

# MATHEMATIQUES

## COLLECTION K<sup>2</sup>

RECUEIL D'EXERCICES ET PROBLEMES  
DE SYNTHESE AVEC LEURS CORRIGES DETAILLES

Première partie

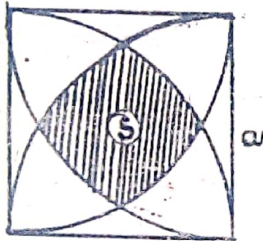
**CALCUL INTEGRAL**  
30 EXERCICES

Deuxième partie

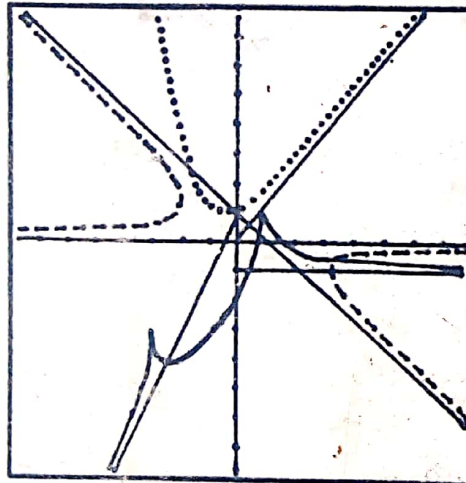
**PROBLEME DE  
SYNTHESE**  
40 EXERCICES

Troisième partie

**EQUATION  
DIFFERENTIELLES**  
14 EXERCICES



$$S = a^2 \left( \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \right)$$



Premier ordre  
 $ay' + by = g(x)$

Second ordre  
 $y'' + ay' + by = f(x)$

**Fomesoutra.com**

*ça soutra !*

Docs à portée de main

K<sup>2</sup> AU SERVICE DES ELEVES

**Tome 2**

Classes : Terminales : C-D-E-F-Ti / 1

Rédigé par :

**KOUEVIDJIN Mawoulé Kankoé**

Professeur de MATHEMATIQUES

Tél : (+228) 90 16 93 00 / 99 54 56 40

(+228) 91 82 84 61 / 99 09 43 63

(+228) 92 74 97 70 / 22 34 63 10

E-mail: koehyppo@yahoo.fr

PREMIERE EDITION : Janvier 2006

## PROBLEME N°1

### PARTIE A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x.$$

1/ Etudier le sens de variation de  $g$

2/ Calculer  $g(1)$  et  $g(2)$ ; en déduire que l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,1$

3/ En déduire le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

### PARTIE B

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x} \quad \text{On note } (\mathcal{C})$$

la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unités : 2cm sur (Ox), 4cm sur (Oy)).

1/ Etudier les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$

2/ Montrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \cdot g(x)$$

En déduire le signe de  $f'(x)$ .

3/ Dresser le tableau de variations de  $f$  et montrer que :  $f(x) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$

4/ Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le

repère orthonormal (préciser la tangente au point d'abscisse 1)

### PARTIE C

1/ a/ Déterminer une primitive sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  de la fonction :

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

b/ Montrer que pour tout  $x > 1$  on a :

$$f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

2/ Soit  $F$  la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule pour  $x = 1$ . Sans calculer  $F$ , montrer que, pour tout  $x > 1$  on a :

$$F(x) \leq \frac{1}{2} (\ln x)^2.$$

## PROBLEME N°2

### PARTIE A: Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$

1/ Etudier les variations de  $g$ .

Préciser  $g(1)$ .

2/ En déduire le signe de la fonction  $g$  sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$

### PARTIE B: Etude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1/ Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

2/ Déterminer les limites de  $f$  en  $+\infty$   
(On pourra mettre  $x^2$  en facteur dans l'expression  $f(x)$ ).

Déterminer la limite de  $f$  en 0

3/ Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot g(x).$$

En utilisant la partie A, étudier le sens de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

4/ On nomme (C) la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormal (unité graphique 5cm). Tracer (C).

PARTIE C: Résolutions approchées d'équations

1/ Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une seule solution sur  $]0; 1]$ . (On pourra étudier le sens de variation de la fonction  $h$  définie sur  $]0; 1]$  par:

$$h(x) = f(x) - x.$$

On nomme  $\alpha$  cette solution.

2/ Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{x}$  admet une seule solution sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ . On nomme  $\beta$  cette solution. Montrer que  $\alpha \cdot \beta = 1$ .

3/ Déterminer un encadrement de  $\beta$  d'amplitude  $10^{-2}$ . En déduire un encadrement de  $\alpha$ .

### PROBLEME N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $a$  est un nombre réel strictement positif et différent de 1.

Soit  $f_a$  la fonction de  $]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par:  $f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$  et  $(\mathcal{C}_a)$  sa courbe représentative.

1/ a/ Calculer  $f_a(1)$ ,  $f_a(a)$ ,  $f_a(a^n)$  où  $n$  est un entier relatif.

b/ Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs  $x, y$  et tout entier relatif  $n$  on a:

$$\bullet f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

$$\bullet f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)$$

$$\bullet f_a(x^n) = n f_a(x).$$

$$\bullet f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x).$$

c/ Démontrer que pour tous nombres réels strictement positifs  $a, b$  et  $x$  on a:

$$\bullet f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)} \quad \bullet f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x).$$

2/ a/ Étudier la fonction  $f_a$  et dresser son tableau de variation pour  $0 < a < 1$  et  $a > 1$ .

b/ Démontrer que  $f_a$  est une bijection

c/ Démontrer que  $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$  et en déduire la position relative de  $(\mathcal{C}_a)$  et  $(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}})$

3/ Tracer les courbes  $(\mathcal{C}_2)$  et  $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$

PROBLEME N° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout nombre réel  $m$ , on définit la fonction  $f_m$  par:

$f_m(x) = \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$ . On désigne par  $(C_m)$  la courbe représentative de  $f_m$ .

1/ Etudier  $f_m$  et tracer  $(C_m)$  dans les cas suivants:  $m=0$ ,  $m=-1$  et  $m=1$

Dans la suite, on suppose que

$$m \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\}$$

2/ a/ Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction  $f_m$ .

On désigne par  $D_m$  l'ensemble de définition de  $f_m$ .

b/ Démontrer que les courbes  $(C_m)$  passent par deux points fixes.

3/ a/ Démontrer que  $D_m = D_{\frac{1}{m}}$  et que pour tout élément  $x$  de  $D_m$  on a:

$$f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x).$$

En déduire la position relative de  $(C_m)$  et  $(C_{\frac{1}{m}})$ .

b/ Démontrer que

$$* (x \in D_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in D_m);$$

$$* \forall x \in D_{-m}, f_{-m}(x) = f_m(-x)$$

En déduire la position relative de  $(C_m)$  et  $(C_{-m})$

c/ Déduire des questions précédentes qu'il suffit d'étudier  $f_m$  et de tracer  $(C_m)$  pour  $m > 1$  pour obtenir toutes les courbes  $(C_m)$ .

4/ On suppose dans cette question que  $m > 1$ .

a/ Etudier  $f_m$  et dresser son tableau de variation.

b/ En déduire le tracé de  $(C_2)$ ,  $(C_{\frac{1}{2}})$  et  $(C_{-2})$ .

Soit  $\Omega$  le point d'intersection de  $(C_2)$  et de son asymptote parallèle à  $(OI)$ . Démontrer que  $\Omega$  est un centre de symétrie de  $(C_2)$

c/ Soit  $g$  la restriction de  $f_2$  à  $]-2; -\frac{1}{2}[$ . Démontrer que  $g$  réalise une bijection de  $]-2; -\frac{1}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$  et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de  $g$  et de  $g^{-1}$ .

PROBLEME N° 5

1/ Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

a/ Etudier  $f$  et dresser son tableau de variation:

b/ Calculer  $f(0)$ ; en déduire le signe de  $f$

2/ Soit  $g$  la fonction définie par:

$$g(x) = x \ln|x-1|$$

a/ Etudier  $g$  et tracer sa courbe représentative  $(\mathcal{G})$ .

b/ Soit  $A$  le point d'intersection de  $(\mathcal{G})$  et  $(OI)$  d'abscisse non nulle.

Démontrer que  $A$  est un point d'inflexion de  $(\mathcal{G})$  et écrire une équation de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{G})$  en  $A$ .

3/ On désigne par  $h$  la restriction de  $g$  à l'intervalle  $]1; +\infty[$ . Démontrer que  $h$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$  et construire sur un autre graphique les courbes représentatives de  $h$  et de  $h^{-1}$ .

## PROBLEME N° 6

### PARTIE A

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x + \ln|x-1|$

1/ a/ Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation.

b/ Montrer que  $f$  s'annule pour une valeur  $\alpha$  différent de 0, que l'on comparera aux nombres réels  $\frac{5}{4}$  et  $\frac{3}{2}$ .

2/ Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan  $P$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$

(Unité graphique 2 cm).

a/ Etudier les branches infinies de  $(C)$

b/ Tracer  $(C)$  ainsi que les tangentes  $\bar{a}$   $(C)$  aux points d'abscisses respectives  $1/2$  et  $1-e$ .

3/ Soit  $t$  un nombre réel de  $]0; 1[$ . Calculer l'aire de la partie du plan définie par:  $0 \leq x \leq t$  et  $f(x) \leq y \leq 0$ . Quelle est la limite de cette aire lorsque  $t$  tend vers 1?

4/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]1; +\infty[$

a/ Montrer que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$ ; préciser l'ensemble de définition de  $g^{-1}$ .

b/ La fonction réciproque  $g^{-1}$  est-elle dérivable en 2? Si oui calculer  $(g^{-1})'(2)$

### PARTIE B

1/ On considère dans  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation:

$$z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6+8i = 0 \quad (E)$$

a/ Montrer que  $(E)$  admet une solution imaginaire pure notée  $z_0$  que l'on déterminera.

b/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ .

Soit  $z_0, z_1$  et  $z_2$  les solutions de  $(E)$   $z_1$  est celle dont la partie réelle est positive

2/ Soit dans le repère  $(O, I, J)$ ,  $A,$

B, C les points d'affixes respectives  $z_0, z_1$  et  $z_2$ .

a/ Montrer qu'il existe une similitude directe  $S$  que l'on déterminera qui transforme A en B et I en C.

b/ Donner les éléments géométriques de la similitude directe  $S$ .

3/ A tout point  $M(x; y)$  on associe le point  $M'(x'; y')$  par  $S$ .

Déterminer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

4/ Soit  $(\Gamma)$  la représentation graphique dans le plan  $P$  de la restriction  $h$  de la fonction  $f$  à l'intervalle  $] -\infty; 1[$ .

Vérifier que l'image  $(\Gamma')$  de  $(\Gamma)$  par  $S$  est une partie de la représentation graphique dans le plan  $P$  de la fonction  $h_1$  définie par:

$$h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_1 \mapsto 2e^{x_1+1} - x_1 - 3$$

5/ Étudier les variations de la fonction  $h_1$  et tracer sa courbe représentative.

### PROBLEME N° 7

On considère la fonction numérique, de la variable réelle  $x$  définie par:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2 - 1}\right)$$

### PARTIE A

Soit l'expression  $A(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x}$ .

1/ Vérifier que  $A(1) = 0$  et étudier le signe de cette expression suivant les valeurs de  $x$ .

2/ a/ Calculer  $f(1)$  et  $f(-1)$ .

Quel est l'ensemble de définition de  $f$ ?

b/ Déterminer les limites de

$f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ ; vers  $+\infty$

c/ Étudier les limites de  $f(x)$

lorsque  $x$  tend vers  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , vers  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

d/ Montrer que la courbe  $(C)$ , représentative de  $f$ , admet trois asymptotes dont on déterminera les équations respectives.

3/ a/ Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variation.

b/ Tracer la courbe  $(C)$  dans un repère orthonormé (unité 2cm).

On construira la tangente à  $(C)$  au point d'abscisse  $-1$ .

### PARTIE B

Soit l'expression  $B(x) = \frac{2}{2x^2 - 1}$ .

1/ a/ Déterminer le couple de réels  $(a; b)$  tel que, pour toute valeur de  $x$  élément du domaine de définition de  $B$  on ait:

$$B(x) = \frac{a}{x\sqrt{2}-1} + \frac{b}{x\sqrt{2}+1}$$

b/ En déduire les primitives de  $B(x)$ .

2/ a/ Soit  $\alpha$  un réel de l'intervalle  $]\frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}]$ . Calculer l'intégrale :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \ln\left(\frac{2x^2}{2x^2-1}\right) dx$$

à l'aide d'une intégration par parties.

b/ Déterminer, en fonction de  $I(\alpha)$ , l'aire du domaine plan défini par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations

respectives :

$$y = x+1 - \ln\sqrt{2}; \quad x = \alpha; \quad x = \sqrt{2}.$$

c/ Soit  $\beta = \alpha\sqrt{2} - 1$

Exprimer  $I(\alpha)$  en fonction de  $\beta$ .

En déduire  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha)$ .

d/ Calculer l'aire du domaine plan défini par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations respectives :

$$y = x+1 - \ln\sqrt{2}; \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x = \sqrt{2}.$$

Exprimer ce résultat en  $\text{cm}^2$ , à  $10^{-2}$  près et le hachurer sur le dessin.

### PROBLEME N° 8

Pour tout nombre réel  $\alpha$  non nul, on désigne par  $f_{\alpha}$  la fonction numérique définie par :

$$f_{\alpha}(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x} \text{ et } (C_{\alpha})$$

sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

### PARTIE A

1/ Étudier les variations de  $f_1$  et construire  $(C_1)$ .

2/ Étudier  $f_{\alpha}$  pour  $\alpha \neq 0$ .

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $(C_{\alpha})$  avec l'axe des abscisses.

3/ Dans cette question, on suppose  $\alpha > 0$

a/ Déterminer une primitive  $F_{\alpha}$  de  $f_{\alpha}$  sur  $]0; +\infty[$

b/ Pour  $a \in ]0, \frac{e}{\alpha}[$  on pose

$$A_{\alpha}(a) = F_{\alpha}\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_{\alpha}(a).$$

Étudier la limite en 0 de  $A_{\alpha}(a)$ , puis celle de  $a A_{\alpha}(a)$ .

### PARTIE B

1/ Soit  $a$  un réel strictement positif. Déterminer, suivant les valeurs de  $a$  le nombre de solutions de l'équation d'inconnue  $x$  réel :  $a^x = x$ . (On pourra utiliser les variations de  $f_1$ )

2/ Démontrer, en utilisant les variations de  $f_1$ , qu'il existe un couple  $(b, c)$  unique d'entier naturels que l'on déterminera tel que :

$$0 < b < c \text{ et } b^c = c^b.$$

### PARTIE C

1/ Soit  $t$  un réel strictement positif

a/ Ecrire une équation de la tangente  $(T_\alpha)$  à la courbe  $(C_\alpha)$  au point d'abscisse  $t$ .

b/ Démontrer que lorsque  $\alpha$  varie,  $t$  restant fixe, les droites  $(T_\alpha)$  passent par un point fixe  $I_t$  que l'on déterminera.

Déterminer l'ensemble décrit par les points  $I_t$  lorsque  $t$  parcourt  $]0; +\infty[$

2/ Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$  on note  $M$  et  $M'$  les points de  $(C_2)$  et  $(C_3)$  ayant pour abscisse  $x$  et l'on désigne par  $G$  le barycentre du système  $\{(M, 1), (M', -2)\}$

Démontrer que lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $]0; +\infty[$ , le point  $G$  décrit une des courbes  $(C_\alpha)$  que l'on déterminera.

3/ Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux réels strictement positifs et  $\lambda$  un réel différent de 1. Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$  on note  $M$  et  $M'$  les points de  $(C_\alpha)$  et  $(C_{\alpha'})$  ayant pour abscisse  $x$  et l'on désigne par  $G$  le barycentre du système  $\{(M, 1), (M', -\lambda)\}$

Démontrer que lorsque  $x$  parcourt  $\mathbb{R}_+^*$ , le point  $G$  décrit une des courbes  $(C_\alpha)$  que l'on précisera.

## PROBLEME N° 9

### PARTIE I.

Pour tout entier relatif non nul  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ \text{et} \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

1/ a/ Préciser l'ensemble de définition de  $f_n$ .

b/ Pour quelles valeurs de  $n$  la fonction  $f_n$  est-elle continue en tout point de  $\mathbb{R}$ ?

2/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on appelle  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$ .

a/ Etudier les éléments de symétrie de  $(C_n)$  suivant la parité de  $n$ .

b/ Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par des points fixes  $O, A$  et  $B$  où  $O$  est l'origine du repère,  $A$  est le point d'abscisse positive et  $B$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$ .

c/ Pour quelles valeurs de  $n$  la fonction  $f_n$  est-elle dérivable pour  $x=0$ ?

d/ Calculer la dérivée de  $f_n$  pour  $x \neq 0$ . Montrer que toutes les courbes

(C<sub>n</sub>) admettant la même tangente en A.

3/ Étudier les variations des fonctions  $f_3, f_1$  et  $f_2$ , puis tracer avec soin les courbes (C-3), (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>) dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 2cm)

4/ Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonctions  $f_n$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

Soit M<sub>n</sub> le point de la courbe (C<sub>n</sub>) de coordonnées  $(X_n, Y_n)$  où  $X_n$  est la valeur strictement positive, pour laquelle  $f_n$  présente un extremum.

Montrer que tous les points M<sub>n</sub> sont sur une courbe (Γ) dont on précisera l'équation.

### PARTIE II

1/ Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif. Calculer  $I_n(\alpha) = \int_0^\alpha f_n(x) dx$

2/ Dans cette question  $n = 2$

a/ Calculer  $I_2(\alpha) = \int_0^\alpha f_2(x) dx$

Quelle est la limite de  $I_2(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers zéro?

Interpréter géométriquement la valeur limite trouvée.

b/ Déterminer un nombre réel  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) tel que la valeur moyenne de  $f_2$  sur l'intervalle  $[0, \beta]$  soit nulle.

Quel point particulier de la courbe (C-3) a pour abscisse  $\beta$ ?

### PROBLEME N° 10

Soit la fonction numérique  $f_a$  de la variable réelle  $x$  définie par:

$$f_a(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right), \quad a \neq 0$$

On désigne par (C<sub>a</sub>) la courbe représentative de  $f_a$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2cm.

### PARTIE A

1/ Étudier la parité de  $f_a$ .

2/ Démontrer que la courbe (C<sub>a</sub>) possède deux asymptotes dont on donnera les équations.

3/ Étudier, selon les valeurs du réel non nul  $a$ , le sens de variation de la fonction  $f_a$ .

4/ a/ Démontrer que  $f_a$  est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera

b/ Expliciter  $f_a^{-1}(y)$ . On désigne par (Γ<sub>a</sub>) la courbe représentative de  $f_a^{-1}$  relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5/ a/ Démontrer que l'affinité orthogonale d'axe  $(O, \vec{j})$  et de rapport  $a$  transforme (C<sub>1</sub>) en (C<sub>a</sub>).

b/ Soit  $a$  et  $a'$  deux réels non

non nul et distincts. Déterminer une application affine transformant  $(Ca)$  en  $(Ca')$ .

6/ Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $(-\frac{\pi}{2})$ ,  $S$  la symétrie orthogonale d'axe  $(O, \vec{i})$ .

a/ Déterminer une expression analytique de  $RoS$  puis donner une équation cartésienne de la transformée,  $RoS(\Gamma_a)$ , de  $(\Gamma_a)$  par  $RoS$ .

b/ Comparer les équations cartésiennes de  $(Ca)$  et de  $RoS(\Gamma_a)$ .

Pouvait-on prévoir ce résultat?

Dans la suite du problème, on suppose  $a = 1$ .

7/ Tracer la tangente à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $0$  ainsi que  $(C)$  et  $(\Gamma)$ .

### PARTIE B

1/ Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par:  $g(x) = \int_1^{\sin x} (t \ln t) dt$

Démontrer que  $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

2/ Déterminer le réel  $c$  tel que

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$$

3/ On considère l'intégrale:

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$  où  $n$  est un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique  $(I_n)$ .

a/ Démontrer que la suite  $(I_n)$  est à termes positifs.

b/ Étudier le sens de variation de la suite  $(I_n)$ .

c/ Démontrer que  $I_n \leq \frac{\ln c}{4^n}$

d/ En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

### PARTIE C

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère la fonction  $h_n$  définie sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par:

$$h_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$$

1/ Donner une expression simplifiée de somme  $S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$  en

remarquant que  $S_n(x)$  est la somme des premiers termes d'une suite géométrique ( $x$  est un réel).

2/ Démontrer que:  $h_n'(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$

3/ Montrer que  $h_n(\frac{\pi}{6}) = \ln 3 - I_n$ .

4/ En déduire que la suite  $(U_n)$  définie par:

$$U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1) \times 2^{2p-1}}$$

a une limite que l'on déterminera.

# PROBLEME II

## PARTIE A

1/ Vérifier que :

$$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par:  $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$

2/ a/ Etudier le sens de variation de la fonction  $g$ .

b/ Dédurre de la question précédente le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

3/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan (unité graphique 2cm)

a/ Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition

b/ Justifier que les droites (D) et (A) d'équations respectives:  $x=0$  et  $y=x+1$  sont asymptotes à la courbe (C)

4/ a/ Montrer que la fonction  $h$  telle que:  $h(x) = x + \ln x$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  et que cette fonction prend des valeurs positives et négatives.

b/ En déduire que (A) coupe (C)

en un point unique d'abscisse  $\alpha$  vérifiant  $\alpha + \ln \alpha = 0$ .

Montrer que  $0,56 < \alpha < 0,57$

c/ Déterminer la position relative de (C) par rapport à (A).

5/ Etudier le sens de variation de  $f$ .

6/ Dédurre de la question 4/ l'existence d'une valeur unique  $\beta$  telle que  $f(\beta) = 0$ .

Montrer que  $0,46 < \beta < 0,47$

7/ Construire (C) et (A).

## PARTIE B

$m$  étant un réel, on appelle  $f_m$  la fonction de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:  $f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{m}{2} \ln x$  et  $(\Gamma_m)$  sa courbe représentative dans repère orthonormé.

1/ Dresser suivant les valeurs de  $m$  le tableau de variation de  $f_m$ .

2/ a/ Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan avec  $x_0 > 0$  et  $x_0 \neq 1$ . Montrer qu'il existe une seule courbe  $(\Gamma_m)$  qui passe par  $M_0$ .

b/ Montrer qu'il existe un seul point A appartenant à toutes les courbes  $(\Gamma_m)$ .

PROBLEME N° 12PARTIE I

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \text{ où } \ln$$

désigne la fonction logarithme népérien

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  relativement au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ a/ Etudier la fonction (ensemble de définition  $D$ , parité, étude des variations, limites aux bornes de  $D$ ) et résumer cette étude par un tableau de variation.

b/ Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.

c/ Etudier la position relative de  $(C)$  et  $(T)$ . Tracer  $(C)$  et  $(T)$  sur un même dessin.

2/ a/ Démontrer que  $f$  est une bijection de  $D$  sur un ensemble que l'on déterminera.

b/ Expliciter  $f^{-1}(x)$ ; représenter  $f^{-1}$  sur le même dessin que celui de la question précédente.

3/ a/ Déterminer le réel  $a$  tel que  $f(a) = 1$

b/ Soit  $E$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f^{-1}(x) \leq y \leq \inf(1; f(x)) \text{ où} \end{cases}$$

$\inf(u; v)$  désigne le plus petit des réels  $u$  et  $v$ .

Déterminer en fonction de  $a$  l'aire de  $E$ .

PARTIE II

Soit  $f_\alpha$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par:

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\alpha+x}{\alpha-x} \right); \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

On désigne par  $(C_\alpha)$  la courbe représentative de  $f_\alpha$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ Etudier la fonction  $f_\alpha$  (ensemble de définition  $D_\alpha$ , parité, étude des variations, limites aux bornes de  $D_\alpha$ ) et résumer cette étude par un tableau de variation. On discutera suivant les valeurs de  $\alpha$ .

2/ Démontrer que pour tout  $\alpha$  non nul,  $f_\alpha$  est une bijection de  $D_\alpha$  sur un ensemble que l'on déterminera.

Expliciter  $f_\alpha^{-1}(x)$ . On désigne par  $(T_\alpha)$  la courbe représentative de  $f_\alpha^{-1}$  relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3. a/ Déterminer une application affine du plan  $P$  dans lui-même, autre que l'identité et laissant  $(C_\alpha)$  globalement invariante.

b/ Déterminer une application affine transformant  $(C)$  en  $(C_\alpha)$ .

c/  $\alpha$  et  $\alpha'$  étant deux réels distincts non nuls, déterminer une application affine transformant  $(C_\alpha)$  en  $(C_{\alpha'})$ .

4/ On désigne par  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et par  $s$  la symétrie axiale d'axe  $(O, \vec{i})$ .

a/ Déterminer les expressions analytiques de  $r$  et de  $s \circ r$ .

b/ Déterminer une équation cartésienne de la transformée  $s \circ r(C_\alpha)$  de  $(C_\alpha)$  par  $s \circ r$ .

c/ Comparer les équations cartésiennes de  $(C_\alpha)$  et de  $(s \circ r)(C_\alpha)$ . Pourrait-on prévoir le résultat.

### PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions  $f_\alpha$  définies au II avec  $\alpha > 0$ .

1/ Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle  $x: f_\alpha(x) - x = 0$  admet une solution

strictement positive que l'on notera  $\lambda(\alpha)$ .

2/ On prend dans cette question  $\alpha = 3$  et on définit la suite  $(U_n)$  par:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f_3^{-1}(U_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

a/ Démontrer que  $U_1 > U_0$ .

En déduire que la suite est croissante.

b/ Démontrer que pour tout  $n$  entier naturel on a:  $U_n < \lambda(3)$ .

c/ Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente. Soit  $l$  sa limite. Démontrer que  $l > \sqrt{6}$ .

## PROBLEME N° 13

### PARTIE A

On se propose de déterminer les solutions sur  $]0; +\infty[$  de l'équation différentielle:

(E):  $xy' - 2y = \ln x$ , où  $y$  est une fonction de variable  $x$ .

1/ Déterminer les nombres réels  $a, b, c$  pour que la fonction  $P$  définie sur  $]0; +\infty[$ , par  $P(x) = ax^2 + bx + c$  vérifie

$$xP'(x) - 2P(x) = 0$$

2/  $f$  étant une fonction définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on pose  $g = \frac{f}{P}$ ,  $P$  étant la fonction déterminée dans la

première question avec  $a \neq 0$ .

a./ Démontrer que la fonction  $f$  est solution de (E) si et seulement si  $g$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{bx}{ax^3}$ .

b./ Déterminer l'ensemble des primitives définies sur  $]0; +\infty[$  de la fonction  $x \mapsto \frac{bx}{x^3}$ . (On pourra faire une intégration par parties).

c./ En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions  $x \mapsto \frac{1+bx^2}{4} + \alpha x^2$ , où  $\alpha$  est un nombre réel.

3./ a./ Trouver la fonction  $\psi$ , définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , vérifiant (E) tel que  $\psi(1) = 0$ .

b./ Étudier les variations de  $\psi$ , et construire la courbe (C) représentative de  $\psi$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### PARTIE B

1/ Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif. Calculer, en fonction de  $\lambda$  l'intégrale :  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \psi(x) dx$ .

2/ Montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \frac{1}{3}$ .

3/ Soit  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

a./ Montrer que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n-1$  et pour tout  $x$  de  $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$  on a :

$$\psi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \psi(x) \leq \psi\left(\frac{k}{n}\right).$$

b./ Montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \psi\left(\frac{k}{n}\right)$$

En déduire que :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \psi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

4./ Dédurre des questions 2/ et 3/ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right)$$

5./ a./ Montrer que pour tout entier naturel non nul,  $n$  :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \psi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

b./ Établir les égalités :

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

pour tout entier naturel non nul  $n$ .

c./ Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites :

$$n \mapsto V_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \text{ et}$$

$$n \mapsto U_n = \frac{n}{\sqrt{n!}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

ont des limites finies lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  que l'on calculera.

PROBLEME N° 14

PARTIE A.

Soit  $h$  la fonction numérique d'une variable réelle  $x$  définie par :

$$h(x) = \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2}$$

( $\ln$  désigne le logarithme népérien).

1/ a/ Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $h$ .

b/ Montrer que  $h$  admet un prolongement par continuité au point  $0$  ; préciser ce prolongement.

2/ Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

a/  $f$  est-elle dérivable en  $0$  ?

b/ Etudier les variations de  $f$  et établir son tableau de variation. On justifiera tout calcul de limite.

c/ Tracer la courbe  $(C)$  de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .

3/ On désigne par  $\tilde{f}$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $] \frac{1}{e}; +\infty[$

a/ Montrer que  $\tilde{f}$  admet une bijection réciproque notée  $\tilde{f}^{-1}$ .

b/ Donner le tableau de variations de  $\tilde{f}^{-1}$

c/ Tracer la courbe  $(C_1)$  de  $\tilde{f}$  et  $(C_2)$  de  $\tilde{f}^{-1}$  dans un autre repère orthonormé que celui de  $(C)$ .

d/ Montrer que  $\tilde{f}^{-1}$  est dérivable, puis calculer  $(\tilde{f}^{-1})'(0)$

e/ Montrer que l'équation :  $\forall x \in ] \frac{1}{e}; +\infty[$ ,  $\tilde{f}(x) = 2$  admet une solution unique notée  $x_0$  dans l'intervalle  $] \frac{1}{e}; 1[$ . Donner un encadrement de  $x_0$  à  $10^{-1}$  près.

PARTIE B

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1 - e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}$$

1/ a/ Etudier les variations de  $g$ .

b/ Tracer la courbe  $(S)$  de  $g$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

2/ a/ Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x$  réel strictement positif, on a :  $g(x) = \frac{ae^x}{1+e^x} + b$

b/ Soit  $\lambda$  un réel tel que :  $0 < \lambda$ , et

$(E_\lambda)$  l'ensemble des points  $M$  du plan de coordonnées  $(x, y)$  vérifiant :  $0 \leq x \leq \lambda$  et  $-1 \leq y \leq g(x)$ .

Calculer l'aire  $A$  de l'ensemble  $(E_\lambda)$  en fonction de  $\lambda$  puis calculer :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A.$$

PROBLEME N°15

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par:  $g(x) = 2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1/ Déterminer les limites de la fonction

$g$  en 0 et en  $+\infty$

2/ a/ Dresser le tableau de variation de  $g$

b/ En déduire le signe de  $g(x)$ .

PARTIE B

1/ a/ Démontrer que  $f$  est continue en 0

b/ Démontrer que  $f$  est dérivable en 0 et que  $f'(0) = 0$ .

2/ a/ Calculer  $f'(x)$  pour  $x > 0$  et

montrer que  $f'(x) = xg(x)$ .

b/ En déduire le sens de variation de la fonction  $f$ .

3/ a/ Calculer la limite en  $+\infty$  de  $f$ .

b/ Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

4/ On pose pour tout  $x > 0$ ,

$$h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ et } I(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt$$

a/ Calculer  $I(x)$  et vérifier que

$$h(x) = x^2 I(x).$$

b/ Démontrer que pour  $t > 0$ ,

$$0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2. \text{ On rappelle que}$$

$$\frac{1}{1+t} - 1+t = \frac{t^2}{1+t}.$$

c/ En déduire que  $0 \leq I(x) \leq \frac{1}{3x^3}$

d/ Déterminer la limite en  $+\infty$  de  $h(x)$  et le signe de  $h(x)$  pour tout  $x > 0$

e/ Que représente la droite  $(D)$

d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  à la courbe  $(C)$  représentative de la fonction?

f/ Étudier la position relative de  $(C)$  par rapport à la droite  $(D)$ .

PARTIE C

1/ Construire la courbe  $(C)$  et la droite  $(D)$ .

2/ Pour  $0 < \lambda \leq 1$  on pose  $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$ .  
Calculer  $A(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$ .

3/ a/ Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

b/ En déduire en  $cm^2$  l'aire de la partie  $(A)$  du plan limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations:  $x=0$  et  $x=1$

PROBLEME N°16

On considère la fonction  $f_n$  à variable réelle définie par:  $f_n = \frac{(\ln x)^n}{x^2}$  où  $n$  est un entier naturel non nul. Soit  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$ ,  $\|\vec{j}\| = 10\text{cm}$ .

PARTIE A

1/ Etude de la fonction  $f_1$  pour  $n=1$   
 a/ Calculer les limites de la fonction  $f_1$  en 0 et en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C_1)$ ?

b/ Etudier le sens de variation de  $f_1$  et dresser son tableau de variation.

2/ Etude de la fonction  $f_2$  pour  $n=2$   
 a/ Calculer les limites de la fonction  $f_2$  en 0 et en  $+\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $(C_2)$ ?

b/ Etudier le sens de variation de  $f_2$  et dresser son tableau de variation.

PARTIE B: Cas général

1/ Montrer que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.

2/ Etudier suivant la parité de  $n$ , les variations de  $f_n$

3/ Etudier la position relative

des courbes  $(C_n)$  et  $(C_{n+1})$ .

PARTIE C

On considère la suite  $(I_n)$  pour tout entier naturel  $n$  non nul, définie par  $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

1/ a/ Montrer que pour tout  $n$  entier naturel non nul,  $I_n \geq 0$ .

b/ Etudier le sens de variation de la suite  $(I_n)$ . En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente.

2/ a/ Calculer  $I_1$

b/ En utilisant la méthode d'intégration par parties montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$   
 En déduire la valeur de  $I_2$

3/ Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine plan délimité par les courbes  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=e$

4/ En utilisant les résultats de la question C-2-b, montrer par récurrence que:  $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

5/ En encadrant la fonction  $x \mapsto \ln x$  sur  $[1; e]$ , montrer  $0 \leq I_n \leq 1$ .

b/ Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$  et en déduire la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

PROBLEME N° 17

On considère les fonctions  $f_a$  définies pour tout réel  $x$  non nul par :

$$f_a(x) = \frac{a}{x} + \ln x^2 \text{ où } a \text{ désigne un paramètre réel. On appelle } (C_a) \text{ la}$$

courbe représentative de  $f_a$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1/ a/ Etudier la fonction  $f_0$ .

b/ Construire la courbe  $(C_0)$  représentative de la fonction  $f_0$ .

2/ Dans cette question  $a$  est différent de 0

a/ Comparer  $f_a(-x)$  et  $f_a(x)$ .

b/ En déduire une transformation géométrique entre les courbes  $(C_a)$  et  $(C_{-a})$ .

3/ a/ Calculer les dérivées première et seconde de  $f_a$ .

b/ Calculer la limite en 0 de  $f_a$ .

c/ Etudier les variations de  $f_a$  et dressons son tableau de variations suivant les valeurs de  $a$ .

d/ Préciser les points d'inflexion des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

Déterminer l'équation de la tangente  $(T_1)$  à  $(C_1)$  et celle de la tangente  $(T_2)$  à  $(C_2)$  aux points d'inflexion.

Construire les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  ainsi

que les tangentes  $(T_1)$  et  $(T_2)$ .

4/ Soit  $S_a$  le point de  $(C_a)$  où la tangente est parallèle à l'axe  $(Ox)$ .

a/ Déterminer l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $S_a$  lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

b/ Montrer que  $(\Gamma)$  se déduit simplement de  $(C_0)$ .

c/ Déterminer l'ensemble  $(\Gamma')$  des points d'inflexion de  $(C_a)$ .

5/ a/ Ecrire l'équation de la tangente à la courbe  $(C_1)$  en son point d'abscisse  $u$ .

b/ Soit  $U$  un point donné de l'axe  $(Oy)$ , d'ordonnée  $u$ .

Former l'équation déterminant les abscisses des points de contact des tangentes à  $(C_1)$  passant par  $U$ .

c/ Etudier, selon la position du point  $U$  le nombre de tangentes à  $(C_1)$  passant par  $U$ .

PROBLEME N° 18

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-e; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e) \left( \ln \left( \frac{x+e}{e} \right) \right)^2 \text{ si } x \neq -e \\ f(-e) = -e \end{cases}$$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans

Le plan muni d'un repère orthonormé  
(0,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ).

### PARTIE A.

1./ a/ Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} [x(\ln x)^2] = 0$

b/ Calculer la limite de  $f$  en  $-e$

$f$  est-elle continue en  $-e$ ?

c/ Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $-e$ .

2./ Déterminer le sens de variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.

3./ Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0.

4./ Tracer  $T$  et  $(C)$ .

5./ a/ Démontrer que  $f$  est une bijection sur un intervalle  $J$  à préciser.

Soit  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$  et  $(C')$  sa courbe.

b/ Tracer  $(C')$  dans le même repère que  $(C)$

c/ Déterminer l'ensemble sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable.

### PARTIE B.

Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que:

$-e < \alpha < 0$ . On pose  $J(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$

1./ Pour tout entier naturel  $n$ , on dé-

signe par  $I_n(\alpha)$  l'intégrale définie par:  $I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (x+e) [\ln(x+e)]^n dx$ .

a./ A l'aide d'une intégration par parties, exprimer  $I_n(\alpha)$  en fonction de  $I_{n-1}(\alpha)$ .

b./ Calculer  $I_0(\alpha)$  puis  $I_1(\alpha)$  et  $I_2(\alpha)$ .

2./ a/ Vérifier que pour tout  $x \in ]-e; +\infty[$

$$f(x) = (x+e)[-1 + \ln(x+e)]^2 + x.$$

b/ Exprimer  $J(\alpha)$  en fonction de  $I_0(\alpha)$ ,  $I_1(\alpha)$  et  $I_2(\alpha)$ , puis en fonction de  $\alpha$  seul.

3./ Calculer  $\lim_{\alpha \rightarrow -e} (-J(\alpha))$ . Donner une

interprétation géométrique du résultat.

4./ Soient  $P$ ,  $Q$  et  $R$  les points du plan de coordonnées respectives:  $(0; -e)$ ,

$(-e; -e)$  et  $(-e; 0)$ . Soit  $(\Delta)$  la droite d'équation  $y=x$ . Les courbes  $(C)$ ,  $(C')$

et  $(\Delta)$  partagent le carré  $OPQR$  en quatre régions notées respectivement:

$S_1$ : partie du carré au dessus de  $(C)$

$S_2$ : partie du carré comprise entre  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

$S_3$ : partie du carré comprise entre  $\Delta$  et  $(C')$ .

$S_4$ : partie du carré en dessous de  $(C')$

Comparer les aires de ces quatre parties

### PROBLEME N° 19

On considère pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2(\ln x)^n, & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

#### PARTIE A.

1/ Soit  $p$  un entier naturel. En utilisant la limite de  $t^p e^{-t}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln x)^p = 0.$$

2/ En déduire pour tout entier  $k \geq 1$ , la limite de  $x^k(\ln x)^p$  en 0.

3/ Montrer que  $f_n$  est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0

#### PARTIE B.

1/ Etudier le sens de variation de  $f_n$  sur  $[0; 1]$

2/ a/ Montrer que  $\forall n \geq 1, 0 < e^{-\frac{n}{2}} < 1$

b/ L'entier  $n$  étant fixe ( $n \geq 1$ ), résoudre dans  $]0; 1[$  l'inéquation

$$\ln x + \frac{n}{2} \leq 0$$

c/ Montrer que si  $n \geq 2$  alors  $f_n$

est dérivable sur  $[0; 1]$  et  $f'_n(x)$  admet le même signe que :

$$\left(\ln x + \frac{n}{2}\right)(\ln x)^{n-1} \text{ pour tout } x \in ]0; 1[$$

d/ Etudier le sens de variation de  $f_n$  sur  $[0; 1]$  pour  $n \geq 2$  suivant les valeurs de  $n$ . Dresser le tableau de variation de  $f_n$ .

3/ L'unité graphique étant 10 cm, construire les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.

4/ Montrer que les courbes  $(C_n)$  passent par deux points indépendants de  $n$ .

#### PARTIE C

Dans cette partie  $t$  désigne un réel appartenant à  $[0; 1]$  et  $n$  un entier naturel non nul.

1/ On pose 
$$I_n(t) = \int_t^1 f_n(x) dx \text{ et } L_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

a/ Justifier l'existence de  $I_n(t)$

b/ Montrer que la fonction :

$t \mapsto L_n - I_n(t)$  est la primitive sur  $[0; 1]$  de la fonction  $f_n$  qui s'annule en  $t=0$ .

2/ En déduire que  $I_n(t)$  admet pour limite  $L_n$  lorsque  $t$  tend vers 0

3/ On considère la fonction numérique

F définie sur  $[0; 1]$  par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \text{ pour } 0 < x \leq 1$$

et  $F(0) = 0$

a/ Prouver que F est dérivable sur  $]0; 1[$  et calculer  $F'(x)$  pour  $0 < x < 1$

b/ Prouver que F est dérivable en 0 et préciser  $F'(0)$ .

c/ En déduire que F est une primitive de  $f$  sur  $[0; 1]$ . Calculer  $L_1$ .

4/ Soit  $\psi_n$  la fonction définie sur  $]0; 1[$  par  $\psi_n(t) = -\frac{1}{3} t^3 (\ln t)^n$ .

a/ Déterminer  $\lim_{t \rightarrow 0} \psi_n(t)$

b/ Prouver que pour  $t \in [0; 1]$

$$I_{n+1}(t) = \psi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t).$$

c/ En déduire que  $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

d/ Prouver par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$$

e/ Calculer en fonction de n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_n)$  et l'axe des abscisses.

## PROBLEME N°20

### PARTIE A

1/ Justifier le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2/ a/ En déduire que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

b/ Etudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

3/ Pour tout naturel n, on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x^n(1-x)$

a/ Etudier le sens de variation de  $f_n$ .

b/ Prouver que selon la parité de n, l'équation  $f_n(x) = 1$  admet soit 0 soit 1 solution dans  $\mathbb{R}$ .

4/ Montrer que les courbes de  $f_n$  passent par deux points fixes et admettent les mêmes tangentes en ces points sauf pour certaines valeurs de n que l'on précisera.

### PARTIE B :

On note  $g_n$  la restriction de  $f_n$  sur  $[0; 1]$

Soit  $(C_n)$  la courbe représentative de  $g_n$

1/ Montrer que sauf pour une valeur de n

$g_n$  possède un maximum  $M_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

2/ Tracer  $(C_0)$ ,  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Donner l'allure de  $(C_n)$  pour  $n > 2$ .

3/ Calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$  ;  $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . Peut-on prévoir ce dernier

résultat à partir d'un encadrement de  $g_n$ ?

4/ Pour tout  $x \in [0; 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$$

a/ Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$

b/ Exprimer  $\int_0^1 S_n(x) dx$  en fonction de  $I_0, I_1, \dots, I_n$

En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = P_n$

c/ Comparer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$  et  $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx$ .

PROBLEME N° 21

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

1/ Etudier le sens de variation de  $g$  sur  $[0; +\infty[$  et déterminer la limite de  $g$  en  $+\infty$ .

2/ a/ Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $[0; +\infty[$ . On note  $\alpha$  cette solution.

b/ Prouver que  $1,14 < \alpha < 1,15$

3/ En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

PARTIE B

1/ a/ Montrons que pour tout  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

b/ En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$

2/ a/ Montrer que pour tout réel positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^x}$

b/ En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$

Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3/ a/ Etablir que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

b/ En utilisant l'encadrement de  $\alpha$  établi dans la question A.2, donner un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-2}$ .

4/ Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

5/ a/ Etablir que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{(x+1)U(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } U(x) = e^x - xe^x - 1$$

b/ Etudier le sens de variation de la fonction  $U$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

En déduire le signe de  $U(x)$ .

c/ Déduire des questions précédentes la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Tracer (C) et (T).

PARTIE C

1/ Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ ; on pourra utiliser l'expression de  $f(x)$  établie dans B.2

2/ On note  $D$  le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équations:  $x = 0$  et  $x = 1$

Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A$  du domaine  $D$ .

3/ Pour tout entier naturel  $n$ , on pose:

$$V_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

a/ Calculer  $V_0$ ,  $V_1$  et  $V_2$

b/ Montrer que pour tout naturel  $n \geq 2$ ,

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

En déduire la monotonie de la suite

$(V_n)$  à partir de  $n = 1$

c/ Déterminer la limite de la suite  $(V_n)$

d/ Déterminer la somme:

$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

### PROBLEME N° 22

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}.$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique: 2cm)

#### PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$

$$\text{par : } g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$

1/ Étudier les limites de la fonction

$g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

2/ Calculer la dérivée de  $g$  et déterminer son signe.

3/ Étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation

4/ Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  puis justifier que  $0,35 < \alpha < 0,36$ .

5/ En déduire le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### PARTIE B

1/ Étudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$ .

2/ Déterminer  $f'(x)$  pour tout  $x$  réel et montrer que  $f'(x) = g(x)$ .

3/ En déduire à l'aide de la partie A, les variations de  $f$  et donner son tableau de variation.

4/ a/ Démontrer que  $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

b/ À l'aide de l'encadrement de  $\alpha$  déterminer un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $4 \times 10^{-2}$ .

5/ Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .

Préciser la position relative de la courbe  $(C)$  par rapport à  $\Delta$ .

6/ Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.

7/ Tracer  $\Delta$ ,  $T$  puis  $(C)$

8/ a/ Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$

par:  $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  soit une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$ .

b/ Calculer en fonction de  $\alpha$  l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$ , la droite  $(\Delta)$  et les droites d'équations  $x = -\alpha$  et  $x = 0$ .

c/ Justifier que  $A = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$ .

### PARTIE C

1/ Démontrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ ,  $1 \leq f(x) \leq 2$ .

2/ Démontrer que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ ,  $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$ .

3/ En utilisant le sens de variation de la fonction  $h$  définie sur  $[1; 2]$  par  $h(x) = f(x) - x$ , démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\beta$  dans  $[1; 2]$ .

4/ Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_0 = 1$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = f(U_n)$ .

a/ Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $1 \leq U_n \leq 2$ . (On utilisera une démonstration par récurrence)

b/ Démontrer que pour tout entier

naturel  $n$ ,  $|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$

c/ Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ .

d/ En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et donner sa limite.

e/ Trouver un entier  $N_0$  tel que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $N_0$  on ait :

$$|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$$

### PROBLEME N° 23

On considère la fonction de la variable réelle  $x$  définie par:  $f(x) = x + a e^{-|x|}$  où  $a$  est un réel non nul,  $e$  la base des logarithmes népériens et  $|x|$  désigne la valeur absolue de  $x$ .

#### PARTIE A

1/ a/ Donner l'ensemble de définition de  $f$  ainsi que la partie de cet ensemble où  $f$  est dérivable.

b/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche et à droite en 0.

c/ Montrer que pour tout  $a$ , la courbe représentative  $(C_a)$  de  $f_a$  admet une asymptote oblique dont on donnera une équation.

2/a/ Trouver la valeur de  $x$  pour laquelle la dérivée s'annule.

En déduire l'ensemble  $I$  des réels  $a$  pour lesquels la fonction  $f_a$  a un extrémum relatif; cet extrémum est-il un maximum ou un minimum?

b/ Soit  $x_a$  le point où  $f_a$  possède un extrémum relatif.

Déterminer l'ensemble  $D$  des pts  $M(x_a; f_a(x_a))$  lorsque  $a$  décrit  $I$ .

3/a/ Etablir le tableau de variation de  $f_2$  pour  $a = 2$ .

b/ Tracer la courbe  $(C_2)$  ainsi que ses demi-tangentes en son point d'abscisse 0, son asymptote et l'ensemble  $D$  (Unité 2cm).

4/a/ le réel  $a$  étant fixé, déterminer les points d'intersection  $P$  et  $Q$  de  $(C_a)$  avec la droite  $(S)$  d'équation  $y = x + m$ ,  $m$  étant un paramètre réel.

b/ Calculer les coordonnées du milieu  $J$  du segment  $[PQ]$  et en déduire l'ensemble des points  $J$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ .

## PARTIE B

Dans cette partie on prend  $a = 1$

1/a/ Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_1$ .

b/ Tracer  $(C_1)$ , ses demi-tangentes au point d'abscisse 0 et son asymptote sur un autre dessin (unité 2cm)

2/ Soit l'ensemble des points  $M$  du plan dont les coordonnées  $(x; y)$  sont telles que: 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f_1(x) \end{cases} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

a/ Calculer l'aire  $S'$  de cet ensemble.

b/ Trouver la limite de cette aire lorsque  $\lambda$  tend vers l'infini.

## PROBLEME N° 24

### PARTIE A

On considère les fonctions numériques  $f_m$  de la variable réelle  $x$  définies par:

$f_m(x) = e^x - m(x+1)$   $m \in \mathbb{R}$ . On désigne par  $(C_m)$  leurs courbes. (Unité graphique 2cm)

1/ Etudier les variations de la fonction  $f_1$  et tracer avec soin la courbe  $(C_1)$ .

On précisera l'asymptote de la courbe  $(C_1)$

2/ Soit la droite  $(\Delta_1)$  d'équation  $y = -x - 1$ . Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire

$A(\alpha)$  de la portion du plan limitée par  $(C_1)$ ,  $(A_1)$  et les droites d'équations  $x=0$  et  $x=\alpha$  (où  $\alpha$  est un réel négatif).

Etudier la limite de  $A(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $-\infty$ .

3/ Pour tout entier naturel  $n$  on désigne par  $(D_n)$  le domaine limité par  $(A_1)$ ,  $(C_1)$  et les droites d'équation  $x=-n-1$  et  $x=-n$ .

a/ Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A_n$  du domaine  $(D_n)$ .

b/ Montrer que la suite des réels  $A_n$  est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme  $A_0$  et la raison.

c/ Calculer  $S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n$ . En déduire la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

4/ Etudier suivant les valeurs de  $m$  les variations de  $f$ . On précisera les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

5/ Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe  $B$ .

6/ Montrer que la droite  $(A_m)$  :  $y = -mx - m$  est asymptote à  $(C_m)$  et déterminer la position de  $(C_m)$

par rapport à  $(A_m)$ .

## PARTIE B

A tout point  $M$  du plan d'affixe  $z = x + iy$ , on associe par une transformation  $T$ , le point  $M'$  d'affixe  $z' = x' + iy'$  :

$$T: P \rightarrow P$$

$$M \mapsto M' \text{ et } z' = (1-i)z + 1 + i$$

1/ Quelle est la nature de la transformation  $T$ ?

2/ Définir analytiquement la transformation  $T$ .

3/  $M$  étant un point de  $(C_1)$ , déterminer en fonction de  $x$ , abscisse de  $M$ , les coordonnées de  $M'$  transformé de  $M$  par  $T$ .

4/ Déterminer l'ensemble  $(\gamma)$ , image par  $T$  de la courbe  $(C_1)$ .

## PARTIE C

On considère la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par :  $g(x) = x - \ln(x^2)$

1/ Etudier les variations de  $g$  et tracer sa courbe  $(\Gamma)$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Préciser les branches infinies de  $(\Gamma)$ .

2/ Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$

admet une seule solution dont on donnera un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$ .

3/ Tracer  $(\gamma)$  dans le même repère que  $(\Gamma)$ . On pourra utiliser une autre couleur.

PROBLEME N° 25

Soit la fonction numérique  $f$  définie par:  $f(x) = 2x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 1cm).

PARTIE A

1/ Déterminer l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  et étudier la parité de  $f$ .

2/ Montrez que pour tout  $x$  de  $D$  on a:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

3/ Calculer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$

4/ a/ Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à la courbe  $(C)$  de  $f$  en  $-\infty$ .

b/ Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$ .

c/ Déterminer les autres asymptotes à la courbe  $(C)$ .

PARTIE B

1/ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation:

$$2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0.$$

2/ Déterminer la fonction dérivée de  $f$  et dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

3/ Tracer  $(C)$  ainsi que ses asymptotes dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4/ Déterminer l'intersection de  $(C)$  et de la droite  $(D_m)$  d'équation  $y = 2x + m$  où  $m$  est un paramètre réel

PARTIE C

Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 1. On définit:  $I_n = \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$

1/ a/ A l'aide de la courbe  $(C)$  de  $f$ , donner une interprétation graphique du nombre  $I_n$ .

b/ Prouver que  $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$  pour tout  $n$  supérieur à 1.

c/ Calculer la limite de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

2/ On considère  $S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$ . A l'aide de la courbe  $(C)$  de  $f$ , donner une interprétation graphique du nombre  $S_n$ . Calculer  $S_n$ .

3/ Calculer en  $cm^2$  l'aire  $A(n)$  de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$ , la droite d'équation  $y = 2x - \frac{1}{2}$  et les

droites d'équation  $x = \ln 2$  et  $x = \ln(n+1)$ .  
 Déterminer la limite de  $A(n)$   
 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### PROBLEME N° 26

1/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (x+1)e^{-x}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Étudier les variations de  $g$ .

b/ Construire la courbe  $(C)$  avec soin.

2/ Soit les fonctions  $f_a$  de variable réelle  $x$  définies par :  $f_a(x) = e^{-x} + ax$  où  $a$  est un paramètre réel. On désignera par  $(C_a)$  la courbe représentative de la fonction  $f_a$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a/ Étudier et représenter les fonctions  $f_a$  correspondant à :

$a=0$ ,  $a=1$  et  $a=-1$ . On construira les courbes  $(C_0)$ ,  $(C_1)$  et  $(C_{-1})$  dans le même repère.

b/ - Construire le tableau de variation de la fonction  $f_a$  suivant les valeurs de  $a$ .

- Pour quelles valeurs de  $a$  la fonction  $f_a$  admet-elle un extrémum?

- Soit  $I$  le point de  $(C_a)$  corres-

pondant à cet extrémum. Indiquer en fonction de  $a$  les coordonnées de  $I$ . Quel est l'ensemble des points  $I$ ?

- Pour quelles valeurs de  $a$ , la fonction  $f_a$  réalise-t-elle une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ ?

c/ Utiliser les résultats précédents pour discuter, selon les valeurs de  $a$  l'équation d'inconnue réelle :

$$e^{-x} + ax = 0.$$

3/ a/ Montrer que, quel que soit  $a$ , les fonctions  $f_a$  vérifient l'équation différentielle :  $y - xy' = (x+1)e^{-x}$

b/ Écrire l'équation de la tangente  $\bar{a}(C_a)$  au point d'abscisse  $x_0$ .

Montrer que cette tangente coupe l'axe  $(Oy)$  en un point indépendant de  $a$ .

c/ Soit  $P$  un point de  $(Oy)$  d'ordonnée  $m$ . Étudier, selon les valeurs de  $m$ , le nombre de tangente  $\bar{a}(C_a)$  issues de  $P$ .

4/ Déterminer les courbes  $(C_{a'})$  et  $(C_a)$  ayant les deux propriétés suivantes :

- \* ces courbes sont orthogonales
- \* les asymptotes de ces courbes sont perpendiculaires.

- Une droite parallèle  $\bar{a}(Oy)$  coupe ces courbes en  $M'$  et  $M''$  respectivement.

Déterminer et construire l'ensemble  
J des milieux de  $[M'M'']$

### PROBLEME N° 27

Dans ce problème,  $k$  est un nombre  
réel et on considère la famille de  
fonctions  $f_k$  définies sur  $[-1; +\infty[$  par  
 $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x} + k)$ . Pour les  
représentations graphiques, le plan  
est muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$   
(unité graphique 1cm) et on désigne par  
 $(C_k)$  la courbe représentative de la  
fonction  $f_k$ .

#### PARTIE A.

1/ Etudier suivant les valeurs de  $k$ ,  
la limite de  $f_k$  en  $+\infty$ .

2/ a/ Montrer que la droite  $(D_k)$   
d'équation  $y = -kx + k$  est asymptote  
à  $(C_k)$  en  $+\infty$ .

b/ Etudier la position relative de  
 $(C_k)$  et  $(D_k)$ .

3/ a/ Calculer la dérivée première  
 $f_k'$  et la dérivée seconde  $f_k''$  de  $f_k$ .

b/ Etudier le sens de variation de  $f_k'$ .

4/ a/ Dresser le tableau de variation  
de  $f_0$  puis de  $f_1$ .

b/ Déterminer les tangentes  $(T_0)$  et  
 $(T_1)$  respectives aux courbes  $(C_0)$  et  $(C_1)$

au point d'abscisse  $-1$ .

e/ Tracer  $(D_0), (D_1), (C_0), (T_1), (C_0), (C_1)$

#### PARTIE B

1/ Montrer que l'équation  $f_{-\frac{1}{2}}'(x) = 0$   
admet une unique solution  $\alpha$  et que  
 $-1 \leq \alpha \leq -0,5$ .

2/ Soit  $h$  l'application de  $I = [-1; -\frac{1}{2}]$   
sur  $\mathbb{R}$ , définie par:  $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$ .  
Démontrer que  $\alpha$  est l'unique solution  
de l'équation  $h(x) = x$ .

3/ Etudier les variations de  $h$  et  
montrer que pour tout  $x$  de  $I$ ,  $h(x)$   
appartient à  $I$ .

4/ On considère la suite  $(U_n)$  définie  
par  $U_0 = -1$  et pour tout  $n$  de  
 $\mathbb{N}$ ,  $U_{n+1} = h(U_n)$ .

a/ Démontrer que tous les termes  
de la suite  $(U_n)$  appartiennent à  $I$ .

On suppose que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  
 $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,83|U_n - \alpha|$

b/ Démontrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  
 $|U_n - \alpha| \leq (0,83)^n \cdot \frac{1}{2}$ .

En déduire que la suite  $(U_n)$  est con-  
vergente et donner sa limite

c/ Trouver le plus petit entier naturel  
 $p$  tel que  $|U_p - \alpha| < 10^{-2}$

Dresser le tableau de variation de

de la fonction  $f_{-\frac{1}{2}}$

Démontrer que  $f_{-\frac{1}{2}}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

b/ On donne  $u_{12} \approx -0,6854$

Donner la valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

Tracer  $(C_{-\frac{1}{2}})$

## PROBLEME N°28

Soit  $\lambda$  un réel non nul, on considère la fonction  $f_\lambda$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par:  $f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$ . On désigne par  $(C_\lambda)$  la courbe représentative de la fonction  $f_\lambda$  dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

N.B les parties B et C de ce problème sont indépendantes

### PARTIE A

1/ Déterminer  $f'_\lambda$  et  $f''_\lambda$  les fonctions dérivées première et seconde de  $f_\lambda$ .

2/ Etudier les variations de  $f'_\lambda$ .

3/ Discuter, suivant le réel  $\lambda$ , le nombre de solutions de l'équation

$$d'inconnue  $x$ :  $f'_\lambda(x) = 0$$$

Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les 4 cas:  $\lambda < 0$ ;  $0 < \lambda < e$ ;  $\lambda = e$  et  $\lambda > e$ )

4/ Dédurre de ce qui précède le sens de variation de  $f_\lambda$  suivant les valeurs du réel  $\lambda$ .

5/ Etudier les limites de  $f_\lambda$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Préciser les branches infinies de la courbe  $(C_\lambda)$

6/ Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes  $(C_\lambda)$ .

7/ Soit  $I_\lambda$  le point de  $(C_\lambda)$  dont l'abscisse est  $\lambda$ . Ecrire une équation de la tangente  $D_\lambda$  en  $I_\lambda$  à  $(C_\lambda)$ .

Montrer que les droites  $D_\lambda$  ont un point commun B.

8/ On se propose de tracer avec précision les courbes  $(C_{-1})$ ,  $(C_e)$ ,  $(C_4)$ . Les courbes seront tracées sur une même figure en prenant 2cm comme unité graphique.

a/ On prend  $\lambda = -1$ . Montrer que l'équation  $f'_{-1}(x) = 0$  n'a qu'une solution notée  $x_1$  comprise entre  $-0,57$  et  $-0,56$ .

Construire la courbe  $(C_{-1})$

b/ Tracer  $(C_e)$

c/ Montrer que l'équation d'inconnue  $x$ ,  $f'_{\frac{1}{4}}(x) = 0$  a deux solutions:  $x_1$  comprise entre  $0,35$  et  $0,36$  et  $x_2$  com-

prise entre 2,15 et 2,16.

