

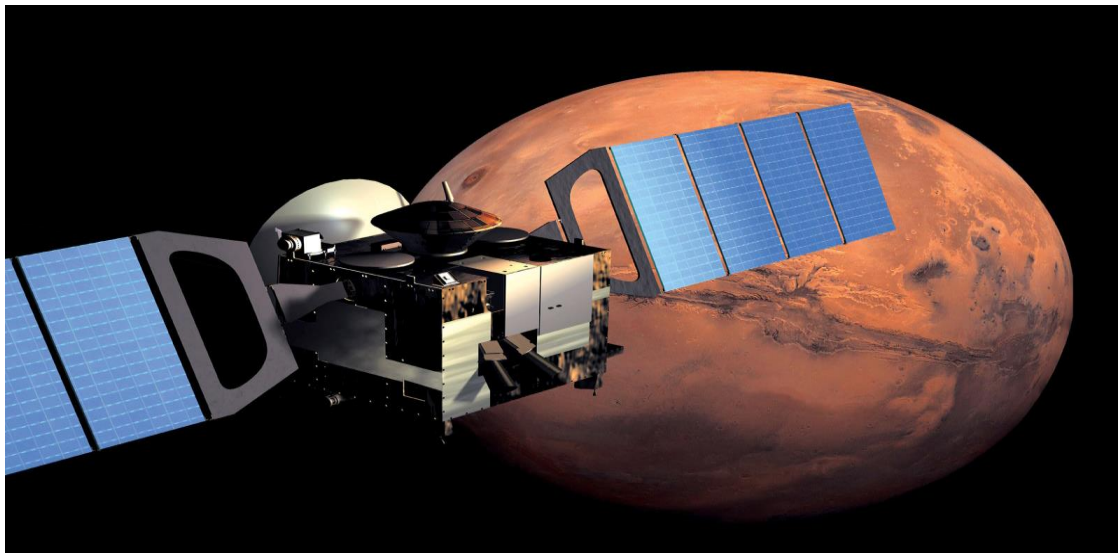
Fomesutra.com  
ça soutra!

# MÉCANIQUE

## Terminale C&D

Ahouman Hubert Lobognon

2023-2024



LOBOKOFFI@YAHOO.FR



## Avant propos

*Dans les sciences, le chemin est plus important que le but. Les sciences n'ont pas de fin.*

Erwin Chargaff (biochimiste autrichien 1905-2002)

*La science consiste à passer d'un étonnement à un autre.*

Aristote (philosophe grec IV<sup>ème</sup> siècle av. J.-C.)

*Ce n'est pas dans la science qu'est le bonheur, mais dans l'acquisition de la science.*

Edgar Allan Poe (auteur américain 1809-1849)

*On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.*

Henri Poincaré (physicien français 1854-1912)

*Qui ne doute pas acquiert peu.*

Léonard de Vinci (homme d'esprit universel italien 1452-1519)

*Former les hommes, ce n'est pas remplir un vase, c'est allumer un feu.*

Aristophane (poète grec V<sup>ème</sup> siècle av. J.-C.) - Merci à Jacques Cattelin

*Toute vérité franchit trois étapes. D'abord elle est ridiculisée. Ensuite, elle subit une forte opposition. Puis, elle est considérée comme ayant toujours été une évidence.*

Arthur Schopenhauer

*Ahouman Hubert Lobognon*

PROGRAMME DE MÉCANIQUE EN TERMINALE SCIENTIFIQUE

MÉCANIQUE - ÉLECTROMAGNÉTISME - ÉLECTRICITÉ - PHYSIQUE NUCLÉAIRE						
MÉCANIQUE						
	N°	LEÇONS	heures		Pages	
			TD	TC		
MÉCANIQUE	1	Cinématique du point	10h	10h	4	
	2	Mouvement du centre d'inertie d'un solide	6h	6h	7	
	3	Interaction gravitationnelle		5h		
	4	Mouvement dans les champs ( $\vec{g}$ et $\vec{E}$ ) uniformes	8h	8h	11	
	5	Oscillations mécaniques libres	6h	6h	13	
	Régulation- Évaluation/remédiation			6h		
	Révision			3h		23



**PROGRAMME DE TERMINALE C**

Mois	Semaine	Physique			Chimie				
		Thème	Leçon	Durée	Thème	Leçon	Durée		
Sept.	1	MECANIQUE	Cinématique du point	10h	CHIMIE ORGANIQUE	Les alcools	8h		
	2								
	3		Mouvement du centre d'inertie d'un solide	6h					
Oct.	4		Interaction gravitationnelle	5h					
	5		<b>Évaluation/Remédiation</b>	4h					
	6		Mouvements dans les champs ( $\vec{g}$ et $\vec{E}$ ) uniformes	8h					
Nov.	7		Oscillations mécaniques libres	6h					
	8		<b>Évaluation/Remédiation</b>	6h					
	9		Champ magnétique	4h					
Déc.	10		ELECTROMAGNETISME	Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme		6h	CHIMIE GENERALE	Solutions aqueuses. Notion de pH	4h
	11	<b>Évaluation/Remédiation</b>		4h	Acide fort – Base forte	4h			
Janv.	12	Loi de Laplace		4h	<b>Évaluation/Remédiation</b>	2h			
	13	Induction électromagnétique		10h	Acide faible – Base faible	4h			
Fév.	14	Auto-induction		4h	Couples acide/base- Classification	5h			
	15	<b>Évaluation/Remédiation</b>		4h	Réactions acido-basiques. Solutions tampons	3h			
	16	<b>Évaluation/Remédiation</b>		4h	<b>Évaluation/Remédiation</b>	2h			
Mars	17	ELECTRICITE		Montages dérivateur et intégrateur	2h	CHIMIE GENERALE		Réactions acido-basiques. Solutions tampons	6h
	18			Oscillations électriques libres dans un circuit LC	6h				
	19			Circuit RLC en régime sinusoïdal forcé	4h				
Avril	20		Résonance d'intensité d'un circuit RLC série	4h	Réactions acido-basiques. Solutions tampons		1h		
	21		Puissance en courant alternatif	2h	Dosage acido-basique		2h		
Avril	22	<b>Évaluation/Remédiation</b>	3h						
	23	PHYSIQUE NUCLÉAIRE	Modèle ondulatoire de la lumière	4h					
24	Modèle corpusculaire de la lumière		3h						

Mai	28					
	29		Réactions nucléaires spontanées	6h		
				Réactions nucléaires provoquées	4h	
	30		<b>Évaluation/Remédiation</b>	4h		<b>Évaluation/Remédiation</b> 2h
	31					
Juin	32		<b>Révisions</b>	8h		<b>Révisions</b> 4h

### GRANDEURS PHYSIQUES

Grandeurs physiques		Unité	
tension	<b>U</b>	volt	<b>(V)</b>
intensité du courant	<b>I</b>	ampère	<b>(A)</b>
résistance	<b>R</b>	ohm	<b>(Ω)</b>
puissance	<b><i>P</i></b>	watt	<b>(W)</b>
longueur	<b>L</b>	mètre	<b>(m)</b>
masse	<b>m</b>	kilogramme	<b>(Kg)</b>
temps	<b>t</b>	seconde	<b>(s)</b>
vitesse	<b>m.s<sup>-1</sup></b>	mètre par seconde	<b>m.s<sup>-1</sup></b>
fréquence	<b>f</b>	hertz	<b>(Hz)</b>
force	<b>F</b>	newton	<b>(N)</b>
pression	<b>P</b>	pascal	<b>(Pa)</b>
volume	<b>V</b>	mètre cube	<b>(m<sup>3</sup>)</b>
quantité d'électricité	<b>Q</b>	coulomb	<b>(C)</b>
quantité de matière	<b>n</b>	mole	<b>(mol)</b>
température	<b>θ ou t</b>	degré Celsius	<b>(°C)</b>
masse volumique	<b>ρ</b>	kilogramme par mètre cube	<b>Kg.m<sup>-3</sup></b>
champ magnétique	<b>B</b>	tesla	<b>(T)</b>
Flux magnétique	<b>Φ</b>	Weber	<b>(Wb)</b>
accélération	<b>a</b>	mètre par seconde au carré	<b>m.s<sup>-2</sup></b>
champ électrique	<b>E</b>	volt par mètre	<b>V.m<sup>-1</sup></b>
quantité de mouvement	<b>p</b>	kilogramme mètre par seconde	<b>Kg.m.s<sup>-1</sup></b>
niveau d'intensité acoustique	<b>L<sub>i</sub></b>	décibel	<b>(dB)</b>
indice de réfraction	<b>n</b>	sans unité	

**MULTIPLES ET SOUS MULTIPLES**

giga (g)	méga (m)	kilo (k)	hecto (h)	déca (da)		déci (d)	centi (c)	milli (m)	micro (μ)	nano (n)
10 <sup>9</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>2</sup>	10	1	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-9</sup>

Tableau des principaux préfixes, abréviations et multiplicateurs correspondants.

giga (g)	méga (m)	kilo (k)	hecto (h)	déca (da)		déci (d)	centi (c)	milli (m)	micro (μ)	nano (n)
10 <sup>9</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>3</sup>	10 <sup>2</sup>	10	1	10 <sup>-1</sup>	10 <sup>-2</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-9</sup>

**CONSTANTES FONDAMENTALES**

Quantité	Symbole	Valeur approchée	Valeur actuelle
Vitesse de la lumière dans le vide	c	3,00.10 <sup>8</sup> m.s <sup>-1</sup>	299 792 458 m.s <sup>-1</sup> (valeur exacte)
Constante d'Avogadro	n <sub>a</sub>	6,02.10 <sup>23</sup> mol <sup>-1</sup>	6,022 136 7 (36).10 <sup>23</sup> mol <sup>-1</sup>
Charge élémentaire	e	1,60.10 <sup>-19</sup> C	1,602 177 33 (49) .10 <sup>-19</sup> C
Masse de l'électron	m <sub>e</sub>	9,11.10 <sup>-31</sup> Kg	9,109 389 7 (54) .10 <sup>-31</sup> Kg
Masse du proton	m <sub>p</sub>	1,6726.10 <sup>-27</sup> Kg	1,672 623 1 (10) .10 <sup>-27</sup> Kg
Masse du neutron	m <sub>n</sub>	1,6750.10 <sup>-27</sup> Kg	1,674 928 6 (10) .10 <sup>-27</sup> Kg

Quantité	Symbole	Valeur approchée	Valeur actuelle
vitesse de la lumière dans le vide	c	3,00.10 <sup>8</sup> m.s <sup>-1</sup>	299 792 458 m.s <sup>-1</sup> (valeur exacte)
constante d'Avogadro	n <sub>a</sub>	6,02.10 <sup>23</sup> mol <sup>-1</sup>	6,022 136 7 (36).10 <sup>23</sup> mol <sup>-1</sup>
charge élémentaire	e	1,60.10 <sup>-19</sup> C	1,602 177 33 (49) .10 <sup>-19</sup> C
masse de l'électron	m <sub>e</sub>	9,11.10 <sup>-31</sup> Kg	9,109 389 7 (54) .10 <sup>-31</sup> Kg
masse du proton	m <sub>p</sub>	1,6726.10 <sup>-27</sup> Kg	1,672 623 1 (10) .10 <sup>-27</sup> Kg
masse du neutron	m <sub>n</sub>	1,6750.10 <sup>-27</sup> Kg	1,674 928 6 (10) .10 <sup>-27</sup> Kg

CARACTÈRES GRECS

Majuscule	Minuscules	Noms	Majuscule	Minuscules	Noms
A	$\alpha$	alpha	$\Pi$	$\pi$	pi
B	$\beta$	bêta	$\rho$	$\rho$	rhô
K	$\kappa$	kappa	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
$\Delta$	$\delta$	delta	T	$\tau$	tau
E	$\varepsilon$	epsilon	Y	$\upsilon$	upsilon
$\Phi$	$\varphi$	phi	$\Xi$	$\zeta$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	Z	$\xi$	zêta
I	$\iota$	iota	H	$\eta$	êta
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	$\Theta$	$\theta$	thêta
M	$\mu$	mu	X	$\chi$	khi
N	$\nu$	nu	$\Psi$	$\psi$	psi
O	$\omicron$	omicron	$\Omega$	$\omega$	oméga

CARACTÈRES GRECS

Majuscule	Minuscules	Noms	Majuscule	Minuscules	Noms
A	$\alpha$	alpha	$\Pi$	$\pi$	pi
B	$\beta$	bêta	$\rho$	$\rho$	rhô
K	$\kappa$	kappa	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
$\Delta$	$\delta$	delta	T	$\tau$	tau
E	$\varepsilon$	epsilon	Y	$\upsilon$	upsilon
$\Phi$	$\varphi$	phi	$\Xi$	$\zeta$	xi
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	Z	$\xi$	zêta
I	$\iota$	iota	H	$\eta$	êta
$\Lambda$	$\lambda$	lambda	$\Theta$	$\theta$	thêta
M	$\mu$	mu	X	$\chi$	khi
N	$\nu$	nu	$\Psi$	$\psi$	psi
O	$\omicron$	omicron	$\Omega$	$\omega$	oméga

EXEMPLE DE FICHE DE LEÇON EN APC**Classe :****Thème :****Titre de la Leçon :****Durée :**TABLEAU DES HABILETES ET CONTENUS

HABILETES	CONTENUS

EXEMPLE DE SITUATION

MATÉRIEL	SUPPORTS DIDACTIQUES
	<p style="text-align: center;"><b>BIBLIOGRAPHIE</b></p>

## 2.2.2) LE FORMAT DES ÉPREUVES DU BACCALAURÉAT

### ● STRUCTURE DES ÉPREUVES DU BACCALAURÉAT

Les épreuves de Physique-Chimie à l'examen du Baccalauréat couvrent toutes les compétences déclinées à travers le profil de sortie des apprenant(e)s à la fin du second cycle de l'enseignement secondaire. Ils présentent la structure suivante :

- **titre des épreuves** : Physique-Chimie
- **durée des épreuves** : trois heures (3 H) ;
- **notation des épreuves** : Les épreuves sont notées sur 20 points dont 12 points pour la physique et 8 points pour la chimie ;
- **coefficients des épreuves** : Série D : 4, Série C et E : 5
- **composantes des épreuves** : Les épreuves comportent chacune quatre (04) exercices notés exercice 1, exercice 2, exercice 3, exercice 4.

### ● STRUCTURE DES ÉPREUVES DU BACCALAURÉAT

#### ■ **Exercice 1 (05 points)**

Cet exercice est noté sur **05 points**. Il comporte deux parties :

- une partie « **Chimie** » notée sur **3 points** ;
- une partie « **Physique** » notée sur **2 points**.

Le contenu de cet exercice doit porter sur des notions qui ne sont pas contenues dans les exercices 2, 3 et 4.

Les habiletés évaluées doivent être des niveaux taxonomiques de la **connaissance**, de la **compréhension** et de l'**application**.

Les **outils** utilisés dans cet exercice sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Tests objectifs ou des questions à réponses choisies	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Questions à choix multiples (QCM),</li> <li>- Alternative ou questions de type Vrai ou Faux</li> <li>- Appariement,</li> <li>- Réarrangement,</li> <li>- Test de closure.</li> </ul>
Tests subjectifs ou des questions à réponses construites (on se limitera dans ce cas aux questions à réponses courtes).	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Phrases à compléter</li> <li>- Questions à réponses directes.</li> </ul>

#### ■ **Exercice 2 (05 points)**

Cet exercice est noté sur **05 points**. C'est **une situation d'évaluation de chimie** qui porte sur des notions qui ne sont contenues dans l'exercice 1.

Les consignes doivent respecter les niveaux taxonomiques indiqués dans **les tableaux habiletés/contenus** du programme éducatif.

#### ■ **Exercice 3 (05 points)**

Cet exercice est noté sur **05 points**. C'est **une situation d'évaluation de physique** qui porte sur des notions qui ne sont contenues dans l'exercice 1 et 4.

Les consignes doivent respecter les niveaux taxonomiques indiqués dans **les tableaux habiletés/contenus** du programme éducatif.

■ **Exercice 4 (05 points)**

Cet exercice est noté sur **05 points**. C'est **une situation d'évaluation de physique** qui porte sur des notions qui ne sont contenues dans l'exercice 1 et 3.

Les consignes doivent respecter les niveaux taxonomiques indiqués dans **les tableaux habiletés/contenus** du programme éducatif.

Tableau de répartition des points ou barème

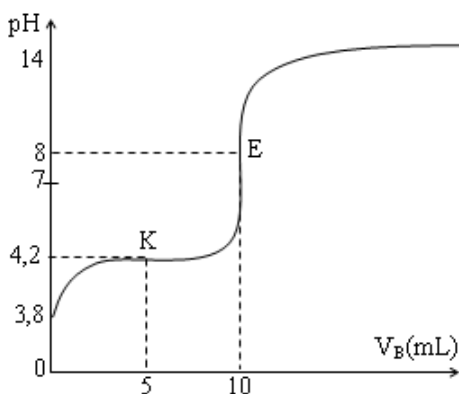
EXERCICES	Nature	Nombre de points
EXERCICE 1	Chimie	3
	Physique	2
EXERCICE 2	Physique	5
EXERCICE 3	Chimie	5
EXERCICE 4	Physique	5
TOTAL		20

**PHYSIQUE-CHIMIE****SÉRIE : D**

Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.  
Le candidat ou la candidate recevra une (01) feuille de papier millimétré.  
Toute calculatrice est autorisée

**Exercice 1 (5 points)**

A. La courbe de dosage d'un volume  $V_A = 20 \text{ mL}$ , d'une solution d'acide chlorhydrique par une solution d'hydroxyde de sodium de concentration  $C_B = 0,02 \text{ mol.L}^{-1}$  est représentée ci-dessous.



Proposition 1. le  $pK_a$  du couple acide-base est : **0,5 pt**

- a)  $pK_a = 8$  ;
- b)  $pK_a = 7$  ;
- c)  $pK_a = 3,8$  ;
- d)  $pK_a = 4,2$  ;

Proposition 2. La concentration de la solution d'acide carboxylique est : **0,5 pt**

- a)  $C_A = 0,02 \text{ mol.L}^{-1}$  ;
- b)  $C_A = 0,01 \text{ mol.L}^{-1}$  ;
- c)  $C_A = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  ;
- d)  $C_A = 1 \text{ mol.L}^{-1}$  ;

Recopie le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse dans chaque cas.

**B.**

- Écris l'équation-bilan de la réaction entre l'acide chlorhydrique ( $\text{H}_3\text{O}^+$ ,  $\text{Cl}^-$ ) et l'hydroxyde de sodium ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{OH}^-$ ). **0,25 pt**
- Donne les caractéristiques de cette réaction. **0,5 pt**
- Choisis, parmi les indicateurs colorés ci-dessous, celui qui convient le mieux pour repérer le pH du point d'équivalence lors du dosage de l'acide chlorhydrique par l'hydroxyde de sodium. **0,25 pt**

Indicateurs colorés	Zone de virage du pH
Bleu de thymol	1,5 – 2,5
Hélianthine	3,1 – 4,4
Bleu de Bromothymol	6,0 – 7,6
Phénolphtaléine	8,2 – 10,0

C. Pour chacune des propositions suivantes :

- L'équation-bilan de la réaction entre l'acide éthanoïque et l'hydroxyde de sodium est :  
 $\text{CH}_3\text{COOH} + \text{Na}^+ + \text{OH}^- \rightarrow \text{CH}_3\text{COO}^- + \text{Na}^+ + \text{H}_2\text{O}$  ; **0,25 pt**
- Le pH à l'équivalence lors du dosage de l'acide éthanoïque par l'hydroxyde de sodium est égal à 7. **0,25 pt**
- Le pH à la demi-équivalence lors du dosage de l'acide éthanoïque par l'hydroxyde de sodium est  $pH = \frac{1}{2} pK_a$  **0,25 pt**

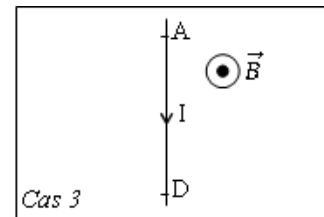
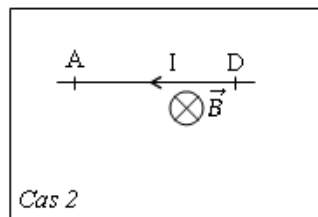
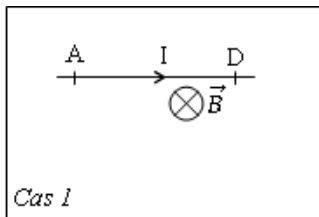
4. La courbe  $\text{pH} = f(V_B)$  lors du dosage de l'acide éthanoïque par l'hydroxyde de sodium présente quatre parties. **0,25 pt**

Écris le numéro de la proposition suivi de la lettre **V** si la proposition est vraie et **F** si elle est fausse.

**A.**

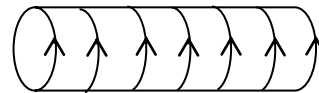
1. Nomme la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur le fil conducteur parcouru par un courant d'intensité  $I$  plongé dans la champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ . **0,5 pt**

2. Reproduis les schémas ci-dessous et représente la force  $\vec{F}$  dans chaque cas. **0,5 pt**



**B.**

1. Reproduis le schéma ci-dessous et représente le vecteur champ magnétique  $\vec{B}$  au centre du solénoïde parcouru par un courant d'intensité  $I$ . **0,5 pt**



2. Indique sur le même schéma les faces nord (N) et sud (S) du solénoïde. **0,5 pt**

## **Exercice 2 (5 points)**

En vue de vous faire exploiter des réactions d'estérifications, ton professeur de Physique-Chimie met à la disposition de ton groupe :

- un chlorure d'acyle de formule semi-développée :  $\text{C}_n\text{H}_{2n+1}-\text{C}(=\text{O})-\text{Cl}$
- du méthanol ;
- du décaoxyde de tétraphosphore ( $\text{P}_4\text{O}_{10}$ ).

En outre, il vous donne les informations suivantes :

- 1,57 g de ce chlorure d'acyle contiennent 0,02 mol ;
- la réaction de ce chlorure d'acyle sur le méthanol donne un composé organique A et du chlorure d'hydrogène ;
- la réaction de A sur l'eau donne deux composés organiques. L'un de ces composés peut réagir en présence de décaoxyde de tétraphosphore ( $\text{P}_4\text{O}_{10}$ ) pour donner un composé B et l'eau.

### **Données :**

Masses molaires en  $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$  :  $M(\text{H}) = 1$  ;  $M(\text{C}) = 12$  ;  $M(\text{Cl}) = 35,5$

Volume molaire :  $V_m = 24 \text{ L}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

En tant que rapporteur, propose la solution du groupe en répondant aux consignes ci-dessous.

### **1. Identification du chlorure d'acyle**

1.1 Montre que la masse molaire du chlorure d'acyle est  $M = 78,5 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ . **0,25 pt**

1.2 Déduis-en sa formule semi-développée et son nom. **0,75 pt**

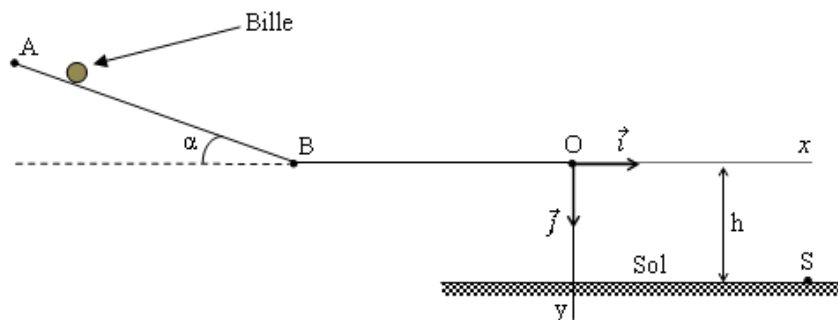
**2. Action du chlorure d'acyle sur le méthanol**2.1 Écris l'équation-bilan de la réaction et donne ses caractéristiques. **0,75 pt**2.2 Nomme le composé A obtenu. **0,25 pt**

2.3 Détermine :

2.3.1 la masse du composé A obtenu ; **0,5 pt**2.3.2 le volume du chlorure d'hydrogène dégagé. **0,25 pt****3. Action du composé A sur l'eau**3.1 Écris l'équation-bilan de la réaction. **0,5 pt**3.2 Donne le nom de cette réaction et ses caractéristiques. **0,5 pt**3.3 Écris l'équation-bilan de la réaction d'obtention du composé B. **0,5 pt**3.4 Nomme le composé B. **0,25 pt**4. Écris l'équation-bilan de la réaction permettant d'obtenir le composé A à partir de B. **0,5 pt****Exercice 3 (5 points)**

Ton Professeur de Physique-Chimie te propose d'étudier le dispositif ci-dessous en vue d'évaluer les notions vues en classe sur la mécanique.

Ce dispositif est constitué d'un tronçon rectiligne AB incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et d'un tronçon horizontal BO. Les points A, B et O sont dans le même plan vertical.



Une bille, supposée ponctuelle de masse  $m$ , est lâchée en A sans vitesse initiale. Elle parcourt le trajet ABO et arrive en O avec une vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale. La bille quitte le point O à la date  $t = 0$  s, tombe dans le vide sous l'action de son poids et atterrit au sol au point S. L'altitude du point O par rapport au sol est  $h$  (voir figure).

**Données :**

$AB = L = 2,5 \text{ m}$  ;  $\alpha = 30^\circ$  ;  $h = 0,5 \text{ m}$  ;  $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

Les frottements sont négligeables.

**1. Étude du mouvement de la bille sur le tronçon AB.**1.1 Fais le bilan de forces extérieures qui s'exercent sur la bille. **0,25 pt**1.2 Représente ces forces sur un schéma. **0,5 pt**

1.3 Détermine :

1.3.1 la vitesse  $v_B$  de la bille au point B ; **0,75 pt**1.3.2 l'accélération  $a_1$  de la bille sur le tronçon AB. **0,5 pt**1.4 Déduis de ce qui précède la nature du mouvement de la bille. **0,25 pt**

**2. Étude du mouvement de la bille sur le tronçon BO**

- 2.1 Détermine l'accélération  $a_2$  de la bille sur le tronçon BO. **0,5 pt**  
 2.2 Déduis-en la nature du mouvement de la bille sur ce tronçon. **0,25 pt**

**3. Étude du mouvement de la bille dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$** 

- 3.1 Établis  
 3.1.1 les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  de la bille ; **1 pt**  
 3.1.2 l'équation cartésiennes  $y(x)$  de la trajectoire de la bille. **0,25 pt**  
 3.2 Détermine les coordonnées  $y_S$  et  $x_S$  du point de chute S de la bille. **0,75 pt**

**Exercice 4 (5 points)**

Au cours d'une séance de Travaux Pratiques (TP), ton professeur met à la disposition de ton groupe un générateur basses fréquences (GBF), une bobine d'inductance  $L$  et de résistance interne  $r$ , un condensateur de capacité  $C$ , un conducteur ohmique de résistance  $R$ , un ampèremètre, un voltmètre, un générateur de tension continue et des fils de connexion.

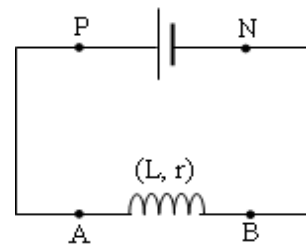
Il vous demande de déterminer les valeurs  $L$ ,  $R$ ,  $r$  et  $C$ .

A cet effet, sous sa supervision, ton groupe réalise deux expériences.

**Expérience 1**

Ton groupe applique une tension continue de valeur  $U_1 = 6 \text{ V}$  aux bornes de la bobine.

Il mesure alors à l'aide d'un ampèremètre un courant d'intensité  $I_1 = 0,3 \text{ A}$ .

**Expérience 2**

Ton groupe réalise un circuit électrique comportant en série le conducteur ohmique, la bobine, le condensateur et le générateur  $V$  de basses fréquences (GBF). Il place dans le circuit un ampèremètre et un voltmètre. Il règle la valeur efficace de la tension délivrée par le GBF à  $U = 1 \text{ V}$ .

Ton groupe mesure, pour différentes valeurs de la fréquence du GBF, l'intensité efficace  $I$  du courant.

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus.

N(Hz)	100	200	300	400	460	480	500	520	560	600	700	800
I(mA)	0,7	1,6	3,1	6,1	8,1	8,3	8,1	7,7	6,5	5,5	3,8	2,9

Tu es chargé de faire le rapport du groupe.

