Fornecoutri.com
ça soutra!

# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

## 2de / 1re Terminale

Toutes les formules; définitions, théorèmes et propriétés accompagnés d'exemples.

**JOKER-SYNTHÈSE**

BORDAS

# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

2de / 1re
Terminale

BORDAS

A. DEVILLE D. CAHOUR

# FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

## 2de/1re Terminale

BORDAS

# AVANT-PROPOS

Qui, d'entre nous, n'a jamais été arrêté dans son élan par l'oubli d'une formule, d'un théorème ou d'une définition?

Qui, d'entre nous, n'a jamais perdu un temps précieux à la recherche de l'élément qui lui manquait pour finir un exercice?

Cet ouvrage contient toutes les connaissances qui figurent dans les nouveaux programmes des classes de secondes, premières et terminales, toutes sections confondues.

Il présente deux caractéristiques :

- un **index complet** qui permet de retrouver toute notion en quelques instants.
- une **classification par chapitre** qui permet de faire le point sur une leçon.

Notons enfin que les auteurs ont respecté la lettre et l'esprit des nouveaux programmes et qu'ils accueilleront avec reconnaissance toute remarque ou suggestion à propos de cet ouvrage.

**Maquette :** Jehanne-Marie Husson

© BORDAS, Paris, 1990
ISBN 2-04-019177-1

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1er de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

## SOMMAIRE


Activités numériques ..... 4
Équations. Systèmes d'équations ..... 8
Statistique ..... 13
Fonctions numériques : généralités ..... 21
Fonctions de référence ..... 24
Opérations sur les fonctions numériques ..... 31
Fonctions polynômes ..... 34
Suites numériques ..... 36
Limites ..... 43
Continuité ..... 48
Dérivation ..... 49
Intégration ..... 53
Équations différentielles ..... 59
Fonctions logarithmiques et exponentielles ..... 60
Complexes ..... 68
Révisions de géométrie plane ..... 75
Vecteurs et droites du plan-Équations ..... 84
Produit scalaire ..... 90
Calcul barycentrique ..... 93
Angles et trigonométrie ..... 99
Géométrie dans l'espace ..... 108
Droites et plans dans un repère de l'espace : Équations ..... 115
Transformations du plan ..... 121
Isométries du plan ..... 127
Similitudes planes directes ..... 130
Produit vectoriel ..... 133
Coniques ..... 135
Combinatoire. Dénombrements ..... 142
Probabilités ..... 145
Périmètres et aires de figures planes usuelles ..... 149
Volumes ..... 150

# ACTIVITÉS NUMÉRIQUES

## PROPRIÉTÉS SUR LES FRACTIONS

| | |
|---|---|
| $d \neq 0$ $\quad \dfrac{a}{d}+\dfrac{b}{d}=\dfrac{a+b}{d}$ | $b \neq 0$ et $c \neq 0$ $\quad \dfrac{a}{\frac{b}{c}}=\dfrac{ac}{b}$ |
| $b \neq 0$ et $d \neq 0$ $\quad \dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+bc}{bd}$ | $b \neq 0$ et $c \neq 0$ $\quad \dfrac{\frac{a}{b}}{c}=\dfrac{a}{bc}$ |
| $b \neq 0$ et $d \neq 0$ $\quad \dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$ | $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ $\quad \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{ad}{bc}$ |
| $b \neq 0$ et $d \neq 0$ $\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ équivaut à $ad = bc$ | |

## PUISSANCES

### Définition

Soit $a$ un nombre réel et $n$ un entier ($n \geqslant 2$).

On définit $\begin{cases} a^n = \underbrace{a \times a \times a \ldots \times a \times a}_{n \text{ fois}}. \text{ On lit « } a \text{ exposant } n \text{ »} \\ a^1 = a, \quad a^0 = 1 \ (a \neq 0), \end{cases}$

$$n \in \mathbb{N} \quad a \neq 0 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

### Propriétés

$$n \in \mathbb{Z}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0 \quad b \neq 0$$

$$a^n \times a^p = a^{n+p}, \quad (a^n)^p = a^{np}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

# IDENTITÉS REMARQUABLES

Soit $a$ et $b$ deux nombres réels.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

# RACINES CARRÉES

## Définition

On appelle racine carrée d'un réel positif $x$, le réel positif $a$ tel que $a^2 = x$. On note $a = \sqrt{x}$.

$$a = \sqrt{x} \quad \text{signifie} \quad \begin{cases} a^2 = x \\ a \geqslant 0 \end{cases}$$

L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
$\sqrt{x}$ n'existe que si $x \geqslant 0$.

Pour tout $x$ réel positif $\sqrt{x} \geqslant 0$.

## Propriétés

$$a \geqslant 0,\ b \geqslant 0 \quad \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \quad a \geqslant 0,\ b > 0 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a \geqslant 0 \quad (\sqrt{a})^2 = a; \quad a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0 \quad \sqrt{a^{2n}} = |a|^2.$$

*Remarque :*

$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sont dites expressions conjuguées.

# RELATION D'ORDRE : INÉGALITÉS

## Propriétés

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si | $a \leqslant b$ et $t \geqslant 0$, | alors | $at \leqslant bt$ |
| Si | $a \leqslant b$ et $t \leqslant 0$, | alors | $at \geqslant bt$ |
| Si | $0 \leqslant a \leqslant b$, | alors | $a^2 \leqslant b^2$. |
| Si | $a \leqslant b \leqslant 0$, | alors | $b^2 \leqslant a^2$. |
| Si | $0 < a \leqslant b$, | alors | $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. |
| Si | $a \leqslant b < 0$, | alors | $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. |
| Si | $0 \leqslant a \leqslant b$, | alors | $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Si | $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, | alors | $a + c \leqslant b + d$ |
| Si | $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, | alors | $ac \leqslant bd$ |
| Si | $a \leqslant b \leqslant 0$ et $c \leqslant d \leqslant 0$, | alors | $ac \geqslant bd$ |
| Si | $a \leqslant b \leqslant 0$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, | alors | $bc \geqslant ad$ |
| Si | $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$, | alors | $\frac{a}{d} \leqslant \frac{b}{c}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| si | $x \geqslant 1$, | alors | $x \leqslant x^2$ |
| si | $0 \leqslant x \leqslant 1$, | alors | $x^2 \leqslant x$ |

# VALEUR ABSOLUE

## Définition

On appelle valeur absolue du réel $x$ le réel positif noté $|x|$ défini par :

$$\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x| = -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

*Remarque :*

$|f(x)|$ dépend du signe de $f(x)$.

## Propriétés

$x$ et $y$ étant deux nombres réels,

$|x| = 0$ équivaut à $x = 0$.
$|x| \geqslant 0$ pour tout réel $x$.
$|-x| = |x|$.
$|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$.
$|x \times y| = |x| \times |y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
$\|x| - |y\| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$
$\|x| - |y\| \leqslant |x - y| \leqslant |x| + |y|$.

$a \geqslant 0$ $|x| \leqslant a$ équivaut à $-a \leqslant x \leqslant a$
$a \geqslant 0$ $|x| \geqslant a$ équivaut à $x \leqslant -a$ ou $x \geqslant a$
$r \geqslant 0$ $|x - a| \leqslant r$ équivaut à $a - r \leqslant x \leqslant a + r$

*Remarque :*

$\sqrt{x^2} = |x|$.

## Distance

Soit $x$ et $y$ des nombres réels.
La distance de $x$ à $y$ est définie par : $d(x, y) = |x - y|$.

## Approximation ou valeur approchée

Soit $x$ un réel. On dit que $a$ est une valeur approchée de $x$ à $10^{-p}$ près si :

$|x - a| \leqslant 10^{-p}$.

## Encadrement

Soit $x$ un réel. Un *encadrement* de $x$ est un couple $(a, b)$ de réels tel que :

$a \leqslant x \leqslant b$

$b - a$ est *l'amplitude* de l'encadrement.

# ÉQUATIONS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

## ÉQUATION DU 1er DEGRÉ À UNE INCONNUE

Soit $S$ l'ensemble des solutions réelles.

| $ax + b = 0$ | $x$ inconnue réelle | $a$ et $b$ deux nombres réels |
|---|---|---|
| $a \neq 0$ | $x = -\dfrac{b}{a}$ | $S = \left\{ -\dfrac{b}{a} \right\}$ |
| $a = 0$<br>$b \neq 0$ | $0x = b$ | $S = \varnothing$ |
| $a = 0$<br>$b = 0$ | $0x = 0$ | $S = \mathbb{R}$ |

**Exemples**

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad 2x - 3 = 2$; $S = \left\{ \dfrac{5}{2} \right\}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad \sqrt{3}(x - 1) = 2x + 5\sqrt{3}$;
  $x = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} = -18 - 12\sqrt{3}$; $S = \{ -18 - 12\sqrt{3} \}$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad 3(x - 1) + 2 = 2(x + 1) + x - 2 \quad S = \varnothing$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\quad 3(x - 1) + 2 = 2(x + 1) + x - 3 \quad S = \mathbb{R}$.

## ÉQUATION DU 1er DEGRÉ À DEUX INCONNUES



Soit $S$ l'ensemble des couples de réels solutions.

| | $ax + by + c = 0$ $a, b, c$ trois nombres réels | | |
|---|---|---|---|
| 1) | $(a, b) \neq (0, 0)$ | $ax + by + c = 0$ | $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\}$ |
| 2) | $a = 0$ $b \neq 0$ | $y = -\frac{c}{b}$ | $S = \left\{ \left( x, -\frac{c}{b} \right) \middle/ x \in \mathbb{R} \right\}$ |
| 3) | $a \neq 0$ $b = 0$ | $x = -\frac{c}{a}$ | $S = \left\{ \left( -\frac{c}{a}, y \right) \middle/ y \in \mathbb{R} \right\}$ |
| | $a = 0$ $b = 0$ $c \neq 0$ | $0x + 0y = c$ | $S = \varnothing$ |
| 4) | $a = 0$ $b = 0$ $c = 0$ | $0x + 0y = 0$ | $S = \mathbb{R}^2$. |

**Interprétation graphique**

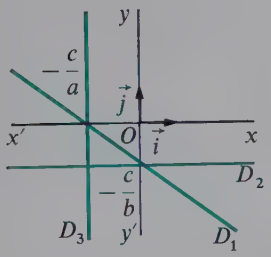



Fig. 1

$D_1$ est la représentation graphique du 1)
$D_2$ est la représentation graphique du 2)
$D_3$ est la représentation graphique du 3).

Pour le 4), la représentation graphique est l'ensemble des points du plan.

# SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DU 1er DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Soit $S$ l'ensemble des couples de réels solutions

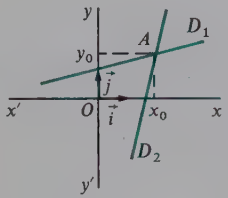
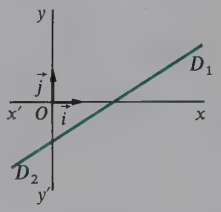
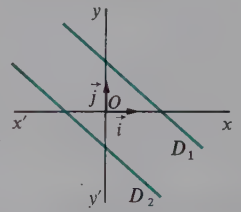
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & (a, b) \neq (0, 0) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (a', b') \neq (0, 0) \end{cases}$$

Chacune des équations est une équation cartésienne d'une droite dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $D_1 : ax + by + c = 0$ et $\vec{v}_1 (-b, a)$ un vecteur directeur de $D_1$.

Soit $D_2 : a'x + b'y + c' = 0$ et $\vec{v}_2 (-b', a')$ un vecteur directeur de $D_2$.

Les solutions du système sont les coordonnées des points communs à $D_1$ et $D_2$.

<table>
<tr><td rowspan="2">$ab' - ba' \neq 0$<br>$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ non colinéaires</td><td colspan="2">$ab' - ba' = 0$. $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ colinéaires.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Il existe un réel $\lambda$ tel que $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \lambda ax + \lambda by + c' = 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>$D_1$ et $D_2$ sont sécantes en un point $A$.<br>  <br><br>Fig. 2<br>Le système admet un couple solution unique : les coordonnées du point $A$ :<br>$S = \{(x_0, y_0)\}$</td><td>$c' = \lambda c$<br>$D_1$ et $D_2$ sont confondues<br>  <br><br>Fig. 3<br>Le système admet une infinité de couples solutions :<br>$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\}$</td><td>$c' \neq \lambda c$<br>$D_1$ et $D_2$ sont strictement parallèles<br>  <br><br>Fig. 4<br>Le système n'admet pas de couple solution :<br>$S = \varnothing$</td></tr>
</table>

# INÉQUATION DU 1er DEGRÉ À UNE INCONNUE

Soit $S$ l'ensemble des solutions réelles.

| $ax + b \geqslant 0$ $\quad$ $x$ inconnue réelle $\quad$ $a$ et $b$ deux nombres réels | | |
|---|---|---|
| $a > 0$ | $x \geqslant -\frac{b}{a}$ | $S = \left[-\frac{b}{a}, +\infty\right[$ |
| $a < 0$ | $x \leqslant -\frac{b}{a}$ | $S = \left]-\infty, -\frac{b}{a}\right]$ |
| $a = 0, b \geqslant 0$ | $0x \geqslant -b$ | $S = \mathbb{R}$ |
| $a = 0, b < 0$ | $0x \geqslant -b$ | $S = \varnothing$ |

# INÉQUATION DU 1er DEGRÉ À DEUX INCONNUES

Elles sont de la forme : $ax + by + c > 0$, $ax + by + c < 0$, $ax + by + c \geqslant 0$, $ax + by + c \leqslant 0$.
Soit $D$ la droite d'équation

$$ax + by + c = 0$$

dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
$D$ partage le plan en deux demi-plans de frontière $D$.
Pour tout point $M(x, y)$ de l'un des demi-plans, $ax + by + c$ est *strictement positif.*
Pour tout point $M(x, y)$ de l'autre demi-plan, $ax + by + c$ est *strictement négatif.*
Pour tout point $M(x, y)$ de $D$, $ax + by + c$ est *nul.*

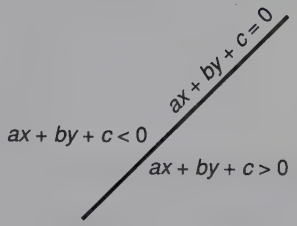



Fig. 5

# ÉQUATION DU 2e DEGRÉ À UNE INCONNUE

$$(E) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad a \in \mathbb{R}^* \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta$ s'appelle le discriminant de l'équation $(E)$.
Résolution de $(E)$ dans $\mathbb{R}$ :

- Si $\Delta < 0$, alors $(E)$ n'admet pas de solution réelle et le trinôme n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$, alors $(E)$ admet une solution

$$x_1 = -\frac{b}{2a}; \quad -\frac{b}{2a} \text{ est racine double du trinôme.}$$

Et pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

- Si $\Delta > 0$, alors $(E)$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$x_1$ et $x_2$ sont racines simples du trinôme,
et pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

• Somme et produit des racines.

Lorsque $(E)$ admet deux racines distinctes ou confondues, leur somme est $S = -\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $P = \dfrac{c}{a}$.

Si le système $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 \quad = P \end{cases}$ admet des solutions $(S^2 - 4P \geqslant 0)$, alors $x_1$ et $x_2$ sont solutions de : $X^2 - SX + P = 0$.

**Exemple**

Trouver deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{5}{2} \\ ab = \dfrac{21}{16} \end{cases} \qquad S = \left\{\left(\frac{3}{4}; \frac{7}{4}\right), \left(\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right)\right\}$$

# INÉQUATION DU 2e DEGRÉ À UNE INCONNUE

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad a \in \mathbb{R}^*, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$.

<table>
<tr><td rowspan="2">$\Delta < 0$</td><td>$a > 0$</td><td>$P(x)$ positif non nul</td><td colspan="2" rowspan="2">$P(x)$ est du signe de $a$</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>$P(x)$ négatif non nul</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\Delta = 0$</td><td>$a > 0$</td><td>$P(x)$ positif ou nul</td><td rowspan="2">$P\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$</td><td rowspan="2">pour $x \neq -\dfrac{b}{2a}$<br>$P(x)$ est du signe de $a$</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>$P(x)$ négatif ou nul</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td colspan="4">$x_1$ et $x_2$ sont les racines de $P$.<br>$x_1$ $\qquad$ $x_2$<br>signe de $a$ $\qquad$ signe de $-a$ $\qquad$ signe de $a$<br>Si $x \in ]-\infty, x_1[ \cup ]x_2, +\infty[$ alors $P(x)$ est du signe de $a$.<br>Si $x \in ]x_1, x_2[$ alors $P(x)$ est du signe de $-a$.<br>$P(x_1) = P(x_2) = 0$.</td></tr>
</table>

**Exemple :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\dfrac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 3x + 2} \leqslant 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2 + 4x + 5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2 - 3x + 2$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |



d'où $S = ]-\infty ; -1] \cup ]1 ; 2[ \cup [5 ; +\infty[$.

# STATISTIQUE

## VOCABULAIRE STATISTIQUE

**Population :** est l'ensemble de référence.
**Individus :** sont les éléments de la population.
**Caractère** (ou variable) :
*quantitatif :* il est numérique et peut faire l'objet de calculs,
*qualitatif :* dans le cas contraire.

• Si le caractère est quantitatif, il peut être :
*continu*, s'il prend toutes les valeurs d'un intervalle,
*discret*, s'il prend un nombre fini de valeurs.

• *Remarque :* on transforme une variable (ou caractère) continu(e) en variable discrète en partageant l'intervalle où la variable prend ses valeurs en un nombre fini d'intervalles appelés classes.
**Modalités** d'une variable discrète : sont les valeurs prises par cette variable.
**Effectif** d'une modalité : est le nombre d'individus de la population présentant cette modalité.
**Fréquence** d'une modalité : est le rapport entre l'effectif de cette modalité et l'effectif total de la population. C'est un nombre compris entre 0 et 1.
**Effectif cumulé** de la modalité $x_i$, dans le cas d'une variable quantitative : est la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à $x_i$.
**Fréquence cumulée** de la modalité $x_i$, dans le cas d'une variable quantitative : est la somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à $x_i$.
**Série statistique :** soit une population $E$ sur laquelle on étudie un caractère $X$ prenant les valeurs $x_i$ avec un effectif $t_i$; l'ensemble des couples $(x_i, t_i)$ est une *série statistique à une variable*

## REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

### Diagramme en bâtons

Cette représentation est utilisée dans le cas d'une variable discrète (fig. 1).

**Exemple :** notes des élèves à un devoir

| **Notes** | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 | 15 | 16 | 18 | modalités |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nombre d'élèves** | 2 | 2 | 5 | 5 | 3 | 2 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | effectifs |

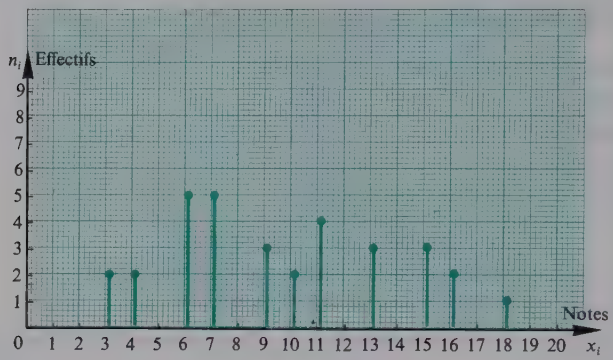



Fig. 1

## Histogramme

Ce diagramme est utilisé après un regroupement des valeurs de la variable en classes (fig. 2).

Ce sont les surfaces des rectangles qui sont proportionnelles aux effectifs de chaque modalité.

**Exemple :** temps passé par des élèves de sixième à apprendre leur leçon d'histoire.

| **Temps** | $0 \leqslant t < 5$ | $5 \leqslant t < 15$ | $15 \leqslant t < 20$ | $20 \leqslant t < 40$ |
|---|---|---|---|---|
| **Nombre d'élèves** | 4 | 6 | 10 | 4 |

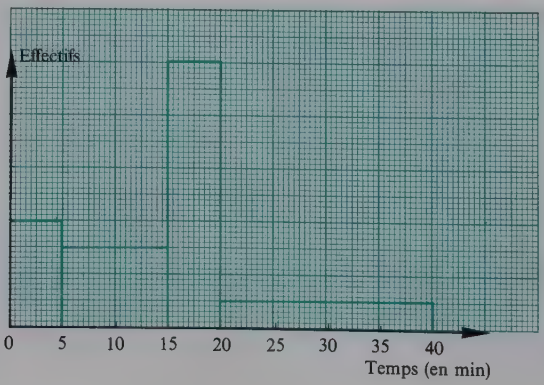



Fig. 2

## Graphique circulaire

Un disque ou un demi-disque est partagé en secteurs angulaires dont les aires sont proportionnelles aux effectifs de chaque modalité (fig. 3).
**Exemple :** élection d'élèves délégués dans une classe.

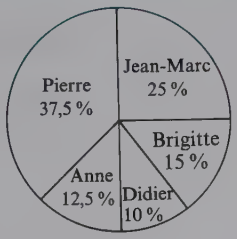



Fig. 3

## Graphique polaire

Diagramme utilisé principalement pour une série statistique échelonnée dans le temps (fig. 4).

**Exemple :** nombre de mariages par mois dans une ville de France.

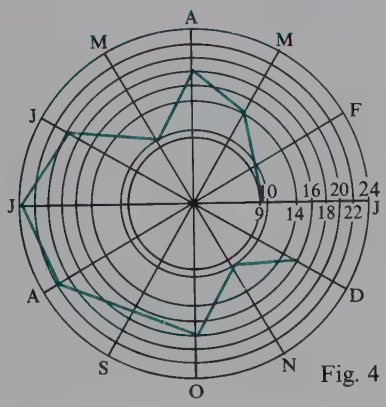



Fig. 4

| Mois | J | F | M | A | M | J | J | A | S | O | N | D |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre de mariages | 9 | 9 | 14 | 18 | 10 | 20 | 24 | 22 | 18 | 18 | 10 | 16 |

# PARAMÈTRES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

**Mode :** est la modalité (ou classe) dont l'effectif est maximum.
**Médiane :** est la valeur $\mu$ vérifiant les deux conditions :

- La moitié au plus de l'effectif total de la série a un caractère de valeur inférieure à $\mu$.

**Série statistique à une variable $X$**

| | Sans le symbole $\Sigma$ | Avec le symbole $\Sigma$ |
|---|---|---|
| **Effectif total** | $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ | $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$ |
| **Moyenne** | $\bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{N}$ | $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{N}$ |
| **Variance** | $V = \frac{n_1 (x_1 - \bar{x})^2 + n_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + n_k (x_k - \bar{x})^2}{N}$ ou $V = \frac{n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + \ldots + n_k x_k^2}{N} - \bar{x}^2$ | $V = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$ ou $V = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ |
| **Écart type** | $\sigma_x = \sqrt{V}$ | |

**Exemple**

| $X$ | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| eff. | 3 | 2 | 5 | 2 | 3 | 6 | 1 | 1 |

$N = 23 \quad \bar{x} \approx 9{,}17 \quad V \approx 6{,}32 \quad \sigma_x \approx 2{,}51.$

## ÉTUDE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE À DEUX VARIABLES (à deux caractères)

On considère une population de $N$ individus et un couple de caractères $X$ et $Y$ prenant les modalités respectives $x_1, x_2 \ldots x_n$ et $y_1, y_2 \ldots y_p$.

| $X$ \ $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | ..... | $y_j$ | ..... | $y_p$ | Totaux horizontaux |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $t_{11}$ | $t_{12}$ | ..... | $t_{1j}$ | ..... | $t_{1p}$ | $a_1$ |
| $x_2$ | $t_{21}$ | $t_{22}$ | ..... | $t_{2j}$ | ..... | $t_{2p}$ | $a_2$ |
| ..... | .... | .... | ..... | .... | ..... | .... | ..... |
| $x_i$ | $t_{i1}$ | $t_{i2}$ | ..... | $t_{ij}$ | ..... | $t_{ip}$ | $a_i$ |
| ..... | .... | .... | ..... | .... | ..... | .... | ..... |
| $x_n$ | $t_{n1}$ | $t_{n2}$ | ..... | $t_{nj}$ | ..... | $t_{np}$ | $a_n$ |
| Totaux verticaux | $b_1$ | $b_2$ | ..... | $b_j$ | ..... | $b_p$ | $N$ |

$t_{ij}$ est l'effectif des individus prenant la modalité $x_i$ de $X$ et la modalité $y_j$ de $Y$.

**Distribution marginale de $X$ :** colonne à la droite du tableau.

**Distribution marginale de $Y$ :** ligne du bas du tableau.

**Distribution conditionnelle :**

- de la variable $X$ liée par la modalité $y_j$ de $Y$ est la colonne $y_j$.
- de la variable $Y$ liée par la modalité $x_i$ de $X$ est la ligne $x_i$.

**Fréquence du couple** $(x_i, y_j)$ : $f_{ij} = \dfrac{t_{ij}}{N}$.

**Fréquence marginale**

- de $x_i$ : $f_{x_i} = \dfrac{a_i}{N}$
- de $y_j$ : $f_{y_j} = \dfrac{b_j}{N}$.

**Fréquence conditionnelle**

- de la modalité $x_i$ liée par la modalité $y_j$ : $f_{x_i/y_j} = \dfrac{t_{ij}}{b_j}$
- de la modalité $y_j$ liée par la modalité $x_i$ : $f_{y_j/x_i} = \dfrac{t_{ij}}{a_i}$.

**L'ensemble de régression de $Y$ en $x$** est l'ensemble des couples $(x_i, m_{Y/X=x_i})$.

$m_{Y/X=x_i}$ est la moyenne conditionnelle de la variable $Y$ liée par la modalité $x_i$ de la variable $X$.

**L'ensemble de régression de $X$ en $y$** est l'ensemble des couples $(y_j, m_{X/Y=y_j})$.
$m_{X/Y=y_j}$ est la moyenne conditionnelle de la variable $X$ liée par la modalité $y_j$ de la variable $Y$.

**Courbe de régression de $Y$ en $x$ :** c'est la courbe obtenue en joignant les points de coordonnées $(x_i, m_Y/X = x_i)$.

**Courbe de régression de $X$ en $y$ :** c'est la courbe obtenue en joignant les points de coordonnées $(y_j, m_X/Y = y_j)$.

## AJUSTEMENT LINÉAIRE PAR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

**Nuage statistique :** est la représentation graphique obtenue en plaçant dans un repère les points de coordonnées $(x_i, y_i)$ (série individuelle).

