Sujet :

Bac Blanc 1

EXERCICE 1.

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$.
On désigne par C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. $\Big($Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont données en annexe$\Big)$.

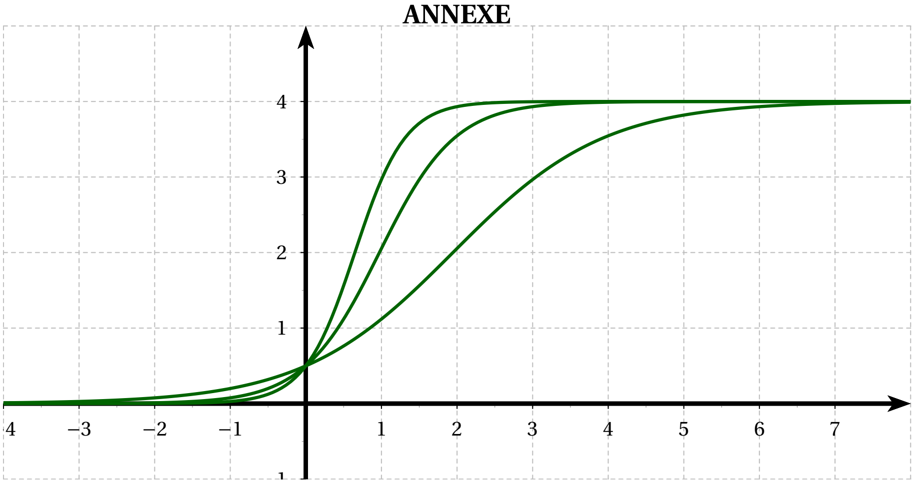
Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4e^{x}}{e^{x}+7}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7e^{-x}}$.
2. (a) Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera des équations.
   (b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.
3. (a) Montrer que l'équation $e^x = 7$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$, et déterminer un encadrement de α à 10^{-2} près.
   (b) Vérifier que $f_1(\alpha+x) = \dfrac{4e^x}{1+e^x}$ et que $f_1(\alpha-x) = \dfrac{4}{1+e^x}$.
   Démontrer que le point I_1 de coordonnées $(\alpha;2)$ est un centre de symétrie de la courbe C_1.
   (c) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe C_n.
2. (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation $e^{nx} = 7$ admet une seule solution β dans $\mathbb{R}$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.
   (c) Placer les points I_1, I_2 et I_3 sur le graphique donné en annexe.
   (d) Démontrer que la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n a pour coefficient directeur n.
   (e) Tracer les droites (T_1), (T_2) et (T_3).

ANNEXE



EXERCICE 2.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = -\dfrac{1}{1+x} + 2\ln\left(\dfrac{x+1}{n}\right)$

1. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & \text{si } x>0 \\ 0 \text{ si } x=0 \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Démontrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.
3. (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = xg(x)$.
   (b) En déduire le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.
4. Calculer la limite de f en ∞ .
5. On considère la fonction φ définie par : $\varphi(x) = f(x) - x + \dfrac{1}{2}$.
   (a) Vérifier que : $\varphi(x) = x^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$
   (b) x étant strictement positif : on pose $I(x) = x^2 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{1+t} - 1 + t\right) dt$.
   Démontrer que pour tout réel $t > 0$ on a : $0 \leq \dfrac{1}{1+t} - 1 + t \leq t^2$
   (c) En déduire que $0 \leq I(x) \leq \dfrac{1}{3x}$. Et conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.
   (d) Que peut-on déduire ?

Partie C :

1. Tracer soigneusement la courbe de f.
2. On pose $A(\lambda) = \displaystyle\int_1^{\lambda} f(x)dx$. Calculer $A(\lambda)$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

EXERCICE 3.

On considère la suite des nombres complexes définie par : $\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n \end{cases}$

on note M_n le point d'affixe z_n dans le plan complexe $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 (a) Écrire sous forme algébrique puis sous forme exponentielle les nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4.

(b) Placer les points M_0, M_1 , M_2, M_3 , M_4 les points d'affixes respectives z_0,z_1, z_2, z_3 et z_4.

2 Calculer $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$.
En déduire que, pour tout entier naturel n le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et isocèle en M_{n+1}

3 Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$

(a) Montrer que d_n est une suite géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $2\sqrt{2}$.

(b) Interpréter graphiquement chacune des nombres d_n .

(c) Exprimer en fonction de n la longueur L_n de la ligne brisée $(M_o, M_1, ., M_n)$.

(d) Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n$.

EXERCICE 4.

Soit l'équation différentielle (E) : $y" + 3y' + 2y = \cos(3x) + x^2 + x$

1 Donner la solution de l'équation sans second membre associée à (E).

2 Soit $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ et $h(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$.
Déterminer les réels α , β , γ d'une part; a et b d'autre part pour que :

- g soit solution de l'équation différentielle : $y" + 3y' + 2y = x^2 + x$ (1)
- et h solution de l'équation différentielle $y" + 3y' + 2y = \cos(3x)$ (2)

3 En déduire que $h + g$ est une solution particulière de (E).

4 Déterminer la solution générale de (E), puis la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

MATHÉMATIQUES PR. ABDELLAH AIT-CHEIKH 2SM-SIBM

Sujet :

Bac Blanc 2

EXERCICE 1.

On considère l'équation (E) : $z^3-2z^2+2(2-3i)z-20=0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure notée z_0. Trouver les autres solutions z_1 et z_2 .
2. Le plan complexe étant muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ on note A , B et C les points d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2.
   (a) Déterminer l'affixe du barycentre G des points pondérés $(A,-1)$, $(B;1)$ et $(C;1)$.
   (b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $-MA^2+MB^2+MC^2=36$.

EXERCICE 2.

Partie A : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Montrer que $\left(\forall x\in D_f\right);\ 0<f(x)\leq 1$.
4. Démontrer que la courbe (C) admet une asymptote dont on précisera son équation.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point Ω d'abscisse 0.
6. Démontrer que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, puis donner son tableau de variations.
7. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution α dans $]0;1[$
8. Montrer que $\left(\forall x\in]0;1[\right);\ |f'(x)|\leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\ln(\sqrt{2}-1)$.
9. Tracer la courbe (C).

Partie B : On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0\in]0;1[\\ \left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

1. Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);\ u_n\in]0;1[$
2. Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right);|u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\ln(\sqrt{2}-1)\right)|u_n-\alpha|$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3.

On considère : La fonction de la variable réelle x telle que $g(x) = -xe^x + 1$; les équations différentielles (E_0) : $y'' + 2y' - 3y = 0$ et (E) : $y'' + 2y' - 3y = -4e^x - 3$.

1 Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g''(x) + 2g'(x) - 3g(x) = -4e^x - 3$

2 Résoudre (E_0)

3 Soit h une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable.

(a) Démontrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E_0).

(b) En déduire les solutions de (E)

4 Déterminer la solution u de (E) vérifiant $u(0) = 0$ et $u'(0) = 4$.

5 A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(3x)\,dx$

EXERCICE 4.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+u^2(t)} \\ F(0) = 0 \end{cases}$ tel que $u(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

1 Montrer que F est une fonction impaire.

2 (a) Monter que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)$; $0 \le F(x) \le x$

(b) En déduire que la fonction F est continue à droite en 0.

3 (a) Monter que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right)\left(\exists c_x \in [x;2x]\right)$; $\dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{1}{1+u^2(c_x)}$

(b) En déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en déterminant $F'_d(0)$.

4 (a) Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right);\ F'(x) = \frac{1+u^2(x)\left(1+\sin^2(x)\right)}{\left(1+u^2(x)\right)\left(1+u^2(x)\cos^2(x)\right)}$$

(b) En déduire la monotonie de la fonction F sur $[0;+\infty[$, puis donner son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

5 (a) Montrer que pour tout nombre t strictement positif, on a :

$$\frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{1}{1+u^2(t)} \le 1 \text{ et } \frac{1}{1+u^2(t)} \le \frac{1}{t^2}$$

(b) En déduire que pour tout nombre x strictement positif, on a :

$$x + \arctan(x) - \arctan(2x) \le F(x) \le x \text{ et } 0 \le x - F(x) \le \frac{1}{2x}$$

(c) Calculer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) - x$.

6 Tracer soigneusement la courbe de F.

SUJET :

BAC BLANC 3

EXERCICE 1.

Partie A : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = e^{2x} - 2e^{x} + 2 \text{ si } x \in \mathbb{R}^{-} \\ f(x) = 1 + x\ln(1+x) \text{ si } x \in \mathbb{R}^{*+} \end{cases}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 (a) Étudier les branches infinies de (C).

(b) Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(c) Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

(d) Dresser le tableau de variation de f.

2 Montrer que la partie de la courbe (C) correspondant à l'intervalle $]-\infty;0]$ admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera.

3 (a) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$

(b) Tracer la droite (D) : $y = 2$ et la courbe (C).

4 Soit λ un réel strictement négatif.

(a) Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (C) la droite D et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

(b) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

Partie B : Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty;0]$.

1 Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle K que l'on précisera.

2 Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3 Sur quel intervalle g^{-1} est-elle dérivable ?

4 Montrer que pour tout $x \in [1,2[$ on a : $g^{-1}(x) = \ln(1 - \sqrt{x-1})$.

5 Montrer que : $\displaystyle\int_1^{\frac{5}{4}} g^{-1}(x)\,dx = \frac{5\ln 2}{4} - A(-\ln 2)$

Partie C : Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$ tel que $n \in \mathbb{N}^*$.

1 (a) Vérifier que pour tout $x \in [0;1]$ on a : $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$

(b) En déduire que $I_1 = \dfrac{1}{4}$

2 Calculer l'aire A du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

3 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le I_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$

(b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$

EXERCICE 2.

On considère : La fonction de la variable réelle x telle que $g(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^{3x}}{1+\mathrm{e}x}$; les équations différentielles $(E_0):\ y'-2y=0$ et $(E):\ y'-2y=\dfrac{-\mathrm{e}^{3x}}{(1+\mathrm{e}x)^2}$.

1. Vérifier que g est une solution de l'équation (E).
2. Résoudre (E_0).
3. Soit f une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable.
   - a) Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E_0).
   - b) Résoudre alors l'équation (E) et donner la solution f telle que $f(0)=\dfrac{1}{2}$

EXERCICE 3.

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=\displaystyle\int_0^{\ln 2} 1\,dx \\ (\forall n\in\mathbb{N}^*);\ U_n=\displaystyle\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\right)^n dx \end{cases}$

1. Calculer U_0 et U_1
2.
   - a) Montrer que pour tout $x\in[0,\ln 2]$: $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}=-1+\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$
   - b) Montrer que pour tout $x\in[0,\ln 2]$: $0\le\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}\le\dfrac{3}{5}$
   - c) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0\le U_n\le\left(\dfrac{3}{5}\right)^n\ln 2$
   - d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) en $+\infty$.

EXERCICE 4.

A tout complexe $z\neq -i$, on associe $f(z)=\dfrac{z}{1-iz}$.

1. Trouver les coordonnées du point B d'affixe z_0 telle que $f(z_0)=1+2i$
2. On note r le module de $z+i$ et α un de ses arguments.
   - a) Exprimer $f(z)$ en fonction de $z+i$.
   - b) Donner une forme trigonométrique de $f(z)-i$ en fonction de r et α .
3. Soit $A(-i)$.
   - a) Trouver l'ensemble $\mathscr{C}$ des points $M(z)$ tels que : $\left|f(z)-i\right|=\sqrt{2}$.
   - b) Trouver l'ensemble $\mathscr{D}$ des points $M(z)$ tels que : $\arg(f(z)-i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
   - c) Montrer que $B\in\mathscr{C}$; $B\in\mathscr{D}$ puis construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

Sujet :

Bac Blanc 4

EXERCICE 1.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x>0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1+x} + \ln(x+1) \text{ si } -1<x\leq 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A :

1. Démontrer que l'ensemble de définition de f est $D_f =]-1;+\infty]$.
2. Étudier les branches infinies de (C_f).
3. Étudier la continuité de f en 0.
4. Étudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement vos résultats.
5. Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-1;0[$ et $]0;+\infty[$.
6. Dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer (C_f)

Partie B : Soit α un nombre réel tel que $\alpha \in]-1;0[$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_{\alpha}^{0} \ln(x+1)\,dx = -\alpha\ln(\alpha+1)+\alpha-\ln(\alpha+1)$
2. En déduire l'aire $A(\alpha)$ du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=0$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} A(\alpha)$

EXERCICE 2.

On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{dt}{\ln(t)}$

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur D_f et que $f'(x) = \dfrac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{\ln(2x)\ln(x)}$ puis déterminer les variations de f
3. (a) Démontrer que $\left(\forall x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\cup]1;+\infty[\right)$; $\dfrac{x}{\ln(2x)} < f(x) < \dfrac{x}{\ln(x)}$.

   (b) Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
4. Soit g la fonction définie sur $]0;1]$ par : $g(x) = 2-2x+\ln(x)$

   (a) Étudier les variations de g et ses limites aux bornes de son domaine de définition

   (b) En déduire $\left(\exists! \alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[\right)$; $g(\alpha)=0$ et que $(\forall x \in [\alpha;1])$; $\ln(x) \geq 2x-2$

   (c) Montrer que $f(x) \leq \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{dt}{t-1}$. En déduire alors $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$

   (d) dresser le tableau de variations de f puis donner l'allure de sa courbe représentative.

