers $-\infty$ ».

Remarque 1. Dans le troisième cas, les constantes a et b seront souvent déterminées à l'aide d'indications fournies par l'énoncé. Dans le cas contraire, on pourra utiliser une méthode analogue à celle vue dans l'exemple précédent.

Remarque 2. D'autres cas sont possibles (existence d'une branche parabolique par exemple). Nous ne donnerons aucune indication d'ordre général concernant l'étude de ces cas, et nous nous contenterons de préciser le tracé de la courbe en cherchant les coordonnées de quelques points de la branche infinie considérée.

Remarque 3. Il ne faut pas confondre les valeurs de t et celles de $f(t)$ et $g(t)$. Une branche infinie de la courbe (C) peut très bien être décrite par $M(t)$ lorsque t reste *borné*, dans un intervalle de la forme $]t_0, t_0 + r[$ ou $]t_0 - r, t_0[$. Au contraire, l'arc de la courbe (C) décrit par $M(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) peut ne pas être une branche infinie de (C).

Scanné avec CamScanner

Exemple. Construire la courbe (C) admettant la représentation paramétrique définie par :

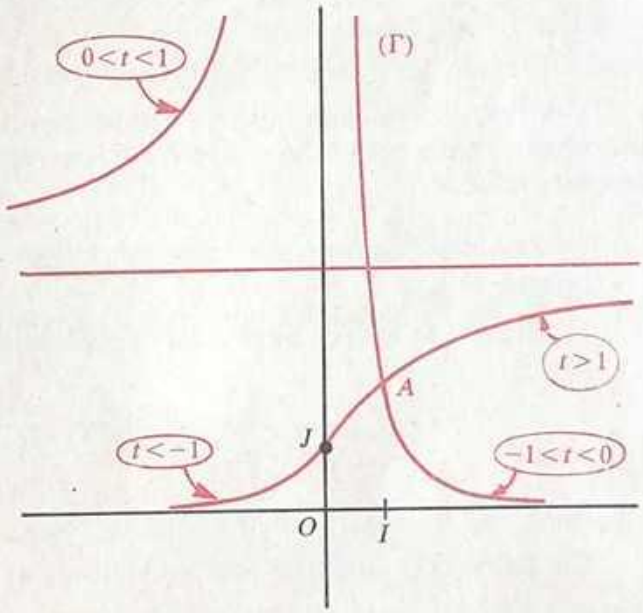
$$\begin{cases} x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t}{1+t^2}. \end{cases}$$

4) Points multiples

Activité. Étudier la courbe (Γ) admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{(t+1)^2}{t^2}. \end{cases}$$

On vérifiera ainsi que (Γ) admet la représentation graphique suivante :



Sur cette représentation, on remarque que deux arcs distincts de la courbe (Γ) se coupent au point A. On dit que A est un *point double* de (Γ). Il est intéressant de déterminer ses coordonnées.
A étant un point double, les coordonnées (x_A, y_A) de A sont obtenues pour deux valeurs *distinctes* du paramètre. Nous sommes donc conduits à rechercher les couples (t_1, t_2) tels que :

$$(S)\begin{cases} f(t_1) = f(t_2) \\ g(t_1) = g(t_1) \\ t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Or :
$$(S) \iff \begin{cases} \dfrac{2t_1}{t_1^2-1} = \dfrac{2t_2}{t_2^2-1} \\ \dfrac{(t_1+1)^2}{t_1^2} = \dfrac{(t_2+1)^2}{t_2^2} \\ t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont celles du système (S') écrit ci-dessous qui sont éléments de $D_F \times D_F$.

$$(S') \begin{cases} t_1(t_2^2-1) = t_2(t_1^2-1) \\ t_2^2(t_1+1)^2 = t_1^2(t_2+1)^2 \\ t_1 \neq t_2. \end{cases}$$

La condition $[t_1 \neq t_2]$ rend légitime la simplification par $t_1 - t_2$:

$$(S') \iff \begin{cases} t_1t_2+1=0 \\ 2t_1t_2+t_1+t_2=0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :
$$(S') \iff \begin{cases} t_1+t_2=2 \\ t_1t_2=-1. \end{cases}$$

t_1 et t_2 jouant des rôles identiques, il suffit de considérer le couple solution vérifiant $t_1 < t_2$. On le trouve en résolvant l'équation $T^2-2T-1=0$:

$$t_1 = 1-\sqrt{2}; \quad t_2 = 1+\sqrt{2}.$$

Le point A a donc pour coordonnées $(f(1-\sqrt{2}), g(1-\sqrt{2}))$, c'est-à-dire $(1; 2)$. On calculera, à titre de vérification, $f(1+\sqrt{2})$ et $g(1+\sqrt{2})$.

Remarque. La notion de point double se généralise évidemment au cas où plus de deux arcs distincts de la courbe passent par un même point du plan. Il s'agit alors d'un *point multiple.*

Exercices

1) Trouver des équations des tangentes en A aux deux arcs de la courbe (Γ).

2) Étudier la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = -2 + \dfrac{8}{t} - \dfrac{1}{2(t-1)} \\ y = t+3-\dfrac{1}{t-1}. \end{cases}$$

En préciser notamment les asymptotes et le point double.

5) Synthèse : plan d'étude d'une courbe paramétrée

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique F telle que :

$$F(t) = (f(t), g(t)).$$

a) Plan d'étude

Pour construire (C), on adoptera en général le plan d'étude suivant.

1) *Réduction de l'ensemble d'étude de F*

On détermine ainsi un sous-ensemble D_E de $\mathbb{R}$ sur lequel on étudiera F, et une

Scanné avec CamScanner

suite de transformations géométriques permettant de reconstituer (C) à partir de l'arc (C') obtenu lorsque t décrit D_E.

2) *Étude des variations des fonctions f et g*

On rassemble les résultats obtenus dans un tableau de variation.

3) *Identification, sur le tableau, des branches infinies éventuelles de (C). Étude de ces branches infinies si possible.*

4) *Détermination des tangentes aux points remarquables* (points stationnaires, points d'arrêt de l'arc (C') étudié, etc.).

5) *Tracé de la courbe*

On trace d'abord l'arc de courbe (C') correspondant à l'ensemble d'étude D_E, puis on complète en utilisant les transformations géométriques déterminées au 1), dans un ordre convenable.
Dans un premier temps, ce travail sera effectué au brouillon; on voit ainsi si la courbe (C) admet des points multiples méritant une étude particulière.

Notons que l'étape 1) est indispensable. En effet, une réduction incomplète de l'ensemble d'étude entraîne des calculs inutiles. De plus, dans certains cas, on peut ne pas s'apercevoir qu'un même arc de la courbe (C) est décrit deux fois par le point $M(t)$.
Nous terminons ce paragraphe en donnant quelques indications permettant d'effectuer méthodiquement cette réduction.

b) **Réduction de l'ensemble d'étude de F**

— *Détermination de l'ensemble de définition D de F.*

— *Étude de la périodicité de F*

Pour cela, on étudie la périodicité de f et g. Si f et g sont périodiques, et si l'ensemble des périodes communes à f et g admet un plus petit élément positif T, celui-ci est la période de F.
La courbe (C) tout entière est alors obtenue lorsque t décrit l'ensemble D_1 tel que $D_1 = \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \cap D$.
Lorsque F n'est pas périodique, on prend $D_1 = D$.

— *Étude de la parité des fonctions f et g*

Si D_1 est « symétrique par rapport à 0 », c'est-à-dire vérifie :

$$\forall t \in D_1 \quad -t \in D_1$$

on étudie la parité des fonctions f et g (ou, ce qui revient au même, de leurs restrictions à D_1).
Lorsque f et g vérifient toutes deux des propriétés de parité, on réduit l'ensemble d'étude à D_2 défini par : $D_2 = D_1 \cap \mathbb{R}_+$.
— Si f et g sont toutes deux paires, on obtient la courbe (C) tout entière lorsque t décrit D_2.
— Si f et g sont toutes deux impaires, ou de parités différentes, l'arc (C') obtenu lorsque t décrit D_2 permet de reconstituer (C) en complétant par symétrie centrale par rapport à O ou par symétrie orthogonale d'axe (OI) ou (OJ). On s'aidera d'un dessin pour retrouver quelle est la transformation géométrique concernée.
Lorsque l'une au moins des fonctions f et g n'est ni paire ni impaire, on choisit $D_2 = D_1$.

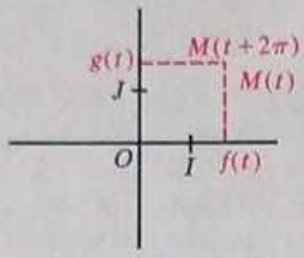
Scanné avec CamScanner

Exemple

Soit (C) la courbe admettant pour représentation paramétrique la fonction F telle que :

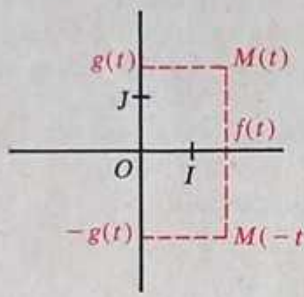
$$\begin{cases} f(t) = \cos^3 t \\ g(t) = \sin^3 t. \end{cases}$$

On a : $D = \mathbb{R}$. L'étude de la périodicité et de la parité pourra être rédigée de la manière suivante.



t	$t+2\pi$
$f(t)$	$f(t)$
$g(t)$	$g(t)$

F est périodique de période 2π. On étudie F sur $[-\pi, \pi]$.



t	$-t$
$f(t)$	$f(t)$
$g(t)$	$-g(t)$

f est paire; g est impaire.
On étudie F sur $[0, \pi]$ et on complétera le tracé en effectuant la symétrie orthogonale d'axe (OI).

Nous avons ainsi obtenu $[0, \pi]$ comme intervalle d'étude.

— Autres propriétés

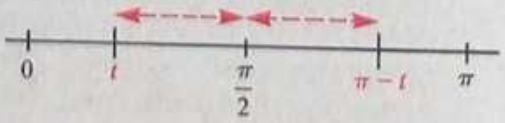
L'ensemble D_2 déterminé en étudiant la périodicité et la parité constitue en général un ensemble d'étude satisfaisant pour obtenir un tracé correct de (C). L'étude de la parité et de la périodicité sera donc faite *systématiquement*.
D'autres propriétés des fonctions f et g se traduisent aussi par des propriétés géométriques intéressantes de la courbe (C). On n'en fera pas d'étude systématique, mais on se laissera guider, le cas échéant, par l'énoncé.

Exemple 1

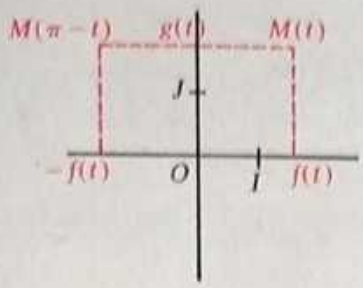
Reprenons la fonction F définie par :

$$F(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$

Nous avons déjà obtenu : $D_2 = [0, \pi]$.
— On peut remarquer que $F(t+\pi) = -F(t)$. Mais cette propriété n'est pas exploitable puisque t et $t+\pi$ n'appartiennent pas simultanément à $[0, \pi]$.
— On compare les images par F de deux valeurs du paramètre symétriques par rapport au centre de l'intervalle $[0, \pi]$. Si l'une d'elles est désignée par t, l'autre vaut alors $\pi - t$.