**1. Étude de l'expérience**

- 1.1 Écris l'expression de la tension  $U_L$  aux bornes de la bobine. **0,25 pt**  
 1.2 Calcule la résistance  $r$  de la bobine. **0,25 pt**

**2. Étude de l'expérience 2**

- 2.1 Schématise le montage qui a permis d'obtenir les résultats de l'expérience. **0,5 pt**  
 2.2 Trace la courbe qui représente l'intensité efficace  $I$  en fonction de la fréquence  $N$ . **0,75 pt**

Échelles :  $\begin{cases} 1 \text{ cm pour } 1 \text{ mA}; \\ 1 \text{ cm pour } 100 \text{ Hz.} \end{cases}$

2.3 Définis de la courbe :

2.3.1 la fréquence de résonance d'intensité  $N_0$ ; **0,25 pt**

2.3.2 la bande passante  $\Delta N$ ; **0,5 pt**

2.3.3 le facteur de qualité  $Q$ . **0,5 pt**

2.4 Détermine

2.4.1 la tension  $U_C$  aux bornes du condensateur à la résonance ; **0,5 pt**

2.4.2 la valeur  $C$  de la capacité du condensateur ; **0,5 pt**

2.4.3 la valeur  $L$  de l'inductance de la bobine ; **0,5 pt**

2.4.4 la valeur  $R$  de la résistance du conducteur ohmique. **0,5 pt**

BACCALAURÉAT  
SESSION 2021

Coefficient : 5  
Durée : 3 h

# PHYSIQUE-CHIMIE

## SÉRIES : C&E

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.  
Le candidat ou la candidate recevra une (01) feuille de papier millimétré.  
Toute calculatrice est autorisée*

### Exercice 1 (5 points)

#### Partie A (3 points)

1. Le dosage acido-basique d'une solution  $S_1$  par une solution  $S_2$  donne la courbe ci-dessus.

1.1 La solution  $S_1$  est : **0,25 pt**

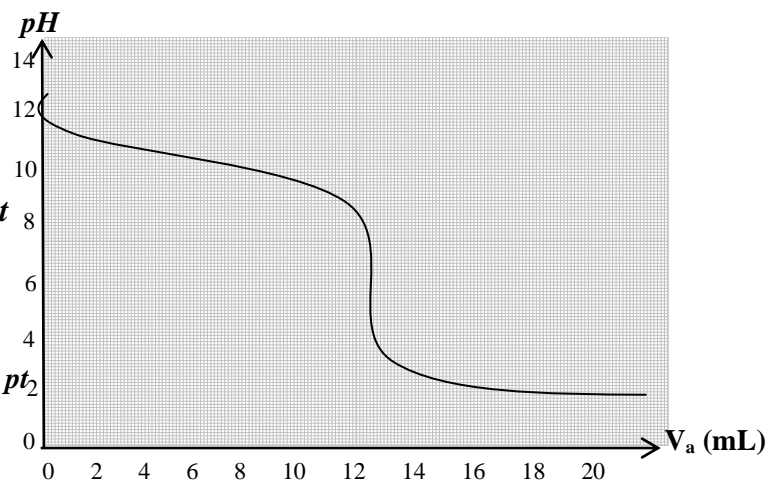
- un acide fort ;
- un acide faible ;
- une base forte ;
- une base faible.

1.2 Le mélange obtenu à l'équivalence est : **0,25 pt**

- acide ;
- basique ;
- neutre.

1.3 Les coordonnées du point d'équivalence E sont : **0,25 pt**

- (5,5 mL ; 9,4) ;
- (10 mL ; 5,4) ;
- (10 mL ; 4).



Recopie pour chaque cas, la lettre qui correspond à la réponse correcte.

2. Calcule les concentrations molaires volumiques des espèces chimiques  $H_3O^+$ ,  $OH^-$ ,  $CH_3CO_2H$ ,  $CH_3CO_2^-$  contenues dans une solution d'acide éthanoïque de concentration molaire volumique  $C_a = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  et de  $\text{pH} = 3,4$ . **1,25 pt**

3. Donne le nom et les propriétés chimiques d'une solution aqueuse dont le pH est égal au  $\text{pK}_a$  du couple acide/base qu'elle contient. **0,5 pt**

4. Recopie et complète les phrases ci-dessous.

4.1 à l'équivalence du dosage d'un acide fort par une base forte, le pH est égal à ..... **0,25 pt**

4.2 Lorsqu'on dose un acide faible par une base forte, à l'équivalence, la solution.....(acide /neutre / basique). **0,25 pt**

#### Partie B (2 points)

Une bobine de longueur  $\ell = 40 \text{ cm}$ , de diamètre  $d = 6 \text{ cm}$ , comporte  $N = 2\,000$  spires. Elle est parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Sa section est notée  $S$ . On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$ .

1. L'expression du flux propre est : **0,25 pt**

a.  $\Phi_P = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I^2$  ;

$$b. \Phi_P = \frac{N^2 S}{\mu_0 \ell} I;$$

$$c. \Phi_P = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} I;$$

2. L'expression de l'inductance est : **0,25 pt**

$$a. L = \frac{\mu_0 N^2}{\ell} S;$$

$$b. L = \frac{\mu_0 N \ell}{S};$$

$$c. L = \frac{\mu_0 N \ell^2}{S}.$$

3. La valeur de l'inductance est : **0,25 pt**

$$a. L = 3,55 \cdot 10^{-2} \text{ H};$$

$$b. L = 3,55 \cdot 10^{-3} \text{ H};$$

$$c. L = 2,75 \cdot 10^{-2} \text{ H}.$$

Recopie la lettre qui correspond à la bonne option pour chacune des propositions ci-dessus.

## **Exercice 2 (5 points)**

Le laboratoire d'un Lycée de la place dispose de flacons de produits chimiques. L'étiquette d'un de ces flacons porte l'indication  $C_5H_{10}O_2$ . On note **A** le composé contenu dans le flacon.

En vue de faire la synthèse d'un composé organique **F** à partir de **A**, les élèves, sous la supervision de leur professeur, réalisent une série d'expériences.

Expérience 1 : l'action de l'eau sur **A** donne deux composés **B** et **D**. La solution **B** a un pH inférieur à 7.

Expérience 2 : l'oxydation ménagée de **D** conduit à la formation d'un composé **E** qui réagit avec la 2,4-DNPH, mais n'a pas d'effet sur le réactif de Schiff.

Expérience 3 : l'action d'une solution d'hydroxyde de potassium sur 17 g de **A** donne les composés **F** et **D**.

Données :  $M_C = 12 \text{ g.mol}^{-1}$ ;  $M_O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ ;  $M_C = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ ;  $M_K = 39 \text{ g.mol}^{-1}$ ;

*Pourcentage massique en oxygène de B : 53,33%*

*Pourcentage massique en oxygène de D : 26,66%*

1. Donne les fonctions chimiques de **A**, **B**, **D** et **E**. **1 pt**

2. Détermine :

2.1 les formules brutes de **B** et **D**; **1 pt**

2.2 la formule semi-développée et le nom de **A**. **1,5 pt**

3. Écris l'équation-bilan de la réaction entre **A** et la solution d'hydroxyde de potassium. **0,5 pt**

4. Détermine la masse de la réaction du composé **F**. **1 pt**

**Exercice 3 (5 points)**

Au cours d'une séance de travaux pratiques, votre professeur vous demande d'étudier un circuit RLC série. Ce circuit comprend un conducteur ohmique de résistance  $R = 100 \Omega$ , une bobine d'inductance  $L = 1 \text{ H}$  et de résistance interne  $r = 20 \Omega$  et un condensateur de capacité variable.

Le circuit est soumis à une tension  $u(t) = U_m \cos \omega t$  (figure 1).

Vous observez à l'oscilloscope les variations des tensions en fonctions du temps (figure 2).

Vous poursuivez l'expérience en faisant varier la capacité du condensateur, vous obtenez l'oscillogramme de la figure 3.

Le balayage horizontal correspond à  $1 \text{ ms/ division}$  et la déviation verticale  $2\text{V/ division}$ .

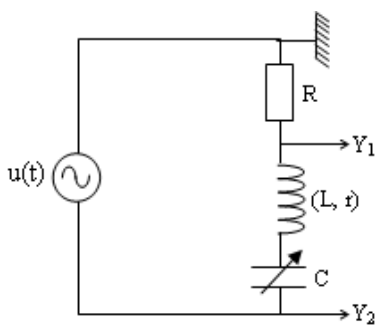


figure 1

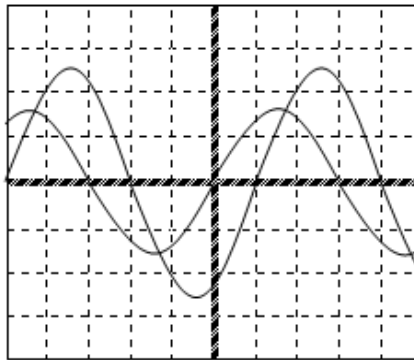


figure 2

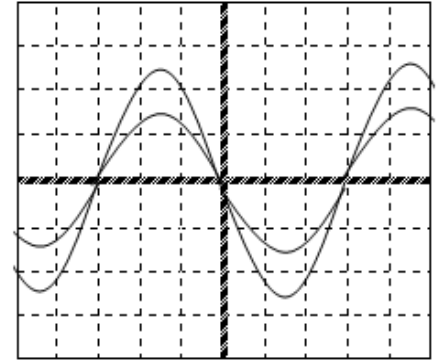


Figure 3

1. Nomme :
  - 1.1 les grandeurs visualisées sur les voies  $Y_1$  et  $Y_2$  ; **0,25 pt**
  - 1.2 le phénomène observé à la figure 3. **0,25 pt**
2. Détermine à partir de l'oscillogramme de la figure 2 :
  - 2.1. la période  $T$  de la tension ; **0,25 pt**
  - 2.2. l'impédance  $Z$  du circuit électrique ; **0,75 pt**
  - 2.3. la phase  $\varphi_{u/i}$  ; **0,25 pt**
  - 2.4. la tension électrique  $u(t)$  ; **0,75 pt**
  - 2.5. l'intensité  $i(t)$  du courant électrique. **0,25 pt**
3. Déduis de ce qui précède :
  - 3.1. la capacité  $C$  du condensateur (figure 2) ; **0,1 pt**
  - 3.2. la capacité  $C_0$  du condensateur (figure 3). **0,75 pt**

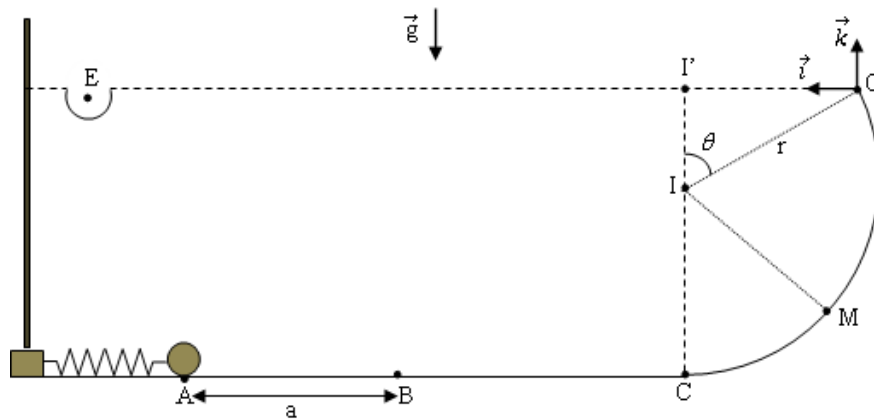
**Exercice 4 (5 points)**

Un jeu dont le dispositif est représenté par le schéma ci-après, comprend un lanceur de projectile et une piste ABCO située dans le plan vertical.

La partie horizontale AC de la piste est raccordée au point C à la partie circulaire CO de centre I et de rayon  $r$ .

Pour gagner à ce jeu, il faut faire tomber le projectile de masse  $m = 100 \text{ g}$  dans le réceptacle E distant de O tel que  $OE = 9 \text{ m}$ , à l'aide d'un ressort à spires non jointives de constante de raideur  $k = 250 \text{ N.m}^{-1}$ . (voir figure).

Un élève de ta classe prend part à ce jeu. Le projectile étant accroché à l'extrémité libre du ressort au point B, il le comprime d'une longueur  $a = 20$  cm, puis abandonne l'ensemble (ressort + projectile) sans vitesse initiale.



Le projectile se détache du ressort au point B, arrive au point C avec une vitesse  $V_C$  et aborde la partie circulaire CO. Il quitte la piste au point O avec la vitesse  $V_O$ .

Ce projectile est assimilé à un objet ponctuel. Les forces de frottement le long du trajet et l'action de l'air sont négligées.

La référence des énergies potentielle élastique est prise au point B (ressort détendu).

Données :

- $r = 1$  cm, le rayon de la partie circulaire de la piste.
- $\theta = 60^\circ$
- $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ , l'intensité de la pesanteur.

Il t'est demandé de dire si le jeu est réussi.

1. Représente les forces qui s'exercent sur le projectile :

- 1.1. en point situé entre A et B ; **0,5 pt**
- 1.2. au point M. **0,5 pt**

2. Détermine la vitesse :

- 2.1.  $V_B$  du projectile au point B ; **0,5 pt**
- 2.2.  $V_C$  du projectile au point C. **0,5 pt**

3. Montre que :

- 3.1 la vitesse du projectile au point O est  $V_B = 8,36 \text{ m.s}^{-1}$  ; **0,75 pt**
- 3.2 l'équation cartésienne de la trajectoire du projectile dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  est :  
 $z = -0,29x^2 + 1,73x$  ; **0,75 pt**
- 3.3 le projectile ne tombe pas dans le réceptacle E. **0,75 pt**

4. Détermine la vitesse avec laquelle le projectile doit quitter le point O pour réussir à ce jeu.

**0,75 pt**

<b>PHYSIQUE-CHIMIE</b>
------------------------

**SÉRIE : D**

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4  
Toute calculatrice est autorisée*

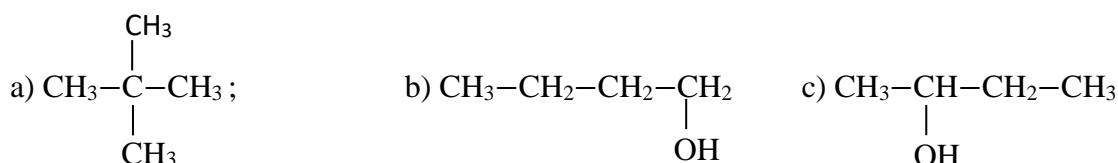
**EXERCICE 1 ( 5 Points)****CHIMIE (3 points)**

**A.** La formule brute d'un alcool A est  $C_4H_{10}O$ . Son oxydation ménagée conduit à un composé organique B qui réagit avec la 2,4-DBPH mais est sans action sur le réactif de Schiff.

1. L'alcool A est de : **0,25 pt**

- a) classe primaire ;                      b) classe secondaire ;                      c) classe tertiaire.

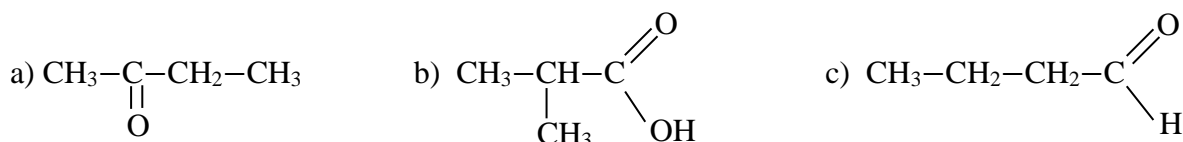
2. La formule semi-développée de l'alcool A est : **0,25 pt**



3. La fonction chimique du composé B est : **0,25 pt**

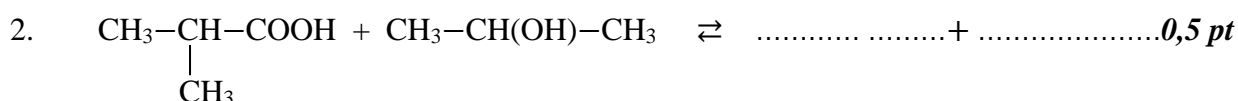
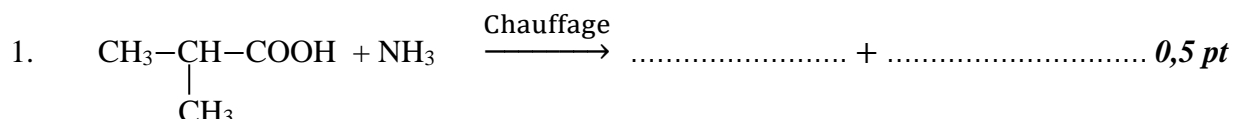
- a) acide carboxylique ;                      b) aldéhyde ;                      c) cétone.

4. La formule semi-développée du composé B est : **0,25 pt**

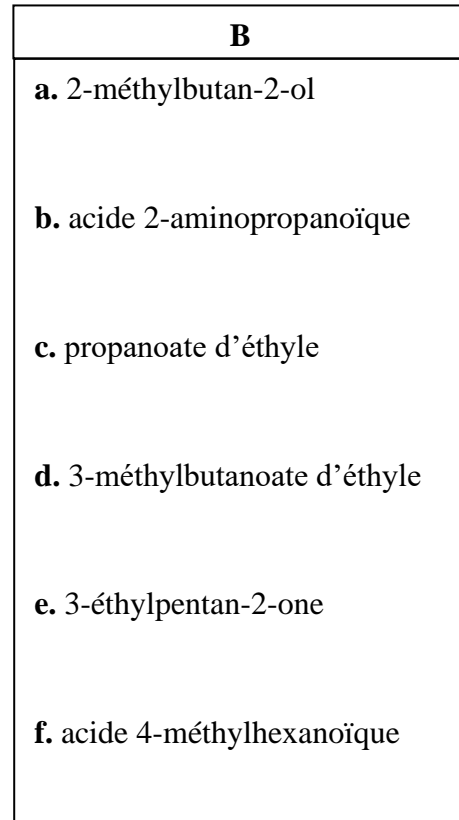
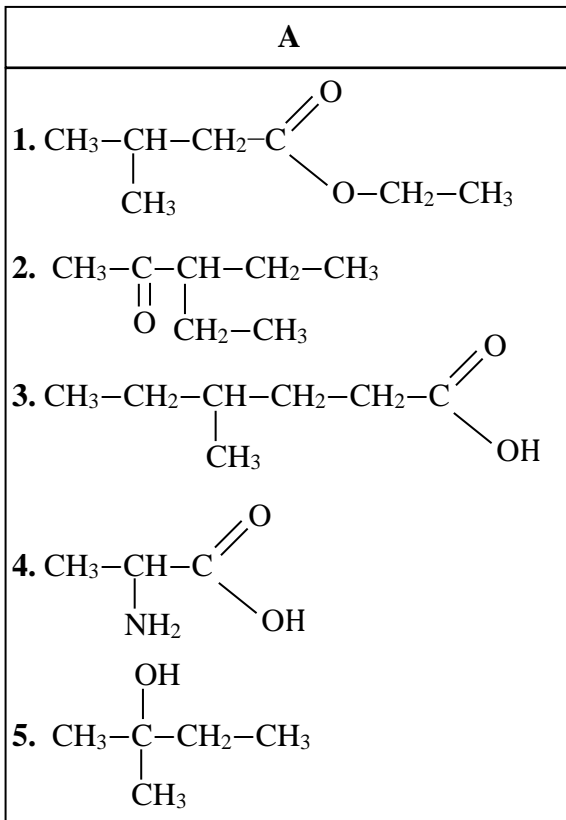


Recopie, pour chacune des propositions ci-dessus, le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

**B.** Recopie et complète les équations-bilans des réactions chimiques suivantes :



C. Associe le numéro de chaque formule semi-développée du diagramme A à la lettre correspondant à son nom dans le diagramme B. Tu t'aideras de l'exemple : 5 - a (0,25 pt x4)



**PHYSIQUE (2 points)**

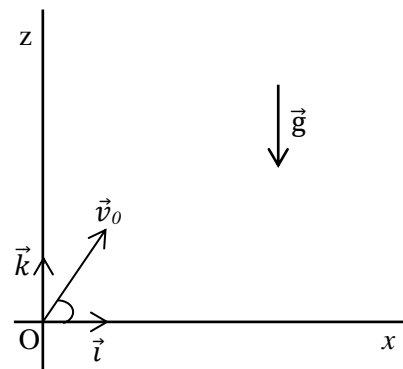
A. une bille, assimilable à un point matériel, est lancée à partir du point O d'un repère orthonormé (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{k}$ ) avec une vitesse  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. (voir figure ci-dessous).

1. Les coordonnées du vecteur accélération  $\vec{a}$  de la bille sont : **0,25 pt**

- a)  $a_x = 0$  ;  $a_z = g$  ;
- b)  $a_x = -g$  ;  $a_z = 0$  ;
- c)  $a_x = 0$  ;  $a_z = -g$ .

2. L'expression de l'équation horaire  $v_z(t)$  est : **0,25 pt**

- a)  $v_z(t) = v_0 \cos \alpha$  ;
- b)  $v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha$  ;
- c)  $v_z(t) = -gt + v_0 \cos \alpha$ .



3. L'expression de l'équation horaire  $x(t)$  est : **0,25 pt**      4. L'expression de l'équation horaire  $z(t)$  est : **0,25 pt**

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>a) <math>x(t) = (v_0 \cos \alpha)t</math> ;</li> <li>b) <math>x(t) = (v_0 \sin \alpha)t</math> ;</li> <li>c) <math>x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \cos \alpha)t</math>.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>a) <math>z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t</math> ;</li> <li>b) <math>z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \cos \alpha)t</math> ;</li> <li>c) <math>z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t</math>.</li> </ul> |
|---|--|

Recopie, pour chacune des propositions ci-dessus, le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

**B.** Dans chacun des cas représentés ci-dessous, une particule chargée pénètre en O entre les armatures d'un condensateur plan où règne un champ électrostatique uniforme  $\vec{E}$ .

Reproduis les schémas et représente qualitativement dans chaque cas :

1. le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$ . **0,25 pt**×2
2. la force électrostatique  $\vec{F}$  qui s'applique sur la particule au point M. **0,25 pt**×2

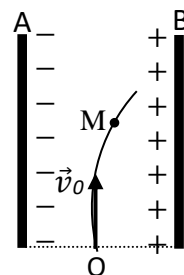


Schéma 1

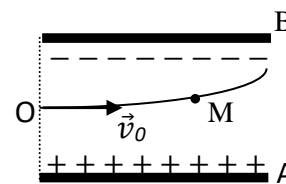


Schéma 2

### **EXERCICE 2 (5 points)**

Au cours d'une séance de Travaux Pratiques, le Professeur de Physique-Chimie demande à ton groupe de préparer une solution tampon. Pour ce faire, il met à votre disposition :

- une solution aqueuse de méthylamine ( $\text{CH}_3\text{-NH}_2$ ) de concentration molaire volumique inconnue  $C_b$  ;
- une solution aqueuse de chlorure de méthylammonium ( $\text{CH}_3\text{-NH}_3\text{Cl}$ ) de concentration molaire volumique  $C_2 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

Vous réaliser les expériences ci-dessous :

**Expérience 1 :** Vous prélevez un certain volume de la solution de méthylamine. À l'aide d'un pH-mètre, vous mesurez le pH de cette solution. Vous obtenez  $\text{pH} = 11,5$ .

**Expérience 2 :** Vous ajoutez à un volume  $V_1 = 100 \text{ mL}$  de la solution de méthylamine, un volume  $V_2$  de la solution de chlorure de méthylammonium. Vous obtenez un mélange dont le pH est égal au  $\text{pK}_a$  du couple  $\text{CH}_3\text{NH}_3^+/\text{CH}_3\text{NH}_2$ .

Le professeur vous demande de déterminer le volume  $V_2$  de la solution de chlorure de méthylammonium afin de préparer le mélange.

**Données :**  $\text{pK}_a = 10,7$  ;  $K_e = 10^{-14}$  à  $25^\circ\text{C}$ .

Propose ta contribution en répondant aux consignes ci-dessous.

1. Définis une base au sens de Bronsted. **0,5 pt**
2. Écris l'équation-bilan de la réaction de la méthylamine avec l'eau. **0,5 pt**
3. Indique les propriétés chimiques du mélange. **0,5 pt**
4. Détermine :
  - 4.1 la concentration molaire volumique des espèces chimiques présentes dans la solution de méthylamine ; **2,75 pts**
  - 4.2 la concentration molaire volumique  $C_b$  ; **0,5 pt**
  - 4.3 le volume  $V_2$  de la solution utilisée dans l'expérience 2. **0,25 pt**

**EXERCICE 3 (5 points)**

Lors de fouilles, des archéologues ont découvert un ossement de plus de 3000 ans. Votre professeur met à votre disposition les informations et les résultats ci-dessous de la datation au carbone 14 ( $^{14}_6\text{C}$ ) de cet ossement.

- Selon le principe de la datation au carbone 14, un organisme cesse de consommer des composés carbonés à sa mort. L'activité du carbone 14 contenue dans cet organisme décroît alors au fil du temps.

La comparaison de l'activité actuelle  $A$  du carbone 14 dans cet organisme à son activité initiale  $A_0$  permet de déterminer son âge.

- L'activité  $A_0$  du carbone 14 à la mort de cet organisme est telle que le rapport  $\frac{A}{A_0} = 0,67$

- L'activité du carbone 14 contenu dans l'ossement découvert a pour valeur  $A = 807$  désintégrations. $s^{-1}$ .

**Données :**

La période ou demi-vie du carbone 14 est  $T = 5570$  années.

Le carbone 14 est un émetteur  $\beta^-$  ( ${}_{-1}^0\text{e}$ ).

Extrait du tableau de la classification périodique :

${}^{11}_5\text{B}$	${}^{12}_6\text{C}$	${}^{14}_7\text{N}$	${}^{16}_8\text{O}$	${}^{19}_9\text{F}$
---------------------	---------------------	---------------------	---------------------	---------------------

Tu es sollicité pour répondre aux consignes ci-dessous en vue de préciser l'âge de cet ossement.

1. Donne la définition :

1.1 des isotopes d'un élément chimique ; **0,5 pt**

1.2 de la période radioactive  $T$  d'un nucléide. **0,5 pt**

2. Écris l'équation-bilan de la réaction de désintégration du carbone 14. **1 pt**

3. Détermine :

3.1 la constante radioactive  $\lambda$  du carbone 14 ; **0,5 pt + 0,5 pt**

3.2 l'activité initiale  $A_0$  du carbone 14 dans l'ossement. **0,5 pt + 0,5 pt**

4. Déduis de ce qui précède l'âge de l'ossement en secondes puis en années. **0,5 pt + 0,5 pt**

**EXERCICE 4 (5 points)**

Dans le cadre des activités du club de Physique-Chimie de ton lycée, ton encadreur te propose d'étudier un circuit électrique série en vue de déterminer certaines de ses caractéristiques. Ce circuit comprend un conducteur ohmique de résistance  $R = 50 \Omega$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable et un condensateur de capacité  $C$ .

Dans cette perspective, il réalise l'expérience ci-dessous.

Il applique aux bornes du circuit une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace  $U = 100 \text{ V}$  et de fréquence  $N$  réglable fournie par un générateur de basses fréquences (GBF).

Pour une valeur  $N_1 = 50 \text{ Hz}$  de la fréquence, il mesure les tensions efficaces  $U_L$  aux bornes de la bobine,  $U_C$  aux bornes du condensateur et  $U_R$  aux bornes du conducteur ohmique. Ces tensions sont telles que  $U_L = U_C = 2U_R$ .

1. Donne l'expression de l'impédance du circuit en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $N_1$ . **0,5 pt**
2. Montre que l'impédance  $Z$  du circuit est égale à  $R$ . **0,5 pt**
3. Déduis-en l'état particulier dans lequel se trouve le circuit. **0,5 pt**
4. Détermine :
  - 4.1 les valeurs de  $U_R$ ,  $U_L$  et  $U_C$ ; **0,5 pt + 0,5 pt + 0,5 pt**
  - 4.2 l'intensité efficace  $I$  du courant dans le circuit; **0,5 pt**
  - 4.3 les valeurs de  $L$  et  $C$ ; **0,5 pt + 0,5 pt**
  - 4.4 la différence de phase  $\varphi$  entre la tension appliquée aux bornes du circuit et l'intensité du courant électrique. **0,5 pt**

**PHYSIQUE-CHIMIE****SÉRIES : C – E**

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4 et une feuille annexe à rendre avec la copie.  
la candidate ou le candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré  
Toute calculatrice est autorisée*

**EXERCICE 1 ( 5 Points)****Partie A (3 points)**

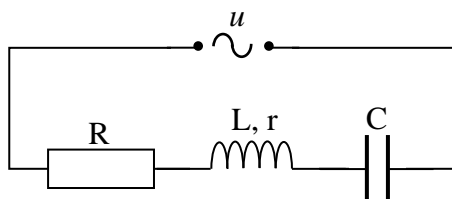
1. Donne les couples redox mis en jeu dans l'oxydation ménagée de l'éthanal par l'ion permanganate en milieu acide. **0,25 pt**
2. Écris l'équation-bilan de la réaction chimique en milieu acide entre les couples  $Cr_2O_7^{2-}/Cr^{3+}$  et  $HCO_2/CH_3OH$ . **0,5 pt**
3. Recopie et relie par une flèche chaque alcool du diagramme **A** à son produit d'oxydation ménagée dans le diagramme **B**, l'oxydant étant en défaut. **0,25 pt x2**



4. Écris l'équation-bilan de l'estérification de l'éthanol par l'acide propanoïque. **0,25 pt**
5. Donne les caractéristiques de la réaction entre le méthanol et le chlorure d'éthanoyle. **0,5 pt**
6. Recopie et complète la phrase suivante par l'expression qui convient :  
L'oxydation ménagée d'un alcool tertiaire .....(est possible/ n'est pas possible). **0,25 pt**
7. Recopie, pour chacune des propositions suivantes, la lettre correspondant à la proposition puis écris **V** en face si la proposition est vraie ou **F** si elle est fausse. **0,25 pt x3**
  - a. La Liqueur de Fehling chauffée en présence d'un aldéhyde donne un précipité rouge brique.
  - b. La 2,4-DNPH donne un test négatif avec les cétones.
  - c. Les aldéhydes sont oxydés par le réactif de Tollens.