MATHÉMATIQUES PR. ABDELLAH AIT-CHEIKH 2SM-SIBM

EXERCICE 3.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 2e - x$, dans laquelle y désigne une fonction inconnue de la variable x, dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. (a) Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que u est solution de l'équation (E).
   (b) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = -2y$
   (c) Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - u$ est une solution de (E_0).
   (d) En déduire les solutions de l'équation (E).
2. Soit g la solution de l'équation (E) vérifiant la condition initiale $g(0) = 3$
   (a) Montrer que pour tout réel x par on a $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) On note (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ voir annexe 1.
   Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
   Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$
   (c) Tracer (C_g^{-1}) (dans l'annexe 1)
3. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} g(k)$
   (a) Calculer u_n en fonction de n
   (b) Montrer que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.
4. soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(\sqrt{1+x} - 1)$.
   On note (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   (a) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $g^{-1}(x)$.
   (b) Tracer (C_f) (dans l' annexe 1).
5. (a) Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\ln(2)} g(x)dx$. Interpréter graphiquement I.
   (b) Soit A le point de (C_f) d'abscisse 3.
   Soit B le point de (C_f) d'abscisse $\dfrac{5}{4}$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O, \vec{j})$.
   Déterminer les coordonnées des points A, B et H.
   (c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$ de plan limité par les segments $[OA]$, $[OH]$, $[HB]$ et l'arc du courbe (C_f) d'extrémités A et B . Hachurer $\mathscr{D}$ (dans l'annexe 1) .
   Exprimer $\mathscr{A}$ à l'aide de I. Calculer alors $\mathscr{A}$.
   (d) En déduire la valeur de $I' = \displaystyle\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln(\sqrt{1+x} - 1)dx$

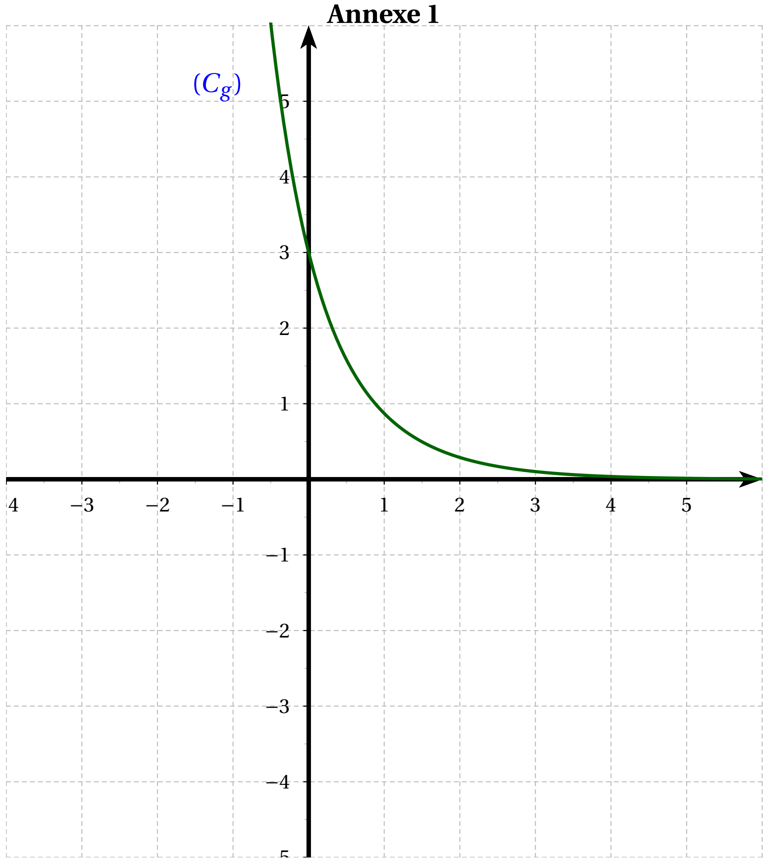
EXERCICE 4.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme :

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 17z^2 - 36z + 72$$

1. a) Vérifier que $3i$ est une solution de l'équation $(E) : P(z) = 0$
   b) Montrer que si z_0 est une solution alors son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi une solution
   c) En déduire les solutions de l'équation (E)
2. a) Écrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle
   b) Montrer que le polynôme $P(z)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficient réels
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on donne les points A ,B ,C et D d'affixes respectives : $3i$; $-3i$; $2-2i$ et $2+2i$
   a) Placer les points A ,B ,C et D
   b) Montrer que $ABCD$ est un trapèze isocèle
4. On pose $t = z_A(-1 + ie^{i\theta})$ avec $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   a) Écrire t sous forme exponentielle
   b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe t lorsque θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Annexe 1



MATHÉMATIQUES PR. ABDELLAH AIT-CHEIKH 2SM-SIBM

Sujet :

Bac Blanc 5

EXERCICE 1.

Partie A :

Soit n un entier naturel tel que $n > 1$.

Soit la fonction g_n définie sur $]0;+\infty[$ par : $g_n(x) = n(x+1) + \ln(x)$.

1 Étudier les variations de la fonction g_n.

2 (a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une et unique solution $\alpha_n \in]0;+\infty[$.

(b) Vérifier que $\alpha_n \leq \mathrm{e}^{-n}$

3 En déduire le signe de $g_n(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Partie B :

Soit la fonction f_n définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{x\big(\ln(x)\big)^n}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1 (a) Étudier la continuité de f à droite en 0.

(b) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

3 (a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$, puis calculer $f_n'(x)$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

(b) Déterminer le signe de $f_n'(x)$ selon les valeurs de n puis dresser le tableau de variation de f.

4 Vérifier que $f_n(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

5 Montrer que : $(\forall x \in [1;\mathrm{e}]);\ f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

Partie C :

On considère l'équation suivante : $(E_n);\ f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{2(1+\mathrm{e})}$.

1 Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique $u_n \in [1;\mathrm{e}]$.

2 Vérifier que : $(\forall n \geq 2);\ f_{n+1}(u_n) \leq \dfrac{\mathrm{e}}{2(1+\mathrm{e})}$.

3 Étudier la monotonie de la suite (u_n) et qu'elle est convergente (soit β sa limite).

4 Montrer que $(\forall n \geq 2);\ f_n(u_n) \leq \dfrac{\beta\big(\ln(\beta)\big)^n}{1+\beta}$.

5 On suppose que $\beta \in [1;\mathrm{e}]$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\beta\big(\ln(\beta)\big)^n}{1+\beta}$.

6 Déterminer la valeur de β.

EXERCICE 2.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $g(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

1. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,+\infty\right[$ sur $\left[1,+\infty\right[$
   On note g^{-1} la fonction réciproque de g
2. Montrer que $g^{-1}(\sqrt{2})=-\ln(\sqrt{2}-1)$
3. (a) Vérifier que pour tout x de $\left[0,+\infty\right[$, $g'(x)=\sqrt{g^{2}(x)-1}$
   (b) En déduire que g^{-1} est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et que $\left(g^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}$
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to1^{+}}\dfrac{g^{-1}(x)}{x-1}$
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g^{-1}(x)}{x}$

Partie B :

Soit F la fonction définie sur $\left[e^{\sqrt{2}},+\infty\right[$ par : $\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_{e^{2}}^{x}\frac{1}{t\sqrt{\ln^{2}(t)-2}}dt & \text{si } x\in\left]e^{\sqrt{2}},+\infty\right[\\ F\left(e^{\sqrt{2}}\right)=\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Montrer que F est dérivable sur $\left]e^{\sqrt{2}},+\infty\right[$ et calculer $F'(x)$
2. Soit U la fonction définie sur $\left[e^{\sqrt{2}},+\infty\right[$ par $U(x)=g^{-1}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)$
   (a) Montrer que U est dérivable sur $\left]e^{\sqrt{2}},+\infty\right[$ et que $U'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^{2}(x)-2}}$
   (b) En déduire que pour tout x de $\left[e^{\sqrt{2}},+\infty\right[$, $F(x)=g^{-1}\left(\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{2}}\right)+\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$
3. Étudier la dérivabilité de de F à droite en $e^{\sqrt{2}}$
4. Dresser le tableau de variation de F
5. Déterminer la nature de la branche infinie de (C)
6. Tracer une allure de (C)

EXERCICE 3.

On admet que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{0}^{x}e^{-u^{2}}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose pour tout $x>0$: $I(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}2u^{2}e^{-u^{2}}du$ et $J(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}t^{2}e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{2}}dt$ tel que $\alpha>0$.

1. A l'aide d'une intégration par changement de variable, donner pour tout $x>0$, $J(x)$ en fonction de $I(\dfrac{x}{\alpha})$
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}^{*+});\ I(x)=\int_{0}^{x}e^{-u^{2}}du-xe^{-x^{2}}$$

3. En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_{0}^{x}t^{2}e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{2}}dt=\frac{\alpha^{3}\sqrt{\pi}}{4}$.

EXERCICE 4.

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3-(2+3i)z^2+(4i-1)z+2-i=0$.

1 (a) Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on précisera .

(b) Résoudre, alors l'équation (E) .

2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 1 , i et $2+i$. A tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tels que $z'=\dfrac{1}{z^2}$ et $z\in\mathbb{C}-\{-1;0;1\}$

(a) Montrer que le triangle AMM' est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{z+1}{z^2}\in i\mathbb{R}^*$

(b) On pose $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0;\pi[$, donner la forme trigonométrique de $\dfrac{z+1}{z^2}$.

(c) Déduire les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AMM' soit rectangle en A

3 Soit N le point d'affixe $z_N=\dfrac{(1+i)z}{z-i}$ avec $z\neq i$.

(a) Montrer que $N\in\mathscr{C}_{(B,1)}$ si et seulement si M appartient à la médiatrice de $[AB]$

(b) Montrer que $\overline{(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON})}\equiv\dfrac{\pi}{4}-\overline{(\vec{u};\overrightarrow{BM})}[2\pi]$

(c) En déduire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M pour les quels O, M et N soient alignés

Sujet :

Bac Blanc 6

EXERCICE 1.

Partie A :

1 Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1-x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

2 Pour tout nombre réel x, on pose : $I(x)=\int_0^x\dfrac{(x-t)^2}{2}e^t\,dt$

(a) Montrer, sans calculer $I(x)$, que :

$\forall x\geq 0;\ 0\leq I(x)\leq e^x\dfrac{x^3}{6}$ et $\forall x\leq 0;\ |I(x)|\leq\dfrac{|x|^3}{6}$

(b) À l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$

(c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$

3 on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=e^x\ln(1+x)-x$.
Étudier les variations de la fonction f et déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}^+);\ f(x)\geq 0$
(on admet que $(\forall x\in\mathbb{R});\ e^x\geq 1+x$)

Partie B : Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}F(x)=\displaystyle\int_{1+x}^{e^x}\frac{1}{\ln t}\,dt & \text{si } x\in\left]0;+\infty\right[\\ F(0)=0\end{cases}$

1 Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[);\ \dfrac{e^x-1-x}{x}\leq F(x)\leq\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$

2 Montrer que F est continue et dérivable à droite en 0.

3 Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $(\forall x\in]0,+\infty[);\ F'(x)=\dfrac{f(x)}{x\ln(1+x)}$

4 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et dresser le tableau de variations de F.

5 Étudier la branche infinie de la courbe de la fonction F au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 2.

Soit n un entier naturel non nul, et f_n une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}$$

1 Montrer que pour $n\geqslant 2$, il existe un unique réel α_n dans l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$

2 Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante puis déduire qu'elle est convergente.
(on pose : $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$)

3 (a) Vérifier que pour tout $t\neq 1$ on a : $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$.

(b) Déduire que : $\alpha_n+\dfrac{\alpha_n^2}{2}+\cdots+\dfrac{\alpha_n^n}{n}=-\ln(1-\alpha_n)-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}\,dt$.

4 (a) Montrer que : $1+\ln(1-\alpha_n)=-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}\,dt$.

(b) Montrer que : $(\forall n\geqslant 2);\ 0\leqslant\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}\,dt\leqslant\frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$. En déduire la limite ℓ.

EXERCICE 3.

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\frac{1}{m}z^2+(1-3i)z-4m=0$ tel que $m \in \mathbb{C}^*$.

1 (a) Déterminer les racines carrées du nombre $8-6i$

(b) Déterminer en fonction de m, z_1 et z_2 solutions de l'équation (E) tel que : $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right)<0$

(c) Calculer en fonction de $\arg(m)$, $\arg z_1$, $\arg z_2$.

2 On considère les points M_1, M_2, M et D d'affixes respectives z_1, z_2, m et $1+3i$.

(a) Montrer que OM_1M_2 est rectangle en O.

(b) Montrer que si $\arg(z_1+z_2)\equiv 0[\pi]$, donc les points O, M et D sont alignés.

(c) Déterminer l'ensemble des points M tel que $\arg(z_1+z_2)\equiv 0[\pi]$

3 Le point M_1' est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Et M_2' est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Montrer que M_1 ; M_2 ; M_1' ; M_2' sont cocycliques.

EXERCICE 4.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 4 cm].

On considère les trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts a, b et c tels que $|a|=|b|=|c|$.

On désigne par A l'image de a dans P, par B celle de b et par C celle de c. On note H le point d'affixe $a+b+c$.

1 Soit $w=\overline{b}c-b\overline{c}$.

(a) Démontrer que w est un imaginaire pur.

(b) En déduire que $(b+c)(\overline{b}-\overline{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ le sont aussi.

2 (a) Exprimer en fonction de a, b et c, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

(b) En déduire que (AH) est une hauteur du tringle ABC.

(c) Justifier que H est l'orthocentre du tringle ABC.

3 Dans cette question, $a=\sqrt{3}+i$; $b=-1+i\sqrt{3}$; $c=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Faire la figure et placer H.

EXERCICE 5.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $|a| \neq 1$.

On considère la fonction f de la variable complexe z définie par : $f(z)=\frac{z-\overline{a}}{1-az}$.

1 Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2 Montrer que f est injective sur D_f.