Scanné avec CamScanner

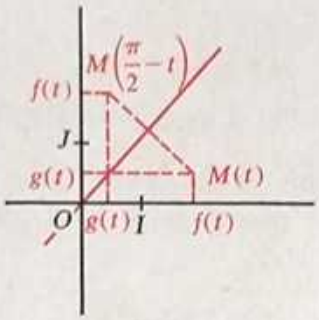


t	$\pi - t$
$f(t)$	$-f(t)$
$g(t)$	$g(t)$

On étudie F sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. L'arc (C''') correspondant permet de retrouver (C') par symétrie orthogonale d'axe (OJ).

— La méthode précédente peut être poursuivie.

t et $\frac{\pi}{2} - t$ désignent deux valeurs du paramètre, éléments de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et symétriques par rapport au centre $\frac{\pi}{4}$ de cette intervalle.



t	$\frac{\pi}{2} - t$
$f(t)$	$g(t)$
$g(t)$	$f(t)$

On étudie F sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Si le repère (O, I, J) est orthonormé, l'arc (C''') correspondant permet de retrouver (C'') par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Finalement, on pourra choisir $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ comme intervalle d'étude.

Exemple 2

Soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ g(t) = \dfrac{t}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Par parité, on réduit l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}_+$. Soit (C') l'arc de courbe correspondant.

On peut alors remarquer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad t \in]0; 1] \iff \frac{1}{t} \in [1; +\infty[,$$



et que, pour tout élément t de $]0; 1]$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t); \quad g\left(\frac{1}{t}\right) = g(t).$$

On peut donc choisir $[0; 1]$ comme intervalle d'étude. Soit (C'') l'arc de courbe correspondant. On obtient (C') comme réunion de (C'') et de l'image de $(C'') - \{I\}$ par la symétrie orthogonale d'axe (OJ), puis (C) comme réunion de (C') et de son image par la symétrie orthogonale d'axe (OI).

Scanné avec CamScanner

Exercices

1) Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$F(t)=(\sin 2t;\ \sin 3t)$$

et (C) son indicatrice dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Quelles sont les périodes respectives des deux fonctions numériques associées à F?
Quelle est la période de F?

b) Comparer $F(t)$ et $F(\pi - t)$. En déduire l'ensemble d'étude D_E de F.
Quelles sont les transformations géométriques permettant de retrouver (C) à partir de l'arc obtenu lorsque t décrit D_E?

2) Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$F(t)=\left(\tan^2 t;\ \frac{\cos 4t}{\cos 2t}\right)$$

et (C) son indicatrice dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

a) Déterminer l'ensemble de définition de F. Étudier la parité et la périodicité des fonctions numériques associées à F et en déduire l'ensemble d'étude de F.

b) Étudier la fonction F et construire son indicatrice.

3 Exemples et applications

1) Exemple de courbe admettant des points stationnaires

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), étudions la courbe (C) admettant la représentation paramétrique F définie par :

$$\begin{cases} f(t)=\cos^3 t \\ g(t)=\sin^3 t. \end{cases}$$

Réduction de l'intervalle d'étude

Nous avons vu à la fin du paragraphe précédent que l'on peut choisir comme intervalle d'étude $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Soit (C_1) l'arc obtenu lorsque t décrit cet intervalle. On obtient (C) en effectuant successivement :

— la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y=x$;
— la symétrie orthogonale d'axe (OJ);
— la symétrie orthogonale d'axe (OI).

Scanné avec CamScanner

Étude des variations des fonctions f et g

On a, pour tout t de $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$f'(t) = -3\cos^2 t \sin t; \quad g'(t) = 3\sin^2 t \cos t.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	1	↘	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$g(t)$	0	↗	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$
$g'(t)$	0	$+$	

Étude au voisinage du point I

On a : $M(0) = I$. On voit sur le tableau de variation que c'est un point stationnaire de la courbe (C). De plus :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f'(t)}{t} = -3; \quad \lim_{t \to 0} \frac{g'(t)}{t} = 0$$

c'est-à-dire : $f''(0) = -3; \quad g''(0) = 0.$

(C) admet donc la droite (OI) comme tangente en I.

Étude au voisinage du point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

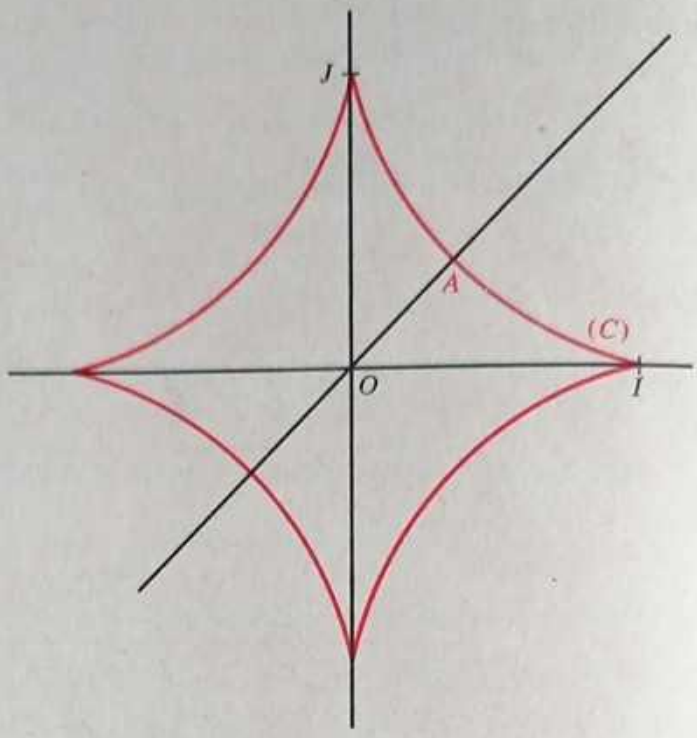
A n'est pas un point particulier de la courbe (C), mais c'est un point d'arrêt de l'arc (C_1) que nous avons choisi de tracer.

On a : $$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}; \quad g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

La tangente en A à (C') est parallèle à la droite d'équation $y = -x$. Ce résultat est confirmé par l'étude des symétries de la courbe (C).

Scanné avec CamScanner

Tracé de (C)



On constate que le point I est un point de rebroussement, ce que l'étude du seul arc (C_1) ne permettait pas de trouver.

Exercice Soit $M(t)$ un point non stationnaire de (C) et (D_t) la tangente à (C) en ce point. La droite (D_t) coupe (OI) et (OJ) respectivement en P_t et Q_t. Montrer que $d(P_t, Q_t)$ est une constante.

2) Utilisation des coordonnées polaires

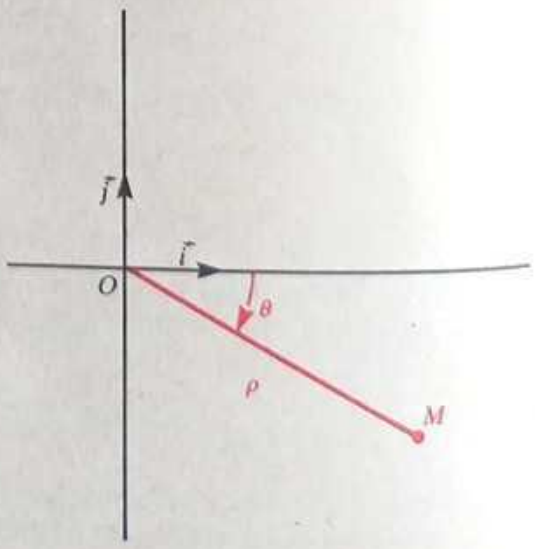
Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Rappel

Quel que soit le point M du plan distinct de O, il existe un et un seul couple (ρ, θ) de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$ tel que :

$$\begin{cases} \rho = OM \\ \theta = \text{MES}(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}). \end{cases}$$

Ce couple (ρ, θ) est appelé le couple des coordonnées polaires du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Scanné avec CamScanner

b) Exemple de paramétrage faisant apparaître les coordonnées polaires

On veut étudier la courbe (Γ) admettant la représentation paramétrique $F : \theta \longmapsto (f(\theta), g(\theta))$ définie par :

$$\begin{cases} f(\theta) = \dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta} \\ g(\theta) = \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}. \end{cases}$$

Remarque préliminaire

La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$, et périodique de période 2π. La courbe (Γ) est donc obtenue tout entière lorsque θ décrit $[-\pi, \pi]$, et même lorsque θ décrit $]-\pi, \pi]$. Notons que $f(\theta)$ et $g(\theta)$ sont de la forme :

$$f(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta; \quad g(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$$

où
$$\rho(\theta) = \frac{2}{\sqrt{2}+\cos\theta}.$$

On a :
$$\begin{cases} \rho(\theta) > 0; \quad \theta \in]-\pi, \pi] \\ \overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}). \end{cases}$$

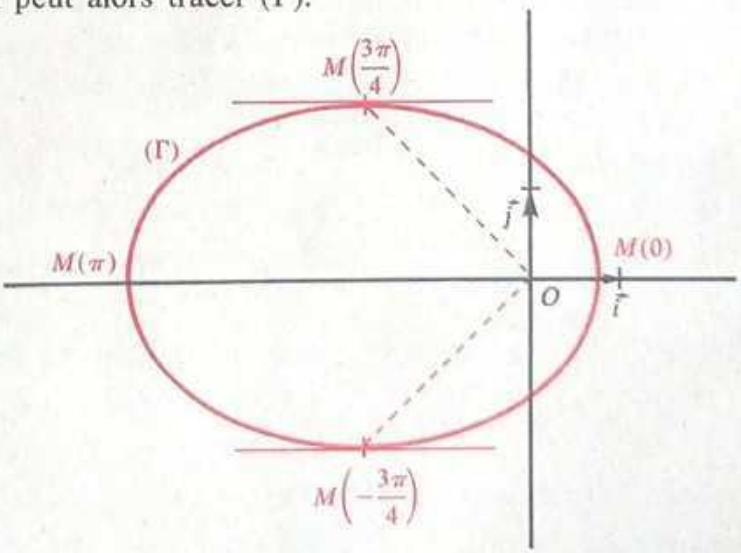
D'où :
$$\begin{cases} \rho(\theta) = OM(\theta) \\ \theta = \text{MES}(\vec{i}, \overrightarrow{OM}(\theta)). \end{cases}$$

Le couple $(\rho(\theta), \theta)$ est donc le couple des coordonnées polaires de $M(\theta)$.
Le paramètre θ a donc ici une interprétation géométrique simple. De plus, puisqu'à chaque valeur de θ dans $]-\pi, \pi]$ correspond une et une seule valeur de $\rho(\theta)$ dans $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que (Γ) coupe chaque demi-droite d'origine O en exactement un point.

Construction de la courbe (Γ)

- Montrer que l'on peut choisir $[0, \pi]$ comme intervalle d'étude. Quelle transformation géométrique permet alors de tracer (Γ)?
- Étudier les fonctions f et g.
- La détermination de points particuliers de (Γ) se fera commodément en utilisant les coordonnées polaires. On peut alors tracer (Γ).

θ	Arrondi d'ordre 2 de $\rho(\theta)$
0	0,83
$\frac{\pi}{4}$	0,94
$\frac{\pi}{2}$	1,41
$\frac{3\pi}{4}$	2,83
$\frac{5\pi}{6}$	3,65
π	4,83



Scanné avec CamScanner

Nature de la courbe (C)

La forme de la courbe obtenue nous suggère de la comparer à l'ellipse (E) de grand axe $[M(0)M(\pi)]$ et de petit axe $\left[M\left(\frac{3\pi}{4}\right)M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$.