Tracer  $(C_4)$

PARTIE B

1/ Montrer que la fonction  $f_\lambda$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  et déterminer l'ensemble de ces primitives.

2/ Pour tout  $\lambda$  réel non nul, on définit une suite de fonctions continues

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t) dt - 2\lambda$$

$\forall n \in \mathbb{N}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda.$$

a/ Calculer  $\varphi_1$

b/ Montrer par récurrence, que pour tout naturel  $n$  non nul et tout réel  $x$ :

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (x+n+1) e^{-x}.$$

PARTIE C

On suppose dans cette partie  $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$ .

1/ Montrer que le réel  $x_0$  tel que  $f'_\lambda(x_0) = 0$  est strictement inférieur à  $-1$ . En déduire que si  $-1 < x < 0$  alors  $-1 < f_\lambda(x) < 0$ .

2/ On considère la suite  $(U_n)$  définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_\lambda(U_n) \end{cases}$$

Montrer que:

a/  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < U_n < 0$

b/ la suite  $(U_n)$  est décroissante.

c/  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(U_n + 1)$ .

En déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente et trouver sa limite.

PROBLEME N° 29

Soit la fonction  $f_m$  à variable réelle définie par:  $f_m(x) = e^{x-1} (mx - m + 1) - 1$ .

On désigne par  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A.

On suppose dans cette partie que  $m$  est un paramètre réel non nul.

1/ a/ Montrer que toutes  $(C_m)$  passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

b/ Soit  $M$  un point du plan. Etudier suivant la position du point  $M$  dans le plan, le nombre de courbe  $(C_m)$  qui passent par  $M$ .

2/ a/ Calculer suivant les valeurs de  $m$ , les limites de  $f_m$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$

b/ Etudier les branches infinies de  $(C_m)$

3/ a/ Calculer la dérivée  $f'_m$  de la

fonction  $f_m$  et étudier son signe suivant les valeurs de  $m$ .

c./ Dresser les tableaux de variations de  $f_m$  selon les valeurs de  $m$ .

4./ Déterminer l'ensemble des extrêmes de  $(C_m)$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}^*$ .

5./ Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$f'_m(x) = f'_m(x) + m e^{x-1} + 1$ . En déduire sans calculer  $f''_m(x)$  la relation:

$$f''_m(x) - 2f'_m(x) + f_m(x) = -1$$

6./ Étudier la position relative des courbes  $(C_{-m})$  et  $(C_m)$ .

### PARTIE B

On pose  $m = 1$  puis  $m = -1$ .

1./ Dresser les tableaux de variations des fonctions  $f_1$  et  $f_{-1}$ .

2./ Construire dans le même repère, les courbes  $(C_{-1})$  et  $(C_1)$ .

3./ Soit  $\lambda$  un réel tel que  $\lambda > 1$ .

a./ Calculer l'aire  $a(\lambda)$  de la portion du plan limitée par les courbes  $(C_{-1})$ ,  $(C_1)$  et les droites d'équations  $x=1$  et  $x=\lambda$ .

b./ Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda)$ .

### PROBLEME N° 30

Dans le plan  $P$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  on donne les points  $A(1,0)$ ,  $B(-1;0)$  et  $K(0;-1)$ .

A tout point  $M$  de  $P$  de coordonnées

$(x,y)$  on associe le nombre complexe  $z = x+iy$ , affixe de  $M$ .

### PARTIE A

1./ Démontrer qu'il existe une rotation  $T$  qui laisse le point  $K$  invariant et qui transforme  $A$  en  $B$ .

Préciser l'angle de  $T$  et la transformation complexe associée à  $T$ .

2./ Soit  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  trois points du plan tels que  $M_1 = T(M)$ ,  $M_2 = T(M_1)$  et  $M_3 = T(M_2)$ .

a/ Quelle est la position relative des droites  $(MM_1)$  et  $(M_2M_3)$  lorsque  $M$  est distinct du point  $K$ .

b/ Déterminer l'ensemble des points  $M_1$  de  $P$  lorsque  $M$  décrit le cercle de diamètre  $[AB]$ .

### PARTIE B

Le nombre  $\alpha$  étant fixé mais quelconque on considère l'application  $T_\alpha$  de  $P$  dans  $P$  qui à tout point  $M$  associe le point  $M'$  barycentre des

points pondérés  $(M, \alpha)$ ,  $(M_1, -\alpha)$  et  $(A, 1)$ ,  $M_1$  étant le point défini dans  $A-2/$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1/ Exprimer l'affixe  $z'$  du point  $M'$  en fonction de  $\alpha$  et de l'affixe  $z$  du point  $M$ .

2/ Déterminer suivant les valeurs de  $\alpha$ , la nature et les éléments caractéristiques de  $T_\alpha$ .

3/ Exprimer les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  de  $M$ .

4/ Soit  $E(-e^\alpha, e^\alpha)$  et  $E'$  l'image de  $E$  par  $T_\alpha$ .

a/ Exprimer les coordonnées de  $E'$  en fonction de  $\alpha$ .

b/ Démontrer que lorsque  $\alpha$  décrit  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des points  $E'$  est la courbe  $(C)$  d'équation  $y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$ .

### PARTIE C

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2xe^x + x$ .

1/ Étudier le sens de variation de la fonction dérivée première  $f'$  de  $f$ .

2/ Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3/ a/ Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

b/ Trouver la transformation affine simple par laquelle l'ensemble  $(C)$  des points  $E'$  de B-4b est l'image de la courbe représentative de  $f$ .

c/ Tracer  $(C)$  dans le repère précédent.

d/ Calculer l'aire  $A$  de la partie du plan délimitée par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=1$ .

4/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -2(x-1)e^{x-1}$ . On note  $g', g'', g^{(3)}, \dots, g^{(n)}$  les dérivées successives de  $g$ .

a/ Démontrer que pour tout entier  $n$  non nul  $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$  ou  $x$  est un nombre réel.

b/ Calculer  $\sum_{k=1}^n g^{(k)}(x)$ .

### PROBLEME N° 31

Le plan  $P$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les points  $A(0; 2)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(1; 1)$ ,  $D(1; 2)$  et  $E(2; 1)$ . Soit  $f$  l'application affine du plan telle que  $f(O) = A$  et

dont l'application linéaire associée est notée  $\varphi$ .

### PARTIE A.

On suppose que pour tout point  $M$  de  $(\mathcal{B})$ , on a  $M\vec{f}(M) = \vec{j}$ .

1/ a/ Déterminer  $f(B)$  et  $f(C)$ .

b/ Déterminer  $\varphi(\vec{i})$  et  $\varphi(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

2/ Soit  $M$  un point du plan de coordonnées  $(x, y)$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Démontrer que  $M\vec{f}(M) = (2-y)\vec{j}$ .

3/ Démontrer que  $f \circ f = f$ . En déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $f$ .

### PARTIE B

On suppose que pour tout point  $M$  de  $(\mathcal{B})$ , on a:  $M\vec{f}(M) = \vec{i}$

1/ a/ Déterminer  $f(B)$  et  $f(C)$ .

b/ Déterminer  $\varphi(\vec{i})$  et  $\varphi(\vec{j})$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$

2/ Démontrer que l'expression analytique de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -y + 2 \end{cases}$$

3/ a/ Quel est l'ensemble des points invariants par  $f$ .

b/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $f \circ f$

4/ Soit  $t$  la translation de vecteur  $-\vec{i}$ . Démontrer que  $t \circ f$  est une symétrie axiale dont on précisera les éléments caractéristiques.

5/ On considère la suite des points  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que :

$$M_0 = O \text{ et } M_{n+1} = f(M_n).$$

a/ Montrer que  $M_n M_{n+2} = 2\vec{i}$ .

b/ En déduire que les points  $M_n$  appartiennent à la réunion de deux droites que l'on précisera.

c/ Soit  $(x_n; y_n)$  les coordonnées de  $M_n$ . Exprimer  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$  en fonction de  $x_n$  et  $y_n$ .

On pose  $z_n = y_n - 1$ . Montrer que  $(z_n)$  est géométrique.

En déduire  $y_n$  en fonction de  $n$

Démontrer que  $x_n = n - \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### PARTIE C

Soit  $k$  un réel non nul et soit  $(\Gamma_k)$  la courbe d'équation:  $x(y-1) = k$

1/ Montrer que  $(\Gamma_k)$  est une hyperbole dont on précisera la centre et les asymptotes.

2/ On considère l'application affine  $f$  définie dans la partie B et on désigne par  $(\Gamma'_k)$  l'image de  $(\Gamma_k)$  par  $f$ .

a/ Ecrire les équations de  $(\Gamma'_k)$  respectivement dans les repères  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et  $(C, \vec{u}, \vec{v})$ .

b/ En déduire que  $(\Gamma'_k)$  est une hyperbole dont on précisera le centre et les asymptotes.

3/ Construire  $(\Gamma'_2)$  et  $(\Gamma'_1)$ .

### PROBLEME N° 32

Soit  $m$  un nombre réel et  $f_m$  la fonction à variable réelle définie par  $f_m(x) = e^{-2x} - (3+m)e^{-x} + 3m$ .

Soit  $(C_m)$  sa courbe représentative.

#### PARTIE A

1/ a/ Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe  $A$  dont on précisera les coordonnées.

b/ Soit  $M$  un point du plan. Etudier suivant la position du point  $M$  dans le plan le nombre de courbes  $(C_m)$  passant par  $M$ .

2/ Discuter suivant les valeurs de  $m$  le nombre de points d'intersection de  $(C_m)$  avec l'axe des

abscisses. On donnera les coordonnées des points d'intersection.

3/ a/ Calculer  $f'_m(x)$ .

b/ Déterminer l'ensemble des valeurs de  $m$  pour lesquelles la fonction  $f_m$  admet un extrémum  $I_m$  et Déterminer les coordonnées du point  $I_m$  en fonction de  $m$ .

c/ Déterminer l'ensemble des points  $I_m$  lorsque  $m$  varie.

4/ Dans cette question  $m$  est un réel fixe.

a/ Montrer que  $(C_m)$  admet une asymptote horizontale  $(D_m)$  dont on précisera l'équation.

b/ On suppose à présent que  $m > -3$ . Calculer en fonction de  $m$  les coordonnées du point  $J$  intersection de  $(C_m)$  et  $(D_m)$ .

#### PARTIE B

1/ Etudier les variations de  $f_m$ . On justifiera tout calcul de limite.

2/ Etudier les branches infinies de la courbe  $(C)$ .

3/ Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de  $(C)$  et l'équation de la tangente à  $(C)$  en ce point.

Construire soigneusement la courbe  $(C)$ .

3/ Soit  $g$  l'application de  $[-\ln 2; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $g(x) = f_1(x)$ .

a/ Montrer que  $g$  admet une bijection

b/ Quel est l'ensemble de définition de la réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ ?

4/ Soit  $\alpha$  un nombre réel positif.

Calculer l'aire  $A(\alpha)$  du domaine

plan défini par 
$$\begin{cases} -2\ln 2 \leq x \leq \alpha \\ f_1(x) \leq y \leq 3. \end{cases}$$

5/ Construire la courbe  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère que  $(C)$ .

### PROBLEME N° 33

Dans le plan  $P$  muni d'un repère

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère la droite  $(D)$

d'équation  $y = \frac{1}{2}x$ , la symétrie  $S$

d'axe  $(D)$  et de direction celle de

l'axe  $(oy)$ .

#### PARTIE A

Soit  $g$  l'application affine de  $P$  dans

$P$  qui au point  $M(x; y)$  associe le

point  $M'(x'; y')$  tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1/ Montrer que  $g$  est bijective et vérifier que  $g \circ S = S \circ g$ .

2/ Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M$  de  $P$  invariants par  $g$ .

3/ Montrer que, si  $M$  n'est pas invariant par  $g$ , la droite  $(MM')$  garde une direction indépendante de  $M$  que l'on précisera.

4/ Calculer les coordonnées du point  $M_1$ , intersection de  $(MM')$  et de  $(\Delta)$ .

5/ Montrer que  $g$  est une affinité dont on donnera les éléments caractéristiques.

#### PARTIE B

On note  $\mathcal{F}$  l'application linéaire associée à  $S$  et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des applications affines bijectives  $f$  de  $P$  dans  $P$

telles que  $f(O)$  appartient à  $(D)$  et dont l'application linéaire associée  $\psi$

vérifie :

$\psi(2\vec{i} + \vec{j}) = a(2\vec{i} + \vec{j})$  et  $\psi(\vec{j}) = b\vec{j}$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels non nuls

1/ a/ Préciser le couple  $(a; b)$  pour lequel  $f$  est une homothétie.

b/ Préciser le couple  $(a; b)$  pour que  $f$  soit une translation.

2/ Soit  $A$  un point de  $P$  tel que le vecteur  $\vec{OA}$  soit colinéaire à  $\vec{j}$  et  $B$  un point de  $(D)$  distinct de  $O$ .

Déterminer  $\psi(\vec{OA})$  et  $\psi(\vec{OB})$ .

En déduire  $\Psi(\vec{j})$  et  $\Psi(a\vec{i} + \vec{j})$   
 3/ Démontrer que S et g appartiennent à  $\mathcal{F}_1$ .

4/ On appelle  $\mathcal{F}_1$  le sous-ensemble des éléments de  $\mathcal{F}$  dont l'application linéaire associée  $\Psi$  vérifie  $\Psi(\vec{j}) = \vec{j}$ .

a/ Soit  $f_1$  un élément de  $\mathcal{F}_1$ . Démontrer que le point  $M(x; y)$  a pour image par  $f_1$  le point  $M'(x'; y')$  tel que:

$$\begin{cases} x' = ax + 2x \\ y' = \frac{a-1}{2}x + y + \alpha \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} a \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

b/ Quel est l'ensemble des points invariants par  $f_1$ ?

c/ Dans cette question on prend  $\alpha = 0$ .

Soit  $M_0(x_0, y_0)$  un point du plan P.

On pose  $M_1 = f_1(M_0)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$M_{n+1} = f_1(M_n). \text{ Soit } M_n(x_n, y_n)$$

Calculer  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $x_0, y_0$  et  $a$ . Etudier la convergence des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$ .

PARTIE C

1/ Soit F la fonction numérique définie par:  $F(x) = \frac{1}{2}x + \ln x$ .

Etudier les variations de F et représenter graphiquement F dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On désigne par (C) la courbe de F.

2/ a/ Soit  $f_1$  un élément quelconque de  $\mathcal{F}_1$ . Déterminer une équation cartésienne de l'image de (C) par  $f_1$ .

b/ Soient  $(p; q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $(C_{p,q})$  la courbe d'équation  $y = \ln(px+q) + \frac{1}{2}x$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Démontrer que  $(C_{p,q})$  est l'image de (C) par une application appartenant à  $\mathcal{F}_1$ .

3/ Soit  $(\Gamma)$  la courbe d'équation  $y = \ln(2-2x) + \frac{1}{2}x$ . Reconnaitre l'application élément de  $\mathcal{F}_1$  qui transforme (C) en  $(\Gamma)$ .

4/ Construire l'image  $(C')$  de (C) par  $g_0 S$ .

PROBLEME N° 34

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 2cm. Pour tout nombre réel non nul  $\alpha$ , on considère la fonction  $f_\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par:

$$f_\alpha(x) = -x \ln(\alpha^2) - 2|x| \ln(|x|).$$

On note  $C_\alpha, C_\alpha^+, C_\alpha^-$  les courbes représentatives de  $f_\alpha$  et des restrictions de  $f_\alpha$  à  $]0; +\infty[$  et à  $]-\infty; 0[$  respectivement.

Soit  $g_\alpha$  la restriction de  $f_\alpha$  à  $]0; +\infty[$

PARTIE A

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions numériques dérivables sur  $]0; +\infty[$  et telles que:  $\forall x_1 \in ]0; +\infty[, \forall x_2 \in ]0; +\infty[,$   
 $f(x_1 x_2) = x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1).$

- 1/ Démontrer que la fonction  $h g$  où  $h$  est un nombre réel fixé, appartient à  $E$
- 2/ a/ Démontrer que si  $f$  appartient à  $E$  alors  $f(1) = 0$
- b/ Démontrer que si  $f$  appartient à  $E$  alors  $\forall x \in ]0; +\infty[, x f'(x) - f(x) = x f'(1)$
- c/ En remarquant que la propriété (1) est équivalente à:  $\forall x \in ]0; +\infty[$   
 $\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{f'(1)}{x}$ , calculer  $\frac{f(x)}{x}$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ .
- d/ En déduire l'ensemble des fonctions appartenant à  $E$ .

PARTIE B

- 1/ Pour quelles valeurs de  $\alpha$ ,  $g_\alpha$  appartient à  $E$ ?
- 2/ a/ Etudier le sens de variation de  $g_1$
- b/ Etablir le tableau de variation de  $f_1$  (on pourra utiliser la parité de  $f_1$ )
- c/ Tracer  $C_1$ .
- d/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $C_1$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x = \frac{1}{e}$  et  $x = 1$

Dans la suite du problème, on suppose  $\alpha$  strictement supérieur à  $g_0$ .

- 3/ a/ Montrer que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$   
 $g_\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} g_1(x).$
- b/ En déduire que  $C_\alpha^+$  est l'image de  $C_1^+$  par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
- c/ En déduire le maximum de  $g_\alpha$ .
- 4/ Soit  $S_\alpha$  l'application du plan dans lui-même qui au point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe:  
 $z' = -\alpha^2 \bar{z}.$

- a/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S_\alpha$
- b/ Montrer que  $C_\alpha^-$  est l'image de  $C_1^+$  par  $S_\alpha$ .
- 5/ Construire point par point  $C_2$  à partir de  $C_1$ .

PARTIE C

- Soit  $(U_n)$  une suite numérique définie par  $U_0 \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, 2U_{n+1} = g_\alpha(U_n)$
- 1/ Résoudre l'inéquation  $g_\alpha(x) > 0$  et l'inéquation  $g_\alpha(x) - 2x > 0$ .
  - 2/ Déterminer  $U_0$  pour que la suite  $(U_n)$  soit constante.
  - 3/ On choisit  $U_0 \in ]0; \frac{1}{\alpha}[$  et  $U_0 \neq \frac{1}{\alpha e}$

a/ Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < U_n < \frac{1}{e}$$

b/ Démontrer que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante

c/ En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

### PROBLEME N° 35

#### PARTIE A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x+1)e^{-x}$ .

1/ a/ Etudier le sens de variation de  $f$  et dresser son tableau de variations.

b/ Tracer la courbe  $(C)$  représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2/ Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  vérifie la relation :  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ .

3/ On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y'' + 2y' + y = 0$$

a/ On pose pour tout  $x$  réel  $U(x) = e^{2x}h(x)$  où  $h$  est une fonction au moins deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Démontrer que  $h$  est solution de (E) si, et seulement si, pour tout  $x$  réel

$$U''(x) = 0.$$

b/ Résoudre l'équation différentielle

$z'' = 0$  où  $z$  est une fonction réelle quelconque et déterminer les solutions de (E)

c/ Démontrer que les conditions initiales  $h(0) = \alpha$  et  $h'(0) = \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels, déterminent une solution unique de (E).

#### PARTIE B

Pour  $\lambda$  nombre réel donné, on considère les fonctions  $g_\lambda$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g_\lambda(x) = [(\lambda+1)x+1]e^{-x}$$

1/ Démontrer qu'il existe des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  définies dans A/3-c/ pour lesquelles  $g_\lambda$  est solution de (E).

2/ On suppose dans la suite que  $\lambda \neq -1$ .

a/ Discuter suivant les valeurs de  $\lambda$  les limites de  $g_\lambda$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

b/ Etudier suivant les valeurs de  $\lambda$  le sens de variation de  $g_\lambda$  et faire dans chaque cas le tableau de variations.

c/ On appelle  $(\Gamma_\lambda)$  la courbe représentative de  $g_\lambda$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Tracer sur la figure précédente la courbe  $(\Gamma_{-1/2})$ .

d/ Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble  $(\gamma)$  des points  $M$  du plan par lesquels il passe au moins une courbe

$(\Gamma_\lambda)$  tel que la tangente en  $M \bar{a}$  ( $\Gamma_\lambda$ ) soit parallèle à l'axe des abscisses.

3/ Montrer que pour tout  $\lambda$  de  $]-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$  l'équation  $g_\lambda(x) = 1$  a deux solutions et que la solution non nulle a même signe que  $\lambda$ .

## PROBLEME N° 36

### PARTIE A

Cette première partie a trait à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants.

On appelle  $E$  l'ensemble des fonctions numériques  $f$  admettant des dérivées  $f'$ ,  $f''$  et  $f^{(3)}$  continues sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant l'équation différentielle :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

1/ Montrer que si  $f$  appartient à  $E$ , alors  $f^{(3)} = f''$ , puis que  $f''$  est solution d'équation différentielle de la forme  $y' - my = 0$  ( $m \in \mathbb{R}$ ).

2/ À l'aide de deux intégrations montrer que les éléments de  $E$  sont de la forme  $f(x) = ax + be^x$ ,  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

### PARTIE B

Pour tout couple  $(a; b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on appelle  $f_{a,b}$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$f_{a,b}(x) = ax + be^x$ . On désigne par  $(C_{a,b})$  la courbe représentative de  $f_{a,b}$ .

1/ Étudier la fonction  $f_{1,1}$  et construire la courbe  $(C_{1,1})$  que l'on notera  $(C)$ .

(on prendra comme unité 2cm sur chaque axe).

2/ Étudier, suivant les valeurs de  $a$  et  $b$ , les variations de  $f_{a,b}$  on sera amené à distinguer quatre cas.

Donner le tableau de variations pour chaque cas.

3/ Le plan  $P$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour  $(\alpha; \beta)$  donné dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ , on considère l'application  $\varphi_{\alpha,\beta}$  de  $P$  dans  $P$  dont l'expression analytique relativement à  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \alpha x + \beta y. \end{cases}$$

Montrer que toute courbe  $(C_{a,b})$  est l'image de  $(C)$  par une transformation  $\varphi_{\alpha,\beta}$  que l'on précisera. En déduire le résultat suivant :  $(C_{a,b})$  et  $(C_{a',b'})$  étant données, il existe une transformation  $\varphi_{\alpha,\beta}$  telle que :

$$\varphi_{\alpha,\beta}(C_{a,b}) = (C_{a',b'})$$

4/ Dans cette question, on fixe la va-

leur de a.

a/ Montrer que toutes les courbes  $(C_a, b)$  ont la même asymptote  $(D_a)$ . Déterminer l'application  $\forall \alpha, \beta$  qui transforme  $(C_a, a)$  en  $(C_a, b)$

b/ On appelle  $M_b$  le point de  $(C_a, b)$  d'abscisse 0. Déterminer l'équation de la tangente  $(T_b)$  à  $(C_a, b)$  au point  $M_b$ . Montrer que lorsque  $b$  décrit  $\mathbb{R}^*$ , toutes les droites  $(T_b)$  sont concourantes. Préciser leur point de concours et vérifier qu'il appartient à  $(D_a)$ .

c/ Pour  $x_0$  fixé, soit  $N_b$  le point d'abscisse  $x_0$  de  $(C_a, b)$ . Montrer que toutes les tangentes aux courbes  $(C_a, b)$  en  $N_b$  sont concourantes en un point situé sur  $(D_a)$ .

d/ Tracer sur le même dessin les courbes  $C_1, C_2, C_3, C_{-1}$  et  $C_{-2}$ . On précisera les tangentes aux points d'abscisse 0.

PROBLEME N° 37

PARTIE A

On se propose de déterminer l'ensemble  $F$  des fonctions  $f$  numériques d'une variable réelle définies sur  $] -1; +\infty[$ , dérivables sur cet intervalle et vérifiant

$\forall x \in ] -1; +\infty[ , (1+x) f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1+x)$

1/ Soit  $f \in F$  et soit  $g$  définie par :

$\forall x \in ] -1; +\infty[ , g(x) = (1+x) f(x)$ .

Démontrer que  $g$  est dérivable sur  $] -1; +\infty[$  et que  $g$  est une primitive de la fonction  $h$  définie par :

$\forall x \in ] -1; +\infty[ , h(x) = 1 + \ln(1+x)$

Réciproquement, soit  $g$  une primitive de la fonction  $h$ .

Démontrer que la fonction  $f$  définie par :  $\forall x \in ] -1; +\infty[ , f(x) = \frac{g(x)}{1+x}$  est un élément de  $F$ .

2/ a/ Déterminer des réels  $a$  et  $b$

tel que :  $\forall x \in ] -1; +\infty[ , \frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$

b/ A l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $h$ .

3/ En déduire l'ensemble  $F$ .

PARTIE B

On considère l'ensemble des fonctions  $f_k$  de  $] -1; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :

$\forall x \in ] -1; +\infty[ , f_k(x) = \ln(1+x) + \frac{kx}{1+x}$   
 $k$  étant un paramètre réel.

1/ Discuter suivant les valeurs de  $k$  le sens de variations des fonctions  $f_k$ .

2/ Tracer avec soins, dans un même repère les représentations graphiques

des fonctions  $f_{-1}$ ,  $f_0$  et  $f_1$ .

PARTIE C

$$1/ \text{ Soit } P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k \\ = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$  et pour tout  $x$  de  $] -1; +\infty [$

$$f_0'(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1+x}$$

2/ Démontrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; 1]$

$$\frac{x^{2n}}{1+x} \leq x^{2n}. \text{ En déduire pour tout}$$

entier  $n \geq 1$  la double inégalité

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx \leq \frac{1}{2n+1}$$

3/ On considère la suite  $(W_n)$  définie

$$\text{par: } \forall n \in \mathbb{N}^*, W_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_0'(1) = W_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$$

En déduire que la suite  $(W_n)$  admet, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , une limite que l'on précisera.

Trouver un entier  $n_0$  tel que

$$\ln 2 - W_{n_0} < 0,1.$$

## PROBLEME N° 38

Soit  $f$  l'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; unité 1 cm.

1/ Etudier suivant les valeurs de  $x$ , le signe du polynôme  $x^2 - 6x + 5$  et l'expression de  $f(x)$  sans le symbole de valeur absolue.

2/ Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  en particulier aux points d'abscisse 1 et 5; la courbe admet-elle des tangentes en ces points?

3/ Etudier les variations de  $f$ .

4/ Démontrer que la droite d'équation  $x = 3$  est axe de symétrie de  $(C)$ .

5/ Démontrer que  $(C)$  admet deux asymptotes non parallèles aux axes de coordonnées; l'une à  $+\infty$  et l'autre à  $-\infty$ .

6/ Déterminer les coordonnées des points A et B d'intersection de  $(C)$  avec ses deux asymptotes, A étant le point dont l'abscisse est supérieure à 3.

7/ Soit I le point de coordonnées  $(3; 0)$ . Démontrer que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[1; 5]$ , le point  $M(x; f(x))$

est à une distance constante de  $I$ .

En déduire la nature géométrique de  $(C)$  lorsque  $1 \leq x \leq 5$ .

8/ Tracer  $(C)$  et ses asymptotes.

Faire figurer  $A$  et  $B$ .

9/ Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine

plan défini par:  $1 \leq x \leq 5$  et  $0 \leq y \leq f(x)$

En déduire  $\int_1^5 f(x) dx$

## PROBLEME N° 39

### PARTIE A

Démontrer que pour tout réel  $x$  on a:

$$\sqrt{x^2+3} > |x|$$

En déduire le signe de  $\sqrt{x^2+3} + x$  et celui de  $\sqrt{x^2+3} - x$  sur  $\mathbb{R}$ .

### PARTIE B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$

par:  $f(x) = \sqrt{x^2+3} - |x-1|$ . On désigne

par  $(C)$  la courbe représentative

de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ a/ Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

b/ Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $x_0 = 1$

c/ Etudier le sens de variations de  $f$  sur  $]-\infty; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ . On

peut utiliser les résultats de la partie A.

d/ Compléter l'étude des variations de  $f$ .

e/ Préciser le comportement de la courbe  $(C)$  en  $x_0 = 1$  et construire  $(C)$ .

2/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]-\infty; 1]$

a/ Montrer que  $g$  admet une application réciproque notée  $g^{-1}$

b/ Définir explicitement  $g^{-1}$

c/ Construire la courbe  $(\Gamma)$  représentative de  $g^{-1}$  dans le même plan que  $(C)$ .

d/ Déterminer la fonction  $G$  primitive de  $g^{-1}$  telle que  $G(0) = 0$

e/ Soit  $A$  l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les équations:  $x = -1$  et  $x = 1$

Calculer  $A$  en utilisant la courbe  $(\Gamma)$

### PARTIE C

On désigne par  $I$  l'intervalle  $[1; 2]$

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$

1/ a/ Démontrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $I$

b/ Démontrer que pour tout  $x$  de  $I$  on a  $f(x)$  dans  $I$ .

c/ Démontrer que pour tout  $x$  de  $I$

$$\text{on a: } |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

d/ En déduire que pour tout  $x$  de  $I$

$$\text{on a: } |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$$

2/ a/ Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \in I$

b/ Démontrer que:  $\forall n \in \mathbb{N},$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

c/ Etablir que:  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d/ Dédurre de 2. c que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et préciser sa limite.

### PROBLEME N° 40

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x - \sqrt{|x^2 + 2x - 3|}$$

(C) sa courbe représentative.

1/  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}$ .

2/ a/ Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $-3$ .

b/ Etudier la dérivabilité de  $f$  au point  $1$ .

3/ Calculer le nombre dérivé de  $f$  en un point  $x$  tel que:

a/  $x \in ]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$

b/  $x \in ]-3; 1[$

4/ a/ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x - 1 < 0$$

b/ Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation

$$\sqrt{-x^2 - 2x + 3} + x + 1 < 0$$

c/ En déduire le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .

5/ a/ Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$  et donner le tableau de variations de  $f$ .

b/ Montrer que la courbe (C) admet deux asymptotes dont on précisera les équations

c/ Tracer la courbe (C).

6/ Soit  $h$  la restriction de  $f$  à  $]-\infty; -3[$ .

a/ Montrer que  $h$  est une bijection de  $]-\infty; -3[$  sur un intervalle  $J$  à préciser

b/ Soit  $h^{-1}$  la bijection réciproque de  $h$ . Calculer  $h^{-1}(-5)$  puis trouver une équation

de la tangente (T) à la courbe (C) au point de coordonnées  $(-5; h^{-1}(-5))$

c/ Construire (T) sur le même graphique que (C).

7/ Soit (C') la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$  de la fonction:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

et (G) celle de la restriction de  $f$  à  $]-\infty; -3[ \cup ]1; +\infty[$

a/ Montrer que  $(C') = S_H(G)$  où  $H$  est le milieu du segment  $[AB]$   $A(-3; -3); B(1; 1)$

b/ Caractériser analytiquement  $(G) \cup (C')$ .

c/ Construire  $(C) \cup (C')$  sur une autre figure.

**CORRIGES DES PROBLEMES  
DE SYNTHESE**

E

**CORRIGES DES PROBLEMES  
DE SYNTHESE**

PROBLEME N°1PARTIE A

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par:  $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

1/ Etudions le sens de variation de  $g$

$$Dg = ]0; +\infty[$$

$x \mapsto \frac{x+1}{2x+1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

donc dérivable sur  $]0; +\infty[$

$x \mapsto \ln x$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

$g$  est donc dérivable sur  $]0; +\infty[$  et

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$$

$\forall x > 0, g'(x) < 0$ ;  $g$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$

2/ Calculons  $g(1)$  et  $g(2)$ .

$$g(1) = \frac{2}{3} - \ln 1 = \frac{2}{3}$$

$$g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2$$

$g(1) = \frac{2}{3}$	$g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2$
----------------------	------------------------------

Déduisons-en que l'équation  $g(x) = 0$

a une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$

$g$  est continue, monotone, strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$  avec:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{2x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$g$  définit donc une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ . De plus  $0 \in \mathbb{R}$ ; il existe donc un unique réel  $\alpha$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  tel que  $g(\alpha) = 0$

Conclusion

L'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$

Donnons un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,1$

$$g(1) = \frac{2}{3} > 0 \quad g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2 \approx -0,09 < 0$$

$\Leftrightarrow 1 \leq \alpha \leq 2$  d'après le théorème des valeurs intermédiaire.

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = 0,29 > 0 \Leftrightarrow 1,5 < \alpha < 2$$

$$g(1,75) = 0,514 > 0 \Leftrightarrow 1,75 < \alpha < 2$$

$$g(1,875) = -0,023 < 0 \Leftrightarrow 1,75 < \alpha < 1,875$$

Conclusion: De proche en proche on a:

$1,8 < \alpha < 1,9$
----------------------

3/ Déduisons-en le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$

On sait que  $g$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

$0 < x < \alpha \Rightarrow g(x) > 0$ ;  $g(\alpha) = 0$  et  $x > \alpha \Leftrightarrow g(x) < 0$ .

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous:

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

## PARTIE B

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}. \text{ On note}$$

( $\odot$ ) la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unité : 2cm sur (Ox), 4cm sur (Oy))

1/ Étudions les limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \ln x$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} \cdot \frac{\ln x}{x}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
---	---

2/ Montrons que pour tout  $x > 0$ ,

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x).$$

$x \mapsto \ln x$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

$x \mapsto x^2 + x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0, x^2 + x > 0$   
La fonction  $f$  est donc dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \frac{\frac{1}{x}(x^2+x) - (2x+1) \ln x}{(x^2+x)^2} \\ &= 2 \frac{x+1 - (2x+1) \ln x}{(x^2+x)^2} \\ &= 2(2x+1) \frac{\frac{x+1}{2x+1} - \ln x}{(x^2+x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$$

$\forall x > 0, f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$
---

Déduisons-en le signe de  $f'(x)$

$\forall x > 0, \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} > 0$ ;  $f'(x)$  a donc le signe de  $g(x)$ .

Signe de  $f'(x)$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	/	+	-

3/ Dressons le tableau de variations de  $f$  et montrons que :  $f(x) = \frac{2}{x(2x+1)}$

Tableau de variations de  $f$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	/	+	-
$f(x)$	/	$\nearrow$ $f(\alpha)$	$\searrow$ 0

Montrons que  $f(x) = \frac{2}{x(2x+1)}$

On sait que:  $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} - \ln x = 0$

$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{x+1}{2x+1}$$

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2+x}$$

$$= \frac{2}{x(x+1)} \ln x = \frac{2}{x(2x+1)} \cdot \frac{x+1}{2x+1}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{x(2x+1)}}$$

4/ Traçons la courbe (C).

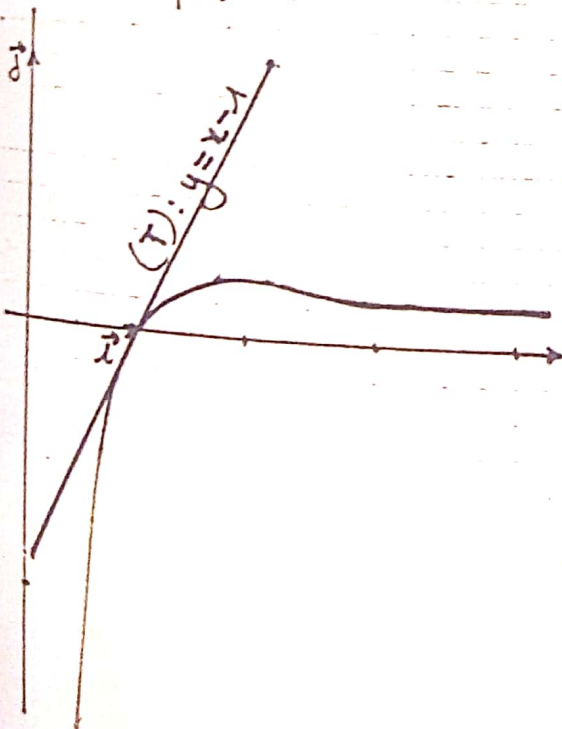
Tangente (T) au point d'abscisse 1.

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f'(1) = \frac{2 \times 3}{2^2} \cdot \frac{2}{3} = 1; \quad f(1) = 0$$

$$\boxed{(T): y = x - 1}$$

$$a \approx 1,85 \quad f(a) \approx 0,23$$



## PARTIE C

1/a. Déterminons une primitive sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  de la

fonction:  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

Posons  $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

$$= \frac{1}{x} \ln x$$

$$= u'(x) \cdot u(x) \text{ avec } u(x) = \ln x$$

Soit H une primitive de h on a:

$$\boxed{H(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2}$$

b/ Montrons que pour tout  $x > 1$  on a:

$$f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$$

$\forall x > 1, x+1 > 2 \Leftrightarrow x(x+1) > 2x$  car  $x > 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x} \leq \frac{1}{2x} \text{ car}$$

$t \mapsto \frac{1}{t}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x^2+x} \leq \frac{\ln x}{x} \text{ car } \forall x > 1, \ln x > 0$$

Conclusion

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 1 \text{ on a: } f(x) \leq \frac{\ln x}{x}}$$

2/ Soit F la primitive de f sur  $\mathbb{R}_+^*$  qui s'annule pour  $x=1$

Sans calculer F, montrons que pour tout  $x > 1$  on a:  $F(x) \leq \frac{1}{2} (\ln x)^2$

On sait que:

$$\forall t > 1, f(t) \leq \frac{\ln t}{t}$$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow [F(t)]_1^x \leq \left[ \frac{1}{2} (\ln t)^2 \right]_1^x$$

$$\Leftrightarrow F(x) - F(1) \leq \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$$

or  $F(1) = 0$  et  $\ln 1 = 0$

On a donc :  $F(x) \leq \frac{1}{2} (\ln x)^2$

Conclusion

Four tout  $x > 1$  on a :  $F(x) \leq \frac{1}{2} (\ln x)^2$

PROBLEME N°2

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$$

1/ Etudions les variations de  $g$ .

$D_g = ]0; +\infty[$

limites de  $g$  aux bornes de  $D_g$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - \frac{1 + 4x \ln x}{x^2}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} + x \left( x - 4 \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Dérivée

$x \mapsto x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc dérivable sur  $]0; +\infty[$

$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc dérivable sur  $]0; +\infty[$

$x \mapsto -4 \ln x$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$

la fonction  $g$  étant la somme de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et :

$$\forall x > 0, g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x}$$

$$g'(x) = \frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)}{x^3}$$

$$g'(x) = 2 \frac{(x^2 - 1)^2}{x^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\forall x > 0, \begin{cases} (x^2 - 1)^2 \geq 0 \\ x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$$

Sens de variation de  $g$

$g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$

### Tableau de variation de $g$ .

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$		+	+

Diagram showing a graph of  $g(x)$  starting from  $-\infty$  at  $x=0$ , increasing to a maximum at  $x=1$ , and then increasing towards  $+\infty$  as  $x \rightarrow +\infty$ .

Précisons  $g(1)$ :  $g(1) = 0$

2/ Déduisons-en le signe de la fonction  $g$  sur chacun des intervalles  $]0; 1[$  et  $]1; +\infty[$

$$\forall x \in ]0; 1[, g(x) < 0$$

$$\forall x \in ]1; +\infty[, g(x) > 0$$

### PARTIE B: Etude d'une fonction

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

1/ Montrons que, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\forall x > 0, \frac{1}{x} > 0; \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$

$$\forall x > 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2} - [(-\ln x)^2]$$

$$= \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4}x^2 - (\ln x)^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2 = f(x)$$

$$\forall x > 0, f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

2/ Déterminons la limite de  $f$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} + x^2 \left[ \frac{1}{4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right]$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^2} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Déterminons la limite de  $f$  en 0

1<sup>ère</sup> méthode

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2} \left[ \frac{1}{4} - (x \ln x)^2 \right]$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

2<sup>e</sup> méthode

$$\text{Posons } X = \frac{1}{x} (\Leftrightarrow x = \frac{1}{X})$$

$$\text{si } x \rightarrow 0 \text{ alors } X \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{X}\right) \text{ ou } f\left(\frac{1}{X}\right) = f(X)$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} f(X) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

3/ Montrons que pour tout réel  $x > 0$ ,  
 $f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$

$x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ,  $x \mapsto \ln x$  sont  
 dérivables sur  $]0; +\infty[$ ; donc  $f$  est  
 dérivable car elle est la combinaison  
 linéaire de fonctions dérivables, sur  $]0; +\infty[$

et pour tout  $x > 0$  on a:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x^3} - \frac{2}{x} \ln x$$

$$= \frac{1}{2x} \left( x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x \right) = \frac{1}{2x} g(x)$$

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2x} g(x)$$

En utilisant la partie A, étudions le  
 sens de variations de la fonction  $f$  sur  
 l'intervalle  $]0; +\infty[$

$\forall x > 0, \frac{1}{2x} > 0$ ;  $f'(x)$  a donc le signe  
 de  $g(x)$  sur  $]0; +\infty[$

D'après A-2 on a:

$\forall x \in ]0; 1[, f'(x) < 0$ ;  $f$  est donc  
 décroissante sur  $]0; 1[$

$\forall x \in ]1; +\infty[, f'(x) > 0$ ;  $f$  est donc  
 croissante sur  $]1; +\infty[$ ;  $f'(1) = 0$

Tableau de variation de  $f$

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

4/ Construction de la courbe (C) repré-  
 sentative de  $f$  dans un repère ortho-  
 norme (unité graphique 5cm)

Etude des branches infinies

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ; L'axe des ordonnées  
 est asymptote verticale à la courbe (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4x^3} - \frac{(\ln x)^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^3} + x \left[ \frac{1}{4} - \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2 \right]$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x^3} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

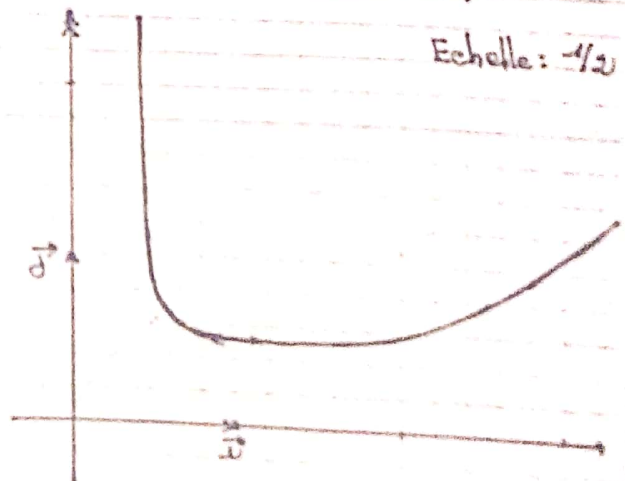
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

La courbe (C) admet une branche in-  
 finie de direction (oy).

Trçons (C)

Tableau de valeurs:

$x$	1/2	1	2	3
$f(x)$	$\frac{17}{16} - (\ln \frac{1}{2})^2$	-1/2	$\frac{17}{16} - (\ln 2)^2$	



### PARTIE C : Résolutions approchées d'équations

1/ Montrons que l'équation  $f(x) = x$  admet une seule solution sur  $]0; 1[$

Posons  $h(x) = f(x) - x, x \in ]0; 1[$

Etude du sens de variation de  $h$   
 $DR = ]0; 1[$

$f$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc dérivable sur  $]0; 1[$ ;  $h$  est donc dérivable sur  $]0; 1[$  et  $\forall x \in ]0; 1[, h'(x) = f'(x) - 1$

$\forall x \in ]0; 1[, f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) - 1 \leq -1 < 0$

$\forall x \in ]0; 1[, h'(x) < 0$ ;  $h$  est décroissante sur  $]0; 1[$

$h$  est monotone, strictement décroissante sur  $]0; 1[$  avec :

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$  et  $h(1) = f(1) - 1 = -\frac{1}{2} < 0$

$h$  définit une bijection de  $]0; 1[$  vers  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ . De plus  $0 \in ]-\frac{1}{2}; +\infty[$ ; il existe donc un unique réel  $\alpha$  de  $]0; 1[$

tel que  $h(\alpha) = 0$

ou  $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ .

Conclusion

L'équation  $f(x) = x$  admet une seule solution sur  $]0; 1[$ , notée  $\alpha$ .

2/ Montrons que l'équation  $f(x) = \frac{1}{x}$  admet une seule solution sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

On sait que pour tout  $x > 0, f(x) = f(\frac{1}{x})$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \quad (1)$$

Posons  $x = \frac{1}{x}$

(1)  $\Leftrightarrow f(x) = x$ ;  $x$  existe, est unique et appartient à  $]0; 1[$

$$x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \cdot 0 < x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1$$

L'équation  $f(x) = \frac{1}{x}$  admet donc une solution sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  soit  $\beta$  cette solution.

Montrons que  $\alpha \cdot \beta = 1$ .

L'équation  $f(x) = \frac{1}{x}$  admet pour solution  $\beta$ .

$$\Leftrightarrow f(\beta) = \frac{1}{\beta} \quad f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta}$  est solution de l'équation  $f(x) = x$

ou l'équation  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} = \alpha \Leftrightarrow \alpha \beta = 1$

$$\boxed{\alpha \beta = 1}$$

Encadrement de  $\beta$  d'amplitude  $10^{-2}$ . Dédution d'un encadrement de  $\alpha$

$$f(2) - \frac{1}{2} = -0,08 \quad f(3) - \frac{1}{3} = 0,73$$

$$f(2,5) - \frac{1}{2,5} = 0,36 \quad f(2,25) - \frac{1}{2,25} = 0,14$$

De proche en proche on a :

$$f(2,015625) - \frac{1}{2,015625} = 0,029$$

On en déduit que :  $\boxed{2 < \beta < 2,01}$

d'où :  $\boxed{0,49 < \alpha < 0,5}$

PROBLEME N°3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $a$  est un nombre réel

strictement positif et différent de 1

Soit  $f_a$  la fonction de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  définie par:  $f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$  et  $(\mathcal{C}_a)$  sa courbe représentative.

1/ a. Calculons  $f_a(1)$ ,  $f_a(a)$ ,  $f_a(a^n)$  où  $n$  est un entier relatif.

$$f_a(1) = \frac{\ln 1}{\ln a} = 0; \quad f_a(a) = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

$$f_a(a^n) = \frac{\ln a^n}{\ln a} = \frac{n \ln a}{\ln a} = n.$$

$$\boxed{f_a(1) = 0 \quad f_a(a) = 1 \quad f_a(a^n) = n}$$

b/ Démontrons que pour tous nombres réels strictement positifs  $x, y$  et tout entier relatif  $n$  on a:

$$* f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y).$$

$$\begin{aligned} f_a(xy) &= \frac{\ln(xy)}{\ln a} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln a} \\ &= \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = f_a(x) + f_a(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_a(xy) = f_a(x) + f_a(y)}$$

$$* f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)$$

$$\begin{aligned} f_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\ln a} = \frac{\ln x - \ln y}{\ln a} \\ &= \frac{\ln x}{\ln a} - \frac{\ln y}{\ln a} \end{aligned}$$

$$\boxed{f_a\left(\frac{x}{y}\right) = f_a(x) - f_a(y)}$$

$$* f_a(x^n) = n f_a(x)$$

$$f_a(x^n) = \frac{\ln x^n}{\ln a} = n \frac{\ln x}{\ln a} = n f_a(x)$$

$$\boxed{f_a(x^n) = n f_a(x)}$$

$$* f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x)$$

$$f_a(\sqrt{x}) = \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln a} = \frac{1}{2} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{2} f_a(x)$$

$$\boxed{f_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} f_a(x)}$$

c/ Démontrons que pour tous nombres réels strictement positifs  $a, b$  et  $x$  on a:

$$* f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)} \quad * f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x)$$

$$f_a(b) = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{1}{\frac{\ln a}{\ln b}} = \frac{1}{f_b(a)}$$

$$\begin{aligned} f_a(x) &= \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln x}{\ln b} \\ &= f_a(b) \cdot f_b(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_a(b) = \frac{1}{f_b(a)}}$$

$$\boxed{f_a(x) = f_a(b) \cdot f_b(x)}$$

2/ a/ Etudions la fonction  $f_a$  et dressons son tableau de variation pour  $0 < a < 1$  et  $a > 1$

$$f_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

1<sup>er</sup> cas  $0 < a < 1$ :  $\ln a < 0$

$Df_a = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\ln a < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\ln a < 0$

Dérivée

$x \mapsto \ln x$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc  $f_a$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et

$\forall x > 0, f'_a(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$

$\forall x > 0, f'_a(x) < 0$  car  $\ln a < 0$

$f_a$  est donc strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_a$

$x$	0	$+\infty$
$f'_a(x)$		-
$f_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$

2<sup>e</sup> cas  $a > 1$   $\ln a > 0$

$Df_a = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln a} = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $\ln a > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln a} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\ln a > 0$

$f'_a(x) = \frac{1}{x \ln a}$

$\forall x > 0, f'_a(x) > 0$  car  $\ln a > 0$ .

$f_a$  est donc croissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_a$

$x$	0	$+\infty$
$f'_a(x)$		+
$f_a(x)$	$-\infty$	$+\infty$

b/ Démontrons que  $f_a$  est une bijection

Pour tout  $a$  strictement positif et différent de 1,  $f_a$  est continue, monotone, sur  $]0; +\infty[$  avec :

$f_a(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$ .  $f_a$  est donc une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .

c/ Démontrons que  $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$

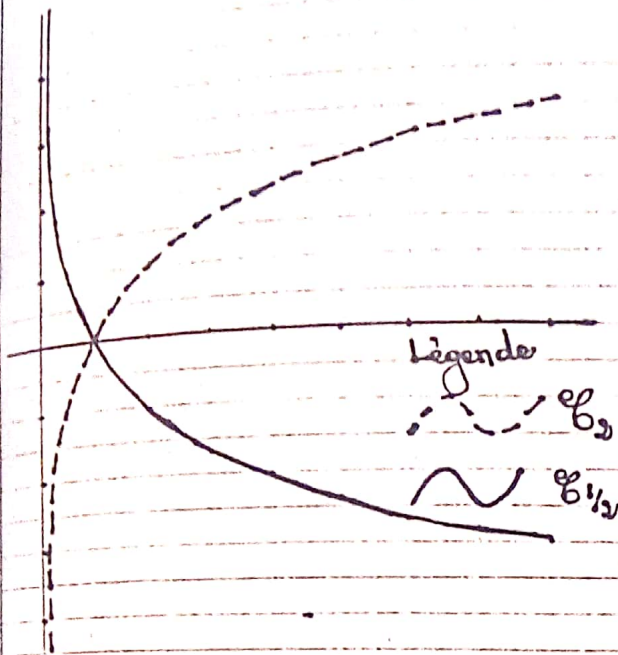
$f_{\frac{1}{a}}(x) = \frac{\ln x}{\ln(\frac{1}{a})} = \frac{\ln x}{-\ln a} = -\frac{\ln x}{\ln a}$

$f_{\frac{1}{a}}(x) = -f_a(x)$   $f_{\frac{1}{a}} = -f_a$

Déduisons-en la position relative de  $(\mathcal{C}_a)$  et  $(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}})$

$(\mathcal{C}_a)$  et  $(\mathcal{C}_{\frac{1}{a}})$  sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

3/ Traçons les courbes  $(\mathcal{C}_2)$  et  $(\mathcal{C}_{1/2})$



PROBLEME N° 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout nombre réel  $m$ , on définit la fonction  $f_m$  par:

$$f_m(x) = \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$$

On désigne par  $(\mathcal{C}_m)$  la courbe représentative de  $f_m$ .

1/ Etudions  $f_m$  et traçons  $(\mathcal{C}_m)$  dans les cas suivants:  $m=0, m=-1$  et  $m=1$

1<sup>er</sup> cas  $m=0$

$$f_0(x) = -\ln|x|$$

$$D_{f_0} = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\ln|x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x = -\infty; x=|x|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} -\ln|x| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = +\infty$$

Dérivée

$\forall x \neq 0, |x| > 0$ ;  $f_0$  est continue et dérivable sur  $D_{f_0}$  et  $\forall x \neq 0$ :

$$f_0'(x) = -\frac{1}{x}$$

Signe de  $f_0'(x)$

$\forall x < 0, f_0'(x) > 0$ ;  $\forall x > 0, f_0'(x) < 0$

Sens de variation de  $f_0$

$f_0$  est croissante sur  $]-\infty; 0[$  et décroissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_0$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f_0'(x)$	$+$		$-$
$f_0(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Branches infinies de  $f_0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\ln(-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_0(x)}{x} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

(E<sub>0</sub>) admet une branche infinie de direction (Ox) à -∞ comme à +∞.

\*  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ; l'axe des ordonnées est asymptote verticale à (E<sub>0</sub>).

2<sup>e</sup> cas  $m = -1$

$$f(x) = \ln \left| \frac{-x+1}{x-1} \right| = \ln 1 = 0, x \neq 1$$

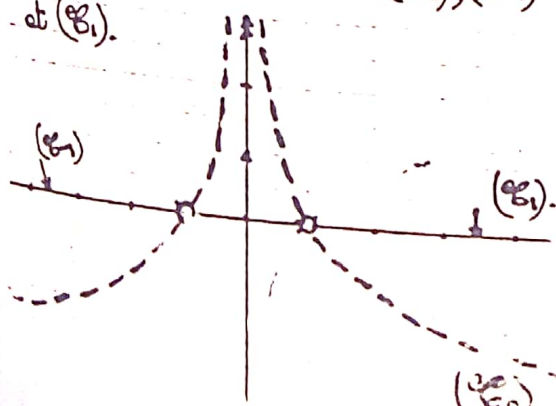
(E<sub>1</sub>) est l'axe des abscisses privé du point d'abscisse 1

3<sup>e</sup> cas  $m = 1$

$$f(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| = \ln 1 = 0, x \neq -1$$

(E<sub>1</sub>) est l'axe des abscisses privé du point d'abscisse -1

Construction des courbes (E<sub>0</sub>), (E<sub>-1</sub>) et (E<sub>1</sub>).



Dans la suite, on suppose que  $m \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

2/ a/ Déterminons les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de la fonction f<sub>m</sub>

Soit D<sub>m</sub> le domaine de définition de f<sub>m</sub>

$$D_m = \{x \in \mathbb{R} / x+m \neq 0 \text{ et } mx+1 \neq 0\}$$

$$\text{Prenons } x+m=0 \Leftrightarrow x=-m$$

$$mx+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{m}$$

$$D_m = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{m}; -m \right\}$$

$\forall x \in D_m, x \mapsto \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$  est continue et dérivable. De plus  $\forall x \in D_m, \left| \frac{mx+1}{x+m} \right| > 0$  or  $x \mapsto \ln x$  est continue et dérivable sur ]0; +∞[;

Les ensembles de continuité et de dérivabilité sont donc confondus à D<sub>m</sub>

b/ Démontrons que les courbes (E<sub>m</sub>) passent par deux points fixes

$$f_m(1) = \ln \left| \frac{m+1}{m+1} \right| = 0 \text{ pour } m \neq -1$$

$$f_m(-1) = \ln \left| \frac{-m+1}{m-1} \right| = \ln|-1| = \ln 1 = 0 \text{ pour } m \neq 1$$

Toutes les courbes (E<sub>m</sub>) à l'exception de (E<sub>-1</sub>) et (E<sub>1</sub>) passent par deux points fixes A(-1; 0) et B(1; 0)

3/ a/ Démontrons que D<sub>m</sub> = D<sub>1/m</sub>

$$D_{\frac{1}{m}} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x + \frac{1}{m} \neq 0 \text{ et } \frac{1}{m}x + 1 \neq 0 \right\}$$

$$x + \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{m}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -m.$$

$$\mathbb{D}_{\frac{1}{m}} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{m}; -m \right\} = \mathbb{D}_m.$$

$$\boxed{\mathbb{D}_m = \mathbb{D}_{\frac{1}{m}}}$$

Démontrons que pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{D}_m$  on a:  $f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)$

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{m}}(x) &= \ln \left| \frac{\frac{1}{m}x + 1}{x + \frac{1}{m}} \right| \\ &= \ln \left| \frac{x+m}{mx+1} \right| = -\ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right| = -f_m(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{D}_m, f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x)}$$

Déduisons-en la position relative de  $(C_m)$  et  $(C_{\frac{1}{m}})$ .

$$\forall x \in \mathbb{D}_m, f_{\frac{1}{m}}(x) = -f_m(x).$$

On en déduit que les courbes  $(C_m)$  et  $(C_{\frac{1}{m}})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $(Ox)$ .

b/ Démontrons que:

$$* (x \in \mathbb{D}_m) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{D}_m)$$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{D}_m &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{m} \\ \text{et} \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \neq -\frac{1}{m} \\ \text{et} \\ -x \neq -m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow -x \in \mathbb{D}_m \end{aligned}$$

$$\boxed{(x \in \mathbb{D}_{-m}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{D}_m)}$$

$$* \forall x \in \mathbb{D}_{-m}, f_{\frac{1}{-m}}(x) = f_m(-x)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{D}_m, f_{\frac{1}{-m}}(x) &= \ln \left| \frac{-mx+1}{x-m} \right| \\ &= \ln \left| \frac{m(-x)+1}{-(-x+m)} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{D}_{-m}, f_{\frac{1}{-m}}(x) &= \ln \left| \frac{m(-x)+1}{-x+m} \right| \\ &= f_m(-x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{D}_{-m}, f_{\frac{1}{-m}}(x) = f_m(-x)}$$

Déduisons-en la position relative des courbes  $(C_m)$  et  $(C_{-m})$

$$\forall x \in \mathbb{D}_{-m}, f_{\frac{1}{-m}}(x) = f_m(-x)$$

On en déduit que:

Les courbes  $(C_m)$  et  $(C_{-m})$  sont symétriques par rapport à l'axe  $(Oy)$ .

c/ Déduisons des questions précédentes qu'il suffit d'étudier  $f_{\frac{1}{m}}$  et de tracer  $(C_m)$  pour  $m > 1$  pour obtenir toutes les courbes  $(C_m)$ .

$$m > 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \in ]0; 1[ \\ -\frac{1}{m} \in ]-1; 0[ \\ -m \in ]-\infty; -1[ \end{cases} \text{ et } \begin{cases} C_{\frac{1}{m}} = S_{Ox}(C_m) \\ C_{-m} = S_{Oy}(C_m) \end{cases}$$

Il suffit donc d'étudier  $f_{\frac{1}{m}}$  et tracer  $(C_m)$  pour  $m > 1$  pour obtenir toutes les courbes  $(C_m)$ .