3 Montrer que $f(z)=z' \Leftrightarrow z=\frac{z'+\overline{a}}{1+az'}$.

4 Montrer que $\left|f(z)\right|=1 \Leftrightarrow |z|=1$

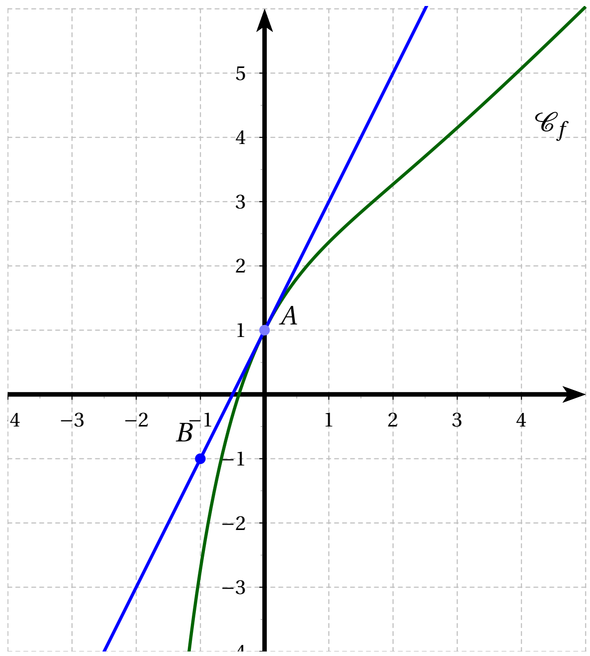
5 Déterminer l'ensemble des point M d'affixe z vérifiant : $\left|f(z)\right|=\frac{1}{|a|}$

SUJET :

BAC BLANC 7

EXERCICE 1.

Sur le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la droite (AB) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $A(0;1)$.
Le point B a pour coordonnées $(-1;-1)$.



Partie A

En utilisant les données de l'énoncé, déterminer la valeur des réels a et b tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = ax + b + \frac{x}{e^x}$$

Partie B

Pour la suite, on admet que $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$ pour tout réel x.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2. En déduire le signe de $g(x)$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
4. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = e^{-x} g(x).$$

5. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
7. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$, parallèle à $\mathscr{D}$, en un point E dont on précisera les coordonnées.
   (b) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\mathscr{D}$.

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x) = \frac{1}{1-\tan(x)}$.

1 Montrer que f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

2 On désigne par g sa fonction réciproque .Construire dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3 Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

4 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,l'équation $f(x) = n$ admet dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ une solution unique α_n .

(b) Montrer que la suite (α_n) est croissante .

(c) En déduire que (α_n) est convergente et calculer sa limite .

EXERCICE 3.

Partie I : Calculer les intégrales suivantes :

1 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} dx;$

2 $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx.$

Partie II On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{e^t}{t+1} dt$$

1 Montrer que ma fonction $f : t \mapsto \frac{e^t}{t+1}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2 Monter que la fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$, puis déterminer $F'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.

3 Montrer que $(\forall x \in [0; +\infty[); \ f(x) \leq F(x)$.

EXERCICE 4.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe. Le graphique sera fait **sur une feuille de papier millimétré** et **complété au fur et à mesure des questions**.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z)=z^2+2z+9.$$

1. Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive). On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z)-8|=3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y).$$

   b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Sujet :

Bac Blanc 8

EXERCICE 1.

1 Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - x.$$

(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

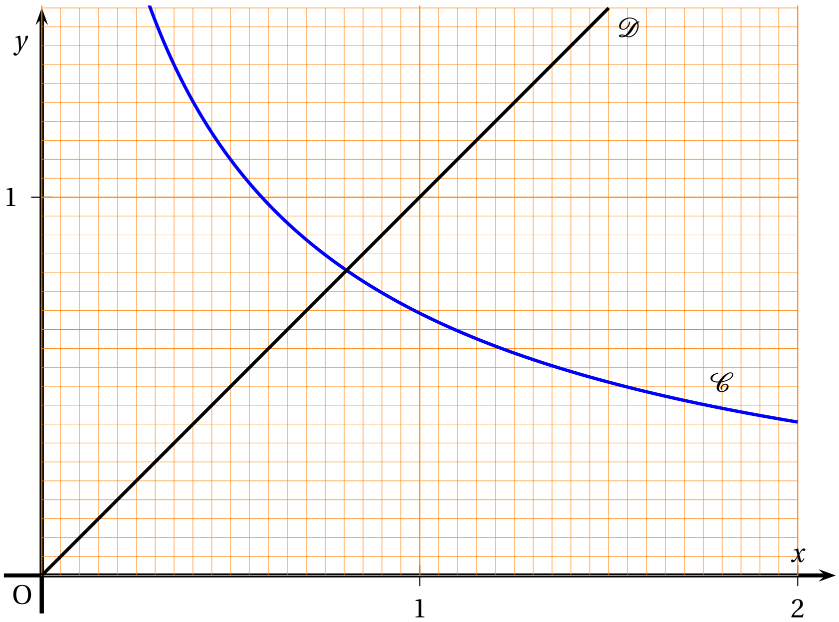
(b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

(c) Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

2 Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1,5$ et pour tout entier naturel n :
$u_{n+1} = g(u_n) = \ln\left(1+\dfrac{1}{u_n}\right)$.

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g et la droite d'équation $y = x$.



(a) Construire sur l'axe des abscisses, en laissant les traits de construction apparents, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) Le graphique permet-il d'émettre les conjectures suivantes ? (Aucune justification n'est demandée).

- Conjecture n° 1 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. »
- Conjecture n° 2 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $0,5$. »
- Conjecture n° 3 : « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. »

(c) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ strictement positive.
Montrer que $\ell = \alpha$.

EXERCICE 2.

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad y - y' = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

1 ⓐ Démontrer que la fonction u définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ est solution de (E).

ⓑ Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0\,;\,+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $v - u$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y - y' = 0$.

ⓒ En déduire toutes les solutions définies sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation (E).

2 Pour tout réel k négatif ou nul, on considère la fonction f_k définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f_k(x) = \frac{kx+1}{x}\mathrm{e}^x.$$

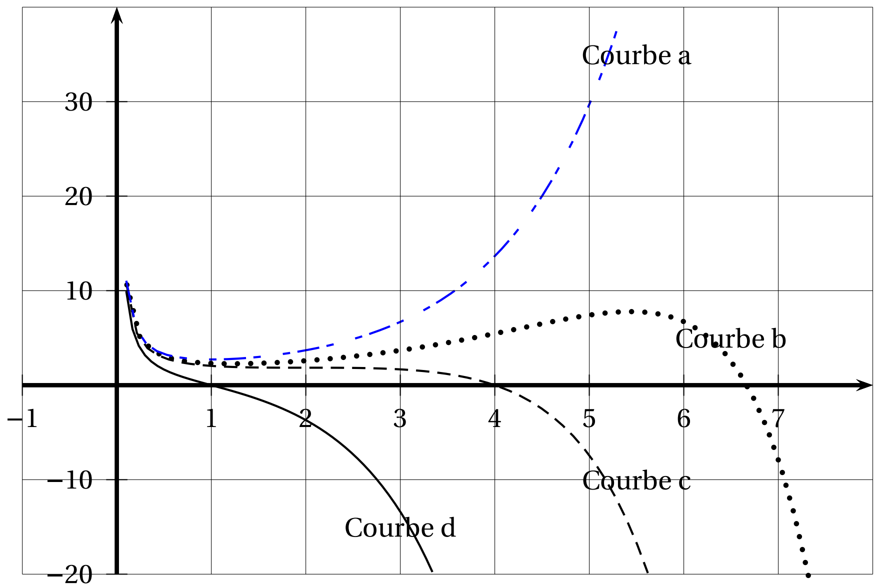
ⓐ Déterminer les limites de f_k en 0.

ⓑ Déterminer, selon les valeurs de k, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{kx+1}{x}$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

ⓒ Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

ⓓ Déterminer le nombre de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ de l'équation $f_k(x) = 0$.

3 On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k, dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On a tracé sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_{-0,25}$, $\mathscr{C}_{-0,15}$ et $\mathscr{C}_0$.
En utilisant la deuxième question, reconnaître chaque courbe (les réponses doivent être justifiées).



EXERCICE 3.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E : z^2 - 3e^{i\frac{3\pi}{8}} z + 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 0$.

(b) Soient A et B les points d'affixes respectives les solutions de E telles que : $|z_B| > |z_A|$. Montrer que A est le milieu de $[OB]$.

2 On considère les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $z_2 = \sin\dfrac{\pi}{8} + i\cos\dfrac{\pi}{8}$

(a) Écrire sous sa forme algébrique z_1^2.

(b) En déduire la forme trigonométrique de z_1^2.

3 (a) Écrire z_2 sous sa forme trigonométrique. Établir l'égalité : $z_1^2 = 4z_2^2$

(b) En déduire $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

EXERCICE 4.

Partie I : Question de cours

1 Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2 Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie II Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & 13 \quad (19) \\ n & \equiv & 6 \quad (12) \end{array}\right.$$

1 Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

2 (a) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à

$$\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array}\right.$$

(b) Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{lll} n & \equiv & n_0 \quad (19) \\ n & \equiv & n_0 \quad (12) \end{array}\right.$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.
(on rappelle que $a \equiv b \quad (c)$ si et seulement si c divise $a - b$.)

3 (a) Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).

4 Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Sujet :

Bac Blanc 9

EXERCICE 1.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$(unités graphiques : 2 cm).

Partie A

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$
   (b) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = xe^{-x}\left(\frac{1}{2}xe^x - e^x + 1\right)$,
   en déduire la limite de f en $-\infty$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) Déterminer la limite de h en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat pour les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   (b) Étudier le signe de $h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Partie B

1. (a) Après avoir justifié la dérivabilité de la fonction f, déterminer $f'(x)$.
   (b) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x-1)(1-e^{-x})$. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
2. Dresser le tableau de variation complet de g.
3. Tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$(unités graphiques : 2 cm).

EXERCICE 2.

On se propose dans cet exercice de calculer : $A = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ln\left(\sin(x)\right)dx$.

1. Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$.
   (a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in]-1;1[$, on a :
   $$f(x) = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}$$
   (b) En déduire la primitive F de f sur $]-1;1[$ qui s'annule en 0 .
2. Soit G la fonction définie sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = F\left(\cos(x)\right)$.
   (a) Montrer que G est dérivable sur $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ et que pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :
   $$G'(x) = \frac{-\cos^2(x)}{\sin(x)}$$
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx$.
3. Calculer A .

EXERCICE 3.

Le but de cet exercice est de démontrer l'existence d'une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} f(-x)f'(x) &= 1 \quad \text{pour tout nombre réel } x, \\ f(0) &= -4 \end{cases}$$

(où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f) et de déterminer cette fonction.

1. On suppose qu'il existe une fonction f satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.
   a. Démontrer que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer g' la fonction dérivée de la fonction g. En déduire que g est constante.
   c. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(-x)f(x) = 16$.
   d. Soit l'équation différentielle (E) $y' = \dfrac{1}{16}y$. Montrer que la fonction f est une solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.
2. **Question de cours**
   a. On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où K est un nombre réel quelconque.
   b. Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur -4 en 0.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

EXERCICE 4.

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2. a. Donner la forme exponentielle des nombres complexes $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.
   b. En déduire la forme exponentielle du nombre z_n.
   c. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

EXERCICE 5.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe : $f(z)=z^2+2z+9$

1 Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=5$.
Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
Construire à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive). Laisser les traits de construction apparents.

3 Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z)-8|=3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$; tracer (F).

4 Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+iy$ où x et y sont des nombres réels.

(a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y).$$

(b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique en traçant ces droites.

5 Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

EXERCICE 6.

1 (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7.

(b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2^{3n+1}-2$ et $2^{3n+2}-4$ sont divisibles par 7.

2 Déterminer les restes de la division euclidienne des puissances de 2, par 7.

3 p étant un entier naturel. On pose : $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$.

(a) si $p=3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?

(b) Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est un multiple de 7.

(c) Pour $p=3n+2$, A_p est-il divisible par 7 ? dans ce cas,quel est le reste de la division de A_p par 7

Sujet :

Bac Blanc 10

EXERCICE 1.

Partie A : On considère la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f e dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1 (a) Déterminer la dérivée f' et dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

(b) Montrer que la droite (Δ) : $x=\dfrac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie à $\mathscr{C}_f$.

(c) Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Justifier que (T) a pour équation $y=x+1$.

2 Soit la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x)=\mathrm{e}^{x}\sqrt{1-x^2}-1$.

(a) Établir le tableau de variations de la fonction g.

(b) Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0,1[$ une solution unique α.

(c) En déduire le signe de $g(x)$ dans $[0,1]$.

3 On se propose de déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente (T) au point d'abscisse 0 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Soit la fonction h définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}-(x+1)$.

(a) Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $h'(x)=g\big(\sin(x)\big)$.

(b) Montrer qu'il existe un unique réel β dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\beta)=\alpha$.

(c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles $[0,\beta]$ et $\left[\beta,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(d) Dresser le tableau de variation de h.

(e) En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $f(x)\geq x+1$. Que peut-on déduire ?

Partie B

1 (a) Montrer que pour tout $x\geq 0$; $\sin(x)\leq x$.

(b) Déduire alors que pour tout réel $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $f(x)\leq \mathrm{e}^{x}$.

(c) Tracer, dans le même repère, la courbe de la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{x}$; la droite (T) et la courbe $\mathscr{C}_f$.

2 (a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\leq \mathrm{e}-1$ et $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\leq \mathrm{e}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

(b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$.
Montrer que : $\dfrac{\pi^2}{4}+\pi\leq A\leq \mathrm{e}\pi-2$.

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1-\tan(x)}$

1 (a) Étudier les variations de f

(b) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

2 Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On désigne par g sa fonction réciproque.

3 (a) Étudier la dérivabilité de g sur J.

(b) Montrer que : $g'(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$ pour tout $x\in J$.