**Partie B (2 points)**

1. Soit le circuit RLC série schématisé ci-dessous :



L'expression de l'impédance du circuit est : **0,5 pt**

- a)  $Z = \sqrt{(R - r)^2 + \left(L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  ;
- b)  $Z = \sqrt{R^2 + r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  ;
- c)  $Z = \sqrt{(R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  .

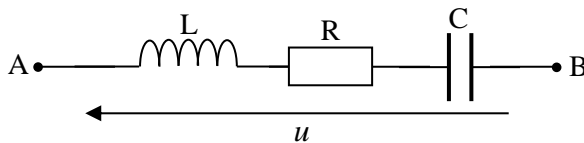
Recopie la lettre correspondant à la bonne réponse.

2. Recopie, pour chacune des propositions ci-dessous, la lettre suivie de **V** si la proposition est vraie ou de **F** si elle est fausse.

- a) L'expression du facteur de qualité d'un circuit RLC est  $Q = \frac{L\omega}{R}$  . **0,25 pt**
- b) L'expression du facteur de puissance d'un circuit RLC d'impédance  $Z$  est  $\cos\varphi = \frac{Z}{R}$  . **0,25 pt**
- c) L'intensité à la résonance d'un circuit RLC alimenté par une tension de valeur efficace  $U$  est  $I_0 = \frac{U}{R}$  . **0,25 pt**

3. Le dipôle AB schématisé ci-dessous est alimenté par une tension alternative sinusoïdale  $u$  de valeur efficace  $U = 6,3$  V.

On donne :  $R = 10 \Omega$



3.1 À la résonance d'intensité, la relation entre  $L$ ,  $C$  et  $\omega_0$  est : **0,25 pt**

- a.  $L\omega_0^2 C = 1$  ;
- b.  $L^2\omega_0 C = 1$  ;
- c.  $L\omega_0 C^2 = 1$  ;

3.2 La tension  $U_C$  aux bornes du condensateur à la résonance d'intensité est : **0,25 pt**

- a. inférieur à la tension  $U_L$  aux bornes de la bobine ;
- b. égale à la tension  $U_L$  aux bornes de la bobine ;
- c. supérieure à la tension  $U_L$  aux bornes de la bobine.

3.3 La valeur de l'intensité  $I_0$  du courant électrique à la résonance d'intensité est égale à : **0,25 pt**

- a. 10 mA ;
- b. 0,63 A ;
- c. 6,3 A.

Recopie, pour chacune des propositions ci-dessous, le numéro et la lettre correspondant à la bonne réponse.

**EXERCICE 2 (5 points)**

Votre professeur vous demande de vérifier la masse d'acide ascorbique de formule  $C_6H_8O_6$  contenue dans un comprimé de vitamine C 500 et le  $pK_a$  du couple correspondant noté  $AH/A^-$ , graphiquement puis par le calcul.

À cet effet, vous dissolvez un comprimé de vitamine C 500 dans un volume  $V = 100 \text{ mL}$  d'eau distillée que vous dosez par une solution de soude de concentration molaire volumique  $C_b = 0,32 \text{ mol.L}^{-1}$ .

Les résultats des mesures du pH de la solution sont consignés dans le tableau ci-dessous.

$V_b \text{ (mL)}$	0	1	3	4	5	6	7	8	8,5	9	9,5	10	11	13	15
pH	2,8	3,3	3,8	4,0	4,2	4,4	4,7	5,1	5,6	9,6	10,2	10,5	10,8	11,0	11,2

- Échelle :  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ mL}$  et  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ unité de pH}$  ;

- Masses molaires :  $M(H) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M(C) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M(O) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ .

1. Trace sur un papier millimétré, la courbe  $\text{pH} = f(V_b)$ . **1 pt**

2. Détermine graphiquement la valeur du  $pK_a$  du couple  $AH/A^-$ . **1 pt**

3. Détermine les concentrations molaires volumiques des espèces chimiques présentes dans la solution pour  $V_b = 4 \text{ mL}$ . **2,25 pt**

4. Déduis de la consigne 3 :

4.1 la valeur du  $pK_a$  du couple  $AH/A^-$  ; **0,25 pt**

4.2 la masse en milligramme d'acide ascorbique contenu dans un comprimé de vitamine C 500. **0,5pt**

**EXERCICE 3 (5 points)**

Au cours d'une séance de travaux pratiques, votre professeur de Physique-Chimie vous demande d'étudier un phénomène physique.

Pour cela, il met à votre disposition le matériel suivant :

- une bobine  $b_1$  de longueur  $\ell = 50 \text{ cm}$ , comportant  $N_1 = 1000$  spires, de rayon  $r = 2,2 \text{ cm}$  et de résistance négligeable ;
- une bobine  $b_2$  comportant  $N_2 = 200$  spires, de section  $S_2 = 10 \text{ cm}^2$  et de résistance négligeable ;
- un conducteur ohmique de résistance  $R = 12 \Omega$  ;
- un oscilloscope bicourbe de voies  $Y_1$  et  $Y_2$ .

Le professeur vous fait réaliser le circuit schématisé ci-dessous où les deux bobines ont le même axe  $x'x$  et le même centre  $O$ . Vous visualisez la courbe de la tension  $u_1$  sur la voie  $Y_1$  de l'oscilloscope.

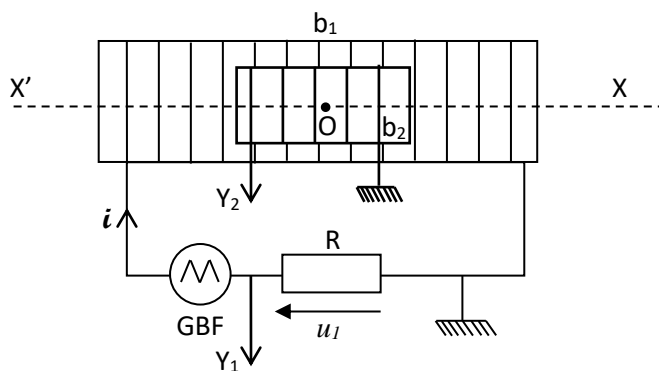
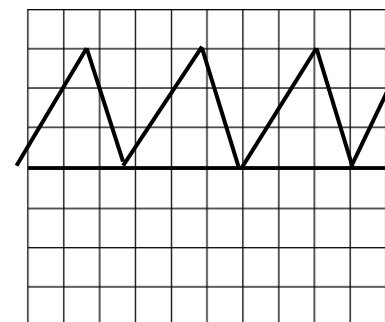


Schéma du montage



Tension  $u_1$  visualisée sur  $Y_1$

Données :

- Sensibilité verticale  $Y_1 : 5V/div.$
- Balayage :  $2 ms/div.$
- Perméabilité du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} SI.$

1. Donne

- 1.1 le nom du phénomène étudié ; **0,25 pt**
- 1.2 le rôle joué par chaque bobine. **0,25 pt + 0,25 pt**

2. Montre que :

- 2.1 la bobine  $b_1$  est un solénoïde ; **0,25 pt**
- 2.2 le flux du champ magnétique créé par la bobine  $b_1$  à travers la bobine  $b_2$  a pour expression :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{R\ell} u_1. \quad \mathbf{1 pt}$$

3. Établis l'expression de la tension  $u_2$  visualisée sur la voie  $Y_2$  de l'oscilloscope. **0,5 pt**

4. Représente sur la feuille annexe :

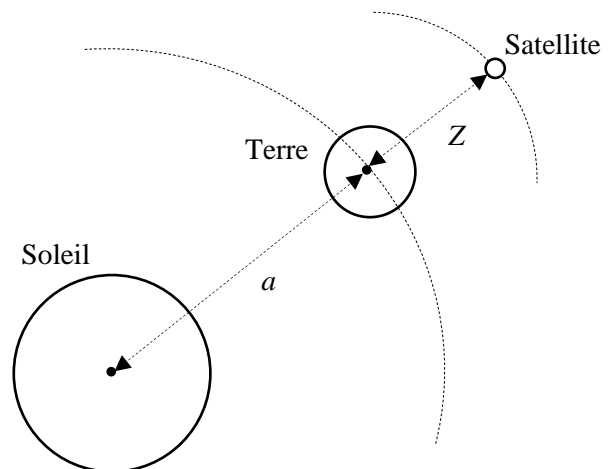
- 4.1 le sens du courant induit d'intensité  $i'$  ; **0,5 pt**
- 4.2 la courbe de la tension  $u_2$ . **0,5 pt + 0,5 pt + (1 pt)**

**EXERCICE 4 (5 points)**

Dans le but de vérifier les lois de la gravitation, votre professeur met à votre disposition les données ci-dessous relatives au mouvement d'un satellite géostationnaire autour de la terre, et au mouvement de la Terre elle-même autour du Soleil (voir figure).

Données :

- $G = 6,67 \cdot 10^{-11} SI$ , la constante de gravitation universelle ;
- $g_0 = 9,8 N/kg$ , l'intensité de la pesanteur ;
- $T = 86\,400s$ , la période de rotation de la Terre ;
- $R = 6\,400 km$ , le rayon de la Terre ;
- $Z = 36\,000 km$ , l'altitude à laquelle se trouve le satellite au dessus de la Terre ;
- $T_s = 365$  jours, la période de révolution de la Terre autour du Soleil ;
- $a = 1,5 \cdot 10^8 km$ , la distance Terre-Soleil.



1. Définis un satellite géostationnaire. **0,5 pt**

2. Écris l'expression :

- 2.1 de l'intensité de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un satellite de masse  $m$  situé à l'altitude  $Z$ , en fonction de  $G, M_T, m, R$  et  $Z$  ; **0,25 pt**
- 2.2 de l'intensité du champ gravitationnel terrestre  $g$  à l'altitude  $Z$  ; **0,25 pt**
- 2.3 de l'intensité du champ gravitationnel terrestre  $g_0$  à la surface de la Terre ; **0,25 pt**
- 2.4 de  $g$  en fonction de  $g_0$ . **0,5 pt**

3. Montre que :

- 3.1 le mouvement du satellite est circulaire et uniforme ; **1 pt**
- 3.2 la période  $T$  du satellite à l'altitude  $Z$  est : **1 pt**

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}} (R+Z)^{3/2}.$$

4 Déduis de ce qui précède :

4.1 la troisième loi de Kepler ;  $0,25 \text{ pt}$

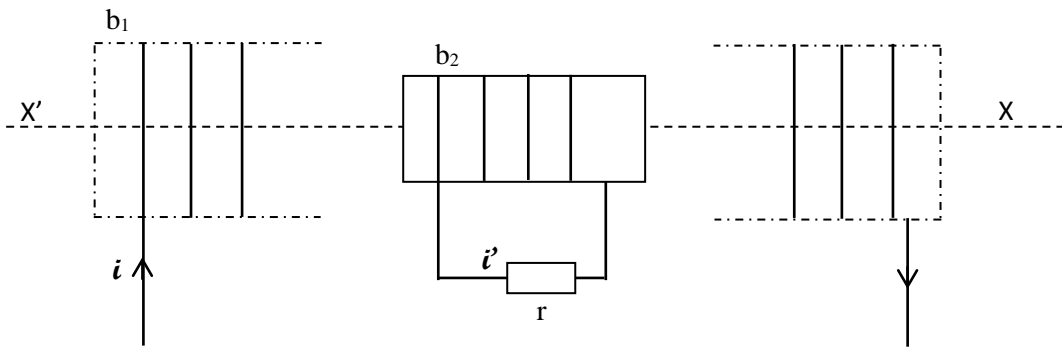
4.2 la masse de la Terre et celle du Soleil.  $0,25 \times 2 \text{ pt} + 0,25 \times 2 \text{ pt}$

**FEUILLE ANNEXE (EXERCICE 3) À RENDRE AVEC LA COPIE**

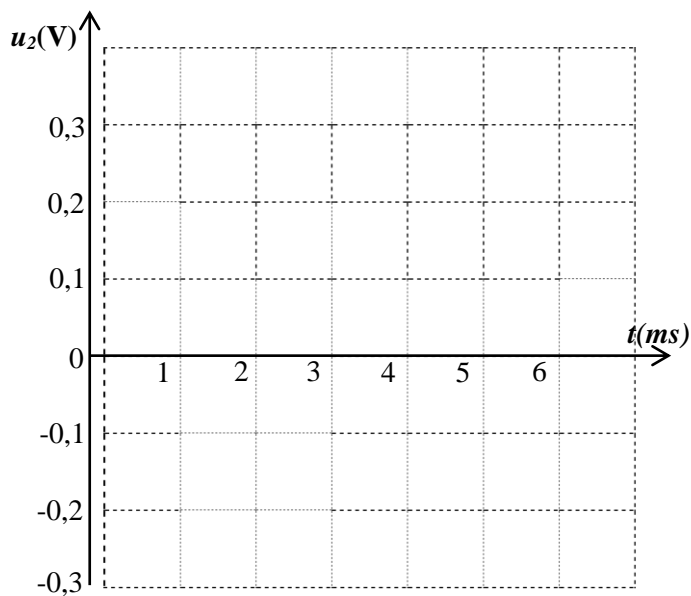
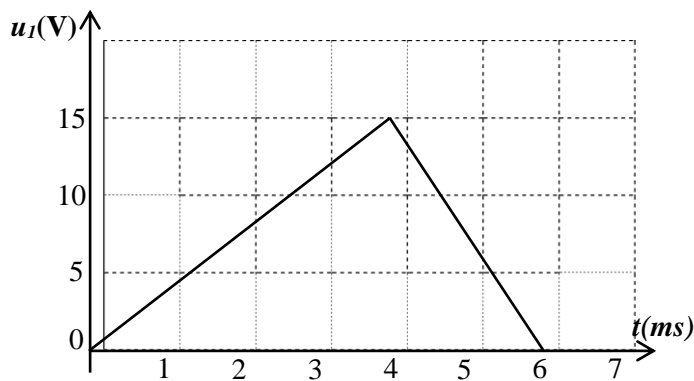
Cette feuille ne doit comporter aucune indication susceptible d'identifier le candidat, la candidate ou l'examineur.

**EXERCICE 3**

**4.4.1**



**4.4.2**



**PHYSIQUE-CHIMIE****SÉRIE : D**

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.  
la candidate ou le candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré  
Toute calculatrice est autorisée*

**EXERCICE 1 ( 5 Points)****CHIMIE (3 points)**

**A.** Pour chacune des affirmations suivantes :

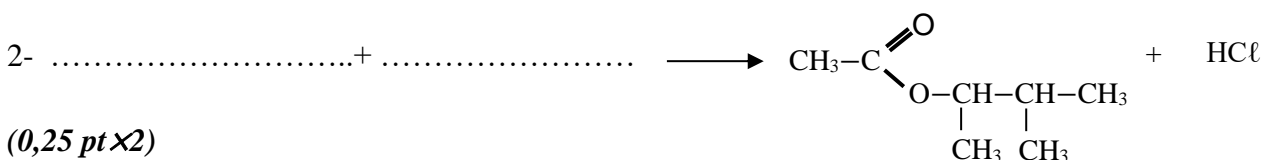
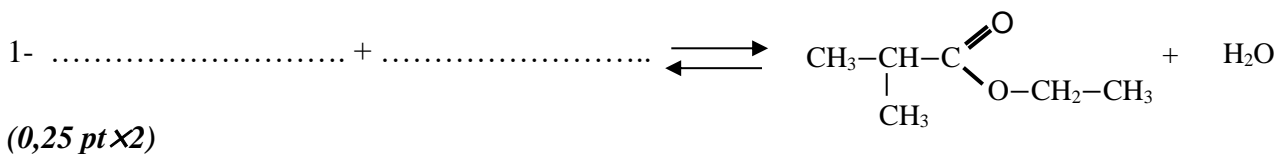
- 1- toutes les molécules comportant un groupement hydroxylé (-OH) sont des alcools ; **0,25 pt**
- 2- l'hydratation d'un alcène dissymétrique produit deux alcools différents ; **0,25 pt**
- 3- lorsque l'oxydant est en excès, le produit de l'oxydation ménagée d'un alcool secondaire est un acide carboxylique ; **0,25 pt**
- 4- les aldéhydes s'oxydent : ce sont des réducteurs. **0,25 pt**

écris le numéro suivi de la lettre **V** si l'affirmation est vraie ou la lettre **F** si elle est fausse.

**B.**

- 1- Donne la formule brute générale :
  - 1.1. d'une amine non cyclique ; **0,25 pt**
  - 1.2. d'un alcool saturé non cyclique. **0,25 pt**
- 2- Écris les formules semi-développées de :
  - 2.1. l'éthanoate de 1-méthyléthyle **0,25 pt**
  - 2.2. l'anhydride éthanoïque. **0,25 pt**

**C.** Recopie et complète les équations-bilans des réactions chimiques suivantes :



**PHYSIQUE (2 points)**

**A.**

Un circuit électrique fermé comprend un condensateur de capacité  $C$  et d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable. La tension aux bornes A et B du condensateur a pour expression  $u_{AB}(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$ .

1- la tension efficace a pour expression : **0,25 pt**

a)  $U = U_m \sqrt{2}$  ;      b)  $U = \frac{\sqrt{2}}{U_m}$  ;      c)  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  ;      d)  $U = 2U_m$

2- la pulsation propre du circuit LC est : **0,25 pt**

a)  $\omega_0 = \sqrt{LC}$  ;      b)  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ;      c)  $\omega_0 = LC$  ;      d)  $\omega_0 = \frac{1}{LC}$

3- La charge portée par l'armature A a pour expression : **0,25 pt**

a)  $q(t) = C.U_m \cos(\omega_0 t)$  ;  
 b)  $q(t) = \frac{U_m}{C} \cos(\omega_0 t)$  ;  
 c)  $q(t) = L.U_m \cos(\omega_0 t)$  ;  
 d)  $q(t) = -C.U_m \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ .

4- L'énergie emmagasinée par le condensateur a pour expression : **0,25 pt**

a)  $E = \frac{1}{2} C.Q^2$  ;      b)  $E = \frac{1}{2} \frac{U^2}{C}$  ;      c)  $E = \frac{1}{2} C^2 U$  ;      d)  $E = \frac{1}{2} C.U^2$  ;

Écris pour chacune des propositions, le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

**B.**

Un circuit RLC série est alimenté par une tension alternative sinusoïdale  $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$ . avec  $U = 60 \text{ V}$ ,  $R = 40 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$  et  $C = 100 \mu\text{F}$ . La fréquence de la tension est  $N = 50 \text{ Hz}$ . Le circuit est à la résonance d'intensité.

Détermine :

1. l'impédance  $Z$  du circuit ; **0,25 pt**
2. l'intensité efficace  $I$  du courant électrique ; **0,25 pt**
3. la phase  $\varphi_{u/i}$  de la tension par rapport à l'intensité du courant électrique ; **0,25 pt**
4. l'expression de l'intensité  $i(t)$  du courant électrique. **0,25 pt**

**EXERCICE 2 (5 points)**

Lors d'une séance de travaux pratiques, ton Professeur demande à ton groupe de doser une solution d'une base faible inconnue B par une solution A d'acide chlorhydrique de concentration molaire volumique  $C_A$  en vue d'identifier la base faible B.

Pour cela, à l'aide d'une burette graduée, le groupe ajoute progressivement à un volume  $V_B$  de la solution basique, la solution d'acide chlorhydrique. Pour chaque volume  $V_A$  de solution d'acide ajoutée, vous relevez le pH du mélange et vous consignez les résultats dans le tableau ci-dessous.

$V_A$ (mL)	0	2,5	5	7,5	9	10,5	12,5	15	16	17	17,5	18	18,5	19	20	22,5	25,5
pH	11,1	10,2	9,6	9,3	9,2	9,1	9	8,5	8,2	7,6	7	5,6	3,8	3,4	3	2,6	2,4

**Données :**  $C_A = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$  ;  $V_B = 20 \text{ mL}$ .

Toutes les expériences ont lieu à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ . L'acide conjugué de la base B sera noté  $BH^+$ .

Tableau de  $pK_A$  de quelques couples acide/base.

Couple acide/ base	Ion Méthylammonium/ Méthylamine	Ion Ammonium/ Ammoniac	Ion Diéthylammonium/ Diéthylamine	Ion Triméthylammonium/ Triméthylamine
$pK_A$	10,7	9,2	11	9,9

Échelles pour la courbe  $pH = f(V_A)$  :  $\begin{cases} 1 \text{ cm pour } 2 \text{ mL} ; \\ 1 \text{ cm pour } 1 \text{ unité de } pH. \end{cases}$

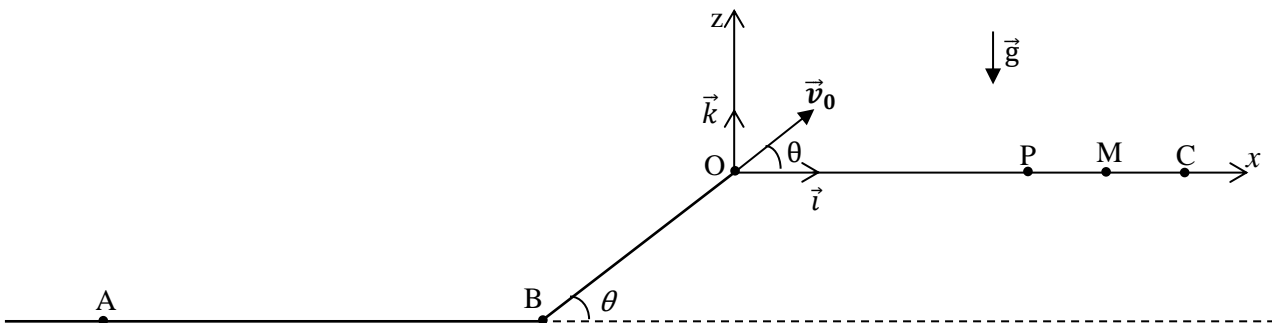
Tu es désigné(e) pour rédiger le compte-rendu.

1. Fais le schéma du dispositif expérimental de dosage. **1 pt**
2. Écris l'équation-bilan de la réaction chimique qui se produit lors du dosage. **0,5 pt**
3. Trace la courbe représentative du  $pH$  en fonction de  $V_A$ . **1 pt**
4. Détermine :
  - 4.1. les coordonnées du point d'équivalence ; **0,5 x 2 pt**
  - 4.2. la concentration molaire volumique  $C_B$  ; **0,25 x 2 pt**
  - 4.3. les coordonnées du point de demi-équivalence ; **0,25 x 2 pt**
  - 4.4. le nom de la base B. **0,25 x 2 pt**

**EXERCICE 3 (5 points)**

Ton groupe d'étude assiste à une compétition de cascade à vélo. La piste de la compétition est constituée :

- d'une piste horizontale AB de longueur  $\ell$  ;
- d'un plan incliné BO de longueur  $\ell'$  faisant un angle  $\theta$  avec l'horizontale ;
- d'un plateau OC horizontal.



Le principe de la compétition est le suivant : un cycliste part de A sans vitesse initiale et accélère entre A et B en pédalant. A partir du point B, il ne pédale plus. Avec la vitesse acquise en B, il poursuit son chemin le long de la pente BO. Arrivé en O, il quitte la piste à la date  $t_0 = 0$  s avec un vecteur-vitesse  $\vec{v}_0$  faisant l'angle  $\theta$ . Il décrit par la suite une trajectoire parabolique et atterrit en un point sur le plateau OC. Le record de la compétition est  $OM = L$ .

Un concurrent passe en B avec un vecteur-vitesse  $\vec{v}_B$  puis en O avec un vecteur-vitesse  $\vec{v}_0$  et atterrit en un point P.

Sur la portion AB, il existe des forces de frottement de résultante  $\vec{f}_1$ . Le concurrent possède une force motrice  $\vec{F}$  sur ce tronçon. Sur la partie BO, les forces de frottements ont pour résultante  $\vec{f}_2$ .

L'ensemble (concurrent + vélo) est assimilable à un point matériel de masse  $m$ .

Ton groupe veut justifier le résultat obtenu par ce concurrent.

Tu proposes ta contribution.

**Données :**  $m = 60 \text{ kg}$  ;  $AB = \ell = 100 \text{ m}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $BO = \ell' = 1,2 \text{ m}$  ;  $OM = L = 95 \text{ m}$  ;  
 $\theta = 45^\circ$  ;  $v_B = 10 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $v_0 = 9 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $f_1 = 51 \text{ N}$ .

1. Représente qualitativement les forces extérieures appliquées au système :
  - 1.1. sur la portion AB ; **0,25 x2 pt**
  - 1.2. sur la portion BO. **0,25 x2 pt**
2. Détermine :
  - 2.1. la valeur  $F$  de la force motrice  $\vec{F}$  ; **0,25 x3 pt**
  - 2.2. la valeur  $f_2$  de la résultante  $\vec{f}_2$  ; **0,25 x2 pt**
  - 2.3. la valeur de l'accélération  $\vec{a}$  du système sur la portion B. **0,25 x2 pt**
3. Établis dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  :
  - 3.1. les équations horaires  $x(t)$  et  $z(t)$  du mouvement du système ; **0,25 x4 pt**
  - 3.2. l'équation cartésienne  $z(t)$  de sa trajectoire. **0,25 x2 pt**
4. Justifie que le concurrent n'a pas pu battre le record. **0,25 x3 pt**

#### **EXERCICE 4 (5 points)**

Après la catastrophe nucléaire de Fukushima au Japon en 2011, tu vois dans un documentaire télévisé un scientifique portant un sac de terre irradié prêt à être stocké dans un magasin très profondément enfoui sous la Terre pour éviter des contaminations. Ce scientifique affirme que le sac contient  $N_0 = 10^9$  noyaux radioactifs de césium  $^{137}_{55}\text{Cs}$ . Ce noyau de césium 137, de période radioactive  $T$ , peut se désintégrer en noyaux de baryum  $^{137}_{56}\text{Ba}$  au cours d'une réaction nucléaire.

Tu désires déterminer en 2023, 12 ans après cet événement, le nombre de noyaux de césium 137 encore présent dans l'échantillon de terre contenu dans le sac.

