OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES en $T^{le}C$

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur

Groupe WhatsApp

LES GRANDS PROFS DE MATHS

3EME EDITION

AVANT PROPOS

Dans un contexte où l'insertion dans le monde de l'emploi est devenue de plus en plus difficile, beaucoup d'Etats ont compris qu'en ce qui concerne le système éducatif, il faut mettre l'apprenant au centre de la construction du savoir ; il faut une école soucieuse d'outiller les apprenants afin qu'ils puissant faire face à des situations de vie réelle, complexes et diversifiées. À la place d'une école coupée de la société, il faut une école intégrée, soucieuse du développement durable, et qui prend en compte les cultures et les savoirs locaux. C'est ainsi que dès 2014, le Cameroun a emboité le pas à d'autres pays africains et a ouvert les portes à l'APC qui remplacera progressivement l'APO jusqu'en classe de terminale en 2020. Pour le gouvernement, c'est un outil majeur pour atteindre l'émergence en 2035. Un groupe de jeune enseignant soucieux de l'éducation en Afrique en générale et au Cameroun en particulier a donc décidé de ne pas rester spectateur et de jouer les premiers rôles dans ce processus.

Cet ouvrage et toute la collection de la $6^{ème}$ en T^{le} est l'œuvre d'un groupe d'enseignant dynamique et rompu à la tâche. Ils sont réunis dans un forum whatsapp dénommé « Grandprofs de maths (GPM) ». Cette $3^{ème}$ édition est le fruit de l'un de ces objectifs majeurs ; une conséquence de trois mois et demi de travail dont la partie intense s'étend du 27/07/2020 au 05/10/2020 (date de la rentrée scolaire au Cameroun.)

Destinés exclusivement à l'usage de l'enseignant, les documents de cette édition n'ont pas la prétention de remplacer les livres inscrits au programme mais d'être le complémentaire de ces derniers. Chaque leçon de cette édition respecte les dernières mises à jour qu'ont connu l'APC qui est encore jeune et en mutation au Cameroun. Ainsi, dans toutes les leçons de cette 3ème édition, il existe une bonne corrélation entre la situation problème et une partie de l'activité d'apprentissage donc l'objectif est non seulement d'installer les ressources de la leçon, mais aussi de résoudre le problème posé dans la situation problème.

Cette édition doit son succès à un groupe d'enseignants de mathématiques exerçant dans toutes les régions du Cameroun. Une mention spéciale est à décerner à tous les chefs d'ateliers qui ont travaillé inlassablement pour mener ce projet à bon port ; aux administrateurs, surtout ***M.Pouokam Léopold Lucien*** **qui a su remobilisé les troupes quand le déroulement des travaux a connu un coup à cause de le rentrée scolaire ; difficile de ne pas mentionner l'un des pédagogues dont la contribution pour la fusion des documents a été capitale, il s'agit de** ***M. Ngandi Michel.*** **Nous ne saurons terminer sans féliciter les acteurs principaux, ceux-là qui ont cru en ce projet, y ont consacré leur précieux temps et leur savoir-faire non seulement dans la réalisation d'au moins l'un des 185 chapitres du projet mais aussi pour les critiques constructives qui ont permis d'optimiser la qualité des cours produits.**

La perfection étant utopique, nous avons l'intime conviction et le ferme espoir que les éventuelles coquilles que pourrait contenir un document de cette collection, rencontreront l'indulgence compréhension des utilisateurs. Toutefois, toutes éventuelles suggestions ou critiques constructives peuvent être envoyé via l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr.

Tous les enseignants ou passionnés de mathématiques désirant faire partie de la famille « GPM » et disponibles à participer aux futurs projets du groupe peuvent écrire via WhatsApp à l'un des administrateurs ci-dessous : M. GUELA KAMDEM Pierre (697 473 953/ 678 009 612), M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien (696 090 236/ 651 993 749), M. TACHAGO WABO Wilfried Anderson (699 494 671) et M. NGUEFO TAKONGMO Amour (679985838).

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

Liste des enseignants ayant participés au projet dans l'atelier T^{le} C sous la coordination de M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien.

Chapitres	NOMS ET PRENOMS	TELEPHONES	PAGES
1-Calcul vectoriel et produit vectoriel	NGUEFO TAKONGMO Amour	679985838	4-20
2-Espace vectoriel et application linéaire	FOUENANG JOËLLE	698570230	21-31
3-Division euclidienne dans Z et congruences	WAFO WAFO CALVIN	693445317	32-39
4-Arithmétique 2 PPCM PGCD et Nombres premiers.	NJILIE YAMOKO ROLAND	693986268	40-58
5-Nombres complexes : approche algébrique 6-Nombres complexes : approche géométrique	NGNAZOKE WASSAIN ARMAND	697818473	58-77
7-Isométries de l'espace	FEUDJIO ALEX	699716116	78-86
8-Statistiques	NANA NJONTCHOU SAMBALIS	677177680	87-96
9-Primitives d'une fonction continue sur un intervalle.	FOUDJI NJALLA	679360701	97-106
10-Fonctions exponentielles et puissances	OUAFEU PAULIN	676 09 39 69 / 695 65 28 41	107-125
11- Calcul intégral	GEUFO SIRYLE HERVE	671973955	126-139
12- Equations différentielles	ENAMA ELIGA Lidoine aimé	697440412/678221817	140-147
13-Suites numériques	SERGE TCHIO	676273940	148-162
14-Théorie des graphes	SIYAPDJE HENRI	671480644.	163-179
15-Coniques	Andy William DONGMO MIMKEMG	694085563	180-196
16-Similitudes Directes Planes	ONGUENE ASSOUGA Hilaire	694577986	197-206
17-Fonctions numériques d'une variable réelle	MIMCHE CHOUABOU	697502986	207-224
18-Fonction Logarithme Népérien	KEMMEGNE FOPOSSI Siméon	697531743	225-238
19-Probabilités	Roméo FEUDJIO	694068687	239-258

CHAPITRE 1 : CALCUL VECTORIEL ET PRODUIT VECTORIEL

Les Leçons 1 et 2 de ce chapitre ne sont pas obligatoires !

LEÇON 1 : CALCULS BARYCENTRIQUES

Durée : 100 min

Objectif pédagogique :

- Réduire une somme vectorielle dans l'espace.
- Déterminer les coordonnées d'un barycentre dans l'espace.

Motivation

De nombreux solides de l'espace sont formés de plusieurs compartiments : comment déterminer le centre de gravité d'un tel solide ?

Prérequis

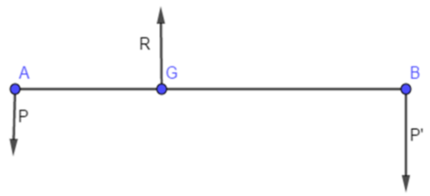
- Relation de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Condition d'équilibre d'un solide en rotation $\sum \mathcal{M}_\Delta \vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

Situation problème

Flora (20 kg du côté gauche) et son amie Laure (30 kg à droite) jouent à la balançoire qui effectue en même temps un mouvement de rotation. À quel niveau de la tige horizontale (de longueur $6m$) doit se fixer la tige verticale pour conserver l'équilibre après la montée des deux enfants aux extrémités ?

Activité d'apprentissage :

Deux filles de masses respectives a et b sont placées respectivement aux points A et B. On recherche la position du point G de la tige $[AB]$ de masse négligeable, pour qu'elle reste en équilibre.



1) Justifier que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
2) Déduire à l'aide de la relation de Chasles une relation entre que $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Solution :

1) Considérons la tige $[AB]$ en rotation autour d'un axe (Δ) passant par G. Cette tige est soumise au poids $\vec{P}$ de la fille en A, au poids $\vec{P'}$ du garçon en B et à la réaction $\vec{R}$ du support en G. À l'équilibre, le théorème fondamental des moments permet d'écrire : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P'}) = \vec{0}$.

En considérant le sens trigonométrique, on a :

$+ag\ GA + 0 - bg\ GB = 0$ c'est-à-dire $aGA - bGB = 0$.

Mais $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires de sens contraires donc,

$a\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{GB}$ c'est-à-dire $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

2) Puisque $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Alors par la relation de Chasles, $a\overrightarrow{GA} + b\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0}$ C'est-à-dire, $(a+b)\overrightarrow{GA} = -b\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

La tige horizontale de la balançoire doit être fixée sur la tige verticale à la distance

$\frac{20}{20+30} \times 6\ m = 2{,}4m$ de Flora pour rester en équilibre.

Définition et propriété

Soient $n \geq 2$ et $(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés de l'espace. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point G de l'espace tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. Ce point G est appelé barycentre des points pondérés $(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}$ et on note $G = bar\{(A_1\,;\alpha_1);\ (A_2\,;\alpha_2)\,;\ldots;(A_n\,;\alpha_n)\}$ ou

encore $G = bar$

A_1	A_2	…	A_n
α_1	α_2	…	α_n

En effet, pour tout point O de l'espace, on a :

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{OA_i}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)}\right]\overrightarrow{OA_i}$ en particulier, $\overrightarrow{A_1G} = \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{\alpha_i}{\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right)}\right]\overrightarrow{A_1A_i}$

Réduction de la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}$

Activité

Soient $(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés de l'espace, M et O deux points quelconques de l'espace.

- On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Réduire le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}$ en utilisant le barycentre G des points pondérés $(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}$.
- On suppose que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Justifier que le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point M.

Solution :

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors en posant $G = bar\{(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}\}$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MG} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MG}.$$

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors pour tout point O de l'espace, on a :

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{OA_i}$; qui est indépendant du point M.
Tout se passe comme si on remplaçait le point M par n'importe quel autre point.

PROPRIETE :

Soient $(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés de l'espace.

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\overrightarrow{MG}$ avec $G = bar\{(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}\}$.
- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point M.
  Par exemple, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\,\overrightarrow{A_1A_i}$.

Coordonnées du barycentre d'un système de points pondérés.

Activité

Dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace, $A_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$ et $G = bar\{(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}\}$. On suppose que $G(x_G;\ y_G;\ z_G)$. Déterminer $\overrightarrow{OG}$ et déduire les coordonnées de G.

Solution

$G = bar\{(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}\} \Leftrightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{OA_i}$. Donc

$x_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath} + z_G\vec{k} = \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)}\overrightarrow{OA_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i x_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)}\vec{\imath} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i y_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)}\vec{\jmath} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i z_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)}\vec{k}$.

d'où $G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)}\right)$.

Propriété

Soient $(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}$ n points pondérés de l'espace. Lorsque $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \neq 0$, alors on peut poser $G = bar\{(A_i\,;\alpha_i\,)_{1\leq i\leq n}\}$.

Dans un repère quelconque $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace, si $A_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$ alors

$$G\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)};\frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i}{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j)}\right).$$

Exemple.

Considérons un tétraèdre $ABCD$ et $G = bar\{(A;4);(B;-2);(C;3);(D;1)\}$.

- $4\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (4-2+3+1)\overrightarrow{MG} = 6\overrightarrow{MG}$.
- Dans le repère (A,B,C,D), $A(0;0;0)$; $B(1;0;0;)$; $C(0;1;0)$ et $D(0;0;1)$.

$$G\left(\frac{4(0)-2(1)+3(0)+1(0)}{4-2+3+1};\frac{4(0)-2(0)+3(1)+1(0)}{4-2+3+1};\frac{4(0)-2(0)+3(0)+1(1)}{4-2+3+1}\right).$$

Donc $G(-\frac{1}{3};\frac{1}{2};\frac{1}{6})$.

Remarques :

- Commutativité : $bar\{(A;a);(B;b)\} = bar\{(B;b);(A;a)\}$
- Homogénéité :$\forall k \in \mathbb{R}^*$,
  $bar\{(A_1\,;\alpha_1);\ (A_2\,;\alpha_2)\,;\dots;(A_n\,;\alpha_n)\} = bar\{(A_1\,;k\alpha_1);\ (A_2\,;k\alpha_2)\,;\dots;(A_n\,;k\alpha_n)\}$.
- Propriété du barycentre partiel : si $G = bar\{(A_1\,;\alpha_1);\ (A_2\,;\alpha_2)\,;\dots;(A_n\,;\alpha_n)\}$ et si $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \neq 0$, avec $n > p \geq 2$, alors en posant
  $G_1 = bar\{(A_1\,;\alpha_1);\ (A_2\,;\alpha_2)\,;\dots;(A_p\,;\alpha_p)\}$, on a aussi
  $G = bar\{(G_1;\sum_{i=1}^{p}\alpha_i);\ (A_{p+1};\alpha_{p+1});\ (A_{p+2}\,;\alpha_{p+2})\,;\dots;(A_n\,;\alpha_n)\}$

En effet :

- $G = bar\{(A;a);(B;b)\} \Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow b\overrightarrow{GB} + a\overrightarrow{GA} = \vec{0}$
  $\Leftrightarrow G = bar\{(B;b);(A;a)\}$.

- $G = bar\{(A_1\,;\alpha_1)\,;\,(A_2\,;\alpha_2)\,;\dots\,;(A_n\,;\alpha_n)\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R}^*, \sum_{i=1}^{n} k\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R}^*, G = bar\{(A_1\,;k\alpha_1);\ (A_2\,;k\alpha_2)\,;\dots;(A_n\,;k\alpha_n)\}.$$

- $G = bar\{(A_1\,;\alpha_1)\,;\,(A_2\,;\alpha_2)\,;\dots\,;(A_n\,;\alpha_n)\} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = \vec{O}$

$$\Leftrightarrow \vec{O} = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i} = (\sum_{i=1}^{p}\alpha_i)\overrightarrow{GG_1} + \sum_{i=p+1}^{n}\alpha_i\,\overrightarrow{GA_i}$$

$$\Leftrightarrow G = bar\{(G_1; \textstyle\sum_{i=1}^{p}\alpha_i);\ (A_{p+1}; \alpha_{p+1});\ (A_{p+2}\,;\alpha_{p+2})\,;\dots;(A_n\,;\alpha_n)\}$$

LEÇON 2 : LIGNES DE NIVEAU ET SURFACES DE NIVEAU

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques :

Déterminer la surface de niveau k de chacune des fonctions

$f: M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, MA_i^2$; $\left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \overrightarrow{MA_\iota}\right\|$; $\frac{MA}{MB}$.

Motivation

Des lignes de niveau ont été vue en première. Que deviennent-elles lorsqu'on passe en dimension trois ?

Prérequis

- Caractériser une sphère par son centre I et son rayon r ou par son diamètre $[AB]$.
- Caractériser un plan passant par un point H et un vecteur normal $\vec{n}$.
- Caractériser le plan médiateur d'un segment $[AB]$.

Indications

- La sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = r$ tandis que la sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
- Le plan passant par un point H et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\vec{n}.\overrightarrow{HM} = 0$.Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan passant par le milieu de ce segment et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Surface de niveau k de l'application

$$f : M \mapsto MA^2 + MB^2$$

Situation problème

Un appareil possédant deux repères A et B distants de $8cm$ fabrique un objet de sport de tennis formé de l'ensemble des points M de l'espace tels que

$MA^2 + MB^2 = 50$. Caractériser cet objet.

Activité d'apprentissage

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ de l'espace.

1) Justifier que $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.
   (c'est le 1er théorème de la médiane)

2) Déduire suivant les valeurs du réel k, l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $MA^2 + MB^2 = k$.
3) Caractériser l'objet du sport de tennis précédant.

Solution

1) $$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 \\ &= MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + 2IA^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\ &= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}. \end{aligned}$$

2) $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow IM^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right) = \lambda$.
   - Si $\lambda < 0$, alors $IM^2 < 0$ et $(\Gamma) = \emptyset$.
   - Si $\lambda = 0$ alors $IM^2 = 0 \Leftrightarrow IM = 0 \Leftrightarrow I = M$ et $(\Gamma) = \{I\}$.
   - Si $\lambda > 0$, alors $IM^2 = \lambda \Leftrightarrow IM = \sqrt{\lambda}$ et (Γ) est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda}$ dans l'espace.
3) L'objet est tel que $IM^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{AB^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(50 - \frac{8^2}{2}\right) = 9$. C'est donc la sphère de centre I et de rayon $3cm$ dans l'espace. Une balle de tennis !

Résumé

Soient A et B deux points de l'espace. La **surface** de niveau k de l'application

$f: M \mapsto MA^2 + MB^2$ est : soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une sphère. *(Dans l'espace).*

Soient A et B deux points du plan. La **ligne** de niveau k de l'application $f: M \mapsto MA^2 + MB^2$ est : soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit un cercle. *(Dans le plan).*

Surface de niveau k de lapplication $f: M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

Activité d'apprentissage

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ de l'espace.

1) Justifier que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. *(c'est le 2^e théorème de la médiane)*
2) Déduire comme précédemment suivant les valeurs du réel k, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$.

Résumé

Soient A et B deux points de l'espace. La surface de niveau k de l'application $f: M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit une sphère. *(Dans l'espace).*

Soient A et B deux points du plan. La ligne de niveau k de l'application $f: M \mapsto \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est soit l'ensemble vide, soit un singleton, soit un cercle. *(Dans le plan).*

Surface de niveau k de l'application f :$M \mapsto MA^2 - MB^2$

Activité d'apprentissage

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$ de l'espace.

1) Justifier que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$.
2) Déduire que $MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB} \times \overline{IH}$ avec H le projeté orthogonal de M sur (AB).
3) Déterminer suivant les valeurs du réel k, l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que
   $MA^2 - MB^2 = k$.

Solution

1) $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA}.(2\overrightarrow{MI}) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM}$
2) $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HM}) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IH} + 0 = 2\overline{AB} \times \overline{IH}$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont colinéaires et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux.
3) $MA^2 - MB^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{AB} \times \overline{IH} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}$. (Γ) est donc le plan passant par H et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Résumé :

Soient A et B deux points de l'espace. La surface de niveau k de l'application $f: M \mapsto MA^2 - MB^2$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. *(Dans l'espace).*

Soient A et B deux points du plan. La ligne de niveau k de l'application $f: M \mapsto MA^2 - MB^2$ est une droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. *(Dans le plan).*

Surface de niveau k de l'application f: $M \mapsto \frac{MA}{MB}$

Activité d'apprentissage

Soient A et B deux points de l'espace et (Γ) La surface de niveau k de la fonction $f : M \mapsto \frac{MA}{MB}$

1) Que vaut (Γ) dans chacun des cas suivants ? $k < 0; k = 0; k = 1$.
2) On suppose que $k > 0$ et $k \neq 1$.
   a) Justifier que $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$
   b) Justifier l'existence de $I = bar\{(A;1);(B;k)\}$ et de $J = bar\{(A;1);(B;-k)\}$
   c) Déduire que $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ et conclure.

Solution

1) Si $k < 0$, alors $\frac{MA}{MB} < 0$ et $(\Gamma) = \emptyset$.
   Si $k = 0$, alors $\frac{MA}{MB} = 0$ et ainsi, $M = A$. Donc $(\Gamma) = \{A\}$.
   Si $k = 1$, alors $\frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 1$ et ainsi, (Γ) est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ comme précédemment.

3) Supposons $k > 0$ et et $k \neq 1$.

   a) $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow MA^2 = (kMB)^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}\right)^2 - \left(k\overrightarrow{MB}\right)^2 = 0$

   $$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0$$

   b) $k > 0$ et $k \neq 1$. Donc $1 + k \neq 0$ et $1 - k \neq 0$. D'où l'existence de I et de J.

   c) $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[(1+k)\overrightarrow{MI}\,\right].\left[(1-k)\overrightarrow{MJ}\,\right] = 0$ $\Leftrightarrow (1-k^2)\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$ car $k \notin \{-1; 1\}$. (Γ) est donc la sphère de diamètre $[IJ]$.

Résumé :

Soient A et B deux points de l'espace. La surface de niveau $k \in \mathbb{R}$ de la fonction $f : M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est :

- Soit $\emptyset$ *si* $k < 0$.
- Soit $\{A\}$ *si* $k = 0$.
- Soit un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ si $k = 1$.
- Soit
  la sphère de diamètre $[IJ]$ avec $I = bar\{(A; 1); (B; k)\}$ et $J = bar\{(A; 1); (B; -k)\}$ si $k > 0$ et $k \neq 1$.

Soient A et B deux points du plan. La ligne de niveau $k \in \mathbb{R}$ de la fonction $f : M \mapsto \frac{MA}{MB}$ est :

- Soit $\emptyset$ *si* $k < 0$.
- Soit $\{A\}$ *si* $k = 0$.
- Soit une droite de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ si $k = 1$.
- Soit
  le cercle de diamètre $[IJ]$ avec $I = bar\{(A; 1); (B; k)\}$ et $J = bar\{(A; 1); (B; -k)\}$ si $k > 0$ et $k \neq 1$.

Surface de niveau k de l'application $f : M \mapsto \left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\|$

Activité d'apprentissage

Soient $(A_i\,; \alpha_i)$ des points pondérés de l'espace $\mathcal{E}$ et (Γ) La surface de niveau k de l'application

$f : M \mapsto \left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\|$

1) On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$
   a) Que peut-on dire du vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$?
   b) Conclure
2) On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$ et on pose $G = bar\{(A_1\,; \alpha_1);\ (A_2\,; \alpha_2)\,; \dots; (A_n\,; \alpha_n)\}$
   a) Écrire une expression réduite du vecteur $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$.
   b) Conclure

Solution

1) Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.
   a) Dans ce cas, le vecteur $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ est indépendant du point M.
   b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \|\vec{u}\| = k$. Si $\|\vec{u}\| = k$, alors $(\Gamma) = \mathcal{E}$ et si $\|\vec{u}\| \neq k$, alors $(\Gamma) = \emptyset$.

2) Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$ et on pose $G = bar\{(A_1\,;\alpha_1);\ (A_2\,;\alpha_2)\,;\ldots;(A_n\,;\alpha_n)\}$
   a) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MG}$.
   b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MG}\right\| = k \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right| MG = k \Leftrightarrow MG = \frac{k}{\left|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\right|} = \lambda$.
      - Si $\lambda < 0$, alors $GM < 0$ et $(\Gamma) = \emptyset$.
      - Si $\lambda = 0$ alors $GM = 0 \Leftrightarrow G = M$ et $(\Gamma) = \{G\}$.
      - Si $\lambda > 0$, alors $GM = \lambda$ et (Γ) est la sphère de centre G et de rayon λ dans l'espace.

Résumé

Soient $(A_i\,;\alpha_i)$ des points pondérés de l'espace $\mathcal{E}$. La surface de niveau k de l'application

$f: M \mapsto \left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\|$ est :

- Soit $\emptyset$, soit $\mathcal{E}$ si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$
- Soit $\emptyset$, soit un singleton soit une sphère si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.

Soient A et B deux points du plan $\mathcal{P}$. La ligne de niveau k de l'application $f: M \mapsto \left\|\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}\right\|$ est :

- Soit $\emptyset$, soit $\mathcal{P}$ si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.
- Soit $\emptyset$, soit un singleton soit un cercle si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.

Surface de niveau k de l'application $f: M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MA_i{}^2$

Activité d'apprentissage

Soient $(A_i\,;\alpha_i)$ des points pondérés de l'espace $\mathcal{E}$ et (Γ) La surface de niveau k de l'application

$f: M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MA_i{}^2$

1) On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$
   a) Justifier que $\forall O \in \mathcal{E},\ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\vec{u}$ avec $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$.
   b) Déterminer (Γ)
2) On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$ et on pose $G = bar\{(A_1\,;\alpha_1);\ (A_2\,;\alpha_2)\,;\ldots;(A_n\,;\alpha_n)\}$
   a) Justifier que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i GA_i^2$
   b) Déterminer (Γ)

Solution

1) Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.
   a) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i})^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MO^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\vec{u}$
   $= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\vec{u}$ car $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.
   b) Soit $P \in \mathcal{E} \,/\, \vec{u} = \overrightarrow{OP}$. $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OP} = k$.
      - Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2 = k$. Ainsi,
         - Si $k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2$ alors $(\Gamma) = \mathcal{E}$.

- Si $k \neq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, OA_i^2$ alors $(\Gamma) = \emptyset$.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors soit avec H le projeté orthogonal de M sur (OP).
  $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow 2\overline{HO} \times \overline{OP} = k - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, OA_i^2 \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2 - k}{2\overline{OP}}$. (Γ) est le plan passant par H et de vecteur normal $\vec{u}$.

2) Supposons que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.

a) $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, MA_i^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i})^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG}.(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i})$
$= \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i GA_i^2 + 2\overrightarrow{MG}.\vec{0} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i MG^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i GA_i^2$ car $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$

b) $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow GM^2 = \frac{k - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i OA_i^2}{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i} = \lambda$.

- Si $\lambda < 0$, alors $GM^2 < 0$ et $(\Gamma) = \emptyset$.
- Si $\lambda = 0$ alors $GM = 0 \Leftrightarrow G = M$ et $(\Gamma) = \{G\}$.
- Si $\lambda > 0$, alors $GM = \sqrt{\lambda}$ et (Γ) est la sphère de centre G et de rayon $\sqrt{\lambda}$ dans l'espace.

RÉSUMÉ

Soient $(A_i\,; \alpha_i)$ des points pondérés de l'espace $\mathcal{E}$. La surface de niveau k de l'application $f\colon M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, {MA_i}^2$ est :

- Soit $\emptyset$, soit $\mathcal{E}$, soit un plan de vecteur normal $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \overrightarrow{OA_i}$ si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.
- Soit $\emptyset$, soit un singleton soit une sphère si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.

Soient $(A_i\,; \alpha_i)$ des points pondérés du plan $\mathcal{P}$. La ligne de niveau k de l'application $f\colon M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, {MA_i}^2$ est :

- Soit $\emptyset$, soit $\mathcal{P}$, soit une droite de vecteur normal $\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, \overrightarrow{OA_i}$ si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$.
- Soit $\emptyset$, soit un singleton, soit un cercle si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$.

Remarque :

Si $k > 0$, alors $\frac{MA}{MB} = k \Leftrightarrow MA^2 - k^2 MB^2 = 0$. Ainsi, les surfaces et ligne de niveau k des fonctions $f\colon M \mapsto MA^2 + MB^2; MA^2 - MB^2$ et $\frac{MA}{MB}$ se ramènent à $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, MA_i^2$.

Exercice d'application :

1) Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête a et (P) la surface de niveau $6a^2$ de l'application $f\colon M \mapsto MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 6MD^2$.
   a) Vérifier que $A \notin (P)$ et que $D \in (P)$ puis donner la nature de (P).
   b) Caractériser (P).
2) Soit ABC un triangle isocèle en C tel que $AC = 10cm$ et $AB = 12cm$.
   a) Déterminer et construire la ligne de niveau 8 de l'application $g\colon M \mapsto MA^2 + MB^2 - 2MC^2$. *(utiliser le milieu I de $[AB]$).*
   b) Déterminer la surface de niveau 344 de l'application $h\colon M \mapsto MA^2 + MB^2 + 2MC.^2$
   On montrera que G est le milieu de $[IC]$ avec $G = bar\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$.

LEÇON 3 : ORIENTATION DE L'ESPACE

Durée : 50 min

Objectif pédagogique : Orienter l'espace.

Motivation : Nous avons appris à orienter un repère du plan : comment le faire dans l'espace

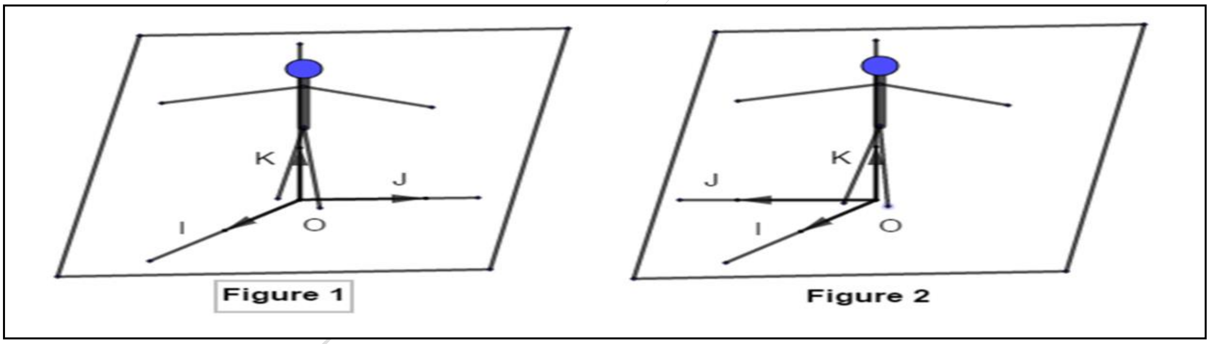
Prérequis

- Quand dit-on qu'une droite est orthogonale à un plan ?
- Quand dit-on que $(0;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ est un repère orthonormé de l'espace ?

➢ Une droite est orthogonale à un plan lorsque cette droite est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

➢ On dit que $(0;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OK})$ est un repère orthonormé de l'espace lorsque les points O, I, J et K ne sont pas coplanaires, $(OI) \perp (OJ)$, $(OI) \perp (OK)$ et $OI = OJ = OK = 1$

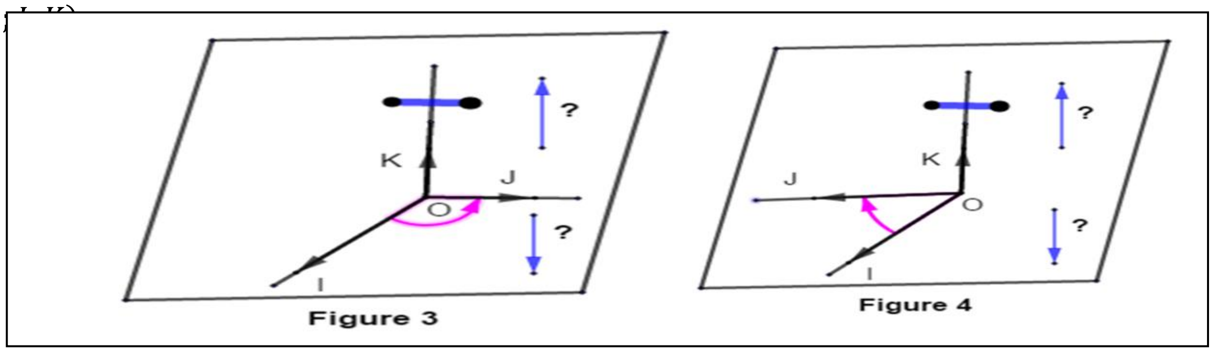
Activité d'apprentissage



1) Sur les figures 1 et 2 ci-dessus, $(0; I; J; K)$ est un repère de l'espace. Un observateur dit d'Ampère a les pieds en O *(origine)* la tête sur la demi-droite $[OK)$ ($\overrightarrow{OK}$ *est le 3*^{e} *vecteur de la base),* il regarde le point I ($\overrightarrow{OI}$ *est le 1*^{er} *vecteur).* De quel côté de l'observateur se trouve le point J ? ($\overrightarrow{OJ}$ *est le 2*^{e} *vecteur).*
2) Sur les figures 3 et 4 ci-dessus, un tire-bouchon est tourné du vecteur $\overrightarrow{OI}$ vers le vecteur $\overrightarrow{OJ}$. Dans quel sens progresse-t-il par rapport au vecteur $\overrightarrow{OK}$?

Solution

- Sur la figure 1, le point J est à gauche de l'observateur d'Ampère : on dira que le repère $(0; I; J; K)$ est direct.
- Sur la fig



ure 2, le point J est à droite de l'observateur d'Ampère : on dira que le repère $(0; I; J; K)$ est indirect.

- Sur la figure 3, un tire-bouchon tournant du vecteur $\overrightarrow{OI}$ vers le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ progresse dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OK}$: on dira que le repère $(0; I; J; K)$ est direct.
- Sur la figure 3, un tire-bouchon tournant du vecteur $\overrightarrow{OI}$ vers le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ progresse dans le sens contraire du vecteur $\overrightarrow{OK}$: on dira que le repère $(0; I; J; K)$ est indirect.

Résumé

- Un repère $(0; I; J; K)$ est dit direct lorsque le point J est à gauche d'un observateur d'Ampère ayant les pieds en O, la tête sur $[OK)$ et regardant I ; ou encore lorsque tout tire-bouchon tournant du vecteur $\overrightarrow{OI}$ vers le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ progresse dans le sens du vecteur $\overrightarrow{OK}$. On dit aussi que la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ est directe.
- Un repère $(0; I; J; K)$ est dit indirect lorsque le point J est à droite d'un observateur d'Ampère ayant les pieds en O, la tête sur $[OK)$ et regardant I; ou encore lorsque tout tire-bouchon tournant du vecteur $\overrightarrow{OI}$ vers le vecteur $\overrightarrow{OJ}$ progresse dans le sens contraire du vecteur $\overrightarrow{OK}$. On dit aussi que la base $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OK})$ est indirecte.
- Orienter l'espace c'est choisir l'un des deux types de repères précédents.

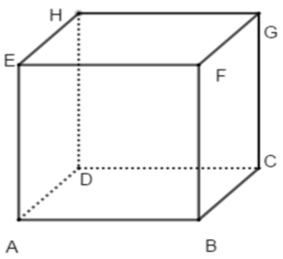
Exemple 1 : règle des trois doigts

Soit $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ une base de l'espace où $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont respectivement l'index, le majeur et le pouce d'une de vos mains.

- Pour la main droite, la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ est directe.
- Pour la main gauche, la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$est indirecte.

Exemple 2

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.



Les bases $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$, $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ sont orthonormées directes.

Les bases $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD})$ et $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; -\overrightarrow{AE})$ sont orthonormées indirectes.

Remarques

- On ne change pas le sens de l'orientation d'une base de l'espace en multipliant un vecteur par un réel strictement positif ou en effectuant entre les vecteurs une **permutation circulaire.** Ainsi, $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$; $(\vec{\imath}; 2\vec{\jmath}; \vec{k})$; $(\vec{\jmath}; \vec{k}; \vec{\imath})$ et $(\vec{k}; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ sont de même sens.
- On change le sens de l'orientation d'une base de l'espace en multipliant un vecteur par un réel strictement négatif ou en permutant la position de deux vecteurs**.** Ainsi, $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et $(\vec{\imath}; -\vec{\jmath}; \vec{k})$ ainsi que $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ et $(\vec{\imath}; \vec{k}; \vec{\jmath})$ sont de sens contraires.

LEÇON 4 : PRODUIT VECTORIEL

Durée : 100 min

Motivation

Dans les classes précédentes, nous avons calculé la distance d'un point à une droite, à un plan, l'aire d'un triangle et le volume d'un tétraèdre. Ce chapitre nous fournira de nouveaux outils pour le faire autrement.

Objectifs pédagogiques :

- Calculer les coordonnées dans une base orthonormée directe, du produit vectoriel de deux vecteurs ;
- Calculer la distance d'un point à une droite ; d'un point à un plan, l'aire d'un triangle et le volume d'un tétraèdre en utilisant le produit vectoriel.

Prérequis

- Orienter l'espace.(voir leçon précédente)
- Aire d'un triangle $\frac{base \times hauteur}{2}$ et volume d'une pyramide $\frac{aire\ de\ base \times hauteur}{3}$

Définition et premières propriétés

Définition :

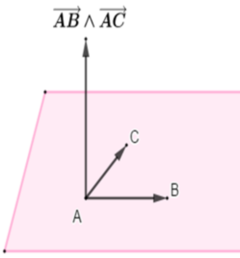
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le **vecteur** noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$

(lire $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$) défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors :
  - **Direction :** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est **orthogonal** à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
  - **Sens :** la base $(\vec{u};\vec{v};\vec{u} \wedge \vec{v})$ est **directe.**
  - **Norme :** $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \left|\sin(\widehat{\vec{u};\vec{v}})\right|$

Remarques :

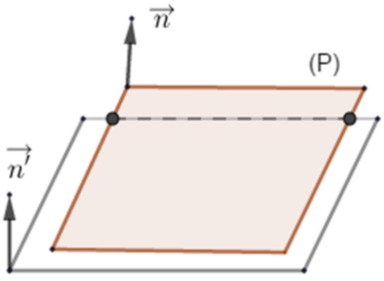
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques ; $A; B$ et C trois points quelconques de l'espace. (P) et (P') deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.

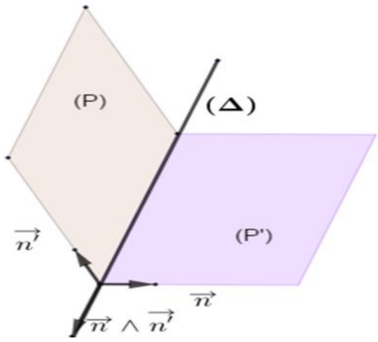


- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux, alors $(\vec{u};\ \vec{v};\vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe de l'espace.
- Les points $A; B$ et C forment un plan si et seulement si $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

⚠ Dans ce cas, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal de ce plan.

- $\vec{n}\wedge\vec{n}'=\vec{0}\Leftrightarrow(P)\parallel(P')$.
- $\vec{n}\wedge\vec{n}'\neq\vec{0}\Leftrightarrow(P)$ et (P') sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $\vec{n}\wedge\vec{n}'$.
  Si de plus $\vec{n}.\vec{n}'=0$, alors (P) et (P') sont perpendiculaires.

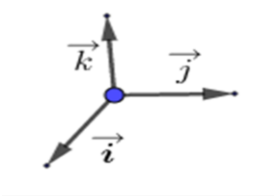




Exemples :

Si $(\vec{\imath};\,\vec{\jmath};\,\vec{k})$ est une base orthonormée directe de l'espace, alors :

$\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k};\ \vec{\jmath}\wedge\vec{k}=\vec{\imath};\ \vec{k}\wedge\vec{\imath}=\vec{\jmath}.\quad \vec{\imath}\wedge\vec{k}=-\vec{\jmath};\ \vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}=-\vec{k};\ \vec{k}\wedge\vec{\jmath}=-\vec{\imath}.$



Propriétés du produit vectoriel :

Soient $\vec{u}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel.

- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$.
- $(k\vec{u})\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge(k\vec{v})=k(\vec{u}\wedge\vec{v})$.
- $\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$.
- $(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{v}\wedge\vec{w}$.

Expression du produit vectoriel dans une base orthonormée directe

Activité d'apprentissage

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath};\,\vec{\jmath};\,\vec{k})$.

1. Écrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$.
2. Déduire une expression de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Solution

1. $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$.
2. $\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\wedge\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right)=$

$$xx'\vec{\imath}\wedge\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}+xz'\vec{\imath}\wedge\vec{k}+yx'\vec{\jmath}\wedge\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\wedge\vec{\jmath}+yz'j\wedge\vec{k}+zx'\vec{k}\wedge\vec{\imath}+zy'\vec{k}\wedge\vec{\jmath}+zz'\vec{k}\wedge\vec{k}$$

$$=xy'\vec{k}-xz'\vec{\jmath}-yx'\vec{k}+yz'\vec{\imath}+zx'\vec{\jmath}-zy'\vec{\imath}=\ (yz'-zy')\vec{\imath}$$
$$=(zx'-xz')\vec{\jmath}+(xy'-yx')\vec{k}$$

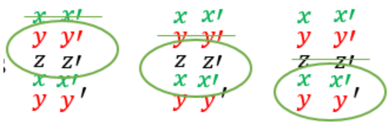
$$=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\imath}+\begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\color{red}{\vec{\imath}} & \color{red}{\vec{\jmath}} & \color{red}{\vec{k}}\\ x & y & z\\ x' & y' & z'\end{vmatrix}\ \text{car}\ +\begin{vmatrix}z & z'\\ x & x'\end{vmatrix}\vec{\jmath}=-\begin{vmatrix}x & z\\ x' & z'\end{vmatrix}\color{red}{\vec{\jmath}}$$

Propriété :

Dans une base orthonormée directe $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v}\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right) \text{ ou encore } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

⚠ Pour obtenir les composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on peut disposer composantes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que représentés ci-dessous, puis calculer respectivement les déterminants des composantes encerclées.



Exercice d'application

Dans un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$, $A(1;0;-5)$; $B(-2;-1;0)$; $C(0;1;-2)$ et

$(P)\colon x + y - 2z + 1 = 0$.

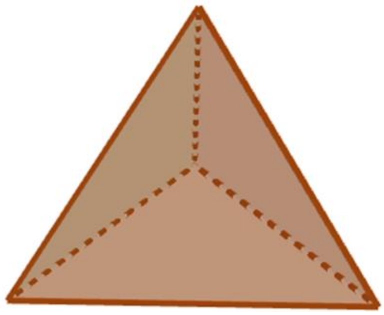
1. Justifier que les points A; B et C forment un plan dont on donnera une équation cartésienne.
2. Étudier la position relative des plans (ABC) et (P) puis donner une équation paramétrique de leur intersection.

Solution

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$.
   D'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-8;4;-4)$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$. Donc les points A; B et C forment un plan de vecteur normal $\vec{m}(-8;4;-4)$. ainsi $(ABC)\colon -8x + 4y - 4z + d = 0$.
   Or $A \in (ABC)$. Donc $-8(1) + 4(0) - 4(-5) + d = 0$. Ainsi, $d = -12$.
   D'où $-8x + 4y - 4z - 12 = 0$ ou encore $(ABC)\colon 2x - y + z + 3 = 0$.
2. $\vec{n}(2;-1;1)$ et $\vec{n}'(1;1;-2)$ sont des vecteurs normaux respectifs de (ABC) et (P).
   $\vec{n} \wedge \vec{n}'(1;5;-3) \neq \vec{0}$. Donc (ABC) et (P) sont sécants suivant une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}(1;5;-3)$. Cherchons les coordonnées d'un point de cette droite.
   $\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ 2x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ Donc $z = 3x + 4$ et $y = 5x + 7$. $A(0\,;7\,;4) \in (D)$.
   Donc $(D)\colon \begin{cases} x = t \\ y = 7 + 5t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

LEÇON 5 : Application du produit vectoriel au calcul d'aires et de volumes. *Durée : 100 min*

Situation problème :

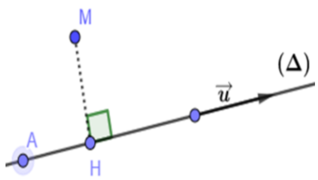


Dans un repère orthonormé direct d'unité $1m$ sur les axes, un réservoir d'eau tétraédrique a pour sommets $A(1;0;-5)$; $B(-2;-1;0)$; $C(0;1;-2)$ et $D(4;0;-5)$. Aidez votre papa à savoir la capacité de son réservoir.

Activité d'apprentissage :

1. Soit Δ une droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$, et M un point quelconque de l'espace ayant pour projeté orthogonal H sur Δ.
   a. Que vaut $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}$? déduire $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|$ puis la distance d'un point M quelconque à la droite Δ.
   b. Déduire une expression de l'aire d'un triangle quelconque ABC faisant intervenir le produit vectoriel.
2. Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A, de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; et M un point quelconque de l'espace ayant pour projeté orthogonal K sur $\mathcal{P}$.
   a. Que vaut $\overrightarrow{AK}.(\vec{u} \wedge \vec{v})$? déduire $\left|\overrightarrow{AM}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right|$ puis la distance d'un point M quelconque de l'espace au plan $\mathcal{P}$ faisant intervenir le produit vectoriel.
   b. Déduire une expression du volume d'un tétraèdre $ABCD$ et la capacité du réservoir tétraédrique de votre père.

Solution :



1. a) $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Ainsi, $\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \|(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \wedge \vec{u}\|$

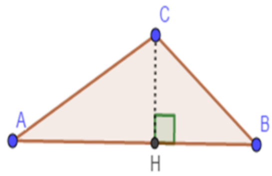
$$= \|\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\|$$

$$= \|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\|$$

$$= \|\overrightarrow{HM}\| \times \|\vec{u}\| \times 1$$

$$= \|\overrightarrow{HM}\| \times \|\vec{u}\|.$$

Donc, $MH = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.



c) $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times CH}{2}$. Or $CH = \frac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

Donc, $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times \frac{\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}{2} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$.

2. a) $\overrightarrow{AK}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{0}$ car $\overrightarrow{AK}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont orthogonaux. Ainsi,

$$\left|\overrightarrow{AM}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right| = \left|(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM}).(\vec{u} \wedge \vec{v})\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{AK}.(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \overrightarrow{KM}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right|$$

$$= \left|\overrightarrow{KM}.(\vec{u} \wedge \vec{v})\right|$$

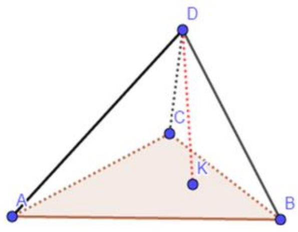
$$= \left\|\overrightarrow{KM}\right\| \times \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \times 1.$$

Donc $MK = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.

c) $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{\mathcal{A}_{ABC}\times DK}{3}$.

Or $DK = \frac{\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$ et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}$.

Donc $\mathcal{V}_{ABCD} = \dfrac{\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{2}\times\frac{\left|\overrightarrow{DA}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}}{3} = \frac{\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|}{6}$.



Pour le réservoir tétraédrique, on aura $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-8\\4\\-4\end{pmatrix}\right| = 3m^3 = 3.000l$.

Propriétés :

- Soit Δ une droite passant par A et dirigé par un vecteur $\vec{u}$. Pour tout point M de l'espace ayant pour projeté orthogonal H sur Δ, on a : $d(M;\Delta) = MH = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$.
- Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A et dirigé par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour tout point M de de l'espace ayant pour projeté orthogonal K sur $\mathcal{P}$, $d(M;\mathcal{P}) = MK = \frac{\left|\overrightarrow{AM}.(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.
- L'aire d'un triangle quelconque ABC est $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$.
- Le volume d'un tétraèdre quelconque $ABCD$ est $\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})\right|$

Exercice d'application

Dans un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ d'unité $1cm$ sur les axes, $A(0;-1;0); B(1;-3;0)$; $C(0;1;1)$ et $D(0;0;1)$.

1. Calculer la distance de A à (BC).
2. Calculer l'aire du triangle ABC.
3. Calculer la distance de D à (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

CHAPITRE 2 : ESPACES VECTORIELS REELS-APPLICATIONS LINEAIRES

LEÇON 1: ESPACES VECTORIELS

Durée : 100 min

Motivation

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Ils permettent de développer des théorèmes généraux pouvant s'applique sur plusieurs ensembles différents tel que l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace, l'ensemble des fonctions, des suites, des polynômes etc.…. Par ailleurs, les méthodes de calculs numériques, le graphisme et plus particulièrement la 3D, la résolution des équations de la chaleur et de la corde vibrante, etc… sont là quelques applications des Espaces vectoriels. Dans ce cours, nous allons développer les outils nécessaires à la résolution de tels problèmes.

PRE-REQUIS :

1) Résous dans $\mathbf{IR}^3$ les systèmes suivants: $(S_1)\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ -x+2y-z=0 \end{cases}$; $(S_2)\begin{cases} x+y+3z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$

2) Dans $\mathbb{R}^3$, donne deux combinaisons linéaires distinctes des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$

SOLUTION:

1) L'ensemble solution de (S_1) est :{(0 ; 0 ; 0)}.

L'ensemble solution de (S_2) est :{ (4z ; -7z ; z) , z$\in\mathbb{R}$ }

2) $\overrightarrow{e_1} = 2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w}$ et $\overrightarrow{e_2} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ sont deux combinaisons linéaires distinctes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. On a $\overrightarrow{e_1}\begin{pmatrix}3\\11\\-9\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{e_2}\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$.

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

• Reconnaître un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel, montrer qu'une famille de vecteurs est libre ou génératrice, déterminer une base dans un espace vectoriel.

• Montrer que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires.

SITUATION PROBLEME :

Carole est nouvellement inscrite en classe de Terminale C. Elle maitrise la notion de polynôme de degré inférieur ou égal à 2 et se dit être capable de résoudre tous les exercices liés à cette notion. Mais dans un exercice on lui demande de montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 est un sous espace vectoriel de l'ensemble des polynômes.

Elle ne sait pas comment démarrer sur cet exercice. Apporte-lui ton aide.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère l'ensemble A= $\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 muni des opérations habituelles sur les polynômes (l'addition et la multiplication par un réel).

1) Montre que A est non vide.

2) Montre que A est stable pour l'addition

3) Montre que A est stable pour la multiplication par un réel.

Les propositions des questions 1), 2) et 3) font de A un sous espace vectoriel de l'ensemble des polynômes.

On considère les éléments suivants:

$\boldsymbol{p(x) = 2}$, $\boldsymbol{q(x) = 5x}$, $\boldsymbol{r(x) = x^2}$.

4) Après avoir dit pourquoi p(x), q(x) et r(x) sont des éléments de A, montre que toute combinaison linéaire nulle de p(x), q(x) et r(x) est de coefficients nuls.

5) Montre que tout élément de A peut s'**écrire** comme combinaison linéaire de p(x), q(x) et r(x).

Solution

1) Soit p_0(x) le polynôme nul. $p_0\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0x^2} + \boldsymbol{0x} + \boldsymbol{0}$. $p_0\ (\boldsymbol{x})$ appartient à A. Ainsi, A est non vide.

2) Soient $p_1(x) = ax^2 + bx + c$ et $p_2(x) = a'x^2 + b'x + c$ deux éléments de A, On a:

$p_1(x) + p_2(x) = ax^2 + bx + c + a'x^2 + b'x + c$

$$= (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$$
$$= \boldsymbol{\alpha}x^2 + \boldsymbol{\beta}x + \boldsymbol{\gamma}\ , \alpha, \beta, \gamma \in IR$$

Ainsi, $p_1(x) + p_2(x) \in A$. *A est donc stable pour l'addition.*

3) Soit $\mu \in IR$, *On a:* $\mu . p_1(x) = \mu . (ax^2 + bx + c\,)$
$$= \mu ax^2 + \mu bx + \mu c$$
$$= \lambda x^2 + \sigma x + \ \tau\ .\lambda, \sigma, \tau \in IR.$$

Ainsi, $\mu . p_1(x) \in A$. *A est donc stable pour* la multiplication par un réel.

4) $\boldsymbol{p(x) = 0x^2\ +\ 0x +\ 2}$, $\boldsymbol{(x) = 0x^2\ + 5x\ +\ 0}$, $\boldsymbol{r(x) = x^2 +\ 0x\ +\ 0}$

donc p(x), q(x) et r(x) sont des éléments de A.

Soient u, w et w des reels, p_0 le polynôme nul tels que $up(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{vq(x)} + \boldsymbol{wr(x)} = p_0$. On a alors $\boldsymbol{u.2 + v.5x + wx^2 = 0}$ c'est à dire $\boldsymbol{wx^2 + 5vx + 2u = 0x^2 + 0x +\ 0}$. Par identification, $\boldsymbol{u = v = w = 0}$.

5) Soit $p_1(x) = ax^2 + bx + c$ un élément de A. On a:

$p_1(x) = ar(x) + \frac{b}{5}q(x) + \frac{c}{2}\boldsymbol{p(x)}$. Ainsi, tout element de A s'ecrit comme combinaison linéaire de p(x), q(x) et r(x).

RESUME :

1-Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel sur IR.

Définition :

Une partie H non vide d'un espace vectoriel E sur IR est un sous espace vectoriel de E si :

- H est non vide;
- La somme de deux **élément**s de H est un **élément** de H (H est stable pour +);
- Le produit d'un **élément** de H par un r**é**el est un **él**é**ment** de H (H est stable pour .).

Une partie H non vide d'un espace vectoriel E sur IR est un sous espace vectoriel de E si toute combinaison linéaire d'éléments de H est un élément de H c'est-à-dire pour tous réels α et β, pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ éléments de H, $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ est un élément de H.

Propriétés :

P_1- L'intersection de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel est un sous espace vectoriel.

En effet, si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a :

- $0_E \in F_1 \cap F_2$ donc $F_1 \cap F_2$ est non vide.
- Pour α et β deux reels, x_1 et x_2 deux éléments de $F_1 \cap F_2$, x_1 et x_2 sont aussi éléments de F_1 et F_2. Puisque F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in F_1$ et $\alpha x_1 + \beta x_2 \in F_2$. Ainsi, $\alpha x_1 + \beta x_2 \in F_1 \cap F_2$.

P_2- La réunion de deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel n'est pas toujours un sous espace vectoriel.

En effet, considérons les espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ B = {(x,y) ∈ $\mathbb{R}^2$/ x = 0 } et

C = {(x,y) $\mathbb{R}^2$/ y = 0 }. (0;1)∈ B, (1;0) ∈ C, Mais (1 ; 1) qui s'écrit (0 ; 1) +(1 ; 0) n'est pas un élément de $B \cup C$.

2-Famille libre d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel et $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ une famille de n vecteurs de E. La famille $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est dite libre (ou les vecteurs $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants) si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs entraine des coefficients tous nuls. Autrement dit, s'il existe n réels $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 x_1 + \ \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$ alors, $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$

3-Famille génératrice d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel réel. On dit qu'une famille $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est génératrice si pour tout x élément de E, L'équation $\alpha_1 x_1 + \ \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = x$ d'inconnues $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ admet au moins une solution.

4-Base et dimension d'un espace vectoriel

Une famille de vecteurs de E constitue une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple :$\{(1;0;0),(0;1;0),(0;0;1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ appelée base canonique.

Si E admet une base de n vecteurs $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $(n \in \mathbb{N})$, alors toute autre base de E possède n vecteurs.

Le nombre de vecteurs d'une base quelconque d'un espace vectoriel différent de $\{0\}$ est appelé dimension de cet espace. On note dim(E)=n. La dimension de $\{0\}$ est 0.

Propriétés :

P_1-Dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}$ $\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$ constituent une base si $det(u,v) = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$

Tout système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n est une base de E.

P_2- Toute famille génératrice de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n est une base de E.

P_3-Tout système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n est une base de E.

P_4- Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel E alors, dim(E)≥n.

P_5- Si $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est une famille génératrice de n vecteurs d'un espace vectoriel E alors, dim(E)≤n.

5-Somme de deux sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriels supplémentaires d'un espace vectoriel.

Soit E un espace vectoriel réel, F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E.

$F_1 + F_2 = \{x \in E/\ x = x_1 + x_2,\ x_1 \in F_1, x_2 \in F_2\}$ est un sous espace vectoriel de E appelé ''somme de F_1 et F_2''. C'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2. Si de plus, l'intersection de F_1 et F_2 est$\{0_E\}$, on dit que F_1 et F_2 sont en

Somme directe et on note$F_1 \oplus F_2$.

Deux sous espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont supplémentaires s'ils sont en somme directe et cette somme directe est égale a E c'est-à-dire $E = F_1 \oplus F_2$.

Remarques :

Soit E est un espace vectoriel de dimension finie.

• F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E signifie que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme de deux éléments dont l'un appartient à F_1 et l'autre appartient F_2.

• F_1 et F_2 sont deux sous espaces vectoriels supplémentaire de E si et seulement si $dimF_1 + dim\,F_2 = dimE$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Soit E un espace vectoriel de base $(\vec{\imath}\ ; \vec{\jmath};\ \vec{k})$. On considère les ensembles :

$$P = \left\{\vec{u} \in E, \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } 5x + y + z = 0\right\} ; Q = \left\{\vec{u} \in E, \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } x - 3y + 5z = 0\right\}$$

1) Montre que P et Q sont deux sous-espaces vectoriels de E et donne une base et la dimension de chacun d'eux.

2) Détermine le sous-espace vectoriels P+Q.

3) La somme P+Q est-elle directe ?

4) P et Q sont-ils supplémentaires ?

5) Montre que la droite vectorielle d'équation $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ est supplémentaire à P.

6) Montre que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base de E.

LEÇON 1 : APPLICATIONS LINEAIRES

Durée : 100 min

MOTIVATION :

Il est important de connaitre manipuler les applications linéaires et leurs matrices, la plupart des schémas numériques de résolution d'équations différentielles s'exprimant en terme de matrice avec des applications en ingénierie, en épidémiologie, en statistique …

PRE-REQUIS :

1) Calcule les déterminants suivants: $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2) Résous dans $\mathbb{R}^3$ l'équation (E) : $x + 3y - 2z = 0$

SOLUTION :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 3 \times 5 = -15$

$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 1 \times 0 = 15$

2) $x + 3y - 2z = 0 \Leftrightarrow x = 2z - 3y.$

$(x\,;y\,;z) = (2z - 3y\,;y\,;z) = (2z\,;0\,;z) + (-3y\,;y\,;0) = z(2\,;0\,;1) + y(-3\,;1\,;0)$

L'ensemble solution de (E) est $\{\alpha(2\,;0\,;1) + \beta(-3\,;1\,;0),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

•Montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels dont l'un est de dimension 3 est linéaire.

•Ecrire la matrice d'une application linéaire relativement aux bases respectives des ensembles de départ et d'arrivée.

•Déterminer le noyau ou l'image à partir de leurs bases ou de leurs dimensions

SITUATION PROBLEME :

Emel vient d'obtenir avec bravoure son Baccalauréat D. Elle décide donc de se préparer pour le concours d'entrée à l'école normale supérieure et ainsi devenir enseignante de mathématiques. Dans l'un des exercices de sa fiche de préparation, il lui est demandé de montrer que l'application

$f: \mathcal{V}_2 \longmapsto \mathcal{V}_2$

$(x, y) \longmapsto (x - 2y, 3x - 5y)$

Est linéaire, de déterminer le noyau et l'image de f. $\mathcal{V}_2$ désigne l'ensemble des vecteurs du plan. Ce vocabulaire lui est entièrement étranger. Aide la à résoudre son problème.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère l'application $f: \mathcal{V}_2 \longmapsto \mathcal{V}_2$

$$(x, y) \longmapsto (x - 2y, 3x - 5y)$$

1) Montre que pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ éléments de $\mathcal{V}_2$ $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

2) Montre que pour tout $\vec{v}$ élément de $\mathcal{V}_2$ et pour tout réel a, $f(\overrightarrow{a.v}) = a.f(\vec{v})$.

Les propositions des questions 1) et 2) font de f une application linéaire.

3) Détermine tous les éléments de $\mathcal{V}_2$ dont l'image par f est le vecteur nul.

4) Détermine tous les éléments de $\mathcal{V}_2$ qui ont un antécédent par f.

5) On pose $f(v) = v'$, $\vec{v}(x, y), \overrightarrow{v'}(x', y')$. Détermine les réels a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} tels que :

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sachant que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Solution

1) Soient $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(x, y)$ deux éléments de $\mathcal{V}_2$. $\vec{u} + \vec{v}$ $(x + a\ ,\ y + b)$.

$$\begin{aligned} f\big((x + a\ ,\ y + b)\big) &= (x + a - 2(y + b)\ ,\ 3(x + a) - 5(y + b)) \\ &= (x + a - 2y - 2b\ ,\ 3x + 3a - 5y - 5b) \\ &= (x - 2y + a - 2b\ ,\ 3x - 5y + 3a - 5b) \\ &= (x - 2y\ , 3x - 5y) + (a - 2b\ , 3a - 5b) \\ &= f\big((x, y)\big) + f\big(\ a, b)\big) \end{aligned}$$

Ainsi $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

2) Soit $\vec{v}$ un élément de $\mathcal{V}_2$ et a un réel. On a : $a.\vec{v}(ax, ay)$

$$\begin{aligned} f(ax, ay) &= (ax - 2ay, 3ax - 5ay) \\ &= a(x - 2y, 3x - 5y) \end{aligned}$$

Ainsi, $f(\overrightarrow{a.v}) = a.f(\vec{v})$.

3) soit à déterminer tous les éléments dont l'image par f est le vecteur nul.

Il suffit de résoudre le système $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$ x=y=0. L'ensemble cherché est $\{(00)\}$

4) Soit (x', y') un élément de $\mathcal{V}_2$. Cherchons (x, y) élément de $\mathcal{V}_2$ tel que $\begin{cases} x - 2y = x' \\ 3x - 5y = y' \end{cases}$.

On obtient $\begin{cases} x = 2y' - 5x' \\ y = y' - 3x' \end{cases}$ Ainsi pour tout(x', y') élément de $\mathcal{V}_2$, (x, y) existe dans$\mathcal{V}_2$.

L'ensemble cherché est $\mathcal{V}_2$.

5) On a :

$\begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{pmatrix}$.

Par identification, $a_{11} = 1$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 3$ et $a_{22} = -5$.

RESUME :

1) Applications linéaires

Définition

Une application f d'un espace vectoriel réel E dans un espace vectoriel réel F est dite linéaire si et seulement si :

-pour tout $\vec{u}$ et $\vec{v}$, éléments de E, $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$;

- pour tout $\vec{u}$ élément de E et pour tout réel α, $f(\alpha.\vec{u}) = \alpha.f(\vec{u})$.

Vocabulaire

-Toute application linéaire d'un espace vectoriel réel E dans IR est appelée forme linéaire de E.

Exemple : $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{matrix}$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^2$.

-Toute application linéaire d'un espace vectoriel E dans E est appelée endomorphisme de E.

Exemple : $\begin{array}{cccc} g: \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

-Toute application linéaire surjective d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est appelée épimorphisme.

-Une application linéaire injective d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est appelée monomorphisme.

-Une application linéaire bijective d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F est appelée isomorphisme, si de plus F=E, on parle d'automorphisme de E.

Remarque

-Une application f de E dans F est linéaire si et seulement si pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$, éléments de E, pour tous réels α et β, $f(\alpha\,\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\, f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$.

-La somme, la composée de deux applications linéaires et le produit d'une application linéaire par un réel sont des applications linéaires.

-Une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, E et F de dimensions finies, est un isomorphisme si et seulement si l'image de toute base de E est une base de F.

2) Noyau et image d'une application linéaire.

Soit f une application linéaire.

-Le noyau de f noté ker$f$ ou N(f) est l'ensemble des éléments de E ayant pour image l'élément nul de F. ker$f$= $\{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_F}\}$. ker($f$) est un sous espace vectoriel de E.

-L'image de f noté Imf est l'ensemble des éléments de F admettant chacun au moins un antécédent dans E par f. Imf= $\left\{\overrightarrow{u'} \in F / \exists \vec{u} \in E,\ \overrightarrow{u'} = f(\vec{u})\right\}$. Im($f$) est un sous espace vectoriel de F.

-Si E est de dimension finie alors dim(ker$f$) + dim(Imf)= dimE.

3) Matrice d'une application linéaire

Soit f une application linéaire définie d'un espace vectoriel E de dimension P dans un espace vectoriel F de dimension n. B une base de E et B' celle de F.

La matrice M de f relativement aux bases B et B' est un tableau de p colonnes et de n lignes dont les colonnes sont constituées des composantes des images des vecteurs de B écrites dans la base B'.

Exemple : La matrice relativement aux bases canoniques de l'application linéaire

$$\begin{array}{llll} g: \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ \quad (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z, x-3y+4z) \end{array}$$ est $M_h\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

M est une matrice carrée si son nombre de colonnes est égal à son nombre de lignes.

Le produit $M \times N$ de deux matrices M et N n'est possible que si le nombre de colonnes de M est égale au nombre de lignes de N.

Exemple : $\begin{pmatrix} 5 & 0,5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,5 & -6,5 & -3 \\ -3 & 9 & -12 \end{pmatrix}$

M est inversible si et seulement si f est bijective. Dans ce cas, M^{-1} est la matrice def^{-1} relativement aux bases B' et B.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

On considère $\mathcal{V}_3$, l'ensemble des vecteurs de l'espace et f l'application de $\mathcal{V}_3$ dans $\mathcal{V}_3$ qui à

$\vec{v}(x,y,z)$ associe $\overrightarrow{v'}(x',y',z')$ dans la base canonique tel que $\begin{cases} x' = -x+y-z \\ y' = \quad x-y+z \\ z' = 2x-2y+2z \end{cases}$

1) Montre que f est un endomorphisme.
2) Détermine kerf.
3) Détermine Imf
4) Donne la matrice de f dans la base canonique.

CHAPITRE 3: DIVISIBILITÉ DANS $\mathbb{Z}$

LEÇON 1 : DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{Z}$ ET SYSTÈME DE NUMERATION

Durée : 100 min

Motivation

Face aux problèmes de partage, du désir de connaitre le jour de naissance d'une personne connaissant sa date de naissance, nous avons souvent des difficultés à chercher les solutions. Cette leçon nous donne quelques outils mathématiques pouvant nous permettre de solutionner ce genre de problèmes et d'autres types de problèmes de la vie.

Objectifs pédagogiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Passer de l'écriture d'un entier d'une base à une autre.
- Déterminer le reste dans une division euclidienne.
- Ecrire un entier naturel non nul dans le système de numération binaire et décimal.

Prérequis

a- Donne trois multiples de chacun des entiers relatifs: $9; -17;\ 1;$ et 0.
Peux-tu compter le nombre de multiples d'un nombre entier non nul ?

b- Donne quatre diviseurs de chacun des entiers relatifs: $15; 0;\ \ 27;\ -18;\ 1$ et 0.
Peux-tu compter le nombre de diviseurs d'un entier naturel ?

c- Donner le quotient et le reste dans les divisions ci-dessous

1- 15 par 6

2- 28 par 7

Quelle conclusion peux-tu faire sur le deuxième cas ?

Situation problème

Lors de la distribution des convocations pour la réunion de lancement des activités de l'APEE du lycée, le surveillant général a distribué aux chefs de classe des convocations pour les élèves de leurs classes respectives. Chacun des chefs de classe a obtenu 50 et il restait une autre quantité entre les mains du surveillant (cette quantité étant plus petite que le nombre de chefs de classe). Ce dernier se rend compte qu'en faisant la somme des convocations qu'il avait avant de distribuer aux chefs des classes, du nombre de chef de classe et du nombre de convocations qu'il lui reste, il obtient 3025. Aide le surveillant à trouver le nombre de convocations qu'il avait, le nombre d'élèves ayant eu les convocations ainsi que le nombre de chef de classe. On rappelle que les chefs de classes n'ont pas de convocations car leurs parents sont d'office inviteés une fois qu'ils sont désignés chef.

Activité d'apprentissage

1- Ecrire chacun des nombres a et b sous la forme $a = qb + r$ avec r positif et inférieur $|b|$, donner le quotient et le reste dans chacune des divisions suivantes
   a) $a = -17$ par $b = 3$
   b) $a = -23$ par $b = -5$
   c) $a = 19$ par $b = -4$
2- Si q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division eucludienne de a par b,
   a- Quelle relation existe entre a, b, q et r
   b- Sachant que $q = 50$, $a + b + r = 3025$,et que $0 \leq r < q$,détermine a, b et r
   c- Résous la situation problème.
3- En remarquant que :
   a) $129 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 9 \times 10^0$ et que chacun des entiers qui multiplie les puissances de 10 sont strictement inferieurs à 10, donne aussi une décomposition sous la même forme de chacun des entiers : 122 et 140
   b) $13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ et que chacun des entiers qui multiplie les puissances de 2 sont strictement inferieurs à 2, donne aussi une décomposition sous la même forme de chacun des entiers : 121 et 17

Resolution

1- Donnons le reste de la division

$17 = 3 \times 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad -17 = 3 \times (-5) - 2$

$\Rightarrow \quad -17 = 3 \times (-5) - 3 + 1$

$\Rightarrow \quad -17 = 3 \times (-5 - 1) + 1$

$\Rightarrow \quad -17 = 3 \times (-6) + 1$

Donc $r = 1$ et $q = -6$

$-23 = (-5)(4) - 3 \quad \Rightarrow \quad -23 = (-5)(4) - 3$

$\Rightarrow -23 = (-5)(4) - 5 + 2$

$\Rightarrow -23 = (-5)(5) + 2$

Donc $r = 2$ et $q = 5$

$19 = 4 \times 4 + 3 \quad \Rightarrow \quad 19 = (-4) \times (-4) + 3$

Donc $r = 3$ et $q = -4$

2- a- $a = bq + r$

b- on a : $\begin{cases} a = bq + r \\ a + b + r = 3025 \\ 0 \leq r < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 50b + r \\ a + b + r = 3025 \\ 0 \leq r < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 51b + 2r = 3025 \\ 0 \leq 2r < 2b \end{cases}$

$\Rightarrow \ 0 \leq 3025 - 51b < 2b$ on obtient par encadrement $b = 59$ ainsi, $r = 8$

   d- en prenant a, b et r respectivement le nombre de convocations initiales, le nombre de chef de classe et le reste de convocations, on a exactement la question précédente.

