Fomesoutra.com
ça soutra!

LE BAC N'EST PAS SORCIER

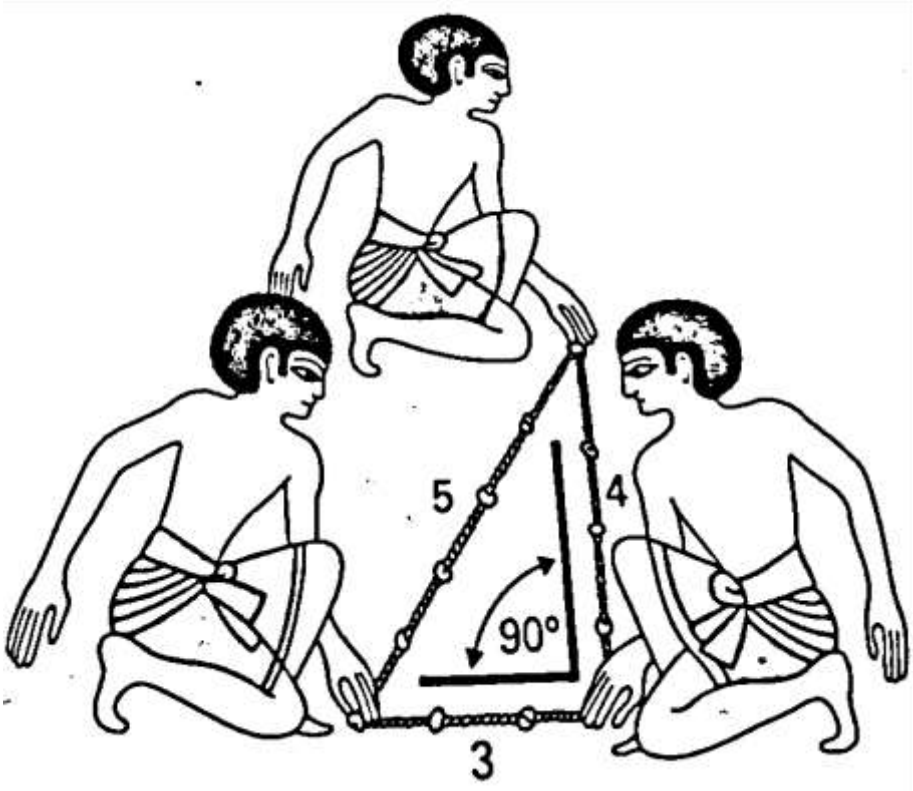
Nouvelle Edition

Terminale C

Collection Soro

MATHEMATIQUE

Recueil d'épreuves des derniers examens (Benin) du Baccalauréat APC Série C



Réalisé par : Monsieur Guillaume TOGBODE.

Tél : 97 80 95 54

Facebook : Résumé Terminal Maths-SPCT

WhatsApp : 95 20 25 49

Prière pour la reussite des études

- **L'Esprit de Dieu**, l'Esprit d'Amour, de Lumière et de Force marche devant moi et m'ouvre le chemin. Il comble tous mes besoins. **Je n'ai rien à craindre**, absolument rien .
- **L'Esprit** me couvre de sa protection. La sagesse de l'Esprit me guide dans toutes mes pensées, dans toutes mes paroles et dans toutes mes actions.
- **Je suis enfant de Dieu** et l'Esprit Saint habite en moi. **Il m'assiste dans mes études et mon travail.** Avec son aide, j'apprends avec facilité. Je comprends clairement et je retiens en mémoire toutes les matières qu'on m'enseigne, notamment le Français, l'Anglais, la Philosophie, l'Histoire-Geographie, les SVT, la Physique-Chimie et **les MATHEMATIQUES**…
- **L'Esprit Saint** éclaire mon intelligence et mon cœur. Il sait comment je dois répondre à cette question, **traiter ce devoir**, **traiter cet Examen du BAC, résoudre ce problème**.
- **L'Esprit saint,** grâce à ta Lumière pénétrante qui éclaire mes ténèbres, **je réussis de façon parfaite mes devoirs et mes Examens.**
- **Mon Dieu,** je crois que tu m'exauces, je m'en réjouis et **je te remercie pour mon brillant succès. Je te loue Seigneur** parce que **tu as exaucé ma prière**.

Amen !

C'est quoi le succès ?

« A tes résolutions répondra le succès ; sur tes sentiers brillera la lumière »

« Car rien n'est impossible à Dieu ». Job 22 verset 28 et Luc 1 verset 37.

Si tu décides de réussir, Dieu t'accompagnera dans tes décisions ; tu réussiras et tu réussiras brillamment car toutes choses sont possibles à Dieu. Peu importe tes conditions passées ou actuelles, crois seulement et tu verras la GLOIRE DE DIEU. Ne te laisse pas gagner par monsieur le ''doute''. « Il faut oser et se libérer de la peur pour concrétiser ses rêves car le BAC n'est pas sorcier »

Bonne chance à tous les candidats au BAC !

« Il n'y a pas de vent favorable pour celui qui ne sait où il va » **Guillaume d'Orange**.

!!! Bonus !!!

Les secrets de la santé / Guérir sans médicaments

La nature nous guérit / l'eau un grand remède

Nos grands-parents se portaient toujours bien, parce que chaque jour, ils utilisaient des plantes comme infusion ou décoction. A défaut des médicaments en pharmacie, ils allaient toujours de mieux en mieux, grâce aux plantes.

Dans le présent document, vous trouverez un certain nombre de recettes sur quelques plantes ou fruits et cela vous fera beaucoup de plaisir.

- **L'eau un grand remède.** Comment boire ? Chaque matin, au réveil, avant de se brosser les dents, boire un litre d'eau. Pendant chaque repas, ne jamais boire de l'eau, on peut boire 15 mn avant ou après le repas si le besoin se fait sentir. Cette cure d'eau peut se faire pendant toute votre vie, il n'y a pas de risque mais plutôt une santé garantie.
- **Repas** : Manger assez à midi et prendre du léger le soir (l'organisme fonctionne beaucoup la journée et doit se reposer la nuit).
- **Dans une sauce**, ne jamais mélanger les poissons et les viandes.
- **L'arachide, une matière** grasse, nutritive et énergétique, guérit l'asthénie et le surmenage ; consommer l'arachide grillée en sauce.
- **Café :** Ne jamais mélanger le sucre et le lait concentré sucré pour boire (c'est dangereux).
- **La banane** est un aliment qui contient les vitamines A, B, C et E
- **Le sourire ou le rire** est une bonne santé indispensable à l'homme pour notre vie (au moins sourire une fois par jour).
- **Ne jamais lire près d'une lumière à faible éclairage, vous fatiguez la rétine, membrane qui favorise la vision.** En effet pour corriger la myopie, il faut **consommer plus d'huile rouge** et réduire la consommation d'huile d'arachide ;
- Un bon **sommeil dure généralement 7 heures de temps donc il est recommandé aux apprenants** de se coucher très tôt **(Soit 22h00 à 05h00) et de moins veiller la nuit.**
- **Les vertus du petit-cola :** La consommation régulière de petit-cola (1 morceau le matin et 1 le soir) donne un état de santé stable, une forme physique stable et prévient contre la règle douloureuse chez la femme et les différentes maladies sexuellement transmissibles et même le cancer dans tout son genre. Il lutte contre la prostate, le glaucome, le paludisme, le fibrome et le myome, la sinusite. Chez l'homme, C'est un correcteur pour l'imperfection sexuelle.



Recueil d'épreuves des derniers examens (Benin) du Baccalauréat APC Série C

REFERENCE BIBLIOGRAPHIE

- ✓ **Lionel A. 2023**
- ✓ **Les Auteurs du Test APMB**

« Il n'y a pas de vent favorable pour celui qui ne sait où il va » **Guillaume d'Orang**

Auteur



Que la grâce du Seigneur Jésus-Christ, l'Amour de Dieu, et la communication du Saint–Esprit, soient avec vous tous ! Amen !
2corinthiens 13 :13
Merci Seigneur !

Maths C

SR Maths C 2018

SR M3

Durée : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Une longue amitié mue en partenariat d'affaires.

Comlan et Bio s'étaient liés d'amitié au cours de leurs carrières de fonctionnaires dans un lycée d'enseignement technique. Le premier était formateur en menuiserie et le second, professeur de mathématiques. Depuis leur admission à la retraite, ils ont cocréé une entreprise de réalisation d'œuvres d'art en bois et de décorations.

Pour une commande de tableaux que l'entreprise doit honorer, Bio conçoit deux types T_1 et T_2 de tableaux dont les nombres respectifs n et m sont tels que $\frac{n+15}{n+2}$ est un entier naturel et $\begin{cases} m \text{ est un nombre premier} \\ 13m+1 \text{ est le carré d'un entier naturel} \end{cases}$

Bio s'appuie sur les mathématiques qu'il a enseignées au lycée pour créer les formes des tableaux ainsi que les motifs des décorations. Pour l'aider dans les calculs, il a sollicité Adjoua, fille de Comlan et élève en classe terminale C, intéressée par le nombre de chaque type de tableau, les configurations à la base de leurs formes ainsi que la représentation de certains ensembles particuliers ayant inspiré les motifs des décorations.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Adjoua en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1- a) Démontre que $n+2$ divise 13.
b) Détermine le nombre de tableaux de type T_1.

2- Démontre que $m=11$. (Tu pourras remarquer que si un nombre premier p divise un produit ab d'entiers non nuls, alors il divise a ou il divise b.)

Problème 2

La forme des tableaux de type T_1 est un polygone dont les sommets, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, ont pour affixes les solutions non nulles de l'équation (Σ) d'inconnue z : $z^3+\left(2+2i\sqrt{3}\right)\bar{z}=0$; $\bar{z}$ étant le conjugué du nombre complexe z. La décoration des tableaux de ce type est inspirée de l'ensemble (E) des points M d'affixes z telles que : $\left|z+1-i\left(2-\sqrt{3}\right)\right|+\left|z-1-i\left(\sqrt{3}-2\right)\right|=2\sqrt{2}$

3- Démontre que si z est une solution de l'équation (Σ), alors $z=0$ ou $|z|=2$.

4- Déduis-en que si z est une solution de (Σ), alors $z=0$ ou z est une racine quatrième de $-8\left(1+i\sqrt{3}\right)$.

5- Détermine les solutions de l'équation (Σ).

6- Place les points A_0, A_1, A_2 et A_3 représentant les images des solutions non nulles de (Σ). Tu prendras 2 cm comme unité graphique.

7- a) Démontre que l'ensemble (E) est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité.

b) Construis (E) sur la même figure que les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

Problème 3

La décoration des tableaux de type T_2 a été inspirée de la courbe (Γ), représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ de la fonction f de ¡ vers ¡ définie par $f(x)=x-\frac{1}{2}+2e^{-|x|}$, et de la droite (D_k) d'équation $y=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{k}$, k étant un nombre réel strictement supérieur à $\frac{1}{2}$.

8- a) Etudie la dérivabilité de f en 0.

b) Justifie que la courbe (Γ) admet un point anguleux B et précise les équations des demi-tangentes à (Γ) en B.

9- Etudie les variations de f et dresse son tableau des variations.

10- a) Démontre que la droite (D) d'équation $y=x-\frac{1}{2}$ est asymptote à (Γ).

b) Représente la courbe (Γ) et la droite (D) dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

11- a) Justifie que (Γ) et (D_k) se coupent en deux points M_k et N_k dont tu préciseras les coordonnées (l'abscisse de N_k étant inférieure à celle de M_k).

b) Etudie la position relative de (Γ) et de (D_k).

c) Démontre que le milieu P_k du segment $[M_kN_k]$ appartient à l'axe des ordonnées.

12- On désigne par (Δ_k) le domaine délimité par (Γ) et le segment $[M_kN_k]$.

a) Trace (D_k) pour $k=3$.

b) Calcule l'aire $A(k)$, en unités d'aire, du domaine (Δ_k).

c) Justifie que les triangles BN_kP_k et BM_kP_k ont la même aire $S(k)$, exprimée en unités d'aire par : $S(k)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{k}\right)\ln 2k$.

13- La droite (D_k) à représenter est celle pour laquelle on a :

$$S(k)=A(k) \qquad (1).$$

a) Démontre que l'égalité (1) équivaut à $\ln 2k-4\frac{2k-1}{2k+3}=0$.

b) Etudie sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ les variations de la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x)=\ln 2x-4\frac{2x-1}{2x+3}$.

c) Déduis-en l'existence et l'unicité d'un nombre réel k vérifiant (1) et donne son encadrement par deux entiers consécutifs.

FIN

Maths C

M 422

Durée : 4 heures

*Les **trois** problèmes de l'épreuve sont obligatoires.*
Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Souvenirs d'une sortie pédagogique

Dans le cadre d'une sortie pédagogique, Martha, jeune étudiante en mécanique, s'est rendue dans une usine de fabrication de "sachets bio". Pour son rapport, elle a recueilli des informations relatives :

- à deux plaques P_1 et P_2 utilisées dans la fabrication des sachets,
- au mouvement d'une pointe électrique de découpage de la matière première.

La plaque P_2 a la forme d'un hexagone. La plaque P_1 a la forme d'un rectangle sur lequel est dessinée une courbe (T). Les dimensions, en centimètre, de ce rectangle sont deux entiers naturels a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b \text{ est un entier impair} \\ PPCM(a,b) = 100 \\ PGCD(a,b) = a-b \end{cases}$$

Martha veut reproduire la courbe (T), dessiner la plaque P_2 et déterminer les dimensions de la plaque P_1 ainsi que la trajectoire de la pointe électrique.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Martha en traitant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1. Détermine les diviseurs positifs de 100.
2. Démontre que $\frac{100}{b}$ et $\frac{100}{a}$ sont des entiers naturels consécutifs.
3. Détermine les entiers a et b.

Problème 2

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

- les sommets de l'hexagone sont les images des solutions de l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^6+\left(4-4i\sqrt{3}\right)z^3-32-32i\sqrt{3}=0$,
- la courbe (T) a pour équation : $13x^2+13y^2-10xy-72=0$.

4. a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)u-32-32i\sqrt{3}=0$.
   b) Résous l'équation (E) et déduis-en les coordonnées des sommets de l'hexagone.
   c) Représente cet hexagone.
5. On pose $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ et $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$.
   a) Démontre que le triplet $R=(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.
   b) Détermine une équation de la courbe (T) dans le repère R.
   c) Déduis-en que (T) est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité et les coordonnées des sommets dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   d) Construis (T). (Pour la clarté, cette construction sera faite sur une figure séparée).

Problème 3

La trajectoire de la pointe électrique observée par Martha est modélisée par une courbe (*H*) obtenue à partir de la représentation graphique (C) dans un repère orthonormé, de la fonction numérique f définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f(x) = exp(|x^2 - 3|x| + 2|) - 1:$$

(*H*) est la réunion de (C) et de son symétrique (C_1) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Justifie que f est une fonction paire.
7. Justifie que f est continue sur $[-2\,;2]$.
8. a) Etudie la dérivabilité de f en 1, à droite en 0 et à gauche en 2 ; puis donne une interprétation géométrique de chacun des résultats.
   b) Etudie le sens de variations de f sur chacun des intervalles $[0;1]$, $[1;2]$.
   c) Dresse le tableau de variations de f sur $[0;2]$.
9. Trace la courbe (C) puis déduis-en la courbe (*H*).

FIN

Math - Série C

L 322

2019

SR

Durée : 4 heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Campagne de lutte pour la sauvegarde de l'environnement.

Pour lutter contre la pollution due aux dépotoirs sauvages, l'administration d'un collège a lancé une commande de bacs à ordures destinés à l'entreposage desdites ordures. Chaque bac à ordures a la forme d'un tronc de pyramide dont les bases sont des parallélogrammes $ABCD$ et $A'B'C'D'$ contenus dans des plans parallèles.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A',B',C',D' sont les images respectives des points A,B,C,D par une homothétie h. On sait de plus : $A(0;0;-1)$, $B(2;1;-1)$, $D(2;-4;-6)$, $A'\left(-4;\frac{11}{2};-\frac{5}{2}\right)$ et $B'\left(0;\frac{15}{2};-\frac{5}{2}\right)$. Sur chaque bac à ordures est gravé un message incitant à la préservation d'un environnement sain dans le collège.

Dossou, premier délégué des élèves, s'est vu confier la mission de déterminer le volume et le nombre des bacs à ordures, ainsi que les caractéristiques de la configuration sur laquelle est gravé le message de sensibilisation à l'environnement.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Dossou en résolvant les problèmes ci-après.

Problème 1

1. a) Détermine les coordonnées du point C.
   b) Démontre que $ABCD$ est un rectangle.
2. Détermine le centre et le rapport de l'homothétie h.
3. Détermine l'aire de la surface du rectangle $A'B'C'D'$.
4. Détermine la hauteur de chaque bac à ordures.
5. Calcule le volume de chaque bac à ordures.

Problème 2

Le nombre de bac à ordures commandés est le reste de la division euclidienne de 5^{160} par 77.

6. Détermine, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 5^n par 7, puis par 11.
7. Détermine les entiers naturels n tels que $5^n \equiv 4[77]$.
8. Détermine le nombre de bac à ordures commandés.

Problème 3

Le message incitant à la préservation de l'environnement est serti sur chaque bac à ordures le long de deux lignes courbes. La première de ces lignes est une portion d'une courbe (C_1) représentative dans un repère orthonormé direct $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ d'une fonction G et la seconde (C_2) est l'image de (C_1) par une transformation.

La courbe (C_1) est celle de la fonction G définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} G(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt \quad \text{si} \quad x>0 \\ G(0)=\ln 2 \end{cases}$$

9. a) Etudie le sens de variation de la fonction u définie sur $[0;+\infty[$ par $u(t)=(1+t)e^{-t}-1$.

   b) Déduis-en que pour tout $t\in[0;+\infty[$, $(1+t)e^{-t}\leq 1$.

10. Etudie le sens de variation de la fonction v définie sur $]0;+\infty[$ par $v(t)=\frac{e^{-t}-1}{t}$.

11. a) Démontre que pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$G(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt+\ln 2.$$

b) A l'aide du sens de variation de la fonction v, démontre que pour tout nombre réel $x>0$, $e^{-x}-1\leq\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\leq\frac{e^{-2x}-1}{2}$.

c) Déduis-en $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x)$ puis justifie que G est continue à droite en 0.

d) Etudie la dérivabilité de G à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

12. a) En remarquant que pour tout $x>0$, on a : $G(x)=F(2x)-F(x)$, où F est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{e^{-x}}{x}$, démontre que G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que pour tout $x\in]0;+\infty[$ $G'(x)=\dfrac{e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)}{x}$.

b) Etudie le sens de variation de G sur $[0;+\infty[$.

13. a) Démontre que pour tout nombre réel $x>0$ on a : $e^{-2x}\ln 2\le G(x)\le e^{-x}\ln 2$.

b) Déduis-en la limite de G en $+\infty$.

c) Dresse le tableau des variations de g.

14. Trace la courbe (C_1).

15. La courbe (C_2) est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x=G(y-1)+2$.

Démontre que (C_2) est l'image de (C_1) par une symétrie glissée que l'on précisera.

FIN

B 422

Durée : 4 heures

*Les **trois** problèmes sont obligatoires.*
Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Projet de réalisation d'un musée moderne

Dans le cadre de la promotion du tourisme, le gouvernement a entrepris la réfection des musées existants et la construction d'un musée d'architecture moderne. Ce dernier sera réalisé sur un terrain rectangulaire dont les dimensions, en mètre, sont deux entiers naturels a et b tels que :

$$a^2 + b^2 = 484354 \text{ et } PPCM(a,b) = 16965.$$

L'architecte Koovi, en charge du projet, a prévu aussi la construction d'un local en verre et en acier blindés pour abriter les objets d'art précieux.

Koffi, un élève en classe terminale C, a eu fortuitement accès à la maquette et s'intéresse au projet. Il veut connaitre les dimensions du terrain rectangulaire, la masse de verre nécessaire pour la construction du local et les décorations qui y sont réalisées.

Tâche : Tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Koffi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Scanné avec CamScanner

Problème 1

1- a) Justifie que 1433 est un nombre premier.

b) Décompose 484354 en produit de facteurs premiers.

c) Déduis-en les valeurs possibles du PGCD des entiers naturels a et b.

2- Détermine les dimensions du terrain rectangulaire prévu pour la réalisation du musée moderne.

Problème 2

Le local devant abriter les objets d'art précieux a la forme d'un tétraèdre $ABCD$ et comporte une caméra de surveillance positionnée en un endroit assimilé au point I, barycentre des points pondérés $(A;1),(B;1)$ *et* $(C;2)$. Une série de décorations lumineuses sera réalisée en des endroits assimilés aux points G_m, barycentres du système de points pondérés $\{(A;\ln m),(B;\ln m),(C;2\ln m),(D;(2-\ln m)^2)\}$, m étant, dans tout ce problème, un nombre réel strictement positif et ln le symbole de la fonction logarithme népérien.

3- Justifie, pour tout m, l'existence de G_m.

4- Justifie qu'il existe une valeur de m pour laquelle les points G_m et I sont confondus.

5- Démontre que l'on a, pour tout m : $\overrightarrow{DG_m} = \frac{4\ln m}{4+(\ln m)^2}\overrightarrow{DI}$.

6- On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{4\ln x}{4+(\ln x)^2}$.

a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Justifie que f peut être prolongée par continuité à droite en 0.

Scanné avec CamScanner

7- Soit f_1 le prolongement par continuité de f à droite en 0.

a) Etudie la dérivabilité de f_1 à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

b) Etudie les variations de f_1.

c) Construis la courbe représentative de la fonction f_1 dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

8- a) Détermine l'image de l'intervalle $]0;+\infty[$ par f.

b) Détermine l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}_+^*$.

Problème 3

Estimée en tonnes, la masse de verre nécessaire pour la construction du local est égale à la valeur moyenne sur $\left[0;\frac{\pi(\sqrt{3}-1)}{2}\right]$, de la fonction g solution de l'équation différentielle $(2-\sqrt{3})y''+2y=0$ qui satisfait aux conditions $g(0)=1$ et $g'(0)=\sqrt{3}+1$.

9- Vérifie que $\frac{2}{2-\sqrt{3}}=(\sqrt{3}+1)^2$

10- Justifie qu'on a : pour tout nombre réel x,

$$g(x)=cos(\sqrt{3}+1)x+sin(\sqrt{3}+1)x$$

11- Calcule, à un kilogramme près, la masse de verre utilisé.

FIN

Scanné avec CamScanner

8°) a- Démontre que f est une bijection. On note $(\mathcal{C}')$ la courbe de sa bijection réciproque.

b- Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de (Γ). En remarquant que l'on a $f(y)=|x|$. Démontre que $y \geq 1$.

c- Démontre que (Γ) est la réunion d'une portion (Γ_1) de $(\mathcal{C}')$ et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

d- Trace (Γ) dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

Situation d'évaluation n°6

Non corrigé

BAC Bénin série C session de remplacement de 2017

Contexte : Souvenirs d'un voyage touristique.

En visite dans une grande ville africaine, Kossi, élève en classe terminale C, a été émerveillé par le nouvel échangeur, de tracé de certaines rues et le système de jet d'eau qui se trouve à un rond-point. Le guide de Kossi, un féru des mathématiques, lui annonce que le coût de réalisation c du projet de modernisation de la ville, en francs CFA, s'exprime par : $c = 5\times10^n$ avec n un entier naturel. De plus c possède 132 diviseurs positifs.

Kossi cherche à déterminer c, à décrypter les principes mathématiques à la base du système de jet d'eau et à reproduire les configurations planes à l'origine du tracé des rues.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux différentes préoccupations de Kossi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1 :

1°) Démontre que le nombre de diviseurs positifs de 5×10^n est $(n+1)(n+2)$. (Tu pourras remarquer que si p est un nombre premier et α un entier naturel non nul, tout diviseur de p^α est de la forme p^{α_i} avec $0 \leq \alpha_i \leq \alpha$.)

2°) a- Détermine n.

b- Précise le coût de réalisation du projet.

Problème 2 :

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v}\right)$. La forme de tuyauterie qui correspond à la base du système de jet d'eau peut être représentée par un ensemble constitué d'un point K et deux courbes (Γ_1) et (Γ_2). (Γ_1) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : (Γ_1) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-1-4i|=4$; (Γ_2) est la courbe d'équation cartésienne $3x^2+3y^2+2xy-14x-26y+27=0$ et K est le point de coordonnées $(1\ ;\ 4)$.

3°) Détermine la nature de (Γ_1).

4°) a- Démontre que K est un centre de symétrie de (Γ_2).

b- Démontre que le triplet $R=\left(K\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{u}+\vec{v}\right)\right)$ est un repère orthonormé du plan.

5°) a- Détermine une équation cartésienne de (Γ_2) dans le repère R.

b- Déduis-en que (Γ_2) est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité et les sommets.

6°) Construis (Γ_1) et (Γ_2) dans le même repère.

Problème 3 :

Le tracé des rues qui ont attiré l'attention de Koffi a été inspiré de la famille de courbes (C_m) représentatives, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$, des fonctions f_m définies sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$f_m(x) = -x + \dfrac{m}{1+x}[1 + \ln(1+x)]$, m étant un paramètre réel strictement positif.

7°) Démontre que toutes les courbes (C_m) :

a- passent par un même point fixe I que tu préciseras.

b- admettent les mêmes asymptotes, dont l'une (D), n'est pas parallèle à l'axe des coordonnées.

8°) Étudie la position de (C_m) par rapport la droite (D).

9°) On considère la fonction g_m définie sur $]-1 ; +\infty[$ par :

$g_m(x) = (x+1)^2 + m\ln(x+1)$

a- Étudie les variations de g_m.

b- Démontre que l'équation $g_m(x) = 0$ admet une solution unique α_m appartenant à l'intervalle $]-1 ; 0[$.

c- Détermine le signe de $g_m(x)$ pour tout x élément de $]-1 ; +\infty[$.

10°) a- Étudie les variations de f_m.

b- Vérifie que : $-\dfrac{1}{e} < \alpha_1 < 0$.

c- Construis la courbe (C_1).

11°) On considère par h l'affinité d'axe (D), de direction celle du vecteur $\vec{j}$ et de rapport m.

a- Détermine l'expression analytique de h.

b- Démontre que (C_m) est l'image de (C_1) par h.

c- Construis (C_2) sur le même graphique que (C_1).

Situation d'évaluation n° 7

cor p : 310

BAC Bénin série C session de 2016

Contexte : Planification de la phase opérationnelle d'un projet agricole.

Pour accéder au crédit mis en place pour l'entrepreneuriat des jeunes, Soton un jeune diplômé sans emploi a décidé de monter un projet de culture du jasmin, un arbuste à fleurs dont la senteur très appréciée est recherchée dans la fabrication de produits cosmétiques. Il prévoit dans son projet, la confection de plaques métalliques pour clôturer le lieu d'implantation de la culture. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\Omega ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, le sol est représenté par le plan $(\mathcal{Q})$ passant

Maths C

M 422

Durée : 4 heures

*Les **trois** problèmes de l'épreuve sont obligatoires.*
Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Souvenirs d'une sortie pédagogique

Dans le cadre d'une sortie pédagogique, Martha, jeune étudiante en mécanique, s'est rendue dans une usine de fabrication de "sachets bio". Pour son rapport, elle a recueilli des informations relatives :

- à deux plaques P_1 et P_2 utilisées dans la fabrication des sachets,
- au mouvement d'une pointe électrique de découpage de la matière première.

La plaque P_2 a la forme d'un hexagone. La plaque P_1 a la forme d'un rectangle sur lequel est dessinée une courbe (T). Les dimensions, en centimètre, de ce rectangle sont deux entiers naturels a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b \text{ est un entier impair} \\ PPCM(a,b) = 100 \\ PGCD(a,b) = a-b \end{cases}$$

Martha veut reproduire la courbe (T), dessiner la plaque P_2 et déterminer les dimensions de la plaque P_1 ainsi que la trajectoire de la pointe électrique.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Martha en traitant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1. Détermine les diviseurs positifs de 100.
2. Démontre que $\frac{100}{b}$ et $\frac{100}{a}$ sont des entiers naturels consécutifs.
3. Détermine les entiers a et b.

Problème 2

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

- les sommets de l'hexagone sont les images des solutions de l'équation, d'inconnue z, (E) : $z^6+\left(4-4i\sqrt{3}\right)z^3-32-32i\sqrt{3}=0$,
- la courbe (T) a pour équation : $13x^2+13y^2-10xy-72=0$.

4. a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)u-32-32i\sqrt{3}=0$.
   b) Résous l'équation (E) et déduis-en les coordonnées des sommets de l'hexagone.
   c) Représente cet hexagone.
5. On pose $\vec{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ et $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$.
   a) Démontre que le triplet $R=(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.
   b) Détermine une équation de la courbe (T) dans le repère R.
   c) Déduis-en que (T) est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité et les coordonnées des sommets dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   d) Construis (T). (Pour la clarté, cette construction sera faite sur une figure séparée).

Problème 3

La trajectoire de la pointe électrique observée par Martha est modélisée par une courbe (*H*) obtenue à partir de la représentation graphique (C) dans un repère orthonormé, de la fonction numérique f définie sur $[-2\,;2]$ par :

$$f(x) = exp(|x^2 - 3|x| + 2|) - 1:$$

(*H*) est la réunion de (C) et de son symétrique (C_1) par rapport à l'axe des abscisses.

6. Justifie que f est une fonction paire.
7. Justifie que f est continue sur $[-2\,;2]$.
8. a) Etudie la dérivabilité de f en 1, à droite en 0 et à gauche en 2 ; puis donne une interprétation géométrique de chacun des résultats.
   b) Etudie le sens de variations de f sur chacun des intervalles $[0;1]$, $[1;2]$.
   c) Dresse le tableau de variations de f sur $[0;2]$.
9. Trace la courbe (C) puis déduis-en la courbe (*H*).

FIN

COLLECTION DES ANCIENNES ÉPREUVES DE MATHÉMATIQUES BACCALAURÉAT SÉRIE C DU BENIN

Lionel A.

5 août 2023

SOMMAIRE

1 BAC C 2002-BENIN **3**

2 BAC C 2003-BENIN **5**

3 BAC C 2004-BENIN **6**

4 BAC C 2005-BENIN **8**

5 BAC C 2006-BENIN **11**

6 BAC C 2007-BENIN **13**

7 BAC C 2008-BENIN **15**

8 BAC C 2009-BENIN **17**

9 BAC C 2010-BENIN **19**

10 BAC C 2011-BENIN **21**

11 BAC C 2012-BENIN **23**

12 BAC C 2013- BENIN **24**

13 BAC C 2014 BENIN **26**

14 BAC C 2015 BENIN **28**

15 BAC C 2016 BENIN **30**

16 BAC C 2017 BENIN **32**

17 BAC C 2018 BENIN **34**

18 BAC C 2019 BENIN **36**

19 BAC C 2020 BENIN **38**

20 BAC C 2021 BENIN **39**

21 BAC C 2022 BENIN **41**

22 BAC C 2023 BENIN **43**

1 BAC C 2002-BENIN

Exercice 1 Soit l'application :

$$f : \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{3+\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$

1. (a) Justifier que f est dérivable sur $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

   (b) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $f'(x) = -\sqrt{4-\left[\frac{1}{f(x)}-3\right]^2} \times \left[f(x)\right]^2$.

   (c) Déterminer l'image J de l'intervalle $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ par l'application f.

2. g est l'application définie de $\left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ vers J par : $g(x) = f(x)$.

   (a) Démontrer que g est bijective.

   (b) Déterminer le plus grand ensemble K sur lequel g^{-1} est dérivable.

   (c) Exprimer, pour tout $x \in K$, $(g^{-1})'(x)$.

3. (a) Calculer $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $g(0)$.

   (b) Calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{(5x-1)(-x+1)}}dx$.

Exercice 2

1. On considère deux nombres réels non nuls a et b et la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = ae^{-2bx}$.
   Déterminer les nombres réels a et b pour que l'on ait : pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g''(x) - 6g'(x) + 9g(x) = 50e^{-2x}$.

2. f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose : $h(x) = 2e^{-2x}$ pour tout réel x.
   Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f''(x) - 6f'(x) + 9f(x) = 50e^{-2x}$ équivaut à $(f-h)''(x) - 6(f-h)'(x) + 9(f-h)(x) = 0$.

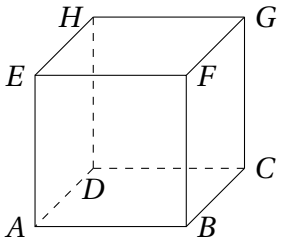
3. (a) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 6y' + 9y = 0$.

   (b) En déduire les solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - 6y' + 9y = 50e^{-2x}$.

4. Déterminer la solution particulière φ de l'équation différentielle (E) telle que

$$\begin{cases} \varphi(0) = 3 \\ \varphi'(0) = -10 \end{cases}$$

Problème



$ABCDEFGH$ est un cube tel que $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct de l'espace E.
On pose $\vec{i}=\overrightarrow{AB}$; $\vec{j}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$. On muni l'espace E du repère orthonormé direct $(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.On considère dans E les points $E(\frac{1}{2},0,0)$; $L(\frac{1}{2},1,0)$; $S(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Partie A

1. Soit t l'application de E dans E qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MF}$. Justifier que t est une translation.
2. (a) Calculer la distance du point S au plan (ABC).
   (b) En déduire que $SABCD$ est une pyramide.
   (c) Calculer le volume de l'image par t de la pyramide $SABCD$.
3. Soit f_1 la réflexion de plan (SAB) et f_2 la réflexion de plan (SCD).
   (a) Démontrer que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires.
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f_1\circ f_2$.
4. (a) Déterminer l'expression analytique de f_1.
   (b) Déterminer l'image par $f_1\circ f_2$ de la droite (SC).
5. On pose $P_1=(SAB)$ et $P_2=(SCD)$. Déterminer la position relative de $t(P_1)$ et de $t(P_2)$.

Partie B

On désigne par (π) le plan orienté par le vecteur $\vec{i}$ muni du repère orthonormé direct $R=(A;\vec{j},\vec{k})$.
Soit r l'application de (π) dans (π) qui à tout point $M(X,Y)$ associe le point $M'(X',Y')$ tel que :

$$\begin{cases} X'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(X-Y-1+\sqrt{2}\right) \\ Y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(X+Y-1) \end{cases}$$

et h l'application de (π) dans (π) qui à tout point $M(X,Y)$ associe le point $M'(X',Y')$ tel que :

$$\begin{cases} X'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}X-\sqrt{2}+1 \\ Y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}Y \end{cases}$$

6. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de r.
7. On pose $s=r\circ h$. On admet que (π) est le plan complexe. Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point $s(M)$.
   (a) Exprimer z' en fonction de z.

(b) Déterminer la nature de s et préciser ses éléments caractéristiques.

8. Soit (Γ) la courbe d'équation $4X^2 + Y^2 + 16X + 7 = 0$ dans le repère R.
   (a) Construire (Γ).
   (b) On pose $(\Gamma') = s(\Gamma)$. Déterminer la nature de (Γ').
   (c) Préciser les coordonnées du centre et des sommets de (Γ').

2 BAC C 2003-BENIN

Exercice 1

On considère un entier naturel n dont la décomposition en produit de facteurs premiers est : $n = 2^{\alpha} \times 3 \times 19^{\beta}$ où α et β sont des entiers naturels tels que : $\alpha > \beta$ et $(\alpha+1)(\beta+1) = 8$.

1. Déterminer l'entier naturel n.
2. Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 456.
3. On considère l'équation suivante $(E) : x^2 - \lambda x = 456$, λ étant un paramètre entier naturel. Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles (E) a des solutions dans $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Au second cycle d'un établissement scolaire, $60°/_{\circ}$ des élèves font une série scientifique et $34°/_{\circ}$ font une série littéraire. D'autre part, on constate que : $75°/_{\circ}$ des élèves en série scientifique s'intéressent aux mathématiques et $87°/_{\circ}$ des élèves en série littéraire ne s'intéressent pas aux mathématiques. On choisit au hasard un élève de second cycle dans ce collège et désigne par S l'évènement « L'élève fait une série scientifique» et M l'évènement «L'élève s'intéresse aux mathématiques».

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements : «S et $\overline{M}$»; «S et M»; «$\overline{S}$ et $\overline{M}$»; «$\overline{S}$ et M». En déduire la probabilité de M.
2. Déterminer la probabilité pour qu'un élève ne s'intéressant pas aux mathématiques soit en série scientifique.
3. On choisit au hasard 7 élèves du second cycle dans le collège. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 4 élèves s'intéressant aux mathématiques.

NB : les résultats sont donnés à 10^{-4} près.

PROBLÈME

(P) désigne le plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité :1 cm). On considère la fonction numérique f_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_m(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|} & x \leq 3 \\ f_m(x) = (x-3) - mln(x-3) & x > 3 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel.

On désigne par (Γ_1) et (C_m) les courbes représentatives respectives des restrictions de f_m à $]-\infty, 3]$ et à

$]3,+\infty]$ dans le plan (P).

PARTIE A

1. (a) Démontrer que (Γ_1) est une portion de la réunion d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon et d'une hyperbole H dont on précisera le centre, les sommets et les asymptotes.
   (b) Construire la courbe (Γ_1).
   (c) En déduire la valeur de : $\int_1^3 f_m(x)dx$.
2. Étudier suivant les valeurs de m les variations de f_m sur $]3,+\infty[$.
3. (a) Déterminer l'ensemble I des valeurs de m pour lesquelles la fonction f_m admet un minimum sur $]3,+\infty[$.
   (b) Soit B_m le point de (C_m) ayant pour ordonnée le minimum de f_m. Déterminer l'ensemble décrit par B_m lorsque m varie dans I.
4. (a) Étudier suivant les valeurs de m la position relative de (C_m) et de la droite (Δ) d'équation $y = x-3$.
   (b) Construire la courbe (C_2).
   (c) Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 4. Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_2), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 4$ et $x = \lambda$.