**Série statistique à deux variables quantitatives $X$ et $Y$.**

Présentation

| $X = x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_N$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y = y_i$ | $y_1$ | $y_2$ | ... | $y_N$ |

| | sans le symbole $\Sigma$ | avec le symbole $\Sigma$ |
|---|---|---|
| **Point moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$** | $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$ $\bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N}$ | $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ $\bar{y} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ |
| **Variance de $X$ (Variances de $Y$ : changer les $x$ en $y$)** | $V(X) = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$ ou $V(X) = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}{N} - \bar{x}^2$ | $V(X) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$ ou $V(X) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2$ |
| **Écart type $\sigma$** | $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ | $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$ |

| | sans le symbole $\Sigma$ | avec le symbole $\Sigma$ |
|---|---|---|
| **Covariance** | $\operatorname{cov}(X, Y) = \dfrac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}) + \ldots + (x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})}{N}$ | $\operatorname{cov}(X, Y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$ |
| | ou | ou |
| | $\operatorname{cov}(X, Y) = \dfrac{x_1y_1 + \ldots + x_Ny_N}{N} - \bar{x}\bar{y}$ | $\operatorname{cov}(X, Y) = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_iy_i = \bar{x}\bar{y}$ |
| **Droite de régression de $y$ en $x$ : $(\Delta)$** | $y = ax + b$ | |
| **Coefficient directeur $a$** $a = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)}$ | $a = \dfrac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}) + \ldots + (x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})}{(x_1-\bar{x})^2 + \ldots + (x_N-\bar{x})^2}$ | $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$ |
| | ou | ou |
| | $a = \dfrac{x_1y_1 + \ldots + x_Ny_N - N\bar{x}\bar{y}}{x_1^2 + \ldots + x_N^2 - N\bar{x}^2}$ | $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_iy_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2}$ |
| **Ordonnée à l'origine : $b$** | $b = \bar{y} - a\bar{x}$, $G$ appartient à $(\Delta)$ | |
| **Droite de régression de $x$ en $y$ : $(\Delta')$** | Mêmes formules en changeant $x$ en $y$ et $y$ en $x$; ex. : $(\Delta') : x = a'y + b'$... | |
| **Coefficient de corrélation linéaire** | $r = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ $\quad r^2 = aa'$ | |
| $-1 \leqslant r \leqslant 1$ | $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}}$ | |
| | ou | |
| | $r = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_iy_i - N\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - N\bar{y}^2}}$ | |

Un coefficient de corrélation linéaire proche de 1 ou de $-1$ traduit une *forte corrélation linéaire entre* $X$ et $Y$.

On remarque que $r = \dfrac{\text{cov}\,(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

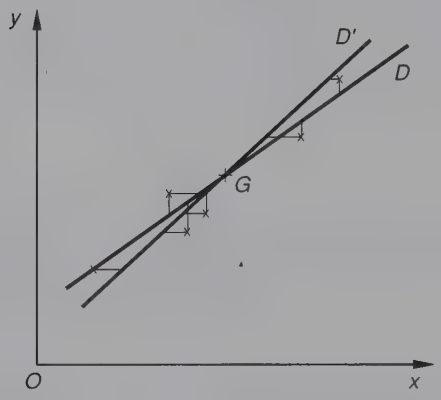



Fig. 5

$D$ : droite d'ajustement de $Y$ en $x$
$D'$ : droite d'ajustement de $X$ en $y$
$G$ : point moyen $(\bar{x}, \bar{y})$

**Exemple**

| $X = x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y = y_i$ | 1,4 | 1,9 | 2,6 | 3,4 | 4,4 | 5,4 | 6,5 | 7,4 | 8,3 | 9,3 |

$\bar{x} = 5{,}5$ $\quad \bar{y} = 5{,}06$ $\quad a = 0{,}910\,3$

$V(X) = 8{,}25$ $\quad V(Y) = 6{,}876\,4$ $\quad b = 0{,}053\,3$

$\sigma_X = 2{,}872\,3$ $\quad \sigma_Y = 2{,}622\,3$ $\quad r = 0{,}997\,1$

$\text{Cov}\,(X, Y) = 7{,}51$ $\quad y = 0{,}910\,3x + 0{,}053\,3$

# FONCTIONS NUMÉRIQUES: GÉNÉRALITÉS

## DÉFINITIONS

### Fonction numérique

Soit $A$, une partie non vide de $\mathbb{R}$.

On appelle fonction numérique de la variable réelle $x$ toute fonction de $A$ vers $\mathbb{R}$.

On note : $f : A \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$.

### Ensemble de définition

On appelle ensemble de définition d'une fonction $f$ de $A$ vers $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels admettant une image par $f$.

On le note $D_f$.

**Exemple :** $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$

L'ensemble de définition de $f$ est $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ car $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \geqslant 0$.

### Restriction d'une fonction

Soit $f$ une fonction définie sur $D_f$. On dit que $g$ est la restriction de $f$ à $I$ si $I \subset D_f$ et quel que soit $x \in I$, $f(x) = g(x)$.

**Exemple :** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{2x - 1}{3} \qquad n \mapsto \frac{2n - 1}{3}$$

### Représentation graphique d'une fonction

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

L'ensemble des couples $(x, f(x))$ est appelé graphe de la fonction $f$.

L'ensemble des points $M(x, f(x))$ où $x$ est élément de $D_f$, est appelé représentation graphique de la fonction $f$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

# SENS DE VARIATION

## Fonction croissante

$f$ est croissante sur l'intervalle $I$ signifie que :
pour tout $(x_1, x_2)$ dans $I^2$, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
$f$ est strictement croissante sur $I$ signifie que : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

## Fonction décroissante

$f$ est décroissante sur l'intervalle $I$ signifie que :
pour tout $(x_1, x_2)$ dans $I^2$, si $x_1 < x_2$, alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$;
$f$ est strictement décroissante sur $I$ signifie que : si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

## Fonction constante

$f$ est constante sur l'intervalle $I$ signifie que pour tout $(x_1, x_2)$ dans $I^2$, $f(x_1) = f(x_2)$.

## Fonction monotone

$f$ est monotone sur l'intervalle $I$ si $f$ est soit croissante sur $I$, soit décroissante sur $I$.
$f$ est strictement monotone sur $I$ si $f$ est soit strictement croissante sur $I$, soit strictement décroissante sur $I$.
**Taux d'accroissement ou taux de variation.**
Le taux d'accroissement d'une fonction numérique $f$ entre $x_1$ et $x_2$ est le réel $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ $\quad x_2 \neq x_1 \quad$ et $\quad x_2 \in I, \quad x_1 \in I.$

# PARITÉ D'UNE FONCTION

Soit $D_f$ l'ensemble de définition d'une fonction numérique $f$.

$f$ est *paire* signifie que :
- pour tout $x$ dans $D_f$, $-x$ est dans $D_f$
- pour tout $x$ de $D_f$, $f(-x) = f(x)$

$f$ est *impaire* signifie que :
- pour tout $x$ dans $D_f$, $-x$ est dans $D_f$
- pour tout $x$ dans $D_f$, $f(-x) = -f(x)$

**Conséquence graphique**

| Fonction paire : | Fonction impaire : |
|---|---|
| Soit $C$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. L'axe des ordonnées est alors axe de symétrie de la courbe $C$. | Soit $C$ la courbe représentative de $f$ dans un repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$. L'origine $\Omega$ du repère est centre de symétrie de la courbe $C$. |

L'existence d'éléments de symétrie permet de réduire l'ensemble d'étude de la fonction :

**Exemple :**

$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$D_f = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

La parité de cette fonction permet de l'étudier sur $[2, +\infty[$.

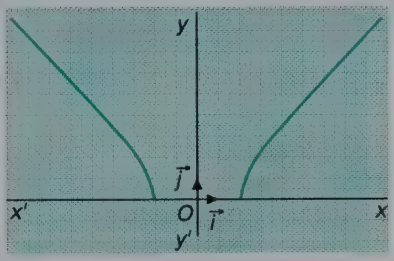



Fig. 1

# EXTREMUM D'UNE FONCTION

## Maximum

Le réel $f(x_0)$ est un maximum de la fonction $f$ sur un intervalle $I$ si pour tout $x$ de $I$ on a $f(x) \leqslant f(x_0)$.

## Minimum

Le réel $f(x_0)$ est un minimum de la fonction $f$ sur un intervalle $I$ si pour tout $x$ de $I$ on a $f(x) \geqslant f(x_0)$.

# FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction numérique $f$ définie sur $D_f$ est périodique s'il existe un réel $T$ tel que pour tout $x$ de $D_f$,

$$\begin{cases} x + T & \text{est dans } D_f \\ x - T & \text{est dans } D_f \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x) = f(x - T)$$

La plus petite valeur $T$ strictement positive est, si elle existe, appelée la période de $f$.

**Exemple** $f(x) = \cos 2x$, $f$ est périodique de période $\pi$.

# FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

• Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal.

## FONCTIONS CARRÉES

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto x^2$.

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $-x$ est dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc $f$ est paire.
Le domaine d'étude est $[0, +\infty[$.

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

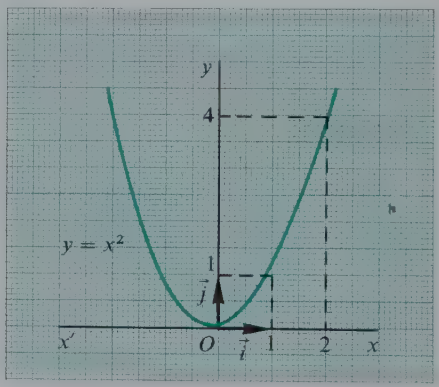



Fig. 1

• $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto ax^2 \quad a \in \mathbb{R}^*$.

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $-x$ est dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, donc $f$ est paire.
Le domaine d'étude est $[0, +\infty[$.

$a > 0$

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

$a < 0$

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | ↘ | $-\infty$ |

axe de symétrie $(y'y)$

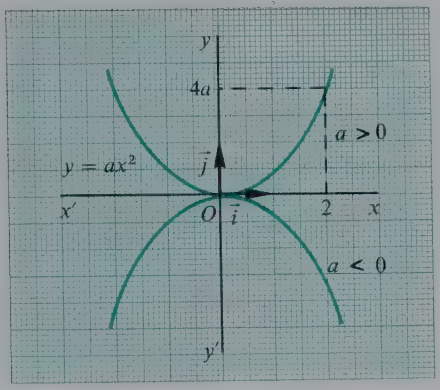



Fig. 2

## FONCTIONS INVERSES

• $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $-x$ est dans $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = -f(x)$ donc $f$ est impaire.
Le domaine d'étude est $]0, +\infty[$.

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | ↘ | 0 |

Les deux axes du repère sont *asymptotes* à la courbe.

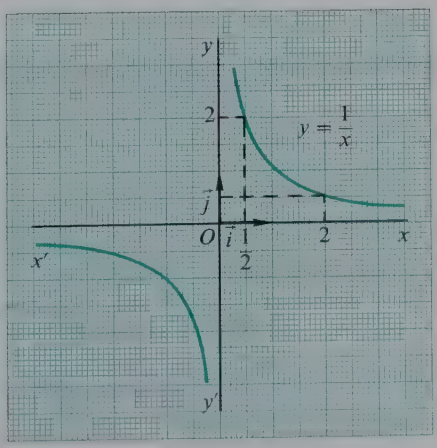



Fig. 3

• $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{a}{x}.$$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $-x$ est dans $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = -f(x)$ donc $f$ est impaire.
Le domaine d'étude est $]0, +\infty[$.

$a > 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

$a < 0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

Centre de symétrie : $O$

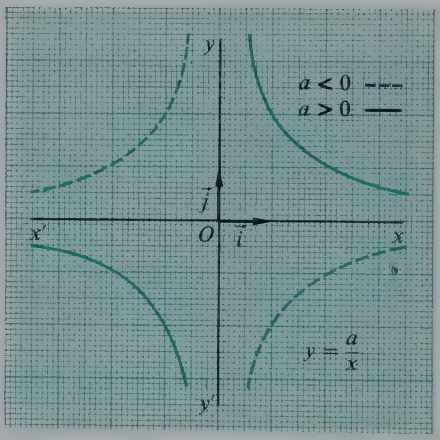



Fig. 4

## FONCTION RACINE CARRÉE

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \sqrt{x}.$$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
$f$ n'est donc ni paire ni impaire.

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



Voir fig. 5 p. 27

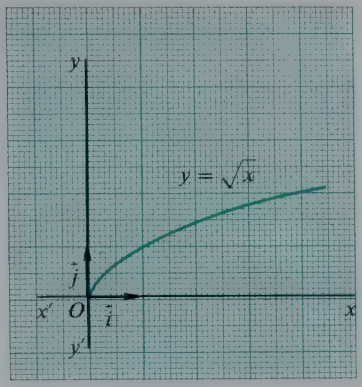


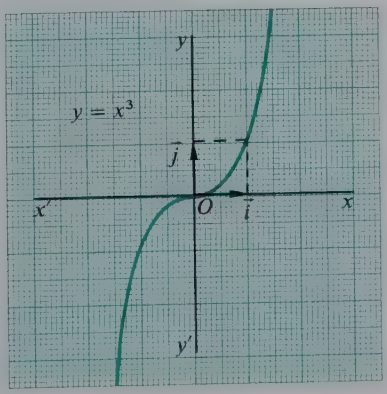

Fig. 5

## FONCTION CUBE

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto x^3$

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $-x$ est dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. $f$ est impaire.
Le domaine d'étude est $[0, +\infty[$.

| $x$ | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | 0 | ↗ | $+\infty$ |




$O$ est centre de symétrie

Fig. 6

# FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

• $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.
$x \mapsto \sin x$.

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $-x$ est dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ donc $f$ impaire.
De plus $f$ a pour période $2\pi$.
Il suffit d'étudier $f$ sur $[0, \pi]$.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ ↗ | $\frac{1}{2}$ ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ↗ | $1$ ↘ | $0$ |

La courbe admet $O$ pour centre de symétrie et la droite d'équation $x = \pi/2$ comme axe de symétrie.
De plus elle est invariante par translation de vecteur $k2\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

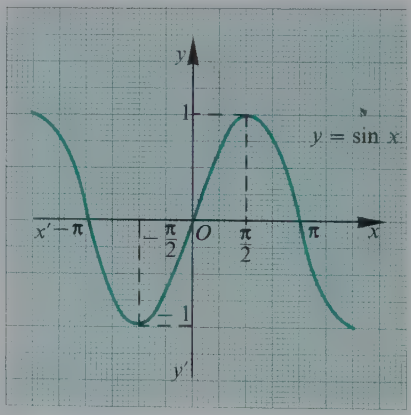



Fig. 7

• $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.
$x \mapsto \cos x$.

$f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $-x$ est dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc $f$ est paire.
De plus $f$ a pour période $2\pi$.
Il suffit d'étudier $f$ sur $[O, \pi]$.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $1 \searrow$ | $\frac{\sqrt{3}}{2} \searrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2} \searrow$ | $\frac{1}{2} \searrow$ | $0 \searrow$ | $-1$ |

La courbe admet la droite d'équation $x = 0$ pour axe de symétrie et le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ comme centre de symétrie. De plus, elle est invariante par translation de vecteur $k2\pi\vec{i}\,(k \in \mathbb{Z})$.

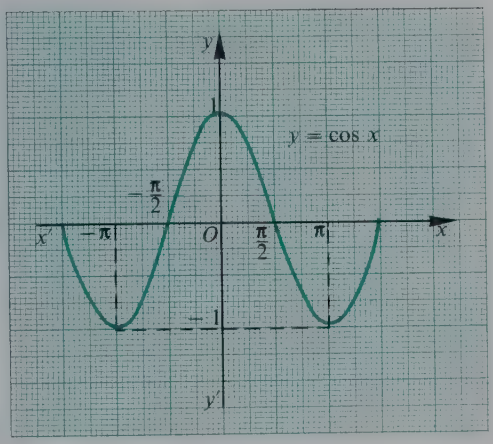



Fig. 8

- $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$. $\quad (k \in \mathbb{Z})$

$$x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pour tout $x$ de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $-x$ est dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ et $f(-x) = -f(x)$ donc $f$ est impaire.

De plus $f$ a pour période $\pi$.

Il suffit d'étudier $f$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{4}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Le point $O$ est centre de symétrie de la courbe.
Les droites d'équation

$$x = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

sont asymptotes.
La courbe est invariante par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$.

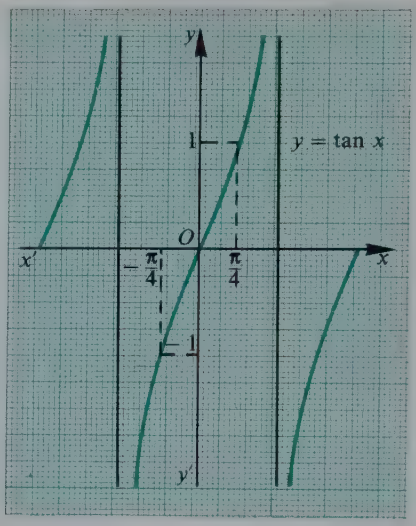



Fig. 9

# OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES

## ÉGALITÉ

Deux fonctions $f$ et $g$ d'ensemble de définition $D_f$ et $D_g$ sont dites égales si : $D_f = D_g$ et $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D_f$ (ou $D_g$).

On note $f = g$.

## SOMME, DIFFÉRENCE, PRODUIT ET QUOTIENT DE FONCTIONS

On définit la somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions numériques $f$ et $g$ d'ensembles de définition $D_f$ et $D_g$ par

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{ll} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) = f(x) - g(x) \\ (fg)(x) \quad = f(x) \times g(x) \end{array}\right\} & \text{pour } x \in D_f \cap D_g \\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) \quad = \dfrac{f(x)}{g(x)} & \text{pour } x \in D_f \cap D_g \text{ tel que } g(x) \neq 0 \end{array}}$$

## PUISSANCE D'UNE FONCTION

On définit la *puissance $n^{\text{ième}}$ d'une fonction* numérique d'ensemble de définition $D_f$ par : $f^n(x) = [f(x)]^n \quad n \in \mathbb{N}$, pour $x \in D_f$.

## FONCTION COMPOSÉE

Soit $f$ et $g$ deux fonctions numériques d'ensembles de définition $D_f$ et $D_g$. Si, pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$ on définit $g \circ f$ pour $x \in D_f$ par :

$$g \circ f(x) = g[f(x)] \qquad \begin{tikzcd} D_f \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & D_g \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}. \end{tikzcd}$$

On lit : $g$ rond $f$ de $x$.

*Remarque :* en général $f \circ g \neq g \circ f$ (l'opération composition n'est pas commutative).

### Théorèmes

La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.
La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

## FONCTIONS ASSOCIÉES

| **$f$ fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthogonal)** | |
|---|---|
| **$g$ définie par** | **on obtient la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de $g$ en transformant $\mathcal{C}_f$ par** |
| $g(x) = f(x - a)$ | la translation de vecteur $a\vec{i}$ (fig. 1) |
| $g(x) = f(x) + b$ | la translation de vecteur $b\vec{j}$ (fig. 2) |
| $g(x) = f(x - a) + b$ | la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$ |
| $g(x) = -f(x)$ | la symétrie orthogonale d'axe $(Ox)$ (fig. 3) |
| $g(x) = f(-x)$ | la symétrie orthogonale d'axe $(Oy)$ |
| $g(x) = -f(-x)$ | la symétrie centrale de centre $O$ (fig. 4) |
| $g(x) = f(\lambda x)\ (\lambda \in \mathbb{R}^*)$ | l'affinité d'axe $(Oy)$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$ |
| $g(x) = \lambda f(x)\ \lambda \in \mathbb{R}^*$ | l'affinité d'axe $(Ox)$ et de rapport $\lambda$ |
| $g(x) = \lvert f(x) \rvert$ | soit $P = \{x \in D_f / f(x) \geqslant 0\}$<br>soit $N = \{x \in D_f / f(x) \leqslant 0\}$ ;<br>sur $P$, $C_f$ et $C_g$ sont confondues ; sur $N$, $C_g$ se déduit de $C_f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(Ox)$ (fig. 5) |
| $g(x) = f(\lvert x \rvert)$ | sur $\mathbb{R}^+$ $g(x) = f(x)$, $C_g$ et $C_f$ sont confondues<br>sur $\mathbb{R}^-$ $g(x) = f(-x)$ et $C_g$ se déduit de $C_f$ par la symétrie orthogonale d'axe $(Oy)$ (fig. 6). |

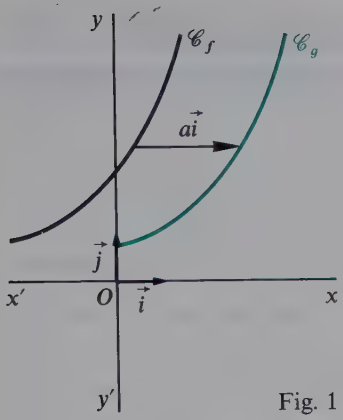



Fig. 1

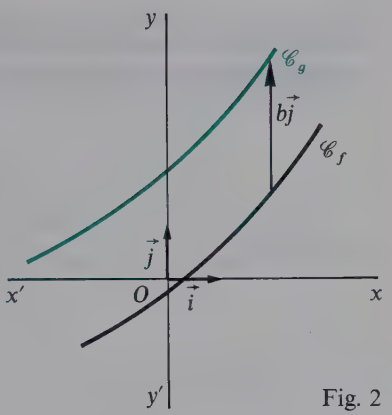



Fig. 2

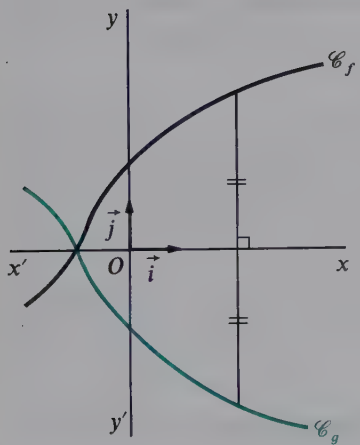



Fig. 3

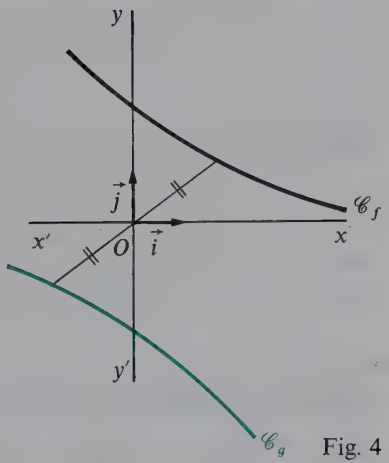



Fig. 4

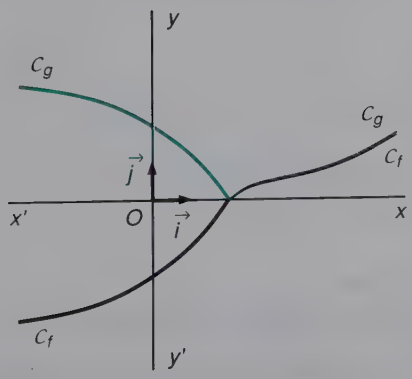



Fig. 5

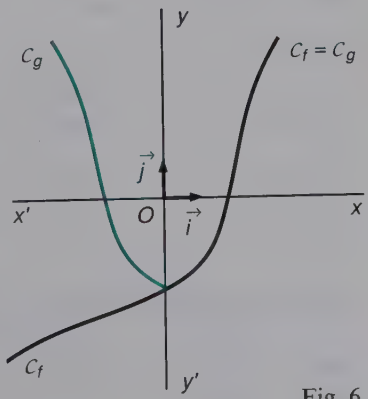



Fig. 6

# FONCTIONS POLYNÔMES

## Définitions

On appelle *fonction polynôme* une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont des réels et $n$ un entier naturel.
$a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ sont les coefficients du polynôme.

On appelle monôme une fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^n$ où $a \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$. $n$ est *exposant* du monôme.
Un polynôme est une somme de monômes.

## Polynôme nul

$f$ est la *fonction polynôme nulle* si quel que soit $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = 0$, alors tous les coefficients de $f$ sont nuls.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ équivaut à $a_n = 0$, $a_{n-1} = 0$ ... $a_1 = 0$ et $a_0 = 0$.

## Degré d'un polynôme non nul

Soit $f$ un polynôme non nul : on appelle *degré de* $f$ le plus grand exposant des monômes qui constituent $f$. On note deg $(f)$.

**Exemple :**

$f(x) = x + 2x^3 - x^2$ deg $(f) = 3$,
$f(x) = 2$ deg $(f) = 0$.

Une fonction affine sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 1.
On ne définit pas le degré d'un polynôme nul.

## Égalité de deux polynômes

Deux *polynômes sont égaux* lorsqu'ils ont même degré et lorsque leurs coefficients sont égaux.

## Théorèmes

La somme, la différence et le produit de polynômes sont des polynômes et on a :

$$\deg (P + Q) \leqslant \sup (\deg P, \deg Q)$$
$$\deg (P - Q) \leqslant \sup (\deg P, \deg Q)$$
$$\deg (P \,.\, Q) = \deg (P) + \deg (Q)$$

## Factorisation-division

On dit que $P(x)$ est *divisible* par $Q(x)$ ou que $P(x)$ est factorisable par $Q(x)$ s'il existe un polynôme $R(x)$ tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$ où $R(x)$ est unique.

## Racine (ou zéro) d'un polynôme

On dit que le réel $a$ est *racine (ou zéro)* du polynôme $P$ si $P(a) = 0$.

**Théorèmes**

- $P(a) = 0$ équivaut à $P(x) = (x - a)Q(x)$ où $Q$ est un polynôme tel que $\deg (Q) = \deg (P) - 1$.

- Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines.
- Si un polynôme de degré $n$ admet plus de $n + 1$ racines alors ce polynôme est le polynôme nul.

**Exemple**

$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x - 18$
$P(2) = 0$ d'où $P(x) = (x - 2)(2x^2 + 2x + 9)$.

# SUITES NUMÉRIQUES

Les définitions et les propriétés de ce chapitre concernent des suites définies sur $\mathbb{N}$; elles restent valables avec des suites définies à partir d'un certain rang.

## DÉFINITION

*Une suite numérique réelle*, définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
L'image de $n$ par l'application $u$ est notée $u_n$.
La suite ainsi définie est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
$u_n$ est dit *terme général* de la suite (ou terme de rang $n$). Il faut faire une distinction entre $u_n$ qui est un réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est une application.

*Remarque :* dans la suite du chapitre on notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $(u_n)$ pour alléger les notations.

- On déterminera le nombre de termes d'une suite $(u_n)$ en calculant la différence entre l'indice du dernier terme et l'indice du premier terme et en ajoutant 1.

**Exemple :** soit la suite $u_2, u_3, \ldots u_{n-4}, u_{n-3}$, alors le nombre de termes est $(n-3)-(2)+1 = n-4$.

- Exemple de suite définie par une relation de récurrence :

Soit une suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = au_n + b. \end{cases}$

Chaque terme de la suite s'obtient en multipliant le précédent par $a$ et en lui ajoutant $b$.

## PROPRIÉTÉS

### Suite stationnaire (constante)

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *stationnaire* si pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_0 = u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u_{n+1} = \ldots$

## Suite croissante

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *croissante* si :
pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Elle est dite *strictement croissante si :*
pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n > 0$.
Lorsque la suite $(u_n)$ est définie explicitement par $u_n = f(n)$, il suffit que la fonction numérique $f$ à variable réelle soit croissante sur $\mathbb{N}$ pour que $(u_n)$ soit croissante.
Dans le cas d'une suite à termes positifs non nuls, on peut étudier le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $\quad u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante.

## Suite décroissante

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *décroissante* si pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
Elle est dite *strictement décroissante* si pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
Si $u_n = f(n)$, alors il suffit que $f$ soit décroissante sur $\mathbb{N}$.
Dans le cas d'une suite à termes positifs non nuls, on peut étudier le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors $\quad u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante.

## Suite monotone

Une suite réelle est dite *monotone* si elle est soit stationnaire, soit croissante, soit décroissante.

## Suite périodique

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *périodique* s'il existe un entier positif non nul $T$ tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$. Le plus petit entier $T$ vérifiant cette relation est appelé période.

### Suite majorée

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *majorée* s'il existe un réel $M$ tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $u_n \leqslant M$.
$M$ est un majorant de la suite.

### Suite minorée

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *minorée* s'il existe un réel $P$ tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $u_n \geqslant P$.
$P$ est un minorant de la suite.

### Suite bornée

Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.
Une suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ est *bornée* si et seulement s'il existe un réel $A$ tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $|u_n| \leqslant A$.

## CONVERGENCE

### Suites de référence divergentes

Les suites $(\sqrt{n})$, $(n)$, $(n^2)$, $(n^3)$, $(b^n)$ avec $b > 1$ définies pour tout $n$ sont des suites de référence divergentes. Ces suites tendent vers $+\infty$ si $n$ tend vers $+\infty$.