4/ On suppose dans cette question que  $m > 1$

a/ Étudions  $f_{\frac{1}{m}}$  et dressons son tableau de variation

$$\mathbb{D}_m = \mathbb{R} - \left\{ -m; -\frac{1}{m} \right\}$$

limites de  $f_m$  aux bornes de  $D_m$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right| = \ln |m|$$

$$= \ln m \text{ car } m > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -m} \frac{f(x)}{m} = \lim_{x \rightarrow -m} \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$$

Faisons  $u(x) = \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$

$$\lim_{x \rightarrow -m} u(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} mx+1 \rightarrow -m^2+1 \neq 0 \\ x+m \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -m} \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}} \frac{f(x)}{m} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}} \ln \left| \frac{mx+1}{x+m} \right|$$

$$= -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}} u(x) = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{m} = \ln m$$

$$\lim_{x \rightarrow -m} \frac{f(x)}{m} = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}} \frac{f(x)}{m} = -\infty$$

Dérivée

$$\forall x \in D_m, f'_m(x) = \frac{m^2-1}{(x+m)(mx+1)}$$

$$\forall x \in D_m \text{ et } m > 1, m^2-1 > 0$$

$f'_m(x)$  a donc le signe de  $(x+m)(mx+1)$

Signe de  $f'_m(x)$

$x$	$-\infty$	$-m$	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$	
$f'_m(x)$	+		-		+

Sens de variation de  $f_m$

$\forall x \in ]-\infty; -m[ \cup ]-\frac{1}{m}; +\infty[$ ,  $f'_m(x) > 0$   
 $f_m$  est donc croissante sur  $]-\infty; -m[$  et sur  $]-\frac{1}{m}; +\infty[$

$\forall x \in ]-m; -\frac{1}{m}[$ ,  $f'_m(x) < 0$ ;  $f_m$  est décroissante sur  $]-m; -\frac{1}{m}[$

Tableau de variation de  $f_m$

$x$	$-\infty$	$-m$	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$	
$f'_m(x)$	+		-		+
$f_m(x)$	$\ln m$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\ln m$

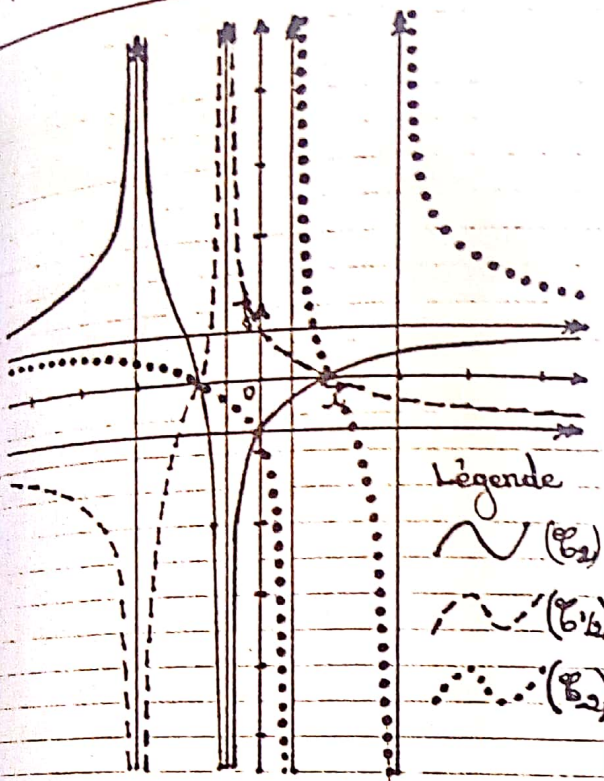
b./ Déduisons-en le tracé de  $(C_2)$ ,  $(C_{\frac{1}{2}})$  et  $(C_{-2})$ .

Tableau de variation de  $f_{\frac{1}{2}}$

$x$	$-\infty$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$f'_{\frac{1}{2}}(x)$	+		-		+
$f_{\frac{1}{2}}(x)$	$\ln 2$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\ln 2$

La courbe  $(C_2)$  admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations:  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = -2$  et une horizontale d'équation  $y = \ln 2$

$$(C_{\frac{1}{2}}) = \text{Soc}(C_2); (C_{-2}) = \text{Soy}(C_2)!$$



Soit  $\Omega$  le point d'intersection de  $(C_2)$  et de son asymptote horizontale.  
Démontrons que  $\Omega$  est un centre de symétrie de  $(C_2)$   
 Coordonnées de  $\Omega$

$$\begin{cases} y = f_2(x) \\ y = \ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow f_2(x) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{2x+1}{x+2} \right| = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2x+1}{x+2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+1}{x+2} = 2 & (a) \\ \text{ou} \\ \frac{2x+1}{x+2} = -2 & (b) \end{cases}$$

(a)  $\Leftrightarrow 2x+1 = 2x+4$  impossible.  
 (b)  $\Leftrightarrow 2x+1 = -2x-4 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$   
 $\Omega(-\frac{5}{4}; \ln 2)$   
 On sait que  $A(a; b)$  est centre de symétrie de  $(C_f)$  si:  $f(2a-x) + f(x) = 2b$

$$\begin{aligned} f_2\left(2\left(-\frac{5}{4}\right)-x\right) &= f_2\left(-\frac{5}{2}-x\right) \\ &= \ln \left| \frac{-5-2x+1}{-\frac{5}{2}-x+2} \right| \\ &= \ln \left| \frac{4(x+2)}{2x+1} \right| \\ &= \ln 4 + \ln \left| \frac{x+2}{2x+1} \right| \\ f_2\left(-\frac{5}{2}-x\right) &= 2\ln 2 - f_2(x) \end{aligned}$$

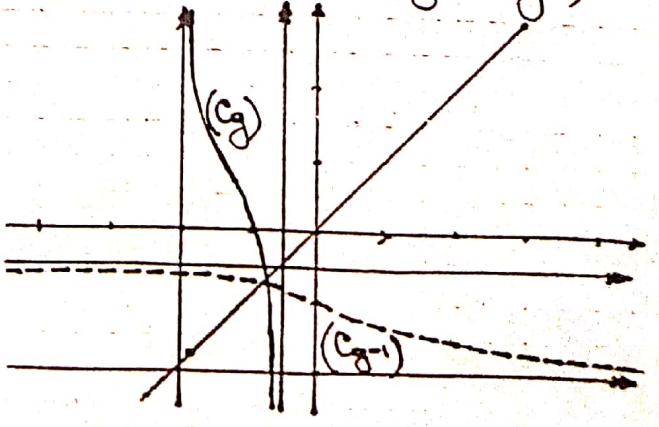
$f_2\left(-\frac{5}{2}-x\right) + f_2(x) = 2\ln 2$   
 $\Omega\left(-\frac{5}{4}; \ln 2\right)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(C_2)$

c/ Soit  $g$  la restriction de  $f_2$  à  $]-2; -\frac{1}{2}[$   
Démontrons que  $g$  réalise une bijection de  $]-2; -\frac{1}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$   
 La restriction  $g$  de  $f_2$  à  $]-2; -\frac{1}{2}[$  est continue, monotone, strictement décroissante sur  $]-2; -\frac{1}{2}[$  avec:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} g(x) = -\infty$$

$g$  définit donc une bijection  $]-2; -\frac{1}{2}[$  vers  $\mathbb{R}$  =  $g(]-2; -\frac{1}{2}[)$

Construction des courbes  $(C_g)$  et  $(C_{g^{-1}}$



# PROBLEME N° 5

1/ Soit  $f$  la fonction définie par:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

a/ Etudions  $f$  et dressons son tableau de variation

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$Df = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

limites de  $f$  aux bornes de  $Df$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{x} + \ln x, \quad x = 1-x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+x \ln x}{x}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \\ x-1 \rightarrow -1 < 0 \\ x \rightarrow 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} + \ln|x-1|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} + \ln(x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y+1}{y} + \ln y, \quad y = x-1$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y+1+y \ln y}{y}$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = 0 \\ y+1 \rightarrow 1 > 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

## Derivée

$\forall x \in Df, |x-1| > 0$

$x \mapsto \ln|x-1|$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  car  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, |x-1| > 0$  et  $t \mapsto \ln t$  dérivable sur  $]0; +\infty[$

De plus  $x \mapsto \frac{x}{x-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$ ;  $f$  est donc continue et dérivable sur  $Df$  car elle est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur  $Df$

et  $\forall x \in Df, f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

$\forall x \in Df, (x-1)^2 > 0$

$f'(x)$  a donc le signe de  $x-2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

### Signe de $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$

Sens de variation de f  
 $\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; 2[$ ,  $f'(x) > 0$ ; f est donc strictement croissante sur  $]-\infty; -1[$  et sur  $]1; 2[$   
 $\forall x \in ]2; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ ; f est donc strictement décroissante sur  $]2; +\infty[$   
 f admet un extrémum local au point d'abscisse 2.  $f(2) = 2$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
f'(x)	-		-	+
f(x)	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

b/- Calculons f(0)

$$f(0) = \frac{0}{0-1} + \ln|0-1| = 0$$

$f(0) = 0$

Déduisons-en le signe de f(x)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f(x)	+		-	+

2/ Soit g la fonction définie par:

$$g(x) = x \ln|x-1|$$

a/ Etudions g.

$$Dg = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$Dg = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

limites de g aux bornes de Dg.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln|x-1| = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln|x-1| = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1| = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \ln|x-1| = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} |x-1| = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$

Dérivée:

$x \mapsto \ln|x-1|$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$   
 $x \mapsto x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$   
 donc continue et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$   
 g est donc continue et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  car elle est le produit de deux fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  et  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ :

$$g'(x) = \ln|x-1| + \frac{x}{x-1} = f(x)$$

$g'(x)$  est du même signe que  $f(x)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g'(x)	+		-	+

Sens de variation de g:

$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$ ,  $g'(x) > 0$   
 $g$  est croissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

$\forall x \in ]0; 1[$ ,  $g'(x) < 0$ ;  $g$  est décroissante sur  $]0; 1[$

$g$  admet un maximum local en 0

$g(0) = 0$

Tableau de variation de g

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

Construction de la courbe (C) représentative de g.

Etude des branches infinies

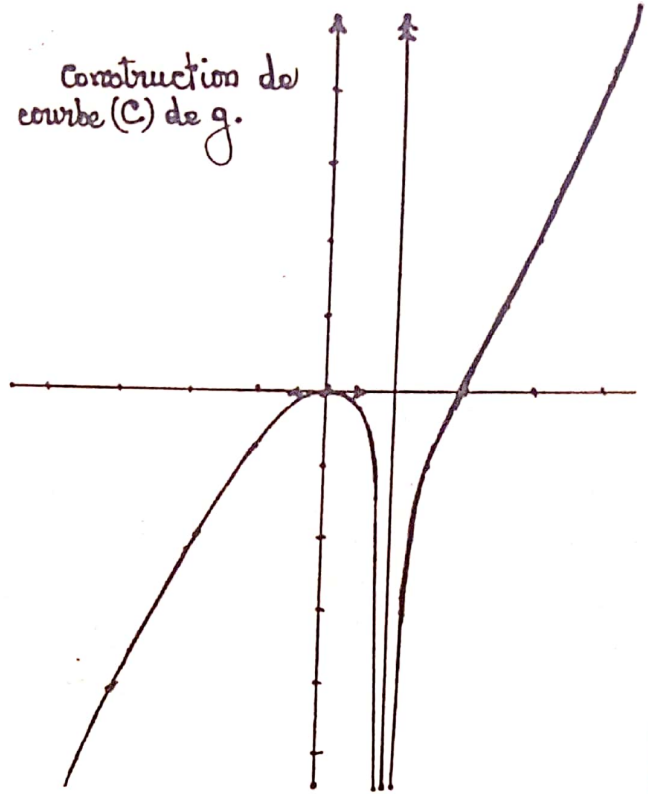
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln|x-1|$   
 $= +\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x-1| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

La courbe (C) de  $g$  possède une direction asymptotique de direction (cy)

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$ ; la droite d'équation  $x=1$  est asymptote verticale  $\bar{a}$  (C).

Construction de courbe (C) de g.



b/ Soit A le point d'intersection de (C) et (OI) d'abscisse non nulle.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln|x-1| = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$  ou  $\ln|x-1| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = 2$

$A(2; 0)$ .

Démontrons que A est un point d'inflexion de (C).

$g''(x) = f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$      $g(2) = 0$

L'abscisse du point A annule la dérivée de  $g$ ; A est donc un point d'inflexion de (C).

Equation de la tangente (T) à (C) en A.

(T):  $y = g'(2)(x-2) + g(2)$

$g'(2) = 2$      $g(2) = 0$

$(T): y = 2(x-2)$

3/ On désigne par  $h$  la restriction de  $g$  à l'intervalle  $]1; +\infty[$

Démontrons que  $h$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$

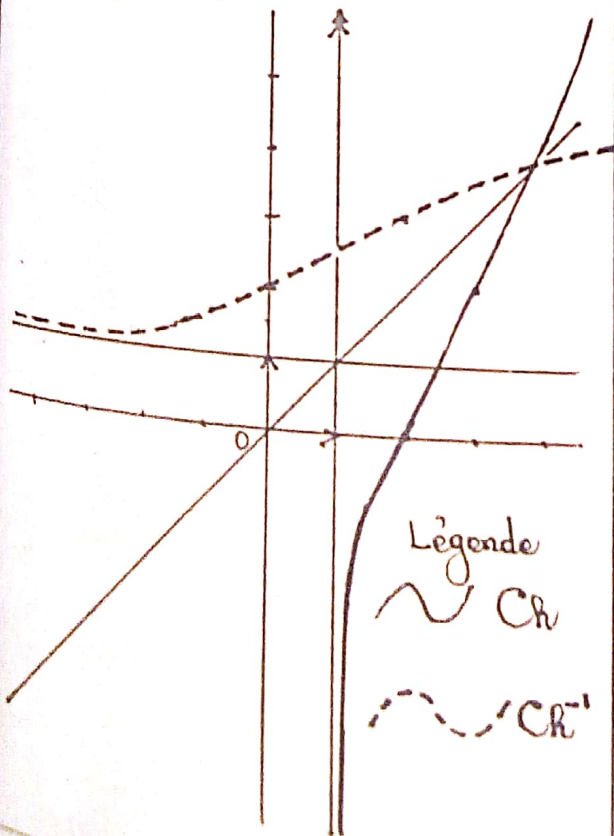
$h$  est continue, monotone, strictement croissante sur  $]1; +\infty[$  avec

$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

$h(]1; +\infty[) = \mathbb{R}$

$h$  est donc une bijection de  $]1; +\infty[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Construction des courbes représentatives de  $h$  et  $h^{-1}$  sur un autre graphique



Légende  
 ~ Ch  
 - - - Ch<sup>-1</sup>

PROBLEME N°6

PARTIE A

Soit la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x + \ln|x-1|$

1/ Etude du sens de variation de  $f$

$\mathcal{D}f = \{x \in \mathbb{R} / x-1 \neq 0\}$

Posons  $x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

Dérivée

$x \mapsto \dots$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  et  $\forall x \neq 1, |x-1| > 0$ . De plus  $x \mapsto \ln|x|$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ . La fonction  $x \mapsto \ln|x-1|$  est donc continue et dérivable sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  d'où  $f$  continue et dérivable sur  $\mathcal{D}f$  et  $\forall x \in \mathcal{D}f, f'(x) = 1 + \frac{1}{x-1}$

$f'(x) = \frac{x}{x-1}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Signe de  $f'(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

Sens de variation de  $f$

$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[, f'(x) > 0$   
 $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]1; +\infty[$

$\forall x \in ]0; 1[, f'(x) < 0; f$  est strictement

décroissante sur  $]0; 1[$   
 $f$  admet un maximum local au point 0  
 $f(0) = 0$ .

Tableau de variation de  $f$ .

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln|x-1|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln(1-x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \ln(1+x), x = -x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln|x-1|$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + \ln|x-1|$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

b/ Montrons que  $f$  s'annule pour une valeur  $\alpha$  différent de 0, que nous comparerons aux nombres réels  $\frac{5}{4}$  et  $\frac{3}{2}$

D'après les variations de  $f$  on a:  
 $f(0) = 0; \forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[, f(x) < 0$

De plus la restriction de  $f$  à  $]1; +\infty[$  est continue, monotone, strictement croissante sur  $]1; +\infty[$  avec :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Cette restriction définit donc une bijection de  $]1; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .

Il existe donc un unique réel  $\alpha > 1$  tel que  $f(\alpha) = 0$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} - 2\ln 2 < 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln 2 > 0$$

$f\left(\frac{5}{4}\right) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow \frac{5}{4} < \alpha < \frac{3}{2}$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires

2/ Soit (C) la courbe représentative de  $f$  dans le plan P rapportée à un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$

a/ Étudions les branches infinies de (C)

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ ; (C) possède une asymptote verticale  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\ln|x-1|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(x-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|x-1|$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} |x-1| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

la courbe (C) admet une branche parabolique dirigée par la droite d'équation  $y=x$  (la 1<sup>ère</sup> bissectrice)

b) Traçons (C) ainsi que les tangentes  $\bar{a}(C)$  aux points d'abscisses respectives  $\frac{1}{2}$  et  $1-e$

Equations des tangentes

Soit (T) la tangente  $\bar{a}(C)$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  et (T') la tangente  $\bar{a}(C)$  au point d'abscisse  $1-e$  on a:

$$(T): y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2$$

$$(T): -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} - \ln 2 = -x + 1 - \ln 2$$

$$(T'): y = f'(1-e)\left(x - (1-e)\right) + f(1-e)$$

$$f'(1-e) = \frac{e-1}{e}; \quad f(1-e) = 2-e$$

$$(T'): y = \frac{e-1}{e}\left(x - (1+e)\right) + 2-e$$

$$= \frac{e-1}{e}x + \frac{1}{e}$$

Finalement on a:

$(T): y = -x + 1 - \ln 2$	$(T'): y = \frac{e-1}{e}x + \frac{1}{e}$
---------------------------	--

Pour la construction voir page suivante

3/ Soit  $t$  un nombre réel de  $[0; 1[$

Calculons l'aire de la partie du plan définie par:  $0 \leq x \leq t$  et  $f(x) \leq y \leq 0$

Soit  $A(t)$  cette aire on a:

$$A(t) = \int_0^t (-x - \ln|x-1|) dx$$

$$= \int_0^t (-x - \ln(1-x)) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^t - \int_0^t \ln(1-x) dx$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 - \int_0^t \ln(1-x) dx$$

Poseons  $u(x) = \ln(1-x) \Rightarrow u'(x) = \frac{-1}{1-x}$

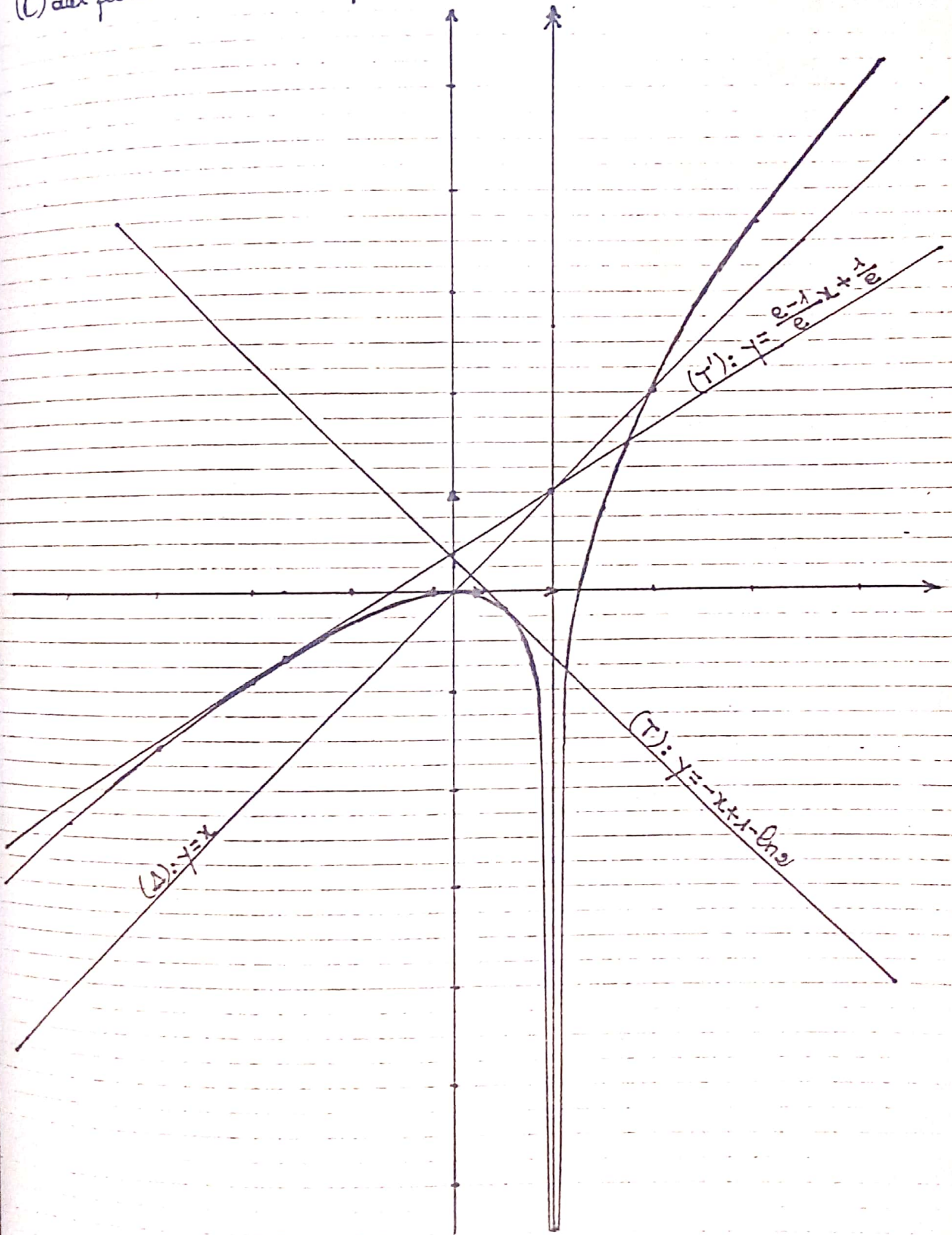
$$v'(x) = 1 \Leftrightarrow v(x) = x$$

$$\int_0^t \ln(1-x) dx = \left[x \ln(1-x)\right]_0^t - \int_0^t \frac{x}{1-x} dx$$

$$= t \ln(1-t) - \int_0^t \left(1 + \frac{1}{1-x}\right) dx$$

$$= t \ln(1-t) - \left[x + \ln|1-x|\right]_0^t$$

Construction de la courbe (C) représentative de  $f$  ainsi des tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives  $-1/2$  et  $1-e$ .



$$\int_0^t \ln(1-x) dx = t \ln(1-t) - t - \ln|t-1|$$

$$= t \ln(1-t) - t - \ln(1-t)$$

$$\int_0^t \ln(1-x) dx = (t-1) \ln(1-t) - t$$

$$A(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + (1-t) \ln(1-t) \text{ unité d'aire}$$

Calculons la limite de cette aire lorsque

$t$  tend vers 1

$$\lim_{t \rightarrow 1} -\frac{1}{2}t^2 + t = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t) \ln(1-t) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x, \quad x = 1-t$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (1-t) \ln(1-t) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 1} A(t) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} A(t) = \frac{1}{2} \text{ unité d'aire} = 2 \text{ cm}^2$$

4/ Soit  $g$  la restriction de  $f$  à  $]1; +\infty[$

a/ Montrons que  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$

Après les variations de  $f$ , sa restriction  $g$  à  $]1; +\infty[$  est continue, monotone strictement croissante sur  $]1; +\infty[$

avec:  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

$g$  définit donc une bijection de  $]1; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .

Conclusion:  $g$  admet une bijection réciproque  $g^{-1}$

Ensemble de définition de  $g^{-1}$

$$\mathcal{D}g^{-1} = \mathbb{R}$$

b/ Dérivabilité de  $g^{-1}$  en 2

On sait que  $g(2) = 2 \Leftrightarrow g^{-1}(2) = 2$ .

De plus  $g$  est dérivable en 2 et  $g'(2) \neq 0$   
 $g^{-1}$  est donc dérivable en 2.

Calculons  $(g^{-1})'(2)$

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{g'[g^{-1}(2)]} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{2}$$

$$(g^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$$

PARTIE B

1/ On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation:

$$z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6 + 8i = 0 \quad (E)$$

a/ Montrons que (E) admet une solution imaginaire pure notée  $z_0$  que nous déterminerons.

Posons  $z_0 = ai, a \in \mathbb{R}^*$

$z_0$  solution de (E)

$$\Leftrightarrow (ai)^3 + (1+i)(ai)^2 + (2+i)ai + 6 + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^3i - (1+i)a^2 + (-1+2i)a + 6 + 8i = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a^2 - a + 6) + i(-a^3 - a^2 + 2a + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 - a + 6 = 0 \quad (1) \\ -a^3 - a^2 + 2a + 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a+3)(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -3 \text{ ou } a = 2$$

$$-(-3)^3 - (-3)^2 + 2(-3) + 8 = 20 \neq 0$$

$$-(2)^3 - 2^2 + 2 \times 2 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow z_0 = 2i$$

(E) admet une solution imaginaire pure  $z_0 = 2i$

b/ Résolution de l'équation (E) dans  $\mathbb{C}$

Posons  $P(z) = z^3 + (1+i)z^2 + (2+i)z + 6+8i$

$z_0$  solution  $\Leftrightarrow P(z)$  peut se mettre sous la forme:  $P(z) = (z-2i)Q(z)$  où  $Q$  est un polynôme du second degré. Par division euclidienne on a:

$$P(z) = (z-2i)(z^2 + (1+3i)z - 4+3i)$$

(E)  $\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2i \\ \text{ou} \\ z^2 + (1+3i)z - 4+3i = 0 \end{cases}$  (3)

(3)  $\Leftrightarrow z^2 + (1+3i)z - 4+3i = 0$

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4(-4+3i)$$

$$= 8-6i = (3-i)^2$$

$$z_1 = \frac{-1-3i+3-i}{2} = 1-2i$$

$$z_2 = \frac{-1-3i-3+i}{2} = -2-i$$

$$S = \{ 2i; 1-2i; -2-i \}$$

2/ Soit dans le repère (O, I, J) les points A, B et C d'affixes respectives  $z_0, z_1$  et  $z_2$

a/ Montrons qu'il existe une similitude directe S que nous déterminerons

qui transforme A en B et I en C

Posons  $z' = az + b$ , l'écriture complexe de S.

$$\begin{cases} S(A) = B \\ S(I) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = az_0 + b \\ z_2 = az_1 + b, z_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ia + b = 1-2i \\ a + b = -2-i \end{cases}$$
 (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i-1 \neq 0$$

Il existe donc une similitude S et une seule qui transforme A en B et I en C

(4)  $\Leftrightarrow (2i-1)a = 3-i$

$$a = \frac{-3+i}{1-2i} = \frac{(-3+i)(1+2i)}{5} = -1-i$$

$$b = -2-i + 1+i = -1$$

l'écriture complexe de S est: 
$$z' = (-1-i)z - 1$$

b/ Donnons les éléments géométriques de la similitude directe S.

$a = -1-i \quad b = -1$

$|a| = \sqrt{2} \quad \text{Arg}(a) = \frac{5\pi}{4}$

soit  $\Omega$  le centre de S.

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1}{2+i} = \frac{-2+i}{5}$$

S est la similitude directe de centre  $\Omega$  d'affixe  $z_\Omega = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ , de rapport  $k = \sqrt{2}$  et d'angle  $\theta = \frac{5\pi}{4}$

3/ A tout point  $M(x; y)$  on associe le point  $M'(x'; y')$  par S.

Déterminons  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$

$$z' = (-1-i)z - 1$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = (-1-i)(x + iy) - 1$$

$$x' + iy' = -x + y - 1 + i(-x - y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + y - 1 \\ y' = -x - y \end{cases}$$

4/ Soit  $(\Gamma)$  la représentation graphique dans le plan P de la restriction

$h$  de la fonction  $f$  à l'intervalle  $] -\infty; 1[$

Vérifions que l'image  $(\Gamma')$  de  $(\Gamma)$

par S est une partie de la représen-

tation graphique dans le plan P de la

fonction  $h_1$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$h_1(x) = 2e^{x+1} - x - 3$$

$$\begin{cases} x' = -x + y - 1 \\ y' = -x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{x' + y' + 1}{2} \\ y = \frac{x' - y' + 1}{2} \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \ln(1-x) \\ x < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x' - y' + 1}{2} = -\frac{x' + y' + 1}{2} + \ln\left(1 + \frac{x' + y' + 1}{2}\right) \\ \frac{x' + y' + 1}{2} > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + 1 = \ln\left(\frac{x' + y' + 3}{2}\right) \\ x' + y' + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' + 3 = 2e^{x'+1} \\ x' + y' + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = 2e^{x'+1} - x' - 3 \\ x' + y' + 3 > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow M'$  appartient à une partie de la courbe représentative de  $h_1$ .

Conclusion:

$(\Gamma')$  =  $S(\Gamma)$  est une partie de la courbe représentative de la fonction  $h_1$  définie par:  $h_1(x) = 2e^{x+1} - x - 3$

5/ Étudions les variations de la fonction  $h_1$

$$\mathcal{D}h_1 = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

limites de  $h_1$  aux bornes de  $\mathcal{D}h_1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x+1} - x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2e \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x} \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x+1} - x - 3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e e^x - x - 3$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x - 3 = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) = +\infty$$

Dérivée

$x \mapsto 2e^{x+1}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ;  $x \mapsto -x - 3$  est continue et dérivable

sur  $\mathbb{R}$ ,  $f_4$  est donc continue et dérivable sur  $\mathcal{D}f_4 = \mathbb{R}$  car elle est la somme de deux fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathcal{D}f_4$ :

$$f_4'(x) = 2e^{x+1} - 1$$

$$f_4'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = -\ln 2 \Leftrightarrow x = -1 - \ln 2$$

$$f_4(-1 - \ln 2) = 2 \times \frac{1}{2} + (-1 - \ln 2) - 3 = -1 - \ln 2$$

Signe de  $f_4'(x)$

$x$	$-\infty$	$-1 - \ln 2$	$+\infty$
$f_4'(x)$	-	0	+

Sens de variation

D'après le tableau ci-dessus,  $f_4$  est décroissante sur  $]-\infty; -1 - \ln 2[$ , croissante sur  $]-1 - \ln 2; +\infty[$  et admet un minimum au point  $-1 - \ln 2$

Tableau de variation de  $f_4$

$x$	$-\infty$	$-1 - \ln 2$	$+\infty$
$f_4'(x)$	-	0	+
$f_4(x)$	$+\infty$	$-1 - \ln 2$	$+\infty$

Branches infinies

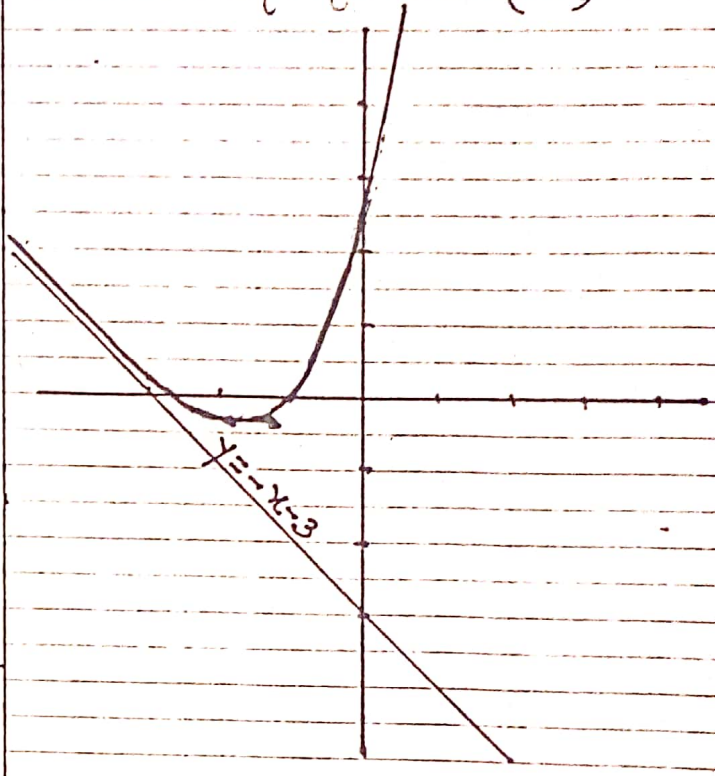
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) + x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x+1} = 0$$

la droite d'équation  $y = -x - 3$  est asymptote oblique à la courbe  $(C_{f_4})$  à  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{3}{x} = +\infty$$

$(C_{f_4})$  possède une branche infinie de direction  $(oy)$  à  $+\infty$

Construction de la courbe  $(C_{f_4})$



PROBLEME N°7

On considère la fonction numérique de variable réelle  $x$  définie par:

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^2}{2x^2 - 1} \right)$$

PARTIE A

Soit l'expression  $A(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x}$

1/ Vérifions que  $A(1) = 0$

$$A(1) = \frac{2(1)^3 - 1 - 1}{1} = 0$$

$$A(1) = 0$$

- Etudions le signe de  $A(x)$

$$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + 2x + 1)$$

Posons  $2x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Delta' = 1 - 2 = -1 < 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 2x + 1 > 0$

$$A(x) = \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)}{x}; A(x) \text{ a le}$$

signe de  $\frac{x-1}{x}; \mathcal{D}A = \mathbb{R}^*$

Tableau de signe de  $A(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$A(x)$	$+$	$  $	$-$	$+$

a) Calculons  $f(-1)$  et  $f(1)$ .

$$f(-1) = -1 + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2-1}\right) = 2$$

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2-1}\right) = 0$$

$$f(-1) = 0 \quad f(1) = 2$$

- Ensemble de définition de  $f$

$$\mathcal{D}f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 2x^2 - 1 > 0 \right\}$$

Posons  $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 1$	$+$	$0$	$-$	$+$

$$\mathcal{D}f = ]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[ \cup ]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$$

b) Determinons les limites de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ ; vers  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = x + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

c) Etude des limites de  $f(x)$  lorsque

$x$  tend vers  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  puis vers  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} x + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} x+1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty \text{ car}$$

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} x+1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{2x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right.$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty}$$

d/ Montrons que la courbe (C) représentative de f admet trois asymptotes dont nous donnerons les équations

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = +\infty$$

les droites d'équations  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  sont asymptotes verticales à (C).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$$= 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right) = -\ln 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2}{2x^2-1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \ln 2$$

la droite (Δ):  $y = x + 1 - \frac{1}{2} \ln 2$  est asymptote oblique à la courbe (C)

Conclusion

(C) admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et une oblique d'équation:  $y = x + 1 - \frac{1}{2} \ln 2$

3/ a/ Etude des variations de f.

f est continue et dérivable sur  $\mathbb{D}_f$  et

$$\forall x \in \mathbb{D}_f, f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{2x(2x^2-1) - 4x^2 \cdot 2x}{(2x^2-1)^2} = 1 - \frac{1}{x(2x^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{x(2x^2-1)}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - x - 1}{x(2x^2-1)} = \frac{A(x)}{(2x^2-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = 0 \\ \text{et} \\ x \in \mathbb{D}_f \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$\forall x \in \mathbb{D}_f, 2x^2 - 1 > 0$ ;  $f'(x)$  a donc le signe de  $A(x)$ .

Tableau de signe de  $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+			-	+

Sens de variation de f.

Posons  $I_1 = ]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[$  et  $I_2 = ]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$

$\forall x \in I_1, f'(x) > 0$ ; f est donc croissante sur  $]-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}[$  et sur  $]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$

$\forall x \in ]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[, f'(x) < 0$ ; f est donc décroissante sur  $]\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[$

f admet un minimum local au point 1

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$
f(x)	+			-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

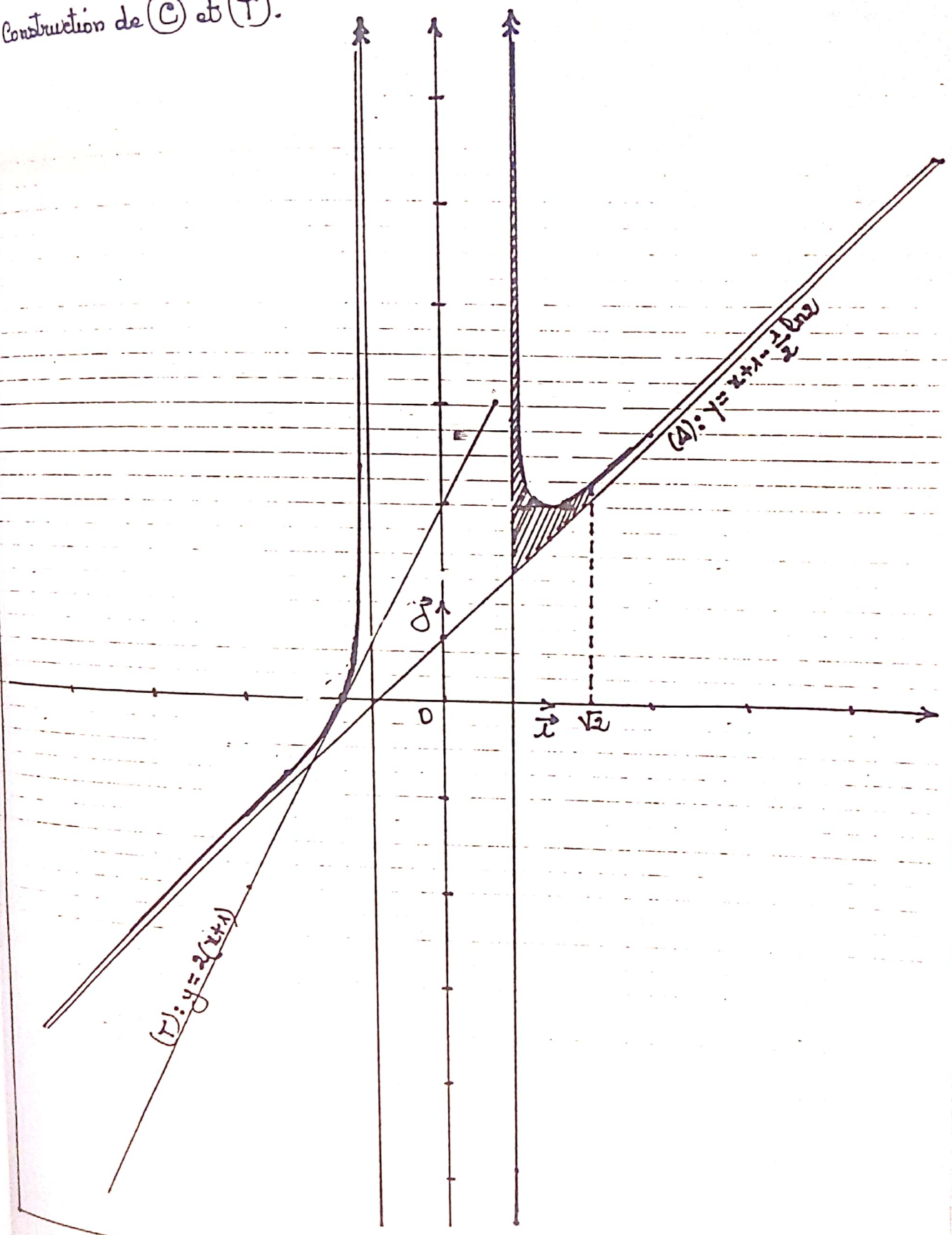
b/ Construction de la courbe (C) (Voir page suivante)

Equation de la tangente au point d'abscisse -1,

$$(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

$(T): y = 2(x+1)$

Construction de (C) et (T).



PARTIE B

Soit l'expression  $B(x) = \frac{2}{2x^2-1}$

1/a/ Déterminons le couple des réels (a; b) tel que pour toute valeur de x qui définit B(x) on ait:

$$B(x) = \frac{a}{x\sqrt{2}-1} + \frac{b}{x\sqrt{2}+1}$$

$$D_B = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

$$\forall x \in D_B, B(x) = \frac{(a+b)x\sqrt{2} + a - b}{2x^2 - 1}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$a=1$	$b=-1$
-------	--------

b/ Déduisons-en les primitives de B(x)

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x\sqrt{2}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}-1} - \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}+1} \right) \end{aligned}$$

Soit H(x) une primitive de B(x) on a:

$$H(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \ln|x\sqrt{2}-1| - \ln|x\sqrt{2}+1| \right]$$

$H(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left  \frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1} \right  + k, k \in \mathbb{R}$
--

2/a/ Soit  $\alpha$  un réel de l'intervalle  $\left] \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right]$

Calcul d'intégrale

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \ln \left( \frac{2x^2}{2x^2-1} \right) dx$$

Posons  $u(x) = \ln \left( \frac{2x^2}{2x^2-1} \right) \Rightarrow u'(x) = \frac{-2}{x(2x^2-1)}$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$I(\alpha) = \left[ x \ln \left( \frac{2x^2}{2x^2-1} \right) \right]_{\alpha}^{\sqrt{2}} + \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \frac{2}{2x^2-1} dx$$

$$I(\alpha) = \sqrt{2} \ln \frac{4}{3} - \alpha \ln \left( \frac{2\alpha^2}{2\alpha^2-1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \ln \left| \frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1} \right| \right]_{\alpha}^{\sqrt{2}}$$

$I(\alpha) = \sqrt{2} \ln \frac{4}{3} - \alpha \ln \left( \frac{2\alpha^2}{2\alpha^2-1} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \ln \frac{1}{3} - \ln \frac{\alpha\sqrt{2}-1}{\alpha\sqrt{2}+1} \right)$
--

b/ Déterminons en fonction de I(α)

l'aire du domaine plan défini par la courbe (C) et les droites d'équations

$$y = x + 1 - \ln|x\sqrt{2}|, x = \alpha \text{ et } x = \sqrt{2}$$

Soit A(α) cette aire on a:

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \left[ f(x) - (x+1 - \ln|x\sqrt{2}|) \right] dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x^2}{2x^2-1} \right) + \ln|x\sqrt{2}| \right] dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{2x^2}{2x^2-1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\sqrt{2}} \ln \left( \frac{2x^2}{2x^2-1} \right) dx$$

$A(\alpha) = \frac{1}{2} I(\alpha)$
-------------------------------------

c/ Soit  $\beta = \alpha\sqrt{2}-1$

Exprimons I(α) en fonction de β

$$\beta = \alpha\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \beta+2 = \alpha\sqrt{2}+1$$

$$2\alpha^2-1 = (\alpha\sqrt{2}-1)(\alpha\sqrt{2}+1) = \beta(\beta+2)$$

$$\alpha = \frac{\beta+1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\alpha^2 = (\beta+1)^2$$

d'où:

$$I(\alpha) = \sqrt{2} \ln \frac{4}{3} - \frac{\beta+1}{\sqrt{2}} \ln \frac{(\beta+1)^2}{\beta(\beta+2)} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{3\beta}{\beta+2}$$

$$I(\alpha) = \sqrt{2} \ln \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 2(\beta+1) \ln(\beta+1) - \beta \ln \beta - (\beta+2) \ln(\beta+2) + \ln 3 \right]$$

Déduisons - en  $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha)$

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} &\Rightarrow \beta \rightarrow 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \sqrt{2} \ln \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left[ 2(\beta+1) \ln(\beta+1) - \beta \ln \beta - (\beta+2) \ln(\beta+2) + \ln 3 \right] \right] \\ &= \sqrt{2} \ln \frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} (2 \ln 2 - \ln 3) \\ &= 3\sqrt{2} \ln \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha) = 3\sqrt{2} \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

d'Calculons l'aire  $A$  du domaine plan défini par la courbe  $(C)$  et les droites d'équations:  $y = x+1 - \ln \sqrt{2}$ ,  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} A(\alpha) = \frac{1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}} I(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \text{ unités d'aire} \end{aligned}$$

En  $\text{cm}^2$  on a:

$$A = 4 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = 6\sqrt{2} \ln \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

La valeur approchée de  $A$  est:  $1,22 \text{ cm}^2$

$$A \approx 1,22 \text{ cm}^2$$

## PROBLEME N°8

Pour tout nombre réel  $\alpha$  non nul, on désigne par  $f_\alpha$  la fonction numérique définie par:  $f_\alpha(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x}$  et  $(C_\alpha)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

### PARTIE A

1/ - Etudions les variations de  $f_1$ .

$$f_1(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \mathcal{D}f_1 = ]0; +\infty[$$

limites de  $f_1$  aux bornes de  $\mathcal{D}f_1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln x$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$$

### Dérivées

$x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$

$x \mapsto \ln x$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$

$f_1$  est donc continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  car elle le produit de deux fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}^*$

$$\text{et } \forall x > 0, f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$$

$$\forall x > 0, f_1'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$\forall x > 0, x^2 > 0$ ;  $f'_1(x)$  a donc le signe de  $1 - \ln x$ .

$f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

Signe de  $f'_1(x)$

$x$	0	e	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-

Sens de variation de  $f_1$

D'après le tableau de signe de  $f'_1(x)$ ,  $f_1$  est strictement croissante sur  $]0; e[$ , décroissante sur  $]e; +\infty[$  et admet un maximum local au point  $e$ .

$f_1(e) = \frac{1}{e}$

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	0	e	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	0	-
$f_1(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{e}$	0

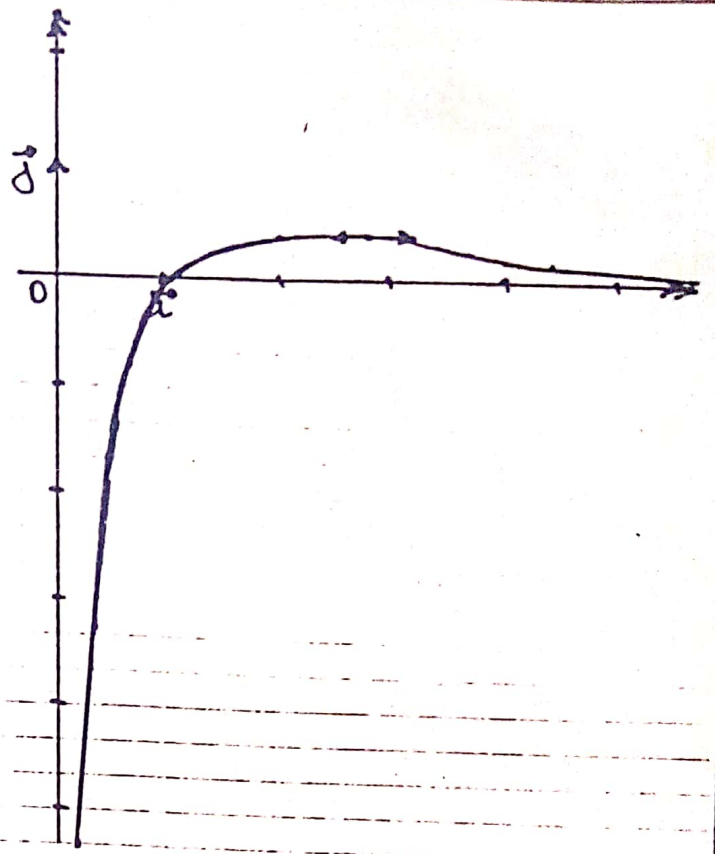
Branches infinies

$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$

$(C_1)$  possède deux asymptotes dont une verticale d'équation  $x=0$  et une horizontale d'équation  $y=0$

Construction de la courbe  $(C_1)$

(Voir figure ci-contre)



2/ Etudions  $f_{\alpha}$  pour  $\alpha \neq 0$

1<sup>er</sup> cas  $\alpha < 0$

$D_{f_{\alpha}} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } \alpha x > 0\}$

$\alpha x > 0 \Leftrightarrow x < 0$  car  $\alpha < 0$

$D_{f_{\alpha}} = ]-\infty; 0[$

limites de  $f_{\alpha}$  aux bornes  $D_{f_{\alpha}}$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(\alpha x)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \frac{\ln x}{x}, \quad x = \alpha x$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\alpha}(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x} \ln x, \quad x = \alpha x$

$= +\infty$  car  $\begin{cases} \alpha < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{\alpha}(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} f_{\alpha}(x) = +\infty$
--	--

Dérivée  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  donc continue et dérivable sur  $]-\infty; 0[$

$x \mapsto \alpha x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc continue et dérivable sur  $]-\infty; 0[$  et

$\forall x \in ]-\infty; 0[, \alpha x > 0$

$x \mapsto \ln(\alpha x)$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$ ;  $x \mapsto \ln(\alpha x)$  est donc continue et dérivable sur  $]-\infty; 0[$

$f$  étant le produit deux fonctions dérivables sur  $]-\infty; 0[$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[$  et  $\forall x < 0$ ,

$$f'_{\alpha}(x) = \frac{\alpha}{\alpha x} x - \ln(\alpha x) = \frac{1 - \ln(\alpha x)}{x^2}$$

$\forall x \in ]-\infty; 0[, f'_{\alpha}(x) = \frac{1 - \ln(\alpha x)}{x^2}$
--

Signe de  $f'_{\alpha}(x)$   
 $\forall x < 0, x^2 > 0$ ;  $f'_{\alpha}(x)$  a le signe de:  
 $1 - \ln(\alpha x)$ .

$$f'_{\alpha}(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(\alpha x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{e}{\alpha}$$

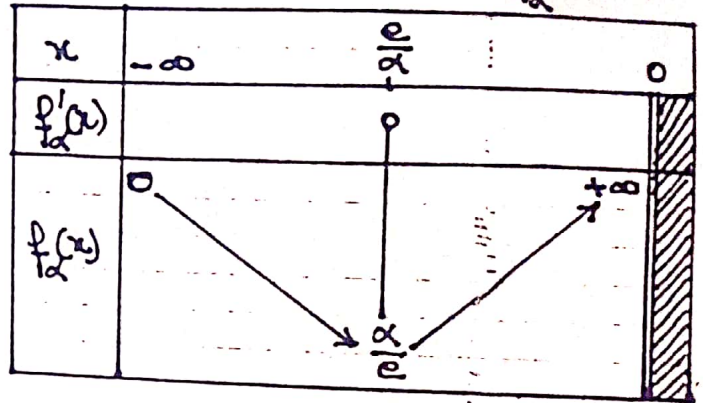
$x$	$-\infty$	$\frac{e}{\alpha}$	$0$
$f'_{\alpha}(x)$		$-$	$+$

$$\frac{e}{\alpha} < x < 0 \Rightarrow 0 < \alpha x < e \Rightarrow \ln(\alpha x) < 1 \Rightarrow 1 - \ln(\alpha x) > 0$$

Sens de variation de  $f_{\alpha}$   
 $f_{\alpha}$  est décroissante sur  $]-\infty; \frac{e}{\alpha}[$ ,  
 croissante sur  $]\frac{e}{\alpha}; 0[$  et admet un

minimum en  $\frac{e}{\alpha}$ ;  $f_{\alpha}(\frac{e}{\alpha}) = \frac{\alpha}{e}$ .

Tableau de variation de  $f_{\alpha}$



2<sup>e</sup> cas  $\alpha > 0$

$$Df_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } \alpha x > 0\}$$

$$Df_{\alpha} = ]0; +\infty[$$

Limites de  $f_{\alpha}$  aux bornes de  $Df_{\alpha}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\alpha x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x} \ln x, x = \alpha x$$

$$= -\infty \text{ car } \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\alpha}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, x = \alpha x$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_{\alpha}(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{\alpha}(x) = 0$
--	--

Dérivée

On démontre comme dans le 1<sup>er</sup> cas que  $f_{\alpha}$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$   
 $\forall x > 0, f'_{\alpha}(x) = \frac{1 - \ln(\alpha x)}{x^2}$

$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(\alpha x) = 0$   
 $\Leftrightarrow \alpha = e \Leftrightarrow x = \frac{e}{\alpha}$   
 $\forall x > 0, x^2 > 0; f'_\alpha(x)$  a donc le signe de  $f'_\alpha$  sur  $]0; +\infty[$  de  $1 - \ln(\alpha x)$ .

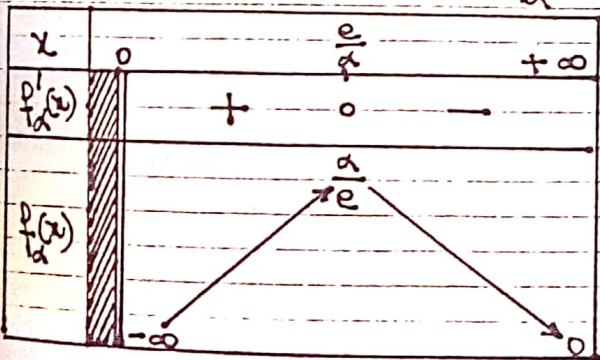
Signe de  $f'_\alpha(x)$

$x$	0	$\frac{e}{\alpha}$	$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		+	-

D'après le tableau qui précède,  $f'_\alpha$  est strictement croissante sur  $]0; \frac{e}{\alpha}[$ , strictement décroissante sur  $]\frac{e}{\alpha}; +\infty[$  et admet un minimum au point  $\frac{e}{\alpha}$

$f'_\alpha(\frac{e}{\alpha}) = \frac{\alpha}{e}$

Tableau de variation de  $f'_\alpha$



- Déterminons les coordonnées du point d'intersection de  $(C_\alpha)$  avec l'axe  $(Ox)$

Soit  $M(x; y)$ .  $M \in (C_\alpha) \cap (Ox)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f'_\alpha(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_\alpha(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha x) = 0 \Leftrightarrow \alpha x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}$   
 Le point d'intersection de  $(C_\alpha)$  avec  $(Ox)$  est  $I(\frac{1}{\alpha}; 0)$

3/ Dans cette question on suppose  $\alpha > 0$   
 a/ Déterminons une primitive  $F_\alpha$  de  $f'_\alpha$  sur  $]0; +\infty[$

$f'_\alpha(x) = \frac{1}{x} \ln(\alpha x) = u'(x) \cdot u(x)$  avec  $u(x) = \ln(\alpha x)$

d'où  $F_\alpha(x) = \frac{1}{2} [\ln(\alpha x)]^2$

b/ Pour  $a \in ]0; \frac{e}{\alpha}[$  on pose:

$A_\alpha(a) = F_\alpha(\frac{e}{\alpha}) - F_\alpha(a)$

Étudions la limite en 0 de  $A_\alpha(a)$

puis celle de  $a A_\alpha(a)$

$A_\alpha(a) = F_\alpha(\frac{e}{\alpha}) - F_\alpha(a)$   
 $= \frac{1}{2} (1 - (\ln \alpha a)^2)$

$\lim_{a \rightarrow 0} A_\alpha(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} [1 - (\ln \alpha a)^2]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} [1 - (\ln x)^2], x = \alpha a$   
 $= -\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty \end{cases}$

$\lim_{a \rightarrow 0} A_\alpha(a) = -\infty$

$\lim_{a \rightarrow 0} a A_\alpha(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} a [1 - (\ln \alpha a)^2]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x [1 - (\ln x)^2], x = \alpha a$   
 $= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\alpha} (1 - y^2) e^y, y = \ln x$   
 $= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\alpha} (1 - 4t^2) e^{2t}, t = \frac{y}{2}$   
 $= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\alpha} (e^{2t} - 4(t e^t)^2)$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2t} (e^{2t} - 4(t e^{t/2})^2) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{2t} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^{t/2} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{a \rightarrow 0} A_\alpha(a) = 0}$$

PARTIE B

1/ Soit  $a$  un réel strictement positif. Déterminons suivant les valeurs de  $a$ , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue  $x$  réel :  $a^x = x$  (E).

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ln a = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln x}{x} = \ln a \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'_1(x) = \ln a \\ x > 0 \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points d'intersection de la courbe  $(C_1)$  avec la droite d'équation  $y = \ln a$ .

Graphiquement, on obtient les résultats présentés dans le tableau ci-dessous.

a	0	1	$e^{1/e}$
nombre de solutions de (E)	1	2	0
		1	1

2/ Démontrons, en utilisant les variations de  $f'_1$ , qu'il existe un couple  $(b, c)$  d'entiers naturels que nous déterminerons tel que :  $0 < b < c$  et  $b^c = c^b$

$$b^c = c^b \Leftrightarrow c \ln b = b \ln c$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln b}{b} = \frac{\ln c}{c} \Leftrightarrow f'_1(b) = f'_1(c)$$

$$\text{ou : } f'_1(2) = \frac{\ln 2}{2} \text{ et } f'_1(4) = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{2}$$

$$f'_1(2) = f'_1(4) \Leftrightarrow b = 2 \quad c = 4$$

$$\boxed{b = 2 \quad c = 4}$$

PARTIE C

1/ Soit  $t$  un réel strictement positif. a/ Equation de la tangente  $(T_\alpha)$  à la courbe  $(C_\alpha)$  au point d'abscisse  $t$ .

$$(T_\alpha) : y = f'_\alpha(t)(x-t) + f_\alpha(t)$$

$$= \frac{1 - \ln(\alpha t)}{t^2}(x-t) + \frac{\ln \alpha t}{t}$$

$$\boxed{(T_\alpha) : y = \frac{1 - \ln(\alpha t)}{t^2} x - \frac{1 - 2 \ln(\alpha t)}{t}}$$

b/ Démontrons que lorsque  $\alpha$  varie,  $t$  restant fixe, les droites  $(T_\alpha)$  passent par un point fixe. Et que nous déterminerons.

$$y = \frac{1 - \ln(\alpha t)}{t^2} x - \frac{1 - 2 \ln(\alpha t)}{t}$$

$$\Leftrightarrow t^2 y = x - t + (2t - x) \ln(\alpha t)$$

$$\Leftrightarrow t^2 y - x + t = (2t - x) \ln(\alpha t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - x = 0 \\ t^2 y - x + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Lorsque  $\alpha$  varie,  $t$  restant fixe, toutes les droites  $(T_\alpha)$  passent le point fixe

$$\boxed{I_t(2t, \frac{1}{t})}$$

Déterminons l'ensemble décrit par les points  $\Gamma_t$  lorsque  $t$  parcourt  $]0; +\infty[$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

lorsque  $t$  parcourt  $]0; +\infty[$ ,  $\Gamma_t$  décrit l'hyperbole d'équation  $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$

2/ Pour tout  $x$  appartenant à  $]0; +\infty[$  on note  $M$  et  $M'$  les points de  $(C_2)$  et  $(C_3)$  ayant pour abscisse  $x$  et l'on désigne par  $G$  le barycentre du système  $\{(M, 1); (M', -2)\}$

Démontrons que lorsque  $x$  décrit l'intervalle  $]0; +\infty[$ , le point  $G$  décrit une des courbes  $(C_\alpha)$  que nous déterminerons

$$G \text{ bary} \{(M, 1); (M', -2)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x - 2x}{-1} = x \\ y_G = \frac{f_2(x) - 2f_3(x)}{-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_G &= 2f_3(x) - f_2(x) \\ &= 2 \frac{\ln 3x}{x} - \frac{\ln 2x}{x} = \frac{\ln(3x)^2 - \ln 2x}{x} \\ &= \frac{1}{x} (\ln 9x^2 - \ln 2x) = \frac{\ln \frac{9}{2}x}{x} \end{aligned}$$

$$y_G = f_{9/2}(x_G) \Leftrightarrow G \in (C_{9/2})$$

lorsque  $x$  décrit  $]0; +\infty[$ ,  $G$  décrit la courbe  $(C_{9/2})$

3/ Soient  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux réels strictement positifs et  $\lambda$  un réel différent de  $\pm 1$

Pour tout  $x > 0$  on note:

$$M(x; f_{\alpha}(x)) \quad M'(x; f_{\alpha'}(x))$$

$$G \text{ bary} \{(M, 1); (M', -\lambda)\}$$

Démontrons que lorsque  $x$  parcourt

$\mathbb{R}_x^+$ , le point  $G$  décrit une des courbes

$(C_\alpha)$  que nous précisons

$$G \text{ bary} \{(M, 1); (M', -\lambda)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x - \lambda x}{1 - \lambda} = x \\ y_G = \frac{f_{\alpha}(x) - \lambda f_{\alpha'}(x)}{1 - \lambda} \end{cases}$$

$$y_G = \frac{1}{1 - \lambda} \left( \frac{\ln \alpha x}{x} - \lambda \frac{\ln \alpha' x}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{1 - \lambda} \left( \frac{1}{x} \ln \left( \frac{\alpha x}{\alpha'^{\lambda} x^{\lambda}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - \lambda} \ln \left( \frac{\alpha}{\alpha'^{\lambda}} \cdot x^{1 - \lambda} \right)$$

$$y_G = \frac{1}{x} \ln \left[ \left( \frac{\alpha}{\alpha'^{\lambda}} \right)^{1 - \lambda} x \right]$$

$$\Leftrightarrow G \in C_{\beta} \text{ avec } \beta = \left( \frac{\alpha}{\alpha'^{\lambda}} \right)^{1 - \lambda}$$

lorsque  $x$  parcourt  $]0; +\infty[$ , le point  $G$  décrit la courbe  $(C_{\beta})$  avec:

$$\beta = \left( \frac{\alpha}{\alpha'^{\lambda}} \right)^{1 - \lambda}$$

### PROBLEME N°9

Pour tout entier relatif non nul  $n$ , on considère la fonction  $f_n$  d'une variable réelle définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1/ Précisons l'ensemble de définition de la fonction  $f_n$

$$D_{f_n} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}$$

$$D_{f_n} = \mathbb{R}$$

b/ Valeurs de  $n$  pour lesquelles  $f_n$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^n$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ , de même que  $x \mapsto \ln|x|$ ;  $f_n$  est donc continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

Continuité en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } n \leq 0 \\ 0 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Conclusion

$f_n$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ ssi  $n \in \mathbb{N}^*$

2/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , on appelle  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$

a/ Etudions les éléments de symétrie de  $(C_n)$  suivant la parité de  $n$

$$D_{f_n} = \mathbb{R}; \forall x \in D_{f_n}, -x \in D_{f_n}$$

$$\begin{aligned} f_n(-x) &= (-x)^n \ln|-x| \\ &= (-1)^n x^n \ln|x| \\ &= \begin{cases} x^n \ln|x| & \text{si } n \text{ pair} \\ -x^n \ln|x| & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

- Pour  $n$  pair,  $f_n(-x) = f_n(x)$ ;  $f_n$  est paire et la courbe  $(C_n)$  admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

- Pour  $n$  impair,  $f_n(-x) = -f_n(x)$ ;  $f_n$  est impaire et la courbe  $(C_n)$  admet le point  $O$  comme centre de symétrie.

b/ Montrons que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par des points fixes  $O, A$  et  $B$  avec  $B = S_0(A)$

$$f_n(0) = 0; f_n(1) = 0; f_n(-1) = 0$$

$(C_n)$  passent par:  $O(0;0), A(1;0), B(-1;0)$

c/ Valeurs de  $n$  pour lesquelles  $f_n$  est dérivable en  $x=0$

On sait que  $f_n$  n'est pas continue en 0 pour  $n \leq 0$ ;  $f_n$  n'est donc pas dérivable en 0 pour  $n \leq 0$

Pour  $n > 0$ ,  $f_n$  est continue en 0 et  $f_n(0) = 0$

Dérivabilité de  $f_n$  en 0 pour  $n > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \ln|x| \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{pour } n = 1 \\ 0 & \text{pour } n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion

$f_n$  est dérivable en 0 pour  $n \geq 2$

1/- Calculons la dérivée de  $f$  pour  $x \neq 0$

$$\forall x \neq 0, f'_n(x) = nx^{n-1} \ln|x| + \frac{1}{x} x^n = x^{n-1} (1 + n \ln|x|)$$

$$\forall x \neq 0, f'_n(x) = (1 + n \ln|x|) x^{n-1}$$

- Montrons que toutes les courbes  $(C_n)$

admettent la même tangente en A

$$f'_n(1) = 1 \quad f_n(1) = 0$$

Toutes les courbes  $(C_n)$  admettent au point

A la même tangente d'équat:  $y = x - 1$

3/ Etudions les variations des fonctions

$$f_{-3}, f_1 \text{ et } f_e$$

\* Etude des variations de  $f_{-3}$

$$f_{-3}(x) = \frac{\ln|x|}{x^3} \text{ pour } x \neq 0; f_{-3}(0) = 0$$

$$D_{f_{-3}} = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln|x|}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln x}{x}, x = -x$$

$$= -0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-3}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \frac{\ln x}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-3}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} \ln|x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x^3} \ln x, x = -x$$

$$= +\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f_{-3}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_{-3}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \ln|x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \ln x$$

$$= -\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_{-3}(x) = -\infty$$

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x^3}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , de même

que  $x \mapsto \ln|x|$ ;  $f_{-3}$  est donc dérivable

sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \neq 0, f'_{-3}(x) = \frac{1-3\ln|x|}{x^4}$

$$f'_{-3}(x) = 0 \Leftrightarrow 1-3\ln|x| = 0$$

$$\Leftrightarrow |x| = e^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} x = -e^{1/3} \\ \text{ou} \\ x = e^{1/3} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^*, x^4 > 0$ .