**Donnée :**  $T = 30 \text{ ans}$

1. Définis la période radioactive. **0,5 pt**
2. Donne :
  - 2.1. la composition d'un noyau de césium 137 ; **0,25 x2 pt**
  - 2.2. les lois de conservation au cours d'une réaction nucléaire ; **0,5 x2 pt**
  - 2.3. le type de radioactivité ou de désintégration du noyau de césium 137. **0,75 pt**
3. Écris l'équation-bilan de la désintégration du césium 137. **0,75 pt**
4. Détermine :
  - 4.1. la constante radioactive  $\lambda$  ; **0,5 pt + 0,25 pt**
  - 4.2. le nombre  $N$  de noyaux radioactifs présents dans le sac. **0,5 pt + 0,25 pt**

**PHYSIQUE-CHIMIE****SÉRIES : C – E**

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4  
la candidate ou le candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré  
Toute calculatrice est autorisée*

**EXERCICE 1 (5 Points)****Partie A (3 points)**

- Écris la lettre de la proposition suivie de **V** si la proposition est vraie ou de **F** si elle est fausse.
  - La réaction chimique qui se produit entre un alcool et un acide carboxylique est une estérification directe. **0,25 pt**
  - La saponification est la réaction chimique qui se produit entre un acide carboxylique et des ions hydroxyde. **0,25 pt**
  - La réaction chimique entre le chlorure d'éthanoyle et le méthanol est totale. **0,25 pt**
- L'oxydation ménagée d'un alcool donne le méthanal.  
L'alcool oxydé est :
  - primaire ;
  - secondaire ;
  - tertiaire.
 Recopie la lettre qui correspond à l'option juste. **0,25 pt**
- Écris la formule du groupe caractéristique et la formule semi-développée de la N,N-diméthylpropanamide. **0,25 pt x2**
- Les formules semi-développées des composés organiques suivants te sont proposées.
  - $$\begin{array}{c} \text{CH}_3-\text{C}-\text{O}-\text{CH}-\text{CH}_3 \\ \parallel \quad | \\ \text{O} \quad \text{CH}_3 \end{array}$$
  - $$\begin{array}{c} \text{CH}_3-\text{CH}-\text{C}-\text{Cl} \\ | \quad \parallel \\ \text{CH}_3 \quad \text{O} \end{array}$$
  - Écris le nom de chacun de ses composés ; **0,25 pt x2**
  - Nomme la famille de chacun de ces composés. **0,25 pt x2**
- Écris le nom et la formule semi-développée du produit qui se forme majoritairement, lors de l'hydratation du but-1-ène en présence d'acide sulfurique. **0,25 pt x2**

**Partie B (2 points)**

- Recopie, parmi les équations-bilans des réactions nucléaires ci-dessous, celle qui correspond à une fission nucléaire. **0,25 pt**
  - ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He}$
  - ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2{}^1_0\text{n}$
  - ${}^3_2\text{He} + {}^3_2\text{He} \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2{}^1_1\text{H}$
- L'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée.  
Son expression à un niveau d'énergie n est donnée par la relation :
  - $E_n = \frac{-13,6}{n}$  ;
  - $E_n = \frac{13,6}{n^2}$  ;
  - $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$ .
 Recopie la lettre qui correspond à la bonne option. **0,25 pt**

3. Définis la période d'une substance radioactive. **0,25 pt**
4. Détermine l'énergie  $E$  d'un photon de longueur d'onde  $\lambda = 400 \text{ nm}$ . **0,25 pt**  
Données :  
- constante de Planck :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$  ;  
- célérité de la lumière :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .
5. Recopie, pour chacune des propositions ci-dessous, la lettre suivie de **V** si la proposition est vraie ou de **F** si elle est fausse.
- Les phénomènes de diffraction et d'interférence prouvent le caractère ondulatoire de la lumière. **0,25 pt**
  - Une interférence lumineuse est la superposition, en un point, de deux ondes lumineuses de même nature et de même fréquence. **0,25 pt**
  - L'interfrange est donnée par la relation  $i = \frac{\lambda D}{a}$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde,  $D$  la distance qui sépare les fentes de l'écran et  $a$  la distance entre les fentes. **0,25 pt**
  - La superposition de deux lumières ne peut donner que de la lumière. **0,25 pt**

### **EXERCICE 2 (5 points)**

Tu achètes au supermarché avec tes camarades de classe, une bouteille de vinaigre portant l'indication 7° que vous voulez vérifier. Pour ce faire, vous diluez 10 fois un certain volume de la solution commerciale  $S$  de vinaigre, de concentration molaire volumique  $C$ . Vous obtenez alors une solution  $S_A$  de concentration molaire volumique  $C_A$ . Vous prélevez un volume  $V_A = 20 \text{ mL}$  de la solution  $S_A$  que vous dosez avec une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration molaire volumique  $C_B = 1,05 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ .

A l'aide d'un pH-mètre, vous relevez le pH du mélange obtenu à chaque ajout d'un volume  $V_B$  de la solution de soude à la solution  $S_A$  prélevée. Les résultats des mesures du pH en fonction du volume de soude versé sont consignés dans le tableau ci-dessous.

$V_b$ (mL)	0	2	4	6	8	10	12	15	16	18	20	21,4	22	22,8	23	23,8	24	26	28
pH	2,8	3,5	3,9	4,3	4,5	4,8	4,9	5	5,1	5,3	5,8	6	6,8	8	9	10	10,7	11,4	11,8

Vous disposez des informations ci-dessous.

- Le constituant essentiel du vinaigre est l'acide éthanoïque de formule  $\text{CH}_3\text{COOH}$ .
- La masse volumique du vinaigre est  $\rho = 1,02 \text{ g.mL}^{-1}$ .
- Le degré d'acidité d'un vinaigre est égal à la masse d'acide éthanoïque contenu dans 100 g de vinaigre.
- Masses molaires :  $M(\text{H}) = 1 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M(\text{C}) = 12 \text{ g.mol}^{-1}$  ;  $M(\text{O}) = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ .
- Échelles :  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 2 \text{ mL}$  et  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ unité de pH}$ , pour la construction de la courbe.

- Écris l'équation-bilan de la réaction de dosage. **0,5 pt**
- Trace, sur un papier millimétré, la courbe d'évolution du pH en fonction du volume  $V_B$  de soude versé. **1 pt**
- Détermine :
  - les coordonnées du point d'équivalence acido-basique ; **0,75 pt**
  - la concentration molaire volumique  $C_A$  de la solution  $S_A$  de vinaigre diluée ; **0,5 pt + 0,25 pt**
  - la concentration molaire volumique  $C$  de la solution commerciale  $S$  de vinaigre ; **0,5 pt**

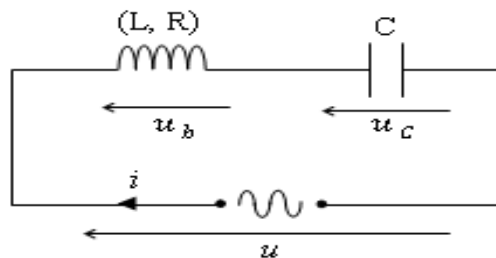
- 3.4 le volume d'acide éthanoïque qui correspond à 100 g de vinaigre. **0,25 pt + 0,25 pt**
4. Vérifie que le degré d'acidité de la solution commerciale de vinaigre est conforme à l'indication sur la bouteille. **0,5 pt + 0,5 pt**

### **EXERCICE 3 (5 points)**

En travaux pratiques, votre professeur de Physique-Chimie vous demande d'étudier un circuit RLC série en vue de représenter son digramme de Fresnel.

Pour ce faire, vous réalisez le montage schématisé ci-dessous, comportant un générateur de basses fréquences (GBF) qui délivre une tension alternative et sinusoïdale  $u$ , une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $R = 5 \Omega$  et un condensateur de capacité  $C$ .

L'intensité du courant électrique qui parcourt le circuit est  $i = 0,24 \cos 100\pi t$  (en ampère).



Avec un voltmètre, vous mesurez les tensions efficaces aux bornes du GBF, de la bobine et du condensateur. Vous constatez que celui-ci indique la même valeur pour chaque dipôle.

Ensuite, vous maintenez constante la valeur de la tension efficace du GBF et vous modifiez sa fréquence de sorte à obtenir une valeur  $N_0$  de celle-ci, telle que l'intensité efficace du courant électrique dans le circuit atteigne une valeur maximale  $I_0$ .

**Échelle** ; 1 cm  $\leftrightarrow$  1  $\Omega$

1. Écris l'expression de l'impédance :
  - 1.1  $Z$  du circuit ; **0,25 pt**
  - 1.2  $Z_b$  de la bobine ; **0,25 pt**
  - 1.3  $Z_C$  du condensateur. **0,25 pt**
2. Montre que l'inductance  $L$  de la bobine et la capacité  $C$  du condensateur ont pour valeurs respectives  $L = 9,1 \cdot 10^{-3}$  H et  $C = 550 \mu\text{F}$ . **0,5 pt + 0,25 pt  $\times 4$**
3. Détermine :
  - 3.1 l'impédance  $Z_b$  de la bobine ; **0,25 pt**
  - 3.2 les expressions des tensions  $u(t)$  aux bornes du GBF et  $u_b(t)$  aux bornes de la bobine ; **0,25 pt  $\times 3$**
  - 3.3 la fréquence  $N_0$  du circuit ; **0,25 pt + 0,25 pt**
  - 3.4 l'intensité  $I_0$  du courant dans le circuit. **0,25 pt + 0,25 pt**
4. Représente, en impédance, le diagramme de Fresnel du circuit électrique. **0,75 pt**

### **EXERCICE 4 (5 points)**

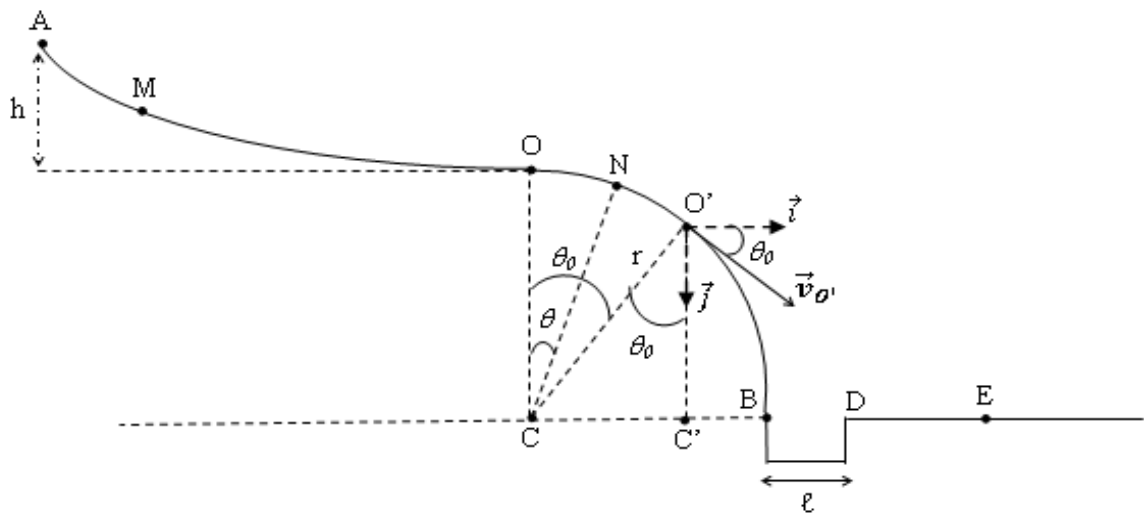
Lors d'un test de sélection, le club scientifique de ton établissement scolaire te demande de montrer que la piste de lancement qu'il a conçu permet de loger une balle dans un réceptacle BD.

La piste schématisée ci-dessous est constituée :

- d'une partie curviligne AO se raccordant tangentiellement à  $\widehat{OB}$  au point O ;
- d'un arc de cercle  $\widehat{OB}$  de rayon  $r = 4$  m ;

- d'un ravin BD de longueur  $\ell = 1 \text{ m}$  ;
- d'une plateforme DE.

La distance C'B a pour longueur  $d = 1,59 \text{ m}$ .  $g = 10 \text{ N/kg}$ .



Lâché du point A sans vitesse initiale, la balle, considéré comme ponctuelle, arrive au point O avec un vecteur-vitesse  $\vec{v}_0$  de valeur  $v_0 = 4 \text{ m.s}^{-1}$ . Les frottements sont négligés sur tout le long de la piste.

1. Représente les forces qui s'exercent sur la balle :
  - 1.1. au point M situé entre A et O. **0,25 pt**
  - 1.2. au point N situé entre O et O'. **0,25 pt**
2. Détermine la hauteur h du point A. **0,25 pt x2**
3. Établis :
  - 3.1. l'expression de la vitesse  $v_N$  de la balle au point N en fonction de  $v_0$ , r, g et  $\theta$  ; **(0,25 pt x2)**
  - 3.2. l'expression de l'intensité R de réaction exercée par la piste sur la balle au point N en fonction de m,  $v_0$ , r, g et  $\theta$ . **(0,25 pt + 0,5 pt)**
4. Montre que :
  - 4.1. la valeur de l'angle  $\theta_0$  correspondant au point O' où la balle quitte la piste est  $\theta_0 = 37^\circ$  ; **(0,25 pt x2)**
  - 4.2. la vitesse de la balle au point O' est  $v_{O'} = 5,67 \text{ m.s}^{-1}$  ; **0,25 pt**
  - 4.3. l'équation cartésienne de la trajectoire de la balle dans le repère  $(O', \vec{i}, \vec{j})$  est :  $y = 0,244 x^2 + 0,75 x$ . **(0,25 pt + 0,5 pt + 0,25 pt)**
  - 4.4. la balle est logée dans le réceptacle. **(0,25 pt + 0,25 pt + 0,5 pt)**

**PHYSIQUE-CHIMIE****SÉRIE : D**

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4 et une  
Toute calculatrice est autorisée*

**EXERCICE 1****CHIMIE (3 points)**

**A.** Tu disposes d'une solution aqueuse de benzoate de sodium ( $C_6H_5COONa$ ).

1. Ecris l'équation-bilan de la réaction chimique de l'ion benzoate avec l'eau. → **0,5 pt**
2. Fais l'inventaire des espèces chimiques en solution. → **0,25 pt**
3. Ecris l'équation de l'électroneutralité de cette solution. → **0,25 pt**

**B.** Recopie et complète les phrases ci-dessous.

1. De deux acides, l'acide le plus fort est celui dont le  $pK_A$  du couple auquel elle appartient est..... → **0,25 pt**
2. De deux bases, la plus forte est celle dont le  $pK_A$  du couple auquel elle appartient est ..... → **0,25 pt**
3. Dans une solution aqueuse d'acide éthanoïque, les espèces chimiques majoritaires ont pour formules..... → **0,5 pt**

**C.** Donne :

1. la définition d'une solution tampon ; → **0,5 pt**
2. les propriétés d'une solution tampon. → **0,5 pt**

**PHYSIQUE (2 points)**

**A.** Énonce :

1. le théorème du centre d'inertie ; → **0,5 pt**
2. la loi de Laplace. → **0,5 pt**

**B.** Recopie, pour chacune des affirmations ci-dessous, le numéro suivi de la lettre **V** si l'affirmation est vraie ou de la lettre **F** si elle est fausse.

1. Dans un champ électrostatique uniforme, les lignes de champ sont parallèles. → **0,25 pt**
2. L'accélération du centre d'inertie d'un solide soumis uniquement à son poids est indépendante de la masse de ce solide. → **0,25 pt**
3. L'accélération d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme est indépendante de la masse de la particule. → **0,25 pt**
4. La période des oscillations d'un pendule élastique horizontal est d'autant plus grande que la masse du solide est élevée. → **0,25 pt**

**EXERCICE 2** (5 points)

Ton Professeur de Physique-Chimie propose à ton groupe d'étudier la synthèse du 2-méthylpropanoate d'éthyle. Cet ester, à odeur de fruit, est utilisé dans l'industrie alimentaire comme arôme. Il est obtenu à partir d'un hydrocarbure insaturé **A** dont la molécule contient  $x$  atomes de carbone et  $y$  atomes d'hydrogènes.

Pour faire cette étude, le Professeur vous propose les résultats ci-dessous de quatre expériences.

**Expérience 1**

L'analyse élémentaire du composé **A** montre qu'il contient 85,7 % de carbone et 14,3 % d'hydrogène.

**Expérience 2**

L'hydratation en milieu acide d'un isomère à chaîne ramifiée du composé **A**, conduit à deux produits **B** et **C**. Le produit **B** est majoritaire.

**Expérience 3**

L'oxydation ménagée de **C** par une solution acidifiée de permanganate de potassium ( $K^+ + MnO_4^-$ ) en excès conduit à un composé **D**.

**Expérience 4**

Le composé **D** réagit avec un alcool **E** pour donner le 2-méthylpropanoate d'éthyle et de l'eau.

**Données :**

- Masses molaires atomiques en  $g \cdot mol^{-1}$  :  $M(H) = 1$  ;  $M(C) = 12$  ;  $M(O) = 16$ .

- Masse molaire moléculaire du composé **A** :  $M_A = 56 g \cdot mol^{-1}$ .

- Couple oxydant-réducteur :  $MnO_4^- / Mn^{2+}$ .

Tu proposes ta contribution à la rédaction du compte rendu de cette étude en répondant aux consignes ci-dessous.

1. Montre que la formule brute de **A** est  $C_4H_8$ . → 1 pt
2. Écris les formules semi-développées et les noms des isomères de **A**. →  $0,25 \times 3 = 0,75$  pt
3. Donne :
  - 3.1 les formules semi-développées et les noms des produits **B** et **C** ; →  $0,25 \times 2 = 0,5$  pt
  - 3.2 la fonction chimique de **D** ; → 0,25 pt
  - 3.3 la formule semi-développée et le nom de **D** ; → 0,25 pt
  - 3.4 le nom et les caractéristiques de la réaction chimique entre le composé **D** et l'alcool **E**.  
→  $0,25 \times 2 = 0,5$  pt
  - 3.5 la formule semi-développée et le nom de l'alcool **E**. → 0,25 pt
4. Écris l'équation-bilan de :
  - 4.1 la réaction d'oxydation de **C** en **D** dans l'expérience 3 ; → 1 pt
  - 4.2 la réaction de synthèse du 2-méthylpropanoate d'éthyle. → 0,5 pt

**EXERCICE 3** (5 points)

Lors d'une séance de travaux pratiques de Physique, le Proviseur met à la disposition de ton groupe,

les éléments suivants :

- un conducteur ohmique de résistance  $R$  ;
- un condensateur de capacité  $C$  ;
- une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable.
- un générateur de basse fréquence (GBF) délivrant une tension sinusoïdale  $u$  de fréquence  $N$  ;
- un oscilloscope bicourbe ;
- des fils de connexion.

Le Professeur vous fait réaliser le circuit RLC série de la figure 1 en vue de déterminer l'inductance  $L$  de

Vous obtenez l'oscillogramme de la figure 2.

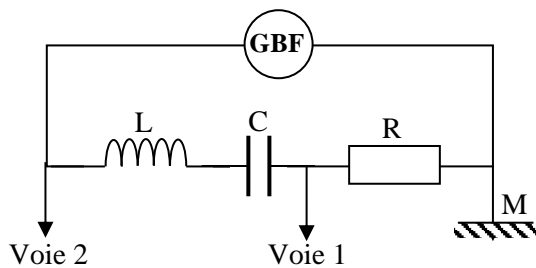


Figure 1

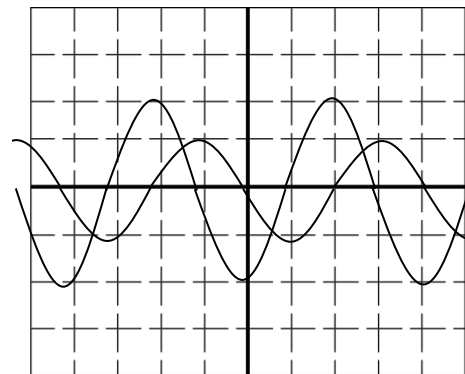


Figure 2

**Données :**

$$R = 10 \, \Omega ; C = 20 \, \mu\text{F}.$$

Réglage de l'oscilloscope :

- balayage horizontale : 5 ms / division ;
- sensibilités verticales :  $\begin{cases} \text{voie 1: } 2 \text{ V/division;} \\ \text{voie 2: } 2 \text{ V/division.} \end{cases}$

Tu proposes ta contribution au groupe.

1. Donne l'expression de l'impédance  $Z$  du circuit en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $N$  et  $C$ .  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
2. Détermine, à l'aide de l'oscillogramme, l'amplitude :
  - 2.1  $U_{\max}$  de la tension  $u$  aux bornes du circuit RLC ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
  - 2.2  $U_{R\max}$  de la tension aux bornes du conducteur ohmique ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
  - 2.3  $I_{\max}$  de l'intensité  $i$  du courant dans le circuit.  $\rightarrow 1 \text{ pt}$
3. Détermine :
  - 3.1 l'impédance  $Z$  du circuit ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
  - 3.2 la fréquence  $N$  des oscillations.  $\rightarrow 1 \text{ pt}$
4. Détermine l'inductance  $L$  de la bobine.  $\rightarrow 1 \text{ pt}$

**EXERCICE 4** (5 points)

Lors des activités de ton club scientifique, tu découvres dans une revue que :

- l'iode 127 a un isotope qui est l'iode  $^{131}_{53}I$ .
- l'iode 131 est radioactif et est utilisé dans le traitement de l'hyperthyroïdie (dysfonctionnement de la thyroïde)
- l'iode 131 se désintègre selon la radioactivité  $\beta^-$ .

**Données**

• Le noyau fils qui résulte de la désintégration de l'iode 131 se trouve parmi les noyaux du tableau

ci-dessous.

Nom	Tellure	Iode	Xénon	Césium	Baryum
Noyau	$^{52}_{52}Te$	$^{53}_{53}I$	$^{54}_{54}Xe$	$^{55}_{55}Cs$	$^{56}_{56}Ba$

- La période radioactive de l'iode 131 est  $T = 8$  jours.
- A la date  $t = 0$  s, un échantillon d'iode 131 contient  $N_0 = 4,8 \cdot 10^6$  noyaux radioactifs.

Ton encadreur te fixe comme objectif de tracer la courbe de décroissance radioactive de l'iode 131.

1. Donne :

1.1 la définition :

1.1.1 des isotopes d'un élément chimique ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

1.1.2 de la radioactivité  $\beta^-$  ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

1.1.3 de la période  $T$  d'un isotope radioactif.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

1.2 la composition du noyau de l'iode 131 ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

1.3 les lois de conservation utilisées pour établir l'équation-bilan d'une désintégration radioactive.

$\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

2. Écris l'équation-bilan de la désintégration de l'iode 131.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

3. Détermine :

3.1 la constante radioactive  $\lambda$  en  $\text{jour}^{-1}$  ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

3.2 l'expression de la loi de décroissance radioactive de l'iode ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

3.3 la durée nécessaire, en jours, pour que 20 % des noyaux radioactifs disparaissent.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

4. Trace l'allure de la courbe de décroissance radioactive  $N = f(T)$  en t'appuyant sur les points d'abscisses à ;  $T$  ;  $2T$  ;  $3T$  et  $4T$ .  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

<b>PHYSIQUE-CHIMIE</b>
------------------------

## SÉRIES : C – E

*Cette épreuve comporte quatre (04) pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.  
La candidate ou le candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.  
Toute calculatrice est autorisée*

**EXERCICE 1** ( 5 Points)**Partie A (3 points)**

1. L'hydratation du méthylpropène conduit à la formation de deux alcools A et B.

L'oxydation ménagée de l'alcool A donne un composé organique C en présence d'un oxydant en excès.

- 1.1. Le composé C est : → 0,25 pt
- |                  |             |                           |
|------------------|-------------|---------------------------|
| a. un aldéhyde ; | b. cétone ; | c. un acide carboxylique. |
|------------------|-------------|---------------------------|
- 1.2. Le composé B est ; → 0,25 pt
- |                         |                           |                         |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| a. un alcool primaire ; | b. un alcool secondaire ; | c. un alcool tertiaire. |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
- 1.3. L'alcool A est : → 0,25 pt
- |                         |                           |                         |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| a. un alcool primaire ; | b. un alcool secondaire ; | c. un alcool tertiaire. |
|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
- 1.4. Le nom de l'alcool A est : → 0,25 pt
- |                         |                           |                           |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a. le méthylpropan-1-ol | b. le méthylpropan-2-ol ; | c. le 2-méthylbutan-1-ol. |
|-------------------------|---------------------------|---------------------------|

**Recopie le numéro de chaque proposition, suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.**

2. Donne les caractéristiques de la réaction chimique entre :
- 2.1. l'acide propanoïque et le méthylpropan-2-ol ; → 0,25 pt
- 2.2. l'anhydride éthanoïque et le propan-1-ol. → 0,25 pt
3. Recopie et complète chacune des phrases suivantes par le groupe de mots qui convient.
- 3.1. La réaction chimique entre la butyrine et la soude est appelée ..... → 0,25 pt
- 3.2. La réaction chimique entre un alcool et .....est une estérification directe. → 0,25 pt
4. Recopie et complète chacune des affirmations suivantes, suivi de la lettre V si l'affirmation est vraie ou de la lettre F si elle est fausse.
- 4.1. Le réactif de Schiff est un réactif commun aux cétones et aux aldéhydes. → 0,25 pt
- 4.2. Le réactif de Tollens réagit avec les aldéhydes pour donner un miroir d'argent. → 0,25 pt
- 4.3. Le précipité rouge brique formé lors de la réaction chimique entre la liqueur de Fehling et un aldéhyde est l'oxyde de cuivre I. → 0,25 pt

4.4. L'action d'une solution de dichromate de potassium acidifiée, en excès, sur le propan-2-ol conduit à l'acide propanoïque. → 0,25 pt

**Partie B (2 points)**

1. Recopie le numéro de chacune des affirmations suivantes, suivi de la lettre V si l'affirmation est vraie ou de la lettre F si elle est fausse.

1.1. La période propre  $T_0$  d'un pendule élastique a pour expression  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . → 0,25 pt

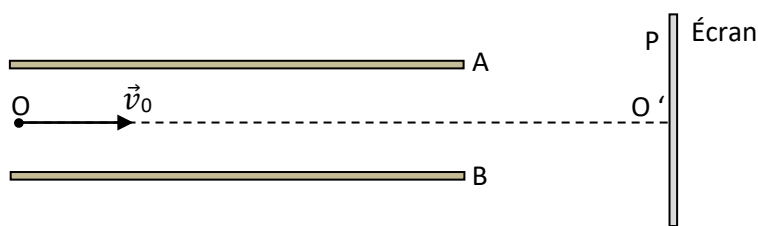
1.2. Le vecteur accélération  $\vec{a}$  d'un projectile lancé vers le haut est opposé au vecteur champ de pesanteur  $\vec{g}$ . → 0,25 pt

1.3. L'altitude maximale atteinte par un projectile lancé dans le champ de pesanteur uniforme dépend de la masse de ce projectile. → 0,25 pt

1.4. La portée horizontale du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme ne dépend pas de la masse de ce projectile. → 0,25 pt

2. Un électron pénètre avec un vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  horizontal, entre les armatures A et B d'un condensateur plan, comme l'indique le schéma ci-dessous.

A la sortie du condensateur, l'électron frappe un écran fluorescent au point P.



2.1. La force électrostatique  $\vec{F}$  appliquée à l'électron entre les armatures du condensateur est orienté de : → 0,25 pt

- a. A vers B ;                                      b. B vers A ;                                      c. O vers O'.

2.2. Le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  entre les armatures du condensateur est orienté de : → 0,25 pt

- a. A vers B ;                                      b. B vers A ;                                      c. O vers O'.

2.3. Le mouvement de l'électron entre les armatures du condensateur est : → 0,25 pt

- a. rectiligne ;                                      b. circulaire ;                                      c. parabolique.

2.4. Le mouvement de l'électron à la sortie du condensateur est : → 0,25 pt

- a. rectiligne et uniforme                      b. rectiligne et accéléré                      c. parabolique.

**Recopie le numéro de chaque proposition, suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.**

**EXERCICE 2 (5 points)**

Au cours d'une séance de travaux pratiques, votre professeur de Physique-Chimie vous propose de déterminer le  $pK_A$  du couple acide éthanoïque/ ion éthanoate.

Pour ce faire, il met à votre disposition le matériel nécessaire et les deux solutions suivantes :

- une solution  $S_0$  d'hydroxyde de sodium NaOH de concentration molaire volumique  $C_0 = 5 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ .

- une solution  $S_0$  d'acide éthanoïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$  de concentration molaire volumique  $C_A$  inconnue.

Vous diluez 10 fois un certain volume de la solution  $S_0$  et vous obtenez une solution  $S_B$  de concentration molaire volumique  $C_B$ .

Vous réalisez le dosage pH-métrique d'un volume  $V_A = 20 \text{ cm}^3$  de la solution  $S_A$  par la solution  $S_B$ .

Pour un volume  $V_B = 5 \text{ cm}^3$  de la solution  $S_B$  versée, le pH du mélange est égal à 4,8 à 25°C.

L'équivalence acido-basique est obtenue lorsque vous avez versé un volume  $V_{BE} = 10 \text{ cm}^3$  de la solution  $S_B$ .

Le produit ionique de l'eau est  $K_e = 10^{-14}$  à 25 °C

1. Ecris l'équation-bilan de la réaction chimique qui a lieu lors du dosage de la solution d'acide éthanoïque par la solution d'hydroxyde de sodium.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
2. Détermine :
  - 2.1. la nature du mélange obtenu à l'équivalence acido-basique ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
  - 2.2. les propriétés du mélange obtenu lorsque le volume de la solution d'hydroxyde de sodium versé est de  $5 \text{ cm}^3$ .  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
  - 2.3. la concentration molaire volumique  $C_A$  de la solution  $S_A$ .  $\rightarrow 0,25 \times 3 = 0,75 \text{ pt}$
3. Déduis de la consigne 2.2, le  $\text{p}K_A$  du couple acide éthanoïque/ion éthanoate.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
4. Retrouver par le calcul, le  $\text{p}K_A$  du couple acide éthanoïque/ion éthanoate.  $\rightarrow 0,25 \times 9 = 2,25 \text{ pt}$

### EXERCICE 3 (5 points)

Dans le but de vérifier vos acquis, votre professeur de Physique-Chimie vous demande d'étudier le mouvement du satellite géostationnaire nommé RASCOM autour de la Terre.