### Suites de référence convergentes

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ et $\left(\frac{1}{b^n}\right)$ avec $b > 1$ définies sur $\mathbb{N}$ sont des suites de référence convergentes vers 0. Ces suites tendent vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

### Théorèmes de comparaison

• Soit une suite $(u_n)$ telle qu'il existe une suite $(v_n)$ de référence divergente avec, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant \lambda v_n$ où $\lambda$ est un réel strictement positif, alors $(u_n)$ est divergente.

• Soit une suite $(u_n)$ telle qu'il existe une suite $(v_n)$ de référence convergente vers 0 avec, à partir d'un certain rang, $|u_n| \leqslant \lambda v_n$ où $\lambda$ est un réel positif, alors $(u_n)$ est convergente de limite zéro.

• Soit une suite $(u_n)$ telle qu'il existe une suite $(v_n)$ de référence convergente vers 0 avec, à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leqslant \lambda v_n$ où $\lambda$ est un réel positif, alors $(u_n - l)$ converge vers 0. On dit que $(u_n)$ converge vers le réel $l$.

• Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l'$, alors $l \leqslant l'$.

• Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

• **Autres théorèmes**

Toute suite croissante et majorée $(u_n)$ (ou décroissante et minorée) de nombres réels est convergente.

**Exemple**

Étudions la convergence de $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2}{n^3+1}$.

$n^3 + 1 > n^3$ d'où $\dfrac{2n^2}{n^3+1} < \dfrac{2n^2}{n^3}$ pour $n > 0$. De plus, $u_n \geqslant 0$.

Donc $0 \leqslant u_n < \dfrac{2}{n}$ pour $n > 0$. On a $|u_n| < 2v_n$ avec $v_n = \dfrac{1}{n}$ et $\lambda = 2$. Or $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de référence convergente vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

## Opérations sur les limites

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = l'$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n v_n) = ll' \qquad \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = l + l'$$

si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang : $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{l}{l'}$ $l' \neq 0$

## Autres suites de référence

$(\ln n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$, $(n^\alpha)$ ($\alpha$ réel strictement positif) sont des suites de référence divergentes.

$(n^\alpha)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ avec $\alpha$ réel négatif est une suite de référence convergente vers 0.

# SUITES ARITHMÉTIQUES

## Définition

On dit qu'une suite $(u_n)$ est *arithmétique*, s'il existe un réel $r$ tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
On appelle $r$ la *raison* de cette suite.
Toute suite arithmétique est définie par sa raison et l'un de ses termes.

## Propriétés

*a)* $u_n = u_0 + nr$ ($u_0$ : 1er terme de la suite).
*b)* $u_n = u_p + (n - p)r$.
*c)* Si $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1} + u_n$, alors :

$$S_n = (n+1)\frac{[u_0 + u_n]}{2}$$

($u_0$ : 1er terme de la somme ; $u_n$ : dernier terme de la somme ; $n+1$ : nombre de termes de la somme)

ou $$S_n = (n+1)\frac{[u_0 + u_0 + nr]}{2} = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2}.$$

**Exemple :** $S_n = u_4 + u_5 + \ldots + u_{n-2}$, $S_n = (n-5)\dfrac{(u_4 + u_{n-2})}{2}$

**Application :** $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il s'agit de la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 1.

## Relation caractéristique entre trois termes consécutifs

Soit $a$, $b$, $c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique,

$$2b = a + c$$

## Convergence

Toute suite arithmétique de raison non nulle est divergente.

# SUITE GÉOMÉTRIQUES

## Définition

On dit qu'une suite $(u_n)$ est *géométrique*, s'il existe un réel $q$ non nul tel que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.
On appelle $q$ la *raison* de cette suite.
Toute suite géométrique est définie par sa raison et l'un de ses termes.

## Propriétés

*a*) $u_n = u_0 \times q^n$ ($u_0$ 1er terme de la suite).
*b*) $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
*c*) Si $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{n-1} + u_n$ et $q \neq 1$ alors :

$$S_n = u_0 \frac{(1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

($n + 1$ nombre de termes de la somme)
($q$ raison de la suite)
($u_0$ 1er terme de la somme).

### Application

Pour tout $x \neq 1$ : $1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de permier terme 1 et de raison $x$.

*Conséquence :* $x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + ... + 1)$ pour tout $x$, $x \in \mathbb{R}$.

## Relation caractéristique entre trois termes consécutifs

Soit $a$, $b$, $c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique,

$$b^2 = ac$$

## Convergence

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$,

si $|q| < 1$ : $(u_n)$ converge vers zéro.
si $|q| > 1$ : $(u_n)$ diverge.
si $q = 1$ : $(u_n)$ est stationnaire de terme général le 1er terme.
si $q = -1$ et si $u_0 \neq 0$. } $(u_n)$ est alternée $(u_0, -u_0, u_0, -u_0, ...)$ de période 2

# SUITES RÉCURRENTES

## Définition

*Une suite récurrente* est une suite définie par $u_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

## Théorème

Si $(u_n)$ converge vers $l$ et $f$ continue en $l$, alors $f(l) = l$, ce qui permet dans certains cas de calculer la limite $l$.

### Exemple

On place un capital $C_0$ égal à 100 000 F à un taux d'intérêts annuel de 10 %.
Le dépôt est effectué le 1er janvier 1990.
Soit $C_n$ le capital obtenu le 1er janvier $(1990 + n)$.
Déterminer une relation entre $C_{n+1}$ et $C_n$; exprimer $C_n$ en fonction de $n$.

$$C_{n+1} = C_n + \frac{10}{100} C_n = 1{,}1\ C_n.$$

On obtient une suite géométrique de premier terme $C_0$ et de raison 1,1.
D'où $C_n = 1{,}1^n C_0$, c'est-à-dire $C_n = 1{,}1^n \times 10^5$ F.

# LIMITES

## LIMITES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

| | | |
|---|---|---|
| $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ | $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ | $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$ |
| $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$ | $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$ | $\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ | | $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ |
| $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ | $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ |
| $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ | | |

## LIMITES DE FONCTIONS

Soit $f$ une fonction numérique définie sur $D$. Soit $g$ une fonction numérique et $\lambda$ un réel strictement positif.

| Si | | | Alors |
|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ | et $\lvert f(x)\rvert \leqslant \lambda g(x)$ | pour $x$ proche de 0 et dans $D$ | $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ |
| $\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$ | et $\lvert f(x)\rvert \leqslant \lambda g(x)$ | pour $x$ assez grand et dans $D$ | $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ |
| $\lim_{x\to -\infty} g(x) = 0$ | et $\lvert f(x)\rvert \leqslant \lambda g(x)$ | pour $-x$ assez grand et $x$ dans $D$ | $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ |
| $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ | et $\lambda g(x) \leqslant f(x)$ | pour $x$ proche de 0 et dans $D$ | $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ |
| $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ | et $\lambda g(x) \leqslant f(x)$ | pour $x$ assez grand et dans $D$ | $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ |
| $\lim_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$ | et $\lambda g(x) \leqslant f(x)$ | pour $-x$ assez grand et $x$ dans $D$ | $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ |
| $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ | et $f(x) \leqslant \lambda g(x)$ | pour $x$ proche de 0 et dans $D$ | $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ |
| $\lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$ | et $f(x) \leqslant \lambda g(x)$ | pour $x$ assez grand et dans $D$ | $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ |
| $\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$ | et $f(x) \leqslant \lambda g(x)$ | pour $-x$ assez grand et $x$ dans $D$ | $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ |

# LIMITES EN UN POINT $a$ LIMITE ÉGALE À UN RÉEL $l$

## Définitions

• Soit $f$ une fonction numérique; la limite de $f$ en $a$ est la limite en 0 de la fonction $g$ définie par $g(h) = f(a + h)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$$

• Soit $f$ une fonction numérique définie au voisinage de 0 (respectivement de $a$, de $-\infty$, de $+\infty$), soit $\lambda$ un réel strictement positif et $h$ une fonction numérique définie au voisinage de 0 (resp. de $a$, de $-\infty$, de $+\infty$) tels que :

$$|f(x) - l| \leqslant \lambda h(x).$$

Si $h(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0 (resp. $a$, $-\infty$, $+\infty$) alors $f(x)$ tend vers $l$ quand $x$ tend vers 0 (resp. $a$, $-\infty$, $+\infty$).

• Si $f$ admet une limite en $a$, alors cette limite est unique.

## Composée

Soit $f$ une fonction qui admet $l$ comme limite en $a$ ($a$ pouvant être $+\infty$ ou $-\infty$).
Soit $g$ une fonction qui admet $L$ comme limite en $l$.
Alors, si $g \circ f$ est définie au voisinage de $a$,

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = L$$

## Somme de deux fonctions

| $\lim f$ | $\lim g$ | $\lim (f + g)$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l + l'$ |
| $l$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $l$ | $-\infty$ | $-\infty$ |

## Produit de deux fonctions

| $\lim f$ | $\lim g$ | $\lim f \times g$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l \times l'$ |
| 0 | $l$ | 0 |
| $+\infty$ | $l > 0$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $l < 0$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $l > 0$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $l < 0$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## Quotient de deux fonctions

| $\lim f$ | $\lim g$ | $\lim \frac{f}{g}$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l' \neq 0$ | $\frac{l}{l'}$ |
| $l \geqslant 0$ | $+\infty$ | $0^+$ |
| $l \leqslant 0$ | $+\infty$ | $0^-$ |
| $l \geqslant 0$ | $-\infty$ | $0^-$ |
| $l \leqslant 0$ | $-\infty$ | $0^+$ |
| $+\infty$ | $l > 0$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $l < 0$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $l > 0$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $l < 0$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $0^+$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $0^-$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $0^+$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $0^-$ | $+\infty$ |

## Formes indéterminées

| lim $f$ | lim $g$ | Formes indéterminées |
|---|---|---|
| $\infty$ | 0 | $fg$ |
| 0 | 0 | $\frac{f}{g}$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $f+g$ |
| $\infty$ | $\infty$ | $\frac{f}{g}$ |
| 1 | $\infty$ | $f^g$ |

**Exemples**

- $$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right]}{\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right]}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)} = -\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{x-2} = -1.$$

# ASYMPTOTES

Le plan étant muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $C$ une courbe d'équation $y = f(x)$ et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.
On dit que $\mathscr{D}$ **est asymptote oblique à** $C$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

(respectivement $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$).

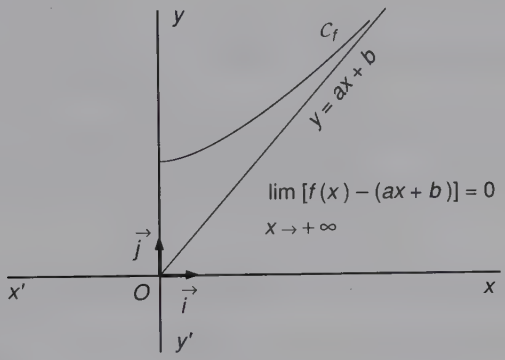



Fig. 1

*Remarques*

- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, alors on obtient une asymptote parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = b$.
- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ alors on obtient une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = x_0$.

**Exemple**

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1} \quad x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

donc la droite d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ en $+\infty$. (De même en $-\infty$).

# CONTINUITÉ

## Fonction continue en un point

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$.
Soit $a$ un élément de $I$.
On dit que $f$ est *continue* en $a$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

## Fonction continue sur un intervalle

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$. On dit que $f$ est *continue sur $I$* si $f$ est continue en tout point de $I$.

## Théorèmes

• Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

• Une fonction continue, strictement croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle $[a, b]$, $a < b$, est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ (respectivement $[f(b), f(a)]$).

## Prolongement par continuité

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $]a, b]$. Si $f$ admet $l$ pour limite en $a$, on peut prolonger $f$ en $a$ en posant $f(a) = l$.

**Exemple**

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{sur} \quad \left]0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, donc on peut poser $f(0) = 1$.

# DÉRIVATION

## Nombre dérivé

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ et soit $a$ un élément de $I$.
On dit que la fonction $f$ admet $A$ pour *nombre dérivé* au point $a$ ou est *dérivable en a* lorsque, pour tout réel $h$ suffisamment proche de 0, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + Ah + h\varphi(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

Il y a unicité du réel $A$.
On note $f'(a) = A$.

## Propriété

$f$ admet $A$ pour nombre dérivé en $a$ équivaut à :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = A.$$

**Exemple**

$f(x) = x^2 + 1 \quad a = 1 \quad f(a) = 2$ :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

$\lim_{h \to 0} (h + 2) = 2$ donc $f$ admet 2 comme nombre dérivé en 1.

## Approximation affine

Si $f$ admet $A$ pour nombre dérivé en $a$, alors $f(a) + Ah$ est la *meilleure approximation affine* de $f$ en $a$ ($A = f'(a)$).

## Tangente

Soit $f$ une fonction dérivable en $a$, de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère $\mathcal{R}$. La droite passant par $I(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la *tangente* à la courbe.
Équation : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

## Fonction dérivée

Soit $f$ une fonction numérique définie sur un intervalle $I$.
Dire que $f$ est dérivable sur $I$ signifie qu'elle est dérivable en tout point de $I$.
On appelle *fonction dérivée* la fonction numérique définie sur $I$ qui à tout $x$ de $I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$, s'il existe.

$$I \xrightarrow{f'} \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

On note $f'$ la fonction dérivée.

## Comportement global d'une fonction

Soit $f$ une fonction numérique dérivable sur un intervalle $I$ de dérivée $f'$ :

| |
|---|
| si $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ est constante sur $I$; |
| si $f'$ est positive sur $I$, alors $f$ est croissante sur $I$; |
| si $f'$ est négative sur $I$, alors $f$ est décroissante sur $I$. |

Si $f$ est dérivable sur $[a, b]$, où $a < b$, et si $f'$ est strictement positive sur $[a, b]$, alors $f$ est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Si $f$ est dérivable sur $[a, b]$, où $a < b$, et si $f'$ est strictement négative sur $[a, b]$, alors $f$ est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

## Extremum

Soit $f$ une fonction numérique dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$.
Si $f'$ s'annule en $x_0$ en changeant de signe alors $f$ admet un *extremum* en $x_0$.

## Dérivées seconde, troisième, etc.

On appelle *dérivée seconde* de $f$ la dérivée de $f'$; on note $f''$.

On appelle *dérivée troisième* de $f$ la dérivée de $f''$; on note $f'''$.

## Inégalité des accroissements finis

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$.

- S'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que pour tout $x$ de $]a, b[$ $m \leqslant f'(x) \leqslant M$, alors :

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

- S'il existe $M$ réel tel que, pour tout $x$ de $]a, b[$ $|f'(x)| \leqslant M$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|.$$

## Règles

Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur $I$ de dérivées $f'$ et $g'$.
$f + g$ est dérivable sur $I$ et $(f + g)' = f' + g'$.
$f - g$ est dérivable sur $I$ et $(f - g)' = f' - g'$.
$\alpha f$ est dérivable sur $I$ et $(\alpha f)' = \alpha f'$ $\alpha \in \mathbb{R}$.
$fg$ est dérivable sur $I$ et $(fg)' = fg' + f'g$.
$\dfrac{1}{f}$ est dérivable sur $I$ si $f(a) \neq 0$ pour tout $a$ de $I$ et $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$.
$\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur $I$ si $g(a) \neq 0$ pour tout $a$ de $I$
et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
$f^n$ est dérivable sur $I$ et $(f^n)' = nf^{n-1}f'$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $J = \{ x / ax + b \in I \}$ $a \neq 0$.
$g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $J$ et : $g'(x) = af'(ax + b)$.

### TABLEAU DE DÉRIVÉES

| Fonctions | Dérivées | sur un intervalle $I$ de : |
|---|---|---|
| $C$ constante | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ |

| Fonctions | Dérivées | sur un intervalle $I$ de : |
|---|---|---|
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ | $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}\quad k\in\mathbb{Z}$ |
| $ax+b$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{ax+b}$ | $-\dfrac{a}{(ax+b)^2}$ | $\{x\in\mathbb{R}/ax+b\neq 0\}$ |
| $\sqrt{ax+b}$ | $\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{\sqrt{ax+b}}$ | $\{x\in\mathbb{R}/ax+b>0\}$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan(ax+b)$ | $a[1+\tan^2(ax+b)]$ $=\dfrac{a}{\cos^2(ax+b)}$ | $\mathbb{R}-\left\{x\in\mathbb{R}/ax+b=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ |
| $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\ln\lvert x\rvert$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $\ln(\alpha x)$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\{x\in\mathbb{R}/\alpha x>0\}$ |
| $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x\ln a}$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^{\alpha x}$ | $\alpha e^{\alpha x}$ | $\mathbb{R}$ |
| $a^x\ (a>0)$ | $a^x\ln a$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | si $\alpha\in\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$<br>si $\alpha\in\mathbb{Q}-\{-1\}$ $\mathbb{R}_+^*$ |
| $f[u(x)]$ | $u'(x)\ .\ f'[u(x)]$ | $I_u\cap I_f$<br>$I_u$ : ensemble des $x$ où $u$ est dérivable<br>$I_f$ : ensemble des $x$ où $f$ est dérivable |
| $\sin[u(x)]$ | $u'(x)\cos[u(x)]$ | *idem* |
| $\cos[u(x)]$ | $-u'(x)\sin[(u(x))]$ | *idem* |
| $\tan[u(x)]$ | $u'(x)[1+\tan^2(u(x))]$ $=\dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$ | *idem* |
| $\ln\lvert u(x)\rvert$ | $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ | *idem* |
| $e^{u(x)}$ | $u'(x)\ e^{u(x)}$ | *idem* |

# INTÉGRATION

## PRIMITIVES

### Définition

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$; on dit qu'une fonction $F$ définie sur $I$ est une primitive de $f$ lorsque

- $F$ est dérivable sur $I$
- $F' = f$ sur $I$.

### Théorèmes

- Toute fonction continue sur $I$ admet au moins une primitive sur $I$.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors toutes les primitives de $f$ sur $I$ sont de la forme $F + k$ où $k$ est une constante.
- Toute fonction continue sur $I$ admet une primitive et une seule prenant une valeur donnée en un point donné de $I$.

## INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

- Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Soient $a$ et $b$ deux réels de $I$.
Alors $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive choisie, le réel $F(b) - F(a)$ est appelé *intégrale de a à b de f*.
On note :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b.$$

$t$ est dite variable muette
$a$ et $b$ sont les bornes de l'intégrale.

- $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

**Interprétation graphique**

Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

• Soit $f$ une fonction continue et positive sur $[a, b]$ $(a < b)$.

$\int_a^b f(t)\,dt$ est *l'aire* de la partie du plan définie par $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ (fig. 1).

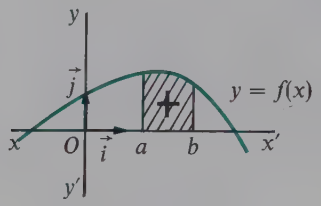



Fig. 1

• Soit $f$ une fonction continue et négative sur $[a, b]$ $(a < b)$.

$\int_a^b f(t)\,dt$ est *l'aire* de la partie du plan définie par $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$, affectée du signe $-$.

L'aire de la partie du plan définie par $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant 0$ est donc $-\int_a^b f(t)\,dt$ (fig. 2).

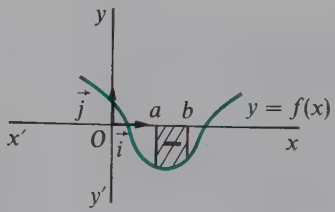



Fig. 2

• Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ $(a < b)$ telles que $f \leqslant g$ sur $[a, b]$.

$\int_a^b (g(t) - f(t))\,dt$ est *l'aire* de la partie du plan définie par $a \leqslant x \leqslant b$ et $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$ (fig. 3).

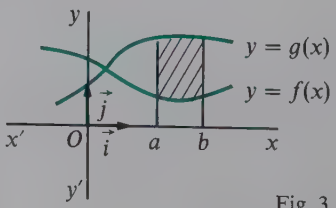



Fig. 3

# PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

## Propriétés immédiates

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Relation de Chasles

Si $f$ est une fonction continue sur $I$, $a$, $b$ et $c$ trois réels de $I$

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ou

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t - \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Linéarité

Si $f$ et $g$ sont des fonctions continues sur $I$, $a$ et $b$ des réels de $I$, $\alpha$ et $\beta$ deux réels quelconques :

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_a^b \alpha f(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ou

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

## Positivité

Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$ avec $a \leqslant b$;

si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$;

si $f \leqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

## Inégalité

Soit $f$ *et* $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $a \leqslant b$;
si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

## Inégalité de la moyenne

Soit $f$ continue sur $[a, b]$ $a < b$;
si $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a, b]$, alors

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

ou $$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

## Valeur moyenne

Soit $f$ continue sur $[a, b]$ $a < b$;

- $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ s'appelle la *valeur moyenne* de $f$ sur $[a, b]$;
- il existe une valeur $c$ de $[a, b]$ telle que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

($c$ n'est pas forcément unique).

## Valeur absolue

Soit $f$ continue sur $[a, b]$ et $a \leqslant b$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

## Fonctions paires, impaires

Soit $f$ continue sur $[-a, a]$ $(a \geqslant 0)$.

Si $f$ est *paire*, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$;

si $f$ est *impaire*, alors : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

### Fonctions périodiques

Soit $f$ continue sur $\mathbb{R}$. Si $f$ est *périodique* de période $T$, alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \quad \text{pour tout} \quad a \in \mathbb{R}.$$

## INTÉGRATION PAR PARTIES

Soit deux fonctions $f$ et $g$ dérivables sur un intervalle $[a, b]$ telles que $f'$ et $g'$ soient continues sur $[a, b]$.

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

**Exemple :** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\,dx$

$$f(x) = x \qquad f'(x) = 1 \qquad g'(x) = \cos x \qquad g(x) = \sin x$$

d'où $I = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$$I = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \qquad I = \frac{\pi}{2} - 1.$$

## CHANGEMENT DE VARIABLE : CAS AFFINE

Soit $f$ continue sur $[a, b]$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^d \alpha f(\alpha x + \beta)\,dx \quad \text{où} \quad \begin{matrix} a = \alpha c + \beta, \\ b = \alpha d + \beta. \end{matrix}$$

où $t = \alpha x + \beta$ et $dt = \alpha\,dx$.
Dans ce tableau, $c$ désigne une constante réelle arbitraire.
$D_f$ est l'ensemble de définition de $f$.

**TABLEAU DE PRIMITIVES**

| Fonctions $x \mapsto f(x)$ | Primitives $x \mapsto F(x)$ | Sur un intervalle / de : |
|---|---|---|
| $0$ | $c$ | $\mathbb{R}$ |
| $a$ | $ax + b \quad (b \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ | $\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ |
| | | $\mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}^- - \{-1\}$ |
| | | $\mathbb{R}^{+*}$ si $n \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ |
| $(x-a)^n \quad n \in \mathbb{N}$ | $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + c$ | $\mathbb{R}$ |

| Fonctions $x \mapsto f(x)$ | Primitives $x \mapsto F(x)$ | Sur un intervalle $I$ de : |
|---|---|---|
| $\dfrac{1}{x-a}$ | $\ln \lvert x-a \rvert + c$ | $\mathbb{R} - \{a\}$ |
| $\ln x$ | $x \ln x - x + c$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\cos x$ | $\sin x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin x$ | $-\cos x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(ax+b)$ $(a \neq 0)$ | $\dfrac{1}{a} \sin(ax+b) + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\sin(ax+b)$ $(a \neq 0)$ | $-\dfrac{1}{a} \cos(ax+b) + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\tan x$ | $-\ln \lvert \cos x \rvert + c$ | $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ | $\tan x + c$ | $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\sqrt{x}$ | $\dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + c$ | $\mathbb{R}^+$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ $(a \neq 0)$ | $\dfrac{2}{a}\sqrt{ax+b} + c$ | $\{x / ax+b > 0\}$ |
| $\sqrt{ax+b}$ $(a \neq 0)$ | $\dfrac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b} + c$ | $\{x / ax+b \geqslant 0\}$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^{ax}$ $(a \neq 0)$ | $\dfrac{1}{a} e^{ax} + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^{ax+b}$ $(a \neq 0)$ | $\dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $f'(x)\, f^n(x)$ $n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$ | $\dfrac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$ | $D_f$ |
| $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ | $\ln \lvert f(x) \rvert + c$ | $D_f \cap \{x / f(x) \neq 0\}$ |
| $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$ | $-\dfrac{1}{f(x)} + c$ | $D_f \cap \{x / f(x) \neq 0\}$ |
| $f'(x)\, e^{f(x)}$ | $e^{f(x)} + c$ | $D_f$ |
| $f + g$ | $F + G + c$ | $D_f \cap D_g$ |
| $\alpha f$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ | $\alpha F + c$ | $D_f$ |
| $f(ax+b)$ $(a \neq 0)$ | $\dfrac{1}{a} F(ax+b) + c$ | $\{x / ax+b \in D_f\}$ |

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS DU PREMIER ORDRE

$ay' + by = 0 \quad a \in \mathbb{R}^* \quad b \in \mathbb{R}$. Les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = k\, e^{-\frac{b}{a}x} \quad k \in \mathbb{R}$

La solution est unique si on connait $y(x_0)$, $x_0$ étant un réel donné.

## ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS DU SECOND ORDRE

$ay'' + by' + cy = 0 \quad a \in \mathbb{R}^* \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R}$.
Soit $(E)$ *l'équation caractéristique*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{et} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta = 0$ alors les solutions sont :

$$y(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{-\frac{b}{2a}x}$$

$\alpha$ et $\beta$ étant deux réels.
Si $\Delta \neq 0$ alors les solutions sont :

$$y(x) = \alpha_1\, e^{r_1 x} + \alpha_2\, e^{r_2 x}$$

où $r_1$ et $r_2$ sont les racines de $(E)$ réelles ou complexes conjuguées, $\alpha_1$ et $\alpha_2$ étant deux réels.

*Remarque :* dans le cas où $\Delta < 0 \quad r_1 = \alpha + i\beta \quad r_2 = \alpha - i\beta$, on peut mettre les solutions sous la forme :

$$y(x) = e^{\alpha x}\,(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \quad A \in \mathbb{R} \quad B \in \mathbb{R}.$$

• La solution est unique si on connaît $y(x_0)$ et $y'(x_0)$, $x_0$ étant un réel donné.

# FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

## FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

### Définition

On appelle fonction logarithme népérien, la primitive définie de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, nulle au point 1, de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.
On la note ln.

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}; \qquad \ln 1 = 0; \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

### Propriétés

| | | |
|---|---|---|
| $a > 0,$ | $b > 0,$ | $\ln ab = \ln a + \ln b$ |
| $a > 0,$ | $b > 0,$ | $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ |
| $b > 0,$ | | $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$ |
| $a > 0,$ | $n \in \mathbb{Q},$ | $\ln a^n = n \ln a$ |
| $a > 0,$ | | $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ |
| $a > 0,$ | $b > 0,$ | $\ln a = \ln b$ équivaut à $a = b$ |

### Étude de la fonction $f : x \mapsto \ln x$

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | ‖ | $-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$ | |

$f'(x) = \frac{1}{x}$.

$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$f$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

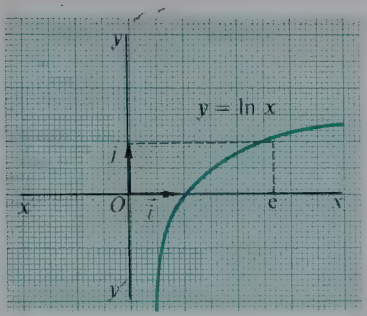



Fig. 1

Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.
Si $x > 1$, alors $\ln x > 0$.
$\ln 1 = 0$.

e est la solution unique positive de l'équation $\ln x = 1$.

e $\approx 2{,}718\,28$.