- Montrer que (E) admet pour équation :

$$\frac{(x+2)^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

- Calculer, pour tout élément θ de $\mathbb{R}$, l'expression :

$$\frac{(f(\theta)+2)^2}{8}+\frac{(g(\theta))^2}{4}.$$

- On en déduit que tout point de (Γ) appartient à (E).

On montre facilement la réciproque en remarquant que toute droite passant par O coupe (E) en exactement deux points. S'il existait un point M de (E) n'appartenant pas à (Γ), la droite (OM) couperait (Γ) en 0 ou 1 point.

Soit θ la mesure principale de l'angle de droites $\left(\overrightarrow{D(O,\vec{i})},\overrightarrow{(OM)}\right)$. Les points $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ sont deux points distincts de (Γ), appartenant tous deux à (OM), d'où la contradiction. Par conséquent, tout point de (E) appartient à (Γ).

Donc, finalement : $(E)=(\Gamma)$.

- Rechercher les foyers et les directrices de l'ellipse (Γ).

Conclusion

La courbe que nous avons étudiée est l'ellipse de foyer O, de directrice associée (Δ) d'équation $x=2$ et d'excentricité $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut se poser le problème réciproque et se demander s'il est possible, en utilisant les coordonnées polaires, de déterminer une représentation paramétrique d'une conique ayant pour foyer l'origine du repère et pour directrice une droite parallèle à la droite des ordonnées.

c) Représentation paramétrique d'une parabole de foyer O

On veut déterminer une représentation paramétrique de la parabole (P) de foyer O, et de directrice (Δ) d'équation $x=4$.

Soit M un point quelconque du plan, distinct de O; soit (x, y) ses coordonnées cartésiennes et (ρ, θ) ses coordonnées polaires.

On rappelle que : $x=\rho\cos\theta$; $y=\rho\sin\theta$.

On sait que : $M\in(P) \iff MO^2=d^2(M,(\Delta))$.

Or : $MO^2=\rho^2$; $d(M,(\Delta))=|x-4|$

$=|\rho\cos\theta-4|$.

D'où :

$$\begin{aligned} M\in(P) &\iff \rho^2=(\rho\cos\theta-4)^2 \\ &\iff [\rho(1-\cos\theta)+4][\rho(1+\cos\theta)-4]=0 \\ &\iff \rho(\cos\theta-1)=4 \quad \text{ou} \quad \rho(1+\cos\theta)=4. \end{aligned}$$

Aucun couple (ρ, θ) de $\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi]$ ne vérifie la première équation. Pourquoi?

On a donc : $M\in(P) \iff \rho(1+\cos\theta)=4.$ (1)

Scanné avec CamScanner

De plus, comme aucun couple de la forme (ρ, π) ne vérifie (1), on a encore :

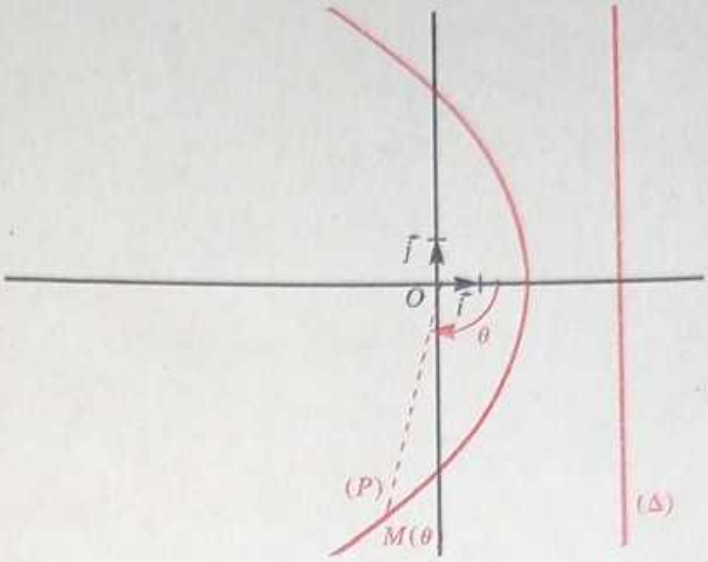
$$M \in (P) \iff \rho = \frac{4}{1+\cos\theta}.$$

On en déduit que la parabole (P) admet la représentation paramétrique

$$F : t \longmapsto (f(\theta), g(\theta))$$

définie sur $]-\pi, \pi[$ par :

$$\begin{cases} f(\theta) = \dfrac{4\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ g(\theta) = \dfrac{4\sin\theta}{1+\cos\theta}. \end{cases}$$



La fonction G, définie sur $\mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ par les mêmes expressions, est périodique de période 2π; c'est donc également une représentation paramétrique de (P).

Exercice

On reprend les notations précédentes.
Soit (Δ') la droite d'équation : $y = -\sqrt{3}x + 8$
et (P') la parabole de foyer O et de directrice (Δ').

a) Calculer $d(O, (\Delta'))$. En déduire que (Δ') est l'image de (Δ) par une rotation de centre O. Préciser la mesure principale α de l'angle orienté de cette rotation r.
Quelle est l'image de (P) par cette rotation?

b) Soit (ρ, θ) les coordonnées d'un point M quelconque de $\mathcal{P} - \{O\}$ et (ρ', θ') celle de son image M' par r.
Quelles relations lient (ρ, θ) et (ρ', θ')?
Montrer que M' appartient à (P') si et seulement si :

$$\rho' = \frac{4}{1+\cos(\theta' - \alpha)}.$$

En déduire une représentation paramétrique de (P').

c) **Représentation paramétrique d'une hyperbole de foyer O**

On veut déterminer une représentation paramétrique de l'hyperbole (H) de foyer O, de directrice associée (Δ) d'équation $x = \frac{3}{2}$ et d'excentricité 2.

- En utilisant la méthode précédente, montrer que :

$$M \in (H) \iff \rho = \frac{3}{2\cos\theta - 1} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{3}{2\cos\theta + 1}.$$

On remarque que, pour θ élément de $]-\pi, \pi]$:

$$\frac{3}{2\cos\theta - 1} > 0 \iff \theta \in \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[;$$

$$\frac{3}{2\cos\theta + 1} > 0 \iff \theta \in \left]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[.$$

Scanné avec CamScanner

• Construire les indicatrices (H_1) et (H_2) des applications F_1 et F_2 définies respectivement sur $\left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$ et $\left]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$ par :

$$F_1(\theta)=\left(\frac{3\cos\theta}{2\cos\theta-1}; \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta-1}\right);$$

$$F_2(\theta)=\left(\frac{3\cos\theta}{2\cos\theta+1}; \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta+1}\right).$$

On montrera que chacune d'elles admet pour asymptotes les droites d'équations :

$$y=\sqrt{3}(x-2); \quad y=-\sqrt{3}(x-2).$$

On sait que $(H_1)\cup(H_2)=(H)$; quel résultat plus précis peut-on déduire de cette construction?

• On voudrait obtenir tous les points de (H) à l'aide d'une seule représentation paramétrique. Remarquons que les points de (H_2) sont les points $M(x, y)$ du plan vérifiant la propriété (P) suivante :

$$(P) \qquad \exists\theta\in\left]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[\quad (x, y)=\left(\frac{3\cos\theta}{2\cos\theta+1}; \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta+1}\right).$$

Montrer que (P) est équivalente à la propriété (Q) :

$$(Q) \qquad \exists\varphi\in\left]-\pi, -\frac{\pi}{3}\right[\cup\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right] \quad (x, y)=\left(\frac{3\cos\varphi}{2\cos\varphi-1}; \frac{3\sin\varphi}{2\cos\varphi-1}\right).$$

On en déduit que le prolongement F de F_1 à $]-\pi, \pi]-\left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$ défini par :

$$\forall\theta\in D_F \quad F(\theta)=\left(\frac{3\cos\theta}{2\cos\theta-1}; \frac{3\sin\theta}{2\cos\theta-1}\right)$$

a pour indicatrice l'hyperbole (H) tout entière.

Dans ce cas, le couple

$$\left(\frac{3}{2\cos\theta-1}, \theta\right)$$

ne représente plus nécessairement les coordonnées polaires du point $M(\theta)$. Par contre, en posant

$$\vec{u}_\theta=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j},$$

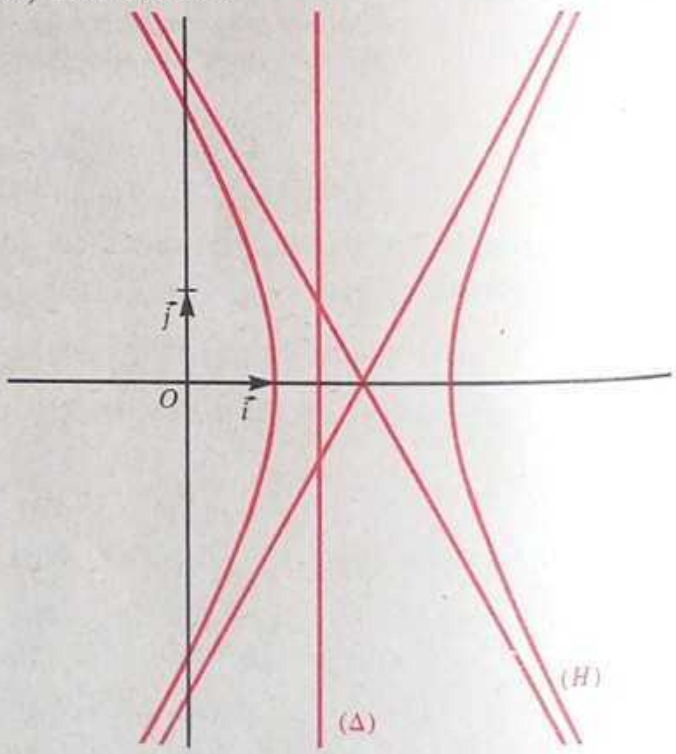
on obtient :

$$\overrightarrow{OM}(\theta)=\frac{3}{2\cos\theta-1}\,\vec{u}_\theta.$$

Le point $M(\theta)$ est le point de la droite $D(O, \vec{u}_\theta)$ qui a pour abscisse

$$\frac{3}{2\cos\theta-1}$$

dans le repère $(O, \vec{u}_\theta)$ de cette droite.



Scanné avec CamScanner

Exercice Montrer de même que la fonction G d'ensemble de départ $\mathbb{R}$, telle que :

$$G(\theta)=\left(\frac{3\cos\theta}{2\cos\theta+1};\frac{3\sin\theta}{2\cos\theta+1}\right)$$

est une représentation paramétrique de (H).

3) Image d'une courbe par une application ponctuelle

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit F l'application de $\mathcal{P}-\{O\}$ dans $\mathcal{P}-\{O\}$ qui, au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z'=\frac{1}{\bar{z}}.$$

Soit (P) la parabole de foyer O et de directrice (D) d'équation $x=2$.
On se propose de construire l'image (Γ) de (P) par F.

Exercice 1) *a*) F est-elle une application affine?
Montrer que l'image M' d'un point M de $\mathcal{P}-\{O\}$ est caractérisée par :

$$\begin{cases} O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés} \\ \overline{OM}\times\overline{OM'}=1 \end{cases}$$

(on choisit sur (OM) une mesure algébrique telle que, pour tout point P de (OM), $|\overline{OP}|=d(O, P)$).

b) Tracer sur un même dessin la parabole (P) et quelques points de son image (Γ).