(c) Construire $\mathscr{C}_g$ dans le même repère que celui de $\mathscr{C}_f$.

4 Vérifier que pour tout $x\in]1;+\infty[$ on a : $\dfrac{2x-1}{2x-2}>1$

5 Soit h la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=g\left(\dfrac{2x-1}{2x-2}\right) & ;\text{si } x>1\\ h(1)=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

(a) Montrer que h est continue en 1.

(b) Montrer que h est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que pour tout réel : $x>1$ on a :

$$h'(x)=-g'(x)$$

(c) En déduire que pour tout réel : $x>1$ on a : $h(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{4}$

(d) Montrer que $\mathscr{C}_h$ est l'image de $\mathscr{C}_g$ par une transformation que l'on précisera.

6 Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}h(n+k)$

(a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $h(2n)\leq U_n\leq h(n)$

(b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}U_n$

EXERCICE 3.

1 On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x+53y=1$

(a) Vérifier que $(-9;8)$ est une solution de (E).

(b) Résoudre l'équation (E).

(c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

(d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2 (a) Justifier que $45^{52}\equiv 1[53]$

(b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53.

3 Soit $N=1+45+45^2+\cdots+45^{105}=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=105}45^k$.

(a) Montrer que : $44N\equiv 10[53]$.

(b) En déduire le reste de N modulo 53.

EXERCICE 4.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :

$$f(z) = z^3 - (3+2\sqrt{3})z^2 + (7+4\sqrt{3})z - (5+2\sqrt{3})$$

1 (a) Vérifier que $f(z) = (z-1)Q(z)$, en déterminant $Q(z)$

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

2 Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soient A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = 1$; $z_B = 1+\sqrt{3}-i$ et $z_C = 1+\sqrt{3}+i$.

(a) Donner la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis déduire la nature du triangle ABC.

(b) Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle (ζ) dont on déterminera le centre w et le rayon r.

(c) Calculer $\cos(\theta)$ tel que : $\theta = (\overrightarrow{wA}, \overrightarrow{wB})$.

(d) En déduire l'angle de la rotation R de centre w tel que $R(A) = B$.

3 Soit (E) l'ensemble des points $M(z)$ du plan (P) tel que : $\left|\dfrac{z_C - \overline{z}}{z_A - z}\right| = 1$.

(a) Montrer que $M \in (E) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 0$, en déduire que $C \in (E)$.

(b) Déterminer une équation cartésienne de (E).

4 On considère l'application T qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que :

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\bar{z} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)i.$$

(a) Montrer que $T = R \circ t$ tel que t est une transformation à déterminer.

(b) Déterminer (E') l'image de (E) par la rotation R.

Sujet :

Bac Blanc 11

EXERCICE 1.

1 Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = e^x - xe^x - 1$.

(a) Dresser le tableau de variation de h .

(b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^+);\ h(x) \leq 0$.

2 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = x + 2 - e^x$.

(a) Dresser le tableau de variation de g .

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α dans $\mathbb{R}^+$ et que $1,1 < \alpha < 1,2$.

(c) En déduire le signe de $g(x)$.

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{e^x.g(x)}{\left(xe^x + 1\right)^2}$.

(b) Dresser le tableau de variation de f.

(c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

(d) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

(e) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$de au point d'abscisse 0 .

4 (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+);\ f(x) - x = \dfrac{(x+1).h(x)}{xe^x + 1}$.

(b) En déduire la position de $\mathscr{C}_f$et (T) .

(c) Tracer $\mathscr{C}_f$et (T) dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$tel que $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 4cm$.

5 (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+);\ f(x) - x = \dfrac{1 - e^x}{x + e^{-x}}$. En déduire une primitive F de f .

(b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, (T) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

6 Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$.

(a) Calculer V_0 et V_1.

(b) Montrer que $(\forall n \geq 2);\ f(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$.

(c) En déduire que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite .

EXERCICE 2.

Partie A On considère l'équation différentielle suivante : $y' + y - 1 = 0, \quad (E)$.

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la solution particulière h de l'équation (E) tel que $h(0) = 2$.
3. Étudier les variations de la fonction h.

Partie B Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifier que $f = \ln \circ h$.
2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$
3. Calculer $\lim\limits_{|x| \to +\infty} f(x)$, puis établir le tableau de variation de f.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$
5. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
6. Calculer $f(-\ln 4)$, $f(0)$, $f(\ln 2)$ puis Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie C Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) + g(x) = 0$.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le même repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

EXERCICE 3.

On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 6$

1. (a) Montrer que $(2; -2)$ est une solution de (E)
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E)
2. Soit $(x; y)$ une solution de (E) et $d = x \wedge y$
   (a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?
   (b) Déterminer les couples $(x; y)$ solutions de (E) pour lesquels $d = 3$
3. On considère le système $(S) : \begin{cases} n \equiv 2[5] \\ n \equiv -2[8] \end{cases}$ où n est un entier naturel.
   (a) Montrer que n est une solution de (E) si et seulement si $n \equiv 22[40]$
   (b) Étudier suivant les valeurs de l'entier naturel n (n ≥3) , le reste modulo 40 de 22^n
   (c) Déterminer le reste modulo 5 de 2022 et le reste modulo 8 de 2022
   (d) En déduire que l'entier $\left((2022)^{2017} - 32\right)$ est divisible par 40

EXERCICE 4.

1 Résoudre dans l'équation : $(1+i)z^2 - 2z + 1 - i = 0$.

2 Soit m un nombre complexe de module $\sqrt{2}$.
Résoudre dans l'équation : $E : mz^2 - 2z + \overline{m} = 0$.

3 Dans toute la suite on prend $m = e^{i\alpha}$ où α est un réel .

(a) Montrer que les racines z' et $z"$ de l'équation E s'écrivent :

$$z' = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} \text{ et } z" = e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

(b) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On désigne par M' et M'' les points d'affixes respectives z' et $z"$ et par M le point d'affixe $z' + z''$.
Montrer que $\dfrac{z'}{z''} = i$. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux.

(c) Montrer que le quadrilatère $OM'MM''$ est un carré.

EXERCICE 5.

Une roue est divisée en douze secteurs identiques : trois rouges, quatre blancs, quatre verts et un noir. Quand on fait tourner la roue, chaque secteur a la même probabilité d'être pointé par un index fixe lorsque la roue s'arrête.

1 Imad tourne la roue une fois. Déterminer les probabilités des événements suivants :

— A : " l'index pointe sur un secteur noir" ;

— B : " l'index pointe sur un rouge ou un blanc".

2 On adopte la règle suivante : lors d'une partie, le joueur marque 10 points si l'index pointe sur un secteur noir ; 5 points sur un rouge ; 1 point sur un vert et (-3) points sur un blanc.
Walid joue trois parties successives d'une manière indépendante. Déterminer les probabilités des événements :

— C : " Walid totalise 25 points" ;

— D : " Walid totalise au moins 21 points ".

SUJET :

BAC BLANC 12

EXERCICE 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^* - \{1\}$, on considère la fonction numérique f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1 + n\ln x}{x^2}$$

et soit $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie I

1 Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2 (a) Calculer $f'_n(x)$, $\forall x \in]0;+\infty[$, puis vérifier que $f'_n(w_n) = 0$, tel que : $w_n = e^{\frac{n-2}{2n}}$.

(b) Dresser le tableau de variations de f_n.

(c) Montrer que la fonction f_n admet une valeur maximale au point $w_n = e^{\frac{n-2}{2n}}$

3 Étudier la position relative des deux courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$.

4 Tracer dans le même repère les deux courbes $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

Partie II On suppose que : $n \geqslant 3$.

1 Vérifier que $w_n \geqslant 1$ et que $f_n(w_n) \geqslant 1$.

2 Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]1;+\infty[$ et que $\alpha_n > w_n$.

3 Montrer que $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.

4 (a) Montrer que $\ln\alpha_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ $\quad(\forall n \geqslant 3)$.

(b) Déduire que : $\alpha_n > \sqrt{\frac{n}{2}}$ $\quad(\forall n \geqslant 3)$, puis déduire que la suite (α_n) est divergente.

Partie III On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et la fonction F définies par :

$$(\forall x \in]0;+\infty[); \qquad F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt \qquad \text{et} \qquad u_n = \int_1^e f_n(x)dx$$

1 (a) À l'aide de l'intégration par parties, calculer $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}dt$ pour tout x de $[1;+\infty[$.

(b) Calculer le produit P_n en fonction de n. tel que : $P_n = \prod\limits_{k=2}^{n} e^{u_k}$.

2 Étudier les variations de la fonction F.

3 (a) Vérifier que : $(\forall x \in]0;+\infty[)$ $\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{x^2}$.

(b) Montrer que : $(\forall x \geqslant 1)$ $\quad 0 \leqslant \int_1^x \frac{\ln t}{t}dt - F(x) \leqslant I(x)$.

(c) En déduire la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{\ln^2 x}$

EXERCICE 2.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x + \sin x)$.

1. (a) Exprimer $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

   En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-x}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

   (c) Justifier que la limite de f en $+\infty$ est 0.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I et dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

EXERCICE 3.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 1 cm].
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3i$; $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.
On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

Partie I

1. Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie II On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}$$

1. Soit D le point d'affixe $z_D = 1 - i$. Déterminer l'affixe du point D$'$ image du point D par f.

2. (a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par l'application f est le point d'affixe $2i$.

   (b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).

3. Démontrer que, pour tout point M distinct du point B, $OM' = \dfrac{AM}{BM}$.

4. Démontrer que, pour tout point M distinct du point A et du point B, on a l'égalité :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment [AB] alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

EXERCICE 4.

On rappelle que : $(\mathbb{R},+,\cdot)$ et $(M_n(\mathbb{R}),+,\times)$ deux anneaux.

On considère l'ensemble $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Pour tout a et b de E on pose : $a*b=a+b-3ab$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans E.
2. Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.
3. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ a^{(n)}=\underbrace{a*a*\cdots*a}_{n fois}$

   Montrer que $a^{(n)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1-3a)^n$
4. Pour tout a de $\mathbb{R}$ on considère la matrice :

$$M(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a & a\\ a & 1-2a & a\\ a & a & 1-2a\end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que : $M(a)\times M(b)=M(a*b)$

   (b) On considère l'ensemble : $G=\{M(a)/a\in E\}$ et φ une application définie par :

$$\varphi: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G\\ a & \longmapsto & M(a)\end{array}$$

   Montrer que φ est un morphisme bijectif de $(E,*)$ vers $(G,\times)$.

   (c) Déduire la structure de $(G,\times)$, puis déterminer $M^{-1}(a)$ le symétrique de $M(a)$.

   (d) Déterminer la matrice $M^n(a)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

EXERCICE 5 (**Les deux parties sont indépendantes).**

Partie I

1. En utilisant le théorème de Fermat. Montrer que $3^{48}\equiv 1[13]$ et $3^{48}\equiv 1[7]$.
2. Déduire que : $91/3^{48}-1$

Partie II

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E): 23x-48y=1$

   (a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$.

   (b) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer la solution particulière (x_0,y_0) de l'équation (E).

   (c) Montrer que : $\{(23+48k\ ;\ 11+23k)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$ est l'ensemble de solution de l'équation (E).
2. On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) définit par : $(S):\begin{cases} n\equiv 8[23]\\ n\equiv 9[48]\end{cases}$

   On pose : $n_0=207x_0-384y_0$.

   (a) Vérifier que : n_0 est une solution du système (S).

   (b) Montrer que : n est une solution du système (S) si et seulement si $n\equiv 537[1104]$, puis résoudre le système (S).

Sujet :

Bac Blanc 13

EXERCICE 1.

Partie A : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} \ , \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. (a) Étudier la continuité de la fonction f en 0.
   (b) Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0.
2. Calculer les limites de f au bornes de D_f
3. (a) Étudier les variations de f .
   (b) Dresser le tableau des variations de f .

Partie B : On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{-3x^2}^{-x^2} f(t)dt \ , \ x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathscr{C}_F$sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Étudier la parité de la fonction F.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $\left(\exists c \in [-3x^2; -x^2]\right);\ F(x) = 2xf(c)$.
   (b) En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\left(\exists c \in [-3x^2; -x^2]\right);\ 2xf(-x^2) \leq F(x) \leq 2xf(-3x^2)$.
   (c) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction F en 0.
3. Calculer les limites de F au bornes de D_F
4. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_F$.
5. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*);\ F'(x) = \dfrac{-F(x)}{x} - 2f(-x^2) + 6f(-3x^2)$.
   (b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*);\ F'(x) \geq 4f(-3x^2) - 2f(-x^2)$.
   (c) Dresser le tableau des variations de F .
   (d) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*);\ F(x) \leq 2x$
6. Construire la courbe $\mathscr{C}_F$dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$

EXERCICE 2.

1. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$
2. On considère la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par : $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{n}{n+2k}}$.
   Montrer que la suite $(T_n)_{n\geq}1$ est convergente en déterminant sa limite.

EXERCICE 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ 0 \le U_n \le \dfrac{\ln(2)}{n+1}$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$, puis en déduire la valeur de U_1.

3. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \in [0;1]$, on pose $S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n$.

   a) Montrer que $S_n = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et $V_n = \ln(2) + (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

   b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ |V_n - \ln(2)| \le \dfrac{1}{1+n}$ puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n$.

4. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*);\ U_n = \frac{\ln(2)}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\ln(2) - V_n\right)$$

   b) Soit la suite $(W_n)_{n\ge1)}$ définie par : $W_n = (n+1)U_n$.
   Montrer que $(W_n)_{n\ge1)}$ est une suite convergente.

EXERCICE 4.

Partie A : Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - 2z^2\cos(4\theta) + 1 = 0$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

3. On considère l'équation (F) : $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2 + \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 = 2\cos(4\theta)$.

   a) Sans résoudre l'équation (F), montrer que ses solutions sont imaginaires pures.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C} - \{-1;1\}$ l'équation (F).