## Limites

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

## Dérivées

Si $u$ est une fonction dérivable strictement positive sur un intervalle $I$, alors $\ln'[u(x)] = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur $I$.

Si $u$ est une fonction dérivable ne s'annulant pas sur un intervalle $I$, alors $\ln'[|u(x)|] = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur $I$.

Si $ax > 0$, $(\ln ax)' = \dfrac{1}{x}$.

## Développement limité en 0 (approximation affine)

$\ln(1 + h) = h + h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

On en déduit : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1 + h)}{h} = 1.$

*Remarque :* dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit $A(1, 0)$ et soit $M(1 + h, \ln(1 + h))$, la droite $(AM)$ a pour coefficient directeur $\dfrac{\ln(1 + h)}{h}$.

# FONCTION LOGARITHME DE BASE $a$

## Définition

Pour tout $a$ de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, on appelle fonction logarithme de base $a$, la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

*Remarques :*

- On peut considérer la fonction ln comme la fonction logarithme de base e :

$$\log_e x = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x.$$

- On appelle fonction logarithme décimal, la fonction logarithme de base 10; on la note log.

- Changement de base : $x \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$,

$$\log_a x = \log_a b \,.\, \log_b x.$$

## Étude de la fonction $\log_a$

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $a$ de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Pour $\mathbf{0 < a < 1}$,

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

**Pour** $a > 1$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

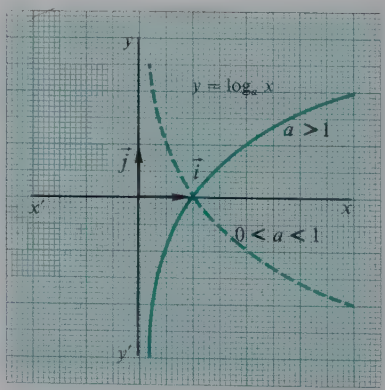



Fig. 2

# DÉRIVÉES LOGARITHMIQUES

## Définition

Soit $f$ une fonction numérique d'une variable réelle, ne s'annulant pas, on appelle dérivée logarithmique de la fonction $f$, le quotient $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

## Propriétés

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables, ne s'annulant pas :

• La dérivée logarithmique du produit $uv$ est la somme des dérivées logarithmiques de $u$ et $v$ :

$$\frac{(u(x)v(x))'}{u(x)v(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

• La dérivée logarithmique du quotient $\dfrac{u}{v}$ est la différence des dérivées logarithmiques de $u$ et $v$ :

$$\frac{\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'}{\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)} = \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}.$$

# FONCTION EXPONENTIELLE

## Définition

On appelle fonction exponentielle, la bijection réciproque de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme népérien.

On note : $y = \exp(x) = e^x$.

$$\begin{cases} x = \ln y \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} y = e^x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

## Propriétés

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e$$
$$e^x e^y = e^{x+y} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{1}{e^x} = e^{-x} \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$(e^x)^n = e^{nx} \qquad n \in \mathbb{Q}, \quad x \in \mathbb{R}$$

## Étude de la fonction $f : x \mapsto e^x$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $+$ | | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f'(x) = e^x$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$f$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x$ réel, $e^x > 0$.

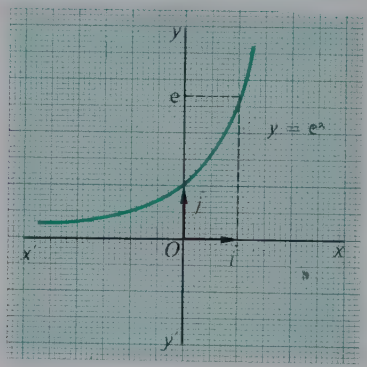


Fig. 3

## Limites

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x\, e^x = 0^- \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

## Dérivées

Si $u$ est une fonction dérivable, $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.
Si $a$ est un réel, $(e^{ax})' = a\, e^{ax}$.

### Développement limité en 0 (approximation affine)

$$e^h = 1 + h + h\varphi(h), \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0.$$

On en déduit : $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.}$

## FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE $a$

### Définition

Pour tout $a$ de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, on appelle fonction exponentielle de base $a$, la fonction réciproque de la fonction logarithme de base $a$. On la note $y = a^x$.

$$\boxed{\begin{cases} y = a^x \\ y \in \mathbb{R}_+^* \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} x = \log_a y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}}$$

*Remarque :* $y = a^x$ équivaut à $y = e^{x \ln a}$.
Les propriétés sont donc identiques à celles de la fonction exponentielle.

### Étude de la fonction $f : x \mapsto a^x$

*Dérivée :*
pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x \ln a$ pour tout $a$ de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

**$a > 1$,**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\ln a > 0$ et $(a^x)' > 0$.

**$0 < a < 1$,**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

$\ln a < 0$ et $(a^x)' < 0$.

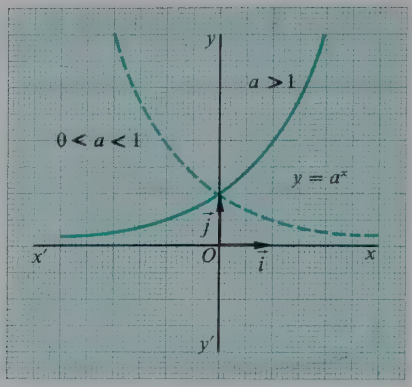



Fig. 4

### Limites

Pour $0 < a < 1$,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = 0^+$$

Pour $a > 1$,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} e^{x \ln a} = 0^+$$
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln a} = +\infty$$

## FONCTION PUISSANCE

### Définition

Soit $\alpha$ un réel, $x^\alpha$ est défini pour $x$ strictement positif par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Cette définition prolonge celle de la fonction puissance pour $\alpha \in \mathbb{Z}$. Les formules pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ restent valables pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $(x > 0)$.

### Dérivée

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$$

## Cas particuliers

Si $\alpha = \dfrac{1}{q}$, $x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ $x \in \mathbb{R}_+$, $q \in \mathbb{N}^*$.

Si $\alpha = \dfrac{p}{q}$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$ $x \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.

## Courbes

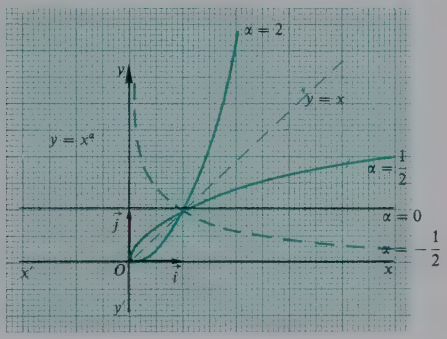



Fig. 5

# CROISSANCE COMPARÉE DES FONCTIONS LOGARITHMES, EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

$$\alpha > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad \alpha > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

$$\alpha > 0, \quad \lim_{x \to 0+} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \alpha > 0, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$$

$$\alpha > 0, \quad a > 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{x \ln a}} = 0$$

$$\alpha > 0, \quad a > 1, \quad \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha a^x = \lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{x \ln a} = 0$$

$$a > 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{x \ln a}} = 0$$

# COMPLEXES

## CORPS DES COMPLEXES

### Définition

$\mathbb{R}^2$ muni des deux opérations $+$ et $\times$ définies par :

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$
$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b),$$

est un *corps commutatif* : on l'appelle *corps des complexes* et on le note $\mathbb{C}$.

### Propriété

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$, on pose $x = (x, 0)$
$i = (0, 1)$ :
$i^2 = (-1, 0)$ donc $i^2 = -1$.
On note donc un complexe $(x, y) = x + iy$.

### Notation

Pour tout nombre complexe $z$, il existe un unique couple $(x, y)$ de réels tels que $z = x + iy$, $i^2 = -1$.
$x$ s'appelle la *partie réelle* de $z$ : $x = \text{Re}(z)$;
$y$ s'appelle la *partie imaginaire de* $z$ : $y = \text{Im}(z)$.

## FORME ALGÉBRIQUE

### Définition

$z = x + iy$ est la forme algébrique du nombre complexe $z$.
Si $y = 0$ alors $z$ est réel.
Si $x = 0$ alors $z$ est imaginaire pur.

### Propriété

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux complexes.
*$z = z'$ est équivalent à $x = x'$ et $y = y'$.*

## COMPLEXE CONJUGUÉ

### Définition

Le conjugué du nombre complexe $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, est le complexe $\bar{z} = x - iy$.

### Propriétés

Soit $z = x + iy \quad x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R}$.

$$\bar{\bar{z}} = z$$
$$z + \bar{z} = 2 \text{ Re } (z) = 2x$$
$$z - \bar{z} = 2i \text{ Im } (z) = 2iy$$
$z = \bar{z}$ est équivalent à $z \in \mathbb{R}$
$z = -\bar{z}$ est équivalent à $z \in i\mathbb{R}$
$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$$
$$\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}', \quad \left(\overline{\frac{z}{z'}}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$$

## MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

### Définition

On appelle module d'un complexe $z$, le réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$; on note :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Si $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Si $z = 2 - i$, alors $|z| = \sqrt{5}$
Si $z = -3$, alors $|z| = 3$.

***Remarque :***
Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de $z$ correspond à la valeur absolue.

### Propriétés

$z \in \mathbb{C}, \quad z' \in \mathbb{C}.$

$|z| = 0$ équivaut à $z = 0$ $\qquad |z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

$|zz'| = |z||z'|$; $n \in \mathbb{N}$ $\quad |z^n| = |z|^n$ $\qquad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\quad (z' \neq 0)$

$|z + z'|^2 = |z^2| + 2\ \mathrm{Re}\ (z\bar{z}') + |z'|^2.$

$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad \big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|$

## AFFIXES

### Affixe d'un point du plan

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan, soit $M(x, y)$ un point du plan : le complexe $z = x + iy$ s'appelle *l'affixe* du point $M$.

### Affixe du milieu $I$ d'un bipoint $(A, B)$

$z_I = \dfrac{1}{2}(z_A + z_B)$ où $z_A$ et $z_B$ sont les affixes de $A$ et $B$.

### Affixe d'un vecteur

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale du plan, soit $\vec{u}(x, y)$ un vecteur : le complexe $z = x + iy$ s'appelle *l'affixe* du vecteur $\vec{u}$.

## ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

### Définition

Soit $z = a + ib$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, un complexe non nul; on appelle argument de $z$ tout réel $\theta$ tel que

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Propriété

Soit $M$ un point du plan d'affixe $z$ non nulle dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Alors $\theta = \arg z = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et $|z| = OM$.

$\theta$ en radians.

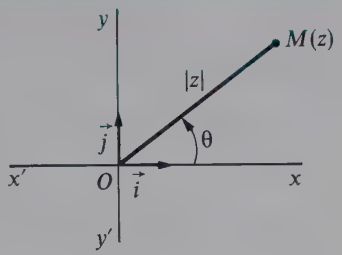



Fig. 1

## FORME TRIGONOMÉTRIQUE

### Notation

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$, $\theta = \arg z$

on note $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$z \in \mathbb{C}^* \quad z = |z| \, e^{i\theta}, \quad \theta = \arg z$$

Ceci est la *forme trigonométrique* du complexe $z$ (non nul).

### Propriétés

- soit deux complexes $z$ et $z'$ non nuls.

$$z = z' \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' \ [2\pi] \end{cases}$$

- $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta' \in \mathbb{R}$ $z \in \mathbb{C}^*$, $z' \in \mathbb{C}^*$,

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$\arg (zz') = \arg (z) + \arg (z') \quad [2\pi]$$

$$\arg \left(\frac{z}{z'}\right) = \arg (z) - \arg (z') \quad [2\pi]$$

$$\arg \left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z = \arg \bar{z} \quad [2\pi]$$

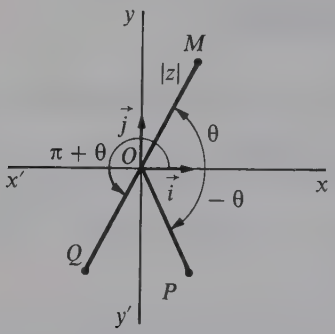
$$p \in \mathbb{Z} \quad \arg (z^p) = p \arg (z) \quad [2\pi]$$

L'argument d'un réel strictement négatif est égal à $\pi$ modulo $2\pi$.
L'argument d'un réel strictement positif est égal à 0 modulo $2\pi$.

L'argument d'un imaginaire pur $iy$ avec $y > 0$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$.

L'argument d'un imaginaire pur $iy$ avec $y < 0$ est égal à $-\frac{\pi}{2}$ modulo $2\pi$.

**Exemple :** $\arg 3 = 0\ [2\pi]$, $\arg(-4) = \pi\ [2\pi]$, $\arg i = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.




$(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormal.

$M$ : $z = |z|\, e^{i\theta}$
$P$ : $\overline{z} = |z|\, e^{-i\theta}$
$Q$ : $-z = -|z|\, e^{i\theta} = |z|\, e^{i(\theta+\pi)}$.

Fig. 2

| | |
|---|---|
| *Formules d'Euler* | $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. |
| *Formules de Moivre* | $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$, |
| | $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad n \in \mathbb{Z}$, |
| | $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta \quad n \in \mathbb{Z}$. |

## RACINES $n^e$ DE L'UNITÉ

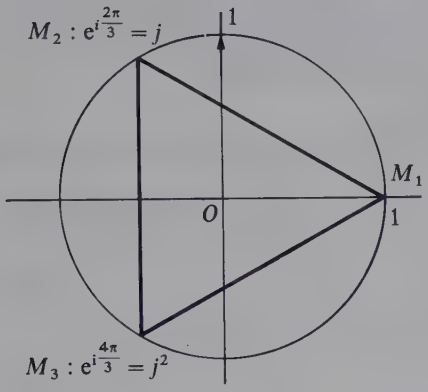
$z^n = 1$ $(n \geqslant 2)$ a pour solutions les complexes $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ où $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $k$ est un entier naturel.

### Propriétés

La somme des $n$ racines $n^e$ de l'unité est nulle.
Les $n$ points, d'affixes les racines $n^e$ de l'unité, forment un *polygone régulier de n côtés* inscrit dans le cercle trigonométrique.

**Exemple :** les racines cubiques de l'unité.

1, $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sont les trois racines.




On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$$1 + j + j^2 = 0$$
$$\bar{j} = j^2$$

Fig. 3

# RACINES $n^e$ D'UN COMPLEXE NON NUL

## Définition

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$;
on appelle racine $n^e$ de $Z$ tout complexe $z$ tel que : $z^n = Z \quad n \in \mathbb{N}^*$

## Théorème

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet $n$ racines $n^e$ distinctes ($n \geqslant 2$).

Si $z = r\, e^{i\theta}$ les racines $n^e$ de $z$ sont les complexes

$$\sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} \quad \text{avec} \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

## Propriétés

La somme des $n$ racines $n^e$ d'un complexe non nul est nulle.
On obtient les racines $n^e$ d'un complexe en multipliant l'une d'entre elles par les $n$ racines $n^e$ de l'unité.

Les $n$ points d'affixes, les racines $n^e$ d'un complexe non nul $z$, forment un polygone régulier de $n$ côtés inscrit dans un cercle de centre $O$ et de rayon $|z|$.

## ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS RÉELS

### Théorème

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ admet :

– 2 racines réelles distinctes si $\Delta > 0$

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$

– 1 racine double réelle si $\Delta = 0$

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a};$$

– 2 racines complexes conjuguées distinctes si $\Delta < 0$

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$.

## ÉQUATIONS D'UN CERCLE ET D'UNE MÉDIATRICE

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

- Le cercle de centre $A$, d'affixe $z_A$, et de rayon $R$ a pour équation :

$$|z - z_A| = R.$$

- La médiatrice du segment $[AB]$, $A \neq B$, a pour équation :

$$|z - z_A| = |z - z_B|$$

où $z_A$ et $z_B$ sont les affixes de $A$ et $B$.

**Exemple**

L'ensemble des points d'affixe $z$ tel que $|z - 1 + i| = |z + 2i|$ est la médiatrice du segment $[AB]$ où $A$ et $B$ ont pour affixes :

$$z_A = 1 - i \quad \text{et} \quad z_B = -2i.$$

# RÉVISIONS DE GÉOMÉTRIE PLANE

## FIGURES PLANES USUELLES

### Parallélogramme

**Définition**

Un *parallélogramme* est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux.

**Propriétés caractéristiques**

- Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux deux à deux.
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.
- Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux deux à deux.
- L'intersection des diagonales est *centre de symétrie* pour le parallélogramme.

### Rectangle

**Définition**

Un *rectangle* est un parallélogramme qui a un angle droit.
Les quatre angles d'un rectangle sont droits.

**Propriétés**

- Les longueurs des diagonales sont égales.
- Les médiatrices des longueurs et des largeurs sont des *axes de symétrie.*

**Propriétés caractéristiques**

- Un quadrilatère dont les quatre angles sont droits est un rectangle.
- Un quadrilatère tel que les diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu est un rectangle.

### Carré

**Définition**

Un *carré* est un rectangle qui a deux côtés adjacents égaux.

**Propriétés**

- Les quatre côtés sont égaux.
- Les diagonales se coupent en formant un angle droit.
- Les diagonales sont des *axes de symétrie*.

**Propriétés caractéristiques**

- Un quadrilatère dont les diagonales sont orthogonales en leur milieu et de même longueur est un carré.
- Un rectangle dont les diagonales se coupent orthogonalement est un carré.

### Losange

**Définition**

Un *losange* est un parallélogramme qui a deux côtés adjacents égaux.

**Propriétés**

- Les quatre côtés sont égaux.
- Les diagonales se coupent en formant un angle droit.

**Propriété caractéristique**

Un quadrilatère dont les diagonales sont orthogonales en leur milieu est un losange.

### Trapèze

**Définition**

Un *trapèze* est un quadrilatère qui a deux côtés parallèles. Ces côtés sont appelés les bases.

## DROITES PARTICULIÈRES DANS LE TRIANGLE

### Médiatrice

**Définition**

La *médiatrice* d'un segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $AM = MB$.

**Propriétés**

- La médiatrice du segment $[AB]$ passe par le milieu de $[AB]$ et est orthogonale à $(AB)$.

• Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le *centre du cercle circonscrit* au triangle.

• La médiatrice du segment $[AB]$ partage le plan en deux demi-plans $P_A$ et $P_B$ définis ainsi :

$$M \in P_A \quad \text{si} \quad AM \leqslant BM, \quad M \in P_B \quad \text{si} \quad BM \leqslant AM.$$

## Médiane

**Définition**

La *médiane* issue de $A$ dans un triangle $(ABC)$ est la droite passant par $A$ qui coupe $[BC]$ en son milieu.

**Propriété**

Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé *centre de gravité* du triangle, situé au $\frac{2}{3}$ des médianes en partant du sommet.

## Hauteur

**Définition**

La *hauteur* issue de $A$ dans un triangle $(ABC)$ est la droite passant par $A$ qui coupe $(BC)$ orthogonalement.

**Propriétés**

• Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé *l'orthocentre*.

• Dans un triangle, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont alignés. Dans le cas où le triangle n'est pas équilatéral, alors les trois points ne sont pas confondus et la droite définie par ces trois points s'appelle la *droite d'Euler*.

• Dans un triangle quelconque, les milieux des trois côtés, les pieds des trois hauteurs et les milieux des segments formés par chacun des sommets et l'orthocentre sont situés sur un même cercle $\mathcal{C}\left(\Omega, \frac{R}{2}\right)$.

$\Omega$ est le milieu du segment formé par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit. $\mathcal{C}\left(\Omega, \frac{R}{2}\right)$ est *le cercle d'Euler*.

$\frac{R}{2}$ est la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle.

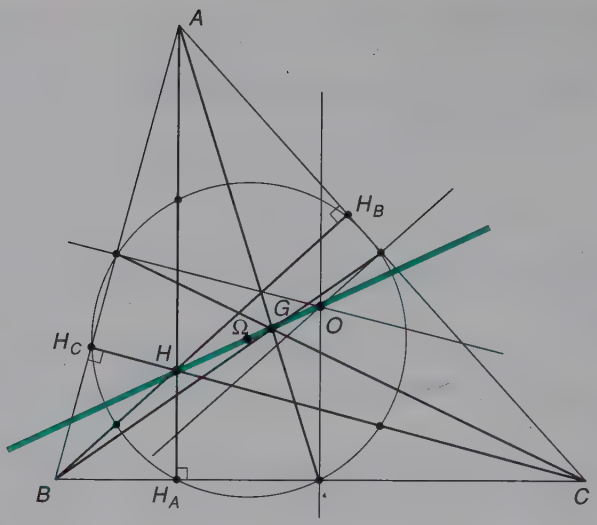



Fig. 1

## Bissectrice

### Définition

La *bissectrice* d'un angle non orienté $xOy$ est l'*axe de symétrie* orthogonale qui échange $Ox$ et $Oy$.

### Propriété

Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point qui est *le centre du cercle inscrit* dans le triangle.

### Propriétés caractéristiques

- La bissectrice de $(Ox, Oy)$ est une demi-droite $[O\ z)$ telle que $(Ox, Oz) = (Oz, Oy)$.
- La bissectrice de $(Ox, Oy)$ est l'ensemble des points $M$ équidistants des deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

# TRIANGLES PARTICULIERS

## Triangle isocèle

### Définition

Un *triangle isocèle* est un triangle qui a deux côtés égaux.

**Propriétés**

- Dans un triangle isocèle $(ABC)$ de sommet $A$, la médiane issue de $A$ est confondue avec la hauteur issue de $A$, la bissectrice de $\widehat{A}$ et la médiatrice de $[BC]$.
- Les deux angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont égaux (ont même mesure).

## Triangle équilatéral

**Définition**

Un *triangle équilatéral* est un triangle qui a ses 3 côtés égaux.

**Propriétés**

- Les 3 angles dans un triangle équilatéral sont égaux et ont chacun pour mesure 60° ou $\frac{\pi}{3}$ rad.
- Dans un triangle équilatéral, les 3 médianes sont confondues avec les 3 hauteurs, les 3 bissectrices, les 3 médiatrices.

## Triangle rectangle

**Définition**

Un *triangle rectangle* est un triangle qui a un angle droit.
Le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'hypoténuse.

**Propriétés caractéristiques**

- L'intersection des médiatrices est située au milieu de l'hypoténuse.
- La médiane issue de l'angle droit, ou *médiane relative à l'hypoténuse*, a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse.
- Le *centre du cercle circonscrit* est situé au *milieu de l'hypoténuse*.

# CERCLE ET DISQUE

## Cercle

**Définition**

Un *cercle* de centre $O$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ *équidistants* de $O$ c'est-à-dire tels que $OM = R$.

**Propriété**
Tout triangle inscrit dans un cercle et dont l'un des côtés est un diamètre est un triangle rectangle.
**Corde :** soit $A$ et $B$ deux points du cercle, alors le segment $[AB]$ est appelé *corde*.

**Équation :** le plan est muni d'un repère orthonormal. Une équation du cercle $C$ de centre $A(a, b)$ et de rayon $R$ est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

### Disque

**Définition**
Un *disque* fermé de centre $O$ et de rayon $R$ est l'ensemble des points $M$ tel que $OM \leqslant R$.
Si $OM < R$, alors le disque est ouvert de centre $O$ et de rayon $R$.

## MESURE ALGÉBRIQUE ET DISTANCE

### Mesure algébrique

**Définition**

Soit une droite $D$ munie d'un repère normé $(O, I)$, les points $A$ et $B$ étant repérés sur $D$ par leurs abscisses respectives $x_A$ et $x_B$, on appelle *mesure algébrique* de $AB$ (notée $\overline{AB}$) le réel $x_B - x_A$ :

$$\overline{AB} = x_B - x_A.$$

**Propriétés**

- $\overline{AA} = x_A - x_A = 0.$
- $\overline{AB} = x_B - x_A = -(x_A - x_B) = -\overline{BA}.$
- Relation de Chasles : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$

### Distance

**Définition**

Soit une droite $D$ munie d'un repère normé $(O, I)$, les points $A$ et $B$ étant repérés sur la droite $D$ par leurs abscisses respectives $x_A$ et $x_B$, on appelle *distance* de $A$ à $B$ (notée $AB$) le réel positif $|x_B - x_A|$ :

$$AB = |x_B - x_A| = |\overline{AB}| = BA.$$

**Propriétés**

- $AA = |x_A - x_A| = 0$.
- Si $C \in [AB]$ alors $AB = AC + CB$.
- Si $C \notin [AB]$ alors $AB < AC + CB$.

## Propriété de Thalès

*Énoncé*

Soit deux droites $D$ et $D'$, trois points $A$, $B$, $C$ situés sur $D$, une projection $p$ de $D$ sur $D'$ de direction $\delta$ (distincte de $D$ et $D'$) telle que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$, $p(C) = C'$, alors on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}.$$

**Application de Thalès au triangle**

Soit un triangle $(ABC)$, une droite $(MN)$ parallèle à $(BC)$ tels que $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$, on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

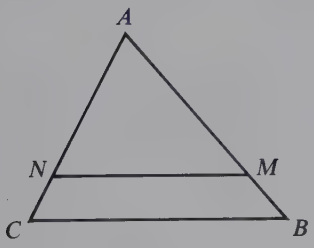



Fig. 2

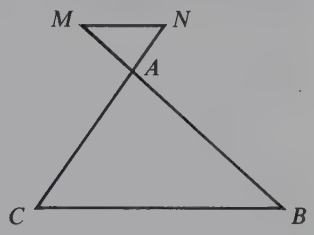



Fig. 3

Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$.

**Réciproque de Thalès**

Soit deux droites $D$ et $D'$, trois points $A$, $B$, $C$ sur $D$, trois points $A'$, $B'$, $C'$ sur $D'$ tels que $(AA') \parallel (BB')$.

Si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$ on a $(CC') \parallel (AA') \parallel (BB')$.

## Théorème de Pythagore

**Énoncé**

Soit un triangle $(A, B, C)$ rectangle en $B$, alors on a

$$\boxed{AB^2 + BC^2 = AC^2.}$$

**Réciproque**

Soit un triangle $(A, B, C)$ si $AB^2 + BC^2 = AC^2$, le triangle est alors rectangle en $B$.

# RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

Le plan est muni d'une distance.

## Triangle quelconque

Soit $ABC$ un triangle de surface $S$, soit $R$ le rayon de son cercle circonscrit, $r$ le rayon du cercle inscrit.
On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \widehat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} ca \sin \widehat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}$$

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2S} = 2R$$

$$S = pr$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

## Triangle rectangle

Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$, $H$ le pied de la hauteur issue de $A$ et $A'$ le milieu de $[BC]$. Alors :

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\
AA' &= \frac{1}{2} BC \\
BA^2 &= \overline{BH} \times \overline{BC} \\
CA^2 &= \overline{CH} \times \overline{CB} \\
AH^2 &= -\overline{HB} \times \overline{HC} \\
\widehat{B} + \widehat{C} &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

*Réciproquement :* si l'une de ces conditions est vérifiée, alors le triangle $ABC$ est rectangle en $A$.

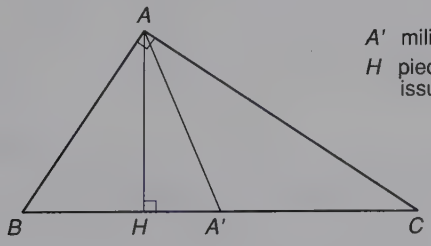



Fig. 4

# VECTEURS ET DROITES DU PLAN - ÉQUATIONS

On notera $\mathfrak{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

## VECTEURS

### Définition

Le bipoint $(A, B)$ représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur est défini par la donnée d'une direction de droites, d'un sens sur cette direction et d'une longueur.