$f'_{-3}(x)$  a donc le signe de  $1-3\ln|x|$

Signe de  $f'_{-3}(x)$

$x$	$-\infty$	$-e^{1/3}$	$0$	$e^{1/3}$	$+\infty$
$f'_{-3}(x)$	-	+		+	-

Sens de variation de  $f_{-3}$

$\forall x \in ]-\infty, -e^{1/3}[ \cup ]e^{1/3}, +\infty[, f'_{-3}(x) < 0$

$f_{-3}$  est donc strictement décroissante sur

chaque des intervalles  $]-\infty; -e^{1/3}[$  et  $]e^{1/3}; +\infty[$ .

$\forall x \in ]-e^{1/3}; e^{1/3}[-\{0\}$ ,  $f'_{-3}(x) > 0$ .

$f_{-3}$  est donc strictement croissante sur  $]-e^{1/3}; 0[$  et sur  $]0; e^{1/3}[$

$f_{-3}$  admet minimum local en  $-e^{1/3}$  et un maximum en  $e^{1/3}$ .

$f_{-3}(-e^{1/3}) = -\frac{1}{3e}$ ;  $f_{-3}(e^{1/3}) = \frac{1}{3e}$ .

Tableau de variation de  $f_{-3}$

$x$	$-\infty$	$-e^{1/3}$	$0$	$e^{1/3}$	$+\infty$
$f'_{-3}(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f_{-3}(x)$	$0$	$↘$	$↗$	$↘$	$0$
		$-\frac{1}{3e}$	$+\infty$	$\frac{1}{3e}$	
			$-\infty$		

Remarque:  $f_{-3}$  est impaire. On aurait pu étudier  $f_{-3}$  sur  $]0; +\infty[$  et compléter dans la symétrie par rapport à 0.

\* Étude des variations de  $f_1$

$f_1(x) = x \ln|x|$ . pour  $x \neq 0$ ;  $f_1(0) = 0$

$\mathcal{D}f_1 = \mathbb{R}$ .

limites de  $f_1$  aux bornes de  $\mathcal{D}f_1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln|x|$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln x, x = -x$

$= -\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln|x|$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x$

$= +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_1(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f_1(x) = 0$

Dérivée

On sait pour  $n=1$ ,  $f_1$  est dérivable sur

$\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \neq 0, f'_1(x) = 1 + \ln|x|$

$f'_1(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = -1$

$\Leftrightarrow |x| = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$  ou  $x = \frac{1}{e}$ .

Signe de  $f'_1(x)$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	$0$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'_1(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Sens de variation de  $f_1$

$\forall x \in ]-\infty; -\frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[, f'_1(x) > 0$

$f_1$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{e}[$  et sur  $]\frac{1}{e}; +\infty[$

$\forall x \in ]-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}[-\{0\}, f'_1(x) < 0$ ;  $f_1$  est donc strictement décroissante sur  $]-\frac{1}{e}; 0[$  et sur  $]0; \frac{1}{e}[$

$f_1$  admet un maximum local en  $-\frac{1}{e}$  et un minimum local en  $\frac{1}{e}$

$f_1(-\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$ ;  $f_1(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ .

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	$0$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f_1(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Remarque: Comme dans le cas de  $f_3$ , on pourrait remarquer que  $f_1$  est impaire, l'étudier sur  $]0; +\infty[$  et compléter dans la symétrie par rapport à 0.

\* Étude des variations de  $f_2$

$f_2(x) = x^2 \ln|x|$  pour  $x \neq 0$ ;  $f_2(0) = 0$

$D_{f_2} = \mathbb{R}$

limites de  $f_2$  aux bornes de  $D_{f_2}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x, x = |x|$

$= +\infty \times +\infty = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot x \ln x$

$= 0 \times 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$

Dérivée.

Après 2-c/  $f_2$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$f_2'(x) = x(-1 + 2\ln|x|)$

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -(\sqrt{e})^{-1}, x = 0$  ou  $x = (\sqrt{e})^{-1}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{e}}, x = 0$  ou  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Signe de  $f_2'(x)$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Sens de variation de  $f_2$

D'après le tableau ci-dessus,  $f_2$  est strictement décroissante sur  $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{e}}[$  et sur  $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$ , strictement croissante

sur  $]-\frac{1}{\sqrt{e}}, 0[$  et sur  $]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$ ;  $f_2$  admet un minimum local en  $-\frac{1}{\sqrt{e}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  et un maximum local en 0

$f_2(-\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}; f_2(0) = 0; f_2(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$

Tableau de variation de  $f_2$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$
$f_2(x)$	$\searrow$	$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Remarque: Ici, on pourrait remarquer que  $f_2$  est paire, l'étudier sur  $[0; +\infty[$  et compléter dans la symétrie d'axe (Oy)

Construction des courbes  $C_{-3}$ ,  $G$  et  $C_3$

Étude des branches infinies

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = -\infty$

La courbe (C-3) possède deux asymptotes : une verticale d'équation  $x=0$  et une horizontale d'équation  $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln|x| = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

(C1) possède une branche infinie de direction (Oy).

On démontre comme précédemment que

(C2) possède une branche infinie de direction (Ox)

Construction des courbes C-3, C1 et C2

(Voir page 148)

1/ Dans la suite du problème, on ne considère que la restriction des fonctions  $f_n$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$

Soit  $M_n$  le point de la courbe (Cn) de coordonnées  $(x_n, y_n)$  où  $x_n$  est la valeur strictement positive, pour laquelle  $f_n$  présente un extrémum.

Montrons que tous les points  $M_n$  sont sur une courbe (Γ) dont nous préciseront l'équation

$x_n$  est la solution de l'équation  $f'_n(x) = 0$ .

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + n \ln|x|) x^{n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x = -e^{-1/n} \text{ ou } x = e^{-1/n}$$

$$x_n > 0 \Leftrightarrow x_n = e^{-1/n}$$

$$y_n = f_n(x_n) = x_n^n \ln|x_n|$$

$$= e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{ne}$$

$$\boxed{M_n \left( e^{-1/n}; -\frac{1}{ne} \right)}$$

Equation de la courbe (Γ)

$$\begin{cases} x = e^{1/n} \\ y = -\frac{1}{ne} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -\frac{1}{\ln x}, x > 0 \\ y = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{\ln x}\right)e} = \frac{\ln x}{e} \end{cases}$$

$$(Γ) \text{ a pour équation: } \begin{cases} x > 0 \\ y = \frac{\ln x}{e} \end{cases}$$

Tous les points  $M_n$  sont sur une courbe (Γ) d'équation  $\begin{cases} y = \frac{\ln x}{e} \\ x > 0 \end{cases}$

PARTIE II

1/ Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif.

Calculons  $I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x) dx$

$$I_n(\alpha) = \int_1^\alpha f_n(x) dx = \int_1^\alpha x^n \ln|x| dx$$

Posons  $u(x) = \ln|x| \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$$v'(x) = x^n \Rightarrow v(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$I_n(\alpha) = \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln|x| \right]_1^\alpha - \frac{1}{n+1} \int_1^\alpha x^n dx$$

$$= \frac{1}{n+1} \alpha^{n+1} \ln \alpha - \frac{1}{(n+1)^2} \left[ x^{n+1} \right]_1^\alpha$$

$$I_n(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \left( \ln \alpha - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{(n+1)^2}$$

2/ Dans cette question  $n=2$

a/ calculons  $I_2(\alpha) = \int_1^\alpha f_2(x) dx$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{3} \alpha^3 \left( \ln \alpha - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{9}$$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{3} \alpha^3 \ln \alpha - \frac{1}{9} (\alpha^3 - 1)$$

limite de  $I_2(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_2(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{3} \alpha^3 \ln \alpha - \frac{1}{9} (\alpha^3 - 1)$$

$$= \frac{1}{9} \text{ car } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \ln \alpha = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} I_2(\alpha) = \frac{1}{9}$$

Interprétation géométrique de la limite trouvée

la limite trouvée est l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations  $x=0$ ;  $x=1$ , la courbe  $(C_2)$  et l'axe des abscisses

b/ Déterminons un nombre réel  $\beta$  ( $\beta > 0$ ) tel que la valeur moyenne de  $f_2$  sur l'intervalle  $[0; \beta]$  soit nulle

la valeur moyenne de  $f_2$  sur  $[0; \beta]$

$$\text{est: } \frac{1}{\beta} \int_0^\beta f_2(x) dx = \frac{1}{3} \beta^2 \left( \ln \beta - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{9\beta} - \frac{1}{9\beta}$$

$$= \frac{1}{3} \beta^2 \left( \ln \beta - \frac{1}{3} \right)$$

la valeur moyenne de  $f_2$  sur  $[0; \beta]$  est

nulle si  $\ln \beta = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \beta = e^{1/3}$

$$\beta = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$$

Point de  $(C_2)$  qui a pour abscisse  $\beta$ .

$$f_2(\beta) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{e} = \frac{1}{3e}$$

Le point de  $(C_2)$  qui a pour abscisse

$$\beta \text{ est: } H \left( e^{1/3}; \frac{1}{3e} \right)$$

## PROBLEME N° 10

Soit la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie par:

$$f_a(x) = \ln \left( \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right). \text{ On désigne}$$

par  $(C_a)$  la courbe représentative de  $f_a$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2cm

### PARTIE A

1/ Etude de la parité de  $f_a$

$$\mathcal{D}_a^f = \left\{ x \in \mathbb{R} / a-x \neq 0 \text{ et } \frac{a+x}{a-x} > 0 \right\}$$

$$= \begin{cases} ]-a; a[ & \text{si } a > 0 \\ ]a; -a[ & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

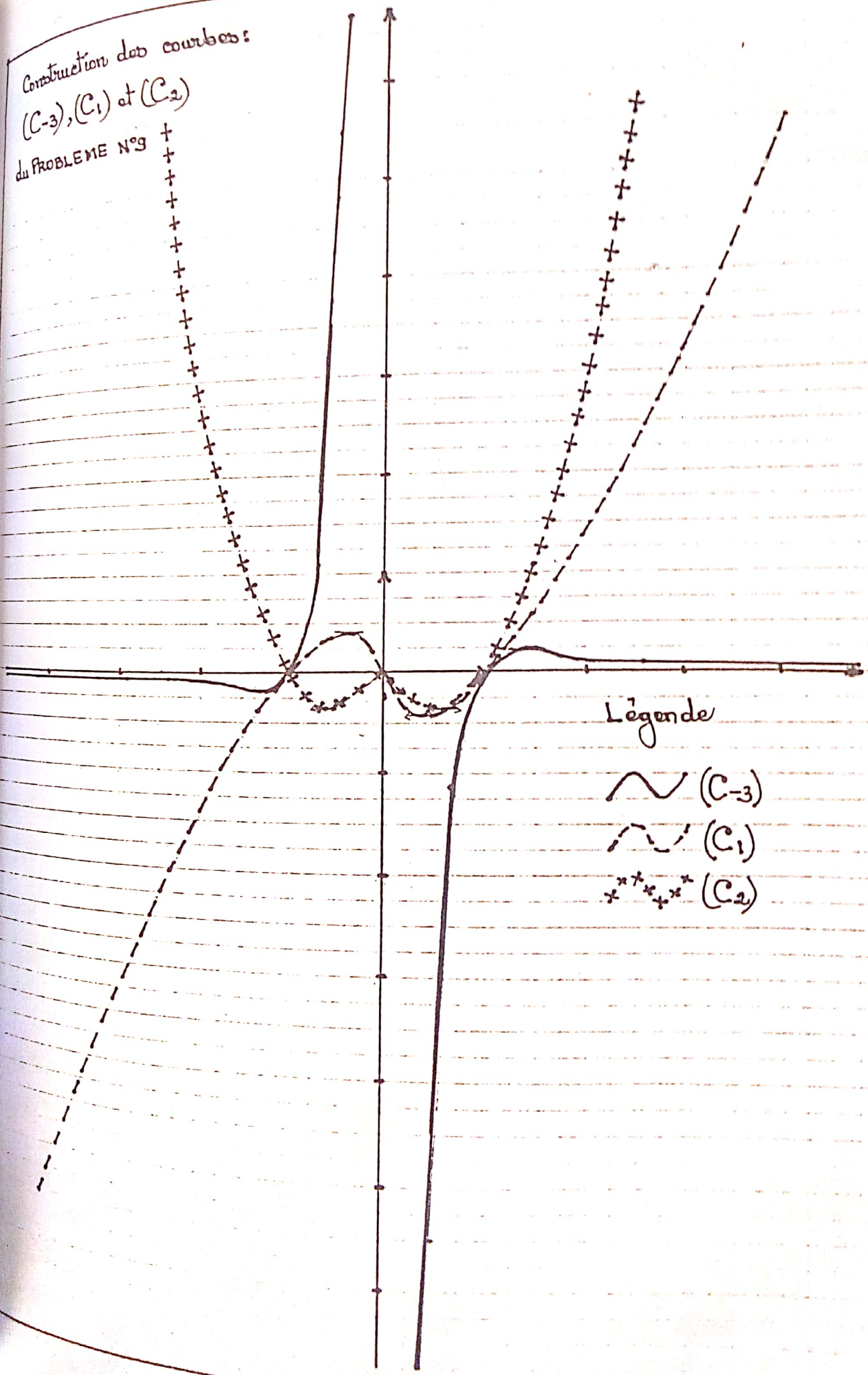
$$\mathcal{D}_a^f = ]-|a|; |a|[ \text{ si } a \neq 0$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_a^f, -x \in \mathcal{D}_a^f$$

$$f_a(-x) = \ln \left( \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right) = -\ln \left( \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right)$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_a^f, f_a(-x) = -f_a(x)$$

Construction des courbes:  
(C-3), (C<sub>1</sub>) et (C<sub>2</sub>)  
du PROBLEME N°9



Légende

- ~ (C-3)
- - - (C<sub>1</sub>)
- + + + (C<sub>2</sub>)

La fonction  $f_a$  est impaire.

2/ Démontrons que la courbe  $(C_a)$  possède deux asymptotes dont on donnera les équations :

1<sup>er</sup> cas  $a < 0$ :  $D_a = ]a; -a[$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f_a(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f_a(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -a^-} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = 0^+ \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

2<sup>e</sup> cas  $a > 0$ :  $D_a = ]-a; a[$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f_a(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f_a(x) = +\infty$$

La courbe  $(C_a)$  possède deux asymptotes verticales d'équations  $x = -a$  et  $x = a$

3/ Étudions selon les valeurs de  $a$ ,

le sens de variation de  $f_a$

On démontre aisément que  $f_a$  est dérivable sur  $D_a$  et  $\forall x \in D_a$ :

$$f_a'(x) = \frac{a}{(a-x)(a+x)}$$

$$\forall x \in D_a, (a-x)(a+x) > 0$$

1<sup>er</sup> cas  $a < 0$

$\forall x \in D_a, f_a'(x) < 0$ ;  $f_a$  est donc strictement décroissante sur  $D_a$

2<sup>e</sup> cas  $a > 0$

$\forall x \in D_a, f_a'(x) > 0$ ;  $f_a$  est donc

strictement croissante sur  $D_a$

4/ a/ Démontrons que  $f_a$  est une bijection de  $D_a$  sur un ensemble que nous préciserons

$\forall a \in \mathbb{R}^*$ ,  $f_a$  est continue, monotone, sur  $D_a$  avec  $f_a[D_a] = \mathbb{R}$ .

$f_a$  est donc une bijection de  $D_a$  sur  $\mathbb{R}$ .

b/ Explicitons  $f_a^{-1}(x)$

Posons  $y = f_a(x)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{a+x}{a-x} \right) \Leftrightarrow 2y = \ln \left( \frac{a+x}{a-x} \right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{a+x}{a-x} \Leftrightarrow x = a \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$$

On a donc :

$$f_a^{-1}(x) = a \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

On désigne par  $(\Gamma_a)$  la courbe représentative de  $f_a^{-1}$  relativement au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

5/ a/ Démontrons que l'affinité orthogonale d'axe  $(a, \vec{j})$  et de rapport  $a$  transforme  $(C)$  en  $a$ .

$$f_a(x) = \ln \left( \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \right)$$

$$= \ln \left( \sqrt{1 + \frac{x/a}{1 - x/a}} \right) = f_1 \left( \frac{x}{a} \right)$$

$$f_a(x) = f_1 \left( \frac{x}{a} \right)$$

On en déduit que l'affinité orthogonale d'axe  $(O, \vec{j})$  et de rapport  $a$  transforme  $(C)$  en  $(C_a)$ .

b/ Soit  $a$  et  $a'$  deux réels non nuls et distincts.

Déterminons une application affine transformant  $(C_a)$  en  $(C_a')$

Soit  $g$  l'affinité orthogonale d'axe  $(O, \vec{j})$  et de rapport  $a$ ;  $g'$  l'affinité orthogonale d'axe  $(O, \vec{j})$  et de rapport  $a'$ ;  $g^{-1}$  est l'affinité orthogonale d'axe  $(O, \vec{j})$  et de rapport  $\frac{1}{a}$ .

$$C_a = g(C) \Leftrightarrow C = g^{-1}(C_a)$$

$$C_a' = g'(C_a) \Leftrightarrow C_a' = g' [g^{-1}(C_a)] = g' g^{-1}(C_a)$$

or  $g' g^{-1}$  est l'affinité d'axe  $(O, \vec{j})$  et de rapport  $a' \times \frac{1}{a} = \frac{a'}{a}$ .

L'affinité orthogonale d'axe  $(O, \vec{j})$  de rapport  $\frac{a'}{a}$  transforme  $(C_a)$  en  $(C_a')$ .

6/ Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ ;  $S$  la symétrie orthogonale d'axe  $(O, \vec{i})$

a/ Déterminons une expression analytique de  $RoS$ .

On sait que l'écriture complexe de  $R$  est:  $z' = -iz$ ; celle de  $S$  est:

$z' = \bar{z}$  donc l'écriture complexe de  $RoS$  est  $z' = -i\bar{z}$

Posons  $z = x+iy$   $z' = x'+iy'$

$$\Leftrightarrow x'+iy' = -i(x-iy) = -y-ix$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

L'expression analytique de  $RoS$  est:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

Donnons une équation cartésienne de la transformation  $RoS(\Gamma_a)$  de  $\Gamma_a$  par  $RoS$ .

$RoS$ .

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = -y' \end{cases}$$

$$M(x; y) \in (\Gamma_a) \Leftrightarrow y = f_a^{-1}(x)$$

$$\Leftrightarrow -x' = f_a^{-1}(-y')$$

$$\Leftrightarrow -y' = f_a(-x')$$

$$\Leftrightarrow -y' = -f_a(x')$$

$$\Leftrightarrow y' = f_a(x')$$

L'équation cartésienne de  $RoS(\Gamma_a)$

est  $y = f_a(x)$ .

b/ Comparaison des équations cartésiennes de  $(C_a)$  et  $RoS(\Gamma_a)$

$(C_a)$  et  $RoS(\Gamma_a)$  ont la même équation cartésienne.  $RoS(\Gamma_a) = C_a$

On remarque  $RoS = S_0 \circ S(\pi)$ .  
 or  $f_a$  est impaire et  $\Gamma_a = S(\pi)(Ca)$   
 $RoS(\Gamma_a) = S_0 \circ S(\pi)(\Gamma_a) = S_0(Ca)$   
 $RoS(\Gamma_0) = Ca$ . On pourrait donc prouver  
 le résultat!

Dans la suite du problème on sup-  
 pose  $a = 1$

7/ Traçons  $(C)$ ,  $(\Gamma)$  ainsi que la  
 tangente  $\tilde{a}(C)$  au point d'abscisse 0  
 (Voir page suivante)

### PARTIE B

1/ Soit  $g$  la fonction définie sur  
 l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}]$  par:  $g(x) = f'_1(\sin x)$

Démontrons que  $g'(x) = \frac{1}{\cos x}$

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[ \quad 0 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{or } [0; 1[ \subset ]-1; 1[ = D_{f'_1}$$

$g$  est donc continue et dérivable sur  
 $[0; \frac{\pi}{2}[$  et  $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$ ,

$$g'(x) = f''_1(\sin x) \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{1 - \sin^2 x} \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x$$

$$g'(x) = \frac{1}{\cos x}$$

2/ Déterminons le réel  $c$  tel que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \ln c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \left[ g(x) \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= f'_1\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) - f'_1(\sin 0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = f'_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \ln \sqrt{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} = \ln \sqrt{3} \quad \text{d'où:}$$

$$c = \sqrt{3}$$

3/ On considère l'intégrale:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \quad \text{où } n \text{ est}$$

un entier naturel non nul.

On définit ainsi une suite numérique  
 $(I_n)$ .

a/ Démontrons que la suite  $(I_n)$  est à  
termes positifs

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{6}[ \quad \begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \geq 0 \Leftrightarrow I_n \geq 0$$

La suite  $(I_n)$  est donc à termes positifs

b/ Étudions le sens de variation de  
la suite  $(I_n)$

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)^{2n+2}}{\cos x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin^2 x - 1)(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

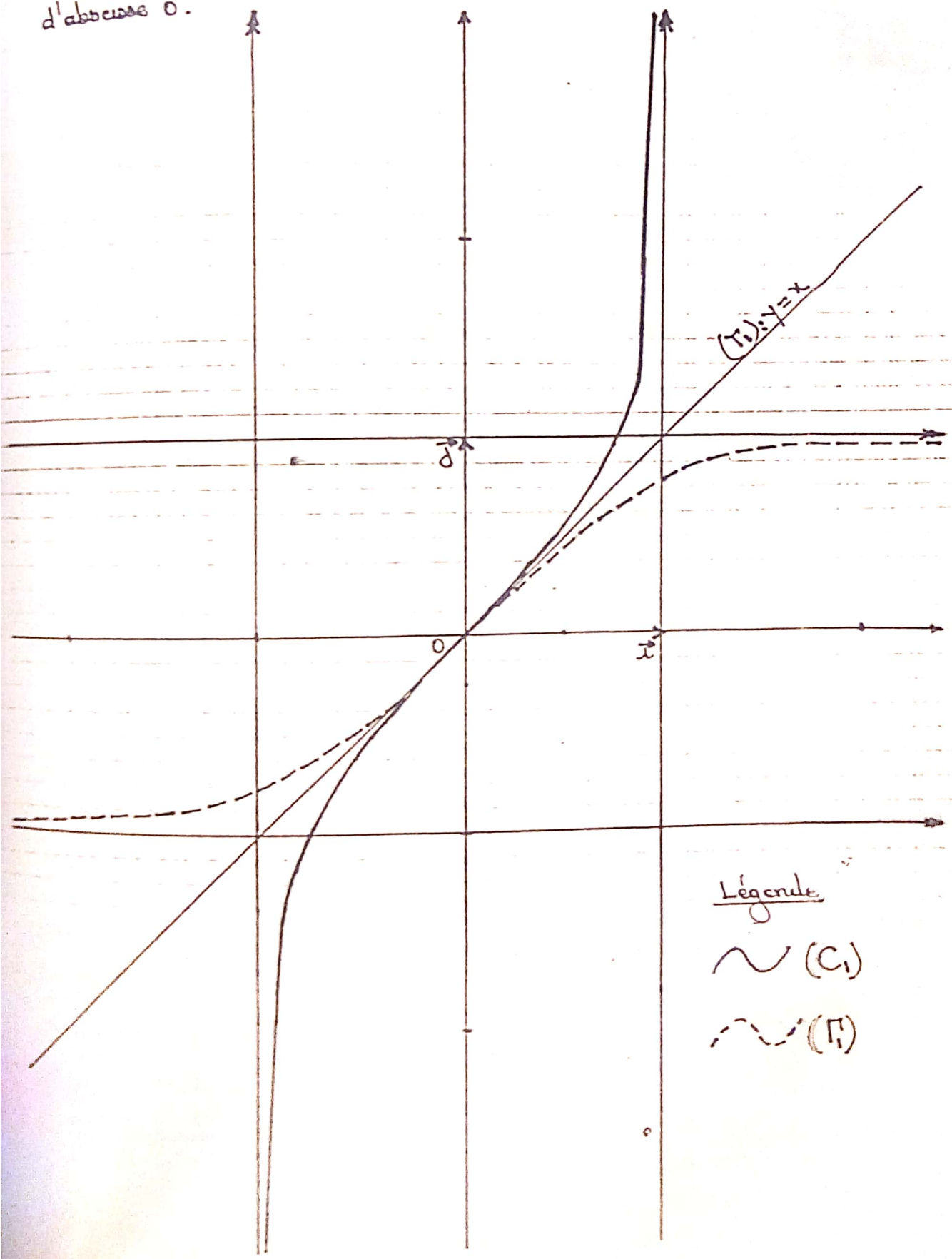
$$I_{n+1} - I_n = - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x (\sin x)^{2n} dx$$

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{6}[ \quad \cos x (\sin x)^{2n} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x (\sin x)^{2n} dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Construction des courbes  $(C_1)$ ,  $(\Gamma_1)$  et la tangente  $(T_1)$  à  $(C_1)$  au point d'abscisse 0.



Légende  
~  $(C_1)$   
- -  $(\Gamma_1)$

La suite  $(I_n)$  est donc décroissante

c/ Démontrons que  $I_n \leq \frac{\ln c}{4^n}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$  car  $x \mapsto \sin x$  est croissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\sin x)^{2n} \leq \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{4^n}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} \leq \frac{1}{4^n} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

car  $\cos x > 0$  sur  $[0; \frac{\pi}{6}]$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx \leq \frac{1}{4^n} \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\ln \sqrt{3}}{4^n}$$

Conclusion:

$$I_n \leq \frac{\ln c}{4^n} \text{ avec } c = \sqrt{3}$$

d/ Dédouons-en la limite de  $(I_n)$

$$\begin{cases} 0 \leq I_n \leq \frac{\ln c}{4^n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln c}{4^n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

d'après le théorème des Gendarmes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

### PARTIE C

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère la fonction  $h_n$  définie sur l'intervalle  $[0; \frac{\pi}{2}[$  par:

$$h_n(x) = \sum_{p=1}^n \frac{(\sin x)^{2p-1}}{2p-1}$$

1/ Donnons une expression simplifiée de la somme  $S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$

$$S_n(x) = 1 + \sum_{p=1}^{n-1} (\sin x)^{2p}$$

$$= 1 + \sin^2 x \frac{1 - (\sin x)^{2n-2}}{1 - \sin^2 x}$$

$$= 1 + \frac{\sin^2 x - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x}$$

$$S_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x}$$

$$S_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x}$$

2/ Démontrons que:  $h'_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$

$$h'_n(x) = \sum_{p=1}^n (\sin x)^{2p-2} \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \sum_{p=1}^n (\sin x)^{2p}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \cdot \left( \frac{\sin^2 x - 1 - (\sin x)^{2n}}{1 - \sin^2 x} \right)$$

$$= \frac{\cos x - 1 - (\sin x)^{2n}}{\cos^2 x} = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$$

$$h'_n(x) = \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x}$$

3/ Montrons que  $h_n(\frac{\pi}{6}) = \ln \sqrt{3} - I_n$

$$\int_0^{\pi/6} h'_n(x) dx = \int_0^{\pi/6} \frac{1 - (\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow [h(x)]_0^{\pi/6} = \int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x} - \int_0^{\pi/6} \frac{(\sin x)^{2n}}{\cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow h(\frac{\pi}{6}) - h(0) = \ln \sqrt{3} - I_n \text{ or } h(0) = 0$$

d'où

$$h(\frac{\pi}{6}) = \ln \sqrt{3} - I_n$$

4/ Déduisons-en que la suite  $(U_n)$

définie par:  $U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p-1) \cdot 2^{2p-1}}$

a une limite que l'on déterminera

$$U_n = \sum_{p=1}^n \frac{(\frac{1}{2})^{2p-1}}{2p-1} = \sum_{p=1}^n \frac{(\sin \frac{\pi}{6})^{2p-1}}{2p-1}$$

$$= \ln(\frac{\pi}{6})$$

$$U_n = \ln \sqrt{3} - \ln n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{3} - \ln n = \ln \sqrt{3} - 0 = \ln \sqrt{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln \sqrt{3}$$

### PROBLEME N° 11

#### PARTIE A

1/ Vérifions que:

$$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

$$(x-1)(3x^2 + 3x + 2) = 3x^3 + 3x^2 + 2x - 3x^2 - 3x - 2 = 3x^3 - x - 2$$

Conclusion:

$$3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par:  $g(x) = x^3 - x + 1 - 2 \ln x$

2/ a/ Etudions le sens de variation de la fonction  $g$

$$D_g = ]0; +\infty[$$

$x \mapsto x^3 - x + 1$  et  $x \mapsto 2 \ln x$  sont déri-

vables sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0,$

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x}$$

$$\forall x > 0, g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$$

Posons  $3x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$$

$$\forall x > 0, 3x^2 + 3x + 2 > 0$$

$g'(x)$  a donc le signe de  $x-1$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Signe de  $g'(x)$

$x$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	/	-	+

b/ Déduisons de la question précédente le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

$$g(1) = 1 > 0$$

D'après ce qui précède,  $g$  admet un minimum au point 1; ce minimum est  $g(1) = 1 > 0$

Conclusion

$$\forall x > 0, g(x) > 0$$

3/ On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par:

$$f(x) = x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2}$$

On appelle  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan (unité graphique 2cm)

a/ Déterminons les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x+1 + \frac{x+\ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x+1 + \frac{1}{x^2}(x+\ln x) \\ &= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x+1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} x+\ln x = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{x+\ln x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 + \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
---	---

b/ Justifions que les droites (D) et (A) d'équations respectives:  $x=0$  et  $y=x+1$  sont asymptotes à la courbe (C)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$  la droite (D) d'équation  $x=0$  est asymptote verticale à la courbe (C).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0 \Leftrightarrow \text{la droite (A) d'équation } y=x+1 \text{ est asymptote}$$

(A) d'équation  $y=x+1$  est asymptote

oblique à la courbe (C).

Conclusion

Les droites (D):  $x=0$  et (A):  $y=x+1$  sont respectivement asymptote verticale et oblique à la courbe (C)

4/ a/ Montrons que la fonction  $h$  telle que:  $h(x) = x+\ln x$  est strictement croissante et prend des valeurs positives et négatives

$$\mathcal{D}h = ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

$$\forall x > 0, h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$\forall x > 0, h'(x) > 0$ .  $h$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

D'après ce qui précède,  $h$  définit une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ ;  $h(x)$  prend donc des valeurs positives et négatives

b/ Deduisons que (A) coupe (C) en un point unique d'abscisse  $\alpha$  vérifiant

$$\alpha + \ln \alpha = 0$$

D'après ce qui précède l'équation  $h(x) = 0$  admet une solution unique

Soit  $M(x, y)$  un point du plan

$$M \in (C) \cap (A) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 + \frac{x+\ln x}{x^2} \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x+\ln x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$$

Conclusion:

(Δ) coupe (C) en un point unique d'abscisse α vérifiant  $\alpha + \ln \alpha = 0$

- Montrons que  $0,56 < \alpha < 0,57$

$h(0,56) = -0,0198; h(0,57) = 0,0078$

$h(0,56) \times h(0,57) < 0 \Leftrightarrow 0,56 < \alpha < 0,57$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$0,56 < \alpha < 0,57$

c/ Déterminons la position relative de (C) par rapport à (Δ)

Posons  $d(x) = f(x) - (x+1) = \frac{x + \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

$\forall x > 0, x^2 > 0$

$d(x)$  a donc le même signe que  $h(x)$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessus

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$h(x)$		-	+
Position relative de (C) par rapport à (Δ)	(C) est en dessous de (Δ)	(C) coupe (Δ)	(C) est au dessus de (Δ)

5/ Étudions le sens de variation de  $f$

$\mathcal{D}f = ]0; +\infty[$

$f$  est dérivable sur  $\mathcal{D}f$  et  $\forall x \in \mathcal{D}f,$

$f'(x) = 1 + \frac{(1 + \frac{1}{x})x^2 - 2x(x + \ln x)}{x^4}$

$f'(x) = 1 + \frac{x+1-2x-2\ln x}{x^3} = \frac{x^3-x+1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

$\forall x > 0, x^3 > 0; f'(x)$  a le signe de  $g(x)$  or  $\forall x > 0, g(x) > 0$ . On a donc:

$\forall x > 0, f'(x) > 0; f$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

5-/ Déduisons de la question 4/ l'existence d'une valeur unique  $\beta$  telle  $f(\beta) = 0$

La fonction  $f$  est continue, monotone strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  avec

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$f$  définit donc une bijection de  $]0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ . Ainsi il existe un unique réel  $\beta > 0$  tel que  $f(\beta) = 0$ .

Montrons que  $0,46 < \beta < 0,47$

$f(0,46) = -0,036; f(0,47) = 0,18$

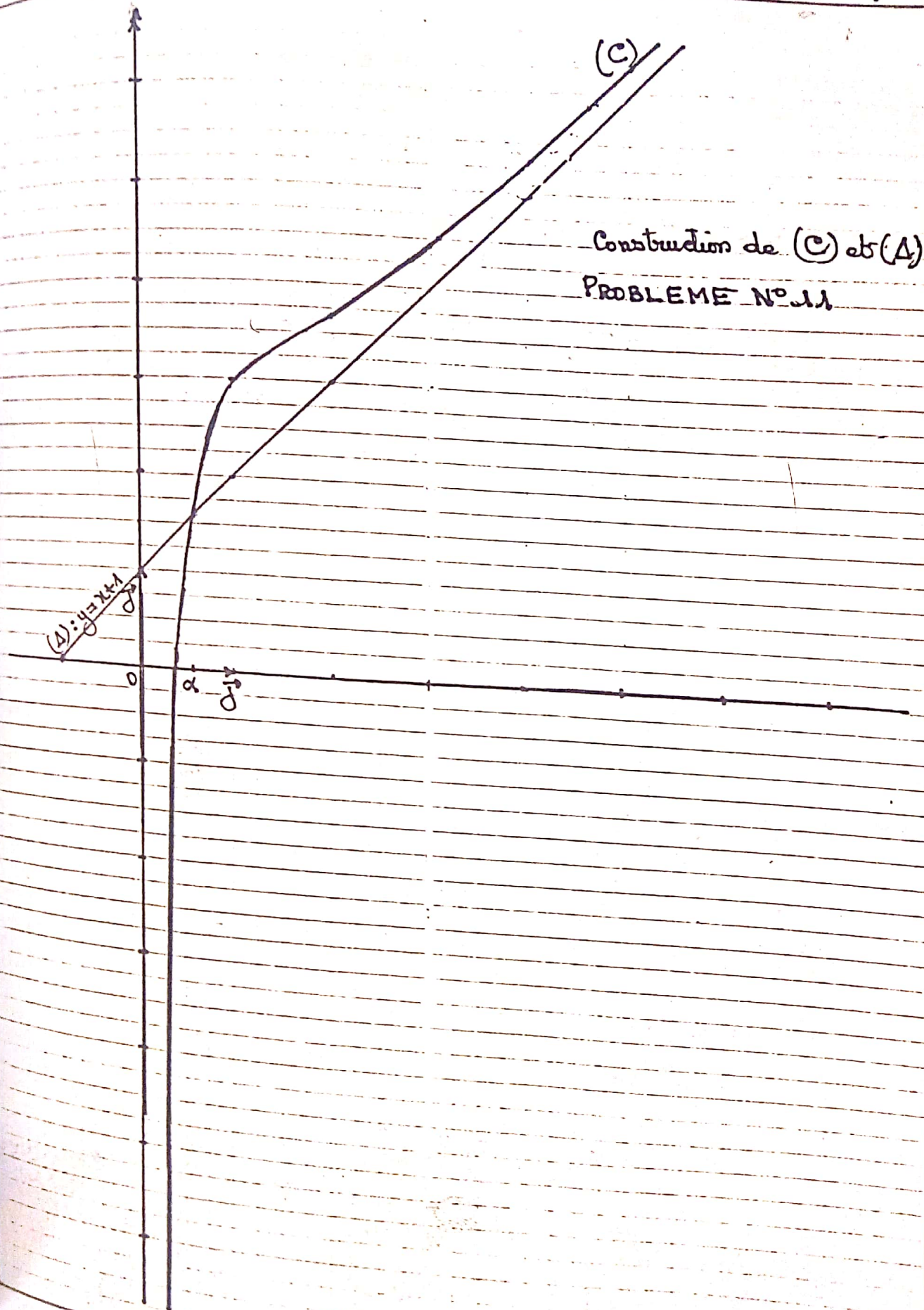
$f(0,46) - f(0,47) < 0 \Leftrightarrow 0,46 < \beta < 0,47$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

7/ Construction de (C) et (Δ)

(Voir page suivante)

PARTIE B

m étant un réel, on appelle  $f_m$  la fonction de  $]0; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par:



Construction de (C) et (A)  
PROBLEME N° 11

$f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} \ln x$  et  $(\Gamma_m)$  est courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Dressons suivant les valeurs de  $m$  le tableau de variation de  $f_m$

1<sup>er</sup> cas  $m < 0$

$Df_m = ]0; +\infty[$

limites de  $f_m$  aux bornes de  $Df_m$ .

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} \ln x$

$= -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{4} = -\frac{1}{4}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $-\frac{m}{2} > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} \ln x$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4} + x \left( \frac{x}{4} - \frac{m \ln x}{2} \right)$

$= +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'_m(x) = -\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_m(x) = +\infty$

Dérivée

$f'_m$  est dérivable sur  $Df_m$  et  $\forall x \in Df_m$ :

$f'_m(x) = \frac{x}{2} - \frac{m}{2x} = \frac{x^2-m}{2x}$

$\forall x > 0, 2x > 0$ ;  $f'_m(x)$  a donc le signe de  $x^2-m$ .

Pour  $m < 0$  on a:  $x^2-m > 0$  donc

$\forall x > 0, f'_m(x) > 0$ ;  $f_m$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_m$   $m < 0$

$x$	0	$+\infty$
$f'_m(x)$		+
$f_m(x)$		$+\infty$

2<sup>e</sup> cas  $m = 0$

$f_0(x) = \frac{x^2-1}{4}$      $Df_0 = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = -\frac{1}{4}$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$

$f'_0(x) = \frac{x}{2} > 0$

$f_0$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_0$

$x$	0	$+\infty$
$f'_0(x)$		+
$f_0(x)$		$+\infty$

3<sup>e</sup> cas  $m > 0$

$Df_m = ]0; +\infty[$

limites de  $f_m$  aux bornes de  $Df_m$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} \ln x$

$= +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-1}{4} = -\frac{1}{4}$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  et  $-\frac{m}{2} < 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4} + x \left( \frac{x}{4} - \frac{m \ln x}{2} \right)$

$= +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$

Derivée:

$f_m$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0$ :

$f'_m(x) = \frac{x^2 - m}{2x}$

$f'_m(x)$  a le signe de  $x^2 - m$  car  $2x > 0$

$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - m = 0 \\ \text{et} \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{m}$

Signe de  $f'_m(x)$

$x$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+

Sens de variation de  $f_m$

$f_m$  est strictement décroissante sur  $]0; \sqrt{m}[$ , strictement croissante sur  $]\sqrt{m}; +\infty[$  et admet un minimum

local au point  $\sqrt{m}$ .

local au point  $\sqrt{m}$ .

$f_m(\sqrt{m}) = \frac{m-1-m \ln m}{4}$

Tableau de variation de  $f_m$  ( $m > 0$ )

$x$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
$f_m(x)$	$+\infty$	$f_m(\sqrt{m})$	$+\infty$

2/ a) Soit  $M_0(x_0; y_0)$  un point du plan avec  $x_0 > 0$  et  $x_0 \neq 1$

Montrons qu'il existe une seule courbe  $(\Gamma_m)$  qui passe par  $M_0$

$M_0(x_0; y_0) \in (\Gamma_m) \Leftrightarrow y_0 = f_m(x_0)$

$\Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0^2 - 1}{4} - \frac{m}{2} \ln x_0$  (1)

$\Leftrightarrow 2m \ln x_0 = -4y_0 + x_0^2 - 1$

$\Leftrightarrow m = \frac{x_0^2 - 4y_0 - 1}{2 \ln x_0}$

Cette equation (1) d'inconnue  $m$  admet une seule solution pour  $x_0 > 0$  et  $x_0 \neq 1$

Il existe donc une seule courbe  $(\Gamma_m)$  qui passe par  $M_0(x_0; y_0)$ ,  $x_0 > 0$  et  $x_0 \neq 1$

b/ Montrons qu'il existe un seul point A appartenant à toutes courbes  $(\Gamma_m)$

Posons  $y = f_m(x)$

$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{m}{2} \ln x$

$\Leftrightarrow \frac{m}{2} \ln x = \frac{x^2 - 1}{4} - y$

$\begin{cases} \ln x = 0 \\ \frac{x^2 - 1}{4} - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Le point  $A(1; 0)$  appartient à toutes courbes  $(\Gamma_m)$

PROBLEME N°12

PARTIE I

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par:

$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  où  $\ln$

désigne la fonction logarithme népérien. On désigne par (C) la courbe repré.

antidérivée de  $f$  relativement au repère orthonormé  $(0, \vec{x}, \vec{y})$

1./ Etude de la fonction  $f$

Ensemble de définition  $D$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1-x \neq 0 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\}$$

$$D = ]-1; 1[$$

Parité

$$\forall x \in D, -x \in D$$

$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Conclusion

La fonction  $f$  est impaire

Source

$f$  est continue et dérivable sur  $D$  et

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\forall x \in D, 1-x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

$f$  est donc strictement croissante sur  $D$

limites de  $f$  aux bornes de  $D$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

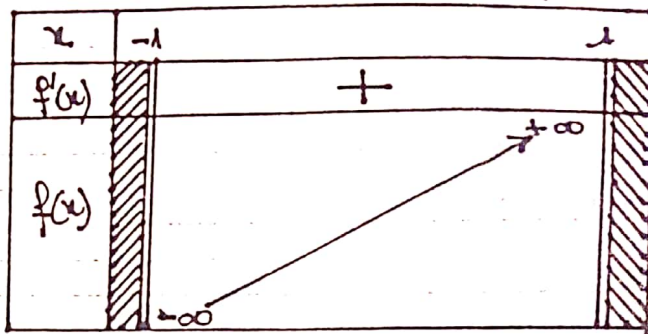
$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1-x} = 0 \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{1-x} = +\infty \\ \frac{1+x}{1-x} > 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

Tableau de variation de  $f$



b/ Déterminons une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = 1 \quad f(0) = 0$$

$$(T) : y = x$$

c/ Étudions la position relative de  $(C)$  et  $(T)$

$$\text{Posons } h(x) = f(x) - x$$

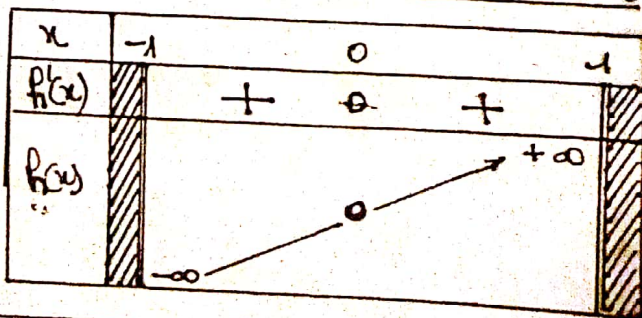
Étudions  $h$  sur  $] -1; 1[$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = +\infty$$

$$h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$\forall x \in ]-1; 1[, h'(x) > 0 \text{ avec } h(0) = 0$$

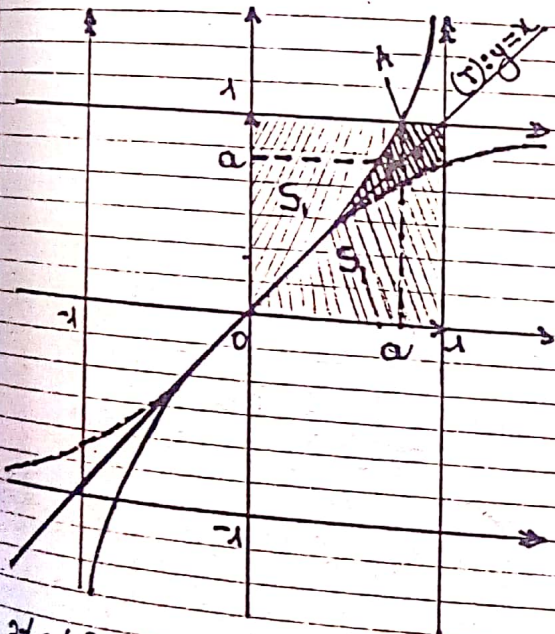
Tableau de variation de  $h$



A partir du tableau de variation de  $f$  on déduit les résultats suivants consignés dans le tableau ci-dessous

$x$	-1	0	1
$f(x)$		-	+
Posit. relatif de $(C)$ et $(T)$		(C) est en dessous de (T)	(C) est au dessus de (T)
		(C) coupe (T)	

Construction de (C) et (T) sur un même dessin



2/ a/ Démontrons que  $f$  est une bijection de  $D$  sur un ensemble que nous déterminerons

D'après l'étude de  $f$ , elle est continue monotone, strictement croissante sur  $] -1; 1[$  avec  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

$f$  est donc une bijection de  $] -1; 1[$  sur

$$f(] -1; 1[) = \mathbb{R}$$

b/ Explicitons  $f^{-1}(x)$ .

Posons  $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$   
 $\Leftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Représentation de  $f^{-1}$  sur le même dessin que celui de la question précédente.

Voir figures ci-contre.

3./ Déterminons le réel  $a$  tel que

$$f(a) = 1$$

$$f(a) = 1 \Leftrightarrow a = f^{-1}(1) = \frac{e^2-1}{e^2+1}$$

$$a = \frac{e^2-1}{e^2+1}$$

b/ Soit  $E$  l'ensemble des points

$$M(x; y) \text{ tels que: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ f^{-1}(x) \leq y \leq \inf(1; f(x)) \end{cases}$$

où  $\inf(u; v)$  désigne le plus petit des réels  $u$  et  $v$ .

Déterminons en fonction de  $a$  l'aire de  $E$ .

Soit  $A$  cette aire.

$$\inf(1; f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$A = \int_0^a (f(x) - f^{-1}(x)) dx + \int_a^1 (1 - f^{-1}(x)) dx$$

Sur la figure on peut constater que :

$$A = 1 - 2 \int_0^a (1 - f(x)) dx = 1 - 2S_1$$

$$= 1 - 2a + 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$= 1 - 2a + \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx, \quad I = \int_0^a \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$$

Posons  $u(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow u'(x) = \frac{2}{1-x^2}$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$I = \left[ x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right]_0^a + \int_0^a \frac{2x}{x^2-1} dx$$

$$= 2a + \left[ \ln|x^2-1| \right]_0^a$$

$$= 2a + \ln(1-a^2)$$

$$A = 1 - 2a + 2a + \ln(1-a^2)$$

$$A = 1 + \ln(1-a^2)$$

PARTIE II

Soit  $f_\alpha$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\right); \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

On désigne par  $(C_\alpha)$  la courbe représentative de  $f_\alpha$  dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Pour toute la partie II, voir : Problème N°10, PARTIE A, questions 3 à 7. en remplaçant  $a$  par  $\alpha$ .

PARTIE III

Dans cette partie on considère les fonctions  $f_\alpha$  définies au II avec  $\alpha > 0$ .

1/ Déterminons les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles l'équation d'inconnue réelle  $x: f_\alpha(x) - x = 0$  admet une solution strictement positive que l'on notera  $x(\alpha)$

Posons  $h_\alpha(x) = f_\alpha(x) - x$

$$Dh_\alpha = ]-\alpha; \alpha[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\alpha} h_\alpha(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} h_\alpha(x) = +\infty$$

$h_\alpha$  est continue et dérivable sur  $Dh_\alpha$

et  $\forall x \in Dh_\alpha, h'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2-x^2} - 1$

$$= \frac{x^2 - \alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - x^2}$$

$$\forall x \in Dh_\alpha, h'_\alpha(x) = \frac{x^2 - (\alpha^2 - \alpha)}{\alpha^2 - x^2}$$

$\alpha$	0	1	$+\infty$
$\alpha^2 - \alpha$		-	+

1<sup>er</sup> cas  $0 < \alpha \leq 1$

$\forall x \in Dh_\alpha, h'_\alpha(x) \geq 0, h_\alpha$  est monotone strictement croissante avec

$$\lim_{x \rightarrow -\alpha} h_\alpha(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} h_\alpha(x) = +\infty$$

$h$  définit donc une bijection de  $Dh_\alpha$  vers  $\mathbb{R}$ . Or  $h_\alpha(0) = 0$ .

L'équation  $f_\alpha(x) - x = 0$  admet une seule solution  $x = 0$

2<sup>e</sup> cas  $\alpha > 1$

$$h'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\sqrt{\alpha^2 - \alpha}, \quad x_2 = \sqrt{\alpha^2 - \alpha}$$

$\forall x \in Dh_\alpha, \alpha^2 - x^2 > 0; h'_\alpha(x)$  a donc

le signe de  $x^2 - (\alpha^2 - \alpha)$   
 Tableau de variation de  $h_\alpha$

$x$	$-\alpha$	$x_1$	$0$	$x_2$	$\alpha$
$h'_\alpha(x)$		$+$	$0$	$-$	$+$
$h_\alpha(x)$					

D'après le tableau de variation ci-dessus, la restriction de  $h_\alpha$  à  $]0; \alpha[$  s'annule pour une seule valeur  $\chi(\alpha)$

Conclusion

Pour  $\alpha > 1$ , l'équation d'inconnue réelle  $x: f_\alpha(x) - x = 0$  admet une solution strictement positive notée  $\chi(\alpha) > x_2 = \sqrt{\alpha}$

2/ On prend dans cette question  $\alpha = 3$  et on définit la suite  $(U_n)$  par:

$$\begin{cases} U_0 = 1/2 \\ U_{n+1} = f_3^{-1}(U_n) \text{ si } n \geq 0. \end{cases}$$

a/ Démontrons que  $U_1 > U_0$

Pour  $\alpha = 3, x_2 = \sqrt{6}, h_3(\sqrt{6}) < 0$

$\forall x \in ]0; \sqrt{6}[, h_3(x) < 0$

$U_0 \in ]0; \sqrt{6}[ \Leftrightarrow h_3(U_0) < 0$

$$\Leftrightarrow f_3(U_0) - U_0 < 0$$

$$\Leftrightarrow U_0 > f_3(U_0)$$

or  $f_3$  est monotone et strictement croissante sur

De plus  $f_3$  définit une bijection de  $]-3; 3[$

vers  $\mathbb{R}$ ; on en déduit que  $f_3^{-1}$  est monotone, strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et définit une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $]-3; 3[$ .

$$U_0 > f_3(U_0) \Leftrightarrow f_3^{-1}(U_0) > f_3^{-1}(f_3(U_0))$$

$$\text{or } f_3^{-1}(U_0) = U_1 \text{ et } (f_3^{-1} \circ f_3)(U_0) = U_0$$

d'où  $U_1 > U_0$

Déduisons-en que la suite  $(U_n)$  est croissante

$$U_1 > U_0$$

Or  $f_3^{-1}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\Leftrightarrow f_3^{-1}(U_1) > f_3^{-1}(U_0) \Leftrightarrow U_2 > U_1$$

Supposons  $U_{n+1} > U_n$

$$\Leftrightarrow f_3^{-1}(U_{n+1}) > f_3^{-1}(U_n)$$

$$\Leftrightarrow U_{n+2} > U_{n+1}$$

Conclusion:

$\forall n \geq 0, U_{n+1} > U_n$ ; la suite  $(U_n)$  est donc croissante.

b/ Démontrons que pour tout  $n$  entier naturel on a:  $U_n < \chi(3)$

$$U_0 = \frac{1}{2} < \sqrt{6} \text{ or } \chi(3) > \sqrt{6}$$

$$U_0 < \chi(3)$$

Supposons  $U_n < \chi(3)$  et démontrons que  $U_{n+1} < \chi(3)$

$$U_n < \chi(3) \Leftrightarrow f_3^{-1}(U_n) < f_3^{-1}(\chi(3))$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow U_{n+1} &< f^{-1}(X(3)) \\ \text{or } f^{-1}(X(3)) &= X(3) \Leftrightarrow f^{-1}(X(3)) = X(3) \\ \Leftrightarrow U_{n+1} &< X(3) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\forall n \geq 0, U_n < X(3)$$

c./ - Démontrons que la suite  $(U_n)$  est convergente.

$$U_n < X(3) \Rightarrow (U_n) \text{ majorée}$$

De plus  $(U_n)$  est croissante.

Conclusion

$(U_n)$  est croissante et majorée donc  $(U_n)$  est convergente.

Soit  $l$  la limite de la suite  $(U_n)$ .

Démontrons que  $l > \sqrt{6}$ .

Si  $l$  est la limite de la suite  $(U_n)$

alors  $l$  est solution de l'équation

$$l = f^{-1}(l) \Leftrightarrow f(l) = l \Leftrightarrow l = X(3)$$

$$\text{or } X(3) > \sqrt{6} \Rightarrow l > \sqrt{6}$$

$$l > \sqrt{6}$$

## PROBLEME N°13

### PARTIE A

On se propose de déterminer les solutions sur  $]0; +\infty[$  de l'équation différentielle:

$$(E): xy' - 2y = \ln x, \text{ où } y \text{ est une fonction de variable } x.$$

tion de variable  $x$ .