Partie B : On pose, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, $z' = -\dfrac{i}{z}$.
Soient M et M' deux points d'affixe respectives z et z' .

1. a) Montrer que $(\forall z \in \mathbb{C});\ z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R}$ ou $z \in i\mathbb{R})$.

   b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ pour que le triangle OMM' soit rectangle en O.

2. On pose $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et soient A et B deux points d'affixe respectives ω et $-\omega$.
   On suppose que les points A, B et M ne sont pas alignés.

   a) Montrer que $M' \notin \{A, B, M\}$.

   b) Montrer que les points A, B, M et M' sont cocycliques.

3. Soient $C(2+i)$ et $D(-1+3i)$ deux points dans le plan complexe.
   On considère la rotation R de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et soit H l'homothétie de centre C et de rapport -1.

   a) Déterminer l'expression complexe de R et de H.

   b) En déduire que l'expression complexe de $H \circ R$ est $z' = -iz + 2(1-i)$.

   c) Établir que $H \circ R$ est une rotation dont on déterminera son centre et son angle.

EXERCICE 5.

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit; elle effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur »;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. (arrondir le résultat au dix-millième)

Partie B
On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
   Calculer la valeur exacte de λ.
2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sur qui vient de naître.
   Calculer la probabilité pour que sa sur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. (arrondir le résultat au dix-millième)

EXERCICE 6 (LES PARTIES A ET B SONT INDÉPENDANTES).

Partie A : On considère l'équation $(E) : 7x - 6y = 1$ où x et y sont des entiers.

1. Donner une équation particulière de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E).

Partie B : Dans cette partie on se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $(F) :\ 7^n - 3 \times 2^m = 1$

1. On suppose que $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geq 5$.
   a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 (\bmod 32)$.
   b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 (\bmod 5)$.
   d. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F) ?
3. Déterminer alors l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

Sujet :

Bac Blanc 14

EXERCICE 1.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=5\mathrm{e}^{-x}-3\mathrm{e}^{-2x}+x-3$.
On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y=x-3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-(x-3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $g(x)>0$.
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}_f$, N le point d'abscisse x de la droite $\mathscr{D}$ et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, calculer $g'(x)$.
3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ que l'on déterminera.
   Et donner une interprétation graphique.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction $\mathscr{A}$ définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $\mathscr{A}(x)=\displaystyle\int_0^x[f(t)-(t-3)]\,\mathrm{d}t$.

1. Hachurer sur le graphique le domaine dont l'aire est donnée par $\mathscr{A}(2)$.
2. Justifier que la fonction $\mathscr{A}$ est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathscr{A}(x)$.
4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathscr{A}(x)=2$?

EXERCICE 2.

Partie A : Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\,;\,+\infty[$ telle que, $(\forall x\geq 1);\ f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(x)$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote horizontale.
2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1\,;\,+\infty[$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie par $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Démontrer que $u_0=\dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. Prouver que : $(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in[1\,;\,2]);\ 0\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\leqslant\dfrac{1}{x^{n+1}}\ln(2)$.
3. En déduire que, $(\forall n\in\mathbb{N});\ 0\leqslant u_n\leqslant\dfrac{\ln(2)}{n}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 3.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que : $(E) \Leftrightarrow (z-2)(z^2 + az + b) = 0$.

(b) Résoudre (E)

2 On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant : $z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$.

(a) On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.
Montrer que : M appartient (H) si et seulement si $x^2 - y^2 = 4$.

(b) Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - i\sqrt{5}$ et $-3 + i\sqrt{5}$.
Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3 Soit R la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

(a) Déterminer les affixes de A', B' et C', images respectives de A, B et C par la rotation R (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

(b) On note M' l'image par R du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'.
On note (H') l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par R est un point de (H).
- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.
- En utilisant la question 2) a) prouver que M' appartient à (H') si et seulement si $x'y' = -2$.

4 Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A', B', C', la courbe (H'), puis la courbe (H).

EXERCICE 4 (LES DEUX PARTIES SONT INDÉPENDANTES).

Partie A : On considère l'équation : $36x - 25y = 5$ pour x et y entiers relatifs.

1 Montrer que pour, pour toute solution (x, y), x est multiple de 5.

2 Déterminer une solution particulière de l'équation, puis la résoudre.

3 Soit d le plus grand commun diviseur de x et y lorsque (x, y) est solution de l'équation.

(a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

(b) Quelles sont les solutions pour lesquelles x et y sont premiers entre eux?

Partie B : On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

1 Démontrer par récurrence que, n désignant un entier strictement positif, on peut écrire :

$$u^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } v^n = a_n - b_n\sqrt{3},$$

où a_n et b_n sont des entiers naturels.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2 Établir les égalités : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$.
En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.

Sujet :

Bac Blanc 15

EXERCICE 1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = x.\ln^n(x) & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(unité $2cm$).

Partie A

1 (a) Montrer que f_n est continue à droite en 0.

(b) Étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0.

(c) Calculer $f_n'(x)$ pour tout $x > 0$

2 (a) Dresser le tableau de variation de f_n, on distinguera deux cas suivant la parité de n.

(b) Montrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points A et B tels que $0 < x_A < x_B$

3 (a) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et construire ces deux courbes dans le même repère.

(b) Calculer, en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$

Partie B

On pose $F_n(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^1 f_n(x)dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0;1[$.

1 (a) Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie u_n lorsque α tend vers 0^+

(b) Calculer $F_1(\alpha)$, en déduire que $u_1 = -\dfrac{1}{4}$

2 (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$\forall \alpha \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $F_{n+1}(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2}{2}\ln^{n+1}(\alpha) - \dfrac{n+1}{2}F_n(\alpha)$

(b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = -\dfrac{n+1}{2}u_n$

3 Soit $\mathscr{A}_n$, l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et la droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

(a) Montrer que : $\mathscr{A}_n = 4|u_n|\,cm^2$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathscr{A}_n = \dfrac{n!}{2^{n-1}}$

(c) Montrer que pour tout $n \geq 3$, on a : $\mathscr{A}_{n+1} \geq 2\mathscr{A}_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n$

Partie C

On pose $G(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} t.\ln(t)dt$ avec $x \in \mathbb{R}$

1 (a) Sans calculer $G(x)$, montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$

(b) Déterminer le sens de variation de G.

2 (a) Calculer $G(x)$ en fonction de x.

(b) Dresser le tableau de variation de G.

EXERCICE 2.

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + y = \mathrm{e}^{-x}.$$

1 Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de (E).

2 Résoudre l'équation différentielle $(E_0): \quad y' + y = 0$.

3 Démontrer qu'une fonction v, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $v - u$ est solution de (E_0).

4 En déduire toutes les solutions de (E).

5 Déterminer la fonction f_2, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

EXERCICE 3.

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation $\left(E_\theta\right): z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 1 + 2i\mathrm{e}^{-i\theta} = 0$.

1 (a) Vérifier que $-8 + 4\cos^2(\theta) - 8\sin(\theta) = \left(2i(1+\sin\theta)\right)^2$.

(b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(E_\theta\right)$.

2 Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = \mathrm{e}^{-i\theta}$ et $z_C = 2i + \mathrm{e}^{i\theta}$.

(a) Vérifier que $z_B - z_A = \overline{z_C - z_A}$. En déduire que $AB = AC$

(b) Montrer que $z_C - z_A = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{e}^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

(c) En déduire la valeur de θ pour laquelle le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 4.

Partie A :

Soit x un nombre réel. Montrer que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie B :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1 Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2 Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3 Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.

4 Dans cette question on suppose que n est impair.

(a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

(b) Montrer que d divise n.

(c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5 On suppose maintenant que n est pair.

(a) Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

(b) Montrer que d est de la forme $d = 2p$, où p est impair.

(c) Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4.**)

EXERCICE 5.

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.
Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'évènement « le jeton tiré est blanc » et G l'évènement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un évènement E sera noté $\overline{\text{E}}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $p(\text{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\text{G}) = \dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. (c'est-à-dire : les probabilités sont identiques à chaque partie).
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3}, près. (on pourra s'aider d'un arbre)
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à $0,99$?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 10 DH par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 50 DH ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a) Donner la loi de probabilité de X et son espérance $\text{E}(X)$.
   b) On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\text{E}(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

SUJET :

BAC BLANC 16

EXERCICE 1.

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée f', sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Justifier que, si $n\leqslant x\leqslant n+1$, alors $f(n+1)\leqslant f(x)\leqslant f(n)$.

   b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,
   $$f(n+1)\leqslant u_n\leqslant f(n).$$

   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=[\ln(x+3)]^2$.

   a. Justifier la dérivabilité sur $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

   b. On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n-1}$.
   Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 2.

On considère la fonction f, définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(t)=\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1\,;\,+\infty[$.

   b. Montrer que f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

2. **Restitution organisée de connaissances**

   On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

   Pour tout réel x_0 de $[1\,;\,+\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=x_0$.

   On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\,;\,+\infty[$ est une primitive de f.

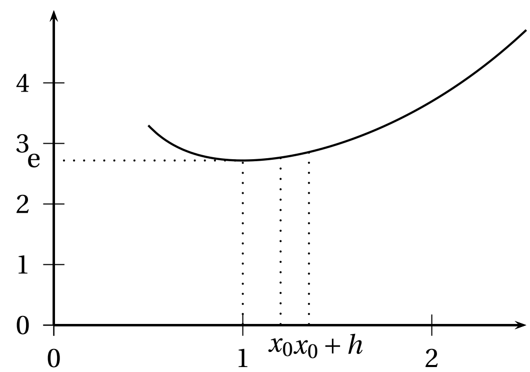
   a. Que vaut $\mathscr{A}(1)$?

   b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1\,;\,+\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :
   $$f(x_0)\leqslant\frac{\mathscr{A}(x_0+h)-\mathscr{A}(x_0)}{h}\leqslant f(x_0+h).$$

   c. Lorsque $x_0>1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h<0$ et tel que $x_0+h\geqslant 1$?

   d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$

   e. Conclure.



MATHÉMATIQUES PR. ABDELLAH AIT-CHEIKH 2SM-SIBM

EXERCICE 3.

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

1 Dans cette questions , on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Soit les événements suivants :

- A : « Les trois boules sont rouges »
- B : « Les trois boules sont de la même couleur »
- C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

(a) Calculer les probabilités $p(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

(b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2 Dans cette question, on tire successivement avec remise 10 boules cette urne. On considère les événements suivants :

- F : « Tirer au moins une boule jaune »
- G : « Tirer exactement une boule jaune »
- H : « Tirer deux boules rouges exactement »

Quelle est la probabilité des événements F, G et H?

3 Dans cette question, on remplace 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.
Soit les événements suivants :

- D : « Tirer deux boules rouges »
- E : « Tirer deux boules de la même couleur »

(a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

(b) Calculer la probabilité $P(E)$ de l'événement E en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 4.

$(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.
Soit A le point d'affixe 1; soit B le point d'affixe -1.
Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1 (a) Soit E le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

(b) On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2 (a) Soit K le point d'affixe $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F. Calculer l'affixe de K'.

(b) Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3 On désigne par R un point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

(a) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}^\star$, $z' + 1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$. En déduire que si $R(z) \in \mathscr{C}_3$ alors $|z'+1| = |z'|$.

(b) Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

EXERCICE 5.

Soit m un réel non nul.

1. Résoudre dans l'équation : $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$.
2. Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2)$.
   - a) Vérifier que $f(i) = 0$.
   - b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, M' et $M"$ d'affixes respectives :$i, i + m$ et $i - m$.
   - a) Vérifier que A est le milieu du segment $[M'M"]$.
   - b) Montrer que le triangle $OM'M"$ est isocèle.
   - c) Déterminer les valeurs de m pour que le triangle $OM'M"$ soit équilatéral.

EXERCICE 6.

(u_n) est une suite géométrique croissante de premier terme u_0 et de raison q tels que :

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 et déduire la valeur de q
2. On donne $u_1 = e^4$ et $q = e^3$
   - a) Exprimer u_n en fonction de n
   - b) Soit $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$. Exprimer S_n en fonction de n
3. Soit $a_n = n + 3$ avec $n \in \mathbb{N}$
   - a) Montrer que : $2S_n \wedge a_n = a_n \wedge 14$
   - b) Déterminer les valeurs possibles de : $2S_n \wedge a_n$
   - c) Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles, on a : $2S_n \wedge a_n = 7$
4. Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 7 de 2^n
5. Soit $b_n = 3n \times a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles on a :

$$\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$$

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52$ est divisible par 7.

EXERCICE 7.

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$(E) : \quad x(x-2)y' + 2(x+1)y = 6x - 1.$$

1. Résoudre sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$ l'équation homogène associée

$$(E_0) \quad x(x-2)y' + 2(x+1)y = 0.$$

   Que se passe-t-il pour les solutions au voisinage de 0 ? au voisinage de 2 ?
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur chacun des intervalles ci-dessus.

SUJET :

BAC BLANC 17

EXERCICE 1.

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (1-x)^n e^{2x}$.
On désigne par $\mathscr{C}_n$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$(unité graphique $2cm$).