3- a- $122 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

$140 = 1 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 0 \times 10^0$

b- $121 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

Vous remarquerez qu'en prenant les coefficients entiers devant les puissances de 2, on a exactement 1111001 qui représente l'écriture de 121 en base 2 ou base binaire.

$$17 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Donne l'écriture de 17 en base binaire

Remarque : pour écrire un nombre de la base décimale à une autre base b, le prncipe consiste à faire sa decoposition sous forme de puissance de b de sorte que les coefficients devant les puissances de b soient strictement inferieurs à b et que le premier coefficient soit non nul, ainsi ces coefficients pris dans le même ordre que l'ordre ci-dessus constitue l'écriture de ce nombre en base b.

Résumé

Multiple et diviseur d'un entier relatif

Soit a et b deux entiers tels que b soit non nul.
On dit que **b divise a** ou que **a est divisible par b** ou encore que **a est un multiple de b** s'il existe un entier k tel que : $a = bk$.

Exemple : 11 divise 0 car $0 = 11 \times 0$

-18 est un multiple de 9

Notation

- L'ensemble des multiples de l'entier a est noté $a\mathbb{Z}$.
  Exemple : $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z} = \{\dots, -1,0,1, \dots\}$
  $3\mathbb{Z} =$……….
  $0\mathbb{Z} = \{0\}$
- L'ensemble des diviseurs de l'entier b est noté $D(b)$.
  Exemple : $D(12) =$…………
  $D(-8) =$……………
  $D(1) = \{1, -1\}$, $D(0) = \mathbb{Z}^*$

Conséquences :

- b divise $a \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$.
  Exemple : 2 divise 8 donc $\frac{8}{2} = 4 \in \mathbb{Z}$.
- Tous les entiers non nul divisent 0 et 1 divise tous les entiers .
  $D(0) = \mathbb{Z}^*$ et $D(1) = \{-1, 1\}$
- Un entier a est toujours divisible par : $a, -a, 1$, et -1 .

Propriétés :

Soient a, b et c des entiers relatifs tels que a et b soient non nuls.

P_1) a divise a.
P_2) Si a divise b et b divise c alors a divise c.
P_3) Si b divise a alors $|b| \leq |a|$.
P_4) Si b divise a et a divise b alors $|a| = |b|$.

P_5) Si a divise b et c, alors pour tout entiers relatifs p et q, a divise $pb + qc$.
Exercice à faire à la maison : démontre toutes ces propositions

1- Division euclidienne

Soient a et b deux entiers relatifs tels que b soit non nul. Il existe un unique couple

$(q; r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$.

Les entiers q et r sont appelés respectivement **quotient** et **reste** de la division euclidienne de a par b.

2- Système de numération

Soient a , b deux entiers naturels tel que $b > 1$. L'écriture de a dans la base b est

$a = \sum_{i=0}^{P} a_i b^i$ avec $0 \leq a_i < b$ et $a_p \neq 0$ et s'ecrit encore $\overline{a_p a_{p-1} \ldots\ldots a_1 a_0}^{b}$.

Remarque

- L'écriture de a en base $b = 10$ ou encore en base décimale peut s'écrire sans précision de b

c'est-à-dire $\overline{a_p a_{p-1} \ldots a_i \ldots a_1 a_0}$ et $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

- Dans le système de numération binaire (cas où $b = 2$) , $a_i \in \{0,1\}$.
- Dans le système hexadécimale (cas où $b = 16$), on représente les nombres $10; 11; 12; 13; 14$ *et* 15 respectivement par les caractères $A; B; C; D$ *et* F.

Exercices d'application

a) Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b.
   1. $a = -247$ et $b = 23$
   2. $a = -235$ et $b = -17$
   3. $a = 507$ et $b = 32$

b) Ecrire en base 2 les entiers suivants : 32 et 104

c) Ecrire en base 10 les nombres $\overline{101101}^2$ et $\overline{11001}^2$

d) La division euclidienne de 900 par un entier naturel b a pour quotient 14 et pour reste r. Quelles sont les valeurs de b et r ?

e) Déterminer les valeurs de l'entier m pour que $\frac{m+17}{m-1} \in \mathbb{Z}$

f) Soit b un entier supérieur ou égal à 2. Ecrire le nombre $(b+1)^3$ en base b.

g) De l'écriture : $341 = \overline{2331}^a$, déterminer a.

LEÇON 2 : CONGRUENCE MODULO n $(n \in \mathbb{Z}^*)$ ET CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ DANS LE SYSTÈME DE NUMERATION DECMAL

Durée : 100 min

Motivation

Face aux problème de détermination du dernier chiffre d'un nombre écrit sous forme de puissance (le chiffre des unités) ou de détermination du reste dans une division euclidienne ou encore de dire si un nombre est divisible par 3,4,5,9,11, nous semblons avoir manqué d'éléments pour aborder ce genre de problème. Cette leçon nous donne des éléments pouvant nous facilité la tâche et pouvant surtout nous permettre d'élargir les critères de divisibilité.

Objectifs pédagogiques

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

- Utiliser les congruences pour établir les critères de divisibilités.
- Utiliser les congruences pour déterminer les restes dans une division euclidienne.
- Etablir les critères de divisibilité en base décimale.

Prérequis

Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**.**

Situation problème

Lors du concours de mathématiques au lycée, deux questions sont posées aux candidats :

1- Sachant que le reste dans la division de 2^4 par 5 est 1, donne le reste dans la division de 2^{32} par 5
2- Comment reconnaitre facilement sans faire la division d'un nombre, qu'il est divisible par 11.

Activité d'apprentissage

1- Si n est un entier relatif non nul tel que n divise $x - y$, alors on note :

$x \equiv y[n]$ et se lit '' x est congrue à y modulo n'' .

a) Donne quatre exemples d'entiers x, y et n verifiant $x \equiv y[n]$.
b) Complète les pointillés :
   $0 \equiv \cdots [n]$, $11 \equiv \cdots [11]$,
   $8 \equiv \cdots [3]$, $-13 \equiv \cdots [5]$.
c) On a : $7 \equiv -1[2]$ et $9 \equiv 3[2]$

Peut-on dire que : $(7+9) \equiv (-1+9)[2]$? $(7\times 9) \equiv (-1\times 9)[2]$?

d) Répondre à la première question de la situation problème si vous êtes candidats aux concours.

2-On considère un nombre entier naturel $x = \overline{a_p a_{p-1} \ldots\ldots a_1 a_0}$

a) Démontre chacune des propositions suivantes

1- $x \equiv a_0[2]$

2- $x \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i\,[3]$

3- $x \equiv a_0 + 10a_1[4]$

4- $x \equiv a_0[5]$

5- $x \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i\,[9]$

6- $x \equiv \sum_{i=0}^{p}(-1)^i a_i\,[11]$

b) Déduire les critères de divisibilité par 3; 4; 5; 9; 11 et 25.

c) Répondre à la deuxième question de la situation problème si vous êtes candidats aux concours.

Résolution

1- a- $2 \equiv 2[n]$, $17 \equiv 2[3]$ …………..

b- Complétons

$0 \equiv 0[n]$, $11 \equiv 0[11]$,

$8 \equiv 2[3]$, $-13 \equiv 2[5]$

c-

On a : $7 \equiv -1[2]$ et $9 \equiv 3[2]$

Oui nous pouvons dire que : $(7+9) \equiv (-1+9)[2]$? $(7\times 9) \equiv (-1\times 9)[2]$. En effet

On a : $7+9 = 16$ et $-1+9 = 8$ en plus, $16-8 = 8$ est multiple de 2

On a : $7\times 9 = 63$ et $-1\times 9 = -9$ en plus, $63+9 = 72$ est multiple de 2

Remarque : la relation de congruence est **compatible** avec l'addition et la multiplication.

2- $x = \sum_{i=0}^{P} a_i 10^i$

1- Pour tous entiers $i \geq 1$, $10^i \equiv 0[2] \Longrightarrow$ Pour tous entiers $i \geq 1$, $a_i 10^i \equiv 0[2]$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{P} a_i 10^i \equiv 0[2]$

Puisque $a_0 \equiv a_0[2]$ on obtient par addition membre à membre $x \equiv a_0[2]$

2- Pour tous entiers $i \geq 1$, $10 \equiv 1[3] \Longrightarrow$ Pour tous entiers $i \geq 1$, $10^i \equiv 1[3]$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{P} a_i 10^i \equiv \sum_{i=1}^{p} a_i\,[3]$

3- Pour tous entiers $i \geq 2$, $10^i \equiv 0[4] \Longrightarrow$ Pour tous entiers $i \geq 2$, $a_i 10^i \equiv 0[4]$

$\Longrightarrow \sum_{i=2}^{P} a_i 10^i \equiv 0[4]$

$\Longrightarrow \sum_{i=2}^{P} a_i 10^i + 10a_1 + a_0 \equiv 10a_1 + a_0[4]$

Donc $x \equiv a_0 + 10a_1[4]$

4- Pour tous $i \geq 1$, $10^i \equiv 0[5] \Longrightarrow$ Pour tous entiers $i \geq 1$, $a_i 10^i \equiv 0[5]$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{P} a_i 10^i \equiv 0[5]$

$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{P} a_i 10^i + a_0 \equiv a_0[5]$

Donc $x \equiv a_0[5]$

5- Pour tous $i \geq 1$, $10 \equiv 1[9] \Longrightarrow$ Pour tous entiers $i \geq 1$, $10^i \equiv 1[9]$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i 10^i \equiv \sum_{i=1}^{p} a_i \,[9]$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} a_i 10^i + a_0 \equiv a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i \,[9]$$

Donc $x \equiv \sum_{i=1}^{p} a_i \,[9]$

6- On a : $10 \equiv (-1)[11] \Longrightarrow$ Pour tous entiers $i \geq 0$, $a_i 10^i \equiv (-1)^i a_i [11]$

$$\Longrightarrow \sum_{i=0}^{p} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_i \,[11]$$

Donc $x \equiv \sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_i \,[11]$

2.5. Résumé

1- Congruence modulo $n, n \in \mathbb{N}^*$.

Soit a et b deux entiers relatifs et n un entier relatif non nul.
On dit que a est congru à b modulo n et on note $a \equiv b[n]$, si $a - b$ est un multiple de n.

Remarques :

- $a \equiv 0[n] \Leftrightarrow a \in n\mathbb{Z}$
- Si le reste de la division euclidienne de a par b est r alors $a \equiv r[b]$.

Exemple

$7 \equiv 1[3]$, $11 \equiv 5[6]$, $-13 \equiv 3[4]$

Propriétés :

Soient a, a', b, b' et c des entiers relatifs, n un entier relatif non nul et k un entier relatif.
On a :

P_1- $a \equiv a[n]$.

P_2- Si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $a \equiv c[n]$.

P_3- Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$.alors $a + b \equiv a' + b'[n]$.

P_4- Si $a \equiv a'[n]$ et $b \equiv b'[n]$ alors $ab \equiv a'b'[n]$.

P_5- Si $a \equiv a'[n]$, $k \in \mathbb{Z}^*$ alors $ka \equiv ka'[n]$.

P_6- Si $ka \equiv ka'[n]$ et $k \wedge n = 1$ alors $a \equiv a'[n]$

P_7- Si $a \equiv a'[n]$, $k \in \mathbb{Z}^*$ alors $a^k \equiv a'^k[n]$.

Preuve : A faire en exercice

2- Critères de divisibilité

Soit l'entier naturel $x = \overline{a_p a_{p-1} \ldots\ldots a_1 a_0}$

- x est divisible par 2 si et seulement si $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.
- x est divisible par 3 si et seulement si $\sum_{i=0}^{p} a_i \equiv 0[3]$.
- x est divisible par 4 si et seulement si $a_0 + 10a_1 \equiv 0[4]$.
- x est divisible par 5 si et seulement si $a_0 \in \{0, 5\}$.
- x est divisible par 9 si et seulement si $\sum_{i=0}^{p} a_i \equiv 0[9]$.
- x est divisible par 11 si et seulement si $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_i \equiv 0[11]$.

Exercice application

1- Déterminer le chiffre des unités de 3^{12}

2- Montrer que : $2^{32} \equiv 1[5]$

3- Trouver le reste de la division de 7 par 32^{45}

4- Trouver toutes valeurs de a et b telles que le nombre $x = \overline{26x85y}$ dans le système décimal soit divisible par 3 et 11.

5- Démontrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1[7]$

6- Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

7- Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers tels que le nombre d'ecriture decimale $\overline{724ab}$ soit divisible par 9

8- Quel est l'ensemble des nombres entiers n tel que : $3^n.n - 9n + 2$ soit divisible par 8.

CHAPITRE 4 : PPCM ET PGCD DE DEUX ENTIERS NON NULS

Motivation

La résolution de certains problèmes de la vie quotidienne tels que le partage des biens, la détermination des dimensions d'une pièce, le remplissage d'une surface ou d'un espace par des motifs ou des objets identiques, le temps de coïncidence des évènements périodiques fait le plus souvent appel à l'usage du PPCM et du PGCD. Ce chapitre nous donnera les outils nécessaires pour le faire aisément.

LEÇON 1 PPCM DE DEUX ENTIERS RELATIFS

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Utiliser le PPCM de deux entiers relatifs non nuls pour déterminer l'ensemble des multiples communs à ces deux entiers naturels.
- Utiliser les propriétés du PPCM pour déterminer le PPCM de deux entiers et résoudre certains problèmes de l'arithmétique.

PRE-REQUIS

- Est-il possible pour deux voitures A et B partant au même moment de la ligne de départ et faisant plusieurs tours dans le même circuit de se rencontrer à nouveau à la même ligne de départ sachant que A fait un tour en 36 min et B en 30 min ? Si oui quel sera le temps mis pour la prochaine rencontre ?
  Réponse : Oui c'est possible et le temps mis pour la prochaine rencontre est 180min
- Si a et b sont deux entiers relatifs non nuls. Que signifient les notations
  $a\mathbb{Z}, b\mathbb{Z}, a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$?
  Réponse : ces notations désignent respectivement l'ensemble des multiples de a, l'ensemble des multiples de b et l'ensemble des multiples communs de a et de b.

SITUATION PROBLEME.

Un événement E a lieu à chaque coïncidences de deux phénomènes périodiques A et B de périodes a et b respectivement. Quelle est la période de cet évènement ?

I ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

I a) Ecrire en extension $6\mathbb{Z}$.

b) Ecrire en extension $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$ et donner son plus petit élément strictement positif μ_1. Que représente-t-il pour 2et 3 ?

c) Ecrire en extension $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z}$ et déterminer son plus petit élément strictement positif μ_2. Quelle relation existe-t-il entre μ_1 et μ_2 ?

Soit a et b deux entiers non nuls et k un entier naturel non nul. Posons $\mu = \mathrm{PPCM}(a\,;b)$ le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

d) Conjecturer les expressions de $\mathrm{PPCM}(ka, kb)$, et de $\mathrm{PPCM}(|a|;|b|)$ en fonction de $\mathrm{PPCM}(a\,;b)$.

e) Conjecturer l'expression de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ en fonction de μ.

II. **a)** Soit a et b deux entiers naturels non nuls et $\mu = \mathrm{PPCM}(a;b)$. Montrer que $\mu\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

b) Soit $k \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. q et r respectivement le quotient et reste de la division euclidienne de k par μ. Montrer que r=0 et en déduire que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subseteq \mu\mathbb{Z}$.

c)En déduire qu'un entier est multiple de μ si et seulement si il est multiple commun de a et de b.

d) En déduire la réponse à la question de la situation problème.

Résolution de l'activité d'apprentissage.

I a) $6\mathbb{Z} = \{\dots, -36; -30; -24; -18; -12; -6; 6; 12; 18; 24; 36; \dots\}$

b)$2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{\dots, -36; -30; -24; -18; -12; -6; ; 6; 12; 18; 24; 36; \dots\}$. $\mu_1 = 6$ et il représente le PPCM de 2 et 3.

c) $6\mathbb{Z} \cap 9\mathbb{Z} = \{\dots; -72; -36; -18; 0; 18; 36; 72; \dots\}$. $\mu_2 = 18$. C'est le PPCM de 9 et 6. Et $\mu_2 = 3\,\mu_1$.

d) conjectures : $\mathrm{PPCM}(ka; kb) = k\mathrm{PPCM}(a;b) = k\mu$

$\mathrm{PCM}(|a|;|b|) = \mathrm{PPCM}(a;b) = \mu$

e) $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$

II Soit a et b deux entiers naturels non nuls et $\mu = \mathrm{PPCM}(a;b)$.

a) Soit $k \in \mu\mathbb{Z}$ alors k est multiple de μ. Mais μ est multiple de a et de b donc k est multiple de a et de b ainsi $k \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ soit donc $\mu\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

b) Soit $k \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. $k = q\mu + r, 0 \le r < \mu$. Ainsi, $r = k - q\mu$ donc $r \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Si r est différent de 0 alors r serait un autre élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ plus petit que μ. Ce qui est une contradiction car μ est le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ donc r=0 et par suite, $k = q\mu$ ie $k \in \mu\mathbb{Z}$ et finalement, $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subseteq \mu\mathbb{Z}$.

c) $a\mathbb{Z} \cap b \subseteq \mu\mathbb{Z}$ et $\mu\mathbb{Z} \subseteq a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

d) Soit j_0 un jour quelconque où E a lieu (jour où il y a coïncidence des phénomènes A et B). Alors l'ensemble A des nombres de jours entre j_0 et les autres réalisations consécutives du phénomène A est : $A = \{a; 2a; 3a; 4a; ..\}$. c'est l'ensemble des éléments strictement positifs de $a\mathbb{Z}$ De même, l'ensemble B des nombres de jours entre j_0 et d'autres réalisations consécutives du phénomène B est B={b; 2b; 3b; …} c'est l'ensemble des éléments strictement positifs de $b\mathbb{Z}$**.** Ainsi, $A \cap B$ est l'ensemble des nombres de jours entre j_0 et les coïncidences consécutives des phénomènes A et B. c'est l'ensemble des éléments strictement positifs de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}=\mu\mathbb{Z} = \{\mu; 2\mu; 3\mu; \dots\}$ ou μ est le PPCM (a ; b) d'où La période de coïncidence des phénomènes A et B est donc μ.

II-RESUME

1) Définitions

(1) Soit a et b deux entiers naturels non tous nuls. L'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est non vide car il contient ab. Il admet donc un plus petit élément strictement positif.
(2) On appelle **plus petit commun multiple** de a et de b noté **PPCM** $(\mathbf{a};\mathbf{b})$ le plus petit élément strictement positif de $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.
Exemple : $\mathrm{PPCM}(36;30) = 180$

2) Propriétés

(1) $\forall a, b \in \mathbb{Z}^*,\ \mathrm{PPCM}(a;b) = \mathrm{PPCM}(|a|;|b|)$.
(2) $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \max(a;b) \leq \mathrm{PPCM}(a;b) \leq ab$.
(3) $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a \in b\mathbb{Z} \Leftrightarrow \mathrm{PPCM}(a;b) = a$.
Exemples : $\mathrm{PPCM}(-36;30) = \mathrm{PPCM}(36;30) = 180$. $\mathrm{PPCM}(-6;-18) = 18$.
(4)$\forall a, b, k \in \mathbb{N}^*, \mathrm{PPCM}(ka;kb) = k\mathrm{PPCM}(a;b)$.
(5) Si $\mu = \mathrm{PPCM}(a;b)$, alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \mu\mathbb{Z}$.
Exemple : $30\mathbb{Z} \cap 36\mathbb{Z} = 180\mathbb{Z}$.

EXERCICES D'APPLICATION

1) Déterminer $PPCM(24;56)$, $PPCM(180;450)$, $PPCM(25!;10!)$

2) Déterminer les 10 premiers éléments positifs de $180\mathbb{Z} \cap -450\mathbb{Z}$.

3) Soit n un entier naturel non nul déterminer $PPCM(4^n;2^n)$

4) Soit n un entier naturel non nul ; ranger dans l'ordre croissant :

$n^2 + 1;\ n^4 - 1$ et $\mathrm{PPCM}(n^2 + 1;\ n^4 - 1)$

5) Justifier que $\mathrm{PPCM}(2^{32} + 1; 641) = 2^{32}$

6) Les habitants d'un village du département du Noun à l'ouest Cameroun adorent deux génies protecteurs. NCHARE et YEN. Le génie NCHARE est adoré tous les140 jours et YEN tous les 108 jours. Les jours où les cultes coïncident sont considérés comme jours de grâce appelés « jours des génies ». Un matin, le village a adoré le génie YEN.
Déterminer le nombre de jours qui séparent ce matin-là du jour des génies sachant qu'ils avaient adoré le génie NCHARE 8 jours auparavant.

LEÇON 2 PGCD DE DEUX ENTIERS RELATIFS

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES.

- Déterminer le PGCD en utilisant l'algorithme d'Euclide et reconnaitre les entiers premiers entre eux.
- Utiliser le PGCD pour déterminer l'ensemble des diviseurs communs de deux entiers relatifs et résoudre certains problèmes de l'arithmétique.

PRE-REQUIS

- Est-il possible de couvrir une surface rectangulaire de dimension 60cm sur 48cm avec des plaques carrées toutes identiques ? Si oui quelle sera la taille maximale d'une plaque ?
  Réponse : oui c'est possible et la dimension maximale du coté d'une plaque est de 12cm.
- Soit a et b deux entiers relatifs. Que signifient les notations D(a), D(b) et $\mathrm{D(a;b)}$?
  Réponse : Elle représente respectivement l'ensemble des diviseurs de a, l'ensemble des diviseurs de b et l'ensemble des diviseurs communs à a et à b.

SITUATION PROBLEME.

Oumar veut couvrir sa salle de bain de forme rectangulaire avec des carreaux de formes carrées. Selon son technicien, la plus grande dimension qu'on peut utiliser pour les côtés de ces carreaux est de 63cm, mais il a une préférence pour des carreaux de dimensions un peu plus faibles. Pouvez-vous alors lui proposer d'autres dimensions qu'il peut choisir ?

I-ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Activité 1

I-1) Déterminer $\mathrm{D(48;60)}$ et son plus grand élément δ_1. Que représente t-il pour 48 et 60 ?

2) Déterminer $\mathrm{D}(-48\,;60)$ et déterminer sont plus grand élément.

3) Déterminer $\mathrm{D}(4\,;5)$ et en déduire son plus grand élément δ_2. Que peut-on dire de 4 et 5 ? Quelle relation existe-t-il entre δ_1 et δ_2 ?

4) Déterminer $\mathrm{D}(12)$.

5) Si on appelle $\delta = \mathrm{PGCD}(a\,;b)$ le plus grand élément de $\mathrm{D}(a\,;b)$, Quelles conjectures pouvez-vous faire sur les expressions de $\mathrm{PGCD}(ka\,;kb)$, $\mathrm{PGCD}(|a|;|b|)$ et $\mathrm{D}(a\,;b)$ en fonction de δ.

II Soit a et b deux entiers naturels et δ le plus grand élément de $\mathrm{D}(a\,;b)$

1) Soit $d \in D(\delta)$, montrer que d divise a et b et en déduire que $D(\delta) \subseteq D(a;b)$.

soit $d \in D(a;b)$ posons $\mu = \mathrm{PPCM}(d;\delta)$

2) Montrer que μ divise a et b et en déduire que $\mu \leq \delta$

3) En déduire que $\mathrm{PPCM}(d;\delta) = \delta$ et en déduire que $d \in D(\delta)$

4) En déduire que $D(\delta) = D(a;b)$.

III Soit L et l respectivement la longueur et la largeur de la salle de bain d'Oumar.

1) Quel est le plus grand élément de D(L ; l)?

2) En utilisant II, déterminer D(L ; l) et en déduire la solution de la situation problème.

Solution de l'activité 1

1) $D(48;60) = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$ $\delta_1 = 12$ C'est le PGCD de 48 et 60.

2) $D(-48;-60) = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

3) $D(4;5) = \{-1;1\}$. $\delta_2 = 1$. On peut dire 4 et 5 sont premiers entre eux.
Visiblement, δ_1 =12 δ_2.

4) $D(12) = \{-12;-6;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;6;12\}$

5) conjecture.$D(a;b) = D(-a;-b)$; $\mathrm{PGCD}(ka ; kb) = k\mathrm{PGCD}(a ; b)$; $D(a;b) = D(\delta)$.

II-1) Soit $d \in D(\delta)$, alors d divise δ et δ divise a et b ; donc d divise a et b donc $d \in D(a;b)$ ainsi, $D(\delta) \subseteq D(a;b)$.

2) Comme $d \in D(a;b)$, alors a est multiple de d et δ donc a est multiple de μ. De même, b est multiple de μ donc μ divise a et b .d'ou $\mu \leq \delta$.

3) $\mu = \mathrm{PPCM}(d;\delta)$ donc $\delta \leq \mu$ donc $\mu = \delta = \mathrm{PPCM}(d;.\delta)$ donc $d \in D(\delta)$. Ainsi, $D(a;b) \subseteq D(\delta)$.

4) $D(\delta) \subseteq D(a;b)$ et $D(\delta) \supseteq D(a;b)$ donc $D(\delta) = D(a;b)$.

III-1) Son plus grand élément est 63.

2) $D(L;l) = D(63) = \{-63;-21;-3;-9;-7;-1;1;3;7;9;21;63\}$ donc les autres dimensions qu'il peut prendre sont : 1cm ;3cm ;7cm ;9cm et 21cm.

Activité 2

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b.

1) On suppose que $r = 0$,

- Montrer que $b \in D(a)$ et en déduire que $D(b) \subseteq D(a;b)$.
- Réciproquement, montrer $D(a;b) \subseteq D(b)$ et en déduire que $\mathrm{PGCD}(a;b) = b$.

1) Si $r \neq 0$, montrer que $D(a;b) = D(b;r)$ et en déduire que $\mathrm{PGCD}(a;b) = \mathrm{PGCD}(b;r)$.

3) Déduire des questions précédentes le $\mathrm{PGCD}(205;82)$.

Solution de l'activité 2

1) Si $r = 0$, alors $a = qb$ *donc* $b \in D(a)$.

- Soit $k \in D(b)$. Comme $b \in D(a)$, alors $k \in D(a)$ ainsi $k \in D(a;b)$ donc $D(b) \subseteq D(a,b)$
- Réciproquement, Si $k \in D(a;b)$ alors $k \in D(b)$ donc $D(a;b) \subseteq D(b)$ et par suite $D(a;b) = D(b)$. Ainsi, $\mathrm{PGCD}(a;b) = b$ car b est le plus grand élément de D(b).

2) Si $r \neq 0$, alors $a = bq + r$ avec $0 < r < b$

- Soit $k \in D(a;b)$. Alors $k \in D(r)$ car r est combinaison linéaire de a et b, ainsi $k \in D(b;r)$ d'où $D(a;b) \subseteq D(b;r)$

- Réciproquement, si $k \in D(b;r)$ alors $k \in D(a)$ car a est combinaison linéaire de r et b. Ainsi, $D(b;r) \subseteq D(a;b)$ soit donc $D(a,b) = D(b;r)$. $D(a,b)$et $D(b;r)$ont le même plus grand élément on en déduit donc que $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$.

3) Déduisons $PGCD(205;82)$.
On a :$205 = 2 \times 82 + 41$ donc $PGCD(205;82) = PGCD(82;41)$.
$82 = 2 \times 41 + 0$ donc $PGCD(82;41) = 41$ ainsi, $PGCD(205;82) = 41$

II-RESUME

1) Définitions

(1) Soit a et b deux entiers naturels non nuls. L'ensemble D(a ; b) est non vide.

(2) On appelle ***plus grand commun diviseur*** de a et de b noté $\mathbf{PGCD(a;b)}$ le plus grand élément de D(a ; b).

Exemples : $PPCM(36;30) = 180$ et $PGCD(48;60) = 12$..

(3) Deux nombres sont **premiers entre eux** si leurs PGCD est égal à 1

2) Propriétés

(1) $\forall a, b \in \mathbb{Z}^*$, $PGCD(a;b) = PGCD(|a|;|b|)$
(2) $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, 1 \leq PGCD(a;b) \leq \min(a;b)$
(3) $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a \in D(b) \Leftrightarrow PGCD(a;b) = a$
(4) $\forall a \in \mathbb{N}^*, PGCD(a;0) = a$ et $PGCD(a;1) = 1$.
(5) $\forall a, b, k \in \mathbb{N}^*, PGCD(ka;kb) = kPGCD(a;b)$
(6) Si $\delta = PGCD(a;b)$, alors $D(a;b) = D(\delta)$
Exemple $D(60;48) = D(12)$

3)Recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide.

Propriétés. Soit a et b deux entiers naturels non nuls. $a > b > 0$ et r le reste de la division euclidienne de a par b. Alors :
(1) Si $r = 0, PGCD(a,b) = b$
(2) Si $r \neq 0$ alors $PGCD(a;b) = PGCD(b;r)$

Pour déterminer le PGCD de deux entiers naturels a et b tels que $a > b > 0$, on effectue les divisions euclidiennes successives suivantes :

- Division de par b on obtient $a = bq_0 + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b)$
- Division de b par r_0 on obtient $b = r_0 q_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < r_0)$
- Division de r_0 par r_1 on obtient $r_0 = r_1 q_2 + r_2 \quad (0 \leq r_2 < r_1)$

On itère le processus jusqu'à obtenir un reste nul. $PGCD\ (a\,;b)$ est alors le dernier reste non nul obtenu dans cette suite de divisions euclidiennes.

EXERCICES D'APPLICATION

1) Calculer $PGCD(48; 32)$ et en déduire $PGCD(1440; 960)$; $PGCD(-2256; 1504)$

2) Déterminons PGCD$(304939; 151097)$ par l'algorithme d'Euclide .

3) Soit $n \in \mathbb{Z}$, déterminons $PGCD(n^4 - n^2 + 16; n^2 + 3n+4)$.

4) Montrer que la fraction $\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}$ est irréductible pour tout entier naturel non nul n.

5) Déterminer les valeurs possibles de l'entier naturel n vérifiant PGCD$\left(n^2 - 3n + 4 ; 7\right) = 7$.

6) On veut planter des arbres sur le périmètre d'un terrain triangulaire de cotés 132m, 156m et 204m de telle sorte qu'il y ait un arbre à chaque sommet du triangle et que les arbres soient également espacés. Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter si l'on veut que la distance entre deux arbres soit exprimée en un nombre entier de mètres ?

LEÇON 3 NOMBRES PREMIERS

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Utiliser la décomposition des entiers naturels en produit de facteurs premiers pour calculer leur PPCM, leur PGCD, le nombre de diviseurs d'un entier et dresser la liste de ses diviseurs positifs.
- Reconnaitre les nombres premiers entre eux.

SITUATION PROBLEME.

L'office du Baccalauréat d'un pays a reçu cette année 14553 copies de mathématiques à distribuer à un certain nombre de correcteurs de façon à ce que tous les correcteurs aient le même nombre de copies. A la fin, chaque correcteur reçoit 50 000FCFA. Sachant que chaque correcteur devra corriger entre 150 et 300 copies et que la somme à partager à tous les correcteurs ne devrait pas excéder 3.500.000CFA, quelles sont les différentes possibilités de choix du nombre des correcteurs par l'office?

I-ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE

Activité

I-Soit n un entier naturel différent de 0 et de 1. On considère l'ensemble D des diviseurs de n supérieurs ou égaux à 2. $D = \{\mathrm{d} \in \mathrm{D(n)}, \mathrm{d} \geq 2\}$.

1) Déterminer les diviseurs positifs de 17. Que peut-on dire de 17 ?

2) Montrer que D admet un plus petit élément p.

3) Montrer par l'absurde que p est un nombre premier.

4) On suppose maintenant que n est un nombre non premier.

a) Montrer qu'il existe un entier naturel p' tel que n=pp' et $1 < p \leq p'$

b) En déduire alors que $1 < p^2 \leq n$.

II-1) Ecrire 14553 comme produit de puissances entières de nombres premiers.

2) Montrer que tout nombre de la forme $3^a \times 7^b \times 11^c$ avec $a \in \{0,1,2,3\}\ b \in \{0,1,2\}\ et\ c \in \{0,1\}$ est un diviseur de 14553.

3) On admet que tout diviseur positif de 14553 est sous la forme $3^a \times 7^b \times 11^c$ avec $a \in \{0,1,2,3\}, b \in \{0,1,2\}, et\ c \in \{0,1\}$.

a) Déterminer le nombre de diviseurs positifs de 14553.

b) Déterminer l'ensemble des diviseurs positifs de 14553.

c)Donner la solution de la situation problème.

Solution de l'activité

I -1) les seuls diviseurs positifs de 17 sont 1 et 17. Donc 17 est un nombre premier.

1) On a $\mathrm{n} \in \mathrm{D(n)}$et $\mathrm{n} \geq 2$ donc $\mathrm{n} \in \mathrm{D}$. D est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet par

conséquent un plus petit élément p.
2) Supposons que p est un nombre composé. Alors il admet un diviseur k autre que 1 et p.
$k \in D(p)$ et $p \in D(n)$ donc $k \in D(n)$ ainsi $k \in D$ et $k \leq p$ ce qui contredit le fait que p soit le plus petit élément de D donc p est premier.
3a) supposons que n soit non premier, alors n admet un autre diviseur p' différent de 1 et p d'où $n = pp'$et $1 < p \leq p'$ car p est le plus petit diviseur de n strictement supérieur à 1.
b) Ainsi donc $1 \times p < p \times p \leq p' \times p$ d'ou $1 < p^2 \leq n$.

II-1)$14553 = 3^3 \times 7^2 \times 11$.
2) $3^3 \times 7^2 \times 11 = 3^{3-a} \times 7^{2-b} \times 11^{1-c} \times 3^a \times 7^b \times 11^c$ donc, $3^a \times 7^b \times 11^c$est un diviseur de $3^3 \times 7^2 \times 11$.
3a) Le nombre de diviseurs positifs de 14553 est donc $4 \times 3 \times 2 = 24$.
b) L'ensemble des diviseurs positifs de14553 est :
$\{1; 3; 7; 9; 11; 21; 27; 33; 49; 63; 77; 99; 147; 189; 231; 297; 441; 539; 693; 1323; 1617; 2079; 4851; 14533\}$
.

c) Soit N le nombre de correcteurs convoqués par l'office. Comme tous les correcteurs ont le même nombre de copies, N doit être un diviseur positif de 14553. Mais d'après l'énoncé, le nombre N_c de copies par correcteur est tel que $150 < N_c < 300$ d'ou $150 < \frac{14553}{N} < 300$.
On obtient donc $\frac{14553}{300} < N < \frac{14553}{150}$. Et finalement $48.51 < N < 97{,}02$. On peut prendre N=49 ou N=63 ou N=77 et les sommes totales allouées aux correcteurs respectivement pour ces nombres sont : 2450000F, 3150000F et 3850000F.

L'office pourra donc convoquer 49 ou 63 correcteurs.

II-RESUME

1 Nombres premiers

(1) On dit qu'un entier naturel p est ***premier*** lorsqu'il admet exactement deux diviseurs positifs 1 et p.
(2) Un entier naturel qui n'est pas premier est dit ***composé.***

Exemple : 2 ; 3 ;7 et 13 sont des nombres premiers.

(a) Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 admet au moins un diviseur premier p.
(b) Tout entier naturel n différent de 0 et de 1 et non premier admet au moins un diviseur premier p tel que $1 < p^2 \leq n$.

(3) *test de primalité* : Si un entier naturel n n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à$\sqrt{n}$, alors il est premier.

(4) *Ensemble des nombres premiers*. Il existe une infinité de nombres premiers.

(5) *Algorithme d'Eratosthène.* Pour déterminer les nombres premiers compris entre 1 et n, on procède comme suit :

c) On écrit les entiers naturels consécutifs de 1 à n.
d) 1 n'est pas premier on le supprime

e) 2 est premier on supprime tous les multiples de 2
f) Le premier nombre non supprimé est 3 qui est premier on supprime tous les multiples de 3
g) On itère le processus jusqu'à la fin
h) Tous les nombres non supprimés sont des nombres premiers.

2) Théorème fondamental de l'arithmétique.

Soit n un entier naturel non nul. $n \geq 2$

i) Il existe des nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$, et les entiers naturels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *tels* que $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$, avec $p_1 < \ldots < p_k$.
j) Cette écriture est unique et s'appelle la décomposition de n en produit de facteurs premiers.
k) Le nombre de diviseurs positifs de n est $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots \ldots (\alpha_k + 1)$

3) Utilisation de la décomposition pour déterminer le PPCM et le PGCD.

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \times p_{k+2}^{\alpha_{k+2}} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n}$ et $m = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha'_k} \times p'_{k+1}{}^{\alpha'_{k+1}} \times p'_{k+2}{}^{\alpha'_{k+2}} \times \ldots \times p'_m{}^{\alpha'_m}$ les décompositions de n et m en produit de facteurs premier. Alors on a :

$$\mathbf{PGCD(m,n) = p_1^{\min(\alpha_1,\alpha'_1)} \times p_2^{\min(\alpha_2,\alpha'_2)} \times \ldots \times p_k^{\min(\alpha_k,\alpha'_k)}}$$

$$\mathbf{PPCM(m,n) = p_1^{\max(\alpha_1,\alpha'_1)} \times \ldots \times p_k^{\max(\alpha_k,\alpha'_k)} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \times \ldots \times p_n^{\alpha_n} \times p'_{k+1}{}^{\alpha'_{k+1}} \times \ldots \times p'_m{}^{\alpha'_m}}$$

Exemple

Décomposer 700 et 18375 en produit de facteurs premiers puis déterminer leur PGCD, leur PPCM ainsi que le nombre de diviseurs positifs de chacun d'entre eux.

4) Nombres premiers entre eux

(8) Deux entiers relatifs sont dit ***premiers* entre eux ou étrangers** si leur PGCD est égal à 1

Exemples: 34 et 15 sont premiers entre eux.

(9) Deux nombres premiers distincts sont premiers entre eux.

(10) Si a et b sont premiers entre eux, alors les seuls diviseurs communs à a et a b sont 1 et -1.

EXERCICES D'APPLICATION

1. Quel est le plus petit entier naturel ayant 15 diviseurs positifs ?
2. Quel est l'entier naturel n à 15 diviseurs positifs, divisible par 6 mais pas par 8 ?
3. Dresser la liste des nombres premiers inférieurs à 133
4. 1001 est-il un nombre premier ?
5. Montrer en utilisant le raisonnement par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

LEÇON 4 THEOREME DE BEZOUT ET DE GAUSS

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Enoncer le théorème de BEZOUT et de GAUSS.
- Utiliser l'identité de BEZOUT pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux.
- Utiliser les théorèmes de BEZOUT et de GAUSS pour résoudre les problèmes de divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

PRE-REQUIS.

Quand dit-on que deux entiers relatifs sont premiers entre eux ?

SITUATION PROBLEME.

Romuald veut construire avec précision dans un repère convenablement choisi la droite d'équation $564x + 271y = 1$. Pour cela, il cherche deux couples d'entiers relatifs qui appartiennent à cette droite. Après plusieurs tentatives vouées à l'échec, il se demande si vraiment de tels couples existent. Peux-tu l'aider à vérifier rapidement si les couples existent sans toutefois les déterminer ?

I- ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

A) Dans chacun des cas suivants, déterminer si c'est possible deux entiers relatifs x et y vérifiant : i) $4x + 12y = 1$ ii) $4x + 12y = 5$ iii) $4x + 12y = 16$.

B) Soit a et b deux entiers naturels non nuls et δ leur PGCD. On désigne par D l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent comme combinaisons linéaires de a et b.

$D = \{c \in \mathbb{N} \ / \ \exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } ax + by = c\}$

I 1) Montrer que D admet un plus petit élément.

Soit p le plus petit élément strictement positif de D

2) Montrer que p est un multiple de δ.

3) Soit r le reste de la division euclidienne de a par p. Montrer que r est un élément de D.

4) En déduire que r vaut 0 et que a et multiple de p.

5) Montrer aussi que b est un multiple de p et en utilisant 2, déduire que $p = \delta$.

6) Déduire de 5 que tout multiple de δ appartient à D.

7) Réciproquement, Montrer que tout élément de D est multiple de δ et en déduire que $\delta\mathbb{Z} = D$.

8) Donner alors une condition nécessaire et suffisante sur a, b, et c pour que l'équation $ax + by = c$ admette de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

II On suppose que l'équation $ax + by = c$ admet de solutions dans $\mathbb{Z}^2$si et seulement si c est multiple du PGCD de a et b.

1) Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers x et y dans tels que $ax + by = 1$.

2) En utilisant l'algorithme d'Euclide, calcule le PGCD (564 ; 271) et aide Romuald à conclure.

3) En déduire que pour tous entiers naturels non nuls a, b et c, si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Solution de l'activité d'apprentissage

A)

i) $4x + 12y = 1 \Leftrightarrow 4(x + 3y) = 1$. Pour que cette relation soit vérifiée, il faut d'abord que 4 et 3 x + y soient les diviseurs de 1 ce qui est impossible donc x et y n'existent pas.

ii) De même, 4 n'étant pas diviseur de 5, alors, x et y n'existent pas.

iii) On peut prendre x=1 et y=1

B

I1) $\mathrm{a} \times 1 + \mathrm{b} \times 0 = \mathrm{a}$ donc $\mathrm{a} \in \mathrm{D}$. D est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet par conséquent un plus petit élément p.

2) $\mathrm{p} \in \mathrm{D}$ donc $\exists\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{p} = \mathrm{ax} + \mathrm{by}$. Mais δ est un diviseur de a et de b donc δ divise p car p est combinaison linéaire de a et b ainsi, δ est un multiple de p.

3) Soit q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par p. Alors, $\mathrm{a} = \mathrm{pq} + \mathrm{r}$, avec $0 \leq \mathrm{r} < p$ mais $\mathrm{p} \in \mathrm{D}$ donc $\mathrm{p} = \mathrm{ax} + \mathrm{by}$ avec x et y $\in \mathbb{Z}$.
Ainsi, $\mathrm{r} = \mathrm{a} - \mathrm{pq} = \mathrm{a} - (\mathrm{ax} + \mathrm{by})\mathrm{q} = \mathrm{a}(1 - \mathrm{xq}) - \mathrm{bpy}$ d'où $\mathrm{r} \in \mathrm{D}$.

4) S i$r \neq 0$, il serait un élément de D plus petit que p ce qui est contradictoire puisque p est le plus petit élément de D. Ainsi p divise a.

5) De même, on peut montrer par un raisonnement analogue à 3 et 4 que p divise b. Ainsi p est un diviseur commun à a et a b et est par conséquent inférieur ou égal à δ. d'où $p \leq \delta$.
Or p est multiple de δ $donc\ p \geq \delta$ et par conséquent $p = \delta$.

6) Soit m un multiple de δ alors $\exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ m = \delta k$ or $\delta = p\ et\ p \in D\ donc\ \delta \in D$. Ainsi, $\delta = ax + by\ avec\ x, y \in \mathbb{Z}$. En multipliant cette relation par k, on obtient $\delta k = axk + byk$ soit donc $m = axk + byk$ d'où $m \in D$. On conclut donc que $\delta\mathbb{Z} \subseteq D$.

7) Réciproquement, si $c \in D$, alors c est combinaison linéaire de a et de b donc δ divise c car il divise a et b et par suite, $c \in \delta\mathbb{Z}$. On conclut que$D \subseteq \delta\mathbb{Z}$. Et finalement $\delta\mathbb{Z} = D$.

8) On en déduit donc que ax + by =c admet de solution dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $c \in \delta\mathbb{Z}$ c'est-à-dire si et seulement si c est multiple du PGCD de a et de b.

II 1)

- Supposons a et b premiers entre eux. Alors $\mathrm{PGCD}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 1$, donc 1 est multiple du $\mathrm{PGCD}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ donc par hypothèse on peut trouver x et y dans $\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = 1$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe x et y dans $\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = 1$, alors $1 \in D = \delta\mathbb{Z}$ donc 1 est multiple du PGCD de a et b.

3) $\mathrm{PGCD}(564\,;271) = 1$ donc d'après les questions précédentes, l'équaion 564x+271y=1 admet de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Si a divise bc alors $\mathrm{bc} = \mathrm{ka}$ avec $\mathrm{k} \in \mathbb{Z}$ De plus si a et b sont premiers entre eux alors d'après la démonstration précédente on peut trouver x et y dans $\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = 1$ et en multipliant cette égalité par c on obtient $\mathrm{acx} + \mathrm{bcy} = \mathrm{c}$ i.e $\mathrm{acx} + \mathrm{kay} = \mathrm{c}$ donc a divise c.

II-RESUME

II-1 <u>Ensemble des combinaisons linéaires de deux entiers non nuls</u>

(1) Identité de Bézout : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls et $\delta = \mathrm{PGCD}(a, b)$. Alors il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = \delta$.

(2) Théorème de Bézout **:** Deux entiers relatifs non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = 1$.

(3) Corollaire du théorème de Bézout : Soit a et b deux entiers relatifs non nuls. L'équation $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ admet de solutions dans $\mathbb{Z}^2$si et seulement si c est multiple du PGCD de a et b.

Conséquences

(4) $\boldsymbol{\delta = \mathrm{PGCD}(a, b)} \Leftrightarrow \exists \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathbb{Z}^* \ / \ \begin{cases} \mathrm{a} = \delta \mathrm{a}' \\ \mathrm{b} = \delta \mathrm{b}' \\ \mathrm{PGCD}(\mathrm{a}', \mathrm{b}') = 1. \end{cases}$

(5) $\forall \mathrm{a}, \mathrm{b}, \text{et } \mathrm{n} \in \mathbb{N}^*, \mathrm{PGCD}(\mathrm{a}^\mathrm{n}, \mathrm{b}^\mathrm{n}) = \left(\mathrm{PGCD}(\mathrm{a}, \mathrm{b})\right)^\mathrm{n}$.

Exercices d'application.

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs x et y tels que $38\mathrm{x} + 35\mathrm{y} = 1$.

2) En déduire alors une solution particulière de l'équation 228x+210y=6.

3) Montrer que pour tout entier relatif n, $\frac{7n+3}{5n+2}$ est irréductible.

4) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :$\begin{cases} \mathrm{x} + \mathrm{y} = 420 \\ \mathrm{PGCD}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 35 \end{cases}$.

5) Montrer que si a, b et c sont des entiers naturels non nuls tels que a et b premiers entre eux et a et c premiers entre eux, alors a et bc sont premiers entre eux.

II-2 Théorème de Gauss et conséquences.

(1) Théorème Gauss. Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

(2) Corollaire du théorème de Gauss :

Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c.

(3) Conséquences.

(1) Si a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux, alors $\mathrm{PPCM}(a, b) = ab$.

(2) pour tous entiers naturels non nuls a et b, $PPCM(a, b) \times PGCD(a, b) = ab$.

(3) Si a et b sont premiers entre eux, alors pour tous entiers naturels non nuls m et n, a^m et b^nsont aussi premiers entre eux.

Exercices d'application

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $2x - 3y = 0$.

2) Montrer que si la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible, alors $\frac{a+b}{ab}$ est irréductible.

3) Montrer que pour tout entier n, $n^2(n^2 - 1)$ est divisible par 12.

4) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système :$\begin{cases} PPCM(x, y) = 168 \\ x \times y = 1008 \end{cases}$.

LEÇON 5 RESOLUTION DES EQUATIONS DIOPHANTIENNES.

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES.

- Résoudre l'équation diophantienne du type $ax + by = c$.

PRE-REQUIS.

A quelle condition l'équation $\mathrm{ax} + \mathrm{by} = \mathrm{c}$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{Z}^2$?

Réponse : Lorsque c est multiple du PGCD$(\mathrm{a}\,;\mathrm{b})$.

SITUATION PROBLEME

Une séquence d'un jeu consiste à :

(1) Poser un certain nombre de questions au candidat.

(2) Pour chaque réponse, attribuer +3points au candidat si elle est bonne et -2 points si non.

(3) Le candidat est déclaré vainqueur de la séquence si la somme algébrique des points qu'il a totalisé est de 3. Il reçoit alors une prime séquentielle égale au nombre de bonnes réponses multiplié par 500FCFA et passe automatiquement à la prochaine séquence.

(4) Le jeu s'arrête si le candidat perd la séquence ou si le nombre de bonnes réponses a déjà été obtenu lors d'une des séquences précédentes. Quelle est la prime minimale que peut avoir un candidat qui a gagné 10 séquences consécutives de ce jeux ?

I- ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation(E): $3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 3$.

1) Trouver une solution particulière (x_0,y_0) de E.

2) Montrer que l'équation E est équivalente à $(\mathrm{E}'): 3(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 2(\mathrm{y} - \mathrm{y}_0)$.

3) En utilisant le théorème de Gauss, trouver l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

4) En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{N}^2$.

5) Déterminer dans l'ordre croissant des cordonnées, les 10 premiers couples d'entiers naturels solutions de cette équation.

6) Donner alors la solution de la situation problème.

Solution de l'activité d'apprentissage

1) Une solution particulière de E est $(3;3)$.

2) On a $3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 3 \Leftrightarrow 3\mathrm{x} - 2\mathrm{y} = 3 \times 3 - 2 \times 3$

$\Leftrightarrow \ 3(\mathrm{x} - 3) = 2(\mathrm{y} - 2)$.

3)

- Si(x, y) est solution de (E), alors $3(\mathrm{x} - 3) = 2(\mathrm{y} - 2)$. On en déduit que 3 divise $2(\mathrm{y} - 2)$. De plus 3et 2 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise$\mathrm{y} - 2$. On peut donc écrire $\mathrm{y} = 3\mathrm{k} + 2$ et $\mathrm{x} = 2\mathrm{k} + 3$ avec $\mathrm{k} \in \mathrm{Z}$.
- Réciproquement, tous les couples de la forme $(2\mathrm{k} + 3; 3\mathrm{k} + 2)$ sont des solutions de (E) donc l'ensemble des solutions de (E) est $\mathrm{S} = \{(2\mathrm{k} + 3; 3\mathrm{k} + 2)\mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

4) $(2k+3;3k+2) \in \mathbb{N}^2$ si et seulement si $\begin{cases}2k+3 \geq 0\\3k+2 \geq 0\end{cases}$ ie $k \geq 0$.

5) En prenant $k \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, obtient les 10 premiers couples d'entiers naturels solutions de E qui sont :

(3 ;2) ;(5;5) ;(7 ;8) ;(9 ;11) ;(11 ;14) ;(13 ;17) ;(15 ;20) ;(17 ;23) ;(19 ;26) ;(21 ;29).

6) Appelons x le nombre de bonnes réponses et y le nombre de mauvaises réponses données par le candidat lors d'une séquence quelconque du jeux. Alors x et y vérifient l'équation

$3x - 2y = 3$ et on en déduit de ce qui précède que le nombre minimal de bonnes réponses lors de 10 séquences consécutives est 120 et donc la prime minimale qu'il peut percevoir est de 60000FCFA.

II-RESUME

Pour résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax + by = c$, on calcule le PGCD d de a et b.

- Si d ne divise pas c alors l'équation n'admet pas de solutions.
- Si d divise c, alors on procède comme suit :
    - L'équation est équivalente à: $a'x + b'y = c'$ avec $\frac{a}{d} = a', \frac{b}{d} = b', \frac{c}{d} = c'$.
    - Par l'algorithme d'Euclide on cherche une solution particulière (x_0, y_0) de cette équation.
    - L'équation est alors équivalente à $a'(x - x_0) = -b'(y - y_0)$.
    - On conclut en utilisant le théorème de Gauss que l'ensemble solution de E est : $S = \{(x_0 + b'k; y_0 - a'k)\ k \in \mathbb{Z}\}$.

EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points$A(7;12), B(7;0) et\ C(0;12)$.

1a) Déterminer les points de coordonnées entières appartenant à la droite (OA).

b) En déduire les points de coordonnées entières qui appartiennent au segment$[OA]$.

2a) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les équations : $12x - 7y = 1\ et\ 12x - 7y = -1$.

b) Montrer qu'à l'intérieur du rectangle ABCD, il existe deux points I et J de coordonnées entières tels que la distance de chacun d'eux à la droite (OA) soit minimale.

c)Vérifier que OIAJ est un parallélogramme et calculer son aire.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases}x \equiv -1[34]\\ x \equiv 1[15]\end{cases}$

LEÇON 6 : RESOLUTION DES EQUATIONS DANS $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES.

- Définir l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Effectuer l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Résoudre les équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

PRE-REQUIS.

Si $a \equiv 12[25]$ et $b \equiv -2[25]$, déterminer le reste de la division euclidienne de $3a - 2b$ par 25.

Réponse : Si $a \equiv 12[25]$ et $b \equiv -2[25]$, alors $3a - 2b \equiv 15[25]$ et $0 \leq 15 < 25$ donc le reste de la division euclidienne de 3a-2b par 25 est 15.

SITUATION PROBLEME

Malik était absent lors de la remise des bulletins. A la question de savoir sa moyenne, son professeur titulaire lui répond : « Le double d'un nombre et 8 ont le même reste dans la division euclidienne par 5. Ta moyenne est la moyenne arithmétique des 3 premiers entiers naturels vérifiant cette assertion. » Peux-tu aider Malik à déterminer sa moyenne ?

I-ACTIVITE D'APPRENTISSAGE.

Soit n un entier naturel non nuls et a un entier relatif. On définit les ensembles suivants :
$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} \text{ tel que } b = a + kn, k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots\dots, \overline{n-1}\}$

1) Déterminer $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
2) Déterminer les 3 premiers entiers naturels éléments de $\bar{4}$.
3) Soit $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et r le reste de la division euclidienne de a par n. Montrer que $\bar{a} = \bar{r}$.
4) On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'addition et la multiplication par :$\bar{a}\bar{+}\bar{b} = \overline{a+b}$ et $\bar{a} \bar{\times} \bar{b} = \overline{a \times b}$.
a)Etablir les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
b)Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{x} + \bar{3} = \bar{4}$.
c)En utilisant la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ les équations :
$\bar{3}\bar{x}$=$\bar{1}$ et $\bar{3}\bar{x}$=$\bar{4}$.
5) On admet $\bar{a}$=$\bar{b}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

a) En prenant x un nombre tel que son double et 8 aient le même reste dans la division euclidienne par 5, trouvez une équation vérifiée par x.
b) Résoudre cette équation dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
c) En déduire la solution de la situation problème.

Solution de l'activité d'apprentissage.

1) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$
2) Les trois premiers entiers naturels éléments de $\bar{4}$ sont : 4, 9 et 14.
3) Soit $x \in \bar{a}$, alors $x = a + kn$ avec $k \in \mathbb{Z}$ or $a = nq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ donc

$x = nq + kn + r = (q+k)n + r$ d'où $x \in \bar{r}$ et par conséquent, $\bar{a} \subseteq \bar{r}$. De la même façon, on montre que $\bar{a} \supseteq \bar{r}$.

4 a)

$\bar{\times}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$\bar{+}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

b) $\bar{x} + \bar{3} = \bar{4}. \Leftrightarrow \bar{x} + \bar{3} + \bar{2} = \bar{4} + \bar{2}$ d'ou $\bar{x} = \bar{1}$
c) $\bar{3}\bar{x}=\bar{1} \Leftrightarrow \bar{2} \times \bar{3}\bar{x}=\bar{2} \times \bar{1}$ $d'ou$ $\bar{x} = \bar{2}$.
5) a) $\bar{2}\bar{x}=\bar{8}$
b) $\bar{2}\bar{x}=\bar{8} \Leftrightarrow \bar{2}.\bar{3}.\bar{x} = \bar{8}.\bar{3}$ d'ou $\bar{x} = \bar{4} = \{b \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 4 + 5k, k \in \mathbb{Z}\}$
c) D'après l'énoncé, la moyenne de Malik est la moyenne arithmétique de 4,9 et 14. C'est-à-dire 9.

II-RESUME

II-1) Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

(1) Soit a un entier relatif et n un entier naturel non nul. On appelle ***classe de a modulo n*** l'ensemble noté $\boldsymbol{\bar{a}}$ des entiers relatifs b qui sont congru à a modulo n.
(2) $\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a + kn, k \in \mathbb{Z}\}$
(3) Pour tout entier naturel non nul, on définit l'ensemble $\mathbb{Z}/\mathbf{n}\mathbb{Z} = \{\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{2}}, \ldots\ldots, \overline{\mathbf{n-1}}\}$. C'est l'ensemble de toutes les classes modulo n. Il est appelé ***ensemble quotient*** de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$.
(4) L'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}/\mathbf{n}\mathbb{Z}$ sont définit par: $\bar{a}\bar{+}\bar{b} = \overline{a+b}$ et $\overline{a \times b}=\bar{a} \bar{\times} \bar{b}$**.**
(5) Si r est le reste de la division euclidienne de a par n, alors $\bar{a} = \bar{r}$**.**
Exemples. Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $\overline{-2} = \bar{3}$ et $\bar{5} = \bar{0}$.
(6) $\bar{a}=\bar{b}$ si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n
(7)$\forall \bar{\boldsymbol{x}}, \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'unique $\bar{\boldsymbol{x}}' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\bar{x} + \bar{x}' = \bar{0}$ est $\overline{x'} = \overline{-x}$.
(8) un élément $\bar{a}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est dit inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ s'il existe un élément $\overline{a'}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\bar{a}\,\overline{a'} = \bar{1}$.
(9) Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sont donc : $\bar{1}$; $\bar{2}$; $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$, $\bar{6}$.
(10) Si $\overline{a'}$ est l'nverse de $\bar{a}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ alors l'équation $\bar{a}\,\bar{x} = \bar{b}$ est équivalente à
$\overline{a'}\bar{a}\,\bar{x} = \overline{a'}\bar{b}$ d'où $\bar{x} = \overline{a'}\bar{b}$.

II-2 *Résolution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des équations de type* $\bar{a}\,\bar{x} = \bar{b}$.

II-2-1 Propriétés

Soit a et n deux entiers naturel non nuls.

(1) $\bar{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si a et n sont premiers entre eux.

Exemple. $\bar{3}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et non dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(2) Si n est premier, alors tout élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(3) L'équation $\bar{a}\,\bar{x} = \bar{b}$ $(\mathbf{a} \geq \mathbf{2})$ admet de solutions dans $\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$ si et seulement si b est multiple du PGCD (a ; n).

II-2-2.Méthode de résolution dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des équations de type $\bar{a}\,\bar{x} = \bar{b}$.

Pour résoudre dans $\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$ l'équation $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$ $(\mathbf{a} \geq \mathbf{2})$ on calcule le PGCD d de a et n.

- Si d ne divise pas b, alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si d divise b alors on procède comme suit :
  - ✓ Si $\overline{a'}$ est l'inverse de $\bar{a}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'equation admet pour unique solution $\overline{a'}\bar{b}$.
  - ✓ Si $\bar{a}$ n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, elle admet d solutions qu'on détermine de la manière suivante :
    - ➢ On considère dans $\mathbb{Z}/\frac{n}{d}\mathbb{Z}$ l'équation $\overline{\left(\frac{a}{d}\right)}\bar{x} = \overline{\left(\frac{b}{d}\right)}$. cette équation admet une unique solution x_0
    - ➢ Les d solutions de l'équation $\bar{a}\,\bar{x} = \bar{b}$ sont données par $\overline{x_k} = \overline{x_{0+k\frac{n}{d}}}$ $k \in \{0,1,..,d-1\}$.

Exercice résolu Résoudre chacune des équations suivantes dans l'ensemble indiqué.

1) $\bar{3}\,\bar{x} = \bar{6}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$,
2) $\bar{4}\,\bar{x} = \bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$,
3) $\bar{3}\,\bar{x} = \bar{6}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,

Solution

1) PGCD (3 ; 7)=1 donc l'équation admet une unique solution. $\bar{3}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, et son inverse est $\bar{5}$ donc l'équation est équivalente à $\overline{5.3}\,\bar{x} = \overline{5.6}$ soit donc $\bar{x} = \overline{56} = \bar{2}$. Ainsi S= $\{\bar{2}\}$

2) $\mathrm{PGCD}(4,10) = 2$ et 2 divise 2 donc l'équation $\bar{4}\,\bar{x} = \bar{2}$ admet 2 solutions dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

D'autre part, dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\frac{\bar{4}}{2}\,\bar{x} = \frac{\bar{2}}{2} \Leftrightarrow \bar{2}\,\bar{x} = \bar{1} \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{3}$

Donc l'ensemble solution de l'équation $\bar{4}\,\bar{x} = \bar{2}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, est donc

$S = \{\bar{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{3}+\mathbf{5}}\} = \{\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{8}}\}$

3) PGCD (3 ; 12)=3 et 3 divise 6 donc l'équation a 3 solutions dans$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. D'autre part, dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ l'équation $\frac{\bar{3}}{3}\,\bar{x} = \frac{\bar{6}}{3} \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{2}$ donc l'ensemble solution de l'équation $\bar{3}\,\bar{x} = \bar{6}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ est donc $S = \{\bar{\mathbf{2}}, \overline{\mathbf{2}+\mathbf{4}}, \overline{\mathbf{2}+\mathbf{8}}\} = \{\bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{6}}, \overline{\mathbf{10}}\}$.

EXERCICES D'APPLICATION

1) Résoudre $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -2[6]$

2) Etablir les tableaux de $\overline{+}$ et de $\overline{\times}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et en déduire tous les éléments inversibles de ces deux ensembles.

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes :

(1) $\bar{3}\,\bar{x} = \bar{6}$

(2) $\bar{4}\,\bar{x} = \bar{2}$

(3) $\bar{5}\,\bar{x} + \bar{3} = \bar{7}$

4) Résoudre chacun des systèmes ci-dessous dans l'ensemble indiqué**.**

$\begin{cases} \bar{2}\,\bar{x} - \bar{4}\,\bar{y} = \bar{2} \\ \bar{x} + \bar{5}\,\bar{y} = \bar{2} \end{cases}$ dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$

$\begin{cases} \bar{4}\,\bar{x} - \bar{1}\,\bar{y} = \bar{2} \\ \bar{3}\,\bar{x} + \bar{4}\,\bar{y} = \bar{1} \end{cases}$ dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$

$\begin{cases} \bar{2}\,\bar{x} + \bar{4}\,\bar{y} = \bar{2} \\ \bar{5}\,\bar{x} + \bar{y} = \bar{1} \end{cases}$ dans $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2$

CHAPITRE 5: NOMBRES COMPLEXES : APPROCHE ALGÉBRIQUE

MOTIVATION

Du point de vue mathématiques, les nombres complexes ont pour but de ‘’compléter’’ les nombres réels de sorte que tout nombre ait une racine carrée.

- Par ailleurs, tout ce qui a trait aux phénomènes ondulatoires est plus facile à modéliser avec des complexes. En effet, le plan complexe permet de représenter facilement une grandeur angulaire (la phase) et une grandeur scalaire (l'intensité). Ainsi, les nombres complexes interviennent en mécanique (oscillations), en électronique (circuits résonnants) en optique visible, radars, laser, radio, … (ondes, interférences,), en mécanique quantique (fonction d'onde complexe), etc.

LEÇON 1 : ECRITURE ALGEBRIQUE DANS ℂ

Durée : 50 min

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Effectuer toutes les opérations dans ℂ
- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe.

Motivation

: L'interprétation de certains phénomènes en particulier ceux ondulatoires nécessitent une maîtrise des propriétés d'addition, de soustraction, de multiplication, de divisions, … des nombres complexes.

Prérequis

Résoudre dans ℝ équation $x^2 - 8x + 40 = 0$.

Situation de vie :

Le père de Marcelle possède un champ de forme rectangulaire non loin de sa maison. Il se propose de clôturer tout son champ à l'aide des fils de fer. Pour cela, il fait appel à un technicien qui analyse le champ.
Après l'analyse du champ le technicien déclare :

- Il faudra 16 mètres de fil de fer pour clôturer ce champ ;
- Il affirme aussi que ce champ couvre une superficie de 40 m^2.

Le père de Marcelle étant étonné de ces conclusions veut connaitre les dimensions de son terrain. Marcelle, brillant élève de terminale décide de trouver les dimensions du champ. Mais après 20 minutes de réflexion Marcelle déclare qu'il y'a un problème dans la recherche de ces dimensions. Consigne : De quel problème parle Marcelle ?

Activité d'apprentissage

Activité 1

1. Soit l'équation (E): $x^2 - 8x + 40$.
   a. Vérifier que $(E) \Leftrightarrow (x-4)^2 = -24$.
   Supposons qu'il existe un nombre tel que $i^2 = -1$ et conservons les règles de calcul utilisé dans ℝ.
   b. Démontrer que (E) admet deux solutions que l'on exprimera en fonction de i.
2. Résoudre de même les équations $x^2 - 6x + 13 = 0$. et $x^2 + 5 = 0$.

Activité 2

1. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que z_1=–2+5i et z_2=1−3i.
   Effectuer les opérations suivantes :

   $a)\ z_1 + z_2;\quad b)\ z_1 - z_2;\quad c)\ 2z_1 - 3z_2;\quad d)\ z_1 \times z_2;\quad e)\ \frac{z_1}{z_2}.$

1. On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ où a, b, a', b' sont des nombres réels.
   a) Quelle est la condition pour que $z = z'$; $z = 0$.
   b) Effectuer les opérations suivantes :

   $a)\ z + z';\quad b)\ z - z';\quad c)\ z \times z';\quad d)\ \frac{z}{z'}$

Résume :

1. Vocabulaire :

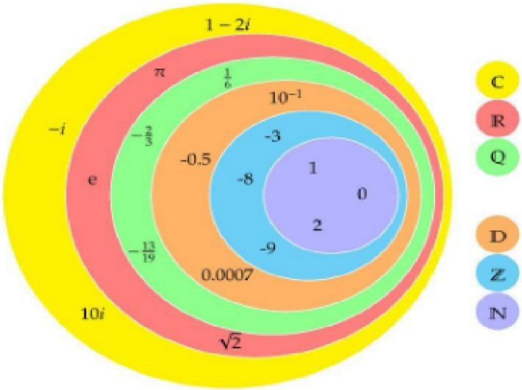
ℂ est l'ensemble des **nombres complexes**, l'élément i est appelé **unité imaginaire.**

L'écriture z= $a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ d'un nombre complexe z est appelé **forme algébrique de z.**

$\boldsymbol{a}$ est appelé la **partie réelle de z** et on note $\boldsymbol{Re(z) = a}$

$\boldsymbol{b}$ est appelé la **partie imaginaire de z** et on note $\boldsymbol{Im(z) = a}$

Le nombre complexe ***ib*** est appelé **imaginaire pur.** L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2. Propriétés :

Théorème : Pour tout nombre complexe z,

- z est un réel si, et seulement si, Im(z)=0 ;
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, Re(z)=0.

Propriété 1 (Egalité de deux nombres complexes)

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

- $z = z' \Leftrightarrow a = a'$ et $b = b'$.
- $z = 0 \quad \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$.

Propriété 2 (Opérations sur les nombres complexes)

Soit $\mathrm{z} = \mathrm{a} + \mathrm{ib}$ et $\mathrm{z}' = \mathrm{a}' + \mathrm{ib}'$ deux nombres complexes.

- $\mathrm{z} + \mathrm{z}' = (\mathrm{a} + \mathrm{a}') + \mathrm{i}(\mathrm{b} + \mathrm{b}')$ et $\mathrm{z} - \mathrm{z}' = (\mathrm{a} - \mathrm{a}') + \mathrm{i}(\mathrm{b} - \mathrm{b}')$
- $\mathrm{z} \times \mathrm{z}' = (\mathrm{aa}' - \mathrm{bb}') + \mathrm{i}(\mathrm{ab}' + \mathrm{a}'\mathrm{b})$.
- $\alpha \times \mathrm{z} = (\alpha\mathrm{a}) + \mathrm{i}(\alpha\mathrm{b})$ où α est un réel.
- Si z≠0, alors $\frac{1}{\mathrm{z}} = \frac{1}{\mathrm{a+ib}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}$.
- Soit n et k deux entiers naturels, On a :

Propriété 3
(Identités remarquables)

Soit a et b deux réels.