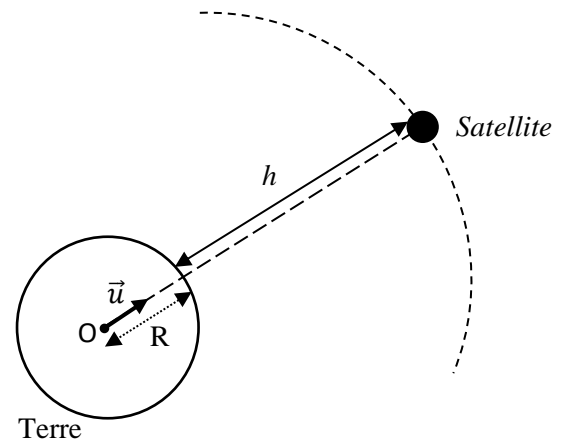
Ce satellite (S), supposé ponctuel, de masse  $m$ , décrit autour de la Terre, une trajectoire circulaire centrée sur O, à une altitude  $h$  de la surface de la Terre, comme l'indique la figure ci-contre.

La Terre est assimilée à un corps à répartition sphérique de masse, de centre O, de masse  $M$  et de rayon  $R$

#### Données :

- $M = 6.10^{24} \text{ kg}$  ;
- $R = 6\,380 \text{ km}$  ;
- $G = 6,67.10^{-11} \text{ S.I.}$  est la constante de gravitation universelle ;
- $T = 86\,400 \text{ s}$  est la période de rotation de la Terre.

Le professeur vous demande de déterminer l'altitude  $h$  à laquelle se situe le satellite.



1. Donne :

- 1.1. le référentiel d'étude du satellite ;  $\rightarrow 0,25 \text{ pt}$
- 1.2. la définition d'un satellite géostationnaire ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
- 1.3. l'expression de la force exercée par la Terre sur le satellite ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$
- 1.4. l'expression du vecteur champ de gravitation terrestre.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

2. Montre que le mouvement du satellite est uniforme. → 0,5 pt
3. Établis l'expression de :
  - 3.1. la vitesse linéaire  $v$  du satellite ; → 0,5 pt
  - 3.2. la vitesse angulaire  $\omega$  du satellite ; → 0,5 pt
  - 3.3. la période  $T_S$  du satellite. → 0,5 pt
4. Détermine l'altitude  $h$  à laquelle se situe le satellite. → 0,75 + 0,5 = 1,25 pt

**EXERCICE 4 (5 points)**

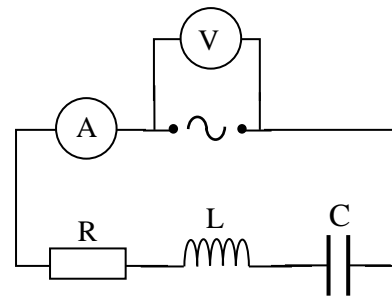
Au cours d'une séance de travaux pratiques, ton professeur de Physique-Chimie fait réaliser par ton groupe, le montage schématisé ci-dessous, en vue de déterminer de deux façons différentes, le facteur de qualité d'un circuit RLC série à la résonance d'intensité

Ce circuit est constitué d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ , d'un condensateur de capacité  $C$ , d'une bobine de résistance négligeable et d'inductance  $L$ , le tout alimenté par un générateur délivrant une tension sinusoïdale de fréquence  $N$  variable.

L'expression de la tension aux bornes du générateur

Est de la forme  $u = U\sqrt{2}\cos(2\pi Nt)$

Un voltmètre et un ampèremètre permettant de mesurer respectivement la tension aux bornes du générateur et l'intensité du courant dans le circuit. En maintenant constante la tension efficace  $U$  aux bornes du générateur, un membre du groupe fait varier la valeur de la fréquence  $N$ .



Pour chaque valeur de  $N$ , vous relevez la valeur  $I$  de l'intensité efficace du courant électrique dans le circuit. Les résultats des mesures sont consignés dans le tableau suivant :

N(Hz)	760	765	770	775	780	790	795	800	805	810	815	820	825	830	835
I(mA)	106	123	145	177	223	404	498	442	328	246	193	158	133	115	102

**Données :**  $U = 100 \text{ V}$  ;  $C = 2.10^{-8} \text{ F}$  ;  $L = 2 \text{ H}$  ;  $R = 200 \Omega$ .

Echelle : 1 cm ↔ 5 Hz en abscisse et 1 cm ↔ 20 mA en ordonnée.

Tu prendras 760 Hz comme origine des fréquences et 100 mA comme origine des intensités.

1. Donne deux caractéristiques d'un circuit RLC série à la résonance d'intensité. → 0,25 pt
2. Trace la courbe  $I = f(N)$  de la variation de l'intensité efficace du courant en fonction de la fréquence du générateur. → 0,1 pt
3. Détermine, à partir du graphique :
  - 3.1. l'intensité efficace  $I_0$  du courant électrique à la résonance d'intensité ; → 0,25 pt
  - 3.2. la fréquence  $N_0$  de résonance du circuit ; → 0,25 pt
  - 3.3. la largeur  $\Delta N$  de la bande passante. → 0,75 pt
  - 3.4 le facteur de qualité  $Q_{\text{exp}}$  du circuit. → 0,5 pt

4. Détermine par calcul, à la résonance d'intensité :

4.1. l'intensité efficace  $I_0$  du courant électrique dans le circuit ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

4.2. la fréquence propre  $N_0$  du circuit ;  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

4.3. la largeur  $\Delta N$  de la bande passante.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

4.4. le facteur de qualité  $Q_{th}$  du circuit.  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

## LEÇON 1 : CINÉMATIQUE DU POINT

**COMPÉTENCE 1** : TRAITER UNE SITUATION SE RAPPORTANT À LA MÉCANIQUE

**THÈME 1** : MECANIQUE

**Leçon 1** : CINÉMATIQUE DU POINT (10 H)

**Exemple de situation**

Au cours d'une évaluation en athlétisme, au lycée moderne Inagoï de San-Pedro, un élève de la Terminale C parcourt un trajet constitué d'une piste rectiligne et d'une autre curviligne. Sur la piste rectiligne, il démarre sans vitesse initiale, accélère pour atteindre une vitesse qu'il maintient constante pour le reste du trajet. Ayant observé attentivement le parcours de leur camarade, les élèves de la classe décident le lendemain, pendant le cours de Physique-chimie, d'approfondir leurs connaissances sur les mouvements. À l'aide d'enregistrements, ils cherchent à déterminer les équations horaires des différents mouvements et à les utiliser.

HABILETÉS	CONTENUS
Connaître	Les expressions - du vecteur position - du vecteur-vitesse d'un point dans un repère donné - du vecteur-accélération d'un point dans un repère donné - de l'accélération normale - de l'accélération tangentielle
Déterminer	Les équations horaires des mouvements : - rectiligne uniforme ; - circulaire uniforme ; - rectiligne uniformément varié.
Utiliser	1) Les équations horaires $x(t)$ ; $v_x(t)$ et $\theta(t)$ des différents mouvements. 2) les relations : $\Delta v_x^2 = 2a\Delta x$ ; $v = R\omega$ ; $s = R\theta$ ; $a_n = \frac{v^2}{R}$
Exploiter	Un enregistrement.

### INTRODUCTION

La cinématique est l'étude des mouvements sans tenir compte des causes qui les ont engendrés ou qui peuvent les modifier.

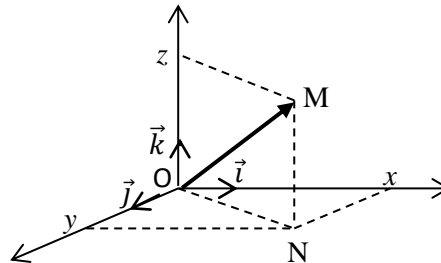
Ce chapitre présente l'étude du mouvement d'un point en définissant les notions de vecteur-vitesse et de vecteur-accélération. Il présente également l'étude de quelques mouvements particuliers.

1) **REPERAGE D'UN POINT**

1.1) **Repère d'espace**

1.1.1) **Repérage d'un point dans un repère cartésien**

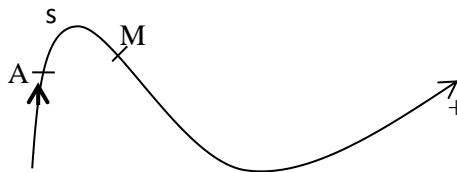
Dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , un point M est repéré par son abscisse x, son ordonnée y et sa cote z. Le vecteur  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  est appelé vecteur-position du point M.



La norme de ce vecteur position est :  $\|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  dans le repère orthonormé

1.1.2) **Repérage d'un point sur sa trajectoire**

La trajectoire du point mobile M étant orientée ; un point origine appartenant à la trajectoire est choisi : on appelle abscisse curviligne du point M sur sa trajectoire, la longueur de l'arc  $s = \text{arcAM} = \widehat{AM}$  mesurée en mètres (m). s est une grandeur algébrique.



1.2) **Repère de temps**

Pour trouver la position d'un point mobile, il faut associer au repère d'espace un repère de temps. L'origine des dates  $t_0 = 0$  s est arbitraire. Les repères de temps sont : l'horloge, la montre, le chronomètre... Durée d'un événement : on la note  $\Delta t = t_2 - t_1 \geq 0$ .

1.3) **Conclusion**

Pour étudier le mouvement d'un mobile, il faut définir un repère d'espace et un repère de temps. Les coordonnées d'espace x, y, z et s dépendent du temps t.

Leurs expressions en fonction du temps t et sont appelées **lois ou équations horaires**.

Exemples :  $x(t) = 2t^2 - 3$  ;  $y(t) = -5t^2 + 4t - 8$  ;  $z(t) = 1$  ;  $s(t) = 4t - \pi$

**Activité d'application 1 (vecteurs positions – Coordonnées - Équation de la trajectoire – Normes)**

Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le vecteur position d'un point mobile M a pour expression à la date  $t \geq 0$  :  $\vec{OM} = (\vec{i} - 2\vec{k})t^2 + (-2\vec{i} + 4\vec{k})t + \vec{j} + 3\vec{k}$ . L'unité de mesure est le mètre (m).

- a) Détermine les équations horaires du mouvement de M. Déduis la distance OM à la date  $t = 0$ s.
- b) Montre que le mouvement de M se déroule dans un plan. Précise ce plan.
- c) Trouve l'expression de z en fonction de x. Déduis la nature de la trajectoire de M

## 2) LA VITESSE

### 2.1) La vitesse moyenne

La vitesse moyenne d'un mobile entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  est le quotient de la distance parcourue  $M_1M_2 = d$  par la durée  $\Delta t = t_2 - t_1$  du parcours.

$$V_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{M_1M_2}{t_2 - t_1}$$

Avec  $d$  en (m),  $\Delta t$  en (s) et  $V_m$  en (m/s)

N.B :  $V_m$  s'exprime aussi en km/h avec  $1m/s = 3,6 km/h$ .

### 2.2) le vecteur-vitesse instantanée

#### 2.2.1) définition

Le vecteur-vitesse d'un point mobile M, dans un repère donné, est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur-position de ce point.  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

#### 2.2.2) expressions

##### a) en coordonnées cartésiennes

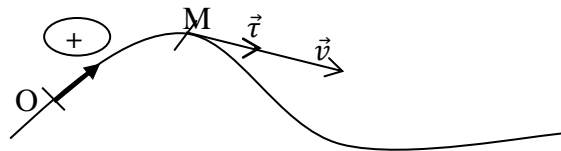
Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on a :  $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t) = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

sa norme est :  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

##### b) abscisse curviligne

$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$  ;  $v$  représente la valeur (algébrique) de la vitesse au point M vue sur la tangente orientée.



$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau} = v \vec{\tau}$  où  $\vec{\tau}$  est le vecteur unitaire de la tangente à la trajectoire au point considéré M.

intensité  $v$  de la vitesse :  $v = |v|$ .

### Activité d'Application 2 (Vecteurs vitesses et normes en coordonnées cartésiennes)

Les équations horaires du mouvement d'un point mobile, dans un repère orthonormé ou les unités sont celles du système international sont :  $x = t^2 - 3t + 5$  ;  $y = -3t^2 + t - 1$  et  $z = 2$ .

a) Détermine les coordonnées du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du mobile à la date  $t$ .

b) Donne l'expression de  $\vec{v}$  à la date  $t = 1s$  et calcule sa valeur  $v$ .

## 3) LE VECTEUR ACCÉLÉRATION

### 3.1) accélération moyenne

L'accélération moyenne est la variation de la vitesse par rapport au temps. On écrit :

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \text{ avec } a \text{ en } (m/s^2) ; v \text{ en } (m/s) \text{ et } t \text{ en } (s).$$

Exemple : la vitesse d'une bicyclette passe de  $3 m.s^{-1}$  à  $13 m.s^{-1}$  en  $4s$  ; Elle a pour accélération  $a_x = 2,5 m.s^{-2}$ .

### 3.2) accélération instantanée

Le vecteur accélération d'un point mobile M, dans un repère donné, est égal à la dérivée par rapport au temps du vecteur-vitesse de ce point :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$  ;

Il est aussi égal à la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur position de ce point :  $\vec{a} = d^2 \frac{\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

en coordonnées cartésiennes :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = d^2 \frac{\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k}$

$\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$  ;

Sa norme est :  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

#### Activité d'application 3 (Vecteurs accélération et normes en coordonnées cartésiennes)

Le mouvement d'un mobile M est décrit, dans un repère orthonormé par les équations horaires :

$$x = t - 2 ; y = 2t^2 + 5 ; z = -t^2 + 3t - 4$$

- Détermine la composante du vecteur accélération  $\vec{a}$ .
- Que dire de  $\vec{a}$ , calcule sa norme a exprimée en m.s<sup>-2</sup>.

### 3.3) accélération tangentielle et accélération normale

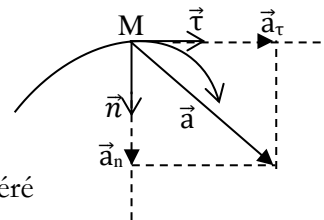
Ce sont les composantes du vecteur accélération  $\vec{a}$  dans la base de FRENET (M,  $\vec{u}$ ,  $\vec{n}$ ) ou (M,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ ) ;

Où M est le point mobile, ( $\vec{u}$  ou  $\vec{\tau}$ ) le vecteur unitaire de la tangente en M et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale en M.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}$$

- accélération tangentielle :  $a_\tau = \frac{dv}{dt}$
- accélération normale :  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$

R ou  $\rho$  est le rayon de courbure de la trajectoire au point M considéré



#### Activité d'application 4 (Vecteurs vitesses et vecteurs accélérations et normes dans la base de Frenet). Tle C

Sur une trajectoire curviligne orientée dans le sens du mouvement et d'origine O, un point mobile M est repéré par son abscisse curviligne  $s(t) = t^2 + 4$  (t en seconde) ; repère de Frenet (O,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ )

- Donne l'expression du vecteur-vitesse et du vecteur accélération dans la base de Frenet.
- Détermine la vitesse linéaire et les composantes du vecteur accélération du point mobile M
- Exprime les vecteurs vitesse et accélération à la date t = 1s puis les représenter.

On donne :  $\rho = 1\text{m}$  (rayon de courbure de la trajectoire) ; **échelle** :  $1\text{cm} \leftrightarrow 1\text{m.s}^{-1}$  ;  $1\text{cm} \leftrightarrow 2\text{m.s}^{-2}$ .

#### Résolution détaillée

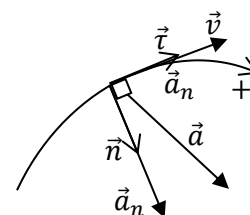
a) expression de  $\vec{v}$  et de  $\vec{a}$  dans Frenet :  $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}$  et  $\vec{a} = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$

b) vitesse linéaire :  $v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot t$  et composante du vecteur accélération

de  $\vec{a}$  ( $a_\tau = \frac{dv}{dt} = 2$  ;  $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2t)^2}{\rho} = 4 \cdot t^2$ )

à t = 1s ;  $v_1 = 2\text{ m/s}$  et  $\vec{a}$  ( $a_\tau = 2\text{m/s}^2$  ;  $a_n = 4\text{ m/s}^2$ )

3)  $\vec{v} = 2 \cdot \vec{\tau}$  ;  $\vec{a} = 2 \cdot \vec{\tau} + 4 \cdot \vec{n}$



#### 4) ÉTUDE DE QUELQUES MOUVEMENTS

##### 4.1) Mouvement rectiligne uniforme

###### 4.1.1) Caractéristiques

Un mouvement est rectiligne et uniforme si sa trajectoire est une droite et que son vecteur vitesse est constant.  $\vec{v} = \overline{cste}$

###### 4.1.2) Équation horaire

$\overline{OM} = \vec{v}_0 \cdot t + \overline{OM}_0$  ; mais si on choisi un axe (Ox) orienté et confondu avec la trajectoire :



Sur cet axe (Ox) :  $x(t) = v_0 t + x_0$  équation horaire du mouvement du mobile M.  
où  $x_0$  et  $v_0$  représentent respectivement  $v$  et  $x$  du point mobile à la date  $t = 0s$

##### Activité d'application 5 (mouvement rectiligne uniforme)

Un mobile M décrit dans un repère (O,  $\vec{i}$ ), une trajectoire rectiligne d'un mouvement uniforme.

A l'instant  $t = 1s$ , l'abscisse du mobile est 8 m ; à l'instant  $t = 3s$ , son abscisse est - 4 m.

- Donne l'expression de l'équation horaire pour un mouvement rectiligne uniforme.
- Détermine la vitesse initiale  $v_0$  et l'abscisse  $x_0$  du mobile M et déduis l'équation horaire  $x(t)$  de M.
- Calcul la position de M à la date  $t = 1s$ .

**Réponse :**  $x(t) = - 6 \cdot t + 14$  et  $x(1) = 8m$

##### Activité d'application 5 (MRU – repère d'espace et repère de temps) Tle C

Un car A part d'un point A pour un point B suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v_A = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cinq minutes plus tard, un autre car B part du point B vers le point A suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v_B = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On prendra pour origine des espaces le point A et pour origine des dates, l'instant de départ du car B. Le trajet AB est orienté de A vers B et vaut 25000 m.

- Établis l'équation horaire de chaque car.
- Détermine le temps de rencontre des deux cars.

##### 4.2) Mouvement rectiligne uniformément varié

###### 4.2.1) Caractéristiques

Un mouvement est rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et que son vecteur accélération est constant.  $\vec{a} = \overline{cste}$

###### 4.2.2) Équation horaire

$\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \overline{OM}_0$  et  $\vec{v} = \vec{a} \cdot t + \vec{v}_0$  : si on choisi un axe (Ox) orienté et confondu avec la trajectoire :



Sur cet axe (Ox) :  $x(t) = \frac{1}{2} a_{0x} t^2 + v_{0x} t + x_0$  et  $v(t) = a_{0x} t + v_{0x}$  :

ce sont les équations horaires du mouvement du mobile M.

où  $x_0$  et  $v_{0x}$  représentent respectivement  $v$  et  $x$  du point mobile à la date  $t = 0s$

**4.2.3) Nature d'un mouvement rectiligne uniformément varié**

Il existe deux types de mouvements rectilignes uniformément variés :

- Le mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA) :  $\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x \cdot v_x > 0$  (le vecteur  $\vec{a}$  et le vecteur  $\vec{v}$  ont le même sens) ou  $\Delta v > 0$ .
- Le mouvement rectiligne uniformément retardé (MRUR) :  $\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x \cdot v_x < 0$  (le vecteur  $\vec{a}$  et le vecteur  $\vec{v}$  sont de sens opposés) ou  $\Delta v < 0$ .

**Important :** Quelque soit le type de mouvement rectiligne uniformément varié, on établit à partir des équations horaires la relation :  $v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x(x - x_0)$  sur l'axe des x

**Activité d'application 6 (mouvement rectiligne uniformément varié MRUV)**

Une voiture passe à une position  $x_0 = 0$  m avec une vitesse initiale de  $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Elle est en train de rouler sur une route rectiligne avec une accélération constante de  $0,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Calcule :

- sa vitesse au bout de 10s.
- la distance parcourue entre  $t_1 = 2$  s et  $t_2 = 5$  s
- la vitesse de la voiture après un parcours de 50 m.

**Résolution détaillée**

- sa vitesse au bout de 10s est :  $v = a \cdot t + v_0 = 0,8 \times 10 + 10 = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
- la distance parcourue entre les dates  $t_1 = 2$  s et  $t_2 = 5$  s  
 $x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_0 t_1 = 0,44 \times 4 + 10 \times 2 = 21,6$  m et  $x_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 + v_0 t_2 = 0,44 \times 25 + 10 \times 5 = 60$  m ;  
 $\Delta x = x_2 - x_1 = 38,4$  m
- calcul de la vitesse  $v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \Delta x = 2a \cdot d$  et  $v = \sqrt{100 + 1,6 \times 50} = 13,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

**4.3) Mouvement circulaire uniforme**

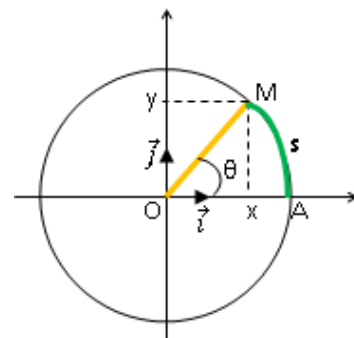
4.3.1) définition

Un mouvement circulaire uniforme est un mouvement dont la trajectoire est un cercle et la norme du vecteur-vitesse constant.

4.3.2) repérage de la position du mobile

Le point mobile M sur une trajectoire circulaire peut être repérer

- par son **abscisse angulaire**  $\theta = (\vec{i}, \widehat{OM})$
- par son **abscisse curviligne**  $s = \widehat{AM} = R \cdot \theta$
- soit ses **coordonnées cartésiennes** :  $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$   
 avec  $\begin{cases} x = R \cos \theta(t) \\ y = R \sin \theta(t) \end{cases}$



4.3.3) équation horaires

a) l'abscisse angulaire  $\theta(t)$

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  est la vitesse angulaire en (rad/s)

$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega(t - t_0) \Rightarrow \theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0$  avec  $t_0 = 0$  et  $\theta_0$  est la valeur de  $\theta$  à  $t = 0$ .

C'est l'équation horaire de l'élongation angulaire.

**b) l'abscisse curviligne**

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  est la vitesse linéaire en (m/s)

$v = \frac{s - s_0}{t - t_0} \Rightarrow s - s_0 = v(t - t_0) \Rightarrow s(t) = v.t + s_0$  avec  $t_0 = 0$  et  $s_0$  est la valeur de  $s$  à la date

$t = 0$  ;  $s$  et  $s_0$  sont en mètre (m) : C'est l'équation horaire de l'abscisse curviligne.

**ou encore** :  $s = R.\theta$  or  $\theta(t) = \omega t + \theta_0$  donc  $s = R\omega.t + R.\theta_0 = v.t + s_0 \Rightarrow s(t) = v.t + s_0$

pour  $s_0 = 0$  ; on a :  $s(t) = v.t$  sachant que (1 tour = T) on a :  $2\pi R = v.T \Rightarrow T = \frac{2\pi.R}{v}$

**ou**  $v = R.\omega$  et  $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi.R}{v}$

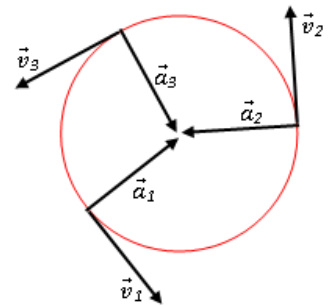
**Pour un mouvement circulaire uniforme on a :**

$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R.\dot{\theta} = R\omega$  car  $\dot{\theta} = \omega = cste$

$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{\tau} = R\omega^2 \vec{n} + R \frac{d\omega}{dt} \vec{\tau}$

$\vec{a} = R\omega^2 \vec{n}$  : l'accélération est centripète  $\vec{v} = v_s \vec{\tau}$  et  $\vec{a} = a_n \vec{n} = R\omega^2 \vec{n}$

dans la base de Frenet		caractéristiques de $\vec{a}$	
$\vec{v}$	$v_\tau = R\omega$	$\vec{a}$	$a_\tau = 0$
	$v_n = 0$		$a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$



ORDRES DE GRANDEUR DE L'ACCÉLÉRATION	
Sources	Valeurs
Fusée au décollage	6 m.s <sup>-2</sup>
Corps en chute libre sur la Terre à Paris	9,81 m.s <sup>-2</sup>
Voiture en arrêt brutal sur un obstacle	500 m.s <sup>-2</sup>
Électron arrivant sur l'écran d'un téléviseur	10 <sup>16</sup> m.s <sup>-2</sup>

**Activité d'application 7 (mouvement circulaire uniforme)**

Une voiturette d'enfant, considérée ponctuelle, décrit un cercle de rayon  $R = 0,5$  m à la vitesse  $v = 2m.s^{-1}$ .

- a) Calcule la période T, la fréquence f et la vitesse angulaire  $\omega$  de ce mouvement.
- b) Détermine les expressions des abscisses angulaire  $\theta$  et curviligne  $s$  à  $t \geq 0$  sachant qu'à la date  $t = 0s$ .  $\theta_0 = -\pi/3$  rad.
- c) Trouve les expressions des coordonnées cartésiennes x et y en fonction du temps.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

a) la période T est :  $s = v.dt \Rightarrow$  (pour 1 tour ( $2\pi R$ ) = une période T)  $\Rightarrow 2\pi R = v.T \Rightarrow$

$T = \frac{2.\pi R}{v}$  AN :  $T = \frac{2 \times \pi \times 0,5}{2} = 1,57$  s et  $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2.\pi R} = 0,64s$

et  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} = 4$  rad/s.

b) abscisses angulaire  $\theta = 4.t + \theta_0$  devient  $\theta = 4.t - \frac{\pi}{3}$

et  $s(t) = v.t + s_0$  avec  $s_0 = R.\theta_0 = 0,5 \times \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$  rad devient  $s = 2.t - \frac{\pi}{6}$

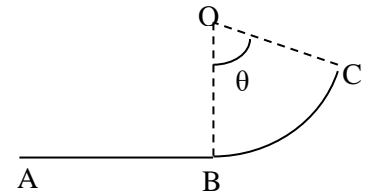
c)  $x(t) = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0)$  et  $y(t) = R\sin\theta = R\sin(\omega t + \theta_0)$  et en remplaçant les valeurs on a :

$$\begin{cases} x(t) = 0,5\cos\left(4.t - \frac{\pi}{3}\right) \\ y(t) = 0,5\sin\left(4.t - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

**Activité d'application 8 (mouvement circulaire uniforme)**

Un mobile M aborde une piste circulaire BC de centre O et de rayon  $r = 10$  m, avec une vitesse angulaire constante  $\omega = 0,1$  rad/s. Détermine :

- a) la vitesse linéaire
- b) l'équation horaire  $\theta(t)$  du mouvement du mobile ( $t = 0$ s lorsque le mobile est en B).
- c) l'instant où le mobile atteint le point C. sachant que l'angle  $(\widehat{BOC} = 30^\circ)$ .



**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- a) vitesse linéaire :  $v = R\omega = 0,1 \times 10 = 1\text{m.s}^{-1}$
- b) équation horaire :  $\theta(t) = \omega t + \theta_0; \theta_0 = 0$  où  $\theta(t) = 0,1t$
- c) l'instant d'arrivé en C :  $t = \frac{\theta(t)}{\omega} = \frac{\pi}{6\omega}$  où  $t = 5,23\text{s}$

**SITUATION D'ÉVALUATION (Exercice N°19 Cahier de la réussite – Vallesse)**

Pendant les grandes vacances scolaires, ton camarade de classe décide d'aller rendre visite à son parent en train. Le jour de son départ, il arrive à la gare à l'instant de date ( $t = 0$ ) où le train qu'il doit emprunter démarre. **Se trouvant sur le quai à une distance  $L = 25$  m de la portière arrière** non fermée du wagon où il doit prendre place, il se met à courir en ligne droite à la vitesse constante  $v_1 = 5$  m.s<sup>-1</sup>. Le train quant à lui, est animé d'un mouvement rectiligne d'accélération constante  $a_2 = 1$  m.s<sup>-2</sup>. **NB : L'origine des espaces ( $x = 0$ ) est la position de la portière arrière du wagon du train au début de son démarrage.**

- 1) Donne la nature du mouvement :
  - 1.1) de ton camarade ;
  - 1.2) du train.
- 2) Établis les équations horaires des mouvements de ton camarade et du train.
- 3) Justifie qu'il ne pourra pas rattraper le train pour y prendre place.
- 4) Détermine la distance minimale de la portière du train à laquelle il parviendra.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Nature des mouvements

1.1) Camarade : mouvement rectiligne et uniforme

1.2) Train : mouvement rectiligne uniformément accéléré.

2) Équations horaires des mouvements :

$$\text{Camarades : } x_1(t) = v_0.t + x_0 \Rightarrow \mathbf{x_1(t) = 5.t - 25}$$

$$\text{Train : } x_2(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + v_0.t + x_0 = 0,5.t^2 ; \text{ car } v_0 = 0 \text{ et } x_0 = 0 \text{ m} \Rightarrow \mathbf{x_2(t) = 0,5.t^2}$$

3) Il rattrape le train si l'équation :  $x_1(t) = x_2(t)$  admet une solution.

$$\text{c'est-à-dire : } 0,5.t^2 = 5.t - 25 \Rightarrow \mathbf{0,5.t^2 = 5.t + 25 = 0}$$

$$\mathbf{\Delta = b^2 - 4.a.c = (-5)^2 - 4 \times 0,5 \times 25 \Rightarrow \Delta = -25 < 0.}$$

Donc l'équation n'admet pas de solution. D'où le camarade ne pourra pas rattraper le train.