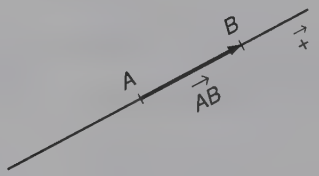



Fig. 1

*Remarques*

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est équivalent à $(A, B, D, C)$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

### Propriété

Pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathfrak{V}$ et tout point $O$ du plan, il existe un seul point $M$ du plan tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.

### Relation de Chasles

Pour tout triplet $(A, B, C)$ de points du plan :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

### Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u} \in \mathcal{V}$, on appelle norme de $\vec{u}$ de représentant $(A, B)$ le réel positif noté $\|\vec{u}\| = d(A, B)$.
On a $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = AB$.

### Vecteurs colinéaires

Soit deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un réel non nul $k$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Dans le cas où l'un des vecteurs est nul, on dit aussi que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Points alignés :** trois points $A$, $B$ et $C$ du plan sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires. Cette définition est également vraie dans l'espace.

## REPÈRE ET COORDONNÉES

### Base

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls et non colinéaires (de directions distinctes) forment une *base* du plan.

### Repère cartésien

Soit un point $O$ du plan et une base de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2$, alors $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un *repère cartésien du plan*

*Remarque :*
soit trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ du plan, alors le triplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère cartésien du plan.

### Coordonnées d'un vecteur

Soit une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$, $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$, il existe un couple unique de réels $(x, y)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
Ces réels $x$ et $y$ sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

*Remarque :*
soit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ alors le vecteur $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $x$ et $y$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. On dit aussi que $M$ a pour *abscisse* $x$ et pour *ordonnée* $y$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

### Condition de colinéarité

Soit $\vec{u}(x, y)$, $\vec{v}(x', y')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - yx' = 0$ (det $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$).

### Vecteur défini par un bipoint; milieu d'un bipoint

Soit dans le plan $P$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$

ou $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$I$ milieu du bipoint $(A, B)$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

### Repère orthonormal (orthonormé)

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est *orthonormal* si

- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont *normés* $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont *orthogonaux* $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

### Norme d'un vecteur

Soit le plan $P$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

## DROITES DU PLAN

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

### Définition

Soit $A$ un point du plan $P$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$, alors la droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ (notée $\mathcal{D}(A, \vec{u})$) est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

## Équation d'une droite $(AB)$

$$(AB) = \{ M \in P / \overrightarrow{AM} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{AB} \}$$

$M(x, y)$ $A(x_A, y_A)$

| *Système d'équations paramétriques* | *Équation cartésienne* |
|---|---|
| on écrit $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ $k \in \mathbb{R}$ | on écrit $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ |
| on obtient : | on obtient : |
| $\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \end{cases}$ | $ax + by + c = 0$ |
| | $(a, b) \neq (0, 0)$ |

### Équation réduite d'une droite

Soit une droite $D$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$, alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ et en posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, on obtient l'*équation réduite* de $D$ sous la forme :

$$y = mx + p.$$

### Coefficient directeur

Soit $D$ d'équation réduite $y = mx + p$ : $m$ s'appelle le *coefficient directeur* de $D$.

Si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal, $m$ est la pente de la droite.
$p$ est l'ordonnée à l'origine.

**Coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite $D$ dans les cas suivants :**

| | | |
|---|---|---|
| * équation cartésienne : | $ax + by + c = 0$ | $\vec{u}(-b, a)$ |
| * équation paramétrique | $\begin{cases} x = x_A + \alpha k \\ y = y_A + \beta k \end{cases}$ | $\vec{u}(\alpha, \beta)$ |
| * équation réduite : | $y = mx + p$ | $\vec{u}(1, m)$. |

## Droites particulières

### Parallèles à l'axe des abscisses

Soit une droite $D(A, \vec{u})$ parallèle à l'axe des abscisses, soit un point $M(x, y)$ appartenant à $D(A, \vec{u})$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{i}$ sont colinéaires d'où $y - y_A = 0$.
$y = y_A$ est une équation cartésienne de $D(A, \vec{u})$.

### Parallèles à l'axe des ordonnées

Soit une droite $D(A, \vec{u})$ parallèle à l'axe des ordonnées, soit un point $M(x, y)$ appartenant à $D(A, \vec{u})$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{j}$ sont colinéaires d'où $x - x_A = 0$.
$x = x_A$ est une équation cartésienne de $D(A, \vec{u})$.

### Droites passant par l'origine

Les équations cartésiennes de droites passant par l'origine du repère sont de la forme :

$$ax + by = 0 \quad (a, b) \neq (0, 0) \quad \text{ou} \quad y = mx.$$

## Droites parallèles

• Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si tout vecteur directeur $\vec{u}$ de l'une est colinéaire à tout vecteur directeur $\vec{u}'$ de l'autre.

soit
$$D : \quad ax + by + c = 0. \quad \vec{u}(-b, a)$$
$$D' : \quad a'x + b'y + c' = 0. \quad \vec{u}'(-b', a')$$

$D // D'$ équivaut à $ab' - a'b = 0$ ou $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

• Deux droites du plan sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux

$$D : \quad y = mx + p.$$
$$D' : \quad y = m'x + p'.$$

$D // D'$ équivaut à $m = m'$.

## Droites perpendiculaires

• Deux droites du plan sont *perpendiculaires* si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux (c.-à-d. produit scalaire nul).

Dans un *repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$

soit $D : \quad ax + by + c = 0. \quad \vec{u}(-b, a)$

$D' : \quad a'x + b'y + c' = 0. \quad \vec{u}'(-b', a')$

$$\boxed{D \perp D' \text{ équivaut à } aa' + bb' = 0.}$$

• Deux droites du plan sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leur coefficient directeur est égal à $-1$.

Dans un *repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

soit $D : \quad y = mx + p.$

$D' : \quad y = m'x + p'.$

$$\boxed{D \perp D' \text{ équivaut à } mm' = -1.}$$

# PRODUIT SCALAIRE

## DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

### Définitions

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$
où $H$ est le *projeté orthogonal* de $C$ sur $(AB)$.

• $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\| \cos \alpha$
où $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$,
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \alpha$
où $\alpha = (\vec{u}, \vec{v})$.

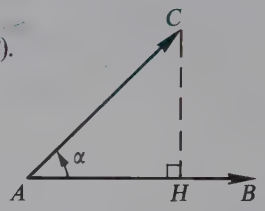


Fig. 1

Notons que le *produit scalaire* de deux vecteurs est *un nombre réel.*
On note $\vec{u}^2$ *carré scalaire* : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

### Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{u} = 0$.
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ $\qquad$ $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$.
$(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$ , $\lambda \in \mathbb{R}$.
$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$ $\qquad$ $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.
$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$ $\qquad$ $AB^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \overrightarrow{AB}^2$.
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ $\qquad$ $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2$.

### Théorèmes

$\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

**Théorème de Pythagore**

$\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

# PRODUIT SCALAIRE EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

## Produit scalaire dans un repère orthonormal

• Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = xx' + yy' \quad \vec{u}^2 = x^2 + y^2 \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{u}' \neq \vec{0}$ $\alpha = (\vec{u}, \vec{u}')$;

$$\cos \alpha = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{u}'\|}$$

De plus, si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est direct, alors :

$$\sin \alpha = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{\det(\vec{u}, \vec{u}')}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{u}'\|}.$$

• Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{u}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$.

$\vec{u} \cdot \vec{u} = xx' + yy' + zz' \quad \vec{u}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{u}' \neq \vec{0}$ $\alpha = (\vec{u}, \vec{u}')$;

$$\cos \alpha = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}'}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{u}'\|}$$

De plus, si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct, alors :

$$|\sin \alpha| = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{u}'\|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{u}'\|}.$$

## Définitions et théorèmes dans un repère orthonormal

• Vecteur normal : on appelle *vecteur normal* d'une droite du plan, tout vecteur non nul de direction orthogonale à celle de $D$.
Soit la droite $D$ d'équation $ax + by + c = 0$ $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $\vec{u}(a, b)$ est normal à $D$.

• On appelle *vecteur normal* à un plan tout vecteur non nul de direction orthogonale à celle du plan.

Soit le plan $P$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors $\vec{u}(a, b, c)$ est normal à $P$.

• Dans le plan : distance d'un point à une droite :

soit $A$ un point et $D$ une droite du plan d'équation $ax + by + c = 0$.

On appelle *distance de $A$ à $D$ la distance de $A$ à son projeté orthogonal $H$ sur $D$.*

On a $d(A, D) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\overrightarrow{AH}$ est normal à $D$.

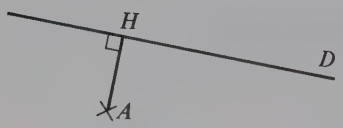



Fig. 2

• Dans l'espace : distance d'un point à un plan :

soit $A$ un point et $P$ un plan de l'espace, d'équation

$ax + by + cz + d = 0$.

On appelle distance de $A$ à $P$ la distance de $A$ à son projeté orthogonal $H$ sur $P$.

On a $d(A, P) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

# APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

## Théorèmes

Soit $M$ un point du plan.

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{1}{2} AB^2$ où $I$ est le milieu de $(A, B)$,

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$ où $I$ est le milieu de $(A, B)$.

**Exemple**

Soit un segment $[AB]$ de milieu $I$ tel que $AB = 4$.

L'ensemble des points $M$ tels que $MA^2 + MB^2 = 12$ est le cercle de centre $I$ et de rayon $\sqrt{2}$. En effet $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$.

Donc $MA^2 + MB^2 = 12$ équivaut à $2MI^2 + 8 = 12$

c'est-à-dire $MI^2 = 2$.

# CALCUL BARYCENTRIQUE

## BARYCENTRE DE DEUX POINTS

### Définition

Soit $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$; on appelle *barycentre* du système $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$ l'unique point $G$ qui vérifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
Si $\alpha = \beta$, $G$ s'appelle l'*isobarycentre* de $A$ et $B$ : c'est le milieu de $[AB]$.

### Propriétés

Soit $G$ le barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$, $\alpha + \beta \neq 0$, avec $A \neq B$.

- $G$, $A$ et $B$ sont alignés.
- $G$ est le barycentre de $(A, k\alpha)$ $(B, k\beta)$ si $k \neq 0$.
- Le *segment* $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de $A$ et $B$ affectés des coefficients $k$ et $1 - k$ avec $k \in [0, 1]$.
- La *demi-droite* $[AB)$ est l'ensemble des barycentres de $A$ et $B$ affectés des coefficients $1 - k$ et $k$ avec $k \in \mathbb{R}^+$.
- La *droite* $(AB)$ est l'ensemble des barycentres $G$ de $A$ et $B$ affectés de coefficients $\alpha$ et $\beta$ : $(\alpha, \beta)$ sont des *coordonnées barycentriques* de $G$ dans le repère $(A, B)$.
- Quel que soit le point $O$ du plan, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\alpha}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OA} + \dfrac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{OB}$.

### Coordonnées de $G$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$

$\alpha + \beta \neq 0$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace

$A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$

$\alpha + \beta \neq 0$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

# BARYCENTRE DE TROIS POINTS

## Définition

Soit $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$; on appelle *barycentre* du système $(A, \alpha)(B, \beta)$ et $(C, \gamma)$ l'unique point $G$ qui vérifie $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
Si $\alpha = \beta = \gamma$, $G$ s'appelle l'*isobarycentre* de $A$, $B$ et $C$ : si $A$ $B$ et $C$ sont non alignés et distincts deux à deux, l'isobarycentre est le point d'intersection des médianes du triangle $ABC$ : c'est le centre de gravité du triangle $ABC$.

## Propriétés

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés et distincts deux à deux; soit $G$ le barycentre de $(A, \alpha)(B, \beta)(C, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

- $G$, $A$, $B$ et $C$ appartiennent au même plan.
- Si $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont de même signe alors $G$ se trouve à l'intérieur du triangle $ABC$.
- $G$ est le barycentre de $(A, k\alpha)$ $(B, k\beta)$ $(C, k\gamma)$ si $k \neq 0$.
- Le plan $ABC$ est l'ensemble des barycentres $G$ de $A$, $B$ et $C$ affectés de coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ : $(\alpha, \beta, \gamma)$ sont des *coordonnées barycentriques* de $G$ dans le repère $(A, B, C)$.
- Quel que soit le point $O$,

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{OB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{OC}.$$

## Coordonnées de $G$

$$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan
$A(x_A, y_A)$ $B(x_B, y_B)$ $C(x_C, y_C)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace
$A(x_A, y_A, z_A)$ $B(x_B, y_B, z_B)$
$C(x_C, y_C, z_C)$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

### Barycentre partiel (associativité)

Soit $G$ le barycentre de $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$ et $(C, \gamma)$, $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.
Si $\alpha + \beta \neq 0$, $G$ est le barycentre de $(G', \alpha + \beta)(C, \gamma)$ où $G'$ est le barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$.

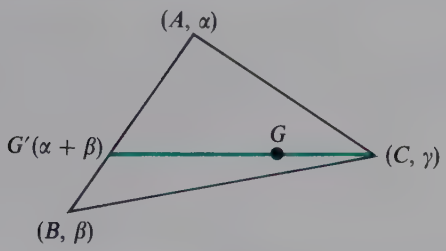



Fig. 1

## BARYCENTRE DE *n* POINTS

### Définition

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $n$ réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$; on appelle *barycentre* du système $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$ l'unique point $G$ qui vérifie $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$.
Si tous les $\alpha_i$ sont égaux, $G$ s'appelle l'*isobarycentre* des points $A_i$.

### Propriétés

bar $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$ = bar $\{(A_i, k\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$ avec $k \neq 0$.

Quel que soit $O$, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$.

### Coordonnées de $G$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$$

où $A_i$ a pour coordonnées $(x_i, y_i, z_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

### Barycentre partiel

Soit $G$ le barycentre du système $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$ ; soient $p$ points parmi les $n$, dont la somme $s$ des coefficients n'est pas nulle. Pour chercher $G$, on peut alors remplacer ces $p$ points par leur barycentre affecté du coefficient $s$.
Par exemple :

$$G = \text{bar}\ \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3); (A_4, \alpha_4); \ldots; (A_n, \alpha_n)\}$$
$$G = \text{bar}\ \{(G', \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3); \quad (A_4, \alpha_4); \ldots; \quad (A_n, \alpha_n)\}$$

si $\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \neq 0$

et $\qquad G' = \text{bar}\ \{(A_1, \alpha_1); (A_2, \alpha_2); (A_3, \alpha_3)\}.$

## FONCTION VECTORIELLE DE LEIBNIZ

### Définition

On appelle *fonction vectorielle de Leibniz*, associée à la famille $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$, l'application qui à tout point $M$ de l'espace associe le vecteur $\overrightarrow{f(M)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.

- Quels que soient les points $M$ et $P$ de l'espace :

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{f(P)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MP},$$

– si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors $f$ est constante

– si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et si $G = \text{bar}\ \{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$ alors pour tout $O$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \overrightarrow{f(O)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f(M)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{MG} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{f(G)} = \vec{0}.$$

## FONCTION SCALAIRE DE LEIBNIZ

### Définition

On appelle *fonction numérique de Leibniz*, associée à la famille $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$, l'application $g$ qui à tout point $M$ de l'espace associe le réel $g(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$.

• Quels que soient les points $M$ et $P$ de l'espace :

$$g(M) = g(P) + 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{f(P)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MP^2,$$

. si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$ alors $g(M) = g(P) + 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{f(P)}$;

. si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ et si $G = \text{bar}\,\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$, alors

$$g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{f(G)} = \vec{0}.$$

• Dans le cas de deux points :

$$\left.\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= 2IM^2 + \frac{AB^2}{2} \\ MA^2 - MB^2 &= 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}\right\} \text{où } I \text{ est le milieu de } [AB].$$

# LIGNES DE NIVEAU - SURFACES DE NIVEAU

## Définitions

Soit $f$ une application du plan $P$ dans $\mathbb{R}$ et $k$ un réel fixé, la *ligne de niveau* $k$ de $f$ est $\{M \in P / f(M) = k\}$.
Soit $f$ une application de l'espace $E$ dans $\mathbb{R}$ et $k$ un réel fixé, la *surface de niveau* $k$ de $f$ est $\{M \in E / f(M) = k\}$.

• Lignes et surfaces de niveau de la fonction numérique de Leibniz $g$ associée à $\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\}$ $g(M) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i MA_i^2$.

$$g(M) = k, \quad \vec{v} = \overrightarrow{f(O)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}.$$

*Premier cas :*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \quad g(M) = g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{f(O)} = g(O) + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v} = k$$

| | | Plan P | Espace *E* |
|---|---|---|---|
| $\vec{v} = \vec{0}$ | $k - g(0) = 0$ | $P$ | $E$ |
| | $k - g(0) \neq 0$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $\vec{v} \neq \vec{0}$ | | une droite orthogonale à $(O, \vec{v})$ | un plan orthogonal à $(O, \vec{v})$. |

*Deuxième cas :*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0 \quad g(M) = g(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) MG^2 = k \quad MG^2 = \frac{k - g(G)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

où $G = \text{bar}\left\{(A_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right\}$.

| | **Plan P** | **Espace *E*** |
|---|---|---|
| $\frac{k - g(G)}{\Sigma\alpha_i} < 0$ | $\varnothing$ | $\varnothing$ |
| $\frac{k - g(G)}{\Sigma\alpha_i} = 0$ | $\{G\}$ | $\{G\}$ |
| $\frac{k - g(G)}{\Sigma\alpha_i} > 0$ | le cercle de centre $G$ et de rayon $\sqrt{\frac{k - g(G)}{\Sigma\alpha_i}}$ | la sphère de centre $G$ et de rayon $\sqrt{\frac{k - g(G)}{\Sigma\alpha_i}}$ |

# ANGLES - TRIGONOMÉTRIE

## ANGLES

### Définitions

• **Plan orienté**

Orienter le plan, c'est choisir le même sens de parcours sur tous les cercles du plan. Ce sens est appelé sens direct (trigonométrique ou positif).

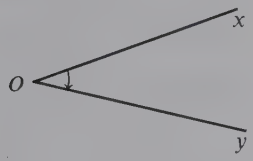
Le sens contraire est appelé sens indirect (ou rétrograde).

• **Cercle trigonométrique**

On appelle cercle trigonométrique un cercle orienté de rayon 1 et de sens direct.

• **Angle orienté**

Un couple $(Ox, Oy)$ de demi-droites définit un angle orienté de demi-droites.




$Ox$ est le côté origine,
$Oy$ est le côté extrémité,
$O$ est le sommet.

Fig. 1

Angle nul :
$(Ox, Ox)$ est l'angle nul.

Angle droit :
$(Ox, Oy)$ est droit si $Ox$ et $Oy$ sont perpendiculaires.

Angle plat :
$(Ox, Oy)$ est plat si $Ox$ et $Oy$ sont opposés.

**Angle orienté de vecteurs :** On appelle angle orienté de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'angle orienté des demi-droites de directions $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

### Arc géométrique

**Définitions**

• Soit $A$ et $B$ deux points d'un cercle $\mathcal{C}$; $(AB)$ partage le plan en deux demi-plans. L'ensemble des points du cercle situés dans chacun des demi-plans fermés est appelé arc $AB$.

• L'arc géométrique est, des deux arcs définis ci-dessus, celui qui a la plus petite longueur : on note $\overset{\frown}{AB}$.

• Mesure d'un arc

Soit un arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur $l$ d'un cercle de rayon $R$;
on appelle *mesure de* $\overset{\frown}{AB}$ le réel $\frac{l}{R}$, mesuré en radian.

• Le radian

Le radian est la mesure d'un arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur égale au rayon du cercle.

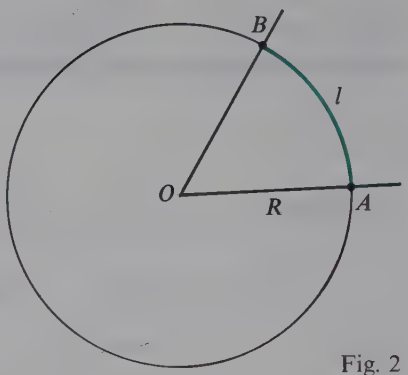



Fig. 2

**Propriété**

Soit $(Ox, Oy)$ un angle de demi-droites et soit deux cercles $C$ de rayon $R$ et $C'$ de rayon $R'$, de centre $O$.
$(Ox, Oy)$ intercepte $C$ en $A$ et $B$ et $C'$ en $A'$ et $B'$.
Si $l$ est la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ et $l'$ la longueur de $\overset{\frown}{A'B'}$, alors on a $\frac{l'}{R'} = \frac{l}{R}$.

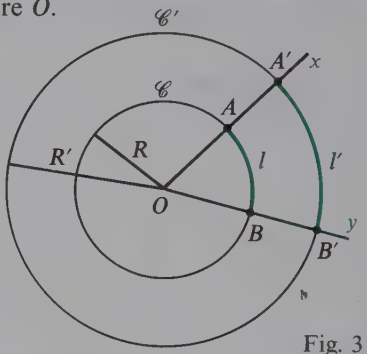



Fig. 3

## Mesures d'un angle

Soit $(Ox, Oy)$ un angle orienté de demi-droites; soit $C$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$. $Ox$ coupe $C$ en $A$ et $Oy$ coupe $C$ en $B$; soit $l$ la longueur de $\overset{\frown}{AB}$.

• La mesure principale de l'angle $(Ox, Oy)$ non orienté est $\frac{l}{R}$.

• La mesure principale de l'angle $(Ox, Oy)$ orienté est $+\frac{l}{R}$ si $(Ox, Oy)$ est orienté dans le sens positif et $-\frac{l}{R}$ si $(Ox, Oy)$ est orienté dans le sens négatif.

Il existe une unique mesure $\theta$ d'un angle de demi-droites $(Ox, Oy)$, appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$; c'est la mesure principale de $(Ox, Oy)$.

**Définition**

Les réels $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sont les mesures d'un angle orienté de mesure principale $\theta$.

## Propriétés

- Si $\theta$ est la mesure principale de $(Ox, Oy)$ non plat, alors $-\theta$ est la mesure principale de $(Oy, Ox)$.
- Si $\alpha$ est une mesure de $(Ox, Oy)$ et $\beta$ est une mesure de $(Oy, Oz)$ alors $\alpha + \beta$ est une mesure de $(Ox, Oz)$ (Relation de Chasles).

**Angles complémentaires – Supplémentaires.**

- Deux angles sont dits complémentaires si la somme de leurs mesures est égale à la mesure d'un angle droit.
- Deux angles sont dits supplémentaires si la somme de leurs mesures est égale à la mesure d'un angle plat.

## Angle au centre – angle inscrit

- Un angle au centre d'un cercle $C$ est un angle de sommet le centre du cercle.
- Un angle inscrit dans un cercle $C$ est un angle de sommet un point du cercle et dont les côtés coupent $C$ ou lui sont tangents.

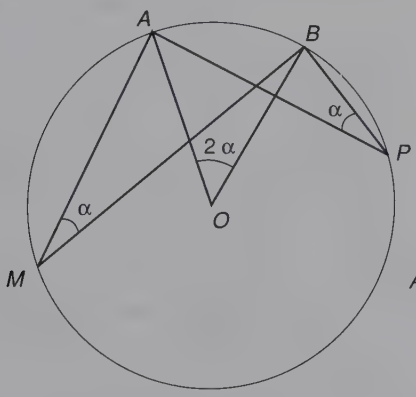



Fig. 4

- Si un angle au centre et un angle inscrit interceptent un même arc orienté, alors la mesure de l'angle au centre est double de la mesure de l'angle inscrit (modulo $2\pi$).
- Si deux angles inscrits interceptent le même arc orienté, alors ils ont même mesure (modulo $\pi$).

## Ensemble des points $M$ tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad (2\pi)$

• L'ensemble des points $M$ du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0$ est la droite $(AB)$ privée du segment $[AB]$.

• L'ensemble des points $M$ du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$ est le segment $]AB[$.

• L'ensemble des points $M$ du plan tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$, $\alpha \in ]-\pi, \pi[ - \{0\}$, est un arc de cercle d'extrémité $A$, $B$ privé de $A$ et $B$.

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$

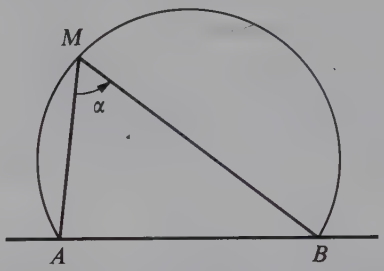



Fig. 5

• L'ensemble des points $M$ tels que $\widehat{AMB} = \alpha$ où $\alpha \in ]0, \pi[$ est la réunion de deux arcs de cercle d'extrémités $A$ et $B$.

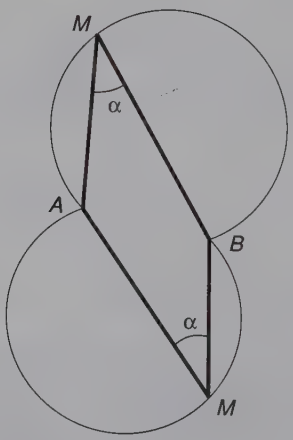



Fig. 6

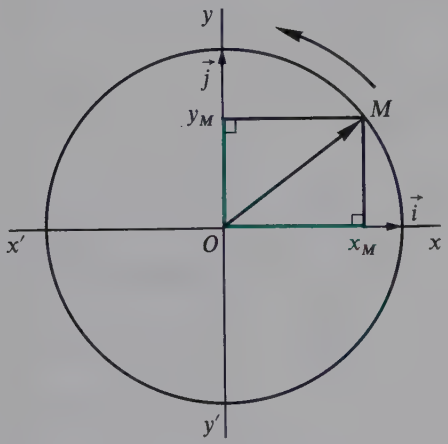
# TRIGONOMÉTRIE

## Définitions

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal direct $\left(\text{mes}\,(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}\right)$.

### Cosinus et sinus d'un angle orienté

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique et $M$ un point de $\mathcal{C}$.




$x_M = \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$
$y_M = \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

Fig. 7

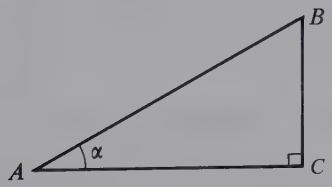
### Cosinus et sinus d'un réel

On appelle cosinus et sinus d'un réel $t$, le cosinus et le sinus d'un angle orienté de mesure $t$ en radian. On note cos $t$ et sin $t$.