2) Montrer que F est involutive.
Déterminer une équation de (P), puis une équation de son image (Γ). Peut-on ainsi construire (Γ)?

La méthode vue dans l'exercice ci-dessus ne fournissant pas de résultats satisfaisants, nous allons déterminer une représentation paramétrique Φ de (Γ).

Détermination d'une représentation paramétrique de (Γ)

• On peut déterminer une représentation paramétrique de (P) en utilisant les coordonnées polaires. On peut aussi procéder de la manière suivante :

— Une équation de (P) est : $x^2+y^2=(x-2)^2$,

c'est-à-dire : $$y^2=4-4x.$$

— On en déduit immédiatement la représentation paramétrique suivante de (P) :

$$\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=2t. \end{cases}$$

• L'expression analytique de l'application ponctuelle F s'écrit, dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x}{x^2+y^2} \\ y'=\dfrac{y}{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

• Par définition d'une représentation paramétrique, pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{T}$:

$$M \in (P) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 2t. \end{cases}$$

On remarque que O n'appartient pas à (P). On peut donc écrire que, pour tout point $M'(x', y')$ de $\mathcal{T}$:

$$M' \in (\Gamma) \iff \exists M \in (P) \quad M' = F(M)$$

c'est-à-dire, en désignant par $M(t)$ le point de la parabole (P) correspondant à la valeur t du paramètre :

$$M' \in (\Gamma) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad M' = F(M(t)).$$

On obtient ainsi :

$$M' \in (\Gamma) \iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{1 - t^2}{(1 - t^2)^2 + 4t^2} \\ y' = \dfrac{2t}{(1 - t^2)^2 + 4t^2}. \end{cases}$$

(Γ) admet donc le paramétrage Φ_1 défini par :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \dfrac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} \\ \psi_1(t) = \dfrac{2t}{(1 + t^2)^2}. \end{cases}$$

Étude de Φ_1.

Déterminer l'intervalle d'étude de Φ_1. Étudier la fonction Φ_1 sur cet intervalle. Vérifier que l'on obtient ainsi le tableau de variation suivant.

t	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$\varphi_1'(t)$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\varphi_1(t)$	1	↘	$\frac{3}{8}$	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	0
$\psi_1(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	↘	$\frac{\sqrt{3}}{8}$	↘	0
$\psi_1'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	

Scanné avec CamScanner

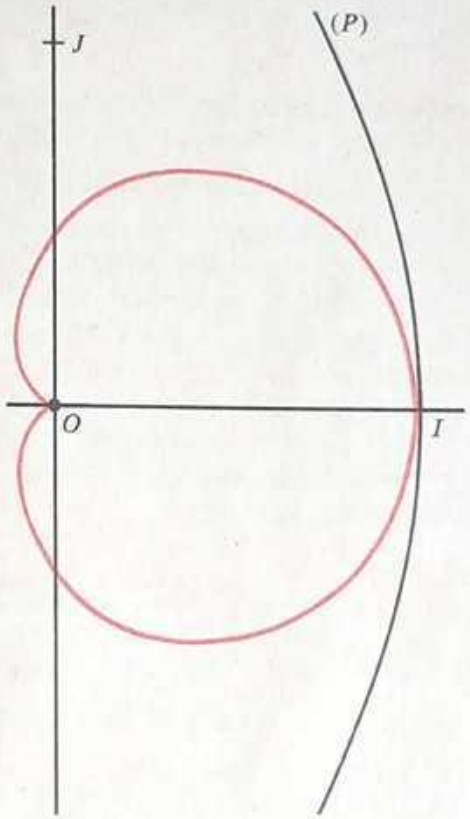
Tracé de la courbe (Γ)

• Rechercher une équation de la tangente à (Γ) au point $M(1)$.

• Il est utile de préciser la forme de la courbe (Γ) au voisinage du point O (qui n'est pas un point de (Γ)).
Pour cela, on peut par exemple, étudier le comportement du coefficient directeur $\frac{\psi_1(t)}{\varphi_1(t)}$ de la droite $(OM(t))$ lorsque $M(t)$ devient de plus en plus proche de O.

On a :
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\psi_1(t)}{\varphi_1(t)} = 0.$$

La courbe $(\overline{\Gamma})$, obtenue en complétant la courbe (Γ) par le point O, admet donc la droite des abscisses comme tangente en O. Compte tenu des symétries de (Γ), O est nécessairement un point de rebroussement.



Exercice

Soit g l'application de $]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(\theta) = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Montrer que g est une bijection.
Quel est l'ensemble de définition D de la fonction $\Phi_1 \circ g$?
Montrer que :
$$\forall \theta \in D \quad \Phi_1 \circ g(\theta) = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta, \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta\right).$$

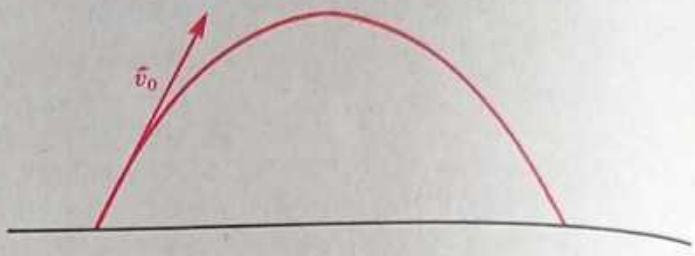
Utiliser un prolongement convenable de $\Phi_1 \circ g$ pour préciser d'une autre manière la forme de la courbe (Γ) au voisinage de O.

Scanné avec CamScanner

4 Vocabulaire de la cinématique

1) Introduction

Nous avons vu en Physique qu'un point matériel, lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$, et soumis à la seule action de la pesanteur, décrit une trajectoire parabolique.



Étudier le mouvement de ce mobile, c'est déterminer ses positions successives en fonction du temps.

Lorsque le mouvement s'effectue dans un plan, la notion de courbe paramétrée permet une modélisation satisfaisante de ce genre de problèmes :

— le temps peut être assimilé à une variable réelle t décrivant un intervalle de $\mathbb{R}$;

— on associe au plan physique dans lequel s'effectue le mouvement, un plan mathématique $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A un instant donné, désigné par le nombre réel t_0, le mobile occupe une position bien précise dans le plan physique, correspondant à un point $M(t_0)$, de coordonnées $(f(t_0), g(t_0))$ dans le plan mathématique.
Ainsi, le mouvement d'un point matériel dans un plan peut être modélisé par une fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$. La variable représente alors le temps, et l'image d'un élément t_0 est la position du mobile à l'instant t_0. La courbe paramétrée par F est appelée **trajectoire** du mobile.

Exemple

Dans le cas envisagé ci-dessus, le mouvement s'effectue dans un plan vertical. Introduisons un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de ce plan tel que :

— le point O soit la position du mobile à l'instant 0;

— la droite $D(O, \vec{i})$ soit horizontale;

— la droite $D(O, \vec{j})$ soit verticale, le vecteur $\vec{j}$ étant dirigé « vers le haut ».

Désignons par $(v_{0,x}, v_{0,y})$ les coordonnées du vecteur $\vec{v}_0$.

On montre en Physique que le mouvement est décrit par :

$$\begin{cases} x = v_{0,x}t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t \end{cases}$$

où g est une constante numérique (attraction de la pesanteur).

La cinématique est l'étude mathématique du mouvement d'un point matériel (ou d'un solide) en fonction du temps, indépendamment des causes physiques qui le provoquent.

Scanné avec CamScanner

2) Vitesse et accélération

a) Exemple introductif : mouvement rectiligne

• On dit qu'un mobile est animé d'un **mouvement rectiligne** lorsque sa trajectoire est portée par une droite.

• Soit un point mobile dont les coordonnées sont données en fonction du temps par $[F : t \longmapsto (f(t), g(t))]$ telle que :

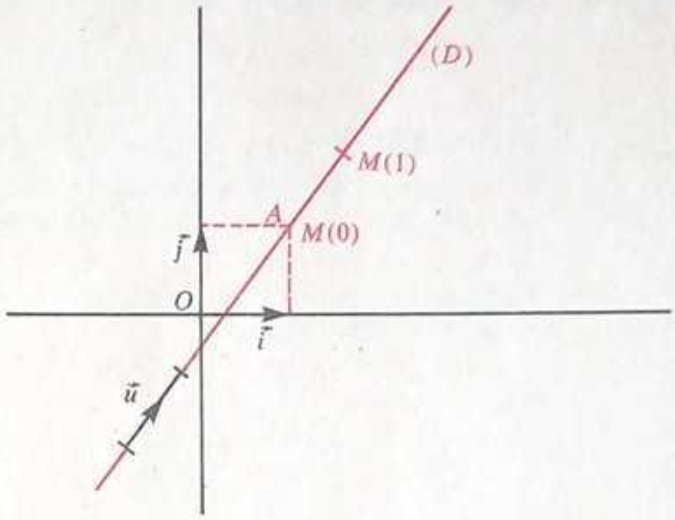
$$\begin{cases} f(t) = 1 + \frac{3}{5}\varphi(t) \\ g(t) = 1 + \frac{4}{5}\varphi(t), \end{cases}$$

où φ est la fonction numérique $[t \longmapsto t^3]$.
Montrer que la trajectoire est la droite (D) passant par $A(1; 1)$ et de vecteur directeur *normé* $\vec{u}\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$.

On a, pour tout élément t de $\mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{AM}(t) = \varphi(t)\,\vec{u}.$$

Comparons les positions du mobile aux instants t_0 et $t_0 + \tau$ $(\tau \neq 0)$.



On a :

$$\overrightarrow{M(t_0)\,M(t_0+\tau)} = \big(\varphi(t_0+\tau) - \varphi(t_0)\big)\,\vec{u}.$$

La vitesse algébrique moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + \tau$ est, par définition :

$$\frac{\varphi(t_0+\tau) - \varphi(t_0)}{\tau}.$$

Lorsque τ tend vers 0, la limite de cette quantité est $\varphi'(t_0)$. Cette limite est appelée *vitesse algébrique instantanée* du mobile à l'instant t_0.

Le signe de cette vitesse algébrique dépend du vecteur directeur normé choisi sur (D). De plus, la seule donnée de ce nombre ne permet pas de connaître la direction du mouvement. C'est pourquoi il est commode d'introduire le vecteur :

$$\varphi'(t_0)\,\vec{u}$$

appelé *vecteur vitesse* du point mobile à l'instant t_0.
Remarquons que ce vecteur s'obtient de façon simple; il s'agit en effet du vecteur de coordonnées $F'(t_0)$.

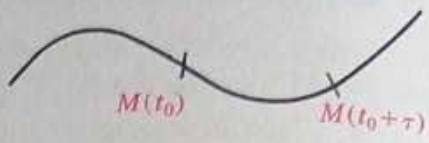
b) Vecteur vitesse

Soit un point mobile, dont les coordonnées sont données en fonction du temps par la fonction :

$$F : t \longmapsto (f(t), g(t)).$$

Scanné avec CamScanner

On suppose que l'ensemble de définition de F est un intervalle I de $\mathbb{R}$, et que F est dérivable sur I.
Soit t_0 un élément de I, et τ un nombre réel tel que $t_0+\tau$ appartienne à I.
Quelles sont les coordonnées du vecteur $\frac{1}{\tau}\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+\tau)}$?