- $(a + ib)^2 = a^2 + 2iab - b^2$.
- $(a - ib)^2 = a^2 - 2iab - b^2$.
- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Exercice d'application

1. Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + 3i - (2 + 4i); \quad z_2 = -\frac{1}{i}; \quad z_3 = (1 - 2i)^3; \quad z_4 = \frac{(1 - i)(2 + i)}{1 + 2i}$$

2. Trouver les nombres réels a et b tels que $a(1-i)+b(2+3i)=2$.

On pose $Z_1 = \frac{2+i}{1-i}$ et $Z_2 = \frac{2-i}{1+i}$. Montrer que : $(Z_1+Z_2) \in \mathbb{R}$ et $(Z_1-Z_2) \in i\mathbb{R}$

3. Soit l'application de $\mathbb{C}-\{-1\}$ans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = \frac{z}{z-1}$

i. Calculer sous forme algébrique, $f(i); f(-i), f(-1+i)$.

ii. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = i$, et écrire la solution sous forme algébrique.

DEVOIR :

Soit M un point du plan complexe rapporté à un repère orthonormé.

Pour $z{\neq}1$, on pose $Z = \frac{z-2i}{z-1}$. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où x, y, X, Y sont des réels.

1. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer l'ensemble (D) des points M tels que Z soit un réel.
3. Déterminer l'ensemble (C) des points) M tels que Z soit un imaginaire pur.
4. Faire une figure représentant (D) et (C).

LEÇON 2 : CONJUGUÉ D'UN NOMBRE COMPLEXE :

Durée : 50 min

Motivation :

L'interprétation de certains phénomènes en particulier ceux ondulatoires nécessitent une maîtrise des propriétés notamment la forme conjuguée des nombres complexes.

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Connaître et utiliser la définition et les propriétés essentielles d'un conjugué d'un nombre complexe.

Prérequis :

1. Réduire au même dénominateur l'opération suivante :

$$z = \frac{2+i}{3-i} + \frac{3-i}{1+i}$$

2. Ecrire la fraction suivante sans radical au dénominateur :

$$A = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}}$$

Activité d'apprentissage

1. On considère z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
   On pose $\bar{z} = a - ib$.
   i) Quelle est la condition pour que
   $z = \bar{z}; z - \bar{z}.$
   ii) ii) Effectuer les opérations suivantes :
   $a)\ z + \bar{z};\quad b)\ z - \bar{z};\quad c)\ z\times \bar{z};$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \ \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'; \ \overline{\alpha\ z} = \alpha\bar{z}\ (\alpha \in \mathbb{R}); \ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

2. Montrer que :

Résume :

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, où a et b sont des réels.

On appelle conjugué du nombre z, le nombre $\bar{z}$ tel que : $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$.

Conséquences

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\bar{z}$ son conjugué.

✍ $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ (i.e $Im(z)$=0).

✍ $z = -\bar{z} \Leftrightarrow \in i\mathbb{R}$ $((Re(z))=0)$.

✍ $z + \bar{z}=2(Re(z))$; $z - \bar{z} = 2iIm(z)$.

✍ $z\times\bar{z}=Re(z)^2 + Im(z)^2$.

Propriétés :

Soient z et z' deux complexes, α un réel.

✍ $\overline{z + z'} = \bar{z}+\overline{z'}$

✍ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

✍ $\overline{\alpha z} = \alpha\bar{z}$.

✍ Si $z' \neq 0$, on a : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

✍ $\overline{\alpha z} = \alpha\bar{z}$.

✍ $Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

Exercice d'application

1. Déterminer le conjugué de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = -(\sqrt{2} - \overline{i})(3 - i)^2 \text{ et } z_2 = \frac{i(1+6i)}{(3-i)^2}$$

2. Ecrire sous forme algébrique, le conjugué de chacun des chacun des nombres suivants :

$$z_1 = (2 + i)(1 - i) \text{ et } z_2 = \left(\frac{3-i}{1+i}\right)$$

LEÇON 3 : MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Calculer le module d'un nombre complexe de forme algébrique connue ; - Calculer le module d'un quotient de deux nombres complexes ;
- Calculer le module d'un produit de plusieurs nombres complexes.

SITUATION-PROBLEME

Le triangle des impédances associé au nombre complexe z est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle mesurent R (partie réelle de z) et L_ω(partie imaginaire de z)
Pour obtenir la valeur maximale de la tension aux bornes de son circuit RLC, Mbita a besoin du module de l'impédance complexe $z = 3 + 4i$

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1. Donner la partie réelle R et la partie imaginaire X_L de $z = 3 + 4i$.
2. En remarquant que Z est la longueur de l'hypoténuse du triangle des impédances, en déduire la valeur de Z qui est le module de z (notée $|Z|$).
1. Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y des nombres réels ; en utilisant le triangle des impédances associé à z, justifier que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

a) Compare $|z|^2 et\ z\bar{z}$.
b) Compare $|zz'|\ et\ |z| \times |z'|$.
c) Compare pour $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right|\ et\ \frac{|z|}{|z'|}$.
d) Compare $|z + z'|\ et |z| + |z'|$.

RESUME :

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe.

1. On appelle module du nombre complexe z , le réel positif $\sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$. On le note $|z|$ et on a $|z| = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$.
2. Graphiquement, si $M(z)$ dans un repère orthonormé d'origine O, alors on a : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{\boldsymbol{a^2 + b^2}}$.

Exemple : $|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$; $|i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$;

$$|7| = |7 + 0i| = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7.$$

Remarque :

Soit $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Si $z = x$ alors $|z| = |x|$. Ainsi, **le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.**

Si $z = iy$ alors $|z| = |y|$. Ainsi, **le module d'un nombre imaginaire pur est égal à la valeur absolue de sa partie imaginaire.**

Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes.

1. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$
3. Si $z' \neq 0$, alors : $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$
4. Si $z' \neq 0$, alors : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $|z^n| = (|z|)^n$.
6. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ avec $z \neq 0$
7. $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ (Inégalité triangulaire)
8. $\left||z| - |z'|\right| \leq |z - z'|$
9. $|z| = 0$ si, et seulement si $z = 0$.
10. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
11. $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.

EXERCICE D'APPLICATION :

1. Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2}; \quad z_1 = \frac{(1+2i)^4}{(2-3i)^3}$$

2. Soit $z = x + iy$. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z vérifiant $|\bar{z} - 2i| = |2iz - 4|$
3. Déterminer z pour que z; $1 - z$ et z^2 aient le même module.

LEÇON 4 : ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS ℂ
DURÉE 100 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe non nul;
- Résoudre une équation du second degré dans ℂ ;
- Reconnaître une racine d'un polynôme de degré 3 et à variable complexe ;
- Factoriser un polynôme à variable complexe de degré 3 soit par division euclidienne soit par la méthode des coefficients indéterminés.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On pose : $z = 5 + 12i$ et $a = x + iy$ deux nombres complexes.

1. Calculer $|z|$ et $|a|^2$.
2. Montrer que si $a^2 = z$ alors le couple $(x; y)$ est solution du système :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2xy = 12 \end{cases}$$
3. En déduire les valeurs $a_1; a_2$ de a.
4. Que peut-on dire de a_1 et a_2 ?

RESUME :

1. Racines carrées d'un nombre réel.

Définition : On appelle racine carrée d'un nombre réel z, tout nombre complexe a vérifiant $a^2 = z$.

Propriété : Tout nombre réel non nul a admet deux racines carrées opposées.

- Si a>0 alors le réel a possède deux racines carrées réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si a <0 alors le réel a possède deux racines carrées complexes : $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

Exemple :

3 admet deux racines carrés réelles : $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$

-9 admet deux racines carrés complexes : $3i$ et $-3i$.

2. Equations du second degré à coefficients réels

Propriété : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$, où a et b sont des réels tels que $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1. Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) possède une solution double : $-\frac{b}{a}$.
2. Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) possède deux solutions réelles : $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) possède deux solutions complexes : $\frac{-b+d}{2a}$ et $\frac{-b+d}{2a}$ où d est une racine de Δ.

Remarque : Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) possède deux racines complexes conjuguées.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(E_1): 4z^2 - 8z + 1 = 0$
2. $(E_2): z^2 - z + 1 = 0$
3. $(E_3): -2z^2 + 2z - 3 = 0$

Propriété : Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$.

Les deux nombres complexes z_1 et z_2 sont des solutions de l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$ si et seulement

si : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

3. Détermination pratique des racines carrées d'un nombre complexe

On pose : $\delta = x + iy$ et $\Delta = \alpha + i\beta$.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \ (\text{égalité des modules de } \delta^2) \ (1) \\ x^2 - y^2 = \alpha \ (\text{égalité des parties réelles de } \delta^2) \ (2) \\ 2xy = \beta \ (\text{égalité des parties imaginaires de } \delta^2) \ (3) \end{cases}$$

(1) et (2) permettent de déterminer les valeurs de x et y. (3) permet de déterminer le signe de x et y.

Exemple : On pose $\Delta = 3 - 4i$. Déterminer les racines carrées de Δ. On pose $\delta = x + iy$ chacune des racines carrées de z.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \ (1) \\ x^2 - y^2 = 3 \ (2) \\ 2xy = -4 \ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \ ou \ x = 2 \\ y = -1 \ ou \ y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$$

(3) nous permet de dire que x et y sont de signes opposés alors :

$\delta_1 = -2 + i$ et $\delta_2 = 2 - i$ sont les racines carrées de $\Delta = 3 - 4i$.

4. Résolution des équations se ramenant au second degré.

Exercice 1 :

Soit l'équation $(E): z^3 + (4 - 5i)z^2 + (8 - 20i)z - 40i = 0.$

1. Démontrer que (E) admet une solution imaginaire pure.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :

Soit l'équation $(E): z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

1. Démontrer que (E) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} u = z + \frac{1}{z} \\ u^2 - 5u + 4 = 0 \end{cases}$
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE D'APPLICATION:

1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

   $a)\ z = 1; \quad b)\ z = 1 + i; \quad c)\ z = 6 - 8i; \quad d)\ z = -5 + 12i$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + \left(1 - \sqrt{2}\right)z - i\sqrt{2}=0$.

CHAPITRE 6 : NOMBRES COMPLEXES : APPROCHE GÉOMÉTRIQUE

Motivation

Du point de vue mathématiques, les nombres complexes ont pour but de ‘’compléter’’ les nombres réels de sorte que tout nombre ait une racine carrée.

- Par ailleurs, tout ce qui a trait aux phénomènes ondulatoires est plus facile à modéliser avec des complexes. En effet, le plan complexe permet de représenter facilement une grandeur angulaire (la phase) et une grandeur scalaire (l’intensité). Ainsi, les nombres complexes interviennent en mécanique (oscillations), en électronique (circuits résonnants) en optique visible, radars, laser, radio, … (ondes, interférences,), en mécanique quantique (fonction d’onde complexe), etc.

LEÇON 1 : REPRÉSENTATION PLANE

Durée : 50 min

Objectifs pédagogiques :

- **Représenter dans le plan complexe, le point image et le vecteur image d’un nombre complexe ;**
- **Utiliser la relation $AB = |z_B - z_A|$ pour résoudre certains problèmes de géométrie plane ;**
- **Déterminer l’ensemble des points dont l’affixe z vérifie $\left|\frac{z-a}{z-b}\right| = \alpha$.**

Activité d’apprentissage

Le plan est muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$. On considère les points $A\binom{3}{2}; B\binom{4}{3}; C\binom{5}{1}$.

On pose $z_A = 3 + 2i;\ \ z_B = 4 + 3i;\ \ z_C = 5 + i$.

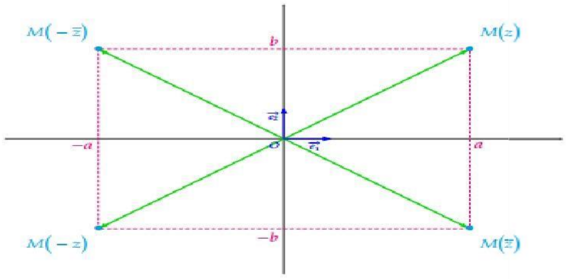
1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $z_B - z_A$.
2. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$ et $|z_B - z_A|$.
3. Déterminer les coordonnées I du milieu du segment $[AB]$ et calculer $\frac{z_A+z_B}{2}$.
4. Soit A le point d’affixe z_A tel que : $z_A = 1 + i$.
   a) En posant $z = x + iy$, montrer que $|z - z_A| = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $|z - z_A| = 2$.

Résume

Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut faire correspondre de manière unique, un point $M(a;b)$ d'un plan orthonormal $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.
- Réciproquement, tout point $M(a;b)$ d'un plan orthonormal $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ peut être associé, de manière unique, à un nombre complexe $z = a + ib$. Alors :
  - Le nombre z est appelé l'affixe du point M ou encore du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le plan est appelé **le plan complexe.**
  - L'axe des abscisses est appelé **axe des réels.**
  - L'axe des ordonnées est appelé **axe des imaginaires purs.**
- A tout nombre complexe, $z = a + ib$ on peut associer un unique vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(a;b)$ appelé **l'image vectorielle** du nombre .
- A tout vecteur $\vec{u}(a;b)$, on peut associer un unique nombre $z = a + ib$ appelé l'affixe du vecteur $\vec{u}$.



Propriétés :

Soit $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ deux vecteurs et $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe.

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
- Le vecteur $k \times \vec{u}$ a pour affixe $k \times z$.
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
- Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$

Remarque : L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BA}$ est $z_A - z_B$.

Propriétés : Soit le A point d'affixe z_A et M un point d'affixe z.

Si R est un nombre réel strictement positif, le lieu des points M dont l'affixe z vérifie $|z - z_A| = R$ est le cercle de centre A et de rayon R.

Exemple : Dans le plan complexe, on considère les points $A(2i); B(1-i)$ et $C(3)$.

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}$ et $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer l'affixe du point D, sachant que $ABCD$ est un parallélogramme.

LEÇON 2 : ÉCRITURE TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Durée : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

Déterminer des arguments des nombres complexes à partir de la position dans le plan complexe, de leurs points images ;

- Utiliser les relations $\cos(\arg(z)) = \frac{Re(z)}{|z|}$ et $\sin(\arg(z)) = \frac{Im(z)}{|z|}$ $(z \neq 0)$

pour déterminer un argument et l'argument principal d'un nombre complexe donné ;
Ecrire un nombre complexe sous la forme trigonométrique connaissant son module et un de ses arguments ;
Déterminer un argument d'un produit et d'un quotient de deux nombres complexes connaissant leurs arguments respectifs ;

Déterminer l'ensemble des points d'affixe z telle que : $arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) = \alpha + k(2\pi)$ $(resp\ \alpha + k\pi)$.

Prérequis

En utilisant le cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi;\pi]$ le système : $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$

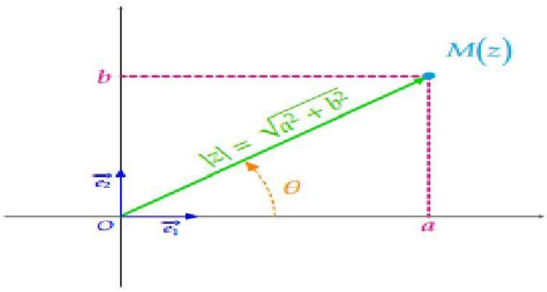
Activité d'apprentissage

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit M d'affixe z et α la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{OM}}\right)$. On pose $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1. Calculer le module $|z|$ de z.
2. Déterminer α tel que : $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$
3. Exprimer en fonction de $|z|$, $\cos\alpha$; $\sin\alpha$.
4.
   a. Montrer que $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.
   b. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.
   c. $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$
   d. $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$.

Résume

Définition : Soit $z \in \mathbb{C}$. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On appelle **argument de z**, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ avec $M(z)$.



On écrit : $\mathbf{arg}(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{mes}\ (\vec{\boldsymbol{u}}; \overrightarrow{\boldsymbol{OM}})$

Si θ est un argument de z alors $\theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

On a : $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ ou bien $\arg(z) = \theta + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Propriété :

- 🕮 $z \in \mathbb{R}_+^*$ si, et seulement si $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- 🕮 $z \in \mathbb{R}_-^*$ si, et seulement si $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
- 🕮 $z \in \mathbb{R}^*$ si, et seulement si $\arg(z) \equiv 0[\pi]$
- 🕮 $z \in i\mathbb{R}^*$ avec $\text{Im}(z) > 0$ si, et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- 🕮 $z \in i\mathbb{R}^*$ avec $\text{Im}(z) < 0$si, et seulement si $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- 🕮 $z \in i\mathbb{R}^*$ si, et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

Exemples :

On a : $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$; $\arg(2) \equiv 0[2\pi]$; $\arg(-4) \equiv \pi[2\pi]$; $\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$; $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$; et $\arg(-2i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$$\text{On a : } z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) \equiv \arg(z')[2\pi] \end{cases}$$

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*, \theta$ un argument de z. L'écriture $\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\,\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta})$ est appelée **forme trigonométrique de z.**

Exemple :

Soit $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. $|z| = 2$.

Soit θ un argument de z $\begin{cases} \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$. Soit $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Par suite, $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Propriété :

Soient z et z' deux nombres complexes.

- $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$.
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- Pour tout n de $\mathbb{N}$: $\arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)[2\pi]$

Propriété : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points distincts du plan complexe tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

1. $(\widehat{\vec{e}_1;\vec{u}}) \equiv \arg(z_{\vec{u}})[2\pi] \equiv \arg(z_A)[2\pi]$
2. $(\widehat{\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}}) \equiv \arg(z_{\overrightarrow{AB}})[2\pi] \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$
3. $(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) \equiv \arg\left(\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}\right)[2\pi]$ ou encore $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)[2\pi] \equiv \arg(z_B) - \arg(z_A)\,[2\pi]$

Propriété :

Soit $A(z_A); B(z_B)$ et $C(z_C)$ tels que $z_A \neq z_B \neq z_C$. On a : $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})[2\pi]$

EXERCICE D'APPLICATION :

1. Déterminer un argument de $z = \frac{(1-i)^3}{(i+\sqrt{3})^2}$
2. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
3. Soit $A(1+i); B(1-i)$ et $C(\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i)$

   Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. En déduire la nature du triangle ABC.

LEÇON 3 : FORME EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Durée : 50 min

Objectifs pédagogiques :

Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul ;
Déterminer la forme exponentielle d'un produit, d'un quotient de deux nombres complexes non nuls ;
Utiliser l'identité de Moivre pour linéariser une puissance entière de cosinus ou de sinus ;

Prérequis :

Effectuer les opérations suivantes : $a^m \times a^n ; \frac{a^m}{a^n}$.

Activité d'apprentissage :

Soit $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\overline{z}$ son conjugué.

1. Montrer que $z + \overline{z} = 2\cos\theta$ et $z - \overline{z} = 2i\sin\theta$.
2. En déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de z et $\overline{z}$.
3. Justifier que si $z = e^{i\theta}$ alors $\overline{z} = e^{-i\theta}$. En déduire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sous forme exponentielle.
4. Démontrer $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Résume

Définition : soit $\theta \in \mathbb{R}$. On, pose $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

$e^{i\theta}$ est la notation exponentielle de $\cos\theta + i\sin\theta$. on a : $\begin{cases} |e^{i\theta}| = 1 \\ \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Pour tout complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), r > 0$, on a : $z = re^{i\theta}$.
L'écriture $re^{i\theta}$ est appelée forme exponentielle de z.

Exemple : soit $z = 1 - i\sqrt{3}$. Donnons la forme exponentielle de z.

Solution :

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

Propriété : Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i(n\theta)}$ ou encore
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ ……… .**Formule de moivre.**

Propriété : Formules d'Euler

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\begin{cases}\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{cases}\quad;\qquad\forall\theta\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}\cos(n\theta)=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}\\ \sin(n\theta)=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}\end{cases}$$

Exercice d'application :

1. Ecrire sous forme exponentielle $z=\frac{(1+i)^3}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^2}$
2. Calculer $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$
3. Ecrire $\cos 2x$; $\sin 2x$; $\cos 3x$; $\sin 3x$; $\cos 4x$; $\sin 4x$ en fonction de $\cos x$
4. Linéariser les expressions suivantes : $\cos^3 x$; $\sin^3 x\cos x$.

LEÇON 4 : RACINE $n^{ième}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE

Durée : 50 min

Objectifs pédagogiques :

- Utiliser l'identité de Moivre pour déterminer sous forme exponentielle toutes les racines nièmes d'un nombre complexe non nul ;

Activité d'apprentissage :

Soit $Z = 1 - i\sqrt{3}$ un nombre complexe.

1. Ecrire Z sous la forme exponentielle.
   Soit ρ et θ deux nombres réels. On pose $z = \rho e^{i\theta}$
2. Dans quelles conditions a-t-on $z^2 = Z$.
3. En déduire les valeurs de ρ et θ.

Définition : Soit ***Z*** un nombre complexe non nul et n un entier naturel (n≥2). On appelle **racine n-ième de Z** tout nombre complexe *z* tel que : $z^n = \mathbf{Z}$.

Méthode :

Soient Z et z les nombres complexes tels que :$Z = re^{i\alpha}$ et $z = \rho e^{i\theta}$

Pour tout entier naturel (n ≥2), on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = re^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Donc Z admet n racines n-ièmes : $z_k = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n})}, k = 0; 1; 2; \dots; n-1$

$$z_0 = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\alpha}{n})};\ z_1 = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n})}; \dots;\ z_{n-1} = \sqrt[n]{r}.e^{i(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n})}$$

Remarques :

- $z_n = z_0;\ z_{n+1} = z_1; \dots$
- $z_k = z_0.e^{i(\frac{2k\pi}{n})}$ pour avoir les autres racines $n-$ièmes d'un nombre complexe, si on en a dejà une, alors on la multiplie par les racines $n-$ièmes de l'unité.

Exercice d'application

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^5 = \frac{8(1+i)}{\sqrt{3}-i}$
2. Calculer $z = (1+i)^3$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2 + 2i$.

CHAPITRE 7 : ISOMETRIE DE L'ESPACE

LEÇON 1 : REFLEXION DU PLAN

Durée : 50 min

Motivation :

Dans la vie courante, on rencontre les symétries orthogonales au niveau des portes à double battant, fenêtres à double battant, panneaux de signalisations. De même la construction des immeubles, des tables des armoires nécessite la connaissance des réflexions du plan.

Objectifs pédagogiques

- Définir une réflexion du plan
- Ecrire l'expression analytique d'une réflexion de plan
- Déterminer la composée de deux réflexions d'axes parallèles
- A partir de l'expression analytique, reconnaitre et caractériser une réflexion du plan.

Situation problème

Un enfant se place devant un miroir et voit son image de l'autre côté du miroir. Il se demande s'il existe une transformation qui à un point de son corps, on peut associer le même point de son image.

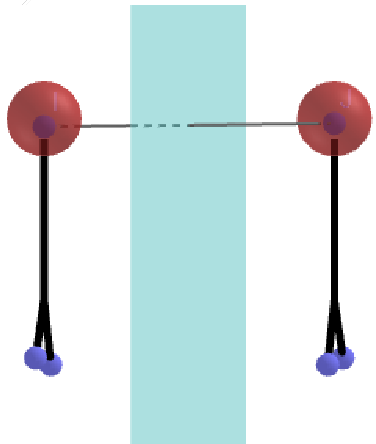
Prérequis

- Isométrie dans le plan : translation, rotations, symétrie orthogonale, composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles ou sécants, expression analytique d'une symétrie orthogonale.
- Géométrie analytique de l'espace : Equation cartésienne d'un plan ou d'une droite de l'espace, position relative des droites et plans de l'espace.

Activité d'apprentissage

Activité 1 :

La figure suivante représente un enfant devant un miroir.



1) Place un point M sur une partie de l'enfant et le point M' sur la même partie de l'image de l'enfant.
2) Complète les phrases suivantes : La droite (MM') est …… au plan du miroir et le ……… du segment [MM'] appartient au plan du miroir. On peut en déduire que la transformation qui à un point de son corps, on associe le même point de son image est une ……… orthogonale par rapport au ……. du miroir.

Activité 2 : On considère le plan (P) d'équation $x + 2y - z + 2 = 0$.

1) Déterminer un vecteur normal du plan (P).
2) Soient $M(x\,;y\,;z)$ et $M'(x'\,;y'\,;z')$. Montrer que si $M' = S_{(P)}(M)$ alors :
   a) Il existe un réel k tel que : $\begin{cases} x' = x + k \\ y' = y + 2k \\ z' = z - k \end{cases}$
   b) La relation $x + x' + 2(y + y') - (z + z') + 4 = 0$ est vérifiée.
3) En déduire de la question 2) l'expression de $k = \frac{1}{3}(-x - 2y + z - 2)$.
4) En déduire les expressions de x', y' et z' en fonction de x, y et z.

Activité 3 : On considère les plans (P) : $2x - y + z + 5 = 0$ et (P') : $-2x + y - z + 1 = 0$.

1) Montrer que les plans (P) et (P') sont parallèles.
2) Déterminer les expressions analytiques de la réflexion des plans (P) et (P').
3) Déterminer l'expression analytique de la composée $S_{(P)} \circ S_{(P')}$ et en déduire que $S_{(P)} \circ S_{(P')}$ est une translation dont on précisera le vecteur de translation $\vec{u}$.
4) Soit $A(0; 0; 1)$ un point du plan (P').
   a) Déterminer les coordonnées du point B projeté orthogonal de A sur le plan (P).
   b) Vérifier que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$

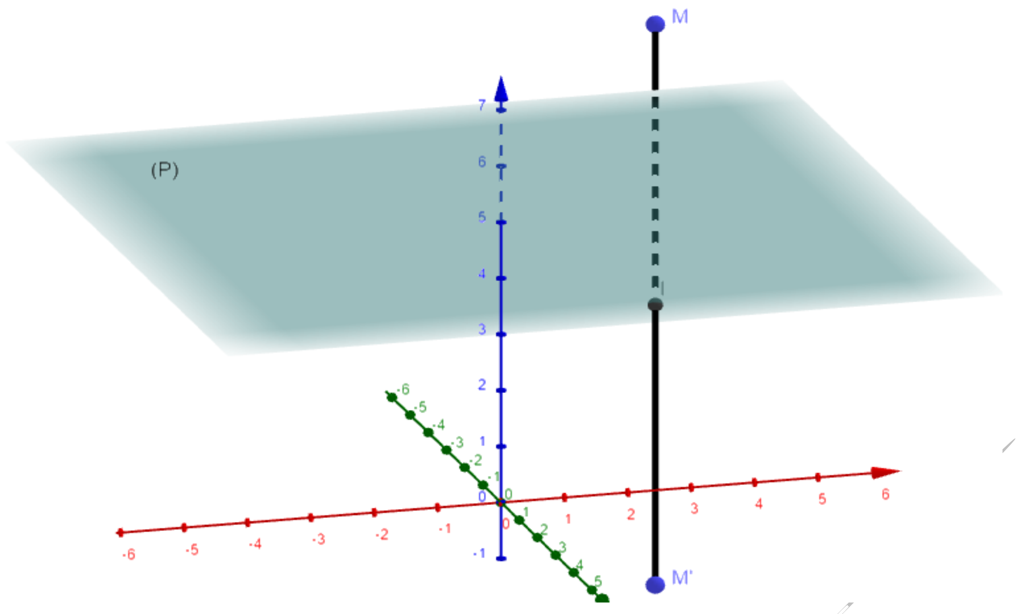
Résumé

1.1 Définition

Soit (P) un plan de l'espace ε. On appelle réflexion d'axe (P) ou symétrie orthogonale par rapport au plan (P) notée $S_{(P)}$ l'application de l'espace vers l'espace qui à un point M, on associe le point M' tel que :

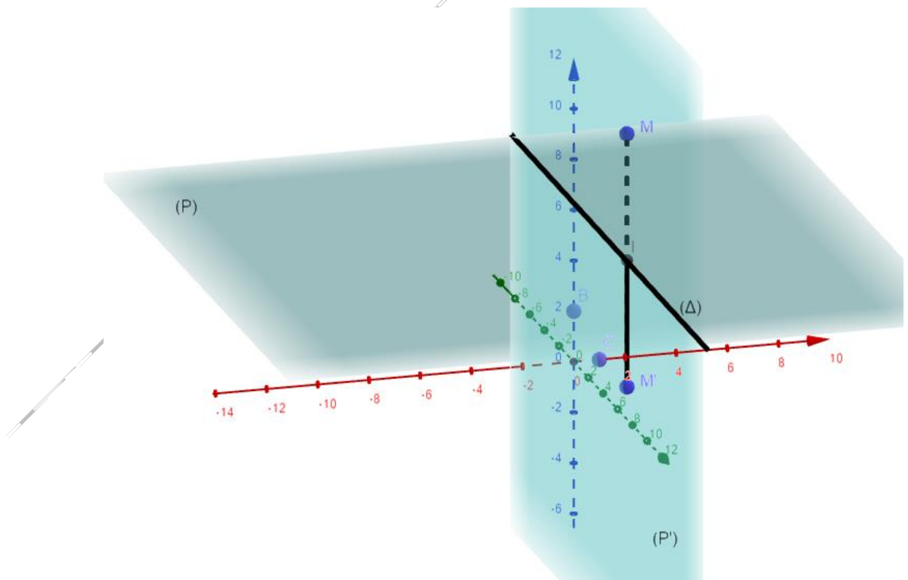
- Si $M \in (P)$ alors $M' = M$.
- Si $M \notin (P)$ alors $\overrightarrow{MM'}$ soit orthogonal au plan (P) et le milieu du segment [MM'] appartient au plan (P) (*(P) est le plan médiateur du segment [MM']*).

$$M' = S_{(P)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} (MM') \perp (P) \\ I \in (P) \text{où } I \text{ est le milieu de } [MM'] \end{cases}.$$



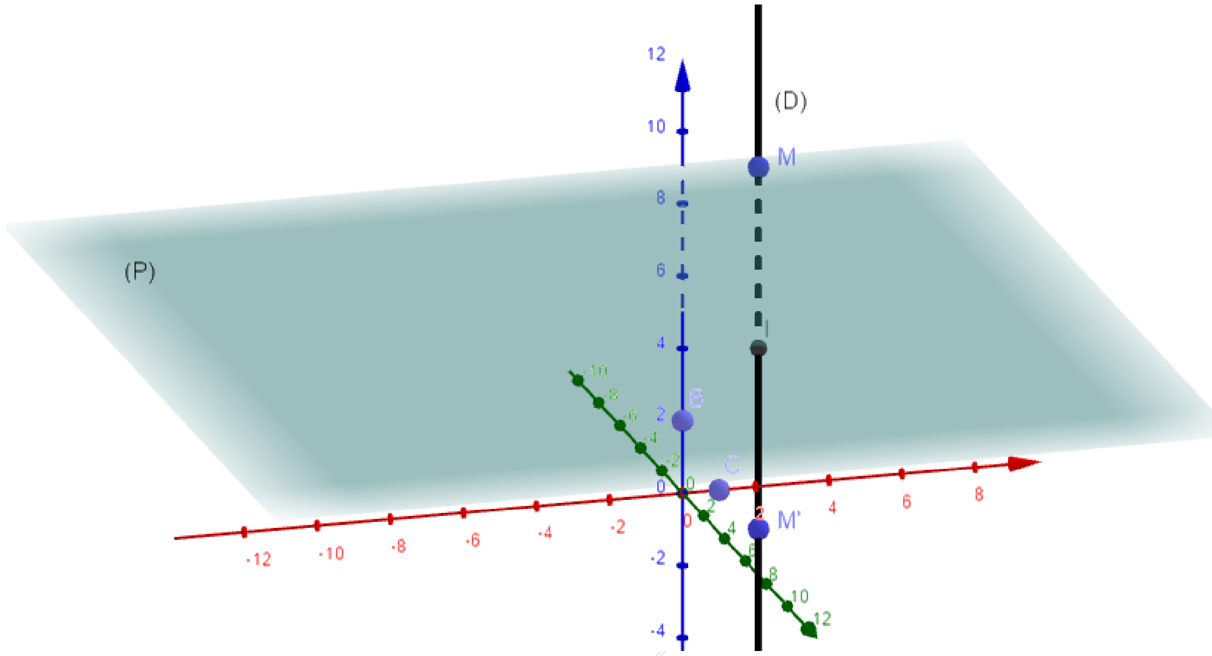
Remarque :

- Si $M \in (P)$ alors $S_{(P)}(M) = M$. Le plan (P) est l'ensemble des points invariants ou fixes par $S_{(P)}$.
- Pour tout point M de l'espace, $S_{(P)} \circ S_{(P)}(M) = M \Leftrightarrow S_{(P)} \circ S_{(P)} = Id\varepsilon$. On peut en déduire que $S_{(P)}$ est une application bijective et $\left(S_{(P)}\right)^{-1} = S_{(P)}$.
- Si (P') est un plan perpendiculaire à un plan (P) et (Δ) leur droite *d'intersection, alors :*
  - ✓ (P') est globalement invariant par $S_{(P)}$. C'est-à-dire $\forall M \in (P'),\ S_{(P)}(M) \in (P')$
  - ✓ La restriction de $S_{(P)}$ à (P') *est la symétrie orthogonale d'axe* (Δ).



- Si $(\mathcal{D})$ est une droite orthogonale à (P) en un point I, alors :
  - ✓ $(\mathcal{D})$ est globalement invariant par $S_{(P)}$

✓ La restriction de $S_{(P)}$ à $(\mathcal{D})$ est la symétrie centrale de centre I.



1.2 Expression analytique d'une réflexion du plan

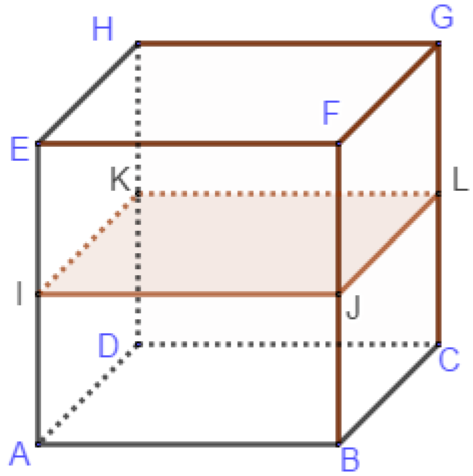
- Pour déterminer l'expression analytique d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan d'équation donnée, on suppose deux point $M(x\,;y\,;z)$ et $M'(x'\,;y'\,;z')$ tel que $M' = S_{(P)}(M)$:
  - ✓ On utilise le fait que le vecteur normal du plan et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sont colinéaires pour exprimer x' en fonction de x et un paramètre k ; y' en fonction de y et du paramètre k et z' en fonction de z et du paramètre k.
  - ✓ On utilise le fait que le milieu du segment $[MM']$ appartient au plan (P) pour exprimer k en fonction de x, y et z.
  - ✓ Enfin on remplace k par sa valeur pour avoir l'expression analytique.
- Pour montrer qu'une expression analytique est celle d'une réflexion du plan :
  - ✓ On détermine l'ensemble des points invariants en résolvant le système $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$ qui doit donner un plan (P) défini par son équation cartésienne.
  - ✓ On montre que si $M' = S_{(P)}(M)$ alors $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au plan (P).
  - ✓ On montre que le milieu du segment [MM'] appartient au plan (P).
  - ✓ On en déduit qu'on a la réflexion du plan (P).

1.3 Composée de deux réflexions du plan d'axe parallèle

- Si (P) et (P') sont deux plans parallèles alors $S_{(P)} \circ S_{(P')} = t_{2\overrightarrow{AB}}$ où A est un point quelconque du plan (P') et B son projeté orthogonal sur le plan (P).
- Si (P) est un plan et $\vec{u}$ un vecteur normal de ce plan, alors il existe un unique plan (P') parallèle à (P) telle que $S_{(P)} \circ S_{(P')} = t_{\vec{u}}$. Il suffit de prendre $P' = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(P)$
- Si (P) est un plan et $\vec{u}$ un vecteur normal de ce plan, alors il existe un unique plan (P') parallèle à (P) telle que $S_{(P')} \circ S_{(P)} = t_{\vec{u}}$. Il suffit de prendre $P' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(P)$

Exercice d'application

1) Déterminer l'expression analytique de la réflexion du plan $(P): 2x - 3y + 4z - 7 = 0$.
2) Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à un point $M(x\,;y\,;z)$, on associe le point $M'(x'\,;y'\,;z')$ tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-2x - 3y + 6z - 3) \\ y' = \frac{1}{7}(-3x + 6y + 2z - 1) \\ z' = \frac{1}{7}(6x + 2y + 3z + 2) \end{cases}$.
   a) Déterminer l'ensemble des points invariants (π) de l'application f.
   b) Soient M et M' deux points de l'espace tel que $f(M) = M'$. Démontrer que :
      i. Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est normal à (π).
      ii. Le point I milieu du segment [MM'] appartient à (π).
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.
3) ABCDEFGH est un cube. I, J, K et L, les milieux respectifs des segments [AE] ; [BF] ; [DH] et [CG]. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations :
   a) $S_{(ABC)} \circ S_{(IJL)}$
   b) $S_{(ADB)} \circ S_{(EFH)}$
   c) $S_{ADK} \circ S_{(IEH)}$



Leçon 2 : DEMI TOUR

Durée : 50 min

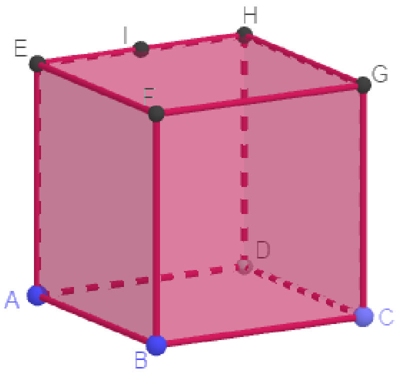
Motivation

Dans notre environnement, beaucoup d'objets possèdent des axes de symétrie. On peut citer entre autre des objets de décoration, la réalisation des plans par des architectes… Ainsi cette leçon est très important dans plusieurs domaines de la vie.

Objectif :

- Définir un demi-tour.
- Ecrire l'expression analytique d'un demi-tour.
- Déterminer la composée de deux demi-tours d'axes parallèles.
- Déterminer la composée de deux demi-tours d'axes perpendiculaires.
- Déterminer la composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires.
- A partir de l'expression analytique, reconnaitre et caractériser demi-tour.

Activité 1 : ABCDEFGH est un cube ; I le milieu du segment.



1) Quels sont les symétriques de F et B par rapport à (BG) ?
2) Quel est le symétrique de E par rapport à (FH) ?
3) Placer le point I' symétrique de I par rapport à (FH).

Activité 2 : Soit (P) et (P') deux plans perpendiculaires suivant une droite (D). Soit M un point de l'espace. On pose $M' = S_{(P)}(M)$ et $M'' = S_{(P')}(M')$.

1) Justifier que $(D) \perp (MM')$ et que $(D) \perp (M'M")$ et en déduire que $(D) \perp (MM")$.
2) Soit I le milieu du segment $[MM"]$. A partir de la nature du triangle $MM'M"$, justifier que $IM = IM' = IM"$, puis en déduire que $I \in (P); I \in (P')$ et que $I \in (D)$.
3) En déduire la nature de $S_{(P')} \circ S_{(P)}$.

Activité 3 : Soit (D) et (D') deux droites de l'espace. M un point de l'espace et $M' = S_{(D)}(M)$ et $M" = S_{(D')}(M')$; H est le projeté orthogonal de M sur (D) et H' le projeté orthogonal de M' sur (D').

1) On suppose que $(D) \parallel (D')$. En utilisant la figure, justifier que $\overrightarrow{MM"} = 2\overrightarrow{HH'}$ et en déduire la nature et l'élément caractéristique de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.
2) On suppose que $(D) \perp (D')$. On note (P) le plan défini par (D) et (D') ; (P_1) le plan contenant (D) et perpendiculaire à (P) et (P_2) le plan contenant (D') et perpendiculaire à (P).

a) Justifier que la droite $(D")$ intersection de (P_1) et (P_2) est perpendiculaire à (D) et (D').

b) Montrer que $S_{(D)} \circ S_{(D')} = S_{(P_1)} \circ S_{(P_2)}$ et en déduire la nature et l'élément caractéristique de $S_{(D)} \circ S_{(D')}$.

Activité 4 : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la droite (D) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = -t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

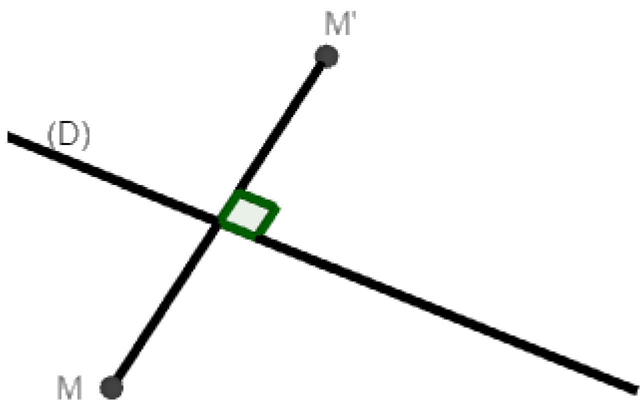
1) Déterminer un vecteur directeur de la droite (D).
2) Soit $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ deux points de l'espace tels que $M' = S_{(D)}(M)$.
   a) Montrer que si le point I milieu du segment [MM'] appartient à la droite (D), alors $\begin{cases} x' = 2t - 2 - x \\ y' = -2t - y \\ z' = 2t - z \end{cases}$
   b) Montrer que si $(MM') \perp (D)$, alors $t = \frac{1}{3}(x - y + z + 1)$.
   c) En déduire que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x - 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y - 2z - 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x - 2y - z + 2) \end{cases}$

Résumé

1.1 Définition

Soit (D) une droite de l'espace ε, on appelle demi-tour d'axe (D) l'application de ε dans ε noté $S_{(D)}$ qui à un point M, on associe le point M' tel que :

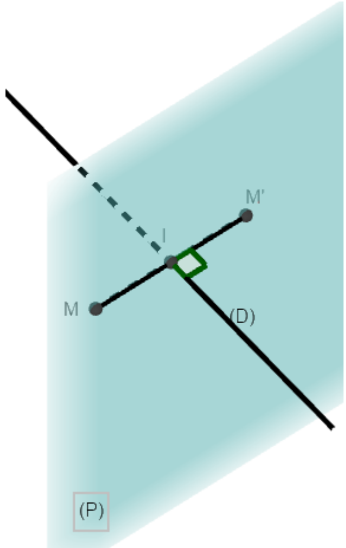
- Si $M \in (D)$ alors $M = M'$
- Si $M \notin (D)$, alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$.



Remarque :

- (D) est l'ensemble des points invariants par $S_{(D)}$.
- $S_{(D)} \circ S_{(D)} = Id_{\varepsilon}$. Ainsi $S_{(D)}$ est bijective et $S_{(D)}^{-1} = S_{(D)}$
- Soit (D) une droite de l'espace et (P) un plan perpendiculaire à (D) en I :

✓ (P) est globalement par $S_{(D)}$.
✓ La restriction de $S_{(D)}$ à (P) est la symétrie centrale de centre I



1.2 Composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires

La composée de deux réflexions d'axes perpendiculaires suivant une droite (D) est un demi-tour d'axe (D).

1.3 Composition de deux demi-tours

- La composée de deux demi-tours d'axes parallèles est une translation de vecteur normal à ces deux axes.
- La composée de deux demi-tours d'axes (D) et (D') perpendiculaires en O est un demi-tour dont l'axe (D) est la perpendiculaire commune à (D) et (D') en O.

1.4 Expression analytique d'un demi-tour

Pour déterminer l'expression analytique d'un demi-tour d'axe (D) :

- On détermine une équation paramétrique de (D) et on en déduit un vecteur directeur.
- On considère les point $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ tel $M' = S_{(D)}(M)$:
  ✓ On utilise le fait que le milieu du segment [MM'] appartient à (D) pour exprimer x' en fonction du paramètre et x ; y' en fonction du paramètre et y puis z' en fonction du paramètre et z.
  ✓ On utilise le fait que $(MM') \perp (D)$ pour exprimer le paramètre en fonction de x, y et z, puis on en déduis l'expression analytique.

Exercice d'application

L'espace (E) est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. f l'application de l'espace dans lui-même qui à un point $M(x;y;z)$, on associe un point $M'(x';y';z')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x-2y-2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x-y+2z-6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x+2y-z+12) \end{cases}$$

1) Démontrer que l'ensemble (Δ) des points invariants de f est la droite de repère $(A;\vec{u})$ où $A(1;-1;2)$ et $\vec{u} = -\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$.
2) Démontrer que pour tout point M de l'espace tel que $M' = f(M)$, le point K milieu du segment $[MM']$ appartient à (Δ) et que $(MM') \perp (\Delta)$.
3) Quelle est la nature et la caractéristique de f.
4) Soit $B(0;0;3)$ et $C(-1;0;1)$; (P) le plan (ABC) et (P') le plan contenant (Δ) et perpendiculaire à (P).
   a) Vérifier que $B \in (\Delta)$ et que $C \notin (\Delta)$.
   b) Déterminer une équation cartésienne de (P) et une équation cartésienne de (P').
   c) Justifier que $f = S_{(P)} \circ S_{(P')}$.
5) Soit H le projeté orthogonal de C sur (Δ) et (π) le plan parallèle à (P') passant par C.
   a) Déterminer les coordonnées de H.
   b) Déterminer $S_{(P')} \circ S_{(\pi)}$.

CHAPITRE 8: STATISTIQUES

MOTIVATION :

La corrélation entre deux variables statistiques a une grande importance car son utilisation permet de mettre à jour les liens cachés dans certains domaines comme la génétique, l'épistémologie, l'offre et la demande…

LECON 1: SERIE STATISTIQUES A DOUBLE ENTRÉE

Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Regrouper les données d'une série statistique à deux caractères quantitatifs dans un tableau à double entrées.
- Dresser les tableaux marginaux d'une série à deux caractères puis calculer les paramètres marginaux.
- Construire dans le plan le nuage de points d'une série.

SITUATION PROBLEME :

On considère les notes obtenues en mathématiques et en physique par 25 candidats au concours d'admission en première année de BTS électrotechnique appliquée. Après dépouillement des notes des candidats nous avons obtenu les résultats sous forme de tableaux linéaire suivant :

Candidat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Note de maths (x_i)	6	9	13	9	10	11	9	11	12	14	16	11	14
Note de physique (y_i)	11	13	12	13	9	10	13	10	9	7	8	13	9

Candidat		N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Note de maths (x_i)		7	9	12	14	16	11	12	12	10	8	9	12
Note de physique (y_i)		4	13	11	14	8	13	16	11	9	17	13	11

Un examinateur s'exclame en disant : le poids du couple (12 ; 11) est 3.

De quoi parle-t-il?

PRE-REQUIS :

On donne les points $A\binom{3}{5}$, $B\binom{-2}{2}$, $C\binom{-4}{3}$et $D\binom{3}{2}$. Placer ces points dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère les notes obtenues en mathématiques et en physique par 25 candidats au concours d'admission en première année de BTS électrotechnique appliquée. Après dépouillement des notes des candidats nous avons obtenu les résultats sous forme de tableaux linéaires suivant :

Candidat	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Note de maths (x_i)	6	9	13	9	10	11	9	11	12	14	16	11	14
Note de physique (y_i)	11	13	12	13	9	10	13	10	9	7	8	13	9

Candidat	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Note de maths (x_i)	7	9	12	14	16	11	12	12	10	8	9	12
Note de physique (y_i)	4	13	11	14	8	13	16	11	9	17	13	11

1) Dresser la liste des modalités x_i du caractère x, puis la liste des modalités y_i du caractère y.
2) Compléter le tableau à double entrée suivant par les effectifs de chacun des couples $(x_i;\ y_i)$:

$X(x_i)$ / $Y(y_i)$											total
total											

3) Quel est le nombre de candidats ayant une note de 12 en mathématiques et 11 en physiques ?
4) Dresser le tableau des effectifs de chaque caractère.
5) Placer dans un repère les points de $(x_i;\ y_i)$ puis marquer à coté de ce point le nombre d'effectifs correspondant.
6) Déterminer le plus grand nombre de candidat ayants eu la même note en mathématiques et en physiques.

Solutions

1) Dressons la liste des modalités x_i du caractère x, puis la liste des modalités y_i du caractère y.

$$X(x_i) = \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 16\}$$
$$Y(y_i) = \{4; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 16; 17\}$$

2) Compléter le tableau à double entrée suivant par les effectifs de chacun des couples $(x_i;\ y_i)$:

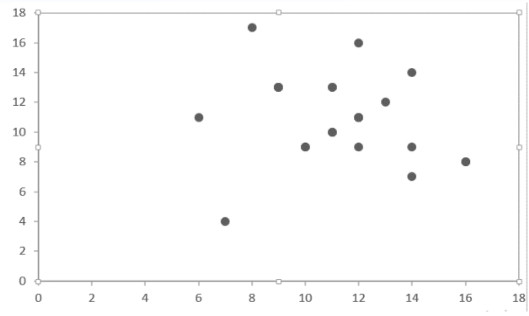
$X(x_i)$ / $Y(y_i)$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	total
4	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	2
7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	4
10	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2
11	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	4
12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
13	0	0	0	5	0	2	0	0	0	0	7
14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
16	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
17	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
total	1	1	1	6	2	4	5	1	3	1	25

3) Le nombre de candidats ayant une note de 12 en mathématiques et 11 en physiques est 3.
4) Dressons le tableau des effectifs de chaque caractère.

$X(x_i)$	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	total
n_i	1	1	1	6	2	4	5	1	3	1	25

$Y(y_i)$	4	7	8	9	10	11	12	13	14	16	17	total
n_i	2	1	1	4	2	4	1	7	1	1	1	25

5) Placer dans un repère les points de $(x_i;\ y_i)$ puis marqué à coté de ce point le nombre d'effectifs correspondant.



6) Le plus grand nombre de candidat ayant eu la même note en mathématiques et en physiques est 5. Ce sont les élèves ayant eu 9 en mathématiques et 13 en physiques.

RESUME :

1) Organisation des données

Les résultats d'une enquête portant sur l'étude de deux caractères de chaque individu d'une population constituent une série statistique appelée série double ou série statistique à deux caractères.

Si on désigne par X et Y les caractères étudiés alors :

- Les différentes modalités de la série double sont les couples $(x_i;\ y_i)$ ou x_i est une modalité du caractère X et y_i celle du caractère Y. L'effectif de la modalité $\left(x_i;\ y_j\right)$ et noté n_{ij} et la série statistique double est notée $\left(x_i;\ y_j;\ n_{ij}\right)$. Les séries statistiques simples $(\boldsymbol{x_i};\ \boldsymbol{n_i})$ et $\left(\boldsymbol{y_j};\ \boldsymbol{n_j}\right)$ ou $\boldsymbol{n_i}$ et $\boldsymbol{n_j}$ sont les effectifs respectifs des modalités $\boldsymbol{x_i}$ et $\boldsymbol{y_j}$ sont appelées *séries marginales* de la série double $\left(\boldsymbol{x_i};\ \boldsymbol{y_i};\ \boldsymbol{n_{ij}}\right)$. Pour mieux exploiter les séries $\left(\boldsymbol{x_i};\ \boldsymbol{y_j};\ \boldsymbol{n_{ij}}\right)$, on peut les regrouper dans un tableau a double entrée aux marges duquel figurent les séries simples $(\boldsymbol{x_i};\ \boldsymbol{n_i})$ et $\left(\boldsymbol{y_j};\ \boldsymbol{n_j}\right)$. Ceci justifie leurs dénominations de *séries marginales.*

$\boldsymbol{X(x_i)}$ / $\boldsymbol{Y(y_i)}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	…	…	$\boldsymbol{x_p}$	total
$\boldsymbol{y_1}$	$\boldsymbol{n_{11}}$	$\boldsymbol{n_{12}}$	$\boldsymbol{n_{13}}$			$\boldsymbol{n_{1p}}$	
$\boldsymbol{y_2}$	$\boldsymbol{n_{21}}$	$\boldsymbol{n_{22}}$	$\boldsymbol{n_{23}}$			$\boldsymbol{n_{2p}}$	
$\boldsymbol{y_3}$	$\boldsymbol{n_{31}}$	$\boldsymbol{n_{32}}$	$\boldsymbol{n_{33}}$			$\boldsymbol{n_{3p}}$	
…	…	…	…	…	…	…	
…	…	…	…	…	…	…	
$\boldsymbol{y_q}$	$\boldsymbol{n_{q1}}$	$\boldsymbol{n_{q2}}$	$\boldsymbol{n_{q3}}$			$\boldsymbol{n_{qp}}$	
total							N

2) Nuage des points d'une série double :

Soit $(x_i;\ y_i;\ n_{ij})$ ou $(x_i;\ y_i)$ une série statistique à deux caractère X et Y. L'ensemble des points $M_{ij}(x_i;\ y_j)$ est appelé nuage de points associé à la série. Lorsque les couples $(x_i;\ y_j)$ n'ont pas tous pour effectif 1 ; on utilise deux représentations :

Représentation par points pondérés : on indique à coté de chaque point $M_{ij}(x_i;\ y_j)$ l'effectif n_{ij}

Représentation par tache : chaque point $M_{ij}(x_i;\ y_j)$ est représenté par un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

On a enregistré, dans 8 sociétés les prestations annuelles de santé en faveur des employés et le pourcentage des décès d'employés par an. Voici le tableau obtenu.

Prestation de santé en milliers FCFA (x_i)	200	300	600	700	900	1000	1100	1200
Pourcentage des décès par an (y_i)	21	22	15	14	10	8	4	2

1) Dresser le tableau des effectifs de chaque caractère.
2) Représenter le nuage de point de coordonnées $(x_i;\ y_i)$ associé à cette série double.

LECON 2 : AJUSTEMENT LINÉAIRE

Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES :

- Calculer les coordonnées du point moyen d'un nuage de point de série à deux caractères.
- Déterminer une équation cartésienne de la droite d'ajustement par la méthode de MAYER, puis utiliser pour donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.
- Calculer la covariance, le coefficient de corrélation d'une série.
- Déterminer les équations des droites de régressions par la méthode des moindres carrées.
- Apprécier la qualité de la corrélation entre deux variables d'une série double, puis donner approximativement en prévision la valeur d'une variable connaissant celle de l'autre.

SITUATION PROBLEME :

Afin d'orienter ses investissements, une chaine d'hôtel réalise des analyses sur le taux d'occupation des chambres. Une analyse établit un lien entre le taux d'occupation (en%) et le montant de publicité (en milliers FCFA).

Frais de publicité $(\boldsymbol{x_i})$	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux d'occupation $(\boldsymbol{y_j})$	52	45	67	55	76	48	32	72

Quelle estimation peut-on faire du taux d'occupation des chambres de cet hôtel si les frais de publicité étaient de 4000000FCFA ?

PRE-REQUIS :

1) Déterminer une équation de la droite passant par les points $\boldsymbol{A}\binom{-3}{-4}$ et $\boldsymbol{B}\binom{1}{2}$ puis vérifier si le $\boldsymbol{C}\binom{3}{1}$ appartient à cette droite.
2) Les notes en mathématiques de la cinquième séquence des élèves d'une classe de terminale C sont représentées dans le tableau suivant :

Notes	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17
effectifs	3	1	2	5	5	4	2	4	3	4	2	2	1	2

Calculer la moyenne et la variance de cette série.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Afin d'orienter ses investissements, une chaine d'hôtel réalise des analyse sur le taux d'occupation des chambres. Une analyse établit un lien entre le taux d'occupation (en%) et le montant de publicité (en milliers FCFA).

Frais de publicité (x_i)	30	27	32	25	35	22	24	35
Taux d'occupation (y_j)	52	45	67	55	76	48	32	72

1) Calculer la moyenne $\overline{x}$ suivant la variable x et la moyenne $\overline{y}$ suivant la variable y.
2) Calculer la variance V_x suivant la variable x et la variance V_y suivant la variable y.
3) Ranger le tableau dans l'ordre croissant des x_i puis calculer $\overline{x}_1$et $\overline{y}_1$qui est la moyenne des quatre premières colonnes ainsi $\overline{x}_2$et $\overline{y}_2$ la moyenne du reste des colonnes.
4) Soit les points $G_1(\overline{x}_1;\ \overline{y}_1)$ et $G_2(\overline{x}_2;\ \overline{y}_2)$; déterminer une équation de droite qui passe par les points G_1et G_2.
5) Calculer $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\overline{y}$; $r = \frac{p}{\sqrt{V_x \times V_y}}$, où n est nombre de colonne.
6) Déterminer une équation de la droite de la forme $y = ax + b$; avec $a = \frac{p}{V_x}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.
7) Quelle estimation peut-on faire du taux d'occupation des chambres de cet hôtel si les frais de publicité étaient de 4000000FCFA.

Solutions :

									total
x_i	30	27	32	25	35	22	24	35	230
y_i	52	45	67	55	76	48	32	72	447
${x_i}^2$	900	729	1024	625	1225	484	576	1225	6788
${y_i}^2$	2704	2025	4489	3025	5776	2304	1024	5184	26531
$x_i \times y_i$	1560	1215	2144	1375	2660	1056	768	2520	13298

1) Calculons la moyenne :

$$\overline{x} = \frac{1}{8}\sum x_i = \frac{230}{8} = 28,75 \ et\ \overline{y} = \frac{1}{8}\sum y_i = \frac{447}{8} = 55,88$$

2) Déterminons la variance de x et y.

$V_x = \frac{1}{8}\sum {x_i}^2 - \overline{x}^2 = \frac{6788}{8} - (28,75)^2 = 21,94$ et $V_y = \frac{1}{8}\sum {y_i}^2 - \overline{y}^2 = \frac{26531}{8} - (55,88)^2 = 193,80$

3) Rangeons le tableau dans l'ordre croissant des x_i puis calculons $\overline{x}_1$et $\overline{y}_1$qui est la moyenne des quatre premières colonnes ainsi $\overline{x}_2$et $\overline{y}_2$ la moyenne du reste des colonnes.

Frais de publicité (x_i)	22	24	25	27	30	32	35	35

Taux d'occupation (y_j)	48	32	55	45	52	67	72	76

$$\overline{x_1} = \frac{22+24+25+27}{4} = \frac{98}{4} = 24,5 \ ; \ \overline{y_1} = \frac{48+32+55+45}{4} = \frac{180}{4} = 45$$

$$\overline{x_2} = \frac{30+32+35+35}{4} = \frac{132}{4} = 33 \ ; \ \overline{y_2} = \frac{52+67+72+76}{4} = \frac{267}{4} = 66,75$$

4) Déterminons une équation de droite qui passe par les points G_1et G_2.
Soit $y = ax + b$; avec $a = \frac{\overline{y_2}-\overline{y_1}}{\overline{x_2}-\overline{x_1}}$ et $b = \overline{y_1} - a\overline{x_1}$
$a = \frac{66,75-45}{33-25,5} = \frac{21,75}{7,5} = 2,9$ et $b = 45 - 2,9 \times 24,5 = -26,05$ d'où $y = 2,9x - 26,05$
5) Calculons $p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\overline{y} = \frac{13298}{8} - 28,75 \times 55,88 = 55,70$ $p = \mathrm{cov}(x;y)$;
$r = \frac{p}{\sqrt{V_x \times V_y}} = \frac{55,70}{\sqrt{21,94 \times 193,80}} = 0,86$. Il existe une forte corrélation entre les frais de publicité et le taux d'occupation des chambres de cet hôtel.
6) Déterminons une équation de la droite de la forme $y = ax + b$; avec $a = \frac{p}{V_x} = \frac{55,70}{21,94} = 2,54$ et $b = \overline{y} - a\overline{x} = 55,88 - 2,54 \times 28,75 = -17,14$ donc $y = 2,54x - 17,14$.
7) Si les frais de publicité étaient de 4000000francs, soit $x = 40$ (centaines de millions), alors la valeur estimative du taux d'occupation de l'hôtel serait: $y = 2,54 \times 40 - 17,14 = 84,46$.

RESUME :

Point moyen :

Soit $(x_i;\ y_i;\ n_{ij})$ ou $(x_i;\ y_i)$ une série statistique à deux caractère X et Y quantitatifs. X et Y est le caractère étudier sur une population d'effectif total N.

On appelle point moyen du nuage de points représentant cette série, le point G de coordonnées $G(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$ où $\overline{x}$ et $\overline{y}$ sont les moyennes des séries marginales de la série $(x_i\ ;\ y_i\ ;\ n_{ij})$.

$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$

Caractéristique de dispersion :

Pour étudier la dispersion de chaque caractère X et Y. On peut calculer leurs variances :

$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2} - (\bar{x})^2$ et $V(y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^{\ 2} - (\bar{y})^2$

Covariance :

On appelle covariance de la série double $(x_i;\ y_i)$ le nombre noté $Cov(X\ ;\ Y)$ tel que :

$$Cov(X\ ;\ Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}$$

Coefficient de corrélation :

Le coefficient de corrélation est le nombre réel noté r qui est définit par $r = \frac{Cov(X\,;Y)}{\sigma_X\ .\ \sigma_Y}$ où σ_X et σ_Y représentent respectivement l'écart-type de X et de Y.

Ajustement linéaire :

Lorsque les points du nuage semblent alignés autour d'une droite, on dit qu'on peut ajuster ce nuage à cette droite : ce type d'ajustement est appelé ajustement linéaire. Les résultats entre x et y sont de la forme $y = ax + b$ où $x = a'y + b'$.

Cette relation permet d'exprimer la valeur d'un caractère en fonction de l'autre. Il existe deux méthodes pour déterminer cette droite à savoir la méthode des moindres carrés et celle de MAYER

- ### Méthode des moindres carrés

  La droite de régression de y ***en x*** est donnée par :

  $$(D): y = ax + b \text{ avec } a = \frac{cov(x;y)}{V_x} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

  La droite de régression de x **en y** est donnée par :

  $$(D'): x = a'y + b' \text{ avec } a' = \frac{cov(x;y)}{V_y} \text{ et } b' = \bar{x} - a'\bar{y}$$

- ### Méthode de MAYER

  Pour déterminer la droite de MAYER :

  1) On partage la série statistique initiale rangée dans l'ordre croissant des x_i, en deux séries d'effectifs égaux si l'effectif total est pair, sinon on met le couple du milieu soit dans le premier soit dans le deuxième groupe.
  2) On détermine les points moyens G_1et G_2 de chaque groupe
  3) La droite de MAYER est la droite passant par G_1et G_2.

Remarques :

- Le point moyen G appartient aux droites de régression (D) et (D').
- On a toujours $\boldsymbol{-1 \leq r \leq 1}$.
- Si $|r| = 1$, alors tous les points du nuage sont alignés sur les droites de régression linéaire (D) et (D') qui sont confondues : on dit que la corrélation linéaire entre les deux caractères est **parfaite.**

- Si $|r|$ est proche de 1 on dit qu'il y'a une **bonne** corrélation linéaire ou une **forte** corrélation linéaire entre les deux variables. En général on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est **forte** lorsqu'on a : **0,87**$\leq |\boldsymbol{r}| \leq$ **1.**

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Le tableau suivant donne les résultats à partir de 10 essais de laboratoire concernant la charge de rupture d'un acier en fonction de sa teneur en carbone.

Teneur en carbone x_i	70	60	68	64	66	64	62	70	74	62
Charge de rupturey_i (en kg)	87	71	79	74	79	80	75	86	95	70

1) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine le point représentant le couple (60 ; 70) du tableau et l'unité graphique est le centimètre.
2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points
3) Calculer le coefficient de corrélation ainsi que son interprétation de cette série.
4) Déterminer par la méthode de MAYER ainsi que par la méthode de moindre carrés une équation de la droite de régression de x en y.
5) Quelle estimation peut-on faire de la teneur en carbone si la charge de rupture est de 125kg ?

CHAPITRE 9 : PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE.

LECON 1 : PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE.

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques :

- Justifier qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction,
- Déterminer les primitives d'une fonction donnée et déterminer celle qui prend la valeur a en b.

Motivation :

L'application des lois de la Physique à un système conduit parfois à une relation liant la dérivée d'une fonction inconnue à une autre fonction bien déterminée : c'est le cas par exemple lors de l'étude du mouvement des fusées et navettes spatiales. Cette leçon aidera les apprenants à comprendre l'évolution de certains phénomènes au cours du temps.

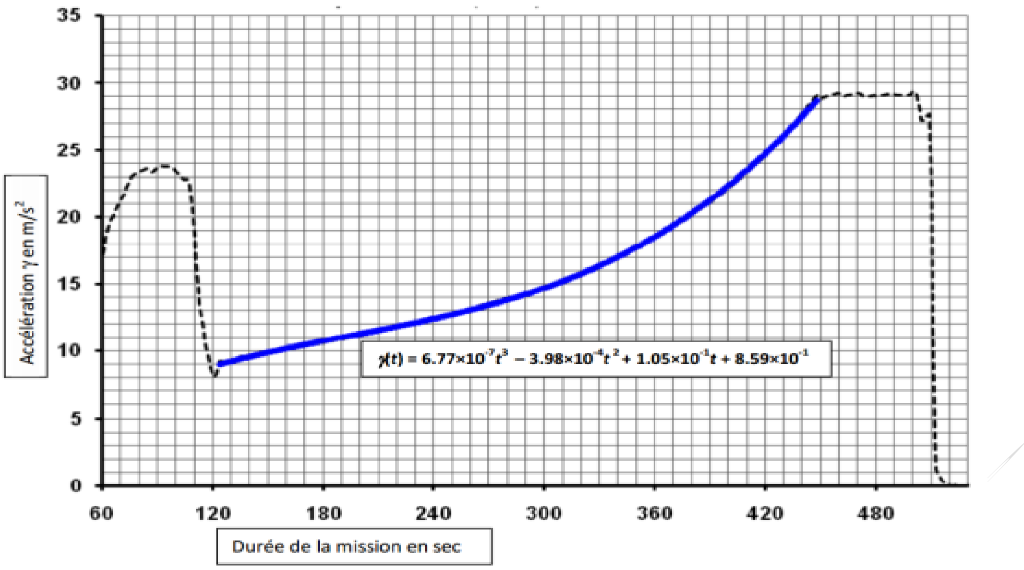
Pré-requis:

Dériver chacune des fonctions ci-dessous. On précisera l'ensemble de dérivabilité dans chaque cas:

$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^3$; $p(x)=4$ $h(x) = \cos x$; $i(x)=\tan x$; $k(x) = 2x - 5x^5 + \frac{1}{x}$.

Situation problème:

Samuel, élève en classe de terminale a trouvé dans un document d'astronautique la figure ci-dessous représentant l'évolution de l'accélération $\gamma(t)$ d'une navette spatiale en fonction du temps. On rappelle que $\gamma(t) = v'(t)$ et $v(t) = x'(t)$. Où γ, v et x désignent respectivement l'accélération, la vitesse et la position de la navette à un instant t compté à partir de l'instant où la navette décolle.



Il est précisé dans le document que la vitesse v_0 au décollage de la navette est de 274m/s.

Curieux, il souhaite déterminer la distance qu'a pu parcourir cette navette 450 secondes après son décollage.

Aide Samuel à déterminer cette distance.

Activité1:

1) Trouve une fonction F ayant pour dérivée sur I la fonction f donnée dans chacun des cas suivants :

   a) $f(x)=2x+3x^2-7$ sur I=$\mathbb{R}$; b) $f(x)=x-4x^3$ sur I= $\mathbb{R}$;

   c) $f(x)=\cos x-2\sin x$ sur I=$[0;\pi[$;

   d) $f(x)=-3\sin x+1+\tan^2 x$ sur I= $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$;

   e) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\cos x$ sur I= $]0;2\pi[$

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$.

Déterminer une fonction G ayant pour dérivée la fonction f .

3) a) Détermine deux autres fonctions H et K dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant toutes les deux pour dérivées la fonction f .

   b) Donne la forme générale des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant pour dérivée la fonction f .

   c) Détermine L, fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$tel que $L'(x)=f(x)$ et $L(1)=-1$.

   Peux-tu trouver une autre expression de L autre que celle que tu viens d'obtenir ?

Activité2 :

1) Détermine l'expression de la vitesse instantanée v(t) de la capsule spatiale.

2) Détermine l'expression de la distance x(t) parcourue par la capsule spatiale à un instant t quelconque.
3) Détermine alors la distance parcourue par la capsule 450 secondes après son décollage.

Solution de la situation problème :

1) $v(t)=1,6925\times10^{-7}t^4-1,326\times10^{-4}t^3+0,525\times10^{-1}t^2+8,59\times10^{-1}t+c$ avec c=274 car $v(0)=274$

2) $x(t)=0,3385\times10^{-7}t^5-0,3315\times10^{-4}t^4+0,175\times10^{-1}t^3+4,295\times10^{-1}t^2+274t$ car $x(0)=0$.

La distance parcourue par la navette spatiale 450secondes après son décollage est de $1070,232km$.