4) Distance minimale de la portière du train à laquelle il parviendra.

$x_2(t) > x_1(t) \Rightarrow d(t) = x_2(t) - x_1(t) = \mathbf{0,5.t^2 - 5.t + 25}$ . La distance est minimale si la dérivée de  $d(t)$  est nulle.

$$d'(t) = t - 5 ; d'(t) = 0 \text{ équivaut à } t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5\text{s}$$

$$\text{Donc } d_{\min} = 0,5 \times 5^2 - 5 \times 5 + 25 = 12,5 \text{ m.} \Rightarrow \mathbf{d_{\min} = 12,5 \text{ m}}$$

### GRANDEUR EN CINÉMATIQUE

En cinématique il y a des grandeurs positives et des grandeurs négatives mais tout cela peut s'expliquer.

<i>Grandeurs physique rencontrées</i>	<i>Positive</i>	<i>Négative</i>	<i>Explications</i>
<i>abscisse (x) largeur (y) côte (z)</i>	×	×	<i>(x &lt; 0) lorsque le point est placé avant le point d'origine choisit et (x &gt; 0) lorsque le point est placé après le point d'origine choisit.</i>
<i>norme de la position</i>	×		<i>La formule le montre très bien : <math>\  \vec{OM} \  = \sqrt{x^2 + y^2}</math></i>
<i>instant</i>	×	×	<i>(t &lt; 0) lorsque le point est placé avant le temps d'origine choisit et (t &gt; 0) lorsque le point est placé après le temps d'origine choisit. <b>NB</b> : le temps d'origine est <math>t_0 = 0</math> s.</i>
<i>composante d'une vitesse</i>	×	×	<i>(<math>v_x &gt; 0</math>) positif si le vecteur vitesse <math>\vec{v}</math> est dans le sens du vecteur unitaire <math>\vec{i}</math> du repère (O,<math>\vec{i}</math>) choisit. <math>v_x = v</math> (<math>v_x &lt; 0</math>) négatif si le vecteur vitesse <math>\vec{v}</math> est dans le sens contraire du vecteur unitaire <math>\vec{i}</math> du repère (O,<math>\vec{i}</math>) choisit. <math>v_x = -v</math> <b>NB</b> : idem pour toutes les autres composantes du vecteur vitesse. <math>v_{ox} = \vec{v}_0 \cdot \vec{i} = v_0 \times i \times \cos(\vec{v}_0, \vec{i})</math> <math>v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} = v \times i \times \cos(\vec{v}, \vec{i})</math></i>
<i>norme de la vitesse</i>	×		<i>La formule le montre très bien : <math>v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}</math></i>
<i>Composantes accélération</i>	×	×	<i><math>a_x</math> positif si <math>\Delta v &gt; 0</math> augmente dans le sens du vecteur unitaire <math>\vec{i}</math> du repère (O,<math>\vec{i}</math>) choisit. <math>a_x</math> négatif si <math>\Delta v &lt; 0</math> diminue dans le sens du vecteur unitaire <math>\vec{i}</math> du repère (O,<math>\vec{i}</math>) choisit. <b>NB</b> : idem pour toutes les autres composantes du vecteur accélération <b>A savoir</b> : l'accélération <math>a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t}</math> <i>pour <math>\Delta v &gt; 0 \Rightarrow v_x</math> augmente alors <math>a_x &gt; 0</math></i> <i>pour <math>\Delta v &lt; 0 \Rightarrow v_x</math> diminue alors <math>a_x &lt; 0</math></i></i>
<i>norme de l'accélération</i>	×		<i>La formule le montre très bien : <math>a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}</math></i>
<i>durée</i>	×		$\Delta t = t_B - t_A$
<i>distance</i>	×		$d = x_B - x_A$
<b>NB</b> : C'est la valeur (chiffre) des composantes qui sont négatives ou positives du fait du repère choisit			
<b>NB</b> : en physique lorsque l'on définit l'origine d'un repère alors les grandeurs peuvent être positives ou négatives du fait de leur position par rapport à l'origine.			
Les grandeurs physiques exclusivement positives sont : la durée, la distance, la valeur d'une vitesse et la valeur d'une accélération.			

### NATURE DU MOUVEMENT

- $\vec{a} \cdot \vec{v} = a_x \cdot v_x$  : le signe de ce produit scalaire dépend de la valeur de  $a_x$  et des intervalles de temps  $t$  pour  $v_x$ .
  - $a_x = \text{cste}$  donc le signe de  $a_x$  dépend de la valeur donnée à  $a$ .
  - le signe de  $a_x \approx \Delta v$  ; si  $\Delta v > 0$  alors  $a_x > 0$  ; mais si  $\Delta v < 0$  alors  $a_x < 0$ .
  - $v_x \neq \text{cste} = a_x \cdot t + v_{0x}$  donc le signe de  $v_x$  dépend de la valeur de donnée à  $t$ .

#### **Interrogation écrite 1**

L'équation horaire d'un mobile en mouvement rectiligne est :

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 + 2 \cdot t + 1 \text{ (m)}$$

- 1) Détermine la position initiale du mobile (à  $t = 0$ ), la vitesse initiale du mobile (à  $t = 0$ ), l'accélération du mobile à un instant  $t$  quelconque. Donne la nature du mouvement
- 2) Calcule la vitesse moyenne  $v_m$  du mobile entre les instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = 2\text{s}$ .
- 3) Calcule les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  du mobile aux instants  $t_1 = 0$  et  $t_2 = 2\text{s}$ .
- 4) Trouve une inégalité décroissante et une relation mathématique entre les vitesses  $v_1$  ;  $v_2$  et  $V_m$  calculées.

#### **Interrogation écrite 2**

Un point mobile M est lancé vers le haut d'une piste d'un plan incliné. L'axe  $xx'$ , parallèle à la piste, est dirigé de la gauche vers la droite. À la date  $t_0 = 0$ , le point M occupe la position  $M_0$  ( $x_0 = 5 \text{ m}$ ), avec une vitesse  $\vec{v}_0 = +3 \vec{i}$  et une accélération constante  $\vec{a} = -2 \vec{i}$ .

- 1) Écris l'équation horaire du mouvement du point M.
- 2) Calcule la vitesse moyenne  $v_m$  du mobile entre les instants  $t_1 = 0\text{s}$  et  $t_2 = 2\text{s}$ .
- 3) Calcule l'accélération moyenne  $a_m$  du mobile entre les instants  $t_1 = 0\text{s}$  et  $t_2 = 2\text{s}$ .
- 4) Donne et justifie la nature du mouvement pour  $t < 1,5 \text{ s}$ .

#### **Interrogation écrite 3**

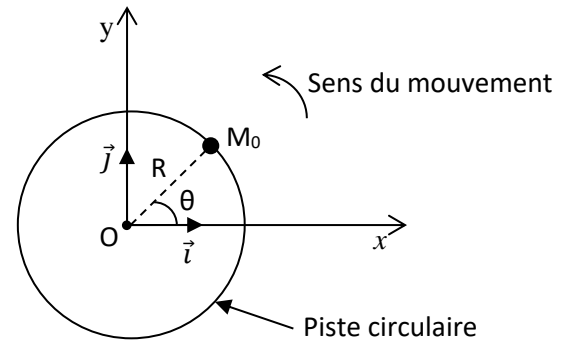
Un point mobile lancé vers le haut d'un plan incliné se déplace suivant un axe ( $x'x$ ) orienté vers le haut. à la date  $t = 0$ , le point mobile est au point  $M_0$  d'abscisse  $x_0 = -2\text{m}$  avec un vecteur vitesse  $\vec{v}_0 = +4 \vec{i}$  et un vecteur accélération  $\vec{a} = -3 \vec{i}$ . Le point mobile rebrousse chemin en  $M_1$  à la date  $t_1$ .

- 1) Établis les équations horaires  $x(t)$  et  $v_x(t)$  du mouvement du point mobile.
- 2) Détermine :
  - 2.1- la date  $t_1$  ;
  - 2.2- l'abscisse  $x_1$  du point  $M_1$  ;
  - 2.3- la vitesse avec laquelle, il repasse au point  $M_0$ .

**SITUATION D’EVALUATION Exo n°12 – Edition Supernova**

Tu as suivi la partie sportive du journal télévisé au cours de laquelle des motocyclistes, en compétition, se déplaçaient sur leurs engins à des vitesses extrêmement élevées.

Tu modélises la situation par la figure ci-dessous et tu décides d’étudier le mouvement de l’un des motards.



**Données :**

- vitesse angulaire du motard :  $\omega = 0,314 \text{ rad/s}$  et  $\theta = 30^\circ$
- rayon de la trajectoire :  $R = 200 \text{ m}$ .

- 1- Définis un mouvement circulaire et uniforme.
- 2- Etablis l’expression de l’abscisse curviligne  $s(t)$  du motocycliste à chaque instant.
- 3- Etablis dans le repère  $(Ox, Oy)$ , les équations horaires du mouvement du motard.
- 4- Détermine :

- 4.1- les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$ , dans le repère  $(Ox, Oy)$  à la date  $t = 2 \text{ s}$  ;
- 4.2- la période  $T$  du mouvement du motard et le nombre de tours qu’il a effectué en une durée  $\Delta t = 1 \text{ min } 20 \text{ s}$ .

**RESOLUTION DETAILLEE**

- 1- Définis un mouvement circulaire et uniforme.

Un mouvement circulaire uniforme est un mouvement dont la trajectoire est un cercle et la norme de sa vitesse est constante ou la vitesse linéaire est constante ( $v = R.\omega = \text{cste} \Rightarrow \omega = \text{cste}$ )

- 2- Etablis l’expression de l’abscisse curviligne  $s(t)$  du motocycliste à chaque instant.

$$s(t) = v.t + s_0 = R.\omega.t + R.\theta_0 \text{ d'où } s(t) = 200 \times 0,314.t + 200 \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow s(t) = 62,8.t + 104,76$$

- 3- Etablissons dans le repère  $(Ox, Oy)$ , les équations horaires du mouvement du motard.

$$\begin{cases} x = R\cos\theta(t) \\ y = R\sin\theta(t) \end{cases} \text{ or } \theta(t) = \omega.t + \theta_0 \text{ d'où } \overrightarrow{OM} \begin{cases} x = R\cos(\omega.t + \theta_0) \\ y = R\sin(\omega.t + \theta_0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = 200\cos(0,314.t + \frac{\pi}{6}) \\ y = 200\sin(0,314.t + \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

- 4.1- Déterminons les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$ , dans le repère  $(Ox, Oy)$  à la date  $t = 2 \text{ s}$  ;

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = v_x = -200 \times 0,314\sin(0,314.t + \frac{\pi}{6}) \text{ et } v_y = 200 \times 0,314\cos(0,314.t + \frac{\pi}{6}) ;$$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = -62,8 \sin(0,314.t + \frac{\pi}{6}) \\ v_y = 62,8 \cos(0,314.t + \frac{\pi}{6}) \end{cases} \text{ et A } t = 2\text{s, on a : } \vec{v} (-57,36 \text{ m/s ; } -25,56 \text{ m/s})$$

- 4.2-

- a) Déterminons la période  $T$  du mouvement du motard

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0,314} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = \frac{2\pi \times 10}{\pi} = 20 \text{ s}$$

- b) Le nombre de tours qu’il a effectué en une durée.

La période est la durée d’un tour ( $T = 20\text{s} \rightarrow 1 \text{ trs}$ ) et  $1 \text{ min } 20\text{s} = 80 \text{ s}$

$$80\text{s} \rightarrow n(\text{trs}) \text{ alors } n(\text{trs}) = \frac{80 \times 1}{20} = 4 \text{ tours}$$

## QUELQUES EXERCICES CORRIGÉS DE CINÉMATIQUE

### EXERCICE 1

Les équations horaires du mouvement d'un point matériel M, lancé dans l'espace sont :

$$\begin{cases} x = 4.t \\ y = 0 \\ z = -4.(t^2 - t) \end{cases}$$

dans le repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , dans lequel l'axe de vecteur unitaire  $\vec{k}$ , est verticale ascendant.

- 1) Montre que ce mouvement est plan, puis préciser ce plan.
- 2) Détermine l'expression du vecteur vitesse du point matériel M à la date t.
- 3) Établis l'équation cartésienne de la trajectoire du point matériel M. Quelle est sa nature ?
- 4) Calcule la valeur du vecteur vitesse du point matériel M :
  - 4.1) lorsque ce point matériel passe par le sommet de sa trajectoire.
  - 4.2) lorsque ce point matériel rencontre le plan d'équation  $z = 0$ .
- 5) Détermine l'expression du vecteur accélération du point matériel M à la date t.
- 6) Détermine les intervalles de temps pour lesquels le mouvement de M est retardé ou accéléré.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) le mouvement est plan car il se déroule dans le plan  $(xoz)$  car  $y = 0$

2) expression du vecteur vitesse à la date t.

$$\vec{v} (v_x = 4 ; v_y = 0 ; v_z = -8.t + 4)$$

3) équation de la trajectoire

$$z = \frac{-1}{4}.x^2 + x ; \text{c'est une parabole.}$$

4) valeur du vecteur vitesse du point matériel M

4.1- au sommet  $v_z = 0 \Leftrightarrow -8.t + 4 = 0 \Rightarrow t = 0,5s$  on a :  $v = 4 \text{ m/s}$ .

4.2- s'il rencontre  $z = 0 \Leftrightarrow -4.t^2 - 4.t = 0 \Rightarrow t = 0$  (origine) ou  $t = 1s$

$$\vec{v} (v_x = 4 ; v_z = -4) \text{ on a : } v = 5,66 \text{ m/s}$$

5) l'expression du vecteur accélération de M à la date t.

$$\vec{a} (a_x = 0 ; a_y = 0 ; a_z = -8)$$

Mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe  $(oz)$  car  $a_x = 0$  et rectiligne uniformément varié suivant  $(oz)$  car  $a_z = -8 = \text{cste}$

6)  $\vec{v} \cdot \vec{a} = a_x.v_x + a_y.v_y + a_z.v_z = 0 \Leftrightarrow -8.(-8.t + 4) = 0 \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$

$t > 0,5 \text{ s}$  mouvement accéléré ;  $t < 0,5s$  mouvement retardé

### EXERCICE 2

Un point mobile A se déplace sur une droite avec une accélération constante. À la date  $t_1 = 1s$  ; il est l'abscisse  $x_{A1} = 2,5 \text{ m}$  et à la vitesse  $v_{A1} = 2 \text{ m/s}$ . A la date  $t_2 = 2,5s$  ; il est à l'abscisse  $x_{A2} = 10 \text{ m}$  et à la vitesse  $v_{A2} = 8 \text{ m.s}^{-1}$ .

- 1) Détermine l'accélération du mouvement, la vitesse et l'abscisse initiale. Établis l'équation horaire du mouvement.
- 2) Détermine l'instant t où le mouvement du mobile change de sens et l'abscisse de ce lieu de changement.

- 3) Un autre mobile B se déplace sur la même trajectoire dans un mouvement rectiligne uniforme. A  $t_1$ , B se trouve à l'abscisse  $x_{B1} = 35,5$  m et  $t_2$  à l'abscisse  $x_{B2} = 28,75$  m. Quelle est l'équation horaire du mouvement de B ?
- 4) A quelle date  $t'$  A et B se croisent il ? Trouve l'abscisse de ce lieu de croisement.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1)

a) accélération  $a$  du mobile

$$v_2^2 - v_1^2 = 2.a_x.(x_2 - x_1) \Rightarrow a_x = (v_2^2 - v_1^2) / 2.a_x.(x_2 - x_1) \Rightarrow a = |a_x| = 4.m/s.$$

b) vitesse  $v_0$  et abscisse  $x_0$  du mobile M.

MRUV donc :  $x(t) = \frac{1}{2}.a_x.t^2 + v_{0x}.t + x_0$  ; avec ( $t = 1s$  et  $t = 2,5s$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{0x} + x_0 = 0,5 \\ 2,5.v_{0x} + x_0 = -2,5 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne les résultats suivants :  $x_0 = 2,5$  m et  $v_{0x} = -2m/s$ .

équation horaire  $x(t)$  du mobile. :  $x(t) = 2.t^2 - 2.t + 2,5$

2) instant ou le mobile change de sens :

$$v(t) = 4.t - 2 = 0 \Rightarrow t = 0,5s \text{ et l'abscisse du lieu de changement : } x(t=0,5) = 2m.$$

3) équation horaire du mouvement

Le mouvement de M'est rectiligne uniforme : donc :  $x' = v_{0x}.t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} v_{0x} + x_0 = 35,5 \\ 2,5.v_{0x} + x_0 = 28,75 \end{cases}$

La résolution de ce système donne les résultats suivants :  $x_0 = 40$  m et  $v_{0x} = -4,5$  m/s.

L'équation horaire  $x(t)$  du mobile. :  $x'(t) = -4,5t + 40$

4) Au point de rencontre :  $x' = x$

$$2.t^2 - 2.t + 2,5 = -4,5t + 40 \Rightarrow 2.t^2 + 2,5.t - 37,5 = 0 \Rightarrow t = -5 < 0 \text{ ou } t = 3,75s > 0$$

**Abcisse de croisement :**  $x(3,75) = -4,5(3,75) + 40 = 23,125$  m

### EXERCICE 3

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne dans un repère  $(0, \vec{i})$ . Le mouvement comporte deux phases dont la première dure 30s On dresse le tableau suivant.

$t$ (s)	0	10	20	30	40	50	100	150
$v_x$ (m/s)	0	4	8	12	11	10	5	0

1) Tracer la courbe  $v_x = f(t)$

**Échelle : 1cm  $\leftrightarrow$  2 m.s<sup>-1</sup> et 1cm  $\leftrightarrow$  10 s.**

1.1) Calcule l'accélération du mobile au cours de chaque phase du mouvement.

1.2) Établis l'expression de la vitesse  $v_x(t)$  en fonction du temps au cours de chaque phase.

1.3) Calcule la distance totale parcourue par le mobile pour chaque phase ; et en déduire celle parcourue au cours du trajet.

2) Détermine la vitesse  $v_x$  du mobile à la date  $t = 60s$ .

2.1) par calcul

2.2) graphiquement

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Tracé de la courbe : **1 cm ↔ 2 m/s et 1 cm ↔ 10 s ;  $v_x = f(x)$**

1.1) accélération du mobile au cours de chaque phases :

- phase 1 MRUA :  $t \in [0; 30] \Rightarrow a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = (12-0)/(30-0) = 0,4 \text{ m.s}^{-2}$

- phase 2 MRUR :  $t \in [30; 150] \Rightarrow a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = (0 - 12)/(150-30) = -0,1 \text{ m.s}^{-2}$

1.2) par calcul loi horaire des vitesses :  **$v(t) = a_x \cdot t + v_0$**

Phase 1 :  $v(t) = a \cdot t + v_0$  ( $v_0 = 0\text{s}$ ) :  **$v(t) = 0,4 \cdot t$**

Phase 2 :  $v(t) = a \cdot t + v_0 = -0,1 \cdot t' + 12$  ; avec  $t' = t - 30$  d'où  **$v(t) = -0,1 \cdot (t - 30) + 12 = -0,1 \cdot t + 15$**

**$v(t) = -0,1 \cdot t + 15$**

1.3) distance pour chaque phases

$x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$

avec  $a_x = -0,1 \text{ m/s}^2$  ;  $v_0 = a_x \cdot t = 0,4 \times (30) = 12 \text{ m/s}$  et  $x_0 = \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 = 0,2 \cdot t^2 = 0,2 \times (30)^2 = 180 \text{ m}$

$x(t) = -0,05 \cdot t^2 + 12 \cdot t + 180$  d'où  $x(120\text{m}) = d = -0,05 \times (120)^2 + 12 \times (120) + 180 = 900 \text{ m}$ .

Distance totale :  $d = 900 \text{ m}$ .

2) vitesse  $v_x$  du mobile à la date  $t = 60\text{s}$ .

2.1) à la date  $t = 60\text{s}$ , la vitesse est :  $v(60) = -0,1 \times 60 + 15 = -6 + 15 = 9 \text{ m/s}$

2.2) graphiquement : voir schéma :  $v(t) = f(t)$  : pour  $t = 60\text{s}$ , l'axe des ordonnées donne :  $v = 9 \text{ m.s}^{-1}$ .

**EXERCICE 4**

Un car A part d'un point A pour un point B suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v_A = 20 \text{ m.s}^{-1}$ . Cinq minutes plus tard, un autre car B part du point B vers le point A suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse  $v_B = 20 \text{ m.s}^{-1}$ .

On prendra pour origine des espaces le point A et pour origine des dates, l'instant de départ du car B.

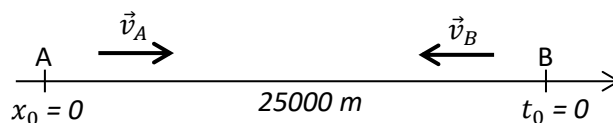
Le trajet AB est orienté de A vers B et vaut  $25000 \text{ m}$ .

1) Établir l'équation horaire de chaque car.

2) Détermine le temps de rencontre des deux cars.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

Schéma :



Équations horaires

**Équation horaire du car A**

Le car A a un mouvement rectiligne uniforme

Étant donné que le car A ne démarre pas à  $t = 0$  (repère lié au car B), nous nous placerons dans un nouveau repère de date de sorte que dans ce nouveau repère, le car A démarre à  $t' = 0$ .

Ainsi  $x_A = v_A \cdot t' + x_0$

Dans ce repère, à  $t' = 0$ ,  $v_A = 20 \text{ m.s}^{-1}$  et  $x_0 = 0$  et finalement  **$x_A = 20 \cdot t'$  (1)**

La question qui nous est posé est d'exprimer l'équation horaire dans le repère de dates lié au démarrage du car B. Il nous faut donc trouver la relation existant entre ces deux repères de dates.

$t$  : date dans le repère lié au car B.

$t'$  : date dans le repère lié au car A.

Étant donné que le car B démarre 5 minutes après le car A. Pour rejoindre l'origine des dates qui est celui du car B, on fera  $t' = t + 5 \times 60$ , soit  $t' = t + 300$

En remplaçant dans l'équation (1) alors  $x_A = 20.t + 6000$

### Équation horaire du car B

Le car B a un mouvement rectiligne uniforme donc :  $x_B = v_B t + x_0$

Dans ce repère, à  $t = 0$ ,  $v_B = 20 \text{ m.s}^{-1}$  et  $x_0 = x_B = 25000 \text{ m}$

Le sens du déplacement du car B est opposé à l'orientation de la trajectoire

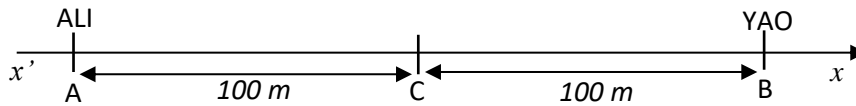
alors :  $x_B = -20.t + 25000$

Temps de rencontre des car A et B

pour une rencontre alors  $x_A = x_B$  d'où  $-20t + 25000 = 20.t + 6000$  et  $t_R = 475 \text{ s} = 7 \text{ min } 55\text{s}$

## EXERCICE 5

Au cours d'une séance d'EPS, deux élèves de Terminale, ALI et YAO courent en sens inverse pour arriver en un point C, milieu d'un trajet AB long de 200m. (Voir figure ci-dessous)



A l'instant  $t = 0\text{s}$ , ALI arrive en A et continue sa course avec une vitesse constante  $v_A = 10 \text{ m.s}^{-1}$  tandis que YAO arrive en B avec une vitesse  $v_B = 2 \text{ m.s}^{-1}$  et une accélération  $a_B = 1 \text{ m.s}^{-2}$ .

On prendra le point A comme origine des espaces.

- 1) Établir les équations horaires de ALI et de YAO.
- 2) Déterminer le temps mis par chacun pour parvenir au point C. Dédurre le coureur le plus rapide.
- 3) Déterminer la position du coureur le moins rapide lorsque le premier arrive en C.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) équation horaire

• Pour ALI : mouvement rectiligne uniforme

$$x_A = v_A.t + x_{0A}; x_{0A} = 0 \text{ d'où } x_A = 10.t$$

• Pour YAO : mouvement rectiligne uniformément varié ( $\vec{v}$  n'est pas dans le même sens que  $\vec{v}_B$  et  $\vec{a}_B$  d'où

$$\vec{v}_B = -v_B.\vec{i}; \vec{a}_B = -a_B.\vec{i} \text{ et } x_{0B} = 200 \text{ m}; x_B = -\frac{1}{2}.t^2 - 2.t + 200$$

2) temps mis

Par ALI : en C,  $t = \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{AC}{v_A} = \frac{100}{10} = 10 \text{ s}$ .

Par YAO :  $100 = -0,5t^2 - 2.t + 200 \Leftrightarrow 0,5t^2 + 2.t - 100 = 0$

$$\Delta = 4 + 0,5.100.4 = 204; \Delta t_2 = \frac{-2 + \sqrt{204}}{1} = 12,28 \text{ s}$$

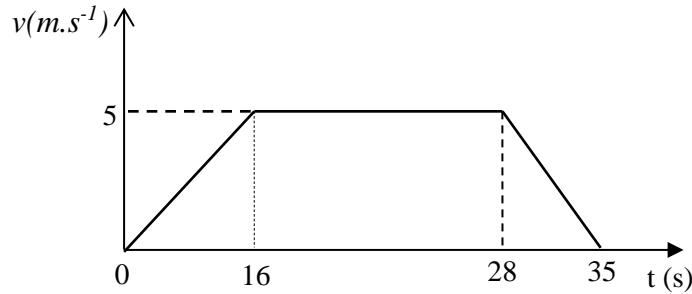
$\Delta t_1 < \Delta t_2$  donc ALI est plus rapide.

3) position de Yao à  $t = 10 \text{ s}$

$$x_B = -\frac{1}{2}.(10)^2 - 2 \times 10 + 200 = 130 \text{ m, donc à } 30 \text{ m de C.}$$

**EXERCICE 6**

Un mobile décrit une trajectoire rectiligne. On donne la représentation graphique de sa vitesse en fonction du temps.



- 1) Calcule son accélération au cours des trois phases du mouvement.
- 2)
  - 2.1) Établis l'équation horaire de chaque phase en utilisant comme origine des espaces et des dates, le début de chaque phase.
  - 2.2) Calcule la distance parcourue jusqu'à son arrêt.
- 3)
  - 3.1) Établis l'équation horaire de chaque phase en utilisant comme origine des espaces et des dates, le début de la phase 1.
  - 3.2) Calcule la distance parcourue jusqu'à son arrêt.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Accélération du mobile au cours des différentes phases.

Phase 1:  $a_1 = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{5 - 0}{16 - 0} = 0,31 \text{ m/s}^2$

Phase 2:  $a_2 = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{5 - 5}{28 - 16} = 0 \text{ m/s}^2$

Phase 3:  $a_3 = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{0 - 5}{35 - 28} = -0,71 \text{ m/s}^2$

2)

2.1) Les équations horaires. (**Origine des espaces et des dates, le début de chaque phase**).