Quelles sont les limites respectives de ces coordonnées lorsque τ tend vers 0?

Définitions

On appelle **vecteur vitesse** du point mobile à l'instant t_0, le vecteur de coordonnées $F'(t_0)$, c'est-à-dire $(f'(t_0), g'(t_0))$.
On appelle **vitesse** du point mobile, la fonction qui, à chaque instant t, associe la norme du vecteur vitesse à cet instant.

Remarque 1. Lorsqu'il n'est pas nul, le vecteur vitesse à l'instant t_0 est donc un vecteur directeur de la tangente en $M(t_0)$ à la trajectoire.

Remarque 2. Cette interprétation cinématique de la dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ justifie le terme de *point stationnaire* introduit au **II.**

Exercice

Le mouvement d'un point matériel est donné par :

$$\begin{cases} x = \cos t - \sin t \\ y = \cos t + \sin t. \end{cases}$$

a) Reconnaître la trajectoire.
b) Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse à l'instant t?
c) Que peut-on remarquer concernant la vitesse du mobile?

c) Vecteur accélération

Pour décrire le mouvement d'un point matériel, il est utile d'étudier la fonction F' qui, à chaque instant, associe les coordonnées du vecteur vitesse à cet instant. On a alors besoin de connaître les valeurs prises par la fonction dérivée F'' de la fonction F'.

Définition

On appelle **vecteur accélération** du point matériel à l'instant t_0, le vecteur de coordonnées $F''(t_0)$, c'est-à-dire $(f''(t_0), g''(t_0))$.

Exercice

On reprend le mouvement défini dans l'exercice précédent.
a) Quelles sont les coordonnées du vecteur accélération à l'instant t?
b) Comparer les directions des vecteurs vitesse et accélération. Que remarque-t-on?

Scanné avec CamScanner

d) **Mouvement accéléré; mouvement retardé; mouvement uniforme**

La vitesse du point mobile est la fonction numérique :

$$v : t \longmapsto \sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}.$$

Soit J un intervalle ouvert contenu dans I.

— Si, sur J, la fonction v est croissante, on dit que le mouvement est **accéléré** sur J.

— Si, sur J, la fonction v est décroissante, on dit que le mouvement est **retardé** sur J.

— Si, sur J, la fonction v est constante, on dit que le mouvement est **uniforme** sur J.

Remarquons que v est une fonction positive, continue sur I, dérivable en tout point où elle ne s'annule pas, et vérifiant :

$$\forall t \in I \quad (v(t))^2=(f'(t))^2+(g'(t))^2.$$

On a donc, sur l'ensemble I' des éléments de I où v est dérivable :

$$v(t)\,v'(t)=f'(t)\,f''(t)+g'(t)\,g''(t).$$

Désignons respectivement par $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ le vecteur vitesse et le vecteur accélération à l'instant t. L'égalité précédente s'écrit encore :

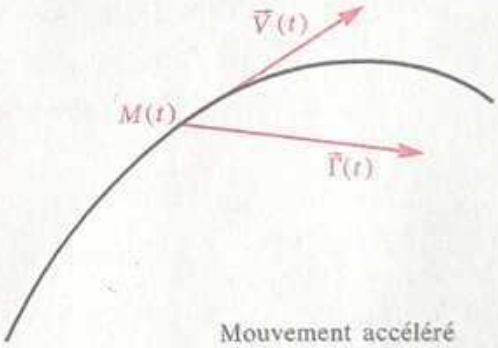
$$\forall t \in I' \quad v(t)\,v'(t)=\vec{V}(t)\cdot\vec{\Gamma}(t).$$

v étant positive, le signe de v' est celui de $\left[t \longmapsto \vec{V}(t)\cdot\vec{\Gamma}(t)\right]$. Pour étudier si un mouvement est accéléré, retardé ou uniforme, on dispose donc des critères suivants.

— Si, pour tout élément t de J, on a :

$$\vec{V}(t)\cdot\vec{\Gamma}(t)\geqslant 0,$$

alors le mouvement est accéléré sur J.

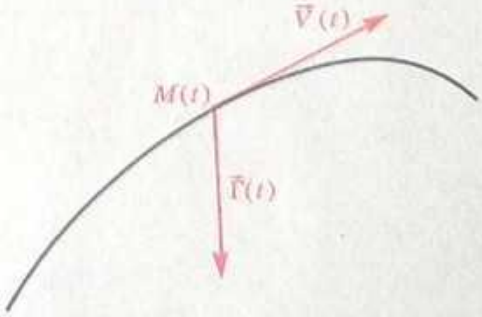


Mouvement accéléré

— Si, pour tout élément t de J, on a :

$$\vec{V}(t)\cdot\vec{\Gamma}(t)\leqslant 0,$$

alors le mouvement est retardé sur J.



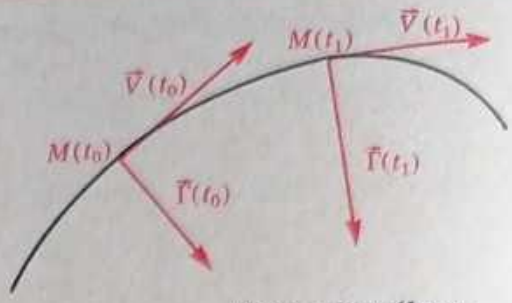
Mouvement retardé

Scanné avec CamScanner

— Si, pour tout élément t de J, on a :

$$\vec{V}(t)\cdot\vec{\Gamma}(t)=0,$$

alors le mouvement est uniforme sur J.



Mouvement uniforme

Exemple

Reprenons le mouvement donné en introduction :

$$\begin{cases} f_1(t)=v_{0,x}t \\ f_2(t)=-\dfrac{1}{2}gt^2+v_{0,y}t. \end{cases}$$

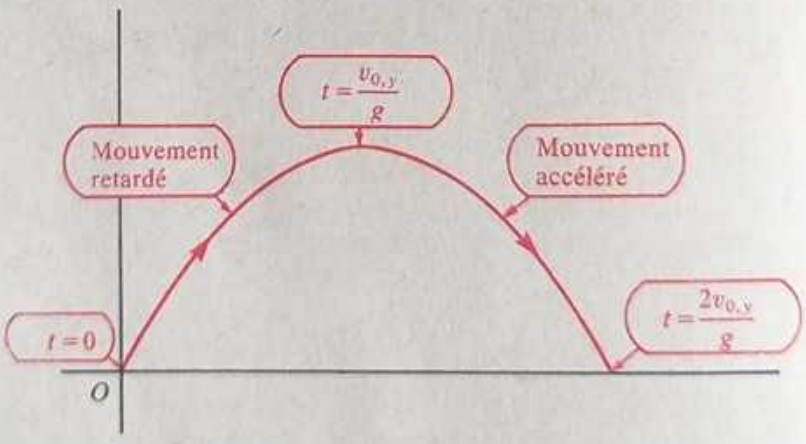
On suppose $v_{0,y}$ strictement positif et on s'intéresse aux valeurs de t correspondant aux ordonnées positives, c'est-à-dire à celles de l'intervalle $\left[0, \dfrac{2v_{0,y}}{g}\right]$.

On a : $\begin{cases} f_1'(t)=v_{0,x} \\ f_2'(t)=-gt+v_{0,y} \end{cases}$ $\begin{cases} f_1''(t)=0 \\ f_2''(t)=-g. \end{cases}$

Par conséquent : $\forall t\in\left[0, \dfrac{2v_{0,y}}{g}\right]$ $\vec{V}(t)\cdot\vec{\Gamma}(t)=g^2t-gv_{0,y}$.

Le mouvement est donc retardé lorsque t décrit l'intervalle $\left[0, \dfrac{v_{0,y}}{g}\right]$ et accéléré lorsque t décrit l'intervalle $\left[\dfrac{v_{0,y}}{g}, \dfrac{2v_{0,y}}{g}\right]$.

L'instant t_0 tel que $\vec{V}(t_0)\cdot\vec{\Gamma}(t_0)=0$ correspond au sommet de la parabole support de la trajectoire.



Exercice Le mouvement d'un point matériel est caractérisé, pour t décrivant $\mathbb{R}$, par

$$\begin{cases} f(t)=t+t^2 \\ g(t)=t^2. \end{cases}$$

a) Construire la trajectoire (C) du point M.

b) Déterminer les arcs de la courbe (C) sur lesquels le mouvement est accéléré, retardé.

Scanné avec CamScanner

Exercices

1 Dans chacun des cas suivants, on donne une fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$.
Reconnaître son indicatrice. La construire.

a) $F : t \longmapsto (\ln t, t(1-\ln t))$;

b) $F : t \longmapsto \left(e^t, t-\frac{1}{4}e^{2t}\right)$;

c) $F : t \longmapsto \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\right)$;

d) $F : t \longmapsto (\sin 4t, 2\cos^2 2t+2)$;

e) $F : t \longmapsto (e^{-t}, e^t)$;

f) $F : t \longmapsto \left(t-\frac{1}{2}, \frac{2t-1}{4}+\frac{4}{2t+1}\right)$;

g) $F : t \longmapsto (\cos^2 t, \sin t \cos t)$;

h) $F : t \longmapsto (\cos 2t, \sin^2 t)$.

2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique

$$F : t \longmapsto (f(t), g(t))$$

définie par :

$$\begin{cases} f(t)=\dfrac{t-1}{t} \\ g(t)=\dfrac{t^2}{t+1}. \end{cases}$$

Déterminer une équation de la courbe (C) et construire (C).

3 Soit u l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad u(\theta)=(\cos\theta, \sin\theta).$$

En utilisant la bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$, on peut encore écrire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad u(\theta)=\cos\theta + i \sin\theta.$$

a) Calculer la dérivée de la fonction u. Écrire $u'(\theta)$ sous la forme du produit d'une constante complexe par $u(\theta)$.

b) Rappeler quelles sont les solutions de l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) \quad y' = \lambda y,$$

où y est une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et λ une constante réelle non nulle.
Quelle est la solution y de (E_λ) vérifiant $y(0)=1$?

Remarque. On justifie ainsi, par analogie avec le cas réel, la notation $e^{i\theta}$ utilisée pour noter le nombre complexe $u(\theta)$.

4 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), construire la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=2\cot\theta. \end{cases}$$

5 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la courbe (Γ) admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} f(t)=e^t+e^{-t}-1 \\ g(t)=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t}). \end{cases}$$

a) Construire la courbe (Γ); on ne demande pas d'étudier les branches infinies de (Γ).

b) Calculer, en fonction de t :

$$\left(\frac{f(t)+1}{2}\right)^2-(g(t))^2.$$

En déduire la nature de (Γ). Préciser l'allure de ses branches infinies.

6 *a*) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire la courbe (H) admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x=\tan t \\ y=\dfrac{1+\sin t}{\cos t} \end{cases}$$

(on ne demande pas d'étudier les branches infinies de (H)).

b) Montrer, en posant $u=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{t}{2}\right)$, que (H) admet aussi pour représentation paramétrique :

$$F : u \longmapsto \left(\frac{1-u^2}{2u}, \frac{1}{u}\right).$$

En déduire la nature de (H). Utiliser ce résultat pour préciser l'allure des branches infinies de (H).

7 *a*) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire la courbe (Γ) admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=\sqrt{2}\sin t \cos t. \end{cases}$$

Reconnaître (Γ) et préciser ses éléments caractéristiques.