PARTIE B

On considère la rotation r du plan (P) de centre $J(3,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

5. On pose : $C_2' = \left\{M(x,y) \in C_2 / x \geq 5\right\}$. Déterminer l'image (Γ) de (C_2') par r.
6. (a) Démontrer qu'il existe une et une seule droite (Δ') passant par le point J, que l'on précisera, telle que l'on ait : $r = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ où S_{Δ} et $S_{\Delta'}$ désignent respectivement les symétries orthogonales de (P) par rapport à (Δ) et (Δ').
   (b) En déduire une méthode géométrique pour la construction de la courbe (Γ).
   (c) Construire (Γ).

3 BAC C 2004-BENIN

Exercice 1

Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$. On lance à la fois deux dés parfaits D_1 et D_2 et on note le nombre marqué sur la face supérieure de chacun d'eux lorsqu'ils sont retombés.

Sur les faces du dé D_1, sont marqués $\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1; -1; \sqrt{3}; -2$.

Sur les faces de D_2 sont marqués $1; -1; \sqrt{3}; \frac{1}{2}; 0; 1$.

On note u le nombre relevé sur D_1 et v celui relevé sur D_2. On définit les transformations f et g du plan (P), d'écritures complexes respectives $z' = az+1+i$ et $z' = az+1$ avec $a = u+iv$.

1. (a) Déterminer la probabilité pour que f soit une similitude plane directe.
   (b) Calculer la probabilité pour que g soit un antidéplacement.

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A : « f est une rotation d'angle droit»
   B :« f est une homothétie».
   C : « f est une similitude plane directe de centre I».
3. On donne $u = 1$ et $v = -1$ et on pose $h = g \circ f$.
   (a) Déterminer la nature de h.
   (b) Préciser les éléments caractéristiques de h.
   (c) Déterminer les coordonnées du centre et des sommets de l'image de l'ellipse (E) d'équation cartésienne $x^2 + 4y^2 = 2$ par h^{-1}.

Exercice 2

1. On considère la fonction numérique

$$u :]-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

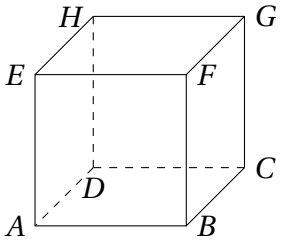
   (a) Déterminer l'ensemble de définition D de u.
   (b) Étudier le sens de variation de u.
   (c) Dresser le tableau de variation de u.
2. Soit g la fonction numérique de la variation réelle par :

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1}\, dt$$

   .
   (a) Justifier g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Préciser la fonction g', dérivée première de g sur $\mathbb{R}$.
3. On pose $f = g \circ u$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 0]$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty, 0]$.
   (c) En déduire l'expression de f en fonction de x, pour tout x élément de $]-\infty, 0]$.

PROBLÈME

On considère dans l'espace E, le cube $ABCDEFGH$ suivant :



On désigne par (P) le plan (BGE) et par (Q) le plan perpendiculaire à (P) et contenant la droite (BG). Soit I le point d'intersection de (P) et de la droite (DF).

Partie A

1. (a) Démontrer que les droites (EG) et (EB) sont orthogonales respectivement aux plans (DHF) et (DFG).
   (b) En déduire que la droite (DF) est orthogonale au plan (P).
2. (a) Déterminer $(P)\bigcap(Q)$.
   (b) Démontrer que (DF) est parallèle à (Q).
3. (a) Démontrer que A est le barycentre des points B, C et D affectés des coefficients que l'on déterminera.
   (b) Déterminer l'ensemble S des points M de E tels que : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=MC^2$.
4. Soit h l'application de E dans E qui à tout point M de E associe le point M' de E définie par : $\overrightarrow{CM'}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{AM}=\vec{0}$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.

   Partie B

   L'espace E est muni du repère orthonormé direct $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. (Unité graphique :1cm).
5. (a) Déterminer une équation cartésienne de P.
   (b) Déterminer les coordonnées de I.
6. Déterminer une équation cartésienne de Q.
7. Calculer le volume de l'image par h de la pyramide $IABCD$ de base $ABCD$.

   Partie C

   Soit f l'application affine de E dans E d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x+2y-2z+2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+y+2z-2) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+2y+z+2) \end{cases}$$

8. Soit M un point quelconque de E, d'image M' par f.
   (a) Démontrer que le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (P).
   (b) Démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur normal de (P).
9. Déterminer l'ensemble des points de l'espace invariants par f. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4 BAC C 2005-BENIN

Exercice 1

1. p_1, p_2, p_3 sont des entiers naturels premiers et constituent dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 2.

(a) Démontrer que un et seul des nombres p_1, p_2, p_3 est un multiple de 3.

(b) Déterminer p_1, p_2, p_3.

2. x, y, z sont des entiers relatifs tels que : $3x+5y+7z=0$.

(a) Démontrer que l'on a : $y \equiv z\,[3]$.

(b) En déduire que x, y et z s'écrivent :

$$\begin{cases} x = -5p - 7q - 4r \\ y = 3p + r \\ z = 3q + r \end{cases}$$

avec $r \in \{0,1,2\}$ et $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

3. $ABCDEFGH$ est un pavé droit de centre O tel que $AB = 10, AD = 5$ et $AE = 5$. L'espace est rapporté orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ et (P) est le plan d'équation $3x+5y+7z=0$ dans ce repère.
Déterminer l'ensemble des points à coordonnées entières de (P) qui sont intérieurs au pavé $ABCDEFGH$.

Exercice 2

Soient f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x, définies par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{xln(|1-\frac{1}{x}|)} \text{si} x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

$g(x) = \dfrac{1}{x-1} + ln\left(\left|\dfrac{x-1}{x}\right|\right)$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de g.
2. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. (a) Étudier la continuité de f en 1.
   (b) Démontrer que : $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{x-1} = 1$.
   (c) Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1 puis donner une interprétation géométrique de chacun des résultats.
4. (a) Étudier les variations de f.
   (b) Prouver que $f(\alpha) = e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ et donner un encadrement de $f(\alpha)$.
5. Construire la courbe (C) et les demi tangentes éventuelles à la courbe (C) en son point d'abscisse 1.

PROBLÈME

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Partie A

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, le polynôme :$P(z)=z^3-\left[2+(3+\sqrt{2})i\right]z^2+\left[-5-3\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+1)i\right]z+\sqrt{2}+5i\sqrt{2}$.

1. (a) Démontrer que $P(z)$ peut s'écrire sous la forme :$P(z)=(z+1-i)Q(z)$ où $Q(z)$ est un polynôme de degré 2 que l'on précisera.
   (b) Écrire, sous forme algébrique, le nombre complexe : $d=\left[3+(2-\sqrt{2})i\right]^2$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.
2. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe z' définie par : $z'=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z}-1+i(1+\sqrt{2})$.
   On désigne par A,B et C les points d'affixes respectives $-1+i,3+2i$ et $i\sqrt{2}$.
   (a) Calculer les affixes respectives des points A' et C', images respectives de A et C par f.
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

Partie B

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$; on pose $g=f\circ h$.

3. (a) Déterminer l'écriture complexe de h.
   (b) Démontrer que g a pour écriture complexe $z'=(1+i)\bar{z}-1+3i$.
4. (a) Soit M un point du plan d'affixe $z=x+iy$ avec x et y des entiers. On note $N=g(M)$. Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont orthogonaux si et seulement si : $5x+3y=15$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $5x+3y=15$.
   (c) En déduire les points M du plan dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5;5]$ et tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient orthogonaux.

Partie C

Soit φ la transformation plane d'expression analytique :

$$\begin{cases} x'=y-1 \\ y'=x+2 \end{cases}$$

5. Démontrer que φ est une symétrie glissée.
6. Démontrer que $r=g\circ\varphi$ a pour écriture complexe : $z'=(1-i)z$.
7. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x,y) vérifiant : $5x^2+5y^2+6xy-4x+4y=0$.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma')=r(\Gamma)$.
   (b) Démontrer que (Γ') est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.
   (c) Démontrer que (Γ)est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.

5 BAC C 2006-BENIN

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$:
   (a) L'équation $3x - 4y = 6$.
   (b) Le système :
   $$\begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ y \equiv x^2 \ [8] \end{cases}$$
2. On pose $x = 18 + 32n$, $y = 12 + 24n$ et $S = (x + y)^\alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.
   Déterminer suivant les valeurs de α le reste de la division euclidienne de S par 4.

Exercice 2

Dans le plan orienté (P), on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k étant un élément de $\mathbb{Z}$. On pose $AB = a$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Soient I, J, K et L les milieux respectifs des cotés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan (P) tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = a^2$.

1. Soit M un point du plan (P).
   (a) Démontrer que : $(M \in (\Gamma)) \iff \left(MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = a^2\right)$.
   (b) Justifier que le point O est l'isobarycentre des points I, J, K et L.
   (c) Démontrer que : $(M \in (\Gamma)) \iff \left(MO^2 = \frac{a^2}{4}\right)$.
   (d) Caractériser (Γ).
2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s la réflexion d'axe (AB). On pose $f = r \circ s$ et $(\Gamma') = f(\Gamma)$.
   (a) Déterminer la droite (Δ) telle que $r = \varphi \circ s$, où φ est la réflexion d'axe (Δ).
   (b) Caractériser l'application f.
   (c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ'). (on prendra $a = 2$ cm).

PROBLÈME

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{lnx}{x - lnx} + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Partie A

1. (a) Étudier les variations de la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par : $u(x) = x - lnx$.
   (b) En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $x - lnx \neq 0$.
2. Soit D l'ensemble de définition de f.
   (a) Démontrer que $D = [-1, +\infty[$.

(b) Démontrer que f est continue sur D.

(c) Étudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

(d) Étudier la dérivabilité de f à droite en -1.

3. (a) Étudier les variations de f.

(b) Construire la courbe (C).

Partie B

4. On pose $I = [-1,]$ et $J = f(I)$. Soit la fonction

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow J \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

et (C') sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

(a) Démontrer que g est bijective.
Soit g^{-1} la bijection réciproque de g.

(b) Dresser le tableau de variation de g^{-1} puis construire sa courbe (Γ) dans le même repère que (C).

(c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de J.

(d) Calculer $\int_{-1}^{0}\left[g^{-1}(x)\right]dx$.

5. Soit A l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

(a) Calculer A.

(b) En déduire l'aire du domaine plan compris entre les courbes (C') et (Γ).

Partie C

Pour tout nombre réel x et y tels que $0 < y < 1$, on considère le nombre complexe z défini par : $z = x + i\dfrac{y-1}{1+\sqrt{-y^2+2y}}$ avec $i^2 = -1$.
Soit (Γ') l'ensemble des points M d'affixe z telle que $arg\,z = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

6. Soit u un nombre complexe non nul. Démontrer que :

$$\left(arg\,u = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} Re(u) = Im(u) \\ Im(u) < 0 \end{cases}$$

7. Soit $M(x,y)$ un point du plan.

(a) Établir que :

$$M \in (\Gamma') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{1+\sqrt{1-(y-1)^2}} \\ 0 < y < 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

(b) En déduire que :

$$M \in (\Gamma') \iff \begin{cases} y = g^{-1}(x) + 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}$$

(c) Démontrer que (Γ') est l'image de (Γ_1) par la translation t et caractériser t avec $(\Gamma_1) = (\Gamma) - \{O, A\}$.

8. (a) En déduire que (Γ') est l'image de (C') par la composée d'une symétrie orthogonale et de la translation t.

(b) Préciser les éléments caractéristiques de cette composée.

6 BAC C 2007-BENIN

Exercice 1

Dans l'espace orienté (E), on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $OA = 1$.

1. Démontrer que O est le barycentre des points pondérés $(A,1);(B,-2);(C,1)$ et $(D,-2)$.
2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (E) tels que $MA^2 - 2MB^2 - MC^2 - 2MD^2 = -4$.
3. On désigne par S le point de (E) tel que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OS}$, par d_1 et d_2 les demi-tours d'axes respectifs (OA) et (OB).
   (a) Préciser la nature de $d_1 \circ d_2$.
   (b) Déterminer l'image de (Γ) par $d_1 \circ d_2$.
   (c) Justifier que $(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})$ est un repère orthonormé direct de (E).
4. Soit l'application de (E) dans (E) qui, à tout point M, associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{BM'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) \wedge \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM}$$

.

   (a) Démontrer que t est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$.
   (b) Déterminer dans le repère $(A; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA})$ une équation cartésienne de l'image par t du plan (OAB).

Exercice 2

1. (a) Calculer $\int_0^x te^t dt$, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.
   (b) Soient a une constante réelle et u la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^x + a$.
   Soit U la primitive de u sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
      i. exprimer $U(x)$ à l'aide d'une intégrale.
      ii. En déduire $U(x)$ en fonction de x.
2. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^x - 2\int_0^1 f(x)dx \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Calculer $\int_0^1 f(x)dx$.

PROBLÈME

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. (unité : 2 cm).

f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+5}$ et (C) la courbe représentative de f.

Partie A

1. Étudier les variations de f.
2. On pose $K = f(\mathbb{R})$ et on considère l'application :

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

   (a) Démontrer que g est une bijection.

   (b) Soit g^{-1} la bijection réciproque de g et (C') la courbe représentative de g^{-1}. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x élément de K.

3. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^2 - 2xy - 5 = 0$.

   (b) En déduire les points de la courbe (C) dont les deux coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Partie B

Soit M et M' deux points distincts de (C) d'abscisses opposées.

4. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera.

   (b) Démontrer que l'application affine s du plan qui transforme M en M' a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

5. (a) Déterminer l'ensemble des points invariants par s.

   (b) Démontrer que pour tout point M d'image M' par s, le milieu du segment $[MM']$ appartient à la droite de repère $(O,\vec{v})$.

   (c) Quelle est la nature de s?

   (d) On désigne par Δ l'axe des abscisses.

      i. Déterminer l'image Δ' de Δ par s.

      ii. Démontrer que Δ et Δ' sont les asymptotes de (C').

      iii. Préciser les asymptotes de la courbe (C').

   (e) Construire les courbes (C) et (C') dans le même repère.

Partie C

On note E l'ensemble des nombres complexes z tels que $z - i\bar{z} \neq 0$ et pour tout z élément de E, on pose $z' = \dfrac{z + \bar{z} - 2i\sqrt{5}}{z - i\bar{z}}$.

6. Déterminer E.

7. Soit z un élément de E; on désigne par M l'image de z et on pose $z = x + iy$, x et y étant des nombres réels.
   (a) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M tels que $|z'| = \sqrt{2}$ est la réunion de (C) et de son symétrique par rapport à O.
   (b) Construire (Γ) dans le même repère que (C).
   (c) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{u} + 2\vec{v})$. En déduire la nature de (Γ).

7 BAC C 2008-BENIN

Exercice 1

1. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a : $-1 < \dfrac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1} < 1$.
2. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$ définie par : $f(x) = \dfrac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1}$.
   (a) Démontrer que f est une application.
   (b) Étudier le sens de variation de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Construire la courbe (C) représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité graphique : 2 cm).
3. (a) Justifier que f est une bijection.
   Soit g la bijection réciproque de f.
   (b) Justifier que g est dérivable sur $]-1;1[$.
   (c) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-1;1[$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{3}x^2 \dot{+} \dot{6}x \dot{+} \dot{5} = \dot{0}$.
2. Un entier naturel A s'écrit $\overline{361}^b$ dans le système de numérotation de base b et a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.
   (a) Démontre que : $3b^2 + 6b - 2 \equiv 0\,[7]$.
   (b) En déduire l'ensemble E des valeurs de b.
3. On suppose dans cette question que $b = 8$.
   (a) Vérifie que b appartient à E.
   (b) Donne l'écriture décimale de A.
   (c) Démontre que A est un nombre premier.
4. Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnues (x, y) : $x^2 + 6x = y^2 + 232$.

PROBLÈME

Le plan complexe (P) est muni du repère orthonormé direct $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$. On considère la droite d'équation $x+y-4\sqrt{2}=0$, et le point $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Partie A

1. Soit M un point du plan d'affixe z et M_1 le point d'affixe z_1, image de M par la symétrie orthogonale par rapport à (D).
   Exprimer z_1 en fonction de z.
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2. On désigne par f l'application $h\circ s$.
   (a) Démontrer que f a pour écriture complexe : $z'=2i\bar{z}-8\sqrt{2}(1+i)$.
   (b) Indiquer la nature et les éléments caractéristiques de f.
3. Soit H le milieu du segment $[MM_1]$ avec $M_1=s(M)$.
   (a) Démontrer que : $MH=\left|\dfrac{z+i\bar{z}-4\sqrt{2}(1+i)}{2}\right|$.
   (b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que :

$$\left|z-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{z+i\bar{z}-4\sqrt{2}(1+i)}{2}\right|$$

   est l'ellipse de foyer F, de directrice (D) dont on précisera l'excentricité.
4. (a) Démontrer que dans le repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, la courbe (Γ) a pour équation cartésienne : $3(x^2+y^2)-2xy-16=0$.
   (b) Démontrer que le point O est le centre de (Γ).
   (c) Déterminer une équation cartésienne de l'axe focal (Δ) de (Γ) et préciser la distance focale.
   (d) Soit F' le second foyer de (Γ). Donner les coordonnées de F' puis la définition bifocale de (Γ).
5. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$. On désigne par (Γ') l'image de (Γ) par r.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ').
   (b) Construire (Γ) et (Γ') dans le même repère.

Partie B

6. Soit a et b deux nombres réels strictement positifs et (E) l'ellipse d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
   (a) Démontrer que la moitié de l'aire du domaine intérieur à l'ellipse (E) est calculée, en unités d'aire, par l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

   .
   (b) A l'aide du changement de variable $x=a\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$, calculer

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

   .

(c) En déduire que l'aire, en unités d'aire, du domaine intérieur à l'ellipse (E) est πab.

7. Quelle est l'aire du domaine intérieur de l'ellipse (Γ) ?

8 BAC C 2009-BENIN

Exercice 1

L'espace $\mathscr{E}$ est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit les points $A(1;-1;2), B(2;0;-2), C(-1;1;3)$ et $D(0;-3;-1)$.

1. (a) Démontrer que les points A, B et C déterminent un seul plan que l'on notera P.
   (b) Déterminer une équation cartésienne de P.
2. Justifier que $ABCD$ est un tétraèdre.
3. Soit s la réflexion du plan P, h l'homothétie de centre A et de rapport $\left(-\frac{2}{3}\right)$.
   (a) Déterminer les coordonnées de l'image D' du point D par s.
   (b) Calculer le volume de l'image par $h\circ s$ du tétraèdre $ABCD$.
4. Déterminer une équation cartésienne de l'image P' du plan P par $h\circ s$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes z_n, $(n\in\mathbb{N})$ définis par :

$$\begin{cases} z_0 = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{6}} z_n, n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

On désigne par M_n l'image de z_n dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. (unité graphique : 4 cm).

1. Placer les points $M_0, M_1, ..., M_{11}$.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on a : $z_n = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{6}\right)}$.
   (b) En déduire que les points M_n et M_{n+12} sont confondus.
3. (a) Démontrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $z_{n+6} = -z_n$.
   (b) En déduire que O est le milieu du segment $[M_nM_{n+6}]$.
4. (a) Calculer sous forme exponentielle : $\dfrac{z_{n+6}-z_n}{z_{n+4}-z_n}$.
   (b) En déduire la nature du triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

PROBLÈME

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right), \text{si } x>0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Partie A

1. Soit D l'ensemble de définition de f.
   (a) Démontrer que $D = [0, +\infty[$.
   (b) Démontrer que f est continue sur D.
   (c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0.
   Donne une interprétation géométrique du résultat obtenu.
2. Pour t élément de $]0;1[$, on pose : $\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t} - 1\right)$.
   (a) Démontrer que $\varphi(t) = \frac{(1-t)^2}{t} \times \frac{ln(1-t)}{t}$.
   (b) A l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{x+1}$, démontre que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. On rappelle qu'au voisinage de 0, on a : $ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}t^2 + t^2\epsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t) = 0$.
   (a) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x :
   $$f(x) + x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 ln(1-t) + \frac{1}{t} - \frac{3}{2}$$
   , avec $t = \frac{1}{x+1}$.
   (b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + x - \frac{1}{2}\right] = 0$.
4. On considère la fonction numérique g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
   $$g(x) = 2ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1}$$
   .
   (a) Étudier le sens de variation de g.
   (b) Déterminer les limites de g en 0 par valeurs supérieures et en $+\infty$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) < 0$.
5. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = xg(x)$.
   (b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
   (d) Construire la courbe (C).
6. Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda \leq 1$. On pose : $A(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x)dx$.
   (a) En utilisant une intégration par parties et l'égalité : $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$, calculer $A(\lambda)$.
   (b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.
   (c) Calculer $\lim_{\lambda\to 0^+} A(\lambda)$.

Partie B

Soit la fonction h : $\begin{array}{ccc} [0;+\infty[& \longrightarrow &]-\infty;0] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

7. Démontrer que h est une bijection.
8. Soit h^{-1} la bijection réciproque de h et (C') sa courbe représentative.
   On désigne par (Γ) l'ensemble des points N de P tels que :

$$\begin{cases} M' \in (C') \\ AM' = AN \\ mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AN}}\right) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

   A étant le point de coordonnées $(1;1)$.

   (a) Démontrer que (Γ) est l'image de (C) par $r \circ S_\Delta$ où r est une rotation que l'on précisera et S_Δ la réflexion d'axe (Δ) d'équation : $x - y = 0$.

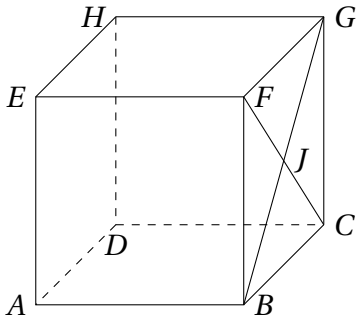
   (b) En déduire que (Γ) est l'image de (C) par une réflexion dont l'axe passe par A.

   (c) Donner une écriture complexe de cette réflexion.

9 BAC C 2010-BENIN

Exercice 1

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arrête 1. On désigne par J le centre du carré $BCGF$.
On muni l'espace du repère orthonormé direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. (a) Justifier que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

   (b) Déterminer l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que :

$$\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

   .

2. Soit t l'application de l'espace dans lui-même qui associe à tout point M, le point $t(M) = M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

   (a) Déterminer la nature de t et préciser son élément caractéristique.

   (b) Déterminer l'image de (P) par t.

3. Démontrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre Ω et le rapport k telle que $h(J) = A$ et $h(B) = H$.

4. Soit $S\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ un point de l'espace.
   (a) Démontrer que $SABCD$ est une pyramide.
   (b) Calculer le volume de l'image de cette pyramide par $t \circ h$.

Exercice 2

1. Justifier que dans l'anneau $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}; \dot{+}, \dot{\times})$, $\dot{5}$ est inversible et trouver son inverse.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{4}x = \dot{4}$.
3. Résoudre dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2$ le système :
$$\begin{cases} \dot{5}x + \dot{6}y = \dot{3} \\ \dot{3}x + \dot{2}y = \dot{5} \end{cases}$$
4. Déterminer tous les entiers naturels n tels que $n \times 7^{2n} + 4n - 1$ soit divisible par 8.

PROBLÈME

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = ln|x| - \dfrac{ln|x|}{x}$.
On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. Soit D l'ensemble de définition de f.
   (a) Démontrer que $D = \mathbb{R}^*$.
   (b) Étudier les limites de f aux bornes de D.
   (c) Étudier les branches infinies de (C).
2. Justifier que f est dérivable en tout point de D et qu'on a : pour tout x élément de D, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x) = ln|x| + x - 1$.
3. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Démontrer que, pour tout x élément de $]-\infty;0[$, $g(x) < 0$.
   (c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.
4. (a) Dresser le tableau de variations de f.
   (b) Tracer la courbe (C).
5. Soit m un nombre réel.
   En utilisant la courbe (C), déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. On précisera en particulier les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
6. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
7. Soit la fonction u : $\begin{array}{ccc}]-\infty;0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$
   On désigne par (C_0) la courbe représentative de u dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Démontrer que u est une bijection.

(b) Soit (Γ) l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, y < 0 \\ x = u(2y) \end{cases}$$

Démontrer que (Γ) est l'image de (C_0) par la composée de deux transformations simples du plan que l'on précisera.

Partie B

8. Démontrer que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans $[1; +\infty[$.
   On note α_n cette solution.
   On obtient ainsi la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.
9. (a) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
10. On note l la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.
    (a) Justifier que $l \in [1; +\infty[$.
    (b) Justifier que $f(l) = 0$.
    (c) En déduire l.

10 BAC C 2011-BENIN

Exercice 1

Dans l'espace orienté, on considère le tétraèdre $ABCD$ tel que ABC, ABD et ACD forment trois triangles isocèles en A et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

1. (a) Démontrer que : $AB = AC = AD = 1$.
   (b) Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé direct de l'espace.
   Dans la suite, on suppose que l'espace est muni du repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
2. (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
   (b) Soit G le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
      i. Déterminer les coordonnées de G.
      ii. Vérifier que G est le centre de gravité du triangle BCD.
3. (a) Déterminer la nature du triangle BCD.
   (b) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel m, l'ensemble (E_m) des points M de l'espace tels que : $MB^2 + MC^2 + MD^2 = m$.
   (c) Peut-on déterminer m pour que l'isobarycentre des points A, B et C appartienne à (E_m) ?

Exercice 2

1. Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne par 10 de 13^n.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, on a : $1+13+13^2+\cdots+13^{4k-1} \equiv 0\,[10]$.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $A_n = 1+13+13^2+\cdots+13^n$.
   Détermine suivant les valeurs de n, le chiffre des unités de A_n.

PROBLÈME

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -\sqrt{1-e^{2x}} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x\,ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par D son ensemble de définition et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. (a) Démontrer que : $D = \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
2. (a) Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet à l'origine du repère une tangente dont on donnera une équation.
3. Étudier le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$.
4. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.
   (b) Déterminer le sens de variations de f' sur $]-\infty;0[$.
   (c) Dresser le tableau des variations de f'. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.
5. (a) Dresser le tableau des variations de f.
   (b) En déduire sur $]0;+\infty[$, la position relative de $(\mathscr{C})$ et de la droite (Δ) d'équation : $y = 2$.
6. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.
7. Soit α un nombre réel tel que : $0 < \alpha < 1$. On désigne par $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $y = 2$, $x = \alpha$ et $x = \dfrac{2}{e-1}$.
   (a) Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$.
   (b) Calculer $\lim_{\alpha\to0^+} \mathscr{A}(\alpha)$. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du résultat obtenu?

   Partie B

   Soit x_0 un nombre réel de $]0;+\infty[$.
8. (a) Donner une équation de la tangente (T_{x_0}) à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse x_0.

(b) Démontrer que (T_{x_0}) coupe l'axe des ordonnées au point N d'ordonnée $f(x_0) - x_0 f'(x_0)$.

9. Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$.
On désigne par (Γ) la courbe représentative de g.

(a) Étudier les variations de g.

(b) Vérifier que pour tout x élément de $]0;+\infty[$, on a : $f(x) - g(x) = xf'(x)$.

(c) Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

(d) Tracer (Γ) dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

(e) Déduire des questions précédentes une construction géométrique de la tangente (T_x). Tracer de cette façon la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 2.

11 BAC C 2012-BENIN

Contexte : Conception d'un centre de loisirs.
Ali a hérité d'un domaine sur lequel il veut construire un centre de loisirs. Son fils BIO, titulaire d'un baccalauréat scientifique s'intéresse au volet esthétique du centre. Pour cela, il considère la famille de courbes (C_m) d'équation $(m-2)x^2 + y^2 - 2y - 5 + m = 0$ dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, m étant un paramètre réel. Il utilise aussi l'image d'une courbe (Γ) par une transformation du plan.
Tache : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Bio en résolvant les trois problèmes suivants.

I.

1. Soit $M(x,y)$ un point du plan $\mathscr{P}$. Justifie que :

$$(M \in (C_m)) \iff (m-2)x^2 + (y-1)^2 = (6-m)$$

.

2. (a) Étudie le signe de $\dfrac{6-m}{m-2}$ suivant les valeurs de m où m est différent de 2.

(b) Précise la nature de (C_3).

(c) Étudie suivant les valeurs de m, la nature de (C_m).

II.

Bio choisit la courbe (Γ) représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + lnx$, la transformation φ telle que $\varphi = t \circ s$ où t est la translation de vecteur $\vec{e_1} - \vec{e_2}$ et s la réflexion d'axe Δ d'équation $y = x$.
Il s'agit de rechercher un point I de (Γ), un point J de (C_4) tels que $\varphi(I) = J$ et de matérialiser ces points à l'aide d'indication à présenter aux ouvriers sur le chantier de construction du centre de loisirs.

3. Étudier :

(a) les variations de f.

(b) les variations de la fonction v de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $v(x) = x^2 - x + lnx$.

(c) le signe de $v(x)$ pour tout nombre réel strictement positif x.

(d) la position relative de (Γ) par rapport à la droite Δ.

4. (a) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique α.

(b) Justifie que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. (a) Détermine l'écriture complexe de φ.

(b) Précise la nature et les éléments caractéristiques de φ.

(c) Représente l'image (Γ') de (Γ) par φ.

6. (Γ') coupe (C_4) en deux points J_1 et J_2.
Donne une méthode de construction d'un point I de (Γ) tel que $\varphi(I) = J$ où J élément de $\{J_1, J_2\}$.

III.

Compte tenu de la superficie disponible, Bio veut qu'on installe un nombre a de chaises et un nombre b de tables pour les grandes cérémonies.
D'après ses calculs, il se rend compte que :

$$\begin{cases} 3a + 7b = 1020 \\ PGCD(a; b) = 20 \end{cases}$$

7. Détermine le nombre de chaises et le nombre de tables à installer.

12 BAC C 2013- BENIN

Contexte : Premiers pas d'un jeune bachelier en architecture
Jean est un lauréat du baccalauréat, série C. Il se propose d'utiliser ses connaissances pour l'élaboration du plan et la décoration de la nouvelle maison que son père projette de construire. Dans ses propositions, il suggère la construction d'une paillote dont le plancher aura la forme de l'ensemble $(\sum)$ des points M du plan tels que $MF + MF' \leq 5$, où F et F' sont deux points distincts donnés du plan matérialisé par le plancher (unité de longueur 1 cm). La toiture de cette paillote aura la forme d'une pyramide de sommet S. Jean se propose également de dessiner le motif décoratif du mur de la clôture de la maison. Son père veut en savoir un peu plus sur ses intentions.
Pour satisfaire la curiosité de son père, Jean a choisi, dans le plan du sol, un point O, puis il a défini un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace tel que le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère du plan du plancher.
Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, Jean a choisi $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$; $F'\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ et a tracé l'ensemble (Γ) des points M tels que $MF + MF' = 5$. Jean explique que dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; les coordonnées du point S seront des entiers naturels.
Tache : Tu es invité(e) à résoudre les problèmes suivants en vue de te faire une idée plus précise du projet

de Jean.

Problème 1

1. (a) Justifie que (Γ) est une ellipse.
   (b) Précise le centre et l'excentricité de (Γ').
   (c) Déterminer une équation cartésienne de (Γ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2. (a) Précise les coordonnées des sommets de (Γ).
   (b) Trace (Γ).
   (c) Explique comment Jean a pu tracer (Γ) sur le plancher.

Problème 2

Jean a expliqué que deux faces de la pyramide représentant la toiture de la paillote sont contenues dans les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives : $x+2y+2z-16=0$ et $11x+9y-2z-19=0$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

3. (a) Démontre que (P_1) et (P_2) sont sécants suivants une droite (Δ).
   (b) Démontre que si $M(x,y,z)$ est un point de (Δ) alors $12x+11y=35$.
   (c) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $12x+11y=35$, d'inconnues (x,y).
   (d) Détermine les points de (Δ) dont toutes les trois coordonnées sont des entiers relatifs.
4. (a) Détermine les coordonnées du point S.
   (b) Calcule la distance du point S au plan du plancher.

Problème 3

La figure ci-après représente une partie du motif de la décoration que propose Jean pour le mur de la clôture.

Il l'a obtenue en représentant dans un repère orthonormé (unité : 2 cm) quelques courbes de la famille de courbes (C_k) représentatives des fonctions :

$$f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + \frac{1-ke^{2x}}{1+ke^{2x}}$$

k est un nombre réel strictement positif.

5. (a) Justifie que l'ensemble de définition de f_k est $\mathbb{R}$.
   (b) Détermine les limites de f_k au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. (a) Justifie que f_k est solution de l'équation différentielle $y' = (y-x)^2$.
   (b) Justifie que la fonction dérivée f_k' de f_k s'annule pour un seul nombre réel x_k que tu préciseras.

(c) Détermine le sens de variation de f_k.

(d) Dresse le tableau des variations de f_k.

7. Soit A_k le point de (C_k) d'abscisse x_k.

(a) Précise les coordonnées de A_k.

(b) Justifie que les points A_k appartiennent tous à une même droite.

8. (a) Démontre que pour tout nombre réel x,

i. $f_k(x) = x - 1 + \dfrac{2}{1+ke^{2x}}$

ii. $f_k(x) = x + 1 - \dfrac{2ke^{2x}}{1+ke^{2x}}$

(b) Démontre que les droites (Δ_1) et (Δ_2) d'équations respectives $y = x+1$ et $y = x-1$ sont des asymptotes à (C_k).

(c) Etudie la position relative de (C_k) par rapport aux droites (Δ_1) et (Δ_2).

9. (a) Détermine la valeur de k pour laquelle (C_k) passe par l'origine du repère.

(b) Trace les courbes $\left(C_{\frac{1}{4}}\right)$ et (C_3) dans le même repère.

10. Jean propose de compléter son motif en tracant les courbes (Γ_k) d'équations $x = f_k(y-1)$.

(a) Justifie que f_k est une bijection.

(b) Soit f_k^{-1} la bijection réciproque de f_k.
Étudie la dérivabilité de f_k^{-1}.

(c) Démontre que (Γ_k) est l'image de (C_k) par une isométrie plane s.

(d) Caractérise s.

13 BAC C 2014 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Confection d'une tenue royale

Après son admission à la retraite, Monsieur KOTO précédemment professeur de mathématique, a été désigné pour être le nouveau chef de sa collectivité. Comme il est de coutume, le nouveau chef doit se faire confectionner une tenue qui reflète sa profession. Afin de garder secrètes les spécificités de la tenue, KOTO confie à son fils KOFFI, élève en terminale C, des informations codées à décrypter au couturier chargé de confectionner la tenue. C'est ainsi qu'il a été retenu que le couturier devra disposer de deux types T_1 et T_2 de perles. Les perles du type T_1 seront réparties sur la trace d'une ligne courbe (Γ) et celle du type T_2une ligne de courbe (Γ'). Le nombre a de perle de type T_1 et le nombre b de perle du type T_2 vérifient la relation $b = 6a^4 + 3a^2 + 4a + 1$ avec $a \geq 2$. Pour coder cette relation, KOTO recommande à KOFFI de mémoriser suivant la valeur de l'entier a, l'écriture de b dans la base a. Enfin KOFFI a été

informé que a est aussi la plus petite valeur de l'entier n tel que le nombre complexe $\left(1+e^{i\frac{\pi}{5}}\right)^n$ soit imaginaire pur.

Une fois chez le couturier, KOFFI veut lui expliquer le travail à faire.

Tache : Tu es invité(e) à aider KOFFI dans sa mission en résolvant les trois problèmes suivants :

PROBLÈME 1

1. Précise les différentes expressions de b que Koffi a utilisé pour mémoriser la relation considérée (Tu donneras suivant les valeurs de a l'écriture de b dans la base a).
2. (a) Justifie que $1+e^{i\frac{\pi}{5}} = \left(2\cos\frac{\pi}{10}\right)e^{i\frac{\pi}{10}}$.
   (b) Déduis en le module et un argument de $1+e^{i\frac{\pi}{5}}$.
   (c) Justifie que le nombre de perle du type T_1 est 5.
3. Calcule le nombre de perle du type T_2.

PROBLÈME 2

La ligne (Γ) est obtenue à partir d'un carré $ABCD$ du plan (P) orienté tel que $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ et $AB=1$; S_1 étant la réflexion d'axe (AB), r_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, (Γ) est l'image par $r_1\circ s_1$ de l'ensemble (Γ_1) des points M du plan (P) tels que $MA^2+4MB^2-MC^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}MN^2$ où N est l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe la droite (AB) et de rapport 3.

4. (a) Construis le point E, barycentre des points pondérés $(A,1),(B,4)$ et $(C,-1)$.
   (b) Justifie que $EA^2+4EB^2-EC^2=-\frac{1}{2}$.
   (c) Justifie qu'un point M du plan appartient à (Γ_1) si et seulement si $\frac{ME}{MN}=\frac{1}{4}$.
   (d) Déduis-en la nature de (Γ_1).
5. Soit s la réflexion d'axe (CD).
   (a) Détermine la droite (Δ) telle que $r_1=s_2\circ s$ où s_2 est la réflexion d'axe (Δ).
   (b) Justifie que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$.
   (c) Déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de $r_1\circ s_1$.
6. (a) Justifie que (Γ) est une ellipse.
   (b) Préciser les sommets de (Γ).
   (c) Construis (Γ).

PROBLÈME 3

La ligne (Γ') est obtenue à l'aide de la courbe (Γ_2) dans le plan (P) muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$; la courbe (Γ_2) est la représentation graphique de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{x}{e^x+x}$.

7. (a) Étudie les variations de la fonction $u(x)=e^x+x$.