Résumé :

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle K.

On appelle primitive de f sur K, toute fonction F dérivable sur K et telle que : pour tout $x\in K$ $F'(x)=f(x)$.

Propriété :

- Toute fonction continue sur un intervalle K admet une primitive sur K.
- Si f est une fonction admettant une primitive F sur un intervalle K alors toute primitive G de f sur K est de la forme $G(x)=F(x)+c$ où c est un réel quelconque

Remarque:

- Soit K un intervalle de IR; soit $x_0 \in$ K et y_0 un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur K qui prend la valeur y_0 en x_0 c'est-à-dire telle que $F(x_0)=y_0$.
- Etant données deux fonctions f et g admettant pour primitives respectives sur un intervalle K les fonctions F et G, les fonctions f+g et a×f(a∈IR) admettent respectivement pour primitives sur K les fonctions F+G et a×F.

Primitives de fonctions élémentaires :

Fonction f	Primitives F de f	Sur l'intervalle
$f(x)=a$, $\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax+c$, $c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$	$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$	$F(x)=\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}+c$, $c\in\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$, $c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$ $c\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x)=2\sqrt{x}+c$, $c\in\mathbb{R}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{Q}\backslash\{-1\}$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$, $c\in\mathbb{R}$	$[0;+\infty[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	F(x)=tanx+c, $c\in\mathbb{R}$	$\left](2k-1)\frac{\pi}{2};(2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$ $k\in\mathbb{Z}$

Exercice d'application :

1) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

a) $f(x)=3x^2-x+7$ K=$\mathbb{R}$; b) $f(x)=\cos x-5\sin x$ $K=[0;2\pi]$; c) $f(x)=\sin\frac{x}{2}-5\cos 4x$ $K=[0;2\pi]$; d) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-1$ $K=]0;+\infty[$

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\cos x-x\sin x$ et $g(x)=x\cos x$

a) Justifier que f admet une primitive sur IR.

b) Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la primitive de f sur IR qui la valeur 1 en $\frac{-\pi}{3}$

Devoir à faire à la maison: Exercice 1 et 2 page 250 livre L'Excellence.

LEÇON2 : PRIMITIVES DES FONCTIONS $x \mapsto A\sin(ax+b)$ ET $x \mapsto A\cos(ax+b)$

Durée : 100 min.

Objectif pédagogique :

Déterminer les primitives des fonctions $x \mapsto A\sin(ax+b)$ **et** $x \mapsto A\cos(ax+b)$ ainsi que celles des fonctions $x \mapsto \cos^n x$ et $x \mapsto \sin^n x$.

Motivation :

En Physique les mouvements des solides sont classés en plusieurs types parmi lesquels: les mouvements circulaires, rectilignes uniformément variés, les mouvements rectilignes sinusoïdaux etc… Les mouvements rectilignes sinusoïdaux conduisent à des relations faisant intervenir des fonctions composées avec les fonctions circulaires dont il faudra maitriser les propriétés afin de répondre aux questions d'ordre physiques. Cette leçon aidera les apprenants à comprendre l'évolution de ces mouvements au cours du temps.

Pré-requis:

1) Dériver chacune des fonctions ci-dessous. On précisera l'ensemble de dérivabilité dans chaque cas:

$h(x) = \cos x$; $l(x) = -\frac{1}{2}\sin 7x$; $i(x) = cos(2x+5)$.

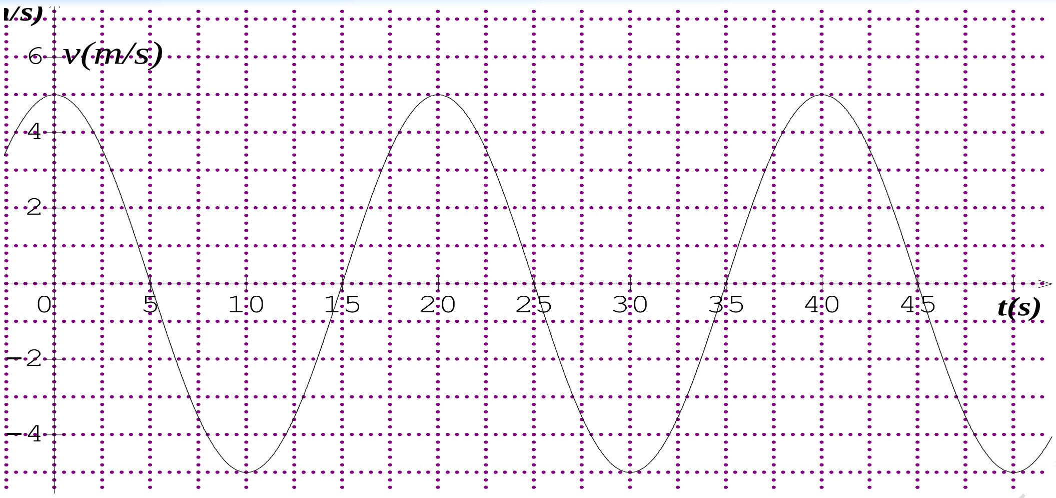
2) a) Déterminer les primitives sur l'intervalle I de chacune des fonctions suivantes : $f(x) = x^2 - 3x + 5$ I=IR et $g(x) = \cos x - \sin x$ $I = [0; 2\pi[$

b) Déterminer la primitive de g qui prend la valeur 0 en $\frac{\pi}{2}$.

3) Rappeler les formules d'Euler et construire le triangle de pascal pour n=5.

<u>Situation problème:</u>

Lors d'une séance de travaux pratiques, les élèves d'une classe de terminale se sont amusés à mettre en mouvement rectiligne sinusoïdale un mobile et ont à chaque fois à l'aide d'un dispositif approprié tracé la courbe de variation de la vitesse du mobile au cours du temps.
Lors du premier essai, ils ont obtenu la courbe ci-dessous :



Ils ont mesuré l'abscisse initiale x_0 (abscisse à l'instant t=0) du mobile et ont obtenu 0,2m. Ils souhaitent déterminer à partir des informations du graphe la position du mobile à l'instant t=9 secondes.

Aide ces élèves à résoudre ce problème.

On précise que $v(t)$ s'écrit sous la forme $v(t) = v_m \sin(\omega t + \varphi)$ où v_m, ω et φ sont des constantes réelles. La position du mobile à chaque instant t est donnée par $x(t)$ tel que $v(t) = x'(t)$.

Activité1:

1) a) Dériver sur $[0;+\infty[$ la fonction $t \mapsto -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \varphi)$.

   b) Déduire une primitive sur $[0;+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

2) Après l'exploitation graphique, ces élèves ont obtenu $v_m = 5$; $\omega = \frac{\pi}{10}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

   Déduire de la question 1 b) l'expression de $x(t)$.

3) Calculer alors la position du mobile à l'instant t=9 secondes.

Activité2 :

4) Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^4 x$.

5) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes : $\sin 3x$, $\sin x$, $\cos 4x$, $\cos 2x$.

6) Déduire une primitive de chacune des fonctions $\sin^3 x$ et $\cos^4 x$.

7) Décrire alors une méthode pour déterminer une primitive des fonctions $\cos^n x$ et $\sin^n x$.

Solution de la situation problème :

1) $x(t) = -\frac{50}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0$

2) $x(0)=0,2$ entraine $x_0=0,2$; d'où $x(t)=-\frac{50}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{10}t+\frac{\pi}{2}\right)+0,2$

$x(9)\approx 5,12\,\text{m}$; d'où l'abscisse du mobile à l'instant t=9secondes est x=5,12m.

Résumé :

Pour tout triplet (A;a;b) de réels tels que a non nul, une primitive de la fonction

$x\mapsto A\cos(ax+b)$ est la fonction $x\mapsto \frac{A}{a}\sin(ax+b)$ et une primitive de la fonction

$x\mapsto A\sin(ax+b)$ est la fonction $x\mapsto -\frac{A}{a}\cos(ax+b)$

En générale, pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I, une primitive de la fonction $u'\cos u$ est la fonction $\sin u$ et une primitive de la fonction $u'\sin u$ est la fonction $-\cos u$.

Méthode de determination d'une primitive de $\cos^n x$ ou $\sin^n x$:

1) Linéariser $\cos^n x$ ou $\sin^n x$.
2) Déterminer une primitive de chacun des termes de la forme $A\cos ax$ ou $A\sin ax$ apparaissant dans le résultat obtenu en 1).
3) Déduire de 1) et 2) une primitive recherchée.

Exercice d'application :

1) **1))** Déterminer les primitives F de f sur l'intervalles K indiqué dans chacun des cas :

2) **a)** $f(x)=3\cos\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$ K=IR**;** **b)** $f(x)=7\sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$ $K=[0;2\pi]$; **c)**

$f(x)=\frac{3}{8}\sin 12x$, $K=[0;2\pi]$; d) $f(x)=2x\cos^2 x$, $K=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\sin^2 x$ $K=]0;+\infty[$.

2) On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=\sin^4 x$ et $g(x)=\cos^5 x$

a) Linéariser f et g.

b) Déduire une primitive de f puis une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la primitive de f sur IR qui la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$

Devoir à faire à la maison: Exercice 6 et 8 page 250

LEÇON3 : PRIMITIVES DES FONCTIONS $x \mapsto au'u^r$ ET $x \mapsto \dfrac{a}{(cx+d)^r}$, $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

Durée : 50 min

Objectif pédagogique :

Déterminer les primitives des fonctions $x \mapsto au'u^r$ **et** $x \mapsto \dfrac{a}{(cx+d)^r}$ où $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

Motivation :

L'application des lois de la Physique à un système conduit parfois à une relation liant la dérivée d'une fonction inconnue à une autre fonction bien déterminée : c'est le cas par exemple lors de l'étude du mouvement des fusées et navettes spatiales. Cette leçon aidera les apprenants à comprendre l'évolution de certains phénomènes au cours du temps.

Pré-requis:

Dériver chacune des fonctions suivantes: $f(x) = (2x+3)^4$; $g(x) = -\dfrac{1}{5}\cos^4 x$

Situation problème:

Lors de ses recherches sur internet, Alain, élève en classe de terminale C a téléchargé un exercice de physique à l'aide de son téléphone android qu'il souhaite traiter. Connaissant l'expression $a_t = 3t\left(1+t^2\right)^{\frac{-3}{2}}$ de la composante tangentielle du vecteur accélération du mobile qui est animé d'un movement circulaire non uniforme, il est demandé de déterminer la vitesse instantanée du mobile à l'instant t=5secondes sachant que la vitesse de celui-ci à l'instant t=0 est de 2m/s..

Aide Alain à résoudre ce problème. On rappelle que $a_t = \dfrac{dv(t)}{dt}$.

Activité:

1) Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de IR et $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

   a) Dériver sur I la fonction $\dfrac{1}{r+1}u^{r+1}$.

   b) Déduire une primitive sur I de la fonction s'écrivant sous la forme $u'u^r$.

   c) Quelles sont alors les primitives sur I des fonctions de la forme $k \times u'u^r$ où k est un réel quelconque?

2) a) Ecrire la fonction $a_t : t \mapsto 3t\left(1+t^2\right)^{\frac{-3}{2}}$ sous la forme $k \times u'u^r$ où k , r sont des nombres et u une fonction à préciser.

   b) Déduire de la question 2 a) l'expression de $v(t)$.

3) Trouver alors la vitesse du mobile à l'instant t=5secondes.

Solution de la situation problème :

1) a) Sur I , on a $\left(\frac{1}{r+1}u^{r+1}\right)' = u'u^r$.

b) Une primitive sur I d'une fonction de la forme $u'u^r$ est $\frac{1}{r+1}u^{r+1}$

c) Les primitives sur I des fonctions de la forme $a \times u'u^r$ sont les fonctions $\frac{a}{r+1}u^{r+1} + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

2) a) $a_t = 1{,}5 \times (2t)\left(1+t^2\right)^{\frac{-3}{2}}$ où $k = 1{,}5$, $u(t) = 1+t^2$ et $r = -\frac{3}{2}$.

b) $v(t) = 1{,}5 \times \frac{\left(1+t^2\right)^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1} + c = -3\left(1+t^2\right)^{\frac{-1}{2}} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$v(0) = 2$; d'où c=5

3) $v(5) \approx 4,4$; d'où la vitesse du mobile à l'instant t=5s estimée à 4,4m/s.

Résumé :

Soit u une fonction et $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

Sur tout intervalle I où u est dérivable et positive, une primitive de toute fonction de la forme $a \times u'u^r$ est donnée par la fonction $a \times \frac{u^{r+1}}{r+1}$.

Si $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, u doit être simplement dérivable sur I.

Si $r < 0$, u doit être dérivable et strictement positive sur I.

Conséquence:

- Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\frac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$ et une primitive de la fonction $\frac{u'}{u^n}$ sur tout intervalle où u est dérivable et non nulle est la fonction $\frac{u^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.
- Une primitive de la fonction $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur tout intervalle où u est dérivable et strictement positive est la fonction $\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{u}$.

Exercice d'application :

c) 1)) Déterminer les primitives F de f sur l'intervalle K indiqué dans chacun des cas :

d) **a)** $f(x)=3x^2(x^3+1)^4$, $K=\left]0;+\infty\right[$; **b)** $f(x)=\cos x\sin^3 x$, $K=\left[0;2\pi\right]$;

c) $f(x)=\dfrac{4x+6}{\left(x^2+3x-1\right)^{\frac{3}{2}}}$, $K=\left]1;+\infty\right[$;

d) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{-x+1}}$, $K=\left]-\infty;1\right[$; **e)** $f(x)=\dfrac{2}{(4x-3)^5}$, $K=\left]\dfrac{3}{4};+\infty\right[$.

2) On considère la fonction f définie par $f(x)=(1+\tan^2 2x)\tan 2x$

a) Déterminer les primitives de f sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$.

b) Déduire la primitive de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right[$ qui prend la valeur 1 en 0.

Devoir à faire à la maison: Exercice 3, 4 et 7 page 250

CHAPITRE 10: FONCTIONS EXPONENTIELLES ET PUISSANCES

LEÇON 1 : PRESENTATION ET PROPRIETES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

-Définir la fonction exponentielle.

-Résoudre les équations et inéquations comportant la fonction exponentielle.

MOTIVATION :

Certains phénomènes tels le rythme de duplication des microbes, la croissance économique et bien d'autres peuvent être modélisés et interprétés en utilisant la fonction exponentielle. Dans cette leçon nous verrons comment interpréter de tels phénomènes en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

PRE REQUIS :

1) Calculer et écrire sous une forme de fraction irréductible E = $\frac{18 \times 10^{-4} \times (2\times 10^{-3})^2}{10^{-3} \times 9}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ des équations

$\ln(2x-2) = \ln(x+1) + \ln(x-1)$ et $(lnx)^2 + 2\,lnx - 35 = 0$

3) Apres avoir donné les conditions pour qu'une fonction f soit bijective de E vers F, traduire le fait que f admette une bijection réciproque f^{-1}.

SITUATION PROBLEME :

Des chercheurs ont étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t exprimé en années , est noté $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle [0 ;+∞[dans $\mathbb{R}$. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre $g(t)$ sur l'intervalle [0 ;+∞[definie par $t = 4ln\left(\frac{1}{k}g(t)\right)$, k étant un réel non nul ; à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, Quel sera la population des rongeurs après 5ans ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 1 :

1) Reproduire et compléter, à l'aide d'une calculatrice scientifique le tableau de valeurs ci-dessous. Pour ce faire, consulter la notice de votre calculatrice ou exécuter la séquence suivante pour une calculatrice scientifique non programme

$\boxed{x}$ $\boxed{\text{2ndf}}$ $\boxed{ln\ x}$ $\boxed{=}$

x	0	1	$\sqrt{2}$	3	2	1,5	-1,5	-1	-3	-2
e^x										
lnx										
$ln(e^x)$										
e^{lnx}										

2) Conjecturer les propriétés en complétant les égalités suivantes :

Pour tout réel$x$, $ln(e^x) = \ldots$

Pour tout réel strictement x positif $e^{lnx} = \ldots.$

3) Si on définit la fonction exp par exp : $x \longmapsto e^x$, à partir de la question 2) , quelle est la bijection réciproque de la fonction ln ?

SOLUTION 1)

x	0	1	$\sqrt{2}$	3	2	1,5	-1,5	-1	-3	-2
e^x	1	e	4,113	20,085	7,389	4,481	0,223	0,367	0,049	0,135
Lnx		0	0,346	1,098	0,693	0,405				
$ln(e^x)$	**0**	**1**	$\sqrt{2}$	**3**	**2**	**1,5**	-1,5	-1	-3	-2
e^{lnx}		**1**	$\sqrt{2}$	**3**	**2**	**1,5**				

2) Conjecturons les propriétés.

Pour tout réel x, $ln(e^x) = x$ et pour tout réel strictement positif $e^{lnx} = x$

3) La bijection réciproque de la fonction ln est exp car ln o exp = id et exp o ln = id

ACTIVITE 2

Soient a et b deux nombres réels ; notons A et B leurs images respectives par la fonction exp, soit e^a= A

et e^b= B:

1. On rappelle que $lnA + lnB = lnAB$:

a) Montrer que $a + b = lnAB$:

b) En déduire que $e^{a+b} = e^a \times e^b$ (1)

2. a) En prenant $a = -b$ dans l'égalité (1), exprimer e^{-b} en fonction de e^b

b) En déduire le réel x tel que $e^x = \frac{e^a}{e^b}$

c) En prenant $a = b$ dans l'égalité (1), exprimer e^{2a} en fonction de e^a. Généraliser le résultat à e^{na}.

pour n entier relatif, puis à e^{ra} pour r nombre rationnel.

3.a) On suppose que $e^a \leq e^b$, en utilisant la croissance de ln , déduire une comparaison de a et b.

b) On suppose que $a \leq b$, en utilisant le 2) de l'activité 1, déduire une comparaison de e^a et e^b.

4. A partir de la question 3), conjecturer une propriété de exp.

5.a) Montrer que g(t) = k$e^{\frac{1}{4}t}$.

b) Déterminer k si g(0) =100.

c) En déduire la population des rongeurs après 5 ans.

SOLUTION

Soient a et b deux nombres réels ; notons A et B leurs images respectives par la fonction exponentielle.

soit e^a= A et e^b= B ;

1.a) On a e^a =A $\Leftrightarrow a = ln$ A et e^b =B $\Leftrightarrow b = ln$ B , d'où $a + b = lnA + lnB = ln\,AB$

b) $a + b = ln\,AB \Leftrightarrow e^{a+b} = AB = e^a \times e^b$.

2.a) $e^{-b+b} = e^{-b} \times e^b \Leftrightarrow e^{-b} \times e^b = 1 \Leftrightarrow e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

b) $e^x = \frac{e^a}{e^b} = e^a \times e^{-b} = e^{a+(-b)} = e^{a-b}$ d'où $e^x = e^{a-b} \Leftrightarrow lne^x = lne^{a-b} \Leftrightarrow x = a - b$,

donc $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.

c) $e^{a+a} = e^a \times e^a \Leftrightarrow e^{2a} = (e^a)^2$ (2).

Par la suite pour tout entier naturel n, on a$lne^{na} = na = \underbrace{a + \cdots .. + a}_{n\,fois} = \underbrace{lne^a + \cdots + lne^a}_{n\,fois}$

D'où lne^{na} = ln $\underbrace{(e^a \times ... \times e^a)}_{n\,fois}$ = ln$(e^a)^n$ par application successive de (1) et (2).

Donc $e^{na} = (e^a)^n$.

Pour tout entier relatif négatif m, $e^{ma} = e^{-m(-a)} = (e^{-a})^{-m} = \frac{1}{(e^{-a})^m} = \frac{1}{(\frac{1}{e^a})^m} = \frac{1}{\frac{1}{(e^a)^m}} = (e^a)^m$.

Pour tout nombre rationnel r , on pose r = $\frac{\alpha}{\beta}$ avec α un entier relatif et β un entier relatif non nul.

On a $lne^{ra} = ra = \frac{\alpha}{\beta}\, a = \frac{\alpha}{\beta} lne^a$= ln $(e^a)^{\frac{\alpha}{\beta}}$ =ln $(e^a)^r$, doù $e^{ra} = (e^a)^r$.

3.a) On suppose que $e^a \leq e^b$, on a ln $(e^a) \leq$ ln (e^b) car ln est croissante.

D'où a$\leq b$ car $e^a = a$, $e^b = b$ et ln est croissante.

b) On suppose que a$\leq b$, on a $e^a \leq lne^b$, d'où $e^a \leq e^b$.

4. Nous conjecturons la propriété suivante : pour touts réels a et , $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$.

5.a) Montrer que g(t) = k$e^{\frac{1}{4}t}$.

$t = 4ln(\frac{1}{k}g(t)) \Leftrightarrow \frac{t}{4} = ln(\frac{1}{k}g(t))$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t}{4}} = e^{ln(\frac{1}{k}g(t))} \Leftrightarrow \frac{1}{k}g(t) = e^{\frac{t}{4}} \quad \Leftrightarrow g(t) = ke^{\frac{t}{4}}$$

b) Déterminons k si g(0) =100

$g(0) = ke^{\frac{0}{4}}$ = k d'où k =100

c) Déduisons la population des rongeurs après 5 ans : $g(5) = 100e^{\frac{5}{4}}$= 349 rongeurs

RESUME :

1) Définition et premières conséquences.

La fonction exponentielle, notée exp définie de ℝvers]0 ;+∞[est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien ln définie de]0 ;+∞[vers ℝ.

Conséquences :

Pour tout réel x, $ln(exp(x)) = x$;
Pour tout réel x de]0, +∞[, $exp\ (lnx) = x$;
Pour tout réel x, $exp(x) > 0$
Pour tout réel x et tout réel strictement positif y , $y = exp\ (x) \Leftrightarrow x = lny$

Cas particuliers :

exp(0) = 1 ; exp (1) = e=2,7182818284.. , e est appelé le nombre de Neper

Remarque : Pour tout réel x, exp(x) =e^x

2)Propriétés algébriques de la fonction exp

Pour tous réels a et b, pour tout nombre rationnel r,

P_1 : $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $\qquad$ P_2 :$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

P_3 :$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ $\qquad$ P_4 : $(e^a)^r = e^{ra}$

Exemples :

$$\boldsymbol{e^{ln3-ln7} = \frac{e^{ln3}}{e^{ln7}} = \frac{3}{7} \quad ; \quad e^{-ln5} = \frac{1}{e^{ln5}} = \frac{1}{5}\ ; \quad (e^x)^3 \times e^{-3x} = e^{3x} \times e^{-3x} = e^0 = 1}$$

3) Propriétés géométriques de la fonction exponentielle

Du fait que la fonction exp est bijective, pour tous réels a et b on a

P_1 : e^a =e^b ⇔ a=b $\qquad$ P_2 :$e^a > e^b$ ⇔a >b

4) Résolution des équations comportant la fonction exponentielle

On se propose de résoudre dans ℝune équation comportant exponentielle, la première, démarche consiste à la ramener sous la forme: $e^{f(x)} = e^{g(x)}$ où f et g sont deux fonctions numériques. Ensuite on procède comme suit :

-Déterminer les conditions d'existence des fonctions f et g

-Résoudre ensuite l'équation $f(x) = g(x)$, puis donner l'ensemble solution en tenant compte des contraintes sur f et g.

Exemple : Résoudre dans ℝ les équations :

$e^{x^2+2}=e^{3x}$; $e^{2x+1} = -3$; $2e^{2x+2}$ -$7e^{x+1}$+3 =0 ; $e^{\frac{1}{x-1}} = 5$

5) Résolution d'inéquations comportant la fonction exponentielle

On se propose de résoudre dans ℝ une inéquation comportant exponentielle, la première démarche consiste à la ramener sous la forme : $e^{f(x)} > e^{g(x)}$ où f et g sont deux fonctions numériques .Ensuite, on procède comme suit :

- Déterminer les conditions d'existence des fonctions f et g
- Résoudre ensuite l'équation $f(x) > g(x)$, puis donner l'ensemble solution en tenant compte des contraintes sur f et g.

Exemple : Résoudre dans ℝ les inéquations :

$e^{x^2+2} < e^{3x}$; $e^{2x+1} < -3$;e^{2x} -5e^{x}-6 ≥ 0 ; $e^{\frac{1}{x-1}} - 5 < 0$; $e^{\sqrt{x}+1} > -3$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Ecrire simplement $\frac{e^{3+ln5}}{e^{4+ln4}}$; $e^{\frac{1}{2}ln4}$; $\ln\sqrt{e^3}$

2) Résoudre dans ℝ $e^{5x}-(\sqrt{3}+\sqrt{4})e^{3x}+\sqrt{12}e^{x}$ =0 ; $e^{ln6-ln3}$= ln(x+1) ; $e^{x-3}+\frac{3}{2} \leq 2$

3) Résoudre dans ℝ² les systhemes : $\begin{cases} e^x + e^y = 7 \\ 3e^{x+y} = 10 \end{cases}$; $\begin{cases} e^x + e^y = 2 \\ 3e^x - 2e^y = 11 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(y+6) - lnx = 3ln2 \\ e^{5x} \times e^{-y} = e^{-6} \end{cases}$

4) Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$

a) Calculer $P(-1)$

b) Mettre $P(x)$ sous la forme $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des nombres réels à déterminer.

c)Résoudre dans IR l'inéquation $2e^{3x} + 7e^{2x} + 2e^{x} - 3 \leq 0$

LEÇON 2 : DERIVEE ET PRIMITIVE

Durée : 50 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Déterminer la dérivée des fonctions comportant la fonction exponentielle.
- Déterminer les primitives des fonctions contenant la fonction exponentielle.

PREREQUIS

1) On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 5x$ et $g(x) = 2x + 5$, montrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$
2) Donner l'expression de $(hot)'(x)$ où h et t sont deux fonctions ;puis calculer la dérivée de $cos(5x^2)$.

MOTIVATION

L'étude de la variation de plusieurs phénomènes dont l'évolution est exprimée à l'aide des fonctions exponentielles peuvent se faire en déterminant la dérivée, cette dérivée peut également permettre de prévoir les seuils maximaux et minimaux des grandeurs qui en découlent.

SITUATION PROBLEME :

Le taux d'exportation d'un pays par rapport à sa production, sur une période de janvier 2016 à janvier 2020, à été modélisé par l'expression $T(x) = \frac{3}{47}e^{-x^2+5}$ où x désigne le nombre d'années. Durant cette période, les exportations ont-elles été croissantes ou décroissantes ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^x$ pour tout réel x.

1) Soit x un réel, exprimer x en fonction de $f(x)$.
2) Dériver les deux membres de l'expression ci-dessus par rapport à x .
3) Déduire que $f'(x) = f(x)$.

SOLUTION

1) Soit x un réel, $f(x) = e^x \Leftrightarrow \ln(f(x)) = \ln e^x \Leftrightarrow x = \ln(f(x))$

2) $x = \ln(f(x)) \Leftrightarrow 1 = \frac{f'(x)}{f(x)}$

3) $1 = \frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = f(x)$

Activité 2

Soit les fonctions f et u définies par $f(x) = e^{u(x)}$ où x appartient au domaine de définition de u.

1) Justifier que $f = exp\ o\ u$.
2) En déduire l'expression de $f\ '(x)$.
3) En déduire une primitive de $u'(x)e^{u(x)}$.
4) On suppose que $u(x) = -x^2 + 5$.

a)Donner l'expression de $g'(x)$ où $g(x) = \frac{3}{47}f(x)$.

b) Etudier le sens de variation de g sur [0 ;4].

c)Les exportations du pays ci-dessus ont 'elles été croissantes ou décroissantes ?

SOLUTION

Soit x appartenant au domaine de définition de u.

$f(x) = e^{u(x)} = \left(u(x)\right) = exp\ o\ u(x)$, d'où $f = exp\ o\ u$

1) $f\ '(x) = (\ exp\left(u(x)\right))' = (u'(x)) \times\ exp'\left(u(x)\right) = u'(x) \times exp\ o\ u(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

2) une primitive de $u'(x)e^{u(x)}$ est définie par $e^{u(x)}$ +c où c est un réel.

3) a)$g'(x) = \frac{3}{47}f\ '(x) = \frac{3}{47}(-2x)\ e^{-x^2+5}. = \frac{-6x}{47}e^{-x^2+5}$

b) pour tout réel x, $g'(x) = \frac{-6x}{47}e^{-x^2+5} \leq 0$, d'où g est décroissante sur [0 ;4].

c) Les exportations du pays ci-dessus ont été décroissantes.

RESUME

1) Dérivée :

Propriétés :

P_1 : Pour tout réel x, $(e^x)' = e^x$

P_2 :Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction e^u est dérivable sur I et : $(e^u)' = u'e^u$

Exemple: Soit les fonctions définies par $f(x) = e^{\frac{x+1}{x^2}}$ et $g(x) = (3x^2 - 6x + 1)\ e^{-2x}$

$$f'(x) = (\ e^{\frac{x+1}{x^2}}\ )' = (\frac{x+1}{x^2})'\ e^{\frac{x+1}{x^2}} = -\frac{x+2}{x^3}e^{\frac{x+1}{x^2}}$$

$$g'(x) = (6x-6)\ e^{-2x} - 2(3x^2 - 6x + 1)\ e^{-2x} = (-6x^2 + 18x - 8)\ e^{-2x}$$

1) Primitive

Propriété : Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$ admet des primitives sur I et ces primitives F sont définies par F$(x) = e^{u(x)}$ + k , k $\in \mathbb{R}$.

Exemple :

On définit les fonctions $f\ et\ g$ par $f(x) = e^{4x+5}$ et $g(x) = (x+5)\ e^{x^2+10x}$, leurs primitives F et G sont definies par : F$(x) = \frac{1}{4}e^{4x+5}$ + k et G$(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+10x}$+k. k $\in \mathbb{R}$

EXERCICE D'APPLICATION

1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions définies par :

$f(x) = e^{2x}\ln x$; $g(x) = \ln(e^x - 2)$; $h(x) = \frac{3e^{2x}-1}{5e^x+4}$; $j(x) = e^{\frac{x-1}{x^2-1}}$.

2) Calculer une primitive de chacune des fonctions définies par :

$f(x)=\frac{1}{x}e^{\ln|x|}$; $g(x)=\frac{e^x}{3e^x+2}$; $h(x)= xe^{x^2-2}+3x^2$.

3) Soit les fonctions q et w définies par $q(x) = (3x+5)e^x$ et $w(x) = (ax^2+bx+c)e^x$ où a, b et c sont des nombres réels. Déterminer a , b et c pour que w soit une primitive de q.

LEÇON 3 : LIMITES ET ETUDE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Déterminer les limites des fonctions comportant la fonction exponentielle ;
- Etudier les fonctions comportant la fonction exponentielle.

MOTIVATION

La prévision à long et moyen terme du niveau d'évolution de plusieurs phénomènes modélisés en utilisant la fonction exponentielle nécessite des connaissances sur le calcul des limites et l'étude de telles fonctions. Dans cette leçon nous verrons comment y parvenir.

PREREQUIS

1) Que vaut chacune des limites suivantes
   $\lim_{x\to 0^+} lnx$; $\lim_{x\to+\infty} lnx$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}$; $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}$; $\lim_{x\to 0^+} xlnx$;
   $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^3}$.
2) Etudier et représenter la fonction définie par $f(x) = xlnx + 1$.

SITUATION PROBLEME

Un corps dont la température initiale θ_0 est 30°c est placée dans une ambiance dont la température T= 100°c est constante. La température de ce corps est une fonction du temps $\theta : t \longmapsto \theta(t)$. D'après Newton, $\theta(t)$= -70$e^{-0,1t}$ + 100, le temps étant exprimé en minutes ; les températures en degré Celsius. Dire en justifiant comment se comporte cette température après de nombreux mois ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1/ a-Construire la courbe représentative de la fonction ln.
b- En déduire celle de la fonction exp.

2/ Conjecturer graphiquement les limites $\lim_{x\to-\infty} e^x$; $\lim_{x\to+\infty} e^x$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$.

3/ a- Est 'il possible de déterminer $\frac{\lim_{x\to+\infty} e^x}{\lim_{x\to+\infty} x}$?

b- Sinon, poser X= e^x et montrer que $\frac{e^x}{x} = \frac{X}{\ln X}$.

c- Calculer $\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{\ln X}$ et en déduire par calcul $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$.

4/Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x$.

a- Sachant que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, Déterminer le nombre dérivé de g en 0.

b- En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

5/ Soit h la fonction définie par $h(x) = xe^x$

a-Justifier que $h(x)$ =$e^x lne^x$

b-On pose X= e^{x} , calculer $\lim_{X \to 0^+} X\ln X$.

c-En déduire $\lim_{x \to -\infty} h(x)$

6/ Soit α un réel strictement positif.

a. Montrer que pour tout réel x,$x^{\alpha}e^{x} = \frac{(-1)^{\alpha}}{\frac{e^{-x}}{(-x)^{\alpha}}}$.

b. Montrer que pour tout x strictement positif, $\ln(\frac{e^{x}}{x^{\alpha}}) = x(1-\alpha\frac{\ln x}{x})$.

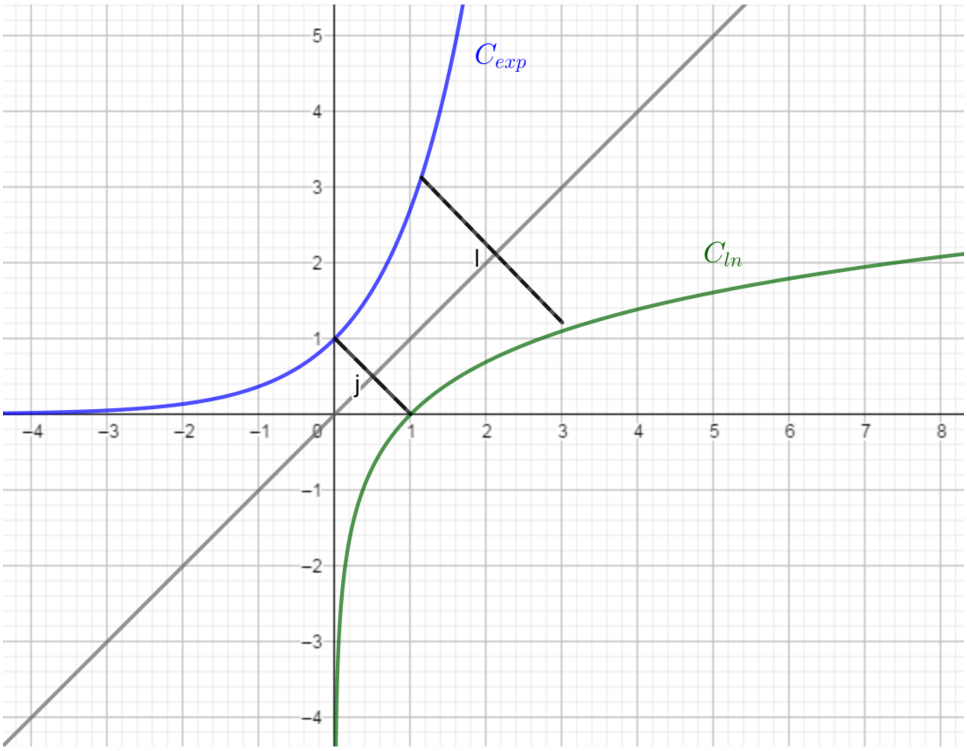
c. En déduire $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}}$, puis $\lim_{x \to -\infty} x^{\alpha} e^{x}$.

7/ Etudier et représenter la fonction définie par $\theta(t) = -70e^{-0,1t} + 100$.

8/ En déduire le comportement de θ quand t tend vers +∞ .

Solution

1/ Les courbes de ln et exp sont symétriques par rapport à la première bissectrice car elles sont bijection réciproques l'une de l'autre :



2/ Conjecturons graphiquement les limites :

$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$; $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x}$.=+∞ car la courbe de exp admet une branche parabolique de direction (OJ).

3/ a- il n'est pas possible de déterminer $\frac{\lim_{x \to +\infty} e^{x}}{\lim_{x \to +\infty} x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ qui est une forme indéterminée ;

b- posons X= e^{x} , on a $\frac{e^{x}}{x} = \frac{e^{x}}{\ln e^{x}}. = \frac{X}{\ln X}$;

c- $\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\ln X} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{\frac{\ln X}{X}} = +\infty$;

on déduit que $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x}.= +\infty$

4/Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = e^{x}$.

a- g'(0) $=e^0 = 1$.

b- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ = g'(0) $=e^0 = 1$.

5/ Soit h la fonction définie par $h(x) = xe^x$;

a- Pour tout réel x, $h(x) = xe^x = e^x lne^x$ car $lne^x = x$;

b- On pose X= e^x , $\lim_{X\to O^+} XlnX$=0 ;

b- D'où $\lim_{x\to -\infty} h(x) = 0$

6/Soit α un réel strictement positif.

a. Montrons que pour tout réel x, $x^\alpha e^x = \frac{(-1)^\alpha}{\frac{e^{-x}}{(-x)^\alpha}}$.

On a $x^\alpha e^x=(-1\times(-x))^\alpha e^x=(-1)^\alpha(-x)^\alpha\frac{1}{e^{-x}}=\frac{(-1)^\alpha}{\frac{e^{-x}}{(-x)^\alpha}}$.

b. Montrons que pour tout x strictement positif, $\ln(\frac{e^x}{x^\alpha}) = x(1-\alpha\frac{lnx}{x})$.

On a $\ln(\frac{e^x}{x^\alpha}) = \ln e^x - \ln x^\alpha = x - x\frac{\ln x^\alpha}{x} = x(1-\alpha\frac{lnx}{x})$.

c. Déduisons $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$

7/ Etudions et représentons la fonction définie par $\theta(t)= -70e^{-0,1t} + 100$.

Domaine : $\mathbb{R}$

Limites : $\lim_{t\to-\infty}\theta(t) = -\infty$; $\lim_{t\to+\infty}\theta(t) = 100$

Branche infinie : $\lim_{t\to-\infty}\frac{\theta(t)}{t} = \lim_{t\to-\infty}\frac{-70e^{-0,1t}+100}{t}$

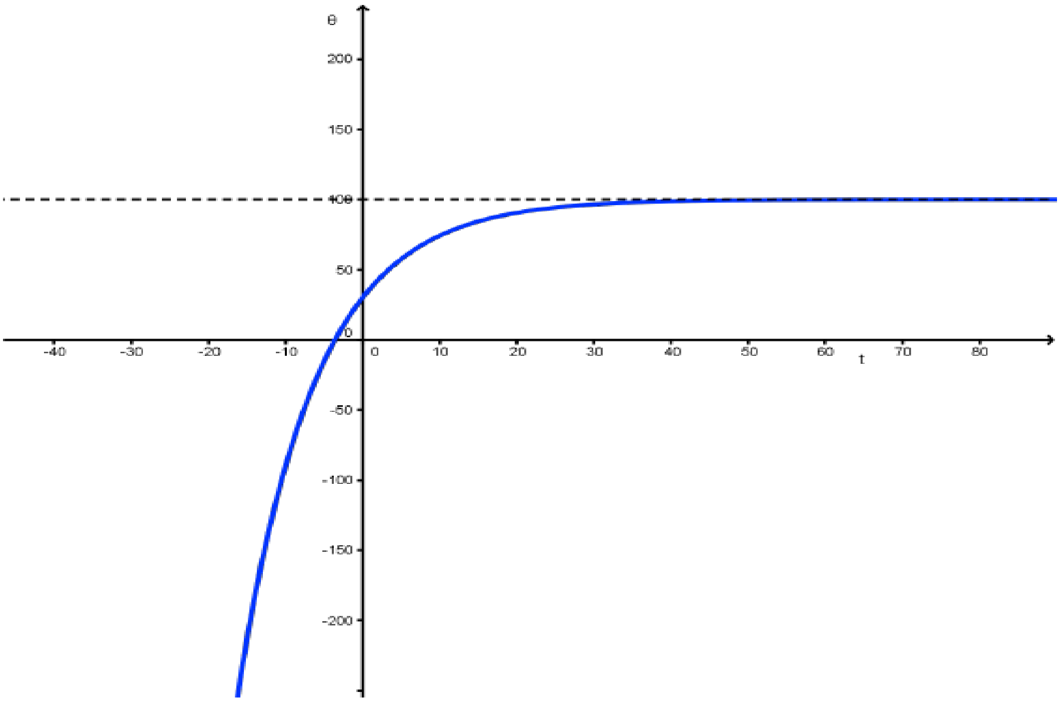
$=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-70te^{0,1t}}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-70(\frac{1}{t^{0,1}}e^t)^{0,1}}$ =-∞ ; d'où la courbe de θ admet en – ∞ une branche parabolique de direction (OJ)

Dérivée : $\theta'(t)= 7e^{-0,1t} > 0$, d'où θ est strictement croissante

Tableau de variation :

t	-∞ +∞
θ'(t)	+
θ(t)	-∞ ↗ 100

Courbe représentative :



8/ quand t tend vers $+\infty$, $\theta(t)$ se stabilise à 100^0 c.

RESUME

1) Propriétés des limites sur les fonctions exponentielles

a/Limites de références :

P_1 :$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; P_2 :$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; P_3 :$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

P_4 :$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; P_5 :$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

b/ Autres limites

Pour $\propto > 0$, On a P_1 : $\lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$; P_2 : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\propto} = +\infty$

Exemples : Calculons les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty}(x-5)e^x = \lim_{x\to-\infty} xe^x - 5e^x$ =0-0=0

$\lim_{x\to+\infty}(x-5)e^x = +\infty(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \lim_{X\to-\infty} \frac{1-e^X}{1+e^X}$ avec X= -2x

$= \frac{1-0}{1+0}$

$=1$

$\lim_{x\to+\infty} x + 5 - e^x = \lim_{x\to+\infty} x(1 + \frac{5}{x} - \frac{e^x}{x}) = +\infty(1 + 0 + \infty) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-1} = +\infty\ (1) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}+1-e^x}{x}$ $=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}$ -$\frac{e^x-1}{x}$ = $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}$ -$\frac{e^x-1}{x}$ = +∞ -1 =+∞

$\lim_{x\to -\infty} x^2e^{3x}$ $=\lim_{x\to -\infty}(x^{\frac{2}{3}}e^x)^3$ =0

$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^{5x}}{x}$ = $\lim_{x\to +\infty}(\frac{e^x}{x^{\frac{1}{5}}})^5$ =+∞

2) Etude et représentation de la fonction exponentielle

On donne $f(x) = e^x$

Domaine de définition : $\mathbb{R}$

Limites aux bornes du domaine : $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

Etude des Branches infinies :

La courbe de f admet en -∞ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

La courbe de f admet en +∞ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

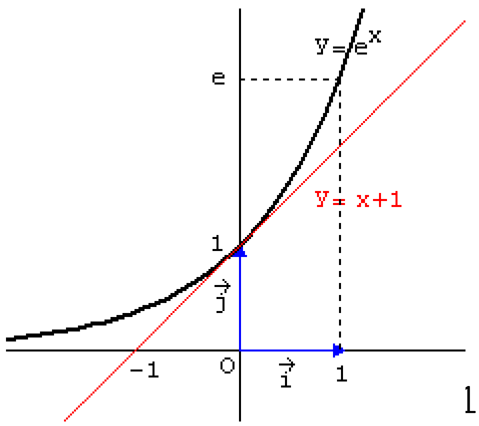
Sens de variation :

Pour tout réel x, $(e^x)' = e^x > 0$, d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x		+		
e^x	0 ↗	1	e	↗ $+\infty$

Courbe représentative de exp



EXERCICES D'APPLICATIONS

Exercice 1 :

Soit la fonction définie sur IR par $\boldsymbol{f(x) = x^2e^{1-x}}$. On désigne par (Γ) sa courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

a)Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que f est dérivable sur IR. Déterminer sa fonction dérivée f' .

c)Dresser le tableau des variations de f et tracer (Γ).

Exercice 2 :

1. Montrer que : $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = (e^{2x} + 4e^{x} + 1)(e^{2x} - 4e^{x} + 1)$
2. En déduire la résolution dans IR de l'équation $e^{4x} - 14e^{2x} + 1 = 0$
3. On définit la fonction g de IR vers IR par $g(x) = x + \frac{8}{1+e^{2x}}$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Montrer que la courbe (C) de g admet deux asymptotes obliques que l'on déterminera.

e)Construire la courbe (C) et ses deux asymptotes dans un repère orthonormé.

f) Montrer que pour tout réel x, $g(x) = x + \frac{8e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

g) En déduire la primitive G de g qui s'annule en 0.

LEÇON 4 : FONCTIONS PUISSANCES ET EXPONENTIELLE DE BASE $a > 0$

Durée : 100 minutes

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- Etudier les fonctions comportant les fonctions puissances
- Etudier les fonctions comportant la fonction exponentielle de base $a > 0$

MOTIVATION :

Certaines croissances s'expriment par des fonctions puissances, en outre l'évolution du nombre de microbes dans un milieu favorable peut se modéliser par une fonction exponentielle de base a. Dans cette leçon nous étudierons ces types de fonctions.

PRE REQUIS :

1) Soient a , b deux réels, n et m deux nombres rationnels. Ecris simplement $a^n \times a^m$; $(a^n)^m$; $a^n \times b^n$; $\frac{a^n}{a^m}$.
2) Ecrire simplement e^{2ln5} ; e^{3lnx} pour x strictement positif.
3) Quel est le signe de lnx dans chacun ders cas suivants : $x > 1$; $0 < x < 1$
4) Calculer la limite $\lim_{x \to +\infty} e^{kx}$ pour k< 0 et k> 0

SITUATION PROBLEME :

Tout cancer débute par la production d'une cellule cancéreuse. Au cours du temps, cette cellule va produire un ensemble de cellules filles appelées tumeur. On observe que le temps de doublement T en semaines d'une tumeur cancéreuse (c'est -à-dire le temps mis pour une tumeur donnée de doubler son nombre de cellules) est sensiblement constant et dépend du type de cancer. Par exemple, pour un cancer du sein, T peut varier de 12 à 14 semaines. La question est de disposer d'un moyen permettant de prévoir à chaque date t le nombre N (t) de cellules cancéreuses qui composent une tumeur dont le temps de doublement T est supposé connu et que N (0) = 1.

ACTIVITE 1

1) Soit x un réel strictement positif ; α, β des réels différents de zéro ;
   a/ Montrer que $x^\alpha = e^{\alpha\, lnx}$
   b/ En déduire que $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
2) On défini la fonction f par $f(x) = e^{\alpha\, lnx}$ avec $x > 0$ et $\alpha \neq 0$.
   a/ Si $\alpha > 0$, dresser le tableau de variation de f suivant les valeurs de α.
   b/Si $\alpha < 0$, dresser le tableau de variation de f suivant les valeurs de α.

c/ Etudier les branches infinies de f suivant les valeurs de α.

d/ Tracer dans un même repère les courbes de f pour α = - 0,5 ;$\alpha = 2$ ainsi que celles des fonctions ln et exp sur]0 ;+∞[.

e/ En déduire une comparaison des nombres: 3^2, ln3 et e^3.

SOLUTION

1.a/ $x^\alpha = e^{lnx^\alpha} = e^{\alpha lnx}$

$b/x^\alpha \times x^\beta = e^{\alpha lnx} \times e^{\beta lnx} = e^{(\alpha+\beta)\, lnx} = e^{lnx^{(\alpha+\beta)}} = x^{(\alpha+\beta)}$

$(x^\alpha)^\beta = (e^{\alpha lnx})^\beta = e^{\alpha\beta lnx} = e^{lnx^{\alpha\beta}} = x^{\alpha\beta}$

$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{e^{\alpha lnx}}{e^{\beta lnx}} = e^{(\alpha-\beta)\, lnx} = e^{lnx^{(\alpha-\beta)}} = x^{(\alpha-\beta)}$

2. $f(x) = e^{\alpha\, lnx}$ avec $x > 0$ et $\alpha \neq 0$.

a/ , b/ et c/

Domaine :]0 ;+∞[

Limites :

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \begin{cases} 0 \quad si\ \alpha > 0 \\ +\infty \quad si\ \alpha < 0 \\ 1 \quad si\ \alpha = 0 \end{cases}$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \quad si\ \alpha > 0 \\ 0 \quad si\ \alpha < 0 \\ 1 \quad si\ \alpha = 0 \end{cases}$

Dérivée et sens de variation :

$f'(x) = (x^\alpha)' = (e^{\alpha lnx})' = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha lnx}$ d'où $\begin{cases} f'(x) > 0\ si\ \alpha > 0 \\ f'(x) < 0\ si\ \alpha < 0 \end{cases}$

Donc f est strictement croissante pour $\alpha > 0$ et f est strictement décroissante pour $\alpha < 0$

Tableaux de variation :

$\alpha > 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha < 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

Branches infinies :

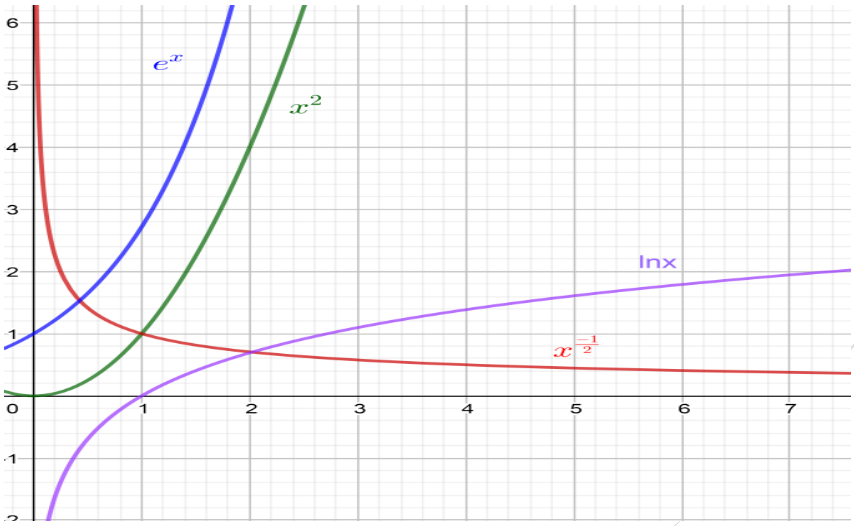
Pour > 0 , on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} = \lim_{x\to+\infty} e^{(\alpha-1)lnx}$

$= \begin{cases} 0 \quad si\ \ 0 < \alpha < 1 \\ +\infty \quad si\ \ \alpha > 1 \end{cases}$

Donc si $0 < \alpha < 1$, la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses. Et si > 1 , la courbe de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

Pour $\alpha < 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

d/Courbes représentatives sur]0 ;+∞[:



e/ln3 $< 3^2 < e^3$.

ACTIVITE 2

Soit x et y deux réels, a et b deux réels strictement positifs et distincts de 1 ;

1) a/ Montrer que $a^x = e^{x\,lna}$

   b/ En déduire que $a^x \times a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^x \times b^x = (a \times b)^x$.

2) On rappelle qu'à partir d'une cellule cancéreuse, une tumeur a un temps de doublement évalué à T semaines,

   a/Justifier que le nombre de cellules N (t_n) au temps $t_n = $ nT est 2^n , n étant un entier naturel.

   b/ En déduire que N $(t_n) = 2^{\frac{t_n}{T}}$ et que pour un t quelconque N (t) $= 2^{\frac{t}{T}}$.

   c/Justifier que N (t) $= e^{\frac{t}{T}ln2}$ pour t un réel quelconque.

Solution

1)a/ $a^x = e^{lna^x} = e^{xlna}$

b/ $a^x \times a^y = e^{xlna} \times e^{ylna} = e^{(x+y)\,lna} = e^{lna^{(x+y)}} = a^{(x+y)}$

$(a^x)^y = (e^{xlna})^y = e^{xylna} = e^{lna^{xy}} = a^{xy}$

$\frac{a^x}{a^y} = \frac{e^{xlna}}{e^{ylna}} = e^{(x-y)\,lna} = e^{lna^{(x-y)}} = a^{(x-y)}$

Le reste idem

2)

a/Justifions que N $(t_n) = 2^n$

b/ Déduisons que N $(t_n) = 2^{\frac{t_n}{T}}$ et que pour un t quelconque N (t) $= 2^{\frac{t}{T}}$.

N(t_n)=2^n=$2^{\frac{t_n}{T}}$ car $n = \frac{t_n}{T}$

Par conséquent pour un t quelconque N (t) $= 2^{\frac{t}{T}}$.

c/Justifions que N (t) $=e^{\frac{t}{T}ln2}$ pour t un réel quelconque.

N (t) $= 2^{\frac{t}{T}} = e^{\ln 2^{\frac{t}{T}}} = e^{\frac{t}{T}\ln 2}$

RESUME

1) Fonction puissance

Soit α étant un nombre réel différent de 0, on appelle fonction puissance d'exposant réel α

l'application f définie de $\mathbb{R}^*{}_+$ vers $\mathbb{R}^*{}_+$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Remarque : $x^\alpha = e^{\alpha\ lnx}$

Exemple : $x^{0,5} = e^{(0,5\ )lnx}$

Propriétés : $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$

Croissance comparée : Sur $\mathbb{R}^*{}_+$, la fonction exponentielle croit plus vite que la fonction puissance qui à son tour croit plus vite que la fonction logarithme. Par conséquent, lors du calcul des limites, en cas d'indéterminations produit ou quotient impliquant les fonctions ci dessus, c'est la limite de la fonction qui croit le plus qui prime.

Exemple : $\lim_{x\to-\infty} x^2e^{3x} = 0$.

L'étude de la fonction f_α se fait en fonction des valeurs de α.

2) Fonction exponentielle de base $a > 0$:

Pour tout réel a strictement positif et différent de 1, la fonction exp_a définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^*{}_+$ par $exp_a(x) = a^x = e^{xlna}$ est appelée fonction exponentielle de base a.

Exemple : $3^{-x} = e^{-x\ ln3}$

Propriétés : Soit x et y deux réels ,a et b deux réels strictement positifs et distincts de 1

$a^x \times a^y = a^{x+y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$; $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^x \times b^x = (a \times b)^x$.

L'étude de la fonction exp_a se fait en fonction des valeurs de a.

EXERCICE D'APPLICATION

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9^x - 3^x - 2 = 0$

2) On définit sur IR la famille $(f_m)_m$ de fonctions telles que $f_m(x) = (x+2)^{-\frac{x}{m}}$ où m désigne un paramètre réel non nul. On notepar (C_m) leurs courbes dans le repere orthonormé (O ; I ; J).

a/ Déterminer le domaine de définition de f_m.

b/ Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point dont on déterminera les coordonnées dans le repère.

c /En fonction de m, calculer les limites de f_m en -2^+ et en $+\infty$. Préciser éventuellement les branches infinies de (C_m) .

d/Etudier les variations de f_m pour m= -3 , puis construire le tableau de variation.

e/ Construire la courbe (C_{-3}) .

CHAPITRE 11: CALCUL DES INTEGRALES

Motivation

Le calcul d'aire des surfaces non régulières et le calcul de volume de solide non réguliers sont très souvent sollicités dans beaucoup de domaine, par exemple dans l'ingénierie du bâtiment lorsqu'il faut calculer la quantité de mortier pour revêtir une surface particulière, ou la quantité de béton à utiliser pour remplir un poteau aux formes particulières : Le calcul des intégrales est un outil mathématique qui apporte une solution à ces problèmes.

LEÇON 1 : NOTION D'INTEGRALE ET PROPRIETES ELEMENTAIRES

Durée : 100 min

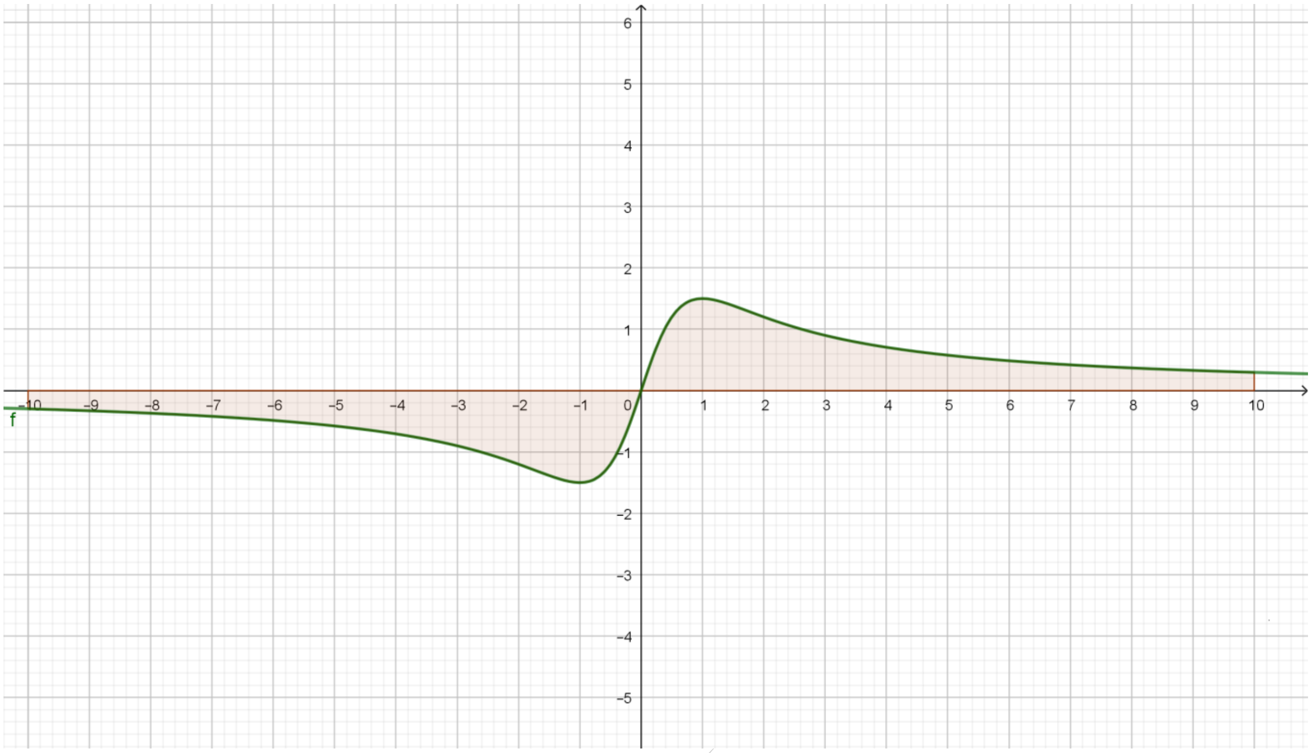
Objectifs pédagogiques :

- Définir l'intégrale d'une fonction entre deux réels.
- Manipuler les propriétés élémentaires du calcul intégrale.

Prérequis

1. On désigne par n un entier naturel, préciser la forme générale des primitives des fonction $x \longmapsto x^n$.
2. Rappeler la formule de calcul d'aire pour un triangle.
3. Déterminer une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{2x}{x^2+1}$, puis en déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{ax}{x^2+1}$, où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,2\}$.

Situation problème



Le domaine colorié ci-dessus est obtenu en traçant la courbe de la fonction f définie par $x \longmapsto \frac{3x}{x^2+1}$, les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $x = -10$ et $x = 10$. FOTSO un grand homme d'affaire en est tombé amoureux et veut en faire un logo pour une de ses nombreuses entreprises. Le directeur de cette entreprise lui a demandé de lui fournir une formule permettant de calculer la surface de ce domaine en vue de faciliter les manipulations de ce logo pour la publicité de l'entreprise. Aidez FOTSO à répondre à la préoccupation de son directeur.

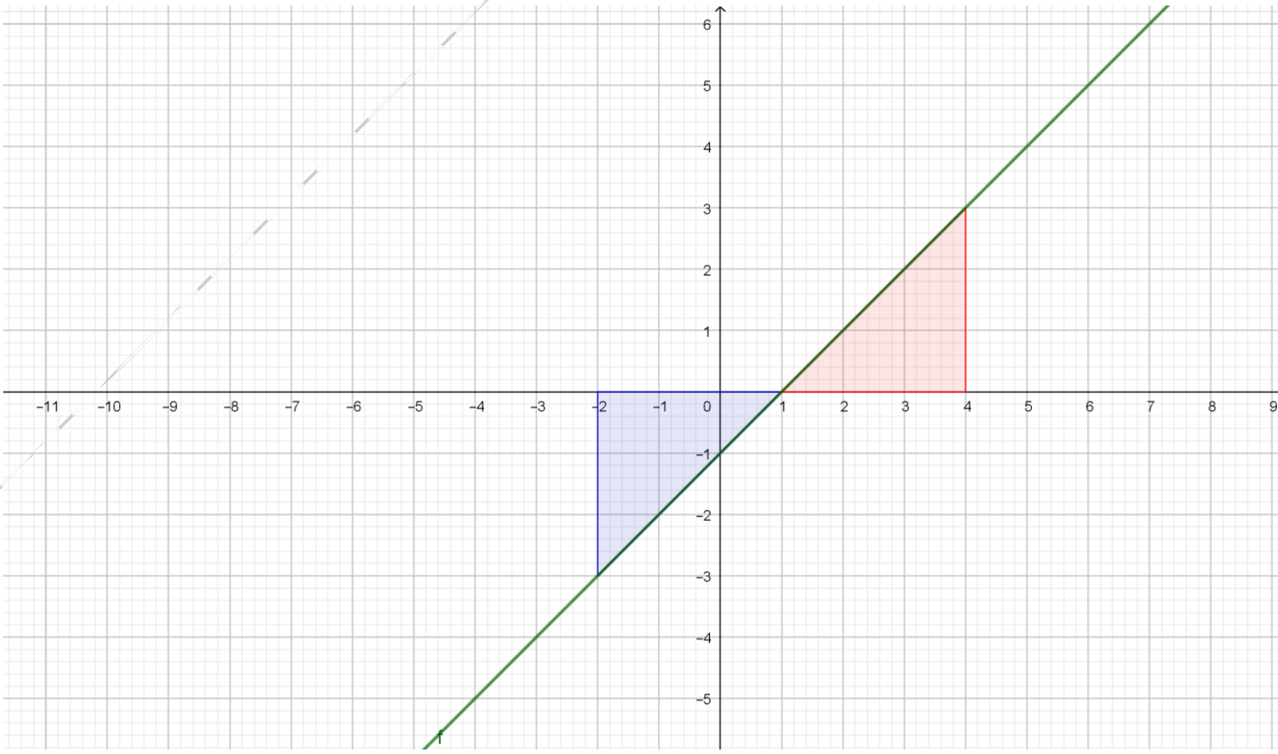
Activité d'apprentissage :

On donne la fonction $h: x \longmapsto x - 1$

1. Représenter la courbe (C_h) de la fonction h dans un repère orthonormé, puis hachuré le domaine $\mathcal{A}_1$ compris entre la courbe (C_h) la droite, $(D_1): x = 1$; la droite $(D_2): x = 4$ et l'axe des abscisses ; hachurer également le domaine $\mathcal{A}_2$ compris entre la courbe (C_h) la droite, $(D_3): x = -2$; la droite $(D_1): x = 1$ et l'axe des abscisses
2. Calculer l'aire de $\mathcal{A}_1$ et l'aire de $\mathcal{A}_2$.
3. On désigne par H la primitive de la fonction h qui s'annule en 1, calculer $H(4) - H(1)$ d'une part et $H(1) - H(-2)$ d'autre part.
4. En utilisant les résultats des deux dernières questions :
   a. Faites une généralisation adéquate de $H(a) - H(b)$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ et h garde un signe positif sur $[a, b]$.
   b. Faites une généralisation adéquate de $H(a) - H(b)$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$ et h garde un signe négatif sur $[a, b]$.
5. Répondre à la préoccupation du directeur de l'entreprise de FOTSO.

Solution de l'activité :

1. Ci-dessous et en vert la courbe de la fonction h. En rouge le domaine $\mathcal{A}_1$ et en bleu le domaine $\mathcal{A}_2$.
2. Le calcul de l'aire du domaine $\mathcal{A}_1$ et celui du domaine $\mathcal{A}_2$ se fait en appliquant la formule du calcul d'aire d'un triangle : $\frac{b\times h}{2} = \frac{3\times 3}{2} = 4{,}5$.
3. H est définie par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$;
   $H(4) - H(1) = \frac{16}{2} - 4 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 4{,}5$ et
   $H(1) - H(2) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} + 2 - \frac{1}{2} = -4{,}5$
4. La généralisation que l'on peut faire est la suivante :
   a. Lorsque h est une fonction positive sur $[a, b]$, alors $H(b) - H(a)$ est la valeur en unité d'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.
   b. Lorsque h est une fonction négative sur $[a, b]$, alors $-[H(b) - H(a)]$ est la valeur en unité d'aire de la surface comprise entre la courbe représentative de h, l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.
5. On détermine une primitive de f, par exemple $F:\longmapsto \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$; puis on utilise la formule : $F(-10) - F(0) + F(10) - F(0)$.



Résumé

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux éléments de I. On suppose que f admet des primitives sur I. Soit F l'une de ces primitives. On appelle ***intégrale de la fonction f de a à b***, le réel $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$. On le note : $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : On considère la fonction $h: x \to x-1$, et H une primitive de h. L'intégrale de 1à 4 de la fonction h est donné par $\int_1^4 h(t)dt = [H(t)]_1^4 = 4{,}5$.

Remarque :

- Le réel $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de la primitive choisie
- a et b sont les bornes de l'intégration.
- La variable t est appelée variable d'intégration ; c'est une variable muette car elle peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre de l'alphabet.
- Lorsque f est positif sur $[a,b]$alors $\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire comprise entre la courbe de la fonction f la droite d'équation $x=a$, la droite d'équation $x=b$ et l'axe des abscisses.
- Lorsque f est négatif sur $[a,b]$alors $-\int_a^b f(t)dt$ est égale à l'aire comprise entre la courbe de la fonction f la droite d'équation $x=a$, la droite d'équation $x=b$ et l'axe des abscisses.

Propriété :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle I soient a, b et c trois éléments de I. On suppose que u et v admettent des primitives sur I. Soient k un réel quelconque :

P_1. Linéarité

- $\int_a^b (u+v)(x)dx = \int_a^b (u(x)+v(x))dx \ = \int_a^b u(x)dx + \int_a^b v(x)dx$
- $\int_a^b (u-v)(x)dx = \int_a^b (u(x)-v(x))dx \ = \int_a^b u(x)dx - \int_a^b v(x)dx$
- $\int_a^b (ku)(x)dx = \int_a^b ku(x)dx = k\int_a^b u(x)dx$

Exemple : 1. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$ on a :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\,[\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

2. $\int_1^4(-4x^2+2x)dx = -4\int_1^4 x^2dx + 2\int_1^4 xdx = -4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 + [x^2]_1^4$

P_2. Relation de CHASLES

$$\int_a^c u(x)dx + \int_c^b u(x)dx = \int_a^b u(x)dx$$

P_3. Positivité

- Si $u(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)dx \geq 0$
- Si $u(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)dx \leq 0$

P_4. Conservation de l'ordre

Si $u(x) \leq v(x)$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)dx \leq \int_a^b v(x)dx$

P_5. Permutation des bornes

$$\int_a^b u(x)dx = -\int_b^a u(x)dx$$

P_6. Stabilité des bornes

$$\int_a^a u(x)dx = 0$$

Exercices d'application

1. Calculer les intégrales suivantes :
   a. $I = \int_{-2}^4(t^2 - 4t + 3)dt$;
   b. $J = \int_{-2}^4(t^2 - 4t + 3)dt$.
2. Après avoir montré que pour tout réel x on a : $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$; calculer $K = \int_{-1}^2 \frac{1}{1+e^t}dt$;
3. Compléter les exercices par ceux du livre.

LEÇON 2 : TECHNIQUES DE CALCUL D'INTEGRALE

Durée : 50 min

Objectifs pédagogiques :

- Calculer les intégrales en utilisant l'intégration par parties.
- Utiliser les techniques de changement de variables, pour calculer les intégrales.
- Utiliser les propriétés de parité, de périodicité de fonctions pour calculer les intégrales.

Motivation

Le calcul d'aire des surfaces non régulières et le calcul de volume de solide non réguliers sont très souvent sollicités dans beaucoup de domaine, par exemple dans l'ingénierie du bâtiment lorsqu'il faut calculer la quantité de mortier pour revêtir une surface particulière, ou la quantité de béton à utiliser pour remplir un poteau aux formes particulières : Le calcul des intégrales est un outil mathématique qui apporte une solution à ces problèmes.