Scanné avec CamScanner

b) Même question pour :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos(2t)} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \tan(2t). \end{cases}$$

8 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique F définie par :

$$F(t) = \left(\sin(\pi t), \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right).$$

a) Construire la courbe (C).

b) Comparer $F(t)$ et $F\left(\frac{2}{3} - t\right)$. En déduire que (C) admet un axe de symétrie.

c) Reconnaître la courbe (C) et en donner les éléments caractéristiques.

9 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique $F : t \longmapsto (f(t), g(t))$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = t \ln|t| \\ g(t) = \dfrac{1}{t} \ln|t|. \end{cases}$$

a) Quelle réduction de l'ensemble d'étude obtient-on en utilisant les propriétés de parité de f et g?

b) Comparer $F(t)$ et $F\left(\frac{1}{t}\right)$. En déduire que l'on peut choisir $]0; 1]$ comme ensemble d'étude.

c) Construire la courbe (C).

10 a) Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), construire la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 3t. \end{cases}$$

On montrera que l'on peut choisir $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme intervalle d'étude.

b) Même exercice pour :

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \dfrac{\sin t}{2 + \cos t}. \end{cases}$$

11 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (Γ) la courbe admettant la représentation paramétrique $F : t \longmapsto (f(t), g(t))$ définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \sin 3t \\ g(t) = \cos 2t. \end{cases}$$

a) Construire la courbe (Γ).

b) Comparer la courbe (Γ) à l'indicatrice (Γ') de la fonction :

$$G : u \longmapsto (3u - 4u^3, 1 - 2u^2).$$

Construire (Γ') sur le dessin précédent.

12 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la courbe (Γ) admettant la représentation paramétrique F :

$$t \longmapsto (f(t), g(t))$$

définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \sin 2t \\ g(t) = \sin 3t. \end{cases}$$

1) a) Étudier la parité et la périodicité des fonctions numériques f et g. Quel intervalle d'étude en déduit-on pour F?

b) Comparer $F(t)$ et $F(\pi - t)$. Quelle propriété géométrique de (Γ) en déduit-on? Sur quel intervalle D_E suffit-il d'étudier F?

c) Étudier F sur D_E.

2) Construire la courbe (Γ).
Préciser les coordonnées du point double de (Γ) situé dans le quadrant caractérisé par :

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

Quelles sont les coordonnées des autres points multiples de (Γ)?

13 Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), étudier la courbe (Γ) dont une représentation paramétrique est définie par :

$$\begin{cases} x = t^2 - 3t \\ y = \dfrac{t^2}{t - 3}. \end{cases}$$

(On ne demande pas d'étudier les branches infinies de (Γ).)

14 Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), construire la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{t^3}{2t - 1} \\ g(t) = \dfrac{t^2}{2t - 1}. \end{cases}$$

Pour déterminer la nature des branches infinies obtenues lorsque t tend vers $\frac{1}{2}$, on formera l'expression $g(t) - 2f(t) + \frac{1}{4}$; on ne cherchera pas à étudier les branches infinies obtenues lorsque t tend vers $+\infty$ et $-\infty$; on précisera la direction de la tangente au point stationnaire.

Scanné avec CamScanner

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (C) la courbe admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = (2+\cos 2\theta)\cos\theta \\ y = (2+\cos 2\theta)\sin\theta. \end{cases}$$

a) Quelle interprétation géométrique peut-on donner du paramètre θ? de l'expression $2+\cos\theta$?

b) Construire la courbe (C). Est-ce une ellipse?

16 Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), soit (C) l'ensemble des points de coordonnées (x, y) telles que :

$$\exists t \in \mathbb{R}^* \quad \begin{cases} x = t^2 + t + \dfrac{3}{t} \\ y = t^2 + \dfrac{4}{t^2}. \end{cases}$$

Construire la courbe (C). On n'étudiera pas les branches infinies de (C). On montrera que (C) admet un unique point double dont on précisera les coordonnées en valeur approchée.

17 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la courbe (C) admettant la représentation paramétrique F définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{t^2} \\ g(t) = \dfrac{1}{(t-1)^2}. \end{cases}$$

a) Étudier la fonction F.

b) Déterminer $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g}{f}$ et $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{g}{f}$, puis le signe de $g-f$.
En déduire la forme de la courbe (C) au voisinage du point O.

c) Préciser les branches infinies de la courbe (C). Construire (C).

d) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est un axe de symétrie de (C).

18 *a*) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construire la courbe (C) admettant la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} f(\theta) = 2\cos\theta + \cos 2\theta \\ g(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta. \end{cases}$$

Préciser notamment les tangentes à (C) aux points stationnaires.

b) Quelle est l'image de (C) par la rotation de centre O et d'angle orienté $\dfrac{2\pi}{3}$.

19 1) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad 1 - 6\sin^2 x = 0.$$

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'unique solution α de cette équation appartenant à l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Calculer (de manière exacte) $\cos\alpha$ et $\cos 2\alpha$.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la courbe (C) admettant la représentation paramétrique F définie par :

$$\begin{cases} x = \cos 2t \cos t \\ y = \cos 2t \sin t. \end{cases}$$

a) En étudiant la parité et la périodicité des fonctions numériques associées à F, réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi]$.

b) Comparer $F(t)$ et $F(\pi - t)$, puis $F(t)$ et $F\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$. En déduire que l'on peut choisir $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ comme intervalle d'étude.

c) Étudier la fonction F sur $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$. Construire la courbe (C); préciser notamment les tangentes en O à chacun des arcs de courbe passant par ce point.

20 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère la courbe (C) admettant la représentation paramétrique F définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{t^2}{(t+1)(t-2)} \\ g(t) = \dfrac{t^2(t+2)}{t+1}. \end{cases}$$

1) Étudier la fonction F.

2) Étudier le comportement au voisinage de -1 de la fonction :

$$t \longmapsto g(t) + 3f(t) - \frac{2}{3}.$$

En déduire que la droite (Δ) d'équation :

$$3y + 9x - 2 = 0$$

est asymptote aux branches infinies de la courbe (C) décrites par le point $M(t)$ lorsque t tend vers -1 par valeurs supérieures et par valeurs inférieures.
La courbe (C) coupe-t-elle la droite (Δ)?

3) *a*) Étudier le comportement au voisinage de 0 de la fonction :

$$t \longmapsto \frac{g(t)}{f(t)}.$$

Scanné avec CamScanner

En déduire que la droite (D) d'équation :

$$4x + y = 0$$

est tangente en O à (C).

b) Étudier le signe de $4f(t) + g(t)$ selon les valeurs de t. En déduire que les arcs (C_1) et (C_2) de la courbe (C) obtenus respectivement lorsque t décrit $]-1; 0[$ et $]0; 2[$ sont situés d'un même côté de (D).

4) Construire (C).

21 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (Γ) la courbe admettant la représentation paramétrique $F : \theta \longmapsto (f(\theta), g(\theta))$ telle que :

$$\begin{cases} f(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\dfrac{\theta}{3}} \\ g(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\sin^3\dfrac{\theta}{3}}. \end{cases}$$

a) Montrer que l'on peut prendre $\left]0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ comme intervalle d'étude.
Quelle interprétation géométrique peut-on donner du paramètre θ, et de l'expression $\dfrac{1}{\sin^3\dfrac{\theta}{3}}$ sur cet intervalle?

b) Étudier la fonction F; on montrera que :

$$F'(\theta) = \left(-\cos\frac{2\theta}{3}\,\frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{3}},\ -\sin\frac{2\theta}{3}\,\frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{3}}\right).$$

c) Construire la courbe (Γ). On n'étudiera pas les branches infinies de (Γ).

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit r un nombre réel strictement positif, et (C_r) la courbe admettant pour représentation paramétrique la fonction

$$F_r : t \longmapsto (f_r(t), g_r(t))$$

définie par :

$$\begin{cases} f_r(t) = t - r\sin t \\ g_r(t) = 1 + r\cos t. \end{cases}$$

On désigne par $M_r(t)$ le point de (C_r) de coordonnées $(f_r(t), g_r(t))$.

1) Comparer $F_r(t)$ et $F_r(t + 2\pi)$. Quelle transformation géométrique simple donne pour image du point $M_r(t)$, le point $M_r(t + 2\pi)$?
Étudier la parité des fonctions f_r et g_r.
Montrer que l'on peut choisir $[0, \pi]$ comme intervalle d'étude.

2) Pour quelles valeurs de r la fonction f_r est-elle monotone sur $[0, \pi]$?
Pour quelle valeur de r la courbe (C_r) admet-elle des points stationnaires?

3) Tracer sur un même dessin (C_2), (C_1) et $(C_{\frac{1}{2}})$.

23 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les courbes (P) et (H) admettant respectivement pour représentations paramétriques les fonctions F_1 et F_2 telles que :

$$F_1 : \theta \longmapsto \left(\frac{2\cos\theta}{1-\cos\theta}, \frac{2\sin\theta}{1-\cos\theta}\right);$$

$$F_2 : \theta \longmapsto \left(\frac{2\cos\theta}{2-3\sin\theta}, \frac{2\sin\theta}{2-3\sin\theta}\right).$$

a) Construire (P) et (H). Les reconnaître.

b) Quelle interprétation géométrique peut-on donner du paramètre θ pour chacune des deux courbes?
En déduire qu'il suffit, pour obtenir les coordonnées des points communs aux courbes (P) et (H), de résoudre les équations :

$$\theta \in \mathbb{R},\quad F_1(\theta) = F_2(\theta)$$

$$\theta \in \mathbb{R},\quad F_1(\theta) = F_2(\theta + \pi).$$

Déterminer les coordonnées des points communs à (P) et (H) (pour deux d'entre eux, on se contentera de valeurs approchées).

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Soit (Δ) la droite d'équation $x = 4$.

1) Soit (Γ) l'ellipse de foyer O, de directrice associée (Δ) et d'excentricité $\dfrac{1}{3}$.

En utilisant comme paramètre la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$, où M est un point quelconque de (Γ), trouver une représentation paramétrique de (Γ).

2) Même question pour la parabole de foyer O et de directrice (Δ).

3) Soit (H) l'hyperbole de foyer O, de directrice associée (Δ) et d'excentricité $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

a) En utilisant comme paramètre la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}})$, où M est un point quelconque de l'arc (H_1) de (H) situé dans le demi-plan de bord (Δ) ne contenant pas O, trouver une représentation paramétrique de (H_1).

b) Procéder de même pour l'arc (H_2) de (H) situé dans le demi-plan $](\Delta), O)$; on utilisera comme paramètre la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MO}})$.

Scanné avec CamScanner

c) En déduire une représentation paramétrique de (H).

25 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit (Γ) la courbe d'équation :

$$(x-y)^2-2x+4y+1=0.$$

1) Déterminer l'intersection de (Γ) et de (OI), puis l'intersection de (Γ) et de la droite (Δ) d'équation $x=1$.

2) *a*) Montrer que, pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{P}-(\Delta)$, il existe un unique couple (X, t) de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = 1 + X \\ y = tX. \end{cases}$$

Interpréter géométriquement les composantes du couple (X, t).

b) Trouver une relation entre X et t traduisant l'appartenance d'un point M à (Γ).
Exprimer X en fonction de t. En déduire une représentation paramétrique de la partie de la courbe (Γ) située dans $\mathcal{P}-(\Delta)$.