Partie A :

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ et étudier la branche de la courbe $\mathscr{C}_n$ au voisinage de $+\infty$.
2. (a) Calculer $f_n'(x)$, puis dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2
   (b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
   (c) Tracer dans le même repère $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$

Partie B : Soit la fonction F définie sur $]-\infty,0]$ par $F(x)=\displaystyle\int_x^0 \frac{f_(t)}{1+e^{2t}}dt$

1. Montrer que F est dérivable sur $]-\infty,0]$ et que $F'(x)=\dfrac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$, puis étudier les variations de F.
2. (a) Montrer que $\forall\ x<0$; on a : $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^0 f_1(t)dt \le F(x) \le \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_x^0 f_1(t)dt = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}$
   (c) On admet que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\dfrac{3}{8}\le\ell\le\dfrac{3}{4}$

Partie C : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$

1. (a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_n>0$
   (b) Étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ pour $x\in[0;1]$. En déduire que (u_n) est décroissante.
2. (a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}u_n$
   (b) En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2 de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$
3. Montrer que $\forall n\ge2$ on a : $\dfrac{1}{n+1}\le u_n\le\dfrac{1}{n-1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty u_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$
4. Soit a un réel positif tel que $a\ne u_1$. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_1=a$ et $\forall n>1$ on a : $v_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{n+1}{2}v_n$ et soit $d_n=|v_n-u_n|$
   (a) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$, on a : $d_n=\dfrac{n!}{2^{n-1}}d_1$ puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n=+\infty$
   (b) Montrer que (v_n) est divergente.

Partie D : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $w_n=\dfrac{2^n}{n!}u_n$

1. (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\dfrac{2^{n-1}}{n!}\le1$
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $w_n\le\dfrac{2e^2}{n+1}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$
2. (a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $w_{n+1}=-\dfrac{2^n}{(n+1)!}+w_n$
   (b) Soit la fonction $h(x)=\left(\dfrac{3}{2}-x\right)e^{2x}$. Calculer $h'(x)$ et montrer que $w_1=\dfrac{1}{2}\left(e^2-3\right)$
   (c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a : $w_n=\dfrac{1}{2}\left(e^2-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}\right)$. Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}$

EXERCICE 2.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y + \cos(x)$

1. Déterminer deux nombres a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_0(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0)
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution g de (E) vérifiant $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

EXERCICE 3.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2iz - (1 + a^2) = 0$, $\quad a \in \mathbb{C}^*$.

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . On note z_1 et z_2 les solutions de (E) .
   (b) Montrer que : $\left(|z_1| = |z_2|\right) \Leftrightarrow \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$on donne les points A , B , M et N d'affixes respectives 1 , $-1 + 2i$, $i + a$ et $i - a$.
   (a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera .
   (b) Lorsque M n'appartient pas à la droite (AB) , donner la nature du quadrilatère $AMBN$.
3. On suppose que $a = \mathrm{e}^{i\theta} - 2i$ où $\theta \in [0; 2\pi]$.
   (a) Montrer que M décrit un cercle fixe $(\mathscr{C})$ que l'on précisera lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$.
   (b) En déduire l'ensemble $(\mathscr{C}')$ des points N lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$.

EXERCICE 4.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$\left(x - 1\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}\right) = x^k - 1$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. (a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
   (b) Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur $PGCD$.
   (a) On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.
   (b) On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le $PGCD$ de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
   (c) Calculer, en utilisant le résultat précédent, le $PGCD$ de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

EXERCICE 5.

Une urne contient deux boules blanches numérotées : 1; 2 et quatre boules noires numérotées : 3; 4; 5; 6. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Une expérience consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus grand des trois numéros tirés. Donner la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

2. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

   — A : " les deux numéros tirés sont de parité différente"

   — B : " les deux boules tirées sont de même couleur"

   a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

   b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de même couleur, quelle est la probabilité pour que les numéros inscrits sur les boules tirées soient de parité différente?

   c) Les évènement A et B sont-ils indépendants?

3. Une épreuve consiste a tirer deux boules de la manière suivante : On tire une boule;

   — Si elle est blanche, on la remet et on tire une deuxième boule;

   — Sinon, on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire une deuxième boule.

   a) Soit l'événement S : " obtenir deux boules noires".
   Montrer que $p(S) = \dfrac{2}{5}$.

   b) On répète l'épreuve précédente n fois, on remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On désigne par F_n " S est réalisé une seule fois dans les n épreuves" et on note $p_n = p(F_n)$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(p_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

SUJET :

BAC BLANC 18

EXERCICE 1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit f_n la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par :

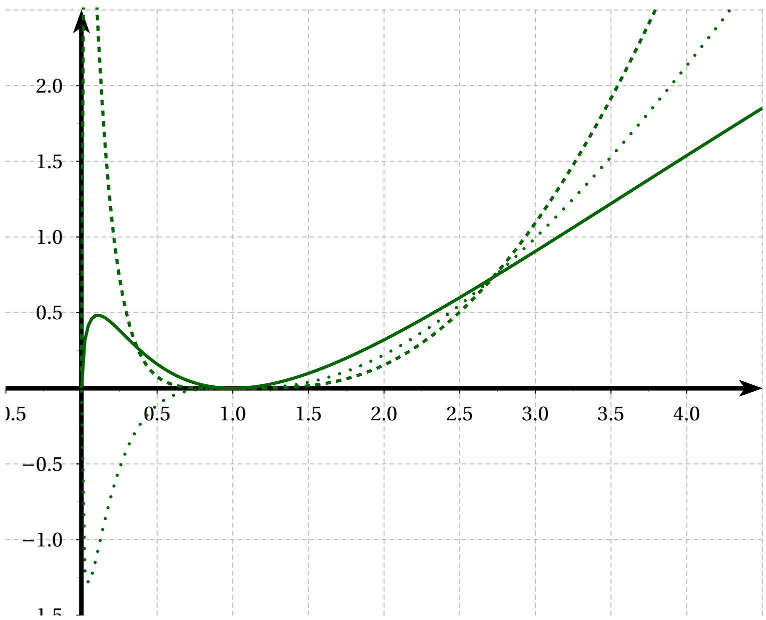
$f_n(x) = \dfrac{x\left(\ln(x)\right)^n}{x+1}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$

Partie A : Soit g_n la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $g_n(x) = n(x+1) + \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variation de g_n
2. Montrer que l'équation : $g_n(x) = 0$ admet dans $\left]0,+\infty\right[$ une unique solution α_n .
   Préciser le signe de $g_n(x)$
3. Vérifier que $\alpha_n < e^{-n}$ et en déduire la limite de la suite $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 2}$

Partie B : On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0 .
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{\left(\ln(x)\right)^{n-1} g_n(x)}{\left(x+1\right)^2}$, puis dresser le tableau de variation de f_n
   (on distinguera deux cas n est pair et n est impair)
3. Vérifier que $f_n(e) = \dfrac{e}{1+e}$ et que pour tout x de l'intervalle $\left[1,e\right]$: $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$
4. Dans la figure ci-dessous on a tracé les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$. Indiquer sur la figure le nom de chaque courbe .



5. On considère l'équation $\left(e_n\right) : f_n(x) = \dfrac{e}{2\left(1+e\right)}$.
   (a) Montrer que $\left(e_n\right)$ admet dans l'intervalle $\left[1,e\right]$ une unique solution u_n
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $f_{n+1}\left(u_n\right) \leq \dfrac{e}{2\left(1+e\right)}$. En déduire que (u_n) est croissante et qu'elle converge vers un réel ℓ .
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $f_n\left(u_n\right) \leq \dfrac{\ell\left(\ln(\ell)\right)^n}{\ell+1}$
   (d) Montrer que $\ell = e$

EXERCICE 2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $g'(x) = \dfrac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

   (b) Dresser le tableau de variation de g .

2. (a) Dresser le tableau de variation de g' .

   (b) En déduire que pour tout réel x , $0 \leq g'(x) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

   (c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et que $\alpha \in \left]0.9,1\right[$.

3. Construire $\mathscr{C}$.

4. (a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]0,1\right[$.

   (b) Montrer que pour tout x de $\left]0,1\right[$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{1-x^2}\right)$.

   (c) Tracer dans le même repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe $\mathscr{C}'$ de g^{-1} .

EXERCICE 3.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

2. Trouver toutes les primitives de $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.

3. Trouver la solution s'annulant en $x=9$ de l'équation $2xy'+y=x$.

4. Déterminer toutes les solutions de l'équation $y''+2y'+y=e^{-x}$.

EXERCICE 4.

1. (a) Écrire $(1-i)^2$ sous forme algébrique .

   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2-\left(3+5i\right)z-2+4i=0$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = 2z^3-\left(7+5i\right)z^2+\left(4+14i\right)z+4-8i$.

   (a) Vérifier que $P(2)=0$.

   (b) Trouver les nombres complexes b et c tels que $P(z) = \left(z-2\right)\left(2z^2+bz+c\right)$.

   (c) Résoudre alors, dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=\dfrac{1+3i}{2}$ et $z_C=1+i$. Montrer que les points A , B et C sont alignés .

4. A tout point M du plan d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\dfrac{1}{2}z+\dfrac{3}{2}(1+i)$.

   (a) Montrer que $z'-z_C = -\dfrac{1}{2}\left(z-z_C\right)$.

   (b) En déduire que si M est un point de la droite (AB) alors M' est aussi un point de (AB).

EXERCICE 5.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4n-1$ lorsque n est un entier naturel.

Partie A :Quelques exemples

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $4^n \equiv 1[3]$
2. Prouver que $4^{28}-1$ est divisible par 29
3. (a) Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste modulo 17 de 4^n

   (b) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, on a : $4^{4k} \equiv 0[17]$
4. Le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 17 pour tout entier naturel n?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B :Divisibilité par un nombre premier.

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $4^n \equiv 1[p]$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $4^n \equiv 1[p]$,On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1[p]$et r le reste de la division euclidienne de n par b.

   (a) Montrer que : $4^r \equiv 1[p]$. En déduire que $r = 0$.

   (b) Montrer que : $4^n - 1$ est divisible par $p \Leftrightarrow n \equiv 0[b]$

   (c) En déduire que b divise $p-1$.

EXERCICE 6.

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher , portant les numéros : -2, -1,1, 1 et 2 .
Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules de l'urne .

1. On considère les événements suivants :

   — A : Aucune boule tirée ne porte le numéro 1

   — B : Parmi les trois boules tirées , deux seulement portent le numéro 1

   — S : La somme des numéros inscrits sur les deux boules qui restent dans l'urne est nulle

   (a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

   (b) Montrer que $p(S) = 0,3$.
2. On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne , on note X : la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois où S est réalisé .
   X : la variable aléatoire réelle prenant pour valeur le nombre de fois où S est réalisé .

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X .

   (b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

SUJET :

BAC BLANC 19

EXERCICE 1.

Partie A : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^2}$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 (a) Montrer que pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1}{2x^3(x+1)}$

(b) Dresser le tableau de variation de f .

(c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ en précisant sa tangente au point d'abscisse 1 .

2 (a) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $0<\alpha<1$ et $f(\alpha)=0$.

(b) En déduire le signe de $f(x)$ pour $x\geq\alpha$.

Partie B : Dans cette partie n désigne un entier naturel non nul .
On se propose de déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{n^n e^{-n}}{n!}$.

1 Démontrer , en utilisant les variations de la fonction f que : $\ln(n+1)-\ln(n)\leq\frac{1}{n}-\frac{1}{4n^2}$ (1).
En déduire que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e^{1-\frac{1}{4n}}$.

2 Démontrer que $u_{n+1}\leq u_n e^{-\frac{1}{4n}}$ En déduire que $u_{n+1}\leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}$

(a) Démontrer en utilisant la relation (1) que : $\ln(n+1)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$

(b) En déduire que : $u_{n+1}\leq u_1 e^{-\frac{1}{4}\ln(n+1)}$

3 Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2.

Soit f la fonction définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$.
On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 (a) Calculer et interpréter graphiquement : $\lim_{x\to0^+}f(x)$, $\lim_{x\to1^-}f(x)$, $\lim_{x\to1^+}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

(b) Dresser le tableau de variation de f.

(c) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

2 Pour tout entier naturel $n\geq2$, on pose : $u_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}-\ln\left(\ln(n)\right)$

(a) Montrer que pour tout $n\geq2$; $\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\leq\int_n^{n+1}f(t)\,dt\leq\frac{1}{n\ln(n)}$

(b) Montrer que pour tout $n\geq2$, on a $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}-\int_n^{n+1}f(t)\,dt$.
En déduire le sens de variation de (u_n).

(c) Montrer que pour tout entier $n\geq2$, $u_{n+1}-u_n\geq f(n+1)-f(n)$.
En déduire que $u_n\geq-\ln(\ln(2))$.

(d) Déduire de ce que précède que la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que :

$$-\ln(\ln(2))\leq\ell\leq\frac{1}{2\ln(2)}-\ln(\ln(2))$$

EXERCICE 3.

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$ et Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E').
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

EXERCICE 4.

1. $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ et $\beta = n + 3$
   - a) Montrer que $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge 10$
   - b) Déterminer les valeurs possibles de $d = \beta \wedge 10$
   - c) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles $\alpha \wedge \beta = 5$
2.
   - a) Étudier suivants les valeurs de l'entier naturel n les restes possible de 4^n par 11
   - b) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n vérifiant le système suivant : $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$

EXERCICE 5.

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$. Les solutions seront notées z' et z'', z' étant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Donner la valeur exacte de $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$(unité graphique 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + i\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - i\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon. Tracer ce cercle puis construire les points A et B.
2. On note O' l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et B' l'image de B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Calculer les affixes des points O' et B' et construire ces points.
3. Soit I le milieu du segment $[OB]$.
   - a) Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle $AO'B'$?
   - b) Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$. Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{O'B'}$ est égale à $3\sqrt{3} - i$.
   - c) La conjecture émise à la question 2. a. est-elle vraie ?

EXERCICE 6.

Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires . Un joueur tire successivement et au hasard deux boules de l'urne en respectant la règle suivante :

— Si la boule tirée est noire , il la remet dans l'urne .

— Si la boule tirée est blanche , il ne la remet pas dans l'urne .

On considère l'événement A : « obtenir deux boules de couleurs différents »

1 Montrer que $p(A) = \frac{27}{50}$.

2 On répète cette expérience trois fois de suite . Soit X la variable aléatoire associant au nombre de fois où A est réalisé .

a Déterminer la loi de probabilité de X .

b Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Sujet :

Bac Blanc 20

EXERCICE 1.