Prérequis

1. Calculer la dérivée de la fonction $x \to e^{u(x)}$
2. u et v sont deux fonctions calculer $(uv)'$
3. Utiliser la linéarité de l'intégrale

Situation problème

Après sa première leçon sur le calcul intégrale, Angoula n'arrive pas à calculer l'intégrale $I = \int_{-2}^{1}(1-t^2)e^{-t}\,dt$. Il se demande bien si les différentes formules vues en cours sont suffisantes pour débloquer sa difficulté.

Aider Angoula à obtenir des réponses.

Activité

1. a. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$, dériver le produit $u.v$; puis tirer l'expression de $u.v'$.
   b. En appliquant la linéarité de l'intégrale à l'expression de $u.v'$ obtenue en 1.a, établissez une formule permettant de calculer $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.
2. Calculer $J = \int_{-2}^{1} 2te^{-t}\,dt$ en posant judicieusement $u(t)$ et $v'(t)$ dans la formule obtenue au 1.b.
3. Répondez à la première difficulté d'Angoula, en appliquant deux fois la formule obtenue en 1.

Solution de l'activité

1. a. On sait que $[u(t)\times v(t)]' = u'(t)\times v(t) + u(t)\times v'(t)$ d'où on a :
   $u(t)\times v'(t) = [u(t)\times v(t)]' - u'(t)\times v(t)$ ainsi :
   b. $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \int_a^b [[u(t)\times v(t)]' - u'(t)\times v(t)]\,dt$
   $$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = \int_a^b [u(t)\times v(t)]'\,dt - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$$
   $$= [u(t).v(t)]_b^a - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$$

La formule cherchée est $\boldsymbol{\int_a^b u(t).v'(t)\,dt = [u(t).v(t)]_b^a - \int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt}$

2. Calculons $J = \int_{-2}^{1} 2te^{-t}\,dt$ en posant judicieusement $u(t)$ et $v'(t)$ dans la formule obtenue au 1 :
   On pose $u(t) = 2t$ et $v'(t) = e^{-t}$ on obtient : $u'(t) = 2$ et $v(t) = -e^{-t}$.
   Ainsi $J = \int_{-2}^{1} 2te^{-t}\,dt = [-2xe^{-x}]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} -2e^{-x}\,dx$
   $$= -2e^{-1} - 4e^{2} - 2[e^{-x}]_{-2}^{1}$$
   $$= -2e^{-1} - 4e^{2} - 2e^{-1} + 2e^{2}$$
   $$= -4e^{-1} - 2e^{2}.$$

3. Pour la première question d'Angoula, on pose :
   $u(t) = 1 - t^2$ et $v'(t) = e^{-t}$ on obtient : $u'(t) = -2t$ et $v(t) = -e^{-t}$.
   Ainsi : $I = \int_{-2}^{1}(1-t^2)e^{-t}\,dt = [-(1-x^2)e^{-x}]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} 2te^{-t}\,dt$
   $= 3e^2 + 4e^{-1} + 2e^2 = 5e^2 + 4e^{-1}$. Car d'après 2.

On a : $\int_{-2}^{1} 2te^{-t}\,dt = -4e^{-1} - 2e^2$.

Résumé

P_1. Intégration par parties

Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$ et soient u et v deux fonctions définies et continues sur $[a,b]$. On a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

P₂. Si u est une fonction paire alors : $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \int_{-a}^{a} u(x)dx = 2\int_a^a u(x)dx$.

P₃. Si u est une fonction impaire alors : $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \int_{-a}^{a} u(x)\,dx = 0$.

P₄. Si u est une fonction périodique de période p alors :

- ✓ $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \int_a^{a+p} u(x)\,dx = \int_0^p u(x)\,dx$
- ✓ $\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ \int_{a+p}^{b+p} u(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx$.

P4. Théorème de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$; m et Mdeux réels.

Si $m \leq f(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Si $M > 0$ et $|f(x)| \leq M$ alors $\int_a^b |f(x)|dx \leq M|b-a|$.

Le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a,b]$.

Exemple d'application du théorème de la moyenne :

Démontrons que $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], x \leq \tan x \leq 2x$:

$t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \tan t \leq 1$ car $x \longmapsto \tan x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow 0 \leq (\tan t)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1 + (\tan t)^2 \leq 2.$$

Ainsi pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on obtient $(x-0) \leq \int_0^x (1+(\tan t)^2)\, dt \leq 2(x-0)$

Ce qui implique que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $x \leq [\tan t]_0^x \leq 2x$.

D'où $\forall\, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], x \leq \tan x \leq 2x$.

Changement de variable :

Soit f une fonction continue sur I ; α et β deux réels tels que pour tout t appartenant à l'intervalle I on a $\alpha t + \beta \in I$. Pour calculer $\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt$, on peut poser $u = \alpha t + \beta$ et on obtient $\frac{du}{dt} = \alpha$. Donc $dt = \frac{1}{\alpha} du$. Si $t = a,$ alors $u = \alpha a + \beta$ et si $t = b,$ alors $u = \alpha b + \beta$ ce qui produit le résultat suivant :

$$\int_a^b f(\alpha t + \beta)\, dt = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(u)\, du$$

Exemple : Calculons $I = \int_{-1}^{3} e^{(-2t+1)}\, dt$: on pose $u = -2t+1$

On a :$I = \int_{-1}^{3} e^{(-2t+1)}\, dt = -\frac{1}{2}\int_3^{-5} e^u\, du = -\frac{1}{2}[e^u]_3^{-5} = -\frac{1}{2}(e^{-5} - e^3)$

Exercices d'application

1. Utiliser l'intégration par parties pour calculer :

   a. $I = \int_0^{\pi}(t-1)\cos t \, dt$; b. $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2 \sin t \, dt$.

2. Sans calculer démontrer que :

   a. $\int_{-\pi}^{\pi}(t^2-1)\cos t \, dt = 2\int_0^{\pi}(t^2-1)\cos t \, dt$;

   b. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} t^3 \sin t \, dt = 0$.

3. Pour tout entier naturel n,on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n \sin(2t) \, dt$, prouver que :

   $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}$ et en déduire $\lim_{n\to\infty} I_n$.

4. Compléter les exercices par ceux du livre.

LEÇON 3 : APPLICATIONS DU CALCUL D'INTEGRALE

Durée : 100 min

Objectifs pédagogiques :

- Calculer l'aire comprise entre deux courbes.
- Calculer le volume d'un solide.

Motivation

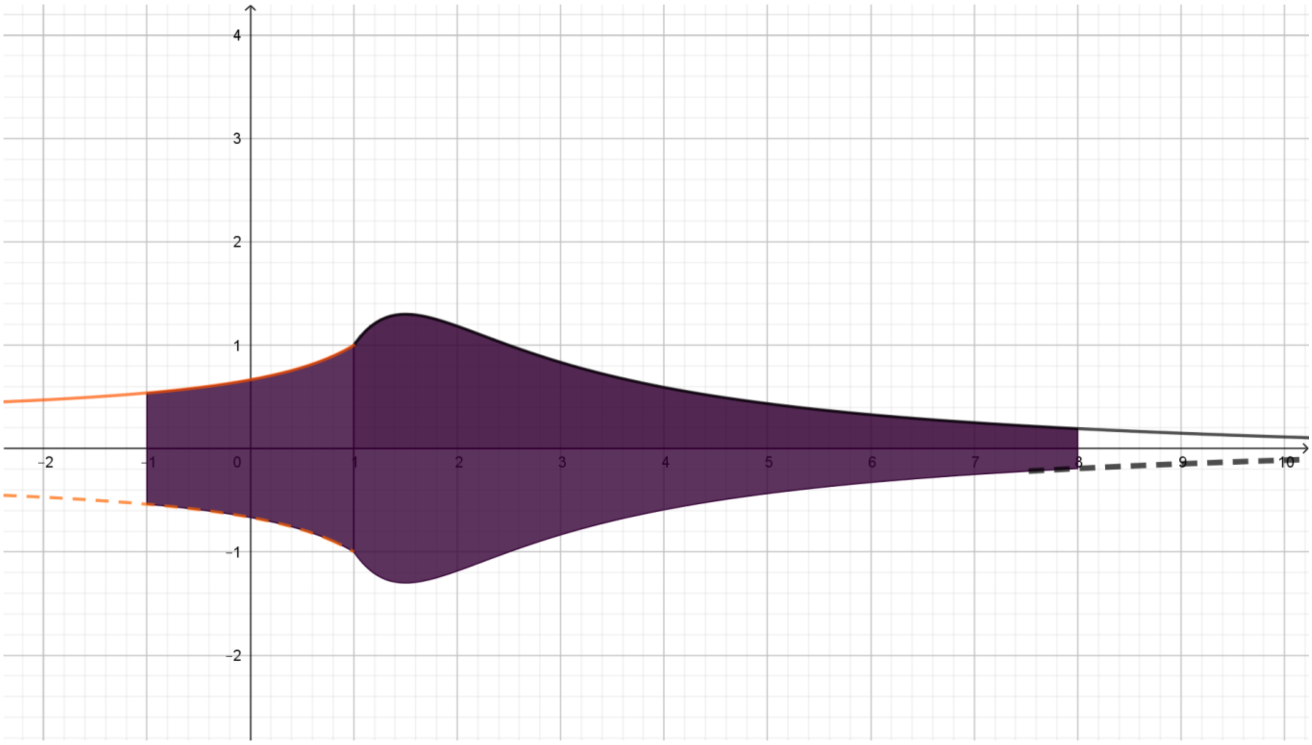
Le calcul d'aire des surfaces non régulières et le calcul de volume de solide non réguliers sont très souvent sollicités dans beaucoup de domaine, par exemple dans l'ingénierie du bâtiment lorsqu'il faut calculer la quantité de mortier pour revêtir une surface particulière, ou la quantité de béton à utiliser pour remplir un poteau aux formes particulières : Le calcul des intégrales est un outil mathématique qui apporte une solution à ces problèmes.

Contrôle de prérequis

1. Rappeler la formule de l'aire d'un disque de rayon r
2. Rappeler la formule du volume d'une sphère de rayon R.

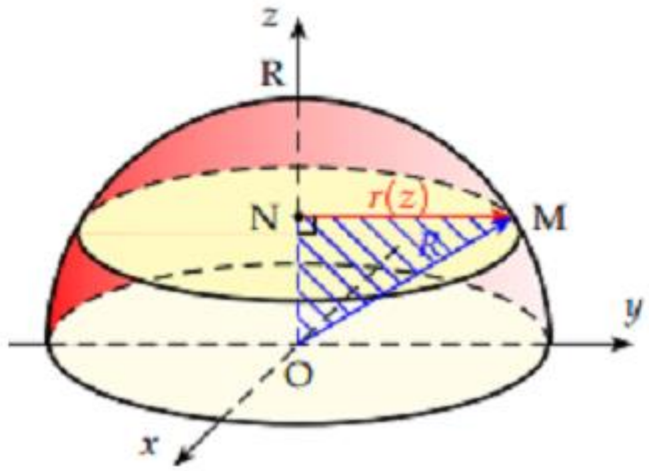
Situation problème

Christian un jeune ingénieur designer a été recruté dans une entreprise qui produit des jus naturels en vu de concevoir des formes de bouteilles pour embouteiller la production. Le directeur de l'entreprise lui a demandé d'être assez imaginatif, Christian a proposé la forme suivante :



La forme de la bouteille sur le dessin ci-dessus sera obtenue en faisant tourner la courbe de la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{-15}{16x-36} + \frac{1}{4} & si\ x \in]-\infty, 1] \\ \frac{3(x-\frac{1}{2})}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1} - \frac{1}{5} & si\ x \in [1, +\infty[\end{cases}$ autour de l'axe des abscisses, entre la droite d'équation $x = -1$ et la droite d'équation $x = 8$. Le directeur qui s'est montré intéressé lui a demandé de fournir une formule de calcul du volume de cette bouteille en vue de contrôler la contenance. Aider Christian à répondre à cette question.

Activité d'apprentissage



La figure ci-dessus représente une demi-sphère de rayon R représentée dans un repère de l'espace (O, O_x, O_y, O_z), $M(x, y, z)$ est un point quelconque appartenant à cette demi-sphère. On sectionne cette demi-sphère avec des plans parallèles au plan (xOy) et passant par M, et on obtient le disque de centre $N(0,0,z)$ et de rayon $r(z)$.

1. Montrer que $r(z)$ le rayon du disque obtenu par cette section est tel que : $r^2(z) = R^2 - z^2$, puis calculer en fonction de R et z la surface $S(z)$ de ce disque.
2. Calculer $I = \int_0^R S(z)dz$, puis comparer I au demi-volume de la sphère
3. En vous inspirant sur ce modèle :
   a. Expliquer ce que représente $J = \int_{-1}^{1} \pi f^2(x)dx$ pour la fonction utilisée par Christian.
   b. Expliquer ce que représente $K = \int_1^8 \pi f^2(x)dx$ pour la fonction utilisée par Christian.
4. Donner une réponse au directeur de l'entreprise de Christian.

Solution de l'activité

1. En se servant de la propriété de PYTHAGORE dans le triangle rectangle OMN on montre aisément que $r^2(z) = R^2 - z^2$.
   $S(z) = \pi r^2(z) = \pi(R^2 - z^2)$.
2. On a $I = \int_0^R S(z)dz = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)dz$

$$= \pi \left[R^2 z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^R$$

$$= \pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}\pi R^3$$

On constate que I est égale au demi-volume de la sphère.

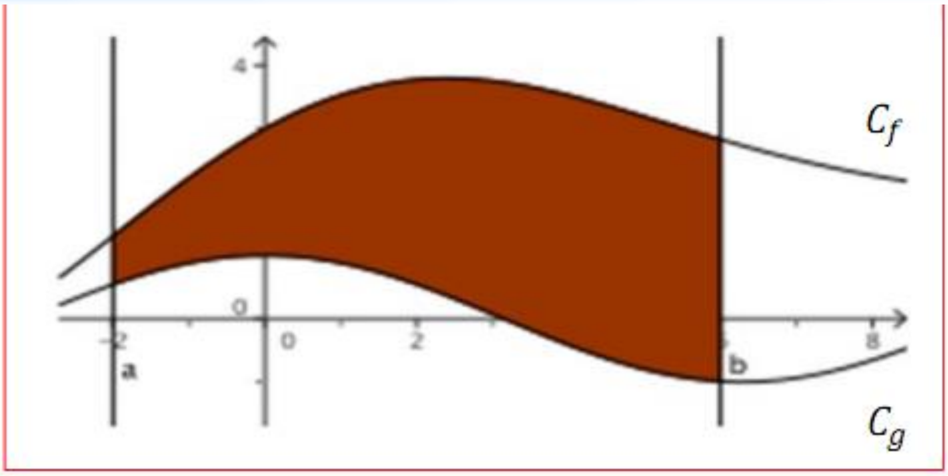
3. En vous inspirant sur ce modèle :
   a. $J = \int_{-1}^{1} \pi f^2(x)dx$ représente le volume obtenu en faisant tourner la courbe de f autour de l'axe des abscisses entre les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$.
   b. $K = \int_{1}^{8} \pi f^2(x)dx$ représente le volume obtenu en faisant tourner la courbe de f autour de l'axe des abscisses entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 8$.
4. La formule à fournir au directeur sera donnée par $V = J + K$.

Résumé

I. Soit f une fonction, (C_f) sa courbe représentative dans un repère ; a et b deux réels tels que $a \leq b$:
   1. $I = \int_a^b \pi f^2(x)dx$ permet de calculer le volume du solide généré par la rotation de la courbe autour de l'axe des abscisses entre les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$.
   2. Par ailleurs si en posant $y = f(x)$ on obtient $x = g(y)$ alors : $J = \int_a^b \pi g^2(y)dy$ permet de calculer le volume du solide généré par la rotation de la courbe autour de l'axe des ordonnées entre les droites d'équations respectives $y = a$ et $y = b$.

II. Comme mentionné à la leçon 1, le calcul intégrale permet également de calculer la surface comprise entre (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, mais de manière pratique il faut faire attention au signe de la fonction sur $[a, b]$ et à multiplier le résultat par l'unité d'aire. L'unité d'aire $(U.A)$ est l'aire du rectangle engendré par les unités sur le repère choisi : par exemple si sur l'axe des abscisses l'unité est de 2 cm, et 1 cm sur l'axe des ordonnées alors $U.A = 2 \times 1 = 2cm^2$.

De plus on peut calculer l'aire comprise entre deux courbes et deux droites d'équations :



$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \times U.A$ représente l'aire comprise entre la courbe (C_f) la courbe (C_g), la droite d'équation $x = a$ et la droite d'équation $x = b$.

III. On peut également par la méthode des rectangles suivante donner la valeur approchée d'une intégrale :

Méthodes des rectangles :

Elle consiste à diviser l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles réguliers d'extrémités $x_0 = a, \dots \dots \dots \dots .., x_n = b$ puis on assimile $I = \int_a^b f(x)dx$ à la somme des des aires définies par les figures 1 ou 2

Figure 1

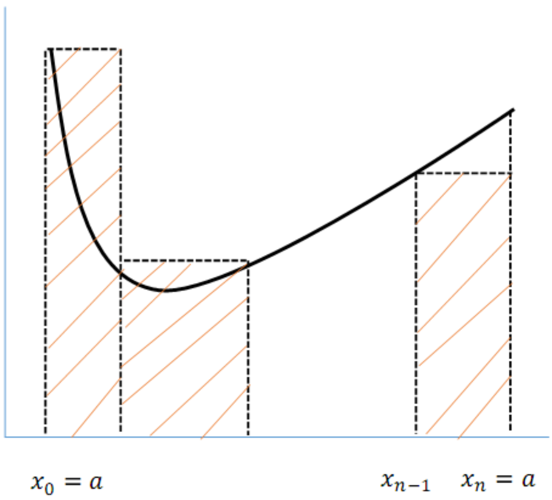


Figure 2

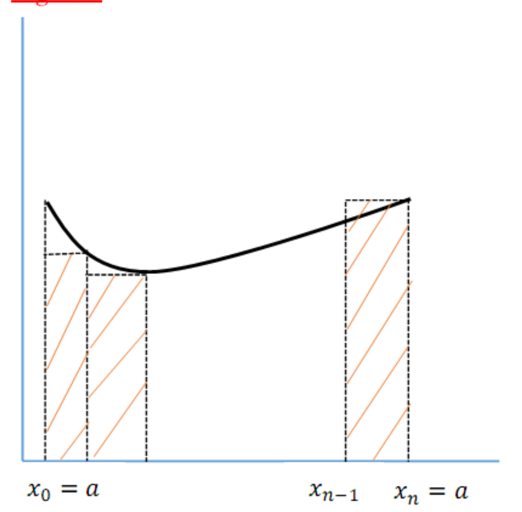


Figure 1 :

$$S_n = \frac{b-a}{n} f(x_0) + \frac{b-a}{n} f(x_1) + \cdots + \frac{b-a}{n} f(x_{n-1})$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Figure 2 :

$$S'_n = \frac{b-a}{n}f(x_1) + \frac{b-a}{n}f(x_2) + \cdots + \frac{b-a}{n}f(x_n)$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

Plus n est grand, plus le calcul se rapproche de la valeur exacte de l'intégrale.

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur $[a,b]$ telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant $\forall\ x \in [a,b]\ |f'(x)| < M$. Alors pour $\boldsymbol{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k), S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)}$ **et** $\boldsymbol{I = \int_a^b f(x)dx}$ **on a :**

$|S_n - I| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$ et $|S'_n - I| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$

$$0 \leq |S_n - I| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n} \Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to+\infty} |S_n - I| \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |S_n - I| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

D'où $\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} S'_n = \int_a^b f(x)dx$

Exercices d'application

1. En utilisant le calcul intégral et un repère de l'espace convenablement choisit démontrer la formule du volume d'un cône.
2. Compléter les exercices par ceux du livre.

CHAPITRE 12: EQUATIONS DIFFERENTIELLES

LEÇON 1 : EQUATION DIFFERENTIELLE DE PREMIER ORDRE

Durée : 50min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Définir, identifier le degré et utiliser le vocabulaire des équations différentielles
- Résoudre une équation différentielle de premier ordre sans second membre

MOTIVATION :

La population africaine évolue aujourd'hui à un rythme très rapide. Ainsi pour prévoir en quelle année la population d'une ville X atteindra un nombre Y de population dans les conditions initiales prévues, ensuite dans le domaine de la physique notamment pour étudier dans la décharge d'un condensateur dans un circuit RC, il est opportun de faire usage des équations différentielles.

PRÉREQUIS:

1- Calculer les dérivées premières et secondes des fonctions définies par :
   a) $f(x) = x^2lnx + x$ b) $g(x) = 2x^2 + 1$ c) $h(x) = e^x lnx$
2- déterminer les primitives des fonctions suivantes
   a) $sinx$ b) $cosx$ c) e^x d) lnx

SITUATION PROBLEME :

L'institut national de la statistique (INS) a évalué la population du Cameroun en 2015. Elle était alors de 23 millions d'habitants en 2015 et de 26 millions d'habitants en 2020. Les ingénieurs de l'INS ont ensuite désignés par h(t) le nombre de millions d'habitants âpres t années avec l'hypothèse que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants. Déterminer dans ces conditions, en quelle année la population du Cameroun atteindra 30 millions d'habitants ?

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE:

1- Soit à résoudre l'équation d'inconnue y : $y' + 3y = 0$
   a)Vérifier que les fonctions définies ci-dessous sont des solutions de cette équation
   e^{-3x} ; $2\,e^{-3x}$; $-3\,e^{-3x}$
   b) conjecturer sur l'ensemble des solutions générales de cette équation
2- Parmi les fonctions définies ci dessous, quelles sont celles qui sont solutions de l'équation d'inconnue y : (F) : $y' - 2y = 0$
   a) e^{2x+1} b) e^x c) $2\,e^{-2x}$ $d) - 5e^{2x}$
3- Conjecturer l'ensemble des solutions de l'équation (F).
4- Soit l'équation (E) : $h'(t) - kh(t) = 0$

a) Vérifier que la fonction définie par $f(t) = \lambda e^{kt}$ vérifie (E) , λ étant un réel.
b) Déterminer λ si $f(0)= 23$.
c) Déterminer λ si $f(5)= 26$
d) Déterminer t pour que $f(t) \geq 30$.

SOLUTION :

1- a) Soit l'équation $y' + 3y = 0$
Si on pose $y = e^{-3x}$, alors $y' + 3y = -3e^{-3x} + 3e^{-3x} = 0$.
Si on pose $y = 2e^{-3x}$, alors $y' + 3y = -6e^{-3x} + 6e^{-3x} = 0$.
Si on pose $y = -3e^{-3x}$, alors $y' + 3y = -9e^{-3x} + 9e^{-3x} = 0$.
D'où les fonctions définies ci-dessus sont des solutions de cette équation.
b) L'ensemble des solutions générales de cette équation est $\{x \mapsto \lambda e^{-3x} ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

2- (F) : $y' - 2y = 0$
a) Si on pose $y = e^{2x+1}$, alors $y' - 2y = 2e^{2x+1} - 2e^{2x+1} = 0$, y vérifie (F)
b) Si on pose $y = e^{x}$, alors $y' - 2y = e^{x} - 2e^{x} = -e^{x} \neq 0$, y ne vérifie pas (F)
c) Si on pose $y = 2e^{-2x}$, alors $y' - 2y = -4e^{-2x} - 4e^{-2x} = -8e^{x} \neq 0$, y ne vérifie pas (F)
d) Si on pose $y = -5e^{2x}$, alors $y' - 2y = -10e^{2x} + 10e^{2x} = 0$, y vérifie (F)

3- L'ensemble des solutions générales de cette équation est $\{x \mapsto \lambda e^{2x} ; \in \mathbb{R}\}$

4- Soit l'équation (E) : $h'(t) - kh(t) = 0$
a) $f'(t) - k f(t) = \lambda k e^{kt} - k\lambda e^{kt} = 0$, f verifie (E)
b) $f(0)= 23 \Longrightarrow \lambda=23$
c) $f(5)= 26 \Longrightarrow 23e^{5k} = 26 \Longrightarrow e^{5k} = \frac{26}{23} \Longrightarrow k= \frac{\ln(\frac{26}{23})}{5} \approx 0{,}025$
d) $f(t) \geq 30 \Longrightarrow 23e^{0{,}025t} \geq 30 \Longrightarrow t \geq \frac{\ln(\frac{30}{23})}{0{,}025} \Longrightarrow t \geq 10{,}62$
la population du Cameroun atteindra 30 millions d'habitants en 2026

RÉSUMÉ:

1- Généralités

Une relation entre une fonction inconnue et ses dérivées successives est appelée **équation différentielle**. La fonction inconnue est généralement notée par une lettre minuscule de l'alphabet entre autre f, g, h, u, v, y etc.

Exemple : $3f'' - 2f' + 6f = 0$; $g' + 3g = 0$

- Lorsque le plus grand ordre des dérivées intervenant est n étant un entier naturel, l'équation différentielle est dite d'ordre n.
- Toute fonction vérifiant une équation différentielle sur un intervalle I ouvert est appelée solution sur I de cette équation différentielle.

Exemple : $2y'' - 3y' + y = 0$ est une équation différentielle de degré ou d'ordre 2

2- Equation différentielle du type $f' - af = 0$

Les solutions sur l'ensemble des nombres réels de cette équation différentielle sont des fonctions de la forme ke^{ax} **avec k et a des nombres réels**

EXERCICES D'APPLICATION :

1- Résoudre sur] 0 ; +∞[, $y' \, sinx - cosx = 0$

2- Résoudre dans IR les équations différentielles $a)\ f' = f$; $b)\ f' + 2f = 0$ $c)\ f' = -1/2\, f$

3- Résoudre sur IR l'équation $f' - 3f = 0$ et déterminer la solution vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$

LEÇON 2 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU TYPE

$af'' + bf' + cf = 0$ Et $af'' + bf' + cf = d$ où d est une constante.

Durée : 100min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

- Définir une équation différentielle de second ordre
- Ressortir l'équation caractéristique d'une équation différentielle de second ordre
- Résoudre une équation différentielle de second ordre avec second membre nul et constant

MOTIVATION :

L'étude des oscillateurs mécaniques amortis et libre, le phénomène de la désintégration du carbone 14 et la mécanique des fluides sont des champs d'action et d'expérimentation des équations différentielles de second ordre.

PRE-REQUIS :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

a) $x^2 + x - 6 = 0$

b) $x^2 - 4x + 8 = 0$

c) $x^2 + 4x + 4 = 0$

SITUATION-PROBLEME

Jeanne félicité élève en classe de Tle C et amoureuse du génie mécanique, découvre un oscillateur mécanique amorti dans l'atelier de son père situé derrière leur maison. Elle commence par identifier les éléments constitutifs de cet oscillateur et observe qu'il est constitué d'un solide qu'elle nomme S, de centre d'inertie G, de masse 100g fixée a un ressort de raideur K= 10 N/m coulissant sur une tige horizontale. Elle désigne par x(t) la position de G dans le repère (O,I) a l'instant t , O étant la position de G a l'équilibre. Elle constate que le mouvement de S est amorti par les forces de frottement proportionnelles a la vitesse. Dans le but de ressortir l'équation différentielle du mouvement de S elle fait appelle a toi, aide ta camarade a justifier que cette équation est de la forme $\boldsymbol{ax'' + bx' + cx = 0}$ ou a, b, c sont des réels à déterminer.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1- vérifier que les fonctions définies par $t(x) = e^{-2x} + e^{-x}$, $g(x) = 2\,e^{-2x} + 3\,e^{-x}$, $h(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-2x} + \frac{2}{3}\,e^{-x}$ sont des solutions de l'équation différentielle $f'' + 3f' + 2f = 0$ et conjecturer sur l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

2- De même on conjecture les solutions de l'équation différentielle $2f'' + 3f' - 2f = 0$ sur la forme $\lambda e^{\frac{1}{2}x} + \boldsymbol{\beta} e^{-2x}$; $\lambda, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$. Parmi les fonctions suivantes quelle est celle qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$

$a)$ $p(x) = -\,e^{-2x} + 2\,e^{1/2x}$, $b)$ $h(x) = 2\,e^{-2x} - e^{1/2x}$

3- Soit les équations différentielles $2f'' + 3f' - 2f = 3$ (1) et $2f'' + 3f' - 2f = 0$ (2)

a) Rechercher une solution particulière de (1) définie par $g(x) = a$ ou a est un réel à déterminer.
b) On pose $f(x) = e^{rx}$ une solution de (2), déterminer les valeurs possibles de r.
c) Conjecturer l'ensemble des solutions de (2) et retrouver le résultat de la question 2.
d) Prouver qu'une fonction q est solution de (1) si et seulement si $q - p$ est solution de (2)

4-Résoudre la situation problème

SOLUTION :

1- $t''(x) + 3t'(x) + 2t(x) = 4e^{-2x} + e^{-x} + 3(-2e^{-2x} - e^{-x}) + 2(e^{-2x} + e^{-x})$

$= 6e^{-2x} - 6e^{-2x} + 3e^{-x} - 3e^{-x}$

$= 0$

$g''(x) + 3g'(x) + 2g(x) = 8e^{-2x} + 3e^{-x} + 3(-4e^{-2x} - 3e^{-x}) + 2(2e^{-2x} + 3e^{-x})$

$= 12e^{-2x} - 12e^{-2x} - 6e^{-x} + 6e^{-x}$

$= 0$

$h''(x) + 3h'(x) + 2h(x) = -2e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-x} + 3(e^{-2x} - \frac{2}{3}e^{-x}) + 2(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-x})$

$= e^{-2x} - e^{-2x} - \frac{4}{3}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{-x}$

$= 0$

Donc les fonctions définies par $t(x) = e^{-2x} + e^{-x}$, $g(x) = 2e^{-2x} + 3e^{-x}$, $h(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$ sont des solutions de l'équation différentielle $f'' + 3f' + 2f = 0$

D'où l'ensemble solution est $\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \boldsymbol{\beta} e^{-x} ; \lambda, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}\}$

2- $a)$ $p(x) = -e^{-2x} + 2e^{\frac{1}{2}x}$,

On a $p(0) = -1+2 = 1$ et $p'(x) = 2e^{-2x} + e^{\frac{1}{2}x}$; $p'(0) = 2+1 = 3$

$b)$ $h(x) = 2e^{-2x} - e^{\frac{1}{2}x}$

on a $h(0) = 2-1 = 1$ et $h'(x) = -4e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$; $h'(0) = -4 - \frac{1}{2} = \frac{-9}{2} \neq 3$

Donc c'est la fonction p qui vérifie les conditions.

3- a) $2(a)'' + 3(a)' - 2a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$

Une solution particulière de l'équation différentielle $2f'' + 3f' - 2f = 3$ (1) est définie par $g(x) = -\frac{3}{2}$.

b) La fonction définie par $f(x) = e^{rx}$ vérifie (2) signifie

$2(e^{rx})'' + 3(e^{rx})' - 2e^{rx} = 0$

$\Leftrightarrow 2r^2e^{rx} + 3re^{rx} - 2e^{rx} = 0$

$\Leftrightarrow e^{rx}(2r^2 + 3r - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2r^2 + 3r - 2 = 0$

$\Delta = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$.

$D'où$ $r_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$ ou $r_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$.

$\boldsymbol{c})$ Nous conjecturons que $f(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x} + \boldsymbol{\beta} e^{-2x} ; \lambda, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}$, ce qui correspond au résultat de la question 2.

d) Prouvons qu'une fonction q est solution de (1) si et seulement si $q - p$ est solution de (2)

Supposons que $q - p$ est solution de (2) $\Leftrightarrow (q - p)'' + 3\,(q - p)' - 2\,(q - p) = 3$

$\Leftrightarrow q'' + 3q' - 2q - (p'' + 3p' - 2p) = 3$

$\Leftrightarrow q'' + 3q' - 2q = (p'' + 3p' - 2p) + 3 = 0 + 3$

car p solution de (1)

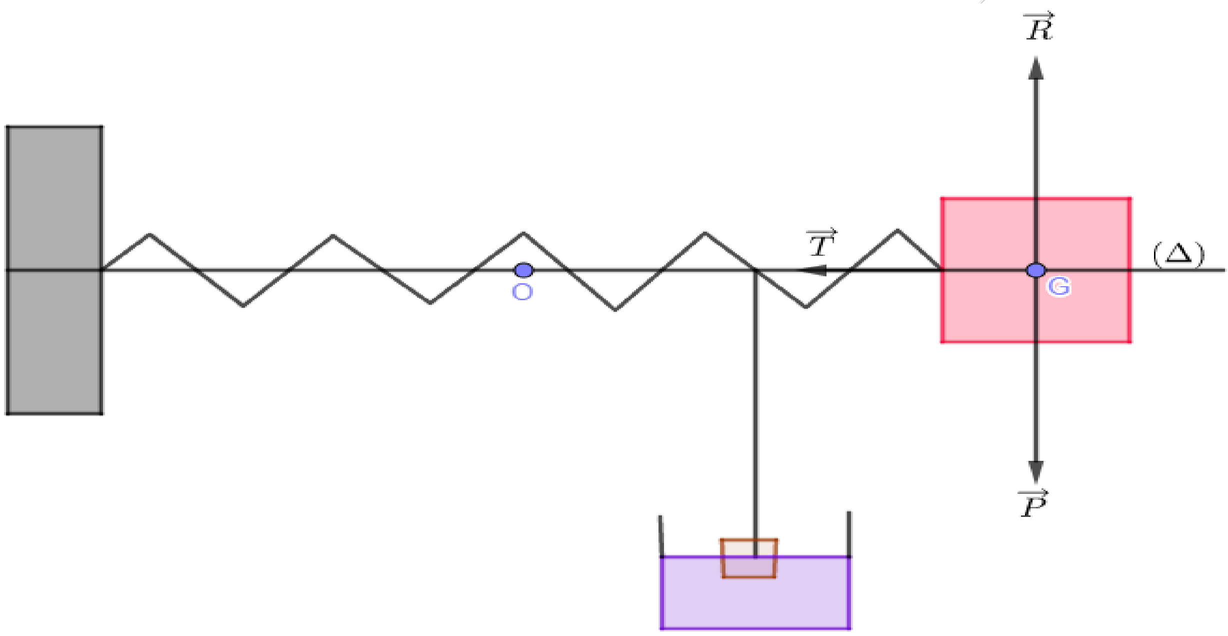
$\Leftrightarrow q'' + 3q' - 2q = 3$

$\Leftrightarrow$ q est solution de (1)

$d'où\; q(x) - (- e^{-2x} + 2\, e^{\frac{1}{2}x}) = -\frac{3}{2}$

$Donc\;\; q(x) = - e^{-2x} + 2\, e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{2}$

4 – Résolvons la situation problème



oscillateur mécanique amorti

Désignons par $\vec{F}$ la force de frottement on a donc $\vec{F} = -fx'(t).\,\overrightarrow{OI}$

D'après le théorème du centre d'inertie $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$ Or $\vec{P} + \vec{R} = \vec{O}$ et $\vec{T} = -Kx(t)\,\overrightarrow{OI}$

$\vec{a} = x''(t)\,\overrightarrow{OI}$ on a $-Kx(t)\,\overrightarrow{OI} - fx'(t)\overrightarrow{OI} = mx''(t)\,\overrightarrow{OI}$

$mx'' + fx' + kx = 0$ d'où $\boldsymbol{x'' + (f/m)\,x' + (k/m)\,x = 0}$

$a = 1, b = f/m\,, c = k/m$

RESUME :

1- Généralités :

Toute équation de la forme $af'' + bf' + cf = 0$ ou $f'' + bf' + cf = d$, ou a, b, c sont les réels est appelée équation différentielle linéaire de second ordre a coefficients constants sans second membre ou avec second , avec d une constante.

2-Equation différentielle du type $af'' + bf' + cf = 0$

2-1 Equation caractéristique

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ ($,b,c$ des réels) l'équation d'inconnue r : $ar^2 + br + c = 0$

Exemple : l'équation différentielle $f'' + 2f' + 5f = 0$ a pour équation caractéristique

$r^2 + 2r + 5 = 0$

Remarque :

L'équation caractéristique de l'équation différentielle $y' - ay = 0$ est $r - a = 0$

2-2 Résolution de l'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$

Cette équation différentielle a pour équation caractéristique l'équation du second degré de la forme

$$ar^2 + br + c = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$	Solution de l'équation caractéristique	Solution de l'équation différentielle
$\Delta = 0$	Une solution double r	$(Ax + B)e^{rx}$ A, B des réels
$\Delta > 0$	Deux solutions réelles r_1 et r_2	$Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ A, B des réels
$\Delta < 0$	Deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ A, B des réels

2-3 Solution vérifiant une condition initiale

Propriété :

Pour tout triplet (x_0, y_0, z_0) de nombres réels , l'équation différentielle $af'' + bf' + cf = 0$ admet une unique solution sur IR telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$

3-Equation du type $af'' + bf' + cf = d$ (1) ou d est une constante

Pour résoudre une telle équation, on procède comme suite :

a) Rechercher une solution particulière $g(x) = a$
b) Résoudre l'équation homogène $af'' + bf' + cf = 0$ (2)
c) Prouver qu'une fonction h est solution de (1) si et seulement si $h - g$ est solution de (2)
d) Solution quelconque de (2) + solution particulière de (1) = solution quelconque de (1)

EXERCICE D'APPLICATION

1- Résoudre dans IR l'équation différentielle (E) $f'' + 4f' + 4f = 0$
2- Déterminer a pour que la fonction g(x) = a soit solution de l'équation différentielle (E') $f'' + 4f' + 4f = -4$
3- Démontrer qu'une fonction h est solution de (E') si et seulement si $h - g$ est solution de (E)
4- En déduire la solution de (E') sur IR telle que $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$

_EVALUATION DES COMPETENCES

Dans une culture de microbes dans un laboratoire, le nombre de microbes à un instant t exprimé en heure, peut être considéré comme une fonction y a valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l' instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction. On a constaté que $y'(t) = ky(t)$ ou k est le coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l' instant t=0.

Tâche 1 : déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$

Tâche 2 : sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction N le nombre de microbes au bout de 3 heures.

Tâche 3 : quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de 5 heures ?

MODULE 26 C E : RELATIONS FONDAMENTALES DANS

L'ENSEMBLE DES NOMBRES REELS

CHAPITRE : 13 : SUITES NUMERIQUES

LECON 1 : RAISONNEMENT PAR RCURRENCE 100 min

Objectif pédagogique

Utiliser le raisonnement par récurrence pour démontrer des propriétés sur ℕ.

Motivation

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple la somme des entiers naturels de 1 à n est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$ On peut facilement vérifier ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$ (le faire si possible en classe); mais même si on vérifie ce résultat pour $n = 100$, cela ne démontre pas qu'il est vrai pour tout entier n. La leçon de ce jour s'en va nous donner un puissant outil qui nous permettra de montrer qu'une propriété dépendant d'un entier naturel est vrai quel que soit l'entier choisi.

Prérequis

- Qu'est ce qu'une proposition mathématique ? Donner un exemple de proposition mathématique qui dépend d'un entier naturel. Quelle est la valeur de vérité d'une proposition mathématique ?
- Ecrire chacune des sommes ou produits suivants en utilisant les symboles Σ ou Π.

i) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ ii) $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1)$ iii) $2 \times 4 \times \ldots \times 2n$

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$ $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n + 1) = \sum_{i=1}^{n} 2i + 1$

$2 \times 4 \times \ldots \times 2n = \prod_{j=1}^{n} 2j$

Quelques résultats importants :

- $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$
- $\sum_{k=p}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=p}^{n-1} u_k$
- $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p+m}^{n+m} u_{k-m}$
- $\sum_{k=p}^{n} u_k = \sum_{k=p}^{m} u_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k \quad (p \leq m \leq n)$

Situation problème

Léo vient de faire connaissance avec la notion de dérivée n$^{\text{ième}}$. Il s'amuse donc à déterminer la dérivée n$^{\text{ième}}$ de la fonction $f : x \mapsto cosx$. Après avoir calculé f', f'' et $f^{(3)}$ respectivement les dérivées première, seconde (la dérivée de f') et troisième (la dérivée de f'') de f, il semble très sûr de lui en affirmant que la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f est $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. L'affirmation de Léo vous semble-t-elle correcte ? Qu'est ce qui le motive à être sûr de son résultat ?

Activité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cosx$. On désigne par $p(n)$ la proposition, $p(n)$: « $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ »

1. Montrer que l'affirmation $p(n)$ est vraie pour $n = 1$, 2 et 3.
2. Réécrire la proposition $p(n)$ en remplaçant le n par $n + 1$.
3. Soit n une entier naturel tel $p(n)$ soit vraie (c'est-à-dire qu'on suppose désormais que $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$). Montrer que l'affirmation $p(n)$ reste vraie si on remplace le n par $n + 1$ dans cette même proposition.

Résolution

1. Pour $n = 1$, $f'(x) = -sinx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. De même pour $n = 2$, $f''(x) = (f')'(x) = (-sinx)' = -cosx = cos(x + \pi) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$. On convient d'affirmer que le résultat est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$

2. L'affirmation $P(n)$ en remplaçant le n par $n + 1$ donne « $f^{(n+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$ »

3. On a $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$. Or on a supposé que la proposition est vraie pour n et donc $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, de sorte que,

$f^{(n+1)}(x) = \left(\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$. La proposition reste donc vraie si on remplace le n par $n + 1$.

On vient donc de prouver que la proposition $p(n)$ est vraie pour $n = 1$, 2 et 3 et que même si on suppose qu'elle est vraie pour un entier quelconque n, elle restera vraie pour son suivant (successeur). Ainsi il vient que la proposition $p(n)$ est vraie quel que soit l'entier n. L'affirmation de Léo est donc très correcte.

Résumé

- Le raisonnement par récurrence permet de montrer qu'une propriété $P(n)$, qui dépend d'un entier naturel n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.
- **<u>Principe de raisonnement par récurrence</u> :** Soit $P(n)$ une assertion mathématique ou une proposition dépendant d'un entier naturel n pris dans une partie non vide A de $\mathbb{N}$ contenant des éléments consécutifs. Si :
  i. $P(n_0)$ est vraie c'est-a-dire $P(n)$ vraie pour le plus petit élément n_0 de A
  ii. pour tout entier $n \geq n_0$ de A, $P(n)$ vraie entraine $P(n+1)$ vraie

  Alors $P(n)$ est vraie pour tout élément de A.

Ce principe qui permet de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier n de A est appelé **principe de raisonnement par récurrence.**

La propriété $P(n)$ peut prendre des formes très variées : égalité, inégalité, phrase, affirmation, … comme l'illustreront les exercices de cette leçon mais également celles de ce chapitre.

Remarque

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ (n_0 étant un entier naturel donné), on peut suivre les étapes suivantes :

- **1ère étape :** On identifie la proposition $P(n)$.
- **2ème étape :** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie (on dit alors que la proposition $P(n)$ est **initialisée**).
- **3ème étape :** On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$ (cette supposition est appelée **hypothèse de récurrence**), on montre par la suite que $P(n+1)$ est aussi vraie (on dit dans ce cas que la propriété est **héréditaire**).
- **4ème étape :** Une fois les étapes 2 et 3 sont vérifiées, on conclut d'après le principe de raisonnement par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exemples

1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbf{1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$$

- Considérons la proposition $P(n)$ définie par $P(n)$: « $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ »
- Pour $n=1$, on a $1+2+\cdots+n=1$ et $\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$. Donc $P(1)$ est vraie.

- Soit n un entier naturel supérieur à 1. Supposons $P(n)$vraie

  (c'est-à-dire $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$) et montrons que $P(n+1)$ reste vraie

  (c'est-à-dire $1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$)

En effet, $1+2+\cdots+n+(n+1)=(1+2+\cdots+n)+n+1$. Or par hypothèse de récurrence, $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

D'où, $1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

- On conclut que pour tout entier naturel non nul, $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5,

$$\mathbf{1\times 2+2\times 3+\cdots+(n-1)\times n=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}}$$

- Soit $P(n)$ la proposition : « $\sum_{k=2}^{n}(k-1)k=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$ »
- Pour $n=5$, $\sum_{k=2}^{n}(k-1)k=1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5=40$.

  Et $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}=\frac{5(5-1)(5+1)}{3}=40$. Donc P_5 est vraie.
- Soit n un entier supérieur à 5. Supposons le résultat $P(n)$ vrai et montrons que $P(n+1)$ reste vrai.

  On a $\sum_{k=2}^{n+1}k(k-1)=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k+n(n+1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}+n(n+1)$

  $=\frac{n(n-1)(n+1)+3n(n+1)}{3}=\frac{n(n+1)[(n-1)+3]}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

  D'où $P(n+1)$ est vraie.
- Ainsi, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5,

  $1\times 2+2\times 3+\cdots+(n-1)\times n=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

3) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 7^n-1 est divisible par 6.

- Soit $P(n)$ le proposition : « 7^n-1 est divisible par 6 »
- Pour $n=0$, $7^n-1=0$ qui est bien un multiple de 6.
- Soit $n>0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie (c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $7^n-1=6k$) et montrons que $P(n+1)$ l'est aussi. On cherche donc un entier k' tel que $7^{n+1}-1=6k'$.

  On a $7^{n+1}-1=7\times 7^n-1=(6+1)\times 7^n-1=6\times 7^n+7^n-1$ et $6\times 7^n+7^n-1=6\times 7^n+6k=6k'$ avec $k'=7^n+k$. (k' est bien un entier naturel)

- Ainsi, pour tout entier naturel n, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercices d'application

Exercice 1 : Soit les matrices A et B définies par $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = A$ (On dit que la matrice A est idempotente).

b. Calculer B^2, B^3, B^4, faire une conjecture pour B^n ceci pour tout $n \geq 2$ et prouver votre résultat par récurrence.

Exercice 2 : Démontrer par récurrence chacune des propriétés suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel non nul.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ (On pourra utiliser le résultat **1)** fait dans le cours).
3. Pour tout entier naturel $n \geq 5$, $2^n > n^2$
4. Pour tout entier naturel non nul, $\sum_{p=0}^{n-1} p! \leq n!$ ($n!$ désigne la factorielle de n)
5. Pour tout entier naturel non nul, $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n} - 2$ est divisible par 17

Exercice 3 : 1. On pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} p \times p!$ Pour tout entier naturel non nul.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul $n, S_n = (n+1)! - 1$

b. En déduire un calcul de S_{50}

2. Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$

a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \neq 1$. f' et f'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de f.

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$ où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n$^{\text{ième}}$ de la fonction f.

LECON 2 : SUITES MONOTONES, SUITES BORNEES 100 min

Objectifs :

- Etudier la monotonie d'une suite numérique.
- Justifier qu'une suite numérique est majorée, minorée ou bornée.

Motivation :

En première, nous avons abordé les notions de base concernant les suites numériques et étudié plus particulièrement les suites arithmétiques et géométriques. L'objectif de cette leçon est de mettre en place des outils permettant de renforcer une étude systématique du comportement global d'une suite numérique (monotonie, majoration, minoration, …)

Prérequis :

- Qu'est-ce qu'une suite numérique ? Quand dit-on qu'elle est arithmétique ? géométrique ?

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$.

Une suite numérique est dite arithmétique lorsque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est constante ou encore que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$

Une suite numérique est dite géométrique lorsque le quotient entre deux termes consécutifs de cette suite est constante ou encore que pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$

- Soit (u_n) une suite telle que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$. Peut-on dire que la suite (u_n) est croissante ? Justifier votre réponse.

Non on ne peut affirmer sur la base de cette information que cette suite est croissante (on ne sait rien par exemple de u_4 et u_3 voire de u_5 et u_4) car on ne peut comparer de façon générale tous les termes de cette suite.

- Une suite à termes positifs est-elle minorée ? majorée ?

Si la suite est à termes positifs alors tous ses termes sont supérieurs à zéro et donc elle est minorée par zéro, mais majorée ? non elle ne l'est pas forcément.

Situation problème :

Une entreprise de fabrication de savons voudrait étudier son chiffre d'affaires à travers sa production pendant 20 années consécutives. Si P_n désigne la production en millions d'unités de l'année n, alors les rapports $\frac{p_{n+1}-p_n}{p_n}$ seront constants et égaux à 0,5. $1 \leq n \leq 20$. Le directeur de l'entreprise est perplexe, deux questions taraudent son esprit :

- La production annuelle sera-t-elle toujours croissante au cours de ces années ?
- La production annuelle pourra-t-elle dépasser les 40 millions unités ?

Activité :

Soit (p_n) la suite de premier terme p_1 et $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_{n+1}-p_n}{p_n} = 0,5$.

a. Démontrer que (p_n) est une suite géométrique de raison 1,5.

b. Déduire que la suite (p_n) est croissante.

c. Donner une expression de P_n en fonction de n.

d. Résoudre l'inéquation $p_{20} > 40 \times 10^6$ d'inconnue p_1 puis déduire une condition sur P_1 pour que $p_{20} > 40 \times 10^6$.

Résolution

a. De la relation $\frac{p_{n+1}-p_n}{p_n} = 0,5$, il vient que $p_{n+1} = 1,5p_n$ de sorte que (p_n) soit une suite géométrique de raison 1,5.

b. La raison de la suite étant $q = 1,5 > 1$ alors la suite est croissante.

c. Pour tout entier n, $p_n = p_1 \times (1,5)^{n-1}$

d. $p_{20} > 40 \times 10^6$ est équivalent à $p_1 \times (1,5)^{19} > 40 \times 10^6$ d'où, $p_1 > 18043$. Ainsi pour que l'entreprise puisse atteindre les 40 millions d'unités au bout des 20 années, il faudra que leur production au cours de la première année soit supérieure à 18403 unités.

On dira que les 40 millions d'unités constitueront une minoration de la production de cette entreprise au bout de ces 20 années.

Résumé

– **Monotonie (sens de variation) d'une suite numérique**

On dit qu'une suite numérique (u_n) est :

- **croissante,** lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
- **décroissante,** lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ou alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$
- **constante,** lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$
- **stationnaire,** lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang
- **alternée,** lorsque pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \times u_n < 0$
- **monotone,** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante. (on parle de stricte monotonie lorsque les inégalités sont strictes)

Remarque

1) Pour étudier la monotonie d'une suite numérique on peut soit étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ ou alors comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 lorsque la suite est à termes strictement positifs, voire faire une récurrence.

2) Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r (respectivement une suite géométrique de raison q). Elle est dite :

- **Croissante,** lorsque $r \geq 0$ (respectivement lorsque $q \geq 1$)
- **Décroissante,** lorsque $r \leq 0$ (respectivement lorsque $q \leq 1$)

3) Soit (u_n) une suite définie de façon explicite, c'est-à-dire $u_n = f(n)$ où f est une fonction donnée. Alors, la fonction f et la suite (u_n) ont la même monotonie.

Exemple :

• La suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ est décroissante. En effet,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} = \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = -\frac{n+4}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$

• De même, la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5}{2^n}$ est une suite décroissante car c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

• Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = n - \sqrt{1+n^2}$.

On a $v_{n+1} - v_n = 1 - \sqrt{1+(1+n)^2} + \sqrt{1+n^2}$. Il s'avère donc difficile de donner le signe de cette expression (idem pour $\frac{v_{n+1}}{v_n}$). Pour contourner cette difficulté, on pose f la fonction de la variable réelle définie par $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$. On a alors $v_n = f(n)$. La fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$ ($\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} > 0$) et par la suite, (u_n) est croissante.

- **Majoration, minoration d'une suite numérique**

On dit qu'une suite numérique (u_n) est :

- **majorée par un réel M,** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$. On dit aussi que M est un majorant de (u_n).

- **minorée par un réel m,** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \geq m$. On dit aussi que m est un minorant de (u_n).
- **bornée,** lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque

1) On dit qu'une suite (u_n) est positive (respectivement négative) lorsque tous ses termes sont positifs (respectivement négatifs).

2) Soit $u_n = f(n)$ où f est une fonction donnée. Si f est bornée alors (u_n) est aussi bornée.

Notation

On note $(u_n) \leq (v_n)$ lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \leq v_n$.

Exemple

La suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$ est majorée par 4. En effet, par récurrence :

Pour $n = 0$, $u_0 = 0 < 4$. Donc le résultat est vrai pour $n = 0$.

Soit $n > 0$. Supposons que $u_n < 4$ et montrons que $u_{n+1} < 4$.

On a par hypothèse de récurrence, $u_n < 4$, d'où $4 + 3u_n < 16$ de sorte que $u_{n+1} < 4$.

Exercice d'application

1) Montrer que la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$ est croissante.

2) Etudier la monotonie de la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2^n}{n!}$

3) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 1$ puis conclure.

4) Démontrer que les suites suivantes sont bornées.

a) $u_n = \frac{2n-3}{5n-2}$ b) $u_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$ c) $u_n = \frac{2n+cosn}{n^2}$

LECON 3 : CONVERGENCE D'UNE SUITE NUM2RIQUE 100 min

Objectifs pédagogiques

— Montrer qu'une suite numérique est convergente.

— Etudier la convergence des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant une fonction donnée.

— Montrer qu'une suite converge sans calculer sa limite.

Motivation

C'est le mathématicien Augustin Cauchy qui montra à Laplace la nécessité d'une étude précise des notions de convergence ou de divergence d'une suite. Plus tard cette notion va s'avérer très utile en entreprise

Prérequis

— Quand dit-on qu'une suite est convergente ?

Une suite (u_n) est dite convergente lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe et est finie.

— Parmi les suites suivantes citez celles qui sont convergentes :

a) $u_n = -n^2 + 3n$ **b)** $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ **c)** $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n + 2$

Pour le cas **a),** $\lim_{n\to+} u_n = -\infty$. Donc la suite est ne converge pas.

Pour le cas **b),** $\lim_{n\to+} u_n = 2$. La suite converge vers 2.

Pour le cas **c),** $\lim_{n\to+} u_n$ n'existe pas. La suite est divergente.

Activité

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$

1) Sans les calculer, représenter les 4 premiers termes de la suite (u_n) et conjecturer la convergence de la suite. (Qu'est-ce qui motive votre conjecture ?)

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 2$

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Résolution

1) Considérer la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ et la droite d'équation $y = x$. f est une fonction croissante. Représenter la courbe de la fonction f et construire les 4 premiers termes, puis faire la conjecture.

2) Par récurrence. Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et donc $0 \leq u_0 \leq 2$. Soit $n > 0$, supposons que $0 \leq u_n \leq 2$. Alors $f(0) \leq f(u_n) \leq f(2)$ ou encore $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{5}{4}$ et donc, $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

3) Par récurrence. Pour $n = 0$, $u_1 = \frac{1}{2} > 0 = u_0$. Supposons $u_{n-1} \leq u_n$ pour tout $n > 0$, alors $f(u_{n-1}) \leq f(u_n)$ (f est croissante) et par la suite, $u_n \leq u_{n+1}$
La suite (u_n) est croissante et majorée (par 2), elle va donc converger vers un réel $l \in [0, 2]$. Toutefois quelle est la valeur exacte de cette limite? Qu'en est-il d'une suite décroissante ?

Résumé

— Convergence d'une suite numérique

- La notion de limite d'une suite numérique est bien connue car une suite est avant tout une fonction. La suite n'étant pas définie au voisinage de $-\infty$, ni au voisinage d'un réel alors parler de la limite d'une suite en $-\infty$ ou en un réel n'a pas de sens. Ainsi, lorsqu'on parle de limite d'une suite numérique (u_n) c'est qu'il s'agit de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. On la note $\lim_{n\to+\infty} u_n$ ou tout simplement $\lim u_n$.
- La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.
- Lorsque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors on dit que la suite (u_n) est convergente et converge vers l. Une suite qui n'est pas convergente (dont la limite est ∞ ou qui n'admet pas de limite) est dite divergente.

Exemple

On a $\lim\left(n \sin\frac{1}{n}\right) = 1$. Donc la suite (u_n) de terme général $u_n = n \sin\frac{1}{n}$ converge vers 1.

La suite (v_n) de terme général $v_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ n'a pas de limite ; elle est divergente.

— Etude de la convergence d'une suite numérique

Etudier la convergence d'une suite numérique est très souvent ramené au calcul de la limite de cette suite. Nous allons donc donner ici quelques résultats importants pour le calcul des limites concernant les suites. Notons déjà que les résultats sur les limites des suites (somme, produit, quotient de suites) sont les mêmes que pour les limites des fonctions somme, produit et quotient en $+\infty$.

Propriété 1 : • Soit (u_n) une suite définie de façon explicite ($u_n = f(n)$, f étant une fonction numérique), alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

- Soit (u_n) une suite, f une fonction et b un nombre réel. Si $\lim u_n = b$, alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{x\to b} f(x)$.

Exemple

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n, par $u_n = \frac{1-2n}{n+1}$ et $v_n = \sqrt{\frac{4n^2-3n+5}{n^2+2}}$.

En considérant les fonctions de la variable réelle f et g définies respectivement par

$f(x) = \frac{1-2x}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$ et par la suite $\lim u_n = -2$.

En outre, $\lim_{x\to+\infty} \frac{4n^2-3n+5}{n^2+2} = 4$ et donc, $\lim v_n = \lim_{x\to 4} g(x) = 2$ car $v_n = g(w_n)$ où $w_n = \frac{4n^2-3n+5}{n^2+2}$

Remarque

Si f n'a pas de limite en $+\infty$ cela ne veut pas dire que la suite $u_n = f(n)$ n'en a pas aussi. Ainsi, la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$; cependant, la suite de terme général $u_n = \sin(\pi n)$ dont tous les termes sont nuls converge vers 0.

Propriété 2 Soit a un nombre réel et n un entier naturel.

- Si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$
- Si $a > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$
- Si $a \leq -1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n$ n'existe pas
- Si $a = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} a^n = 1$

Exemple

$\lim \frac{2^n}{3^{n+2}} = \lim \frac{1}{9} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$ $\qquad$ $\lim \frac{5^n-2^n}{5^n+2^n} = \lim \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$

Propriété 3 Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et l un nombre réel.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u_n \leq \lim v_n$ et si de plus $\lim u_n = +\infty$ (respectivement $\lim v_n = -\infty$) alors $\lim v_n = +\infty$ (respectivement $\lim u_n = -\infty$).

- Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = \lim w_n = l$ alors $\lim u_n = l$

Cette dernière propriété est connue sous le nom de **théorème des gendarmes** (elle reste valable même lorsque l vaut ∞).

- Si $|u_n - l| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et $\lim v_n = 0$, alors $\lim u_n = l$.

Exemple : Voir exercice de synthèse.

Convergence et monotonie

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque

La propriété ci-dessus est assez puissante car elle permet d'affirmer qu'une suite est convergente sans au préalable calculer sa limite. (On n'a pas besoin de connaitre vers quoi la suite converge mais on peut affirmer avec certitude qu'elle converge)

Convergence et limite de suite

soit (u_n) une suite définie de façon récurrente (le premier terme est donné et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue).

Si (u_n) converge vers un réel l, alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2. On en déduit que cette suite est convergente.

Prouvons ce résultat par récurrence. En effet,

Pour $n = 0$, $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} > u_0$ et $u_0 \leq 2$. Donc, pour $n = 0$, la suite (u_n) est croissante et majorée par 2.

Soit $n > 0$ un entier naturel. Supposons que $u_n - u_{n-1} > 0$ et que $u_n \leq 2$ puis montrons que $u_{n+1} - u_n > 0$ et $u_{n+1} \leq 2$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$. f est croissante sur $\mathbb{R}$ et donc pour $u_n > u_{n-1}$ on a $f(u_n) > f(u_{n-1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

En outre, si $u_n \leq 2$ alors $f(u_n) \leq f(2)$ ou encore $u_{n+1} \leq 2$.

(u_n) étant convergente et f continue alors sa limite l vérifie $l = \sqrt{l+2}$. Par la suite, $l(l-1) = 2$ d'où $l = 2$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 2.

- **Définition « epsilonienne » de la notion de limite d'une suite**

Le paragraphe ci-dessous permet de montrer qu'une suite numérique admet pour limite un nombre réel l sans pour autant calculer cette limite.

Soit (u_n) une suite numérique, l un nombre réel. On dit que (u_n) admet pour limite l lorsque : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N_ε tel que pour tout entier naturel $n \geq N_\varepsilon$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exemple

Sans calculer au préalable sa limite, montrer que la suite définie par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ converge vers 2.

En effet, il suffit de montrer que la limite de la suite (u_n) vaut 2.

Soit donc $\varepsilon > 0$ cherchons un entier N_ε tel que pour tout entier $n \geq N_\varepsilon$ on ait $|u_n - 2| \leq \varepsilon$.
On a :

$|u_n - 2| \leq \varepsilon$ entraine $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\left|-\frac{1}{n+1}\right| \leq \varepsilon$ et donc $n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ou encore $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Il suffit donc pour que l'inégalité ci-dessus soit vérifiée de prendre $N_\varepsilon = E\left(\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|\right) + 1$ où E désigne la fonction partie entière.

Exercice d'application

1. Trouver la limite éventuelle de $u_n = \frac{a^n - 2}{a^n + 3}$ (a réel, $a > -1$). On pourra discuter les cas $-1 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \sum_{p=1}^{n}(\frac{1}{p!})$.
   - **a.** Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
   - **b.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3.
   - **c.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. En utilisant la définition avec epsilon, montrer que la suite définie par $u_n = \frac{3n}{n^2+n+1}$ converge vers 0.

EXERCICES DE SYNTHESE SUR LE CHAPITRE

EXERCICE 1 :

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n \quad v_{n+1} = (1-\alpha)u_n + \alpha v_n$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1. Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = v_n - u_n$
   - **a.** Calculer t_0 et t_1
   - **b.** Montrer que pour tout entier naturel n, $t_n = (2\alpha - 1)^n$
   - **c.** En déduire $\lim t_n$
2. On s'intéresse ici à la convergence des suites (u_n) et (v_n).
   - **a.** Montrer que $(u_n) \leq (v_n)$.
   - **b.** Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   - **c.** Déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l.
   - **d.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n + v_n = 3$ et déduire la valeur de l.

On dit dans ce cas que les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**.

EXERCICE 2 :

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$

1. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 4.
   - **b.** Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   - **c.** Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier n, $4 - u_{n+1} = \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{4+3u_n}}$
   - **b.** Déduire que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4}|u_n - 4|$
   - **c.** Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - 4| \leq 4\left(\frac{3}{4}\right)^n$
   - **d.** Déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Module 26 Organisation des données et estimations des quantités

Chapitre 14

Théorie Des Graphes

Motivation

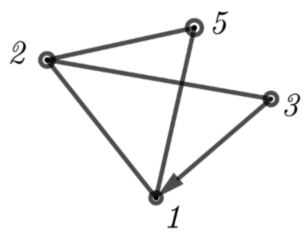
Pour résoudre de nombreux problèmes concrets, on est amené à tracer sur le papier des petits dessins qui représentent (partiellement) le problème à résoudre. Bien souvent, ces petits dessins se composent de points et de lignes continues reliant deux à deux certains de ces points. On appellera ces petits dessins des graphes, les points des sommets et les lignes des arcs ou arêtes, selon que la relation binaire sous-jacente est orientée ou non.

Leçon 1 Graphe partiel et sous-graphe 100mn

Objectif pédagogique : Justifier qu'une partie d'un graphe est un sous-graphe ou un graphe partiel .

Contrôle des prérequis

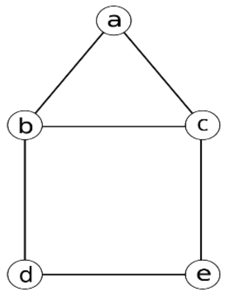
Dessiner le graphe défini par les arêtes $\{1\ ;\ 2\},\{1\ ;\ 3\},\{1\ ;\ 5\},\{2\ ;\ 5\}$ et $\{3;\ 2\}$.



Solution

Activités D'apprentissage

On considère le graphe G ci-contre.



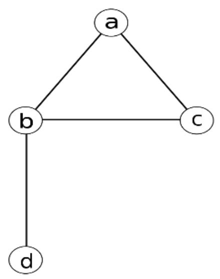
a-Donne l'ensemble S de ses sommets puis l'ensemble A des arêtes de G.

$S = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}\ ;\ A = \{\{a\,;\ b\},\{a\,;\ c\},\{b\,;\ c\},\{b\,;\ d\},\{d\,;\ e\},\{c\,;\ e\}\}$

b- Supprime le sommet e et les arêtes qui lui sont adjacentes puis reproduis le graphe G' obtenu. Donne l'ensemble S'des sommets de G'.

Que représente l'ensemble S'des sommets de G' pour S ?

Que représente le graphe G' pour le graphe G ?



$S' = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ est un sous-ensemble de S. On dit que le graphe G' est un sous graphe du graphe G.

Il faut remarquer par ailleurs que l'ensemble A' des arêtes de G' est un sous-ensemble de l'ensemble A des arêtes de G.

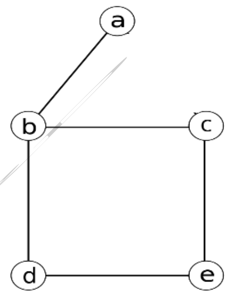
c- Maintenant supprime une arête du graphe G puis reproduis

le graphe G'' obtenu.

Donne l'ensemble S''des sommets de G'' puis l'ensemble A'' des arêtes de G''.

Que représente l'ensemble A'' des arêtes de G'' pour l'ensemble A des arêtes de G ?

Que représente le graphe G'' pour le graphe G ?



Supprimons par exemple l'arête $\{a\ ;\ c\}$.

$S'' = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\} = S\,;$

$A'' = \{\{a\ ;\ b\},\{b\ ;\ c\},\{b\ ;\ d\},\{d\ ;\ e\},\{c\ ;\ e\}\} \subset A$

On dit que G'' est un graphe partiel de G.

Résumé

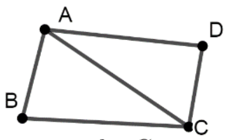
Soit G = (S ; A) un graphe. S est l'ensemble des sommets de G et A l'ensemble de ses arêtes.

D1- Un sous-graphe du graphe G est tout graphe G' dont l'ensemble S' des sommets est un sous-ensemble de S et dont les arêtes sont ceux de G reliant deux éléments de S'.

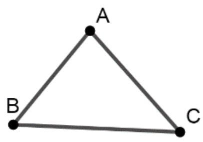
D2- Un graphe partiel de G est un graphe ayant pour sommets tous les sommets de G et pour arcs/arêtes seulement un sous-ensemble de A.

Autrement dit, c'est tout graphe obtenu en supprimant uniquement une ou plusieurs arêtes de G.

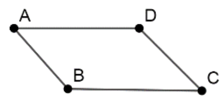
Exemple



graphe G

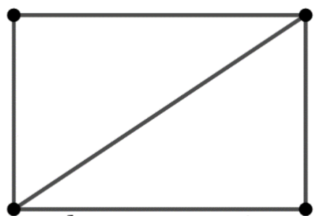


Sous graphe de G

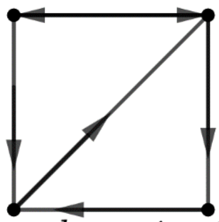


graphe partiel de G

D3 Un graphe est dit orienté si ses arêtes sont des arcs orientés ; dans le cas contraire le graphe est dit non orienté. (Une arête orientée va d'un sommet vers un autre sommet, elle est représentée par une flèche.)

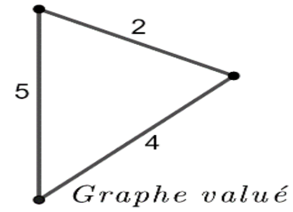


graphe non orienté



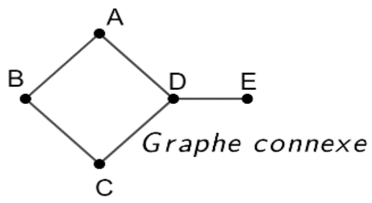
graphe orienté

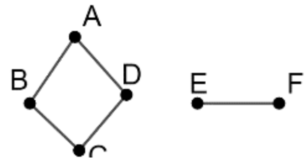
D4 Un graphe valué est un graphe dans lequel chaque arête est associée à un nombre réel appelé poids. Si ce nombre est positif, on parle alors de graphe pondéré.



D5 Un graphe est connexe s'il existe une chaine reliant chaque paire de sommets de ce graphe.