3) Étudier la courbe (Γ) à l'aide de la représentation paramétrique trouvée au 2) et la construire. Reconnaître (Γ).

26 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On note $\mathcal{P}^*$ l'ensemble $\mathcal{P}-\{O\}$.

1) Reconnaître la courbe (H) admettant pour représentation paramétrique la fonction $F : t \longmapsto (f(t), g(t))$ telle que :

$$\begin{cases} f(t) = \dfrac{1}{t} \\ g(t) = t. \end{cases}$$

2) Soit φ l'application de $\mathcal{P}^*$ dans $\mathcal{P}^*$ qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\dfrac{1}{\bar{z}}$.

a) Montrer que l'image (Γ) de (H) par φ admet pour représentation paramétrique l'application :

$$F_1 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^3}{1+t^4}\right).$$

On désigne par $M_1(t)$ le point de coordonnées $F_1(t)$.

b) Étudier la parité des fonctions composantes de F_1. Quel intervalle d'étude en déduit-on? Quelle est la transformation géométrique donnant pour image du point $M_1(t)$ le point $M_1\left(\dfrac{1}{t}\right)$?
Étudier F_1 sur $]0; 1[$ et construire (Γ).

27 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (C) la courbe admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3t - t^2 \\ y = 1 - 3t^2. \end{cases}$$

1) Construire la courbe (C). On n'étudiera pas les branches infinies de (C).

2) Soit λ un paramètre réel.
Discuter, selon les valeurs de λ, du nombre de points d'intersection de (C) et de la droite (Δ_λ) d'équation $y = \lambda x$.

3) Soit λ_0 l'unique valeur du paramètre λ telle que (Δ_{λ_0}) coupe (C) en un point unique, et $\vec{v}_0$ un vecteur directeur de (Δ_{λ_0}). Soit $\vec{u}_0$ un vecteur tel que :

$$\begin{cases} \|\vec{u}_0\| = \|\vec{v}_0\| \\ \vec{u}_0 \perp \vec{v}_0. \end{cases}$$

Déterminer une représentation paramétrique puis une équation de (C) dans le repère $(O, \vec{u}_0, \vec{v}_0)$.
En déduire la nature de (C).

28 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, A, B). On appelle A' et B' les points de coordonnées respectives $(-1; 0)$ et $(0; -1)$.

a) Reconnaître l'indicatrice (Γ) de la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right).$$

b) Soit φ l'application affine de $\mathcal{P}$ qui, à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{1}{2}y \\ y' = \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$$

Quel est l'ensemble des points invariants par φ?
Étant donné un point M quelconque d'ordonnée non nulle, trouver les coordonnées du point H, intersection des droites (MM') et (OI).
Comparer $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HM'}$.
Quelle est la nature de φ?

c) Trouver une représentation paramétrique de l'image (Γ') de (Γ) par φ. Construire (Γ').
Soit M_1 et M_2 les points de (Γ') en lesquels la tangente à (Γ') est parallèle à (OI).
Quels sont les points où (Γ') admet une tangente parallèle à (M_1M_2)?

d) Pour tout nombre réel t, on désigne par $M(t)$ le point de paramètre t de (Γ'), et par $\vec{u}(t)$ un vecteur directeur de la tangente en ce point.

Scanné avec CamScanner

Écrire une équation dont les solutions sont les valeurs du paramètre t telles que :

$$\overrightarrow{OM}(t) \perp \vec{u}(t).$$

Résoudre cette équation (utiliser $t - \frac{1}{t}$ comme inconnue auxiliaire).
Donner des valeurs approchées des coordonnées des points correspondants de (Γ') et placer ces points sur le dessin.

29 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) Reconnaître la courbe (C) dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} f(\theta) = -1 + \cos\theta \\ g(\theta) = \sin\theta, \end{cases}$$

le paramètre θ décrivant $\mathbb{R}$.

b) Trouver une équation de la tangente (D_θ) à (C) au point de paramètre θ.
Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du projeté orthogonal $H(\theta)$ du point O sur (D_θ).
Construire l'ensemble des points $H(\theta)$, θ décrivant $\mathbb{R}$.

30 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit t un paramètre décrivant $[0; \pi]$, et (Δ_t) la droite d'équation :

$$4x \cos t - y - 2 - \cos 2t = 0.$$

a) Soit t_0 et t_1 deux éléments distincts de $[0; \pi]$.
Montrer que (Δ_{t_0}) et (Δ_{t_1}) sont sécantes, et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.
Déterminer les limites $f(t_0)$ et $g(t_0)$ de ces coordonnées lorsque t_1 tend vers t_0.

b) Soit F l'application de $[0; \pi]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall t \in [0; \pi] \quad F(t) = (f(t), g(t)).$$

Construire l'indicatrice (Γ) de F. Montrer que la tangente à (Γ) au point de coordonnées $F(t)$ est la droite (Δ_t).

31 Dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les trois points A, B et C définis par :

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i}; \quad \overrightarrow{OB} = \vec{j}; \quad \overrightarrow{OC} = -\vec{j}.$$

Pour tout point M de $\mathcal{P}$, on pose

$$\varphi(M) = MA + MB + MC.$$

On se propose de trouver un point M_0 de $\mathcal{P}$ tel que $\varphi(M) > \varphi(M_0)$ pour tout point M de $\mathcal{P}$ différent de M_0.

A) On note Δ la demi-droite, ensemble des points d'abscisse positive ou nulle et d'ordonnée nulle. On se propose, dans cette partie, d'étudier la restriction de φ à Δ.

1) On définit les deux applications f et g de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+1} + x - 2$$

et

$$g(x) = 2\sqrt{x^2+1} - x + 2.$$

Étudier les variations de f, puis celles de g. (L'étude aux bornes n'est pas demandée).

2) On définit l'application h de $[0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout nombre réel x positif ou nul :

$$h(x) = 2\sqrt{x^2+1} + |x-2|.$$

Étudier, au moyen de la question précédente, les variations de h. (L'étude aux bornes n'est pas demandée).
Montrer que, pour tout x positif ou nul et différent de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, on a :

$$h(x) > h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

3) Soit M un point de Δ.
Établir que $\varphi(M) = h(x)$, où x désigne l'abscisse de M.
Quelle est la plus petite valeur prise par $\varphi(M)$ quand M décrit Δ? En quel point de Δ est-elle atteinte?

B) *Étude de φ sur le plan $\mathcal{P}$ tout entier*

1) Établir que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a $MB + MC \geqslant 2$.

2) Étant donné un nombre réel a supérieur ou égal à 1, on note (Γ_a) l'ensemble des points M du plan tels que $MB + MC = 2a$.
Reconnaître (Γ_1).
Reconnaître (Γ_a) lorsque $a > 1$.
Tracer, sur une même figure (Γ_1) et $(\Gamma_{5/3})$.
On prendra l'unité de longueur égale à 3 cm.

3) Établir que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 1, (Γ_a) rencontre Δ en un unique point T_a dont on précisera l'abscisse.

4) Soit un nombre réel a supérieur ou égal à 1.
Vérifier que (Γ_a) admet la représentation paramétrique définie pour t élément de $[0; 2\pi[$ par :

$$\begin{cases} x = \sqrt{a^2-1}\cos t \\ y = a \sin t. \end{cases}$$

Si $t \in [0; 2\pi[$, et si M est le point de (Γ_a) défini par les formules ci-dessus, exprimer, en fonction de t, la différence $MA^2 - T_aA^2$ et montrer que, si M est différent de T_a, cette différence est strictement positive.

Scanné avec CamScanner

En déduire que, si M est un point de (Γ_a) différent de T_a, on a $\varphi(M) > \varphi(T_a)$.

5) Soit M_0 le point du plan défini par

$$\overrightarrow{OM_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}.$$

Montrer que, pour tout point M du plan différent de M_0, on a $\varphi(M) > \varphi(M_0)$.

(Bac E. 85)

32 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit φ l'application de $\mathcal{P} - \{J\}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z+i}{z-i}.$$

a) Donner une représentation paramétrique, exprimée à l'aide des fonctions cos et sin, du cercle (C_r) de centre O et de rayon r.

b) En déduire que l'image de (C_r) par φ admet la représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{r^2-1}{r^2-2r\sin t+1} \\ y = \dfrac{2r\cos t}{r^2-2r\sin t+1}. \end{cases}$$

c) Quelle est l'image du cercle (C_1) par φ?

d) Construire l'image du cercle $(C_{\sqrt{3}})$ par φ. La reconnaître.

e) Plus généralement, montrer que, sauf dans un cas particulier que l'on précisera, l'image du cercle (C_r) par φ est un cercle.
(On pourra rechercher une équation cartésienne de cette image. Pour cela, le changement d'inconnue donné par

$$(S, T) = (\sin t, \cos t)$$

permet de se ramener à un système linéaire dans $\mathbb{R}^2$. En chercher les solutions en fonction de x, y et r, puis appliquer l'égalité

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.)$$

33 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et F une application dérivable de I dans $\mathbb{R}^2$, d'indicatrice (Γ).
Soit φ une application affine de $\mathcal{P}$, et $\vec{\varphi}$ son application linéaire associée.
L'expression analytique de φ est donnée par :

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c'. \end{cases}$$

a) Donner une représentation paramétrique de l'image (Γ') de (Γ) par φ.

b) On suppose que, pour tout élément t de I, $F'(t) \neq (0; 0)$ et que φ est bijective.
Soit t_0 un élément de I et (Δ_{t_0}) la tangente à (Γ) au point de coordonnées $F(t_0)$.
Qu'est la droite $\varphi(\Delta_{t_0})$ pour la courbe (Γ')?

34 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K).
Soit F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, à tout nombre réel t, associe le triplet (x, y, z) tel que :

$$\begin{cases} x = 12\cos t - 5\sin t \\ y = \dfrac{48}{5}\sin t + 4\cos t. \\ z = \dfrac{36}{5}\sin t + 3\cos t. \end{cases}$$

Comme dans le plan, on appelle indicatrice (C) de F, l'ensemble :

$$\{M(x, y, z) \in \mathcal{E} / \exists t \in \mathbb{R} \quad (x, y, z) = F(t)\}.$$

1) Montrer que (C) est l'intersection d'une sphère et d'un plan. En déduire la nature de (C).

2) Soit (Γ) l'image de (C) par la projection orthogonale sur le plan (O, I, J).
Déterminer une représentation paramétrique de (Γ) dans le repère (O, I, J) de ce plan et construire (Γ).

35 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J, K).
Soit S la sphère de centre O et de rayon 2. On appelle N et S les points de coordonnées respectives (0; 0; 2) et (0; 0; −2).

1) *a*) Soit M un point de S distinct de N et S, et H son projeté orthogonal sur le plan (OIJ). Le plan (OIJ) étant orienté de façon que (O, I, J) en soit un repère direct, on désigne par θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OH}})$. On désigne par φ la mesure de l'angle (non orienté) $\widehat{NOM}$.
Exprimer à l'aide de θ et φ les coordonnées (x, y, z) du point M.

b) Montrer qu'un point $M(x, y, z)$ quelconque de $\mathcal{E}$ appartient à S si et seulement si il existe un couple (θ, φ), élément de $]-\pi; \pi] \times [0; \pi]$ tel que :

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta\sin\varphi \\ y = 2\sin\theta\sin\varphi \\ z = 2\cos\varphi. \end{cases}$$

2) Soit (Σ) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ caractérisé par :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad \text{et} \quad z \geqslant 0.$$

Quelle est l'intersection de (Σ) et d'un plan parallèle à (OIJ)?