1./ Déterminons les nombres réels  $a, b$  et  $c$  pour que la fonction  $P$  définie sur  $]0; +\infty[$ , par  $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{vérifie: } xP'(x) - 2P(x) = 0 \quad (1)$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$$

$P$  vérifie (1) si:

$$x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow -bx - 2c = 0 \Rightarrow b = c = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, b = 0, c = 0; P(x) = ax^2 \text{ vérifie } xP'(x) - 2P(x) = 0 \quad (1)$$

2./  $f$  étant une fonction définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , on pose  $g = \frac{f}{P}$  où  $P$  est la fonction déterminée dans la question 1./ avec  $a \neq 0$ .

a./ Démontrons que la fonction  $f$  est solution de (E) si  $g$  est une primitive

$$\text{de la fonction } x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$$

$$g = \frac{f}{P} \Leftrightarrow f = gP \Leftrightarrow f' = g'P + gP'$$

$f$  solution de (E) si:

$$x f'(x) - 2f(x) = \ln x$$

$$\Leftrightarrow x[g'(x)P(x) + g(x)P'(x)] - 2g(x)P(x) = \ln x$$

$$\Leftrightarrow ax^3 g'(x) + 2ax^2 g(x) - 2ax^2 g(x) = \ln x$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{\ln x}{ax^3} \Leftrightarrow g \text{ est une primitive de la fonction } x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$$

Conclusion:

$f$  est solution de (E)ssi  $g$  est une primitive de la fonction:  $x \mapsto \frac{\ln x}{ax^3}$

b/ Déterminons l'ensemble des primitives définies sur  $]0; +\infty[$  de la

fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$

Posons  $h(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ . Soit  $H$  une primitive de  $h$  on a:

$$H(x) = \int_e^x \frac{\ln t}{t^3} dt \quad e > 0$$

$$= \int_e^x \left( \frac{1}{t^3} \ln t \right) dt$$

$$\text{Posons } U(t) = \ln t \Rightarrow U'(t) = \frac{1}{t}$$

$$V'(t) = \frac{1}{t^3} \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{2t^2}$$

$$H(x) = \left[ -\frac{1}{2t^2} \ln t \right]_e^x + \frac{1}{2} \int_e^x \frac{1}{t^3} dt$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= -\frac{1}{4x^2} (1 + 2 \ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

L'ensemble des primitives de la fonction  $x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}$  est l'ensemble des fonctions:  $x \mapsto -\frac{1}{4x^2} (1 + 2 \ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

c/ Déduisons-en que l'ensemble des fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions

$$x \mapsto \frac{1 + \ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{a} \frac{\ln x}{x^3} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{4ax^2} (1 + \ln x^2) + c$$

$f$  solution de (E)  $\Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot p(x)$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \alpha x^2, \text{ posons } \alpha =$$

$$f(x) = -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Conclusion

L'ensemble des fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$  et vérifiant (E) est l'ensemble des fonctions:

$$x \mapsto -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3/ a/ Trouvons la fonction  $\varphi$ , définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$ , vérifiant (E)

tel que  $\varphi(1) = 0$ :

$$\varphi(x) = -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \alpha x^2, \quad \varphi(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ d'où:}$$

$$\boxed{\varphi(x) = -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \frac{1}{4} x^2}$$

b/ Étudions les variations de  $\varphi$ .

$$\varphi(x) = -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \frac{1}{4} x^2$$

$$\mathcal{D}\varphi = ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 + \ln x^2}{4} + \frac{1}{4} x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1 + \ln x}{4} + \frac{1}{4} x, \quad X = x^2$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1 + \ln x}{4} + \frac{1}{4} x, \quad x = x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4}x \left( \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 1 \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$
---	---

Dérivée

$\varphi$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$

et  $\forall x > 0, \varphi'(x) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

$$\varphi'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ \text{et} \\ x \in \mathcal{D}\varphi \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$\forall x > 0, 2x > 0; \varphi'(x)$  a donc le signe de  $x^2 - 1$

Signe de  $\varphi'(x)$

$x$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+

$\varphi$  est décroissante sur  $]0; 1[$ , croissante sur  $]1; +\infty[$  et admet un minimum local au point 1;  $\varphi(1) = 0$

Tableau de variation de  $\varphi$

$x$	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	+
$\varphi(x)$		↘ 0 ↗	↗ $+\infty$

Construction de la courbe (C) représentative de  $\varphi$ .

Branches infinies

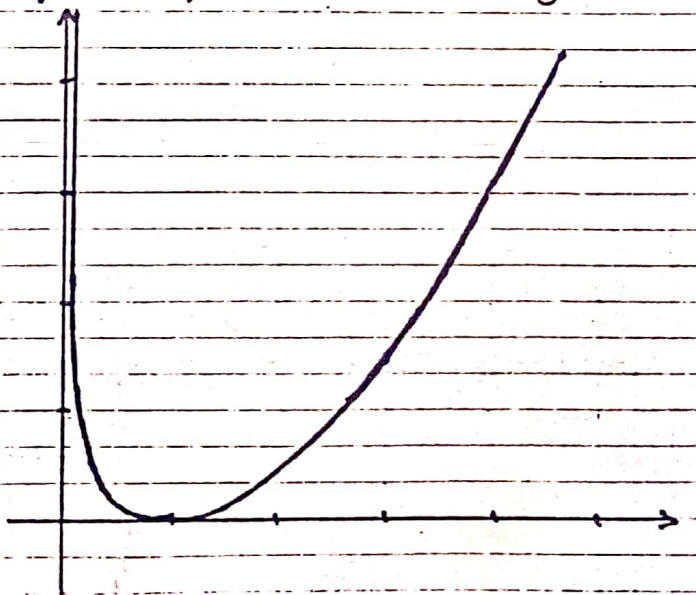
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$ ; la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation  $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4x} - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{4}x$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{4x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}x = +\infty \end{cases}$$

La courbe (C) admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction (Oy)



PARTIE B

1/ Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif.

Calculons en fonction de  $\lambda$

l'intégrale:  $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \varphi(x) dx$

$$\begin{aligned}
 I(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 \varphi(x) dx \\
 &= \int_{\lambda}^1 \left( -\frac{1+\ln x^2}{4} + \frac{1}{4}x^2 \right) dx \\
 &= \int_{\lambda}^1 \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \right) dx \\
 &= \left[ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{2}(x\ln x - x) \right]_{\lambda}^1 \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\lambda\ln\lambda
 \end{aligned}$$

$$I(\lambda) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}\lambda\ln\lambda$$

2/ Montrons que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \frac{1}{3}$

$$\text{On sait que } \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\frac{1}{12}\lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda = 0$$

$$\text{et } \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda\ln\lambda = 0.$$

$$\text{d'où } \boxed{\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \frac{1}{3}}$$

3/ Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

a/ Montrons que pour tout entier naturel  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n-1$  et pour tout  $x$  de  $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$  on a:  $\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$

$$1 \leq k \leq n-1 \Rightarrow 0 < \frac{k}{n} < \frac{k+1}{n} \leq 1$$

ou  $\varphi$  est décroissante sur  $]0; 1]$

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

Conclusion:

$1 \leq k \leq n-1$  et  $x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$  on a:

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

b/ Montrons que:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

On sait que  $\forall x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ ,

$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) dx$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x) dx \leq \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x) dx \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x) dx &= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(x) dx + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} \varphi(x) dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^1 \varphi(x) dx \\
 &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \varphi(x) dx = I\left(\frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Déduisons-en que:

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{On sait que } \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1)$$

De plus

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{ou}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{d'où } I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \quad (2)$$

(1) et (2) nous permettent d'écrire

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

4./ Réduisons des questions 2./ et 3./

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) \text{ avec } \lambda = \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ d'après la question 2./}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \varphi(x), \quad x = \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x \ln x + \frac{1}{4}x^3$$

$$= 0$$

On a donc

$$\left\{ \begin{aligned} I\left(\frac{1}{n}\right) &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) &= 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{3}$$

5./ a/ Montrons que pour tout entier

naturel non nul,  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{4} \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{n} \times \frac{n}{4}$$

$$= \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

Conclusion: Pour tout entier  $n$  non nul:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$$

b./ Établissons les égalités

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \quad (a)$$

Remplaçons dans (a),  $x$  par  $1, 2, \dots, n$

$$2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1$$

...

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

En additionnant membres à mem-  
bres les n égalités obtenues et après  
simplification on a:

$$(n+1)^3 = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n + 1$$

$$(n+1)^3 = (n+1) + \frac{3n(n+1)}{2} + 3 \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3} \left[ (n+1)^3 - (n+1) - \frac{3n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \frac{n+1}{3} \left( n^2 + 2n - \frac{3n}{2} \right)$$

$$= \frac{n+1}{3} \cdot \frac{2n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n}{1}\right) + \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \dots + \ln\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

c./ Soient les deux suites:  
 $V_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$  et  $U_n = \frac{n}{\sqrt{n!}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

Utilisons les résultats précédents  
pour calculer la limite des deux suites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6 \times 4n^3} = \frac{1}{12}$$

On en déduit donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{n}{k}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = 1 \text{ soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$$

De plus :

$$\ln U_n = \ln n - \frac{1}{n} \ln n! = \frac{1}{n} (n \ln n - \ln n!)$$

$$\ln U_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) = V_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln U_n = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = e.$$

### PROBLEME N° 14

#### PARTIE

Soit h la fonction numérique d'une  
variable réelle x définie par:  $h(x) = \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x}$

1/ a/ Ensemble de définition D de h

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } 2 + \ln x^2 \neq 0\}$$

$$\text{Posons } 2 + \ln x^2 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2 \ln |x| = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln |x| = -1 \Leftrightarrow |x| = e^{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e} \text{ ou } x = \frac{1}{e}$$

$$D = \left\{ -\frac{1}{e}; 0; \frac{1}{e} \right\}$$

b/ Montrons que  $h$  admet un prolongement par continuité au point 0.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2} \\ &= \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{-X+2}{X+2} \text{ avec } X = \ln x^2 \\ &= -1\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1 \in \mathbb{R}$ ;  $h$  admet donc un prolongement par continuité en 0

Précisons ce prolongement

Soit  $p$  ce prolongement on a:

$$\begin{cases} p(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ p(0) = -1 \end{cases}$$

2/ Soit  $f$  la fonction définie par:

$$\begin{cases} f(x) = h(x) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

a/ Dérivabilité de  $f$  en 0

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1 = f(0)$ ;  $f$  est continue en 0 et  $f(0) = -1$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2} + 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x(1 + \ln x^2)} \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} -\frac{2}{X + X \ln X}, \quad X = -x \\ &= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} = +\infty. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x + x \ln x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

$f$  n'est donc pas dérivable en 0.

b/ Étudions les variations de  $f$ .

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{e}; \frac{1}{e} \right\}.$$

$$\forall x \in \mathcal{D}f, -x \in \mathcal{D}f \text{ et } f(-x) = f(x).$$

la fonction  $f$  est paire.

Étudions  $f$  sur  $[0; \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[$  et complétons dans la symétrie par rapport à (oy).

$$\text{Posons } I = [0; \frac{1}{e}[ \cup ]\frac{1}{e}; +\infty[$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - X}{2 + X}, \quad X = \ln x^2 \\ &= -\infty \text{ car } \begin{cases} 2 - X \rightarrow 4 \\ 2 + X \rightarrow 0 \\ 2 + X < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - X}{2 + X}, \quad X = \ln x^2 \\ &= +\infty \text{ car } \begin{cases} 2 - X \rightarrow 4 \\ 2 + X \rightarrow 0 \\ 2 + X > 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - X}{2 + X}, \quad X = \ln x^2 \\ &= -1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1\end{aligned}$$

Dérivée

$f$  est continue et dérivable sur  $I^*$ .

et  $\forall x \in I^*$ ,  

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{x}(2+\ln x^2) - \frac{2}{x}(2-\ln x^2)}{(2+\ln x^2)^2}$$

$$= -\frac{8}{x(2+\ln x^2)^2}$$

$\forall x \in \mathcal{D}f, (2+\ln x^2)^2 > 0$ ;  $f'(x)$  a donc le signe de  $-x$ .

Tableau de variation de  $f$ .

$f$  étant paire:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} f(x)$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	$0$	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	+		-	-
$f(x)$		$+\infty$	$-1$		$+\infty$

c/ Tracer de  $(C)$ , courbe représentative de  $f$  dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(Voir page suivante)

La courbe  $(C)$  admet trois asymptotes dont deux verticales d'équations:

$x = -\frac{1}{e}$  et  $x = \frac{1}{e}$  et une horizontale d'équation  $y = -1$ .

La courbe  $(C)$  admet au point d'abscisse 0 une tangente verticale.

3/ On désigne par  $\tilde{f}$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]\frac{1}{e}; +\infty[$

a/ Montrons que  $\tilde{f}$  admet une bijection réciproque notée  $\tilde{f}^{-1}$

D'après le tableau de variation de  $f$ ,  $\tilde{f}$  est continue, monotone, strictement décroissante sur  $]\frac{1}{e}; +\infty[$  avec:

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \tilde{f}(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}(x) = -1$

$\tilde{f}$  réalise une bijection de  $]\frac{1}{e}; +\infty[$  vers  $] -1; +\infty [$ .

$\tilde{f}$  admet donc une bijection réciproque notée  $\tilde{f}^{-1}$ .

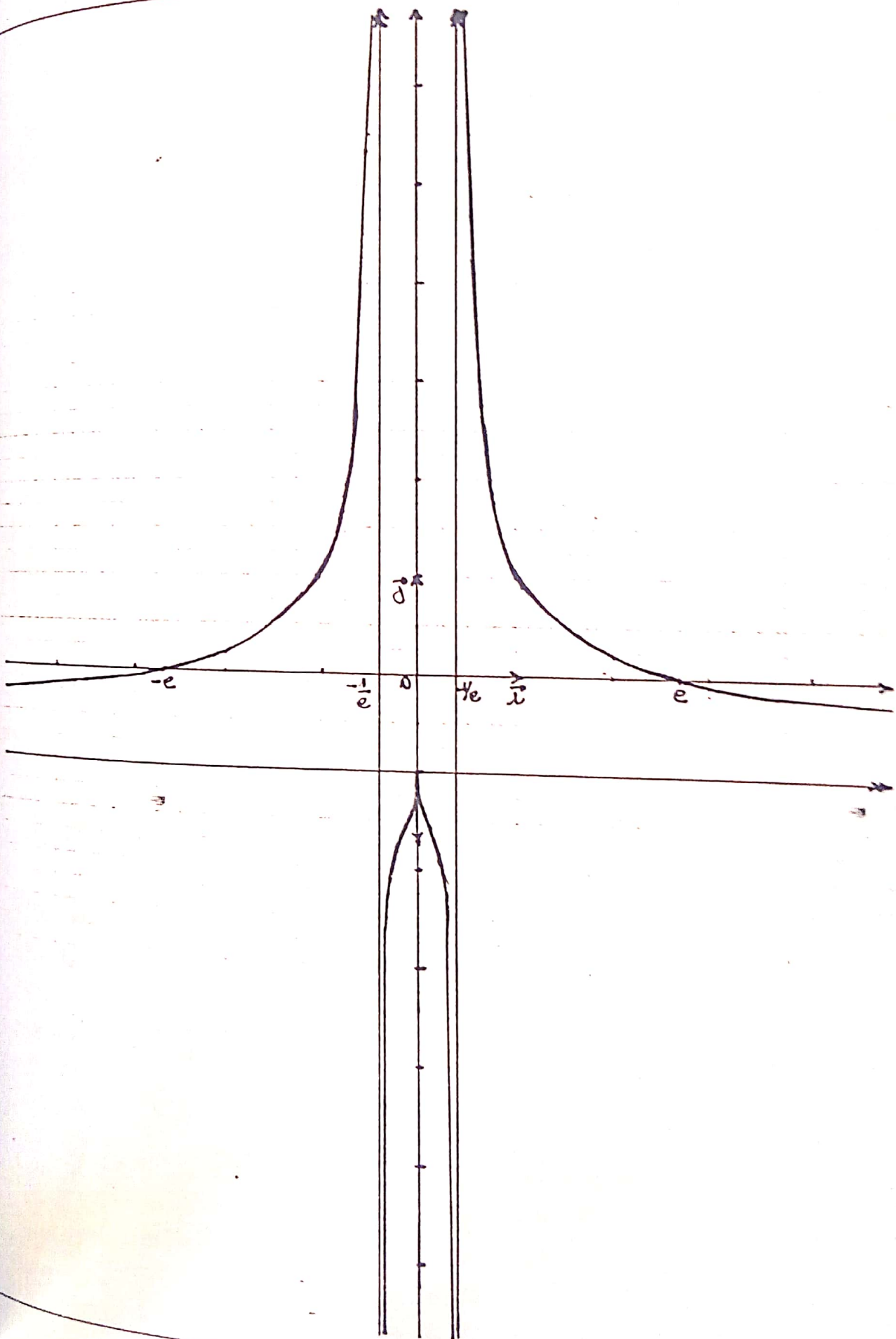
b/ Tableau de variation de  $\tilde{f}^{-1}$

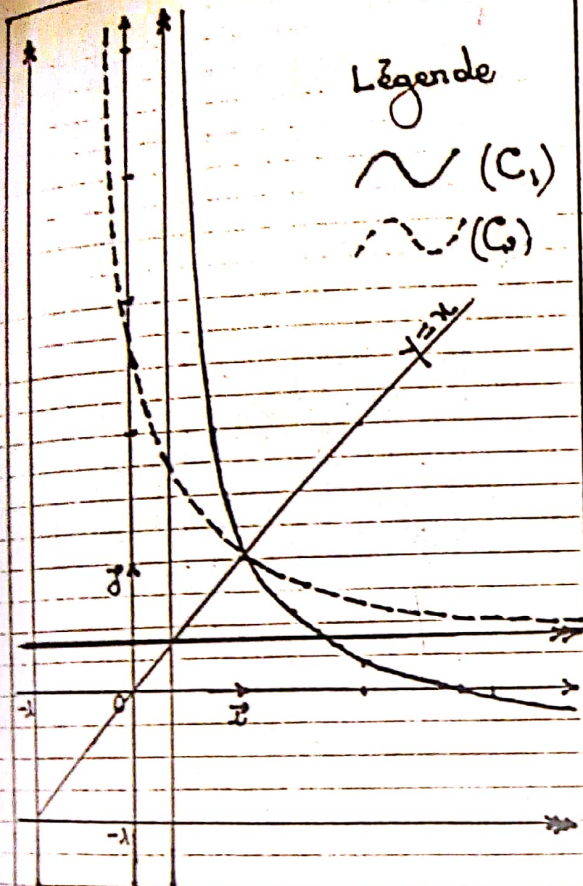
$x$	$-1$		$+\infty$
$(\tilde{f}^{-1})'(x)$		-	
$\tilde{f}^{-1}(x)$		$+\infty$	$\frac{1}{e}$

c/ Traçons la courbe  $(C_1)$  de  $\tilde{f}$  et  $(C_2)$  de  $\tilde{f}^{-1}$  dans un autre repère orthonormé que celui de  $(C)$

(Voir page 173)

Rappelons  $(C_2)$  est l'image de  $(C_1)$  dans la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice





e./ Montrons que l'équation :  
 $x \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$ ,  $\tilde{f}(x) = 2$  admet une  
 solution unique  $x_0$  dans  $]\frac{1}{e}; 1[$ .

$\tilde{f}$  réalise une bijection de  $]\frac{1}{e}; +\infty[$   
 vers  $]1; +\infty[$  or  $2 \in ]1; +\infty[$ ; il  
 existe donc un unique réel  $x_0$  de  
 $]\frac{1}{e}; +\infty[$  tel que  $\tilde{f}(x_0) = 2$ .

De plus :  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \tilde{f}(x) = +\infty$  et  $\tilde{f}(1) = 1$

$$2 \in ]1; +\infty[ \Leftrightarrow x_0 \in ]\frac{1}{e}; 1[$$

Conclusion

L'équation :  $x \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$ ,  $\tilde{f}(x) = 2$   
 admet une solution unique  $x_0$  dans  
 l'intervalle.

Donnons un encadrement de  $x_0$  à  $10^1$  près

$$\tilde{f}(0,7) = 2,108 \quad \tilde{f}(0,8) = 1,57$$

$$\Leftrightarrow \boxed{0,7 < x_0 < 0,8}$$

d./ Montrons que  $\tilde{f}^{-1}$  est dérivable,

puis calculons  $(\tilde{f}^{-1})'(0)$

$$\forall x \in ]1; +\infty[, \tilde{f}^{-1}(x) \in ]\frac{1}{e}; +\infty[$$

De plus :  $\tilde{f}$  est dérivable sur  $]\frac{1}{e}; +\infty[$

$$\text{et } \forall x \in ]\frac{1}{e}; +\infty[, \tilde{f}'(x) \neq 0$$

$\tilde{f}^{-1}$  est donc dérivable sur  $]1; +\infty[$

Calculons  $(\tilde{f}^{-1})'(0)$ .

$$(\tilde{f}^{-1})'(0) = \frac{1}{\tilde{f}'(\tilde{f}^{-1}(0))} \quad \tilde{f}^{-1}(0) = e$$

$$= \frac{1}{\tilde{f}'(e)} \quad \tilde{f}'(e) = -\frac{8}{16e}$$

$$= \frac{-16e}{8} = -2e$$

$$\boxed{(\tilde{f}^{-1})'(0) = -2e}$$

## PARTIE B

On considère la fonction  $g$  définie

$$\text{par : } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1 - e^{|x|}}{1 + e^{|x|}}$$

1./ a./ Etudions les variations de  $g$

$$Dg = \{x \in \mathbb{R} / 1 + e^{|x|} \neq 0\}$$

$$\text{or } \forall x \in \mathbb{R}, 1 + e^{|x|} \neq 0$$

$$\boxed{Dg = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[}$$

$\forall x \in \mathcal{D}g, -x \in \mathcal{D}g$  et  $g(-x) = g(x)$   
 La fonction  $g$  est donc paire.

$$g(0) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x}{1 + x}, x = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$$

$g$  étant paire,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

$$g'(x) = \frac{-2e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$\forall x > 0, g'(x) < 0$ .

Tableau de variation de  $g$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}$	$-$
$g(x)$			
	$-1$		$-1$

On montre aisément que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\frac{1}{2}$$

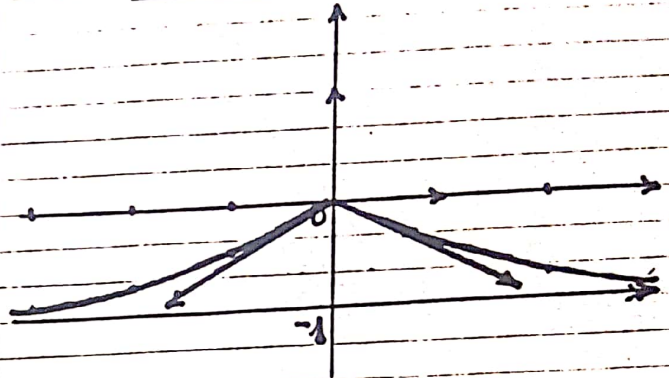
$g$  n'est donc pas dérivable en 0.

b/ Traçons la courbe (S) de  $g$  dans un plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

La courbe (S) possède une asymptote

horizontale d'équation  $y = -1$ ; de plus (S) admet deux demi-tangentes au point d'abscisse 0.

Construction de la courbe (S)



2/a/ Montrons qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que, pour tout  $x$  réel strictement positif on a :

$$g(x) = \frac{ae^x}{1 + e^x} + b$$

$$\forall x > 0, g(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = \frac{1 + e^x - 2e^x}{1 + e^x}$$

$$g(x) = \frac{-2e^x}{1 + e^x} + 1$$

Par identification on a :

$a = -2$	$b = 1$
----------	---------

b/ Soit  $\lambda$  un réel tel que :  $0 < \lambda$  et  $(E_\lambda)$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan vérifiant  $0 \leq x \leq \lambda$  et  $-1 \leq y \leq g(x)$   
 Calculons l'aire  $A$  de l'ensemble  $(E_\lambda)$

$$A = \int_0^\lambda (g(x) + 1) dx = \int_0^\lambda \left( \frac{-2e^x}{1 + e^x} + 2 \right) dx$$

$$= \left[ -2 \ln(1 + e^x) + 2x \right]_0^\lambda$$

$$= -2 \ln(1 + e^\lambda) + 2\lambda + 2 \ln 2$$

$$A = 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln(1 + e^\lambda)$$

Calculons  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A$

$$\begin{aligned} A &= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln(1 + e^\lambda) \\ &= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln[e^\lambda(1 + e^{-\lambda})] \\ &= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\ln e^\lambda - 2\ln(1 + e^{-\lambda}) \\ &= 2\ln 2 + 2\lambda - 2\lambda - 2\ln(1 + e^{-\lambda}) \\ A &= 2\ln 2 - 2\ln(1 + e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2\ln 2 - 2\ln(1 + e^{-\lambda}) \\ &= 2\ln 2 \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-\lambda}) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A = 2\ln 2$$

PROBLEME N°15

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2cm)

PARTIE A

Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

1/ Déterminons les limites de la fonction  $g$  en 0 et en  $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2\ln(x+1) - 2\ln x - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \\ &= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln 1 = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

2/ a/ Dressons le tableau de variation de  $g$ .

Dérivée

$x \mapsto \frac{1}{x+1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  donc dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

$x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  car  $x \mapsto \frac{x+1}{x}$  est dérivable et strictement positive sur  $]0; +\infty[$ .

$g$  est donc dérivable sur  $]0; +\infty[$  et

$$\begin{aligned} \forall x > 0, g'(x) &= \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-2(x+1) + x}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, g'(x) = -\frac{x+2}{x(x+1)^2}$$

Sens de variation

$$\forall x > 0, \begin{cases} x+2 > 0 \\ x(x+1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow g'(x) < 0$$

$g$  est donc strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $g$ 

$x$	0	$+\infty$
$g(x)$		—
$g(x)$	$+\infty$	$0$

b/ Déduisons - en le signe de  $g(x)$   
D'après le tableau de variation de  $g$  on a:

$$\forall x > 0, g(x) > 0$$

## PARTIE B

1/ a/ Démontrons que  $f$  est continue en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x+1) - x^2 \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x+1) - x \cdot x \ln x \\ &= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+1) = \ln 1 = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0).$$

La fonction est donc continue en 0.

b/ Démontrons que  $f$  est dérivable en

$$0 \text{ et } f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x+1) - x \ln x \\ &= 0 \times \ln 1 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ou } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

La fonction  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$

Précisons la tangente à  $(C)$  à l'origine  
du repère

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0;$$

La courbe  $(C)$  admet à l'origine du repère une tangente horizontale.

2/ a/ Calculons  $f'(x)$  pour  $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x(x+1)} \cdot x^2 \\ &= 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{x}{x+1} \\ &= x \left[ 2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right] \end{aligned}$$

$$f'(x) = x g(x) \text{ pour } x > 0$$

b/ Déduisons - en le sens de variation  
de la fonction  $f$ .

D'après A/ 1. b on a:  $\forall x > 0, g(x) > 0$   
 $\Leftrightarrow x g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$  pour tout  $x > 0$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ .

3/ a/ Calculons la limite en  $+\infty$  de  $f$

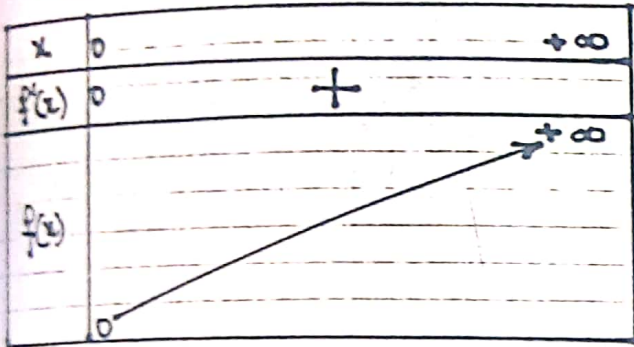
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} \ln(1+t), \quad t = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \cdot \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b/ Dressons le tableau de variation de  $f$



c/ On pose  $h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$   
pour  $x > 0$  et  $I(x) = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt$

a/ Calculons  $I(x)$

$$I(x) = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt$$

$$= \left[ \ln(1+t) - t + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{1/2}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$$

$$I(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Vérifions que  $h(x) = x^2 I(x)$

$$h(x) = f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= x^2 \left[ \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$h(x) = x^2 I(x)$$

b/ Démontrons que pour  $t > 0$ ,

$$0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2$$

On sait que:  $\frac{1}{1+t} - 1+t = \frac{t^2}{t+1}$

$$0 < t \Rightarrow 1+t > 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{1+t} < 1 \text{ car la}$$

fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  est décroissante sur  $]0; +\infty[$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2 \text{ car } t^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2$$

Conclusion:

$$\text{Pour tout } t > 0, 0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2$$

c/ Dédoublons-en que:  $0 \leq I(x) \leq \frac{1}{3x^3}$

$$0 \leq \frac{1}{1+t} - 1+t \leq t^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt \leq \int_0^{1/2} t^2 dt$$

$$\text{or } \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1+t} - 1+t\right) dt = I(x)$$

$$\text{et } \int_0^{1/2} t^2 dt = \left[ \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{1/2} = \frac{1}{3x^3}$$

$$\text{d'où } 0 \leq I(x) \leq \frac{1}{3x^3}$$

d/ Déterminons la limite en  $+\infty$  de  $h(x)$

$$0 \leq I(x) \leq \frac{1}{3x^3} \Leftrightarrow 0 \leq x^2 I(x) \leq \frac{1}{3x}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq h(x) \leq \frac{1}{3x} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x} = 0$$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  d'après le théorème des Gendarmes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

Déterminons le signe de  $h(x)$

$$\forall x > 0, h(x) \geq 0$$

e/ Soit (D) la droite d'équation

$$y = x - \frac{1}{2}$$

Déterminons ce que représente (D) pour (C)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

La droite (D) d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  est asymptote oblique à la courbe (C) en  $+\infty$

f/ Position relative de (C) par rapport à la droite (D)

On sait que pour tout  $x > 0$ ,  $h(x) > 0$

$$\Leftrightarrow f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) > 0$$

La courbe (C) est au dessus de la droite (D).

## PARTIE C

1/ Construction de (C) et (D).

(Voir page suivante)

2/ Pour  $0 < \lambda \leq 1$ , on pose  $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$

a/ Calculons  $A(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx = \int_{\lambda}^1 x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow u'(x) = \frac{-1}{x(x+1)}$$

$$v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3} x^3$$

$$A(\lambda) = \left[ \frac{1}{3} x^3 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \right]_{\lambda}^1 + \frac{1}{3} \int_{\lambda}^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} \int_{\lambda}^1 \left(\frac{1}{x+1} - 1 + x\right) dx$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \frac{1}{3} \left[ \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right]_{\lambda}^1$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left( \ln(1+\lambda) - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right)$$

$$A(\lambda) = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left[ \lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) + \ln(1+\lambda) - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} \right]$$

3/ Calculons  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^3 \ln\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^3 \ln(\lambda+1) - \lambda^2 \cdot \lambda \ln \lambda$$

$$= 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \ln(1+\lambda) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow 0} -\lambda + \frac{1}{2} \lambda^2 = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{2}$$

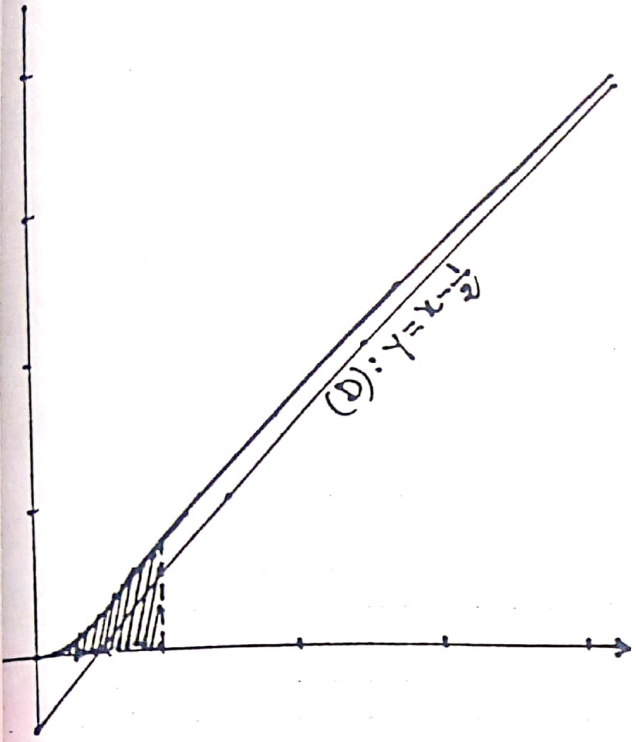
b/ Déduisons-en l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie  $\Delta$  du plan limitée par (C), l'axe des abscisses, les droites d'équation

$$x=0 \text{ et } x=1$$

Soit  $S$  cette aire on a:

$$S = \left( \lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

$$S = \left( \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \text{ cm}^2 \approx 1,84 \text{ cm}^2$$



PROBLEME N°16

On considère la fonction  $f_1(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2}$  et  $(C_1)$  sa courbe représentative.

PARTIE A

1/ Etude de la fonction  $f_1$

a/ Calculons les limites de  $f_1$  en 0 et en  $+\infty$

$f_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad \text{D}_{f_1} = ]0; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln x$   
 $= -\infty$  car  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{array} \right.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$  car  $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array} \right.$

$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$
---	---

Déduction pour la courbe  $(C_1)$

La courbe  $(C_1)$  possède deux asymptotes dont une verticale d'équation  $x=0$  et une asymptote horizontale d'équation  $y=0$

b/ Etudions le sens de variation de  $f_1$  et dressons son tableau de variation

$f_1$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0,$

$f_1'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$

$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow x = \sqrt{e}$

$\forall x > 0, x^3 > 0$ ;  $f_1'(x)$  a donc le signe de  $1 - 2 \ln x$ .

Signe de  $f_1'(x)$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	-

Sens de variation de  $f_1$

$\forall x \in ]0; \sqrt{e}[, f_1'(x) > 0$ ;  $f_1$  est donc croissante sur  $]0; \sqrt{e}[$

$\forall x \in ]\sqrt{e}; +\infty[, f_1'(x) < 0$ ;  $f_1$  est donc décroissante sur  $]\sqrt{e}; +\infty[$ .

$f_1$  admet un maximum local au point  $\sqrt{e}$

$$f_1(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$$

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0
$f_1(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

2/ Etude de la fonction  $f_2$  pour  $n=2$

$$f_2(x) = \frac{(\ln x)^2}{x^2} \quad \mathcal{D}f_2 = ]0; +\infty[$$

a/ Calculons les limites de  $f_2$  en 0 et en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \ln x \right)^2$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)^2$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$
---	---

Déduction pour la courbe  $(C_2)$

La courbe  $(C_2)$  possède deux asymptotes dont une verticale d'équation  $x=0$  et une horizontale d'équation  $y=0$

b/ Etudions le sens de variation de  $f_2$  et dressons son tableau de variation

$f_2$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0$ ,

$$f_2'(x) = \frac{(2 \cdot \frac{1}{x} \ln x)x^2 - 2x(\ln x)^2}{x^4}$$

$$f_2'(x) = \frac{2(1 - \ln x) \ln x}{x^3}$$

$\forall x > 0, x^3 > 0$ ;  $f_2'(x)$  a donc le signe de  $(1 - \ln x) \ln x$ .

$$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \text{ ou } \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ ou } x = 1$$

$$f_2(e) = \frac{1}{e^2}; f_2(1) = 0$$

Signe de  $f_2'(x)$

$x$	0	1	e	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+
$1 - \ln x$		+	+	0
$f_2'(x)$		-	0	-

Sens de variation de  $f_2$

$\forall x \in ]0; 1[ \cup ]e; +\infty[, f_2'(x) < 0$

$f_2$  est donc décroissante sur  $]0; 1[$  et sur  $]e; +\infty[$

$\forall x \in ]1; e[, f_2'(x) > 0$ ;  $f_2$  est donc croissante sur  $]1; e[$

$f_2$  admet un minimum local au point 1 et un maximum local au point e

Tableau de variation de  $f_{1/2}$

$x$	0	1	e	$+\infty$
$f'_{1/2}(x)$		0	0	
$f_{1/2}(x)$	$+\infty$		$\frac{1}{e^2}$	0

3/a/ Position relative des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

Posons  $d(x) = f_2(x) - f_1(x)$

$$= \frac{(\ln x)^2}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$$

$$d(x) = \frac{(\ln x - 1) \ln x}{x^2}$$

$\forall x > 0, x \neq 0; d(x)$  a donc le signe de  $(\ln x - 1) \ln x$ .

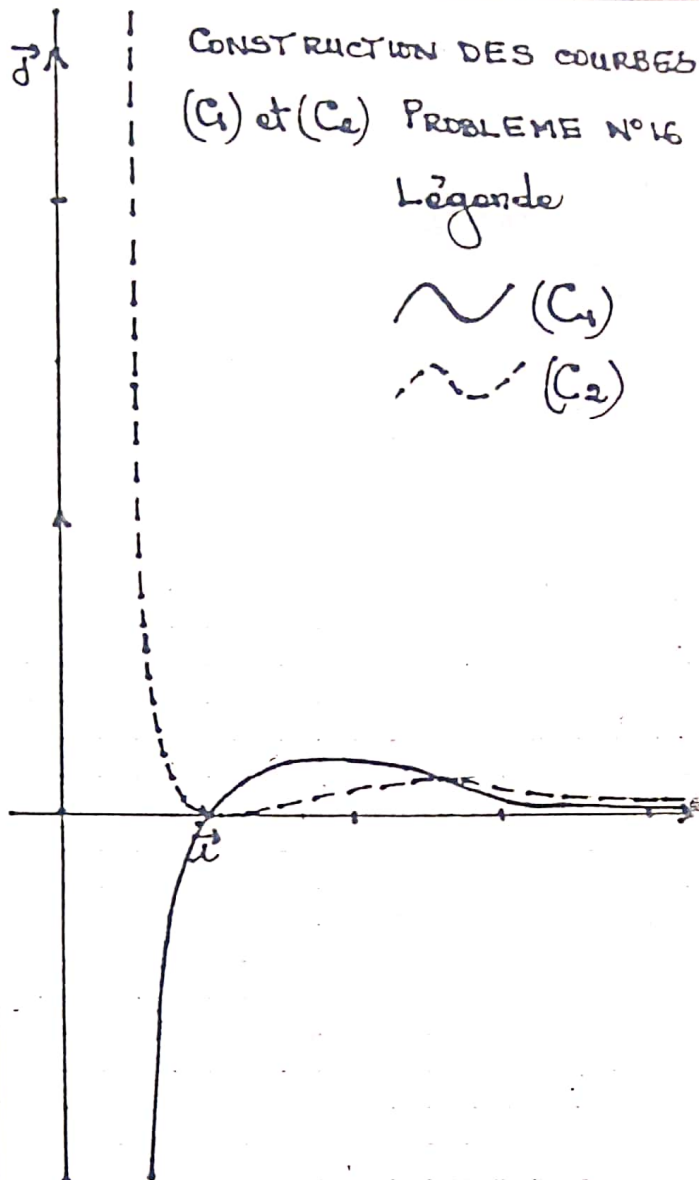
Remarque :  $d(x)$  a le signe de  $-f'_{1/2}(x)$

Résumons les résultats dans le tableau

ci-dessous

$x$	0	1	e	$+\infty$		
$d(x)$		+	0	-	0	+
Posit- relative de $(C_1)$ et $(C_2)$		$(C_2)$ est au dessus de $(C_1)$	$(C_2)$ est en dessous de $(C_1)$	$(C_2)$ est au dessus de $(C_1)$		

b/ Construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  dans le même repère (voir figure ci-contre)



PARTIE B: Cas général

1/ Montrons que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par deux points fixes A et B dont nous préciserons les coordonnées

$$\forall n \geq 1, f_n(1) = \frac{(\ln 1)^n}{1^2} = \frac{0^n}{1} = 0$$

$$f_n(e) = \frac{(\ln e)^n}{e^2} = \frac{1^n}{e^2} = \frac{1}{e^2}$$

Conclusion

Toutes les courbes  $(C_n)$  passent par deux points fixes A(1; 0) et B(e; 1/e^2)

2/ Etudions suivant la parité de  $n$ , les variations de  $f_n$   
 $\forall n > 1, \mathcal{D}f_n = ]0; +\infty[$   
 limites de  $f_n$  aux bornes de  $\mathcal{D}f_n$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (\ln x)^n$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$\forall n > 1$  on a:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{2x}} \text{ avec } x = \ln x$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(nt)^n}{e^{2nt}} \text{ avec } t = \frac{x}{n}$$

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} n^n \left(\frac{t}{e^t}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{e^t}\right)^n$$

$$= n^n \times 0^n \times 0^n = 0$$

Pour tout  $n > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

Dérivée

Pour tout  $n > 1, f_n$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $\forall x > 0$ , on a:

$$f'_n(x) = \frac{n \cdot \frac{1}{x} (\ln x)^{n-1} \cdot x^2 - 2x (\ln x)^n}{x^4}$$

$$f'_n(x) = \frac{(n - 2 \ln x) (\ln x)^{n-1}}{x^3}$$

1er cas  $n$  impair

$n$  impair  $\Rightarrow n-1$  pair  
 $\forall x > 0, x^3 > 0$  et  $(\ln x)^{n-1} \geq 0$

$f'_n(x)$  a donc le signe de  $n - 2 \ln x$ .  
 $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{n/2}$  ou  $x = 1$

Signe de  $f'_n(x)$

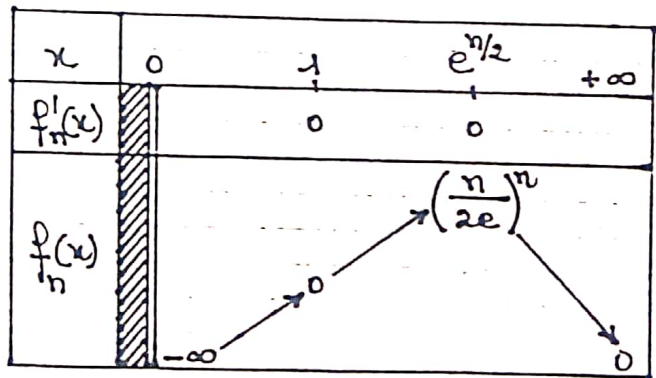
$x$	0	1	$e^{n/2}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0	+
			0	-

$\mathcal{D}$  après le tableau précédent,  $f_n$  est croissante sur  $]0; e^{n/2}[$  et décroissante sur  $]e^{n/2}; +\infty[$   
 $f_n$  admet un maximum local en  $e^{n/2}$

$$f_n(1) = 0; f_n(e^{n/2}) = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

Tableau de variation de la fonction

$f_n$  pour  $n$  impair



Deuxième cas:  $n$  pair

$\forall x > 0, x^3 > 0$ .

$n$  pair  $\Leftrightarrow n-1$  impair.

$f'_n(x)$  a le signe de  $(n - 2 \ln x) (\ln x)^{n-1}$

Signe de  $f'_n(x)$

$x$	0	1	$e^{n/2}$	$+\infty$
$(\ln x)^{n-1}$		-	0	+
$n - 2 \ln x$		+	+	0
$f'_n(x)$		-	0	-

Sens de variation de  $f_n$   
 $\forall x \in ]0; 1[ \cup ]e^{n/2}; +\infty[$ ,  $f'_n(x) < 0$   
 $f_n$  est décroissante sur  $]0; 1[$  et sur  $]e^{n/2}; +\infty[$

$\forall x \in ]1; e^{n/2}[$ ,  $f'_n(x) > 0$ ;  $f_n$  est croissante sur  $]1; e^{n/2}[$

$f_n$  admet un minimum local au point 1 et un maximum local au point  $e^{n/2}$

Tableau de variation de  $f_n$  pour n pair

$x$	0	1	$e^{n/2}$	$+\infty$		
$f'_n(x)$		-	0	+	0	-
$f_n(x)$		$+\infty$	0	$\frac{(n-1)^n}{2e}$	0	$0$

3/ Position relative des courbes

$(C_n)$  et  $(C_{n+1})$

Posons  $d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$d_n(x) = \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2}$$

$$d_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e$$

1<sup>er</sup> cas n impair

$x$	0	1	e	$+\infty$		
$d_n(x)$		+	0	-	0	+
Posit° relative de $(C_n)$ et $(C_{n+1})$		$(C_{n+1})$ est au dessus de $(C_n)$	$(C_{n+1})$ est en dessous de $(C_n)$	$(C_{n+1})$ est au dessus de $(C_n)$		
		$(C_{n+1})$ coupe $(C_n)$	$(C_{n+1})$ coupe $(C_n)$			

2<sup>e</sup> cas n pair

$x$	0	1	e	$+\infty$		
$d_n(x)$		-	0	-	0	+
Posit° relative de $(C_n)$ et $(C_{n+1})$		$(C_{n+1})$ est en dessous de $(C_n)$	$(C_{n+1})$ est en dessous de $(C_n)$	$(C_{n+1})$ est au dessus de $(C_n)$		
		$(C_{n+1})$ coupe $(C_n)$	$(C_{n+1})$ coupe $(C_n)$			

PARTIE C

On considère la suite  $(I_n)$  pour tout entier naturel n non nul définie par:

$$I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

a/ Montrons que pour tout n entier naturel non nul,  $I_n \geq 0$

$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$  car  $x \mapsto \ln x$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$  car  $x \mapsto x^n$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$  car  $x^2 > 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$  soit  $I_n \geq 0$

$$\forall n \geq 1, I_n \geq 0$$

b/ Sens de variation de  $(I_n)$ .

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx - \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx = \int_1^e \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2} dx$$

$$\forall x \in ]1; e], \begin{cases} \ln x - 1 \leq 0 \\ (\ln x)^n \geq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \int_1^e \frac{(\ln x - 1)(\ln x)^n}{x^2} dx \leq 0$$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

La suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante

Convergence de  $(I_n)$

$$\begin{cases} I_n \geq 0 \Rightarrow (I_n) \text{ minorée} \\ (I_n) \text{ décroissante} \end{cases}$$

$(I_n)$  est minorée et décroissante donc  
 $(I_n)$  est convergente

2/ a/ Calculons  $I_1$

$$I_1 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$$

$$\text{Posons } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$I_1 = \left[ -\frac{1}{x} \ln x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1$$

$$\boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

b/ Montrons, en utilisant la méthode d'intégration par parties, que pour

$$\text{tout } n \geq 1, I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

$$I_{n+1} = \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx = \int_1^e \frac{1}{x^2} (\ln x)^{n+1} dx$$

$$\text{Posons } u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$I_{n+1} = \left[ -\frac{1}{x} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e + (n+1) \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

$$\forall n \geq 1, I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

Déduisons-en la valeur de  $I_2$

$$I_2 = -\frac{1}{e} + 2 I_1 = -\frac{1}{e} + 2 \left( 1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$\boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

3/ Calculons en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A$  du domaine plan délimité par les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  et les droites d'équations:  $x=1$  et  $x=e$

$$A(\text{cm}^2) = 20 \left[ \int_1^e \left( f_1(x) - f_2(x) \right) dx \right]$$

$$= 20 (I_1 - I_2)$$

$$= 20 \left( 1 - \frac{2}{e} - 2 + \frac{5}{e} \right)$$

$$\boxed{A(\text{cm}^2) = 20 \left( \frac{3}{e} - 1 \right)}$$

4/ En utilisant les résultats de la question C-2-b, montrons par récurrence que:

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$I_1 = 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1!} I_1 = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} \right)$$

Supposons que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \text{ et}$$

montrons que:

$$\frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\Leftrightarrow I_n = n! \left[ 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

$$= -\frac{1}{e} + (n+1) n! \left[ 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{e} + (n+1)! \left[ 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} (I_{n+1} + \frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)!} I_{n+1} = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

Conclusion

$$\forall n \geq 1, \frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$$

5. a/ Montrons que  $0 \leq I_n \leq 1$

$$1 \leq x \leq e \Leftrightarrow 0 \leq \ln x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx \leq \int_1^e \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^e = 1 - \frac{1}{e} < 1$$

Conclusion:

$$\forall n \geq 1, 0 \leq I_n \leq 1$$

b/ Montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$

$$0 \leq I_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} I_n \leq \frac{1}{n!}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \text{ d'où}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$  d'après le théorème des Gendarmes.

Déduisons-en la valeur de:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} I_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = e$$

## PROBLEME N°17

On considère les fonctions  $f_a$  définies pour tout réel  $x$  non nul par:

$$f_a(x) = \frac{a}{x} + \ln x^2 \text{ où } a \text{ désigne un paramètre réel. On appelle } (C_a) \text{ la}$$

courbe représentative de  $f_a$  dans le plan muni d'un repère orthonormé

$$(O, \vec{i}, \vec{j})$$

1/ a/ Etudions la fonction  $f_0$

$$f_0(x) = \ln x^2 = 2 \ln |x|$$

$$\mathcal{D}f_0 = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \ln|x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln x, \quad x = |x|$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln|x|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \ln x, \quad x = |x|$$

$$= -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} f_0(x) = -\infty$

Derivée

$x \mapsto |x|$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \neq 0, |x| > 0$ .

De plus  $x \mapsto \ln x$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$

La fonction  $f_0$  est donc continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \neq 0, f_0'(x) = \frac{2}{x}$

Sens de variation de  $f_0$

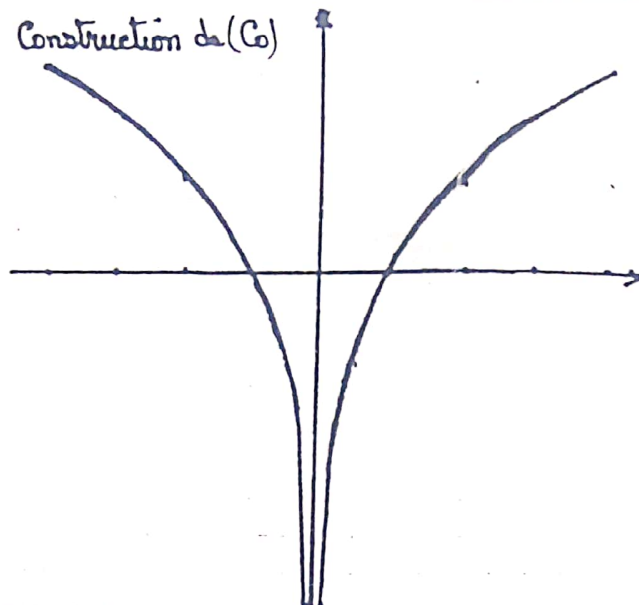
$\forall x < 0, f_0'(x) < 0$ ;  $f_0$  est donc décroissante sur  $]-\infty; 0[$

$\forall x > 0, f_0'(x) > 0$ ;  $f_0$  est donc croissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_0$

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$	
$f_0'(x)$		-	0	+		
$f_0(x)$	$+\infty$	↘		$-\infty$	↗	

Construction de  $(C_0)$



2/ a est différent de 0

a/ Comparaison  $f_{-a}(-x)$  et  $f_a(x)$

$$f_{-a}(-x) = \frac{-a}{-x} + \ln x^2 = \frac{a}{x} + \ln x^2 = f_a(x)$$

$$f_{-a}(-x) = f_a(x)$$

b/ Déduisons-en une transformation géométrique entre les courbes  $(C_a)$  et  $(C_{-a})$

$f_{-a}(-x) = f_a(x)$  nous permet de dire que les courbes  $(C_a)$  et  $(C_{-a})$  sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.  $(C_{-a})$  Sym  $(C_a)$

3/ a/ Calculons les dérivées

première et seconde de  $f_a$

$$\forall x \neq 0, f_a'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{2}{x}$$

$$\forall x \neq 0, f_a'(x) = \frac{2x-a}{x^2}$$

$$\forall x \neq 0, f_a''(x) = \frac{2x^2 - 2x(2x-a)}{x^4}$$

$$\forall x \neq 0, f_a''(x) = \frac{2(a-x)}{x^3}$$

b/ Calculons la limite en 0 de  $f_a$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} + \ln x^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} + 2 \ln |x| \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} + 2 \ln(-x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{a}{x} + 2 \ln x, \quad x = -x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a + 2x \ln x}{x} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 0 \\ -\infty & \text{si } a > 0 \end{cases} \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a < 0 \\ -\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + 2x \ln x}{x} \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a < 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}$$

c/ Etude des variations de  $f_a$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x} + \ln x^2 \\ &= +\infty \left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$$

Signe de  $f'_a(x)$ .

$\forall x \neq 0, x^2 > 0$ ;  $f'_a(x)$  a le signe de  $2x - a$   
 $f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

Tableau de variation de  $f_a$

$$f_a\left(\frac{a}{2}\right) = 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$$

1<sup>er</sup> cas  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$\frac{a}{2}$	$0$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	0	+	+
$f_a(x)$	$+\infty$		$2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$	$+\infty$

2<sup>e</sup> cas  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{a}{2}$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	-	0	+
$f_a(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)$	$+\infty$

d/ Précisons les points d'inflexion des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

$$f_1(x) = \frac{1}{x} + \ln x^2 \quad f_1''(x) = \frac{2(1-x)}{x^2}$$

$$f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; \quad f_1(1) = 1$$

$$f_2(x) = \frac{2}{x} + \ln x^2 \quad f_2''(x) = \frac{2(2-x)}{x^2}$$

$$f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2; \quad f_2(2) = 1 + 2 \ln 2$$

Soit  $I_1$  le point d'inflexion de  $(C_1)$  et  $I_2$  celui de  $(C_2)$  on a:

$I_1(1; 1)$	$I_2(2; 1+2\ln 2)$
-------------	--------------------

Déterminons l'équation de la tangente  $(T_1)$  à  $(C_1)$  en  $I_1$  et celle de la tangente  $(T_2)$  à  $(C_2)$  en  $I_2$ .

$$f_1'(x) = \frac{2x-1}{x^2} \quad f_2'(x) = \frac{2x-2}{x^2}$$

$$f_1'(1) = 1 \quad f_2'(2) = \frac{1}{2}$$

$(T_1): y = x$	$(T_2): y = \frac{1}{2}x + 2\ln 2$
----------------	------------------------------------

Construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

Branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}, x = -x$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^2} + \frac{2\ln x}{x}$$

$$= 0$$

Les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  admettent une branche infinie de direction  $(Ox)$  et une asymptote verticale d'équation  $x = 0$

Pour la construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  voir figure à page suivante

4/ Soit  $S_a$  le point de  $(C_a)$  où la tangente est parallèle à l'axe  $(Ox)$

a/ Déterminons l'ensemble des points

Soit lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}^*$

$$S_a\left(\frac{a}{2}; 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2x, x \neq 0 \\ y = 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right) \\ y = 2 + \ln x^2, x \neq 0 \end{cases}$$

Lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}^*$ ,  $S_a$  décrit la courbe  $(\Gamma)$  d'équation  $y = 2 + \ln x^2, x \neq 0$

b/ Montrons que  $(\Gamma)$  se déduit simplement de  $(C_0)$ .

$$y = 2 + \ln x^2 = \frac{f_1(x)}{x} + 2$$

$(\Gamma)$  est l'image de  $(C_0)$  dans la translation de vecteur  $2\vec{j}$

c/ Déterminons l'ensemble  $(\Gamma')$  des points d'inflexion de  $(C_a)$

Soit  $I_a$  le point d'inflexion de  $(C_a)$  on a:  $I_a(a; 1 + \ln a^2)$

$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 + \ln a^2 \Rightarrow y = 1 + \ln x^2, x \neq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points d'inflexion de  $(C_a)$  est la courbe  $(\Gamma')$  d'équation

$$y = 1 + \ln x^2, x \neq 0$$

$(\Gamma') = t_{\vec{j}}(C_0) = t_{\vec{j}}(\Gamma)$
--

Soit  $I_1$  le point d'inflexion de  $(C_1)$  et  $I_2$  celui de  $(C_2)$  on a:

$I_1(1; 1)$	$I_2(2; 1+2\ln 2)$
-------------	--------------------

Déterminons l'équation de la tangente  $(T_1)$  à  $(C_1)$  en  $I_1$  et celle de la tangente  $(T_2)$  à  $(C_2)$  en  $I_2$ .

$$f'_1(x) = \frac{2x-1}{x^2} \quad f'_2(x) = \frac{2x-2}{x^2}$$

$$f'_1(1) = 1 \quad f'_2(2) = \frac{1}{2}$$

$(T_1): y = x$	$(T_2): y = \frac{1}{2}x + 2\ln 2$
----------------	------------------------------------

Construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

Branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^2} - \frac{2\ln x}{x}, x = -x$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^2} + \frac{2\ln x}{x}$$

$$= 0$$

Les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  admettent une branche infinie de direction  $(Ox)$  et une asymptote verticale d'équation  $x=0$

Pour la construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  voir figure à page suivante

4/ Soit  $S_a$  le point de  $(C_a)$  où la tangente est parallèle à l'axe  $(Ox)$

a/ Déterminons l'ensemble des points

Soit lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}^*$

$$S_a\left(\frac{a}{2}; 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right)\right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2x, x \neq 0 \\ y = 2 + \ln\left(\frac{a^2}{4}\right) \\ y = 2 + \ln x^2, x \neq 0 \end{cases}$$

Lorsque  $a$  décrit  $\mathbb{R}^*$ ,  $S_a$  décrit la courbe  $(\Gamma)$  d'équation  $y = 2 + \ln x^2, x \neq 0$

b/ Montrons que  $(\Gamma)$  se déduit simplement de  $(C_0)$ .

$$y = 2 + \ln x^2 = f_0(x) + 2$$

$(\Gamma)$  est l'image de  $(C_0)$  dans la translation de vecteur  $2\vec{j}$

c/ Déterminons l'ensemble  $(\Gamma')$  des points d'inflexion de  $(C_a)$

Soit  $I_a$  le point d'inflexion de  $(C_a)$  on a:  $I_a(a; 1 + \ln a^2)$

$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 + \ln a^2 \Rightarrow y = 1 + \ln x^2, x \neq 0 \end{cases}$$

L'ensemble des points d'inflexion de  $(C_a)$  est la courbe  $(\Gamma')$  d'équation

$$y = 1 + \ln x^2, x \neq 0$$

$(\Gamma') = t_{\vec{j}}(C_0) = t_{\vec{j}}(\Gamma)$
--

5/ a/ Equation de la tangente (T) à la courbe (C<sub>1</sub>) au point d'abscisse x<sub>1</sub>

$$(T): y = f'_1(x_1)(x - x_1) + f_1(x_1)$$

$$= \frac{2x_1 - 1}{x_1^2}(x - x_1) + \frac{1}{x_1} + \ln x_1^2$$

$$= \left(\frac{2x_1 - 1}{x_1^2}\right)x - 2 + \frac{2}{x_1} + \ln x_1^2$$

$$= \left(\frac{2x_1 - 1}{x_1^2}\right)x + 2 + \frac{f_1(x_1)}{2}$$

1. Soit (u). Equation déterminant les abscisses des points de contact des tan-

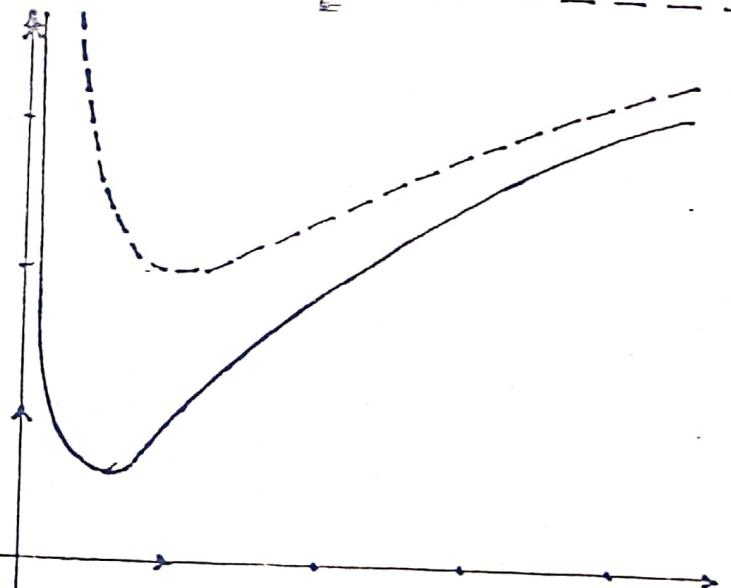
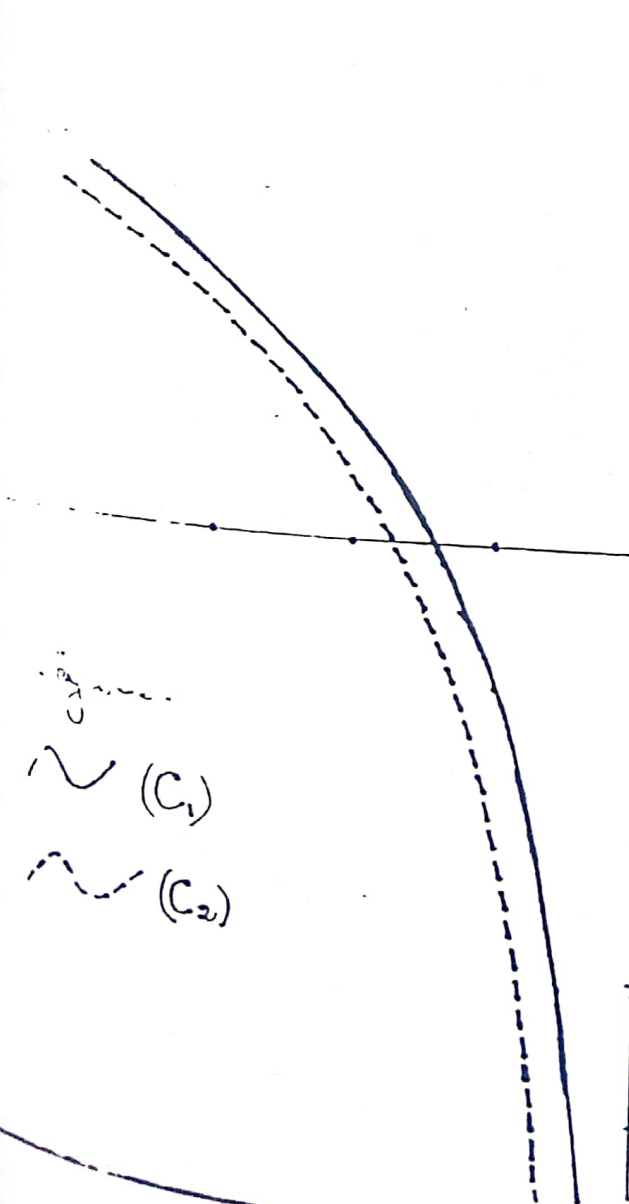
gantes à (C<sub>1</sub>) passant U

$$U \in (T) \Leftrightarrow u = \frac{2x_1 - 1}{x_1^2}x_0 + 2 + \frac{f_1(x_1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{f_1(x_1)}{2} = u - 2}$$

c/ Etudions suivant la position du point U le nombre de tangente à (C<sub>1</sub>) passant par U

Le nombre de tangente à (C<sub>1</sub>) passant par U est le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x<sub>1</sub> :  $\frac{f_1(x_1)}{2} = u - 2$   
C'est donc le nombre de points d'intersection de la courbe (C<sub>2</sub>) avec la droite d'équation y = u - 2



Résumons les résultats dans le tableau ci dessous

u	-∞	4	+∞
nombre de tangente à (C <sub>1</sub> ) passant par U	1	2	3

PROBLEME N°18

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-e; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x + (x+e) \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2, x \geq -e \\ f(-e) = -e. \end{cases}$$

Soit  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ .

PARTIE A

1/ a/ Démontrons que  $\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0$

Posons  $x = \ln x$ .

si  $x \rightarrow 0$  alors  $x \rightarrow -\infty$ ;  $x = e^x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4t^2 e^{-2t}, \quad t = -\frac{x}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left( \frac{t}{e^t} \right)^2 = 4 \times 0^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x(\ln x)^2 = 0}$$

b/ Calcul de la limite de  $f$  en  $-e$ .

$$\lim_{x \rightarrow -e} f(x) = \lim_{x \rightarrow -e} x + (x+e) \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow -e} (x+e) \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \ln\left(\frac{x}{e}\right) \right)^2 \text{ avec } x = x+e$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} et(\ln t)^2 = e \times 0 = 0; \quad t = \frac{x}{e}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -e} (x+e) \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2 = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -e} f(x) = -e}$$

Continuité de  $f$  en  $-e$

$$\lim_{x \rightarrow -e} f(x) = -e = f(-e)$$

Conclusion :

$f$  est continue en  $-e$ .

c/ Etude de la dérivabilité de  $f$  au point  $-e$

$$\lim_{x \rightarrow -e} \frac{f(x) - f(-e)}{x + e}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -e} \frac{1}{x+e} \left( x+e + (x+e) \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -e} 1 + \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + (\ln x - 1)^2$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -e} \frac{f(x) - f(-e)}{x + e} = +\infty}$$

Conclusion

$f$  n'est pas dérivable au point  $-e$ .

2/ Sens de variation de  $f$

$f$  est dérivable sur  $]-e; +\infty[$  et

$\forall x > -e,$

$$f'(x) = 1 + \left[ \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) \right]^2 + 2(x+e) \cdot \frac{1}{x+e} \ln\left(\frac{x+e}{e}\right)$$

$\forall x > -e, f'(x) = 1 + 2 \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) + \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$\forall x > -e, f'(x) = \left[1 + \ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+e}{e}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \frac{x+e}{e} = \frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow x+e = -1 \Leftrightarrow x = -1-e$

$\forall x > -e, f'(x) \geq 0$

$f$  est donc croissante sur  $[-e; +\infty[$

Présentons le tableau de variation de  $f$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + (x+e) \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} -e + x + x(\ln x - 1)^2$   
 $= +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$f(-e) = -1-e + \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2 = 2-e$

Tableau de variation de  $f$

$x$	$-e$	$-1-e$	$+\infty$
$f'(x)$		$0$	$+$
$f(x)$	$2-e$		$+\infty$

3/ Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0

$(T): y = f'(0) \cdot x + f(0)$   
 $f'(0) = 1 \quad f(0) = 0$

$(T): y = x$

4/ Construction de (T) et (C)

Branches infinies

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x+e}{x} \left[\ln\left(\frac{x+e}{e}\right)\right]^2$

$= +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+e}{e} = +\infty$

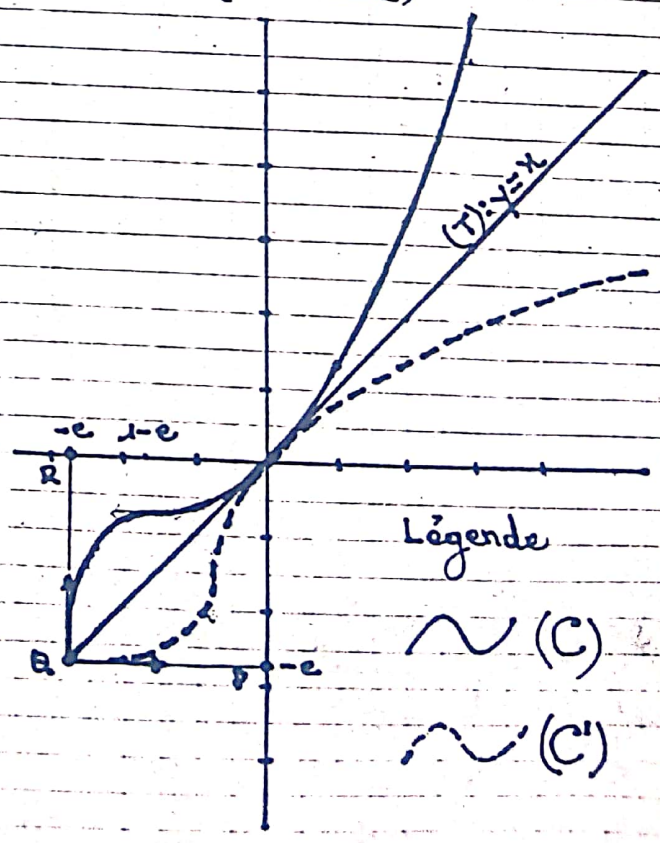
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- La courbe (C) possède une branche asymptotique de direction (Oy).

- Rappelons que la courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse  $-e$ .

Tracer de T et (C)



5/a/ Démontrons que  $f$  est une bijection sur un intervalle  $J$  que nous précisons  
 D'après le tableau précédent,  $f$  est continue, monotone strictement croissante sur  $[-e; +\infty[$  avec :

$$\lim_{x \rightarrow -e} f(x) = -e \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$f$  définit donc une bijection de  $[-e; +\infty[$  sur  $[-e; +\infty[$

Soit  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$  et  $(C')$  sa courbe.

b/ Traçons  $(C')$  dans le même repère que  $(C)$  (voir figure)

Rappelons que  $(C')$  est l'image de  $(C)$  dans la symétrie orthogonale d'axe la 1<sup>ère</sup> bissectrice (la droite d'équation  $y=x$ )

c/ Déterminons l'ensemble sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable.

$$\forall x \in ]-e; 2-e[ \cup ]2-e; +\infty[ ,$$

$$f^{-1}(x) \in ]-e; 1-e[ \cup ]1-e; +\infty[$$

$$\text{or } \forall x \in ]-e; +\infty[ - \{1-e\}, f'(x) > 0$$

$f^{-1}$  est donc dérivable sur  $]-e; +\infty[ - \{2-e\}$

$(C)$  admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse  $-e$ ; on en déduit

que  $(C')$  admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse  $-e$

$f^{-1}$  est donc dérivable en  $-e$

- D'une manière analogue, on montre que  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en  $2-e$ .

Conclusion

L'ensemble sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable est  $]-e; 2-e[ \cup ]2-e; +\infty[$

PARTIE B

Soit  $\alpha$  un nombre réel tel que :

$$-e < \alpha < 0. \text{ On pose } J(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx.$$

1/ Pour tout entier naturel  $n$ , on désigne par  $I_n(\alpha)$  l'intégrale définie par :

$$I_n(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (x+e) [\ln(x+e)]^n dx.$$

a/ A l'aide d'une intégration par parties exprimons  $I_n(\alpha)$  en fonction de  $I_{n-1}(\alpha)$

$$\text{Posons } U(x) = [\ln(x+e)]^n$$

$$\Rightarrow U'(x) = \frac{n}{x+e} [\ln(x+e)]^{n-1}$$

$$V'(x) = x+e \Rightarrow V(x) = \frac{1}{2} (x+e)^2$$

$$I_n(\alpha) = \left[ \frac{1}{2} (x+e)^2 [\ln(x+e)]^n \right]_{\alpha}^0 - \frac{n}{2} \int_{\alpha}^0 (x+e) [\ln(x+e)]^{n-1} dx$$

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} (\alpha+e)^2 [\ln(\alpha+e)]^n - \frac{n}{2} I_{n-1}(\alpha)$$

b/ Calculons  $I_0(\alpha)$  puis  $I_1(\alpha)$  et  $I_2(\alpha)$

$$I_0(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (x+e) dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 + ex \right]_{\alpha}^0$$

$$= -\frac{1}{2} \alpha^2 - e\alpha = -\frac{1}{2} \alpha(\alpha+2e)$$

$$I_0(\alpha) = -\frac{1}{2} \alpha(\alpha+2e)$$

$$\begin{aligned}
 I_1(\alpha) &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} (\alpha + e)^2 \ln(\alpha + e) - \frac{1}{2} I_0(\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} (\alpha + e)^2 \ln(\alpha + e) + \frac{1}{4} \alpha (\alpha + 2e) \\
 &= \frac{1}{4} \left[ \alpha^2 + 2e\alpha + 2e^2 - 2(\alpha + e)^2 \ln(\alpha + e) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[ e^2 + (\alpha + e)^2 - 2(\alpha + e)^2 \ln(\alpha + e) \right]
 \end{aligned}$$

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{4} \left[ e^2 + (\alpha + e)^2 (1 - 2 \ln(\alpha + e)) \right]$$

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} (\alpha + e)^2 [\ln(\alpha + e)]^2 - I_1(\alpha)$$

Après calcul et en posant  $\ln(\alpha + e) = \beta$

on a :

$$I_2(\alpha) = \frac{1}{4} \left[ e^2 - (\alpha + e)^2 (2\beta^2 - 2\beta + 1) \right]$$

2/ a/ Vérifions que pour tout  $x \in ]-e; +\infty[$

$$f(x) = (x + e) \left[ -1 + \ln(x + e) \right]^2 + x$$

$$\forall x > -e, f(x) = x + (x + e) \left[ \ln\left(\frac{x + e}{e}\right) \right]^2$$

$$f(x) = x + (x + e) \left[ \ln(x + e) - \ln e \right]^2; \ln e = 1$$

$$= x + (x + e) \left[ -1 + \ln(x + e) \right]^2$$

$$\forall x \in ]-e; +\infty[, f(x) = (x + e) \left[ -1 + \ln(x + e) \right]^2 + x$$

b/ Exprimons  $J(\alpha)$  en fonction de  $I_0(\alpha)$

$I_1(\alpha)$  et  $I_2(\alpha)$

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^0 f(x) dx$$

$$= \int_{\alpha}^0 (x + e) \left[ -1 + \ln(x + e) \right]^2 + x dx$$

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 \left( (x + e) \left( -1 - 2 \ln(x + e) + (\ln(x + e))^2 \right) + x \right) dx \\
 &= \int_{\alpha}^0 (x + e) dx - 2 \int_{\alpha}^0 (x + e) \ln(x + e) dx \\
 &\quad + \int_{\alpha}^0 (x + e) (\ln(x + e))^2 dx + \int_{\alpha}^0 x dx \\
 &= I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha) + I_2(\alpha) + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_{\alpha}^0
 \end{aligned}$$

$$J(\alpha) = -\frac{1}{2} \alpha^2 + I_0(\alpha) - 2I_1(\alpha) + I_2(\alpha)$$

Exprimons  $J(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$

En remplaçant  $I_0(\alpha)$ ,  $I_1(\alpha)$  et  $I_2(\alpha)$  par leur valeur on obtient

$$J(\alpha) = -\frac{7}{4} \alpha^2 - e^2 - \frac{5}{2} e\alpha + \frac{(\alpha + e)^2}{2} (3\beta - \beta^2)$$

$$\beta = \ln(\alpha + e)$$

3/ Calculons  $\lim_{\alpha \rightarrow -e} J(\alpha)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -e} \frac{1}{2} (\alpha + e)^2 (3\beta - \beta^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} x^2 (3 \ln x - (\ln x)^2), \quad x = \alpha + e$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} (x \ln x)^2 + \frac{3}{2} x (x \ln x)$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -e} -\frac{7}{4} \alpha^2 - e - \frac{5}{2} e\alpha = -\frac{1}{4} e^2$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow -e} J(\alpha) = -\frac{1}{4} e^2 \text{ d'où}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -e} -J(\alpha) = \frac{e^2}{4}$$

### Interprétation géométrique du résultat.

La valeur de cette limite est l'aire du domaine plan délimité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = -e$  et  $x = 0$ .

4/ Soient  $P, Q$  et  $R$  les points du plan de coordonnées respectives :  $(0; -e)$ ,  $(-e; -e)$  et  $(-e; 0)$ . Les courbes  $(C)$  et  $(C')$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  partagent le carré  $OPQR$  en quatre régions comme stipulé dans l'énoncé.

Comparons les aires de ces quatre parties

$A(S_2) = A(S_3)$  car les courbes  $(C)$  et  $(C')$  sont symétriques par rapport à  $(\Delta)$ .

De plus  $(\Delta)$  est la diagonale du carré

$OPQR$  donc  $A(S_1) = A(S_4)$  car  $A(S_2) = A(S_3)$

$$A(S_1) = A(S_4) = \frac{e^2}{4}$$

$$A(S_2) = A(S_3) = \frac{1}{2} \left( e^2 - \frac{2e^2}{4} \right) = \frac{e^2}{4}$$

Finalement on a :

$$A(S_1) = A(S_2) = A(S_3) = A(S_4)$$

### PROBLEME N° 19

On considère pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $f$  définie sur

$[0; 1]$  par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^2 (\ln x)^n & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### PARTIE A

1/ Soit  $p$  un entier naturel. En utilisant la limite de  $t^p e^{-t}$  lorsque  $t$

tend vers  $+\infty$ , montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^p = 0$$

On sait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^p e^{-t} = 0$

Poseons  $u = \frac{t}{p} \Leftrightarrow t = pu$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^p e^{-t} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (pu)^p e^{-pu}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} p^p (u e^{-u})^p = p^p \cdot 0^p = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^p e^{-x} = 0$$

Poseons  $x = -\ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^p = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^p e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^p x^p e^{-x} = (-1)^p \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^p = 0$$

2/ Démontrons-en que pour tout entier  $k \geq 1$ , la limite de  $x^k (\ln x)^p$

- Pour  $k = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^p = 0 \quad (\text{voir question précédente})$$

- Pour  $k > 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^k (\ln x)^p = \lim_{x \rightarrow 0} x^{k-1} x (\ln x)^p = 0 \cdot 0 = 0$$

Conclusion

Pour tout entier  $k \geq 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^k (\ln x)^k = 0$

3/ Montrons que  $f_n$  est dérivable en 0 et calculons son nombre dérivé en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (\ln x)^n = 0 \text{ d'après la question précédente.}$$

La fonction  $f_n$  est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = f_n(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x (\ln x)^n = 0$$

Conclusion

La fonction  $f_n$  est dérivable en 0 et  $f_n'(0) = 0$

PARTIE B

a/ Etudions le sens de variation de

$f_n$  sur  $[0; 1]$

$$f_n(x) = x^2 (\ln x)$$

$$f_n(0) = 0; f_n(1) = 0$$

Dérivée

$f_n$  est dérivable sur  $[0; 1]$  et pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$f_n'(x) = 2x \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^2 = x(1 + 2 \ln x)$$

$$f_n'(x) = x(1 + 2 \ln x)$$

$\forall x \in [0; 1], x > 0$ ,  $f_n'(x)$  a donc le signe de  $1 + 2 \ln x$ .

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 + 2 \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2}$$

Signe de  $f_n'(x)$

$x$	0	$e^{-1/2}$	1
$f_n'(x)$	-	0	+

D'après le tableau ci-dessus,  $f_n$  est décroissante sur  $[0; e^{-1/2}]$ , croissante sur  $]e^{-1/2}; 1]$  et admet un minimum local au point  $e^{-1/2}$ .

2/ Montrons que  $\forall n \geq 1, 0 < e^{-n/2} < 1$

$$\forall n \geq 1, -\frac{n}{2} < 0$$

$\Leftrightarrow e^{-n/2} < e^0$  car  $x \mapsto e^x$  est croissante

sur  $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^{-n/2} < 1 \text{ or } \forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^{-n/2} < 1$$

Conclusion

$$\forall n \geq 1, 0 < e^{-n/2} < 1$$

b/ L'entier  $n$  étant fixe ( $n \geq 1$ ), résolvons dans  $]0; 1]$  l'inéquation  $\ln x + \frac{n}{2} \leq 0$

$$\ln x + \frac{n}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -\frac{n}{2} \Leftrightarrow x \leq e^{-n/2}$$

$$S = ]0; e^{-n/2}]$$

c/ Montrons que si  $n \geq 2$  alors  $f_n$  est dérivable sur  $[0; 1]$  et  $f_n'(x)$  admet le même signe que  $(\ln x + \frac{n}{2})(\ln x)^{n-1}$  pour tout  $x \in ]0; 1]$

$x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto (\ln x)^n$  sont dérivables

sur  $]0; +\infty[$  donc dérivable sur  $]0; 1[$   
 On en déduit que  $f_n$  est dérivable sur  $]0; 1[$ .

De plus  $f_n$  est dérivable en 0 pour tout  $n$  non nul; donc si  $n > 2$  alors  $f_n$  est dérivable en 0

Conclusion

Pour tout  $n > 2$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $]0; 1[$

$\forall x \in ]0; 1[$ ,

$$f'_n(x) = 2x(\ln x)^n + \frac{n}{x} x^2 (\ln x)^{n-1}$$

$$= 2x(\ln x)^n + nx(\ln x)^{n-1}$$

$$= x(n + 2\ln x)(\ln x)^{n-1}$$

$$f'_n(x) = 2x \left( \ln x + \frac{n}{2} \right) (\ln x)^{n-1}$$

$\forall x \in ]0; 1[$ ,  $2x > 0$ . d'où  $f'_n(x)$  a le même signe que  $\left( \ln x + \frac{n}{2} \right) (\ln x)^{n-1}$  sur  $]0; 1[$ .

d' Etudions le sens de variation de  $f_n$  sur  $]0; 1[$  pour  $n > 2$  suivant les valeurs de  $n$ .

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x + \frac{n}{2} = 0 \text{ ou } \ln x = 0$$

$$\ln x + \frac{n}{2} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-n/2}$$

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

1<sup>er</sup> cas n pair

$x$	0	$e^{-n/2}$	1
$\ln x + \frac{n}{2}$	-	0	+
$(\ln x)^{n-1}$	-	0	-
$f'_n(x)$	0	+	-

Sens de variation

$f_n$  est croissante sur  $]0; e^{-n/2}[$ , décroissante sur  $]e^{-n/2}; 1[$  et admet un maximum local au point  $e^{-n/2}$

2<sup>e</sup> cas n impair

$x$	0	$e^{-n/2}$	1
$\ln x + \frac{n}{2}$	-	0	+
$(\ln x)^{n-1}$	+	0	+
$f'_n(x)$	0	-	+

Sens de variation

$f_n$  est décroissante sur  $]0; e^{-n/2}[$ , croissante sur  $]e^{-n/2}; 1[$  et admet un minimum local au point  $e^{-n/2}$

$$f_n(e^{-n/2}) = e^{-n} \left( \frac{-n}{2} \right)^n = \left( \frac{-n}{2e} \right)^n$$

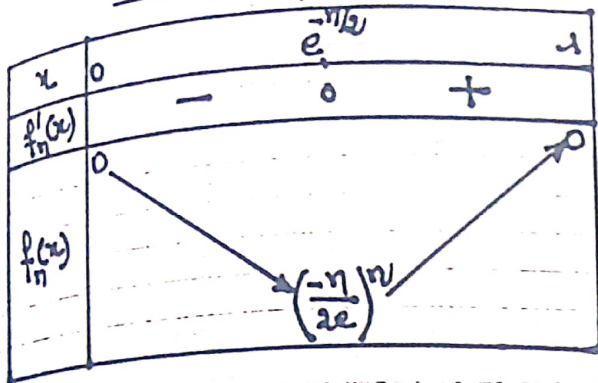
Remarque:  $(C_n)$  admet aux points d'abscisses 0 et 1 une tangente horizontale

Dressons le tableau de variation de  $f_n$

1<sup>er</sup> cas n pair

$x$	0	$e^{-n/2}$	1
$f'_n(x)$	+	0	-
$f_n(x)$	0	$\left( \frac{-n}{2e} \right)^n$	0

2<sup>e</sup> cas n impair



3/ Tableau de variation de la fonction  $f_1$

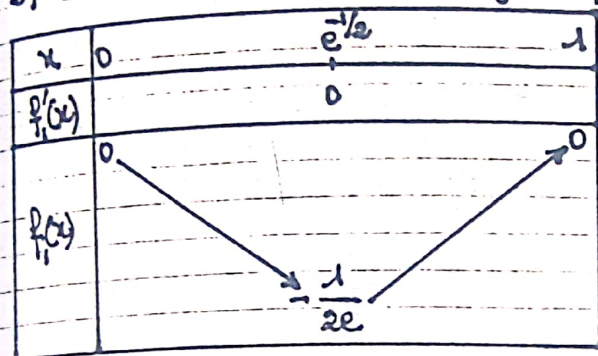
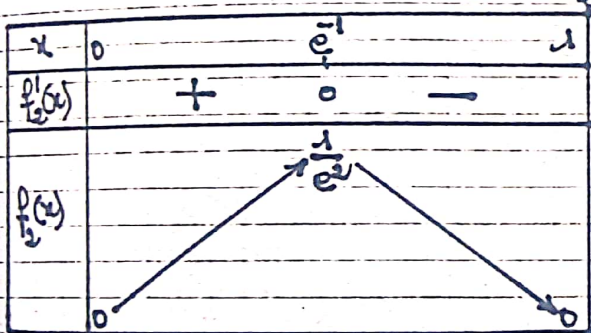


Tableau de variation de la fonction  $f_2$



Coordonnées des points d'intersection des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

Soit  $M(x; y)$  un point du plan.

$$M \in (C_1) \cap (C_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = f_1(x) \\ y = f_2(x) \end{cases} \quad x \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x^2 \ln x = x(\ln x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \ln x (1 - \ln x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ \text{ou} \\ x = e \end{cases} \quad \text{avec } x \in [0; 1]$$

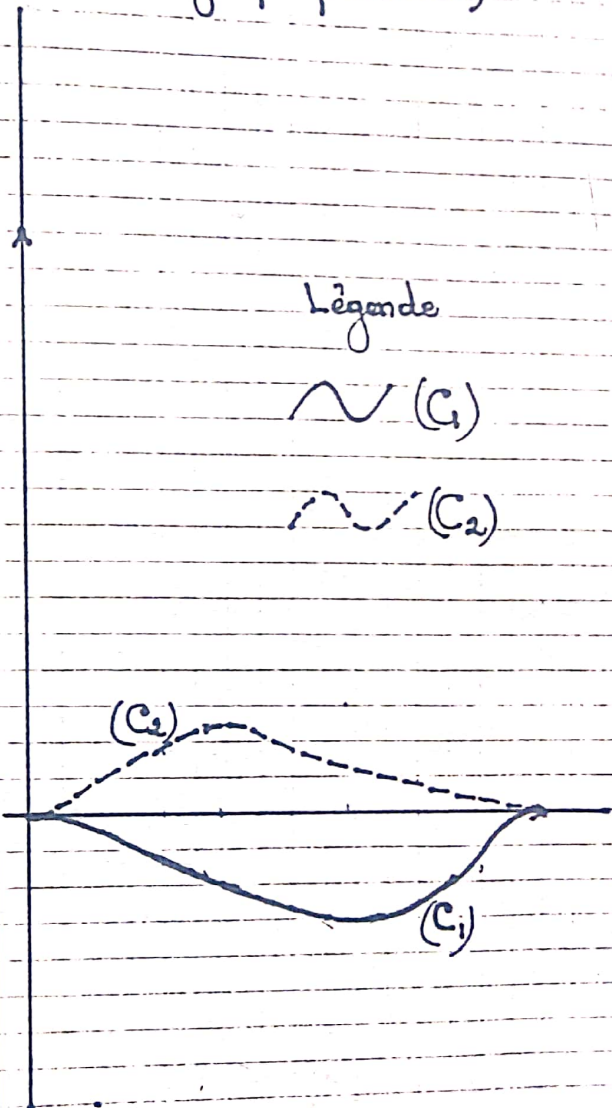
On en déduit  $x=0$  ou  $x=1$

$$f_1(0) = 0 \quad f_1(1) = 0$$

Les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  se coupent en deux points :  $O(0; 0)$  et  $A(1; 0)$

Construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$

(Unité graphique 10cm)



4/ Montrons que toutes les courbes  $(C_n)$  passent par deux points fixes

Pour tout  $n \neq 0$ ,  $f_n(0) = 0$  et  $f_n(1) = 0$

Toutes les courbes  $(C_n)$  passent par deux points  $O(0; 0)$  et  $A(1; 0)$

PARTIE C

Dans cette partie  $t$  désigne un réel de l'intervalle  $[0; 1]$  et  $n$  un entier naturel non nul

1/ On pose  $In(t) = \int_t^1 \frac{f(x)}{n} dx$  et

$$Ln = \int_0^1 \frac{f(x)}{n} dx.$$

a/ Justifions l'existence de  $In(t)$

la fonction  $\frac{f}{n}$  est continue sur  $[0; 1]$  donc continue sur  $[t; 1]$  car  $[t; 1]$  est inclus dans  $[0; 1]$ , ce qui justifie l'existence de  $In(t)$ .

b/ Montrons que la fonction :

$t \mapsto Ln - In(t)$  est la primitive sur  $[0; 1]$  de la fonction  $\frac{f}{n}$  qui s'annule en  $t = 0$

$$\text{Posons } F(t) = Ln - In(t).$$

$$\therefore F(0) = Ln - In(0)$$

$$= Ln - Ln = 0$$

$$\text{De plus } F(t) = \int_0^1 \frac{f(x)}{n} dx - \int_t^1 \frac{f(x)}{n} dx$$

$$= \int_0^t \frac{f(x)}{n} dx + \int_1^t \frac{f(x)}{n} dx$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{f(x)}{n} dx$$

$$F'(t) = \frac{f}{n}(t)$$

Conclusion :  $t \mapsto Ln - In(t)$  est la primitive de  $\frac{f}{n}$  sur  $[0; 1]$  qui s'annule en  $t = 0$

2/ Déduisons -en que  $In(t)$  admet pour limite  $Ln$  lorsque  $t$  tend vers 0.

$$\lim_{t \rightarrow 0} Ln - In(t) = Ln - Ln = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} In(t) = Ln$$

3/ On considère la fonction numérique  $F$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \text{ pour } 0 < x \leq 1$$

$$\text{et } F(0) = 0$$

a/ Prouvons que  $F$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et calculons  $F'(x)$  pour  $0 < x \leq 1$

$x \mapsto \frac{x^3}{3}$  et  $x \mapsto \frac{x^3}{9}$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $]0; 1[$

$x \mapsto \ln x$  est continue et dérivable sur  $]0; +\infty[$  donc sur  $]0; 1[$ . On en déduit que  $x \mapsto \frac{x^3}{3} \ln x$  est dérivable sur  $]0; 1[$  et que par conséquent  $F$  est dérivable sur  $]0; 1[$ .

$$\forall x \in ]0; 1[, F'(x) = x^2 \ln x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x^2}{3} = x^2 \ln x$$

$$\boxed{\forall x \in ]0; 1[, F'(x) = x^2 \ln x}$$

b/ Prouvons que  $F$  est dérivable en 0 et précisons  $F'(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3} \left( x \ln x - \frac{x}{3} \right) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0$$

$F$  est continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} \left( x \ln x - \frac{x}{3} \right) = 0$$

Conclusion

$F$  est dérivable en 0 et  $F'(0) = 0$ .

c./ Déduisons que  $F$  est une primitive de  $f_1$  sur  $[0; 1]$

On sait d'après 3.a./ de cette partie que  $F'(x) = x^2 \ln x = f_1(x)$ .

On en déduit que  $F$  est une primitive de  $f_1$  sur  $[0; 1]$ .

Calculons  $L_1$ .

$$L_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -\frac{1}{9}$$

$$L_1 = -\frac{1}{9}$$

4./ Soit  $\Psi_n$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $\Psi_n(t) = -\frac{1}{3} t^3 (\ln t)^n$

a./ Déterminons  $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi_n(t)$

D'après A.2./,  $\lim_{t \rightarrow 0} t^k (\ln t)^p = 0$   
 $k \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow 0} t^3 (\ln t)^n = 0$

d'où  $\lim_{t \rightarrow 0} \Psi_n(t) = 0$

b./ Prouvons que pour  $t \in [0; 1]$   

$$I_{n+1}(t) = \Psi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)$$

$$I_{n+1}(t) = \int_t^1 \frac{f(x)}{I_{n+1}} dx = \int_t^1 x^2 (\ln x)^{n+1} dx$$

Posons  $u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = \frac{n+1}{x} (\ln x)^n$

$$v'(x) = x^2 \Leftrightarrow v(x) = \frac{1}{3} x^3$$

$$I_{n+1}(t) = \left[ \frac{1}{3} x^3 (\ln x)^{n+1} \right]_t^1 - \frac{n+1}{3} \int_t^1 x^2 (\ln x)^n dx = -\frac{1}{3} t^3 (\ln t)^{n+1} - \frac{n+1}{3} I_n(t)$$

$$I_{n+1}(t) = \Psi_{n+1}(t) - \frac{n+1}{3} I_n(t)$$

=/ Déduisons-en que  $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

$$I_{n+1}(0) = \Psi_{n+1}(0) - \frac{n+1}{3} I_n(0)$$

or  $I_{n+1}(0) = L_{n+1}$ ;  $\Psi_{n+1}(0) = 0$  et  $I_n(0) = L_n$

d'où  $L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n$

d./ Prouvons par récurrence que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$$

$$L_1 = -\frac{1}{9} = (-1)^1 \frac{1!}{3^{1+1}} \text{ Vrai}$$

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$   
 et montrons que  $L_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$

$$L_{n+1} = -\frac{n+1}{3} L_n = -(-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}} \times \frac{n+1}{3} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{3^{n+2}}$$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}$

e/ Calculons en fonction de n l'aire en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C<sub>n</sub>) et l'axe (Ox)

Soit A<sub>n</sub> cette aire on a:

$$A_n = \left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| = |Ln| = \frac{n!}{3^{n+1}}$$

car  $|(-1)^n| = |-1|^n = 1^n = 1$

$$A_n = \frac{n!}{3^{n+1}} \text{ u.a}$$

PROBLEME N° 20

PARTIE A.

1/ Justifions le résultat suivant:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Prenons  $h(x) = \ln(1+x)$  on a:  $h(0) = \ln 1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0)$$

or  $h'(x) = \frac{1}{1+x}$  et  $h'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$

d'où:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2/ a/ Démontrons-en que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad x = \frac{1}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

b/ Etudions la limite en  $+\infty$  de la

fonction  $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

On sait que  $a^x = e^{x \ln a}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$= e \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

3/ Pour tout naturel n, on note  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

a/ Etudions le sens de variation de  $f_n$

$x \mapsto x^n$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

$x \mapsto 1-x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$

$f_n$  étant le produit de deux fonctions continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n$$

$$= nx^{n-1} - nx^n - x^n$$

$$f_n'(x) = x^{n-1} [n - (n+1)x]$$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{n}{n+1}$$

Signe de  $f_n'(x)$

1<sup>er</sup> cas n pair

x	$-\infty$	0	$\frac{n}{n+1}$	$+\infty$
$x^{n-1}$	-	0	+	+
$n - (n+1)x$	+	+	0	-
$f_n'(x)$	-	0	+	-

$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\frac{n}{n+1}; +\infty[$ ,  $f_n'(x) < 0$

$f_n$  est donc strictement décroissante sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]\frac{n}{n+1}; +\infty[$

$\forall x \in ]0; \frac{n}{n+1}[$ ,  $f_n'(x) > 0$

$f_n$  est strictement croissante sur  $]0; \frac{n}{n+1}[$   
 2<sup>e</sup> cas  $n$  impair

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{n}{n+1}$	$+\infty$
$x^{n-1}$	+	o	+	+
$n-(n+1)x$	+	+	o	-
$f'_n(x)$	+	o	+	-

$\forall x \in ]-\infty; \frac{n}{n+1}[$   $f'_n(x) \geq 0$ ;  $f_n$  est croissante sur  $]-\infty; \frac{n}{n+1}[$

$\forall x \in ]\frac{n}{n+1}; +\infty[$   $f'_n(x) < 0$ ;  $f_n$  est décroissante sur  $]\frac{n}{n+1}; +\infty[$

b/ Prouvons que selon la parité de  $n$ , l'équation  $f_n(x) = 1$  admet soit 0 soit 1 solution dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $f_n$  admet un maximum local au point  $\frac{n}{n+1}$ ;  $f_n(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1} \cdot (\frac{n}{n+1})^n$   
 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(\frac{n}{n+1}) \leq 1$ .

1<sup>er</sup> cas  $n$  impair

D'après le sens de variation a:

$$\forall x > 0, f_n(x) < 1$$

La restriction de  $f_n$  à  $]-\infty; 0]$  est monotone strictement décroissante avec  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$  et  $f_n(0) = 0$

Cette restriction définit donc une bijection de  $]-\infty; 0]$  vers  $[0; +\infty[$ .

L'équation  $f_n(x) = 1$  admet donc une seule solution sur  $]-\infty; 0]$

Conclusion:

Pour  $n$  impair l'équation  $f_n(x) = 1$  admet une seule solution.

2<sup>e</sup> cas  $n$  pair et  $\neq 0$

D'après le sens de variation de  $f_n$

$$\text{on a: } \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \leq f_n(\frac{n}{n+1}) < 1$$

L'équation  $f_n(x) = 1$  n'a donc pas de solution dans  $\mathbb{R}$  pour  $n$  pair.

Finalement:

L'équation  $f_n(x) = 1$  admet 0 solution pour  $n$  pair et 1 solution pour  $n$  impair.

4/ Soit  $(\Gamma_n)$  les courbes de  $f_n$ .

Montrons que toutes passent par deux points fixes sauf pour certaines valeurs de  $n$  à préciser.

$$f_n(0) = 0^n(1-0) = 0 \text{ pour } n \neq 0$$

$$f_n(1) = 1^n(1-1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toutes les courbes  $(\Gamma_n)$  sauf  $(\Gamma_0)$  passent par deux points fixes  $O(0;0)$  et  $A(1;0)$

$$f'_n(0) = 0^{n-1} \times n = 0 \text{ pour } n > 1$$

$$f'_n(1) = 1^{n-1}(n-n-1) = -1$$

Conclusion

Pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; -1\}$  toutes les courbes de  $f_n$  passant par deux points fixes  $O(0;0)$  et  $A(1;0)$  et admettent en ces points la même tangente.

En  $O(0;0)$  la tangente est horizontale  
 et en  $A$  la tangente a pour équation  
 $y = -x + 1$

PARTIE B

On note  $g_n$  la restriction de  $f$  sur  
 l'intervalle  $[0;1]$ . Soit  $(C_n)$  la courbe  
 représentative de  $g_n$ .

1/ Montrons que pour une valeur  
 de  $n$ ,  $g_n$  possède un maximum.

$$M_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Pour  $n=0$  ou  $\alpha$ :  $g_0(x) = 1-x$ .

$g_0$  est une fonction affine et par consé-  
 quent n'admet pas de maximum.

Pour  $n \neq 0$ ,  $g'_n(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{n}{n+1} \end{cases}$

D'après l'étude du sens de variation  
 de  $f_n$  dans  $A \cdot 3 \cdot |\alpha|$ ,  $g_n$  admet un  
 maximum au point  $\frac{n}{n+1}$ . Ce maximum

$$\begin{aligned} \text{est } M_n &= g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Conclusion

Pour  $n \neq 0$ ,  $g_n$  possède un maximum  
 $M_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ . Ce maximum est  
 atteint pour  $x = \frac{n}{n+1}$

2/ Traçons  $(C_0), (C_1)$  et  $(C_2)$ .

$(C_0)$  est la droite d'équation  $y = 1-x$

$$g_1(x) = -x^2 + x; \quad g'_1(x) = -2x + 1$$

$$g'_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; \quad g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Tableau de variation de  $g_1$

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$1$
$g'_1(x)$		$+$	$-$
$g_1(x)$		$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow$

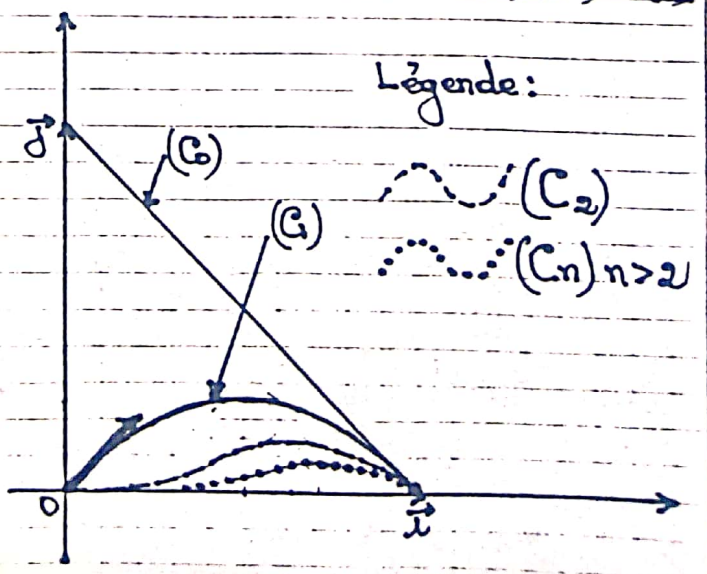
$$g_2(x) = x^2(1-x); \quad g'_2(x) = x(-3x+2)$$

$$g'_2(x) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x = \frac{2}{3}; \quad g_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

Tableau de variation de  $g_2$

$x$	$0$	$\frac{2}{3}$	$1$
$g'_2(x)$		$+$	$-$
$g_2(x)$		$\nearrow \frac{4}{27}$	$\searrow$

Construction des courbes  $(C_0), (C_1)$  et  $(C_2)$



3/- Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0}$$

- Calculons  $I_n = \int_0^1 g_n(x) dx$

$$I_n(x) = \int_0^1 g_n(x) dx = \int_0^1 x^n (1-x) dx$$

$$= \int_0^1 (x^n - x^{n+1}) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\boxed{I_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

- Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

Déterminons le résultat précédent

en encadrant  $g_n(x)$

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^n (1-x) \leq x^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq g_n(x) \leq x^n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 g_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

d'après le théorème des Gendarmes.

4/- Pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{on pose: } S_n(x) = \sum_{i=0}^n g_i(x)$$

a/- Calculons  $S_n(x)$

$$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_n(x)$$

$S_n(x)$  est la somme des  $n+1$  premiers termes d'une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $g_0(x) = 1-x$  et de raison  $x$

$$S_n(x) = g_0(x) \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ .

$$\text{Pour } x=0, S_n(0) = 1$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(0) = 1$$

$$\text{Pour } x=1, S_n(1) = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = 0$$

$$\text{Pour } 0 < x < 1 \text{ on a: } \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1$$

Posons  $J_n = \int_0^1 S_n(x) dx$

Calculons  $J_n$

$$J_n = \int_0^1 (1-x^{n+1}) dx = 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$J_n = \frac{n+1}{n+2}$$

Calculons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 1$$

b/ Exprimons  $J_n = \int_0^1 S_n(x) dx$  en

fonction de  $I_0, I_1, \dots, I_n$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \left( \sum_{i=0}^n g_i(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=0}^n \int_0^1 g_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^n I_i \end{aligned}$$

$$\int_0^1 S_n(x) dx = I_0 + I_1 + \dots + I_n$$

Déduisons-en la valeur de:

$$P_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)}$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=0}^n I_i = \int_0^1 S_n(x) dx$$

$$= J_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{(i+1)(i+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

c/ Comparons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$

$$\text{et } \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) dx$$

## PROBLEME N° 21

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  (unité 2cm).

### PARTIE A

Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = x + 2 - e^x$ .

1/ Étudions le sens de variation de  $g$

$$Dg = [0; +\infty[$$

$x \mapsto x+2$  et  $x \mapsto e^x$  sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$  d'où  $g$  continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc continue et dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $\forall x \geq 0$ :

$$g'(x) = 1 - e^x; \quad g'(0) = 0 \Leftrightarrow x=0$$

$$\forall x > 0, \quad e^x > 1 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0$$

$g$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ .

Déterminons la limite de  $g$  en  $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) \\ &= -\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{2}{x} \rightarrow 0 \\ \frac{e^x}{x} \rightarrow +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2/a/ Montrons que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution et une seule dans  $[0; +\infty[$  que l'on note  $\alpha$

D'après 1/,  $g$  est continue, monotone strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$  avec  $g(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ .  
 $g$  définit donc une bijection de  $[0; +\infty[$  vers  $] -\infty; 1]$ , un intervalle qui contient 0. Il existe donc un unique réel  $\alpha > 0$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Conclusion

L'équation:  $x \in [0; +\infty[$ ,  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ .

b/ Montrons que  $1,14 < \alpha < 1,15$

$g(1,14) = > 0$ ;  $g(1,15) = < 0$   
 $g(1,14) \times g(1,15) < 0$ . On a donc  $1,14 < \alpha < 1,15$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$1,14 < \alpha < 1,15$

3/ Dédisons-en le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

PARTIE B

1/a/ Montrons que pour tout  $x$  appartenant à  $[0; +\infty[$ ,  $f(x) = \frac{e^x g(x)}{(x e^x + 1)^2}$  est continue et dérivable sur  $[0; +\infty[$  et  $\forall x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{e^x(xe^x - (e^x + 1)^2)(e^x - 1)}{(x e^x + 1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x e^{2x} + e^x - e^{2x} - e^x - x e^{2x} + x e^x}{(x e^x + 1)^2} \\ &= \frac{x e^x + 2 e^x - e^{2x}}{(x e^x + 1)^2} = \frac{e^x(x + 2 - e^x)}{(x e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

$\forall x > 0$   $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(x e^x + 1)^2}$

b/ Dédisons-en le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$

$\forall x > 0$ ,  $\begin{cases} e^x > 0 \\ \text{et} \\ (x e^x + 1)^2 > 0 \end{cases}$

$f(x)$  a donc le signe de  $g(x)$ .

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

$\forall x \in [0; \alpha[$ ,  $f'(x) > 0$ ;  $f$  est donc croissante sur  $[0; \alpha[$

$\forall x \in ]\alpha; +\infty[$ ,  $f'(x) < 0$ ;  $f$  est donc décroissante sur  $]\alpha; +\infty[$

$f$  possède un maximum local au point  $\alpha$ .

2/ a/ Montrons que pour tout réel positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^{-x})}{e^x(x + e^{-x})} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

$$\boxed{\forall x > 0, f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}}$$

b/ Dédoublons-en la limite de  $f$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

Interprétation graphique du résultat

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . On en déduit que la courbe (C) représentative de  $f$  possède une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$

3/ a/ Établissons que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

$$\text{On sait que } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2}$$

$$\boxed{f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}}$$

b/ Utilisons l'encadrement de  $\alpha$  établi dans la question A.2, donnons un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-2}$

$$1,14 < \alpha < 1,15 \Leftrightarrow 2,14 < \alpha + 1 < 2,15$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2,15} < \frac{1}{\alpha + 1} < \frac{1}{2,14}$$

$$\Leftrightarrow 0,46 < f(\alpha) < 0,47$$

$$\boxed{0,46 < f(\alpha) < 0,47}$$

4/ Equation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

$$(T): y = f'(0)x + f(0)$$

$$f'(0) = 1; f(0) = 0.$$

$$\boxed{(T): y = x}$$

5/ a/ Établissons que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$

$$f(x) - x = \frac{(x+1)U(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } U(x) = e^x - xe^x - 1$$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x = \frac{e^x - 1 - xe^x - x}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{(1 - x^2)e^x - (x+1)}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{(x+1)[(1-x)e^x - 1]}{xe^x + 1}$$

$$= \frac{(x+1)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$$

$$\boxed{f(x) - x = \frac{(x+1)U(x)}{xe^x + 1} \text{ avec } U(x) = e^x - xe^x - 1}$$

b/ Étude du sens de  $U$  sur  $[0; +\infty[$

$$\text{D}_U = [0; +\infty[$$

$U$  est continue et dérivable sur  $[0; +\infty[$   
 et  $\forall x > 0, U'(x) = e^x - e^{-x} - xe^x = -xe^x$

$$\forall x > 0, U'(x) = -xe^x$$

$\forall x > 0, U'(x) \leq 0$ ; la fonction  $U$  est donc strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$

Déduisons-en le signe de  $U(x)$

$U(0) = 0$  et  $U$  décroissante sur  $[0; +\infty[$

On en déduit que:

$$\forall x > 0, U(x) \leq U(0) = 0$$

Conclusion:  $\forall x > 0, U(x) \leq 0$

c/ Déduisons des questions précédentes

la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T)

$$\forall x > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ U(x) \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)U(x)}{xe^x+1} \leq 0 \\ xe^x+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) - x \leq 0$$

Conclusion:

la courbe (C) est en dessous de la droite (T)

Tracons la courbe (C) et la droite (T)

Pour la construction de (C) et (T) voir figure ci-contre.

PARTIE C

1/ Déterminons une primitive  $F$  de  $f$  sur  $[0; +\infty[$

D'après B. 2/ on a:

$$f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = \frac{V'(x)}{V(x)} \text{ avec } V(x) = x + e^{-x}$$

$$F(x) = \ln|x + e^{-x}| = \ln(x + e^{-x})$$

$$F(x) = \ln(x + e^{-x})$$

2/ On note  $D$  le domaine délimité par la courbe (C), la tangente (T) et les droites d'équation  $x=0$  et  $x=1$

Calculons en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A$  de  $D$ .

$$A = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \ln(x + e^{-x}) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1})$$

$$= \frac{3}{2} - \ln(1 + e) \text{ u.a.}$$

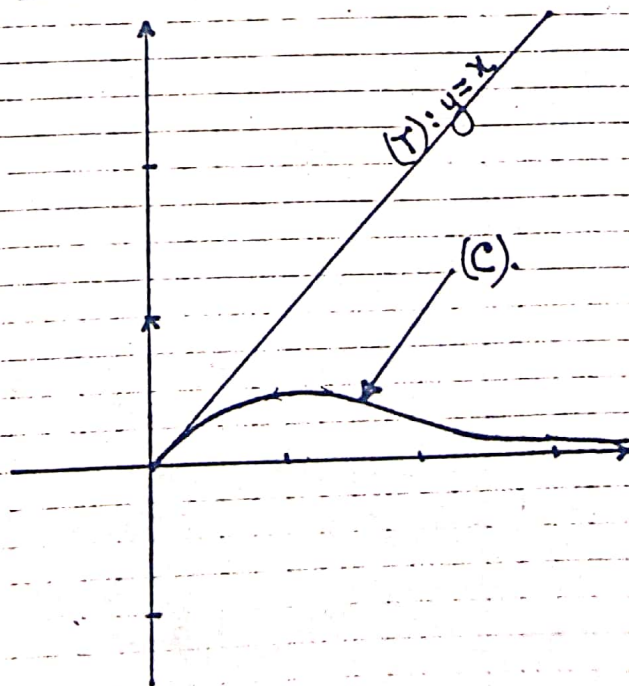
$$\text{En cm}^2, A = 4x \left( \frac{3}{2} - \ln(1 + e) \right)$$

$$= \frac{12}{2} - 4 \ln(1 + e)$$

$$= 6 - 4 \ln(1 + e)$$

$$A = 6 - 4 \ln(1 + e) \text{ cm}^2$$

Construction de (C) et (T)



3/ Pour tout entier naturel  $n$ , on pose

$$V_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

a/ Calculons  $V_0, V_1, V_2$

$$V_0 = \int_0^1 f(x) dx = \left[ \ln(x + e^{-x}) \right]_0^1$$

$$= \ln(1 + e^{-1}) - \ln 1$$

$$V_0 = \ln(1 + e^{-1})$$

$$V_1 = \int_1^2 f(x) dx = \left[ \ln(x + e^{-x}) \right]_1^2$$

$$= \ln(2 + e^{-2}) - \ln(1 + e^{-1})$$

$$= \ln\left(\frac{2 + e^{-2}}{1 + e^{-1}}\right)$$

$$V_1 = \ln\left(\frac{2e^2 + 1}{e^2 + e}\right)$$

$$V_2 = \int_2^3 f(x) dx = \left[ \ln(x + e^{-x}) \right]_2^3$$

$$= \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2})$$

$$= \ln\left(\frac{3 + e^{-3}}{2 + e^{-2}}\right)$$

$$V_2 = \ln\left(\frac{3e^3 + 1}{2e^3 + e}\right)$$

b/ Montrons que pour naturel  $n \geq 2$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

D'après B-1-b/ la fonction  $f$  est décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$  avec  $\alpha < 1,5$

$\Rightarrow f$  décroissante sur  $[n; n+1]$ ,  $n \geq 2$ .

$$n \leq x \leq n+1 \Rightarrow f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$$

$$\Leftrightarrow f(n+1)(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)(n+1-n)$$

$$\Leftrightarrow f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

Conclusion

Pour tout naturel  $n \geq 2$  on a:

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

Déduisons-en la monotonie de la suite

$(V_n)$  à partir de  $n=1$

$$f(n+1) \leq V_n \leq f(n) \quad \forall n \geq 2$$

$$\Leftrightarrow f(n+2) \leq V_{n+1} \leq f(n+1)$$

$$\text{ou } f(n+1) \leq V_n \Leftrightarrow V_{n+1} \leq f(n+1) \leq V_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} \leq V_n$$

Conclusion

La suite  $(V_n)$  est décroissante

c/ Déterminons la limite de  $(V_n)$

$$\begin{cases} f(n+1) \leq V_n \leq f(n) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$  d'après la théorème

des Gendarmes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

d/ Déterminons la somme

$$S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$S_n = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx$$

$$= \int_0^{n+1} f(x) dx = \ln(n+1 + e^{-n-1})$$

$$S_n = \int_0^{n+1} f(x) dx$$

# PROBLEME N° 22

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = x-1 + (x^2+2)e^{-x}$ .

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique: 2cm)

## PARTIE A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$ .

1/ Etudions les limites de la fonction  $g$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (nx)^{n-1} e^{-x}, \quad x = \frac{x}{n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} n^n (x e^{-x})^n$$

$$= n^n \times 0^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x^2 e^{-x} + 2x e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$= 1 - 0 + 2 \times 0 - 2 \times 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

2/ Calculons la dérivée de  $g$  et déterminons son signe.

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$g'(x) = -[(2x-2)e^{-x} - (x^2-2x+2)e^{-x}]$$

$$= (x^2 - 4x + 4)e^{-x}$$

$$g'(x) = (x-2)^2 e^{-x}$$

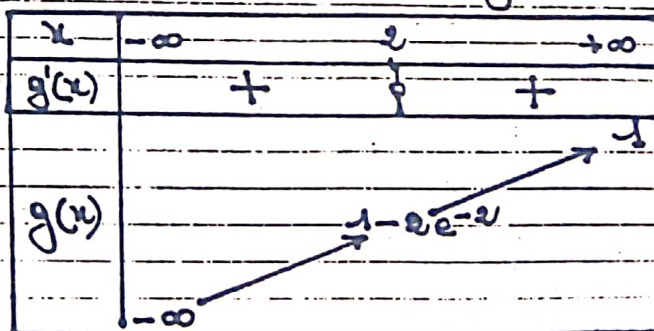
$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$  et  $(x-2)^2 \geq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$$

3/ Etudions le sens de variation de  $g$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) \geq 0$ ;  $g$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  car:  $g(2) = 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\}, g'(x) > 0$ .

Tableau de variation de  $g$ :



$$g(2) = 1 - 2e^{-2}$$

4/ Démontrons que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $g$  est continue, monotone strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  avec

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

$g$  définit donc une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\infty; 1[$ . Or  $0 \in ]-\infty; 1[$ .

Il existe donc un unique réel  $\alpha$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

Conclusion

L'équation :  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$ .

Justifions que  $0,35 < \alpha < 0,36$

$g(0,35) = -0,0024$  et  $g(0,36) = 0,0166$

Or, donc :  $g(0,35) < 0 < g(0,36)$

$\Rightarrow g(0,35) < g(\alpha) < g(0,36)$

$\Rightarrow 0,35 < \alpha < 0,36$  car  $g$  est

croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Conclusion :  $0,35 < \alpha < 0,36$

5/ Déduisons - en le signe de  $g(x)$

suivant les valeurs de  $x$

$g$  étant strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $g(\alpha) = 0$ , on a :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

**PARTIE B**

1) Etudions les limites de  $f$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x + x^2 + 2)e^{-x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2 = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + x^2 e^{-x} + 2e^{-x}$   
 $= +\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
---	---

2/ Déterminons  $f'(x)$  pour tout  $x$  réel et montrons que  $f'(x) = g(x)$

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$f'(x) = 1 + 2xe^{-x} - (x^2 + 2)e^{-x}$   
 $= 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

$f'(x) = g(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$

3/ Déduisons - en à l'aide de la partie A, les variations de  $f$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ ;  $f'(x)$  a donc le signe de  $g(x)$ . D'après A-5/ on a déduit le tableau de variation suivant

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$

4/a/ Démontrons que  $f(x) = x(1+2e^{-x})$

On sait que  $g(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - (x^2 + 2)e^{-x} + 2xe^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)e^{-x} = 1 + 2xe^{-x}$$

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$$

$$= x - 1 + 1 + 2xe^{-x} = x + 2xe^{-x}$$

$$= x(1 + 2e^{-x})$$

$$f(x) = x(1 + 2e^{-x})$$

b/ A l'aide de l'encadrement  $\alpha$ , déterminons un encadrement de  $f(\alpha)$

d'amplitude  $4 \cdot 10^{-2}$

$$0,35 < \alpha < 0,36 \Leftrightarrow e^{-0,36} < e^{-\alpha} < e^{-0,35} \text{ car}$$

$x \mapsto e^{-x}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$\Leftrightarrow 2e^{-0,36} < 2e^{-\alpha} < 2e^{-0,35} \text{ car } 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2e^{-0,36} < 1 + 2e^{-\alpha} < 1 + 2e^{-0,35}$$

$$\Rightarrow 0,35(1 + 2e^{-0,36}) < \alpha(1 + 2e^{-\alpha}) < 0,36(1 + 2e^{-0,35})$$

$$\Leftrightarrow 0,83 < f(\alpha) < 0,87$$

$$0,83 < f(\alpha) < 0,87$$

5/ Démontrons que la droite  $(\Delta)$  d'équa-

tion  $y = x - 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^{-x}$$

$$= 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = 0$ . On en déduit que la droite

$(\Delta)$  d'équation

$y = x - 1$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$

Position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$

$$\text{Posons } d(x) = f(x) - (x - 1) \\ = (x^2 + 2)e^{-x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 > 0 \text{ et } e^{-x} > 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2)e^{-x} > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - (x - 1) > 0 \Leftrightarrow (C)$  est au-dessus de  $(\Delta)$ .

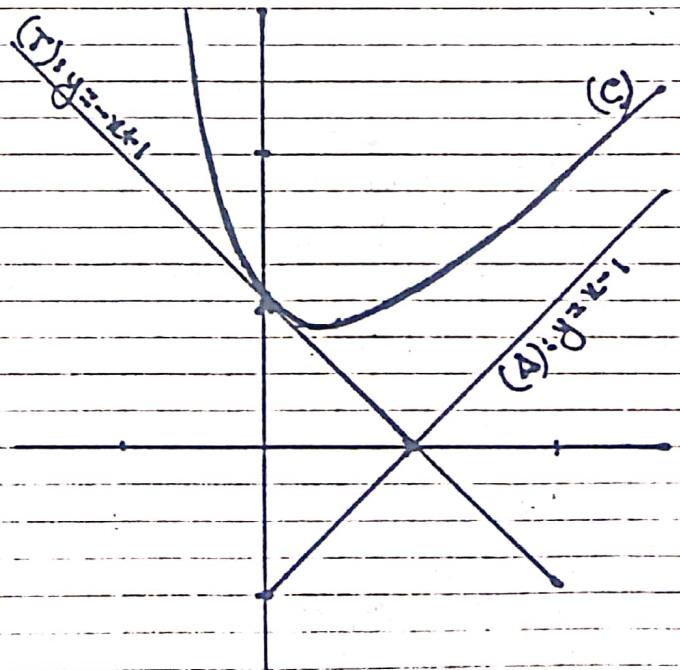
6/ Equation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 0.

$$(T): y = f'(0)x + f(0)$$

$$f'(0) = -1 \quad f(0) = 1$$

$$(T): y = -x + 1$$

7/ Traçons  $(\Delta)$ ,  $(T)$  puis  $(C)$ .



8/ a/ Déterminons les réels  $a, b$  et  $c$

telles que la fonction  $P$  définie sur  $\mathbb{R}$

par:  $P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  soit une

primitive sur  $\mathbb{R}$  de:  $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$P'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

$$= [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

P est une primitive de  $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$

$$\text{ssi } P'(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x} = (x^2 + 2)e^{-x}$$

Par identification on a:

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ b - c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = -4 \end{cases}$$

$$a = -1 \quad b = -2 \quad c = -4 \quad \text{soit}$$

$$P(x) = -(x^2 + 2x + 4)e^{-x}$$

b/ Calculons en fonction de  $\alpha$  l'aire  $A$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations:

$$x = -\alpha \quad \text{et} \quad x = 0$$

$$A = 4 \int_{-\alpha}^0 (f(x) - (x-1)) dx$$

$$= 4 \int_{-\alpha}^0 (x^2 + 2)e^{-x} dx$$

$$= -4 \left[ (x^2 + 2x + 4)e^{-x} \right]_{-\alpha}^0$$

$$= -4 \left[ 4 - (\alpha^2 - 2\alpha + 4)e^{\alpha} \right]$$

$$A = 4(\alpha^2 - 2\alpha + 4)e^{\alpha} - 16$$

c/ Justifions que  $A = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$

$$A = 4(\alpha^2 - 2\alpha + 4)e^{\alpha} - 16 = 4[(\alpha^2 + 2) - 2\alpha + 2]e^{\alpha} - 16$$

$$\text{ou } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 - 2\alpha + 2)e^{-\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2 - 2\alpha = e^{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2 = e^{\alpha} + 2\alpha$$

$$b = 4(e^{\alpha} + 2\alpha - 2\alpha + 2)e^{\alpha} - 16$$

$$= 4(e^{\alpha} + 2)e^{\alpha} - 16 = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$$

$$b = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16 \text{ cm}^2$$

## PARTIE C

1/ Démontrons que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$  on a:  $1 \leq f(x) \leq 2$

On sait que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc croissante sur  $[1; 2]$

$$1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2)$$

$$\text{or } f(1) \approx 1,1 \quad \text{et} \quad f(2) \approx 1,8$$

$$\Rightarrow 1 < 1,1 \leq f(x) \leq f(2) < 2$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 2$$

$$\forall x \in [1; 2], 1 \leq f(x) \leq 2$$

2/ Démontrons que pour tout  $x$  de l'intervalle  $[1; 2]$ ,  $0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$ .