## Formules

$$t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$
$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \sin t \leqslant 1.$$

**Dans le triangle $ABC$ rectangle en $C$ :**




$\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$
$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$
$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}$

Fig. 8

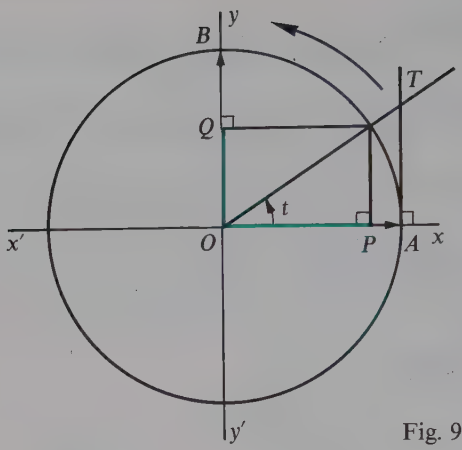



Fig. 9

$\cos t = \overline{OP}$
$\sin t = \overline{OQ}$
$\tan t = \overline{AT}$

## Quelques valeurs simples

| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **cos $t$** | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| **sin $t$** | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| **tan $t$** | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | n'est pas défini |

Définition :

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

pour

$$t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Angles associés

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(t+2\pi) = \cos t$ | $\sin(t+2\pi) = \sin t$ | $\tan(t+2\pi) = \tan t$ |
| $\cos(t+\pi) = -\cos t$ | $\sin(t+\pi) = -\sin t$ | $\tan(t+\pi) = \tan t$ |
| $\cos(\pi-t) = -\cos t$ | $\sin(\pi-t) = \sin t$ | $\tan(\pi-t) = -\tan t$ |
| $\cos(-t) = \cos t$ | $\sin(-t) = -\sin t$ | $\tan(-t) = -\tan t$ |
| $\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \sin t$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \cos t$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = \frac{1}{\tan t}$ |
| $\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$ | $\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ | $\tan\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan t}$ |

## Formules d'addition

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b \qquad \tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-(\tan a)(\tan b)}$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b \qquad \tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+(\tan a)(\tan b)}$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

## Formules de duplication

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a \qquad \cos^2 a=\frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a=\frac{1-\cos 2a}{2}$$

$$\sin 2a=2\sin a\cos a \qquad \tan 2a=\frac{2\tan a}{1-(\tan a)^2}$$

$$\sin a=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} \qquad 1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2} \qquad 1-\cos a=2\sin^2\frac{a}{2}$$

$$\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a \qquad \sin 3a=-4\sin^3 a+3\sin a$$

## Autres formules

$$1+\tan^2 a=\frac{1}{\cos^2 a} \qquad 1+\frac{1}{\tan^2 a}=\frac{1}{\sin^2 a}$$

## Somme et produit

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

### Expressions en fonction de $\tan \frac{a}{2}$

On pose $t = \tan \frac{a}{2}$.

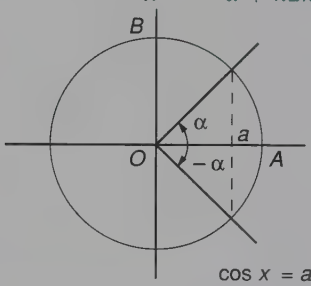
Alors :

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad \sin a = \frac{2t}{1 + t^2}; \quad \tan a = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

## Équations trigonométriques

• Soit $-1 \leqslant a \leqslant 1$
soit $\alpha$ tel que $\cos \alpha = a$.
$\cos x = a$ équivaut à $\cos x = \cos \alpha$.

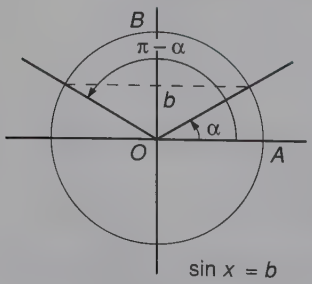
$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$




$\cos x = a$ Fig. 10

• soit $-1 \leqslant b \leqslant 1$
soit $\alpha$ tel que $\sin \alpha = b$.
$\sin x = b$ équivaut à $\sin x = \sin \alpha$.

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$




$\sin x = b$

Fig. 11

• soit $c \in \mathbb{R}$.
soit $\alpha$ tel que $\tan \alpha = c$.
$\tan x = c$ équivaut à $\tan x = \tan \alpha$.
équivaut à $x = \alpha + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

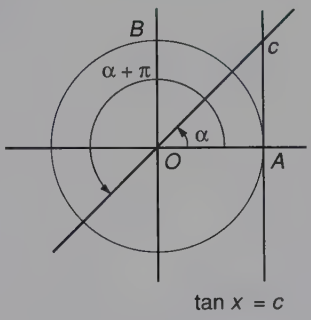



Fig. 12

**Exemple**
Résoudre dans $R$ l'équation $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.
Cette équation est équivalente à : $2 \cos 2x \,.\, \cos x = \cos 2x$
c'est-à-dire $\cos 2x(2 \cos x - 1) = 0$.

Soit $\cos 2x = 0$ soit $\cos x = \frac{1}{2}$.

D'où :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + k'2\pi, -\frac{\pi}{3} + k''2\pi \right\} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k' \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad k'' \in \mathbb{Z}$$

# GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

## AXIOMES

• Par trois points non alignés $A$, $B$ et $C$ de l'espace, il passe un plan et un seul noté $(ABC)$.

• Toute droite passant par deux points distincts $A$ et $B$ d'un plan $\mathscr{P}$ est incluse dans ce plan.

• Tout plan partage l'espace en deux demi-espaces $E_1$ et $E_2$.
Soit $[AB]$ un segment :
. si $A \in E_1$ et $B \in E_1$, alors $[AB]$ est inclus dans $E_1$
. si $A \in E_1$ et $B \in E_2$, alors $[AB]$ et $\mathscr{P}$ ont un et un seul point d'intersection (axiomes de convexité).

• Les théorèmes de géométrie plane restent valables dans tout plan de l'espace.

## DÉTERMINATION D'UN PLAN




Fig. 1

trois points non alignés




Fig. 2

une droite et un point extérieur à cette droite

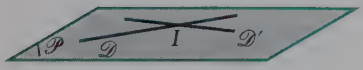



Fig. 3

deux droites sécantes




Fig. 4

deux droites strictement parallèles

## PARALLÉLISME

### Droites parallèles

Deux droites sont dites *parallèles* lorsqu'elles sont coplanaires et non sécantes.

On note $\mathscr{D} \parallel \mathscr{D}'$.

**Propriétés**

Il existe une droite et une seule passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.

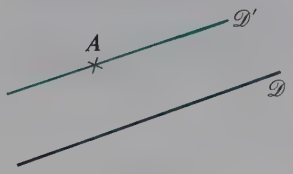



Fig. 5

Si deux droites sont parallèles, tout plan sécant à l'une est sécant à l'autre.

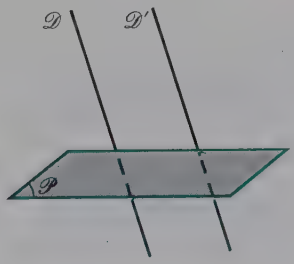



Fig. 6

Si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

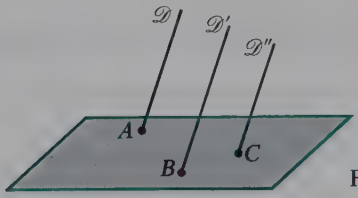



Fig. 7

## Droite et plan parallèles

Une droite et un plan sont dits parallèles lorsque :
soit la droite est contenue dans le plan;
soit la droite et le plan n'ont aucun point commun. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{D}$.

**Propriétés**

Si deux droites sont parallèles, tout plan parallèle à l'une est parallèle à l'autre.

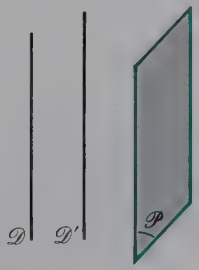



Fig. 8

Si une droite est parallèle à un plan, toute parallèle à cette droite passant par un point du plan est contenue dans ce plan.




Fig. 9

Soit une droite $\mathscr{D}$ parallèle à un plan $\mathscr{P}$; soit $\mathscr{P}'$ un plan contenant $\mathscr{D}$ et sécant avec $\mathscr{P}$, alors la droite d'intersection des deux plans est parallèle à $\mathscr{D}$.

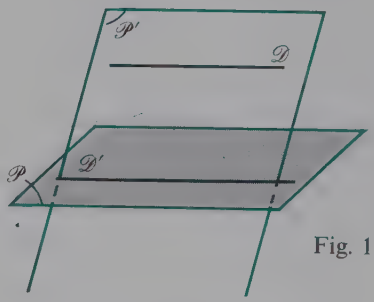



Fig. 10

## Plans parallèles

Deux plans sont parallèles lorsque :
soit ils sont confondus,
soit ils n'ont aucun point commun. On note $\mathscr{P} // \mathscr{P}'$

**Propriétés**

Si deux plans sont parallèles, toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.




Fig. 11

Si deux plans sont parallèles, tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.

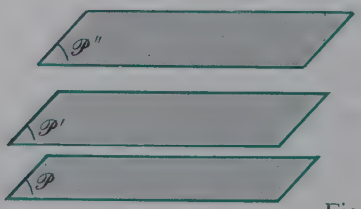



Fig. 12

Il existe un plan et un seul passant par un point donné et parallèle à un plan donné.

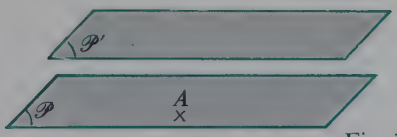



Fig. 13

Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

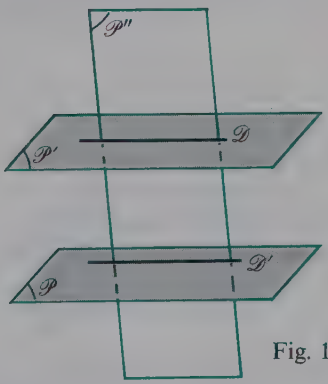



Fig. 14

Si deux plans sont parallèles, toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

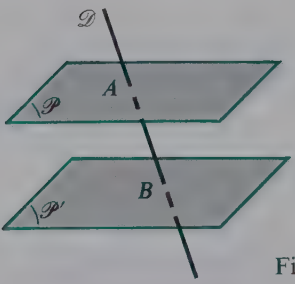



Fig. 15

# ORTHOGONALITÉ

## Droites orthogonales

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles en un point quelconque sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.

**Propriétés**

Si deux droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

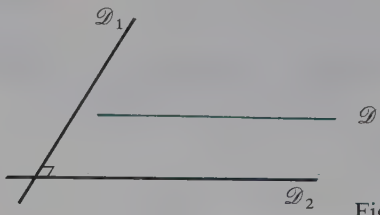



Fig. 16

Si deux droites sont orthogonales, toute parallèle à l'une est orthogonale à toute parallèle à l'autre.

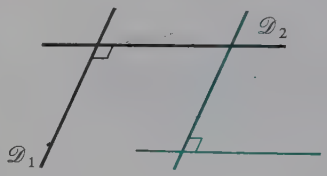



Fig. 17

## Droite et plan orthogonaux

Une droite est dite orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite du plan.

**Propriétés**

Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

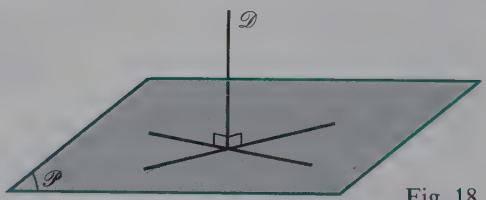



Fig. 18

Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.

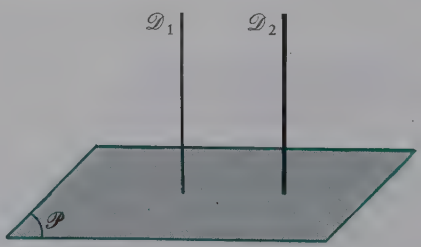



Fig. 19

Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

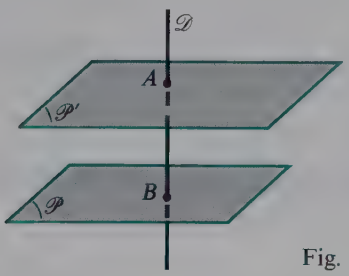



Fig. 20

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

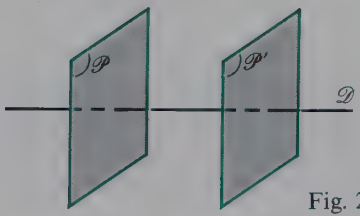



Fig. 21

Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.

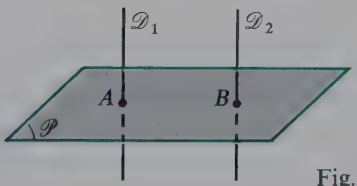



Fig. 22

Il existe un plan et un seul passant par un point donné et orthogonal à une droite donnée.

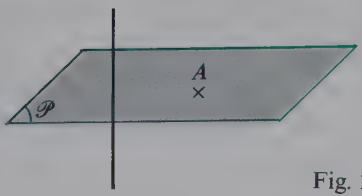



Fig. 23

Il existe une droite et une seule passant par un point donné et orthogonale à un plan donné.

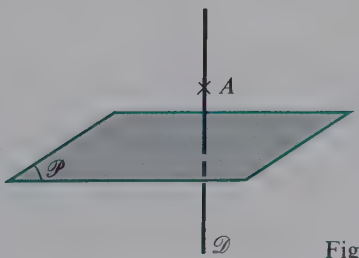



Fig. 24

Le plan médiateur du segment $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de $A$ et $B$. C'est le plan orthogonal à $(AB)$ et passant par le milieu de $[AB]$.

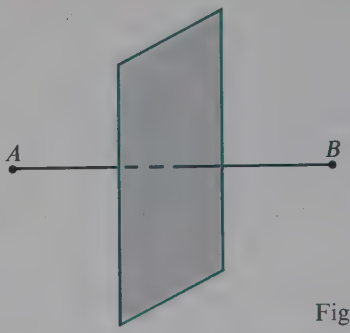



Fig. 25

## Plans perpendiculaires

Deux plans sont dits perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

**Propriétés**

Si deux plans sont perpendiculaires, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à toute droite orthogonale à l'autre.

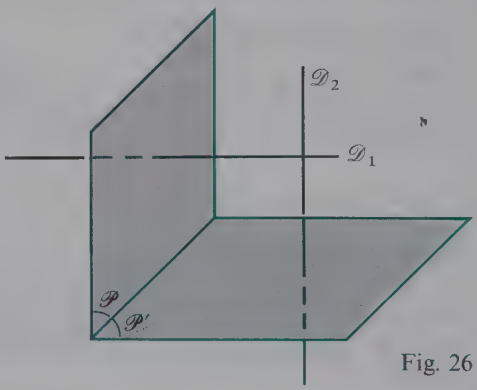



Fig. 26

Si un plan est perpendiculaire à deux plans sécants en une droite, alors il est orthogonal à cette droite.

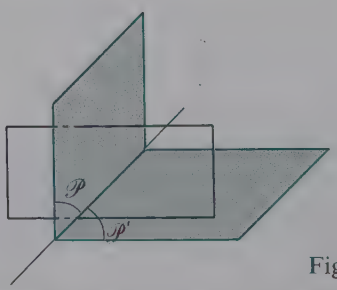



Fig. 27

# DROITES ET PLANS DANS UN REPÈRE DE L'ESPACE : ÉQUATIONS

Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

## REPÈRE DE L'ESPACE

### Base

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, non nuls et non colinéaires deux à deux, forment une base de l'espace.

### Repère cartésien

Soit un point $O$ de l'espace, une base de trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{W}^3$, alors $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère cartésien de l'espace.

*Remarque :*
Soit quatre points de l'espace $A$, $B$, $C$, $D$ non coplanaires, le quadruplet $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est le repère cartésien de l'espace.

### Coordonnées d'un vecteur

Soit une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u} \in \mathcal{W}$, il existe un triplet unique de réels $(x, y, z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Ces réels $x$, $y$, $z$ sont appelés les coordonnées de $\vec{u}$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

*Remarque :*
Soit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$, alors le vecteur :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$$

a pour coordonnées $x$, $y$ et $z$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. On dit aussi que $M$ a pour abscisse $x$, pour ordonnée $y$, pour cote $z$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

## Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires s'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que :

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{w} \quad \text{ou} \quad \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.$$

## Condition de colinéarité

Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{W}$, $\vec{v}(x', y', z') \in \mathcal{W}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si deux des trois conditions suivantes sont réalisées :

$$xy' - yx' = 0, \quad yz' - zy' = 0, \quad zx' - xz' = 0.$$

## Vecteur défini par un bipoint; milieu d'un bipoint

Soit dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

ou

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

$I$ milieu du bipoint $(A, B)$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

## Repère orthonormal (orthonormé)

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont normés et deux à deux orthogonaux :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$

## Produit scalaire (expression analytique)

Soit $\vec{u}(x, y, z) \in \mathcal{W}$, $\vec{v}(x', y', z') \in \mathcal{W}$ dans une base orthonormale, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

### Distance entre deux points dans un repère orthonormal

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace $\mathcal{E}$ dans un repère orthonormal, alors :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

## DROITES DE L'ESPACE

### Définition

Soit $A$ un point de l'espace $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$, alors la droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ (notée $D(A, \vec{u})$) est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ $(k \in \mathbb{R})$.

### Droites parallèles

Deux droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(A', \vec{u}')$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ($\vec{u} = k\vec{u}'$ ou $\vec{u}' = k\vec{u}$).

### Droites orthogonales

Deux droites $D(A, \vec{u})$ et $D'(A', \vec{u}')$ sont orthogonales si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

## PLANS DE L'ESPACE

### Définition

Soit $A$ un point de l'espace $\mathcal{E}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{V}$, alors le plan passant par $A$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (noté $P(A, \vec{u}, \vec{v})$) est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, $(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R})$.

## Intersection de deux plans

Soit deux plans $P$ et $P'$ d'équation respective $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, dans un repère de l'espace.

Soit le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases}$

S'il existe un réel $k$ tel que $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$ et $d \neq kd'$, alors $P$ et $P'$ sont strictement parallèles.
S'il existe un réel $k$ tel que $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$ et $d = kd'$, alors $P$ et $P'$ sont confondus.
Sinon, $P$ et $P'$ sont sécants selon une droite.

## Vecteur normal d'un plan

Un vecteur $\vec{u}$ non nul est normal à un plan $P$ (ou orthogonal à $P$) s'il est orthogonal à tout vecteur de $P$.
Dans un repère orthonormal, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan.
$\vec{u}(a, b, c)$ est un vecteur normal de $P$.

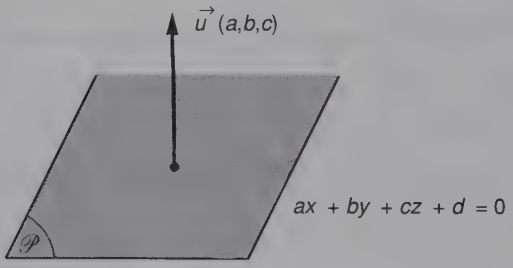



Fig. 1

## Plans perpendiculaires

Deux plans $P$ et $P'$ d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ dans un repère orthonormal, sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{u}'(a', b', c')$ sont orthogonaux c'est-à-dire si $aa' + bb' + cc' = 0$.

## Distance d'un point à un plan

Soit le point $A(x_A, y_A, z_A)$, le plan $P$ d'équation :
$ax + by + cz + d = 0$ dans un repère orthonormal, alors la distance de $A$ à $P$ est : $d(A, P) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

## Droite et plan orthogonaux

Une droite $D(A, \vec{u})$ et un plan $P$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}$ est colinéaire à tout vecteur normal de $P$.
Une droite $D(A, \vec{u})$ et un plan $P(A', \vec{v}, \vec{v}')$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$.

### Équations

L'espace est muni d'un repère.

- **Équations paramétriques de la droite $(A, \vec{u})$**

$$\begin{cases} x = x_A + k\alpha \\ y = y_A + k\beta \\ z = z_A + k\gamma \end{cases} \quad A(x_A, y_A, z_A) \quad \text{et} \quad \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma).$$

- **Équations cartésiennes d'une droite $D$**

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

si le repère est orthonormal les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux à $D$.

- **Équations paramétriques du plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$**

$$\begin{cases} x = x_A + k\alpha + k'\alpha' \\ y = y_A + k\beta + k'\beta' \\ z = z_A + k\gamma + k'\gamma' \end{cases}$$

$A(x_A, y_A, z_A) \quad \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma) \quad \vec{v}(\alpha', \beta', \gamma').$

- **Équation cartésienne d'un plan $P$**

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

si le repère est orthonormal, $\vec{u}(a, b, c)$ est orthogonal à $P$.

**Exemple :**

$$A(3, 2, -1) \quad B(-1, 1, 0) \quad C(1, 0, 5).$$

Équations paramétriques du plan $ABC$

$$\begin{cases} x = 3 - 4k - 2k' \\ y = 2 - k - 2k' \\ z = -1 + k + 6k'. \end{cases}$$

Équation cartésienne du plan $ABC$ :

$$2x - 11y - 3z + 13 = 0.$$

# TRANSFORMATIONS DU PLAN

## QUELQUES DÉFINITIONS

- Une *transformation* du plan $\mathcal{P}$ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{P}$.
- On appelle *point invariant ou point fixe* d'une application $f$ tout point qui a pour image lui-même.
- Une isométrie est une transformation du plan affine euclidien $\mathcal{P}$ qui conserve les distances c'est-à-dire : si $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$, alors $d(A, B) = d(A', B')$.
- Un ensemble $E$ de points est dit *invariant point par point* par une application si tout point de $E$ est invariant par cette application.
- Un ensemble $E$ de points est dit *globalement invariant* par une application $f$ si $f(E) = E$.

### Translation

*La translation de vecteur* $\vec{u}$, notée $t_{\vec{u}}$, est la transformation du plan qui à tout point $M$ associe $M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

$$t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M \mapsto M' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

*Remarque :* $t_{\vec{0}} = Id_{\mathcal{P}}$ (application identique du plan).

### Symétrie centrale

*La symétrie de centre* $O$, notée $S_O$, est la transformation du plan qui à tout point $M$ associe $M'$, tel que $O$ est le milieu de $[MM']$.

$$S_O : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$$
$$M \mapsto M' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OM'}$$

### Symétrie orthogonale ou réflexion

*La symétrie orthogonale d'axe* $D$, notée $S_D$, est la transformation du plan qui :

– laisse invariant tout point de $D$;

– à tout point $M$ associe $M'$ tel que $D$ est la médiatrice de $[MM']$.

$S_D : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$
$M \mapsto M' \quad (M \notin D)$ tel que $D$ est la médiatrice de $[MM']$

## Homothétie

*L'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$* (réel non nul) est la transformation du plan qui à tout point $M$ associe $M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. On la note $h(O, k)$.

$h(O, k) : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$
$M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

*Remarques :* $h(O, 1) = Id_P$ et $h(O, -1) = S_O$.

## Rotation (le plan est supposé orienté)

La *rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$*, notée $r(O, \alpha)$, est la transformation du plan qui :
- laisse $O$ invariant
- à tout point $M$ différent de $O$ associe $M'$, intersection du cercle de centre $O$ et de rayon $OM$, et de la $\frac{1}{2}$ droite $[Oy)$ telle que $([OM), [Oy)) = \alpha$.

$r(O, \alpha) : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$
$M \mapsto M'$ tel que $\begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$

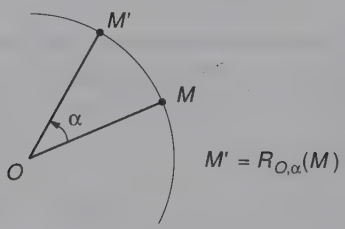



Fig. 1

$r\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est appelé quart de tour direct.

$r\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ est appelé quart de tour indirect.

$r(0, \pi)$ est appelé demi-tour.

*Remarques :* $r(O, 2k\pi) = Id_{\mathscr{P}}$, $k \in \mathbb{Z}$. $r(O, (2k+1)\pi) = S_O$, $k \in \mathbb{Z}$.

# PROPRIÉTÉS

## Points invariants

- Translation de vecteur $\vec{u}$ : si $\vec{u} \neq \vec{0}$ il n'y a pas de point invariant; si $\vec{u} = \vec{0}$, $t_{\vec{u}} = Id_{\mathcal{P}}$ et tout point est invariant.
- Symétrie centrale de centre $O$ : $O$ est le seul point invariant.
- Symétrie orthogonale d'axe $D$ : la droite $D$ est invariante point par point.
- Homothétie de centre $O$ et de rapport $k \neq 0$ : si $k \neq 1$, $O$ est le seul point invariant; si $k = 1$, $h(0, 1) = Id_{\mathcal{P}}$ et tout point est invariant.
- Rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$ : si $\alpha \neq 0$, $O$ est le seul point invariant; si $\alpha = 0$ tout point est invariant.

## Images

Par une translation, une symétrie centrale, une symétrie orthogonale (réflexion), une homothétie et une rotation, l'image d'une droite est une droite, l'image d'un segment est un segment, l'image d'une demi-droite est une demi-droite et l'image d'un cercle est un cercle.

## Conservation

| Conservation | Translation | Symétrie orthogonale (réflexion) | Homothétie de rapport $k$ | Rotation |
|---|---|---|---|---|
| Distance | oui | oui | non sauf si $\|k\| = 1$ | oui |
| Milieu | oui | oui | oui | oui |
| Barycentre | oui | oui | oui | oui |
| Parallélisme | oui | oui | oui | oui |
| Orthogonalité | oui | oui | oui | oui |
| Angles géométriques | oui | oui | oui | oui |
| Angles orientés | oui | non | oui | oui |

# COMPOSITION DE TRANSFORMATIONS

## Composées et réciproques

Quelles que soient les translations $t_{\vec{u}}$, $t_{\vec{v}}$, $t_{\vec{w}}$, les symétries centrales $S_O$, $S_{O'}$ les symétries orthogonales d'axes $D$ et $D'$, les homothéties $h(O, k)$, $h'(O, k')$ et les rotations $r(O, \alpha)$ et $r'(O, \alpha')$, on a :

$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$ $\qquad t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}$

$(t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}) \circ t_{\vec{w}} = t_{\vec{u}} \circ (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}})$

$S_{O'} \circ S_O = t_{2\overrightarrow{OO'}}$ $\qquad S_O^{-1} = S_O$

$S_{D'} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{IJ}}$ si $D \parallel D'$ et où $I \in D$ et $J$ est le projeté orthogonal de $I$ sur $D'$ (fig. 2).

$S_{D'} \circ S_D = r(O, 2\alpha)$ si $D \nparallel D'$ et où $O$ est le point d'intersection de $D$ et $D'$ et $\alpha = (D, D')$ modulo $\pi$ (fig. 3).

$h(O, k') \circ h(O, k) = h(O, kk')$ $\qquad h^{-1}(O, k) = h\left(O, \frac{1}{k}\right)$

$r(O, \alpha') \circ r(O, \alpha) = r(O, \alpha + \alpha')$ $\qquad r^{-1}(O, \alpha) = r(O, -\alpha)$.

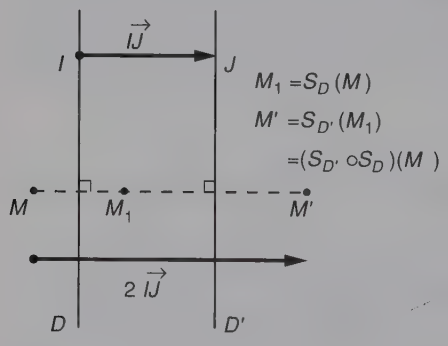



Fig. 2

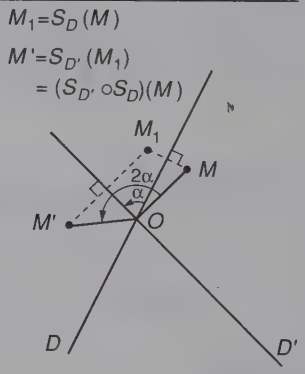



Fig. 3

## Décomposition

### Théorèmes

• Toute translation $t_{\vec{u}}$ se décompose d'une infinité de façons en produit de deux réflexions d'axes parallèles.

• Toute rotation $r(O, \alpha)$ se décompose d'une infinité de façons en produit de deux réflexions d'axes sécants en $O$.
Soit $D$ l'un des axes; l'autre axe $D'$ se déduit de $D$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{1}{2}\alpha$.