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on définit la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ par :

$f_n(x) = (\ln(x))^n$ et on désigne par $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

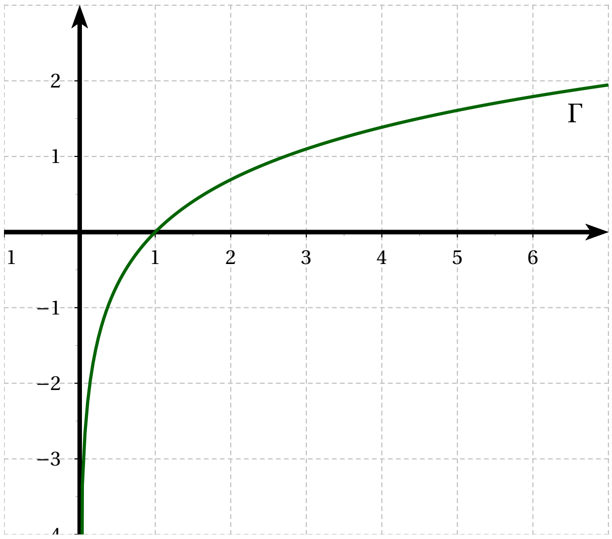
1 (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et discuter $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n

(b) Calculer $f_n'(x)$

(c) Dresser le tableau de variation de f_n suivant la parité de n

2 (a) Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$

(b) On donne, ci-joint, la courbe Γ de la fonction ln. Utiliser Γ pour construire les points d'intersections de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ puis construire les deux courbes .



3 Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose :

$I_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$

(a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_2 = \dfrac{e-2}{2}$

(b) Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on $I_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + I_n$

(c) Vérifier que $I_2 = -1 + e.u_2$

(d) En déduire que $\forall n \geq 2$; on a : $I_n = -1 + e.u_n$.

4 (a) Montrer que $\forall x \in [1;e]$; on a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$. Déduire que $|I_n| \leq \dfrac{e-1}{n!}$

(b) Déduire la limite de I_n puis celle de (u_n).

EXERCICE 2.

1 Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E) : $\quad y' = \frac{2y}{x} + 1$
Puis déterminer la solution de (E) qui vérifie $y(1) = 0$.

2 On considère l'équation différentielle (E) $\quad y' - 3y = e^{2x}$.
Déterminer la solution de (E) qui vérifie $y'(0) = 1$.

EXERCICE 3.

On considère l'équation $(E): 8x+5y=1$ où x et y sont des entiers relatifs

1. (a) Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) admet des solutions

   (b) Donner une solution particulière de (E)

   (c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

2. Soit n un entier naturel tel qu'il existe un couple (a,b) de nombres entiers vérifiant le système

$$S:\begin{cases} n=8a+1 \\ n=5b+2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que le couple $(a,-b)$ est une solution de (E)

   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système S d'inconnu n

3. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E'): 8x+5y=100$.

EXERCICE 4.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.

1. (a) Vérifier que :$\left(e^{i\theta}-i\right)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

   (b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :$z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$

2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   (a) Déterminer et construire l'ensemble φ_1 décrit par le point M_1 lorsque varie dans $[0,2\pi[$.

   (b) Calculer l'affixe du milieu I du segment .

   (c) Déduire l'ensemble φ_2 décrit par le point M_2 lorsque varie dans $[0,2\pi[$ .Construire φ_2 .

3. (a) Montrer que $(M_1M_2)^2=8\left(1-\sin\theta\right)$

   (b) Déduire la valeur de θ pour la quelle M_1M_2 est maximale.

EXERCICE 5.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-(1+3i)z-4=0$.

2. On considère l'équation $(E): z^3-(1+i)z^2-(2i-2)z-8i=0$

   (a) Montrer que l'équation (E) possède une solution imaginaire pure qu'on notera .

   (b) Résoudre alors dans (E) .

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A , B et C , les points d'affixes respectives : $z_A=-1+i; z_B=-2i$ et $z_C=2+2i$.

   (a) Écrire sous forme exponentielle de z_A; z_B et z_C.

   (b) Justifier que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$.

   (c) En déduire la nature du triangle ABC .

   (d) on considère les points E et D tels que $ABEC$ et $ABCD$ soient deux parallélogrammes .

      i Déterminer les affixes des points E et D.

      ii Prouver que les points E , C et D sont alignés .

EXERCICE 6.

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne , elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles , 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons . Sur l'ensemble de la clientèle , 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe .
En fait , 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe , alors que seulement 20% des clients pour raisons touristiques voyagent en première classe .
On choisit au hasard un client de cette compagnie , on suppose que chaque client à la même probabilité d'être choisi , on considère les événements suivants :

- A : « Le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
- T : « Le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
- D : « Le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
- V : « Le client interrogé voyage en première classe »

1. Déterminer : $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p\left(V/A\right)$ et $p\left(V/T\right)$
2. Donner un arbre pondéré traduisant cette situation .
3. a) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles .
   b) Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques .
   c) En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques .
4. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe .
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .
   On choisit n clients de cette compagnie de façon indépendante et on note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en second classe .
   a) Montrer que $p_n = 1-(0,4)^n$.
   b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n \geq 0,9999$.

Sujet :

Bac Blanc 21

EXERCICE 1.

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x^2\Big(\ln(x)-1\Big)-x & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et on désigne par $(\mathbf{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1 Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=2x\ln(x)-x-1$.
On donne ci-dessous le tableau de variation incomplet de g .

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$			
g	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Le réel α est l'unique solution de l'équation $g(x)=0$.

ⓐ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ et $g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

ⓑ En déduire le signe de $g(x)$.

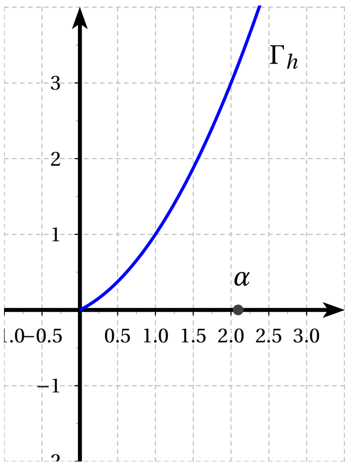
2 ⓐ Montrer que f est continue à droite en 0 .

ⓑ Montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner une équation de la demi-tangente T à $(\mathbf{C}_f)$ au point d'abscisse 0 .

ⓒ Étudier la position relative de la courbe $(\mathbf{C}_f)$ par rapport à la droite $\Delta : y=-x$.

3 ⓐ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat .

ⓑ Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$; $f'(x)=g(x)$ et dresser le tableau de variation de f .



4 Dans la figure ci-contre , on a tracé dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe Γ_h de la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x^2+x}{2}$ et on a placé le réel α .

ⓐ Vérifier que $\ln(\alpha)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\alpha}$ et que $f(\alpha)=-h(\alpha)$.

ⓑ Construire le point A de $(\mathbf{C}_f)$ d'abscisse α et le point $B(\mathrm{e},-\mathrm{e})$.

5 Tracer T et $(\mathbf{C}_f)$.

6 ⓐ A l'aide d'une intégration par parties , calculer $\displaystyle\int_1^{\alpha} x^2\ln(x)\,dx$.

ⓑ Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathbf{C}_f)$, Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.
Montrer que $\mathscr{A}(\alpha)=\dfrac{5\alpha^3-3\alpha^2-8}{18}$.

EXERCICE 2.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 2iz - (1+a^2) = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$.

1 (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) . On note z_1 et z_2 les solutions de (E) .

(b) Montrer que : $\left(|z_1| = |z_2|\right) \Leftrightarrow \left(a \in \mathbb{R}^*\right)$

2 Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$on donne les points A , B , M et N d'affixes respectives 1 , $-1+2i$, $i+a$ et $i-a$.

(a) Montrer que M et N sont symétriques par rapport à un point fixe I que l'on précisera .

(b) Lorsque M n'appartient pas à la droite (AB) , donner la nature du quadrilatère $AMBN$.

3 On suppose que $a = e^{i\theta} - 2i$ où $\theta \in [0; 2\pi]$.

(a) Montrer que M décrit un cercle fixe $(\mathscr{C})$ que l'on précisera lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$.

(b) En déduire l'ensemble $(\mathscr{C}')$ des points N lorsque θ varie dans $[0; 2\pi]$.

EXERCICE 3.

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

1 Dans cette questions , on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Soit les événements suivants :

- A : « Les trois boules sont rouges »
- B : « Les trois boules sont de la même couleur »
- C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

(a) Calculer les probabilités $p(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

(b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2 Dans cette question, on tire successivement avec remise 10 boules cette urne. On considère les événements suivants :

- F : « Tirer au moins une boule jaune »
- G : « Tirer exactement une boule jaune »
- H : « Tirer deux boules rouges exactement »

Quelle est la probabilité des événements F, G et H?

3 Dans cette question, on remplace 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne.
Soit les événements suivants :

- D : « Tirer deux boules rouges »
- E : « Tirer deux boules de la même couleur »

(a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $p(D) = \dfrac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

(b) Calculer la probabilité $P(E)$ de l'événement E en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 4.

On considère l'équation différentielle $(E) \quad y'' + 4y = \cos(4x)\cos(2x)$.

1 Montrer que $\cos(4x)\cos(2x) = \frac{1}{2}(\cos(6x) + \cos(2x))$.

2 Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(E1) \quad y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(6x)$.
Trouver la solution générale de l'équation différentielle $(E2) \quad y'' + 4y = \frac{1}{2}\cos(2x)$.

3 En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

4 Trouver la solution de (E) déterminée par $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

EXERCICE 5.

On considère l'équation : $36x - 25y = 5$ pour x et y entiers relatifs.

1 Montrer que pour, pour toute solution (x, y), x est multiple de 5.

2 Déterminer une solution particulière de l'équation, puis la résoudre.

3 Soit d le plus grand commun diviseur de x et y lorsque (x, y) est solution de l'équation.

(a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

(b) Quelles sont les solutions pour lesquelles x et y sont premiers entre eux?

EXERCICE 6 (LES DEUX PARTIES SONT INDÉPENDANTES).

Partie A : Soit $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne $\oplus$ définie par $a \oplus b = ab, \forall a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que $\lambda \otimes a = a^\lambda, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que $E = (\mathbb{R}_+^*, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Partie B : Soit E un ensemble muni d'une loi interne $\star$. On appelle translation à droite (resp. à gauche) par $a \in E$, l'application d_a (resp. g_a) de E dans E définie par $d_a(x) = a \star x$ (resp. $g_a(x) = x \star a$).

1 Montrer que dans un groupe les translations à droite et à gauche sont des bijections.

2 Réciproquement, si la loi $\star$ de E est associative, et que les translations à droite et à gauche sont des bijections, on va montrer que $(E, \star)$ est un groupe.

(a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $e_x \in E$ (resp. $f_x \in E$) tel que $e_x \star x = x$ (resp. $x \star f_x = x$).

(b) Si $x, y \in E$, montrer que $e_x = e_y$ (noté e dorénavant) et $f_x = f_y$ (noté f dorénavant).

(c) Montrer que $e = f$ (noté e dorénavant).

(d) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $\bar{x} \in E$ (resp. $\bar{\bar{x}} \in E$) tel que $\bar{x} \star x = e$ (resp. $x \star \bar{\bar{x}} = e$).

(e) Montrer que $\bar{x} = \bar{\bar{x}}$.

(f) Conclure.

Sujet :

Bac Blanc 22

EXERCICE 1.

Partie A : Soit la fonction g définie sur $]0;1]$ par $g(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

1. (a) Étudier la dérivabilité de g à gauche en 1.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $]0;1[$, puis dresser le tableau de variation de g.
   (c) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de g dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
2. (a) Justifier que g réalise une bijection de $]0;1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   (b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$
   (c) tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}$' de g^{-1}

Partie B : On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$
2. Étudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.
3. (a) Vérifier que : $\forall t\in[2;+\infty[$, on a : $e^{-t^2}\le e^{-2t}$
   En déduire que pour tout $x\ge 2$, $F(x)\le \frac{1-e^{4-2x}}{2e^4}+\int_0^2 e^{-t^2}dt$
   (b) Prouver que pour tout $x\ge 2$, $F(x)\le \frac{1}{2e^4}+\int_0^2 e^{-t^2}dt$
4. Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$ et que F possède une limite finie l en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite)

Partie C

1. Soit G la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $G(x)=F\left(x\sqrt{n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
   (a) Montrer que G est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer $G'(x)$
   (b) En déduire que $\int_0^1 e^{-nx^2}dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt$
2. (a) Montrer que : $\forall t\in\mathbb{R}$, on a : $e^t\ge 1+t$ et que pour tout $t\ge 0$, on a : $e^{-t}\le\frac{1}{1+t}$
   (b) En déduire que : $\forall\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}dt\ge\sqrt{n}\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$ et $\int_0^1 e^{-nx^2}dx\le\int_0^1\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx$

Partie D : On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t dt$ et $v_n=(n+1)u_n.u_{n+1}$

1. (a) Calculer u_1 et u_2
   (b) Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}.u_n$. En déduire que (u_n) est décroissante
2. Montrer que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; on a : $\frac{n+1}{n+2}\le\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}\le 1$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$
3. (a) Vérifier que : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$; on a : $\sqrt{n}u_n=\sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}}.v_{n-1}}$
   (b) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}.u_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$
4. Montrer que : $u_{2n+1}=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$ et que $\int_0^1\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}x dx$
5. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\sqrt{n}.u_{2n+1}\le G(1)\le\sqrt{n}.u_{2n-2}$
6. Montrer alors que : $\lim\limits_{n\to+\infty}G(1)=l=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

EXERCICE 2.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(i)$ et $A'(-i)$.