(b) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α.

(c) Justifie que $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

(d) Étudie le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.

8. (a) Étudie les variations de f.

(b) Construis la courbe (Γ') représentant la fonction de g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) + f(|x|) = 0$.

14 BAC C 2015 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Souvenirs d'un stage en GRVC

Assiba étudiante en agronomie, a effectué un stage dans un groupement régional à vocation coopérative (GRVC) qui produit des huiles végétales. Plusieurs équipes de femmes participent aux activités dont le stockage des huiles dans les cuves spéciales. Si les N femmes de ce GRVC se constituent en équipes de 6 pour remplir les cuves, il en reste 4 pour s'occuper de diverses activités d'entretien; mais pour qu'elles forment des équipes de 11 en nombre suffisant, elles ont recours aux service de 9 stagiaires. Cette intégration des stagiaires aux équipes offre à Assiba l'occasion d'étudier l'évolution du bénéfice de la coopérative.

Pour élaborer son rapport de stage, Assiba se fait aider de son jeune frère Gawé , élève en classe terminale C à qui elle confie la détermination de l'entier naturel N avec $(120 < N < 240)$,l'étude des caractéristiques des cuves ainsi que l'évolution des bénéfices engrangés par le GRVC.

Tache : Tu es invité(e) à trouver une réponse aux préoccupations de Assiba en aidant Gawé à résoudre les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. (a) Justifie que N vérifie le système : $\begin{cases} N \equiv 4\,[6] \\ N \equiv 2\,[11] \end{cases}$

(b) Déduis-en l'existence de deux entiers naturels p et q tels que $N = 6q + 4$ et $11p - 6q = 2$.

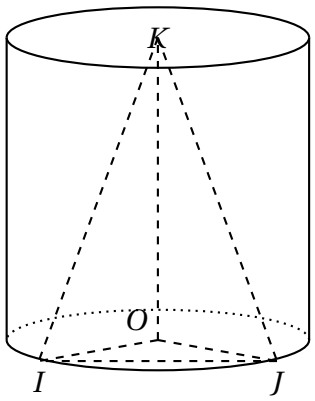
2. (a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $11x - 6y = 2$.

(b) Déduis-en la valeur de N.

(c) Vérifie que N s'écrit $\overline{362}$ en base 8.

Problème 2

L'une des cuves servant à conserver l'huile a la forme d'un cylindre ayant à l'intérieur une partie tétraédrique $KOIJ$, une ouverture et deux robinets R_1 et R_2. Le point O est le centre du disque de base sur lequel repose le cylindre; le triangle OIJ est isocèle et rectangle en O; le segment $[OK]$ est la hauteur du cylindre; $OI = 1m$ et $OK = 2m$.



Le robinet R_1 est placé au point A tel que $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OI} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$.
L'ouverture sur la base supérieure est délimitée par l'ensemble (Γ) des points M du plan rapporté au repère $(K;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ tels que : $2ME^2 - 4MF^2 + 2MG^2 - 4MH^2 = -5$ avec $EFGH$ un carré de centre K et $KG = 1$.
Gawé munit l'espace du repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OK}$.

3. Détermine les coordonnées du point A.
4. Le robinet R_2 est placé au placé au point B, image du point A par l'application $s_1 \circ s_2$ où s_1 est la réflexion de plan (KOI) et s_2 la réflexion de plan (KOJ).
   (a) Justifie que $s_1 \circ s_2$ est un demi-tour dont tu préciseras l'axe (Δ).
   (b) Détermine les coordonnées du point B.
5. La partie tétraédrique contient un liquide de refroidissement et l'huile est stockée dans la partie restante du cylindre.
   Calcule le volume d'huile que l'on peut stocker dans la cuve.
6. (a) Justifie que K est barycentre des points pondérés $(E,2);(F,-4);(G,2)$ et $(H,-4)$.
   (b) Détermine l'ensemble (Γ).

Problème 3

Une étude a permis de savoir qu'en fonction du nombre d'années x d'existence de ce GRVC, le bénéfice réalisé en millions de francs CFA est donné par : $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x}} - x$; avec $x > 0$.

7. Démontre que f admet un prolongement par continuité en 0.
   On note g ce prolongement par continuité, et on note $(\mathbb{C})$ la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
8. (a) Démontre que g est continue sur $[0;+\infty[$.
   (b) Etudie la dérivabilité de g à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.
   (c) Calcule $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.
9. (a) Etudie le sens de variation de g' sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (b) Démontre que : $\lim\limits_{x \to 0_{x>0}} g'(x) = -1$.
   (c) Dresse le tableau des variations de g'.

(d) Démontre que l'équation $g'(x) = 0$ admet deux solutions α et β telles que $0,1 < \alpha < 0,2$ et $2,1 < \beta < 2,2$.

(e) Détermine le signe de $g'(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.

10. (a) Etudie les variations de g.

(b) Démontre que $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ et $f(\beta) = \beta^2 - \beta$.
Déduis-en un encadrement de chacun des réels $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.

(c) Trace la courbe $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[0;7]$.

11. Précise l'année au cours de laquelle la coopérative réalise son bénéfice maximum ainsi que ce bénéfice.

15 BAC C 2016 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Planification de la phase opérationnelle d'un projet agricole.
Pour accéder au crédit mis en place pour l'entrepreneuriat des jeunes, Soton un jeune diplômé sans emploi a décidé de monter un projet de culture du jasmin, un arbuste à fleurs dont la senteur très appréciée est recherchée dans la fabrication de produits cosmétiques. Il prévoit dans son projet, la confection de plaques métalliques pour clôturer le lieu d'implantation de la culture. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\Omega;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le sol est représenté par le plan (Q) passant par $O(0,4,0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Les plaques sont assimilables aux plans (P) et (P') tels que (P) a pour équation $x-y+z-3=0$ et $S_{(P)} \circ S_{(P')} = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$, $S_{(P)}$ et $S_{(P')}$ les réflexions de plans (P) et (P') respectivement et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$. En vue de l'arrosage, un raccord est placé dans le plan de repère $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ tel que $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i}+2\vec{j})$ et $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{70}}(6\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k})$ et suivant un itinéraire qui coïncide avec une portion de courbe (C) représentative des variations d'une fonction numérique f de variable réelle x. Le traitement des jeunes plants de jasmin consiste en une pulvérisation avec un produit chimique contenu dans un autre raccord muni de robinets qui sera placé suivant un itinéraire qui coïncide dans le plan (Q) avec une portion de la courbe (τ).
Sovissi, élève en classe de terminale scientifique, a pris connaissance du projet de son frère ainé Soton et s'interroge sur certains aspects techniques notamment le système d'irrigation et de traitement phytosanitaires des plants.
Tache : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Sovissi en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. (a) Détermine une équation cartésienne du plan (Q).

   (b) Prouve que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires suivant une droite (Δ) dont tu détermineras un système d'équations cartésiennes.

2. Détermine une représentation paramétrique du plan (P').

3. (a) Démontre que $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ est un repère orthonormé du plan (Q).

   (b) Détermine dans le repère $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, l'expression analytique de la restriction h au plan (Q) de la réflexion $S_{(P)}$.

Problème 2

En réalité f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{x}{2^{|x|}+1}$. La courbe (τ) est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (Q) vérifiant l'égalité : $1+x-y+(3+x)\times 2^{|y+2|}=0$ obtenue à l'aide de la transformation du plan $\varphi = S\circ t$; où S est la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ') : $y=x$ et t la translation de vecteur non nul $\vec{v}$.

4. (a) Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.

   (b) Prouve qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $]-\infty;0]$ pour tracer la courbe (C).

5. g est la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par : $g(x)=1+2^x+x\ln 2$.

   (a) Étudie les variations de la fonction g.

   (b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]-\infty;0]$, une solution α telle que $-1,9<\alpha<-1,8$.

   (c) Déduis-en le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0]$.

6. (a) Calcule la limite de f en $-\infty$.

   (b) Étudie la dérivabilité de f à gauche en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

   (c) Étudie les variations de la fonction f sur $]-\infty;0]$.

   (d) Construis la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

7. (a) Détermine une équation de l'image (C') de (C) par la translation t de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$.

   (b) Déduis-en que $(\tau)=\varphi[(C)]$.

   (c) Démontre que φ est une symétrie glissée dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

8. Construis (τ) dans le repère $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$.

Problème 3

On considère la suite numérique (u_n), $n\in\mathbb{N}^*$ de terme général :

$$u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}\,dx$$

On estime que le produit chimique destiné au traitement des jeunes plants de jasmin éliminera à la $n^{ème}$ semaine de traitement u_n kilogrammes d'insectes et de parasites. La pulvérisation et

l'arrosage des plants se font à des intervalles de temps réguliers, soit toutes les T_1 heures pour la pulvérisation et toutes les T_2 heures pour l'arrosage.
On suppose que $T_2 < T_1 < 48$ et que dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$, les classes $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$ sont solutions de l'équation $(E) : x^2 + \overline{23}x + \overline{98} = \overline{0}$.

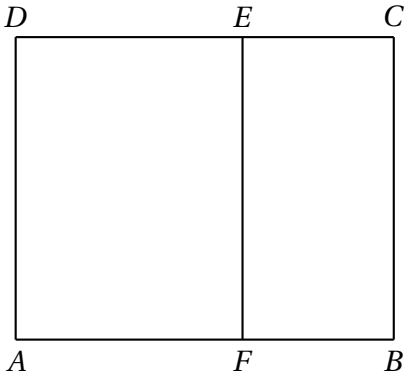
9. (a) Justifie que $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps.
   (b) Développe et réduis $(x - \overline{36})(x - \overline{42})$ dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$.
   (c) Résous dans $\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ l'équation (E).
   (d) Déduis-en la prochaine date à laquelle les plants ont été simultanément arrosés et pulvérisés, les robinets ayant été en marche le 14 juin 2015 à $6h$.
10. (a) Justifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de termes positifs.
    (b) Étudie le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
    (c) Déduis-en que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
    (d) Démontre que pour tout x élément de $[0;1]$, $\dfrac{x^n}{3} \leq \dfrac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$.
    (e) Déduis-en la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

16 BAC C 2017 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : *Etude du projet de construction d'une maison*
Sur un domaine $ABCD$ de forme rectangulaire, Arouna, le propriétaire décide d'ériger une maison. Dans le dossier technique, l'architecte en charge du projet propose un aménagement comme l'indique la figure ci-après :



La partie représentée par le carré $AFED$ est destinée au bâtiment et l'autre partie au jardin et d'autres ouvrages.
L'architecte affirme que pour réaliser le découpage du domaine, il a utilisé une similitude directe qui transforme les points A, B, C et D respectivement en B, C, E et F.

N'étant pas outillé pour comprendre le dossier, Arouna sollicite son fils Ousmane, élève en terminale C pour mieux apprécier certaines informations qui y sont contenues.
Afin de vérifier l'existence de la similitude γ, Ousmane suppose que $AD = 1$ et $AB = l$ $(l > 1)$, puis il munit le plan du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$. Il s'intéresse par ailleurs à la quantité de carreaux à utiliser pour le revêtement du plancher dans les pièces du bâtiment et aussi à la configuration du jardin.
Tache : Tu es invité(e) à aider Ousmane à répondre à ses différentes préoccupations en résolvant les problèmes ci-après.

Problème 1

1. Ousmane suppose que la similitude γ existe.
   (a) Démontre que l'on a : $\frac{1}{l} = l - 1$.
   (b) Déduis-en que : $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (c) Détermine le rapport et l'angle de la similitude γ.
2. (a) Justifie l'existence d'une similitude directe γ' qui transforme A en B et B en C.
   (b) Démontre que dans le repère $(A; \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$, la similitude γ' a pour écriture complexe : $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
   (c) Détermine les images des points C et D par γ'.
   (d) Justifie que l'architecte a raison au sujet de procédé de découpage du domaine.

Problème 2

Il est prévu que le plancher des pièces du bâtiment seront carrelés.

3. Le plancher de la salle à manger a la forme d'un rectangle dont les dimensions sont : $4,54m$ et $3,75m$. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33cm$ de coté. On commence la pose à partir d'un coin de la pièce.
   (a) Justifie qu'il n'est pas possible de couvrir le plancher de cette pièce avec uniquement des carreaux entiers (sans découpage).
   (b) Effectue la division euclidienne de 454 par 33. Déduis-en le nombre de carreaux non découpés qui sont posés dans le sens de la longueur.
   (c) Détermine le nombre le nombre de carreaux non découpés qui seront posés dans cette pièce.
4. Le plancher de la cuisine a la forme d'un rectangle de dimension $4,55m$ et $3,85m$.
   On veut utiliser deux types de carreaux pour son revêtement : des pièces carrées de type T_1 de $15cm$ de coté et des pièces carrées de type T_2 de $35cm$ de coté ; on doit utiliser plus de pièces de type T_2 que de pièces de type T_1.
   (a) Justifie que le nombre a de carreaux du type T_1 et le nombre b de carreaux du type T_2 sont tels que : $9a + 49b = 7007$.
   (b) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $9a + 49b = 7007$.
   (c) Détermine le nombre de pièces de chaque type que peut poser dans la cuisine.

Problème 3

Pour rendre attrayante la cour de la maison, l'architecte a prévu un parterre de fleurs suivant des configurations bien précises. L'une des configurations est modélisée par une portion (Γ) de l'ensemble des points M dont les coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ vérifient : $\dfrac{3\ln y}{\sqrt{y}} + y - 1 - |x| = 0$.

5. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$.
   (a) Etudie le sens de variation de g.
   (b) Justifie que g admet un minimum que tu préciseras.
   (c) Détermine le signe de $g(x)$ pour tout x élément de l'intervalle $]0;+\infty[$.
6. On considère la fonction f de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{5}} + x - 1$.
   (a) Démontre que f est une application.
   (b) Etudie les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.
   (c) Etudie le sens de variation de f.
   (d) Dresser le tableau de variation de f.
   (e) Déduis-en le signe de $f(x)$ pour tout x élément de $]0;+\infty[$.
7. On note (C) la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
   (a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C).
   (b) Etudie la position relative de (C) et (D).
   (c) Trace la courbe (C).
8. (a) Démontre que f est une bijection. On note (C') la courbe représentative de sa bijection réciproque.
   (b) Soit $M(x;y)$ un point de (Γ). En remarquant que $f(y) = |x|$, démontre que $y \geq 1$.
   (c) Démontre que (Γ) est la réunion d'une portion (Γ_1) de (C') et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
   (d) Trace (Γ) dans le même repère que (C).

17 BAC C 2018 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Premiers pas d'un jeune diplômé sur le marché du travail.
A peine sorti de l'école nationale de génie civil, Codjo vient de décrocher un premier contrat de prestation de service : réfectionner la salle de spectacle de l'arrondissement de Valo. Le dossier technique

mentionne, entre autres, la décoration de la salle et le renouvellement des sièges. Il y a été utilisé par endroits un langage mathématique auquel Codjo est habitué depuis sa formation : « Chaque siège aura la forme d'un tronc de pyramide. Les sommets de la base de cette pyramide, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, sont des points images des solutions non imaginaire de l'équation $(E) : (z-3i)^5 - \bar{z} - 3i = 0$, d'inconnue z, nombre complexe dont le conjugué est noté $\bar{z}$.
Cossi, un jeune frère de Codjo élève en classe terminal scientifique, est intéressé par l'étude des diverses configurations que présente le projet, ainsi que les calculs y afférents.
Tache : Tu es invité(é) à trouver des réponses aux préoccupations de Cossi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1. (a) Vérifie que $3i$ est solution de l'équation (E).
   (b) Démontre que si z est solution de (E), distinctes de $3i$ alors $|z-3i| = 1$.
   (c) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
2. (a) Justifie que les points images des solutions de l'équation (E), distincts du point A d'affixe $3i$ sont les sommets d'un polygone régulier.
   (b) Déduis-en la nature d'une base du tronc de pyramide représentant le siège.

Problème 2

En vue de la décoration de la salle de spectacles, il doit être matérialisé sur l'un des murs, un domaine (D) déterminé par la courbe (Γ_1), représentative de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln\left(2x + \sqrt{4x^2+1}\right)$ et par le symétrique (Γ_2) de (Γ_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. (a) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
   (b) Démontre que l'origine du repère est centre de symétrie de (Γ_1).
   (c) Calcule la limite de f en $+\infty$. Déduis-en la limite de f en $-\infty$.
   (d) Justifie que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Déduis-en $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
   (b) Etudie les branches infinies de la courbe (Γ_1).
5. (a) Etudie les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = x - \ln(2x + \sqrt{4x^2+1})$.
   (b) Justifie que l'équation $u(x) = 0$ admet trois solutions dont l'une est 0 et les deux autres sont opposées. On note α la solution strictement positive de l'équation $u(x) = 0$.
   (c) Vérifie que : $2,1 < \alpha < 2,2$.
   (d) Etudie la position relative de (Γ_1) par rapport à la droite d'équation $y = x$.
6. Trace les courbes (Γ_1), (Γ_2) et la droite d'équation $y = x$ dans un même repère.
7. (a) Justifie que f est bijective.
   (b) Démontre que (Γ_2) est la courbe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})$.

8. Le domaine (D) est délimité par les courbes $(\Gamma_1), (\Gamma_2)$ et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = \alpha$.
   (a) Justifie que l'aire de (D) vaut 4 fois celle du domaine (D_1) délimité par (Γ_2) et les droites d'équations $y = x, x = 0$ et $x = \alpha$.
   (b) Calcule l'aire de (D_1) en fonction de α.
   (c) Déduis-en une valeur approchée de l'aire du domaine (D).

Problème 3

La décoration de la salle sera réalisé par les matériaux locaux de deux types m_1 et m_2. Un matériau de type m_1 coute 100 francs, un matériau de type m_2 coute 120 francs et le prix d'achat de ces matériaux s'élève à 11.040 francs. Par ailleurs le nombre de matériaux de type m_1 divise le nombre de matériaux de type m_2. Trois barres lumineuses forment un triangle équilatéral BCD de coté 1. Les matériaux serviront à concrétiser deux ensembles (Γ_3) et (Γ_4) de points de l'espace orienté (E). (Γ_3) est l'ensemble des points M de $(\mathscr{E})$ tels que : $MB^2 + MC^2 + 2MD^2 = 2$ et (Γ_4) est l'image de (Γ_3) par l'application g de $(\mathscr{E})$ dans $(\mathscr{E})$ qui à tout point M associe le point M' tel que : $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}) \wedge \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M'C} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

9. Détermine le nombre de matériaux de chaque type.
10. Justifie que :
    (a) Pour tout M de $(\mathscr{E})$ on a : $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}) \wedge \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}$.
    (b) Pour tout M et M' de $(\mathscr{E})$ on a : $g(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}$.
    (c) g admet un seul point invariant I.
11. Démontre que g est une homothétie dont tu préciseras les caractéristiques.
12. (a) Démontre que (Γ_4) est une sphère.
    (b) Justifie que l'aire totale des surfaces de (Γ_3) et (Γ_4) vaut 10 fois celle de (Γ_3).

18 BAC C 2019 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Aménagement du centre de réception des invités à un mariage

A l'occasion du mariage de sa sœur, Sovi, élève en classe de terminale, s'est rapproché de Bio, un membre du comité d'organisation de la réception des invités. Il traduit en langage codé des informations reçues de Bio comme suit :«le comité a prévu l'utilisation de n figures géométriques ($n \in \mathbb{N}$) pour l'embellissement du cadre physique ; le nombre de sièges pour les invités s'écrit $\overline{nnn}$ dans le système de numération de base 7 (sept) et $PGCD(n^3 + 5n^2 + n + 5; 3) = 3$». L'une de ces figures est un tétraèdre régulier $ABCD$ de l'espace orienté $\mathscr{E}$ et une deuxième figure est l'image de ce tétraèdre par une transformation de $\mathscr{E}$.

Sovi veut déterminer le nombre de sièges, évaluer l'aire de l'un des solides à matérialiser et construire

quelques-unes des figures géométriques considérées.

Tache : Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Sovi en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1. (a) Justifie que les entiers naturels (n^2+1) et 3 sont premiers entre eux. Tu pourras utiliser la congruence de n modulo 3.
   (b) Justifie que $PGCD(n^3+5n^2+n+5;3) = PGCD(n+5;3)$.
   (c) Détermine l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles : $PGCD(n^3+5n^2+n+5;3) = 3$.
2. (a) Justifie que le comité d'organisation a prévu 4 figures géométriques.
   (b) Ecris dans le système décimal le nombre de sièges réservés aux invités.

Problème 2

Le tétraèdre $ABCD$ a pour aire, en unités d'aire, $S = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} 64\sin^3 x\cos 2x dx\right|$.
La transformation dont il s'agit est $h_2 \circ h_1$ où h_1 est l'homothétie de centre A et de rapport 3 et h_2 l'homothétie de centre C et de rapport (-2). L'objet matérialisant l'image par cette transformation du solide sera recouvert de papier peint synthétique.

3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'application $h_2 \circ h_1$.
4. (a) Justifie qu'on a, pour tout nombre réel x : $\sin^3 x\cos 2x = -2\cos^4 x\sin x + 3\cos^2 x\sin x - \sin x$.
   (b) Calcule l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x\cos 2x dx$.
   (c) Calcule l'aire de la surface de l'image par $h_2 \circ h_1$ du tétraèdre $ABCD$.

Problème 3

Le plan P étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, une autre figure est une portion de la courbe représentative (Γ_1) de la fonction f de $[1;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$ définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2-x} + \ln x$$

. La quatrième figure géométrique est une portion de l'ensemble (Γ_2) des points N du plan tels que OMN est un triangle rectangle en O et isocèle, M est un point de (Γ_1) et l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right)$ de sens direct.

5. (a) Etudie la dérivabilité de f à droite en 1.
   (b) Achève l'étude des variations de f.
   (c) Justifie que f est une bijection.
6. (a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$.
   (b) Etudie la branche infinie de (Γ_1).
7. (a) Justifie que pour tout x élément de $]1;+\infty[$ l'équation $f'(x) = 1$ est équivalente à l'équation $\sqrt{x^2-x} = \dfrac{2x^2-x}{2(x-1)}$.

(b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2-x}=\dfrac{2x^2-x}{2(x-1)}$.

(c) Déduis-en que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]1;+\infty[$ une solution unique α et que $1<\alpha<2$.

8. (a) Etudie la position relative de (Γ_1) et de la droite Δ d'équation $y=x$.

(b) Trace la courbe (Γ_1).

9. (a) Justifie que (Γ_2) est l'image de (Γ_1) par une rotation r que tu caractériseras.

(b) Justifie que (Γ_2) est l'ensemble des points de coordonnées (x,y) telles que :

$$\sqrt{y^2-y}+\ln y+x=0$$

.

(c) Démontre que (Γ_2) est l'image de la courbe de la bijection réciproque f^{-1} de f par une symétrie orthogonale dont tu préciseras l'axe.

(d) Construis (Γ_2).

19 BAC C 2020 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Projet de réalisation d'un musée moderne.

Dans le cadre de la promotion du tourisme, le gouvernement a entrepris la réfection des musées existants et la construction d'un musée d'architecture moderne. Ce dernier sera réalisé sur un terrain rectangulaire dont les dimensions, en mètre, sont deux entiers naturels a et b tels que : $a^2+b^2=484254$ et $PPCM(a,b)=16965$.

L'architecte Koovi, en charge du projet, a prévu aussi la construction d'un local en verre et en acier blindés pour abriter les objets d'arts précieux.

Koffi, un élève en classe terminale C, a eu fortuitement accès à la maquette et s'intéresse au projet. Il veut connaître la dimension du terrain rectangulaire, la masse de verre nécessaire pour la construction du local et les décorations qui y sont réalisées.

Tache : Tu es invité(e) à répondre aus différentes préoccupations de Koffi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1. (a) Justifie que 1433 est un nombre premier.

(b) Décompose 484354 en produits de facteurs premiers.

(c) Déduis-en les valeurs possibles du $PGCD$ des entiers naturels a et b.

2. Déterminer les dimensions du terrain rectangulaire.

Problème 2

Le local devant abriter les objets d'arts précieux a la forme d'un tétraèdre $ABCD$ et comporte une caméra de surveillance positionnée en un endroit assimilé au point I, barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;1)$ et $(C;2)$. Une série de décorations lumineuses sera réalisée en des endroits assimilés aux points G_m, barycentre du système de points pondérés $\{(A;\ln m),(B;\ln m),(C;2\ln m),\left(D;(2-\ln m)^2\right)\}$, m étant, dans tout ce problème, un nombre réel strictement positif et ln le symbole de la fonction logarithme népérien.

3. Justifie, pour tout m, l'existence de G_m.
4. Justifie qu'il existe une valeur de m pour laquelle les points G_m et I sont confondus.
5. Démontre que l'on a, pour tout m, $\overrightarrow{DG_m} = \dfrac{4\ln m}{4+(\ln m)^2}\overrightarrow{DI}$.
6. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{4\ln x}{4+(\ln x)^2}$.
   (a) Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f.
   (b) Justifie que f peut être prolongée par continuité à droite en 0.
7. Soit f_1 le prolongement par continuité de f à droite en 0.
   (a) Etudie la dérivabilité de f_1 à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.
   (b) Etudie les variations de f_1.
   (c) Construis la courbe représentative de la fonction f_1 dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
8. (a) Détermine l'image de l'intervalle $]0;+\infty[$ par f.
   (b) Détermine l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}_+^*$.

Problème 3

Estimée en tonnes, la masse de verre nécessaire pour la construction du local est égale à la valeur moyenne sur $\left[0;\dfrac{\pi\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\right]$ de la fonction g solution de l'équation différentielle $\left(2-\sqrt{3}\right)y''+2y=0$ qui satisfait aux conditions $g(0)=1$ et $g'(0)=\sqrt{3}+1$.

9. Vérifie que $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$.
10. Justifie qu'on a : pour tout nombre réel x, $g(x) = \cos\left(\sqrt{3}+1\right)x + \sin\left(\sqrt{3}+1\right)x$.
11. Calcule, à un kilogramme près, la masse de verre utilisé.

20 BAC C 2021 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.

Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : Projet de réfection d'un bar-restaurant.

Après l'asphaltage de la rue passant devant sa parcelle, Wassiou décide de la réfection de son bar-restaurant. Il sollicite à cet effet les services d'un jeune maçon et son frère Razaki, élève en classe de terminale C qui doit faire des propositions et assister le maçon.

Le restaurant a la forme d'un pavé droit $ABCDEFGH$ de base $ABCD$. Sa toiture est assimilée à la pyramide $EFGHS$. Les distances AB, AD et AE en centimètre, sont respectivement des entiers naturels a, b et c tels que :

$$\begin{cases} pgcd(a,b) = 5 \times pgcd(a,c) \\ pgcd(a,c) = pgcd(b,c) = 25 \\ a+b+c = 1800 \\ c < b < a \\ 250 < c < 400 \end{cases}$$

Pour l'aménagement intérieur du restaurant, deux téléviseurs seront placés : l'un sur la face $ADHE$ et l'autre, disposé de sorte qu'il y ait symétrie entre les positions des deux téléviseurs.

Le comptoir du restaurant sera réalisé de sorte qu'il soit l'image du pavé $ABCDEFGH$ par une transformation de l'espace. Enfin, un espace vert est prévu sur une partie de la parcelle contiguë à la route.

Razaki se préoccupe des dimensions possibles du restaurant, du positionnement des téléviseurs, des dimensions du comptoir ainsi que l'aire du domaine que recouvre l'espace vert.

Tache : Tu es invité(e) à répondre aux préoccupations de Razaki en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1. (a) Démontre qu'il existe un entier relatif p tel que : $c = 125p + 50$.

   (b) Déduis-en que $c = 300$.

2. Détermine les dimensions du restaurant.

Problème 2

On rapporte l'espace à un repère orthonormé tel que la face $ADHE$ soit contenue dans le plan (P_1) d'équation $x = 0$.

Le deuxième téléviseur sera placé dans le plan (P_2), image du plan (P_1) par la transformation s d'expression analytique $\begin{cases} x' = 10 - x \\ y' = 5 - y \\ z' = z \end{cases}$. La transformation permettant de réaliser le comptoir est la transformation réciproque de l'application h de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} - 2\overrightarrow{CM}$.

3. Détermine :

   (a) l'ensemble des points invariants par s.

   (b) l'ensemble des points invariants par h.

4. Démontre que :

(a) s est un demi-tour.

(b) h est une homothétie que tu caractériseras.

5. Détermine :

(a) une équation cartésienne du plan contenant le deuxième téléviseur.

(b) les dimensions du comptoir.

Problème 3

La route est assimilable à une portion de la courbe représentative (C_f) de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = -2xe^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \ln(1+4x^2) - 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$.

6. En désignant par D_f l'ensemble de définition de f :

(a) Démontre que $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Justifie que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c) Etudie la dérivabilité de f en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat.

7. Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variations.

8. (a) Démontre que la droite d'équation $y = -2x - 2$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

(b) Achève l'étude des branches infinies de la courbe (C_f).

(c) Trace la courbe (C_f). (Tu prendras 2 cm pour unité graphique).

9. (a) A l'aide d'une intégration par parties, démontre que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+4x^2)\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2} - 1 + 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x$$

.

(b) On donne $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

A l'aide du changement de variable affine $t = 2x$, calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(c) Calcule l'aire du domaine réservé à l'espace vert.

21 BAC C 2022 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Les trois problèmes sont obligatoires.

Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

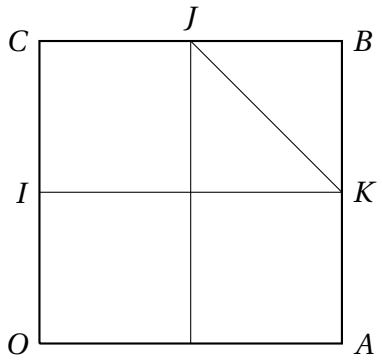
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Les seules calculatrices autorisées sont les calculatrices non programmables.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : La bibliothèque municipale.

La mairie de SAKE a obtenu un prêt pour la construction d'une bibliothèque. La figure ci-dessous schématise les différentes séparations qui seront réalisées à l'intérieur de cette bibliothèque.



$OABC$ est un carré de coté c ; I, J, K sont les milieux respectifs des segments $[OC]$, $[CB]$, $[BA]$.
Pour rembourser le prêt et assurer le bon bon fonctionnement de la bibliothèque, un droit d'adhésion et des frais d'abonnement seront institués pour les usagers.
A la cérémonie de lancement du projet, les différents collèges de la commune ont été massivement représentés par leurs élèves. Une ONG a décidé de mettre des manuels scolaires et des livres de culture générale à la disposition de la bibliothèque. Des rayons de manuels scolaires seront disposés le long des segments $[OI]$ et $[JK]$.
Awaou, première responsable de son collège et élève en classe terminale scientifique est impressionnée par la présentation du projet. C'est ainsi qu'elle a retenu que le comptoir du bibliothécaire peut etre modélisé par un arc de cercle et son bureau, par un point Ω, centre de la similitude directe s vérifiant $s(O) = J$ et $s(I) = K$. Awaou est intéressée par la position du point Ω, la fonction traduisant l'évolution annuelle des recettes générées par les droits d'adhésion et les frais d'abonnement à la bibliothèque, le montant à rembourser chaque année et le nombre total de manuels scolaires et de livres de culture générale que l'ONG veut mettre à la disposition de la bibliothèque à son ouverture.
Tache : Tu es invité (e) à répondre aux préoccupations d'Awaou en résolvant les problèmes ci-après.

Problème 1

1. Justifie l'existence de la similitude s.
2. Détermine le rapport et l'angle de la similitude s.
3. (a) Démontre que Ω appartient à l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $MJ^2 - 2MO^2 = 0$.
   (b) Démontre que (Γ) est un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon en fonction de c.
4. On suppose le plan muni du repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$.
   (a) Détermine l'écriture complexe de s.
   (b) Détermine l'affixe du point Ω.
5. Reproduis le carré puis construis (Γ) et Ω sur la figure. (Tu prendras $c = 5$ cm).

Problème 2

D'après les études, x étant le nombre d'usagers (exprimé en centaines) ayant fréquenté la bibliothèque au cours de l'année de rang n ($n \in \mathbb{N}^*$), la recette générée est égale à $f_n(x)$ (en centaines de milliers de francs CFA) où f_n est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f_n(x) = 2e^x + nx^2 - 3$. On désigne par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité de longueur 1 cm.

6. Etudie les variations de f_n.
7. Détermine une équation de la demi-tangente à (C_n) en son point d'abscisse 0.
8. Trace sur le même graphique les courbes (C_1) et (C_2).
9. Démontre que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique u_n.
   u_n est le montant à rembourser, (en centaines de milliers de francs CFA) à l'année de rang n.
10. Démontre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.
11. (a) Démontre que pour tout $x \in]0;1[$, $f_{n+1}(x) > f_n(x)$.
    (b) Déduis-en le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis le sens de variation de la suite $(u_n)_{n>0}$.
    (c) Démontre que la suite $(u_n)_{n>0}$ est convergente et que sa limite l est telle que : $0 \leq l \leq 1$.
    (d) On suppose $l > 0$.
    Calcule la limite de $2e^{u_n} + nu_n^2 - 3$ et déduis-en une contradiction.
    (e) Détermine la valeur de l.

Problème 3

Les entiers naturels a et b représentant respectivement le nombre de manuels scolaires et le nombre de livres de culture générale sont tels que : $400 < b < a, PGCD(a+b, ab) = 121$ et $PPCM(a,b) = 20757$.

12. (a) Démontre que 121 divise a^2.
    (Tu pourras remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$).
    (b) Déduis-en que 11 divise a.
    (c) Démontre que 11 divise b.
    (d) Justifie que $PGCD(a,b) = 11$.
13. Détermine a et b.

22 BAC C 2023 BENIN

DURÉE : 04 Heures

Les trois problèmes sont obligatoires.
Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.
Les seules calculatrices autorisées sont les calculatrices non programmables.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Rituels séculaires de sortie de nouveau-né

Le ménage AXOVI vient d'accueillir un nouveau-né. Etant membre de la tribu d'agriculteurs-chasseurs ATCHOSSOU, AXOVI se soumet à la tradition par l'organisation, sur deux jours, d'une cérémonie d'intégration du bébé à la tribu avant ses trois mois de vie.

• Le premier jour, on installe dans la chambre où dorment le bébé et sa maman 6 lampes disposées

suivant les règles de la tradition. On fabrique un petit arc et une petite flèche. On réalise, suivant une configuration bien précise, des billons au niveau du champ familial.

• Le second jour, une équipe composée du chef de famille et de 24 jeunes et chargée d'ensemencer les billons, accompagne le ménage AXOVI avec le bébé tôt au champ. Le chef de famille sème une seule graine. Il remet ensuite un récipient de graines à chacun des 24 jeunes, ces récipients contenant le même nombre de graines. A leur retour à la maison, des prières et libations sont faites par un groupe de 8 personnes disposées autour du bébé. A un jeune garçon de la famille déjà entraîné, on remet l'arc et la flèche en lui ordonnant de tirer à distance sur un morceau circulaire de peau de biche fixé comme cible. S'il échoue à toucher ce morceau de peau, il reprend le tir.

DANGANA, une belle soeur de AXOVI, a été impressionnée par l'ensemble de la cérémonie. C'est ainsi qu'elle a appris que, suivant certaines paramètres, le nombre de graines à semer est p^2 où p est un nombre premier. De plus, entre 3500 et 4000 graines ont été semées sur les billons.

DANGANA s'interroge sur :

▷ les entiers naturels premiers p qui permettent la répartition des graines dans les récipients ainsi que le nombre de graines semées à l'occasion de la cérémonie ;

▷ les configurations régissant la disposition des 6 lampes et des billons ;

▷ la forme de l'arc ;

▷ la disposition des personnes lors des prières et libations ;

▷ la probabilité que la flèche décochée par le garçon atteigne la cible.

Tâche : Tu es invité (e) à apporter des réponses aux préoccupations de DANGANA en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1. Justifie que la répartition des graines est possible lorsque p prend la valeur 5.
2. On suppose que p est un nombre premier supérieur à 5.
   (a) Démontre que p^2-1 est divisible par 8.
   (b) Justifie que $p(p^2-1)$ est un multiple de 3 puis déduis-en que p^2-1 est divisible par 3.
   (c) Déduis des questions a- et b- que p^2-1 est divisible par 24.
   (d) Précise les nombres premiers p qui permettent la répartition des graines dans les récipients.
3. Détermine le nombre de graines semées à l'occasion de la cérémonie.

Problème 2

Les billons sont assimilables aux courbes représentatives C_m, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$f_m(x) = 2xe^{-x^2} + e^{-x} + m$, où m est un entier naturel.

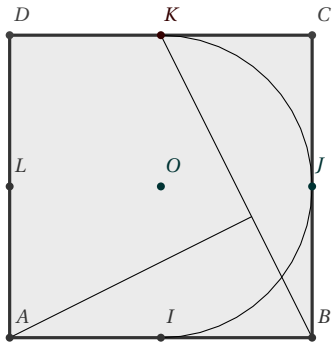
4. Justifie que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine sa fonction dérivée f_0'.
5. Justifie que pour tout x de $\left]-\infty;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$, $f_0'(x) < 0$.
6. (a) Calcule $f_0'\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f_0'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $f_0'(0)$.

(b) Justifie que l'équation $f_0'(x) = 0$ admet au moins deux solutions dans $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

7. On admet que l'équation $f_0'(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $-0,34 < \alpha < -0,33$ et $0,55 < \beta < 0,56$.
   (a) Détermine le signe de $f_0'(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}$.
   (b) Achève l'étude des variations de f_0.
8. Etudie les branches infinies de la courbe C_0.
9. (a) Justifie que C_m est l'image de C_0 par une transformation plane que tu préciseras.
   (b) Représente sur le même graphique C_0, C_1 et C_2.