# EXPRESSIONS ANALYTIQUES DANS UN REPÈRE $(O, \vec{i}, \vec{j})$

## Translation $t_{\vec{u}}$

$\vec{u}(a, b) \quad M(x, y) \quad M'(x', y') \quad$ où $\quad M' = t_{\vec{u}}(M)$

$$t_{\vec{u}} \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

## Homothétie $h(\Omega, k)$

$\Omega(a, b) \quad M(x, y) \quad M'(x', y') \quad$ où $\quad M' = h(M)$

$$h(\Omega, k) \begin{cases} x' = kx + a(1 - k) \\ y' = ky + b(1 - k). \end{cases}$$

## Symétrie de centre $\Omega$

$\Omega(a, b) \quad M(x, y) \quad M'(x', y') \quad$ où $\quad M' = S_\Omega(M)$

$$S_\Omega \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b. \end{cases}$$

## Rotation d'angle $\alpha$

$M(x, y) \quad M'(x', y') \quad$ où $\quad M' = r(M) \quad \alpha = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$

$$r_\Omega \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha + a \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha + b. \end{cases}$$

$O' = r(0) \quad$ avec $\quad O'(a, b)$

# TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

## Points invariants

| Transformations | Points invariants<br>Soit $I$ l'ensemble<br>des points invariants |
|---|---|
| Translation de vecteur $\vec{u}$ | • si $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\quad I = \varnothing$<br>• si $\vec{u} = \vec{0}$ $\quad I = \mathcal{P}$ |
| Symétrie centrale de centre $O$ | $I = \{O\}$ |
| Symétrie orthogonale d'axe $D$ | $I = D$ |
| Homothétie de centre $O$ | • si $k \neq 1$ $\quad I = \{O\}$<br>• si $k = 1$ $\quad I = \mathcal{P}$ |
| Rotation de centre $O$ et d'angle $\alpha$ | • si $\alpha \neq 0\ (2\pi)$ $\quad I = \{O\}$<br>• si $\alpha = 0\ (2\pi)$ $\quad I = \mathcal{P}$ |

Images $f(A) = A'$, $\quad f(B) = B'$

| $f$ | Droite $(AB)$ | Vecteur $\overrightarrow{AB}$ | Distance $AB$ | Cercle de centre $A$ de rayon $AB$ |
|---|---|---|---|---|
| **Translation** | $(A'B') \,//\, (AB)$ | $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ | $A'B' = AB$ | cercle de centre $A'$ de rayon $AB$ |
| **Symétrie centrale** | $(A'B') \,//\, (AB)$ | $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ | $A'B' = AB$ | cercle de centre $A'$ de rayon $AB$ |
| **Symétrie orthogonale** | $(A'B')$ | $\overrightarrow{A'B'}$ | $A'B' = AB$ | cercle de centre $A'$ de rayon $AB$ |
| **Homothétie de rapport $k$** | $(A'B') \,//\, (AB)$ | $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ | $A'B' = \lvert k \rvert AB$ | cercle de centre $A'$ de rayon $\lvert k \rvert\, AB$ |
| **Rotation** | $(A'B')$ | $\overrightarrow{A'B'}$ | $A'B' = AB$ | cercle de centre $A'$ de rayon $AB$ |

# ISOMÉTRIES DU PLAN

## ISOMÉTRIE DU PLAN

Une *isométrie du plan* est une transformation du plan (bijection) qui conserve les distances. Les translations, symétries centrales, symétries orthogonales (réflexions), les rotations sont des isométries.

### Théorème

La composée de deux isométries et la réciproque d'une isométrie sont des isométries.

### Images

Les isométries transforment des droites en droites, des demi-droites en demi-droites, des segments en segments, des cercles en cercles.

### Conservation

Les isométries conservent les barycentres et les angles non orientés.

### Théorème

Étant donné un point $O$, une isométrie $f$ se décompose de manière unique en $f = t \circ u$ où $u$ est une isométrie laissant $O$ invariant et $t$ une translation.

### Déplacement (isométrie positive)

Un *déplacement* est une isométrie qui conserve les angles orientés.

### Antidéplacement (isométrie négative)

Un *antidéplacement* est une isométrie qui change les angles orientés en leurs opposés.

### Théorèmes

- Un déplacement est soit une translation soit une rotation.
- Étant donné des points $A$, $B$, $A'$, $B'$ tels que $A'B' = AB \neq 0$, il existe un seul déplacement qui transforme $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.

### Classification en fonction du nombre de points invariants

Soit $f$ une isométrie.

| **$f$ admet** | 1 et 1 seul point invariant $I$ | 2 points invariants distincts $A$ et $B$ et $f \neq Id$ | 3 points invariants non alignés |
|---|---|---|---|
| **$f$ est** | une rotation de centre $I$ | la réflexion d'axe $(AB)$ | l'identité du plan |

## TRANSFORMATION VECTORIELLE

### Définition

Soit $f$ une transformation du plan; on associe à $f$ une *transformation vectorielle* $\varphi$ définie par :

quel que soit $\overrightarrow{AB}$; $\varphi(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.

### Théorèmes

- Si $f$ est une isométrie, la transformation vectorielle $\varphi$ associée à $f$ conserve les normes des vecteurs c'est-à-dire $\|\vec{u}\| = \|\varphi(\vec{u})\|$ et le produit scalaire c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v})$.

- Soit $\varphi$ la transformation vectorielle associée à l'isométrie $f$ : $\varphi$ *est linéaire* car pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tout réel $\lambda$,

$$\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v}) \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u}).$$

• La transformation vectorielle associée à une composée $g \circ f$ est la composée des transformations vectorielles associées à $g$ et à $f$.

• La transformation vectorielle associée à la réciproque d'une isométrie $f$ est la réciproque de la transformation vectorielle associée à $f$.

| **Isométrie plane** | **Transformation vectorielle associée** |
|---|---|
| Translation<br>Réflexion<br>Rotation | Identité vectorielle<br>Réflexion vectorielle<br>Rotation vectorielle |
| Déplacement<br>Antidéplacement | Rotation vectorielle<br>Réflexion vectorielle |

# SIMILITUDES PLANES DIRECTES

## DÉFINITION

• Une *similitude directe plane* est une bijection transformant les distances dans un rapport donné et conservant les angles orientés. Soit $s$ une similitude plane directe, telle que pour tous points $A$, $B$, $M$ du plan on ait $s(A) = A'$, $s(B) = B'$, $s(M) = M'$ alors :

$$\begin{cases} A'B' = kAB. & k \text{ réel strictement positif est } \textit{le rapport de la similitude.} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}). \end{cases}$$

### Propriétés

• La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

• La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.

• Les similitudes directes transforment les droites en droites, les cercles en cercles.

• Les similitudes directes conservent le parallélisme.

• *Toute similitude directe de rapport $k$ $(k > 0)$ est le produit d'une homothétie de rapport $k$ et d'un déplacement.*

• Le produit de deux similitudes directes de rapport $k$ et $k'$ est une similitude de rapport $kk'$ $(k > 0\ k' > 0)$.

• La réciproque d'une similitude plane directe de rapport $k(k > 0)$ est une similitude plane directe de rapport $\frac{1}{k}$.

### Théorème

Étant donnés des points $A$, $B$, $A'$, $B'$ du plan tels que $AB \neq 0$ et $A'B' \neq 0$, *il existe une similitude directe et une seule transformant $A$ en $A'$ et $B$ en $B'$.*

# POINTS INVARIANTS

Soit $s$ une similitude plane directe.

| Points invariants | Nature de $s$ |
|---|---|
| Pas de point invariant | *Translation* de vecteur non nul. |
| Un seul point invariant $A$ | Composée d'une *homothétie* de centre $A$ et de rapport $k$ $(k > 0)$ et d'*une rotation* de centre $A$ et d'angle $\theta$. |
| Deux points invariants | *Identité du plan.* |

*Cas où il y a un seul point invariant*
Soit une similitude $s$ plane directe admettant un seul point invariant, ce point est appelé *centre de la similitude*
Alors $s$ est une similitude plane directe de centre $A$, de rapport $k (k \in \mathbb{R}_+^*)$, d'angle de mesure $\theta$, notée $s_{A,k,\theta}$.

$$s_{A,k,\theta} = h_{A,k} \circ \mathcal{R}_{A,\theta}.$$

Si $M \neq A$, $M' = S_{A,k,\theta}(M)$ équivaut à $\begin{cases} AM' = kAM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \theta + 2k\pi. \end{cases}$

## Propriétés

$$s_{A,k,\theta} = h_{A,k} \circ \mathcal{R}_{A,\theta} = \mathcal{R}_{A,\theta} \circ h_{A,k}.$$
$$s_{A,k,\theta} \circ s_{A,k',\theta'} = s_{A,kk',\theta+\theta'}.$$

# ÉCRITURE COMPLEXE

## Propriété

Une application $s$ de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une similitude plane directe si et seulement s'il existe deux nombres complexes $a$ et $b$, $a \neq 0$ tels que tout point $M$ d'affixe $z$ ait pour image $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = az + b.$$

- Si $a = 1$, alors $s$ est une *translation* de vecteur d'affixe $b$.
- Si $a \neq 1$, alors $s$ est une *similitude plane directe* de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$, de rapport $|a|$ et d'angle arg $a$.
- Cas particuliers :

si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, alors $s$ est une *rotation* de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle arg $a$;

si $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, alors $s$ est une *homothétie* de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $a$.

**Exemple**

$$z' = (1 - i)z + 2 - 3i$$

$s$ est la similitude directe plane de centre $\Omega(-3 - 2i)$, de rapport $|1 - i| = \sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

# PRODUIT VECTORIEL

Soit $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

## ORIENTATION DE L'ESPACE

Dans l'espace $\mathcal{E}$, toute demi-droite orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ et dont l'origine est un point de $\mathcal{P}$ définit une *orientation* de $\mathcal{E}$.
Il y a deux orientations possibles :

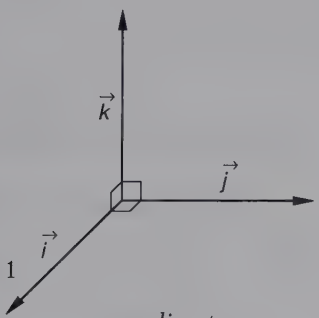



Fig. 1

*sens direct*

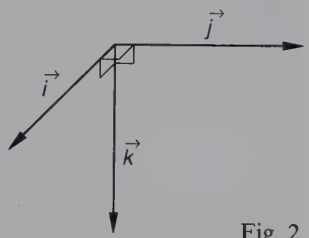



Fig. 2

*sens indirect*

## PRODUIT VECTORIEL

### Définition

*Le produit vectoriel de* $\vec{u}$ par $\vec{v}$,
noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$
est le vecteur $\vec{w}$ défini par :

- $\vec{w} = \vec{0}$ *si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires,
- $\begin{cases} \vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ forme une base directe} \\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin \alpha| \\ \text{avec } \alpha = (\vec{u}, \vec{v}), \end{cases}$

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

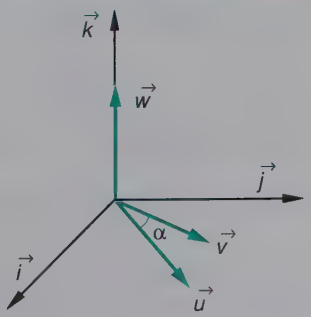



Fig. 3

## Propriétés

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires
Pour tout $(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.
Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ et $a$ un réel,

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$
$$(a\vec{u}) \wedge \vec{v} \quad = a(\vec{u} \wedge \vec{v}).$$

# EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL DANS UNE BASE ORTHONORMALE DIRECTE

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormale directe de $\mathcal{W}$ :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \qquad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

Soit $\vec{u}(a, b, c)$ $\vec{v}(a', b', c')$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormale directe, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - a'b)\vec{k},$$
$$= \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$$

# APPLICATIONS DU PRODUIT VECTORIEL

### Aire d'un parallélogramme

$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{AH}\|$
$\|\overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{DA}\| \sin \alpha.$
donc $\mathcal{A} = \|\overrightarrow{DC}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| \sin \alpha$
$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA}\|$
$\mathcal{A} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|.$

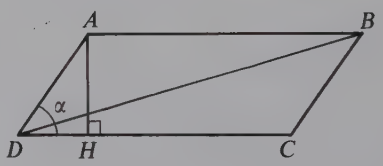



Fig. 4

### Aire d'un triangle

Soit le triangle $(ABD)$ $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$

### Vecteur normal à un plan

soit $(\vec{u}, \vec{v})$ une base d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

# CONIQUES

## DÉFINITIONS

Le plan étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On appelle *conique* une courbe plane d'équation :

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

où $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ et $F$ sont des réels fixés tels que $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.
On peut obtenir : l'ensemble vide, un point, une droite, la réunion de deux droites (sécantes ou parallèles), une parabole, une hyperbole ou une ellipse (en particulier un cercle).
Historiquement, les coniques sont les courbes obtenues par intersection d'un plan et d'un cône à base circulaire.
Coniques propres : ce sont les paraboles, ellipses (donc les cercles) et les hyperboles.
Coniques à centre : ce sont les ellipses (donc les cercles) et les hyperboles (coniques propres à centre de symétrie).

**Parabole, ellipse, hyperbole**

| S'il existe un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'équation puisse être mise sous la forme réduite : | $y = ax^2 + bx + c$ ou $y^2 = 2px$ | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
|---|---|---|---|
| La conique s'appelle | une *parabole* | une *ellipse* de centre $O$ | une *hyperbole* de centre $O$ |

## DÉFINITION PAR FOYER ET DIRECTRICE

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan $\mathscr{P}$ euclidien et $F$ un point de $\mathscr{P}$ n'appartenant pas à $\mathscr{D}$. Soit $e$ un réel strictement positif.
L'ensemble $\Gamma$ des points $M$ du plan tels que $\frac{d(M, F)}{d(M, \mathscr{D})} = e$ est une conique qui est :

- une *ellipse* (différente d'un cercle) si $0 < e < 1$;
- une *parabole* si $e = 1$;
- une *hyperbole* si $e > 1$.

On dit que $\Gamma$ est la conique de foyer $F$, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité $e$.

**Définition monofocale :**

la définition de la conique par $(F, \mathscr{D}, e)$ s'appelle la définition monofocale.

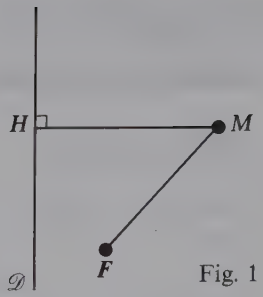
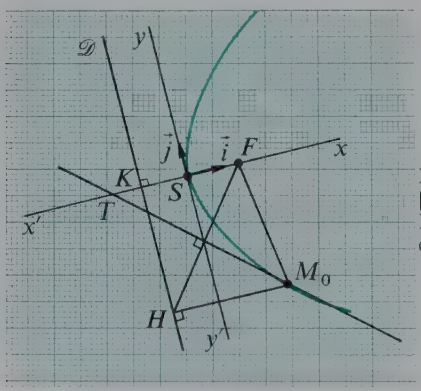



Fig. 1

# FOYERS ET DIRECTRICES

## La parabole

Soit $\Gamma$ une parabole du plan euclidien. Il existe un unique point $F$ et une unique droite $\mathscr{D}$ tels que $\Gamma$ soit la *parabole de foyer F et de directrice* $\mathscr{D}$. Si l'équation réduite est $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal on a :




$$y^2 = 2px \quad p > 0$$

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad D : x = -\frac{p}{2} \quad p = d(F, D)$$

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathscr{P} \,/\, \frac{d(M, F)}{d(M, \mathscr{D})} = 1 \right\}$$

La tangente $(M_0 T)$ est la médiatrice de $[FH]$. $S$ est le sommet de $\Gamma$.
La tangente en $M_0$ $(x_0, y_0)$ a pour équation : $yy_0 = p(x + x_0)$.

Fig. 2

## L'ellipse

Soit $\Gamma$ une ellipse (différente d'un cercle) de centre $O$. Il existe un unique réel $e, 0 < e < 1$, deux points $F$ et $F'$ symétriques par rapport à $O$, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ symétriques par rapport à $O$, tels que $\Gamma$ soit l'*ellipse de foyer F, de directrice* $\mathscr{D}$ et d'*excentricité e* ou de foyer $F'$, de directrice $\mathscr{D}'$ et d'excentricité $e$. Si l'équation réduite est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :

(on peut supposer $a > 0$ et $b > 0$)

*Premier cas*

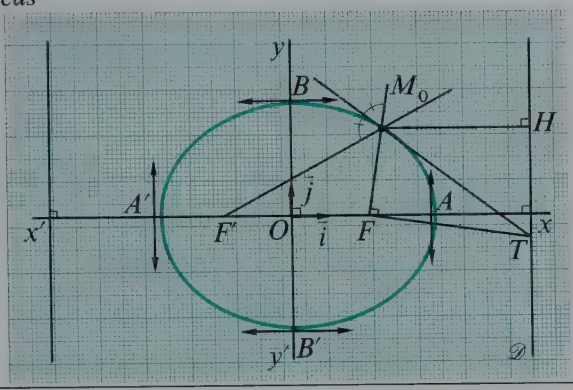



Fig. 3

Si $a > b$

$A(a, 0)$ $A'(-a, 0)$
$B(0, b)$ $B'(0, -b)$ } sommets

$(AA')$ est le *grand axe* (axe focal) $(BB')$ est le *petit axe*

$OA = OA' = a$ $AA' = 2a$
$OB = OB' = b$ $BB' = 2b$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad e = \frac{c}{a} < 1$$

$F(c, O)$ $F'(-c, O)$

$$\mathscr{D} : x = \frac{a^2}{c}, \quad \mathscr{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$$

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathscr{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e \right\}.$$

La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation : $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

La tangente $(M_0T)$ est la bissectrice extérieure de $\widehat{FM_0F'}$. De plus $(M_0F) \perp (FT)$.

*Deuxième cas*

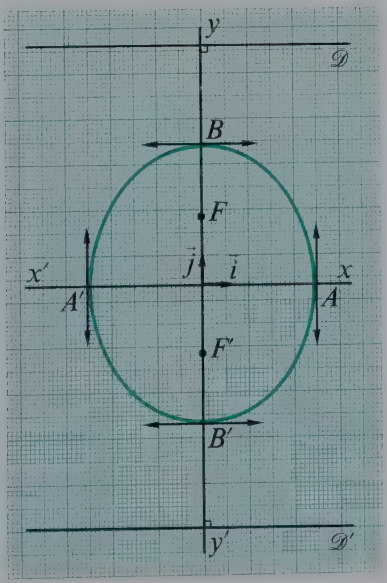



Fig. 4

si $a < b$ $\qquad \mathscr{D} : y = \dfrac{b^2}{c}, \quad \mathscr{D}' : y = -\dfrac{b^2}{c}$

$A(a, 0) \quad A'(-a, 0)$
$B(0, b) \quad B'(0, -b)$

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathfrak{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e \right\}$$

$(BB')$ est le grand axe (axe focal)
$(AA')$ est le petit axe.

$$OA = OA' = a \quad AA' = 2a.$$
$$OB = OB' = b \quad BB' = 2b.$$
$$c = \sqrt{b^2 - a^2} \quad e = \frac{c}{b} < 1$$
$$F(0, c) \quad F'(0, -c)$$

## L'hyperbole

Soit $\Gamma$ une hyperbole de centre $O$. Il existe un unique réel $e$, $e > 1$, deux points $F$ et $F'$ symétriques par rapport à $O$, deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ symétriques par rapport à $O$, tels que $\Gamma$ soit l'hyperbole de *foyer* $F$, de *directrice* $\mathscr{D}$ et d'*excentricité* $e$ ou de foyer $F'$, de directrice $\mathscr{D}'$ et d'excentricité $e$.

- Si l'équation réduite est $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a (on peut supposer $a > 0$ et $b > 0$) :

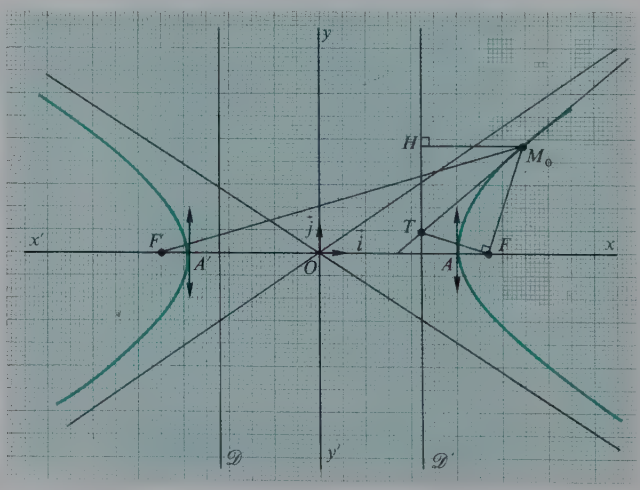



Fig. 5

Sommets $A(a, 0)$ $A'(-a, 0)$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $e = \dfrac{c}{a}$

$F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$

$$\Gamma = \left\{ M \in \mathcal{P} \,/\, \frac{MF}{MH} = e > 1 \right\}.$$

$\mathscr{D} : x = \dfrac{a^2}{c}$ $\mathscr{D}' : x = -\dfrac{a^2}{c}$

**Équations des asymptotes :** $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = -\dfrac{b}{a}x$

$(FF')$ : axe *focal* ou axe *transverse*.

La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$.

La tangente en $M_0$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{FM_0F'}$.
De plus $(M_0F) \perp (FT)$.

• Si l'équation réduite est $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a :
(on peut supposer $a > 0$ et $b > 0$).

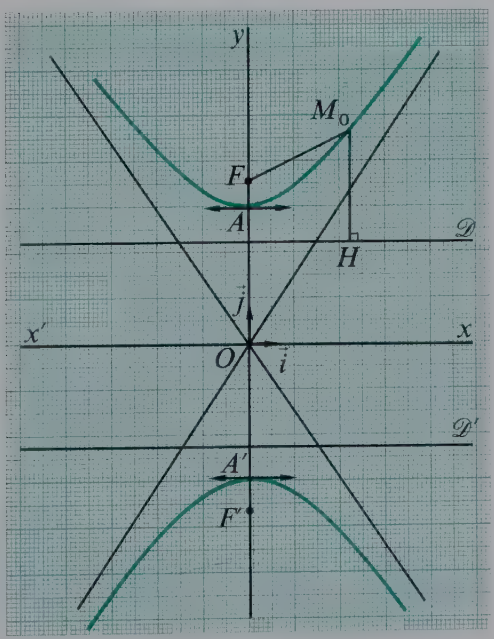



Fig. 6

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e = \frac{c}{b} \quad F(0, c) \quad F'(0, -c)$$

$$\mathscr{D} : y = \frac{b^2}{c} \quad \mathscr{D}' : y = -\frac{b^2}{c} \quad A(0, b) \quad A'(0, -b)$$

**Équations des asymptotes :** $y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x$

$(FF')$ : axe *focal* ou axe *transverse*.

La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

La tangente en $M_0$ est la bissectrice intérieure de $\widehat{FM_0F'}$.
De plus $(M_0F) \perp (FT)$.

- Équation d'une *hyperbole* rapportée à ses asymptotes $xy = k (k \in \mathbb{R}^*)$.

**Hyperbole équilatère**

L'hyperbole est dite équilatère si $a = b$ c'est-à-dire si les asymptotes sont orthogonales.

## DÉFINITION BIFOCALE

**Définition bifocale :**

Soit $F$ et $F'$ deux points du plan, distincts, et soit $a$ un réel.
Si $2a > FF'$, alors $\{ M \in \mathscr{P} / MF + MF' = 2a \}$ est une *ellipse* de longueur d'axe focal $2a$, de foyers $F$ et $F'$.
Si $0 < 2a < FF'$ alors $\{ M \in \mathscr{P} / |MF - MF'| = 2a \}$ est une *hyperbole* de longueur d'axe focal $2a$, de foyers $F$ et $F'$.

**Note à caractère historique**

Parabole veut dire « quelque chose d'égal ».
Ellipse veut dire « quelque chose en moins ».
Hyperbole veut dire « quelque chose en plus ».
En effet on peut mettre les équations sous la forme :

$y^2 = 2px$ pour la parabole;

$y^2 = 2px - \frac{2p}{d}x^2$ pour l'ellipse ($p > 0$ $d > 0$);

$y^2 = 2px + \frac{2p}{d}x^2$ pour l'hyperbole ($p > 0$ $d > 0$);

d'où les noms de parabole, ellipse, hyperbole.

# REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

- d'un cercle de centre $A(x_A, y_A)$ et de rayon $R$ :

$$\begin{cases} x = x_A + R \cos t \\ y = y_A + R \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- d'une ellipse de centre $A(x_A, y_A)$ de longueur d'axe $a$ et $b$ :

$$\begin{cases} x = x_A + a \cos t \\ y = y_A + b \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- d'une hyperbole de centre $A(x_A, y_A)$ :

$$\begin{cases} x = x_A + \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = y_A + \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

# COMBINATOIRE - DÉNOMBREMENTS

## Factorielle

$$n \in \mathbb{N}^* \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n;$$

on pose $0! = 1$,
on lit factorielle $n$.

## Arrangements

- $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n$,
  $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ $p$ facteurs.
- $A_n^0 = 1$, $A_n^1 = n$, $A_n^n = n!$ $n \in \mathbb{N}$.

## Combinaisons

- $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!}$ $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p \leqslant n$,
  $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$, on note aussi $\binom{n}{p}$.
- $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$ $n \in \mathbb{N}$.

## Formules

| | |
|---|---|
| $C_n^p = C_n^{n-p}$ $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ $0 < p < n$ | |
| $C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$ $0 < p \leqslant n$ | |

## Tirages

- Le nombre de façons d'extraire simultanément $p$ boules parmi $n$ ($p \leqslant n$) est $C_n^p$.

- Le nombre de façons d'extraire successivement $p$ boules parmi $n$ ($p \leqslant n$), sans remise, est $A_n^p$.
- Le nombre de façons d'extraire successivement $p$ boules parmi $n$, avec remise, est $n^p$.

**Exemple**

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules noires indiscernables.
Il y a $C_5^2 \times C_3^1$ façons d'extraire simultanément 2 boules rouges et 1 boule noire.
Il y a $C_3^2 \times A_5^2 \times A_3^1$ façons d'extraire successivement, sans remise, 2 boules rouges et 1 boule noire. (Les boules rouges peuvent sortir aux rangs 1, 2 ou 3 : il y a donc $C_3^2$ façons possibles. On aurait pu raisonner sur la boule noire, on aurait trouvé $C_3^1$ qui est égal à $C_3^2$.)
Il y a $C_3^2 5^2 3^1$ façons d'extraire successivement, avec remise, 2 boules rouges et 1 boule noire.

## Formule du binôme

- $x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p;$$

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^n y^n.$$

- **Applications**

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n \qquad (x = 1 \;\; y = 1).$$

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n \quad (x = 1 \;\; y = -1).$$

## Triangle de Pascal

| $n$ \ $p$ | 0 1 2 3 $p-1$ $p$ | $(a+b)^n$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $(a+b)^0 = 1$ |
| 1 | 1 1 | $(a+b)^1 = a+b$ |
| 2 | 1 2 1 | $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ |
| 3 | 1 3 3 1 | $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ |
| | | etc. |
| $n-1$ | $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ | |
| $n$ | $C_n^p$ | |

## Cardinaux

• Deux ensembles sont dits *équipotents* si et seulement s'il existe une bijection de l'un sur l'autre.

• On dit qu'un ensemble est *fini* si et seulement s'il est vide ou s'il est équipotent à $\{1, 2, ..., n\}$ ; $n$ s'appelle alors le cardinal de l'ensemble : Card $E = n$.
On pose card $\varnothing = 0$.