On sait que:  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = g(x)$  et que  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

$$\text{donc: } 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f'(1) \leq f'(x) \leq f'(2)$$

$$\text{or } f'(1) \approx 0,63 > 0 \quad \text{et} \quad f'(2) \approx 0,73 < \frac{3}{4}$$

$$\text{donc: } \forall x \in [1; 2], 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

$$\forall x \in [1; 2], 0 \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$$

3/ Soit  $h$  la fonction définie sur  $[1; 2]$   
par:  $h(x) = f(x) - x$ .

Étudions le sens de variation de  $h$ .

$$\forall x \in [1; 2], h'(x) = f'(x) - 1$$

$$\text{or } \forall x \in [1; 2], f'(x) < \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f'(x) - 1 < -\frac{1}{4} < 0$$

$$\forall x \in [1; 2], h'(x) < 0.$$

$h$  est donc décroissante sur  $[1; 2]$

$$\text{De plus: } h(1) = f(1) - 1 \approx 1,1 - 1 \approx 0,1$$

$$h(2) = f(2) - 2 \approx 1,8 - 2 \approx -0,2$$

$h$  est monotone sur  $[1; 2]$  et

$$h(1) \times h(2) < 0 \text{ donc l'équat. } h(x) = 0$$

admet une solution unique  $\beta$  sur

$$[1; 2]. \text{ De plus } h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$$

Conclusion:

L'équation:  $f(x) = x$  admet une solution unique  $\beta$  sur  $[1; 2]$

4/ Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par  $U_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f(U_n)$

a/ Démontrons que:  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$

$$\bullet U_0 = 1 \Rightarrow 1 \leq U_0 \leq 2$$

\* Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$  et montrons qu'alors  $1 \leq U_{n+1} \leq 2$

On sait que  $\forall x \in [1; 2], 1 \leq f(x) \leq 2$

$$1 \leq U_n \leq 2 \Rightarrow 1 \leq f(U_n) \leq 2 \text{ soit}$$

$$1 \leq U_{n+1} \leq 2.$$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq U_n \leq 2$

b/ Démontrons que  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

$$|U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[1; 2]$

et  $\forall x \in [1; 2], 0 < f'(x) \leq \frac{3}{4}$ . De plus

$\forall n \in \mathbb{N}, U_n$  et  $\beta$  appartiennent à  $[1; 2]$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à  $f$  entre  $\beta$  et  $U_n$  on a:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(U_n) - f(\beta)| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$$

$$\text{or } f(U_n) = U_{n+1} \text{ et } f(\beta) = \beta.$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_n - \beta|$$

c/ Démontrons que:  $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\forall p \in \mathbb{N}, |U_{p+1} - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_p - \beta| \quad (1)$$

Remplaçons dans (1),  $p$  par  $0, 1, 2, \dots, n-1$ :

$$\text{On a: } |U_1 - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_0 - \beta|$$

$$|U_2 - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_1 - \beta|$$

$$|U_3 - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_2 - \beta|$$

$\vdots$

$$|U_n - \beta| \leq \frac{3}{4} |U_{n-1} - \beta|$$

Multiplions membre à membre les  $n$  égalités obtenues et simplifions. On a:

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta|$$

$$1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq U_0 - \beta \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \beta| \leq 1$$

$$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |U_0 - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \beta| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

d./ Démontrons-en que la suite  $(U_n)$  est convergente et donnons sa limite.

On sait que  $\frac{3}{4} \in ]-1; 1[$  donc:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

la suite  $(U_n)$  est donc convergente et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \beta.$$

e/ Déterminons  $N_0$  tel que  $\forall n \geq N_0$  on ait:

$$|U_n - \beta| \leq 10^{-2}$$

$$|U_n - \beta| \leq 10^{-2} \text{ si } \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10^{-2}}{\ln 3 - \ln 4} \approx 16,008$$

$$\text{On a donc: } N_0 = 17$$

### PROBLEME N° 23

On considère la fonction de la variable réelle  $x$  définie par:  $f_a(x) = x + a e^{-|x|}$  où  $a$  est un réel non nul,  $e$  la base des logarithmes népériens et  $|x|$  désigne la valeur absolue de  $x$ .

#### PARTIE A

a/ Ensemble de définition de  $f_a$

$$D_{f_a} = \mathbb{R}$$

Partie de  $D_{f_a}$  où  $f_a$  est dérivable

$f_a$  est dérivable sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

b/ Étudions la dérivabilité de  $f_a$  à gauche et à droite en 0

On sait que:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$f_a(0) = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + a e^{-x} - a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + a \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$= 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = 1 + a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + a e^{-x} - a}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + a \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - a \frac{e^x - 1}{x}, x = -x$$

$$= 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_a(x) - f_a(0)}{x} = 1 - a$$

$f_a$  est dérivable à gauche en 0 avec  $f'_a(0^-) = 1 + a$ ; est dérivable à droite en 0 avec  $f'_a(0^+) = 1 - a$ .

$\forall a \in \mathbb{R}^*, 1 + a \neq 1 - a$ ;  $f_a$  n'est donc pas dérivable en 0.

c/ Montrons que pour tout  $a$ , la courbe

$(C_a)$  représentative de  $f_a$  admet une asymptote oblique

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_a(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a e^{-|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a e^{-x}, x = |x|$$

$$= a \times 0 = 0$$

$\forall a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)-x}{a} = 0.$

Conclusion:

Pour tout  $a$  non nul, la courbe  $(C_a)$  admet la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y=x$  comme asymptote oblique.

2./ a./ Valeur de  $x$  pour laquelle la dérivée s'annule.

$$f'_a(x) = \begin{cases} x + ae^{-x}, & x > 0 \\ x + ae^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f'_a(x) = \begin{cases} 1 - ae^{-x}, & x > 0 \\ 1 + ae^x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f'_a(x) = \begin{cases} 1 - ae^{-x} = 0, & x > 0 \quad (1) \\ \text{ou} \\ 1 + ae^x = 0, & x \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1)  $\Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow x = \ln a$

(2)  $\Leftrightarrow e^x = -\frac{1}{a} \Leftrightarrow x = -\ln(-a).$

$\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

$-\ln(-a) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(-a) > 0 \Leftrightarrow -a > 1$

$\Leftrightarrow a \leq -1$

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln a & a > 1 \\ \text{ou} \\ x = -\ln(-a), & a \leq -1 \end{cases}$$

Déterminons-en l'ensemble  $I$  des réels

$a$  pour lesquels  $f_a$  a un extrémum relatif:

$I = ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

Nature de l'extrémum:

Tableau de signe de  $f'_a(x)$

1<sup>er</sup> cas  $a \leq -1$

$x$	$-\infty$	$-\ln(-a)$	$0$	$+\infty$
$f'_a(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

Pour  $a \leq -1$ , l'extrémum est un maximum relatif.

2<sup>e</sup> cas  $a > 1$

$x$	$-\infty$	$0$	$\ln a$	$+\infty$
$f'_a(x)$	$+$	$-$	$0$	$+$

Pour  $a > 1$ , l'extrémum est un minimum relatif.

b./ Soit  $x_a$  le point où  $f_a$  possède un extrémum relatif.

Déterminons l'ensemble des points  $M(x_a, f_a(x_a))$  lorsque  $a$  décrit  $I$

Pour  $a \leq -1, x_a = -\ln(-a)$

$f_a(x_a) = \ln(-a) - 1$

Pour  $a > 1, x_a = \ln a$

$f_a(x_a) = \ln a + 1$

$$\begin{cases} x = -\ln(-a) \\ y = \ln(-a) - 1 \\ a \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

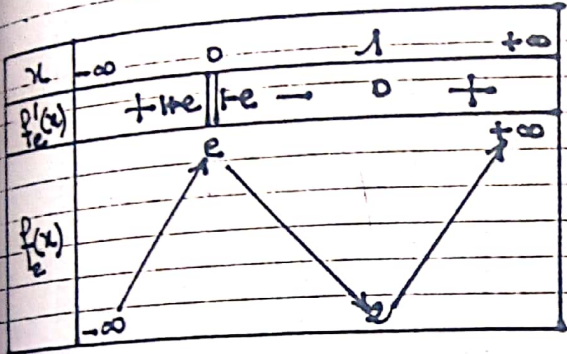
$$\begin{cases} x = \ln a \\ y = \ln a + 1 \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

L'ensemble  $D$  décrit par les points  $M(x_a, f_a(x_a))$  lorsque  $a$  décrit  $I$  est

la réunion des demi-droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  d'équations respectives :

$$(D_1): \begin{cases} y = -x - 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad (D_2): \begin{cases} y = x + 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

3/a/ Tableau de variation de  $f_e$   
 Pour  $a = e$   $\gamma_a = 1$  et  $f_e(x) = 2$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_e(x) = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_e(x) = +\infty$

b/ Traçons  $(C_e)$ , ses demi-tangentes au point d'abscisse 0, son asymptote et l'ensemble D. (Voir page suivante)

4/a/ Le réel  $a$  étant fixé, déterminons les points d'intersection P et Q de  $(C_a)$  avec la droite  $(S): y = x + m, m \in \mathbb{R}$

$$f_a(x) = y \Leftrightarrow f_a(x) = x + m$$

$$\Leftrightarrow x + a e^{-|x|} = x + m$$

$$\Leftrightarrow e^{-|x|} = \frac{m}{a} \quad (*)$$

1er cas :  $\frac{m}{a} \leq 0$ .

(1) n'a pas de sens et  $(C_a) \cap (S) = \emptyset$

2e cas  $\frac{m}{a} > 0$

$$(1) \Leftrightarrow -|x| = \ln\left(\frac{m}{a}\right) \Leftrightarrow |x| = \ln\left(\frac{a}{m}\right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \ln\left(\frac{a}{m}\right) \text{ ou } x_2 = -\ln\left(\frac{a}{m}\right) = \ln\left(\frac{m}{a}\right)$$

$$f_a(x_1) = m + \ln\left(\frac{a}{m}\right); \quad f_a(x_2) = m + \ln\left(\frac{m}{a}\right)$$

$P\left(\ln\left(\frac{a}{m}\right); m + \ln\left(\frac{a}{m}\right)\right)$
$Q\left(\ln\left(\frac{m}{a}\right); m + \ln\left(\frac{m}{a}\right)\right)$

b/ - Coordonnées du point J milieu du segment [PQ]

$$\gamma_J = \frac{1}{2}(\gamma_P + \gamma_Q) = 0$$

$$\gamma_J = \frac{1}{2}(\gamma_P + \gamma_Q) = m$$

$$J(0; m)$$

- Ensemble des points J lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}$ .

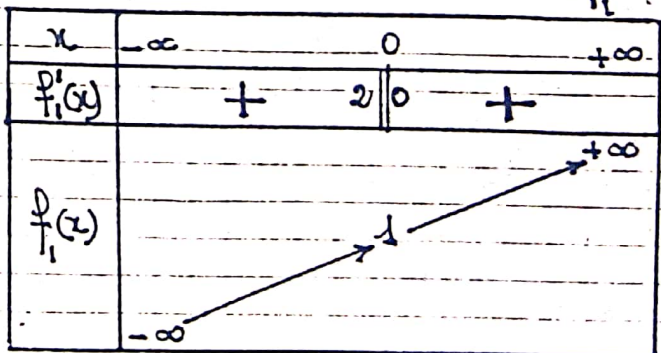
J existe ssi  $m \cdot a > 0$

L'ensemble des points J lorsque  $m$  varie est l'axe (Oy) privé du point O.

PARTIE B

Dans cette partie on prend  $a = 1$

1/a/ Tableau de variation de  $f_1$

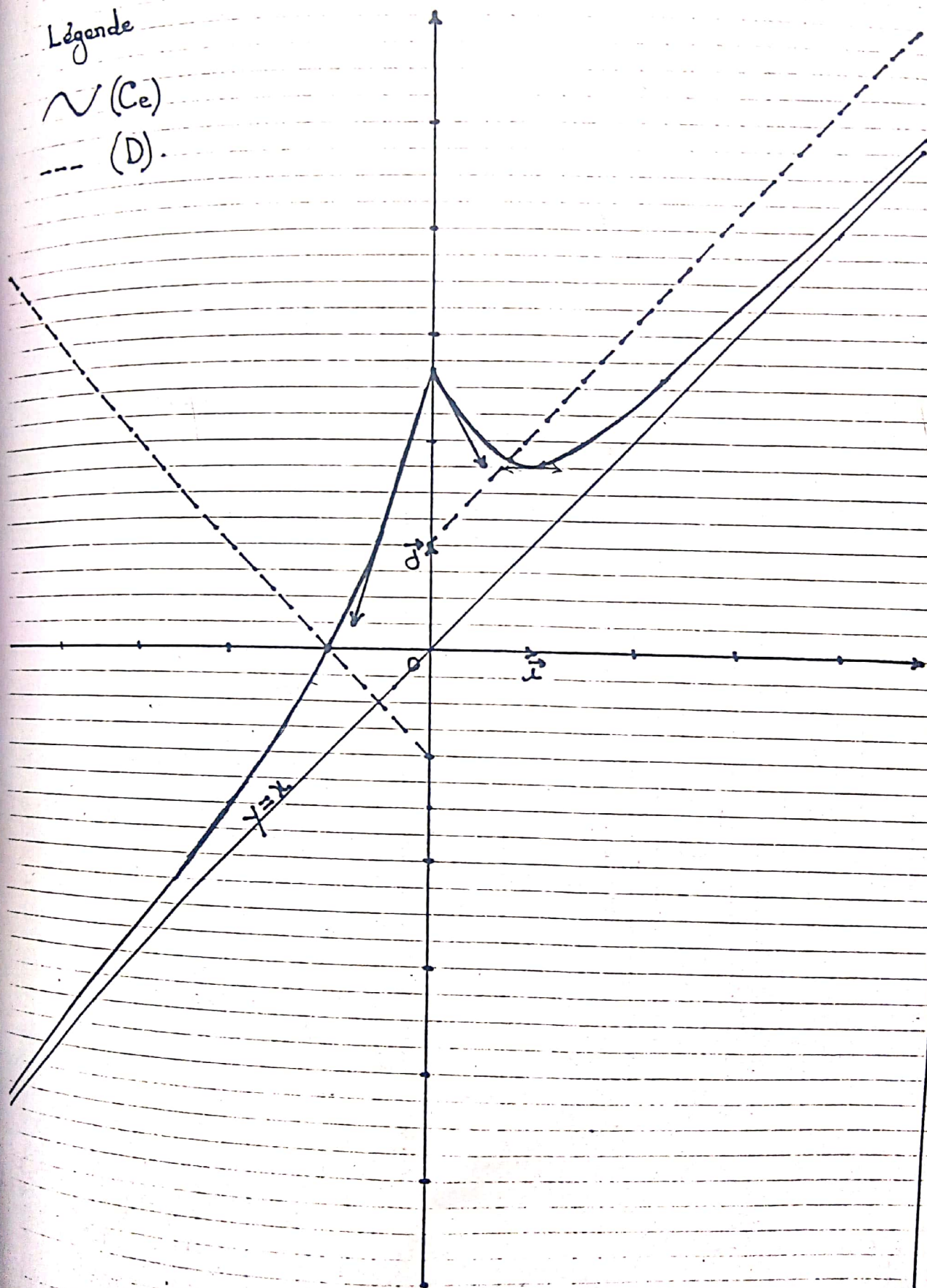


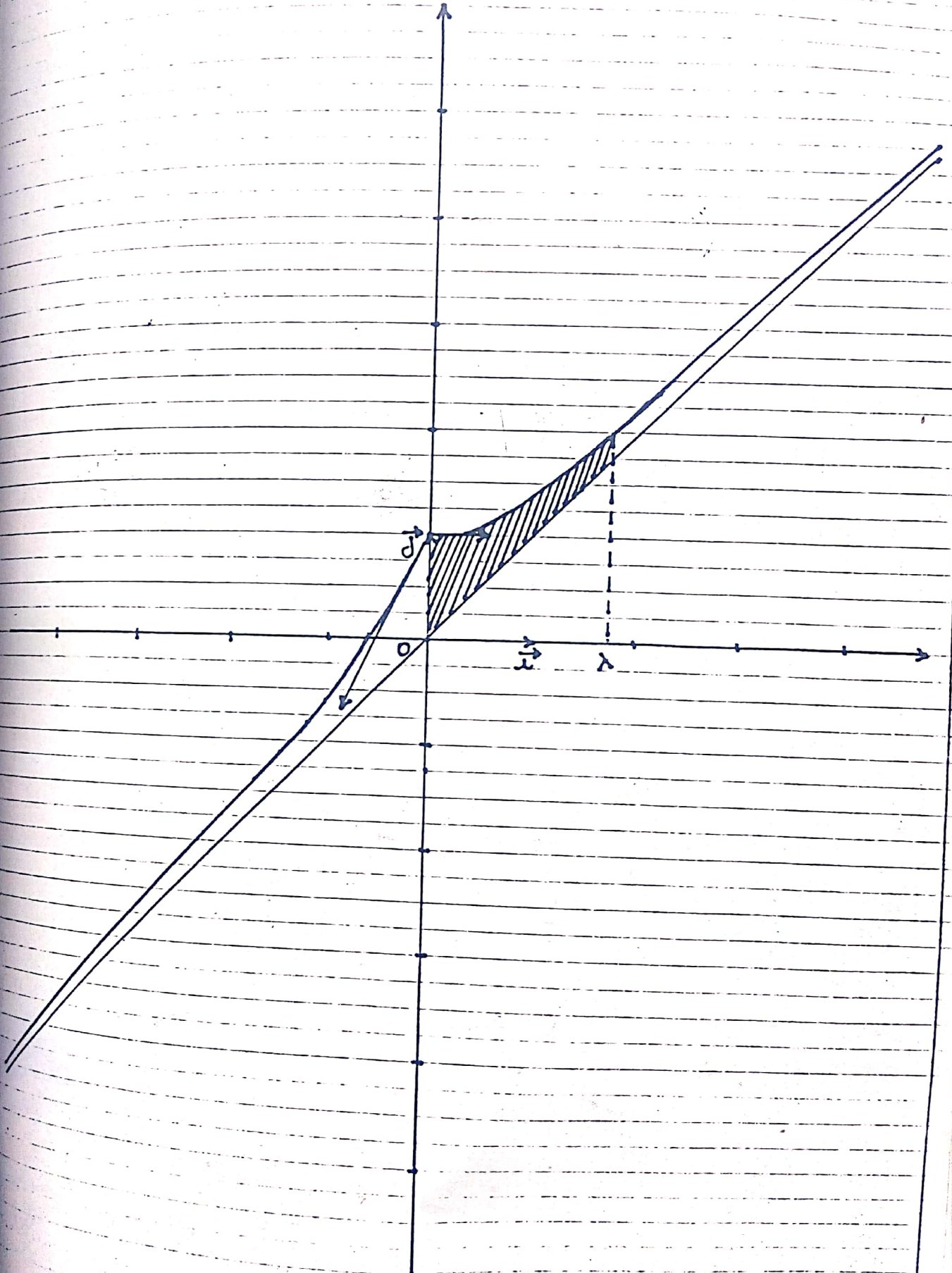
b/ Construction de  $(C_1)$ , ses demi-tangentes au point d'abscisse 0 et son asymptote (Voir figure à la page

Légende

~ (C<sub>e</sub>)

- - - (D)



Construction de la courbe  $(C_1)$ .

2/ Soit l'ensemble des points  $M(x; y)$

tels que:  $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ x \leq y \leq f_1(x) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$

a/ Calculer l'aire  $S'$  de cet ensemble

$$S' = \int_0^\lambda (f_1(x) - x) dx = \int_0^\lambda e^{-x} dx$$

$$= [-e^{-x}]_0^\lambda = (1 - e^{-\lambda}) \text{ u.a.}$$

$$S' = 4(1 - e^{-\lambda}) \text{ cm}^2$$

b/ Limite de  $S'$  lorsque  $\lambda$  tend vers

l'infinie

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S' = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 4(1 - e^{-\lambda}) = 4 \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S' = 4 \text{ cm}^2$$

**PROBLEME N° 24**

PARTIE A.

On considère les fonctions numériques

$f_m$  de la variable réelle  $x$  définies par:

$$f_m(x) = e^x - m(x+1) \quad m \in \mathbb{R}. \text{ On désigne par } (C_m) \text{ leurs courbes dans le plan}$$

muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique 2cm)

a/ Etude des variations de  $f_1$

$$f_1(x) = e^x - (x+1)$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - (x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - (x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$$

Dérivée

$f_1$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = e^x - 1$$

$$f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Signe de  $f_1'(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$0$	$+$

D'après le tableau ci-dessus:

$f_1$  est strictement décroissante sur

$]-\infty; 0[$ , strictement croissante sur

$]0; +\infty[$  et admet un minimum au

point  $0$ .  $f_1(0) = 0$

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f_1(x)$	$+\infty$	$0$	$+\infty$

## Construction de la courbe (C)

### Branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) + (x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

la courbe (C) admet en  $-\infty$  la droite d'équation  $y = -x - 1$  comme asymptote oblique.

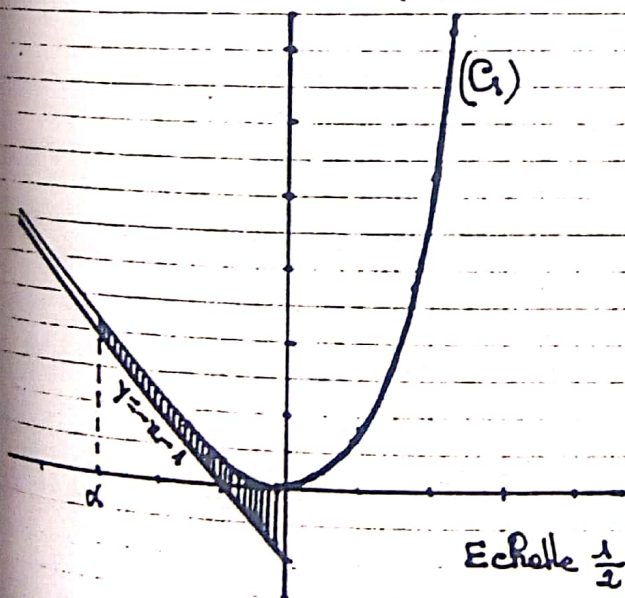
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}$$

$$= +\infty \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

La courbe (C) admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction (Oy)

### Construction de (C)



2/ Soit (A) la droite d'équation  $y = -x - 1$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^-$

Calculons l'aire  $A(\alpha)$  de la portion du plan limitée par (C), (A) et les

droites d'équations :  $x=0$  et  $x=\alpha$

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^0 (f_1(x) - (-x-1)) dx$$

$$= \int_{\alpha}^0 e^x dx = [e^x]_{\alpha}^0 = (1 - e^{\alpha}) \text{ u.a}$$

$$A(\alpha) = (1 - e^{\alpha}) \text{ u.a} = 4(1 - e^{\alpha}) \text{ cm}^2$$

$$A(\alpha) = 4(1 - e^{\alpha}) \text{ cm}^2$$

Calculons la limite de  $A(\alpha)$  quand  $\alpha$  tend vers  $-\infty$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} 4(1 - e^{\alpha})$$

$$= 4 \text{ car } \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} e^{\alpha} = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} A(\alpha) = 4 \text{ cm}^2$$

3/ Pour tout entier naturel  $n$ , on définit par  $(D_n)$  le domaine limité par (A), (C) et les droites d'équations  $x = -n - 1$  et  $x = -n$

a/ Calculons en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A_n$  du domaine  $(D_n)$ .

$$A_n = 4 \int_{-n-1}^{-n} (f_1(x) - (-x-1)) dx$$

$$= 4 \int_{-n-1}^{-n} e^x dx = 4 [e^x]_{-n-1}^{-n}$$

$$= 4(e^{-n} - e^{-n-1})$$

$$= 4e^{-n} (1 - e^{-1})$$

$$A_n = \frac{4}{e} (e-1) e^{-n}$$

b/ Montrons que la suite  $(A_n)$  est une suite géométrique dont nous précisons le 1<sup>er</sup> terme  $A_0$  et la raison

$$A_n = \frac{4}{e} (e-1) e^{-n} \quad A_0 = \frac{4}{e} (e-1)$$

$$A_{n+1} = \frac{4}{e} (e-1) e^{-n-1} \\ = \frac{4}{e} (e-1) e^{-n} \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} A_n$$

$$A_{n+1} = \frac{1}{e} A_n$$

la suite  $(A_n)$  est donc une suite géométrique de 1<sup>er</sup> terme  $A_0 = \frac{4}{e} (e-1)$  et de raison  $q = \frac{1}{e} = e^{-1}$

c/ Calculons  $S_n = A_0 + A_1 + \dots + A_n$

$$S_n = A_0 \frac{1 - (e^{-1})^{n+1}}{1 - e^{-1}} \\ = 4(1 - e^{-1}) \frac{1 - e^{-n-1}}{1 - e^{-1}}$$

$$S_n = 4(1 - e^{-n-1})$$

Déduisons-en la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4(1 - e^{-n-1}) \\ = 4 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n-1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 4$$

4/ Etudions suivant les valeurs de  $m$ , les variations de  $f_m$ :

$$f_m(x) = e^x - m(x+1)$$

$$Df_m = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - m(x+1)$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{si } m < 0 \\ +\infty & \text{si } m > 0 \\ 0 & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

$$\forall m \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = +\infty$$

Dérivée

$f_m$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = e^x - m$$

$\forall m \leq 0, f'_m(x) > 0$ ;  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

1<sup>er</sup> cas  $m < 0$

Tableau de variation de  $f_m$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2<sup>e</sup> cas  $m = 0$

Tableau de variation de  $f_0$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	
$f_0(x)$	0	$+\infty$

3<sup>e</sup> cas  $m > 0$

$$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = m \Leftrightarrow x = \ln m.$$

$$f_m(\ln m) = m - m(\ln m + 1) = -m \ln m.$$

Signe de  $f'_m(x)$

$x$	$-\infty$	$l_n m$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	$0$	$+$

Sens de variation de  $f_m$

$\forall x \in ]-\infty; l_n m[$   $f'_m(x) < 0$ ;  $f_m$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; l_n m[$

$\forall x \in ]l_n m; +\infty[$   $f'_m(x) > 0$ ;  $f_m$  est strictement croissante sur  $]l_n m; +\infty[$

$f_m$  admet un minimum au point  $l_n m$

Tableau de variation de  $f_m$

$x$	$-\infty$	$l_n m$	$+\infty$
$f'_m(x)$	$-$	$0$	$+$
$f_m(x)$	$+\infty$	$-m l_n m$	$+\infty$

5/ Montrons que toutes courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe B

Posons  $y = f_m(x) \Leftrightarrow y = e^x - m(x+1)$

$\Leftrightarrow y - e^x = -m(x+1)$

$\begin{cases} x+1=0 \\ y-e^x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=e^{-1} = \frac{1}{e} \end{cases}$

Toutes les courbes  $(C_m)$  passent par le point  $B(-1; \frac{1}{e})$

6/ Montrons que la droite  $(\Delta_m)$ :  $y = -mx - m$  est asymptote à  $(C_m)$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_m(x) + mx + m}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x} = 0$

La droite  $(\Delta_m)$ :  $y = -mx - m$  est asymptote oblique à  $(C_m)$  à  $-\infty$ .

Position relative de  $(C_m)$  et  $(\Delta_m)$

$f_m(x) - (-mx - m) = e^x > 0$

La courbe  $(C_m)$  est au dessus de  $(\Delta_m)$

PARTIE B

A tout point M du plan d'affixe  $z = x + iy$ , on associe par une transformation T, le point M' d'affixe  $z' = x' + iy'$

$T: P \rightarrow P$

$M \rightarrow M'$  et  $z' = (1-i)z + 1+i$

1/ Nature de T

L'écriture complexe de (T) est sous la forme:  $z' = az + b$  avec  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b \in \mathbb{C}$

T est donc une similitude plane directe

2/ Définition analytique de T.

$z' = (1-i)z + 1+i$

$= (1-i)(x+iy) + 1+i$

$z' = x+y+1 + i(-x+y+1)$ , En posant  $z' = x' + iy'$

on a:

$\begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = -x+y+1 \end{cases}$

3/  $M$  étant un point de  $(C)$ , déterminons en fonction de  $x$ , abscisse de  $M$  les coordonnées de  $M' = T(M)$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow y = e^x - x - 1$$

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 = x + e^x - x - 1 + 1 = e^x \\ y' = -x + y + 1 = -x + e^x - x - 1 + 1 = e^x - 2x \end{cases}$$

$$M'(e^x; e^x - 2x)$$

4/ Déterminons l'ensemble  $(\gamma)$ , image par  $T$  de la courbe  $(C)$

$$\begin{cases} M(x; y) \in (C) \\ M'(x'; y') = T(M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = e^x \\ y' = e^x - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln x', x' > 0 \\ y' = x' - 2 \ln x' \end{cases}$$

L'ensemble  $(\gamma)$  image par  $T$  de la courbe  $(C)$  est la courbe d'équation  $y = x - 2 \ln x, x > 0$

PARTIE C

On considère la fonction numérique  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par:

$$g(x) = x - \ln(x^2).$$

1/ Étudions les variations de  $g$ :

$$\mathcal{D}g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\}$$

$$\mathcal{D}g = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

limites de  $g$  aux bornes de  $\mathcal{D}g$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - \ln x^2 = -\infty$$

car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right) \\ &= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Dérivée:

$g$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$   
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Signe de  $g'(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$  $	$-$	$+$

Sens de variation de  $g$

$\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[$   $g'(x) > 0$ ;  
 $g$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 0[$

et sur  $]2; +\infty[$   
 $\forall x \in ]0; 2[$ ,  $g'(x) < 0$ ;  $g$  est strictement décroissante sur  $]0; 2[$ .

$g$  admet un minimum local au point 2  
 $g(2) = 2 - \ln 4 = 2(1 - \ln 2)$

Tableau de variations de  $g$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$2(1 - \ln 2)$	$+\infty$

Soit  $(\Gamma)$  la courbe de  $g$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Précisons les branches infinies de  $(\Gamma)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

La droite d'équation  $x=0$  est asymptote verticale à la courbe  $(\Gamma)$ .

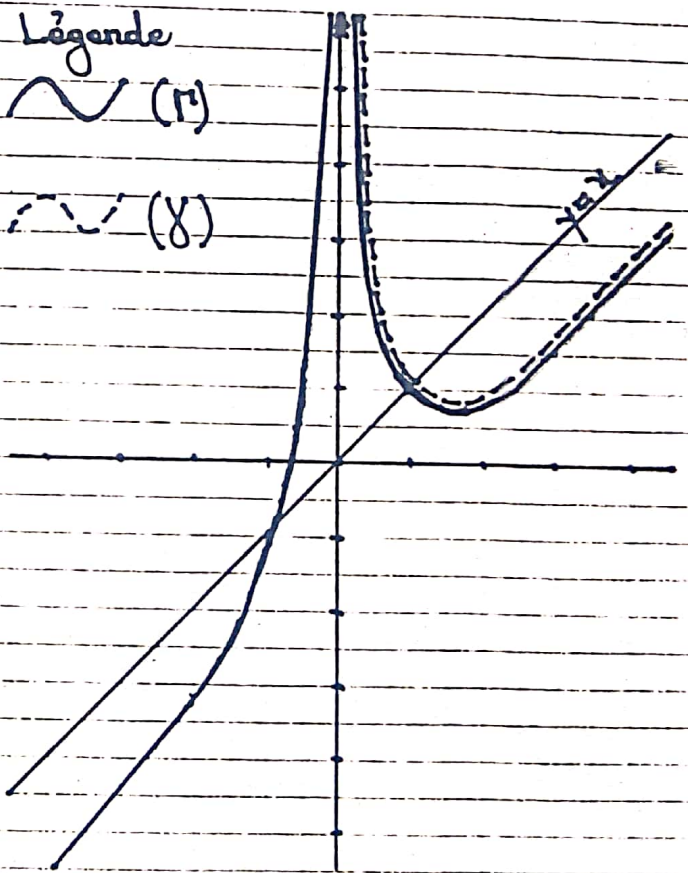
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2 \frac{\ln|x|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - 2 \frac{\ln(-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2 \frac{\ln x}{x}, \quad x = -x \\ &= 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 2 \frac{\ln x}{x} \\ &= 1 + 2 \times 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) - x &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\ln(x^2) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln x, \quad x = x^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) - x = -\infty$$

La courbe  $(\Gamma)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y=x$



2) Démontrons que l'équation  $g(x)=0$  admet une seule solution dont nous donnerons un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$

- D'après les variations de  $g$  on a:
- $\forall x > 0$ ,  $g(x) \geq 2(1 - \ln 2) > 0$
  - la restriction de  $g$  à  $] -\infty; 0[$  définit

une bijection de  $]-\infty; 0[$  sur  $\mathbb{R}$ .

L'équation  $g(x) = 0$  admet donc une seule solution.

Notons  $\alpha$  cette solution on a:

3/ Traçons  $(\gamma)$  dans le même repère que (1). (Voir figure à la page précédente)

### PROBLEME N° 25

Soit la fonction numérique  $f$  définie par:  $f(x) = 2x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)}$ . On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 1cm).

#### PARTIE A

1/ - Déterminons l'ensemble de définition  $D$  de  $f$ .

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0 \right\}$$

Posons  $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

$$D = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

- Etude de la parité de  $f$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2(-x) + \frac{e^{-x} + 1}{2(e^{-x} - 1)} \\ &= -2x + \frac{e^{-x}(1 + e^x)}{2e^{-x}(1 - e^x)} \end{aligned}$$

$$f(-x) = -2x - \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)}$$

$$= -\left(2x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)}\right) = -f(x)$$

$$f(-x) = -f(x).$$

On en déduit que  $f$  est une fonction impaire

2/ Montrons que pour tout  $x$  de  $D$

on a:  $f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$

$$\forall x \in D, f(x) = 2x + \frac{e^x + 1}{2(e^x - 1)}$$

$$= 2x + \frac{e^x - 1 + 2}{2(e^x - 1)}$$

$$= 2x + \frac{e^x - 1}{2(e^x - 1)} + \frac{2}{2(e^x - 1)}$$

$$= 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$\forall x \in D, f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

3/ Calcul des limites de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

- limites de  $f$  en 0

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

Posons  $D(x) = e^x - 1$

Signe de  $D(x)$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$D(x)$	$-$	$0$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= -\infty \text{ car } \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \\ e^x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x > 0} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} 2x + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \\ e^x - 1 \rightarrow 0 \\ e^x - 1 > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$
---	---

- limite de f en +∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{2} = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
---

4/ a/ Montrons que la droite (Δ) d'équation  $y = 2x - \frac{1}{2}$  est asymptote à (C) en -∞

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - \frac{1}{2})] = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - \frac{1}{2})] = 0$$

On en déduit que la droite (Δ):  $y = 2x - \frac{1}{2}$  est asymptote oblique à (C) en -∞

b/ Etude de la position de (C) par rapport à (Δ)

Posons  $g(x) = f(x) - (2x - \frac{1}{2}) = \frac{e^x}{e^x - 1}$   
 $g(x)$  est du signe de  $e^x - 1$  sur D. car  $e^x > 0$  sur D.

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
Position de (C) par rapport à (Δ)	(C) est en dessous de (Δ)	(C) est au dessus de (Δ)	(C) est au dessus de (Δ)

c/ Déterminons les autres asymptotes à la courbe (C)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + \frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$$

Conclusion

La courbe (C) possède deux autres asymptotes dont une verticale d'équation  $x = 0$  et une oblique d'équation  $y = 2x + \frac{1}{2}$  en +∞

PARTIE B

1/ Résolution dans ℝ de l'inéquation  
 $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$  (I)

Posons  $P(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$   
 $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$  (2)  
 Posons  $X = e^x$

(2)  $\Leftrightarrow 2X^2 - 5X + 2 = 0$   
 $\Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$X_1 = \frac{1}{2} \quad X_2 = 2$

$e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$   
 $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$   
 $P(x) = 2(e^x - \frac{1}{2})(e^x - 2)$

Signe de P(x)

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^{x-\frac{1}{2}}$	-	o	+	+
$e^x - 2$	-	-	o	+
P(x)	+	o	-	+

(I)  $\Leftrightarrow P(x) > 0$

$S = ]-\infty; -\ln 2[ \cup ]\ln 2; +\infty[$

2/- Déterminons la fonction dérivée de f

f est dérivable sur D comme somme des fonctions:

$x_1 \rightarrow 2x + \frac{1}{2}$  et  $x_2 \rightarrow \frac{1}{e^x - 1}$  toutes dérivables sur D.

$\forall x \in D, f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$

$\forall x \in D, f'(x) = \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}$

$\forall x \in D, (e^x - 1)^2 > 0, f'(x)$  est donc du signe de  $2e^{2x} - 5e^x + 2$ . Ainsi:

$\forall x \in ]-\infty; -\ln 2[ \cup ]\ln 2; +\infty[, f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur  $]-\infty; -\ln 2[$  et sur  $]\ln 2; +\infty[$

$\forall x \in ]-\ln 2; 0[ \cup ]0; \ln 2[, f'(x) < 0$

f est donc strictement décroissante sur  $]-\ln 2; 0[$  et sur  $]0; \ln 2[$ .

$f'(-\ln 2) = 0 \quad f'(\ln 2) = 0$

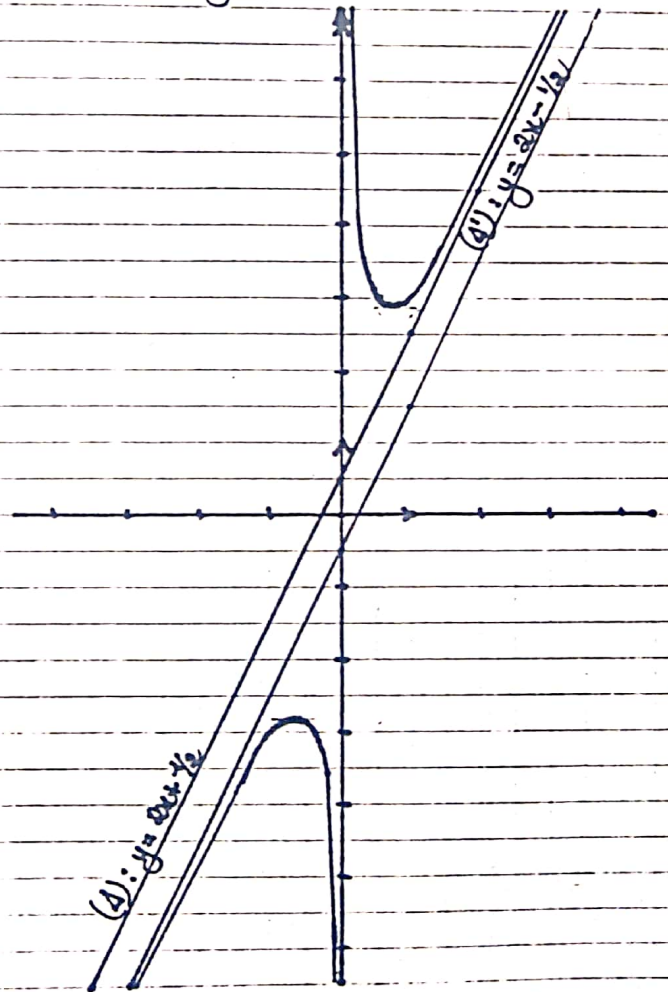
$f(-\ln 2) = -(2\ln 2 + \frac{3}{2})$

$f(\ln 2) = 2\ln 2 + \frac{3}{2}$

Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	$-\infty$	$-(2\ln 2 + \frac{3}{2})$	$+\infty$	$2\ln 2 + \frac{3}{2}$	$+\infty$

3/- Construction de la courbe (C) et de ses asymptotes



4/- Déterminons l'intersection de (C)

et de la droite (Dm): y = 2x + m où m est un paramètre réel

Pour  $m = -\frac{1}{2}, D_m = D_{-\frac{1}{2}}$  est confondue à  $\Delta'$

Pour  $m = \frac{1}{2}, D_m = D_{\frac{1}{2}}$  est confondue à  $\Delta'$

Résumons les résultats dans le tableau ci-dessous

$m$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Nombre de pts d'inf de (C) et (Dn)	1	0	0	1

PARTIE C

Soit  $n$  un entier naturel supérieur

à 1. On définit:  $I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$

1/ a/ Interprétation graphique de  $I_n$

$$I_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \left( f(t) - \left(2t - \frac{1}{2}\right) \right) dt$$

$I_n$  est l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation  $y = 2x - \frac{1}{2}$  et les droites d'équations  $x = \ln n$  et  $x = \ln(n+1)$

b/ Prouvons que  $I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \left[ \ln(e^t - 1) \right]_{\ln n}^{\ln(n+1)} \\ &= \ln(n+1-1) - \ln(n-1) \\ &= \ln n - \ln(n-1) \\ &= \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$I_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

c/ Calculons la limite de  $I_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$$

$$= 0 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

2/ On considère  $S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$

A l'aide de la courbe (C) de  $f$ , donnons une interprétation graphique de  $S_n$

$$S_n = I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^t}{e^t - 1} dt + \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^t}{e^t - 1} dt + \dots + \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$$

$$S_n = \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt$$

$S_n$  est l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) d'équation  $y = 2x - \frac{1}{2}$  et les droites d'équations  $x = \ln 2$  et  $x = \ln(n+1)$ .

Calculons  $S_n$

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t - 1} dt = \left[ \ln(e^t - 1) \right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)} \\ &= \ln(n+1-1) - \ln(2-1) \\ &= \ln n \end{aligned}$$

$$S_n = \ln n$$

3/ Calcul de  $A_n$  en  $cm^2$

$$A_n = S_n$$

$$A_n = \ln n \text{ cm}^2$$

Calculons la limite de  $A_n$  en  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty$$

# PROBLEME N° 26

1/ Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $g(x) = (x+1)e^{-x}$  et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a/ Etudions les variations de  $g$

$Dg = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^{-x}$   
 $= -\infty$  car  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x+1 = -\infty \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)e^{-x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + e^{-x} = 0 + 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

Dérivée

$g$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme produit des fonctions  $x \mapsto x+1$  et  $x \mapsto e^{-x}$  toutes dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -x e^{-x}$   
 $g'(x) = -x e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ ;  $g'(x)$  a donc le signe de  $-x$ .  
 $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

Signe de  $g'(x)$

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$0$	$-$	

Sens de variation de  $g$

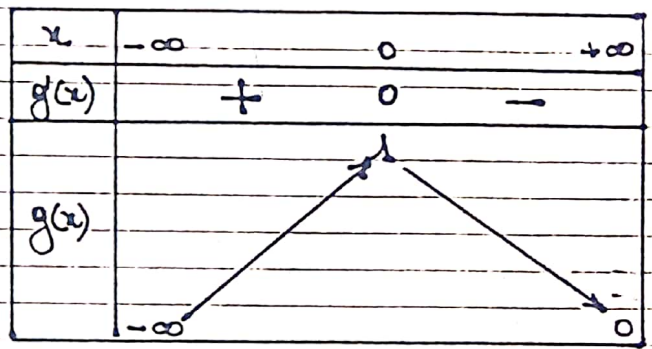
$\forall x \in ]-\infty; 0[, g'(x) > 0$ ;  $g$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty; 0[$

$\forall x \in ]0; +\infty[, g'(x) < 0$ ;  $g$  est donc strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

$g$  admet un maximum en  $0$

$g(0) = 1$

Tableau de variation de  $g$



b/ Construction de (C) avec asymptotes

Branches infinies

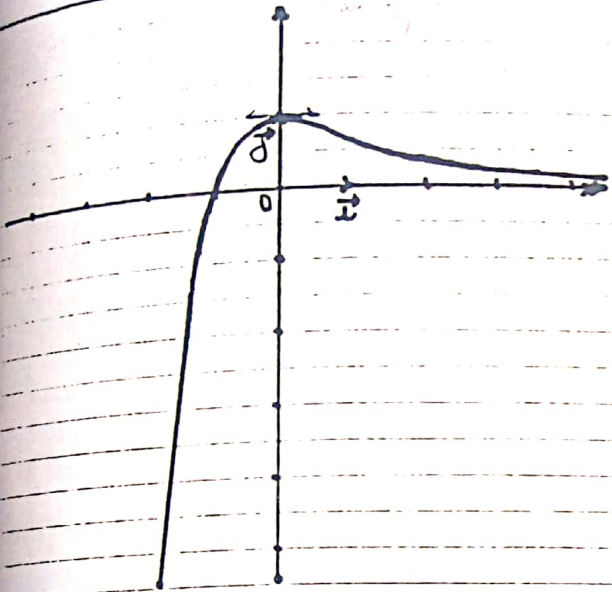
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})e^{-x} = +\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ . On en déduit que la courbe (C) admet en  $-\infty$  une branche parabolique de direction  $(Oy)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . (C) possède en  $+\infty$  une asymptote horizontale d'équation:  $y = 0$

Tableau de valeurs

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$g(x)$	$-e^2$	$0$	$1$	$\frac{2}{e}$	$\frac{3}{e^2}$



2/ Soit les fonctions  $f_a$ , de variable réelle  $x$  définies par:  $f_a(x) = e^{-x} + ax$ , où  $a$  est un paramètre réel. On désignera par  $(C_a)$  la courbe représentative de la fonction  $f_a$  dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Etudions les fonctions  $f_a$  pour  $a \in \{-1; 0; 1\}$

\* Etude de  $f_{-1}$

$f_{-1}(x) = e^{-x} - x; D_{f_{-1}} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + x, X = -x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - x = -\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-1}(x) = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-1}(x) = -\infty$

Dérivée:

$f_{-1}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  étant somme de fonctions  $x \mapsto e^{-x}$  et  $x \mapsto -x$  toutes continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$f'_{-1}(x) = -e^{-x} - 1 = -(e^{-x} + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_{-1}(x) < 0$ ;  $f_{-1}$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Tableau de variation de  $f_{-1}$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_{-1}(x)$	—	
$f_{-1}(x)$	$+\infty$	$-\infty$

\* Etude de  $f_0$

$f_0(x) = e^{-x} \quad D_{f_0} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X, X = -x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0$

Dérivée

$f_0$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_0(x) = -e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_0(x) < 0$ ;  $f_0$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Tableau de variation de  $f_0$

$x$	$-\infty$		$+\infty$
$f_0'(x)$		-	
$f_0(x)$	$+\infty$	↘	
			0

\* Etude de  $f_1$

$f_1(x) = e^{-x} + x; \mathcal{D}f_1 = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + x$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1 + xe^x)$   
 $= +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + x$   
 $= +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$

Dérivée :

$f_1$  est la somme de fonctions :  $x \mapsto e^{-x}$  et  $x \mapsto x$  toutes continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ .  $f_1$  est par conséquent continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = -e^{-x} + 1$   
 $f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad f_1(0) = 1$

Signe de  $f_1'(x)$

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+	

Sens de variation de  $f_1$

$\forall x \in ]-\infty; 0[, f_1'(x) < 0; f_1$  est donc strictement décroissante sur  $]-\infty; 0[$

$\forall x \in ]0; +\infty[, f_1'(x) > 0; f_1$  est donc strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

$f_1$  admet un minimum au point 0.

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	$-\infty$		$0$		$+\infty$
$f_1'(x)$		-	0	+	
$f_1(x)$	$+\infty$	↘		↗	
			1		$+\infty$

Construction des courbes  $C_{-1}, C_0$  et  $C_1$

Branches infinies

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

En  $+\infty$ ,  $(C_{-1})$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = -x$ ,  $(C_0)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 0$  et  $(C_1)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = x$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{e^{-x}}{x}$   
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \frac{e^x}{x}, X = -x$   
 $= -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_0(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e^x}{x}, \quad x = -x$$

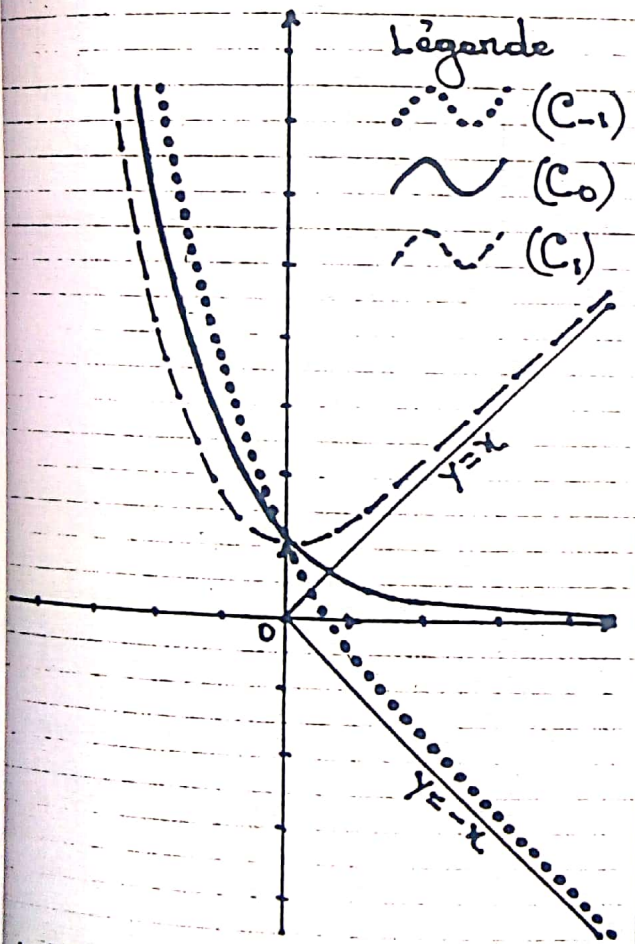
$$= -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{e^x}{x}, \quad x = -x$$

$$= -\infty$$

Pour  $a \in \{-1; 0; 1\}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_a(x)}{x} = -\infty.$

En  $-\infty$ , les courbes  $(C_{-1})$ ,  $(C_0)$  et  $(C_1)$  possèdent une branche parabolique de direction  $(Oy)$ .



b/ Construisons le tableau de variation de  $f_a$  suivant les valeurs de  $a$ .

1er cas  $a < 0$

$$\mathcal{D}_{f_a} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + ax = +\infty \text{ car } e^{-x} \rightarrow +\infty \text{ et } ax \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + ax$$

$$= -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Pour  $a < 0$  on a:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = -\infty$$

Dérivée

$f_a$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = -e^{-x} + a.$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) < 0$ ;  $f_a$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

Tableau de variation de  $f_a$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	
$f_a(x)$	+	-

2<sup>e</sup> cas  $a = 0$  Voir question précédente

3<sup>e</sup> cas  $a > 0$

$$\mathcal{D}_{f_a} = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + ax$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(1 + ax e^x)$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + ax$$

$$= +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ et } a > 0$$

Dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_a(x) = -e^{-x} + a$$

$$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = a \Leftrightarrow x = -\ln a$$

$$f_a(-\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a = a(1 - \ln a)$$

Tableau de variation de  $f_a$

$x$	$-\infty$	$-\ln a$	$+\infty$
$f'_a(x)$	-	0	-
$f_a(x)$	$+\infty$	$a(1 - \ln a)$	$+\infty$

Valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f_a$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$    
 Soit  $E$  cet ensemble. On a d'après la question précédente :

$$E = ]-\infty; 0[$$

Valeurs de  $a$  pour lesquelles  $f_a$  admet un extrémum

D'après ce qui précède,  $f_a$  admet un extrémum pour  $a > 0$ .

- Soit  $I$  le point de  $(C_a)$  correspondant à cet extrémum

• Indiquons en fonction de  $a$  les coordonnées de  $I$

$$I(-\ln a; a(1 - \ln a))$$

• Ensemble des points  $I$  lorsque  $a$  varie

$$\begin{cases} x = -\ln a \\ y = a(1 - \ln a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e^{-x} \\ y = e^{-x}(1+x) \end{cases}$$

L'ensemble des points  $I$  lorsque  $a$  varie est la courbe  $(C)$  représentative de la fonction  $g$ .

c/ Utilisons les résultats précédents pour discuter suivant les valeurs de  $a$ , l'équation d'inconnue réelle  $x$ :

$$(E): e^{-x} + ax = 0$$

$(E) \Leftrightarrow f_a(x) = 0$ . Les solutions de  $(E)$  sont donc les abscisses des points d'intersection de  $(C_a)$  avec l'axe  $(Ox)$

1<sup>er</sup> cas  $a < 0$

On sait que pour  $a < 0$ ,  $f_a$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$

$(E)$  admet donc une seule solution

2<sup>e</sup> cas  $a = 0$

Pour  $a = 0$ ,  $f_0$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+^*$ .

$(E)$  n'admet donc pas de solution.

3<sup>e</sup> cas  $a > 0$

$f_a$  possède un minimum en  $-\ln a$  et ce minimum est  $a(1 - \ln a)$ .

Le nombre de solutions de  $(E)$  dépend du signe de  $a(1 - \ln a)$

$a$	0	e	$+\infty$
$1 - \ln a$	+	0	-

•  $0 < a < e$

$a(x - \ln a) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) > 0.$

(E) n'admet donc pas de solution

•  $a = e$

(E) admet une seule solution  $x = -1$

•  $a > e$

(E) admet deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$ .

3/ a/ Montrons que quel que soit  $a$ ,

les fonctions  $f_a$  vérifient l'équation

différentielle  $y - xy' = (x+1)e^{-x}$

$f_a(x) = e^{-x} + ax; f'_a(x) = -e^{-x} + a.$

$$\begin{aligned} y - xy' &= f_a(x) - x f'_a(x) \\ &= e^{-x} + ax - x(-e^{-x} + a) \\ &= e^{-x} + ax + xe^{-x} - ax \\ &= e^{-x} + xe^{-x} = (x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

$f_a(x) - x f'_a(x) = (x+1)e^{-x}$

$\forall a, f_a$  vérifie l'équation différentielle :  $y - xy' = (x+1)e^{-x}$ .

b/ Equation de la tangente  $\bar{a}(C_a)$  au point d'abscisse  $x_0$

Soit (T) cette tangente on a:

(T) :  $y = f'_a(x_0)(x - x_0) + f_a(x_0)$

Montrons que (T) coupe l'axe (Oy) en un point indépendant de  $a$ .

Pour  $x=0$  on a :  $y = f_a(x_0) - x_0 f'_a(x_0)$

$y = (x_0+1)e^{-x_0}$

(T) coupe (Oy) en  $B(0; (x_0+1)e^{-x_0})$

c/ Soit P un point de (Oy), d'ordonnée  $m$ . Etudions, selon les valeurs de  $m$

le : nombre de tangente  $\bar{a}(C_a)$  issues de P

$P(0; m) \in (T) \Leftrightarrow (x_0+1)e^{-x_0} = m$

$\Leftrightarrow g(x_0) = m$

le nombre de tangentes  $\bar{a}(C_a)$  issues de P est le nombre de solutions de l'équation d'inconnue  $x_0 : g(x_0) = m$

En utilisant la courbe (C) de  $g$  dans la question on a:

$m$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
nbre de tangentes issues de P	1	2	0	

4/ Déterminons les courbes  $(C'_a)$

et  $(C_a)$  ayant les deux propriétés suivantes :

- \* ces courbes sont orthogonales  $(P_1)$
- \* les asymptotes de ces courbes sont perpendiculaires  $(P_2)$

$(P_1)$  signifie que les tangentes respectives  $\bar{a}(C'_a)$  et  $\bar{a}(C_a)$  en leur point d'intersection sont orthogonales

On a  $(Ca')$  et  $(Ca)$  se coupent en  $A(0; 1)$   
 Les tangentes  $\bar{a}(Ca')$  et  $\bar{a}(Ca)$  en  $A$   
 ont respectivement pour coefficients  
 directeurs  $f'_{a'}(0)$  et  $f'_a(0)$

$(P_1) \Leftrightarrow f'_{a'}(0) \cdot f'_a(0) = -1$   
 $\Leftrightarrow (a'-1)(a-1) = -1$   
 $(P_2) \Leftrightarrow aa' = -1$   
 $(P_1) \text{ et } (P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} aa' - (a+a') + 1 = -1 \\ aa' = -1 \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a+a' = 1 \\ aa' = -1 \end{cases}$

$a$  et  $a'$  sont solutions de l'équation  
 $t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$   
 $t_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$      $t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

On a donc:

$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$      $a' = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$   
 ou inversement.

Une droite parallèle  $\bar{a}(Oy)$  coupe  
 $(Ca)$  et  $(Ca')$  en  $M'$  et  $M''$  respectivement.  
 Déterminons l'ensemble  $(\Gamma)$  des  
 milieux  $J$  de  $[M'M'']$

Posons  $x = k$  on a:  
 $M'(k, f'_a(k))$      $M''(k, f'_{a'}(k))$   
 $J(k; \frac{1}{2}(f'_a(k) + f'_{a'}(k)))$  soit  $J(k, e^{-k} + \frac{k}{2})$   
 car  $aa' = -1$

$$\begin{cases} x = k \\ y = e^{-k} + \frac{k}{2} \Leftrightarrow y = e^{-x} + \frac{x}{2} = f_{1/2}(x) \end{cases}$$

L'ensemble des points  $J$  est la courbe  
 $(C)_{1/2}$

Étudions la fonction  $f_{1/2}$

$f_{1/2}(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x$      $Df_{1/2} = \mathbb{R}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{1/2}(x) = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{1/2}(x) = +\infty$

$f'_{1/2}(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

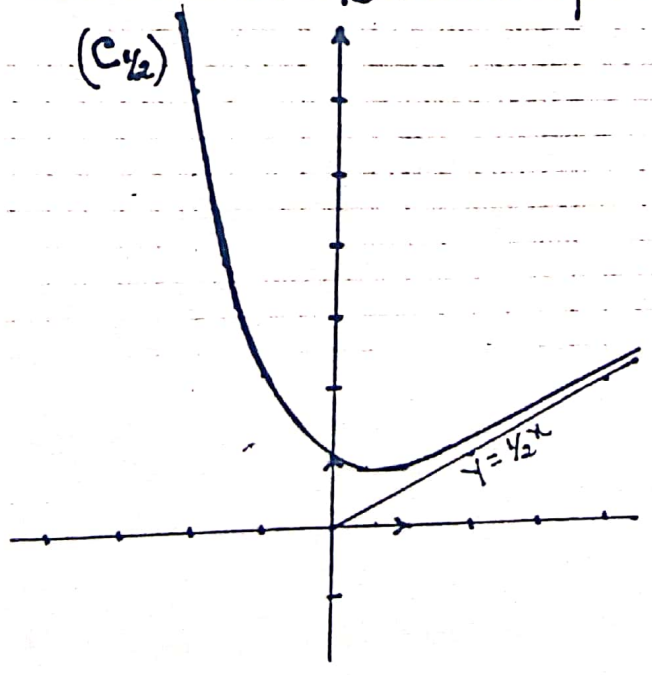
$f'_{1/2}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$f_{1/2}(\ln 2) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$

Tableau de variation de  $f_{1/2}$

$x$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f'_{1/2}(x)$	-	0	+
$f_{1/2}(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}(1 + \ln 2)$	$+\infty$

Construction de  $(C)_{1/2}$  ensemble des points  $J$



# PROBLEME N° 27

Dans ce problème,  $k$  est un nombre réel et on considère la famille de fonctions  $f_k$  définies sur  $[-1; +\infty[$  par :  $f_k(x) = (x+1)(e^{-1-x} + k)$ . On désigne par  $(C_k)$  la courbe représentative de  $f_k$  dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 4cm)

## PARTIE A

1/ Etudions suivant les valeurs de  $k$  la limite de  $f_k$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(e^{-1-x} + k)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} + kx, \quad x = x+1$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ +\infty & \text{si } k > 0 \end{cases} \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$$

Conclusion

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k = 0 \\ +\infty & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

2/ a/ Montrons que la droite  $(D_k)$  d'équation  $y = kx + k$  est asymptote  $\tilde{a}(C_k)$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_k(x) - (kx + k)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) e^{-1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}, \quad x = x+1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_k(x) - (kx + k)}{x} = 0$  d'où la droite  $(D_k) : y = kx + k$  est asymptote  $\tilde{a}(C_k)$  en  $+\infty$ .

b/ Etudions la position relative de  $(C_k)$  et  $(D_k)$

Posons  $d(x) = \frac{f_k(x)}{k} - (kx + k)$

$$= (x+1) e^{-1-x}$$

$\forall x \geq -1, d(x) \geq 0$

Conclusion

La courbe  $(C_k)$  est au dessus de la droite  $(D_k)$ .