Soit l'application $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z' = f(z) = \dfrac{\overline{z}(z-i)}{\overline{z}+i} \end{array}$ et $F: \begin{array}{ccc} P-\{A\} & \rightarrow & P \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$

1. (a) Montrer que $|z'| = |z|$ et $arg(z') \equiv -arg(z) + 2arg(z-i)[2\pi]$ pour tous $z \neq 0$ et $z \neq i$
   (b) Montrer que si $|z| = 1$ alors $f(z) = -i$
2. (a) Déterminer l'ensemble des points invariants par F.
   (b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$
3. (a) Montrer que $z' + i = \dfrac{z\overline{z}-1}{|\overline{z}+i|^2}(z-i)$ et $z' - z = \dfrac{-i(z+\overline{z})}{|\overline{z}+i|^2}(z-i)$
   (b) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{A'M'}$ sont colinéaires et $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont aussi colinéaires.
   (c) En déduire une construction du point M' a partir du point M.

EXERCICE 3.

Une urne contient deux boules blanches numérotées : 1; 2 et quatre boules noires numérotées : 3; 4; 5; 6. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Une expérience consiste à tirer simultanément trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus grand des trois numéros tirés. Donner la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
2. On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :
   — A : " les deux numéros tirés sont de parité différente"
   — B : " les deux boules tirées sont de même couleur"
   (a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
   (b) Sachant qu'on a obtenu deux boules de même couleur, quelle est la probabilité pour que les numéros inscrits sur les boules tirées soient de parité différente?
   (c) Les évènement A et B sont-ils indépendants?
3. Une épreuve consiste a tirer deux boules de la manière suivante : On tire une boule;
   — Si elle est blanche, on la remet et on tire une deuxième boule;
   — Sinon, on la garde à l'extérieur de l'urne et on tire une deuxième boule.
   (a) Soit l'événement S : " obtenir deux boules noires".
   Montrer que $p(S) = \dfrac{2}{5}$.
   (b) On répète l'épreuve précédente n fois, on remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne. On désigne par F_n " S est réalisé une seule fois dans les n épreuves" et on note $p_n = p(F_n)$ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(p_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 4.

Partie A : Montrer que pour tout entiers naturels non nuls a et b, si $a \wedge b = 1$ alors $a^2 \wedge b^2 = 1$

Partie B : On considère la suite S définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$.

On se propose de calculer, pour tout entier naturel n non nul, $S_n \wedge S_{n+1}$.

1. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a : $S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Étude de cas où n est pair. Supposons que $n = 2k$ tel que $k \in \mathbb{N}^*$.
   - a) Montrer que $S_{2k} \wedge S_{2k+1} = (2k+1)^2\left(k^2 \wedge (k+1)^2\right)$
   - b) Calculer $k \wedge k+1$
   - c) Calculer alors, $S_{2k} \wedge S_{2k+1}$
3. Étude de cas où n est impair. Soit $n = 2k+1$ tel que $k \in \mathbb{N}$
   - a) Montrer que $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux
   - b) Calculer $S_{2k+1} \wedge S_{2k+2}$
4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

SUJET :

BAC BLANC 23

EXERCICE 1.

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
3. Soit $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $U_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\left(g(t)-\ln(t)\right)dt$.
   - (a) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, on a : $g(t)-\ln(t)=\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}\right)$.
   - (b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{(n+1)^2}}\right)\leq U_n\leq\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$.
   - (c) Calculer la limite de $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie B : Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}\sqrt{t^2+1}\,dt$

1. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F'(x)=\dfrac{1}{4}\left(e^x-e^{-x}\right)^2$.
2. Calculer $F(0)$ puis $F(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$
   On donne $\mathscr{C}=\left\{M(x,y) \text{ telque } y=\sqrt[4]{x+1}, \text{avec } 0\leq x\leq 1\right\}$.
   Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation de $\mathscr{C}$ autour de $(O;\vec{i})$.

EXERCICE 2.

Partie A : On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x\sqrt{x}}$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. (a) Dresser le tableau de variation de f.
   - (b) Tracer $\mathscr{C}_f$
2. Calculer l'aire de la région du plan limité par les droites $x=\dfrac{1}{e}$; $x=1$; l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$.

Partie B : On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\dfrac{1}{2^{n+1}n!}\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\left(\ln(x)\right)^n}{x\sqrt{x}}dx$

1. (a) Calculer I_1
   - (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|I_n|\leq\dfrac{1}{n!2^n}$
   - (c) Calculer la limite de I_n
2. (a) On pose pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{e};1\right]$, $u(x)=\dfrac{(\ln(x))^n}{x}$. Déterminer une primitive de u.
   - (b) En intégrant I_n par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1}=I_n+\dfrac{(-1)^{n+1}\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$
3. (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=-1+\sqrt{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!2^k}$.
   - (b) En déduire la limite de la somme $S_n=1-\dfrac{1}{1!2}+\dfrac{1}{2!2^2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{n!2^n}$.

EXERCICE 3.

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par

$$M(x,y) \mapsto x + iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $f : P \mapsto P$ qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z' = \dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Sur quel sous ensemble de P, f est-elle définie ?
2. Calculer $|z'|$ pour z affixe d'un point M situé dans le demi plan ouvert

$$H := \{M(x,y) \in P \mid y > 0.\}$$

3. En déduire l'image par f de H.

EXERCICE 4.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^2 - (1+a)(1+i)z + \left(1+a^2\right)i = 0,$$

où a est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication : on pourra déterminer les racines carrées complexes de $-2i(1-a)^2$).
2. On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1, Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 5.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 27$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 4$$

1. Calculer : u_1, u_2, u_3 et u_4. Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[8]$.
   En déduire que pour tout entier n, $u_{2n} \equiv 3[8]$ et $u_{2n+1} \equiv 5[8]$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 50 \times 3^n + 4$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 54[100]$.
5. Montrer que deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.

EXERCICE 6.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

— U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n un entier ≥ 1)

— U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire une boule de U_2 et on la met dans U_1, l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1 On considère l'événement A : "après l'épreuve, les urnes se trouvent chacune dans leur configuration de départ "

(a) Montrer que la probabilité de A est $p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$.

(b) Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $(+\infty)$.

2 On considère l'événement B : " après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche". Vérifier que $p(B) = \frac{6}{4(n+3)}$

3 Un joueur mise 20 dinars et effectue une épreuve. A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2 :

— Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ dinars.

— Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n dinars.

— Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

(a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur.

(b) Déterminer la loi de probabilité de X.

(c) Calculer $E(X)$.

(d) Déterminer le nombre minimal des boules blanches que U_1 doit les contenir pour que ce jeu soit favorable.

SUJET :

BAC BLANC 24

EXERCICE 1.

Partie A : On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée.
Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

— $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f^2(x) = (f')^2(x) - 4$;

— $f'(0) = 2$

— la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1 a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) \neq 0$.

b) Calculer $f(0)$

2 Montrer que, $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f''(x) = f(x)$

3 a) Vérifier que $(f'+f)' = f'+f$ et $(f'-f)' = -f'+f$

b) Résoudre les équations différentielles : $(E) : y' = y$ et $(E') : y' = -y$

c) En déduire que , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

4 On désigne par $\mathscr{C}_f$la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire $\mathscr{C}_f$.

5 Pour $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on pose $h(x) = \ln\left(\tan(x)\right)$.

a) Montrer que h est une bijection de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Partie B : Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{dx}{f'(x)}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{f^{2n}(x)}{f'(x)} dx$

1 Calculer u_0

a) Montrer que, $\left(\forall x \in [0; \ln(\sqrt{3})]\right)$, on a : $0 \leq \dfrac{f^{2n}(x)}{f'(x)} \leq \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$

b) Calculer alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{4^n}$

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} + 4u_n = \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}$.

Partie C : On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^k \frac{1}{2k+1}$ et $V_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Montrer que $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$.

2 En déduire que : $2\sqrt{3}\left(V_n - V_{n+1}\right) = \dfrac{1}{2n+1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

3 Montrer que $S_n = 2\sqrt{3}\left(V_0 - V_{n+1}\right)$ et déduire que (S_n) converge vers le réel $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$

MATHÉMATIQUES PR. ABDELLAH AIT-CHEIKH 2SM-SIBM

EXERCICE 2.

1 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2\cos(\alpha)z+1=0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1=0,\ \text{où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

(a) On pose : $P_\alpha(z)=z^{2n}-2\cos(\alpha)z^n+1$. Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z)=\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right)+1\right)\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+1\right)\cdots\left(z^2-2\cos\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)+1\right).$$

(b) Prouver, à l'aide des nombres complexes, la formule suivante : $1-\cos\theta=2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, $\quad \theta\in\mathbb{R}$.

(c) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{n}\right)\cdots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\dfrac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$.

2 Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha)=\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(\frac{\alpha}{2n}+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

(a) Montrer que, pour tout α non nul, on a : $2^{n-1}H_n(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}$.

(b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

EXERCICE 3.

Une urne contient onze boules : cinq boules noires , quatre boules rouges et deux boules vertes .
Les boules sont indiscernables au toucher .
On tire au hasard successivement avec remise trois boules de l'urne .
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

— A : « Avoir trois boules de même couleur »
— B : « Avoir une seule boule rouge »
— C : « Avoir au moins une boule noire »
— D : « Avoir un tirage tricolore »

EXERCICE 4.

On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S) suivant : $\begin{cases} x\equiv a[p] \\ x\equiv b[q]\end{cases}$ avec $a,b,p,q\in\mathbb{Z}$ et $p\wedge q=1$

1 (a) Montrer qu'il existe un couple $(u_0;v_0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ tel que $pu_0+qv_0=1$

(b) Montrer que $x_0=bpu_0+aqv_0$ est une solution de (S).

2 Soit x une solution de (S), montrer que pq divise $x-x_0$.

3 Soit x un entier tel que pq divise $x-x_0$, montrer que x solution de (S).

4 Déduire l'ensemble des solutions de (S).

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 3[13]\end{cases}$

Sujet :

Bac Blanc 25

EXERCICE 1.

Partie A : Soit la fonction f par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln|1+x|}{x} & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. (a) Préciser l'ensemble de définition D_f de f
   (b) Montrer que f est continue en 0.
2. On considère la fonction $h$définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln|1+x|$
   (a) Calculer $h'(x)$
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α autre que 0 et que $-4,6 < \alpha < -4,5$
   (c) Donner alors le signe de $h(x)$
3. (a) Calculer $f'(x)$
   (b) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{1+\alpha}$ et donner le tableau de variation de f.
4. Construire dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$la courbe $\mathscr{C}_f$de f. On prend $f(\alpha) = -0,28$

Partie B : Soit $g$la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$ par : $\begin{cases} g(x) = |1+x|^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ g(0) = \mathrm{e} \end{cases}$

1. (a) Dresser le tableau de variation de g
   (b) Construire dans un autre repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$la courbe $\mathscr{C}_g$
2. Soient les suite (u_n) et (v_n). (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et (v_n) définie sur $\mathbb{N} - \{0; 1\}$ par $v_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$. Montrer que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
3. Montrer que $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ puis donner un encadrement du nombre e pour $n = 100$.

Partie C :

1. Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right[$, on a $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$
2. Soit $A(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)\left(1 + \dfrac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{n}{n^2}\right)$
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A(n) = \mathrm{e}$
3. Soit la suite B définie par $B(n) = \left(1 + \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{n^3}}\right)\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^3}}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}\right)$
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$
   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} B(n) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}}$

EXERCICE 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_n) : z^n = (iz+2i)^n$

1 (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, (E_2) et mettre les solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique. $(Im(z_1) > 0)$

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $u_p = z_1^p + z_2^p$. Montrer que $u_p = 2(\sqrt{2})^p \cos\left(\frac{3p\pi}{4}\right)$.

(c) En déduire les valeurs de p pour lesquelles $u_p = (\sqrt{2})^{p+1}$.

2 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points $A(-2)$ et $M(z)$.

(a) Montrer que si z est solution de (E_n) alors $OM = AM$

(b) En déduire que les solutions de (E_n) s'écrient sous la forme $-1+\lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3 (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation (E_n)

(b) Montrer que les solutions de (E_n) s'écrient sous la forme :

$$z_k = -1 + i\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}\right) \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$$

EXERCICE 3.

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2; deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

Partie A : Question de cours

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$.

Partie B : Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.

On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1 On note :

— A, l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes »;

— B, l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 ».

(a) Calculer la probabilité de A.

(b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{9}{14}$

(c) Les événements A et B sont-ils indépendants?

2 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.

(a) Déterminer la loi de probabilité de X.

(b) Calculer l'espérance mathématique de X.

(c) Calculer la variance de X.

Partie C : L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

1 Déterminer la probabilité de l'événement C : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2 »

2 L'enfant répète n fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. On note p_n, la probabilité de l'évènement D_n « C soit réalisé au moins une fois »

Exprimer p_n en fonction de n.

3 Étudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

EXERCICE 4.

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 45x - 106y = 1$

1 (a) Vérifier que le couple $(-73;-31)$ est une solution de (E)

(b) En déduire toutes les solutions de (E)

(c) Trouver l'unique entier naturel d tel que $45d \equiv 1[106]$ et $1 \leq d \leq 105$

2 Montrer que 107 est un nombre premier

3 On désigne par $A = \{1;2;3;\cdots;106\}$

On définit les deux fonctions f et g de A dans A de la manière suivante :

Pour tout α de A :

— $f(\alpha)$ est le reste de la division euclidienne de α^{45} par 107

— $g(\alpha)$ est le reste de la division euclidienne de α^{d} par 107

(a) Montrer que pour tout $\alpha \in A$; $\alpha^{106} \equiv 1[107]$

(b) Montrer que pour tout $\alpha \in A$; $f(g(\alpha)) = \alpha$