Exemple

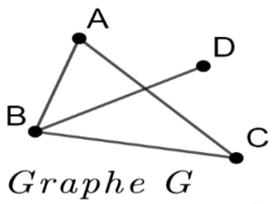


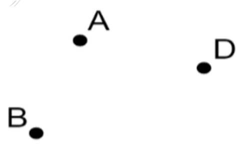


Il n'existe pas de chaine reliant les sommets D et E.

Sous graphe particuliers.

- ✎ Un **stable** est un sous-graphe de G qui ne contient aucune arête.

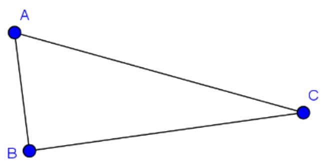




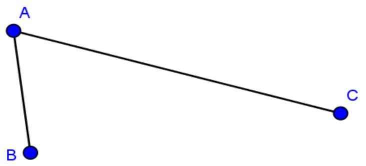
Un stable de G

- ✎ Une clique est un sous graphe complet de G.
- Un sous-graphe G' d'un graphe G est dit **complet** lorsque ses sommets sont deux à deux adjacents

Une clique de G



- ✎ Un sous-graphe partiel d'un graphe G est un graphe partiel d'un sous-graphe de G.



Ce graphe est un sous-graphe partiel du graphe G, car graphe partielle de la clique de G ci-dessus.

Application :

1. Choisis la bonne réponse.

a-Qu'est qu'un sous graphe ?

□ Le graphe initial privé de quelques arêtes

□ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes *

□ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive
en suite de quelques arêtes.

b- Qu'est qu'un graphe partiel ?

□ Le graphe initial privé de quelques arêtes *

□ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

□ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive
en suite de quelques arêtes.

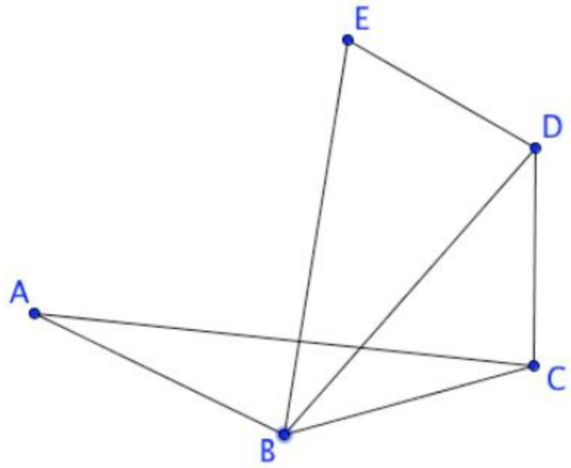
c- Qu'est qu'un sous graphe partiel ?

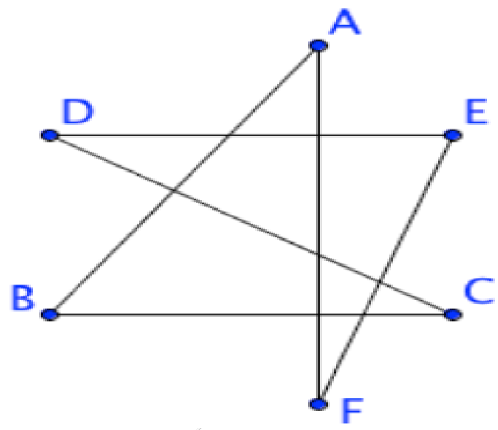
□ Le graphe initial privé de quelques arêtes

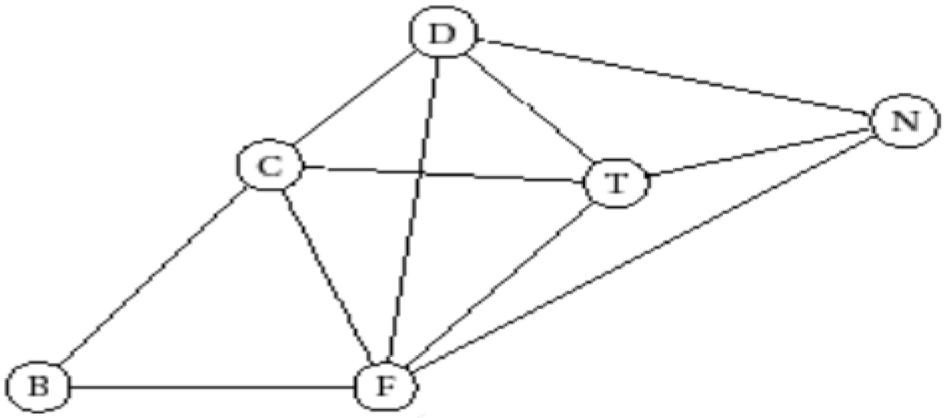
□ Le graphe initial privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes

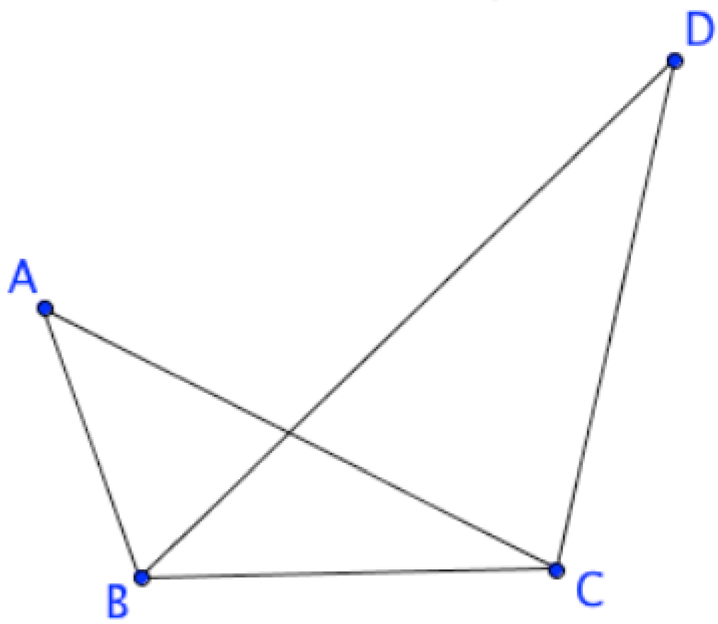
□ C'est un graphe privé de quelques nœuds et des arêtes qui lui sont adjacentes que l'on prive
en suite de quelques arêtes.

2-Détermine pour chacun des graphes ci-dessous, un sous graphe, un graphe partiel, un sous graphe partiel et un sous graphe complet.


E
D
A
C
B


A
D
E
B
C
F


D
N
C
T
B
F


D
A
B
C

Lecon2 Graphes et Arbres 100mn

Objectifs pédagogiques :

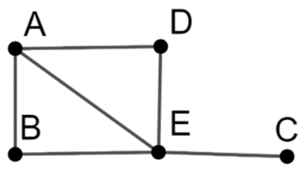
- Définir un arbre, un arbre couvrant ;
- Identifier un arbre couvrant d'un graphe connexe (BFS) ;

1. Définir et identifier un cycle d'un graphe
2. Définir et identifier un graphe connexe
3. Définir et identifier un graphe valué ; un graphe partiel.

Situation Problème

Etant donné un entier naturel n supérieur ou égal à 2, est-il possible d'avoir un graphe non orienté d'ordre n qui soit connexe ayant $n - 1$ arêtes ?

Activité d'apprentissage

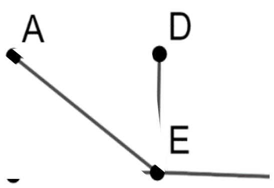


On considère le graphe G suivant :

1) Quel est l'ordre de ce graphe ? Deux sommets quelconque de ce graphe peuvent-ils toujours être reliés par une chaine ? Que peut-on conclure ?
   Ce graphe a-t-il un cycle ? Que peut-on conclure ?

L'ordre du graphe est 5. Le graphe est connexe. A-B-E-A est un cycle de ce graphe, donc ce graphe est cyclique puisqu'il a au moins un cycle.

2) Reproduit le sous graphe de G obtenu en supprimant les sommets B et D.
   Le graphe obtenu est-il connexe ? Est-il cyclique ?

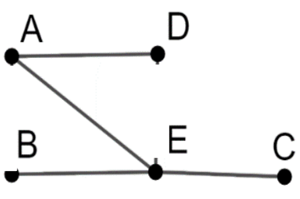


Le graphe [illegible] connexe et sans cycle.

Un tel gra[illegible]pelé un arbre.

3) Quelle(s) arête(s) peut-on enlever au graphe G pour que le graphe T obtenu soit connexe et sans cycle ? Reproduis T dans l'une de ces configurations.

En supprimant l'arête A-E ou A-B ou B-E ou A-D ou E-D, ou un côté du rectangle et la diagonale, le graphe demeure connexe et sans cycle.



Reproduisons le graphe T obtenu en supprimant par exemple

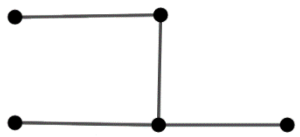
les arêtes A-B et A-E.

Le graphe T ci-contre obtenu est appelé un arbre couvrant G, car l'arbre obtenu contient tous les sommets de G.

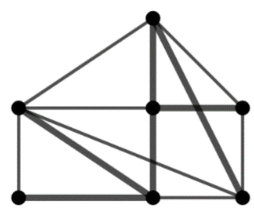
Résumé

Les graphes étudiés dans cette partie sont non orientés.

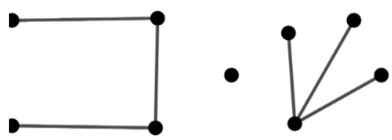
- Un arbre est un graphe connexe et sans cycle (acyclique).
- Une forêt est un graphe sans cycle : c'est une collection d'arbres
- Un arbre couvrant d'un graphe G est un graphe partiel qui est un arbre. (ou sous-graphe couvrant)



un arbre



En gras, un arbre couvrant



une forêt

Propriétés

P1. Un graphe connexe d'ordre n a au moins $n-1$ arêtes.

P2. Un graphe d'ordre n qui a au moins n arêtes possède un cycle.

P3. Un graphe G est un arbre si et seulement si

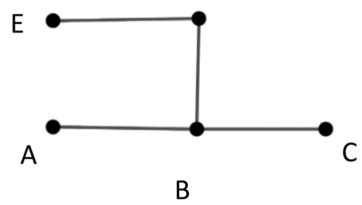
-G est connexe et le nombre d'arêtes est égale au nombre de sommets moins un.

-G est connexe et si on lui retire une arête, il n'est plus connexe (connexe minimal).

-G est sans cycle et si on lui rajoute une arête, on forme un cycle(acyclique maximal).

Exemple.

Se servir de cette figure pour illustrer Cette caractérisation des arbres donnée par la propriété P3 ci-dessus.



P4. Un graphe G est connexe si et seulement s'il admet un arbre couvrant.

Comment déterminer un arbre couvrant un graphe donné ?

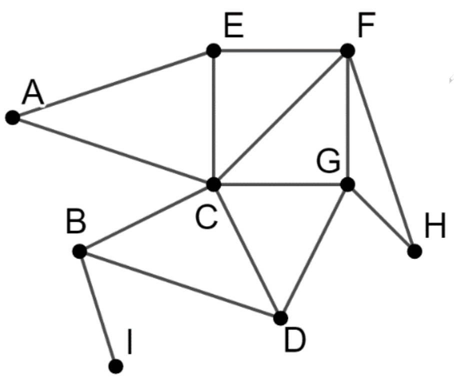
L'algorithme de parcours en largeur BFS (Breadth First Seach) permet de déterminer facilement un arbre couvrant dans un graphe G donné (lorsque G est connexe, voir P4.).

Le principe du BFS ou parcourt en largeur est de se fixer un sommet initial marqué 0 (à partir duquel on va parcourir le graphe) puis de visiter et marquer 1 tous les voisins de ce sommet initial avant de visiter par suite les sommets voisins à ceux marqués 1, qui n'ont pas été visités auparavant puis les marquer 2. Visiter tous les autres sommets directement voisins à 2 n'ayant pas été visités auparavant en procédant de manière analogue jusqu'à visiter tous les sommets du graphe. On supprime les arêtes reliant deux sommets n'ayant pas été relié durant le parcourt, le graphe obtenu est un arbre couvrant le graphe.

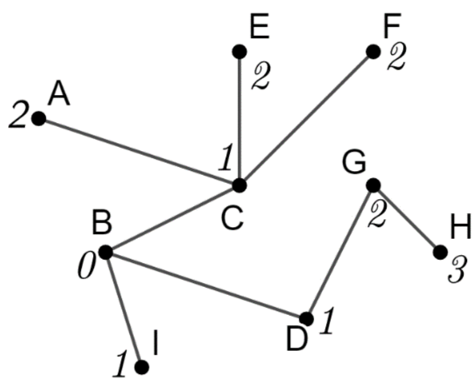
Exemple :Les graphes ci-dessous sont un graphe G et un arbre couvrant G, obtenu en utilisant l'algorithme de parcours en largeur.

Méthode :

- Choisir un sommet de depart (par exemple B) et le marquer de longueur 0 car il est à la distance 0 de lui-même
- Repérer tous les sommets liés directement à ce sommet et les marquer 1. (Ici trois sommets sont reliés directement à B : il s'agit de I, D et C)
- Explorer les nouveaux sommets voisins reliés aux sommets précédemment marqués 1 et les marquer 2. (Il s'agit de A, E, F et G): C et D sont reliés à G, on choisit par exemple D-G.
- On recommence comme ci-dessus jusqu'à toucher tous les sommets. (Dans notre cas, on poursuit avec le sommet H que l'on marque 3. G et F sont reliés à H, ici on a choisi G-H)



Graphe G



Arbre couvrant G

- **Il y a plusieurs arbres couvrant que l'on peut obtenir à partir de l'algorithme de parcourt en largeur**
- **Le BFS permet de determiner un arbre de plus court chemin.**
- **Le BFS permet de Justifier qu'un graphe G est connexe, car il suffit de montrer G contient un arbre couvrant.**

Application :

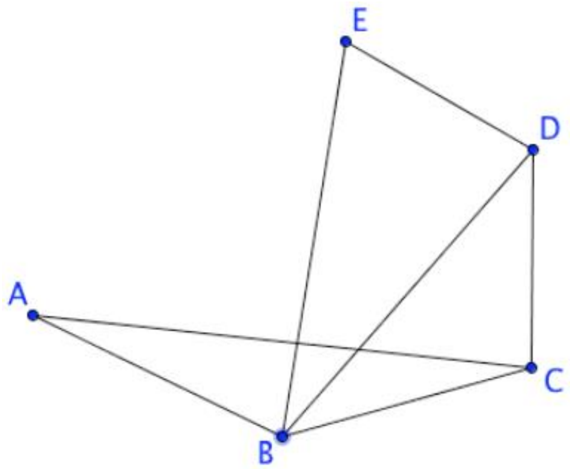
1.QCM : Qu'est ce qu'un arbre couvrant ?

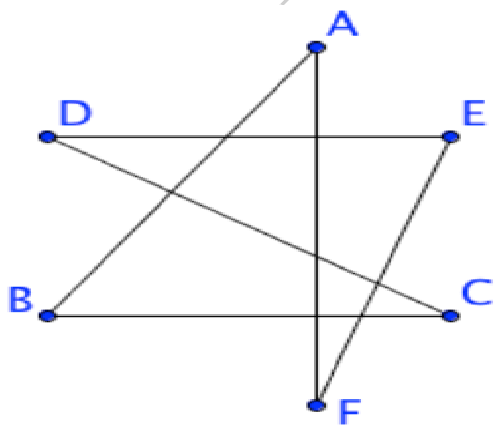
□ Un graphe partiel qui est un arbre

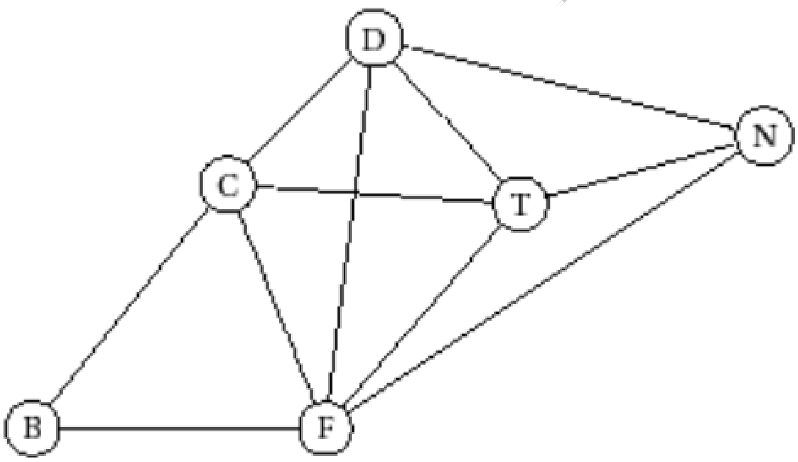
□ Un sous graphe qui est un arbre

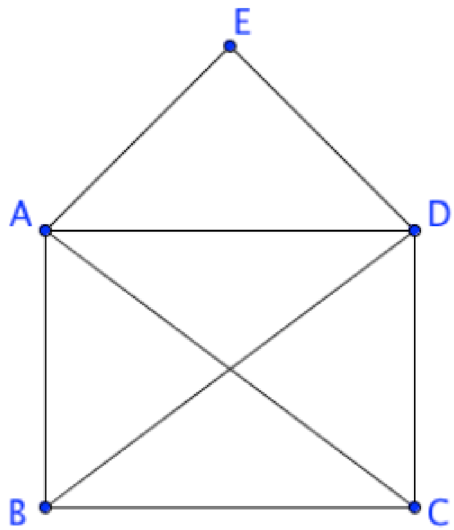
□ Un sous graphe partiel qui est un arbre.

2.Détermine un arbre couvrant dans chacun des graphes ci-dessous en utilisant le parcourt en largeur.









Leçon 3 Graphes pondérés- Algorithme de Kruskal-Algorithme de Prim-Algorithme de Dijkstra.

200mn

Objectifs pédagogiques

- Identifier / Déterminer un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe pondéré (Prim/ Kruskal)
- Déterminer un chemin de poids minimum (plus court chemin) entre deux sommets d'un graphe pondéré (Dijkstra)

Situation Problème

Le Maire de la commune de Yaoundé 7 envisage réhabiliter certaines des voies de sa ville pour fluidifier la circulation. Pour cela cette mairie devra connecter entre elle certaines infrastructures telles que les écoles (E), les hôpitaux (H), les commissariats (C), les bureaux administratifs (B), la gendarmerie (G), les instituts financiers (I), les services des douanes (D), les pharmacies (P) et les Marchés (M). Dans le tableau ci-contre sont représentées ces infrastructures ainsi que la distance en km qui sépare deux d'entre elles. Donner un plan de réhabilitation à moindre coût qui pourra aider le maire.

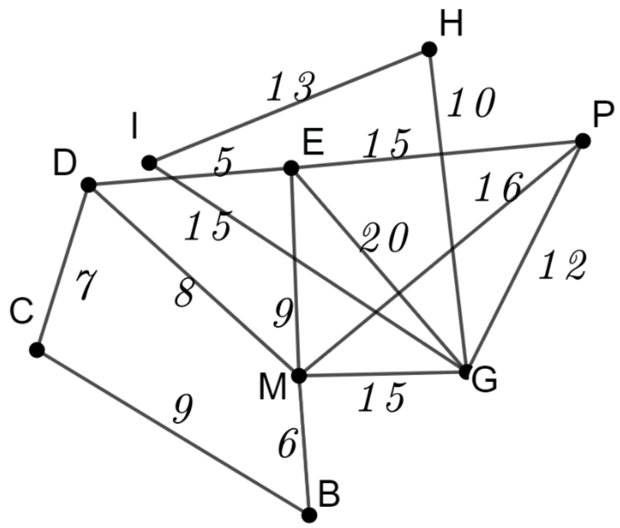
	E	H	C	B	G	I	D	P	M
E					20		5	15	9
H					10	13			
C				9			7		
B			9						6
G	20	10				15		12	15
I		13			15				5
D	5		7						8
P	15				12				16
M	9			6	15	5	8	16	

Activité d'apprentissage

1- En te servant du tableau ci-dessus, construire un graphe pondéré donc les sommets sont constitués des lieux dits de la mairie de Yaoundé 7 et une arête étant la voie permettant d'aller d'un lieu à l'autre.

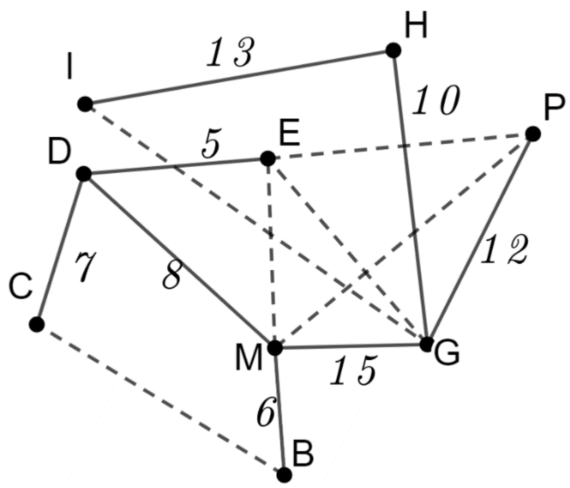
Solution

1- Graphe pondéré



2- Démarre une exploration du graphe ci-dessus en coloriant une arête arbitraire de poids minimum, et construis un graphe sans cycle en coloriant à chaque étape (les)l'arête(s) de poids minimum jusqu'à ce qu'on ait exploré tous les sommets du graphe.
Comment appelle-ton le graphe pondéré obtenu ?

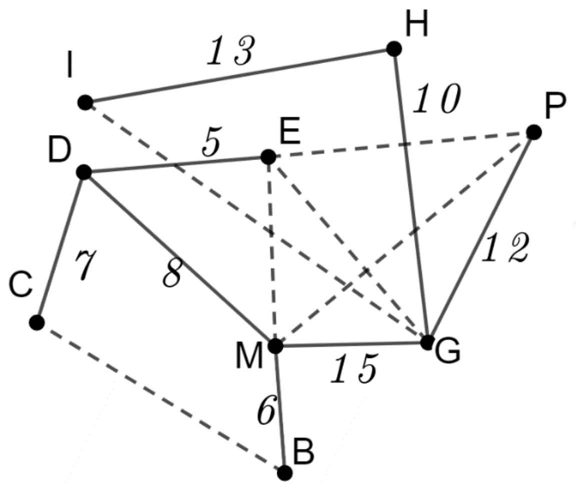
Solution



Arbre couvrant de poids minimum obtenu par l'algorithme de Kruskal.

3- Maintenant, démarre une exploration du graphe à partir d'un sommet arbitraire, et construis un graphe connexe à partir de ce sommet en rajoutant à chaque étape l'arête de poids minimum connectant un sommet du graphe en cours de construction à un sommet non visité, jusqu'à ce qu'on ait exploré tous les sommets du graphe.

Solution



Arbre couvrant de poids minimum obtenu par l'algorithme de Prim.

Résumé

📖 Considérons un graphe sur lequel on a mis un poids sur chaque arête.

Le problème de l'arbre couvrant de poids minimum consiste à trouver un arbre couvrant dont la somme des poids des arêtes est minimum. Cependant, trouver un arbre couvrant de poids minimum en examinant tous les arbres couvrants est en pratique presque irréalisable, car cela prend énormément de temps.

Ne pas confondre : Arbre couvrant de poids minimum qui minimise la somme des poids des arêtes et arbre de plus cours chemin qui minimise la distance de la racine à un sommet donné.

📖 Pour construire un arbre couvrant de poids minimum, on utilise deux algorithme à savoir : l'algorithme de Kruskal et l'algorithme de Prim.

📖 Pour construire l'arbre de plus cours chemin qui minimise la distance de la racine à un sommet donné, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

a-Construction d'un arbre couvrant de poids minimum

Algorithme de Kruskal

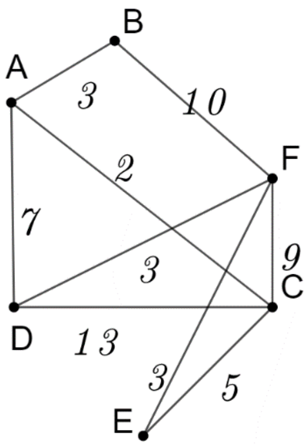
L'algorithme de Kruskal est un algorithme glouton qui repose sur le fait qu'un arbre couvrant d'un graphe d'ordre n a n-1 arêtes et est acyclique. Le choix des arêtes se fera donc sur deux critères : la conservation de l'acyclicité et un coût minimal.

Règle de construction de l'algorithme de Kruskal

- Trier les arêtes par poids croissants ;
- La construction est basée sur l'ordre des arêtes : de la plus légère vers la plus lourde ;
- A chaque étape, on va ajouter dans l'ordre des tries l'arête la plus légère (en terme de poids) en évitant de former un cycle.

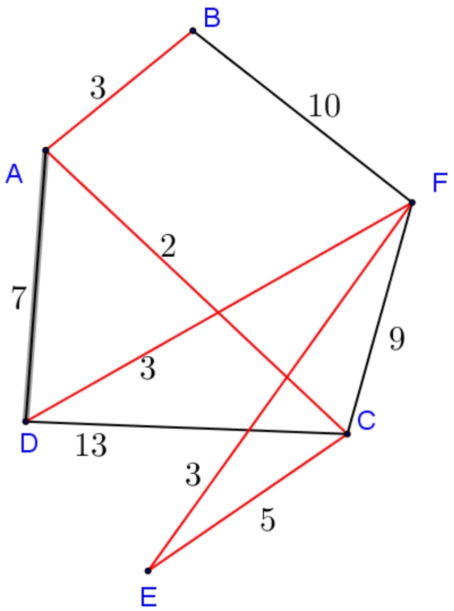
Exemple

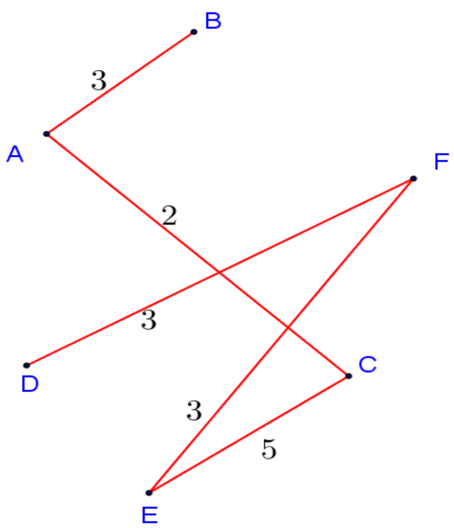
Construire à l'aide de l'algorithme de Kruskal, un arbre couvrant de poids minimal du graphe ci-après représenté.



Tri des arêtes par poids croissants

AC 2 ✓
AB 3 ✓
DF 3 ✓
EF 3 ✓
EC 5 ✓
AD 7 ×
CF 9 ×
BF 10 ×
DC 13 ×





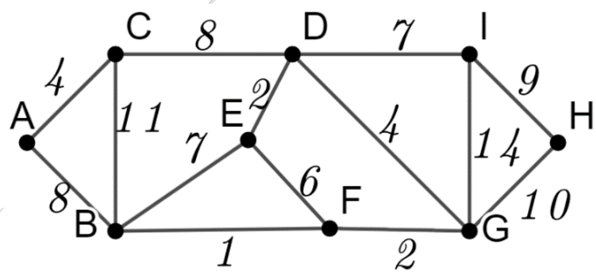
Arbre couvrant de poids minimum 16.

Algorithme de Prim

L'algorithme de Kruskal veille à maintenir la propriété d'acyclicité d'un arbre alors que l'algorithme de Prim se base sur la connexité d'un arbre. L'algorithme de Prim fait pousser un arbre couvrant minimal en ajoutant au sous-arbre T déjà construit une nouvelle branche parmi les arêtes de poids minimal joignant un sommet de T à un sommet n'appartenant pas à ce dernier. L'algorithme s'arrête lorsque tous les sommets du graphe appartiennent à T.

Exemple

Utiliser l'algorithme de PRIM pour déterminer un arbre couvrant minimum et un arbre couvrant maximum du graphe ci-contre.

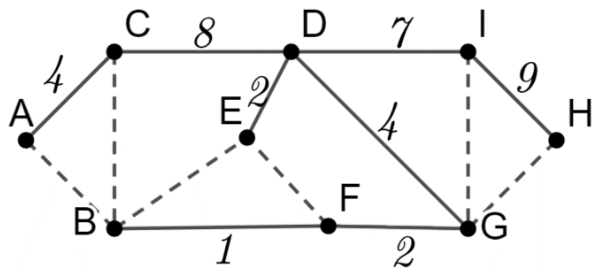


Solution

1- Arbre couvrant de poids minimum

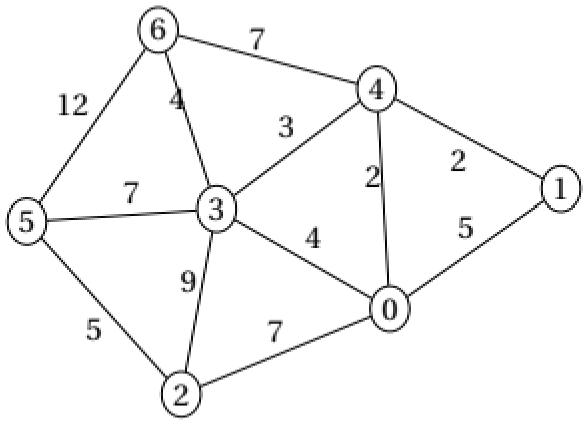
- Choisir un sommet du graphe et l'encercler : par exemple A ; il est lié à B et C, l'arête A-C a le plus petit poids (**poids 4**) ; on encercle alors le sommet C
- On repère toutes les arêtes partant de A et C et on choisit celle ayant le plut petit poids. Ici il y a deux possibilités : A-B et C-D (**poids 8**), on choisit un des deux sommets. Par exemple D et on encercle.
- On repère toutes les arêtes partant de A, C et D et on choisit celle de poids minimal : ici D-E (**poids 2**) et on encercle le sommet E.
- On repère toutes les arêtes partant des sommets A, C, D et E et on choisit celle de poids minimal : ici D-G (**poids 4**) et on encercle le sommet G
- On repère toutes les arêtes partant des sommets A, C, D, E et G et on choisit celle de poids minimal : ici G-F (**poids 2**) et on encercle le sommet F. (**N.B les sommets E et F étant déjà choisis sans passer par l'arête E-F, cette arête ne peut plus être choisie ; il en sera ainsi chaque fois**)
- On repère toutes les arêtes partant des sommets A, C, D, E, G et F et on choisit celle de poids minimal : ici F-B (**poids 1**) et on encercle le sommet B
- On repère toutes les arêtes partant des sommets A, C, D, E, G, F et B et on choisit celle de poids minimal : ici D-I (**poids 7**) et on encercle le sommet I

- On repère toutes les arêtes partant des sommets A, C, D, E, G, F, B et I et on choisit celle de poids minimal : ici I-H (**poids 10**) et on encercle le sommet H
  On obtient l'arbre couvrant minimum (**poids 37**) suivant :



Dans un graphe on peut avoir plus d'un arbre couvrant de poids minimum. D'ailleurs c'est le cas du graphe ci-dessus.

Application : Détermine l'arbre couvrant de poids minimum en te servant des algorithmes de Prim et Kruskal.



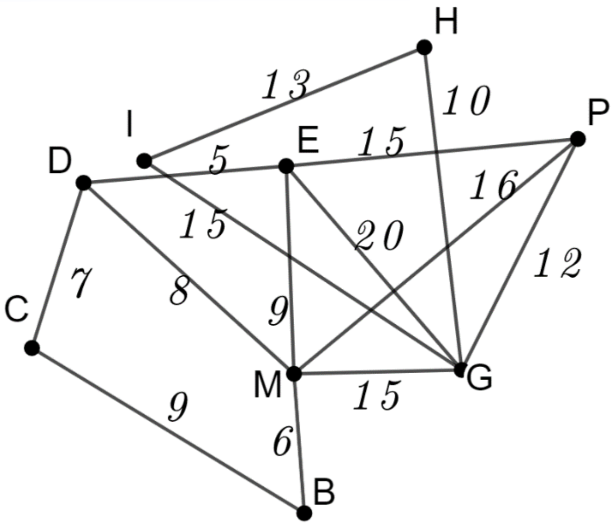
b-Construction d'un chemin de poids minimum

Algorithme de Dijkstra

Un sommet x étant fixé, cet algorithme est un algorithme glouton qui construit progressivement un ensemble de sommets pour lesquels on connaît un plus court chemin depuis x. A chaque étape, on choisit un sommet dont la distance à x est minimale parmi ceux qui n'ont pas encore été choisis.

Exemple

En te servant du graphe ci-contre, déterminer la plus courte chaîne de poids minimal entre les sommets : C et H puis C et P par l'algorithme de Dijkstra.



Pour ce faire complétons le tableau ci-dessous.

- On commence par 0 qui est la longueur de la plus courte chaîne qui relie C à C, ensuite on met l'infini dans toutes les autres cases de la ligne de C et x en bas de 0
- Sur la première ligne, C est fixé car il a le poids minimal.
- Dans la deuxième ligne, C est lié à D et B et on l'indique dans chaque cas par le poids et le poids précédemment fixé. Quand C n'est pas lié à un point directement, on complète sa case avec l'infini.
- Dans la deuxième ligne, D est fixé.
- Dans les lignes suivantes, on répète la démarche précédente.

N.B dans une colonne les poids doivent allés décroissants, sinon on reporte le poids précédent.

Pour avoir une chaîne de poids minimal de C à H, on part de la droite vers la gauche du point H, suivi du dernier point de la colonne H qui est G, suivi du dernier point de la colonne de G, ainsi de suite jusqu'au point C.

C	B	M	D	E	G	I	H	P	Sommet fixé
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	C
X	9(C)	∞	7(C)	∞	∞	∞	∞	∞	D
X	9(C)	15(D)	x	12(D)	∞	∞	∞	∞	B
X	X	15(D)	x	12(D)	∞	∞	∞	∞	E
X	X	15(D)	x	x	32(E)	∞	∞	27(E)	M
X	X	x	x	x	30(M)	∞	∞	27(E)	P
X	X	x	x	x	30(M)	∞	∞	x	G
X	X	x	x	x	X	45(G)	40(G)	x	H
X	X	x	x	x	X	45(G)	x	x	I

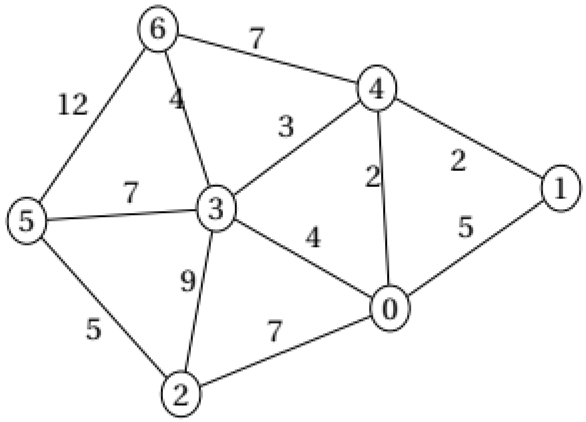
Solution

La plus courte chaîne de poids minimal entre les sommets C et H puis C et P est C-D-M-G-H de poids 40

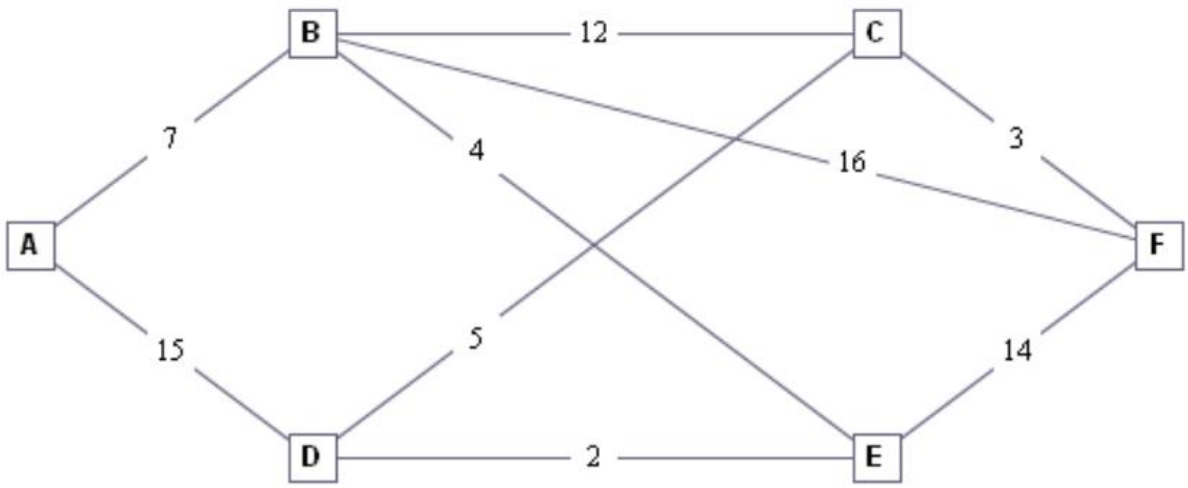
La plus courte chaîne de poids minimal entre les sommets C et P est : C-D-E-P de poids 27

Application :

1-Détermine le plus court chemin allant du point 5 au point 1 à l'aide de l'algorithme de **Dijkstra**.



2-La carte cidessous est la carte routière d'une région du Cameroun avec les consommations en carburant entre deux villes.



Après son séminaire dans la ville A, M. SIYAPDJE doit se rendre dans la ville F pour un autre séminaire. Cependant, il ne dispose plus que de 23litres de Gasoil dans son réservoir. Pourra-t-il se rendre à ce séminaire ? Si oui donne lui un itinéraire.

MODULE 27 : CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

CHAPITRE 15:CONIQUES

LEÇON1:ÉTUDEDESPARABOLES DURÉE : 100 min

Motivation : L'application des coniques par les mathématiciens ne se réduit pas à la géométrie et à l'algèbre. Elle va au-delà de ces disciplines pour toucher le domaine de la physique, de l'optique et de la détermination du temps et des heures de prières. En effet, les miroirs de formes paraboliques peuvent concentrer (focaliser) la lumière en un point.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de : ● Donner les éléments caractéristiques d'une parabole, ● Tracer une parabole d'équation donnée, ● Déterminer l'équation de la tangente en un point de la parabole d'équation donnée.

Première étape : Introduction

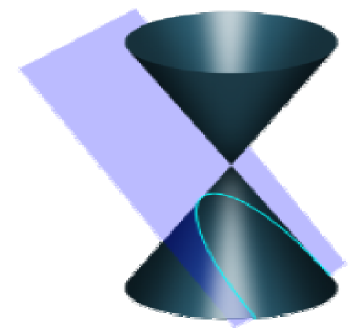
- **Pré-requis** :

  Quand dit-on qu'un point M' est le projeté orthogonal du point M sur la droite (D) ? (Illustration d'un cas de figure)

  Quand dit-on que le point M' est le symétrique du point M par rapport à la droite (D) ? (Illustration d'un cas de figure)

- **Situation problème**

  En classe de troisième nous avons vu que l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan parallèlement au plan de base est un cercle. Qu'en est-il, si le plan n'est pas parallèle au plan de base dans chacun des cas ci-dessous ?



Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

1. Trace une droite (D) ; Place les points F, H et K tels que F est un point n'appartenant pas à (D), H et K les projetés orthogonaux sur (D) des points M et F respectivement où M est un point du plan.

2. On désigne par (Γ_1) l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = 1$ et par (Δ) la droite (FK).

   a. Démontrer que le milieu S de $[FK]$ est un élément de Γ_1.

   b. Démontrer que tout point de Γ_1 appartient au demi-plan contenant F, délimité par la droite (T) passant par S et parallèle à la droite (D).

   c. Soit M un point de Γ_1, $M' = S_{(\Delta)}(M)$ et H' le projeté orthogonal de M' sur (D). Montrer que M' appartient à Γ_1.

   d. En déduire une construction point par point de Γ_1.

   e. Que représente la droite (Δ) pour Γ_1.

3. On considère le repère orthogonal $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{\|SF\|}$. On pose $KF = p$.

   a. Démontrer que la courbe représentative de Γ_1 dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $y^2 = 2px$.

   b. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de Γ_1, supposons que $y_0 \leq 0$ détermine une équation cartésienne de la tangente à (Γ_1) au point M_0.

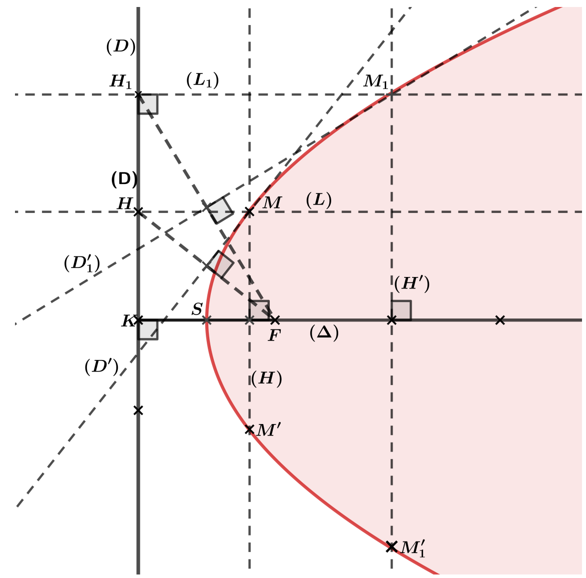
Solution

1 Trace une droite (D) ; Place les points F, H et K tels que F est un point n'appartenant pas à (D), H et K les projetés orthogonaux sur (D) des points M et F respectivement où M est un point du plan.

2 On désigne par (Γ_1) l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = 1$ et par (Δ) la droite (FK).

a Démontrer que le milieu S de $[FK]$ est un élément de Γ_1.

S milieu du segment $[FK]$, ainsi son projeté orthogonal sur la droite (D) est le point K et comme $\dfrac{SF}{SK} = 1$, alors S est un point de Γ_1.



b Démontrer que tout point de Γ_1 appartient au demi-plan contenant F, délimité par la droite (T) passant par S et parallèle à la droite (D).

Soit M un point de Γ_1 distinct de S, montrons que $MF < MK$.

Puisque le triangle MHK est un triangle rectangle en H, on a : pour $\theta = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MK})[2\pi]$ $\cos(\theta) = \dfrac{MH}{MK}$, on a : $\dfrac{MF}{MH} = 1 \Rightarrow \dfrac{MF}{MK} = \cos(\theta) \leq 1$. Puisque M est distinct de S alors $\dfrac{MF}{MK} < 1$.

c Soit M un point de Γ_1, soit $M' = S_{(\Delta)}(M)$ et H' son projeté orthogonal sur (D). Montrons que $\dfrac{M'F}{M'H'} = 1$.

Par construction on constate que $MHH'M'$ est un rectangle, d'où $MH = M'H'$; de plus par définition de $S_(\Delta)$, on a :(Δ) médiatrice du $[MM']$, d'où $MF = M'F$.Comme M est un point de Γ_1, alors $\dfrac{MF}{MH} = 1$; de ce qui précède on peut donc conclure que $\dfrac{M'F}{M'H'} = 1$.

d Place le point H_1 sur la droite (D) tel que $KH_1 > KH$, puis trace la médiatrice du segment $[FH_1]$ qu'on notera (D'_1), par suite trace la perpendiculaire à (D) qu'on notera (L_1) passant par H_1, de plus marque par M_1 le point de rencontre des droites (L_1) et (D'_1), construit le point M'_1 symétrique de M_1 par rapport à la droite (Δ), enfin construit=re la courbe passant par les points M, M', M_1, M'_1 et S.

e (Δ) représente un axe de symétrie pour Γ_1.

3 On considère le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{\|\overrightarrow{SF}\|}$; on pose $KF = p$.

a Démontrons que la courbe représentative de Γ_1 dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $y^2 = 2px$.

En considérant le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, les points H et F ont pour coordonnées respectifs : $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ et $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Soit $M \in \Gamma_1$ de coordonnée (x, y) ; $M \in \Gamma_1$ si et seulement si $MH^2 = MF^2$ si et seulement si $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$, après avoir développé et réduire cette égalité nous avons donc le résultat suivant : $y^2 = 2px$.

b Soit $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma_1$; $M_0 \in \Gamma_1$ si et seulement si $y_0^2 = 2px_0$, si et seulement si $y_0 = -\sqrt{2px_0}$.

Vu qu'on s'intéresse à la tangente de Γ_1 au point M_0, alors pour tout point $M(x, y)$ de Γ_1 voisin de M_0 aura pour $y = -\sqrt{2px}$; posons $f(x) = -\sqrt{2px}$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$, d'où $f'(x) = -\dfrac{p}{\sqrt{2px}}$, ainsi la tangente (T) à Γ_1 au point M_0 est donnée par : $(T) : y = \dfrac{p}{y_0}(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow yy_0 = p(x - x_0) + y_0^2$.

Résumé

Définition

Soit (D) une droite fixée et F un point n'appartenant pas à (D). On appelle *Parabole* de *foyer F* et de *Directrice (D)* l'ensemble des points M du plan tels que $MF = MH$, où H représente le projeté orthogonal de M sur (D).

Propriétés

Soit $(\mathcal{P})$ une parabole de foyer F et de directrice (D) et (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F.

- (Δ) est un axe de symétrie ou axe focal de $(\mathcal{P})$.
- $(\mathcal{P})$ rencontre (Δ) en un point S appelé *Sommet de la parabole*.
- Posons $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{\|SF\|}$, l'équation réduite de $(\mathcal{P})$ dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $y^2 = 2px$, où $p = KF$.
- Les Courbes d'équations $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2py$ ont pour éléments caractéristiques :

Equations	$y^2 = 2px$	$x^2 = 2py$
Origine	Origine du repère	Origine du repère
Axe focal	(OI)	(OJ)
Paramètre	P	P
Foyer	$F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$	$F\left(0, \frac{P}{2}\right)$
Directrice	$(D) : x = -\frac{P}{2}$	$(D) : y = -\frac{P}{2}$

Exemples

1 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la nature et éléments caractéristiques de la courbe (Γ) d'équation, puis donner leurs représentations graphiques :

a $y^2 = 8x$, **b** $x^2 = 3y$, **c** $y^2 + 2y - x - 3 = 0$.

2 Déterminer le point A de Γ où la tangente est parallèle à la droite d'équation : $2x + 3y - 3 = 0$. Déterminer une équation de cette tangente.

Quatrième étape : Exercice d'application **Exercice 01**

1 Déterminer suivant les valeurs du nombre réel m, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que : $y^2 + 4y - (m-2)x + m - 1 = 0$

2 Soit $(\mathcal{P})$ la parabole d'équation : $y^2 = 2ax$ $(a \neq 0)$.

- a m étant un nombre réel non nul, démontrer qu'il existe une unique tangente à $(\mathcal{P})$ de coefficient directeur m.
- b Démontrer que cette tangente a pour équation : $y = mx + \dfrac{a}{2m}$.

Soit $P(\alpha, \beta)$ un point du plan. Déterminer, suivant la position de P, le nombre de tangentes à $(\mathcal{P})$ passant par ce point.

4
- a Déterminer l'ensemble des points M du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à $(\mathcal{P})$.
- b Démontrer que dans ce cas, si on désigne par M_1 et M_2 les points de contact de ces tangentes avec $(\mathcal{P})$, la droite (M_1M_2) passe par un point fixe.

Cinquième étape : Conclusion (10 minutes)

Ici nous venons d'étudier l'ensemble des points du plan affine euclidien dont le rapport des distances à un point et à une droite est un (1) ; nous avons vu que cet ensemble de point est une Parabole, et nous avons caractérisé cet ensemble. La question que nous allons nous poser actuellement est la suivante : "Quel est l'ensemble des points du plan euclidien dont le rapport des distances à un point et à une droite est une constante (e) avec $e \neq 1$?". La réponse à cette question fera l'objet de nos prochaine leçons.

Devoirs : Exercices

LEÇON 2 : ÉTUDE DES ELLIPSES DURÉE : 100 min

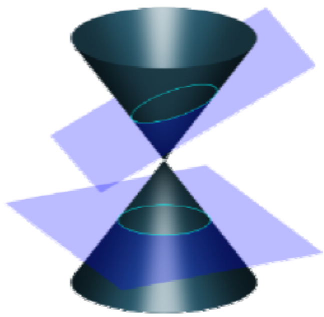
Motivation : L'application des coniques par les mathématiciens ne se réduit pas à la géométrie et à l'algèbre. Elle va au-delà de ces disciplines, ainsi **KEPLER** utilisa l'ellipse pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil, et affirma que les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Donner les éléments caractéristiques d'une Ellipse,
- Déterminer l'équation de la tangente en un point de l'Ellipse d'équation donnée,
- Tracer une Ellipse d'équation donnée,
- Déterminer l'image d'une conique par une similitude direct.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :
  Quand dit-on qu'un point M' est le projeté orthogonal du point M sur la droite (D) ? (Illustration d'un cas de figure)
  Quand dit-on que le point M' est le symétrique du point M par rapport à la droite (D) ? (Illustration d'un cas de figure)
- **Situation problème**
  En classe de troisième nous avons vu que l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan parallèlement au plan de base est un cercle. Qu'en est-il, si le plan n'est pas parallèle au plan de base dans chacun des cas ci-dessous ?



Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

1 Trace une droite (D) ; Place les points F et K tels que F est un point n'appartenant pas à (D), K le projeté orthogonal sur (D) du point F.

2 On désigne par $(\Gamma_{2/3})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{2}{3}$ et par (Δ) la droite (FK), où H représente le projeté orthogonal de M sur la droite (D).

a Construire le cercle (C), ensemble des points M tels que : $\dfrac{MF}{MK} = \dfrac{2}{3}$.

b Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à $\Gamma_{2/3}$.

c Soit M un point de $\Gamma_{2/3}$ distinct de A et A'.
Démontrer que $\dfrac{MF}{MK} < \dfrac{2}{3}$; on remarque que M est intérieur à (C).

d Soit P un point de $[AA']$, distinct de A et A', et (D_p) la perpendiculaire à (Δ) en P. Construire les points M de (D_p) appartenant à $\Gamma_{2/3}$.(On pourra constater que $MF = \frac{2}{3}KP$).

e En déduire une construction point par point de $\Gamma_{2/3}$.

Activité

1 On considère le repère orthogonal $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SA'}}{\|\overrightarrow{SA'}\|}$. On pose $SA = a$ et $SF = c$, tel que $2a = 3c$.

a Démontrer que $2a = 3c$ et en déduire que $SK = \dfrac{a^2}{c}$.

b Démontrer que la courbe représentative de $\Gamma_{2/3}$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = a^2 - c^2$.

c Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\Gamma_{2/3}$, supposons que $y_0 \leq 0$ détermine une équation cartésienne de la tangente à $(\Gamma_{2/3})$ au point M_0.

d Que représente les droites $(S, \vec{i})$ et $(S, \vec{j})$ pour la courbe $\Gamma_{2/3}$.

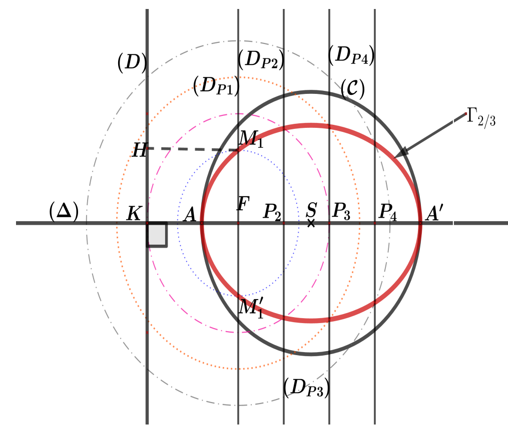
Solution

1 Trace une droite (D) ; Place les points F et K tels que F soit un point n'appartenant pas à (D) et K les projetés orthogonaux sur (D) du point F.

2 On désigne par $(\Gamma_{2/3})$ l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{2}{3}$ et par (Δ) la droite (FK).

a Construire le cercle (C), ensemble des points M tels que : $\dfrac{MF}{MK} = \dfrac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{MF}{MK} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 9MF^2 = 4MK^2,\\ &\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MF} - 2\overrightarrow{MK}\right).\left(3\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{MK}\right) = 0;\quad \text{posons } I = bar\{(F,3);(K,2)\} \text{ et } J = bar\{(F,3);(K,-2)\},\\ &\Rightarrow \overrightarrow{MJ}.5\overrightarrow{MI} = 0,\\ &\Rightarrow M \text{ appartient au cercle } (\mathcal{C}) \text{ de diamètre } [IJ].\end{aligned}$$



b Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à $\Gamma_{2/3}$.
Pour cela il suffit de prouver que les points I et J appartiennent à $\Gamma_{2/3}$, vu qu'ils appartiennent déjà à (Δ).
Le projeté orthogonal des points I et J sur la droite (D) est K, de plus les points I et J appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$, ainsi nous avons les égalités suivantes : $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{JF}{JK} = \dfrac{2}{3}$; donc les points I et J appartiennent à $\Gamma_{2/3}$, par conséquent prendre $A = I$ et $A' = J$.

c Soit M un point de $\Gamma_{2/3}$ distinct de A et A'. Démontrer que $\dfrac{MF}{MK} < \dfrac{2}{3}$; on remarque que M est intérieur à $(\mathcal{C})$.
Puisque le triangle MHK est un triangle rectangle en H, on a : pour $\theta = (\overrightarrow{MH}, \overrightarrow{MK})[2\pi]$ $\cos(\theta) = \dfrac{MH}{MK}$, de plus on a : $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{2}{3}$ ce qui entraine que $\dfrac{MF}{MK} = \dfrac{2}{3}\cos(\theta) \leq \dfrac{2}{3}$. Puisque M est distinct de A et A' alors $\dfrac{MF}{MK} < \dfrac{2}{3}$.

Solution

a Soit P un point de $[AA']$, distinct de A et A', et (D_p) la perpendiculaire à (Δ) en P. Construire les points M de (D_p) appartenant à $\Gamma_{2/3}$.(On pourra constater que $MF = \frac{2}{3}KP$).

Comme H est le projeté orthogonal de $M \in \Gamma_{2/3}$ et $M \in (D_P)$, alors $MH = KP$, d'où $MF = \dfrac{2}{3}KP$; de cette égalité nous pouvons donc conclure que $M = (D_P) \cap (\mathcal{C}_1)$ où $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre F et de rayon $\dfrac{2}{3}KP$.

b En déduire une construction point par point de $\Gamma_{2/3}$.

Place P_2 un point du segment $[AA']$, trace la droite (D_P2) passant par P_2 et perpendiculaire à la droite (Δ), puis trace le cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre F et de rayon $r = \dfrac{2}{3}KP$, enfin marque par M_1 et M_1' les points de rencontre de $(\mathcal{C}_1)$ et (D_P2). Construit quatre autres points de $\Gamma_{2/3}$ en suivant le même algorithme, puis tracer la courbe passant par ces points.

a De la question 2.a nous avons : $A = bar\{(F,1);(K,\frac{2}{3})\}$ et $A' = bar\{(F,1);(K,-\frac{2}{3})\}$, ce qui nous permet d'avoir les égalités suivantes dans le repère $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$: $\overrightarrow{SA} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}}\overrightarrow{SF} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\overrightarrow{SK}$, $\overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}\overrightarrow{SF} - \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\overrightarrow{SK}$, en faisant une somme membre par membre de ces deux égalités nous donc l'égalité suivante : $\left(1+\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{SA} + \left(1-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{SA'} = 2\overrightarrow{SF}$, or $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA'}$ d'où $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SF}$, en passant à la norme nous avons $\dfrac{2}{3}a = c$, c'est-à-dire que $2a = 3c$.

De ceci $\overrightarrow{SA} = \dfrac{1}{1+\frac{2}{3}}\overrightarrow{SF} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}\overrightarrow{SK}$ et de ceci $\overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}\overrightarrow{SF} - \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\overrightarrow{SK}$ nous avons $\overrightarrow{SA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SF}$, ce qui entraine $SA = \dfrac{2}{3}SF$, c'est-à-dire $SF = a \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{a^2}{c}$ (Car $\dfrac{2}{3} = \dfrac{c}{a}$).

b En considérant le repère $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les points H et F ont pour coordonnées respectives : $\left(-\frac{a^2}{c}, y\right)$ et $(-c, 0)$. Soit $M \in \Gamma_{2/3}$ de coordonnée (x,y) ; $M \in \Gamma_{2/3}$ si et seulement si $\dfrac{c^2}{a^2}MH^2 = MF^2$, si et seulement si $\dfrac{c^2}{a^2}\left(x + \frac{a^2}{c}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$, après avoir développé et réduit cette égalité nous avons donc le résultat suivant : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-c^2} = 1$.

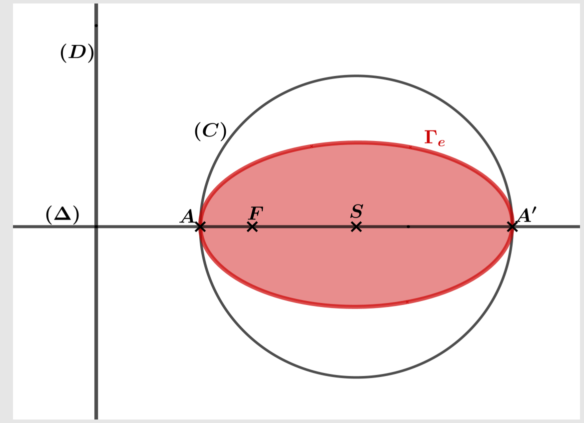
Résumé

Définition

Soit (D) une droite fixée et F un point n'appartenant pas à (D) et un réel positif e tel que $0 < e < 1$. On appelle *Ellipse* de *foyer F* et de *Directrice (D)* l'ensemble des points M du plan tels que $MF = eMH$, où H représente le projeté orthogonal de M sur (D).

Propriétés

Soit (Γ_e) une ellipse de foyer F et de directrice (D) et (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F.



- (Δ) est un axe de symétrie ou axe focal de (Γ_e).
- (Γ_e) rencontre (Δ) en deux points A et A' appelé *Sommet de l'Ellipse*.
- Posons $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SA}}{\|\overrightarrow{SA}\|}$, l'équation réduite de $(\mathcal{P})$ dans le repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, où $a = SA$ et $SF = c$.
- Les Courbes d'équations $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ont pour éléments caractéristiques :

Equations	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, b > a > 0$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$c = \sqrt{b^2 - a^2}$
Excentricité	$e = \dfrac{c}{a}$	$e = \dfrac{c}{b}$
Sommets	$A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$	$B(0, b)$; $B'(0, -b)$
Axe focal	(OI)	(OJ)
Foyers	$F(c, 0)$; $F(-c, 0)$	$F(0, c)$; $F(0, -c)$
Directrices	$(D) : x = \frac{a^2}{c}$, $(D') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c}$; $(D') : y = -\frac{b^2}{c}$
Equation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$	$\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	$\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

Équation Paramétrique d'une ellipse

Équation générale d'une ellipse est donnée par : $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

Résumé

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1;$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-x_0}{a}=\cos(t)\\ \dfrac{y-y_0}{b}=\sin(t)\end{array}\right. ;$$

$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}/\left\{\begin{array}{l}x=a\cos(t)+x_0\\ y=b\sin(t)+y_0\end{array}\right. \quad (1)$$

la relation (1) est donc appelé représentation paramétrique d'une ellipse dans le cas général.

Image d'un cercle par une affinité

Considérons l'ellipse : (ϵ) : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1; a>b>0$.

- $\mathcal{C}(O,a)$ cercle principal.
- $\mathcal{C}(O,b)$ cercle secondaire.

considérons l'affinité orthogonal $\mathcal{A}$ d'axe $(O,\overrightarrow{i})$ et de rapport $k=\dfrac{b}{a}$:$\left\{\begin{array}{l}x'=x\\ y'=\dfrac{b}{a}y.\end{array}\right.$

$\mathcal{A}(\mathcal{C}(O,a)) : x^2+\dfrac{a^2}{b^2}y^2=a^2$, ce qui est équivalente à $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Résultat

L'image d'un cercle principal par l'affinité orthogonale d'axe $(O,\overrightarrow{i})$ et de rapport $\dfrac{b}{a}$ est une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Exemples

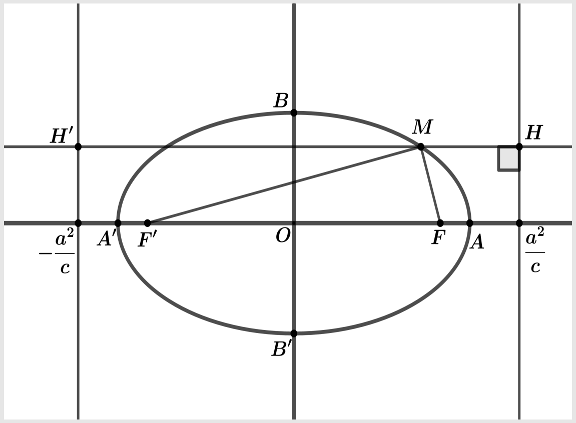
1 Déterminer la nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation, puis donner leurs représentations graphiques :

a $2x^2+3y^2-12x+9y+24=$, **b** $4x^2+y^2=4$, **c** $4x^2+9y^2-36=0$.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On donne le point $F(-1;3)$ et la droite (D) d'équation $y=-2$. Écriver une équation cartésienne de l'ellipse (Γ) de foyer F de directrice (D) et d'excentricité $e=0,5$.

Résumé

1 Définition bifocale des ellipses



Considérons l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>b>0$.

Soit M un point de l'ellipse ; alors $\dfrac{MF}{MH}=e$ et $\dfrac{MF'}{MH'}=e$.

$MF+MF'=eMH+eMH'=e(MH+MH')$; or M,H,H' étant aligné c'est-à-dire $MH+MH'=HH'$.

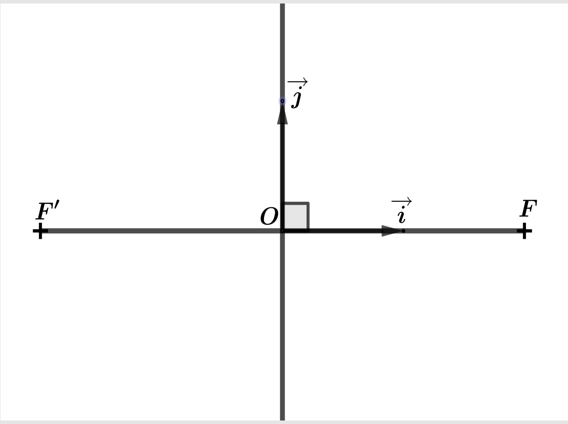
$MF+MF'=eHH'$, or $HH'=2\dfrac{a^2}{c}$

D'où $MF+MF'=2e\dfrac{a^2}{c}$, or $e=\frac{c}{a}$.

Donc $MF+MF'=2\frac{c}{a}\times\frac{a^2}{c}=2a$

Conclure : Si M est un point de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, alors $MF+MF'=2a$.

Réciproquement :Considérons deux points F et F' tel que $FF'=2c$. On cherche l'ensemble des points M tel que $MF+MF'=2a$. $\quad(a>c)$.



Considérons un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, avec O le millieu du segment $[FF']$ et $\vec{i}=\dfrac{\overrightarrow{OF}}{\|\overrightarrow{OF}\|}$, dans ce repère $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$.

Soit $M(x,y)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$;

$$\begin{aligned}MF^2-MF'^2&=(x-c)^2+y^2-(x+c)^2-y^2,\\&=-4xc.\end{aligned}$$

$MF^2-MF'^2=-4xc \Leftrightarrow (MF-MF')(MF+MF')=-4xc$, or comme $MF+MF'=2a$, alors $MF-MF'=-\dfrac{2xc}{a}$.

$$\begin{cases}MF+MF'=2a,\\ MF-MF'=-\dfrac{2xc}{a}.\end{cases}\Leftrightarrow MF=a-\frac{xc}{a}$$

$$\begin{aligned}MF^2=\left(a-\frac{xc}{a}\right)^2&\Leftrightarrow (x-c)^2+y^2=\left(a-\frac{xc}{a}\right)^2,\\&\Leftrightarrow a^2-c^2=x^2\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)+y^2,\\&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.\end{aligned}$$

Résultat : L'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$ est une ellipse de foyers F et F' de grand axe de longueur $2a$.

Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

1 **a** Trace l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation : $x^2 + 4y^2 = 25$.

b Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{E})$ au points de $(\mathcal{E})$ d'abscisse 4.

c Déterminer une équation des tangentes à $(\mathcal{E})$ ayant pour coefficient directeur $\frac{3}{8}$.

2 Dans chacun des cas suivants, tracer et donner une représentation paramétrique de l'ellipse.

a $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 10$,

b $4x^2 + y^2 - 8x + 6y - 3 = 0$,

c $3x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$.

3 Soit F et F' deux points du plan tels que : $FF' = 6$. Déterminer, dans un repère convenablement choisi, l'équation réduite de l'ellipse définie par : $MF + MF' = 8$.

Exercice 02

1 Soit $A(2, -1)$ et $A'(-2, 3)$. Déterminer une équation de l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = 1$.

2 Déterminer une équation de l'image de $(\mathcal{C})$:

a Par une affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \overrightarrow{i})$ et de rapport $\dfrac{2}{3}$,

b Par l'affinité orthogonale d'axe la droite de repère $(O, \overrightarrow{j})$ et de rapport 2.

Cinquième étape : **Conclusion**

Ici nous venons d'étudier l'ensemble des points du plan affine euclidien dont le rapport des distances à un point et à une droite est e (avec $e \in]0, 1[$) ; nous avons vu que cet ensemble de point est une Ellipse, et nous avons caractérisé cet ensemble. La question que nous allons nous poser actuellement est la suivante : "Quel est l'ensemble des points du plan euclidien dont le rapport des distances à un point et à une droite est une constante (e) avec $e > 1$?". La réponse à cette question fera l'objet de nos prochaine leçons.

Devoirs : Exercices dans le livre au programme.

LEÇON 3 : ÉTUDE DES HYPERBOLES DURÉE : 100 min

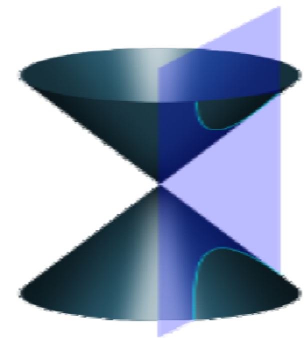
Motivation : L'application des coniques par les mathématiciens ne se réduit pas à la géométrie et à l'algèbre. Elle va au-delà de ces disciplines, ainsi **KEPLER** utilisa l'ellipse pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil, et affirma que les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Donner les éléments caractéristiques d'une Hyperbole,
- Déterminer l'équation de la tangente en un point d'une Hyperbole d'équation donnée.
- Tracer une Hyperbole d'équation donnée,

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :
  Quand dit-on qu'un point M' est le projeté orthogonal du point M sur la droite (D) ? (Illustration d'un cas de figure)
  Quand dit-on que le point M' est le symétrique du point M par rapport à la droite (D) ? (Illustration d'un cas de figure)
- **Situation problème**
  En classe de troisième nous avons vu que l'intersection d'un cône de révolution et d'un plan parallèlement au plan de base est un cercle. Qu'en est-il, si le plan n'est pas parallèle au plan de base dans chacun des cas ci-dessous ?



Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

1. Trace une droite (D) ; Place les points F et K tels que F est un point n'appartenant pas à (D), K le projeté orthogonal sur (D) du point F.
2. On désigne par (Γ_3) l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = 3$ et par (Δ) la droite (FK), où H représente le projeté orthogonal de M sur la droite (D).
   - a. Construire le cercle (C), ensemble des points M tels que : $\dfrac{MF}{MK} = 3$.
   - b. Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à Γ_3.
   - c. Soit P un point de $[AA']$, distinct de A et A', et (D_p) la perpendiculaire à (Δ) en P. Construire les points M de (D_p) appartenant à Γ_3.(On pourra constater que $MF = 3KP$).
   - d. En déduire une construction point par point de Γ_3.

Activité

1 On considère le repère orthogonal $(S, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SA'}}{\|\overrightarrow{SA'}\|}$. On pose $SA = a$ et $SF = c$, tel que $3a = c$.

a Démontrer que $3a = c$ et en déduire que $SK = \dfrac{a^2}{c}$.

b Démontrer que la courbe représentative de Γ_3 dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = a^2 - c^2$.

c Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de Γ_3, supposons que $y_0 \leq 0$ détermine une équation cartésienne de la tangente à (Γ_3) au point M_0.

d Que représente les droites $(S, \vec{i})$ et $(S, \vec{j})$ pour la courbe Γ_3.