3/ a/ Calculons la dérivée première  $f'_k$  et la dérivée seconde  $f''_k$  de  $f_k$

$$f'_k(x) = e^{-1-x} + k - (x+1)e^{-1-x}$$

$$= k - x e^{-1-x}$$

$$f''_k(x) = -e^{-1-x} + x e^{-1-x} = (x-1) e^{-1-x}$$

$$f'_k(x) = k - x e^{-1-x} \quad f''_k(x) = (x-1) e^{-1-x}$$

b/ Etudions le sens de variation de  $f'_k$

$f''_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$   
 $\forall x \geq -1, e^{-1-x} > 0$ ;  $f''_k(x)$  a donc le signe de  $x-1$ .

$x$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f''_k(x)$	$-$	$0$	$+$

D'après le tableau ci-dessus,  $f'_k$  est

strictement décroissante sur  $[-1; 1]$ ,  
strictement croissante sur  $]1; +\infty[$  et  
admet un minimum au point 1.

4. a/ \* Dressons le tableau de variation de  $f_0$

$f_0(x) = (x+1)e^{-1-x}$  ;  $Df_0 = [-1; +\infty[$   
 $f_0(-1) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0$ .

$f_0'(x) = -xe^{-1-x}$  ;  $f_0'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall x \in Df_0, e^{-1-x} > 0$  ;  $f_0'(x)$  a donc le  
signe de  $-x$ .

Signe de  $f_0'(x)$

$x$	-1	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	0	-

Sens de variation de  $f_0$

$\forall x \in [-1; 0]$ ,  $f_0'(x) > 0$  ;  $f_0$  est strictement croissante sur  $[-1; 0]$

$\forall x \in ]0; +\infty[$ ,  $f_0'(x) < 0$  ;  $f_0$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

$f_0$  admet un maximum au point 0.

$f_0(0) = e^{-1}$

Tableau de variation de  $f_0$

$x$	-1	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	+	0	-
$f_0(x)$	0	$e^{-1}$	0

\* Dressons le tableau de variation de  $f_1$

$f_1(x) = (x+1)(e^{-1-x} + 1)$  ;  $Df_1 = [-1; +\infty[$

$f_1(-1) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$

$f_1'(x) = 1 - xe^{-1-x}$

D'après la question 3/a/  $f_1'$  admet un minimum au point 1. On a donc :

$\forall x \in [-1; +\infty[$ ,  $f_1'(x) \geq f_1'(1) = 1 - \frac{1}{e^2} > 0$

$\forall x \in [-1; +\infty[$ ,  $f_1'(x) > 0$  ;  $f_1$  est donc strictement croissante sur  $[-1; +\infty[$

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	-1	$+\infty$
$f_1'(x)$		+
$f_1(x)$	0	$+\infty$

b/ Déterminons les tangentes  $(T_0)$  et  $(T_1)$  respectives aux courbes  $(C_0)$  et  $(C_1)$  au point d'abscisse -1

$(T_0) : y = f_0'(-1)(x+1) + f_0(-1)$  ;  $f_0'(-1) = 1$  ;  $f_0(-1) = 0$

$y = x+1$

$(T_1) : y = f_1'(-1)(x+1) + f_1(-1)$  ;  $f_1'(-1) = 2$  ;  $f_1(-1) = 0$

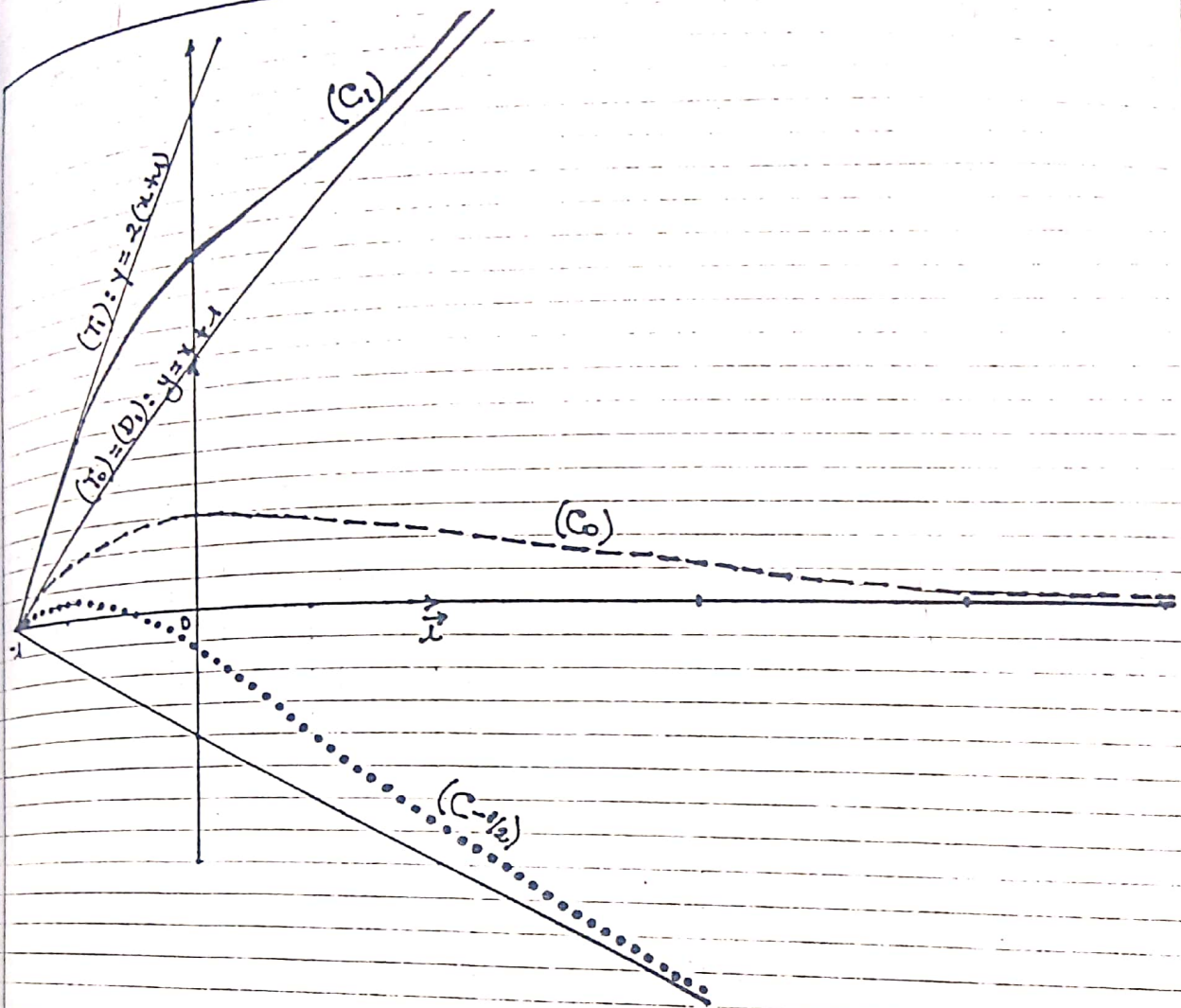
$y = 2(x+1)$

$(T_0) : y = x+1$        $(T_1) : y = 2(x+1)$

c/ Tracer de  $(D_0)$ ,  $(D_1)$ ,  $(T_0)$ ,  $(T_1)$

$(C_0)$  et  $(C_1)$

$(T_0)$  et  $(D_1)$  sont confondues



PARTIE B

1/ Montrons que l'équation  $f'_{-1/2}(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  et que  $-1 \leq \alpha \leq -0,5$

Etudions la fonction  $f'_{-1/2}$

$$f'_{-1/2}(x) = -\frac{1}{2} - x e^{-1-x}$$

$$f'_{-1/2}(-1) = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'_{-1/2}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} - x e^{-1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \cdot \frac{x}{e^x} = -\frac{1}{2}$$

$$f'_{-1/2}(x) = (x-1)e^{-1-x}; \quad f''_{-1/2}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f'_{-1/2}(1) = -\frac{1}{2} - e^{-2} < 0$$

Tableau de variation de  $f'_{-1/2}$

$x$	-1	1	$+\infty$
$f''_{-1/2}(x)$	-	0	+
$f'_{-1/2}(x)$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} - e^{-2}$	$-\frac{1}{2}$

D'après le tableau de variation de  $f'_{-1/2}$  on a:

$$\forall x \geq 1, f'_{-1/2}(x) < 0.$$

\* La restriction de  $f'_{-1/2}$  sur  $[-1; 1]$  est définie une bijection de  $[-1; 1]$  vers

$$f'_{-1/2}([-1; 1]) = [-\frac{1}{2} - e^{-2}; \frac{1}{2}]$$

or  $0 \in [-\frac{1}{2} - e^{-2}; \frac{1}{2}]$   
 Comme cette restriction définit une  
 bijection de  $[-1; 1]$  sur  $[-\frac{1}{2} - e^{-2}; \frac{1}{2}]$   
 qui contient 0.

L'équation  $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$  admet donc  
 une unique solution  $\alpha$ .

De plus :  $f'_{-\frac{1}{2}}(-0,5) = -0,1967$ .

D'après le théorème des valeurs  
 intermédiaires on a :

$$-1 \leq \alpha \leq -0,5$$

2/ Soit  $h$  l'application de  $I = [-1; -\frac{1}{2}]$   
 sur  $\mathbb{R}$ , définie par :  $h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$ .

Démontrons que  $\alpha$  est l'unique solu-  
 tion de l'équation  $h(x) = x$ .

$$h(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{1+x} = x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = xe^{-1-x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} - xe^{-1-x} = 0$$

$$h(x) = x \Leftrightarrow f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$$

or l'équation  $f'_{-\frac{1}{2}}(x) = 0$  a pour solu-  
 tion unique  $\alpha$  et  $-\frac{1}{2} - 1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2}$

Conclusion

$\alpha$  est l'unique solution de l'équation  
 $h(x) = x$

3/ Étudions les variations de  $h$

$$h(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x} \quad Dh = [-1; -\frac{1}{2}]$$

$$h(-1) = -\frac{1}{2} \quad h(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\sqrt{e}$$

$$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}], h'(x) = -\frac{1}{2}e^{1+x}$$

$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}], h'(x) < 0$ ;  $h$  est  
 donc strictement décroissante sur  
 $[-1; -\frac{1}{2}]$ .

Tableau de variation de  $h$

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$
$h'(x)$	-	
$h(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{e}$

$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}], -\frac{1}{2}\sqrt{e} < h(x) < -\frac{1}{2}$   
 or  $-1 < -\frac{1}{2}\sqrt{e}$ . On peut alors écrire :

$$\forall x \in [-1; -\frac{1}{2}], -1 < h(x) < -\frac{1}{2}$$

Conclusion

$$\forall x \in I, h(x) \in I$$

4/ On considère la suite  $(u_n)$  définie  
 par :  $u_0 = -1$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  
 $u_{n+1} = h(u_n)$ .

a/ Démontrons que tous les termes  
 de la suite  $(u_n)$  appartiennent à  $I$

$$u_0 = -1 \in I$$

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$  et  
 montrons  $u_{n+1} \in I$

On sait que :  $\forall x \in I, h(x) \in I$  donc

$$u_n \in I \Leftrightarrow h(u_n) \in I \Leftrightarrow u_{n+1} \in I.$$

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

On suppose que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  
 $|U_{n+1} - \alpha| \leq 0,83 |U_n - \alpha|$

b/ Démontrons que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  
 $|U_n - \alpha| \leq (0,83)^n \cdot \frac{1}{2}$

On sait que  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,

$$|U_{p+1} - \alpha| \leq 0,83 |U_p - \alpha|$$

Remplaçons  $p$  par :  $0, 1, 2, \dots, n-1$ .

$$|U_1 - \alpha| \leq 0,83 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq 0,83 |U_1 - \alpha|$$

⋮

$$|U_n - \alpha| \leq 0,83 |U_{n-1} - \alpha|$$

En multipliant membres à membres  
 les  $n$  égalités obtenues et en sim-  
 plifiant on a :

$$|U_n - \alpha| \leq 0,83^n |U_0 - \alpha|$$

$$-1 \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq -\alpha \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2} \leq -1 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq U_0 - \alpha \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0,83^n |U_0 - \alpha| \leq 0,83^n \cdot \frac{1}{2}$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq 0,83^n \cdot \frac{1}{2}$$

D'édisons - en que la suite  $(U_n)$  est  
 convergente et donnons sa limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,83^n = 0 \text{ car } -1 < 0,83 < 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

c/ Trouvons le plus petit entier na-  
 turel  $p$  tel que  $|U_p - \alpha| < 10^{-2}$

Cette condition est vérifiée si :

$$0,83^p \cdot \frac{1}{2} < 10^{-2} \Leftrightarrow 0,83^p < 2 \cdot 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow p \ln(0,83) < \ln(0,02)$$

$$p > \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,83)} \approx 20,99$$

On en déduit que :

$$p = 21$$

5/ Dressons le tableau de variation

de la fonction  $f_{-\frac{1}{2}}$

$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = (x+1) \left( e^{-x} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-\frac{1}{2}}(x) = -\infty \quad f_{-\frac{1}{2}}(-1) = 0$$

A partir du tableau de variation de  
 $f_{-\frac{1}{2}}$  on déduit son tableau de signes

Signe de  $f'_{-\frac{1}{2}}(x)$

$x$	$-1$	$\alpha$	$+\infty$
$f'_{-\frac{1}{2}}(x)$	$+$	$0$	$-$

Sens de variation de  $f_{-\frac{1}{2}}$

$\forall x \in [-1; \alpha[$ ,  $f'_{-\frac{1}{2}}(x) > 0$ ;  $f_{-\frac{1}{2}}$  est donc  
 strictement croissante sur  $[-1; \frac{\alpha}{2}[$

$\forall x \in ]\alpha; +\infty[$ ,  $f'_{-\frac{1}{2}}(x) < 0$ ;  $f_{-\frac{1}{2}}$  est donc  
 strictement décroissante sur  $]\alpha; +\infty[$

$f_{-\frac{1}{2}}$  admet un maximum au point  $\alpha$ .

Tableau de variation de  $f_{-1/2}$

$x$	-1	$\alpha$	$+\infty$
$f'_{-1/2}(x)$		+	-
$f_{-1/2}(x)$			

$f_{-1/2}(\alpha)$

Démontrons que  $f_{-1/2}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

On sait que  $h(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{1+\alpha} = \alpha$   
 $\Leftrightarrow e^{1+\alpha} = -2\alpha$   
 $\Leftrightarrow e^{-1-\alpha} = -\frac{1}{2\alpha}$

$f_{-1/2}(\alpha) = (\alpha+1)\left(e^{-1-\alpha} - \frac{1}{2}\right)$   
 $= (\alpha+1)\left(-\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2}\right)$   
 $= -(\alpha+1)\left(\frac{1+\alpha}{2\alpha}\right) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

$f_{-1/2}(\alpha) = -\frac{1}{2\alpha}(\alpha+1)^2$

b/ On donne  $U_{12} = -0,6854$ .

Donnons la valeur approchée de  $\alpha$   
à  $10^{-2}$  près

A l'aide de la calculatrice on a:

$U_{13} = -0,6848$ ;  $U_{20} = -0,6852$

$U_{21} = -0,6849$ .

On en déduit que:  $\alpha = -0,68$

Construction de  $(C_{-1/2})$

(Voir Figure précédente)

$f_{-1/2}(\alpha) = 0,07$ .  $(D_{-1/2}) : y = -\frac{1}{2}(x+1)$

PROBLEME N° 28

Soit  $\lambda$  un réel non nul, on considère la fonction  $f_{\lambda}$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par:  
 $f_{\lambda}(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$ . On désigne par  $(C_{\lambda})$  la courbe représentative de  $f_{\lambda}$  dans un plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

PARTIE A

1/ Déterminons  $f'_{\lambda}$  et  $f''_{\lambda}$  les fonctions dérivées première et seconde de  $f_{\lambda}$

$f'_{\lambda}(x) = 1 + \lambda(1-x-1)e^{-x} = 1 - \lambda x e^{-x}$   
 $f''_{\lambda}(x) = -\lambda(\bar{e}^{-x} - x\bar{e}^{-x}) = \lambda(x-1)e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_{\lambda}(x) = 1 - \lambda x e^{-x}$   
 $f''_{\lambda}(x) = \lambda(x-1)e^{-x}$

2/ Etudions les variations de  $f'_{\lambda}$

$f'_{\lambda}(x) = 1 - \lambda x e^{-x}$   $D_{f'_{\lambda}} = \mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_{\lambda}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lambda x e^{-x}$   
 $= 1$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'_{\lambda}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lambda x e^{-x}$   
 $= \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$

Dérivée

$f'_{\lambda}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$   
 et  $\forall x \in \mathbb{R}, f''_{\lambda}(x) = \lambda(x-1)e^{-x}$

$f''_{\lambda}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ;  $f'_{\lambda}(1) = 1 - \frac{\lambda}{e}$   
 $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$ ;  $f''_{\lambda}(x)$  a donc le  
 signe de  $\lambda(x-1)$ .

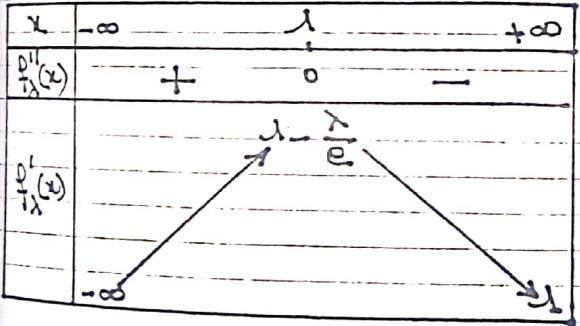
1<sup>er</sup> cas  $\lambda < 0$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f''_{\lambda}(x)$	$+$	$0$	$-$

Sens de variation de  $f'_{\lambda}$ .

$f'_{\lambda}$  est strictement croissante sur  $]-\infty; 1[$   
 strictement décroissante sur  $]1; +\infty[$   
 et admet un maximum au point  $1$

Tableau de variation de  $f'_{\lambda}$  pour  $\lambda < 0$



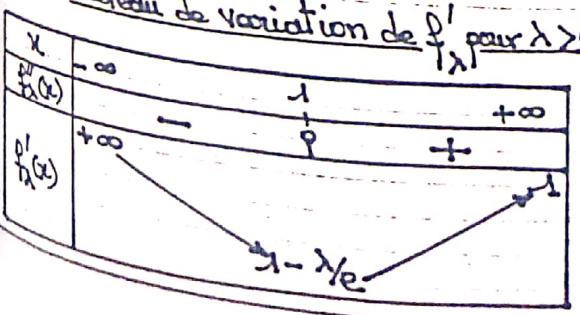
2<sup>e</sup> cas  $\lambda > 0$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f''_{\lambda}(x)$	$-$	$0$	$+$

Sens de variation de  $f'_{\lambda}$

$f'_{\lambda}$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 1[$ , strictement croissante sur  $]1; +\infty[$  et admet un minimum en  $1$

Tableau de variation de  $f'_{\lambda}$  pour  $\lambda > 0$



3/ Discutons suivant le réel  $\lambda$ , le  
 nombre de solutions de l'équation  
 d'inconnue  $x$ :  $f'_{\lambda}(x) = 0$  et précisons  
 la position des solutions éventuelles à  
 0 et à 1.

1<sup>er</sup> cas  $\lambda < 0$

$1 - \frac{\lambda}{e} > 1$ ; la restriction de  $f'_{\lambda}$  sur  
 $]-\infty; -1[$  est monotone, strictement  
 croissante avec  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f'_{\lambda}(x) = -\infty$   
 et  $f'_{\lambda}(1) = 1 - \frac{\lambda}{e} > 1$

Cette restriction définit donc une bi-  
 jection de  $]-\infty; -1[$  vers  $]-\infty; 1 - \frac{\lambda}{e}[$   
 qui contient 0.

De plus  $\forall x > 1, f'_{\lambda}(x) > 1$

L'équation  $f'_{\lambda}(x) = 0$

admet donc une seule solution  $x_1$

$f'_{\lambda}(x_1) = 0 \quad f'_{\lambda}(0) = 1$

On a:  $f'_{\lambda}(x_1) < f'_{\lambda}(0) \Leftrightarrow x_1 < 0$  car  
 $f'_{\lambda}$  est croissante sur  $]-\infty; -1[$ .

Conclusion

Pour  $\lambda < 0$ , l'équation  $f'_{\lambda}(x) = 0$  pos-  
 sède une seule solution  $x_1 < 0$

\* Cas de  $\lambda > 0$

D'après le tableau de variation de  $f'_{\lambda}$   
 le nombre de solutions de l'équation  
 $f'_{\lambda}(x) = 0$  dépend du signe de:

$f'_{\lambda}(-1) = 1 - \frac{\lambda}{e}$

$f'_\lambda(x) = 1 - \frac{\lambda}{e}$ ;  $f'_\lambda(x) = 0 \Leftrightarrow \lambda = e$   
Signe de  $f'_\lambda(x)$  suivant les valeurs du réel  $\lambda$

$\lambda$	0	e	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	+	0	-

2<sup>e</sup> cas  $0 < \lambda < e$ .

D'après les variations de  $f'_\lambda$ , elle admet un minimum au point 1 qui est  $f'_\lambda(1) > 0$  pour  $0 < \lambda < e$ .

L'équation  $f'_\lambda(x) = 0$  n'admet donc pas de solution

3<sup>e</sup> cas  $\lambda = e$

On a:  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_\lambda(x) \geq f'_\lambda(x) = 0$

L'équation  $f'_\lambda(x) = 0$  admet donc une seule solution qui est 1

4<sup>e</sup> cas  $\lambda > e$ .

$f'_\lambda(x) < 0$  l'équation  $f'_\lambda(x) = 0$  admet donc 2 solutions distinctes  $x_1 < x_2$ .

$f'_\lambda(0) = 1$  ou  $f'_\lambda$  est décroissante sur  $]-\infty; 1]$  donc:

$f'_\lambda(x_1) < f'_\lambda(0) \Leftrightarrow 0 < x_1$ .

On a donc deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$  telles que:

$0 < x_1 < 1 < x_2$

Résumons les résultats de la question dans le tableau ci-dessous.

	$-\infty$	0	e	
nombre de posit- des sol % 0 et 1	1	0	2	
	$x_1 < 0$		$0 < x_1 < 1 < x_2$	
			1	
			$x_1 = 1$	

3/ Déduisons de ce qui précède le sens de variation de  $f_\lambda$  suivant les valeurs du réel  $\lambda$

1<sup>er</sup> cas  $\lambda < 0$

Signe de  $f'_\lambda(x)$  suivant les valeurs de  $x$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	-	0	+

Sens de variation de  $f_\lambda$

$f_\lambda$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; x_1[$ , strictement croissante sur  $]x_1; +\infty[$  et admet un minimum au point  $x_1$ .

2<sup>e</sup> cas  $0 < \lambda < e$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_\lambda(x) > 0$ ;  $f_\lambda$  est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

3<sup>e</sup> cas  $\lambda = e$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'_\lambda(x) \geq 0$ ;  $f_\lambda$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}$ .

4<sup>e</sup> cas  $\lambda > e$

Signe de  $f'_\lambda(x)$  suivant les valeurs de  $x$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	+	0	-	+

$f_\lambda$  est strictement croissante sur  $]-\infty; \alpha[$  et sur  $]\alpha_2; +\infty[$

$f_\lambda$  est strictement décroissante sur  $]\alpha; \alpha_2[$

$f_\lambda$  admet un maximum local au point  $\alpha$  et un minimum local au point  $\alpha_2$ .

5/ Etude des limites de  $f_\lambda$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \lambda(x+1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \lambda \left( \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \frac{x}{e^x} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{e^x} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\lambda(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \lambda(x+1)e^{-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[ 1 + \lambda \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} \right]$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\lambda(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda > 0 \end{cases}$
---	--

Précisons les branches infinies de  $(C_\lambda)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda \left( \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$$

$$= \lambda(0+0) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) - x = 0$ ; la courbe  $(C_\lambda)$  admet la droite d'équation  $y = x$  comme asymptote oblique à  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_\lambda(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lambda \left( 1 + \frac{1}{x} \right) e^{-x}$$

$$= \begin{cases} -\infty & \text{si } \lambda < 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

La courbe  $(C_\lambda)$  admet à  $-\infty$  une branche asymptotique de direction  $(Oy)$

6/ Montrons qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes  $(C_\lambda)$   
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, f_\lambda(-1) = -1 + \lambda(-1+1)e = -1$

Toutes les courbes  $(C_\lambda)$  passent par le point unique  $A(-1; -1)$

7/ Soit  $\Gamma_\lambda$  le point de  $(C_\lambda)$  d'abscisse  $\lambda$ . Ecrivons l'équation de la tangente  $D_\lambda$  en  $\Gamma_\lambda$  à  $(C_\lambda)$

$$(D_\lambda) : y = f'_\lambda(\lambda)(x-\lambda) + f_\lambda(\lambda)$$

$$f'_\lambda(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{e}; \quad f_\lambda(\lambda) = 1 + \frac{2\lambda}{e}$$

$$(D_\lambda) : y = \left( 1 - \frac{\lambda}{e} \right) (x-\lambda) + 1 + \frac{2\lambda}{e}$$

$$(D_\lambda) : y = \left( 1 - \frac{\lambda}{e} \right) x + \frac{3\lambda}{e}$$

Montrons que les droites  $D_\lambda$  ont un point commun B

$$y = \left( 1 - \frac{\lambda}{e} \right) x + \frac{3\lambda}{e}$$

$$\Leftrightarrow y - x = \frac{\lambda}{e} (3 - x)$$

$$\begin{cases} 3 - x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Toutes les droites  $(D_\lambda)$  passent par  $B(3; 3)$

8/ a/ On prend  $\lambda = -1$   
 Montrons que l'équation  $f'_{-1}(x) = 0$   
 n'a qu'une solution notée  $x_1$  comprise  
 entre  $-0,57$  et  $-0,56$

D'après 3/, l'équation  $f'_{\lambda}(x) = 0$  pos-  
 sède une unique solution  $x_1$   
 $-1 < 0$ . L'équation  $f'_{-1}(x) = 0$  n'a donc  
 qu'une solution notée  $x_1$ .

$$f'_{-1}(x) = 1 + x e^{-x}$$

$$f'_{-1}(-0,57) = -0,079; f'_{-1}(-0,56) = 0,019$$

$$f'_{-1}(-0,57) \cdot f'_{-1}(-0,56) < 0$$

$\Rightarrow -0,57 < x_1 < -0,56$  d'après le  
 théorème des valeurs intermédiaires

Construction de la courbe (C-1)

Tableau de variation de  $f_{-1}$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
$f'_{-1}(x)$	-	0	+
$f_{-1}(x)$	$+\infty$	$f_{-1}(x_1)$	$+\infty$

Pour le tracer voir page suivante

b/ Traçons la courbe (C<sub>e</sub>)

Tableau de variations de  $f_e$

$x$	$-\infty$		$+\infty$
$f'_e(x)$	+	0	+
$f_e(x)$	$-\infty$	$f_e(x_0)$	$+\infty$

$f_e(x) = x + (x+1)e^{-x}$   $f_e(x) = 3$   
 Construction de C<sub>e</sub> (voir page suivante)

c/ Montrons que l'équation d'inconnue  
 $x$ ,  $f'_{1/4}(x) = 0$  a deux solutions  $x_1$  com-  
 prise entre  $0,35$  et  $0,36$  et  $x_2$  comprise  
 entre  $2,15$  et  $2,16$

D'après 3/, l'équation  $f'_{\lambda}(x) = 0$  pos-  
 sède deux solutions pour  $\lambda > e$ .

Or  $4 > e$ ; l'équation  $f'_{1/4}(x) = 0$  possède  
 donc deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  telles que  
 $0 < x_1 < 1 < x_2$

$$f'_{1/4}(x) = 1 - 4x e^{-x}$$

$$f'_{1/4}(0,35) = 0,0134; f'_{1/4}(0,36) = -0,0046$$

$$f'_{1/4}(2,15) = -0,0017; f'_{1/4}(2,16) = 0,0036$$

En appliquant le théorème des valeurs  
 intermédiaires on a:

$0,35 < x_1 < 0,36$	$2,15 < x_2 < 2,16$
---------------------	---------------------

Tableau de variation de  $f_{1/4}$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f'_{1/4}(x)$	+	0	-	0	+
$f_{1/4}(x)$	$-\infty$	$f_{1/4}(x_1)$	$f_{1/4}(x_2)$	$+\infty$	

$$f_{1/4}(x_1) = 4,15; f_{1/4}(x_2) = 3,61$$

Construction de la courbe (C<sub>4</sub>)  
 (voir page suivante)



## PARTIE B

1/ Montrons que la fonction  $f_\lambda$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$  et déterminons l'ensemble de ces primitives

Pour tout réel  $\lambda$  non nul,  $f_\lambda$  est continue sur  $\mathbb{R}$ ; la fonction  $f_\lambda$  admet donc des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $F_\lambda$  une primitive de  $f_\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ .  $F_\lambda(x)$  est de la forme :

$F_\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 + \lambda(ax+b)e^{-x}$  où  $a$  et  $b$  sont des réels que nous allons déterminer

$$F'_\lambda(x) = x + \lambda(-ax + a - b)e^{-x}$$

Par identification on a : 
$$\begin{cases} a = -1 \\ a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

L'ensemble des primitives de  $f_\lambda$  est :  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} + k, k \in \mathbb{R}$

2/ Pour tout  $\lambda$  réel non nul, on définit une suite de fonctions continues  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t) dt - 2\lambda$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

a/ Calcul de  $\varphi_1$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t) dt - 2\lambda$$

$$= \left[ \frac{1}{2}t^2 - \lambda(t+2)e^{-t} \right]_0^x - 2\lambda$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} + 2\lambda - 2\lambda$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x}$$

b/ Montrons par récurrence que pour tout naturel  $n$  non nul et tout réel  $x$  :

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (x+n+1)e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2}x^2 - \lambda(x+2)e^{-x} \\ &= \frac{x^{1+1}}{(1+1)!} + (-1)^1 \lambda (x+1+1)e^{-x} \quad \text{Vrai} \end{aligned}$$

Supposons que  $\forall n \neq 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (x+n+1)e^{-x} \text{ et montrons}$$

$$\text{que : } \varphi_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1} \lambda (x+n+2)e^{-x}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

$$= \int_0^x \left( \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (t+n+1)e^{-t} \right) dt + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

$$= \int_0^x \left( \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (t+n)e^{-t} + (-1)^n \lambda n e^{-t} \right) dt + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

$$= \left[ \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+2}}{n+2} - (-1)^n \lambda (t+2)e^{-t} - (-1)^n \lambda n e^{-t} \right]_0^x + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

$$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1} \lambda (x+2)e^{-x} + (-1)^{n+1} \lambda n e^{-x} - (-1)^{n+1} 2\lambda - (-1)^{n+1} \lambda n + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

$$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1} \lambda (x+n+2)e^{-x} - (-1)^{n+1} (n+2)\lambda + (-1)^{n+1} (n+2)\lambda$$

$$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + (-1)^{n+1} \lambda (x+n+2)e^{-x}$$

$$\text{Conclusion : } \varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n \lambda (x+n+1)e^{-x}$$

PARTIE C

On suppose dans cette partie  $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$

1/ Montrons que le réel  $x_1$  tel que  $f'_\lambda(x_1) = 0$  est strictement inférieur à  $-1$

$$f'_\lambda(x) = 1 - \lambda x e^{-x}; \quad f'_\lambda(-1) = 1 + \lambda e.$$

$$-\frac{1}{e} < \lambda < 0 \Rightarrow 1 + \lambda e > 0 \Rightarrow f'_\lambda(-1) > 0$$

De plus pour  $\lambda < 0$ ,  $f'_\lambda$  est croissante sur  $]-\infty; -1[$

$$f'_\lambda(x_1) < f'_\lambda(-1)$$

$\Rightarrow x_1 < -1$  car  $f'_\lambda$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -1[$ .

Conclusion

Le réel  $x_1$  tel que  $f'_\lambda(x_1) = 0$  est strictement inférieur à  $-1$

Autre méthode

Dans A/8/ a/ On a montré que:

$$-0,57 < x_1 < -0,56 \text{ d'où } x_1 < -1$$

Déduisons-en que si  $-1 < x < 0$  alors

$$-1 < f_\lambda(x) < 0$$

D'après A/3/ on a:

Pour  $\lambda < 0$ ,  $f_\lambda$  est croissante sur  $]-\infty; x_1[$  donc croissante sur  $]-1; 0[$

$$-1 < x < 0 \Rightarrow f_\lambda(-1) \leq f_\lambda(x) < f_\lambda(0) \quad (1)$$

$$f_\lambda(-1) = -1 \quad f_\lambda(0) = \lambda < 0$$

$$(1) \Rightarrow -1 < f_\lambda(x) < 0.$$

Conclusion

$$\boxed{\text{si } -1 < x < 0 \text{ alors } -1 < f_\lambda(x) < 0}$$

2/ On considère la suite  $(U_n)$  définie

$$\text{par: } \begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_\lambda(U_n) \end{cases}$$

Montrons que:

$$a/ \forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < U_n < 0.$$

$$U_1 = f_\lambda(U_0) = f_\lambda(0) = \lambda \in ]-\frac{1}{e}; 0[$$

or  $-1 < -\frac{1}{e}$  d'où  $-1 < U_1 < 0$  vrai

Supposons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < U_n < 0$

et montrons que  $-1 < U_{n+1} < 0$

D'après la question C/1/ on a:

$$\text{si } -1 < x < 0 \text{ alors } -1 < f_\lambda(x) < 0$$

$$-1 < U_n < 0 \Rightarrow -1 < f_\lambda(U_n) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < U_{n+1} < 0$$

Conclusion:  $\forall n \in \mathbb{N}^*, -1 < U_n < 0$

b/ Montrons que la suite  $(U_n)$  est décroissante

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)e^{-x}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ \lambda < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1) > 0 \\ \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda(x+1)e^{-x} < 0$$

$$\Rightarrow x + \lambda(x+1)e^{-x} < x$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ \text{et} \\ \lambda < 0 \end{cases} \Rightarrow f_\lambda(x) < x$$

$$\text{donc } \begin{cases} -1 < U_n < 0 \\ \lambda < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_\lambda(U_n) < U_n \Rightarrow U_{n+1} < U_n$$

d'où  $(U_n)$  est décroissante

e/ Montrons que:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  
 $0 < U_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(U_{n+1})$   
 On sait que:  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 < U_{n+1}$   
 $\Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1$  (1)

De plus  $-1 < U_n < 0 \Rightarrow \begin{cases} U_{n+1} > 0 \\ e^{-U_n} > e^0 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow (U_{n+1})e^{-U_n} > U_{n+1}$$

$$\Rightarrow \lambda(U_{n+1})e^{-U_n} < \lambda(U_{n+1}) \text{ car } \lambda < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} + \lambda(U_{n+1})e^{-U_n} < U_{n+1} + \lambda(U_{n+1})$$

$$\Rightarrow \frac{f}{\lambda}(U_n) < U_{n+1} + \lambda(U_{n+1})$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < U_{n+1} + \lambda(U_{n+1})$$

$$\Rightarrow U_{n+1} + 1 < U_{n+1} + 1 + \lambda(U_{n+1}) \quad (2)$$

(1) et (2) nous permettent d'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(U_{n+1})$$

Déduisons-en que la suite  $(U_n)$   
 est convergente

$$\begin{cases} -1 < U_n \Rightarrow (U_n) \text{ est minorée} \\ (U_n) \text{ est décroissante} \end{cases}$$

$(U_n)$  est convergente car elle est minorée et décroissante.

Trouvons sa limite

Soit  $l$  la limite de  $(U_n)$ ;  $l$  est solution de l'équation  $f(x) = x \Leftrightarrow x = -1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$$

## PROBLEME N° 29

Soit la fonction  $f_m$  à variable réelle définie par:  $f_m(x) = e^{x-1}(mx - m + 1) - 1$   
 On désigne par  $(C_m)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### PARTIE A

On suppose dans cette partie que  $m$  est un paramètre réel non nul.

1/ a/ Montrons que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe dont nous précisons les coordonnées

Prenons  $y = f_m(x)$

$$\Rightarrow y = e^{x-1}(mx - m) - 1 + e^{x-1}$$

$$\Rightarrow (y + 1 - e^{x-1}) = m(x-1)e^{x-1}$$

$$\begin{cases} x-1 = 0 \\ y+1-e^{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Toutes les courbes  $(C_m)$  passent par le point  $A(1; 0)$

b/ Soit  $M$  un point du plan

Étudions suivant la position du point

$M$  dans le plan, le nombre de courbes

$(C_m)$  qui passent par  $M$

Soit  $M(a; b)$

$$M \in (C_m) \Leftrightarrow (b+1)e^{1-a} = m(a-1)$$

Soit  $(\Delta)$  la droite du plan d'équation

$$x = 1$$

1<sup>er</sup> cas  $M \in \Delta$  privée de A.

Aucune courbe  $(C_m)$  ne passe par M

2<sup>e</sup> cas M appartient au plan privé de  $\Delta$

Une seule courbe  $(C_m)$  passe par M.

3<sup>e</sup> cas M confondu à A

Une infinité de courbes passent par A

2/a/ Calculons suivant les valeurs de m, les limites de  $f$  en  $+\infty$  puis en  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} (mx - m + 1) - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} (m(x-1) + 1) - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (mx + 1) - 1$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } m > 0 \\ -\infty & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f_m(x)} = \begin{cases} -\infty & \text{si } m < 0 \\ +\infty & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} (mx - m + 1) - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (mx e^x - m e^x + e^x) e^{-1} - 1$$

$$= -1 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \\ \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f_m(x)} = -1$$

Pour tout  $m \in \mathbb{R}^*$

b/ Etudions les branches infinies de la courbe  $(C_m)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_m(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} + \left(m - \frac{m}{x} + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} = \begin{cases} -\infty & \text{si } m < 0 \\ +\infty & \text{si } m > 0 \end{cases}$$

La courbe  $(C_m)$  admet en  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $oy$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f_m(x)} = -1$$

La courbe  $(C_m)$  admet en  $-\infty$  une asymptote horizontale d'équation  $y = -1$

3/a/ Calculons la dérivée  $f'_m$  de la fonction  $f$  et étudions son signe suivant les valeurs de m

$f_m$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = e^{x-1} (mx - m + 1 + m) = (1 + mx) e^{x-1}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = (1 + mx) e^{x-1}$$

Signe de  $f'_m(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} > 0$ ;  $f'_m(x)$  a donc le signe de  $1 + mx$ .

$$f'_m(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + mx = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$$

1<sup>er</sup> cas  $m < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$
$\frac{f'_m(x)}{f_m(x)}$	+	0	-

2<sup>e</sup> cas  $m > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+

3/ Dressons les tableaux de variation de  $f$  selon les valeurs de  $m$ .  
1<sup>er</sup> cas  $m < 0$

Sens de variation de  $f$

$\forall x \in ]-\infty; -\frac{1}{m}[$ ,  $f'_m(x) > 0$ ;  $f$  est donc strictement croissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{m}[$

$\forall x \in ]-\frac{1}{m}; +\infty[$ ,  $f'_m(x) < 0$ ;  $f$  est donc strictement décroissante sur  $]-\frac{1}{m}; +\infty[$

$f$  admet un maximum en  $-\frac{1}{m}$  et  $f_m(-\frac{1}{m}) = -1 - me^{-\frac{1}{m}-1}$

Tableau de variation de  $f$  pour  $m < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	0	-
$f_m(x)$	-1	$-1 - me^{-\frac{1}{m}-1}$	$-\infty$

2<sup>e</sup> cas  $m > 0$

Sens de variation de  $f$

$\forall x \in ]-\infty; -\frac{1}{m}[$ ,  $f'_m(x) < 0$ ;  $f$  est décroissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{m}[$

$\forall x \in ]-\frac{1}{m}; +\infty[$ ,  $f'_m(x) > 0$ ;  $f$  est donc croissante sur  $]-\frac{1}{m}; +\infty[$

$f$  admet un minimum en  $-\frac{1}{m}$

Tableau de variation de  $f$  pour  $m > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
$f_m(x)$	-1	$-1 - me^{-\frac{1}{m}-1}$	$+\infty$

4/ Déterminons l'ensemble des extrémums de  $(C_m)$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{m} \\ y = -1 - me^{-\frac{1}{m}-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{x} \\ y = -1 + \frac{1}{2} e^{x-1} \end{cases}$$

L'ensemble des extrémums de  $(C_m)$  lorsque  $m$  décrit  $\mathbb{R}^*$  est la courbe  $\Gamma$  représentative de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $g(x) = -1 + \frac{1}{2} e^{x-1}$

5/ Vérifions que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'_m(x) = f'_m(x) + me^{x-1} + 1$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) &= (1+mx)e^{x-1} \\ &= (1+mx)e^{x-1} - me^{x-1} + me^{x-1} \\ &= (mx-m+1)e^{x-1} + me^{x-1} \\ &= (mx-m+1)e^{x-1} - 1 + me^{x-1} + 1 \\ &= f'_m(x) + me^{x-1} + 1 \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_m(x) = f'_m(x) + me^{x-1} + 1$$

Déduisons-en sans calculer  $f_m''(x)$  la relation:  $f_m''(x) - 2f_m'(x) + f_m(x) = -1$

$$f_m'(x) = f_m(x) + me^{x-1} + 1$$

$$\Leftrightarrow f_m'(x) = f_m(x) + me^{x-1}$$

$$f_m''(x) - 2f_m'(x) + f_m(x) = f_m'(x) + me^{x-1} - 2(f_m(x) + me^{x-1} + 1) + f_m(x)$$

$$= f_m(x) + me^{x-1} + 1 + me^{x-1} - 2f_m(x) - 2me^{x-1} - 2 + f_m(x)$$

$$= -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_m''(x) - 2f_m'(x) + f_m(x) = -1$$

6/ Etudions la position relative des courbes  $(C-m)$  et  $(C_m)$

Posons  $dm(x) = f_m(x) - f_{-m}(x)$

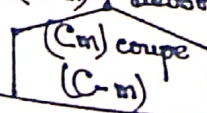
$$= 2m(x-1)e^{x-1}$$

$$dm(x) = 2m(x-1)e^{x-1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{x-1} > 0$ ;  $dm(x)$  est donc du signe de  $m(x-1)$ .

$$dm(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$


1<sup>er</sup> cas  $m < 0$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$dm(x)$	$+$	$0$	$-$
Position relative de $(C-m)$ et $(C_m)$	$(C_m)$ est au dessus de $(C-m)$	$(C_m)$ est en dessous de $C-m$	
			

2<sup>e</sup> cas  $m > 0$

Comme précédemment, résumons les

résultats de notre étude dans le tableau ci-dessous.

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$dm(x)$	$-$	$0$	$+$
Position relative de $(C-m)$ et $(C_m)$ .	$(C_m)$ est en dessous de $(C-m)$	$(C_m)$ est au dessus de $(C-m)$	
			

### PARTIE B

On pose  $m=1$  puis  $m=-1$

1/ Dressons les tableaux de variations des fonctions  $f_1$  et  $f_{-1}$

Tableau de variation de  $f_1$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f_1(x)$	$-1$	$-1-e^{-2}$	$+\infty$

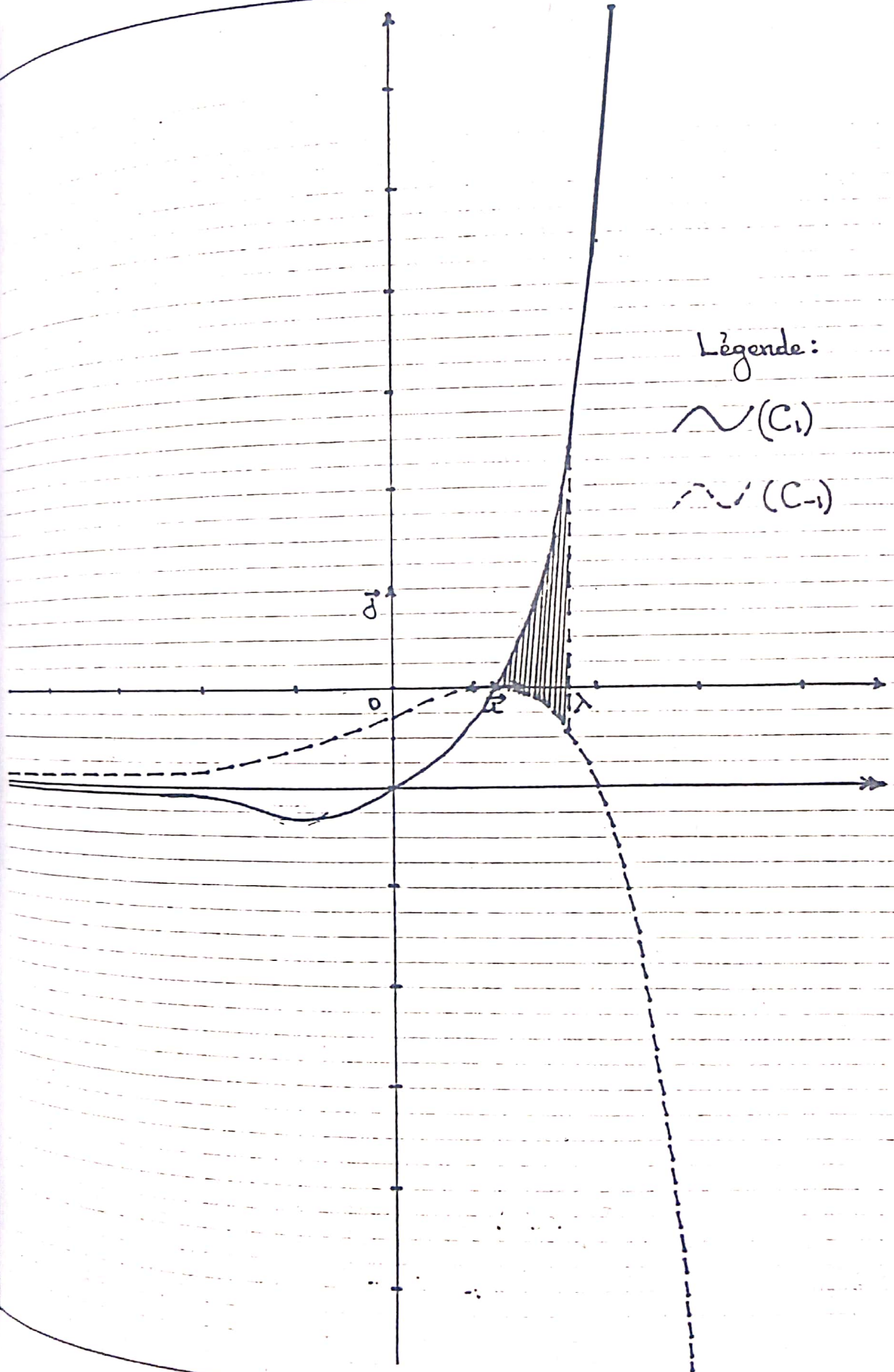
Tableau de variation de  $f_{-1}$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f_{-1}'(x)$	$+$	$0$	$-$
$f_{-1}(x)$	$-1$	$0$	$-\infty$

2/ Construction des courbes  $(C_1)$  et  $(C_{-1})$  dans la même repère.

(Voir page suivante)

$$f_1(x) = xe^{x-1} - 1; f_{-1}(x) = (2-x)e^{x-1} - 1$$



3/ Soit  $\lambda$  un réel tel que  $\lambda > 1$   
 a/ Calculons l'aire  $a(\lambda)$  de la portion du plan limitée par les courbes  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  et les droites d'équations

$x=1$  et  $x=\lambda$

$$a(\lambda) = \int_1^\lambda (f_1(x) - f_2(x)) dx = \int_1^\lambda 2(x-1)e^{x-1} dx$$

$$= 2 \left[ (x-2)e^{x-1} \right]_1^\lambda = 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$$

$a(\lambda) = 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$

b/ Déterminons  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2(\lambda-2)e^{\lambda-1} + 2$$

$$= +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2(\lambda-2) = +\infty \\ \text{et} \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{\lambda-1} = +\infty \end{cases}$$

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} a(\lambda) = +\infty$

**PROBLEME N°30**

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  on donne les points  $A(1;0)$ ,  $B(-1;0)$  et  $K(0;-1)$ .  
 A tout point  $M$  de P de coordonnées  $(x;y)$  on associe le nombre complexe  $z = x+iy$ , affixe de  $M$ .

**PARTIE A**

1/ \* Démontrons qu'il existe une rotation  $T$  qui laisse le point  $K$

invariant et qui transforme  $A$  en  $B$   
 Les points  $K, B$  et  $A$  sont deux à deux distincts.  $KB = KA = \sqrt{2}$ .

Il existe donc une rotation  $T$  de centre  $K$  transformant  $A$  en  $B$ .

\* Précisons l'angle de  $T$

L'angle de  $T$  est :  $\text{Mes}(\vec{KA}, \vec{KB}) = \text{Arg} \left( \frac{z_K - z_B}{z_K - z_A} \right)$   
 $= \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$

$T$  est donc la rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$

\* La transformation complexe associée

$\bar{a} T$  est :  $z \mapsto iz - 1 - i$

2/ Soit  $M_1 = T(M)$ ;  $M_2 = T(M_1)$ ;  $M_3 = T(M_2)$

a/ Position relative des droites  $(MM_1)$  et  $(M_2M_3)$  lorsque  $M$  est distinct de  $K$ .

$T(MM_1) = (M_1M_2) \Rightarrow (MM_1) \perp (M_1M_2)$  ①

$T(M_1M_2) = (M_2M_3) \Rightarrow (M_1M_2) \perp (M_2M_3)$  ②

① et ②  $\Rightarrow (MM_1) \parallel (M_2M_3)$

Lorsque  $M$  est distinct du point  $K$ , les droites  $(MM_1)$  et  $(M_2M_3)$  sont parallèles.

b/ Déterminons l'ensemble des points  $M_1$  de P lorsque  $M$  décrit le cercle de diamètre  $[AB]$

On sait que la rotation transforme un cercle en un cercle de même rayon.  
 $T(A) = B$ ; Posons  $T(B) = B'$

On vérifie que  $B' = S_K(A)$ .

L'ensemble des points  $M_1$  est donc le cercle de diamètre  $[BB']$  avec  $B' = S_K(A)$

### PARTIE B

Soit  $\alpha$  un réel fixé mais quelconque.

On considère l'application  $T_\alpha$  de  $P$  dans  $P$  qui à tout point  $M$ , associe le point  $M'$  barycentre des points pondérés  $(M, \alpha)$ ,  $(M_1, -\alpha)$  et  $(A, 1)$ ,  $M_1$  étant défini en A-2/

1/ Exprimons l'affixe  $z'$  du point  $M'$  en fonction de  $\alpha$  et de l'affixe  $z$  de  $M$ .

On sait que :

$$\vec{OM}' = \alpha \vec{OM} - \alpha \vec{OM}_1 + \vec{OA} \text{ donc}$$

$$z' = \alpha(1-i)z + \alpha + 1 + i\alpha$$

2/ Déterminons, suivant les valeurs de  $\alpha$ , la nature et les éléments caractéristiques de  $T_\alpha$

- si  $\alpha = 0$  alors  $T_\alpha$  est une application constante.

$$T_0: \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M_1 & \longrightarrow & A. \end{array}$$

- si  $|\alpha|\sqrt{2} = 1$  alors  $T_\alpha$  est une rotation.  $|\alpha|\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$* \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z' = \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$T_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$  est la rotation d'angle  $\frac{3\pi}{4}$  et de

centre le point d'affixe  $w = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)$

$$* \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z' = \left( \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) z + \frac{\sqrt{2}+2}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$T_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$  est la rotation d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  et de centre le point d'affixe  $w = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$

- si  $|\alpha| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$  alors  $T_\alpha$  est la similitude directe de rapport  $|\alpha|\sqrt{2}$ , de centre le point d'affixe  $w_\alpha = \frac{1-2i\alpha^2}{2\alpha^2-2\alpha+1}$

\* si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$  alors  $T_\alpha$  a pour angle  $\frac{3\pi}{4}$

\* si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^* - \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$  alors  $T_\alpha$  a pour angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

3/ Exprimons les coordonnées  $(x', y')$  de  $M'$  en fonction des coordonnées  $(x, y)$  de  $M$ .

En posant  $z' = x' + iy'$  et  $z = x + iy$  on a :

après calcul.

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \alpha y + \alpha + 1 \\ y' = -\alpha x + \alpha y + \alpha \end{cases}$$

4/ Soit  $E(-e^\alpha; e^\alpha)$   $E' = T_\alpha(E)$

a/ Exprimons les coordonnées de  $E'$  en fonction de  $\alpha$

Après calcul on obtient :

$$E'(\alpha+1; \alpha+2\alpha e^\alpha)$$

b/ Démontrons que lorsque  $\alpha$  décrit  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des points  $E'$  est la courbe (C)

d'équation:  $y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$

$$\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 2\alpha e^\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x - 1 \\ y = x - 1 + 2(x - 1)e^{x-1} \end{cases}$$

L'ensemble des points E lorsque  $\alpha$  décrit  $\mathbb{R}$  est la courbe (C) d'équation:

$$y = 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$$

### PARTIE C

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:

$$f(x) = 2xe^x + x.$$

1/ Etudions le sens de variation de

la fonction dérivée première  $f'$  de  $f$

$f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  car elle est produit et somme de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x+2)e^x + 1$$

$$f''(x) = (2x+4)e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  donc  $f''(x)$  a le signe de  $2x+4$ .

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$

$\forall x \in ]-\infty; -2[$   $f''(x) < 0$  donc  $f'$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -2]$

$\forall x \in ]-2; +\infty[$   $f''(x) > 0$  donc  $f'$  est strictement croissante sur  $[-2; +\infty[$

2/ Dressons le tableau de variation de  $f$

$$\mathcal{D}f = \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = (2x+2)e^x + 1.$$

Signe de  $f'(x)$

Le sens de variation de  $f'$  montre que  $f'(-2)$  est le minimum de  $f'$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Or } f'(-2) = 1 - \frac{2}{e^2} > 0 \text{ donc}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$  d'où  $f$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Tableau de variation de  $f$

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3/ a/ Représentation graphique de  $f$

- Etude des branches infinies

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x + 1 = +\infty \text{ donc la}$$

courbe de  $f$  admet une branche parabolique de direction  $(oy) \vec{a} +\infty$ .

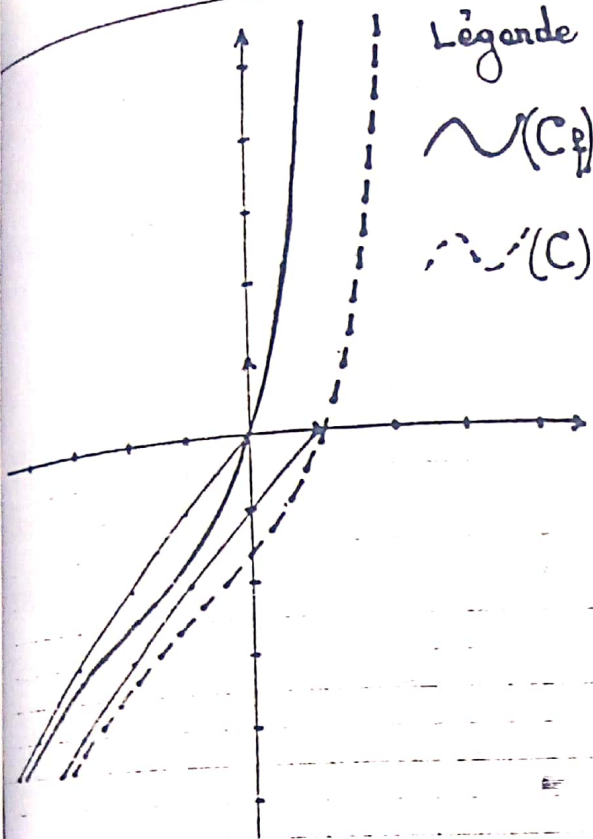
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0 \text{ donc la}$$

courbe de  $f$  admet la droite d'équation  $y = x$  comme asymptote oblique à  $-\infty$

Construction de la courbe (C<sub>f</sub>)

(Voir page suivante)



Légende

 $\sim (C)$  $\cdots (C)'$ 

b/ Transformation affine simple la -  
quelle l'ensemble  $(C)$  des points  $E'$  du  
B-4b/ est l'image de la courbe repré-  
sentative de  $f$ :

Posons  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$x \mapsto 2(x-1)e^{x-1} + x - 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x-1)$  donc la trans-  
formation demandée est la translation  
de vecteur  $\vec{e}_1$ .

c/ Traçons  $(C)$  dans le repère précédent  
(Voir ci-dessus)

d/ Calcul d'aire

$$A = \left( - \int_0^1 h(x) dx \right) u.a.$$

$$A = \left( \frac{5}{2} - \frac{4}{e} \right) u.a.$$

4/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$   
par:  $g(x) = 2(x-1)e^{x-1}$ .

On note  $g', g'', g^{(3)}, \dots, g^{(n)}$  les dérivées  
successives de  $g$ .

a/ Démontrons que pour tout entier

$n$  non nul  $g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$ , où  
 $x$  est un nombre réel

- Pour  $n=1$ ,  $g'(x) = 2xe^{x-1}$ ; la pro-  
position est vraie au rang 1.

- Supposons que la proposition est  
vraie au rang  $n$  c'est-à-dire

$$g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$$

$$g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)}(x))' = 2(x+n)e^{x-1}$$

$$\text{donc } (g^{(n)}(x))' = g^{(n+1)}(x).$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(x) = 2(x+n-1)e^{x-1}$$

b/ Calculons  $\sum_{k=1}^n g^{(k)}(x)$ .

Après calculs bien faits on a:

$$\sum_{k=1}^n g^{(k)}(x) = (2nx + n(n-1))e^{x-1}$$