Phase 1 :  $a_1 = \text{cste} \Rightarrow$  Mouvement rectiligne uniformément varié.

$$x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_0 t + x_0 ; \text{ avec } v_0 = 0 \text{ et } x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,16 t^2$$

Phase 2 :  $a_2 = 0 \Rightarrow$  Mouvement rectiligne uniforme.

$$x_2 = v_0 t + x_0 \text{ avec } v_0 = 5 \text{ m/s et } x_0 = 0 \Rightarrow x_2 = 5t'$$

Phase 3 :  $a_3 = \text{cste} \Rightarrow$  Mouvement rectiligne uniformément varié.

$$x_3 = \frac{1}{2} a_3 t^2 + v_0 t + x_0 \text{ avec } v_0 = 5 \text{ m/s et } x_0 = 0 \Rightarrow x_3 = -0,36t^2 + 5t$$

2.2) Distance parcouru jusqu'à son point d'arrêt :  $d = x_1 + x_2 + x_3$

**Le mobile parcourt  $x_1$  en  $t = 16s$  ; en  $x_2$  en  $t' = 28 - 16 = 12s$  et en  $x_3$  en  $t = 35 - 28 = 7s$ .**

$$x_1 = 0,16 (16)^2 = 40,96 \text{ m et } x_2 = 5(12) = 60 \text{ m et } x_3 = -0,36(7)^2 + 5(7) = 17,36 \text{ m.}$$

**Donc :  $d = 118,32 \text{ m}$**

3)

3.1) Les équations horaires (**comme origine des espaces et des dates, le début de la phase 1**)

$$x_1 = 0,16t^2 ; v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } x_0 = 0$$

$$x_2 = v_1 t' + x_0 \text{ avec } v_0 = 5 \text{ m/s ; } t' = t - 16 \text{ et } x_0 = x_1(16) = 0,16(16)^2 = 40,96 \text{ m.}$$

$$\text{Donc : } x_2 = 5(t - 16) + 40,96 = 5t - 80 + 40,96 \Rightarrow x_2 = 5t - 39,04$$

$$x_3 = \frac{1}{2} a_3 t''^2 + v_0 t'' + x_0 \text{ avec } v_0 = 5 \text{ m/s ; } t'' = t - 28 \text{ et } x_0 = x_2(28) = 5(28) - 39,04 = 100,96 \text{ m.}$$

$$x_3 = -0,36(t - 28)^2 + 5(t - 28) + 100,96 \Rightarrow x_3 = -0,36t^2 + 25,16t - 321,28$$

3.2) distance parcourue jusqu'à son arrêt.

$$d = x_3(35) = -0,36(35)^2 + 25,16(35) - 321,28$$

**Donc : d = 118,32 m**

### EXERCICE 7

Une automobile est arrêtée à un feu rouge. Quand le feu passe au vert, l'automobiliste accélère uniformément pendant 8s avec une accélération de  $2\text{m/s}^2$ . Ensuite l'automobile se déplace à une vitesse constante. A l'instant de son démarrage un camion la dépasse avec une vitesse constante de  $12 \text{ m.s}^{-1}$ .

Au bout de combien de temps, et à quelle distance du feu, l'automobile rattrapera-t-elle le camion ?

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

Pour l'étude du mouvement des deux voitures, on prend :

- origine des espaces : la position du feu
- origine des temps : l'instant où le feu passe au vert

Distance parcourue par les deux voitures pendant  $t_1 = 8\text{s}$

**mouvement du camion :**

$$x_1 = v \cdot t \text{ alors } x_1 = 12t$$

**mouvement de l'automobile :**

$$x_2 = v_{01}t' + x_{01} \text{ avec } (t_1' = t - 8) ; v_{01} = at_1 = 2 \times 8 = 16\text{m/s} ; x_{01} = \frac{1}{2} at^2 = 0,5 \times 2 \times 8^2 = 64 \text{ m}$$

$$\text{finalement : } x_1 = 16(t - 8) + 64$$

Il ya rencontre si les deux équations horaires coïncident :  $x_1 = x_2$

$$12t = 16(t - 8) + 64 \text{ alors } t = 16\text{s}$$

Les deux voitures se rencontrent 16s après l'apparition du feu vert à la distance de :

$$d = 12 \times 16 = 192 \text{ m}$$

### EXERCICE 8

Un élève en retard pour son cours de science physique, alors qu'il se trouve à la distance  $d = 20 \text{ m}$  de la situation, voit son autobus démarrer. L'autobus est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération constante  $a_1 = 0,8\text{m/s}^2$ . L'élève court à la vitesse constante  $v = 6,0 \text{ m.s}^{-1}$ .

L'élève rattrapera-t-il l'autobus ?

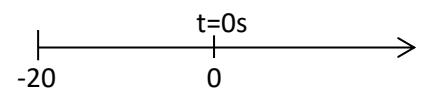
Si oui calculer la durée de sa course et la distance qu'il a parcourue.

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

- origine des temps : l'instant du démarrage du bus

- origine des espaces : la position du bus à  $t = 0$

L'élève rattrapera l'autobus si son abscisse coïncide avec celle du bus.



**Mouvement du bus**

$$x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_{01} + x_{01}; \text{ à } t = 0; v_{01} = 0 \text{ et } x_{01} = 0$$

$$x_1 = 0,4.t^2$$

**Mouvement de l'élève**

$$x_2 = v_2t + x_{02}; t = 0; v_2 = 6 \text{ m/s et } x_{02} = -d = -20$$

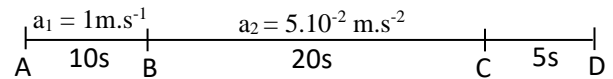
$$x_2 = 6t - 20$$

L'élève rattrapera le bus si  $x_1 = x_2$  alors  $0,4.t^2 = 6t - 20$   
 d'où  $0,4t^2 - 6.t + 20 = 0$   
 $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - (4 \times 0,4 \times 20) = 4$  d'où  $t_1 = 5s$  et  $t_2 = 10s$   
 L'élève rattrapera le bus au bout de 5s  
 Distance parcourue par l'élève est :  $d_2 = v_2t = 6 \times 5 = 30 \text{ m}$

**EXERCICE 9**

Une automobile initialement arrêté est soumise à une accélération constante égale à  $1\text{m/s}^2$  durant 10s. Pendant les 20s qui suivent, l'automobile ralentit avec une décélération constante égale à  $5.10^{-2}\text{m/s}^2$ . Enfin l'automobile, freinée prend un mouvement uniformément varié et s'arrête au bout de 5s. Calculer la distance totale parcourue. Représenter le diagramme de vitesses.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**



Premier phase :  $x_B = x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} \times (1) \times (10)^2 = 50 \text{ m}$

Deuxième phase :  $x_C = x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_1 t$  avec

$v_B = v_1 = a_1 \Delta t = 1 \times 10 = 10 \text{ m/s}$  d'où  $x_2 = \frac{1}{2} (-0,05)t^2 + 10t$

alors  $x_2 = \frac{1}{2} \times (-0,05) \times (20)^2 + 10 \times 20 = 190 \text{ m}$

Troisième phase :  $x_D = x_3 = \frac{1}{2} a_3 t^2 + v_C t$

avec  $v_C = a_2 t + v_B = -0,05 \times (20) + 10 = 9 \text{ m/s}$

$a_3 = \frac{0 - v_C}{\Delta t}$  alors  $a_3 = \frac{-9}{5} = -1,8 \text{ m/s}^2$

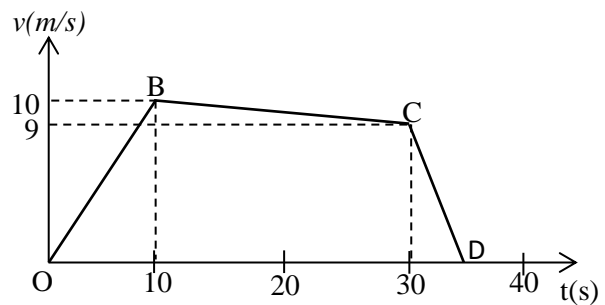
donc :  $x_D = x_3 = \frac{1}{2} (-1,8)t^2 + 9t$  alors

$x_D = x_3 = \frac{1}{2} (-1,8) \times (5)^2 + (9 \times 5) = 22,5 \text{ m}$

La distance totale parcourue est :

$x = x_1 + x_2 + x_3 = 50 + 190 + 22,5 = 262,5 \text{ m}$

Diagramme des vitesses :  $f(t) = v(t)$



**EXERCICE 10**

Une automobile démarre lorsque le feu passe au vert avec une accélération constante  $a = 2,5\text{m.s}^{-2}$ . pendant  $\theta = 7s$ , ensuite le conducteur maintient sa vitesse constante.

Lorsque le feu passe au vert, un camion roulant à la vitesse  $v = 45\text{km/h}$  est situé à une distance  $d = 20\text{m}$  du feu, avant celui-ci. Il maintient sa vitesse constante.

Dans un premier temps, le camion va doubler l'automobile, puis dans une deuxième phase, celle-ci va le dépasser.

On choisit :

Comme origine des dates : instant où le feu passe au vert.

Comme origine des espaces : la position du feu tricolore.

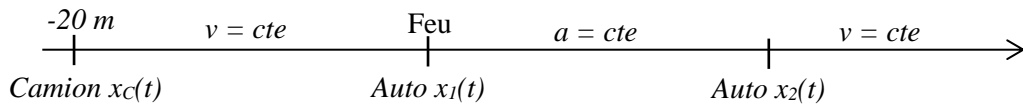
**1<sup>ère</sup> phase du mouvement de l'automobile (t < 7s) ;**

- 1) Établir l'équation horaire x(t) de l'automobile et celle du camion.
- 2) Déterminer les dates de dépassements.
- 3) Déterminer les abscisses de dépassements
- 4) Calculer les vitesses de l'automobile à ces dates.

**2<sup>ème</sup> phase du mouvement de l'automobile (t > 7s) ;**

- 1) Calculer la vitesse et l'abscisse de l'automobile au terme de la 1<sup>ère</sup> phase du mouvement.
- 2) Établir la nouvelle équation horaire de l'automobile puis celle du camion.
- 3) Déterminer la date de dépassement.
- 4) Déterminer l'abscisse de dépassement
- 5) Calculer la vitesse de l'automobile à cette date.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**



**1) Mouvement de l'automobile :**

Le mouvement de l'automobile s'est effectué en deux phases

Première phase (M.R.U.A) : alors  $x_1 = \frac{1}{2} at^2 = 1,25t^2$

Deuxième phase (M.R.U)

$x_1' = v_0t' + x_0$  avec  $t' = t - \theta$  et  $x_0 = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \times (0)^2 = \frac{1}{2} \times (2,5) \times (7)^2 = 61,25m$

et  $v_0 = a_1t = a_1 \times \theta = 2,5 \times 7 = 17,5 \text{ m/s}$  et finalement :  $x_1' = 17,5(t-7) + 61,25$

**Mouvement du camion :**

M.R.U : alors  $x_2 = v_2t + x_{02}$  or à  $t = 0$  on a  $v_2 = 12,5m/s$  et  $x_{02} = -20m$

$x_2 = v_2t - 20$

S'il y a dépassement au cours de la première phase du mouvement de l'automobile  $x_1 = x_2$

$1,25.t^2 = 12,5t - 20$  alors  $1,25.t^2 - 12,5t + 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (12,5)^2 - 4 \times 1,25 \times 20 = 56,25$  d'où

$t_1 = 1,8s$  premier dépassement et

$t_2 = 8s$  deuxième dépassement ; mais  $t_2 = 8s > 7s$

le 2<sup>ème</sup> dépassement de l'automobile se fait au cours de la deuxième phase du mouvement de l'automobile alors  $x_1' = x_2$

d'où :  $17,5(t_2 - 7) + 61,25 = 12,5t_2 - 20$  d'où  $t_2 = 8,25s$

**2) abscisse et vitesse de l'automobile à ces dépassements**

On utilisera l'équation horaire du camion qui est le plus simple

**Abscisses :**

Premier dépassement :  $x_1 = 12,5t - 20 = 12,5 \times 1,8 - 20 = 2,5m$

Deuxième dépassement :  $x_2 = 12,5t - 20 = 12,5 \times 8,25 - 20 = 83,125m$

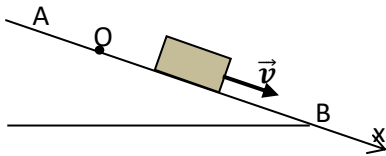
**vitesses :**

Premier dépassement :  $v_1 = a.t_1 = 2,5 \times 1,8 = 4,5m.s^{-1}$

Deuxième dépassement : il se fait pendant la phase uniforme de l'automobile  
 alors  $v_2 = \text{cte} = 17,5 \text{ m.s}^{-1}$

**EXERCICE 11**

Un mobile a été lâché sans vitesse initiale au plus haut sommet d'une pente en un point A.  
 L'enregistrement des positions du centre d'inertie G à ses intervalles de temps égaux  $\tau = 80 \text{ ms}$  a été déclenché à une date quelconque en O que l'on prend pour origine des temps et des espaces.



$G_i$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$
$X_i(\text{cm})$	0	10,72	24	39,84	58,24	79,2	102,72
$V_i(\text{m/s})$							
$a_i(\text{m/s}^2)$							

- Après avoir précisé les formules utilisées pour les calculs de  $v_i$  et  $a_i$  en  $G_i$ , compléter le tableau.
- Déduis du tableau l'accélération du mobile et donner la nature du mouvement.
- Calcule la valeur  $v_0$  de la vitesse à  $t = 0$ .
- Établis les équations horaires  $v(t)$  et  $x(t)$  du mouvement du mobile.
- Détermine la date à laquelle le mobile a été abandonné en A et calcule l'abscisse  $x_A$  de A.
- On donne  $x_B = 120 \text{ cm}$ , abscisse du point B (voir figure).
  - Calcule la distance AB et déduis la valeur  $v_B$  de la vitesse du mobile en B.
  - Calcule la date à laquelle le mobile arrive en B.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) les formules de calcul

vitesse instantanée :  $v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$  ; accélération instantanée :  $a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$  avec  $t_{i+1} - t_{i-1} = 2\tau = 0,16 \text{ m/s}$ .NB: convertir x en mètre

$G_i$	$G_0$	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$
$X_i(\text{cm})$	0	10,72	24	39,84	58,24	79,2	102,72
$V_i(\text{m/s})$		1,5	1,82	2,14	2,46	2,78	
$a_i(\text{m/s}^2)$			4	4	4		

2) valeur de l'accélération

Du tableau, on peut déduire que l'accélération a est constante et a pour valeur  $a = 4 \text{ m/s}^2$ .

3) valeur  $v_0$  de la vitesse à  $t = 0$ .

Pour une position  $G_i$  correspondant à une date  $t_i$  :  $v_i = a.t_i + v_0 = 4.t + v_0$  ; équation de droite : 2

points appartenant à la droite (position 2) ( $v = 1,82 \text{ m/s}$  et  $\tau = 0,16\text{s}$ ) d'où  $v_0 = 1,82 - 4 \times 0,16 = 1,18 \text{ m/s}$ .

4) équations horaires  $v(t)$  et  $x(t)$  :

$$v(t) = a.t + v_0 \Rightarrow v(t) = 4.t + 1,18$$

MRUV donc :  $x(t) = \frac{1}{2}.a_x.t^2 + v_{0x}.t + x_0 = 2.t^2 + 1,18.t$  car  $x_0 = 0 \text{ m}$ .

5) calcul de  $t_A$

Le mobile a été abandonné sans vitesse initiale en A

$$\Rightarrow v_A(t) = 4.t_A + 1,18 = 0 \Rightarrow t_A = - \frac{v_0}{a} = - \frac{1,18}{4} = - 0,295\text{s} = - 0,3 \text{ s}$$

Calcul de  $x_A$ :  $x_A = 2.t_A^2 + 1,18.t_A = x_A(t = -0,3) = 2.(-0,3)^2 + 1,18.(-0,3) = -0,174 \text{ m}$ .

6.1) calcul de AB

$$AB = x_B - x_A = 120 - (-17,4) = 137,4 \text{ cm} = 1,374 \text{ m}$$

Calcul de  $v_B$ :  $v_B^2 - v_A^2 = 2.a_x.(x_B - x_A) \Rightarrow v_B = \sqrt{2a_x.AB} = \sqrt{2 \times 4 \times 1,374} = 3,31 \text{ m/s}$ .

6.2) calcul de  $t_B$

$$v_B = a.t_B + v_0 \Rightarrow t_B = \frac{v_B - v_0}{a}; \text{ A,N: } t = 0,53 \text{ s}$$

**EXERCICE 12**

Un mobile se déplace sur une route horizontale. On enregistre les positions occupées par le mobile en fonction du temps.

$t_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x_i(\text{cm})$	0	0,5	1	5,5	10	18,5
$v_i(\text{m/s})$						
$a_i(\text{m/s}^2)$						

1)

1.1- Complète le tableau ci-dessus. On indiquera la méthode de calcul.

1.2- Déduis la nature du mouvement.

2)

2.1-Exprimer la vitesse  $v$  du mobile en fonction du temps et de la vitesse initiale  $v_0$ .

2.2- Déduis  $v_0$ .

3) On lance le mobile d'un point A sans vitesse initiale avec l'accélération  $a$  calculée. Lorsque la vitesse  $v = 15 \text{ m/s}$  est atteinte en B, on la maintient pendant une durée  $\Delta t$  jusqu'en C puis on freine le mobile en lui imprimant pendant une durée  $\Delta t' = 5\text{s}$  une décélération de valeur  $a' = 3\text{m/s}^2$  jusqu'à l'arrêt au point D tel que  $AD = 138,75 \text{ m}$ . Détermine :

3.1- la distance AB et CD et en déduire la durée  $\Delta t$  du trajet BC.

3.2- la durée du trajet AD

4)

4.1- Exprime pour chaque phase l'équation horaire  $v = f(t)$ .

4.2- Représente qualitativement le graphe  $v = f(t)$  de A jusqu'à D.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1)

1.1- Remplissage du tableau

$$v_i = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}; \text{ et } a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}; \text{ ce qui donne le tableau suivant :}$$

$t_i$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$x_i(\text{cm})$	0	0,5	1	5,5	10	18,5
$v_i(\text{m/s})$		0,05	0,25	0,45	0,65	
$a_i(\text{m/s}^2)$			2	2		

1.2- le mouvement est rectiligne uniformément varié car  $a = a_x = 2 \text{ m/s}^2 = \text{constante}$  sur le trajet.

2.1- expression  $v_0$  du mobile est :  $v = a.t + v_0 \Rightarrow v_0 = v - a.t$  (**deux (02) points de la droite :  $t = 0,2\text{s}$  et  $v = 0,25 \text{ m.s}^{-1}$** ).  $v_0 = 0,25 - 2 \times 0,2 = 0,25 - 0,4 = -0,15 \text{ m/s}$  d'où  $v_{0x} = -0,15 \text{ m/s}$

2.2- équation horaire :  $v(t) = 2.t - 0,15$

3.1- distance AB et CD

Déterminons AB

$$v_B^2 - v_A^2 = 2.a(x_B - x_A) = 2a.AB \Rightarrow AB = \frac{v_B^2}{2.a} = (15)^2 / 2 \times 2 = 56,25 \text{ m.}$$

Déterminons DC

$$v_D^2 - v_C^2 = 2.a(x_D - x_C) = 2a.CD \Rightarrow AB = - \frac{v_C^2}{2.a} = (-15)^2 / 2 \times (-3) = 37,5 \text{ m.}$$

Durée du trajet BC (sur le trajet BC, le mouvement est rectiligne uniforme donc :  $x = v.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{BC}{v}$ )

$$A.N : \Delta t = \frac{AD-AB-CD}{15} = \frac{138-37,5-56,25}{15} = \frac{45}{15} = 3s$$

3.2- la durée du trajet AD

$$t_{AD} = t_{AB} + t_{BC} + t_{CD} \text{ avec } (t_{BC} = 15s \text{ et } t_{CD} = 3s); x_B = \frac{1}{2}.at_B^2 \Rightarrow t_B = \sqrt{\frac{2.AB}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 56,25}{2}} = 7,5s \text{ ou}$$

$$t_B = \frac{v_B}{a} = \frac{15}{2} = 7,5s$$

$$t_{AD} = 7,5 + 3 + 5 = 15,5 \text{ s}$$

4.1- équation horaire pour chaque phase  $v = f(t)$

Phase 1 :  $a = \text{cste}$  : MRUA ( $a = 2 \text{ m/s}^2$ )

$$x(t) = \frac{1}{2}.a_x t^2 + v_{ox}.t + x_0 \quad (v_A = v_0 = 0 \text{ m/s} ; x_0 = x_A = 0 \text{ m et } t_A = t_0 = 0 \text{ s}) \Rightarrow x(t) = t^2 \text{ et } v(t) = 2.t$$

phase 2 :  $v = \text{constante}$ , MRU ( $v = 15 \text{ m/s}$ )

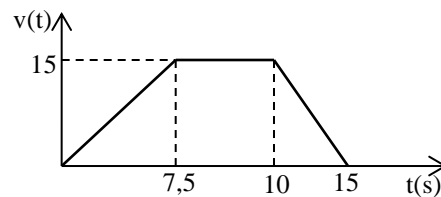
$$x(t) = v_A.t + x_0; x_0 = x_B = 0 \text{ m}$$

$$v(t) = v_A = 15 \text{ m/s}$$

Phase 1 :  $a = \text{cste}$  : MRUR ( $a_x = -3 \text{ m/s}^2$ )

$$x(t) = \frac{1}{2}.a_x t^2 + v_{ox}.t + x_0 = -1,5.t^2 + 15t$$

$$v(t) = -3.t + 15$$



## MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

### EXERCICE 1

Un mobile ponctuel se déplace dans le plan P. Son vecteur-accélération  $\vec{a}$  est constamment perpendiculaire à son vecteur-vitesse  $\vec{v}$  et la norme de  $a$  est égale à  $32 \text{ m.s}^{-2}$ .

- 1) Montre que le mouvement est circulaire uniforme.
- 2) Sachant que la loi horaire en coordonnée angulaire est :  $\alpha = 4.t + \frac{\pi}{2}$   
Détermine le rayon de la trajectoire.
- 3) Calcule la période T du mouvement.
- 4) Détermine la vitesse linéaire du mobile.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) Montrons que

Dans le repère de Frenet  $(M, \vec{u}, \vec{n})$ , on a :

$$\vec{v} = v_T.\vec{u} \text{ et } \vec{a} = a_T.\vec{u} + a_N.\vec{n}$$

$$\text{- d'une part } \vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{a}.\vec{v} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a_t \cdot v_t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \quad (\text{Car } v \neq 0) \Rightarrow v = \text{cte} \quad (1)$$

$$\text{- d'autre part : } a = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a} = \text{Cte} \quad \text{car } a = 32 \text{ m.s}^{-2} \text{ et } v = \text{cte} \quad (2)$$

(1) et (2)  $\Rightarrow$  le mouvement est circulaire et uniforme.

2) Rayon de la trajectoire

$$\text{vitesse angulaire : } \omega = \frac{dv}{dt} = 4 \text{ rad/s} \text{ et le rayon } a = a_n = R \cdot \omega^2 \Rightarrow R = \frac{a}{\omega^2} ; \quad \mathbf{A.N : R = 2 \text{ m}}$$

3) Période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ; \quad \mathbf{A.N} \quad T = 1,57 \text{ s.}$$

4) Vitesse linéaire

$$v = R \cdot \omega = 8 \text{ m/s}$$

### EXERCICE 2

Sur une trajectoire curviligne orientée dans le sens du mouvement et d'origine O, un point mobile M est repéré par son abscisse curviligne  $s(t) = t^2 + 4$  (t en seconde).

1) Déterminer la vitesse linéaire du point mobile.

2) Déterminer les composantes du vecteur accélération dans la base de Frenet  $(\vec{\tau}, \vec{\eta})$ .

Calculer leurs valeurs à la date  $t = 1 \text{ s}$ .

3) Exprimer les vecteurs vitesses et accélération puis les représenter à la date  $t = 1 \text{ s}$

**On donne :  $\rho = 1 \text{ m}$  (rayon de courbure de la trajectoire)**

**Échelle :  $1 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ m/s}$  ;  $2 \text{ cm} \leftrightarrow 1 \text{ m.s}^{-2}$ .**

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) vitesse linéaire

$$v = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot t$$

2) composante du vecteur accélération

$$\vec{a} \quad (a_t = \frac{dv}{dt} = 2 ; a_n = \frac{v^2}{R} = 4 \cdot t^2)$$

$$\text{à } t = 1 \text{ s} ; \quad \vec{a} \quad (a_t = 2 \text{ m/s}^2 ; a_n = 4 \text{ m/s}^2)$$

$$3) \quad \vec{v} = 2 \cdot \vec{\tau} \quad ; \quad \vec{a} = 2 \cdot \vec{\tau} + 4 \cdot \vec{\eta}$$

### EXERCICE 3

Un mobile aborde une piste circulaire BC de centre O et de rayon  $r = 10 \text{ m}$ , avec une vitesse angulaire constante  $\omega = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Détermine :

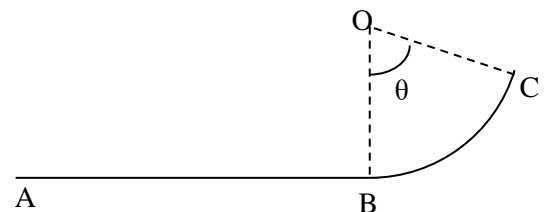
1) la vitesse linéaire

2) l'équation horaire  $\theta(t)$  du mouvement du mobile

( $t = 0 \text{ s}$  lorsque le mobile est en B).

3) L'instant où le mobile atteint le point C. sachant que l'angle

$(\widehat{BOC} = 30^\circ)$ .



#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) vitesse linéaire

$$V = r \cdot \omega = 0,1 \times 10 = 1 \text{ m/s}$$

2) équation horaire

$\theta(t) = \omega.t + \theta_0$  avec  $\theta_0 = 0$  d'où  $\theta(t) = 0,1.t$

3) l'instant d'arrivée en C

$$t = \frac{\theta(t)}{\omega} = \frac{\pi}{6.\omega} = 5,23s.$$

### EXERCICE 4

On donne les équations horaires d'un mobile M par rapport au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = a.\cos\omega.t \\ y = a.\sin\omega.t \end{cases} \quad a = 10 \text{ cm et } \omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

- 1) Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse à une date t et calculer la valeur de v.
- 2) Déterminer l'équation de la trajectoire du mobile et donner la nature de son mouvement
- 3) A partir de la base de Frenet donner les caractéristiques du vecteur accélération.
- 4) Calculer la période T et la fréquence N du mouvement du mobile.

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) les coordonnées du vecteur vitesse à une date t et sa valeur.

$$\vec{v} (v_x = -a.\omega.\sin\omega.t ; v_y = a.\omega.\cos\omega.t) \text{ et } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = a.\omega ; \text{AN : } v = 0,1 \times 10 = 1 \text{ m/s.}$$

2) équation de la trajectoire

$$x^2 + y^2 = a^2 \text{ équation d'un cercle de centre O et de rayon a.}$$

le mouvement est circulaire uniforme car  $v = a.\omega = \text{cte.}$

3) caractéristiques du vecteur accélération

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{a} \vec{n} \left( \frac{dv}{dt} = 0 \text{ car } v = \text{cte} \right) \vec{a} = \frac{v^2}{a} \vec{n} : \text{ le vecteur accélération est normal et de norme}$$

$$a = \frac{v^2}{a} = a.\omega^2 = 10 \text{ m/s}^2.$$

4) Calcul de la période T et de la fréquence N

La période T : C'est le temps mis par le mobile pour faire un tour,  $T = \frac{2.\pi.a}{a.\omega} = 0,628 \text{ s.}$

La fréquence N : C'est le nombre de tours par seconde.  $N = 1/T = 1,59 \text{ Hz.}$

### EXERCICE 5

Un mobile M est animé dans le plan rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'un mouvement circulaire.

Ces coordonnées s'exprime par

$$\begin{cases} x = 2 \cos \omega t \\ y = 2 \sin \omega t \end{cases}$$

- 1) Montre que le mouvement est circulaire uniforme
- 2) Détermine les coordonnées du vecteur accélération
- 3) Donne l'expression de l'abscisse curviligne s.

L'origine des abscisses curvilignes est prise au point A des coordonnées cartésiennes  $(2 ; 0)$

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) Montrons que le mouvement est circulaire uniforme

- montrons que la trajectoire est un cercle.

$$\begin{cases} x = 2 \cos \omega t \\ y = 2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos \omega t \\ \frac{y}{2} = \sin \omega t \end{cases} \quad \text{On a } (\cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2 = \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2^2 \text{ donc la}$$

trajectoire est cercle de centre O et de rayon R = 2m.

- montrons que la vitesse est constante

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = -2\omega \sin \omega t \\ v_y = 2\omega \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4\omega^2} = 2\omega \text{ (ne dépend pas du temps)}$$

La vitesse est constante donc le mobile est animé d'un mouvement circulaire uniforme

2) Coordonnée de  $\vec{a}$  :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = -2\omega^2 \cos \omega t \\ a_y = -2\omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

3) Abscisse curviligne s :

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = vt + s_0 = 2\omega t \quad \text{car } s_0 = 0 \quad \text{car pour } t = 0s \text{ on a: } x = 2 \text{ et } y = 0 \Rightarrow A(2; 0)$$

### EXERCICE 6

Une voiturette d'enfant, considérée ponctuelle, décrit un cercle de rayon R = 0,5m à la vitesse v = 2m.s<sup>-1</sup>.

- Calcule la période T, la fréquence f et la vitesse angulaire ω de ce mouvement.
- Détermine les expressions des abscisses angulaire θ et curviligne s à t ≥ 0 sachant qu'à la date t = 0s. θ<sub>0</sub> = -π/3 rad.
- Trouve les expressions des coordonnées cartésiennes x et y en fonction du temps.