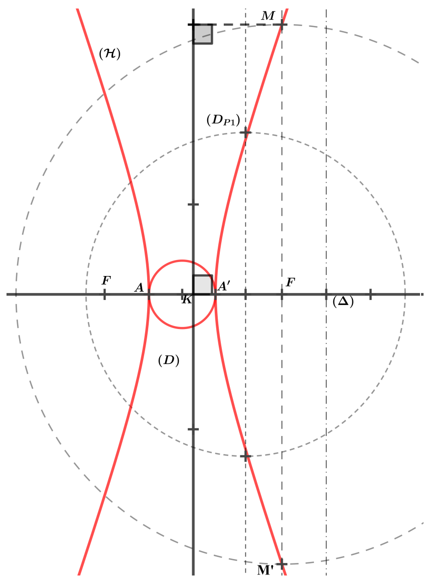
Solution

1 Trace une droite (D) ; Place les points F et K tels que F soit un point n'appartenant pas à (D) et K les projetés orthogonaux sur (D) du point F.

2 On désigne par (Γ_3) l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{MF}{MH} = 3$ et par (Δ) la droite (FK).

a Construire le cercle (C), ensemble des points M tels que : $\dfrac{MF}{MK} = 3$.

$$\begin{aligned}
\frac{MF}{MK} = 3 &\Leftrightarrow 9MK^2 = MF^2, \\
&\Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MF}\right).\left(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MF}\right) = 0; \quad \text{posons } I = bar\{(K,3);(F,1)\} \text{ et } J = bar\{(K,3);(F,-1)\}, \\
&\Rightarrow 2\overrightarrow{MJ}.4\overrightarrow{MI} = 0, \\
&\Rightarrow M \text{ appartient au cercle } (\mathcal{C}) \text{ de diamètre } [IJ].
\end{aligned}$$



b Justifier qu'il existe deux points A et A' de (Δ), appartenant à Γ_3.
Pour cela il suffit de prouver que les points I et J appartiennent à Γ_3, vu qu'ils appartiennent déjà à (Δ).
Le projeté orthogonal des points I et J sur la droite (D) est K, de plus les points I et J appartiennent au cercle $(\mathcal{C})$, ainsi nous avons les égalités suivantes : $\dfrac{IF}{IK} = \dfrac{JF}{JK} = 3$; donc les points I et J appartiennent à Γ_3, par conséquent prendre $A = I$ et $A' = J$.

Solution

a Soit P un point de (Δ) n'appartenant pas à $[AA']$, et (D_P) la perpendiculaire à (Δ) en P. Construire les points M de (D_P) appartenant à Γ_3.(On pourra constater que $MF = 3KP$).

Comme H est le projeté orthogonal de $M \in \Gamma_3$ et $M \in (D_P)$, alors $MH = KP$, d'où $MF = 3KP$; de cette égalité nous pouvons donc conclure que $M = (D_P) \cap (\mathcal{C}_2)$ où $\mathcal{C}_P$ est le cercle de centre F et de rayon $3KP$.

b En déduire une construction point par point de Γ_3.

Place P_2 un point de (Δ) n'appartenant pas au segment $[AA']$, trace la droite (D_{P2}) passant par P_2 et perpendiculaire à la droite (Δ), puis trace le cercle $(\mathcal{C}_{P2})$ de centre F et de rayon $r = 3KP2$, enfin marque par M_1 et M_1' les points de rencontre de $(\mathcal{C}_2)$ et (D_{P2}). Construit quatre autres points de Γ_3 en suivant le même algorithme, puis tracer la courbe passant par ces points.

1 **a** De la question 2.a nous avons : $A = bar\{(F,1);(K,3)\}$ et $A' = bar\{(F,1);(K,-3)\}$, ce qui nous permet d'avoir les égalités suivantes dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ (où S est le milieu du segment $[FF']$) : $\overrightarrow{SA} = \frac{1}{1+3}\overrightarrow{SF} + \frac{3}{1+3}\overrightarrow{SK}$, $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{1-3}\overrightarrow{SF} - \frac{3}{1-3}\overrightarrow{SK}$, en faisant une somme membre par membre de ces deux égalités nous donc l'égalité suivante :
$(1+3)\overrightarrow{SA} + (1-3)\overrightarrow{SA'} = 2\overrightarrow{SF}$, or $\overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SA'}$ d'où $3\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SF}$, en passant à la norme nous avons $3a = c$.

De ceci $\overrightarrow{SA} = \frac{1}{1+3}\overrightarrow{SF} + \frac{3}{1+3}\overrightarrow{SK}$ et de ceci $\overrightarrow{SA'} = \frac{1}{1-3}\overrightarrow{SF} - \frac{3}{1-3}\overrightarrow{SK}$ nous avons $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SK}$, ce qui entraine $SA = 3SK$, c'est-à-dire $SK = a \times \frac{1}{3} = \frac{a^2}{c}$ (Car $3 = \frac{c}{a}$).

b En considérant le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, les points H et F ont pour coordonnées respectives : $\left(-\frac{a^2}{c}, y\right)$ et $(-c, 0)$. Soit $M \in \Gamma_3$ de coordonnée (x, y) ; $M \in \Gamma_3$ si et seulement si $\frac{c^2}{a^2}MH^2 = MF^2$, si et seulement si $\frac{c^2}{a^2}\left(x + \frac{a^2}{c}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$, après avoir développé et réduit cette égalité nous avons donc le résultat suivant : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

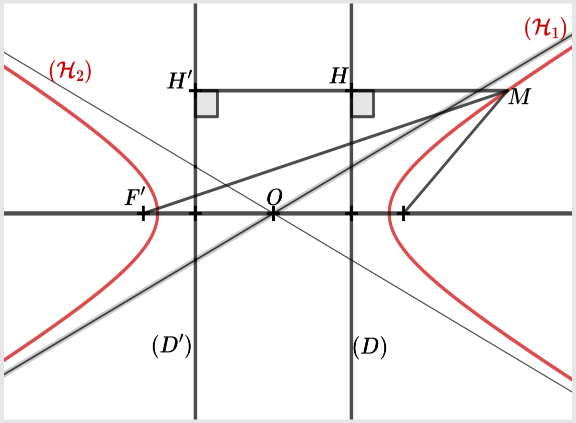
Résumé

Définition

Soit (D) une droite fixée et F un point n'appartenant pas à (D) et un réel positif e tel que $e > 1$. On appelle *Hyperbole* de *foyer F* et de *Directrice (D)* l'ensemble des points M du plan tels que $MF = eMH$, où H représente le projeté orthogonal de M sur (D).

Propriétés

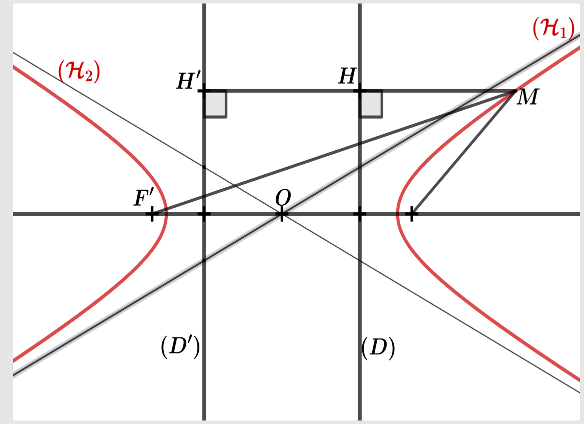
Soit (Γ_e) une parabole de foyer F et de directrice (D) et (Δ) la perpendiculaire à (D) passant par F.



- (Δ) est un axe de symétrie ou axe focal de (Γ_e).
- (Γ_e) rencontre (Δ) en deux points A et A' appelé *Sommet de l'Hyperbole*.
- Posons $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\|\overrightarrow{OA}\|}$, l'équation réduite de (Γ_e) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est donnée par $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$, où $a = OA$ et $OF = c$.
- Les Courbes d'équations $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ont pour éléments caractéristiques :

Equations	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Demi-distance focale	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = \sqrt{b^2 + a^2}$
Excentricité	$e = \dfrac{c}{a}$	$e = \dfrac{c}{b}$
Sommets	$A(a, 0)\,;\ A'(-a, 0)$	$B(0, b)\,;\ B'(0, -b)$
Axe focal	(OI)	(OJ)
Foyers	$F(c, 0)\,;\ F(-c, 0)$	$F(0, c)\,;\ F(0, -c)$
Directrices	$(D) : x = \frac{a^2}{c},\ (D') : x = -\frac{a^2}{c}$	$(D) : y = \frac{b^2}{c}\,;\ (D') : y = -\frac{b^2}{c}$
Asymptotes	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x,\ (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$	$(\Delta) : y = \frac{b}{a}x,\ (\Delta') : y = -\frac{b}{a}x$
Equation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$	$\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$	$-\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$

Résumé

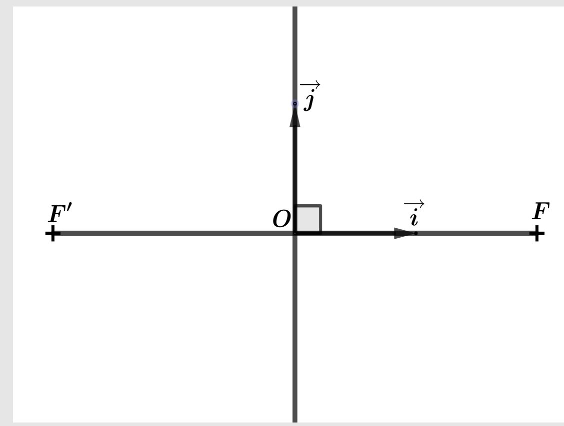


Définition Bifocale des Hyperboles

Pour une Hyperbole on a : $\dfrac{MF}{MH} = e$, avec $e > 1$ et $c^2 = a^2 + b^2$.
On a Alors : $MF = eMH$ et $MF' = eMH'$, donc $|MF - MF'| = e|MH - MH'|$.
Comme les points M, H et H' sont alignés et en observant la figure ci-dessus, on peut constater que $|MH - MH'| = HH' = 2\frac{a^2}{c}$.
D'où $|MF - MF'| = e \times 2\frac{a^2}{c}$, et comme $e = \frac{c}{a}$, alors on peut donc conclure que $|MF - MF'| = 2a$.

Réciproquement : Considérons deux points F et F' tel que $FF' = 2c$. On cherche l'ensemble des point M tel que $|MF - MF'| = 2a$. $(a < c)$

Considérons un repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$, avec S le milieu du segment $[FF']$ et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{SF}}{\|\overrightarrow{SF}\|}$, dans ce repère $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.



Soit $M(x, y)$ dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$;
Si $MF > MF'$, alors $|MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow MF - MF' = 2a$.
$MF^2 - MF'^2 = -4xc \Leftrightarrow (MF - MF')(MF + MF') = -4xc$, or comme $MF - MF' = 2a$, alors $MF + MF' = -\dfrac{2xc}{a}$.

$$\begin{cases} MF - MF' = 2a, \\ MF + MF' = -\dfrac{2xc}{a}. \end{cases} \Leftrightarrow MF = a - \frac{xc}{a}$$

$$\begin{aligned} MF^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2 &\Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{xc}{a}\right)^2, \\ &\Leftrightarrow a^2 - c^2 = x^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) + y^2, \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \end{aligned}$$

Si $MF < MF'$, alors $|MF - MF'| = 2a \Leftrightarrow MF - MF' = -2a$. Par suite, suivre le même résonnement que celui qui précède.

Résultat : L'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une Hyperbole de foyers F et F' de grand axe de longueur $2a$.

Exemples

1 Déterminer la nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation, puis donner leurs représentations graphiques :

a $2x^2 - 3y^2 - 12x - 9y + 24 = 0$, **b** $4x^2 - y^2 = 4$, **c** $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$.

2 Soit F et F' deux points du plan tels que : FF'=6. Déterminer, dans un repère convenablement choisi, l'équation réduite de l'Hyperbole définie par : $|MF - MF'| = 4$.

Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

1 Construire sur un même graphique les hyperboles $(\mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}')$d'équation respectives $x^2 - 3y^2 - 1 = 0$ et $3x^2 - y^2 + 1 = 0$.

2 Démontrer que $(\mathcal{H}')$ est l'image de $(\mathcal{H})$ par :

a La rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

b La symétrie orthogonale s d'axe la première bissectrice.

Exercice 02

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation de l'hyperbole dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tels que $\overrightarrow{u}(1, 1)$ et $\overrightarrow{v}(1, -1)$.

a $x^2 - y^2 + 4 =$, **b** $x^2 - y^2 + 2x - 4y = 0$, **c** $x^2 - y^2 - 6x + 2y + 24$.

2 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{H})$ d'équation : $3x^2 - y^2 + 2x + 1 =$.

3 **a** Démontrer que les points A, M et M' d'affixes respectives 1, z et z^4 sont alignés si et seulement si $1 + z + z^2 + z^3$ est un nombre réel.

b En déduire que l'ensemble de tels points M est la réunion de $(\mathcal{H})$ et d'une droite que l'on précisera.

Cinquième étape : **Conclusion**

Ici nous venons d'étudier l'ensemble des points du plan affine euclidien dont le rapport des distances à un point et à une droite est e (avec $e > 1$) ; nous avons vu que cet ensemble de point est une Hyperbole, et nous avons caractérisé cet ensemble.

Devoirs : Exercices dans le livre au programme.

MODULE 27 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEÉS

CHAPITRE 16:SIMILITUDESDIRECTESPLANES

LEÇON 1 : ÉCRITURES COMPLEXES ; EXPRESSION ANALYTIQUES DE CERTAINES APPLICATIONS USUELLES DU PLAN. DURÉE : 100 min

Motivation : La vision sur les nombres complexes est d'abord géométrique : calcul sur des points du plan , calcul d'angles...etc . Les repérages cartésiens utilisés en premières conduisent naturellement à l'exploitation de nombres complexes sur des raisonnements géométriques directs qui réactivent les connaissances antérieures notamment sur les transformations du plan.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de : ● Reconnaitre l'écriture complexe : (d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation, d'une symétrie centrale et de certaines symétries d'axes.) ; ● Déterminer l'expression analytique : (d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation, d'une symétrie centrale et de certaines symétries d'axes.) ; ● Reconnaitre une similitude directe plane à partie de son écriture complexe.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :

a A , B et C sont des points d'affixes respectifs : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 5 + 2i$ et $z_C = 4 + 5i$; détermine en radian : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

b Soit M le point d'affixe z , M' le point d'affixe z' ,I le point d'affixe $2i$ et $\overrightarrow{u}$ le vecteur d'affixe u ; trouve une relation entre z , z' et u traduisant les égalités suivantes :

i. $\overrightarrow{MM'} = -2\overrightarrow{u}$.
ii. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.
iii. Le complexe $\dfrac{z' - 2i}{z - 2i}$ a pour argument α et pour module 1.

Situation problème

BELLO et ISSA sont deux nouveaux élèves en classes de terminale C. Après avoir vu le deuxième chapitre sur les nombres complexes (Nombres complexes : approche géométrique) Ils aimeraient déterminer l'image du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$ par l'homothétie de centre $A(2, -3)$ et de rapport $k = -\dfrac{4}{3}$; mais ne savent pas comment s'y prendre.

Activité

Le plan est muni d'un repère orthogonal . Soit les points $A(2,-3)$ et $\Omega(1,2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre Ω et de rayon $r=6$.
2. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k=-\frac{4}{3}$. Soit M le point d'affixe z et M' le point d'affixe z'.
   a. Donner une relation vectorielle traduisant le fait que $h(M)=M'$.
   b. Déduire de la question (a) une relation entre z et z' .
   c. Comment se comporte une homothétie face aux distance ?
3. Résoudre la situation problème.

Troisième étape : Résumé

Résumé

Définition et propriétés de la fonction ln

Définition : (**notion de transformation**)

Une application T du plan dans lui même , est une transformation si et seulement si T est une bijection du plan dans lui même.

Conséquence : Une transformation T admet une transformation réciproque notée T^{-1} ; définie par : $T^{-1}(N)=M$ si et seulement si $T(M)=N$.

Exemple : Les translations, les homothéties et les rotations...etc sont des transformations du plan (rappeler à chaque fois les transformations réciproques associées).

Nombres complexes et transformations du plan

Théorème : L'écriture complexe de la rotation **r** de centre Ω d'affixe ω et d'angle α est : $z'-\omega=e^{i\alpha}(z-\omega) \Longleftrightarrow r(z)=e^{i\alpha}(z-\omega)+\omega$.

Le centre Ω est l'unique point invariant de r.

Preuve : En effet on a : $r(z)=z' \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M'=\Omega M & (a) \\ Mes(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})\equiv\alpha[2\pi] & (b) \end{cases}$

La relation (a) nous montrent que $|\frac{z'-\omega}{z-\omega}|=1$.

La relation (b) nous donnent : $Arg(\frac{z'-\omega}{z-\omega})=Arg(\frac{z_{\overrightarrow{\Omega M'}}}{z_{\overrightarrow{\Omega M}}})=Mes(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'})=\alpha$.

Autrement dit nous avons établi que le complexe $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et pour argument α, ainsi $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=1\times e^{i\alpha}$. **D'où le résultat**.

On pourra faire de même pour établir les écritures complexes des autres transformations.

Nous indiquons dans le tableau donné ci-dessous l'écriture complexe de quelques transformations du plan . Dans ce tableau , $M(z)$ et $M'(z')$ désignent un point et son image respectivement, ainsi que leurs affixes , par chacune de ces transformations.

Résumé

Transformations	Définition géométrique	Écriture complexe
Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a)$	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$	$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = -z + 2\omega$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$; rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z-\omega) + \omega$
Rotation de centre $\Omega(\omega)$;d'angle α	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ Mes(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\alpha}(z-\omega) + \omega$
Application identique	$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{0}$	$z' = z$
Symétrie par rapport à l'axe des réels	faire esquisse de schéma	$z' = \overline{z}$
Symétrie rapport l'axe des imaginaires	faire esquisse de schéma	$z' = -\overline{z}$

Exemple :
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f du plan dans lui même qui a tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ dans chacun des cas suivant :

1 $z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^{247} z + i$.

2 $z' = -4z + 3 + i$.

3 $z' = -z + 2i - 4$.

Écriture complexe d'une similitude directe plane.

Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit h l'homothétie de centre $A(-2,1)$ et de rapport 2 , r la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Soit M un point d'affixe z , M' son image par r et M'' son image par h . On désigne par z' et z'' les affixes respectifs de M' et M".

Exprimer z' en fonction de z puis z" en fonction de z' puis de z.

Je retiens :

Définition (**Similitude**) : soit k un réel strictement positif . **On appelle similitude plane de rapport** k ; toute transformation f du plan dans lui même tels que , pour tout points A et B on a , $f(A)f(B) = kAB$.

Notation : On note généralement une similitude par **s ou S**.

Définition :On dit qu'une similitude plane est directe si elle est la composée d'un déplacement et d'une homothétie.

La composé d'un antidéplacement et d'une homothétie sera appelée similitude indirecte.

Remarque : Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux similitudes directes planes.

Propriétés(Propriétés caractéristiques) : Toute application s du plan dans lui même dont l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$) est une similitude directe plane.

- ✍ Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b ;
- ✍ Si $a \neq 1$, alors s est sous sa forme réduite. On a entre autre ;
- ✍ Si $a \in \mathbb{R}$ alors on a une homothétie de rapport $\mid a \mid$;

Résumé

- ✍ Si $a \in \mathbb{C}\ \mathbb{R}$ et $\mid a \mid = 1$ alors on a une rotation d'angle $Arg(a)$ et de centre d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$;
- ✍ Sinon on a une similitude directe plane.

Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormé .

1. Donner la nature de la transformation f définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(z) = (1-i)z + 1 + i\sqrt{3}$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.

Expression analytique de certaines transformations du plan

Les nombres complexes constituent un outil mathématique fondamental pour déterminer l'expression analytique d'une transformation du plan.

Définition :

Soit f une transformation du plan dans lui même ; qui à un point $M(z = x + iy)$ associe le point $M'(z' = x' + iy')$.
Déterminer l'expression analytique de f c'est exprimer x' et y' en fonction de x et y et placer les deux relations sous forme de système.

Exemple : Déterminer l'expression analytique de la rotation de centre $A(1, 1)$ et d'angle $\dfrac{5\pi}{6}$.

Devoirs : Exercices......pages

MODULE 27 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEÉS

CHAPITRE16:SIMILITUDES DIRECTES PLANES

LEÇON 2 : ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE SIMILITUDE DIRECTE. DURÉE:100min

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Déterminer les éléments géométriques qui caractérisent une similitude directe plane à partir de son écriture complexe ;
- Passer de l'écriture complexe d'une similitude directe plane à son expression analytique et vis-versa.

Première étape : Introduction

- **Situation problème**

Un ingénieur du génie civil a utilisé cette transformation $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$ pour réaliser une manipulation d'une structure plane et circulaire. Le résultat de la transformation est repérée par cette équation $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$ dans un logiciel de son ordinateur. Cependant, il ne se rappelle plus du rayon original de la structure avant la transformation.

- **Contrôle des pré-requis** :

Soit l'application du plan dans lui même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tels que $z' = (1+i)z + 2 - i$.

a. Déterminer la nature de f.

b. En posant $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Soit l'application g du plan dans lui même qui a tout point $M(z = x + iy)$ associe le point $M'(z' = x' + iy')$ qui a pour expression analytique $\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y \end{cases}$.

1. Exprimer z' en fonction de x et y .
2. Déterminer deux complexes a et b tels que $z' = (x + iy)a + b$.
3. Déduire que $z' = az + b$. Sachant qu'une similitude directe plane peut être vue comme la composé d'une homothétie et d'une rotation . Comment se comporte une similitude directe plane face aux distances .
4. Déterminer les éléments caractéristiques du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 90 = 0$ et résoudre la situation problème .

Résumé

Angle d'une similitude directe plane

Théorème : Soit S une similitude directe plane et A, B, C *et* D des points tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Soient A', B', C' *et* D' images respectives de A, B, C *et* D par S.

Alors on a : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}})[2\pi]$. En désignant par θ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$. **On dit que S est une similitude directe plane d'angle θ.**

Théorème : Soient s_1 et s_2 deux similitudes directes planes d'angles respectifs α et θ, alors on a :

- La similitude $s_1 \circ s_2$ est d'angle $\alpha + \theta$.
- La similitude directe s_1^{-1} est d'angle $-\alpha$.

Centre d'une similitude directe plane

Théorème : Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe appelé centre de la similitude (on parle aussi de similitude à centre).

Remarques : (Conséquence du théorème ci-dessus)

- Une similitude directe plane s de rapport différent de 1 est parfaitement déterminé par la donnée de **son centre , son rapport et son angle**. Ces trois éléments sont appelés **éléments caractéristiques de la similitude** s.
- Soit s une similitude directe plane de centre Ω, de rapport k et d'angle θ, tel que $s(M) = M'$. Ainsi nous avons :

$s(M) = M' \Longleftrightarrow \Omega M' = k\Omega M$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta[2\pi]$ (**équation caractéristique d'une similitude de centre Ω de rapport k et d'angle θ**) .

- Si s est une similitude directe de rapport k et d'angle θ ; qui transforme les points A et B respectivement en A' et B' . Alors on a : $A'B' = kAB$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = \theta$.

Propriétés : Si s est une similitude directe plane d'écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \neq 1$. Alors les éléments caractéristiques de s sont donnés par :

- Son rapport est $|\, a \,|$ (module du complexe a) ;
- Son angle est donné par $Arg(a)$ (argument du complexe a) ;
- Son centre est d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Exemple :

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

1. Étudier la transformation f définie sur $\mathbb{C}$ par : $f(z) = (1 - i)z + 1 + i\sqrt{3}$.
2. Donner l'écriture complexe de la similitude s de centre $A(-2, 4)$, de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
3. Soit $z' = (\alpha + \beta i)z + m + in$, avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec $\alpha, \beta, m, n, x, y, x', y' \in \mathbb{R}$.
   a. Exprimer z' en fonction de x et y.
   b. Déduire une expression de x' et y' en fonction de x et y . **Le système obtenu est appelé expression analytique de la similitude s d'expression complexe $z' = az + b$ avec $a = \alpha + \beta i$ et $b = m + in$.**

Résumé

Expression analytique d'une similitude directe plane

1. Déterminer l'expression analytique de la similitude directe s ayant pour écriture complexe $z' = 2iz + 1 + 3i$.
2. Déterminer l'expression complexe puis la nature et les éléments caractéristiques de la transformation dont l'expression analytique est : $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = -2x + y + 1 \end{cases}$

Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

Le plan complexe est muni d'un repère d'origine O . On se donne les points A et B d'affixes respectifs 12 et $9i$, ainsi que l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe Z définie par $Z = -\frac{3}{4}iz + 9i$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f (on désignera I son centre)
2. Déterminer les images par f des points A et B.
3. Montrer que I est un point commun aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de diamètre respectifs $[OA]$ et $[OB]$.
4. Montrer que I est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et montrer que $IA \times IB = IO^2$.
5. Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f^2 $(f \circ f)$.

Exercice 02

Soit la transformation f ayant pour écriture complexe $z' = \frac{1-cos\alpha+isin\alpha}{1+cos\alpha-isin\alpha}z$. On pose $A = \frac{1-cos\alpha+isin\alpha}{1+cos\alpha-isin\alpha}$.

1. Montrer que $A = tan\frac{\alpha}{2}e^{i\alpha}$.
2. Déterminer α pour que f soit une translation .
3. Déterminer α pour que f soit une rotation

Exercice 03

Ali et Bouba sont deux élèves en classe de Tle C. Il discute sur la transformation g ayant pour écriture complexe $z' = ((1 - cos\alpha) + isin\alpha)z + (1 + cos\alpha) - isin\alpha$.
Bouba dit g est une rotation et Ali dit g est une similitude .
Tache :Départager de façon claire les deux amis en donnant aussi les éléments caractéristiques associés.
Devoirs : Exercices

MODULE 27 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEÉS

CHAPITRE16:SIMILITUDES DIRECTES PLANES

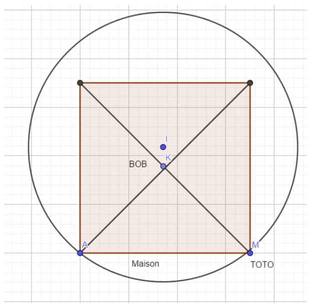
LEÇON 3 : TRANSFORMATIONS : LIEUX GÉOMÉTRIQUES ; CONSTRUCTIONS ; DÉMONSTRATIONS DES PROPRIÉTÉS. DURÉE : 100 min

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Utiliser les similitudes directes planes pour résoudre les problèmes de construction ;
- Utiliser les similitudes directes planes pour déterminer certains lieux géométriques....etc

Première étape : Introduction

- **Situation Problème :**

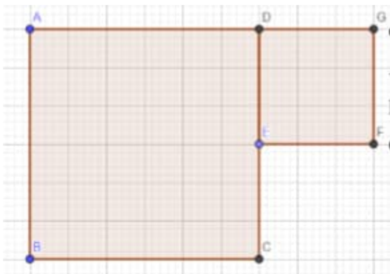


TOTO et BOB sont deux amis jouant au jeu de course dit de **positionnement dépendant** suivant décrit comme suit : **BOB et TOTO doivent décrire en courant des configurations planes semblables et les positions de BOB et TOTO sont dépendantes l'une de l'autre , BOB est positionné au centre de la maison et TOTO à une porte (point M) . TOTO** commence sa course à la porte représenté par le point '**M** et **BOB** au centre de la maison (point K).

Pendant toute la course **TOTO** passe par la douche (représenté par le point A) et décrit une configuration plane ayant la forme d'un cercle de centre la salle à manger représenté par le point I (voir figure ci-dessous).

Tache : Déterminer les caractéristiques de la configuration plane décrite par **BOB** sachant que pendant sa course il passera par la salle à manger.

- **Contrôle des pré-requis :**



$ABCD$ et $DEFG$ sont deux carrés de sens directs tels que E soit le milieu du segment $[CD]$. Soit **r** la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et **h** l'homothétie de centre **D** et de rapport $\mathbf{k} = \sqrt{2}$. On pose $f = h \circ r$.

a Donner la nature de f et montrer que $f(A) = B$.

b Déterminer f(E) et déduire $Mes(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}})$

On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de diamètre $[BD]$. Et par $(\mathcal{C}')$ le cercle de diamètre $[DF]$. K est le point d'intersection des droites (AE) et (BF).

1. Démontrer que $K \in (\mathcal{C})$ et déduire que les droites (KD) et (BF) sont perpendiculaires (considéré le cercle circonscrit au triangle ABK et remarquer que ce cercle est $(\mathcal{C})$).
2. Démontrer que $K \in (\mathcal{C}')$ (considéré le cercle circonscrit au triangle EFK et remarquer que ce cercle est $(\mathcal{C}')$).
3. Démontrer que les points C , G *et* K sont alignés (Considéré les centres des deux cercles précédents et le point d'intersection de la droite formée par ces deux centres et la droite (AE) et utiliser le fait qu'une similitude conserve l'alignement de points pour conclure).

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre I et $A, M \in \mathcal{C}$. $AMNP$ est un carré de sens directe de centre K. **On souhaite déterminer le lieu du centre K de ce carré lorsque M décrit le cercle $\mathcal{C}$.** Soit S une similitude directe plane de centre K qui transforme A en M.

1. Déterminer les éléments caractéristiques de S .
2. Déterminer La nature de $S(\mathcal{C})$ et ses éléments caractéristiques .
3. Déterminer alors le lieu géométrique cherché .
4. Quelle sera alors la configuration plane décrite pat **BOB**.

Troisième étape : **Résumé**

Résumé

Quelques propriétés sur les similitudes

Théorème : La composée de deux similitudes de rapports respectifs k_1 et k_2 est une similitude de rapport $k_1 \times k_2$.
Théorème : Une application du plan dans lui même est une similitude *ssi* elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.
Preuve :(Indication)
En prenant S une similitude de rapport k. Poser $h = S \circ (S^{-1} \circ h)$. On montrera que $S^{-1} \circ h$ est une isométrie où h est une homothétie de rapport k.
Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés des homothéties et des isométries.
Propriétés :
✎ Une similitude conserve les angles orientés, les barycentres, l'alignement des points et le parallélisme ... etc
✎ Une similitude de rapport k multiplie les longueurs par k et les aires par k^2.
✎ Une similitude transforme un cercle en un cercle et conserve le contact.
✎ Une similitude transforme un triangle en autre triangle qui lui est semblable.

Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

Soient A, B *et* C trois points non alignés du plan.
Si s est une similitude tels que $s(A) = A$, $s(B) = B$ et $s(C) = C$; alors s est l'application identique.
Indication : Vérifier d'abord que s est une isométrie , ensuite supposer que $M' = s(M)$ avec $M' \neq M$. De l'égalité $s(A)s(M) = AM$, on a $AM' = AM$. Donc A est sur la médiatrice de $[MM']$. De même montrer que B et C sont sur la médiatrice de $[MM']$.

Résumé

Détermination d'une similitude directe plane

Propriété : Soit A, B, A' *et* B' quatre points du plan tels que : $A \neq B$ et $A' \neq B'$. **Il existe une unique similitude directe plane** f **transformant** A **en** A' **et** B **en** B' .
Preuve : Utiliser les nombres complexes.
Propriété : Une similitude directe plane qui admet trois points fixes non alignés est l'application identique.
Preuve : Voir leçon précédente.
Propriété : Soient A, B deux points du plan tels que $A \neq B$. Soit s une similitude tel que $s(A) = A$ et $s(B) = B$.
Alors $s = Id$ **ou** $s = S_{(AB)}$.

Similitudes directes planes et lieux géométrique

Définition : **Un lieu géométrique** (ou plus précisément un lieu de points) est un ensemble de points possédant une propriété commune. Cette propriété est toujours liée au concept de distance.
Exemple : Par exemple un cercle est un lieu géométrique car l'ensemble de points sur un cercle est à une même distance d'un point fixe (centre).
Propriété : Pour déterminer un lieu géométrie ; on peut y aller **soit avec la méthode géométrique, soit avec la méthode algébrique (définir un repère et utiliser les nombres complexe)**.
Exemple : Dans le plan (P), on considère une droite (D) et un point O n'appartenant par à (D). À tout point A de (D), on associe le point B tel que le triangle OAB soit isocèle rectangle direct en A.

1. Déterminer la nature de l'ensemble (δ) décrit par le point B lorsque le point A décrit la droite (D).
   indication : O **étant un point fixe trouver une similitude qui transforme** A **en** B et observer le comportement de B lors du déplacement de A.

Devoirs : Exercices

MODULE 27 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE17: FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

LEÇON 1 : FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE DURÉE : 100 min

Motivation : Les équations en une variable x qu'on sait résoudre en donnant une formule pour la solution sont particulières, notamment les équations du 1^{re} degré $ax+b=0$, celle du second degré $ax^2+bx+c=0$. Mais pour la plus part des équations, il est parfois difficile voir impossible de donner une formule pour la ou les solutions ni de savoir si ces équations admettent des solutions. Considérons par exemple l'équation $x^3-3x+8=0$. Il est difficile de donner la ou les solution(s) exacte. Dans ce chapitre, nous allons voir que grâce à l'étude de la fonction $f(x)=x^3-3x+8$, il est possible d'obtenir beaucoup d'informations sur l'ensemble des solutions de l'équation $x^3-3x+8=0$.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de : ● Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue, ● Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence dans un intervalle donné, des solutions d'une équation de la forme $f(x)=c, c\in\mathbb{R}$.

Première étape : Introduction

- **Situation problème**

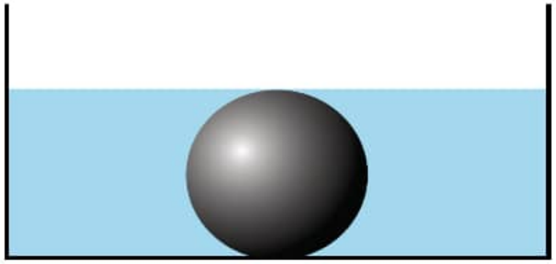
  ABDEL veut connaitre le rayon x de sa boule sphérique. Pour ce faire, il possède une boîte cylindre de rayon 12 cm contenant de l'eau à une hauteur de 5 cm. Il plonge alors sa boule sphérique dans ce cylindre contenant de l'eau et constate que la surface de l'eau est tangente à sa boule sphérique. Il conclut que le rayon x de sa boule vaut 2,5 cm.

  A t-il raison ?

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

On considère un cylindre de 12 cm de rayon contenant de l'eau à une hauteur de 5 cm. On plonge dans ce cylindre une boule sphérique et on constate que la boule est tangente à la surface de l'eau (Comme l'indique la figure ci-contre). On note x le rayon de la boule en mm.



1. a. Montre que $25\leq x\leq 120$.

   b. Montre que x est solution de l'équation $x^3-21600x+540000=0$.(On constatera que le volume de la boule est égale au volume d'eau déplacée).

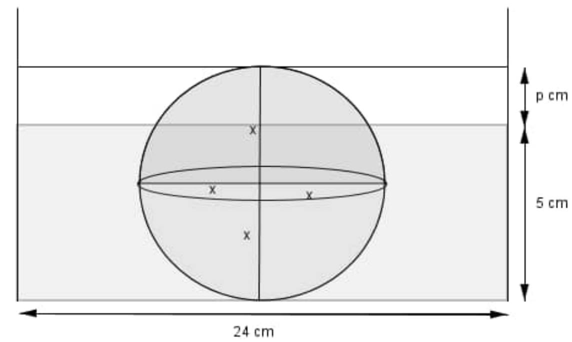
2. On pose $f(x)=x^3-21600x+540000$.

   a. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

   b. Détermine l'image par f des intervalles $[25;26]$ et $[125;135]$.

   Détermine alors une valeur approchée du rayon de la boule à $0,1mm$ près.

Solution



1 **a** d'après la figure ci-contre : on a $50 \leq x \leq 240$. Ainsi, $25 \leq x \leq 120$.

b $V_{sphere} = \frac{4}{3}\pi x^3$ et $V_{\text{eau déplacée}} = \pi \times 120^2 p = \pi \times 102^2 \pi \times 120^2(2x-5)$; ainsi, $V_{sphere} = V_{\text{eau déplacée}}$ d'où $x^3 - 21600 + 540000 = 0$.

2 Posons $f(x) = x^3 - 21600x + 540000$.

a Pour tous x appartenant à $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x^2 - 21600$. $f'(x) = 0$ entraine $x = 60\sqrt{3}$ ou $x = -60\sqrt{3}$; ainsi, pour tous $x \in]-\infty; -60\sqrt{3}[\cup]60\sqrt{3}; +\infty[$, $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $]-\infty; -60\sqrt{3}[$ et sur $]60\sqrt{3}; +\infty[$ et pour tous $x \in [-60\sqrt{3}; 60\sqrt{3}]$, $f'(x) \leq 0$ d'où f est décroissante sur $[-60\sqrt{3}; 60\sqrt{3}]$. On a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-60\sqrt{3}$		$60\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-60\sqrt{3})$	$\searrow$	$f(60\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

b $f(25) = 15625; f(26) = -4025$. Ainsi l'image de l'intervalle $[25; 26]$ est $[-4025; 15225]$.
$f(125) = -26875; f(135) = 84375$, ainsi l'image de l'intervalle $[125; 135]$ est $[-206875; 84375]$.

Troisième étape : Résumé

Résumé

Définitions, Propriétés et Exemples

- Une fonction d'une variable réelle est une correspondance $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une fonction d'une variable réelle est une correspondance $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
- On dit que f est continue en $x_0 \in I$ si f est définie en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Théorème

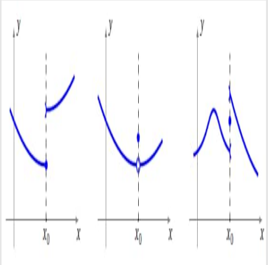
f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Exemple Les fonctions suivantes sont continues :

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $\mid x \mid$ est continue sur $\mathbb{R}$.

– Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continue sur $\mathbb{R}$.
– La fonction partie entière n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$. En effet, $\lim\limits_{x \mapsto 2} E(x) = \lim\limits_{x \mapsto 2^+} E(x) = 2$ mais $\lim\limits_{x \mapsto 2^-} E(x) = 1$.

Remarques



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative n'admet pas de saut, si on peut tracer sa courbe « sans lever le crayon ».
Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0.

La continuité se comporte bien avec les opérations élémentaires.
Propriété Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Ainsi :

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times f$ est continue en x_0 ;
- $f + g$ est continue en x_0 ;
- $f \times g$ est continue en x_0 ;
- Si $f(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f(x)}$ est continue en x_0.

Exemple La proposition précédente permet de vérifier que d'autres fonctions usuelles sont continues :

- la fonction puissance $x \mapsto x^n$,
- les polynôme sur $\mathbb{R}$ (comme somme et produit de fonctions puissance et de fonctions constantes),
- les fonctions rationnelles $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sur tout intervalle où le polynôme $Q(x)$ ne s'annule pas.

Propriété
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$ (I et J étant deux intervalles de $\mathbb{R}$). Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Image d'un intervalle par une fonction continue

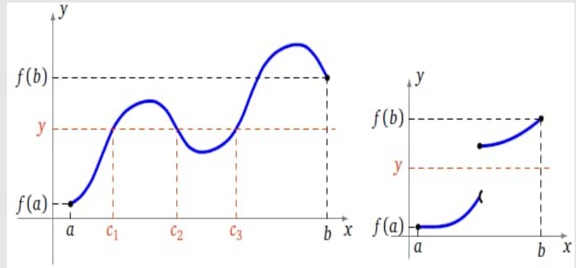
Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors, le tableau suivant donne l'image $f(I)$ de I par f.

I	$f(I)$	
	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim\limits_{x \mapsto b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \mapsto b} f(x); f(a)]$
$]a, b]$	$]\lim\limits_{x \mapsto a} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim\limits_{x \mapsto a} f(x)[$
$]a; b[$	$]\lim\limits_{x \mapsto a} f(x); \lim\limits_{x \mapsto b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x \mapsto b} f(x); \lim\limits_{x \mapsto a} f(x)[$

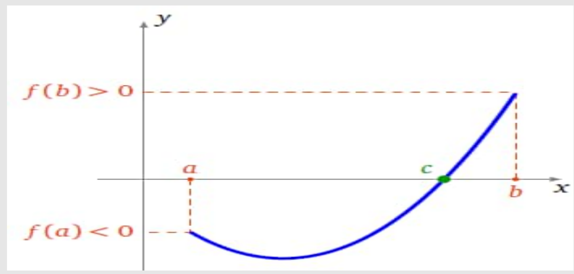
Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = y$.
Une illustration du théorème des valeurs intermédiaires (figure de gauche), le réel c n'est pas nécessairement unique. De plus si la fonction n'est pas continue, le théorème n'est plus vrai (figure de droite).

Résumé

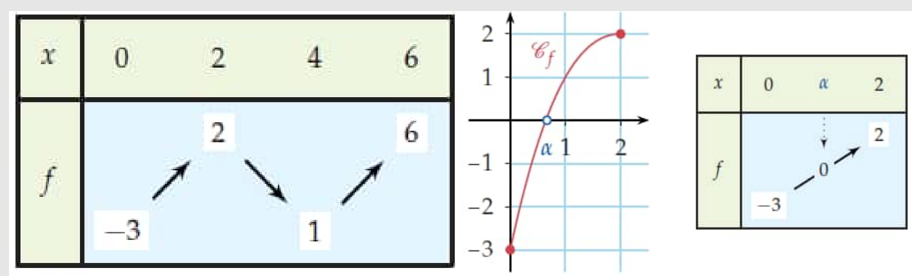


Remarques Si la fonction f est continue et **strictement monotone** sur I, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un unique** réel $c \in [a; b]$ tel que f(c)=y.
En particulier, Si f est continue et strictement monotone sur I=[a ;b] et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation f(x)=0 a une **unique** solution dans I.
Propriétés : Conséquence du théorème des valeurs intermédiaires
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors il excite $c \in]a; b[$ tel que $f(c) = 0$.



Propriétés
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est un intervalle.
En particulier, Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle fermée $[a; b]$, alors il existe deux réels m et M tel que $f([a; b]) = [m; M]$.
Exemple Soit la fonction f définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 - \dfrac{9}{4}x^2 + 6x - 3$.

D'après le tableau de variation de f ci-contre, f admet pour minimum -3 et pour maximum 6 et f est continue sur $[0; 6]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f prend toute les valeurs de $[-3; 6]$. En particulier l'équation $f(x) = 0$ admet au-moins une solution dans $[0; 6]$.
Sur [0 ;2] f est continue et strictement croissante. Donc pour tout k compris entre f(0)=-3 et f(2)=2 l'équation f(x)=k admet une et une seule solution.
En particulier, puisque $f(0) \times f(2) < 0$ l'équation f(x)=0 admet une unique solution $\alpha \in [0; 2]$.



Quatrième étape : Exercice d'application

Exercice 01

Soit f la fonction définie sur $I = [-4; 1]$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 6$.

1. Justifie que f est continue sur I.
2. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
3. Détermine l'image des intervalles $[-3; -1]$ et $]-1; 1]$ par f.
4. Dénombre les solutions de l'équation $f(x) = 2$.
5. Justifie que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution.

Exercice 02

L'équation $(E) : x\sqrt{x} = 1 - x$ admet-elle des solutions

Devoirs : Exercices

LEÇON 2 : FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES DURÉE : 100 min

Motivation : L'application des coniques par les mathématiciens ne se réduit pas à la géométrie et à l'algèbre. Elle va au-delà de ces disciplines, ainsi **KEPLER** utilisa l'ellipse pour décrire le mouvement des planètes autour du soleil, et affirma que les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Montrer que la restriction d'une fonction à un intervalle est bijective à partir de sa courbe ou son tableau de variation,
- Dériver la bijection réciproque d'une fonction numérique,
- Résoudre les équations $x^n = a$ avec $n \in \mathbb{N}^*$,
- Utiliser les inégalités des accroissements finis pour comparer certaines fonctions.
- Étudier la continuité, la dérivabilité et le sens de variation de l'application réciproque d'une fonction bijective,
- Représenter graphiquement les courbes de deux fonctions réciproques l'une de l'autre,
- Simplifier les expressions ayant les puissances,

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \sqrt{2x-4}+1$ et $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2+2$.

1. Précise le domaine de définition I de f et montre que f est continue sur I.
2. Étudie la dérivabilité de f en $x_0 = 2$.
3. Étudie les variations de f et déduis $J = f(I)$ image de I par f.
4. Étudie les variations de g sur J.
5. Montre que la fonction f est injective et surjective de I vers J.
6. Détermine les domaines de définitions de $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$ puis, donne l'expression de $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$. Que constates-tu ?
7. Déduis la fonction réciproque f^{-1} de f. Précise son ensemble de départ et son ensemble d'arrivé.
8. Calcule $(f \circ g)'(x)$ puis, donne l'expression de $(f^{-1})'$ en fonction de f.

Solution

1. $I = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2x-4 \geq 0\}$. Donc $I = [2; +\infty[$.
   La fonction $x \mapsto 2x-4$ est continue sur I et pour tout $x \in I$ $2x-4 \geq 0$. Donc $x \mapsto \sqrt{2x-4}$ est continue sur I comme composée de deux fonctions et par suite, f est continue comme somme de deux fonctions continues sur I.
2. $\displaystyle\lim_{x \mapsto 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \mapsto 2^+} \frac{\sqrt{2x-4}}{x-2} = \lim_{x \mapsto 2^+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty$; car $\displaystyle\lim_{x \mapsto 2^+} \sqrt{x-2} = 0$.

Solution

1. f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et pour tout $x\in]2;+\infty[$ $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$; pour tout $x\in]2;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc f est strictement croissante $[2;+\infty[$ et par suite, $J=f(I)=f(]2;+\infty[)=[f(2);\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)[=[1;+\infty[$.
2. g est dérivable sur $J=[1;+\infty[$ et $g'(x)=(x-1)$; pour tout $x\in J, g'(x)>0$. Donc g est strictement croissante sur J.
3. Soient $x;y\in I$ tel que $f(x)=f(y)$.
   $f(x)=f(y)\Rightarrow\sqrt{2x-4}-2=\sqrt{2y-4}-2\Rightarrow 2x-4=2y-4\Rightarrow x=y$. Ainsi f est injective.
   L'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution $x=\dfrac{1}{2}(y-1)^2+2$ dans I. Donc f est surjective.
4. $x\in D_{g\circ f}$ si et seulement $f(x)\in\mathbb{R}$. Ainsi $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$
   $x\in D_{f\circ g}$ si et seulement $g(x)\in I$ cet à dire que $g(x)\geq 2$ cet à dire $(x-1)^2\geq 0$. Ainsi $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$.
   $g\circ f(x)=g[f(x)]=\dfrac{1}{2}\left[(f(x)-1)^2\right]+2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2x-4})^2+2=x$
   $f\circ g(x)=f[g(x)]=\sqrt{2g(x)-2}+1=\sqrt{(x-1)^2}+1=x$.
   On constate que $g\circ f(x)=f\circ g(x)=Id(x)=x$.
5. f étant bijective (car injective et surjective) et d'après la question précédente, $f^{-1}=g$. Ainsi, f^{-1} est définie de J vers I.
6. $(f\circ f^{-1})'(x)=g'(x)\times f'\circ f^{-1}$.
   Or $f\circ f^{-1}(x)=x$; donc pour tout $x\in J$, $(f\circ f^{-1})'(x)=1$.
   On déduit que pour tout $x\in J, (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{(f'\circ f^{-1})(x)}$.
   On peut constater que $g'(x)=(f^{-1})'=x-1=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(f^{-1}(x))-1}}=x-1$ car $f'(x)=\dfrac{1}{f(x)-1}$.

Troisième étape : Résumé

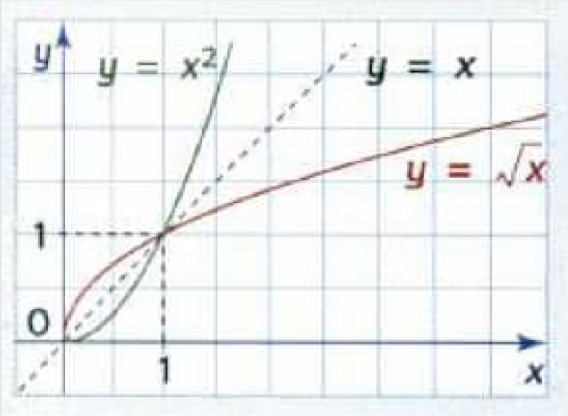
Résumé

Continuité et dérivabilité de la fonction réciproque

Théorème de la bijection Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors :

1. f réalise une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle J=f(I),
2. la bijection réciproque $f^{-1}:J\to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f,
3. Dans un repère orthonormal les courbe de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation y=x,
4. si de plus f est dérivable et de dérivée non nulle sur I alors, f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Exemples



Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$.
La fonction f est continue et strictement croissante sur I. Donc f réalise une bijection de I dans $J = f(I) = [0; +\infty[$.
De plus pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = 2x = 2\sqrt{f(x)}$.
Or, $f'(0) = 0$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) \neq 0$. On en déduit que f^{-1} est dérivable sur $]0; +\infty[$.
De plus pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'[(f^{-1}(x)]} = \dfrac{1}{2\sqrt{f[(f^{-1}(x)]}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
La bijection réciproque de f est la fonction $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. En effet, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $x^2 = y$ entraine $y = \sqrt{x}$. Dans un repère orthonormal, f^{-1} et f sont symétrique par rapport à la première bissectrice (droite d'équation y=x) comme l'indique la figure ci-contre.

Exercice 01

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$

1. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
2. Soit g la restriction de f sur $]-\infty; 3[$.
   a. Montre que g réalise une bijection de $]-\infty; 3[$ vers un intervalle J à déterminer.
   b. Déduit que g admet une bijection réciproque g^{-1} ; précise son ensemble de définition et son tableau de variation.
   c. Montre que g^{-1} est dérivable au point $\frac{1}{3}$ et calcule $(g^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$
   d. Détermine l'expression explicite de g^{-1}

Inégalité des accroissements finis

Propriété :Inégalité des accroissements finis
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tel que $a < b$. S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout $x \in [a, b], m < f'(x) < M$, alors $m(b-a) < f(b) - f(a) < M(b-a)$.
Propriété :Une autre formulation de l'inégalité des accroissements finis
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a et b deux éléments de I tel que $a < b$. S'il existe un réels M tels que pour tout $x \in [a, b], |f'(x)| < M$, alors $|f(b) - f(a)| < M(b-a)$.
Exemples
Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos(x)$, alors pour tous $x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}, |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$. En particulier si l'on fixe $y = 0$ on obtient $\sin(x) \leq |x|$.

Exercice 01

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$ puis, déduis l'encadrement $10 + \dfrac{1}{22} < \sqrt{101} < 10 + \dfrac{1}{20}$.
2. Que donne l'inégalité des accroissements finis sur $[0, x]$ de la fonction $f(x) = \exp(x)$.

Résumé

Exercice 01

1 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

a Étudie les variations de f.

b Sans résoudre l'équation, montre que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [1;2]$.

c Montre que pour tout $x \in [1;2], |f'(x)| < \dfrac{1}{4}$.

d Déduis que $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|x - \alpha|$.

Racines n-ièmes d'un réel positif

Définition Pour tout entier $n \geq 2$, la **racine n-ième** d'un réel $x \geq 0$ est $x^{\frac{1}{n}}$ si $x > 0$ et zéro si $x = 0$.

Notation :La racine n-ième de x est notée $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Remarque : La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. elle admet donc une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ appelé fonction racine n$^{\text{ième}}$.

Propriétés :Soient x et y des nombres strictement positifs ; n et p deux entiers tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$.

- $\sqrt[n]{0} = 0$.
- $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$.
- $(\sqrt[n]{x})^p = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^p = x^{\frac{p}{n}}$.
- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = (xy)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{n}}$.
- $\sqrt[np]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = (\sqrt[p]{x})^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{p}})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{np}}$.
- $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$; $(y \neq 0)$.
- $\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}} = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = x^{-\frac{1}{n}}$.

Remarques : Pour tout réel $x > 0$, et tout réel $a > 0$, on a :

- $x^n = a$ équivaut à $x = \sqrt[n]{a}$.
- Si n est pair, l'équation $x^n = a$ admet deux solutions $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$ et l'équation $x^n = -a$ n'a pas de solution.
- Si n est impair, l'équation $x^n = a$ admet une solution unique positive $x = \sqrt[n]{a}$ et l'équation $x^n = -a$ admet une unique solution négative $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.
- Si n=2 on écrit $\sqrt{a}$ au lieu de $\sqrt[2]{a}$.

Résumé

Exemples

1. $\sqrt[2]{3} \times \sqrt[4]{3^6} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{6}{4}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{6}{4}} = 3^2 = 9$
2. $\sqrt[5]{3072} = \sqrt[5]{2^{10} \times 3} = \sqrt[5]{2^{20}} \times \sqrt[5]{3} = 2^{\frac{10}{5}} \times \sqrt[5]{3} = 4\sqrt[5]{3}$.
3. L'équation $x^3 = -1$ a une unique solution négative $x = \sqrt[3]{-1} = -1$.
4. L'équation $x^4 = 8$ a deux solution $x = \sqrt[4]{8}$ ou $x = -\sqrt[4]{8}$.
5. Résolvons l'équation $(x^3 + 2)^2 = 9$.

$$\begin{aligned}(x^3+2)^2 = 9 &\Longleftrightarrow x^3 + 2 = \sqrt{9} \textit{ ou } x^3 + 2 = -\sqrt{9}\\ &\Longleftrightarrow x^3 + 2 = 3 \textit{ ou } x^3 + 2 = -3\\ &\Longleftrightarrow x^3 = -1 \textit{ ou } x^3 = -5\\ &\Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1 \textit{ ou } x = \sqrt[3]{-5}.\end{aligned}$$

Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

Résous les équations suivante :
$x^5 = -32^3$; $(x^4 - 7).(x^3 - 2) = 0$; $(x^4 + 8)^3 = 10$; $(x^2 + \sqrt{17})^4 = 18^2$.

Devoirs : Exercices

LEÇON 3 : REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DURÉE : 100 min

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Déterminer les branches infinies à une courbe,
- Étudier et représenter graphiquement certaines fonctions rationnelles et fonctions trigonométriques.

Première étape : Introduction

Pour imprimer un livre, SALIOU doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à gauche et à droite, de 3 cm en haut et en bas. L'aire totale d'une page étant de 600 cm^2, SALIOU veut déterminer les dimensions d'une page pour obtenir une surface imprimable maximale.

Aide SALIOU à déterminer les dimensions d'une telle page.

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Dans l'impression d'un livre, on doit respecter sur chaque page des marges de 2 cm à gauche et à droite, de 3 cm en haut et en bas. On désigne par x la mesure en centimètres de la largeur d'une page entière et par y la mesure en centimètres de sa hauteur.

1. L'aire totale d'une page étant de 600 cm^2, exprime la hauteur y en fonction de la largeur x.
2. Détermine l'aire de la surface imprimable d'une page en fonction de x et y.
3. Montre que l'aire $A(x)$ de la surface imprimable est $A(x) = 624 - 6x - \dfrac{2400}{x}$.
4. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 624 - 6x - \dfrac{2400}{x}$.
5. Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
6. Quelles doivent être les dimensions d'une page pour obtenir une surface imprimable maximale ?

Solution

1. $xy = 600$ entraine $y = \dfrac{600}{x}$.
2. Posons $A(x,y)$ l'aire de la fonction imprimable en fonction de x et y. On a $A(x,y) = (x-2-2)(y-3-3) = (x-4)(y-6)$.
3. En remplaçant la valeur de y dans $A(x;y)$, on obtient $A(x) = (x-4)\left(\dfrac{600}{x} - 6\right) = 624 - 6x - \dfrac{2400}{x}$
4. considérons la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 624 - 6x - \dfrac{2400}{x}$.
5. $f'(x) = -6 + \dfrac{2400}{x^2} = \dfrac{6(20-x)(20+x)}{x^2}$.

   Ainsi, pour tout $x \in]0;20]$; $f'(x) \geq 0$ et f est croissante et pour tout $x \in]20;+\infty[$ $f'(x) < 0$ et f est décroissante. On a le tableau de variation ci-dessous :

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	-116	$\searrow$	$-\infty$

6. D'après le tableau de variation, pour obtenir une surface imprimable maximale la largeur x doit valoir $20m$ et la longueur $y = \dfrac{600}{20} = 30m$.

Résumé

Étude d'une branches infinies à une courbe

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative d'une fonction f. $(\mathcal{C})$ admet une branche infinie dans les cas suivants :

- f admet une limite finie ou infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- f admet une limite infinie en un réel x_0.

Asymptotes

Définition : Soit f une fonction et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.

1. Lorsque $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=l$ $(l\in\mathbb{R})$, on dit que la droite d'équation y=l est **asymptote horizontale** à la courbe $(\mathcal{C})$ en $+\infty$ ou en $-\infty$.
2. Lorsque $\lim\limits_{x\mapsto x_0^+} f(x)=\infty$ ou $\lim\limits_{x\mapsto x_0^-} f(x)=\infty$, on dit que la droite d'équation $x=x_0$ est **asymptote verticale** à la courbe de $(\mathcal{C})$.
3. Lorsque $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ ou $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$, on dit que la droite d'équation $y=ax+b$ est **asymptote oblique** à la courbe de $(\mathcal{C})$

Remarque : Étudier la position relative de la courbe $(\mathcal{C})$ d'une fonction f par rapport à son asymptote oblique d'équation $y=ax+b$ revient à étudier le signe de $f(x)-(ax+b)$.

Exemples Soient f, g et h les fonctions définies respectivement sur $]0;+\infty[$, $]1;+\infty[$ et $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=\dfrac{1}{x}+1$, $g(x)=\dfrac{1}{x-1}$ et $h(x)=\dfrac{x(x-1)^2}{x^2+1}$.

- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=1$. Ainsi la droite d'équation $y=1$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe de f.
- $\lim\limits_{x\mapsto1^+} g(x)=\lim\limits_{x\mapsto+1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=+\infty$. Ainsi la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe de g.
- En effectuant la division euclidienne de x^3-2x^2-x par x^2+1, on obtient $f(x)=x-2+\dfrac{2}{x^2+1}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}=0$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}=0$. Donc la droite d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique à la courbe de de h. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-(x-2)=\dfrac{2}{x^2+1}>0$. Donc la courbe de h est au dessus de l'asymptote oblique $y=x-2$.

Direction asymptotique

Dans ce paragraphe on suppose que f admet une limite infinie en $+\infty$ ou $-\infty$. Dans ce cas on étudie $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ou $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Le résultat de cette étude est résumé dans le tableau ci-dessous.

Supposons que $\lim\limits_{x\mapsto\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ et $\lim\limits_{x\mapsto\infty} f(x)-ax=b$.

Résumé

$a=+\infty$ ou $a=-\infty$	Branche parabolique de direction (OJ)
$a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$	La droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote
$a\in\mathbb{R}$ et $b=-\infty$ ou $b=+\infty$	Branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=ax$
$a\in\mathbb{R}$ et b n'existe pas	Direction asymptotique celle de la droite d'équation $y=ax$
a n'existe pas	Ni asymptote, ni direction asymptotique, ni branche infinie

Exemples

- Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^3-3x-1}{x-1}$.

  On a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ de même, $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$.
  La courbe $(\mathcal{C})$ de f admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).
- Soit g la fonction définie par $g(x)=\sqrt{x}$.

  On a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$. La courbe $(\mathcal{C})$ de g admet une branche parabolique de direction (OI).
- Soit h la fonction définie par : $h(x)=\sqrt{x^2-x+1}$.

  On a $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1$ et

  $$\lim_{x\mapsto+\infty}[h(x)-x]=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

  Donc la droite d'équation $y=x-\dfrac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe de h en $+\infty$.
- Soit p la fonction définie par $p(x)=x-\sqrt{x}$.

  On a : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} p(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2-x}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x-1}{1+\dfrac{1}{x}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{p(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}[p(x)-x]=-\infty$. Donc la courbe de p admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y=x$.
- Soit l la fonction définie par $l(x)=x[1+\sin^2(x)]$

  On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $1<1+sin^2(x)$; ainsi pour tout $x\in[0;+\infty[, x<p(x)$. Donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} p(x)=+\infty$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{p(x)}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1+\sin^2(x)$. Cette dernière limite n'existe pas.

Résumé

Exercice 01

Dans chacun des cas suivants, étudie les branches infinies de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f.

$f : x \mapsto \sqrt{4x^2 - 12x + 10}$; $\quad f : x \mapsto 2x - 3\sqrt{x}$; $\quad f : x \mapsto 2x + 4 + \cos(x)$; $\quad f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Représentation graphique

Dans cette partie, $(\mathcal{C})$ désigne la courbe représentative de la fonction f.

Fonctions rationnelles Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+2x-2}{x^2}$

Ensemble de définition : Le polynôme x^2 a le nombre $x = 0$ comme racine ; donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Dérivée et sens de variation f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{(x+2)(x^2-2x+2)}{x^3}$.

On a $x^2 - 2x + 2 > 0$ ainsi pour tout $x \in D_f$, $f'(x)$ est du signe de $\dfrac{x+2}{x^3}$ ainsi :

pour tout $x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est croissante et pour tout $x \in]-2; 0[$, $f'(x) < 0$ donc, f est décroissante.

Recherche de branches infinies

- On a $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x) = -\infty$ donc, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
- On a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} x = -\infty$.

  $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

  $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} [f(x) - x] = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} [f(x) - x] = 0$; donc, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

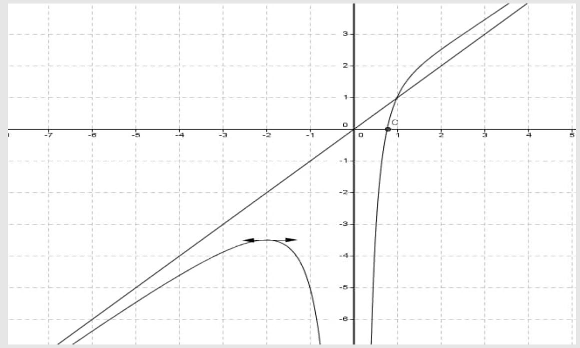
De plus pour tout $x \in D_f$, $f(x) - x = \dfrac{2x-2}{x^2}$ ainsi, pour tout $x \in]-\infty; 1[$ la courbe $(\mathcal{C})$ est en dessous de l'asymptote oblique et pour tout $x \in]1; +\infty[$ la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de l'asymptote oblique.

Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{7}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : Sur $]0; +\infty[$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $f(0,8) = 0,175$ et $f(0,7) = -0,52$ donc, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $c \in]0,7; 0,8[$.

Résumé



Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x-3}{x^2-2x-3}$

Ensemble de définition

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; +\infty[$.

Dérivée et sens de variation

f est une fonction rationnelle donc, f est dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-6(x^2+3)}{(x^2+4x-3)^2}$.

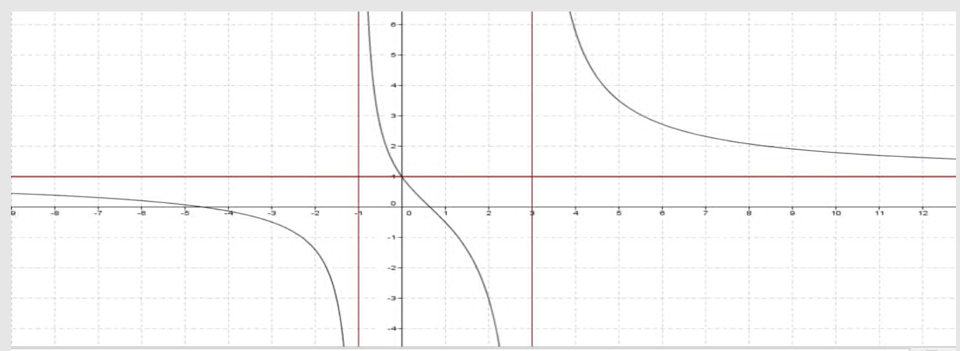
$f'(x) = 0$ n'a pas de solution. De plus pour tout $x \in D_f$, $\dfrac{x^2+3}{(x^2+4x-3)^2} > 0$. Donc, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement croissante sur D_f.

Recherche de branches infinies

- On a $\lim\limits_{x \mapsto -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$. De même, $\lim\limits_{x \mapsto 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto 3^+} f(x) = +\infty$ donc, la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C})$.
- On a $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} f(x) = 1$. Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $(\mathcal{C})$

Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1



Fonction trigonométrique

Étude de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$

Ensemble de définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2+\cos x \neq 0$ donc, $D_f = \mathbb{R}$.

De plus, $f(-x) = \dfrac{3\sin(-x)}{2+\cos(-x)} = -\dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = -f(x)$ et $f(x+2\pi) = \dfrac{3\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)} = \dfrac{3\sin x}{2+\cos x} = f(x)$. Ainsi, f est impaire et périodique de période 2π ; donc, on restreint son étude sur l'intervalle $[0;\pi]$, on trace la courbe sur $[0;\pi]$ puis, sur $[-\pi, 0]$ par symétrie de centre O puisque f est impaire intervalle et enfin par la translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{OI}$.

Dérivée et sens et variation

f est dérivable sur $x \in \mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivable sur $x \in \mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{6\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)}{(2+\cos x)^2}$. $f'(x)$ est du signe de $\cos x + \dfrac{1}{2}$ sur $[0;\pi]$. Or $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 0$ ainsi :

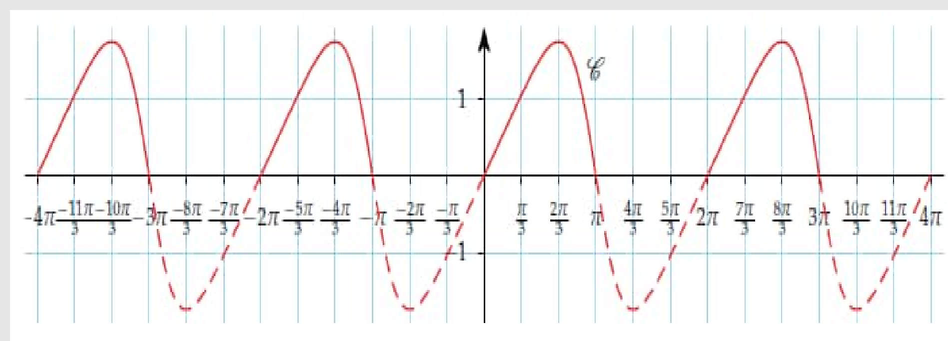
- pour tout $x \in \left[0;\dfrac{2\pi}{3}\right[$, $f'(x) > 0$ donc, f est croissante.
- Pour tout $x \in \left]\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$, $f'(x) < 0$ donc, f est décroissante.

Étude aux borne de $[0;\pi]$

$\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\mapsto \pi} f(x) = 0$.

Tableau de variation et courbe représentative.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$	0



Quatrième étape : Exercice d'application

Exercice 01

1 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

b Montre qu'il existe un unique réel $\alpha \in [2,1;2,11]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

c Déduis le signe de g sur $\mathbb{R}$.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2-1}$.

2 **a** Montre que $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $f'(x) = g(x) \times h(x)$ où h est une fonction à préciser.

b Étudie les variations f.

c Recherche les branches infinies à la courbe de f et dresse le tableau de variation de f.

3 Montre que $f(\alpha) = 3\alpha$.

4 **a** Justifie que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty;-1[$ vers un intervalle J à déterminer.

b La bijection réciproque f^{-1} de f est-elle dérivable en 1 ? Calcule $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

c Construis la courbe de f puis, celle de sa réciproque f^{-1} sur l'intervalle $]-\infty;-1[$.

Exercice 02

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x - \sin(x)$.

A) (1) Prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$.

(2) On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\vec{j})$. Soient les droites $D_1 : y = 2x - 1$ et $D_2 : y = 2x + 1$. Détermine les points communs à $(\mathcal{C})$ et D_1 d'une part, à $(\mathcal{C})$ et D_2 d'autre part. Précise les tangents à $(\mathcal{C})$ en ces points.