**Théorèmes**
Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis :

$$\text{card}\,(E \cup F) = \text{card}\,E + \text{card}\,F - \text{card}\,(E \cap F)$$

Si $E$ et $F$ sont *disjoints* ($E \cap F = \varnothing$) alors :

$$\text{card}\,(E \cup F) = \text{card}\,E + \text{card}\,F.$$

Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles finis

$$\text{card}\,(E \cup F \cup G) = \text{card}\,E + \text{card}\,F + \text{card}\,G - \text{card}\,(E \cap F) - \text{card}\,(E \cap G) - \text{card}\,(F \cap G) + \text{card}\,(E \cap F \cap G)$$

Si $E \subset F$, alors card $E \leqslant$ card $F$.
Si $P(E)$ est l'ensemble des parties de $E$, alors card $P(E) = 2^{\text{card}\,E}$.
Si $E \times F$ représente le *produit cartésien* de $E$ par $F$, alors card $(E \times F) = (\text{card}\,E)(\text{card}\,F)$.

## Applications, injections et bijections

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis : card $E = p$, card $F = n$ :
Il y a $n^p$ applications de $E$ dans $F$.
Il y a $A_n^p$ injections de $E$ dans $F$ si $p \leqslant n$. Si $p > n$ il n'y en a pas.
Il y a $p!$ bijections de $E$ sur $E$.
Une bijection de $E$ sur $E$ s'appelle une *permutation*.

# PROBABILITÉS

## DÉFINITIONS

- L'*univers* $\Omega$ est l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.
- Un *événement* est un sous-ensemble de $\Omega$.
- Un *événement élémentaire* est un singleton de $\Omega$.
- L'*événement impossible* est $\varnothing$.
- L'*événement certain* est $\Omega$.
- $A \cap B$ représente l'événement « $A$ et $B$ ».
- $A \cup B$ représente l'événement « $A$ ou $B$ ».
- $A$ et $B$ sont dits *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.
- L'*événement contraire* de $A$ est le complémentaire dans $\Omega$ de $A$ : on le note $\overline{A}$.

## PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT ÉLÉMENTAIRE

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$
A chaque événement élémentaire $\omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, on fait correspondre un réel $P(\omega_i)$ tel que :

- $0 \leqslant P(\omega_i) \quad 1 \leqslant i \leqslant n$
- $\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1.$

$P(\omega_i)$ est la probabilité de l'événement élémentaire $\{\omega_i\}$.

## PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

La probabilité d'un événement $A$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent $A$. On note cette *probabilité* $P(A)$

## Propriétés

$A$ et $B$ sont des événements de $\Omega$.

- $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$
- $p(\varnothing) = 0 \quad p(\Omega) = 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- si $A$ et $B$ sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Si $A_1, ..., A_n$ sont des événements *deux à deux disjoints* alors : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$.

*Remarque*
$A_1 \cap ... \cap A_n = \varnothing$ ne signifie pas que les événements sont deux à deux disjoints.

*Définition :* $A$ et $B$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

*Remarque*
Indépendant et incompatible ne sont pas synonymes.

## Équiprobabilité

Il y a *équiprobabilité* lorsque chaque événement élémentaire a la même probabilité d'être obtenu.

$$p(A) = \frac{\text{card } (A)}{\text{card } (\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

## Loi binomiale, schéma de Bernoulli : $B(n, p)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$.
On considère une épreuve élémentaire répétée $n$ fois de façons indépendantes, de probabilité de succès $p$ et donc d'échec $1 - p$.
La probabilité d'obtenir exactement $k$ succès ($k \leqslant n$) est égale à :

$$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

**Exemple**

On lance 5 fois une pièce truquée de probabilité d'obtenir « pile » $\frac{4}{5}$.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 fois « face » ?

$$p = C_5^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 0{,}051\,2.$$

### Probabilité conditionnelle

Soit un événement $A$ tel que $p(A) \neq 0$.
On appelle *probabilité de B sachant que A est réalisé* (probabilité conditionnelle relative à $A$) :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad \text{on note aussi } P(B/A)$$

**Propriété**

$$\boxed{P(A) = P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})} \quad \text{si} \quad P(B) \neq 0 \quad P(\overline{B}) \neq 0$$

## VARIABLE ALÉATOIRE

### Variable aléatoire

Soit $(E, \mathcal{P}(E), P)$ un espace de probabilité.
On appelle *variable aléatoire* (en abrégé v.a.) réelle toute application $X$ de $E$ dans $\mathbb{R}$. On note $\{X = x\} = X^{-1}(\{x\})$.
**Loi de probabilité d'une variable aléatoire.**
Soit $X$ une variable aléatoire réelle : la probabilité définie par $p(x) = P(X = x)$ s'appelle la loi de $X$.

### Fonction de répartition

Soit $(E, \mathcal{P}(E), P)$ un espace de probabilité.
L'application $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = P(]-\infty, x[)$ s'appelle la *fonction de répartition.*
Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
Si $P$ est la loi d'une variable aléatoire $X$ on dit que $F$ est la fonction de répartition de $X$ et on a $F(x) = P(\{X < x\})$.

## Espérance et variance

Soit une variable aléatoire réelle prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_n$; soit $p_1 = P(X = x_1), ..., p_n = P(X = x_n)$.

On appelle *espérance* de $X$ le réel $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

On appelle *variance* de $X$ le réel $Var\ (X) = E[(X - E(X))^2]$.

**Propriété**

On a $\text{Var } X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$

et $\text{Var } X = E(X^2) - E(X)^2$

**Définition**

Variable aléatoire *centrée* : on dit qu'une variable aléatoire est centrée si son espérance est nulle.

**Écart type**

On appelle *écart type* d'une variable aléatoire $X$ le réel

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var } X}.$$

## Espérance, variance et écart type d'une loi binômiale $B(n, p)$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$

## Variables indépendantes

Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes alors

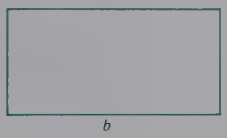
$$E(XY) = E(X) \times E(Y)$$
$$\text{Var } (X + Y) = \text{Var } X + \text{Var } Y.$$

# PÉRIMÈTRES ET AIRES DE FIGURES PLANES USUELLES

On note $P$ : périmètre, $A$ : aire.

**Rectangle**

Fig. 1




$P = 2(a + b), \quad A = a \times b$

**Carré**

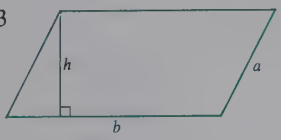
Fig. 2




$P = 4a, \quad A = a^2$

**Parallélogramme**

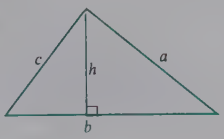
Fig. 3




$P = 2a + 2b, \quad A = bh$

**Triangle**

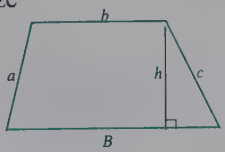
Fig. 4




$P = a + b + c, \quad A = \dfrac{b \times h}{2}$

**Trapèze**

Fig. 5

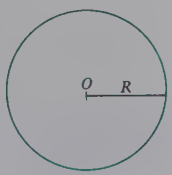



$P = B + b + a + c$

$A = \dfrac{B + b}{2} \times h$

**Disque**
**Cercle**

Fig. 6

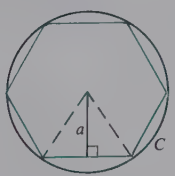



**Périmètre du cercle : $2\pi R$**

**Aire du disque : $\pi R^2$**

**Polygone régulier**

Fig. 7




$P = nc, \quad A = \dfrac{nca}{2}$

**$n$ : nombre de côtés**
**$c$ : mesure du côté**
**$a$ : mesure de l'apothème**

**Secteur circulaire**

Fig. 8




$P = R\alpha,$ **$\alpha$ en radians**

$A = \pi R^2 \dfrac{\alpha}{360},$ **$\alpha$ en degrés**

$A = \dfrac{R^2\alpha}{2},$ **$\alpha$ en radians**

# VOLUMES

On note V : volume.

## Parallélépipède rectangle

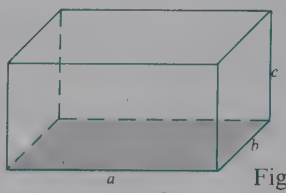



Fig. 1

$V = a \times b \times c$

## Cube

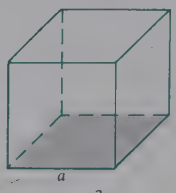



Fig. 2

$V = a^3$

## Prisme droit

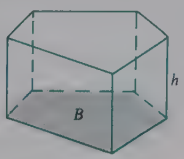



Fig. 3

$V = B \times h$

**$B$ : aire de la base**

## Cylindre de révolution

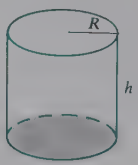



Fig. 4

$V = \pi R^2 h$

## Pyramide

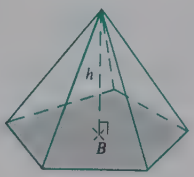



Fig. 5

$V = \frac{1}{3} B \times h$

**$B$ : aire de la base**

## Sphère

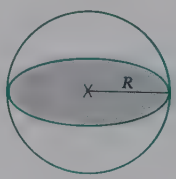


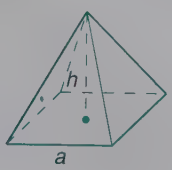

Fig. 6

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$

**$B$ : aire de la base**

## Pyramide

Fig. 7




$V = \frac{ha^2}{3}$

## Cône

Fig. 8




$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$

# INDEX


## A

Abscisse, 85, 115
Accroissements finis (inégalité), 51
Accroissement (taux d'), 22
Affinité, 32
Affixe, 70
Aires, 54, tableau 149
Ajustement linéaire, 18
Angle orienté, 99
Angle (mesures), 100
Angle (mesure principale), 100
Angles complémentaires, 101
Angles supplémentaires, 101
Angle au centre, 101
Angle inscrit, 101
Antidéplacement, 127
Apothème, 149
Approximation, 7
Approximation affine d'une fonction, 49
Approximation affine de ln $x$, 61
Approximation affine de $e^x$, 65
Arc géométrique, 99
Argument d'un nombre complexe, 70
Arrangement, 142
Asymptote, 47
Axe focal, 129, 137, 138, 139, 140
Axe (petit), 137
Axe de symétrie, 23
Axe (grand), 137
Axe tranverse, 139

## B

Barycentre de deux points, 93
Barycentre de trois points, 94
Barycentre de $n$ points, 95
Barycentre partiel, 95
Base du plan, 85
Base de l'espace, 115
Bernoulli (schéma de), 146
Bifocale (définition bifocale d'une conique), 140
Bijection, 144
Binôme (formule), 143
Binômiale (loi), 146
Bissectrice, 78

## C

Caractère continu, 13
Caractère discret, 13
Caractère qualitatif, 13
Caractère quantitatif, 13
Caractères (série statistique), 13
Cardinaux, 144
Carré, 75
Carré (aire), 149
Carré (périmètre), 149
Carré scalaire, 90
Centre (ellipse), 136
Centre (hyperbole), 138
Centre de gravité, 77
Centre de symétrie, 23
Cercle circonscrit, 77
Cercle (définition), 79
Cercle (équation), 80
Cercle (équation complexe), 74
Cercle d'Euler, 77
Cercle inscrit, 78
Cercle (périmètre), 149
Cercle trigonométrique, 99
Changement variable affine, 57
CHASLES (intégrale), 55
CHASLES (relation de), 80, 84
Coefficient de corrélation linéaire, 19, 20
Coefficient directeur, 87
Colinéaires (vecteurs), 85
Colinéarité (plan), 86
Colinéarité (espace), 116

Combinaison, 142
Comparaison (croissance des fonctions logarithmes, exponentielles et puissances), 67
Comparaison de fonctions (limites), 43
Comparaison de suites, 38
Composée d'applications, 31
Composée de similitudes, 131
Composée de transformations, 124
Complexe (définition), 68
Complexe (forme algébrique), 68
Complexe (forme trigonométrique), 71
Conique (définition), 135
Conique à centre, 135
Conique propre, 135
Conjugués (complexes), 69
Constante (fonction), 22
Continuité (fonction), 48
Continuité (prolongement), 48
Convergence (suite), 38, 39
Convexité, 108
Coordonnées barycentriques, 93, 94
Coordonnées d'un vecteur dans un repère (espace), 115
Coordonnées d'un vecteur dans un repère (plan), 85
Coordonnées du barycentre (deux points), 93
Coordonnées du barycentre (trois points), 94
Coordonnées du barycentre (*n* points), 95
Corde, 80
Cosinus d'un angle, 103
Cosinus d'un réel, 103
Cosinus (fonction), 28
Cote, 115
Covariance, 19
Croissante (fonction), 22, 50
Croissante (suite), 37
Cube (volume du), 150
Cylindre de révolution (volume du), 150

D

Décomposition d'une rotation, 124
Décomposition d'une similitude, 131
Décroissante (fonction), 22, 50
Décroissante (suite), 37
Degré d'un polynôme, 34, 35
Demi-droite (définition barycentrique), 93
Déplacement, 127
Dérivé (nombre), 49
Dérivée (fonction), 50
Dérivée seconde, 50
Dérivée troisième, 50
Dérivée logarithmique, 63
Dérivées (tableau), 51, 52
Déterminant, 87, 91
Diagramme en bâtons, 13
Direct (repère), 133
Directrice d'une conique, 135, 136
Discriminant, 11, 74
Distance de deux points, 80, 117
Distance d'un point à une droite (dans le plan), 92
Distance d'un point à un plan, 92, 119
Distance de deux réels, 7
Distribution (marginale), 17
Distribution conditionnelle, 17
Disque (définition), 80
Disque (aire du), 149
Disque (périmètre du), 149
Divergente (suite), 37
Droites du plan, 86
Droite (définition barycentrique), 93
Droites parallèles, 88, 108, 117
Droites perpendiculaires, 88
Droites orthogonales, 111, 117
Droites d'ajustement ou de régression, 19
Droite d'Euler, 77

E

e, 61
Écart type (probabilité), 148
Écart type (statistique), 16, 18
Effectif, 13
Effectifs cumulés, 13
Ellipse (récapitulatif), 136, 137
Encadrement, 7

Ensemble de définition, 21
Ensembles disjoints, 144
Ensembles équipotents, 144
Ensembles finis, 144
Équation caractéristique, 59
Équation cartésienne d'une droite (plan), 87
Équation cartésienne d'une droite (espace), 119
Équation cartésienne d'un plan, 119
Équation différentielle, 59
Équation réduite droite, 87
Équations paramétriques d'une droite (plan), 87
Équations paramétriques d'une droite (espace), 119
Équations paramétriques plan, 119
Équations du 1er degré, 8
Équations du 2e degré dans $\mathbb{R}$, 11
Équations du 2e degré dans $\mathbb{C}$, 74
Équiprobabilité, 146
Espace orienté, 133
Espérance, 148
EULER (formules), 72
Événement impossible, 145
Événement certain, 145
Événement contraire, 145
Événement élémentaire, 145
Événements incompatibles, 145
Événements indépendants, 146
Excentricité de l'ellipse, 135, 136
Excentricité de l'hyperbole, 135, 136
Excentricité de la parabole, 135, 136
Exponentielle de base *a*, 65
Exponentielle (fonction), 63
Exposant, 34
Expressions conjuguées, 5
Extremum, 23, 50

## F

Factorielle, 142
Factorisation (d'un polynôme), 35
Fonction bijective, 50
Fonction carrée, 24
Fonction cube, 27
Fonction inverse, 25
Fonction puissance, 66
Fonction racine carrée, 26
Fonction de répartition, 147
Fonctions associées, 32
Fonction composée, 31, 44
Fonctions (égalité), 31
Fonction impaire, 23, 56
Fonction monôme, 34
Fonction numérique, 21
Fonction paire, 23, 56
Fonction périodique, 23, 57
Fonction polynôme, 34
Fonction produit, 31
Fonction quotient, 31
Fonction somme, 31
Fonction trigonométrique, 28
Formules analytiques d'une homothétie, 125
Formules analytiques d'une rotation, 125
Formules analytiques d'une symétrie, 125
Formules analytiques d'une translation, 125
Foyer (d'une conique), 135
Fraction, 4
Fréquence conditionnelle, 17
Fréquence cumulée, 13
Fréquence du couple, 17
Fréquence marginale, 17
Frontière, 11

## G

Graphique circulaire, 15
Graphique polaire, 15

## H

Hauteur, 77
Histogramme, 14
Homothétie, 122, 123, 124, 125, 126
Hyperbole équilatère, 140
Hyperbole (récapitulatif), 138, 139
Hypothénuse, 79

I

Identités remarquables, 5
Imaginaire pur, 68
Imaginaire (partie), 68
Impaire (fonction), 23, 56
Incompatibles (événements), 145
Indéterminées (formes), 46
Individu, 13
Inégalité de la moyenne, 56
Inéquation du 1er degré, 10
Inéquation du 2e degré, 11
Injection, 144
Intégrale d'une fonction, 53
Intégration par parties, 57
Invariant (point), 121, 131
Invariant (classification des transformations), 126, 128
Inverse (fonction), 25
Isobarycentre de deux points, 93
Isobarycentre de trois points, 94
Isobarycentre de *n* points, 95
Isométrie, 111, 127

L

LEIBNIZ (fonction scalaire), 96
LEIBNIZ (fonction vectorielle), 96
Ligne de niveau (de la fonction scalaire de Leibniz), 97
Limite d'une fonction, 43, 44
Limite d'une fonction de référence, 43
Limite d'une somme, 44
Limite d'un produit, 45
Limite d'un quotient, 45
Limite d'une suite, 39
Limite d'une suite de référence, 39
Linéarité de l'intégrale, 55
Linéarité (transformation vectorielle linéaire), 128
Loi binomiale, 146, 148
Loi de probabilité, 147
Logarithme népérien, 60
Logarithme de base *a*, 62
Losange, 76

M

Majorant, 38
Maximum, 23
Médiane, 77
Médiane (statistique), 15
Médiatrice, 76
Médiatrice (équation complexe de la), 74
Mesure algébrique, 80
Milieu d'un bipoint, 86, 116
Minimum, 23
Minorant, 38
Modalité, 13
Mode, 15
Module d'un nombre complexe, 69
Moivre (formule de), 72
Monôme, 34
Monofocale (définition d'une conique), 136
Monotone (fonction), 22
Monotone (suite), 37
Moyenne (statistique), 16
Moyenne (inégalité de la), 56
Moyenne (valeur moyenne d'une fonction), 56

N

Norme (vecteur), 85, 86
Nuage statistique, 18

O

Opérations (fonctions numériques), 31
Ordonnée, 85, 115
Ordre (relation), 6
Orthocentre, 77
Orthogonalité (droites), 89, 111, 117
Orthogonalité (plans et droites), 112, 119

P

Paire (fonction), 23, 56
Parabole (récapitulatif), 136
Parallélipipède rectangle (volume), 150
Parallélisme de droites, 88, 108, 117
Parallélisme de plans, 110, 118

Parallélogramme (aire), 134, 149
Parallélogramme (définition), 75
Parallélogramme (périmètre), 149
PASCAL (triangle), 143
Pente (d'une droite), 87
Périmètre, 149
Période d'une fonction, 23
Période (intégrale d'une fonction périodique), 57
Période d'une suite, 37
Permutation, 144
Perpendiculaires (droites et plans), 112, 119
Perpendiculaires (plans), 114, 118
Plan médiateur, 114
Point moyen, 18
Point fixe, 121
Points invariants, 121, 123, 126, 128, 131
Points alignés, 85
Polygone régulier (aire), 149
Polygone régulier dans le plan complexe, 72, 74
Polygone régulier (périmètre), 149
Polynôme (degré), 34, 35
Polynôme (fonction), 34
Polynôme nul, 34
Population, 13
Primitive, 53
Primitives (tableau), 57, 58
Prisme droit (volume), 150
Probabilité conditionnelle, 147
Probabilité (définition), 145
Probabilité (loi de), 147
Produit cartésien, 144
Produit scalaire, 90
Produit scalaire (géométrie analytique), 91
Produit vectoriel, 133
Produit vectoriel (géométrie analytique), 134
Puissance (fonction), 66
Puissance (formules), 4
Pyramide (volume), 150
PYTHAGORE (théorème et réciproque), 82
PYTHAGORE (produit scalaire), 91

R

Racine carrée d'un réel, 5
Racines $n^{ième}$ de l'unité, 72
Racines $n^{ième}$ d'un complexe, 73
Racines d'un polynôme, 35
Racines d'un trinôme (somme et produit), 12
Radian, 100
Raison d'une suite arithmétique, 40
Raison d'une suite géométrique, 41
Rapport d'une homothétie, 122
Rapport d'une similitude, 130
Récurrence (relation), 36
Réelle (partie réelle d'un complexe), 68
Rectangle (aire), 149
Rectangle (définition), 75
Rectangle (périmètre), 149
Réflexion, 121
Régression (courbe de), 18
Régression (ensemble de), 18
Relations métriques dans un triangle, 82, 83
Repère cartésien, 85, 115
Repère direct, 133
Repère de l'espace, 115
Repère indirect, 133
Repère orthonormal (orthonormé), 86, 116
Repère du plan, 85
Représentations paramétriques (coniques), 141
Restriction (d'une application), 21
Rotation, 122, 123, 124, 125, 126

S

Secteur circulaire (aire), 149
Secteur circulaire (périmètre), 149
Segment (barycentre), 93
Série statistique, 15, 16
Signe d'un trinôme du $2^e$ degré, 12
Similitude (définition), 130
Similitude (points invariants), 131
Similitude dans le plan complexe, 131

Sinus d'un angle, 103
Sinus d'un réel, 103
Sinus (fonction), 28
Somme de fonctions polynômes, 35
Somme (suites arithmétiques), 40
Somme (suites géométriques), 41
Somme de suites (limite), 39
Sommets d'une conique, 136, 137, 139
Sphère (volume), 150
Statistiques (tableaux), 16, 18, 19
Suite arithmétique, 40
Suite bornée, 38
Suite constante (stationnaire), 36
Suite convergente, 38, 39
Suite divergente, 38
Suite géométrique, 41
Suite majorée, 38
Suite minorée, 38
Suite monotone, 37
Suite numérique, 36
Suite périodique, 37
Suite récurrente, 36, 42
Suite de référence, 38, 39
Surface de niveau (de la fonction scalaire de Leibniz), 97
Symétrie centrale, 121, 124, 125, 126
Symétrie orthogonale, 121, 123, 124, 126

## T

Tangente en un point de la courbe, 49
Tangente (ellipse), 137
Tangente (hyperbole), 139
Tangente (parabole), 136
Tangente (fonction), 29
Taux d'accroissement ou de variation, 22
Terme général d'une suite, 36
THALÈS (propriété de), 81
THALÈS (réciproque), 81
Tirage, 142
Tirage avec remise, 143
Tirage sans remise, 143
Transformation (définition), 121
Transformation (vectorielle), 128
Translation, 121, 123, 124, 125, 126
Trapèze (aire), 149
Trapèze (définition), 76
Trapèze (périmètre), 149
Triangle (aire), 134, 149
Triangle équilatéral, 79
Triangle isocèle, 78
Triangle (périmètre), 149
Triangle rectangle, 79, 83
Trigonométrie (fonctions), 28
Trigonométrie (formules), 96, 97, 98, 103, 104, 105
Trinôme du 2$^{e}$ degré, 11, 74

## V

Valeur absolue d'un réel, 6
Variable aléatoire, 147
Variable centrée, 148
Variable muette, 53
Variables indépendantes, 148
Variation (sens de), 22, 50
Variation (taux de), 22
Variance (probabilité), 148
Variance (statistique), 18
Vecteur, 84
Vecteur directeur, 86, 87
Vecteurs colinéaires, 85, 116
Vecteurs coplanaires, 116
Vecteur normal, 91, 118, 134
Vecteurs orthogonaux, 90, 91
Volumes, 150

## Z

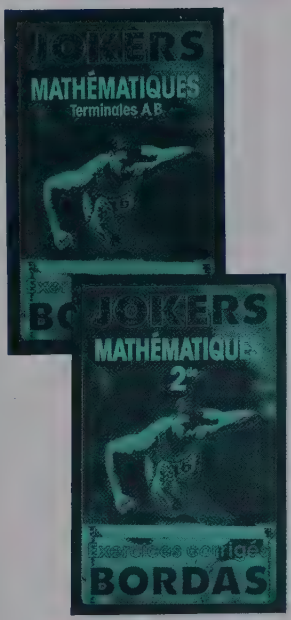
Zéro d'un polynôme, 35

## Tableaux

Dérivées, 51, 52
Primitives, 57, 58
Formules trigonométriques, 104, 105
Transformations du plan, 126
Périmètres, aires et volumes, 149, 150

# JOKERS

*Les atouts de la réussite par les exercices*




- Un **résumé** comportant les notions et résultats essentiels à connaître pour résoudre les exercices et les problèmes.

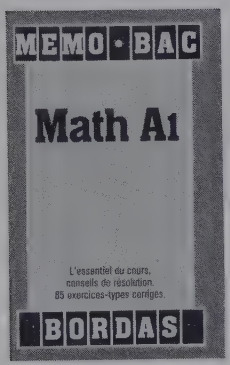
- Des **énoncés** d'exercices classés par thèmes et conçus pour présenter les principales techniques à acquérir.

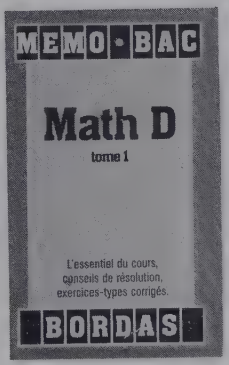
- Les **corrigés** détaillés de tous les exercices enrichis de conseils de méthode.

# BORDAS

*L'essentiel, tout l'essentiel, rien que l'essentiel*

# MÉMO BAC BORDAS




Un rappel du cours, bref, synthétique et clair :
– une sélection d'exercices de difficulté progressive,
– des corrigés détaillés de tous les exercices proposés,
– des conseils pour mémoriser, pour éviter les erreurs et pour surmonter les principales difficultés.

- Mathématiques A1
- Mathématiques B
- Mathématiques C et E T.1 et T.2
- Mathématiques D T.1 et T.2
- Mathématiques F1 à F10
- Mathématiques G
- Physique C et E T.1 et T.2
- Physique D T.1 et T.2
- Chimie C et E
- Chimie D
- Biologie C
- Biologie D
- Français 1res A, B, S, E
- Français 1res F, G, H
- Latin
- Anglais
- L'oral d'anglais (livre + cassette)
- Allemand
- Espagnol
- Italien
- Histoire A, B, C, D
- Histoire G
- Géographie A, B, C, D
- Géographie G
- Philosophie A, B
- Philosophie C, D, E
- Philosophie F, G, H
- Économie B
- Économie - Droit G
- Techniques quantitatives de gestion G2 T.1 et T.2
- Méthodes administratives G1 T.1 et T.2

**Bordas**

Imprimerie Moderne de l'Est - 25110 Baume-les-Dames
Dépôt légal : Octobre 1994
Dépôt légal 1re édition : 3e trimestre 1990
N° impression : 9567
*Imprimé en France*

KO-877-252

# JOKER-SYNTHÈSE

Ce ***"formulaire de Mathématiques"*** contient sous une forme claire et synthétique, toutes les connaissances figurant dans les programmes de Seconde, Première et Terminale, quelles qu'en soient les sections.

Toutes les formules, définitions, et théorèmes accompagnés d'exemples et du savoir-faire adéquat qui constituent ce formulaire, illustré de tableaux et de courbes, en font un très précieux outil de travail et de référence.

En fin d'ouvrage, un index complet permet de retrouver toute notion essentielle en quelques instants et facilite ainsi l'utilisation de ce formulaire.

Le ***"Formulaire de Physique/Chimie,"*** de même conception et de présentation identique, est également très utile par la synthèse qu'il propose de ce qu'il faut absolument connaître en Sciences physiques de la Seconde à la Terminale.

MONOPRIX
64F6.0

9 782040 191771

Code 019177
ISBN 2-04-019177-1