Scanné avec CamScanner

Quelle est l'intersection de (Σ) et d'un plan contenant la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{OK}$?
Reconnaître l'ensemble (Σ).

3) *a*) Montrer que l'intersection (C) de S et de (Σ) est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\exists\theta\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \quad \begin{cases} x=2\cos^2\theta \\ y=\sin 2\theta \\ z=2|\sin\theta|. \end{cases}$$

b) On choisit (OIJ) comme plan horizontal et (OJK) comme plan frontal de projection.
Représenter, sur une épure, les traces de S et de (Σ) et les projetés horizontal et frontal de l'ensemble (C).
Quelle est la nature du projeté orthogonal de (C) sur le plan (OIK)?

36 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), les coordonnées (x, y) d'un point mobile sont données en fonction du temps t par :

$$\begin{cases} x=2-\sin t \\ y=1+\cos 2t. \end{cases}$$

a) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M.

b) Trouver une équation du support (P) de la trajectoire de M; construire (P).

c) Définir de manière précise la trajectoire de M.
Le mouvement de ce mobile est-il périodique? Quelle est sa période?

d) Décrire le mouvement de M lorsque t varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ en précisant s'il est accéléré ou retardé.

37 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2-\frac{4}{\sin t}z+\frac{13}{\sin^2 t}-9=0,$$

z désigne l'inconnue, t désigne un paramètre réel de l'intervalle $]0; \pi[$.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M mobile d'affixe

$$z=\frac{2}{\sin t}+3i\cot t,$$

t décrivant l'intervalle $]0; \pi[$.

a) Soit (T) la trajectoire du mobile; démontrer que (T) est une partie d'une courbe dont on précisera les éléments caractéristiques.
Préciser et construire (T).

b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ à l'instant t et déterminer t pour que $\|\vec{V}\|=3$.

(Bac. Toulouse, 1982)

38 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), le mouvement d'un point mobile M est donné par une application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

a) Déterminer la fonction F sachant que :

— à l'instant 0, le point mobile coïncide avec le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$;

— à l'instant 0, le vecteur vitesse du point mobile a pour coordonnées (0; 1);

— à chaque instant t, le vecteur accélération du point mobile a pour coordonnées :

$$\left(-\frac{1}{2}\cos t;\ -\frac{1}{2}\cos t-\sin t\right).$$

b) Construire la trajectoire du point mobile M.

39 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit (C) le cercle de centre O et de rayon R.
Un point M quelconque de (C) est entièrement déterminé par la donnée d'une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$.

1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On définit le mouvement d'un point mobile $M(t)$ sur ce cercle par la donnée de la fonction numérique deux fois dérivable :

$$\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longrightarrow \theta(t)$$

telle que, pour tout élément t de l'intervalle I, $\theta(t)$ soit une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}(t)})$.
Quelle est l'application F de I dans $\mathbb{R}^2$ correspondant à ce mouvement?
Quelles sont les coordonnées du vecteur vitesse du mobile à l'instant t?

2) Montrer que le mouvement est uniforme si et seulement si θ est une fonction affine de t.
Calculer alors les coordonnées du vecteur accélération à l'instant t.
Quelles remarques peut-on faire?

40 Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Construire la courbe (Γ) admettant pour représentation paramétrique la fonction

$$F : u \longmapsto (f(u), g(u))$$

définie par :

$$\begin{cases} f(u)=3u-u^3 \\ g(u)=1-3u^2. \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Préciser les coordonnées du point double de (Γ). On ne demande pas d'étudier les branches infinies de (Γ).

2) Montrer que l'application :

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto 3u + u^3$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Soit σ sa bijection réciproque.
Montrer que σ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sigma'(t) = \frac{1}{3(1+\sigma^2(t))}.$$

3) Les coordonnées d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = f \circ \sigma(t) \\ y(t) = g \circ \sigma(t). \end{cases}$$

a) Quelle est la trajectoire du point M?
Quels sont les instants t_0 et t_1 $(t_0 < t_1)$ où le mobile passe par le point double de sa trajectoire?

b) Calculer, à chaque instant t, la vitesse du point mobile. Que remarque-t-on?
Comment appelle-t-on un tel mouvement?

c) En déduire la longueur de l'arc de courbe décrit par le mobile lorsque t décrit $[t_0, t_1]$.

41 L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère un point mobile M de $\mathcal{E}$, dont les coordonnées (x, y, z) sont données en fonction du temps par :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t}{1+t^2} \\ z = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

1) Montrer que le point M appartient à un plan (P) dont on donnera une équation.

2) *a*) Vérifier que le point O' de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$, les vecteurs $\vec{j}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ constituent un repère orthonormé de (P).

b) Exprimer, en fonction de t, les coordonnées du point mobile M dans ce repère.
Préciser la trajectoire de M dans le plan (P) et le sens de parcours sur cette trajectoire.

Scanné avec CamScanner

INDEX

A

Accéléré (mouvement —) 347
Aire d'une surface plane 202
Approximation affine 254
Approximation polynômiale 256
Arccosinus 128
Archimède 205
Arcsinus 110
Arctangente 111
Asymptote à une courbe d'équation $y = f(x)$ 87
Asymptote à une courbe paramétrée 328
Asymptote parallèle à la droite des abscisses ... 78
Asymptote parallèle à la droite des ordonnées . 65
Asymptotes (courbes —) 95

B

Bijection réciproque d'une fonction continue monotone 110
Boule (volume d'une —) 237
Branche infinie d'une courbe d'équation $y = f(x)$ 85
Branche infinie d'une courbe paramétrée 328
Branche parabolique 90

C

Cercle de courbure d'une courbe ..... 291 (PB. 27)
Changement de variable affine 213
Charge d'un condensateur ..... 309 (ex. 21)
Chasles (égalité de — pour les intégrales) 208
Cinématique 344
Cissoïde droite 130
Comportement asymptotique d'une fonction 75
Continuité d'une fonction composée en un point 40
Continuité d'une fonction en un point 35
Continuité sur un intervalle 96
Coordonnées polaires 336
Cosinus hyperbolique (fonction —) 199
Cotangente (fonction —) 44
Courbe paramétrée 313
Courbes intégrales 296
Coût marginal 59

D

Dérivée d'une bijection réciproque 113
Dérivée d'une fonction composée 42-43
Dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ 320
Dérivée logarithmique 60
Dérivée seconde 45
Dérivées usuelles 26-27
Désintégration d'un corps radioactif 298
Développement limité d'ordre 1 40-249
Développement limité d'ordre n en 0 262
Développement limité d'un produit 272
Développement limité d'une fonction du type $f(\lambda x^k)$ 276
Développement limité d'une somme 271
Développement limité de la fonction tangente .. 275
Développement limité en un point x_0 278
Développements limités usuels 270
Dichotomie (méthode de —) 105
Direction asymptotique 91
Divergence par comparaison 141
Double (point —) 321-329

E

Élasticité 60
Équation différentielle 294
Équation différentielle (ordre d'une —) 294
Équation différentielle (solution d'une —) 295
Équations différentielles du type : $y' = \lambda y$ 297
Équations différentielles du type : $y'' - \omega^2 y = 0$. 301
Équations différentielles du type : $y'' + \omega^2 y = 0$. 302
Équations différentielles du type : $ay'' + by' + cy = 0$ 304
Euler 143
Euler (constante d'—) 143
Exponentielle de base a (fonction —) 185
Exponentielle népérienne (fonction —) 167
Exposants rationnels 116
Extrémum relatif 29

F

Fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$ 320
Fonctions puissances d'exposant rationnel 119
Formule des trois niveaux 238

G

Gauss (fonction de —) 226

I

Image d'un intervalle par une fonction continue 100
Image directe 98
Indicatrice 313
Inégalité des accroissements finis 32
Intégrable (fonction —) 207
Intégrale d'une fonction 206
Intégration par parties 216
Intégrer une équation différentielle 295
Intervalle borné 25
Intervalle fermé 25
Intervalle ouvert 25
Irrationnalité de e 200

L

Limite à droite ou à gauche 48
Limite d'une fonction composée 39
Limite d'une suite 136
Limite infinie en un point 64
Limites (théorèmes généraux sur les — en x_0) . 35-67-68-69
Limites de référence avec exp 176
Limites de référence avec ln 14
Limites de référence en $+\infty$ et $-\infty$ 80
Limites de référence en 0 34
Limites en $+\infty$ ou $-\infty$ 76
Limites infinies (cas des suites) 140
Limites infinies de référence 65
Linéarité d'une intégrale 208
Logarithme décimal (fonction —) 14
Logarithme népérien (fonction —) 4

M

Maximum relatif 29
Minimum relatif 29
Moyenne (théorème de la —) 210
Moyenne arithmético-géométrique 155
Multiple (point —) 330

Scanné avec CamScanner

N

Neper 3
Newton (méthode de —) 122
Newton (méthode de — améliorée) .. 290 (PB. 26)
Nombre dérivé 40
Nombre dérivé à droite ou à gauche 54
Nombre e 12
Nombre e (suites tendant vers le —) 244 (PB. 43)
Nombre e (valeur approchée du —) 17
Notation a^x 184
Notation e^x 169

P

Paramétrage 313
Partie régulière d'un développement limité 262
Parties proportionnelles (méthode des —) 121
Point d'inflexion 281
Position d'une courbe par rapport à sa tangente 279
Positivité d'une intégrale 209
Primitives d'une fonction sur un intervalle 1
Primitives de la fonction exponentielle 183
Propriété fondamentale de la fonction exponentielle 168
Propriété fondamentale de la fonction logarithme 5
Propriété héréditaire 158

R

Racine $n^{\text{ième}}$ 144
Rayon de courbure ..... 59 (ex. 16) et 291 (ex. 27)
Rebroussement (point de —) 323
Rectangles (méthode des —) 230
Rectiligne (mouvement —) 345
Récurrence (raisonnement par —) 135
Régulier (point —) 321
Représentation paramétrique 313
Reste d'un développement limité 262
Retardé (mouvement —) 34

S

Série harmonique alternée 1
Simpson (méthode de —) ..... 247 (ex.
Sinus hyperbolique (fonction —) 1
Solide de révolution 3
Stationnaire (point —) 3
Strophoïde droite 2
Suites adjacentes 3
Suite croissante et majorée 1
Suite décroissante et minorée 1
Suites géométriques 1

T

Tangente en un point d'une courbe paramétrée 32
Tangente hyperbolique (fonction —) 3
Tangente parallèle à la droite des ordonnées 1
Théorème des valeurs intermédiaires 1
Tore 1
Trajectoire 3
Trapèzes (méthode des —) 3
Troncature 1

U

Uniforme (mouvement —) 3

V

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle 1
Vecteur accélération 1
Vecteur vitesse 345-1
Vitesse 1
Vitesse algébrique instantanée 1
Volume d'une partie de $\mathcal{E}$ 1

Scanné avec CamScanner

ACHEVÉ D'IMPRIMER 2e TRIMESTRE 1988
SUR LES PRESSES SPÉCIALES DE LA
SOCIÉTÉ EUROPÉENNE DES ARTS GRAPHIQUES
5, RUE DE PONTOISE
75005 PARIS
IMPRIMÉ EN ITALIE

Scanné avec CamScanner



Scanné avec CamScanner