Problème 3

I) Sur la figure ci-dessous, les points A, B, C, D, I, J, K et L indiquent la disposition des 8 personnes qui ont dirigé la prière, le bébé étant au point O.



$ABCD$ est un carré de centre O et les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD]$ et $[AD]$. La position des mêmes personnes lors des libations, a été générée par la similitude plane indirecte g qui transforme B en K et K en A.
L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, lors de la prière du premier jour, trois des 6 lampes sont placées aux points $A_1(0;1;2)$, $A_2(0;-1;2)$ et A_3 barycentre des points pondérés $(\Omega;1);(A_1;-1)$ et $(A_2;1)$ et les trois autres aux points A_1', A_2' et A_3' images respectives des points A_1, A_2 et A_3 par le demi-tour d'axe la droite (Δ) définie par : $-x+1 = y+1 = z-2$.
Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, l'arc est modélisé par l'ensemble des points M du plan d'affixe z telles que $\left|z+2\sqrt{3}-i\right| + \left|\overline{z}-2\sqrt{3}+i\right| = 8$ et $1 \leq Im(z) \leq 3$. $Im(z)$ étant la partie imaginaire du nombre complexe z.

10. (a) Justifie que g est un antidéplacement du plan.
    (b) Démontre que g est une symétrie glissée que tu caractériseras.
    (c) Reproduis la figure donnée puis construis son image par g.
11. (a) Détermine l'expression analytique du demi-tour s_Δ.
    (b) Détermine les coordonnées des points A_3, A_1', A_2' et A_3'.
12. (a) Démontre que l'ensemble (γ) des points M du plan d'affixe z telles que $\left|z+2\sqrt{3}-i\right| + \left|\overline{z}-2\sqrt{3}+i\right| = 8$ est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité.

(b) Représente la portion de (γ) qui correspond à l'arc.

II) Selon des statistiques, la probabilité qu'un tireur atteigne la cible lors d'un tir est $\frac{1}{3}$. S'il rate un tir, il tire à nouveau dans les mêmes conditions. Il s'arrête dès qu'il atteint la cible.

13. Calcule la probabilité pour qu'il n'atteigne la cible qu'au deuxième tir.

14. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(a) Calcule la probabilité p_n pour que le tireur n'atteigne la cible qu'au $n-$ième tir.

(b) Détermine le nombre maximal de tirs à effectuer pour que p_n soit supérieur à $0,05$.

Y 152

Durée : 4 heures

*Les **trois** problèmes sont obligatoires.*

Le candidat ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.

Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Les seules calculatrices autorisées sont les calculatrices non programmables.

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Rituels séculaires de sortie de nouveau-né

Le ménage AXOVI vient d'accueillir un nouveau-né. Etant membre de la tribu d'agriculteurs-chasseurs ATCHOSSOU, AXOVI se soumet à la tradition par l'organisation, sur deux jours, d'une cérémonie d'intégration du bébé à la tribu avant ses trois mois de vie.

- Le premier jour, on installe dans la chambre où dorment le bébé et sa maman 6 lampes disposées suivant les règles de la tradition. On fabrique un petit arc et une petite flèche. On réalise, suivant une configuration bien précise, des billons au niveau du champ familial.
- Le second jour, une équipe composée du chef de famille et de 24 jeunes et chargée d'ensemencer les billons, accompagne le ménage AXOVI avec le bébé tôt au champ. Le chef de famille sème une seule graine. Il remet ensuite un récipient de graines à chacun des 24 jeunes, ces récipients contenant le même nombre de graines. A leur retour à la maison, des prières et libations sont faites par un groupe de 8 personnes disposées autour du bébé. A un jeune garçon de la famille déjà entraîné, on remet l'arc et la flèche en lui ordonnant de tirer à distance sur un morceau circulaire de peau de biche fixé comme cible. S'il échoue à toucher ce morceau de peau, il reprend le tir.

DANGANA, une belle sœur de AXOVI, a été impressionnée par l'ensemble de la cérémonie. C'est ainsi qu'elle a appris que, suivant certains paramètres, le nombre de graines à semer est p^2 où p est un nombre premier. De plus, entre 3500 et 4000 graines ont été semées sur les billons.

DANGANA s'interroge sur :

- les entiers naturels premiers p qui permettent la répartition des graines dans les récipients ainsi que le nombre de graines semées à l'occasion de la cérémonie ;
- les configurations régissant la disposition des 6 lampes et des billons ;
- la forme de l'arc ;

Scanné avec CamScanner

- la disposition des personnes lors des prières et libations ;
- la probabilité pour que la flèche décochée par le jeune garçon atteigne la cible.

Tâche : Tu es invité(e) à apporter des réponses aux préoccupations de DANGANA en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1) Justifie que la répartition des graines est possible lorsque p prend la valeur 5.
2) On suppose que p est un nombre premier supérieur à 5.
   a- Démontre que $p^2 - 1$ est divisible par 8.
   b- Justifie que $p(p^2 - 1)$ est un multiple de 3 puis déduis-en que $p^2 - 1$ est divisible par 3.
   c- Déduis des questions a- et b- que $p^2 - 1$ est divisible par 24.
   d- Précise les nombres premiers p qui permettent la répartition des graines dans les récipients.
3) Détermine le nombre de graines semées à l'occasion de la cérémonie.

Problème 2

Les billons sont assimilables aux courbes représentatives C_m, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, des fonctions f_m de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

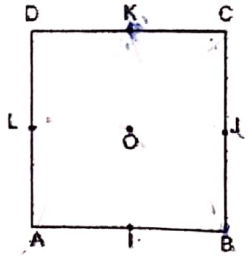
$f_m(x) = 2xe^{-x^2} + e^{-x} + m$, où m est un entier naturel.

4) Justifie que f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et détermine sa fonction dérivée f_0'.
5) Justifie que pour tout élément x de $\left]-\infty ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty\right[$, $f_0'(x) < 0$.
6) a- Calcule $f_0'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f_0'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $f_0'(0)$.
   b- Justifie que l'équation $f_0'(x) = 0$ admet au moins deux solutions dans $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$.
7) On admet que l'équation $f_0'(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $-0{,}34 < \alpha < -0{,}33$ et $0{,}55 < \beta < 0{,}56$.
   a- Détermine le signe de $f_0'(x)$ pour tout élément x de $\mathbb{R}$.
   b- Achève l'étude des variations de f_0.
8) Etudie les branches infinies de la courbe C_0.
9) a- Justifie que C_m est l'image de C_0 par une transformation plane que tu préciseras.
   b- Représente sur le même graphique C_0, C_1 et C_2.

Problème 3

I) Sur la figure ci-dessous, les points A, B, C, D, I, J, K et L indiquent la disposition des 8 personnes qui ont dirigé la prière, le bébé étant au point O.

Scanné avec CamScanner



$ABCD$ est un carré de centre O et les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. La position des mêmes personnes lors des libations, a été générée par la similitude plane indirecte g qui transforme B en K et K en A.

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, lors de la prière du premier jour, trois des 6 lampes sont placées aux points $A_1(0;1;2)$, $A_2(0;-1;2)$ et A_3 barycentre des points pondérés $(\Omega;1)$; $(A_1;-1)$ et $(A_2;1)$ et les trois autres aux points A'_1 , A'_2, et A'_3 images respectives des points A_1 , A_2, et A_3 par le demi-tour d'axe la droite (Δ) définie par : $-x+1 = y+1 = z-2$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, l'arc est modélisé par l'ensemble des points M du plan d'affixe z telles que $|z+2\sqrt{3}-i| + |\bar{z}-2\sqrt{3}+i| = 8$ et $1 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 3$. $\mathrm{Im}(z)$ étant la partie imaginaire du nombre complexe z.

10) a- Justifie que g est un antidéplacement du plan.
   b- Démontre que g est une symétrie glissée que tu caractériseras.
   c- Reproduis la figure donnée puis construis son image par g.

11) a- Détermine l'expression analytique du demi-tour s_Δ.
   b- Détermine les coordonnées des points A_3 , A'_1 , A'_2 et A'_3.

12) a- Démontre que l'ensemble (γ) des points M du plan d'affixe z telles que $|z+2\sqrt{3}-i| + |\bar{z}-2\sqrt{3}+i| = 8$ est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité.
   b- Représente la portion de (γ) qui correspond à l'arc.

II) Selon des statistiques, la probabilité qu'un tireur atteigne la cible lors d'un tir est $\frac{1}{3}$. S'il rate un tir, il tire à nouveau dans les mêmes conditions. Il s'arrête dès qu'il atteint la cible.

13) Calcule la probabilité pour qu'il n'atteigne la cible qu'au deuxième tir.

14) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   a- Calcule la probabilité p_n pour que le tireur n'atteigne la cible qu'au n-ième tir.
   b- Détermine le nombre maximal de tirs à effectuer pour que p_n soit supérieur à 0,05.

FIN

Scanné avec CamScanner

DDESTFP-ZOU ANNEE SCOLAIRE 2017-2018

CoDEB/ZOU

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL / BACCALAUREAT

Discipline : Mathématiques **Série** : C **Durée** : 4H **Coefficient** : 6

Contexte ; Centre d'étude des astres " LUMIERE"

Jean est un astronome qui travaille dans le centre " LUMIERE". IL a observé le mardi 7 décembre 1999, l'apparition du corps céleste C_0, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Ensuite il observe 30 jours plus tard, l'apparition d'un second corps C_1, dont la période d'apparition est de 75 jours. IL désire, après ces observations, déterminer la date du jour J où les deux corps célestes C_0 et C_1 seront simultanément observés pour la deuxième fois et d'étudier le mouvement du corps C_0 jusqu'à sa disparation. Pour cela, il désigne par u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par C_0 et C_1 entre ce mardi et le jour J sachant que l'année 2000 était bissextile (366 jours) .

Par ailleurs, pour des raisons de sécurité, tous les astronomes qui travaillent dans le centre sont identifiés par des entiers naturels qui sont des solutions du système (S) :$\begin{cases} 2\times 3^n+3\equiv 0[11] \\ n^3-3n^2+2\equiv 0[7] \end{cases}$

Un jour, Jean amène son fils SAÏ, élève en classe de terminale scientifique, dans le centre pour lui expliquer le fonctionnement de ce dernier et les défis qu'il entend relever les jours à venir. A la fin des explications de son papa, SAÏ aimerait entre autres :

-déterminer le jour J

-étudier avec précision la trajectoire du corps C_0 dont il a connaissance d'une portion sur un écran

-savoir lequel ou lesquels de Pierre, Louis, Flavien qu'il a rencontrés non loin du centre et dont les habits portaient respectivement les mentions 14875, 15000 et 14869 est(sont) un(des) astronome(s) du centre.

Dans ses recherches, SAÏ rencontre quelques difficultés

Tâche :Tu es appelé(e) à aider SAÏ à surmonter ces difficultés à travers la résolution des trois problèmes suivants

PROBLEME 1

1-a)Justifie que le couple (u,v) est solution de l'équation (E) :7x-5y=2

b) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

c)Déduis-en le couple (u,v) puis le jour J

2-a)Détermine l'ensemble des entiers naturels n tels que :

i) $2 \times 3^n + 3 \equiv 0[11]$

ii) $n^3 - 3n^2 + 2 \equiv 0[7]$

b) Déduis-en la résolution de (S) dans $\mathbb{N}$

c)Détermine lequel ou lesquels de Pierre, Louis, Flavien est (sont) un(des) astronome(s) du centre.

PROBLEME 2

SAÏ a constaté que plusieurs figures sont dessinées sur un mur du centre et aimerait savoir par quels procédés lesdites figures ont été obtenues. Jean lui faisait comprendre que les figures sont les images d'un carré ABCD direct de centre G par les applications affines f_α et g_t telles que :

$f_\alpha : (P) \longrightarrow (P)$

$M \longmapsto M' \ \ avec \ \overrightarrow{MM'} = \alpha\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \alpha\overrightarrow{MD}$ où α est un nombre réel

$g_t \ est \ définie \ de \ (P) dans \ (P)$ qui à tout point $M(x, y), associe \ le \ point \ M'(x', y') \ avec$

$\begin{cases} x' = -tx + ty + 1 \\ y' = tx + ty + 1 \end{cases}$ où t est un réel strictement négatif

(P) est le plan support du mur et muni d'un repère orthonormé direct $(G; \vec{u}, \vec{v})$.

3-Détermine suivant les valeurs de α la nature et les éléments caractéristiques de f_α

4-a)Détermine l'écriture complexe de g_t

b)Déduis-en suivant les valeurs de t la nature et les éléments caractéristiques de g_t

5-Soit $(\phi) \ la \ courbe \ d'équation : \ x^2 - 2xy + y^2 - y = 0$

Démontre que l'image de (ϕ) par g_{-1} est une parabole dont tu préciseras le sommet, le foyer, la directrice et l'axe focal.

PROBLEME 3

En réalité, la portion de la trajectoire du corps C_0 observé sur l'écran est, dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, une partie de la courbe (Γ) représentation graphique de la fonction f définie sur $]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[\ par$

$$\begin{cases} f(x) = x(x+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \ si \ x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = f(-1) = 0 \end{cases}$$

6-a)Etudie la continuité de $f \ en \ 0 \ \ et \ en -1$

b) Etudie la dérivabilité de $f \ en \ 0 \ \ et \ en -1$ puis interprète géométriquement les résultats obtenus.

7-Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[\ \ par \ \ g(u) = (1+u)\ln(1+u)$

a)Ecris le développement limité à l'ordre 3 de g au voisinage de 0.

b) Déduis-en que la droite $(\Delta) d'équation \ y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (Γ). (tu pourrais poser u = $\frac{1}{x}$)

8- Soit h la fonction définie sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\ \ par \ \ h(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{2x+1}$

a)Etudie les variations de la fonction h

b) Déduis-en que $h(x) > 0 \ si \ x > 0 \ et \ h(x) < 0 \ si \ x < -1$.

c)Justifie que $\forall \ x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\ , f'(x) = (2x+1)h(x)$

d) Dresse le tableau de variation de f.

9- Construis la courbe (Γ).

10- Soit $\beta \in]0; 1[$

a) Calcule $\int_{\beta}^{1} \frac{2x^2+3x}{x+1} dx$ par changement de variable en posant u=x+1

b) Déduis-en l'aire $A(\beta)$ de la portion du plan définie par les inégalités $\beta \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$ où $M(x,y) est \ un \ point \ quelconque \ de \ cette \ portion.$

c) Calcule la limite de $A(\beta)$ lorsque β tend vers 0.

11- Soit k un nombre réel strictement positif et (Γ_k) la courbe d'équation $y = x(x+k)\ln\left(\frac{x+k}{x}\right)$ pour $x \in]-\infty; -k[\cup]0; +\infty[$

Démontre que (Γ_k) est l'image de (Γ_1) par la composée de l'homothétie φ de centre O et de rapport k et de l'affinité orthogonale ψ de rapport k et d'axe (Θ)de repère $(O; \vec{\imath})$.

FIN

MESTFP BAC BLANC 2019

EPREUVE : MATHEMATIQUES

SERIE : C **DUREE : 4 HEURES**

Le candidat doit traiter obligatoirement toutes les parties de l'épreuve.
Il ne sera jugé que sur la base des traces écrites sur sa copie.
Il sera tenu grand compte de la clarté et de la précision des raisonnements.

Contexte : **Communication stratégique du centre de recherche Agrolabo.**

Agrolabo est un centre de recherche agricole possédant plusieurs sites d'expérimentation. Ses responsables envisagent d'introduire des innovations concernant les aires à emblaver, l'entretien des semis et la récolte. En vue de protéger ces innovations, le centre opte, dans le cadre de sa communication avec les sites, pour le cryptage des données. La pièce maîtresse de cette technique est un solide en forme d'un cube $ABCDEFGH$. Ce cube détermine la nature et les caractéristiques de l'innovation, dans le sens que chaque quadruplet de points distincts, parmi ces sommets, détermine l'action à mener. Pour les besoins de calculs, les sommets A, B, C, D, E, F, G, H, dans cet ordre, sont identifiés aux éléments $\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}$ de l'ensemble $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. C'est ainsi que la résolution du système (Σ) ci-dessous permet d'accéder au mode de fonctionnement des moissonneuses.

$$(\Sigma):\begin{cases} 7x+3y \equiv 13[8] \\ 5y-7z \equiv -18[8] \\ z-5t \equiv -21[8] \\ -x+3t \equiv 14[8] \end{cases}$$

Kossi, élève en classe terminale scientifique, est intéressé par le fonctionnement des moissonneuses, les techniques de cryptage ainsi que les informations sur l'herbicide utilisé sur les sites d'expérimentation.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux différentes préoccupations de Kossi en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1- a) Démontre que pour tout entier relatif u, $\dot{u}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ si et seulement si u est impair.

b) Déduis-en les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et précise l'inverse de chacun d'eux.

2- a) Démontre que le système (Σ) est équivalent au système (Σ') ci-après :

$$\begin{cases} 2x \equiv 2[8] \\ y \equiv (5+5x)[8] \\ z \equiv (5-x)[8] \\ t \equiv (2+3x)[8] \end{cases}$$

b) Résous dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $2x \equiv 2[8]$.

3- Détermine les quadruplets de sommets du cube qui illustrent le mode de fonctionnement des moissonneuses.

Problème 2

Les messages codés sont transmis par des suites de signaux électriques composés à partir de deux signaux de base : l'un (noté a) dure une milliseconde et l'autre (noté b) dure deux millisecondes. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par m_n, le nombre de messages différents que le centre peut transmettre en n millisecondes. Ainsi $m_1 = 1$ est obtenu avec l'unique message (a) et $m_2 = 2$, avec les messages (aa) et (b).

Un code d'erreur dans la transmission des messages a été obtenu à partir de la limite d'une nouvelle suite (p_n) déduite de la suite des nombres m_n.

4- Ecris les listes ordonnées de lettres a et b, exprimant les messages de 3, puis de 4 millisecondes. Déduis-en m_3 et m_4.

5- On admet que la suite (m_n) est telle que pour tout entier naturel n supérieur à 1, $m_{n+1} = m_n + m_{n-1}$ et on se propose de démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $m_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1} \times \sqrt{5}}$. On pose, pour tout entier non nul fixé n_0, $P(n_0)$ la proposition:

$$\text{« } m_{n_0} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n_0+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n_0+1}}{2^{n_0+1} \times \sqrt{5}} \text{ est vraie » } (i)$$

a) Vérifie que l'on a **F(1)**, **F(2)**, **F(3)**.

b) Etablis que l'implication suivante est vraie pour tout entier non nul fixé n_0 supérieur ou égal à 3, $\left(\left(\mathbf{F}(n_{0-1}) \text{ et } \mathbf{F}(n_0)\right) \Rightarrow \mathbf{F}(n_{0+1})\right)$.

(Tu pourras te servir de l'égalité $6 + 2\sqrt{5} = \left(1 + \sqrt{5}\right)^2$).

c) Sachant que $m_n = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1} \times \sqrt{5}}$ démontre que l'on a :

$$m_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right].$$

d) Déduis-en la limite de la suite (m_n).

6- La suite (p_n) est définie pour tout entier naturel non nul n par :

$p_n = \dfrac{m_{n+1}}{m_n}$.

Démontre que pour tout entier naturel non nul n, on a : $p_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{p_n}$.

7- a) Représente dans le plan muni d'un repère orthonormé la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$u(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$.

b) Déduis-en la représentation sur l'axe des abscisses des six premiers termes de la suite (p_n).

Quelle conjecture peux-tu faire sur la convergence de la suite (p_n) ?

c) Justifie que la limite éventuelle φ de la suite (p_n) est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d) Démontre que pour tout entier naturel non nul n, on a : $\dfrac{3}{2} \leq p_n \leq 2$.

8- a) Démontre que pour tout élément x de $\left[\dfrac{3}{2};2\right]$ on a : $\left|u'(x)\right| \leq \dfrac{4}{9}$.

b) Démontre que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$|p_{n+1}-\varphi| \leq \frac{4}{9}|p_n-\varphi|$ puis que $|p_n-\varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}|p_1-\varphi|$.

c) Déduis-en que la suite (p_n) est convergente.

Problème 3

Au bout de quelques mois d'expérimentation sur les sites, il a été noté que l'efficacité de l'herbicide utilisé varie en fonction du temps t et que la formule rendant le plus compte de cette observation est

$f_k(t) = e^{-t}(k - lnt)$, où k est un paramètre réel dépendant de la nature du sol.

On considère, pour tout nombre réel k, les fonctions g_k et f_k de variable réelle x définies par : $\forall x \in]0;+\infty[, g_k(x) = x\ln x - kx - 1$ et $f_k(x) = e^{-x}(k - \ln x)$.

9- a) Etudie les variations de la fonction g_k puis dresse son tableau de variations.

b) Déduis-en, suivant les valeurs du paramètre réel λ, le nombre de solutions de l'équation $g_k(x) = \lambda$.

10- a) Etudie les limites de la fonction f_k aux bornes de $]0;+\infty[$.

b) Démontre que le signe de la dérivée de la fonction f_k est celui de g_k.

11- Dresse le tableau des variations de f_1 et trace sa courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

FIN

DDESTFP-ATACORA

COLLEGES D'ENSEIGNEMENT GENERAL (I-II-YIMPORIMA) DE NATITINGOU

EXAMEN BLANC BAC- MAI 2021

Séries : C **Epreuve** : Mathématiques **Durée** : **04h**

Texte : Récompense des lauréats d'un concours

Dans le but de promouvoir le dessin d'art dans la commune de Codji, le conseil communal a organisé un concours doté de 100 lots constitués d'outils de dessin.
La cérémonie de remise des récompenses aura lieu dans N jours dans le hall du centre des arts qui sera inauguré le même jour avec $N = l + 15$ où l est la limite d'une suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Bio, un élève d'une classe de terminale scientifique du CEG Codji, a visité le centre et a pu obtenir du chargé des travaux et du comité d'organisation certaines informations :

* le hall a la forme d'une pyramide régulière SABCD de base ABCD et dont les faces latérales sont en vitre.

* lorsqu'on munit le plan (ABC), considéré comme un plan complexe, du repère orthonormé direct (A ;$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$), trois projecteurs sont installés en des endroits assimilables à des points d'affixe z telle que $P(z) = 0$ où $P(z) = z^3 - (3+i)z^2 + 2(3+i)z - 4 - 4i$.

* il est prévu que tous les 100 lots seront distribués et que, compte tenu de la qualité des dessins, p candidats recevront chacun 5 lots et q candidats recevront chacun 8 lots avec p et q des entiers naturels premiers entre eux.

Bio décide d'utiliser ces informations pour :

- déterminer le nombre des candidats ayant reçu 5 lots et celui des candidats ayant reçu 8 lots,
- étudier le solide SABCD,
- étudier la forme du dessin qui a valu le premier prix

Mais il éprouve quelques difficultés

Tâche : Tu vas aider Bio dans ses préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-après :

Problème 1

1- Justifie que le couple $(p\,;q)$ est une solution de l'équation : $5x + 8y = 100$

2- a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $5x + 8y = 100$

b) Déduis-en le nombre de lauréats.

3- a) Résous l'équation $(E) : P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution z_0 dont le point image appartient à la droite d'équation $y - x = 0$.

b) Vérifie que $\frac{7\pi}{12}$ est un argument du nombre complexe $v = (1+i)(1+i\sqrt{3})$

c) Détermine le plus petit entier naturel non nul n tel que v^n soit un réel.

Problème 2

La configuration du hall est telle que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires. A l'intérieur du hall est dressé un podium couvert par une surface (T) où (T) est une partie de l'ensemble (ε) des points M de l'espace tels que

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = AB^2$. On désigne par I, J, K et L sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].

On munit l'espace du repère orthonormé direct (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$,$\vec{k}$) l'unité de longueur étant 10 mètres.

4- a) Vérifie que le point S a pour coordonnées $(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ sachant que les vecteurs $\overrightarrow{OS}$ et $\vec{k}$ ont le même sens (O étant le centre de la base).

b) Détermine l'expression analytique de chacune des réflexions S_1 de plan (SAB) et S_2 de plan (SCD).

c) Caractérise l'application $d = S_1 0 S_2$.

5- a) Démontre que (ε) est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$MI^2 + MJ^2 + ML^2 + MK^2 = 2AB^2.$$

b) Démontre que (ε) est une sphère de dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

PROBLEME 3

En réalité, la forme du dessin d'art qui a rapporté le premier prix est assimilable

dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, à une portion de la courbe (Γ) représentation graphique de la fonction f définie sur $]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$

$$\text{par } \begin{cases} f(x) = x(x+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \ si\ x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = f(-1) = 0 \end{cases}$$

6- a)Etudie la continuité de f en 0 et en -1

b) Etudie la dérivabilité de f en 0 et en -1 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.

7- Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(u) = (1+u)\ln(1+u)$

a)Ecris le développement limité à l'ordre 3 de g au voisinage de 0.

b)Déduis-en que la droite (Δ) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (Γ). (tu pourrais poser $u = \frac{1}{x}$)

8- Soit h la fonction définie sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ $par\ h(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{2x+1}$

a)Etudie les variations de la fonction h

b)Déduis en que $h(x) > 0\ si\ x > 0\ et\ h(x) < 0\ si\ x < -1$.

c)Justifie que $\forall\ x \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\ , f'(x) = (2x+1)h(x)$

d)Dresse le tableau de variation de f.

9- Construis la courbe (Γ).

10- Soit l'application $\varphi : [0\ ;+\infty[\longrightarrow [0+\infty[$

$$x \longmapsto f(x)$$

On désigne par (C_φ) la courbe représentative de φ dans le plan muni du repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et par (Σ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2y-1 \geq 0 \\ x-1 = \varphi(2y-1) \end{cases}$

a) Démontre que l'application φ admet une bijection réciproque φ^{-1}
b) Démontre que (Σ) est l'image de (C_φ) par la composée d'une symétrie glissée et d'une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques.

11- Soit n un entier naturel non nul.

a) Démontre que l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique α_n
b) Démontre que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante
c) Justifie que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$est convergente.
d) l étant la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, démontre que $\varphi(l) = 0$ puis déduis la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$
e) Détermine le nombre de jours où aura lieu la cérémonie de remise des récompenses

Collège Catholique Cours de Soutien Scolaire
Collège Catholique Père Aupiais Cadjehoun
Collège Catholique Père Aupiais de Godomey
Cours Secondaire Notre Dame des Apôtres
Collège Catholique Saint Jean Baptiste
Collège Catholique Mgr Isidore de Souza
Collège Catholique Saint Michel
Collège Catholique Mgr GANYE
Collège Catholique Sainte Jeanne d'ARC
Collège Pierre Joseph de Clorivière

Cours Secondaire Saint Augustin
Ecole Catholique Sainte Marcelline
Collège Catholique Père Planque
Collège Catholique Sainte Thérèse de l'Enfant Jésus
Collège Catholique Immaculée Conception
Collège Catholique Don Zefrino Agostini
EEGTP Laura VICUNA
Collège Catholique Sainte Cécile
Collège Catholique Jésus est le Sauveur
Collège Catholique Saint-Joseph de la Salle

EXAMEN BLANC DIOCESAIN SESSION DE MARS 2022 : BAC

Epreuve : Mathématiques

Série : C ***Durée : 04h***

Contexte :

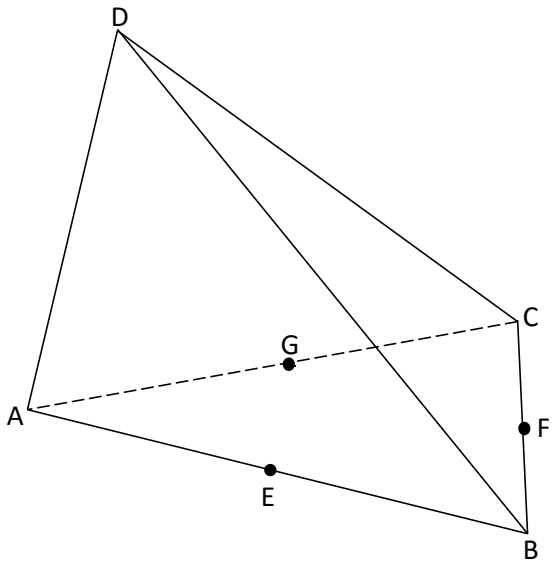
Effort, est un technicien agronome qui a construit dans son jardin pour ses recherches personnelles une cabane ayant la forme d'un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. Il fixe solidement cette cabane aux points E, F et G milieux respectifs des cotés [AB], [BC] et [CA]. On se place dans le repère orthonormé direct (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$) de l'espace orienté. Au point H projeté orthogonal de A sur la droite (DF) est suspendue une tige métallique pour la lampe d'éclairage de la cabane. En un point N de (DF) tel que $\overrightarrow{DN} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DF}$ est fixé une plaque métallique portant l'inscription « accès interdit ». Pour la conservation des graines expérimentales, il aménage un enclos délimité par un ensemble (Γ') des points de l'espace tel que $(\Gamma') = S(\Gamma)$, où (Γ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$\mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 + \mathrm{MD}^2 = 5\sin^2\left(\frac{\propto}{2}\right)$ et $S = S_{(DF)}oS_{(AH)}$; $S_{(DF)}$ et $S_{(AH)}$ étant des demi-tours d'axes (DF) et (AH) puis $\propto$ la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{ENG}$

Effort décompte à l'intérieur de (Γ') un nombre N de graines compris entre 80 et 120 ; et lorsqu'il compte ces graines par des groupes de 12 ou 9, il lui reste à chaque fois 5 graines.

Foumi élève en classe de Terminale scientifique, ayant pris connaissance de ces informations envisage déterminer la forme, le volume de (Γ') et le nombre de grain contenu à l'intérieur de (Γ'). Elle voudrait aussi déterminer les points où sont fixés les piquets de séparation du jardin et l'allure des lignes qui délimitent des mises à terre dans un plan. Mais elle est confrontée à certaines difficultés.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Foumi en résolvant chacun des problèmes suivants.



PROBLEME I

1. a) Détermine les coordonnées des points D et F.
   b) Calculer les coordonnées du point H.
   c) Détermine une représentation paramétrique de la droite (AH).
2. a) Démontre que $NE^2 = \frac{5}{24}$
   b) Démontrer que le triangle ENG est isocèle et que $\sin\left(\frac{\propto}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.
3. a) Détermine la nature et l'élément caractéristique de S
   b) Détermine la nature de (Γ).
   c) Détermine la nature et le volume de (Γ').
4. Détermine le nombre N de grain décompté à l'intérieur de (Γ').

PROBLEME 2

Pour empêcher l'accès de la zone de recherche à ses enfants, il érige des piquets aux points $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$, de la droite (T)définie par le système $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$; pour y mettre de grillage de sécurité. Les coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ de ces points M sont des entiers relatifs et $P.G.C.D.(a;b) = 10$

5. a) Justifie que $8a + 9b = -10$.
   b) Justifie que le couple $(1\ ;\ -2)$ est une solution de l'équation $8a + 9b = -10$ d'inconnue (a, b).
   Détermine les solutions de $8a + 9b = -10$ dans $\mathbb{Z}^2$.
6. On pose $\delta = P.G.C.D.(a;b)$.
   a) Démontre que tout diviseur d de$a$ et b est un diviseur de 10.
   b) Détermine les valeurs possibles de δ.
   c) Détermine les couples $(a\ ;\ b)$ tel que $P.G.C.D.(a;b) = 10$.
7. Détermine les coordonnées des points $M(a\ ;\ b\ ;\ c)$, de la droite (T) où sont érigés les piquets.

PROBLEME 3

Les variétés de graines dans le jardin sont délimitées par des portions de deux courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ représentatives de fonctions dans le repère orthonormé$\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. $(\mathcal{C})$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :

$\begin{cases} f\,(x) = \frac{\ln(x+1)-x}{x} & ; si\ x > 0 \\ f(x) = \sqrt{x(x-3)} - x & ;\ si\ x \leq 0 \end{cases}$ et $(\mathcal{C}')$ est le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

La construction de $(\mathcal{C})$ est facilitée par l'étude de la fonction g définie sur $]-1;\ +\infty[$; $g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)$.

8. a) Etudie le sens de variation de la fonction g et dresse son tableau de variation.
   b) Déduis-en le signe de $g(x)$pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
9. a) Détermine le domaine de définition D de f puis détermine les branches infinies à la courbe $(\mathcal{C})$ de f.
   b) Etudie la continuitéf sur D.
10. a) Détermine le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $u: x \longmapsto \ln(x+1)$.
    b) Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement les résultats obtenus.
11. a) Détermine l'ensemble de dérivabilité E de f puis démontre que $\forall\ x\ \in]0;\ +\infty[;\ f'(x) = \frac{g\,(x)}{x^2(\,x+1)}$
    b) Achève l'étude des variations de f.
12. a) Démontre que$f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que tu préciseras.
    b) Justifie que $(\mathcal{C}')$ est la courbe représentative de la bijection réciproque f^{-1} de f.
    c) Justifie que le point $A(3;\ -1)$ appartient à $(\mathcal{C}')$ et détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}')$ en A.
    d) Calcule $f^{-1}(x)$; pour tout $x \in [0;+\infty[$
13. Construis $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

FIN

MESTFP
DDESTFP-DONGA
République du Bénin

Année scolaire 2017-2018

BAC BLANC DEPARTEMENTAL / SESSION DE JUIN 2018

Epreuve : **Mathématiques**
Coef. : **06**
Durée/date : **04H (Mardi 19 juin de 08h00 à 12h00)**
Série : **C**

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Une campagne de sensibilisation

Afin de lutter contre le fort taux d'accidents de route, les autorités de la commune de Kpévié ont initié des contrôles inopinés afin de faire un point sur l'état des freins et de l'éclairage des véhicules. Ces contrôles, qui serviront à sensibiliser les conducteurs de véhicules, ont été confiés à la gendarmerie. Ainsi la gendarmerie a effectué au hasard des contrôles de véhicules.

Le nombre de véhicules contrôlés est un nombre q tel que $880 < q < 1756$ et dans l'ensemble $\mathbb{Z}/_{438\mathbb{Z}}$, $\dot{109}\dot{q} + \dot{3} = \dot{1}.\dot{109}$ désigne la classe de 109

Les contrôles ont duré N jours avec $N = l + 15$ où l est la limite d'une suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

A l'issue de ces contrôles, il ressort que: 12% des véhicules ont des freins défectueux.

Parmi les véhicules ayant les freins défectueux, 20% ont un éclairage défectueux.

Parmi les véhicules ayant de bons freins, 8% ont un éclairage défectueux.

Le chef service sécurité routière de la commune, afin d'étudier les résultats de ces contrôles, désigne par E l'événement « le véhicule contrôlé a un bon éclairage » et $\bar{E}$ son contraire ; F l'événement « le véhicule contrôlé a de bons freins » et $\bar{F}$ son contraire.

Par ailleurs des panneaux, pour sensibiliser contre l'excès de vitesse, seront implantés dans la commune.

Chaque panneau sera décoré à l'aide de l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tels que :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1$$

Rosaline, élève en classe de Terminale C et fille du chef service, voudrait aider son père dans son travail. Pour cela elle désire :

- étudier des résultats des contrôles
- connaitre le nombre de contrôles effectués
- la nature de la configuration qui servira à la décoration des panneaux
- connaitre la forme des routes dans la commune
- connaitre le nombre de jours que les contrôles ont duré

Tâche : Tu es invité(e) à aider rosaline en résovant chacun des trois problèmes suivants

NB : On donnera les résultats des calculs de probabilité à 10^{-4} près et la probabilité d'un événement A sera noté $p(A)$

Problème1

1. Calcule les probabilités suivantes : $p(F)$ et $p(\bar{E}/F)$

2. Calcule la probabilité

a. pour qu'un véhicule contrôlé ait des freins défectueux et un éclairage défectueux

b. pour qu'un véhicule contrôlé ait des bons freins et un éclairage défectueux

c. pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux

3. Sachant qu'un véhicule contrôlé a un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux.

4. a. Démontre que la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (c'est - à - dire bon freins et bon éclairage) est 0,8096

b. Au cours d'un contrôle les gendarmes ont arrêté 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi ces véhicules, au moins un qui ne soit pas en bon état

5. a. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, détermine deux nombres entiers relatifs u et v tels $438u + 109v = 1$

b. Déduis que, dans $\mathbb{Z}/_{438\mathbb{Z}}$, $\overline{\dot{1}\dot{0}\dot{9}}$ est inversible puis précise son inverse

c. Résous dans $\mathbb{Z}/_{438\mathbb{Z}}$, l'équation $\overline{\dot{1}\dot{0}\dot{9}}\dot{q} + \dot{3} = \dot{1}$

d. Détermine le nombre de véhicules contrôlés

Problème2

Certains panneaux de sensibilisation seront placés en des points dont les affixes sont les solutions de l'équation $(E_0): (z+i)^4 = (z-i)^4; z \in \mathbb{C}$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct$(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 5cm. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle de mesure$\frac{\pi}{4}$.