(3) (a) Étudie la parité de f et interprète géométriquement ce résultat.

(b) Étudie la périodicité de f et interprète ce résultat.

B) (1) Montre que f admet une application réciproque g puis, calcule $g(0)$, $g(2\pi)$ et $g(4k\pi)$, $(k \in \mathbb{Z})$.

(2) Précise le domaine de dérivabilité de g puis, calcule $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.

(3) Montre que l'équation $2x - \sin(x) = m$ admet une unique solution x_m.
On notera α la solution de l'équation $2x - \sin(x) = 4$.

C) (1) Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{2}(4 + \sin(x))$.

(a) Montre que $f(x) = 4$ est équivalent à $h(x) = x$.

(b) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.

(2) (a) Montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

(b) Montre que (u_n) converge vers un réel que l'on précisera.

Devoirs : Exercices

MODULE 27 : RELATIONS ET OPÉRATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE 18: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

LEÇON 1 : PRÉSENTATION DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN. DURÉE : 100 min

Motivation : Certaines situations de la vie nous conduisent à des équations ou inéquations du type $a^{f(x)} = b$ ou $a^{f(x)} < b$, par exemple la détermination du ph en chimie nous oblige à l'étude de certaines fonctions, d'où la connaissance de la fonction logarithme népérien.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de : ● Maîtriser les propriétés de la fonction logarithme népérien ; ● Résoudre les équations et système d'équations faisant intervenir les fonctions logarithmes népériens ;● Résoudre les inéquations et système d'inéquations faisant intervenir les fonctions logarithmes népériens. Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :

  a Résous dans $\mathfrak{C}$ les équations et inéquations suivantes : a) $2x - 4 = 5x + 3$ b) $3x^2 = 2x + 1$ c)$2x^2 + 5 < x^2 - 2x + 4$

  b On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

  i. Étudies ses variations et en déduire deux propriétés ;

  ii. Dire si cette fonction est bijective et en déduire deux propriétés.

- **Situation problème** Matip et Mahop deux élèves de la Tle C du lycée de SONGMBENGUE, essayent de tester leurs connaissances en Mathématiques, leur camarade de la même classe leur demande de donner alors une primitive de la fonction qui à x on associe $\frac{1}{x}$. Aide ces élèves à trouver cette primitive.

Solution

1 Résolvons dans $\mathcal{C}$ les équations et inéquations suivantes :

(a) $2x - 4 = 5x + 3$ $S = \{\frac{7}{3}\}$, (b) $3x^2 = 2x + 1$ $S = \{\frac{-1}{3}; 1\}$, (c) $2x^2 + 5 < x^2 - 2x + 4$ $S = \varnothing$

2 On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

i) Étudies ses variations et en déduire deux propriétés ;

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$; $\forall x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\bigcup]2; +\infty[$ $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante et $\forall x \in]-\frac{1}{3}; 2[$ $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante.

Comme propriétés de la monotonie des fonctions, nous avons :

⋆ $\forall a, b \in D_f$ tel que $a < b$, si f est croissante alors $f(a) < f(b)$ et si f est décroissante alors $f(a) > f(b)$

⋆ Si f est monotone, alors elle serait dérivable, et par conséquent elle est continue.

ii) Dire si cette fonction est bijective et en déduire deux propriétés ;

⋆ f étant une fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur IR, mais f n'étant pas monotone sur IR, alors f n'est pas bijective, car étant surjective et non injective.

⋆ Mais d'après le théorème de la bijection, les restrictions de f sur $]-\infty; -\frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[$ et sur $]-\frac{1}{3}; 2[$ réalisent des bijections.

⋆ Comme propriétés nous pouvons citer l'existence de la fonction réciproque f^{-1} tel que $f(f^{-1}(y)) = y$ et $f^{-1}(f(x)) = x$ et le fait que la fonction est à la fois croissante et décroissante.

Activité

1 Donne la valeur de e sur ta machine en tapant : "1 shift ln ="

2 En te servant de ta calculatrice, et en utilisant la touche ln, complète le tableau ci-dessous :

x	-100	-50	-25	-10	-5	-3	-1	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,5	1,9
ln(x)																			

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	e	2,8	2,9	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ln(x)																						

3 Complète les pointillés par les mots ou symboles qui correspondent :

a $\forall x < 0$, $ln(x)$ ... ; b $ln(0)$... ; c $\forall x \in]0;1[$, $ln(x)$ est toujours ... ; d $ln(1) =$... ; e $ln(e) =$... ; f $\forall x > 1$, $ln(x)$ est toujours ...

4 Construire dans un repère orthonormé la courbe de la fonction qui à x, on associe $ln(x)$

5 En déduire les variations de cette courbe

6 Cette courbe réalise une bijection de ... vers ...

Activité

1 Construire sur $[0;+\infty[$ dans deux repères orthonormés différents les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$

2 Parmi ces deux courbes, quelle peut-être la courbe qui représente celle de la dérivée de la fonction qui à x associe $ln(x)$? Justifie ta réponse.

3 Donnes alors les différentes conclusions possibles.

Activité

1 En vous servant de la touche ln sur vos calculatrices, compléter le tableau ci-contre :

2 Compléter les pointillés par le signe qui convient :

a $\forall a > 0$, $\forall n \in IN$, $ln(a^n) \ldots n\ln(a)$;

b $\forall a > 0$, $\forall x \in IR$, $ln(a^x) \ldots x\ln(a)$(En déduire la valeur de $ln(e^x)$) ;

c $\forall a > 0; b > 0$, $ln(a \times b) \ldots \ln(a) + \ln(b)$;

d $\forall a > 0$, $ln(\frac{1}{a}) \ldots - ln(a)$;

e $\forall a > 0; b > 0$, $ln(\frac{a}{b}) \ldots \ln(a) - \ln(b)$.

3 En vous servant des activités 1 et 2, compléter les pointillés par le signe qui correspond :

a) $\forall a > 0, b > 0$, si $a > b$, alors $ln(a) \ldots ln(b)$

b) $\forall a > 0, b > 0$, si $a \leqslant b$, alors $ln(a) \ldots ln(b)$

a	2	1	-4	5	-7	11	9	6
b	1	5	9	-4	-5	0	3	8
ln(a)								
ln(b)								
$ln(a^2)$								
2ln(a)								
$ln(a^3)$								
3ln(a)								
$ln(a \times b)$								
ln(a)+ln(b)								
$ln(\frac{1}{a})$								
-ln(a)								
$ln(\frac{a}{b})$								
ln(a)-ln(b)								

Solution

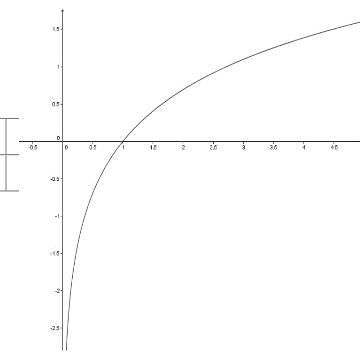
a La valeur de e est sensiblement égale à : $2,71828182845904523536028747135 27$

b

x	-100	-50	-25	-10	-5	-3	-1	0	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7
ln(x)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	-2,30	-1,20	-0,69	-0,51	-0,36

x	0,8	0,9	1	1,1	1,5	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
ln(x)	-0,22	-0,11	0	0,10	0,41	0,64	0,69	0,74	0,79	0,83	0,88	0,92	0,96

x	e	2,8	2,9	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ln(x)	1,00	1,03	1,07	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30	2,40	2,49	2,57



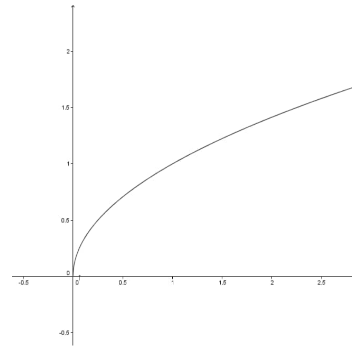
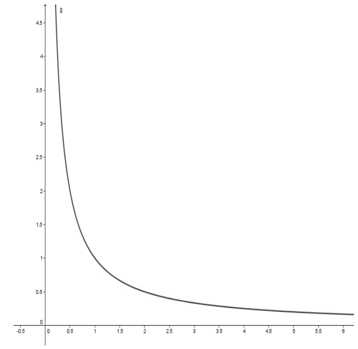
c i. n'existe pas ; ii. n'existe pas ; iii. négatif ;

i. 0 ; ii. 1 ; iii. positif.

d cette courbe est strictement croissante

e une bijection de $]0; +\infty[$ vers IR

Solution

1  

2 c'est la fonction g, car la fonction f est continue en 0 donc sa primitive devrait être continue.

3 On conclut qu'une primitive de la fonction qui à x associe $\frac{1}{x}$ est la fonction ln.

Solution

1

a	2	1	-4	5	-7	11	9	6
b	1	5	9	-4	-5	0	3	8
ln(a)	0,7	0,0	$\times$	1,6	$\times$	2,4	2,2	1,8
ln(b)	0,0	1,6	2,2	$\times$	$\times$	$\times$	1,1	2,1
$ln(a^2)$	1,4	0,0	2,8	3,2	3,9	4,8	4,4	3,6
2ln(a)	1,4	0,0	$\times$	3,2	$\times$	4,8	4,4	3,6
$ln(a^3)$	2,1	0,0	$\times$	4,8	$\times$	7,2	6,6	5,4
3ln(a)	2,1	0,0	$\times$	4,8	$\times$	7,2	6,6	5,4
$ln(a \times b)$	0,7	1,6	$\times$	$\times$	3,6	$\times$	3,3	3,9
ln(a)+ln(b)	0,7	1,6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	3,3	3,9
$ln(\frac{1}{a})$	-0,7	0,0	$\times$	-1,6	$\times$	-2,4	-2,2	-1,8
-ln(a)	-0,7	0,0	$\times$	-1,6	$\times$	-2,4	-2,2	-1,8
$ln(\frac{a}{b})$	0,7	-1,6	$\times$	$\times$	0,3	$\times$	1,1	-0,3
ln(a)-ln(b)	0,7	-1,6	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	1,1	-0,3

2 **a** $=$; **b** $=$ et cette valeur est x car $ln(e) = 1$; **c** $=$; **d** $=$; **e** $=$.

3 **a** $>$; **b** $\leqslant$.

Résumé

Définition et propriétés de la fonction ln

Définition de la fonction ln ✍ La fonction logarithme népérien notée ln ou Log est la fonction définie de IR_+^* vers IR qui s'annule en 1 et admet pour dérivée en x le nombre $\frac{1}{x}$ (i.e $ln(x)$ existe ssi $x > 0$; $ln(1) = 0$ et $(ln(x))' = \frac{1}{x}$).

Propriétés de la fonction ln

✍ Pour tout réel x, si $x \in]0; 1[$, alors $ln(x) < 0$ et si $x > 1$,alors $ln(x) > 0$.

Preuve : La fonction ln étant définie sur IR_+^* et admet pour dérivée $\frac{1}{x}$ qui est strictement positive, donc la fonction ln est strictement croissante, de plus $ln(1) = 0$, d'ou le résultat.

✍ Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$; ✍ Pour tout réel $b > 0$, on a $ln(\frac{1}{b}) = -ln(b)$.

✍ Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - ln(b)$; ✍ Pour tout réel $a > 0$ et $n \in IN$, on a $ln(a^n) = nln(a)$(**Preuve :** puisque $a^n = a \times a \times ... \times a$).

✍ P Pour tout réel $a > 0$, on a $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)$; ✍ Pour tout réel quelconque x, il existe un nombre noté e tel que $x = ln(e^x)$.

✍ Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $ln(a) = ln(b)$ est équivalent à $a = b$; ✍Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $ln(a) = ln(b)$ est équivalent à $a = b$.

✍ Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, on a $ln(a) < ln(b)$ est équivalent à $a < b$; ✍le signe $<$ pourra être remplacé par $\leqslant$; $>$ ou $>=$.

Résolution des équations et inéquations faisant intervenir la fonction ln

Résolution des équations

Équation du type : $ln(f(x)) = a$ **(ou** f **est une fonction numérique)**

Pour résoudre une telle équation, il suffit de procéder de la manière suivante :

➔ dans un premier temps, résoudre : $f(x) > 0$(Ce qui représente la condition d'existence d'une telle équation) ;

➔ Ensuite poser $a = ln(e^a)$, ce qui donne $ln(f(x)) = ln(e^a)$, i.e résoudre l'équation $f(x) = e^a$

L'ensemble solution cherché est l'intersection des deux ensembles trouvés précédemment.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $ln(3x - 1) = 3$

$ln(3x - 1) = 3$ existe ssi $3x - 1 > 0$, i.e $x > \frac{1}{3}$, d'où $S_1 =]\frac{1}{3}; +\infty[$; or $3 = ln(e^3)$, d'où $ln(3x - 1) = ln(e^3)$, i.e $3x - 1 = e^3$, i.e $x = \frac{1 + e^3}{3}$, d'où $S_2 = \{\frac{1 + e^3}{3}\}$

Comme $\frac{1 + e^3}{3} \in S_1$, alors $S = \{\frac{1 + e^3}{3}\}$

Équation du type : $ln(f(x)) = ln(g(x))$(ou f et g sont des fonctions numériques)
Pour résoudre une telle équation, il suffit :

- ➔ dans un premier temps de résoudre les inéquations $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$, et prendre l'ensemble représentant l'intersection des deux ensembles trouvés ;
- ➔ Ensuite résoudre l'équation $f(x) = g(x)$. L'ensemble solution cherché est l'intersection des deux ensembles trouvés précédemment.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $ln(x-3) = ln(-x+5)$.
$ln(x-3) = ln(-x+5)$ cette équation existe ssi $x-3 > 0$ et $-x+5 > 0$, i.e $x > 3$ et $x < 5$, d'où $S_1 =]3; 5[$; parsuite on a $x-3 = -x+5$, i.e $x = 4$, d'où $S_2 = \{4\}$, comme $4 \in S_1$, alors $S = \{4\}$.

Résolution des inéquations

Inéquations du type : $ln(f(x)) < a$**(ou** f **est une fonction numérique)**
Pour résoudre une telle inéquation, il suffit :

- ➔ Dans un premier temps de résoudre : $f(x) > 0$(Ce qui représente la condition d'existence d'une telle équation) ;
- ➔ Ensuite poser $a = ln(e^a)$, ce qui donne $ln(f(x)) < ln(e^a)$, i.e résoudre l'inéquation $f(x) < e^a$

L'ensemble solution cherché est l'intersection des deux ensembles trouvés précédemment.
Inéquations du type : $ln(f(x)) < ln(g(x))$**(ou** f **et** g **sont des fonctions numériques)** Pour résoudre une telle inéquation, il suffit :

- ➔ dans un premier temps de résoudre les inéquations : $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$, et prendre l'ensemble représentant l'intersection des deux ensembles trouvés ;
- ➔ Ensuite résoudre l'inéquation $f(x) < g(x)$.

L'ensemble solution cherché est l'intersection des deux ensembles trouvés précédemment.
Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

1 Donnez le domaine de définition des fonctions numérique définies par :

2 $f(x) = ln(-3x+6)$;

3 $g(x) = 3x - ln(x^2 - 2x - 1)$.

4 Résoudre dans IR les équations suivantes :

a $ln(3x+1) = 2$;

b $2ln(x+1) - ln(x^2 - 3x - 1) = 0$.

5 Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a $ln(3x+1) > 2$;

b $2ln(x+1) - ln(x^2 - 3x - 1) \leqslant 0$.

6 Résoudre dans IR le système suivant : $\begin{cases} 6x + 4y = 46 \\ lnx - lny = ln7 \end{cases}$

Devoirs

Exercice 01

Un inspecteur qui arrive sur le lieu d'un crime demande au médecin légiste de prendre la température de la victime. Elle est de $32C$. Il prend la température de la pièce qui est de $20C$. La loi de Newton sur le refroidissement d'un objet en milieu ambiant permet de modéliser la température de la victime en posant $T(t) = Ae^{-ct} + 20$ ou $t > 0$ représente le temps exprimé en heures depuis la mort de la victime et $T(t)$ la température de la victime à l'instant t, en degré Celsius. Sachant qu'une demi-heure plus tard ; la température de la victime est de $310C$, déterminer l'heure du crime.

Exercice 02

Proposé par l'enseignant dans le livre au programme.

LEÇON 2 : FONCTIONS CONTINUES ET STRICTEMENT MONOTONES DURÉE : 100 min

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Calculer les limites des fonctions comportant ln,
- Dériver la bijection réciproque d'une fonction numérique,
- Déterminer les primitives des fonctions qui font appelles au logarithme,
- Maîtriser les propriétés sur la continuité des fonctions logarithmiques,
- Calculer les dérivée des fonctions logarithmiques,
- Étudier le logarithme dans une base quelconque.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :

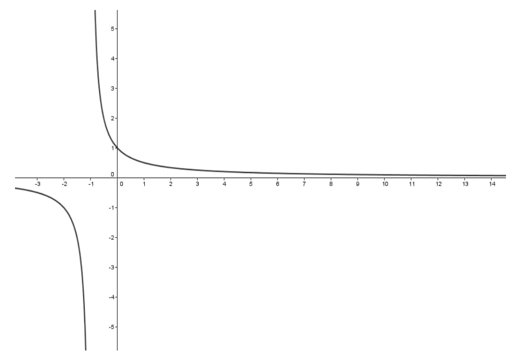
a Donne le domaine de définition de la fonction définie par : $f(x) = ln(-3x+6)$ et étudies son signe

b Donne la relation liant la vitesse instantanée d'un mobile à son déplacement, la fonction déplacement représente alors quoi pour la fonction vitesse ?

c Donnes la condition nécessaire pour qu'une fonction admette des primitives ;

- **Situation problème**

Dans un centre de recherche des performances pour athlètes en France, Un athlète effectuant un déplacement sur place a été connecté sur un appareil ou la courbe de sa vitesse instantanée est obtenu sur un oscillographe et présentée ci-dessous. On s'intéresse dès lors à la distance parcouru par l'athlète au bout de 14 secondes.



Solution

1 Donnes le domaine de définition de la fonction définie par : $f(x) = ln(-3x+6)$ et étudies son signe.

$D_f =]-\infty; 2[$ $\quad f(x) < 0$ si $x \in]\frac{5}{3}; 2[$, et $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty; \frac{5}{3}[$

2 Donnes la relation liant la vitesse instantanée d'un mobile à son déplacement, la fonction déplacement représente alors quoi pour la fonction vitesse ?

$v(\vec{t}) = \frac{dO\vec{M}}{dt}$ ou $v(\vec{t})$: est le vecteur vitesse et $O\vec{M}$: est le vecteur déplacement. La fonction déplacement représente alors une primitive de la fonction vitesse.

3 Donnes la condition nécessaire pour qu'une fonction admette des primitives ;

La condition pour qu'une fonction admette une primitive est qu'elle doit être continue.

Activité

On considère la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudier la continuité de f en -1 ;
2. Construire dans un repère orthonormé la courbe (C_f) ;
3. Donner les interprétations possibles ;

Activité

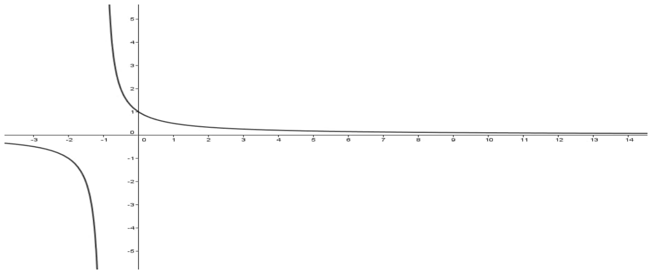
On considère la fonction g définie par $g(x) = ln(1+x)$ et (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. A l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau ci-contre :
2. Esquissez par conjecture l'allure de la courbe (C_g) dans un repère orthonormé ;
3. Étudier la continuité de (C_g) sur son domaine de définition ;
4. Donner la relation existante entre les courbes (C_f) et (C_g) ;
5. Déduire alors les limites de g en -1 et en $+\infty$;
6. Donner une valeur approchée de $g(x)$ lorsque x se rapproche de 15 ;

x	-100	-50	-25	-10	-5	-1	-0,5	0	1	5	10	15
ln(1+x)												

Solution

1. Le domaine de définition de la fonction f est $IR - \{-1\}$; ainsi la limite de f en -1^- est $-\infty$, d'où f n'est pas continue en -1.
2. Voir le graphe ci-contre :
3. Comme interprétations, on peut dire :



- Cette courbe est discontinue en -1 ;
- Cette courbe est strictement décroissante ;
- la fonction f est positive pour les x dans $]-1;+\infty[$ et négative pour les x dans $]-\infty;-1[$;
- La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$.

Solution

1 Voir le tableau ci-dessous :

x	-100	-50	-25	-10	-5	-1	-0,5	0	1	5	10	15	20
ln(1+x)	×	×	×	×	×	×	-0,69	0	0,69	1,79	2,40	2,77	3,04

2 .

3 On constate que (C_g) est continue sur son domaine de définition qui est $]-1;+\infty[$.

4 On constate que sur $]-1;+\infty[$, (C_g) est croissante et f est positive.

5 On constate que la limite de g en -1 n'existe pas, et la limite de g en $+\infty$ est $+\infty$.

6 Une valeur approchée de $g(x)$ lorsque x se rapproche vers 15 est $2,77$.

Troisième étape : Résumé

Résumé

✎ La fonction logarithme népérien notée ln ou Log est continue en tout point de son domaine de définition.

✎ On a les limites de référence ci-dessous :
✯ $\lim_{x\to 0^+}[ln(x)] = -\infty$ ✯ $\lim_{x\to +\infty}[ln(x)] = +\infty$ ✯ $\lim_{x\to +\infty}[\frac{ln(x)}{x}] = 0$ ✯ $\lim_{x\to 0^+}[xln(x)] = 0$ ✯ $\lim_{x\to 1}[\frac{ln(x)}{x-1}] = 1$ ✯ $\lim_{x\to 0}[\frac{ln(x+1)}{x}] = 1$

✎ Pour tout réel $\alpha > 0$: ✯ $\lim_{x\to 0^+}[x^\alpha ln(x)] = 0$ ✯ $\lim_{x\to +\infty}[\frac{ln(x)}{x^\alpha}] = 0$

Exemples Calculer les limites suivantes :a) $\lim_{x\to +\infty}[ln(x - ln(x))]$; b) $\lim_{x\to 0^+}[ln(x) - \frac{1}{x}]$

Solution :

1 $\lim_{x\to +\infty}[ln(x - ln(x))] = +\infty$;

2 $\lim_{x\to 0^+}[ln(x) - \frac{1}{x}] = -\infty$.

✎ Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction $ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $(ln(u))\prime = \frac{u'}{u}$.

Exemples Calculons la dérivée de la fonction définie par : $f(x) = ln(x^3 - 3x^2 + 2x - 5)$.

✎ Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I. La fonction $\frac{u'}{u}$ admet pour primitive sur I les fonctions $ln(|u|) + k$, $k \in IR$.

Exemples Déterminer la primitive de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ qui prend la valeur -1 en 0.

✎ Soit a un réel strictement positif,on appelle le logarithme en base a la fonction noté log_a ou Log_a et définie sur IR_+^*, par $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$.

Remarque : Le logarithme en base 10 est noté tout simplement par log, c'est lui qu'on utilise pour calculer le ph des solutions chimique connaissant la concentration.

Quatrième étape : Exercice d'application

Exercice 01

1 Donnez le domaine de définition, puis calculer les limites aux bornes de ces domaines des fonctions numérique définies par :

a $f(x) = ln(x^2 - 3x + 2)$;

b $g(x) = ln|\dfrac{x-3}{x-2}|$.

2 Calculer les dérivées des fonctions données ci-dessus.

3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a $h(x) = \dfrac{cosx}{sinx}$;

b $t(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$.

Devoirs : Exercices

LEÇON 3 : ÉTUDES DE CERTAINES FONCTIONS FAISANT INTERVENIR LE LOGARITHME NÉPÉRIEN DURÉE : 100 min

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- Construire les courbes des fonctions faisant intervenir ln ;
- Interpréter les courbes des fonctions faisant intervenir le logarithme dans une base quelconque.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis :**

a Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

b $f(x) = ln(4-x) + ln(x)$;

c $g(x) = 2x(1 - ln(x))$

d Réduis les nombres A et B : $A = 2ln3 + ln2 + ln\frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}ln9 - 2ln3$

Situation Problème : Dans un plan parfait, on étudie la trajectoire de deux objets, l'un se déplaçant suivant une fonction logarithmique en fonction du temps donnée par l'expression : $t \to ln(-t+3)$ et l'autre suivant la première de bissectrice. On s'intéresse sur le nombre de points de rencontre des deux trajectoires.

Solution

1 Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous :

a $f(x) = ln(4-x) + ln(x)$ $\quad D_f =]0;4[$; $D'_f = IR - \{0;4\}$ et $f'(x) = \frac{4-2x}{x(4-x)}$;

b $g(x) = 2x(1 - ln(x))$ $\quad D_g =]0;+\infty[$; $D'_g =]0;+\infty[$ et $g'(x) = -2lnx$.

2 Écrire les nombres A et B à l'aide d'un seul logarithme : $A = 2ln3 + ln2 + ln\frac{1}{2}$; $B = \frac{1}{2}ln9 - 2ln3$.

$A = 2ln3$ $\qquad B = -ln3$

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

On considère la fonction f définie par $f(x) = ln(-x+3) - x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Déterminer son domaine de définition et les limites aux bornes de ce domaine ;

2 Calculer sa dérivée et étudier le signe de cette dérivée ;

3 Dresser son tableau de variations ;

4 Déterminer le nombre de points d'intersection de (C_f) avec l'axe des abscisses.

Solution

1 Son domaine de définition est : $D_f =]-\infty; 3[$.

2 Sa dérivée est : $f'(x) = \dfrac{x-4}{3-x}$ et $\forall x \in]-\inf; 3[,\ f'(x) < 0$.

3 .

4 Le nombre de points de (C_f) avec l'axe des abscisses est 1.

Troisième étape : **Résumé**

Résumé

✎ On considère la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1 + lnx}{x}$.On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$(unité graphique : 2cm).

1 Déterminons la limite de h en 0. Interprétons graphiquement ce résultat.

2 Déterminons la limite de h en $+\infty$. Montrons que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).
Déterminons la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0; +\infty[$. Montrons que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera.

3 Étudions le sens de variation de h. Dressons le tableau de variation de h.

4 Montrons qu'il existe un unique point B de la courbe (C) ou la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B.

5 Montrons que l'équation $h(x) = 0$ a une unique solution α. Exprimons $ln(\alpha)$ en fonction de α. Montrons que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31 < \alpha < 0,35$

6 Représentons succinctement la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

SOLUTION : La solution est menée par l'enseignant avec la participation et l'interaction des apprenants.

Quatrième étape : **Exercice d'application (30 minutes)**

Exercice 01

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - 2ln(x+1)$

1 Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2 Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désignera par α, appartient à $[-0,72; -0,71]$;

3 Donner le signe de $f(x)$, pour $x \in]-1; +\infty$

Partie B :

Soit g la fonction définie sur l'ensemble l'ensemble $D =]-1;0[\cup]0:+\infty$ par : $g(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x^2}$

1. Étudier les limites de g aux bornes de D
2. Calculer la dérivée de g, et déduire à l'aide de la partie A, son signe.
   Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$
3. Dresser le tableau de variation de g
4. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal(unité graphique :2cm)
5. Soit h la fonction définie sur D par : $h(x) = \dfrac{ln(x+1)}{x^2} - \dfrac{1}{x(x+1)}$.
   a. Déterminer les fonctions u et v telles que l'on puisse écrire $h(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ et en déduire une primitive de h.
   b. Après avoir vérifié que $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$
   c. Déduire des questions précédentes, une primitive de g.

Devoirs : Exercices

MODULE 27 : ORGANISATION ET GESTION DES DONNEÉS

CHAPITRE 19:PROBABILITÉS

LEÇON 1 : EXPÉRIENCES ALÉATOIRES ET NOTION DE PROBABILITÉ. DURÉE : 100 min

Motivation : La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude des phénomènes dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude; c'est-à-dire des phénomènes dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard : ***expériences aléatoires***. Par exemples :*lancer du dé, lancer d'une pièce de monnaie, mise en service d'une ampoule,lancer de la flèche sur une cible*... Bien que le résultat précis de chacune de ces expériences soit imprévisibles, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. La théorie des probabilités permet de donner un sens précis à ces un peu vagues. La statistique permet de confronter les modèles probabilistes avec la réalité observée afin de les valider ou pas.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de : ● définir une expérience aléatoire et donner des exemples, ● se familiariser avec le vocabulaire des probabilités(univers, évènements, évènement impossible, évènement certain, éventualités, évènement élémentaire), ● donner à partir des exemples d'expériences aléatoires, tirés de la vie courante des éventualités, l'univers de toutes les possibilités, des évènements, etc, ● reconnaitre deux évènements incompatibles, ● définir et calculer la probabilité d'un événement.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :

  Déterminer l'ensemble de tous les 4−liste d'un ensemble E à 6 éléments.

  Combien y'a t-il d'applications à définir d'un ensemble E à 24 éléments vers un ensemble F à 36 éléments.

  Dans une classe de 54 élèves, chaque élève pratique au moins le football ou le basketball. 40 pratiquent le football et 30 le basketball. Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent uniquement le football; uniquement le basketball.

- **Situations problèmes**

  • Anne et pierre décident d'acheter un billet de loterie. Anne dit :" Donnez-moi un billet qui se termine par 3". Pierre dit : "Ce serait mieux qu'il se termine par 9".

  Lequel des deux a raison? Pourquoi? Peut-on prévoir à l'avance par quel chiffre se terminera le numéro gagnant du gros lot?

  • ***premier Problème du Chevalier de Méré***

  Le Chevalier de Méré adepte des jeux aux hasard, posa un jour cette question à Pascal : "Quel est le plus probable(*en d'autres termes, qui a le plus de chance*) entre : obtenir au moins un 6 en lançant 4 fois de suite un dé cubique, ou obtenir au moins un double 6 en lançant 24 fois de suite deux dés?"

  Aide Pascal à répondre à la préoccupation du chevalier de Méré.

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Roméo dispose de deux dés parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 pour jouer à un jeu lui offrant deux possibilités :

- ***Première possibilité* :** lancer 4 fois de suite un de ces dés.
- ***Deuxième possibilité* :** lancer plutôt 24 fois de suite les deux dés.

Notons Ω l'ensemble des résultats possibles que Roméo peut avoir après le lancer et considérons les évènements suivants :

- A :"obtenir au moins un 6 en 4 lancers d'un dé"
- B : "obtenir au moins un double 6 en 24 lancers de deux dés".

P_1 et P_2 désignent respectivement les proportions des évènements A et B sur l'ensemble total de toutes les valeurs possibles.

1. Roméo peut-il déterminer avec certitude le numéro de la face supérieure qui doit s'affiche après le lancer du dé ?
2. Déterminer l'ensemble Ω des résultats possibles dans chacun des cas ainsi que son cardinal.
3. Déterminer 2 sous-ensembles de Ω à un seul élément, 4 éléments et 6 éléments ; conclure.
4. Déterminer le nombre d'élément des ensembles A et B.
5. Déduire les valeurs de P_1 et P_2 puis répondre à question posée à la situation problème.

Solution

1. ***Non :*** Nous ne pouvons pas déterminer avec certitude le numéro de la face supérieure qui doit s'afficher après le lancer du dé car cela résulte du hasard. On dit qu'on a réalisé **une expérience aléatoire**.
2. Dans le premier cas, Ω est l'ensemble des $4-$listes de l'ensemble à 6 éléments ; c'est-à-dire

$$\Omega = \{(x, y, z, t);\ x, y, z, t \in \{1, \cdots, 6\}\}$$

et son cardinale est $card(\Omega) = 6^4$.
Dans le second, Ω est l'ensemble $24-$listes de ensemble à 36 éléments ; c'est-à-dire

$$\Omega = \{(i_1 \cdots i_{24});\ i_1, \cdots, i_{24} \in \{1, \cdots, 36\}\}$$

et son cardinal est $card(\Omega) = 36^{24}$.
On appelle Ω **l'univers** associé à cette expérience.

3. Évident
4. On sait que pour chaque lancer d'un dé, on a 6 possibilités et 5 possibilités de n'obtenir aucun 6 en 4 lancers. D'où

$$Card(A) = card(\Omega) - card(\overline{A}) = 6^4 - 5^4 = 671.$$

De la même façon, pour chaque lancer des deux dés, on a $6 \times 6 = 36$ possibilités, et 35 possibilités autres que le double 6. D'où

$$card(B) = card(\Omega) - card(\overline{A}) = 36^{24} - 35^{24} = 1,103312 \times 10^{37}$$

.

Solution

1 On déduit de la question précédente que : $P_1 = \dfrac{671}{1296} \simeq 0,51$ et $P_2 = \dfrac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} \simeq 0,49$.

solution situation problème :
Pour la première possibilité, on a 671 chances sur 1296 d'obtenir au moins un 6 en 4 lancers d'un dé, soit environ 51% de chances. Et pour la seconde, on a $1,103312 \times 10^{37}$ chances sur 36^{24} d'obtenir au moins un double 6 en 24 lancers de deux dés, soit environ 49% des chances. On peut alors conclure que la première possibilité est plus probable que la seconde car $P_1 \geq P_2$; mais de façon si insignifiante qu'il était impossible au chevalier de s'en apercevoir...

Troisième étape : **Résumé**

Résumé

A-Vocabulaire

Définition : 45 **Une expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut pas prédire avec certitude quel en sera le résultat,résultat qui dépend en effet du hasard.**Exemple : Lancer du dé, lancer de la pièce de monnaie, l'enfant à naitre sera une fille** $\cdots$

♦ A chaque expérience aléatoire, on associe l'ensemble des résultats possibles appelé **univers**. On le notera Ω.
♦ On appelle **éventualités** (**issues** ou **possibilités**), les différents résultats de l'univers. Ce sont des éléments de Ω.
♦ Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés **évènements**.
♦ On appelle **éventualités** (**issues** ou **possibilités**), les différents résultats de l'univers. Ce sont des éléments de Ω.
♦ Les sous-ensembles de l'univers Ω sont appelés **évènements**.
♦ Les événements formés d'un seul élément sont appelés **événements élémentaires**.
♦ Étant donné un univers Ω, l'événement Ω est **l'évènement certain**.
♦ L'ensemble vide est **l'événement impossible**.
♦ L'évènement formé des éventualités qui sont dans A et dans B est noté $A \cap B$ et se lit "A ***inter*** B".
♦ L'événement formé des éventualités qui sont dans A ou dans B est noté $A \cup B$ et se lit "A ***union*** B".
♦ Étant donné un univers Ω et un évènement A, l'ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A constitue un évènement appelé **évènement contraire** de A, noté $\overline{A}$.
♦ A et B sont **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et on note le numéro de la face supérieure puis considérons les ensembles suivants : A :"Le numéro obtenu est un multiple de 2" et On lance un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 4 et on note le numéro de la face supérieure puis considérons les ensembles suivants : A :"Le numéro obtenu est un multiple de 2" et B :"Le numéro obtenu est supérieur à 3".

1 Déterminer l'univers Ω associe à cet épreuve

2 Déterminer tous les évènements élémentaires de Ω.

3 Déterminer l'évènement contraire de B. A et B sont-ils incompatibles ?

"Le numéro obtenu est supérieur à 3".

1 Déterminer l'univers Ω associe à cet épreuve

2 Déterminer tous les événements élémentaires de Ω.

3 Déterminer l'événement contraire de B. A et B sont-ils incompatibles ?

Résumé

Pour décrire mathématiquement une expérience aléatoire, on choisit un modèle de cette expérience; pour cela on détermine l'univers et on associe à chaque évènement élémentaire un nombre appelé **probabilité**.

B) Définition probabilité d'un évènement

La probabilité d'un évènement est un **nombre** qui traduit la **chance** que l'évènement se réalise. Ce nombre peut s'écrire :

1 • **avec une fraction**, par exemple $\frac{1}{2}$, 2 • **avec un pourcentage**, par exemple 50%, 3 • **avec un nombre décimal**, par exemple $0,5$.

Soit Ω un ensemble fini. On appelle **probabilité** sur Ω l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$(ensemble des parties de Ω) à valeurs dans $[0,1]$ qui à toute partie A de Ω, associe $p(A)$ vérifiant les conditions suivantes :

■ $p(\Omega) = 1$ et $p(\emptyset) = 0$;

■ La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. Ainsi, si $A = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ alors :

$$0 \leq p(\{x_i\}) \leq 1 \text{ et } p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{x_i\});$$

On note $p_i = p(\{x_i\})$ ou parfois plus simplement $p(x_i)$ la probabilité des événements élémentaires $\{x_i\}$. Définir une **loi de probabilité**, c'est déterminer les probabilités $p_1, p_2, \cdots, p_n$ tels que, pour tout $i, 0 \leq p_i \leq 1$et $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$; On le dispose le plus souvent dans un tableau

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	total
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Exemple : On considère l'ensemble E des entiers de 20 à 40. On choisit l'un de ces nombres au hasard. A est l'événement : "le nombre est multiple de 3", B est l'événement : "le nombre est multiple de 2 " , C est l'événement : "le nombre est multiple de 6". Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

Quatrième étape : Exercice d'application

Devoirs : Exercices

LEÇON 2 : ÉQUIPROBABILITÉS ET PROPRIÉTÉS DE PROBABILITÉ DURÉE : 100 min

Motivation : La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude des phénomènes dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude ; c'est-à-dire des phénomènes dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard : ***expériences aléatoires***. Par exemples :*lancer du dé, lancer d'une pièce de monnaie, mise en service d'une ampoule,lancer de la flèche sur une cible*... Bien que le résultat précis de chacune de ces expériences soit imprévisibles, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. La théorie des probabilités permet de donner un sens précis à ces un peu vagues. La statistique permet de confronter les modèles probabilistes avec la réalité observée afin de les valider ou pas.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- calculer la probabilité d'un évènement dans une situation d'équiprobabilité,
- démontrer et utiliser les propriétés basiques des probabilités.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :
  $\hookrightarrow$ Théorie des ensembles finis(réunion d'ensemble, intersection,complémentaire,cardinal).
- **Situation problème**
  Le jeune Bob obtient des résultats peu satisfaisants à l'école. Pour le motiver, sa maman lui propose le jeu suivant : " à chaque fois qu'il obtient une bonne note, il peut tirer successivement et sans remise 3 boules dans une urne contenant 2 boules blanches, 4 boules bleues et 3 boules jaunes, toutes indiscernables au toucher." Le tirage d'une boule blanche lui fait perdre $-500F$, une boule bleue lui fait gagner $500F$ et une boule jaune lui donne $1000F$. Il faut noter qu'il perd automatiquement le jeu lorsque le cumul(somme) de son gain algébrique est négatif ou nul. Le jeune Bob a-t-il au moins 60% de gagner ce jeu ?

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

3 boules dans une urne contenant 2 boules blanches, 4 boules bleues et 3 boules jaunes, toutes indiscernables au toucher.Le tirage d'une boule blanche fait perdre $-500F$, celle d'une boule bleue fait gagner $500F$ et une boule jaune fait gagner aussi $1000F$. Pierre effectue un tirage de 3 boules l'une après l'autre et sans remise dans cette urne.

1. Déterminer l'univers Ω des cas possibles et son cardinal.
2. Déterminer l'ensemble E des gains possibles obtenus par Pierre après les 3 tirages.
3. Déterminer les chances de réalisation(probabilités) des événements élémentaires $\{1500\}$, $\{0\}$ et $\{-500\}$ sur l'ensemble des valeurs possibles Ω.
4. Donner la solution de la situation problème.

Solution

Considérons les événements suivants :

- A :"Obtenir exactement 2 boules bleues et une boule blanche après ces trois tirages",
- B : "Obtenir exactement 2 boules blanches et une boule jaune après ces trois tirages",
- C : " Obtenir exactement 2 boules blanches et une boule bleue après ces trois tirages".

Solution

1 Déterminons l'univers Ω des cas possibles et son cardinal.
Ω est l'ensemble des tirages avec remise de trois boules dans une urne contenant 9. Son cardinal est $card(\Omega) = A_9^3 = 504$.

2 Déterminons l'ensemble E des gains possibles obtenus par Pierre après les 3 tirages.

$$E = \{-500, 0, 1000, 1500, 2000, 3000\}.$$

3 Calculons les probabilités. On a :

- $P(\{0\}) = \dfrac{3 \times A_4^2 \times A_2^1}{A_9^3} + \dfrac{3 \times A_2^2 \times A_3^1}{A_9^3} = \frac{45}{252} = C \cap \{0\} P(A) + P(B)$. Or $\{0\} = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, alors on peut déduire que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(\{-500\}) = P(C) = \dfrac{3 \times A_2^2 \times A_4^1}{A_9^3} = \dfrac{1}{21} = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)}$.

4 Solution de la situation problème
Pour gagner, Pierre doit réaliser l'événement contraire $C \cup \{0\}$. Donc il suffit de déterminer la probabilité de l'événement $\overline{C \cup \{0\}}$. Alors

$$P\left(\overline{C \cup \{0\}}\right) = \frac{card(C \cup \{0\})}{card(\Omega)} = \frac{card(\Omega) - card(C \cup \{0\})}{card(\Omega)} = 1 - (P(C) + P(\{0\})) = \frac{195}{252} \simeq 0,7738$$

car $card(C \cap \{0\}) = 0$, puisque $C \cap \{0\} = \emptyset$.
Le jeune Bob a $77,38\%$ de chances de gagner ce jeu.

Troisième étape : **Résumé**

Résumé

A-Propriétés élémentaires des probabilités

Soit p une probabilité sur l'univers Ω, A et B deux événements de Ω. Alors

- $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + p(B) - P(A \cap B)$,
- Si A et B sont incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemple : Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard. On note E_1="la ligne A est occupée" et E_2="la ligne B est occupée". Après étude statistique, on admet les probabilités : $P(E_1) = 0,5$, $P(E_2) = 0,6$ et $P(E_1 \cap E_2) = 0,3$. Calculer la probabilité des évènements :

- F :"la ligne A est libre",
- G :" une ligne au moins est est occupée",
- H :"une ligne au moins est libre".

Résumé

Définition d'Équiprobabilité

On dit qu'il y a **équiprobabilité** quand tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans une situation d'équiprobabilité, si $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ a n éléments et si E est un évènement composé de m évènements élémentaires alors :

$$p(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

où $card(E)$ et $card(\Omega)$ désignent respectivement le nombre d'éléments de E et de Ω. On le mémorise souvent en disant que c'est le nombre de cas **favorables** divisé par le nombre de **cas possibles.**

Dans ce cas $p_i = p(\{x_i\}) = \frac{1}{n}, \forall 1 \leq i \leq n$

Remarque : Les expressions suivantes : "dé équilibré ou parfait"," boule tirée de l'urne au hasard ", boules indiscernables au toucher, cartes bien battues, pièce équilibrée ou parfaite, $\cdots$ indiquent que, pour les expériences réalisées, le ***modèle associé est l'équiprobabilité***.

Exemple Deux joueurs montrent simultanément un, deux ou trois doigts. On suppose que chacun des deux joueurs montrent de façon équiprobable un, deux ou trois doigts.

1. Quelle est la probabilité que les deux joueurs montrent le même nombre de doigts ?

   Rep : On note C l'évènement : "les deux joueurs montrent le même nombre de doigts" ; alors $P(C) = \frac{3}{9}$.

2. Quelle est la probabilité que le nombre total de doigts montrés par les deux joueurs soit un nombre pair ? ***Rep :*** On note D :" le nombre total de doigts est pair" ; $P(D) = \frac{5}{9}$.

Exemple : Robert fait ses affaires pour aller skier. Son armoire est remplie de dix paires de gants. Il décide de prendre au hasard quatre gants. Quelle est la probabilité qu'il tire :

1. deux paires complètes ?
2. au moins une paire ?
3. une paire et une seule ?

Quatrième étape : Exercice d'application

Exercice 01

On considère un jeu de32 cartes truqué qui possède deux dames de cœur.

1. On tire n cartes au hasard dans le jeu. Calculer la probabilité de s'apercevoir que le jeu est truqué.
2. On suppose $n = 4$ et on renouvelle l'expérience consistant à tirer 4 cartes du jeu(en remettant les 4 cartes tirées chaque fois). Quel est le nombre minimum d'expériences à réaliser pour qu'on s'aperçoive que le jeu est truqué avec une probabilité de $0,95$.

Exercice 02

On lance deux fois de suite un dé équilibré.

1. Représenter dans un tableau les 36 issues équiprobables .
2. Calculer la probabilité des événements :
   A : " on obtient un double " ; B : "on obtient 2 numéros consécutifs " ; C : " on obtient au moins un 6" ; D : " la somme des numéros dépasse 7".

Exercice 03

On lance 4 fois de suite une pièce équilibrée.

1 Dresser la liste des issues équiprobables.

2 Quel est l'événement le plus probable : A ou B ?

A : " 2 piles et 2 faces " ; B : " 3 piles et 1 face ou 3 faces et 1 pile".

Devoirs : Exercices

LEÇON 3 : VARIABLES ALÉATOIRES DURÉE : 100 min

Motivation : La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude des phénomènes dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude ; c'est-à-dire des phénomènes dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard : ***expériences aléatoires***. Par exemples :*lancer du dé, lancer d'une pièce de monnaie, mise en service d'une ampoule,lancer de la flèche sur une cible*... Bien que le résultat précis de chacune de ces expériences soit imprévisibles, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. La théorie des probabilités permet de donner un sens précis à ces un peu vagues. La statistique permet de confronter les modèles probabilistes avec la réalité observée afin de les valider ou pas.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire,
- donner les caractéristiques d'une variable aléatoire (variance, espérance mathématique et fonction de répartition).

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :

  Un professeur de science donne une interrogation qui comporte quatre questions. Pour chaque question, le professeur propose deux réponses : l'une juste et l'autre fausse et l'élève doit choisir parmi les deux réponses. Un élève qui n'a rien appris répond à chacune des ces quatre questions. L'éleve gagne 5 point pour chacune des réponses justes et perd 3 points par réponse fausse. Si le total des points est négatif, il obtient 0. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles des notes que chaque peut avoir puis déterminer la loi de probabilité de cet expérience.

  On considère deux groupes d'élèves dans une classe de terminale C. Nous relevons leurs notes de mathématiques dans les deux tableaux suivants :

Notes(groupe A)(x_i)	8	9	10	11
Effectif(n_i)	2	2	1	1

Notes(groupe B)(x_i)	6	8	9	13	14
Effectif(n_i)	2	2	2	1	1

  Calculer la moyenne et l'écart-type de chaque groupe. Comparer les deux groupes.

  Représentation graphique par des diagrammes cumulatif des séries statistiques.

- **Situations problèmes** Un joueur lance un dé à six faces : si le numéro est un nombre premier, le joueur gagne une somme égale au nombre considéré multiplié par dix (en FCFA) ; sinon il perd ce même nombre multiplié par dix de FCFA. Ce jeu est t-il favorable au joueur ?

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Paul lance un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et note le numéro de la face supérieur qui s'affiche. Si le numéro est un nombre premier, Paul gagne une somme égale au nombre considéré multiplié par dix (en FCFA) ; sinon il perd ce même nombre multiplié par dix de FCFA. Soit X le gain algébrique réalisé par Paul et Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire.

Activité

1 Détermine l'ensemble des valeurs possibles prises par X noté $X(\Omega)$.

2 Défini la loi de probabilité de X.

3 Calcule la moyenne et l'écart-type de la série des valeurs (x_i, p_i),$i = 1\cdots 6$ où $p_i = P(X = x_i)$ est la fréquence de la modalité x_i.

4 Soit F_X la fonction de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ qui à, tout x associe

$$F_X(x) = F_k = \sum_{i=1}^{k} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i \text{ avec } k \text{ tel que } x_k \leq x < x_{k+1},\ k = 1\cdots 6.$$

Détermine F_X et représente.

5 En déduis la solution de la situation problème.

Solution

1 Déterminons l'ensemble des valeurs possibles prises par X noté $X(\Omega)$.
On a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Puisque, si le numéro de la face supérieure est un nombre premier, Paul gagne une somme égale au nombre considéré multiplié par dix (en FCFA) et perd ce même nombre multiplié par dix sinon, alors

$$X(\Omega) = \{-60, -40, -10, 20, 30, 50\}.$$

2 Définissons la loi de probabilité de X.

$X = x_i$	-60	-40	-10	$+20$	$+30$	$+50$	Total
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
F_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1	
$x_i p_i$	$-\frac{60}{6}$	$-\frac{40}{6}$	$-\frac{10}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{30}{6}$	$\frac{50}{6}$	$-\frac{10}{6}$
$x_i^2 p_i$	$\frac{3600}{6}$	$\frac{1600}{6}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{400}{6}$	$\frac{900}{6}$	$\frac{2500}{6}$	$\frac{9100}{6}$

3 Calculons la moyenne arithmétique et l'écart-type écart-type de la série (x_i, p_i),$i = 1\cdots 6$ où $p_i = P(X = x_i)$ est la fréquence de la modalité x_i.
La moyenne la série (x_i, p_i) est

$$\overline{X} = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{6} p_i} = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -\frac{10}{6}.$$

La Variance est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - [E(X)]^2 = \frac{9100}{6} - \frac{100}{36} = \frac{54500}{36} = 1513,88.$$

L'écart-type est : $\Sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 38,9.$

Solution

1 Déterminons F_X et représentons.
Voir la détermination des F_k ci-dessus dans le tableau.
Représentation à suivre

2 Solution de la situation problème
Puisque le gain moyen du joueur $\overline{X} = E(X) < 0$, alors on conclut que le jeu est pas favorable au joueur.

Troisième étape : **Résumé**

Résumé

A-Définition : Variable Aléatoire

On considère une épreuve d'univers Ω.
■ Une **variable aléatoire X** est une application définie sur Ω muni d'une probabilité P, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
■ L'ensemble des valeurs prises par X, c'est-à-dire $X(\Omega)$ est appelé **univers image**.
■ X prend les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec les probabilités $P_1, P_2, \cdots, P_n$ définies par : $P_i = P(X = x_i)$.
■ L'affectation des P_i aux x_i permet de définir une nouvelle loi de probabilité. Cette loi notée P_X, est appelée **loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**)de X.
Remarque :Lorsque Ω est fini, la variable aléatoire est dite **discrète**.

B-Caractéristiques d'une Variable Aléatoire

On considère une épreuve d'univers Ω fini muni de la probabilité P. Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \cdots, x_n$ avec les probabilités $P_1, P_2, \cdots, P_n$.
▶ On appelle **espérance mathématique** de X, le nombre réel défini par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$.
▶ On appelle **variance de X**,le nombre réel défini par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - [E(X)]^2$.
▶ **l'écart-type** est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V(X)}$.
Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité discrète uniforme (**équiprobabilité**). Dans ce cas les valeurs de X correspondent au rang $x_i = i(\forall i \in [1, n])$

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Preuve : Exercice.

C-Propriétés d'une Variable Aléatoire

Soient X, Y deux variables aléatoires, $a, b \in \mathbb{R}$.

1 $E(b) = b$ et $V(b) = 0$,

2 $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX+b) = aE(X) + b$.

Résumé

■ $V(aX) = a^2V(X)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ avec $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Remarque :Si X et Y sont indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$.

D-Fonction de répartition

Définition : Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω de probabilité P.
La fonction de répartition de X est l'application F_X de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ qui à, tout x associe $F_X(x) = p(X \leq x) = p(X \in]-\infty, x[)$.
Lorsque X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{x_1, \cdots, x_n\}$ avec $x_1 < \cdots < x_n$ alors pour $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{k} p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{k} p_i \text{ avec } k \text{ tel que } x_k \leq x < x_{k+1}$$

.
La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est constante par morceaux.
Propriété : Soit F_X la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète X, alors :

1. $\forall t \in \mathbb{R}$, $0 \leq F_X(t) \leq 1$;
2. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$;
4. Si $a \leq b$, $p(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Remarque :Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise **un diagramme en bâtons** pour visualiser la **distribution des probabilités** et une fonction en escalier pour la **fonction de répartition**.
Exemple : On lance trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne $200F$ pour chaque résultat " pile " et on perd $100F$ pour chaque résultat "face". On introduit X la variable aléatoire égale au gain obtenu après le lancer.

1. Quel est l'ensemble E des issues possibles ?
2. Quelles sont les valeurs prises par X.
3. Détermine la loi de probabilité de X et sa fonction de répartition F_X.
4. Représente graphiquement cette distribution de probabilités et la fonction de répartition F_X.

Quatrième étape : **Exercice d'application**

Exercice 01

On lance deux dés. On note X la variable aléatoire égale au plus grand chiffre obtenu après le lancer.

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. Déterminer la loi des probabilités de cet expérience puis sa fonction de répartition et représenter.

Devoirs : Exercices

LEÇON 4 : LES LOIS DE PROBABILITÉ. DURÉE : 100 min

Motivation : La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude des phénomènes dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude ; c'est-à-dire des phénomènes dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard : ***expériences aléatoires***. Par exemples :*lancer du dé, lancer d'une pièce de monnaie, mise en service d'une ampoule,lancer de la flèche sur une cible*... Bien que le résultat précis de chacune de ces expériences soit imprévisibles, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. La théorie des probabilités permet de donner un sens précis à ces un peu vagues. La statistique permet de confronter les modèles probabilistes avec la réalité observée afin de les valider ou pas.

Objectifs pédagogiques : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- définir et utiliser une loi Bernoulli ;
- définir et utiliser une loi binomiale ;
- Démontrer les formules de l'écart-type et espérance mathématique pour une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli ou une loi binomiale.

Première étape : Introduction

- **Pré-requis** :

  ✓ Jean se trouve devant un coffre fort et a deux chances sur cinq d'ouvrir ce dernier. Il effectue de façons indépendantes 5 essais. Construire un arbre pondéré de cette situation et déterminer la probabilité d'ouvrir exactement 3 fois ce coffre au cours de ces 5 essais.

  ✓ On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Construire un arbre de cette épreuve.

  ✓ Construire le triangle de Pascal.

- **Situations problèmes**

  Mamadou le restaurateur de votre lycée se confie à vous en ces termes : ≼ j'accueille à chaque pause 5 clients. Par ailleurs, je sais qu'en moyenne, trois clients sur cinq prennent une crème. Mais je pense que si je prépare trois crèmes, dans au plus 80% des cas, la demande sera satisfaite.≽

  Mamadou a t'il raison de penser ainsi ?.

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

Chez IDRISSOU le boutiquier de votre quartier, chaque client a deux choix de commande possibles : soit commandé les beignets ou commandé autre chose que cela. La probabilité p de commander un beignet est de $\frac{2}{5}$. On note par X la variable aléatoire comptant le nombre de beignets commandés chaque jour ; c'est-à-dire X compte le nombre de succès(=beignet commandé).

1 On suppose dans cette question que qu'un seul client se présente chaque jour chez IDRISSOU. On note Y la variable aléatoire prenant 1 en cas de succès(=beignet commandé) et 0 en cas d'échec(pas de commande).

- **a** Déterminer la loi de probabilité de Y.
- **b** Calculer $E(Y)$ puis le comparer à la probabilité p.
- **c** Calculer l'écart-type $\sigma(Y)$ et le comparer à $\sqrt{p(1-p)}$.

2 On suppose cette fois que IDRISSOU accueille 5 clients par jour.

- **a** Déterminer la loi de probabilité de X.
- **b** Calculer l'écart-type et l'espérance mathématique $E(X)$ puis les comparer respectivement à $5 \times p$ et $\sqrt{5 \times p(1-p)}$.
- **c** Calculer $p(X \leq 3)$.

3 Donner la solution de la situation problème.

Solution

1 **a** Loi de probabilité de Y

y_i	1	0
$p(Y = y_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

b L'espérance de Y est $E(Y) = 1 \times \frac{2}{5} + 0 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = p$.

c La variance de Y est

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{2}{5} - \frac{4}{25} = \frac{6}{25} \quad et \quad \sigma(Y) = \sqrt{\frac{6}{25}}.$$

On remarque que $\sigma(Y) = \sqrt{p(1-p)}$. Puisque cette expériences n'a que deux issues(succès ou échec), on dit de cet épreuve qu'elle est de **Bernouilli** et Y suit donc la loi de Bernouilli de paramètre p.

2 On suppose cette fois que Mamadou accueille $n = 5$ clients par jour

a Loi de probabilité de X. $p = \frac{2}{5} = 0,4$ et $q = 1 - p = 0,6$. La construction d'un arbre des probabilités de cette situation nous permet d'écrire :

- $p_0 = p(X = 0) = (0,6)^5 = C_5^0 (0,4)^0 (0,6)^5$;
- $p_1 = p(X = 1) = 5 \times (0,4) \times (0,6)^4 = C_5^1 \times (0,4) \times (0,6)^4$;
- $p_2 = p(X = 2) = 10 \times (0,4)^2 \times (0,6)^3 = C_5^2 (0,4)^2 \times (0,6)^3$.
- $p_3 = p(X = 3) = 10 \times (0,4)^3 \times (0,6)^2 = C_5^3 \times (0,4)^3 \times (0,6)^2$;
- $p_4 = p(X = 4) = 5 \times (0,4)^4 \times (0,6) = C_5^4 \times (0,4)^4 \times (0,6)$;
- $p_5 = p(X = 5) = (0,4)^5 = C_5^5 \times (0,4)^5 \times (0,6)^0$.

x_i	0	1	2	3	4	5
$p_i = p(X = x_i)$	0,07776	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

Solution

X compte le nombre de succès(=beignet commandé) dans la répétition indépendante de 5 épreuves de Bernoulli dont chacune a une probabilité $p = 0,4$. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $p = 0,4$ et $n = 5$.

a L'espérance mathématique $E(X) = 2 = 5p$ et $\sigma(X) = \sqrt{1,2} = 1,09 = \sqrt{5 \times p(1-p)}$.

b $p(X \leq 3) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,91296$

1 Solution situation problème : La demande est satisfaite si $X \leq 3$. On doit alors vérifier si $p(X \leq 3) \leq 0,8$.
D'après la question précédente, $p(X \leq 3) > 0,8$. Donc Mamadou n'a pas raison.

Troisième étape : Résumé

Résumé

A-Loi de Bernoulli

Définition : **Une alternative ou expérience(épreuve) de Bernoulli** est une épreuve à deux issues possibles exactement :
- l'une appelée suces, notée 1, dont la probabilité de réalisation est p ;
- l'autre appelée échec, notée 0, dont la probabilité de réalisation est $q = 1 - p$.

♦ Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, si on appelle X la variable prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on dit que X est une variable de Bernoulli de paramètre p et qu'elle suit **loi de Bernoulli** de paramètre p.
Elle est donnée par le tableau suivant :

x_i	1	0
$p_i = p(X = x_i)$	p	$1 - p$

Exemple : Le lancer d'une pièce de monnaie est épreuve de Bernoulli de parmètre $p = \frac{1}{2}$.
Théorème : Soit X une variable de Bernoulli de paramètre p. Alors

- son espérance est $E(X) = p$;
- sa variance est $V(X) = p(1-p)$;
- son écart type est $\sqrt{p(1-p)}$.

Preuve : Évident.

B-Loi Binomiale

Définition :Un **schéma de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui consiste à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p.
Exemple : Un dé cubique est mal équilibré : la probabilité d'obtenir 6 est de $\frac{1}{7}$. On appelle succès l'événement à obtenir 6 et échec à obtenir un numéro différent de 6.
Cette expérience qui ne comporte que deux issues suit **une loi de Bernoulli**.
Si on effectue cinq fois cette expérience. On est en présence d'un **schéma de Bernoulli**.
On considère un schéma de Bernoulli de n épreuve représenté par un arbre. Alors pour tout k entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$, on note C_n^k le **nombre de chemins** de l'arbre réalisant k succès lors des n répétitions.
Ces coefficients peuvent rapidement être calculés en utilisant le triangle de Pascal.

Résumé

Propriété : Soit un schéma de Bernoulli constitué d'une suite de n épreuves. La variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre de succès obtenus a pour loi de probabilité : $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

Notation : Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^\star$ et p est notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Théorème : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi Binomiale de paramètres n et p alors :

L'espérance de X est $E(X)=np$;

La variance de X est $V(X)=npq$ et l'écart type est $\sigma=\sqrt{npq}$,$q=1-p$.

Remarque : Pour repérer une loi binomiale, trois conditions sont nécessaires :

- la répétition de l'expérience ;
- deux issues pour chaque expérience ;
- l'indépendance des résultats.

Exemple :Dans l'exemple précédent, on appelle X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des 5 lancés. On obtient les probabilités suivantes : $P_0=P(X=0)=C_5^0\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{5}\right)^5=0,4627$. $P_1=0,3856$; $P_2=0,1285$; $P_3=0,0214$; $P_4=0,0018$; $P_5=0,0001$.

Son espérance mathématique $E(X)=\frac{5}{7}$ et son écart-type $\sigma(X)=\sqrt{\frac{30}{7}}$.

Exemple :Un tireur vise une cible. La probabilité qu'il touche la cible est de $0,7$. Il tire 3 fois de suite. On note X le nombre de fois où il atteint la cible. Déterminer la probabilité de X et calculer son écart-type.

Quatrième étape : Exercice d'application

Exercice 01

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : "Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent".
   - B : " Exactement deux médecins reçoivent une lettre au tarif urgent".
2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres. Déterminer la loi de de probabilité de X et calculer son écart-type.

Exercice 02

Un sac contient 20 jetons indiscernables au toucher. Six d'entre eux sont rouges et les autres sont bleus.

1. On tire un jeton au hasard. Quelle est la probabilités p d'obtenir un jeton rouge ?
2. On tire successivement 6 jetons un à un, avec remise.
   a. Quelle est la probabilité P_1 d'obtenir exactement trois jetons rouges ?
   b. Quelle est la probabilité P_2 d'obtenir exactement un jeton rouge ou un jeton bleu ?
   c. Quelle est la probabilité P_3 d'obtenir au moins quatre jetons rouges ?

Devoirs : Exercices

Cours de mathématiques TleC

LEÇON 5 : CONDITIONNEMENT. DURÉE : 100 min

Motivation : La théorie des probabilités fournit des modèles mathématiques permettant l'étude des phénomènes dont le résultat ne peut être prévu avec une totale certitude ; c'est-à-dire des phénomènes dont on ne peut pas prédire l'issue avec certitude, et pour lequel on décide que le dénouement sera le fait du hasard : ***expériences aléatoires***. Par exemples :*lancer du dé, lancer d'une pièce de monnaie, mise en service d'une ampoule,lancer de la flèche sur une cible*... Bien que le résultat précis de chacune de ces expériences soit imprévisibles, l'observation et l'intuition nous amènent à penser que ces phénomènes obéissent à certaines lois. La théorie des probabilités permet de donner un sens précis à ces un peu vagues. La statistique permet de confronter les modèles probabilistes avec la réalité observée afin de les valider ou pas.

Compétences à acquérir : A l'issus de ce cours, l'élève doit être capable de :

- calculer la probabilité d'un évènement sachant que l'autre s'est réalisé.

Deuxième étape : Activité d'apprentissage

Activité

En fin de $1^e S$, chaque élève choisit une et une seule spécialité en terminale suivant les répartitions ci -dessous :
Par spécialité :

Mathématiques	Sciences physiques	SVT
40 %	25%	35 %

Sexe de l'élève selon la spécialité :

Sexe / Spécialité	Mathématiques	Sciences physiques	SVT
Fille	45 %	24 %	60 %
Garçon	55 %	76 %	40%

On choisit un élève au hasard :

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. a. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants ? F : " l'élève est une fille ", M : " l'élève est en spécialité maths ".(**Rep :** $p(F) = 0,4 \times 0,45 + 0,35 \times 0,6 + 0,25 \times 0,24 = 0,45$)
   b. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ayant choisi spécialité mathématiques ?
   c. Sachant que cet élève a choisi spécialité mathématiques, quelle est la probabilité que ce soit une fille ? (**Rep** : $p(F \cap M) = 0,45$)
   On appelle ***probabilité de*** F ***sachant*** M ***cette probabilité (conditionnelle)*** et on la note $p_M(F)$ ou $P(F/M)$
   d. Quelle égalité faisant intervenir $p(F \cap M)$, $p(F)$ et $p_M(F)$ peut-on écrire ? Comparer $p(F)$ et $p_M(F)$ et en donner une interprétation.
3. Sachant que cet élève a choisi spécialité SVT, quelle est la probabilité que ce soit une fille ?
4. Comparer $p_S(F)$ et $p(F)$, et en donner une interprétation.

Troisième étape : **Résumé (20 minutes)**

Cours de mathématiques TleC

Résumé

A-Arbres pondérés.

Règles de construction

• La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est 1.
• La probabilité de l'évènement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

Exemple : On jette une pièce.
• Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
• Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires. Représenter l'arbre pondéré de cette expérience.

B-Probabilité conditionnelle.

Définition : p désigne une probabilité sur un univers fini Ω. A et B étant deux évènements de Ω, B étant de probabilité non nulle.
• On appelle **probabilité conditionnelle** de l'évènement A sachant que B est réalisé le réel noté

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

• Le réel $p(A/B)$ se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi **probabilité de** A **sachant** B.
Remarque : Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B\times)p(B) = p(B/A) \times p(A)$.

C-Formule de Bayes (complément de cours, pas au programme).

Cette formule est aussi appelée **Théorème de la probabilité des causes**, car elle permet de renverser le conditionnement. On l'obtient en remarquant que la d'une intersection $A \cap B$ peut s'écrire en conditionnant A par B, soit en conditionnant B par A :

$$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(A) = p_A(B) \times p(B)$$

On obtient la formule suivante :

$$p_B(A) = \frac{p_A(B) \times p(A)}{p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})}$$

avec $p(B)$ non nulle. **Exemple :**Une maladie M se présente sous deux formes M_1 et M_2 avec les probabilités respectives $p(M_1) = 0,2$ et $p(M_2) = 0,8$ et le symptôme S apparaît dans 80% des cas de M_1 et dans 10% des cas M_2. Quelle est la probabilité pour un patient atteint de M qui présente le symptôme S, d'être atteint de M_1.

Solution

$$p_S(M_1) = \frac{p_{M_1}(S) \times p(M_1)}{p_{M_1}(S) \times p(M_1) + p_{M_2}(S) \times p(M_2)} = \frac{0,8 \times 0,2}{0,8 \times 0,2 + 0,1 \times 0,8} = \frac{2}{3}$$

.

Cours de mathématiques TleC

Résumé

D-Probabilités Totales.

Soient Ω un univers associé a une expérience aléatoire et n un entier $n \geq 2$. Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, $A_i \neq 0$;
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1, 2, \cdots n\}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$.

Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ une partition de l'univers Ω constitue d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω. Alors :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \cdots p_{A_n}(B) \times p(A_n)$$

.

Exemple : On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables. U_1 contient 4 boules rouges et trois boules vertes, U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte . On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Calculer la probabilité pour qu'elle soit rouge.

Quatrième étape : Exercice d'application (30 minutes)

Exercice 01

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95 des tests sont positifs et 5 négatifs.
- Chez les individus non malades, 1 des tests sont positifs et 99 négatifs. On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. Quelle est la probabilité
   - a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif.
   - b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?
   - c. qu'il ait un test négatif ?
   - a. qu'il ait un test positif ?
   - b. qu'il ait un test négatif ?
3. Calculer la probabilité
   - a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
   - b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?
4. Interpréter les résultats obtenus aux questions $3a$ et $3b$.

Exercice 02

Dans un jeu de 32 cartes, on tire simultanément 3 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. Trois as.
2. Trois cartes de même valeur.
3. Deux coeurs et un pique.

Exercice 03

Une urne contient : 5 boules $n°10$; 4boules $n°15$; 3 boules $n°20$. On tire simultanément 3 boules de cette urne. Les tirages sont équiprobables.
Déterminer les probabilités suivantes :
A : « On tire au moins une boule $n°15$ »
B : « On tire trois boules portant trois numéros différents »
C : « On tire trois boules portant le même numéro »
D : « Parmi les trois boules, deux portent le même numéro » Il faut payer $51F$ pour effectuer un tirage de trois boules, et chaque tirage rapporte en francs cfa la somme des points marqués. Quelle est la probabilité d'être gagnant ?.

Devoirs : Exercices