1. a. Sans résoudre l'équation (E_0)démontre que ses solutions sont des nombres réels.

b. Résous l'équation (E_0)

2. a. Détermine l'écriture complexe de r

b. Détermine une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ) par r

c. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ')

d. Déduis la nature et le tracé de (Γ)

Problème3

La plupart des voies, de la commune autour desquelles seront implantés les panneaux, ont la forme d'une portion de la courbe représentative de la fonction f définie sur

$]-\infty; -1] \cup [0; +\infty[par\begin{cases} f(x) = x(x+1)ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \ \ si\ x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[\\ f(0) = f(-1) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. a. Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0

b. Etudie la continuité et la dérivabilité de f en -1

c. Déduis les ensembles de continuité et de dérivabilité de f

2. Soit g la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $g(x) = (1+x)ln(1+x)$

a. Ecris le développement limité à l'ordre 3 de g au voisinage de 0

b. Déduis que la droite (Δ) d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à (C_f)

c. Etudie la position relative de (C_f) par rapport à (Δ)

3. a. Etudie les variations de la fonction h définie sur $]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ par

$$h(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{2x+1}$$

b. Déduis – en que : $h(x) < 0 \; si \; x < -1 \;\; et \; h(x) > 0 \; si \; x > 0$

c. Etudie les variations de f (On remarquera que $f'(x) = (2x+1)h(x)$)

d. Trace la courbe (C_f)

e. Démontre que le point $K\left(-\frac{1}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f)

4. Soit l'application $\begin{matrix}\varphi : [0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[\\ x \longmapsto f(x)\end{matrix}$. On désigne par (C_φ) la courbe représentative de φ dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et par $(\mathcal{E})$ l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2y-1 \geq 0 \\ x-1 = \varphi(2y-1) \end{cases}$

a. Démontre que l'application φ admet une réciproque φ^{-1}

b. Démontre que $(\mathcal{E})$ est l'image de (C_φ) par la composée d'une symétrie glissée et d'une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques

5. Soit n un entier naturel non nul.

a. Démontre que l'équation $\varphi(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique α_n

b. Démontre que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante

c. Justifie que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

d. l étant la limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, démontre que $\varphi(l) = 0$ puis déduis la limite de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

e. Détermine le nombre de jours qu'ont duré les contrôles

Bonne réflexion

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun
Lycée Classique d'Edéa

Examen : BACCALAUREAT BLANC
Session : MAI 2021 Série : C
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4h Coefficient : 7

PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES : (15 points)

EXERCICE 1 : (3,25 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan ($\mathscr{P}$) d'équation cartésienne $2x-y-z-3=0$. S est la réflexion de plan ($\mathscr{P}$) ; ($\mathscr{D}$) est la droite de repère $\left(A,\vec{u}\right)$ où $A\left(1;2;3\right)$ et $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

1. Démontre que la droite ($\mathscr{D}$) et le plan ($\mathscr{P}$) sont perpendiculaires. **0,5pt**
2. Donne l'expression analytique de S. **1pt**
3. Détermine les coordonnées du point H, intersection de ($\mathscr{P}$) et ($\mathscr{D}$). **0,5pt**
4. Donne par son équation l'ensemble $\mathscr{S}$ des points M de l'espace tels que $\frac{MA}{MH}=\sqrt{3}$. **0,75pt**
5. Donne la nature de $\mathscr{S}$ et détermine ses éléments caractéristiques. **0,5pt**

EXERCICE 2 : (3 points)

Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher dont deux portent le numéro -1, deux portent le numéro 1 et une porte le numéro 0. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne. On désigne par X la variable aléatoire égale à $|a+b|$ où a désigne le numéro de la première boule tirée et b celui de la deuxième boule tirée.

1. Calcule la probabilité pour que :
   - **(a)** La conique $H_{a,b}$ d'équation $2ax^2+\left(-1\right)^b y^2=1$ soit une hyperbole. **0,5pt**
   - **(b)** L'équation différentielle $E_{a,b}: y''+ay'+by=0$ ait pour solution $f: x\mapsto\left(Ax+B\right)e^x$. **0,5pt**
   - **(c)** Les plans $\left(P\right): x+ay+bz+3=0$ et $\left(Q\right): ax+by+z+3=0$ soient parallèles. **0,5pt**
2. Détermine la loi de probabilité de X, puis calcule $E\left(X\right)$ et $V\left(X\right)$. **1,5pt**

EXERCICE 3 : (2,25 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. On considère les points $F\left(0;4\right)$ et $D\left(0;\frac{3}{2}\right)$. On note $\left(\Delta\right)$ la droite passant par D et parallèle à l'axe des abscisses ; $\left(\Gamma\right)$ la conique dont les points M vérifient : $\frac{d\left(M,F\right)}{d\left(M,\left(\Delta\right)\right)}=2$. φ est la similitude directe plane de centre O, de rapport 2 et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$. $\left(\Sigma\right)$ est l'image de $\left(\Gamma\right)$ par φ.

1. Précise la nature de $\left(\Gamma\right)$ et détermine son excentricité, un de ses foyers et la directrice associée à ce foyer. **0,75pt**
2. Détermine une équation de $\left(\Gamma\right)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. **0,75pt**
3. **(a)** Donne l'écriture complexe de φ. **0,25pt**
   (b) Donne la nature exacte de $\left(\Sigma\right)$ et précise son excentricité. **0,5pt**

EXERCICE 4 : (6,5 points)

A) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : 2 cm). Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Etudie les variations de f. **0,75pt**

2. Détermine une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse $\frac{1}{2}$. **0,25pt**

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-\left(-\frac{2}{e}x+\frac{3}{e}\right)$.

(a) Détermine $g'(x)$ et $g''(x)$. **0,5pt**

(b) Détermine le signe de $g(x)$ et déduis-en la position relative de $\mathscr{C}$ et (T). **1pt**

(c) Trace la tangente (T) et la courbe $\mathscr{C}$. **0,75pt**

4. Calcule l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine $\mathscr{D}=\{M(x,y)/-0,5\le x\le \lambda, 0\le y\le f(x)\}$. **0,75pt**

5. Vérifie que $H:x\mapsto\left(-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{8}\right)e^{-4x}$ est une primitive de $h:x\mapsto(2x+1)^2e^{-4x}$ sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

6. Calcule le volume $\mathscr{V}$ du solide de révolution engendré par la rotation du domaine $\mathscr{D}$ autour de l'axe des abscisses pour $\lambda=\frac{1}{2}$. **0,5pt**

B) Dans l'espace vectoriel E, on considère l'endomorphisme φ défini par :
$\varphi(\vec{i})=\varphi(\vec{k})=\vec{i}-\vec{k}$ et $\varphi(\vec{j})=\vec{j}$.

1. Détermine $\ker\varphi$ et en donne une base. **0,5pt**

2. Détermine $\mathrm{Im}\,\varphi$, puis détermine une base de $\mathrm{Im}\,\varphi$. **0,5pt**

3. Montre que tout vecteur de l'espace s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\ker\varphi$ et d'un vecteur de $\mathrm{Im}\,\varphi$. **0,5pt**

PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES (5 points)

SITUATION :

M. ATANGANA est Comptable dans une société de micro finance. Il a un chantier qui n'est malheureusement pas desservi par une voie d'accès que peut emprunter un engin à moteur. Il achète le sable et le verse chez son voisin situé à une centaine de mètres du chantier. Ce sable livré par une société et acheté à raison de 9.000 **FCFA** le mètre cube est contenu dans un bac plein de forme parallélépipédique de dimensions $2m\times 0,1a\ m\times 0,2b\ m$ où a et b sont des entiers naturels qui vérifient en mètres (m) le système : $\begin{cases} a<b \\ a^2+b^2=4625 \\ PPCM(a;b)=440 \end{cases}$

Ce sable devra être transporté en 200 tours dans des seaux identiques et pleins par un groupe de garçons et de filles du quartier. Les garçons vont effectuer 9 tours et les filles 7 tours. Pour les motiver, il leur propose un taux forfaitaire de 1.500 **FCFA** par enfant et souhaite qu'il y ait plus de garçons que de filles pour accélérer le transport du sable.

A côté du chantier, **M. ATANGANA** veut entourer avec un minimum de plants d'arbres fruitiers son champ situé sur un terrain triangulaire de côtés $132m, 156m$ et $204m$. Les plants d'arbres fruitiers seront régulièrement espacés et la distance entre deux plants d'arbres fruitiers est exprimée en un nombre entier de mètres. De plus, il y aura un plant d'arbre fruitier à chaque sommet du champ. Un plant d'arbre fruitier coûte 1250 **FCFA** à la maison du planteur.

Tâches :

1. Détermine le montant nécessaire à prévoir par **M. ATANGANA** pour l'achat du sable. **1,5pt**
2. Détermine le montant nécessaire à prévoir par **M. ATANGANA** pour satisfaire tous les transporteurs de son sable. **1,5pt**
3. Détermine le montant nécessaire à prévoir par **M. ATANGANA** pour entourer son champ de plants d'arbres fruitiers. **1,5pt**

Présentation générale : **0,5pt**

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2019	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (5 points)

Soit (C) l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout f de (C), on définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt$.

1- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer sa fonction dérivée F'. (0,5 pt)

2-a/ Montrer que si f est une fonction constante alors F est aussi une fonction constante puis définir F dans ce cas. (0,5 pt)

b/ Définir la fonction F pour $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$. (0,25 pt)

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \longmapsto cost$.

3-a/ Déterminer le signe : de $F(\frac{\pi}{6})$ et de $F(\frac{\pi}{2})$. (0,5 pt)

b/ Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée. (0,5 pt)

c/ Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $sinx \leq x$. (0,25 pt)

d/ Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\frac{t}{2}}{t} dt$ et que $0 \leq F(x) + ln3 \leq 2x^2$. (0,75 pt)

En déduire la limite de F à droite en 0.

4- a/ Etablir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$. (0,5 pt)

b/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$. (0,5 pt)

5- Soit F_1 la restriction de F à $]0; 2\pi]$.

a/ Dresser le tableau de variation de F_1. (0,5 pt)

b/ Montrer que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution. (0,25 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$.

On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1- Déterminer l'affixe de chacun des points suivants : A_1; A'_1 ; A_2 et A'_2. (1 pt)

2-a/ Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,75 pt)

b/ Etablir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n. (0,5 pt)

c/ Déterminer la limite de r_n lorsque n tend vers + ∞, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,25 pt)

d/ Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}. (0,5 pt)

3- a/ Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1}A_n$, puis exprimer A_nA_{n+1} en fonction de n. (0,5 pt)

b/ Déterminer en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots\ldots A_n A_{n+1}$. (0,25 pt)

c/ Calculer la limite de d_n lorsque n tend vers + ∞. (0,25 pt)

Problème (11 points)

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble (Γ) des points de l'espace équidistants de deux droites (D) et D') non coplanaires et orthogonales.

A.

1-a/ Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan laisse invariante une droite donnée. (0,5 pt)

b/ Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D'). (0,5 pt)

On note (P) le plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') en B. (P') le plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) en A.

2-a/ Déterminer l'intersection des plans (P) et (P'). (0,25 pt)

b/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

Que peut-on dire de la droite (AB) et du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$? (0,25 pt)

3- Montrer que (Γ) admet les plans (P) et (P') comme plans de symétrie et la droite (AB) comme axe de symétrie. (1 pt)

4- Montrer que l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque des plans (P) et (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. (0,75 pt)

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

B.

La droite (D) passe par le point A de coordonnées (0, 0, 1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. La droite (D') passant par B de coordonnées (0, 0, -1) et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1-a/ Vérifier que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires.

Montrer que le point O appartient à (Γ). (0,75 pt)

b/ Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in IR$$

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) et Q un point de (D).

Exprimer MQ^2. Soit la fonction : $t \mapsto MQ^2$, en déduire la distance de M à (D). (1 pt)

c/ Calculer de même la distance du point M à la droite (D'). (1 pt)

d/ En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$. (0,25 pt)

2- Déduire de cette relation :

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2019	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (5 points)

Soit (C) l'ensemble des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout f de (C), on définit la fonction F sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \int_{3x}^{x} \frac{f(t)}{t} dt$.

1- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis calculer sa fonction dérivée F'. (0,5 pt)

2-a/ Montrer que si f est une fonction constante alors F est aussi une fonction constante puis définir F dans ce cas. (0,5 pt)

b/ Définir la fonction F pour $f : t \longmapsto \frac{1}{t}$. (0,25 pt)

Dans la suite de l'exercice f est la fonction : $t \longmapsto cost$.

3-a/ Déterminer le signe : de $F(\frac{\pi}{6})$ et de $F(\frac{\pi}{2})$. (0,5 pt)

b/ Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$, $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{1}{t}$ et que F est une fonction bornée. (0,5 pt)

c/ Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $sinx \leq x$. (0,25 pt)

d/ Démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $F(x) + ln3 = -2\int_{3x}^{x} \frac{sin^2\frac{t}{2}}{t} dt$ et que $0 \leq F(x) + ln3 \leq 2x^2$. (0,75 pt)

En déduire la limite de F à droite en 0.

4- a/ Etablir, en utilisant la méthode d'intégration par parties que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left|F(x) - \frac{3sinx - sin3x}{3x}\right| \leq \frac{2}{3x}$ et en déduire la limite de F en $+\infty$. (0,5 pt)

b/ Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = \frac{4cosxsin^2x}{x}$. (0,5 pt)

5- Soit F_1 la restriction de F à $]0; 2\pi]$.

a/ Dresser le tableau de variation de F_1. (0,5 pt)

b/ Montrer que l'équation $x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$, $F_1(x) = 0$ admet une unique solution. (0,25 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A_0 le point d'affixe 2 et A'_0 le point d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ et A_1 le milieu du segment $[A_0A'_0]$.

Plus généralement si A_n est un point d'affixe z_n on désigne par A'_n le point d'affixe $(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})z_n$ et par A_{n+1}, le milieu du segment $[A_nA'_n]$.

On note r_n et θ_n, le module et l'argument de z_n.

1- Déterminer l'affixe de chacun des points suivants : A_1; A'_1 ; A_2 et A'_2. (1 pt)

2-a/ Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.

En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Montrer que A_{n+1} est l'image de A_n par une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,75 pt)

b/ Etablir les expressions de r_n et θ_n en fonction de n. (0,5 pt)

c/ Déterminer la limite de r_n lorsque n tend vers + ∞, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. (0,25 pt)

d/ Comparer les modules et les arguments de z_n et z_{n+6}. (0,5 pt)

3- a/ Etablir que $A_nA_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} A_{n-1}A_n$, puis exprimer A_nA_{n+1} en fonction de n. (0,5 pt)

b/ Déterminer en fonction de n, la longueur d_n de la ligne brisée $A_0A_1 \ldots\ldots A_n A_{n+1}$. (0,25 pt)

c/ Calculer la limite de d_n lorsque n tend vers + ∞. (0,25 pt)

Problème (11 points)

Dans ce problème, on se propose d'étudier l'ensemble (Γ) des points de l'espace équidistants de deux droites (D) et D') non coplanaires et orthogonales.

A.

1-a/ Donner une condition nécessaire et suffisante qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan laisse invariante une droite donnée. (0,5 pt)

b/ Démontrer qu'il existe deux symétries orthogonales par rapport à un plan et deux seulement qui laissent simultanément invariantes les droites (D) et (D'). (0,5 pt)

On note (P) le plan contenant la droite (D) et orthogonale à (D') en B. (P') le plan contenant la droite (D') et orthogonale à (D) en A.

2-a/ Déterminer l'intersection des plans (P) et (P'). (0,25 pt)

b/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

Que peut-on dire de la droite (AB) et du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$? (0,25 pt)

3- Montrer que (Γ) admet les plans (P) et (P') comme plans de symétrie et la droite (AB) comme axe de symétrie. (1 pt)

4- Montrer que l'intersection de (Γ) avec l'un quelconque des plans (P) et (P') est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice. (0,75 pt)

Dans la suite, l'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

B.

La droite (D) passe par le point A de coordonnées (0, 0, 1) et admet comme vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. La droite (D') passant par B de coordonnées (0, 0, -1) et admet comme vecteur directeur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

1-a/ Vérifier que (D) et (D') sont orthogonales et non coplanaires.

Montrer que le point O appartient à (Γ). (0,75 pt)

b/ Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in IR$$

Soit M un point de coordonnées (x, y, z) et Q un point de (D).

Exprimer MQ^2. Soit la fonction : $t \mapsto MQ^2$, en déduire la distance de M à (D). (1 pt)

c/ Calculer de même la distance du point M à la droite (D'). (1 pt)

d/ En déduire que M appartient à (Γ) si et seulement si on a : $xy + 2z = 0$. (0,25 pt)

2- Déduire de cette relation :

BAC BLANC DE FEVRIER 2022

COMPLEXE SCOLAIRE **ANNEE SCOLAIRE : 2021- 2022**
LE PARTAGE **CLASSE : Tle C**
TEL : 97 76 49 21 **DUREE : 4H**

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Contexte : Construction d'un centre de formation d'ingénieurs agronomes

Le gouvernement du Bénin dans son $\boldsymbol{PAG_2}$,décide de construire un centre de formation d'ingénieurs agronomes. A cet effet, le technicien en charge de faire le plan des travaux, a prévu forer un puits dont le bord est assimilé à un carré $ABCD$ de centre O tel que $\boldsymbol{OA = 1}$. Le puits sera protégé par un barbelé représenté par l'ensemble (Γ) des points M de l'espace orienté $\mathcal{E}$ tel que $\boldsymbol{MA^2 - 2MB^2 + MC^2 - 2MD^2 = -4}$. Pour soutenir le dispositif de puisage, une barre de fer sera placée en un point $\boldsymbol{S}$ au-dessus du puits tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{OB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OS}}$. Pour ses calculs, le technicien utilisera deux demi-tours d_1 et d_2 d'axes respectifs (OA) et (OB), et l'application de $\boldsymbol{t}$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui à tout point M , associe le point M' tel que

$$\overrightarrow{\boldsymbol{BM'}} = (\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{BC}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BM}}.$$

Pour mieux comprendre les informations laissées dans le cahier de charges par le technicien, Monsieur **WANIGNON**, le directeur du centre, fait appel à son jeune frère **John** élève en classe de terminale C.

Tâche : Tu es invité(e) à aider **John** à trouver des réponses aux préoccupations de Monsieur **WANIGNON** en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème1

1. Démontre que le point O est le barycentre des points pondérés $(\boldsymbol{A,1})$; $(\boldsymbol{B,-2})$; $(\boldsymbol{C,1})$; $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{D}, -2)$
2. Détermine(Γ).
3 .a). Précise la nature de $d_1 o d_2$.
b. Détermine l'image de (Γ) par $d_1 o d_2$.
c. Justifie que $\left(A ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}\right)$ est un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$.
4.a). Démontrer que l'application $\boldsymbol{t}$ est une translation dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{OS}$
b. Détermine dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}\right)$ une équation cartésienne de l'image par $\boldsymbol{t}$ du plan (OAB).

Problème2

Pour l'accélération des travaux, Monsieur **WANIGNON**, recrute un nombre n d'hommes et m de femmes devant servir de mains d'œuvre. L'entier m est le reste de la division euclidienne de 5^{2022} par 77 et n est un entier naturel vérifiant
$ppcm(9n + 4, 2n - 1) = 714$.
5. On pose $\delta = pgcd(9n + 4, 2n - 1)$.
a-) Justifie que $\delta \in \{1, 17\}$.
b-) Déduis-en que $n = 52$.
6.a) Résous dans $\mathbb{N}$ chacune des équations $(E_1): 5^p \equiv 4[11]$ et $(E_2): 5^p \equiv 4[7]$.
b-Déduis-en que les entiers naturels p tels que $5^p \equiv 4[77]$ sont de la forme $p = 30 \propto +8$ où $\propto$ est un entier naturel.
c-Déduis-en la valeur de m.

Problème 3

Les voies d'accès au centre, sont assimilables à des portions dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, des courbes (C_f), (C_g)et (C_h), respectives des fonctions numériques f,g et h à variable réelle x définies par :

$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = \left|1-\frac{1}{x}\right|^{x} \; si \; x \neq 1} \\ \boldsymbol{f(1) = 0} \end{cases}$;$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{x-1} + ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\right)}$;$\boldsymbol{h(x) = 4x + \sqrt{x^2+9}}$

7. Etudie les variations de g.

8-a) Démontre l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β telle que $0 < \beta < \frac{1}{2}$

b) Déduis-en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

9-a) Démontrer que l'ensemble de définition D de f est $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

b) Justifie que f est continue en 1.

c) Démontre que $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \frac{f(x)}{x-1} = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} \frac{f(x)}{x-1} = 1$.

d) Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.

10-a) Etudie les variations de f.

b) Démontre que $f(\beta) = e^{\frac{-\beta}{\beta-1}}$ puis donne un encadrement de $f(\beta)$.

c) Construis (C_f) et les demi-tangentes éventuelles à (C_f) en son point d'abscisse 1.

11-Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : y^2 - 8xy + 15x^2 = 9$.

12-Déduis-en l'ensemble $(\Sigma) = \{M(x,y) \in (C_h)/x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z}\}$.

BONNE COMPOSITION !!!

DDESTFP DE L'ATLANTIQUE Année scolaire : 2017-2018

IPDAL

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL DU BACCALAUREAT

EPREUVE : Mathématiques

SERIE : C COEFFICIENT : 06 DUREE : 04H

Contexte : La décoration d'un amphithéâtre.

Sèdjro est un élève en classe de la terminale C qui a été impressionné par la décoration d'une surface latérale extérieure d'un amphithéâtre de la filière « MATHEMATIQUES » d'un campus.

Selon le plan de conception, l'un des motifs de la décoration est constitué du dessin d'un tétraèdre ABCD tel que les faces ABC, ABD et ACD forment trois triangles rectangles et isocèles en A et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, des dessins des courbes (E_m) des points M de l'espace tels que : $MB^2 + MC^2 + MD^2 = m$ avec m un paramètre réel, de l'image de la face BCD du tétraèdre par une application φ du plan (BCD) dans lui-même et d'une portion de la courbe représentative d'une fonction f .

Sèdjro s'intéresse aux principes mathématiques qui caractérisent le plan de conception de la décoration.

Tâche : Tu es invité(e) à partager les préoccupations de Sèdjro en résolvant les trois problèmes suivants.

PROBLEME I

1-a) Démontre que : $AB = AC = AD = 1$.

b) Justifie que $\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

2-a) Détermine une équation cartésienne du plan (BCD) .

b) Trouve les coordonnées du point G projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) .

c) Vérifie que G est le centre de gravité du triangle BCD.

3-a) Détermine la nature du triangle BCD.

b) Détermine l'ensemble (E_m) suivant les valeurs de m .

c) Détermine m pour que l'isobarycentre I des points $A, B\ et\ C$ appartiennent à (E_m) .

PROBLEME II

Dans le plan (BCD) muni d'un repère orthonormé, l'application φ a pour expression analytique :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x + 6y - 4) \\ y' = \frac{1}{5}(6x - 13y + 12) \end{cases}$$

4- Détermine l'ensemble (E) des points invariants par φ .

5- Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points du plan et $H(x_H, y_H)$ le projeté de M sur (E) suivant la direction du vecteur $\vec{v}(1; -3)$.

a) Exprime x_H et y_H en fonction de x et y .

b) Justifie que : $[\varphi(M) = M'] \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{HM'} = k\overrightarrow{HM}\right]$ où k est un nombre réel à préciser.

6- Déduis-en la nature précise de φ .

PROBLEME III

f est la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{ln(x+2)-2x-2}{x+1} & si\ x \neq -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm).

Partie A

7- Etudie les variations de la fonction g définie sur $]-2, +\infty[$ par :

$g(x) = x + 1 - (x + 2)ln(x + 2)$.

8- Déduis-en le signe de $g(x)$.

Partie B

9- Etudie la continuité de f au point $x_0 = -1$.

10- a) Donne le développement limité d'ordre 2 de la fonction $t \mapsto ln(t + 1)$ au voisinage de 0.

b) Déduis-en que $\lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{ln(t+1)-t}{t^2}\right) = -\frac{1}{2}$.

c) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = -1$ est $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

11-a) Démontre que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-2;\ -1[\ et\ ]-1,+\infty[$, puis justifie que : $\forall x\epsilon]-2;-1[\cup]-1,+\infty[, f'(x)=\frac{g(x)}{(x+2)(x+1)^2}$.

b) Déduis-en le sens de variation de f .

c) Dresse le tableau de variation de f .

<u>Partie</u> C

Soit h la fonction définie sur $]-2;2[$ par $h(x)=ln(x+2)+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

12- Etudie le sens de variation de h sur $]-2;2[$.

13-a) Calcule $h(-1)$ et précise le signe de $h(x)$ pour tout x élément de $]-2;2[$.

b) Déduis-en la position relative de la courbe (C) par rapport à la tangente (T) au point d'abscisse -1.

c) Construis (T) et la courbe (C) .

FIN

EXAMEN BLANC BAC 2021
ARRONDISSEMENT DE BEMBEREKE

EPREUVE : Mathématiques SERIE : C DUREE :4heures

Contexte : Plan de construction d'un musée

L'entrepreneur Fignon qui est un architecte de formation a gagné, après un appel d'offre, le marché de construction du grand musée des arts de Dunia.

Pour la réalisation de ce projet, il envisage employer a femmes et b hommes où a et b sont des entiers naturels tels que $\begin{cases} a+b=84 \\ ab=d^3 \\ a<b \end{cases}$; avec $d=pgcd(a,b)$.

Sur la maquette du musé, on découvre un bâtiment principal ayant la forme d'un cube ABCDEFGH amputé d'une partie. L'architecte Fignon utilise certaines transformations de l'espace et du plan pour réaliser des dessins d'arts et placer certains objets. Pour la décoration des murs certains motifs prévus par Fignon contiennent des portions de courbes représentatives de fonctions.

Sènami, élève en classe de Terminale C en vacance chez son oncle Fignon, a suivi de prêt l'élaboration de ce plan de construction et est imprégnée des informations nécessaires pour la réalisation de ce projet. Elle désire connaître le nombre de femmes et d'hommes qui vont travailler sur ce chantier, les applications du plan et de l'espace et la représentation de certaines des courbes qui sont sur les motifs de décoration.

Tâche : Tu es invité(e) à apporter des réponses adéquates aux préoccupations de Sènami en résolvant les problèmes suivants :

PROBLEME I

1. Démontre qu'il existe des entiers naturels non nuls x et y premiers entre eux tel que $a=dx$ et $b=dy$.
2. On pose $S=x+y$ et $P=xy$.
   a) Démontre que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b) Déduis-en que S et P sont premiers entre eux.
   c) Démontre que les nombres S et P sont de parités différentes.
   d) Détermine les diviseurs positifs de 84.
   e) Trouve les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP=84$.
3. Détermine le nombre a de femmes et le nombre b d'hommes que Fignon envisage employer sur ce chantier.

PROBLEME II

La section du cube ABCDEFGH par le plan (P) passant par le milieu I du segment [EF] et parallèle au plan (FHK) où K est le barycentre des points pondérés $(A,3)$, $(D,1)$; permet d'obtenir la forme du bâtiment principal.

L'espace étant rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{A};\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on place au point E, E' et E'' des caméras. E' est l'image de E par la réflexion s du plan (P) et E'' est l'image de E par l'application $t = sos'$; où s' est la réflexion du plan (FHK).

Sur un des murs du bâtiment principal, contenu dans un plan (Q) muni d'un repère orthonormé direct $(0;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, le motif de la décoration est constitué de la conique $(\mathcal{C})$ de directrice (D) d'équation $x = 5$, de foyer $F(1,-1)$ d'excentricité $\frac{1}{3}$ et de son image $(\mathcal{C}')$ par la transformation φ du plan d'écriture complexe

$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{z} + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. a) Démontre qu'une équation cartésienne de (P) est $4x + 4y - 3z + 1 = 0$
   b)Détermine l'expression analytique de s et déduis-en les coordonnées de E'.
5. a) Détermine la nature et l'élément caractéristique de t.
   b) Calcule les coordonnées de E''.
6. a) Précise la nature, l'axe focal, les deux sommets principaux et le centre de $(\mathcal{C})$.
   b) Détermine l'équation de $(\mathcal{C})$ dans $(0;\ \overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et construis $(\mathcal{C})$.
7. Soit r la transformation du plan (Q) qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit I et J deux points d'affixe respectifs 1 et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ du plan (Q)
   a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de r.
   b) Trouve une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IJ}}\right)$; puis détermine la droite (Δ) du plan (Q) telle que $r = \sigma_\Delta o\sigma_{(IO)}$; où $\sigma_\Delta$et$\sigma_{(IO)}$ sont des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (IO).
   c) Prouve que $\varphi = ro\sigma_{(IO)}$. Déduis-en la nature et l'élément caractéristique de φ.
   d) Construis $(\mathcal{C}')$.

PROBLEME III

A l'entrée du musée, sera placé sur la face extérieure d'un mur contenu dans un plan muni d'un repère orthonormé $(0;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, un enseigne dont la surface a la forme de la portion (δ)du plan délimitée par les courbes représentatives$(\mathcal{C}_u)$, $\left(\mathcal{C}_f\right)$ respectives

de deux fonctions u , f et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$ où $\alpha = \frac{1-e^2}{2e}$. Les fonctions u , f sont définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$.

8. a) Etudie les variations de u.
   b) Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C}_u)$ et trace $(\mathcal{C}_u)$.
9. a) Justifie que pour tout nombre réel x, $f(x) = \ln[u(x)]$.
   b) Etudie les variations de f.

10. a) Détermine une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

    b) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) + x$.

Démontre que h est croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 0$. Déduis-en la position de $(\mathcal{C}_f)$par rapport à (T).

c) Etudie les branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.Trace (T) et $(\mathcal{C}_f)$.

11. a) Démontre que $u(\alpha) = e$ et déduis-en $f(\alpha)$.

    b) A l'aide d'intégration par partie, calcule $\int_\alpha^0 \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) dx$

12. Soit V une primitive de u sur $\mathbb{R}$et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

    a) Démontre que $u\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = e^{-t}$.

    b) Justifie que Vog est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(Vog)'(t) = \frac{1+e^{-2t}}{2}$.

    c) Déduis-en que $V(0) - V(\alpha) = (Vog)(0) - (Vog)(-1) = \int_{-1}^0 \frac{1+e^{-2t}}{2} dt$

puis que $\int_\alpha^0 u(x)dx = \frac{1+e^2}{4}$.

13. Sachant que pour tout nombre réel x, $f(x) \leq u(x)$; détermine l'aire de (δ).

Bonne composition !!!

ASSOCIATION DES COLLEGES PUBLICS DE LA COMMUNE DE POBE

Année Scolaire 2020-2021

BAC BLANC/SESSION DE MAI 2021

EPREUVE : Mathématiques

Coef : 06

Durée : 04h

Série : C

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Une campagne de sensibilisation

Afin de lutter contre le fort taux d'accidents de route, les autorités de la commune de Kpévié ont initié des contrôles inopinés afin de faire un point sur l'état des freins et de l'éclairage des véhicules. Ces contrôles, qui serviront à sensibiliser les conducteurs de véhicules, ont été confiés à la police républicaine. Ainsi la police républicaine a effectué au hasard des contrôles de véhicules.

Le nombre de véhicules contrôlés est un nombre q tel que $880 < q < 1756$ et dans l'ensemble $\mathbb{Z}/438\mathbb{Z}$, $\overline{109}\dot{q} + \dot{3} = \dot{1}$ où $\overline{109}$ désigne la classe de 109.

Les contrôles ont duré N jours avec $N = l + 15$ où l est la limite d'une suite numérique (α_n) $n\epsilon\mathbb{N}^*$.

A l'issue de ces contrôles, il ressort que : 12% des véhicules ont des freins défectueux. Parmi les véhicules ayant des freins défectueux, 20% ont un éclairage défectueux. Parmi les véhicules ayant de bons freins, 8% ont un éclairage défectueux.

Le chef service sécurité routière de la commune, afin d'étudier les résultats de ces contrôles, désigne par E l'événement « le véhicule contrôlé a un bon éclairage » et $\bar{E}$ son événement contraire; F l'événement « le véhicule contrôlé a de bons freins » et $\bar{F}$ son contraire.

Par ailleurs des panneaux, pour sensibiliser contre l'excès de vitesse, seront implantés dans la commune.

Chaque panneau sera décoré à l'aide de deux configurations du plan.

Joé, élève en classe de terminale scientifique et fils du chef service, voudrait aider son père dans son travail. Pour cela il désire :

- étudier les résultats des contrôles
- connaître le nombre de contrôles effectués
- la nature des configurations qui ont servi à la décoration des panneaux
- connaître la forme des routes dans la commune
- connaître le nombre de jours que les contrôles ont duré.

Tâche : Tu es invité(e) à aider Joé en résolvant chacun des trois problèmes suivants :

NB : On donnera les résultats des calculs de probabilité à 10^{-4} près et la probabilité d'un événement A sera notée $p(A)$.

Problème1

1. Calcule la probabilité $p(F)$ et détermine la probabilité $p(\bar{E}/F)$.
2. Calcule la probabilité

a)pour qu'un véhicule contrôlé ait des freins défectueux et un éclairage défectueux

b) pour qu'un véhicule contrôlé ait de bons freins un éclairage défectueux

c) pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux

3. Sachant qu'un véhicule contrôlé a un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux.

4.a)Démontre que la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (c'est-à-dire avoir de bons freins et un bon éclairage) est 0,8096.

b) Au cours d'un contrôle, la police républicaine a arrêté 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il ait, parmi ces véhicules, au moins un qui ne soit pas en bon état.

5.a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, détermine deux nombres entiers relatifs $u\ et\ v$ tels que $438u + 109v = 1$.

b) Déduis que, dans $\mathbb{Z}/438\mathbb{Z}$, $\overline{109}$ est inversible puis précise son inverse.

c) Résous dans $\mathbb{Z}/438\mathbb{Z}$, l'équation $\overline{109}\dot{q} + \dot{3} = \dot{1}$.

d) Détermine le nombre de véhicules contrôlés.

Problème2

Certains panneaux de sensibilisation seront placés en des points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E_0): $(z+i)^4 = (z-i)^4$; $z \in \mathbb{C}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ .Chaque panneau sera décoré à l'aide des configurations $(\Gamma_1)\ et\ (\Gamma_2)$ définies par :

$$(\Gamma_1) = \left\{M(z)\epsilon(\mathrm{P})/2|\mathrm{z}|^2 - \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{z}^2 - \bar{\mathrm{z}}^2) = 1\right\}\ et$$

$(\Gamma_2) = \{M\epsilon(P)/2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 20\}$ Où les points $A, B\ et\ C$ sont d'affixes respectives $1+i$, $-2\ et\ 4i$.On désigne par r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

6.a)Démontre que ABC est un triangle rectangle isocèle.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de la configuration (Γ_2).

7.a) Sans résoudre l'équation (E_0), démontre que ses solutions sont des nombres réels.

b) Résous l'équation(E_0).

8.a) Détermine l'écriture complexe de r.

b) Détermine une équation cartésienne de (Γ') image de (Γ_1) par r.

c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ')

d) Déduis la nature et le tracé de (Γ_1)

Problème3

La plupart des voies de la commune autour desquelles seront implantés les panneaux, ont la forme d'une portion de la courbe représentative de la fonction f définie sur $]-\infty;-1]\cup[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x(x+1)ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \ si\ x\ \epsilon\ ]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[\\ f(0)=f(-1)=0 \end{cases}$

On désigne par(C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{i},\vec{j})$.

9.a) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en-1.

10. Soit g la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $g(x)=(x+1)ln(x+1)$.

a) Ecris le développement limité à l'ordre 3 de g au voisinage de 0.

b) Déduis que la droite (Δ) d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote à (C).

11.a) Etudie les variations de la fonction h définie sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ par $h(x)=ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{2x+1}$.

b) Déduis-en suivant les valeurs de x le signe de $h(x)$.

c)Etudie les variations de f(Tu remarqueras que $f'(x)=(2x+1)h(x)$)

d) Trace la courbe (C) .

12. Soit l'application φ: $[0;+\infty[\longrightarrow[0;+\infty[$

$$x\longmapsto f(x)$$

On désigne par (C') la courbe représentative de φ dans le plan muni du repère$(O;\vec{i},\vec{j})$ et par (Σ) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2y-1\geq 0 \\ x-1=\varphi(2y-1) \end{cases}$

a) Démontre que l'application φ admet une bijection réciproqueφ^{-1}.

b) Démontre que (Σ) est l'image de (C) par la composée d'une symétrie glissée et d'une affinité dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

13. Soit n un entier naturel non nul.

a)Démontre que l'équation $\varphi(x)=\frac{1}{n}$ admet une solution unique α_n.

b) Démontre que la suite $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c)Justifie que la suite $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est convergente.

d)l étant la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$, que $\varphi(l)=0$ puis déduis la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$.

e) Détermine le nombre de jours qu'ont duré les contrôles.

Bonne Composition

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DU BENIN

COLLECTIF DES ETABLISSEMENTS SECONDAIRES PRIVES DU BORGOU

EXAMEN BLANC DEPARTEMENTAL

EXAMEN BLANC : SESSION DE MARS 2021

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIES : C **DUREE : 4 heures**

SITUATION D'EVALUATION

Contexte:

Une usine située dans la commune de FIFA est spécialisée dans la fabrication des jouets. Par journée de travail, les techniciens fabriquent trois catégories A ; B et C de jouets. Les catégories A et B sont respectivement identifiées par les codes : $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ et $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$ où n est un entier naturel. La catégorie C comporte que quatre types de jouets de codes respectifs : $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$ et $5^6 - 1$.

Dansou, le fils du Directeur, élève en Terminale C désir déterminer les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7. Il décide également de résoudre des situations-problèmes liées à la configuration de la salle d'exposition des jouets et à la voie principale qui mène vers l'usine.

Tâche : Tu vas aider Dansou dans sa curiosité en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

1. Vérifie que 7 divise les nombres $2^6 - 1$; $3^6 - 1$; $4^6 - 1$ et $5^6 - 1$.
2. Montre que $A_{n+6} - A_n$ est divisible par 7.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, q et r son quotient et son reste dans la division euclidienne par 6. Montre que A_n et A_r ont même reste dans la division euclidienne par 7.
4. Détermine les valeurs de n pour lesquelles $A_n$est divisible par 7.
5.
   a. Montre que $A_n \equiv B_n[7]$.
   b. Déduis-en les valeurs de n pour lesquelles B_n est divisible par 7.

Problème 2 :

La fabrique est un bâtiment ayant la forme d'un cube $ABCDEFGH$ où l'on désigne par I le centre de la face $ADHE$ et par J celui de la face $BCGF$.

Dans cette fabrique, un miroir est installé dans un plan lié à l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}\right) = 0$, par l'application $\mathcal{s}$ de l'espace dans lui-même qui à tout point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{DM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ dans l'espace muni du repère orthonormé direct $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

6.
   a. Justifie que A est le barycentre des points $B; C$ et D dont tu préciseras les pondérations.
   b. Démontre que (Γ) est un plan que tu caractériseras.
7.
   a. Détermine la nature et le(s) élément(s) caractéristiques de l'application $\mathcal{s}$.
   b. Détermine une équation cartésienne de $\mathcal{s}(\Gamma)$, le plan de la face du miroir.
8. Démontre qu'il existe une homothétie h telle que $h(J) = A$ et $h(B) = H$.
9. Soit $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ un point de l'espace.
   a. Démontre que $SABCD$ est une pyramide.
   b. Calcule le volume $\mathcal{V}$ de la cage de stockage des jouets, égale au tiers du volume de l'image de la pyramide $SABCD$ par l'homothétie h.

Problème 3 :

Une courbe sur un des jouets est une portion de la courbe représentative (C) dans un repère orthonormé d'unité graphique $2\ cm$ de la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]1; +\infty[$ par : $\begin{cases} -x + 4 + 2\ln(x-1), si\ 1 < x < 2 \\ x - 1 + e^{2-x} \qquad si \quad x \geq 2 \end{cases}$.

Partie A

10. Etudie la continuité de f en $x_0 = 2$
11. Etudie la dérivabilité de la fonction f en $x_0 = 2$ et donne une interprétation géométrique des résultats.
12. Précise l'ensemble de dérivabilité D de f et calcule $f'(x)$ pour tout x élément de D.
13. Achève l'étude des variations de f sur son ensemble de définition.
14.
   a. Justifie que la courbe (C) admet une asymptote (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont tu préciseras une équation.

b. Etudie la position de (Δ) par rapport à la courbe (C).

15. Trace la courbe (C), ses tangentes et ses asymptotes dans un même repère du plan

Partie B

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]1; 2[$.

16. Justifie que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que tu préciseras.
17. Dresse le tableau de variation de g^{-1} et construis sa courbe dans le même repère que (C).

Partie C

18. λest un nombre réel strictement supérieur à 2. On note $A(\lambda)$ l'aire du domaine plan défini par : $\begin{cases} 2 \leq x \leq \lambda \\ x - 1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.
    a. Calcule $A(\lambda)$ en fonction de λ.
    b. Calcule la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.
19. On considère dans le plan un point mobile dont les coordonnées sont données en fonction du temps par : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 + e^{-t} (t \geq 0) \end{cases}$
    a. Détermine l'équation de la trajectoire du point M
    b. Démontre que la trajectoire de Mest une partie de la courbe (C) que l'on déterminera.

Bonne composition !!!

MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

REPUBLIQUE DU BENIN

DIRECTION DEPARTEMENTALE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRE, TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE DU PLATEAU

COLLECTIF DES COLLEGES D'ENSEIGNEMENT GENERAL DE LA COMMUNE DE SAKETE

EXAMEN BLANC COMMUNAL DU BAC SESSION DE MAI 2021

EPREUVE : MATHEMATIQUES
SÉRIE : C
DURÉE : 04 HEURES

SITUATION D'EVALUATION

Contexte : Un acte de reconnaissance

L'amicale des anciens élèves de la classe terminale C d'un collège ont décidé d'organiser à leur professeur de mathématiques une fête à l'occasion de son dixième anniversaire d'admission à la retraite. Pour l'organisation des festivités, un comité composé d'hommes et de femmes a été mis. Les nombre a de femmes et le nombre b d'hommes du comité sont deux entiers naturels a et b tels que

$$\begin{cases} PGCD(a,b) = 3 \\ 2a^2 + 3b^2 = 270 \end{cases}.$$

Au cours de la cérémonie, il sera offert au professeur un tableau de forme circulaire dans lequel est inscrit un quadrilatère $ABCD$, et sur lequel il sera réalisé des décorations à partir des configurations du plan.

Pour aider l'artisan qui doit réaliser le tableau, Koffi, un membre de l'association et chargé du suivi du projet, décide de confier à son neveu Kotchikpa, élève en classe terminale C, le soin de déterminer le diamètre du tableau, de réaliser les différentes configurations sur le tableau. Kotchikpa veut également connaitre le nombre de membre du comité d'organisation.

Tâche : tu es invité(e) à répondre aux différentes préoccupations de Kotchikpa en résolvant les problèmes ci-après.

Problème 1

1- En utilisant l'égalité $2a^2 = 3(90 - b^2)$, démontre que $0 \leq b \leq 9$ et que $b \equiv 0[2]$.

2- Justifie qu'il existe un entier relatif k tel que $b = 6k$.

3- Détermine le nombre de membres du comité

Problème 2

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$, les affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 des points A, B, C et D sont les solutions dans l'ensemble des nombres complexes de l'équation $P(z) = 0$ avec

$P(z) = z^4 + 2\alpha z^3 + \beta z^2 + 2\alpha z + 1$; α et β étant des nombres réels.

4- a) Démontre que si z_0 est une racine complexe non réelle de $P(z)$, alors il en en de même de $\overline{z_0}$ et $\frac{1}{z_0}$.

b) Détermine les nombres réels α et β sachant que $z_1 = 1 + i$.

c) Détermine les autres solutions de l'équation $P(z) = 0$.

d) Justifie que $P(z)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

5- On suppose $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_3 = 1 - i$ et $z_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

a) Place les points A, B, C et D (tu prendras 4 cm comme unité)

b) Justifie l'existence d'une rotation r qui transforme A en B et C en D.

c) Détermine l'angle et le centre de la rotation r.

d) Détermine le nombre réel t tel que $|1 + i - t| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - t\right|$. Déduis-en que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

e) Détermine le diamètre du tableau circulaire.

Problème 3

Les décorations sur le tableau seront réalisées à partir de la famille de courbes (C_n) représentatives, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (l'unité étant 4 cm), des fonctions f_n définies sur $[0; +\infty[$ par :

$\begin{cases} f_n(x) = x^n(\ln x)^2 \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$ n étant un entier naturel non nul.

Partie A

6- Démontre que la fonction f_n est continue à droite en 0.

7- Etudie la dérivabilité de f_n à droite en 0 et donne une interprétation géométrique du résultat (tu discuteras suivant les valeurs de n)

8- Etudie la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}).

9- Etudie les variations de chacune des fonctions f_1 et f_2 ; puis construis les courbes C_1 et C_2 sur une même figure.

Partie B

La partie du tableau assimilée au domaine plan délimité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ portera une décoration réalisée avec des perles précieuses.

Soit λ un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f_n(x)dx.$$

10- Etudie le sens de variation de la suite $\left(I_n(\lambda)\right)_{n>0}$, puis démontre qu'elle est convergente.

11- A l'aide de deux intégrations par parties, calcule $I_n(\lambda)$ en fonction de n et de λ.

12- Détermine :

a) Lorsque λ est fixé, la limite de $I_n(\lambda)$ lorsque n tend vers $+\infty$,.

b) Lorsque n fixé, La limite α_n de $I_n(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

13- En admettant que α_n représente l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_n), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$, calcule, en cm^2, l'aire de la partie du tableau portant la décoration de perles.

FIN

***Mois** : Avril* ***Classe** : T^les C* ***Durée** : 4h*

1er devoir surveiller du 3ème trimestre

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Contexte : Le lancement d'un ballon dans l'espace.

Un centre spatial de lancement de satellite dispose d'un circuit constitué d'un condensateur de capacité Un centre spatial de lancement de satellite dispose d'un circuit constitué d'un condensateur de capacité C donnée, de 2 résistances R_1 et R_2 de valeur donnée, d'un interrupteur et d'un générateur pour gonfler à l'hélium un ballon qu'il lancera dans l'espace. Dès qu'on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, le générateur délivre une tension $V(t) = e^t(2t + 3)$ où t est exprimé en seconde. La tension q aux bornes du condensateur est alors solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_1): q''(t) - 2q'(t) + 2q(t) = V(t)$. Par ailleurs pour des raisons de stratégies, un fil de couleur rouge délimite le périmètre de sécurité du circuit dans la zone de lancement. Monsieur VARANGO, Directeur du centre spatial se demande qu'elle peut être la tension aux bornes du condensateur et qu'elle trajectoire allait décrire le ballon une fois lâché dans l'espace.

Tâche : Tu vas aider Mr VARANGO à satisfaire ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants :

Problème 1

1- a) Détermine les réels α et β pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = e^t(\alpha t + \beta)$ soit solution de l'équation différentielle (E_1).

b) Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montre que f est solution de (E_1) si et seulement si $(f - g)$ est solution de l'équation différentielle $(E_2): q''(t) - 2q'(t) + 2q(t) = 0$.

2- a) Résous (E_2).

b) Déduis-en les solutions de (E_1).

c) Sachant que la charge initiale du condensateur impose la condition $3q(0) = 7V(0)$ et que la courbe intégrale de q admet au

point d'abscisse 0 une tangente parallèle à la droite d'équation $15x - y - 2 = 0$, détermine $q(t)$.

3- En réalité le choix des coefficients de l'équation différentielle (E) fait suite à une expérience qui consiste à lancer à lancer 3 fois un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Chaque numéro à la même probabilité d'apparaître. On appelle a, b et c respectivement les résultats du premier, du second et du troisième lancer du dé. On désigne par A_1 et A_2 les évènements suivants :

- A_1 « les solutions de l'équation différentielle $aq'' + b'q + cq = 0$ sont de la forme $q(t) = e^t(Acost + Bsint)$ où A et B sont des constantes réelles. »
- A_2 « $a + b + c$ est un nombre pair »

Calcule $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

Problème 2

La zone réservée au lancement est entourée par un jardin de plants de jasmin entretenu par un jardinier. On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x++x^2}dx$. Le produit chimique utilisé par le jardinier destiné au traitement des jeunes plants de jasmin éliminera à la $n^{ième}$ semaine de traitement U_n kilogrammes d'insectes et de parasites. La pulvérisation et l'arrosage des plants se font à des intervalles de temps réguliers, soit toutes les T_1 heures pour la pulvérisation et toutes les T_2 heures pour l'arrosage.

On suppose que : $T_2 < T_1 < 48$ et que dans $\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}$ les classes $\overline{T_1}$ et $\overline{T_2}$ sont solutions de l'équation $(E): x^2 + \overline{23}x + \overline{98} = \overline{0}$.

1- a) Justifie que $(\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}, +, \times)$ est un corps.

b) Développe et réduis $(x - \overline{36})(x - \overline{42})$ dans $\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}$.

c) Résous dans $\mathbb{Z}/_{101\mathbb{Z}}$, l'équation (E).

d) Déduis-en la prochaine date à laquelle les plants ont été simultanément arrosés et pulvérisés, les robinets ayant été mis en marche le 14 juin 2015 à $6h$.

2- a) Justifie que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de termes positifs.

b) Etudie le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

CPEG DK

c) Déduis-en que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

d) Démontre que pour tout x élément de $[0;1], \frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2} \leq x^n$.

e) Déduis-en la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Problème 3

Le ballon étant lancé, sa trajectoire est une partie de la courbe représentative de la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et défini sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^*, h(x) = x + 1 - \frac{31}{16}x^2 - \frac{1}{8}x^2 ln|x| \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

Partie A

Le plan du sol où se pose le ballon est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$. On considère la fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et définie par : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{4} ln|x|$.

1- a) Calcule la limite de f en 0.

b) Calcule les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Démontre que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right[$ et $]0;+\infty[$ et strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4};0\right[$.

d) Dresse le tableau de variation de f.

2- Démontre que l'équation $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $3 < \alpha < 4$.

3- Démontre que :

$\forall x \in]-\infty;0[\cup]0;\alpha[, f(x) < 0$,

$\forall x \in]\alpha;+\infty[, f(x) > 0$.

Partie B

1- a) Démontre que h est dérivable en 0.

b) Démontre que $\forall x \in \mathbb{R}^*, h'^{(x)} = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Démontre en utilisant la partie $A - 3°$) que :

$\forall x \in]-\infty;0[\cup \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[, h'(x) > 0$,

$\forall x \in \left]\frac{1}{\alpha};+\infty\right[, h'(x) < 0$.

2- On note (ℸ) la courbe représentative de la restriction de h à l'intervalle $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$ dans le plan muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Trace la tangente à (ℸ) en son point d'abscisse 0.

CEG DK

b) Construis la courbe (ℸ). (Tu prendras $\alpha = 3{,}6$)

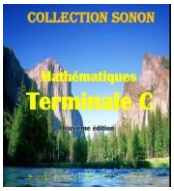
3- λ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

a) En utilisant une intégration par parties, démontre que :
$\int_{\lambda}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 ln\lambda$.

b) On note $\mathscr{A}(\lambda)$ l'aire en centimètre carré de la partie du plan limitée par la courbe (ℸ), la droite de repère $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.
Déduis-en de la question précédente que :
$\mathscr{A}(\lambda) = \left(\frac{125}{36} - 4\lambda - 2\lambda^2 + \frac{91}{36}\lambda^3 + \frac{1}{6}\lambda^3 \ln(\lambda)\right) cm^2$.

c) Calcule la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers 0 par valeurs supérieurs.

CPEG DK



Collection SONON

Tel : 61813658 / 95588483/ 68290476
e-mail : codjo-vianney@outlook.fr
Page facebook : Vianney-Carmel Edey

Comité d'organisation :

Uriel Alanmenou, *Chargé de communication*
Christelle Nassara, *Secrétaire Générale*
Marie-Claire Adjagnissode, *Planificatrice*
Pascal Dagba, *Directeur de dist. Coll. SONON*

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES TERMINALE C

Contexte : Une révision de fin d'année
Chrisso est candidate au Bac C. Passionnée des affaires, elle associe tant bien que mal à ses études, un petit commerce qui lui permet de subvenir à ses besoins financiers.
Ce weekend, l'avant dernier de son examen de baccalauréat, Chrisso, préoccupée d'avoir une épreuve de révision récapitulative pour l'examen de mathématiques, invita dans son magasin de vente son meilleur ami Elavagnon, le premier de sa classe, très habile en mathématiques. Ensemble, les deux examinent chacune des séquences d'apprentissage de leur programme en une épreuve à découvrir.

Tâche : Tu es invité(e) à te substituer à Chrisso et Elavagnon en traitant chacune des consignes de cette épreuve pour tes révisions finales de l'examen du Bac.

Situation-problème n°1

Pour commencer leur révision, Elavagnon fait considérer à Chrisso la fonction scalaire de Leibniz de variable géométrique M définie dans le plan par :

$$f(\mathrm{M}) = \left(\frac{z_1 - 4}{2}\right)\mathrm{MA}^2 + \frac{|z_2|}{3}\mathrm{MB}^2 + \frac{\mathrm{Im}(z_3)}{\mathrm{Re}(z_1) - 1}\overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MC}},$$

I- A, B et C étant trois points non alignés du plan tels que : $\mathrm{AB} = 5, \mathrm{AC} = 6$ et $\mathrm{BC} = 4$. Les nombres complexes z_1, z_2 et z_3 de la fonction géométrique f sont les racines(unité graphique 1cm)

du polynôme P défini dans l'ensemble complexe $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12).$$

Par ailleurs, Elavagnon fait savoir à Chrisso que la trajectoire menant à leur centre d'examen à partir de leur collège, est une portion du lieu géométrique $(\mathfrak{D}_x)$ observé lorsque l'on a : $f(M) = c - \varphi(x, a, b)$ où a, b et c sont des constantes réelles à découvrir et φ la famille de fonctions solutions de l'équation différentielle définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - 4\frac{d\varphi}{dx} = -3\varphi\,.$$

En outre, il s'est fait que ce jour où Elavagnon a rendu visite à Chrisso, cette dernière a vendu a mangues, b bananes tels que le plus grand commun multiple de a et b divisé par le deuxième entier naturel p_1 vérifiant $3p \equiv 2[7]$, a pour reste $r = 5$ et pour quotient $q = 10$. De plus, ce jour-là, Chrisso et Elavagnon réalisent que lorsqu'on diminue du carré de la somme de a et b, le double du produit de a et b, on trouve :

$$p_1^2 + 5\mathrm{ppcm}(a; b) + 41.$$

L'on sait par ailleurs que le bénéfice hebdomadaire y en centaine de francs que réalise Chrisso en fonction du nombre x de clients reçus est modélisé par la droite (Δ) d'équation $ax - by = c$, c étant le nombre d'oranges vendues. Elavagnon considère aussi l'anneau $\mathbb{F} = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\,;\,+,\times)$ où ils examinèrent quelques équations. Pour renforcer les révisions de Chrisso, Elavagnon lui donne une question défi pour la fin de la première partie de leur résumé.

Consignes

1.a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.
b.) En déduire que $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2.
c) En supposant dans le plan complexe z_1, z_2 et z_3 sont les affixes de trois points quelconques M, N et L, vérifier que ces points sont alignés.

2.a) Déterminer la fonction φ.
b.) Démontrer que l'ensemble $(\mathfrak{D}_x)$ satisfait à : $-2\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 = c - (ae^x + be^{3x}) + 36$.
3.a) Justifier que $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ;\ +,\ \times)$ n'est pas un corps puis déterminer tous les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathbb{F}$.
b) En déduire tous les éléments inversibles dans cet anneau.
c) Justifier que :

$$\overline{5}x - \overline{2}y + \overline{5}xy - \overline{2} = \left(5x - \overline{2}\right)\left(y + \overline{1}\right).$$

d.) Déduire de ce qui précède que $\left(5x - \overline{2}\right)\left(y + \overline{1}\right) = \overline{0}$, si et seulement si $\left(5x - \overline{2}\right) = \overline{0}$ ou $\left(y + \overline{1}\right) = \overline{0}$ est insuffisant.
e.) Résoudre dans $\mathbb{F}^2$ l'équation : $\overline{5}x - \overline{2}y + \overline{5}xy - \overline{2} = \overline{0}$.
f.) Résoudre dans l'anneau $\mathbb{F}^2$ le système $(\mathcal{S})$ défini par : $\begin{cases} \left(5x - \overline{2}\right)(y + 1) = \overline{0} \\ \overline{31}x^2 - y = \overline{3} \end{cases}$.
4.a) Justifier que les nombres a et b vérifient : $\begin{cases} \mathrm{ppcm}\ (a; b) = 105 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}$.
b.) Prouver que pgcd $(a\ ;\ b)$ est égal à 1 ou 3.
c.) Retrouver le nombre de mangues et de bananes vendus ce jour- là.
5.) En fait la droite (Δ) est l'intersection du plan (P) d'équation $2x\ +\ 9y\ -2z - 6\ = 0$ et du plan (Q) passant par $\mathrm{O}(0;\ 0\ ;0)$ et dont un vecteur normal est $\vec{n}(\frac{13}{2}\ ;\ -15\ ;\ 1)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath},\vec{k})$.

a) Justifier que le nombre d'oranges vendues est égal à 6. b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\ \mathbb{Z}$ l'équation :

$$15x - \ 21y\ =\ 6.$$

c) Déterminer dans le repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\ ,\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ les points A_k à coordonnées entières de (Δ).
d.) En supposant que Chrisso a reçu le plus petit nombre possible de clients le jour où Elavagnon lui a rendu visite, déterminer le bénéfice réalisé par cette dernière ce jour-là.
6.) Pour la suite, on pose : $a = 15, b = 21$ et $c = 6$.
a.) On fixe $x = 0$. Déterminer l'ensemble $(\mathfrak{D}_0)$.
b.) Quel est le lieu géométrique $(\mathfrak{D}_x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$?
7.) En fait, le défi donné à Chrisso est dé résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation suivante :

$$5\mathrm{ppcm}(x; y) - 7\mathrm{pgcd}(x; y) = 436\ .$$

Relever le défi de Chrisso en admettant que $x < y$ et que l'on a $\mathrm{pgcd}(x; y) < 5$.

Situation-problème n°2

Pour la deuxième partie de leur révision récapitulative, Elavagnon a pris dans le magasin de Chrisso un pannier contenant 50 pommes pour jouer à un jeu d'enfants : Chrisso cache 25 F dans l'une de ses mains et si Elavagnon arrive à choisir la main contenant la pièce, il pige 10 pommes du panier. Dans le cas échéant, Chrisso prend les 10 pommes. On estime que la probabilité pour Elavagnon de rater son coup est de 0,56. Les deux amis repètent ce jeu jusqu'à ce que les pommes du panier soient toutes prises. Ils désignent par X la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois que Elavagnon a choisi la bonne main à l'issu du jeu.
En se basant sur ce jeu, Elavagnon estime que le taux de réussite de leur établissement peut être modélisé par la famille de fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{(x+1)^{2n}}{\delta - e^{x+1}}, x \neq -1 \\ f_n(-1) = 2{,}2 - \mathrm{E(X)} \end{cases},$$

n étant un entier naturel non nul représentant l'année d'ancienneté du collège et $\mathrm{E(X)}$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. De plus,

$$\delta = 0{,}6114 + p(\mathrm{X} > 2).$$

Les deux amis se proposent donc d'étudier cette fonction dont les consignes sont à découvrir.

Consignes

8.a) Identifier la loi de probabilité de X puis déterminer $p(X > 2)$. On arrondira les résultats à 04 chiffres après la virgule.

b.) Calculer E(X) et Var(X).

9.) Pour la suite, on pose : $\delta = 1$ et $f_n(-1) = 0$. Pour tout entier naturel n différent de zéro, on considère la fonction g_n définie sur IR par : $g_n(x) = (-2n + x + 1)e^{x+1} + 2n$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.

b) Donner le sens de variation de g_n puis dresser son tableau de variation.

c) Calculer $g_n(-1)$ et en déduire que : $2n - e^{2n-1} < 0$ pour tout n différent de zéro.

d) Démontrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n appartenant à l'intervalle $]2n - 2; +\infty[$.

e) Démontrer que α_n appartient à l'intervalle $]2n - 2; 2n - 1[$ puis en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

f) Déterminer le signe de g_n suivant les valeurs de x.

g) Déterminer les coordonnées du point M_n où la courbe représentative de la fonction g_n admet un extremum et en déduire que le point M_n appartient à une courbe dont on donnera une équation.

10.) On note $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n.

a) Etudier la continuité de f_n en -1.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en -1. (On distinguera deux cas : $n = 1$ et $n > 1$) .

c) Calculer les limites de f_n en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Calculer la dérivée de f_n et vérifier que pour tout réel x différent de -1, on a :

$$f_n'(x) = \left[\frac{(x+1)^{n-1}}{1 - e^{x+1}}\right]^2 \times (x+1)g_n(x).$$

e) Donner le sens de variations de f_n puis dresser son tableau de variation pour $n > 1$.

f) Démontrer que les courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ ont trois points communs A, B et C que l'on déterminera.

g) Etudier les positions relatives des courbes $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ puis les construire sur un même graphique.

Pour les représentations graphiques, le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

11.) p est un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 1. Soit h_p la fonction définie sur l'intervalle $I_p = [2p - 2; 2p - 1]$ par :

$$h_p(x) = 2p - 1 - \frac{2p}{e^{x+1}}.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2p - 2 \\ u_{n+1} = h_p(u_n) \end{cases}$ pour tout entier n et on pose pour tout entier naturel n non nul :

$$v_n = \int_{-1}^{-1+\frac{1}{n}} f_n(x)dx .$$

a.) Démontrer que pour tout x de I_p, les équations $g_p(x) = 0$ et $h_p(x) = x$ sont équivalentes.

b) En utilisant la partie A, 2.a), montrer que pour tout $x \in I_p$, on a :

$$h_p(x) \in I_p \text{ et } |h_p'(x)| \leq \frac{2p}{e^{2p-1}} < 1 .$$

c.) On pose : $k_p = \frac{2p}{e^{2p-1}}$.

c1) Démontrer que pour tout $n, u_n \in I_p$.

c2) Démontrer que pour tout n, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha_p| \leq k_p|u_n - \alpha_p| .$$

puis en déduire que $|u_n - \alpha_p| \leq (k_p)^n$ et que la suite (u_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

d) Justifier l'existence de (v_n).

e) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n \leq 0$.
c) Montrer que (v_n) est croissante ; que peut-on en déduire ?
12.a) En utilisant les variations de f_n sur l'intervalle $[-1; 0]$, montrer que : $\frac{1}{1-e} \leq f_n(x) \leq 0$.
b) En déduire que $\frac{1}{1-e} \times \frac{1}{n} \leq v_n \leq 0$.

Situation-problème n°3

Pour la dernière partie de leur révision, Chrisso et Elavagnon considèrent d'une part un cube ABCDEFGH tel que (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) est un repère orthonormé direct de l'espace $\mathscr{E}$. Ils posent $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ puis en munissant l'espace $\mathscr{E}$ du repère orthonormé direct (A ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), ils considèrent dans $\mathscr{E}$ les points K$\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$, L$\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$ et S$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$. D'autre part, ils considèrent la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d' affixe z, associe le point M'=f(M) d' affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,\bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})\,.$$

Ils désignent par h l'homothétie de centre $\Omega(-1+\mathrm{i})$ et de rapport $\sqrt{2}$. De plus, ils nomment (π) le plan orienté muni du repère orthonormé direct (O; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). r est l'application de (π) dans (π) qui à tout point M$(x\ ;\ y)$ associe le point M'$(x\ ;\ y)$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - y - 1 + \sqrt{2}) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y - 1) \end{cases}.$$

Pour l'analyse des similitudes planes considérées, Chrisso et Elavagnon nomment u la fonction numérique définie sur IR par : $u(x) = e^{-x} + e^{2x} + x$. Dans le plan affine muni du repère orthonormé (O; $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$), on désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction u.
Pour finir Chrisso et Elavagnon analysent aussi certaines propriétés liant les coniques et les applications affines que tu vas découvrir dans les consignes suivantes.

Consignes

Partie A

13.a) On appelle t l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui à tout point M associe le point M'tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF}\,.$$

Justifier que t est une translation.
b) Calculer la distance du point S au plan (ABC). c) En déduire que SABCD est une pyramide.
d) Calculer le volume de l'image par t de la pyramide SABCD .
14.) Soit f_1 la réflexion de plan (SAB) et f_2 la réflexion de plan (SAD).
a.) Démontrer que les plans (SAB) et (SCD) sont perpendiculaires.
b.) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f_1 \circ f_2$.
c) Déterminer l'expression analytique de f_1 . d.) Déterminer l'image par $f_1 \circ f_2$ de la droite (SC).
15.) On pose P_1=(SAB) et P_2=(SCD) . Déterminer la position relative de t(P_1) et de t(P_2).

Partie B

16.a.) Prouver que r est une isométrie positive ou un déplacement.
b.) En déduire que r est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
c.) Donner une écriture complexe à r.
d) Démontrer que f est une symétrie glissée.
e.) Préciser les éléments caractéristiques de f.
f.) Prouver que f◦h a pour écriture complexe : $z' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.
g) Préciser les éléments caractéristiques de f◦h.

17.) On nomme $(\mathfrak{B})$ la courbe dont une équation cartésienne dans le repère $(O;\vec{j},\vec{k})$ est :

$$e^{2-y}+e^{2y-4}+y+1=x.$$

a) Déterminer l'image de $(\mathcal{C})$ par la translation t de vecteur $\vec{u}(2;3)$.

b.) En déduire que l'on a : $(\mathfrak{B})=(s\circ t)(\mathcal{C})$, où s désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y=x$.

c) Démontrer qu'il existe une symétrie glissée σ telle que l'on ait : $(\mathcal{C})=\sigma(\mathfrak{B})$.

d) Déterminer l'axe et le vecteur de σ.

18.) Soit $(\mathfrak{R})$ la courbe définie par :

$$\frac{x-y+4}{2}=e^{-\frac{x+y-2}{2}}+e^{x+y-2}+\frac{x+y-2}{2}.$$

Démontrer que $(\mathfrak{R})$ est l'image de $(\mathcal{C})$ par la composée commutative d'une homothétie et d'un antidéplacement dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie C

19.a) Soit K le milieu du segment [MM']. Exprimer l'affixe de K en fonction de l'affixe z de M et de $\overline{z}$.

b) En déduire, toujours en fonction de z et de $\overline{z}$ la distance de M à K.

c.) Préciser la nature et les éléments caractéristiques géométriques de l'ensemble (E) des points M du plan dont l'affixe z vérifie :

$$|z+1+i|=\frac{1}{2}|z+i\overline{z}-2-2i|\ .$$

d) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\overline{z}+z+4$ est une droite (D).

e) Démontrer que pour tout point M, la distance de M à (D) est : $\frac{1}{2}|\overline{z}+z+4|$.

f) Démontrer que l'ensemble (E) des points M tels que : $\left|\frac{z-1-i}{\overline{z}+z+4}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ est une ellipse dont on précisera un foyer, une directrice et l'excentricité.

20.) Soit φ la transformation plane d'expression analytique : $\begin{cases}x'=y-1\\y'=x+2\end{cases}$.

a.) Démontrer que φ est une symétrie glissée.

b.) Démontrer que $l=h\circ\varphi$ a pour écriture complexe : $z'=(1-i)z$.

c.) Soit (┌) l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x,y) vérifiant : $5x^2+5y^2+6xy-4x+4y=0$.

d.) Déterminer une équation cartésienne de (┌') = l (┌) .

e.) Démontre que (┌') est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets .

f.) Démontrer que (┌) est une ellipse dont on précisera le centre et les sommets.

21.) On suppose que la fonction J : $x\longmapsto\frac{1}{x^2-2\ln x}$ réalise une bijection sur l'intervalle $]2;+\infty[$. On désigne par (Ω) l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x;y)$ dans le repère $(O;\vec{j},\vec{k})$, vérifient :

$$\begin{cases}y>2\\x=\dfrac{1}{(y-2)^2-\ln(y-2)^2}+1\end{cases}.$$

Dans le repère $(O;\vec{j},\vec{k})$, $(\mathcal{K})$ désigne la courbe représentative de la fonction J .

a) Démontrer qu'il existe une droite Δ et un vecteur $\vec{r}$ non nul tels que $(\Gamma)=(t_{\vec{r}}\circ S_\Delta)(\mathcal{K})$ où $t_{\vec{r}}$ est la translation de vecteur $\vec{r}$ et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t_{\vec{r}}\circ S_\Delta$.

TITAN Academy
Collection SONON
N°OC433372
UTR 8409598107

71-75 Shelton Street, London
Greater London
UNITED KINGDOM
WC2H9JQ

Tel : (+229) 97 82 02 70
(+1) 418 933 4245
(+229) 61 81 36 58
titan.ecom@yahoo.com

SONON
COLLECTION DES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES PAYS DE L'AFRIQUE FRANCOPHONE

Campagne d'Appui aux Établissements béninois – Année academique 2020/2021



GROUPE D'ÉTUDE COLLECTION SONON

Mathématiques – TERMINALE C – Révisions finales

Contexte : Une révision passionnante de fin d'année

Cette année au Complexe Scolaire de Sainte Félicité, les élèves du groupe d'étude TITAN Élites sont décidés : ils veulent tout terrasser au Bac. C'est dans cette optique que pour leurs révisions de fin d'année, Charbel un membre de cette équipe fait considérer à ses camarades un dé tétraédrique à quatre faces numérotées de 1 à 4. Les points M_0, M_1 et M_2 représentant la base de ce tétraèdre sont dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points images des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation complexe $r(z) = 0$ telle que :

$$r(z) = z^3 + \sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)(1+i)z^2 + 4i\left(\sqrt{2}+1\right)z - 4\sqrt{2}(1-i).$$

Le sommet S du tétraèdre $M_0M_1M_2S$ est dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le point de contact de l'ensemble (P) : $x + y + z - 1 = 0$, du plan $(Q): x + y - 2z - 4 = 0$ et du plan (R) passant par le point $A(1; 1; 1)$ et perpendiculaire aux plans (P) et (Q).

Le dé $M_0M_1M_2S$ est supposé pipé de sorte qu'il existe un nombre réel positif k telque la probabilité $p(i)$ pour que la face portant le numéro i soit cachée est : $p(i) = \int_1^k \frac{i}{t}\,dt$.

Par ailleurs, t étant un réel de l'intervalle $K = [-1; 1]$, on note :

$$G_t = \text{bar}\{(M_0, t^2+1); (M_1, t); (M_2, -t)\}.$$

Tâche : tu vas te joindre aux élèves du groupe TITAN Élites pour faire tes révisions de fin d'année en traitant chacun des problèmes suivants.

Problème 1

M étant un point du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on désigne par $(\mathscr{E})$ l'ensemble du plan défini par :

$$\left\{ \left\| (t^2+1)\overrightarrow{M_0M} + t\overrightarrow{M_1M} - t\overrightarrow{M_2M} \right\| < \frac{1+2\sqrt{3}}{13} \right\} \cup \left\{ \left\| (t^2+1)\overrightarrow{M_0M} + t\overrightarrow{M_1M} - t\overrightarrow{M_2M} \right\| > \frac{1+2\sqrt{3}}{13} \right\}.$$

Dans l'ensemble questions **1.)** , on ne déterminera pas les coordonnées des points M_0, M_1 et M_2.

1.a) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{E})$.

b) Placer au hasard les points M_0, M_1 et M_2puis le milieu I de $[M_1M_2]$ et les points G_{-1} et G_1.

c) Démontrer que pour tout nombre réel t de K, on a :

$$\overrightarrow{MG_t} = -\frac{t}{1+t^2}\overrightarrow{M_1M_2}.$$

d) Dresser le tableau de variation de la fonction φ définie sur K par :

$$\varphi(x) = -\frac{x}{1+x^2}\ .$$

e) En déduire l'ensemble des points G_t quand t décrit K.

2.) On lance une fois le dé $M_0M_1M_2S$ et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des numéros visibles.

a) Prouver que $k = e^{\frac{1}{10}}$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X puis représenter la fonction de répartition de X.

c) Évaluer : $p(X > 8)$ puis $p\left(\frac{\sqrt{13}}{2} < X \leq 10\right)$.

d) On lance cinq fois de suite ce dé de façon identique et indépendante.

Déterminer la probabilité pour que l'événement «X est pair » se réalise au moins une fois.

3.a) Calculer $r(-2i)$ et $r(1+i)$.

b) Démontrer que l'équation $r(z) = 0$ admet une solution réelle.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $r(z) = 0$.

d) On pose $M_0(z_0)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ avec $z_0 = -2$ et $z_1 \in i\mathbb{R}^*$.

On pose de plus $v = z_0 \times z_1 \times z_2$.

d1) Écrire v sous forme trigonométrique.

d2) Écrire v^{2000} sous forme algébrique.

d3) Détermine une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle $M_0M_1M_2$.

4.a) Détermine une équation cartésienne du plan (R).

b) Détermine les coordonnées du points S.

c) Calculer la distance du point S à la base $M_0M_1M_2$ du tétraèdre.

Problème 2

Jonas un membre du groupe TITAN Élites considère par la suite la fonction u définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \sin\left(\frac{1}{19}ax\right)\cos\left(\frac{1}{3}bx\right)\ ;$$

où a et b sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \text{ppcm}(a\,;b) = 114 \\ 5a - 7b = 53 \\ a > b \end{cases}.$$

Prudence considère par la suite dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la transformation plane g qui à tout point M$(x\,;y)$ d'affixe z associe le point M'$(x';y')$ d'affixe z' telle que :

$$z' - 1 = \frac{7z + 20i\bar{z} + i\hat{z}}{3} + 5i\,, \qquad \text{avec} \qquad \hat{z} = (1 + 19i)y.$$

Victoire quant à elle, est particulièrement préoccupée par l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points dont l'affixe z vérifie :

$$jz^2 + \overline{jz^2} - \frac{10}{3}z\bar{z} + 192 = 0\,,$$

et l'application f du plan dans lui-même associant à tout point M d'affixe z le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}j^2 z$ avec $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $|j| = 1 = j^3 = j\bar{j}$.

5.a) Déterminer les entiers a et b.

b) Linéariser $\sin x \cos 2x$, pour tout nombre réel x.

c) En déduire que la fonction U : $x \longmapsto -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$u : x \longmapsto u(x).$$

d) Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$I_n = \int_0^n x\cos(nx)\,\mathrm{d}x\,.$$

d1) Calculer I_n en fonction n.

d2) En déduire I_1, I_2 et I_3 .

d3) À l'aide d'une intégration par parties, déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x \cos 2x\,\mathrm{d}x$.

6.a) Montrer que f est une similitude plane directe dont on donnera les éléments géométriques caractéristiques.

b) Déterminer l'ensemble (ω) l'image par f du cercle de centre L$(\frac{11}{3}\,;0)$ et de rayon $\sqrt{\sqrt{11}}$.

c) Vérifier qu'un point M' d'affixe z' appartient à $f(\mathcal{H})$ si et seulement si :

$$3z'^2 + \overline{3z'^2} - 10z'\overline{z'} + 64 = 0\,.$$

Montrer que l'équation $x^2 + 4y^2 = 16$ est une équation cartésienne de $f(\mathcal{H})$.

d) Montrer que $(\mathscr{H})$ est une conique dont on précisera les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité.

e) Représenter graphiquement $f(\mathcal{H})$, $(\mathscr{H})$, leurs foyers, leur directrices et leurs axes.

7.a) Démontrer que g est définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(7x + y + 3) \\ y' = \frac{1}{3}(20x + 8y + 15) \end{cases}.$$

b) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M de P invariants par g.

c.) Soit M un point du plan P n'appartenant pas à (Δ).

c1) Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ a une direction fixe.

c2) Vérifier que la droite (MM') n'est pas parallèle à (Δ) et que le point d'intersection H des droites

(Δ) et (MM') a pour coordonnées :

$$\left(\frac{5x - y - 3}{9}; \frac{-20x + 4y - 15}{9}\right).$$

d) Écrire $\overrightarrow{\mathrm{HM'}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{HM}}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

8.) On considère la suite de points $\mathrm{M}_n(x_n; y_n)$ telle que : $\begin{cases} \mathrm{M}_0(1\,;\,8) \\ \mathrm{M}_{n+1} = g(\mathrm{M}_n) \end{cases}$.

a) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n.

b) Montrer par récurrence que tous les points $\mathrm{M}_n(x_n; y_n)$ sont sur la droite $(\mathfrak{D})$ dont une équation cartésienne est $5x - y + 3 = 0$.

En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

c) Montrer que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

9.) Montrer que :

a) x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b) Si x_n et y_n nee sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

c.) Montrer que $x_n = \frac{1}{3}(4^n \times 5 - 2)$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3.

10.) Déterminer l'image de $(\mathscr{H})$ par l'affinité plane g.

Problème 3

Dans cette équipe de révision, la candidate Grâce par contre est plutôt obsédée par l'étude des suites numériques. Pour donc l'accompagner, son charmant Prudence lui fait considérer la suite numérique (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\ln(n+1) + \ln(n+2) + \cdots + \ln(n+n) - n\ln(n)}{n}.$$

Hortice le Grand quant à lui est un passionné des fonctions. Il propose donc l'étude de la fonction fonction f définie par :

$$f(x) = (x+2)^2 e^{-x}.$$

Il désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'unité graphique étant égale à 1 cm.

Monsieur Carmel leur Professeur leur complète enfin la suite numérique (α_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\alpha_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k+2n)^2 e^{-\frac{k}{n}}.$$

Le professeur Carmel est surtout intéressé par l'étude géométrique de l'ensemble des points (Γ) du plan tels que :

$$x - y = \frac{1}{5}\left\{-10 + 8\left(\frac{5x+5y+2}{6}\right)^2 \sqrt[6]{e^{-5x-5y+10}}\right\}.$$

Partie A

11.a) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right].$$

b) Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $0 \le k \le n-1$.

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \le \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)\,dx \le \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right).$$

(On pourra utiliser un encadrement de $\ln x$ sur l'intervalle $\left[1+\frac{k}{n};\ 1+\frac{k+1}{n}\right]$).

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n - \frac{1}{n}\ln 2 \le \int_1^2 \ln x\,dx \le u_n$.

d.) Sachant que $\int_1^2 \ln x\,dx = 2\ln 2 - 1$, déduire de ce qui précède la limite de la suite (u_n).

12.) (E_0) désigne l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

a) Déterminer les solutions générales de (E_0).

b.) (E) est l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}.$$

Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^2 e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

c) Démontrer que toute fonction dérivable φ est une solution de (E) si et seulement si $\varphi - h$ est solution de (E_0).

d) Déterminer toutes les solutions de (E).

e) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f_0(0) = 4$ et $f_0'(0) = 0$.

Partie B

13.a) Étudier les variations de f et tracer $(\mathcal{C})$ avec soin.

b.) En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$. (On calculera $\int_0^x (f'' + 2f' + f)(t)\,dt$).

14.) Le point $A(0\,;4) \in (\mathcal{C})$. On désigne par B l'image de A par la composée : ${h^{-1}}$o t o ${s_0}^{-1}$ où h est l'homothétie de Centre O(0 ; 0) et de rapport $k = -3$, s_0 la symétrie de O(0;0) et t la translation de vecteur $\vec{u}\ (1\,;0)$.

a) Déterminer les coordonnées de B.

b) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (AB).

c) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane indirecte de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et d'axe de repère $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}\right)$.

d) Déterminer ${h^{-1}}$o t o ${s_0}^{-1}(\mathcal{C})$.

15) On note C et D deux points quelconques du plan qui sont tels que le quadrilatère ABCD soit un carré de sens direct et de centre I.

Déterminer les applications suivantes :

a) $f = r(A,\frac{\pi}{4}) \circ r(B,\frac{\pi}{4})$ b) $f = r(A,\frac{\pi}{2}) \circ r(B,\frac{\pi}{2})$ c) $f = r(A,\frac{\pi}{2}) \circ r(B,\frac{-\pi}{2})$;

d) $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(B,\frac{\pi}{4})$ e) $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(I,\frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{CD}}$ f) $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ r(B,\frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{BA}}$.

16.) Dans l'étude de l'ensemble (Γ), Monsieur Carmel considère l'application π du plan dans lui-même qui à tout point M$(x; y)$ fait correspondre le point M'$(x'; y')$ telle que :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + m \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 2 \end{cases} ;$$

où m est un paramètre réel.

a) Démontrer que π est une isométrie négative. On pourra considérer deux points fixes O(0 ; 0) et N(0, 1).

b) Pour quelle valeur de m l'application π est-elle une symétrie orthogonale par rapport à une droite affine ?

c) On suppose que m=0.

Démontrer que π est dans ce cas la composée commutative d'un déplacement et d'une réflexion plane.

17.a) Montrer que l'équation de (Γ) équivaut à :

$$\frac{5x-5y+10}{8} = f\left(\frac{5x+5y-10}{6}\right).$$

b) En déduire que (Γ) est l'image de $(\mathcal{C})$ par la composée commutative d'un antidéplacement et d'une translation dont on précisera les éléments caractéristiques.

Partie C

18.) Pour tout entier naturel n, on pose :

$$\mathrm{I_n} = \int_0^{\mathrm{n}} f(t)\mathrm{d}t.$$

a) Exprimer $\mathrm{I_n}$ en fonction de n et en donner une interprétation graphique.

b) Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{I_n})$, puis en déduire l'aire de l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan tels que : $x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

19.a) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul, on a :

$$\alpha_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \alpha_n + \frac{4e-9}{ne}.$$

b.) Établir que, pour tout entier naturel non nul n et pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f\left(\frac{k}{n}\right).$$

c.) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\alpha_n \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \alpha_n + \frac{4e-9}{ne}.$$

d.) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\mathrm{I_1} - \frac{4e-9}{ne} \leq \alpha_n \leq \mathrm{I_1}.$$

20.) Étudier la convergence de la suite α_n, puis préciser sa limite.

Bonne Chance chers amis !

Vianney Carmel Edey

TITAN Academy
Collection SONON
N°OC433372
UTR 8409598107

71-75 Shelton Street, London
Greater London
UNITED KINGDOM
WC2H9JQ

Tel : (+229) 61 81 36 58
(+229) 97 82 02 70
(+1) 418 933 4245
titan.ecom@yahoo.com

SONON
COLLECTION DES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DES PAYS DE L'AFRIQUE FRANCOPHONE

Campagne d'Appui aux Établissements béninois – Année 2020/2021 – Vague 1



TRAVAUX DIRIGÉS GRATUITS COLLECTION SONON

Séquences d'apprentissage couvertes [Vague 1 – Tle C] : (1) Calculs vectoriels, (2) Géométrie analytique de l'espace, (3) Système d'équations linéaires, (4) Applications de l'espace, (5) Arithmétique, (6) Nombre Complexe.

SUJET POUR LA TERMINALE C – Séance 1 : 3h

****

Contexte : Un stage dans l'entreprise de Vigan

L'entrepreneur Vigan est un grand producteur de maïs. Son frère Elavagnon très matheux, l'aide souvent dans la construction du grenier de stockage de sa production agricole et lui fournit de temps à autre quelques informations sur cette production.

En 2016, au sein de l'entreprise de Vigan, le grenier qu'on devrait construire a la forme d'un cube ABCDEFGH dans l'espace muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ d'unité graphique 4m. Ce grenier est divisé en deux compartiments : le premier est le tétraèdre ABCF qui contient des produits devant empêcher les insectes destructeurs du maïs. Le second compartiment représentant le reste du grenier devrait contenir la quantité de maïs produite cette année-là. Pour faire peur aux rats et souris pouvant détruire le maïs stocké, Elavagnon envisage de placer en chacun des points L, J et K des gongs automatiques de telle sorte que : $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Enfin au point Ω défini par : $\Omega = \text{bar}\{(A,2),(B,1),(C,3)\}$, Elavagnon projette d'y placer un gris-gris qui devrait mettre en déroute tout voleur mettant pied dans ce champs de maïs.

Le jeune Gbadagba qui passe en terminale C et qui venait de commencer son stage dans l'entreprise de Vigan décide d'étudier les relations mathématiques qui sous-tendent certaines activités et installations de cette entreprise.

Tâche : tu vas te substituer à Gbadagba pour étudier les relations mathématiques mises en exergue en traitant chacun des problèmes suivants.

Problème 1

1.a) Démontrer que la droite (EB) est orthogonale au plan (DGF).

b) Prouver que les droites (AJ), (BK) et (CL) sont concourantes au point Ω.

2.a) Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires puis donner une représentation paramétrique du plan (AHC). En déduire une équation cartésienne du plan (AHC).

b) Donner un repère du plan $(\mathcal{P})$, image du plan (AHC) par la translation t de vecteur de translation $\overrightarrow{BE}$.

c) Démontrer que l'intersection du plan (AHC) avec les plans $(\mathfrak{Q})$ et $(\mathfrak{R})$ d'équation cartésienne respective : $-x+y+z=0$ et $x+y-z=0$ est réduite au singleton A(0 ; 0 ; 0).

3.) Sachant que la masse volumique est $\rho = 2500\, kg/m^3$, déterminer en kilogrammes, la quantité de maïs que peut contenir le grenier à construire.

Problème 2

La toiture du grenier à construire dans l'entreprise de Vigan, se repose sur le polygone EIFGJH où $E(-1;0;1)$, $I(2;\frac{3}{2};1)$, $F(-1;3;1)$, $G(0;3;1)$, $J(-2;\frac{3}{2};1)$ et $H(1;-3;1)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. La base de la toiture à construire est directement en contact avec l'ensemble $(\mathcal{H})$, surface de niveau 50 de la fonction scalaire de Leibniz définie par :

$$f(M) = 5\overrightarrow{EM}\bullet\overrightarrow{IM} - 3\overrightarrow{FM}\bullet\overrightarrow{GM} + 2JH^2 \times \sqrt{1+\left\|\overrightarrow{EI}\wedge\overrightarrow{FJ}\right\|}\,.$$

Gbadagba voudrait déterminer l'ensemble $(\mathcal{H})$. Il est préoccupé aussi par l'analyse de quelques relations géométriques en lien avec cet ensemble.

4.a) Prouver que, pour tout réel k, $f(M)=k$ si et seulement si :

$$2x^2+2y^2+2z^2-8x-\frac{3}{2}y-4z=k-106.$$

b) En déduire une équation cartésienne de l'ensemble de contact $(\mathcal{H})$.

5.a) Déterminer suivant les valeurs du réel y l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$f(M)=\frac{y^2-1}{2+y}\,.$$

b) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$f(\mathrm{M})^2 + 3f(\mathrm{M}) - 35 = 0\,.$$

6) Déterminer une représentation paramétrique de (E), image de ($\mathscr{H}$) par l'homothétie de centre $\Omega(1;2;0)$ et de rapport $k = 3$.

Problème 3

Gbadagba étant préoccupé par une autre localisation de l'emplacement du gris-gris dans le champs de Vigan, chose qui lui permettrait de retrouver cet emplacement au cas où le grenier à construire serait consumé, il sollicite l'aide de Elavagnon. Ce dernier dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, désigne par f la transformation spatiale qui laisse invariant le point $\mathrm{K}(0;0;1)$ et qui transforme $\mathrm{L}(1;0;0)$ en $\mathrm{L}'\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$, $\mathrm{N}(0;1;0)$ en $\mathrm{N}'\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ puis $\mathrm{P}(1;1;1)$ en $\mathrm{P}'\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{2}{3}\right)$.
Dans le repère $(\mathrm{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ tel que $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k})$, et $\vec{e}_3 = \vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$, Elavagnon affirme que l'emplacement Ω du gris-gris dans le champs de Vigan est l'image par f du centre de la sphère d'équation :
$(\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-2)^2 = \sqrt{13} - \mathrm{Z}^2$ où $(\mathrm{X};\mathrm{Y};\mathrm{Z})$ sont les coordonnées d'un point quelconque dans le repére $(\mathrm{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$.

7.a) Déterminer le point Q tel que $\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{KQ}}$.

b) En admettant que l'image par f du point Q est le point $\mathrm{Q}'\left(-\frac{5}{3};\frac{7}{3};-\frac{1}{3}\right)$, démontrer que f est une application affine.

8.a) Démontrer que l'expression analytique de l'application affine f est :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x+2y-2z+2) \\ y' = \frac{1}{3}(2x+2y+z-1) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+y+2z+1) \end{cases}.$$

b) En déduire que φ est une symétrie orthogonale dont-on préciseras les éléments caractéristiques.

9.a) Démontre que $(\mathrm{O};\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ est un repère orthonormé de l'espace.

b) Quelle est l'expression analytique de φ dans ce repère ?

10) Déterminer dans le repère (O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), les coordonnées de l'emplacement du gris en question.

SUJET POUR LA TERMINALE C – Séance 2 : 3h

EXERCICE 1

Contexte : Les ventes de Sonia

Sonia, pendant les weekend, vend des mangues, des bananes et des oranges.

Un jour, elle a vendu un nombre a de mangues et un nombre b de bananes, tels que le plus petit commun multiple de a et b divisé par le deuxième entier naturel μ vérifiant $3\mu \equiv 2[7]$ a pour reste r =5 et pour quotient q=10. Par ailleurs, Sonia réalise que lorsqu'on diminue le carré de la somme de a et b du double du produit de a et b, on trouve μ^2+ 5ppcm (a ; b) +41. Le bénéfice y en centaines de francs que réalise Sonia en fonction du nombre x de clients possibles est modélisé par la droite (Δ) d'équation $ax - by = c$ où c est le nombre d'oranges vendues. Ce jour-là, Sonia a reçu le plus petit nombre de clients possibles.

Tâche : Tu es invité(e) à déterminer le bénéfice réalisé par Sonia en résolvant chacune des consignes ci-contre.

Consignes

1.) Justifier que : $\begin{cases} \text{ppcm}\,(a;b) = 105 \\ a^2 + b^2 = 666 \end{cases}$.

2.) Prouver que pgcd (a ; b) est égal à 1 ou 3.

3.) Retrouver le nombre de mangues et de bananes vendus ce jour- là.

4.) En fait la droite (Δ) est l'intersection du plan (P) d'équation 2x + 9y −2z−6 =0 et du plan (Q) passant par O(0, 0 ,0) et dont un vecteur normal est $\vec{n}(\frac{13}{2}$; −15 ; 1) dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) .

a) Justifier que le nombre d'oranges vendues est égal à 6.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $15x-21y=6$.

c) Déterminer les points A_k à coordonnés entières de (Δ).

5.) Déterminer le bénéfice réalisé par Sonia.

EXERCICE 2

Contexte : Lignes et surfaces de niveau

On désire déterminer selon certaines valeurs particulières de α, β et γ, l'ensemble $(\mathcal{S}_k)$, ligne de niveau à une certaine valeur k de l'application f définie par :

$$f(M)=\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2\ ;$$

où M est un point du plan ou de l'espace et A, B et C trois points non alignés.

Tâche : Tu es invité(e) à résoudre chacune des consignes ci-contre.

Consignes

Partie A

Dans cette partie, on suppose le triangle ABC est équilatéral de coté c =6. On pose : $\alpha=3$, $\beta=-1$ et $\gamma=2$. C'est-à-dire que :

$$f(M)=3MA^2-MB^2+2MC^2\ .$$

1.) Construire le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients 3, -1 et 2.

2.a) Déterminer la ligne de niveau -32 et la ligne de niveau 0 de l'application f.

b) Quelle doit être la valeur de k pour que la ligne de niveau k de f soit le singleton {G} ?

3.) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel y l'ensemble $(\mathscr{F})$ des points M de l'espace tels que :

$$f(M)=\frac{y^2-1}{y}\ .$$

4.) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan

$$\left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| .$$

Partie B

Dans cette partie, on suppose le triangle ABC est un triangle quelconque et on donne: AB = 5, AC = 6, BC = 4 et on pose :

$f(M) = -2MA^2 + MB^2 + MC^2$.

5.a) Déterminer le lieu géométrique des points M du plan puis de l'espace quand $f(M)$ est égale à 38.

6.) Déterminer suivant les valeurs du réel x, l'ensemble $(\mathscr{H})$ des points M de l'espace tels que :

$$f(M) = \frac{x}{x+1} .$$

EXERCICE 3

Contexte : Nombre complexe

On donne les nombres complexes
$u = -i - \sqrt{3}$ et $v = 2 + u$.
On désire étudier quelques propriétés des nombres complexes u et v.

Tâche : Tu es invité(e) à traiter chacune des consignes ci-contre.

Consignes

1.a) Donne une interprétation géométrique du module et un d'argument de u.

b) Mettre u sous forme exponentielle.

2) Démontre que $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$1+e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\theta}$.

3.a) Donne la forme trigonométrique de v.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

4) Détermine le plus petit entier naturel n pour que v^{2017n} soit imaginaire pur.

5) Détermine les entiers relatifs n pour que v^n soit un nombre réel non nul.

SUJET POUR LA TERMINALE C – Séance 3 : 3h

EXERCICE 1

(Dans l'exercice, on parle d'une maison TATA composée de quatre cases reliées par un mur de base circulaire.)

Alassane a représenté dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (R ; $\vec{v},\vec{w}$) les points de contact K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire (Γ) du mur. Les affixes des points K, L, M sont les solutions de l'équation P(z)=0, où

$$P(z) = z^3 + (5-2i)z^2 + (4-22i)z + 20 - 60i,$$

avec $z \in \mathbb{C}$.

1) Démontrer que P(z) admet une racine réelle α que tu détermineras.

2) Déterminer un polynôme Q(z) tel que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z)=(z-\alpha)Q(z)$.

3.a) Calcule $(4+6i)^2$.

b) Résous l'équation $z^2-2iz+4-12i=0$ dans $\mathbb{C}$.

c) Résous l'équation P(z)=0 dans l'ensemble $\mathbb{C}$.

4) En réalité, les points de contacts K, L, M, N des quatre cases avec la base circulaire du mur ont respectivement pour affixes :

$Z_1 = 2+4i$; $Z_2 = -2-2i$; $Z_3 = -5$ et $Z_4 = -1-6i$.

a) Démontrer que KLMN est un rectangle.

b) Déterminer une équation cartésienne de (Γ).

c) Représenter (Γ).

EXERCICE 2

Contexte : Mouvement d'une pièce avec sa potence

Claire, une élève en Terminale C, pendant le temps que a mis à observer le mouvement d'une pièce tournante, cette dernière a effectué un nombre N de tour avec sa potence. Ce nombre s'écrit $\overline{361}$ dans le système de numération en base b et a pour reste 3 dans la division par 7.

Tâche : tu vas déterminer le nombre N et analyser certaines propriétés qui en découlent.

Consignes

1.a) Démontrer que $b^2+6b-2 \equiv 0[7]$.

b) Résous dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, l'équation : $\dot{3}x^2 + \dot{6}x + \dot{5} = \dot{0}$.

c) Déduis l'ensemble $S_{\mathbb{N}}$ des valeurs de b.

2.) On suppose dans cette question que b = 8.

a) Vérifie que b appartient à $S_{\mathbb{N}}$.
b) Donne l'écriture décimale de N.
c) Démontrer que N est un nombre premier.

3.) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation d'inconnue $(x; y)$ définie par :

$$x^2 + 6x = y^2 + 232.$$

13.) Soit $(x\ ;\ y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tels que $x + y = 651$ et sachant que le quotient de leur PPCM (m) et leur PDCD (d) est égal à 108, déterminer x et y.

EXERCICE 3

On considère dans l'espace un triangle isocèle ABC de sommet C et d'angle principal $\frac{2\pi}{3}$ radian. On donne AB = 6. Pour tout point M de l'espace, on pose :

$$f_k(\mathrm{M}) = \mathrm{MA}^2 + \frac{k}{3}\mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2\ ;\ k \in \mathbb{R}-\{-6\}.$$

On admet que : $\mathrm{G}_k = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}, 1), (\mathrm{B}, \frac{k}{3}), (\mathrm{C}, 1)\}$.

I.

Partie A

1.) On pose pour tout réel x,

$$\mathrm{g}(x) = 127x^3 + 1827x^2 + 1404x - 24084\ .$$

a.) Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\mathrm{g}(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c).$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

2.a) Calculer en fonction du paramètre réel k, les distances AG_k, BG_k et CG_k.

b) En déduire que :

$$3 \times f_k(G_k) = \frac{144k^2 + 972k + 1296}{(6+k)^2} .$$

c) Déterminer les valeurs de k telles que la surface de niveau $n = 65$ de l'application f_k soit la sphère de centre G et de rayon $r = \frac{\sqrt{127}}{3}$.

Partie B

On suppose maintenant que G est le centre de gravité du triangle ABC et on pose $f = f_3$.

3.) Déterminer l'ensemble ($\mathscr{H}$) des points M de l'espace tels que :

$$\sqrt{\left|\frac{1}{f(M)}\right|} = 225.$$

4.) Quel est l'ensemble ($\mathcal{S}$) des points M de l'espace tel que :

$$5f(M)^2 - 152f(M) + 60 = 0.$$

5.) Déterminer le lieu géométrique ($\mathscr{L}$) des points M de l'espace lorsque :

a) $|1 + 2f(M)| < 21$ b) $\left|\frac{f(M)}{1+f(M)}\right| \geq 50$.

II.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points A(2 ;-1 ;1) ; B(3 ;-2 ;0) et C(-1 ;0 ;2).

1.a) Justifier que les points A, B et C déterminent un plan (P).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

2) Soit m un nombre réel. On considère le barycentre G_m des points pondérés (A ; 1-3m) ;(B ; 2m) ;(C ; m).

a) Justifier l'existence de G_m pour tout m élément de IR.

b) Exprimer en fonction de m les coordonnées (x ;y ;z) de G_m .

c) En déduire que l'ensemble (Δ) des points G_m lorsque m décrit IR est une droite dont on donnera un repère.

3) Soit (Q) le plan d'équation x + y + z = 0.

a) Démontrer que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

b) On pose : (D) = (P) ∩(Q). Donner une représentation paramétrique de (D).

c) Étudier la position relative des droites (Δ) et (D).

III.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$). On donne les points A(-1 ;2 ;3), B(-1 ;2 ;-2) et C(-3 ;0 ;4) et on désigne par I le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B ; 3).

1) Déterminer les coordonnées du point I.

2) Soit (D) l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$(2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}) = \vec{0}.$$

Démontrer que (D) est une droite dont-on donnera un repère.

3) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in IR).$$

a) Démontrer que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (P) déterminé par (Δ) et (D). Donne une représentation paramétrique du plan (P).

4) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne : x+y= 0 et H(1 ;2 ;0).

a) Démontrer que (Q) est perpendiculaire à (P).

b) Calculer les distances d(H ;(P)) et d(H ;(Q)).

c)En déduire la distance du point H à la droite d'intersection de (P) et de (Q).

MESTFP
DDESTFP-OUEME
RÉPUBLIQUE DU BENIN

CEG 1 ADJARRA
Quartier : Hounvè
01 BP 111 Adjarra
☎ : (229) 97 16 57 01 / 61 89 66 35

EXAMEN BLANC DU BAC *SESSION DE MAI 2021*

EPREUVE : MATHEMATIQUES
SERIE : C
DUREE : 4 HEURES

Contexte :

Après son admission à la retraite, Monsieur Koto, précédemment professeur de mathématiques, a été désigné pour être le nouveau chef de sa famille. Sur la tenue confectionnée pour la circonstance se trouve tracer une ligne (Γ). Le nombre de personnes qui était invité pour la cérémonie est T= $\sum_{p=0}^{12}(-1)^p\ C_{24}^{2P}$. Entre autres préoccupations, l'étude d'une fonction notée f_α, des renseignements sur un réel noté $\mathcal{A}(a)$, la construction d'un ensemble H de points fixes permettront de parfaire la confection de la tenue.

TAKIN, un des collègues de Koto, voudrait s'assurer que la ligne (Γ) est bien représentée sur le tissu, tous les éléments nécessaires figurent et connaitre le nombre de personnes invitées à la cérémonie.

Tâche : Tu vas aider les organisateurs en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1- Soit n un entier naturel. On pose $S_n = u^n + \bar{u}^n$, avec u = 1+i et $\bar{u}$ son conjugué.

a) Mettre u et $\bar{u}$ sous forme trigonométrique.

b) Déduire que $S_n = \lambda_n \cos(n\frac{\pi}{4})$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n.

c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?

d) Prouve que si n est pair, S_n est un entier relatif.

2- On suppose que n est un entier naturel pair et on pose n = 2m.
Ecris, par la formule du binôme, les développements de $(1+i)^{2m}$ et $(1-i)^{2m}$ à l'aide des puissances de i, (puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question).

3- Pour p entier naturel, simplifie : $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$ et $i^{2p} + (-i)^{2p}$.

4- En utilisant les résultats précédents, démontre que : $T = 2^{12}$.

Problème 2

La ligne (Γ) est obtenue à partir d'un carré du plan $(\mathcal{P})$ orienté tel que $\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ et $AB = 1$; S_1 étant la réflexion d'axe (AB), r_1 la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, (Γ) est l'image par $r_1 \circ S_1$ de l'ensemble (Γ_1) des points M du plan $(\mathcal{P})$ tels que : $MA^2 + 4MB^2 - MC^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}MN^2$ où N est l'image de M par l'affinité orthogonale d'axe la droite (AB) et de rapport 3.

5- a)Construis le point E, barycentre des points pondérés (A, 1), (B, 4) et (C, -1).

b) Justifie que $EA^2 + 4EB^2 - EC^2 = -\frac{1}{2}$

6- a) Justifie qu'un point M du plan appartient à (Γ_1) si et seulement si $\frac{ME}{MN} = \frac{1}{4}$.

b) Déduis –en la nature de (Γ_1).

7- Soit S la réflexion d'axe (CD).

a) Détermine la droite (Δ) telle que $r_1 = S_2 \circ S$ où S_2 est la réflexion d'axe (Δ).

b) Justifie que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$.

c) Déduis –en la nature et les éléments caractéristiques de $r_1 \circ S_1$.

8- a) Justifie que (Γ) est une ellipse.

b) Précise les sommets de (Γ).

c) Construis (Γ).

Problème 3

Pour tout réel, α, strictement positif, on désigne par f_α la fonction numérique, de la variable réelle définie par la relation $f_\alpha(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x}$, et par C_α la courbe représentative de f_α dans le plan muni d'un repère orthonormé.

9- Etudie les variations de f_1 et construis C_1.

10- a) Etudie les variations de f_α.

b) Précise les asymptotes de C_α et détermine l'intersection de C_α avec l'axe (Ox).

11- a)Détermine une primitive F_α de f_α sur $]0, +\infty[$.

b) On pose, pour tout réel a tel que $0 < a < \frac{e}{\alpha}$: $\mathcal{A}(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a)$.

Etudie la limite de $\mathcal{A}(a)$ à droite en 0.

c) Soit a un nombre réel strictement positif. Détermine, suivant les valeurs de a le nombre de solutions réelles de l'équation $a^x = x$. (On pourra utiliser la fonction f_1.)

d) Démontre qu'il existe un couple (b, c), et un seul, d'entiers naturels non nuls tels que $b^c = c^b$,avec $b < c$. Détermine ce couple.

12- Soit α_1 et α_2 deux nombres réels strictement positifs et λ un nombre réel différent de 1. Pour tout réel x strictement positif, on note M_1 et M_2 les points des courbes C_{α_1} et C_{α_2} admettant x pour abscisse et on désigne par M le barycentre des points $M_1\ et\ M_2$ affectés des coefficients respectifs 1 et $-\lambda$.

Démontre que l'ensemble que décrit M lorsque x décrit $]0, +\infty[$ est l'une des courbes C_α.

13- Soit t un nombre réel strictement positif.

a) Ecris l'équation de la tangente T_α à la courbe C_α au point d'abscisse t.

b) Démontre que, lorsque α varie, t restant fixe, les droites T_α passent par un point fixe I_t.

c) Détermine l'ensemble H des points I_t quand t parcourt $]0, +\infty[$, et construis H.

FIN

COLLEGE LIBERMANN
B.P. 5351 DOUALA – AKWA
Tél. : 33 42 28 90
E-mail : college_libermann@yahoo.fr
Web: www.collegelibermann.org

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES		
Baccalauréat Blanc N°2		
Série C		
Date : Avril 2021	Durée : 4 heures	Coeff. : 7

Partie A : Evaluation Des Ressources

Exercice 1 (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ U_n = \frac{\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(2n)-n\ln n}{n}$

1. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n}\left[\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1+\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n})\right]$ (0,5pt)
2. a) Démontrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ , 0 \leq k \leq n-1\ \ \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k}{n}) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x\, dn \leq \frac{1}{n}\ln(1+\frac{k+1}{n})$(1pt)

   b) Déduis en que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x\, dx \leq U_n$ (1pt)
3. Détermine la limite de la suite (U_n) (0,5pt)

Exercice 2 (3,5 pts)

$ABCD$ et $DEFG$ sont deux carrés de sens direct tels que E est le milieu de $[CD]$

1. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B
   a) Déterminer les éléments caractéristiques de S (0,5pt)
   b) Déterminer l'image de E par S et la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{BF}})$ (0,5pt)
2. On désigne par (C) le cercle de diamètre $[BD]$ et par K le point d'intersection des droites (AE) et (BF)
   a) Démontrer que $K \in (C)$ (1pt)
   b) En déduire que (KD) et (BF) sont perpendiculaires (0,5pt)
3. On désigne par (C') le cercle de diamètre $[DF]$
   a) Démontrer que K appartient à (C') (0,5pt)
   b) En déduire que les points C, Get K sont alignés (0,5pt)

Exercice 3 (9 pts)

A. On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = \frac{2}{1+e^{2x}}$
   1. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ (0,25pt)
   2. Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x}k(x)$ où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$
      a) Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $k'(x) = \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$ (0,75pt)
      b) Déduis en la solution de (E) qui prend la valeur $\ln 2$ en 0 (0,5pt)

B. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x}\ln(1+e^{2x})$ et (C) sa courbe représentative
   1. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \ln(1+e^{2x}) - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$
      a) Etudie les variations de u (0,75pt)
      b) Déduis-en le signe de $u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (0,75pt)

2. a) Etudie les variations de la fonction f (0,75pt)
   b) Détermine une équation de la tangente (T) à la courbe (C) en son point d'abscisse 0 (0,5pt)
   c) Trace la courbe (C) et la tangente (T) (1pt)
3. On considère la fonction h: $\begin{matrix}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x)\end{matrix}$. Démontrer que h est une bijection (0,5pt)
4. On considère l'homothétie g de centre Ω d'affixe $-1+i$ et de rapport 2 et (r) l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $\begin{cases} x \in]1:3[\\ y \in \mathbb{R} \\ x = \frac{2\ln(1+e^{1+y})}{e^{1+y}} + 1 \end{cases}$
   a) Démontre que $M \in (r) \Leftrightarrow \frac{y+1}{2} = h^{-1}(\frac{x-1}{2})$ où h^{-1} désigne la bijection réciproque de h (0,75pt)
   b) Détermine l'expression analytique de la bijection réciproque g^{-1} de g (0,5pt)
   c) Déduis que $(r) = g(C')$- où (C') est la courbe de h^{-1} dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (0,5pt)
5. a) Justifie que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\left[-f'(x) + \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right]$ (0,5pt)
   b) Déduis en une primitive de f sur $\mathbb{R}$ (0,5pt)
   c) Calcule l'aire $A(\alpha)$ du domaine (Σ) délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ si α est un nombre réel strictement positif (0,5pt)
   d) Calcule la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$ (0,25pt)

<u>Partie B</u> : Evaluation de Compétences (4,5pts)

En visite dans une grande ville Africaine, Paul, élève en classe de Terminale C a été émerveillé par le nouvel échangeur, le tracé de certaines rues et le système de jet d'eau qui se trouve au rond-point. Le guide de Paul, un feru de mathématiques, lui annonce que le coût de la réalisation c du projet de modernisation de la ville, en francs CFA s'exprime par $c = 5 \times 10^n$ où n est un entier naturel. De plus, c possède 132 diviseurs positifs.

En se promenant, Paul rencontre un artiste qui expose deux types de tableaux T_1 et T_2 dont les nombres respectifs p et q sont tels que $\frac{p+15}{P+2}$ est un entier naturel et q- un nombre premier tel que $13q + 1$ est le carré d'un entier naturel

Ces tableaux sont exposés dans un musée où N visiteurs au moins viennent chaque jour et N est tel que $PPCM\ (9N + 4\,;2N - 1) = 714$

<u>Tâche 1</u> : Détermine le coût exact de la réalisation du projet (1,5pt)

<u>Tâche 2</u> : Détermine le nombre de tableaux de chaque type (1,5pt)

<u>Tâche 3</u> : Déterminer N (1.5pt)

Collège d'Enseignement Général ***Années Scolaire :*** 2020-2021
AGASSA-GODOMEY ***Durée*** : 4 heures
Classe : Tle C

Travaux dirigés N°2

Epreuve de Mathématiques

Contexte : Souvenirs d'une sortie pédagogique

Dans le cadre d'une sortie pédagogique, Martha, jeune étudiante en mécanique, s'est rendue dans une usine de fabrication de '' sachet bio''. Pour son rapport, elle a accueilli des informations relatives :

- A deux plaques P_1 et P_2 utilisées dans la fabrication des sachets.
- Au mouvement d'une pointe électrique de découpage de la première manière.

La plaque P_2 a la forme d'un hexagone. La plaque P_1 a la forme d'un rectangle sur lequel est dessinée une courbe (T). Les dimensions en centimètre, de ce rectangle sont deux entiers naturels a et b tels que :

$$\begin{cases} a+b \text{ est un entier impair} \\ PPCM(a,b)=100 \\ PGCD(a,b)=a-b \end{cases}$$

Martha veut reproduire la courbe (T), dessiner la plaque P_2 et déterminer les dimensions de la plaque P_1 ainsi que la trajectoire de la pointe électrique.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Martha en traitants les trois problèmes suivants :

Problème : 1

1) Détermine les diviseurs positifs de 100.
2) Démontre que $\frac{100}{b}$ et $\frac{100}{a}$ sont des entiers naturels consécutifs.
3) Détermine les entiers a et b.

Problème : 2

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{i},\vec{j})$:

- Les sommets de l'hexagone sont les images des solutions de l'équation, d'inconnue z, (E): $z^6+\left(4-4i\sqrt{3}\right)z^3-32-32i\sqrt{3}$=0,
- La courbe (T) a pour équation : $13x^2+13y^2-10xy-72=0$.

4) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2+\left(4-4i\sqrt{3}\right)u-32-32i\sqrt{3}=0$,

b) Résous l'équation (E) et déduis-en les coordonnées des sommets de l'hexagone.
c) Représente cet hexagone.

5) On pose $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$.
   a) Démontre que le repère $\mathcal{R} = (O;\ \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.
   b) Détermine une équation de la courbe (T) dans le repère $\mathcal{R}$.
   c) Déduis-en que (T) est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité et les coordonnées des sommets dans le repère $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   d) Construis (T). (Pour la clarté, cette construction sera faite sur une figure séparée)

Problème : 3

La trajectoire de la pointe électrique observée par Martha est modélisée par une courbe (H) obtenue à partir de la représentation graphique (ζ) dans un repère orthonormé, de la fonction numérique f définie sur $[-2,2]$ par $f(x) = exp(|x^2 - 3|x| + 2|) - 1$, (H) est la réunion de (ζ) et de son symétrique (ζ_1) par rapport à l'axe des abscisses.

6) Justifie que f est une fonction paire.
7) Justifie que f est continue sur $[-2,2]$.
8) a) Etudie la dérivabilité de f en 1, à droite en 0 et à gauche en 2 ; puis donne une interprétation géométrique de chacun des résultats.
   b) Etudie le sens de variation de f sur chacun des intervalles $[0,1]$, $[1,2]$.
   c) Dresse le tableau de variation de f sur $[0,2]$.
9) Trace la courbe (ζ) puis déduis-en la courbe (H).

Fin

REPUBLIQUE DU BENIN

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN

Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

TEST DE MATHEMATIQUES, Edition 2015

BAC : C **Durée : 4 heures**

Contexte **:**

Jo, un élève de la classe de Terminale C, veut passer son permis de conduire pour deux roues. Un jour, le responsable de l'auto-école s'adressa au moniteur en ses termes :

Pour l'entrainement de ce matin, nous irons au stade de la vile ; tu prendras 924 cônes rouges et 1092 cônes verts. La composition de chaque circuit en cônes rouges et verts doit être la même. Le nombre de circuits doit être le plus petit possible mais doit dépasser 7. Dans un repère orthonormé d'origine O, un des circuits sera modélisé par l'ensemble (T) des points M tels que :

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 24y + 33 = 0$$

Un autre circuit sera quant à lui modélisé par une courbe obtenue à partir de la représentation graphique d'une fonction particulière f.

Suite à ces informations, Jo se propose de déterminer l'allure de ces deux circuits particuliers, le nombre total de circuits à réalisés ce jour-là et la durée d'installation de chaque cône par le moniteur.

Tâche **:** Pour ton évaluation, tu vas résoudre les trois problèmes suivants afin de trouver des solutions aux préoccupations de Jo.

Problème 1

1) Justifie que l'intersection de (T) et du cercle de centre I (1 ;3) et de rayon 1 est une paire.
2) Détermine la nature de (T). Précise ses sommets et foyers.
3) Représente (T).

Problème 2

Le moniteur met p secondes pour placer un cône rouge et q secondes pour un cône vert ; p et q entiers naturels. La durée d'installation de tous les cônes dans un circuit est quatre minutes et cinq secondes (4mn5s) (On supposera négligeable le temps de passage d'un cône à un autre).

4) Détermine l'ensemble des diviseurs positifs de 84.
5) Déduis-en le nombre de circuits réalisés ce jour-là.
6) Déduis que dans chaque circuit il y a 77 cônes rouges et 91 cônes verts
7) (a) Résous dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $11x + 13y = 35$.
   (b) Déduis en les valeurs de p et q.

Problème 3

La fonction f consoidérée pour le second circuit est définie de $\mathbb{R}$ $vers$ $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = [\ln(1-x) - x]^{0,2} & si\ x < 0 \\ f(x) = \int_x^{2x} v(t)dt & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Où v est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $v(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$.

8) Justifie que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
9) (a) Etudie le sens de variation de la fonction v.
   (b) Démontre que $\forall x \in\ ]0\ ; +\infty[, xv(2x) \leq f(x) \leq xv(x)$.

(c) Déduis-en la limite de f à droite en 0 et en $+\infty$.

(d) Etudie la continuité de f en 0.

10) Soit V une primitive de v sur $]0\,;+\infty[$.

(a) Exprime $f(x)$ à l'aide de $V(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.

(b) Déduis-en que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0\,;+\infty[, f'(x) = \frac{e^{-x}[2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1]}{(4x^2+1)(x^2+1)}$.

11) (a) Justifie que $\forall x \in]0\,;+\infty[, -2e^{-x}(x^2-2x+1)-8x < 0$.

(b) Démontre que l'équation $2e^{-x}(x^2+1)-4x^2-1=0, x>0$ a une solution unique α avec $0{,}34 < \alpha < 0{,}36$.

(c) Déduis-en le sens de variation de f sur $]0;+\infty[$.

12) Etudie le sens de variation de f sur $]-\infty;0[$.

13) (a) Ecris le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $ln(1-x)$.

(b) Déduis que f n'est pas dérivable à gauche en 0.

(c) En utilisant l'égalité obtenue en 9. (b), justifie que f est dérivable à droite en 0.

14) Dresse le tableau de variation de f.

15) En prenant $\alpha = 0{,}35$ et en utilisant la méthode des rectangles, calcule une valeur approchée de $f(\alpha)$. (Tu subdiviseras l'intervalle $[0{,}35;\,0{,}70]$ en deux intervalles de même amplitude).

16) Donne une allure de la courbe représentant f dans un repère orthogonal. Unité graphique : 6cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

FIN

REPUPLIQUE DU BENIN
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

28 mai 2016

TEST DE MATHÉMATIQUES, Édition 2016

BAC : D **Durée : 4 heures**

Contexte : Visite d'une ferme agricole

Lors d'une sortie pédagogique des élèves de la classe de terminale D d'un complexe scolaire privé, Sognonvi et ses camarades ont visité la ferme agricole FONDEOU. Des nombreuses explications du responsable de la ferme, Sognonvi a retenu que :

- dans la salle d'exposition d'échantillons de produits récoltés sur la ferme, où l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les différentes variétés de tomate sont étalées sur une surface contenue dans un plan (Q) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + \sqrt{2} \\ y = -3\beta + \pi \\ z = -1 \end{cases}, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$;
- les différentes variétés d'oignon sont accrochées à une tige portée par l'ensemble (Δ) des points $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tels que $(x-y+z-2)^2+(2x+y-z+1)^2=0$;
- un mur de la salle contenu dans un plan (P) est bien décoré à l'aide de certaines figures planes et de leurs images par une transformation plane φ précise ;
- les allées de la ferme sont assimilables à des portions d'une courbe (C) représentative des variations d'une fonction numérique f d'une variable réelle dans un plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$;
- à partir d'un certain moment, la productivité annuelle des nombreux cocotiers se trouvant dans la ferme n'est plus systématiquement croissante.

Autant sidéré comme ses camarades par les explications reçues, Sognonvi se pose néanmoins certaines questions notamment sur la nature de la transformation plane, l'allure de (C) et la production annuelle à long terme en noix de coco sur la ferme.

Tâche : Tu es invité (e) à aider Sognonvi à répondre à ses préoccupations en résolvant les trois problèmes ci-après.

Problème 1

1) Détermine une équation cartésienne du plan (Q).
2)
   a) Démontre que l'ensemble (Δ) est une droite.
   b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ).
3) Détermine l'intersection de (Q) et (Δ).

TEST-APMB 2016

CONTACTS : 61 42 30 60 / 63 28 95 35

Problème 2

Le plan (P) du mur décoré est muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et la transformation plane φ est la composée de l'homothétie h de centre K$\left(\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et de rapport -2, et d'une application r de (P) dans (P) qui, à tout point M$(x ; y)$ associe le point M$'(x'; y')$ tel que $x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1$ et $y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$.

4)
   a) Détermine l'écriture complexe de l'application r.
   b) Donne la nature précise de r puis précise ses éléments caractéristiques.
   c) Détermine la nature du triangle KAB où A est un point distinct de K, d'image B par r.

5)
   a) Détermine l'écriture complexe de $h \circ r$.
   b) Prouve que φ est une similitude plane directe dont tu préciseras les éléments caractéristiques.
   c) Sachant que A est un point de l'axe $(\Omega; \vec{e}_1)$ d'abscisse comprise entre 1 et 2, construis le triangle KAB puis son image par φ.

Problème 3

En réalité f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} & si\ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 lnx - \frac{3}{2}x^2 - 1 - \sqrt{2} & si\ x > 0. \end{cases}$$

Partie A

Le domaine de la ferme compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$et $x = e$ est couvert exclusivement de cultures maraichères.

6)
   a) Démontre que l'ensemble de définition de $f$est $\mathbb{R}$.
   b) Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0.
   c) Donne une interprétation de la dérivabilité de f en 0.

7)
   a) Etudie les variations de la fonction f.
   b) Etudie les branches infinies de la courbe (C).
   c) Construis la courbe (C).

8) Calcule en unité d'aire, l'aire de la surface occupée par les cultures maraichères.

TEST-ARMB 2016

Partie B

Le responsable de la ferme FONDEOU estime qu'à partir de l'année 2010, la production annuelle de la ferme en noix de coco de l'année $(2010 + n)$ en million de francs est d'environ $|u_n|$ où u_n est défini par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n)\ , \forall\ n \in\ \mathbb{N}. \end{cases}$

9) Calcule les montants de la production annuelle de noix de coco en 2010 et en 2011.

10)

a) Etudie le sens de variation de la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

b) Démontre que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique x_0.

c) Prouve que $-2 < x_0 < -1$.

d) Vérifie que $x_0 = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x_0}{2}}$.

11)

a) Démontre que pour tout élément x de $I = [-2, -1]$, $f(x)$appartient à I.

b) Démontre que pour tout élément x de I, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2e}}$.

c) Utilise le théorème de l'inégalité des accroissements finis pour montrer que pour tout élément x de I, on a $|f(x) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0|$.

12)

a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n appartient à I.

b) Prouve alors que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{2}|u_n - x_0|$.

c) Déduis – en que pour tout entier naturel n, $|u_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d) Autour de quel montant stabilisera à long terme la production annuelle de noix de coco si d'autres plants de cocotiers n'étaient plus mis en terre sur la ferme?

-FIN-

TEST-APMB 2016

CONTACTS : 61 42 30 60 / 63 28 95 35

REPUPLIQUE DU BENIN
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

27 mai 2017

TEST DE MATHÉMATIQUES, Édition 2017

BAC : C **Durée : 4 heures**

Contexte : Une jardinerie

Karim a un jardin attrayant dans un département du pays dans lequel il produit, entre autres, des plants d'arbres conifères et des plants d'arbres feuillus. Le jardin est alimenté en eau grâce à un puits creusé sur un domaine ABC tel que $AB = AC = 3m$ et $BC = 2m$. Le bord de ce puits est caractérisé par l'ensemble (E) des points M du plan tels que $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22$ de sorte qu'un tuyau d'une pompe à eau passe par le point G barycentre des points pondérés $(A\,;2)$, $(B\,;3)$ et $(C\,;3)$. Au repos, la surface de l'eau du puits est contenue dans un plan (P) dont une représentation paramétrique dans un repère orthonormé de l'espace est : $\begin{cases} x = 1 - t + t' \\ y = 1 + 2t + t' \\ z = \quad 4t - t' \end{cases}$ $(t\,;t') \in \mathbb{R}^2$.

Les produits du jardin sont livrés dans deux villes du département en empruntant souvent deux voies différentes représentées dans le plan par des portions de courbes (C_1) et (C_2), où (C_2) est l'image de (C_1) par une transformation σ.

Ismaël, un élève en terminale C, séduit par les activités de Karim, se préoccupe des principes mathématiques liés au puits, aux choix des plants d'arbres dans le stock du fournisseur et aux courbes (C_1) et (C_2).

Tache : Tu es invité(e) à partager les préoccupations de Ismaël en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1) Démontre que G est le milieu du segment [IJ] où I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI].
2) a) Justifie que $AI = 2\sqrt{2}\ m$.
   b) Calcule AG, BG et CG.
   c) Détermine la nature précise de (E).
3) Démontre que les droites (AB), (AC) et (BC) ont chacune un unique point en commun avec (E).
4) Détermine l'expression analytique de la réflexion de plan (P).

Problème 2

Les plants d'arbres du jardin de Karim proviennent de trois horticulteurs : 35% des plants proviennent de l'horticulteur h_1, 25% de l'horticulteur h_2 et le reste de l'horticulteur h_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres de conifères et des arbres à feuilles. La livraison de l'horticulteur h_1 comporte 80%

CONTACTS : Tél : 61 42 30 60 / 63 28 95 35

de conifère alors que celle de l'horticulteur h_2 n'en comporte que 50% et celle de l'horticulteur h_3 seulement 30%.

5) Karim choisit un arbre au hasard dans son stock.

On considère les événements suivants :

- H_i : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur h_i » avec $i \in \{1, 2, 3\}$;
- C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a) Calcule la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur h_3.

b) Justifie que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.

c) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur h_1 ?

6) On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie et on suppose que ce stock est suffisamment important pour que le choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a) Justifie que X suit une loi binomiale dont tu préciseras les paramètres.

b) Calcule $p(X = 5)$.

c) Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

Problème 3

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : $3cm$), (C_1) est la courbe représentative de la restriction à l'intervalle $[0 ; 3]$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$f(x) = x^2 - 2ln(e^x - x)$.

La transformation σ appartient à la famille σ_m de similitudes d'écriture complexe $z' = im\bar{z} + (m + 1)i$, où m est un nombre réel non nul.

7)

a) Démontre que σ_{-1} est une symétrie orthogonale dont tu préciseras l'axe.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de σ_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{-1 ; 0 ; 1\}$.

c) Sachant que σ transforme le point $H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ en $K\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, prouve que l'expression analytique de σ est :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x + 2. \end{cases}$$

8)

a) Démontre que σ est une isométrie.

b) Détermine l'ensemble des points invariants par σ.

c) Justifie que σ est une symétrie glissée dont tu préciseras l'axe (Δ) et le vecteur $\vec{u}$.

CONTACTS : Tél : 61 42 30 60 / 63 28 95 35

9)

a) Etudie le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

b) Déduis – en le signe de $g(x)$ puis celui de $e^x - x$.

10)

a) Prouve que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Justifie que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2(x-1)(e^x - x - 1)}{e^x - x}$.

c) Achève l'étude des variations de f.

11) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Etudie les branches infinies de la courbe (C).

b) Construis la courbe (C) puis la courbe (C_2).

- FIN -

TEST APMB 2017

CONTACTS : Tél : 61 42 30 60 / 63 28 95 35

REPUPLIQUE DU BENIN
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

23 juin 2018

TEST DE MATHÉMATIQUES, Édition 2018

BAC : C **Durée : 4 heures**

Contexte : Le marathon international de GAMBA

À l'instar des grandes villes du monde, la municipalité de GAMBA organise chaque année un marathon international. Lors d'une conférence de presse, organisée par le comité d'organisation de la prochaine édition du marathon, le président dudit comité a donné des informations relatives au marathon qui peuvent se traduire par :

- La date retenue pour cette compétition est le « a / (b+1) / c », où a, b et c sont des entiers naturels non nuls tels que : $c = \overline{642}^{a} = \overline{1202}^{2b}$ et $a - b = \overline{20}^{b}$;
- Le nombre de pays attendus à cette manifestation est le plus grand entier naturel N_1 tel que $N_1 = x + y$, avec x et y des entiers naturels vérifiant $4x^2 = y^2 + 15$;
- Le nombre de participants attendus à cette course, est le nombre N_2 tel que $N_2 = 3\alpha + 5\beta$, où α et β sont des entiers naturels tels que $71 < \alpha < 78$, $59 < \beta < 66$ et dans l'ensemble $\mathcal{D} = \left(\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}\right)^2$ on a : $\begin{cases} \dot{\alpha}\dot{\beta} = \dot{3} \\ \dot{\alpha} - \dot{\beta} = \dot{5} \end{cases}$;
- Le nombre d'officiels attendus est le nombre m tel que :
  $24 < m < 30$ et $3^{m+3} - 4^{m+4} \equiv 0[11]$.

Le lieu d'implantation du podium qui servira à la remise des trophées aux vainqueurs ainsi que l'itinéraire de la course sont également précisés par le président du comité d'organisation lors de la conférence de presse.

Tâche : Tu es invité(e) à décoder ces informations en résolvant les problèmes suivants.

Problème 1

1)
   a) Résous dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ le système d'inconnue (a ; b) suivant : $\begin{cases} \overline{642}^{a} = \overline{1202}^{2b} \\ a - b = \overline{20}^{b} \end{cases}$.
   b) Détermine la date de l'édition prochaine du marathon.

2)
   a) Résous dans $\mathbb{N}^2$ l'équation d'inconnue (x ; y) suivante : $4x^2 = y^2 + 15$.
   b) Déduis-en le nombre de pays de provenance des athlètes.

3)
   a) Résous dans $\mathcal{D}$ le système $\begin{cases} xy = \dot{3} \\ x - y = \dot{5} \end{cases}$.
   b) Détermine le nombre d'athlètes attendus à cette course.

4)

a) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 3^n par 11.

b) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 4^n par 11.

c) Déduis le nombre d'officiels attendus à cette manifestation sportive.

Problème 2

Le lieu d'implantation du podium réservé pour la remise de trophées aux différents vainqueurs est une zone délimitée par trois points A, B et C non alignés dont les affixes respectives a, b et c, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ sont les racines du polynôme complexe P défini par : $P(z) = z^3 - (2+3i)z^2 - (4-10i)z + 2 - 16i \; ; z \in \mathbb{C}$.

Le point E d'affixe $-\frac{1}{2} + i$ est le milieu du segment [AB] et les configurations (Λ_1) et (Λ_2) ci-dessous serviront pour la décoration du podium :

$(\Lambda_1) = \{M(z) \in (ABC) \; / \; z^2 - 4iz\bar{z} - \bar{z}^2 = -18i\}$; $(\Lambda_2) = \left\{M(z) \in (ABC) / \left|\frac{z-1-i}{z-2+i}\right| = 2\right\}$.

5)

a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-2i)z + 1 + 5i = 0$.

b) Détermine $a + b$, $a \times b$ et c (tu pourras poser $P(z) = (z-a)(z-b)(z-c)$).

c) Déduis-en la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

6)

a) Détermine l'affixe du barycentre G des points pondérés (H, 1) et (K, 4), où H et K sont les points d'affixes respectives $1 + i$ et $2 - i$.

b) Démontre que (Λ_2) est un cercle dont tu préciseras le centre et le rayon.

7) On désigne par r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Détermine une équation cartésienne de l'ensemble (Γ) image de (Λ_1) par r.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques (centre et sommets) de (Γ).

c) Déduis la nature et les éléments caractéristiques (centre et sommets) de (Λ_1).

8) Il est prévu que les trophées soient déposés sur le podium et projetés sur un écran géant à l'aide d'un système réfléchissant modélisé dans l'espace muni d'un repère orthonormé par l'application $d = S_1 o S_2$, où S_1 est la réflexion de plan (P) d'équation cartésienne $x + y - z + 1 = 0$ et S_2 l'application d'expression analytique : $\begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = x + 1 \\ z' = z \end{cases}$.

a) Détermine l'ensemble (Q) des points invariants par S_2.

b) Démontre que S_2 est une réflexion dont tu préciseras le plan.

c) Détermine la nature et l'élément caractéristique de d.

Problème 3

L'itinéraire de la course décrit par le président du comité d'organisation du marathon est obtenu à partir de la courbe représentative (C_f) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

- le tableau ci-dessous soit le tableau des variations de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'(x)	+		‖	-	0	+	
f(x)		↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$
	$-\infty$						

- (C_f) admette à gauche et à droite en O une demi-tangente d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$;
- (C_f) admette au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction, celle de l'axe des abscisses ;
- la droite d'équation $y = x - 2$ soit une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$;
- le point de coordonnées (4 ; 0) soit un point d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

9) Construis la courbe (C_f).

10) L'itinéraire de la course est précisément indiqué par l'ensemble (E) des points M(x ;y) du plan défini par : $\begin{cases} y - 1 \geq 2 \\ x - 2 \geq -3 \\ x - 2 = g(y-1) \end{cases}$, où g est l'application définie par :

$$g : [2; +\infty[\longrightarrow [-3; +\infty[$$
$$x \longmapsto f(x).$$

a) Vérifie que g est une bijection.

b) Justifie que (E) est l'image de la courbe représentative (Cg) de g par une transformation h dont tu préciseras la nature et les éléments caractéristiques.

c) Construis (E).

-FIN-

REPUBLIQUE DU BENIN

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN

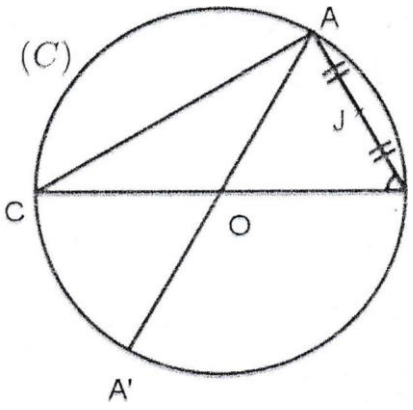
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

TEST DE MATHEMATIQUES, Edition 2019

BAC : C **Durée : 4 heures**

Contexte : Décoration d'un musée des sciences

Pour décorer la façade d'un musée des sciences, le décorateur Yao a commencé par la figure ci-contre. O est le centre du cercle et $mes\left(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Il manque sur la figure trois points D, E et I tels que D est l'image de C par un déplacement, $I = S_{(BC)}(A)$ et OICE est un parallélogramme.



Cette figure sera dupliquée par l'antidéplacement φ tel que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = C$. A cet ensemble de figures, il veut joindre des lignes lumineuses dont une sera gravée dans un coin rectangulaire de dimensions a et b.

Fasciné par le travail entrepris par son père, Yaovi, fils de Yao et élève en classe de terminale série C, s'est proposé de réaliser un dessin de la façade décorée.

Tâche : Tu vas aider Yaovi en résolvant chacun des trois problèmes suivants.

Problème 1

1) (a) Reproduis la figure puis démontre que $ABIO$ est un losange.
   (b) Démontre qu'il existe un unique déplacement h tel que $h(A) = C$ et $h(B) = O$.
   (c) Justifie que h est une rotation de centre I dont tu préciseras l'angle.
   (d) Démontre que $h(O) = A'$.
2) (a) Justifie que $\varphi = S_{(A'C)} o S_O$.
   (b) Détermine la droite (Δ) telle que $S_O = S_{(OI)} o S_{(\Delta)}$.
   (c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de φ.
3) On note $h(C) = D$ et $t = hor_{\left(D;-\frac{\pi}{3}\right)}$.
   (a) Construis E et D puis détermine $t(C)$.
   (b) Précise la nature de t.
   (c) Détermine $t(E)$.

Problème 2

La ligne devant être gravée dans le coin rectangulaire de dimensions a et b est définie par l'ensemble des points images du nombre complexe : $z = \frac{4a-b}{e^{i2\theta}+e^{i\theta}+1}$.

Les dimensions a et b sont des entiers naturels tels que $PGCD(a + b, ab) = p^2$ où p est un entier naturel premier.

4) (a) En remarquant que $a^2 = a(a + b) - ab$, démontre que p^2 divise a^2.
   (b) Déduis-en que p divise a.
   (c) Démontre que p divise b.
   (d) Démontre que $PGCD(a, b) = p$ ou $PGCD(a, b) = p^2$.
5) Pour une meilleure exploitation de la place disponible, Yao doit faire de telle sorte que $PGCD(a + b, ab) = 49$ et $PPCM(a, b) = 231$.
   (a) Démontre que $PGCD(a, b) = 7$.

(b) Détermine les couples $(a\ ;\ b)$ possibles.

6) Yao fixe $a\ et\ b$ tels que $4a - b = 1$.

(a) Démontre que $z = \frac{e^{-i\theta}}{1+2cos\theta}$.

(b) Pose $z = x + iy$, $(x;\ y) \in \mathbb{R}^2$, et démontre que $x\ et\ y$ vérifient la relation : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$.

(c) Déduis-en que le point-image de z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ appartient à une hyperbole (H) dont tu donneras une équation réduite.

(d) Donne les éléments caractéristiques de (H). (centre, sommets, foyers et asymptotes) puis construis (H).

Problème 3

Certaines lignes lumineuses seront obtenues à partir de la représentation graphique (C), dans un repère orthonormé $(0, I, J)$ du plan de la façade, de la fonction numérique f d'une variable, réelle x définie par : $\begin{cases} f(x) = x + 1 + \frac{1-e^x}{1+e^x}\ , & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x}{xlnx+1} + 1\ , & si\ x > 0 \end{cases}$

7) (a) Etudie les variations de la fonction numérique g de la variable réelle x définie par : $g(x) = xlnx + 1$.

(b) Déduis-en que pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $g(x) \neq 0$.

8) (a) Détermine l'ensemble de définition D de f.

(b) Etudie la continuité de f en 0.

(c) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète les résultats obtenus.

9) Achève l'étude des variations de f.

10) (a) Démontre que pour tout x élément de $]-\infty; 0]$, $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{1+e^x}$

(b) Déduis-en que (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $-\infty$ dont tu préciseras une équation.

(c) Détermine la position de (C) par rapport à (D) sur $]-\infty; 0]$.

(d) Précise la branche infinie de (C) au voisinage de$+\infty$.

11) (a) Démontre que la restriction ϕ de f à l'intervalle $[1; +\infty[$ est une bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

(b) On note (C') la courbe de la bijection réciproque ϕ^{-1}. Construis $(C)\ et\ (C')$ dans le même repère.

FIN

REPUPLIQUE DU BENIN
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

22 mai 2021

TEST DE MATHÉMATIQUES, Édition 2021

BAC : C **Durée : 04 h**

Contexte : Projet de reconstruction d'un jardin public

Dans son effort d'aménagement du cadre de vie de sa population, le conseil communal de SODJI a initié un projet de construction d'un jardin public. Le relevé des caractéristiques de l'ouvrage mentionne :

- Un monument à ériger dans le jardin, ayant la forme d'une pyramide régulière SEFGH telle que les plans (SEF) et (SGH) sont perpendiculaires et dont la base carré EFGH de centre O et de côté l'unité est telle que $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{ES})$ est une base directe. Il repose sur une partie de l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MF}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{ME} = c^2, (0 < c < 1)$;
- L'installation d'un système d'éclairage du jardin ;
- L'aménagement d'espaces verts qui porteront chacun une décoration lumineuse suivant des lignes obtenues à partir de la courbe (C_1) d'une famille de courbes (C_m).

John, un fils de l'ingénieur en charge des travaux et élève en classe de terminale scientifique, ayant pris connaissance des documents élaborés, veut illustrer les données relatives aux caractéristiques géométriques du monument, notamment à travers les réflexions S_1 et S_2 de plans respectifs (SEF) et (SGH), et l'application h qui associe à tout point M de l'espace le point *M'* tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$. Il se propose également de déterminer les points d'implantation des lampadaires et de construire les lignes lumineuses de la décoration.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de John en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

L'espace est muni du repère orthonormé direct $(E, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\vec{i} = \overrightarrow{EF}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{EH}$.

1) a) Justifie l'existence d'un nombre réel strictement positif λ tel que $\overrightarrow{OS} = \lambda\vec{k}$.

b) Exprime, en fonction de λ, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{SE} \wedge \overrightarrow{SF}$ et $\overrightarrow{SG} \wedge \overrightarrow{SH}$.

TEST APMB

c) Déduis-en que le point S a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) Calcule l'aire de la surface latérale et le volume de la pyramide SEFGH.

3) a) Détermine l'expression analytique de chacune des réflexions S_1 et S_2.

b) Donne la nature et les éléments caractéristiques de l'application $d = S_1 o S_2$.

c) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de h.

4) a) Démontre que (Γ) est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MI^2 + MJ^2 + MK^2 + ML^2 = 1 + c^2$, où I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [EF], [FG], [GH] et [EH].

b) Démontre que (Γ) est une sphère dont tu préciseras le centre et le rayon.

Problème 2

Pour l'éclairage du jardin, il est prévu d'installer trois projecteurs en des endroits assimilables à des points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 solutions dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, de l'équation (E) d'inconnue z :

$$4\bar{z}^2 - 4(1-2i)\bar{z} - 3 - 4i = 2z - 1 - 2i.$$

5) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): 4\bar{z}^2 - 4(1-2i)\bar{z} - 3 - 4i = 0$.

b) Déduis que pour tout nombre complexe z solution de (*E*), il existe une application φ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\varphi(z)$ soit solution de l'équation $Z^2 = \bar{Z}$.

6) a) Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = \bar{Z}$.

b) Déduis les solutions de l'équation (E).

7) Détermine la nature et les éléments caractéristique de l'application du plan complexe dans lui-même dont l'écriture complexe est : $z' = \varphi(z)$.

Problème 3

Les courbes $(\mathcal{C}_m)$ sont dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\Omega; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, les courbes représentatives des fonctions f_m définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = \frac{e^x}{me^x + 1},$$

où m est un paramètre réel non nul.

8) a) Détermine suivant les valeurs de m l'ensemble de définition D_m de f_m.

b) Détermine suivant les valeurs de m les limites de f_m aux bornes de D_m.

TEST APMB

c) Justifie que que f_m est dérivable sur D_m et calcul $f_m'(x)$ pour tout x élément de D_m.

d) Dresse suivant les valeurs de m le tableau des variations de f_m.

9) Pour $m > 0$, g_m désigne l'application définie par :

$$\begin{array}{rccc} g_m: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]0; \frac{1}{m}\right[\\ & x & \longmapsto & g_m(x) = f_m(x). \end{array}$$

(H_m) est l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$\begin{cases} x \in \left]-\frac{1}{m}; 0\right[\\ y \in \mathbb{R} \\ e^y + mxe^y + x = 0. \end{cases}$$

a) Démontre que g_m est une bijection et définis sa bijection réciproque ${g_m}^{-1}$.

b) Démontre que (H_m)est l'image de $(\mathcal{C}_m)$ par une rotation à caractériser.

10) Construis $(\mathcal{C}_1)$ puis déduis la construction de (H_1) dans le même repère que $(\mathcal{C}_1)$.

FIN

TEST APMB

REPUPLIQUE DU BENIN
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

14 mai 2022

TEST DE MATHÉMATIQUES, Édition 2022

BAC : C **Durée : 04 h**

Contexte

Madame Sènami est propriétaire de l'une des plus grandes boutiques dans la ville de Dunian. À l'occasion des fêtes de fin d'année, elle a entrepris quelques démarches pour accroitre ses ventes. Elle confie la décoration de la boutique à un professionnel. Ce dernier munit l'espace intérieur de la boutique, d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et place :

- une guirlande lumineuse (Γ_1) assimilable à l'ensemble des points du plan (xoy) de repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ équidistants du plan (P) d'équation cartésienne $3x + 4z - 5 = 0$ et du point O ;
- un magnifique tableau des vœux assimilable à un plan (Q) tel que $S_{(Q)} \circ S_{(P)} = S_{(\Delta)}$, où $S_{(Q)}$ est la réflexion de plan (Q), $S_{(P)}$ est la réflexion de plan (P) et $S_{(\Delta)}$ est le demi-tour d'axe (Δ) de système d'équations cartésiennes $\begin{cases} -3x - 4z + 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Pour réaliser les dépliants pouvant servir à la publicité, madame Sènami devra représenter sur une feuille de papier le plan d'indication de la boutique en traçant la voie principale qui mène à cette boutique qu'elle transmettra à un graphiste.

Sèdjro, un fils de Sènami et élève en classe terminale C, est très impressionné par le décor intérieur de la boutique. Il se propose d'étudier la ligne (Γ_1) et d'évaluer l'impact de toutes ces initiatives en déterminant le nombre minimal de clients qui se rendent à la boutique par jour. Pour aider sa mère, il recherche des procédés mathématiques pouvant permettre de représenter la voie principale qu'il désigne par (Γ_2).

Tâche : Tu vas aider Sèdjro à atteindre ses objectifs en résolvant les trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

1.
   a) Vérifie que $(\Delta) \subset (P)$.
   b) Détermine l'expression analytique de la réflexion $S_{(P)}$ et celle du demi-tour $S_{(\Delta)}$.
   c) Détermine une équation cartésienne du plan (Q).

2.
   a) Justifie qu'une équation de (Γ_1) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est : $x^2 + y^2 = \left(\frac{3x-5}{5}\right)^2$.
   b) Justifie que (Γ_1) est une conique de foyer O et de directrice (D) puis trouve son excentricité e.
   c) Précise la nature de (Γ_1).

TEST APMB

Problème 2

Le nombre minimal de clients est l'entier naturel $(n + p)$ tel que $\begin{cases} 150 < n < 200 \\ PGCD(3n^3 - 11n\,; n + 3) = 48 \end{cases}$ et p est le plus petit entier naturel pour lequel $\left(2 - \sqrt{3} + i\right)^p$ est un nombre complexe imaginaire pur. Par ailleurs, le coût de réalisation des dépliants ayant servi à la publicité est, en millier de francs CFA, le nombre $m = x_0 y_0$, où x_0 et y_0 sont les plus grands nombres entiers négatifs tels que $(x_0; y_0)$ soit solution de l'équation $5x - 12y = 6$.

3.

a) Démontre que pour tous entiers naturels non nuls a, b et c on a : $PGCD(a, b) = PGCD(bc - a; b)$.

b) Vérifie que pour tout entier naturel n, on a : $3n^3 - 11n = (n + 3)(3n^2 - 9n + 16) - 48$.

c) Déduis-en que $PGCD(3n^3 - 11n\,, n + 3) = PGCD(48, n + 3)$.

d) Détermine l'entier naturel n vérifiant le système : $\begin{cases} 150 < n < 200 \\ PGCD(3n^3 - 11n\,; n + 3) = 48 \end{cases}$

4.

a) Ecris $\sqrt{3} - i$ sous forme exponentielle puis déduis-en la forme exponentielle de $\left(2 - \sqrt{3} + i\right)$.

b) Résous dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $5x - 12y = 6$ d'inconnue (x, y).

c) Détermine l'entier naturel p.

5. Précise le nombre minimal de clients qui se rendent dans cette boutique par jour et le coût de réalisation des dépliants.

Problème 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\Omega; I, J)$, (Γ_2) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $\begin{cases} x < -1 \\ y < 2 \\ x + 1 = \varphi(y - 2) \end{cases}$, où φ est l'application de $]-\infty\,; 0[$ dans $]-\infty\,; 0[$ définie par $\varphi(x) = f(x)$ et f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \; si \; x < 0 \\ f(x) = x\,[2(lnx)^2 - 9lnx + 11] \; si \; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$. (C) désigne la courbe représentative de f.

6.

a) Justifie que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Etudie les branches infinies de (C).

7.

a) Justifie que f est continue en 0.

TEST APMB

b) Etudie la dérivabilité de f en 0 puis donne une interprétation géométrique des résultats obtenus.

8. Soit u la fonction définie sur $]-\infty, 0[$, par $u(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} + 1$.
   a) Etudie les variations de u.
   b) Déduis – en le signe de $u(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$.
9.
   a) Prouve que $\forall\, x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = (2lnx - 1)(lnx - 2)$.
   b) Etudie le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
10.
   a) Etudie le sens de variation de f.
   b) Dresse le tableau des variations de f.
   c) Construis (C).
11.
   a) Justifie que φ est une bijection.
   b) Montre que (Γ_2) est l'image de (C) par une symétrie glissée dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

FIN

TEST APMB

REPUBLIQUE DU BENIN
ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DU BENIN
Enregistrée sous le n°96-59 MISAT/DC/DAI/SAAP-Assoc. du 13 mai 1996

TEST DE MATHEMATIQUES, édition 2023

CLASSE TERMINALE : SERIE C **Durée : 04 Heures**

Contexte : Le musée de Dunia

Dans le Plan de Développement Communal, le conseil communal de Dunia a pour principal objectif, la rénovation de leur musée afin de rendre attractif le secteur du tourisme. Pour l'exposition de leur patrimoine culturelle, le conseil a décidé d'aménager la salle d'exposition du musée et de catégoriser ses objets d'art. Pour ce faire, le guide touristique Kora commit pour les travaux a regroupé ces objets d'art en deux catégories : les objets d'art contemporains et les statuettes des anciens rois. Le nombre a d'objets d'art contemporains et le nombre b de statuettes sont tels que : $\begin{cases} pgcd(a,b) = a-b \\ a^3 - b^3 = 999 \end{cases}$.

Dans la salle d'exposition, il est prévu des bandes de décorations et des calebasses d'eau de purification. Le nombre N (exprimé en dizaine) de calebasses d'eau de purification est la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

Le plan (P) est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique $1\,dm$. Chaque bande de décoration est constituée par des enseignes lumineuses assimilables à des portions de deux ensembles (Γ') et (Σ).

(Δ) est le domaine du plan limité par la courbe (C) d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = \lambda$ avec $\lambda \in [-1; 0[$. Les calebasses d'eau de purification sont identiques et ont la forme du solide engendré par la rotation de (Δ) autour de l'axe des abscisses.

Gnon, fille de Kora est une élève en classe terminale scientifique. Elle a pris connaissance de toutes ces informations et s'intéresse aux principes mathématiques qui les sous-tendent. Elle cherche à déterminer le nombre de chaque catégorie d'objets d'art, le nombre de calebasses d'eau de purification, les ensembles (Γ') et (Σ) puis le volume de chaque calebasse.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des réponses adéquates aux préoccupations de Gnon en résolvant les trois problèmes ci-dessous.

Problème 1

1. a) Vérifie que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

b) Détermine les diviseurs positifs de 999.

2. a) Démontre que $pgcd(a,b) \in \{1,3\}$.

b) Détermine le nombre d'objets d'art contemporains et le nombre de statuettes.

3. a) Justifie que pour tout entier naturel n, $u_n \in [1;2]$.

b) Etudie le sens de variation de (u_n).

c) Déduis-en que la suite (u_n) est convergente et calcule sa limite.

d) Détermine le nombre de calebasses d'eau de purification.

Problème 2

(Γ) est l'ensemble des points M du plan orienté (P) tels que : $5MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$ où les points A, B et C déterminent le triangle équilatéral ABC direct tel que $AB = 5$.
Le point G est le barycentre des points pondérés $(A;5)$, $(B;1)$ et $(C;1)$.
Le point O est le centre du cercle (C_1) circonscrit au triangle ABC.

On désigne par D le symétrique de A par rapport à O, les médiatrices des segments $[AD]$ et $[OB]$ se coupent en un point K. L'ensemble (Γ') est l'image de (Γ) par une transformation plane $\varphi = \delta^{-1} \circ r$ avec r et δ deux applications du plan qui transforment A en D et O en B. On désigne par δ^{-1} la réciproque de δ.

4. a) Justifie que r est l'unique déplacement qui transforme A en D et O en B.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristique de r.

5. a) Justifie que δ est l'unique antidéplacement qui transforme A en D et O en B.

b) Soit $g = t_{\overrightarrow{OB}} \circ s_{(OB)}$, détermine $g(A)$ et $g(O)$ puis déduis-en la nature et les éléments caractéristiques de δ.

6. a) Détermine $\varphi(O)$ et $\varphi(A)$.

b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de φ.

7. Détermine les ensembles (Γ) et (Γ').

Problème 3

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = x\sqrt{-\ln(-x)}; & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \frac{x}{2^x + x} & \text{; si } x \geq 0 \end{cases}$

h est l'application définie de $]-1\,;-\frac{1}{\sqrt{e}}[$ vers $]-\frac{1}{\sqrt{2e}}\,;0[$ par :
$h(x) = f(x)$.

On désigne par (C) et (C') les courbes représentatives respectives de f

et h puis par (Σ) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $\begin{cases} x \in]-\frac{1}{\sqrt{2e}}, 0[\\ y \in]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2\sqrt{e}}[\\ x - 2y\sqrt{-ln(-2y)} = 0 \end{cases}$.

8. a) Démontre que l'ensemble de définition de f est $D = [-1; +\infty[$.

b) Démontre que f est continue sur D.

c) Etudie la dérivabilité de f en 0 et à droite en -1 puis interprète géométriquement les résultats obtenus.

9. Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

10. Etudie les branches infinies de (C) puis construis (C). (Prend $1cm$ pour $1\ dm$).

11. a) Calcule $\int_{-1}^{\lambda}(x^2 \ln(-x))dx$. (Utilise la formule d'intégration par parties).

b) Déduis-en le volume $V(\lambda)$ de chaque calebasse d'eau de purification.

c) Calcule $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda < 0}} V(\lambda)$.

12. a) Justifie que h admet une bijection réciproque h^{-1}.

b) Démontre que (Σ) est l'image de (C') par la composée d'une symétrie orthogonale et d'une affinité dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

FIN

Bonne réflexion

APMB