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

a) la période T est :  $T = \frac{2\pi R}{v}$  AN :  $T = \frac{2 \times \pi \times 0,5}{2} = 1,57 \text{ s}$  et  $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = 0,64s$

et  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{R} = 4 \text{ rad/s}$ .

b) abscisses angulaire θ = 4.t + θ<sub>0</sub> devient θ = 4.t -  $\frac{\pi}{3}$

et s(t) = v.t + s<sub>0</sub> avec s<sub>0</sub> = R.θ<sub>0</sub> = 0,5 × ( $\frac{\pi}{3}$ ) =  $\frac{\pi}{6}$  rad devient s = 2.t -  $\frac{\pi}{6}$

c) x(t) = Rcosθ = Rcos(ωt+θ<sub>0</sub>) et y(t) = Rsinθ = Rsin(ωt+θ<sub>0</sub>) et en remplaçant les valeurs on a :

$$\begin{cases} x(t) = 0,5 \cos (4.t - \frac{\pi}{3}) \\ y(t) = 0,5 \sin (4.t - \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

## LEÇON 2 : MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

**COMPÉTENCE 1** : TRAITER UNE SITUATION SE RAPPORTANT À LA MÉCANIQUE

**THÈME 1** : MECANIQUE

**LEÇON 2** : MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SOLIDE

### Exemple de situation

Dans le car de ramassage, des élèves de la Terminale C du Lycée de garçons de Bingerville observent le mouvement d'une petite poupée suspendue au rétroviseur interne, par l'intermédiaire d'un fil inextensible. Ils constatent alors que :

- la poupée reste verticale lorsque le véhicule est immobile ou est à vitesse constante ;
- la poupée s'incline vers l'arrière quand le car accélère ;
- la poupée s'incline vers l'avant quand le car ralentit.

Pour comprendre ces observations, avec leurs camarades de classe, les élèves décident de connaître quelques référentiels, de les définir et d'établir un lien entre l'accélération et les forces extérieures appliquées au système.

HABILETÉS	CONTENUS
Définir	Un référentiel galiléen.
Connaître	Quelques référentiels galiléens (référentiels terrestres, référentiel géocentrique, référentiel héliocentrique)
Énoncer	Le théorème du centre d'inertie
Appliquer	Appliquer <ul style="list-style-type: none"> <li>- le théorème du centre d'inertie</li> <li>- le théorème de l'énergie cinétique</li> </ul>

### INTRODUCTION

La dynamique est l'étude des mouvements en tenant compte des causes (forces) qui les créent ou qui les modifient.

#### 1) LES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

##### 1.1) Système

Un système est une portion de l'espace que l'on décide d'étudier.

- Un solide est isolé lorsqu'il n'est soumis à aucune force extérieure (cas idéal) ;
- Un solide pseudo-isolé est soumis à des forces extérieures dont la somme vectorielle est nulle

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

##### 1.2) Principe de l'inertie

Le centre d'inertie d'un système isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

### 1.3) Référentiel galiléen ou référentiel d'inertie

On considère un référentiel (R) muni d'un repère orthonormé (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ). Ce référentiel est appelé **référentiel galiléens**, lorsque le centre d'inertie G d'un solide isolé ou pseudo-isolé.

- y est animé d'un mouvement rectiligne uniforme :  $\vec{v}_G = \overrightarrow{cste}$

- ou bien y est immobile ou au repos :  $\vec{v}_G = \vec{0}$

**Remarque** : Tout référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel Galiléen est lui-même un référentiel Galiléen.

#### Exemples de référentiels galiléens :

**Référentiel de Copernic ou héliocentrique** utilisé pour l'étude des mouvements des planètes (Origine : centre d'inertie du soleil et ses trois axes sont dirigés vers 3 étoiles lointaines)

**Référentiel géocentrique** utilisé pour l'étude des satellites de la terre

(Origine : centre d'inertie de la terre et ses axes sont dirigés vers 3 étoiles et sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic).

**Référentiel terrestre** peut être considéré comme galiléens pendant un bref instant.

## 2) THÉORÈME DU CENTRE D'INERTIE

### 2.1) Centre de masse

Le centre d'inertie est le seul point d'un solide qui est soit au repos soit en mouvement rectiligne uniforme lorsque ce solide est isolé ou pseudo-isolé.

Il est généralement représenté par la lettre G.

C'est le barycentre du système ; il est déterminé par la relation :  $m_1\overrightarrow{GG_1} + m_2\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

### 2.2) Quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un solide de masse m en mouvement de translation à la vitesse  $\vec{v}$  est le produit sa masse par son vecteur vitesse.  $\vec{p} = m\vec{v}$

**La norme du vecteur quantité de mouvement est :  $p = mv$**

La quantité de mouvement p s'exprime en **kg.m.s<sup>-1</sup>**

**Remarque** : dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement se conserve.

### 2.3) Théorème du centre d'inertie

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse m par le vecteur accélération  $\vec{a}_G$  de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$$

#### Activité d'application 1 (énoncé du théorème et application du théorème du centre d'inertie)

Un camion de masse  $m = 1200$  kg roulant sur une route horizontale AB puis abordant une cote BC ( $\sin\alpha = 0,5$ ) est soumis à une force motrice constante  $\vec{F}$  de valeur  $F = 3.10^3$  N et de direction parallèle à la route. L'ensemble des forces de frottement est assimilable à une force unique  $\vec{f}$  de valeur  $f = 600$  N, parallèle à la trajectoire et opposés au déplacement du camion. ( $g = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>)

1) Énonce le théorème du centre d'inertie.

2) Détermine : l'accélération du camion

2.1- l'accélération du camion sur AB

2.2- l'accélération du camion sur BC.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) Enoncé : Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse  $m$  par le vecteur accélération  $\vec{a}_G$  de son centre d'inertie.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

2.1) accélération sur AB.  $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} + \vec{P} = m\vec{a}$

$$a_x = \frac{F - f}{m} ; \text{AN} : a_x = \frac{3000 - 600}{1200} = 2 \text{ m.s}^{-1}.$$

2.2) accélération sur BC.  $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} + \vec{P} = m\vec{a}$

$$a_x = \frac{F - f}{m} - g \cdot \sin \alpha ; \text{A.N} : a_x = \frac{3000 - 600}{1200} - 9,8 \times 0,5 = 2 - 4,9 = -2,9 \text{ m.s}^{-2}.$$

### 3) THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

#### 3.1) Exploitation

Dans un référentiel galiléen, d'après le théorème du centre d'inertie,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ or } p = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} (E_C) \quad (1);$$

car  $(E_C)' = \left( \frac{1}{2} m v^2 \right)' = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$  aussi  $p = \frac{dW}{dt} \quad (2) ;$

$$p = \frac{d}{dt} (E_C) = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dW = dE_C \Rightarrow W = \Delta E_C$$

#### 3.2) Enoncé du théorème

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide, entre deux instants, est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures appliquées au solide.

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$$

### 4) METHODE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME DE DYNAMIQUE

Pour résoudre un problème de dynamique il faut :

- Préciser le système étudié ;
- Préciser que le référentiel d'étude est considéré galiléen ;
- Recenser toutes forces extérieures appliquées au système ;
- Représenter ces forces en respectant leur direction, leur sens et s'il est nécessaire leur point d'application ;
- Appliquer ensuite :

Soit le théorème du centre d'inertie pour obtenir l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}_G$  ;

Soit le théorème de l'énergie cinétique ;

Soit le principe de l'inertie lorsque le mouvement est rectiligne uniforme ;

Choisir, enfin, un repère d'étude pour les différentes projections et pour l'étude cinématique.

NB : Pour les mouvements circulaires, choisir le repère de FRENET.

#### Activité d'application 2 (énoncé du théorème et application du théorème de l'énergie cinétique)

1) Une voiture de masse  $m = 800 \text{ kg}$ , descend sans vitesse initiale, moteur éteint une pente  $\ell = AB = 50 \text{ m}$  incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale. ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

1.1) En utilisant le TCI, détermine l'expression de l'accélération  $a_1$  de la voiture.

1.2) En utilisant le TEC, détermine la vitesse  $v_B$  de la voiture au bas de la côte.

2) En réalité, la voiture est soumise à une force de frottement  $\vec{f}$  opposé au vecteur-vitesse et de valeur constante  $f = 80 \text{ N}$ .

2.1) En utilisant le TCI, détermine la nouvelle expression de l'accélération  $a_2$  de la voiture.

2.2) En utilisant le TEC, détermine la nouvelle vitesse  $v_B'$  de la voiture au bas de la côte.

### Résolution détaillée

1.1) expression de l'accélération  $a_1$  :  $a_1 = g \sin \alpha = 9,8 \sin 30^\circ = 4,9 \text{ m.s}^{-2}$

1.2) vitesse  $v_B = \sqrt{2gL \sin \alpha} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 50 \times \sin 30} = 22,13 \text{ m.s}^{-1}$

2.1) expression de l'accélération  $a_2$  :  $a_2 = g \sin \alpha - \frac{f}{m} = 9,8 \sin 30^\circ - \frac{80}{800} = 4,8 \text{ m.s}^{-2}$

2.2) la nouvelle vitesse  $v_B'$  de la voiture au bas de la côte :  $v_B' = \sqrt{2gL \sin \alpha - \frac{2 \cdot f \cdot AB}{m}}$

$$v_B' = \sqrt{2 \times 9,8 \times 50 \times \sin 30 - \frac{2 \times 80 \times 50}{800}} = 21,90 \text{ m.s}^{-1}.$$

**SITUATION D'ÉVALUATION 01**

Au cours d'une séance de travaux pratiques, un groupe d'élèves de la classe de Tle C, du Lycée Moderne Inagohi de San-Pedro reçoit de leur professeur un dispositif qui leur permet d'étudier le mouvement d'un solide.

L'objet de masse  $m$ , considérée comme ponctuel glisse à partir du sommet A du dispositif assimilable à une demi-sphère de rayon  $r$  (Voir figure).

Dans tout l'exercice on néglige les frottements.

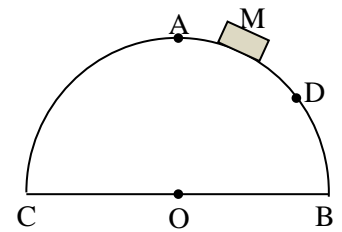
1) Exprime la vitesse  $v$  de l'objet au début du glissement en fonction de  $\alpha$ ,  $r$  et  $g$ , pour une position M de celui-ci telle que  $\widehat{BOM} = \alpha$

2) Détermine l'expression de la réaction  $R$  du dispositif sur l'objet lors du glissement lorsque  $\widehat{BOM} = \alpha$

3) L'objet quitte la sphère au point D

Précise la valeur de l'angle  $\alpha_0 = \widehat{BOD}$  à partir duquel l'objet va quitter la surface du dispositif pour réaliser une chute libre dans l'air.

4) Détermine alors sa vitesse  $v_D$ . On donne  $r = 2m$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .



**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Exprime la vitesse  $v$  de l'objet au début du glissement en fonction de  $\alpha$ ,  $r$  et  $g$ , pour une position M de celui-ci telle que  $\widehat{BOM} = \alpha$

TEC :  $v_M = \sqrt{2gr(1 - \sin\alpha)}$

2) Détermine l'expression de la réaction  $R$  du dispositif sur l'objet lors du glissement lorsque  $\widehat{BOM} = \alpha$

TCI :  $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$

Base de Frenet : sur  $(M, \vec{n})$  :  $P_n + R_n = m \cdot a_m$

$$\Rightarrow mg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mg \sin\alpha - R = m \cdot \frac{v_M^2}{r} \Rightarrow R = mg \sin\alpha - m \cdot \frac{v_M^2}{r}$$

$$R = mg \sin\alpha - 2mg(1 - \sin\alpha) = mg \sin\alpha - 2mg + 2mg \sin\alpha$$

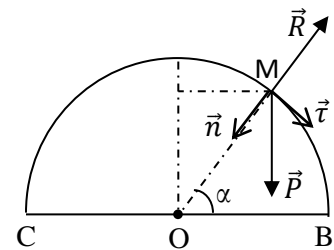
**$R = 3mg \sin\alpha - 2mg$**

3) Précisons la valeur de l'angle  $\alpha_0 = \widehat{BOD}$

$$R = 0 \Rightarrow 3mg \sin\alpha_0 - 2mg = 0 \Rightarrow \sin\alpha_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha_0 = 41,81^\circ$$

4) Détermine alors sa vitesse  $v_D$ . On donne  $r = 2m$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .

$$v_D = \sqrt{2gr(1 - \sin\alpha_0)} = \sqrt{2 \times 10 \times 2 \times (1 - \sin 41,81)} = 13,33 \text{ m.s}^{-1}$$



**SITUATION D'ÉVALUATION 02**

Un solide ponctuel (S) de masse  $m = 200 \text{ g}$  glisse à l'intérieur d'une piste circulaire ABC de centre O et de rayon  $r = 50 \text{ cm}$ . Sa position en un point quelconque M du cercle est repérée par l'angle

$\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$ . Le solide (S) part de A sans vitesse initiale.

**Donnée :  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ .**

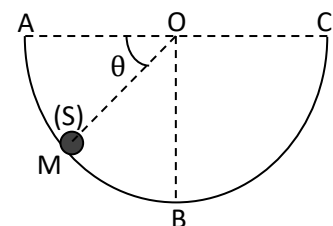
1) Les frottements sont négligés

1.1) Représente au point M, les forces qui s'exercent sur le solide (S).

1.2) Établis en appliquant le théorème de l'énergie cinétique,

l'expression de la vitesse  $v_M$  de (S) au point M en fonction de  $r$  ;  $g$  et  $\theta$ .

1.3) Montre, en appliquant le théorème du centre d'inertie que la valeur de la réaction  $\vec{R}_M$  de la piste au point M est donnée par l'expression :  $R_M = 3mg \sin\theta$



- 1.4) Déduis les valeurs de la vitesse  $v_B$  de (S) et de la réaction  $\vec{R}_B$  de la piste sur le solide au point B.  
 2) Le solide (S) est en réalité soumis à un ensemble de forces de frottements représentées par une force unique  $\vec{f}$ , opposé à chaque instant à son vecteur-vitesse  $\vec{v}$ . Le solide s'arrête alors en un point D situé entre B et C tel que l'angle  $\theta' = \theta = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{3}$  rad, avant de redescendre. Détermine :  
 2.1) l'expression de l'énergie cinétique noté  $E'_C(B)$  du solide au point B en fonction de  $m, g, r$  et  $f$  ;  
 2.2) la valeur  $f$  de la force de frottement.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1)  
 1.1) Représentation des forces qui s'exercent sur le solide (S).

$\vec{P}$  le poids du solide (S)

La réaction normale  $\vec{R}_N$  de la piste.

1.2) Expression de la vitesse  $v_M$  de (S) au point M.  $v_M = \sqrt{2gr\sin\theta}$

1.3 Expression de la réaction  $R_M$  de la piste

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} ; \vec{P} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a} ; \text{sur } (M, \vec{n}) : -m \cdot g \sin\theta + R_M = m \cdot a_x$$

$$-m \cdot g \sin\theta + R_M = m \cdot \frac{v_M}{r} = 2gmsin\theta \Rightarrow R_M = 3mgsin\theta$$

1.4) Au point B :  $\theta = \frac{\pi}{2}$  rad ;  $v_B = \sqrt{2gr\sin\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2gr}$

$$v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 0,5} = 3,2 \text{ m.s}^{-1}$$

2.1) Déterminons l'expression  $E'_C(B)$  du solide au point B en fonction de  $m, g, r$  et  $f$ . Appliquons T.E.C :

$$\Delta E_C = E_{CB'} - E_{CA} = E_{CB'} = W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{P}) + W_{AB}(\vec{f})$$

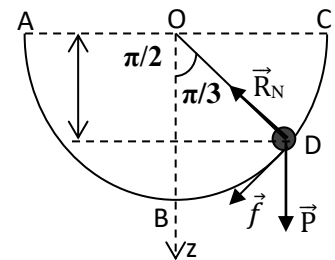
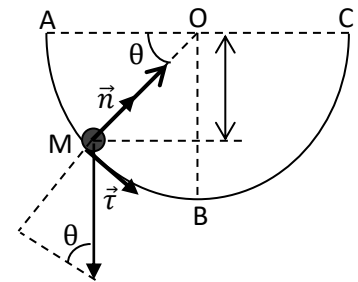
$$E_{CB'} = 0 + mgr - f \times r \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_{CB'} = mgr - f \times r \times \frac{\pi}{2}$$

2.2) Déterminons l'expression  $E'_C(B)$  du solide au point B en fonction de  $m, g, r$  et  $f$ . Appliquons T.E.C :

$$\Delta E_C = E_{CD} - E_{CA} = W_{AD}(\vec{R}) + W_{AD}(\vec{P}) + W_{AD}(\vec{f})$$

$$0 - 0 = 0 + mg(z_D - z_A) - f \cdot r \times (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = 0 + mgr \cos\frac{\pi}{3} - f \cdot r \times (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$$

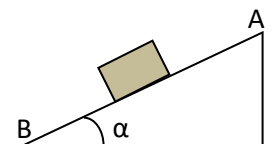
$$mgr \cos\frac{\pi}{3} - f \cdot r \times (\frac{5\pi}{6}) = 0 \Rightarrow f = \frac{6mg \cos\frac{\pi}{3}}{5\pi} = \frac{6 \times 0,2 \times 10 \times \cos 60^\circ}{5\pi} = 0,38 \text{ N}$$



**EXERCICE 1**

Sur une table à coussin d'air, incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale, on lâche sans vitesse d'un point A un palet de masse  $m = 600 \text{ g}$ . On donne  $\alpha = 6^\circ$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

- 1) Détermine :  
 1.1) l'accélération  $a_x$  du palet sur le parcours  
 1.2) la vitesse  $v$  du palet en B après un parcours  $L = 52 \text{ cm}$ .  
 2) En fait, la vitesse en B est  $v'$  (avec  $v' = 0,94 \text{ m.s}^{-1}$ ) à cause des frottements, détermine :  
 2.1) la valeur des forces de frottement  $f$  constante et parallèle à la table  
 2.2) le temps  $\Delta t$  mis pour arriver en B.



**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1.1) accélération  $a_x$

$a_x = g \sin \alpha$  ; AN :  $a_x = 9,8 \sin 6^\circ = 1,02 \text{ m.s}^{-2}$

1.2) vitesse du palet en B

$v_B = \sqrt{2a_x \times AB}$  AN :  $\sqrt{2 \times 1,02 \times 0,52} = 1,02 \text{ m.s}^{-1}$

2.1) valeur des forces de frottements

$f = mg \sin \alpha - \frac{m \cdot v_B^2}{2 \cdot AB}$  ; AN :  $f = 0,6 \times \sin 9,8 \times \sin 6^\circ - \frac{0,6 \times (0,94)^2}{2 \times 0,52} = 0,1 \text{ N}$

2.2) le temps  $\Delta t$  mis

$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow mg \sin \alpha - f = m \cdot \frac{dv}{dt}$

$\frac{\Delta v}{\Delta t} = g \sin \alpha - \frac{f}{m} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{g \sin \alpha - \frac{f}{m}}$  ; AN:  $\Delta t = \frac{0,94}{1,02 - \frac{0,1}{0,6}} = 1,1 \text{ s}$

**EXERCICE 2**

Un mobile de masse  $m = 10 \text{ g}$  est lancé vers le haut d'un point A vers B sur un plan incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$ . **Données :  $AB = 3 \text{ m}$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  et  $v_A = 6 \text{ m/s}$ .**

1) Détermine l'accélération  $a_x$  du mobile.

2) Détermine la vitesse  $v_B$  de B au point B

3) Détermine sa vitesse  $v_B'$  au point B s'il existe des frottements de valeur  $f = 0,01 \text{ N}$

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) accélération  $a_x$

$a_x = -g \sin \alpha$  ; AN :  $a_x = -9,8 \sin 30^\circ = -4,9 \text{ m.s}^{-2}$

2) vitesse du palet en B

$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2a_x \cdot AB} = \sqrt{v_A^2 - 2gAB \sin \alpha}$  AN :  $\sqrt{6^2 - 2 \times 9,8 \times 3 \times \sin 30^\circ} = 2,6 \text{ m.s}^{-1}$

3) vitesse  $v_B'$  en cas de frottement

$v_B' = \sqrt{v_A^2 - 2gAB \sin \alpha - \frac{2 \times f \times AB}{m}}$

AN :  $v_B' = \sqrt{6^2 - 2 \times 9,8 \times 3 \times \sin 30^\circ - \frac{2 \times 0,01 \times 3}{0,01}} = 0,77 \text{ m.s}^{-1}$ .

**INTERROGATION ÉCRITE**

Un élève de la terminale C étudie le mouvement d'une bille à l'intérieur d'une glissière circulaire.

L'élève communique une vitesse  $V_A$  à la bille et elle occupe ensuite les différentes positions successives M, B C et D.

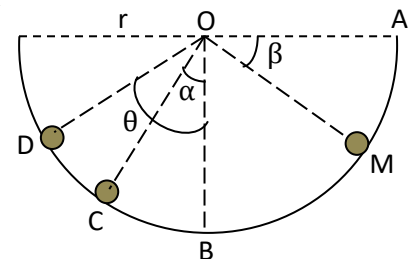
**Données :  $V_A = 2 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $V_C = 3 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $r = 1 \text{ m}$  ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ;**

**$\alpha = 40^\circ$  ;  $\theta = 60^\circ$  ;  $\beta = 30^\circ$ .**

1- Représente les forces appliquées à la bille au point M.

2- Détermine la vitesse  $V_M$  de la bille au point M.

3- Détermine la vitesse  $V_D$  de la bille au point D.



**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1- Représentons les forces appliquées à la bille au point M.

Voir figure ci-contre

2- Déterminons la vitesse  $V_M$  de la bille au point M.

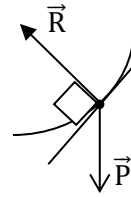
$$v_M = \sqrt{v_A^2 + 2g \cdot r \sin\beta}$$

A.N :  $v_M = \sqrt{2^2 + 2 \times 9,8 \times 1 \times \sin 30^\circ} = 3,71 \text{ m.s}$

3- Déterminons la vitesse  $V_D$  de la bille au point D.

$$v_M = \sqrt{v_C^2 + 2g \cdot r(\cos\alpha - \cos\beta)}$$

A.N :  $v_M = \sqrt{3^2 - 2 \times 9,8 \times 1 \times (\cos 40^\circ - \cos 60^\circ)} = 1,94 \text{ m.s}$



**SITUATION D'ÉVALUATION**

Une fronde est constituée d'un objet ponctuel S de masse m accroché à l'extrémité supérieure est fixée en O. On lui communique une vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale qui fait tourner la fronde. On néglige les frottements.

1)

1.1- Détermine l'expression littérale de la vitesse  $v_1$  de S dans sa position  $OA_1$  en fonction de  $v_0$ ,  $\theta$ ,  $\ell$ , et g.

1.2- Déduis la vitesse  $v_H$  du solide au point H situé au dessus de O porté à la même verticale.

2)

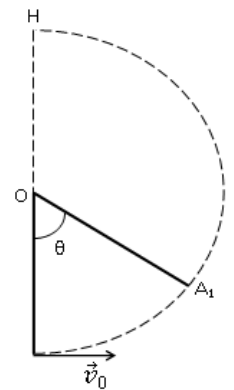
2.1- Détermine l'expression littérale la tension T du fil en  $A_1$  en fonction de m,  $v_0$ ,  $\theta$ ,  $\ell$ , et g.

2.2- Déduis :

2.2.1- la valeur de la tension  $T_H$  au point H.

2.2.2- quelle doit être la valeur minimale de  $v_0$  pour le solide reste tendu en H.

**On donne :  $\ell = 80 \text{ cm}$  ;  $g = 10 \text{ N/kg}$**



**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1.1- Déterminons l'expression littérale de la vitesse  $v_1$  de S

Système : (le solide de masse m)

Référentiel terrestre supposé galiléens

TEC :  $\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{T})$  avec  $W(\vec{P}) = - m \cdot g \cdot h$

avec  $h = \ell(1 - \cos\theta)$  et  $W(\vec{T}) = 0$  d'où :  $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot \ell(1 - \cos\theta)}$

1.2- Déduis la vitesse  $v_H$  du solide au point H .

Au point H on a :  $\theta = \pi \Rightarrow v_H = \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot g \ell}$

2.1- Détermine l'expression littérale la tension T du fil en  $A_1$

en fonction de m,  $v_0$ ,  $\theta$ ,  $\ell$ , et g. TCI :  $\vec{P} + \vec{T}_1 = m \cdot \vec{a}$

suivant la normale  $\vec{n}$  :  $T_1 - mg \cdot \cos\theta = m \cdot a_n = m \cdot \frac{v_1^2}{\ell}$

$$T_1 = m \cdot g \cdot \cos\theta + m \cdot \frac{v_1^2}{\ell}; \text{ or } v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g \cdot \ell(1 - \cos\theta)}$$

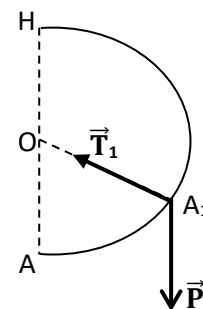
$$\Rightarrow T_1 = mg \cdot \cos\theta + \frac{m}{\ell} [v_0^2 - 2g \cdot \ell(1 - \cos\theta)]$$

$$\text{D'ou } T_1 = mg \cdot (3\cos\theta - 2) + m \cdot \frac{v_0^2}{\ell}$$

2.2.1- Déduisons la valeur de la tension  $T_H$  au point H.

Au point H on a  $\theta = \pi \Rightarrow T_H = m \cdot (\frac{v_0^2}{\ell} - 5g)$

2.2.2- quelle doit être la valeur minimale de  $v_0$  pour le solide reste tendu en H.



$$\begin{aligned} \text{Fill tendu} &\Rightarrow T_H > 0 \Rightarrow m \cdot \left( \frac{v_0^2}{\ell} - 5g \right) = 0 \Rightarrow \left( \frac{v_0^2}{\ell} - 5g \right) = 0 \Rightarrow \frac{v_0^2}{\ell} = 5g \Rightarrow v_{0min} = \sqrt{5g\ell} \\ &\Rightarrow v_0 > v_{0min} = \sqrt{5g\ell} ; \text{ A.N: } v_{0min} = \sqrt{5 \times 10 \times 0,8} = 6,32 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

**SITUATION D'ÉVALUATION 03**

Un groupe d'élèves désire étudier le mouvement d'une caisse de masse  $m$ . Pour cela l'un des élèves tire suivant une ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par l'intermédiaire d'un câble faisant un angle  $\beta$  avec celle-ci. Les propriétés sont telles que tout système de poids  $\vec{P}$  effectuant un mouvement sur ce plan est soumis à une force de frottement  $\vec{f}$  de même direction que le mouvement et de sens opposé.

Cas 1 : l'élève tire le câble de manière uniforme de vitesse  $v_1$ .

Cas 2 : l'élève augmente la tension  $T$  exercée sur le câble

**Données :**  $m = 200 \text{ Kg}$  ;  $\alpha = 20^\circ$  ;  $\beta = 30^\circ$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $f = 0,09 P$  ;  $v_1 = 10 \text{ km.h}^{-1}$  ;  $d = 10 \text{ m}$  ;  $v_2 = 20 \text{ km.h}^{-1}$  ;  $v_1' = 15 \text{ km.h}^{-1}$ .

Cas 1 :

- 1- Donne l'expression littérale de la tension  $T$  du câble.
- 2- Fais l'application numérique.

Cas 2 :

- 1- Donne la nature du mouvement de la caisse.
- 2- Donne l'expression de l'accélération algébrique en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $T$ .
- 3- Détermine la nouvelle valeur de la tension  $T$  du câble si la vitesse passe de  $v_1$  à  $v_2$  sur une distance  $d$ .
- 4- Détermine la puissance exercée par la tension du câble lorsque la vitesse est  $v_1'$ .

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

**Cas 1 :**

1- l'expression littérale de la tension  $T$  du câble.

$\vec{P}$  le poids de la caisse ;  $\vec{R}_N$  : la réaction normale de la piste ;

$\vec{T}$  : la tension du câble. et  $\vec{f}$  : les forces de frottements.

T.C.I :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$  car déplacement uniforme

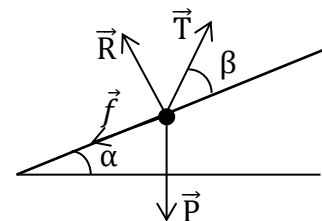
$v = \text{cte}$  et  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

Sur l'axe (x'x) :  $-P \sin \alpha + 0 + T \cos \beta - f = 0 \Rightarrow T = \frac{mg \cdot \sin \alpha + f}{\cos \beta}$

2- Fais l'application numérique.

A.N :  $T = \frac{mg \cdot \sin \alpha + f}{\cos \beta} = \frac{mg \cdot \sin \alpha + 0,09 \cdot mg}{\cos \beta} = \frac{mg \times (\sin \alpha + 0,09)}{\cos \beta} = \frac{200 \times 10 (\sin 20^\circ + 0,09)}{\cos 30^\circ}$

**T = 997,70 N**



**Cas 2 :**

1- Donne la nature du mouvement de la caisse.

L'accélération est une grandeur liée à la force.  $m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$

Si  $T$  augmente,  $v$  augmente également, alors la caisse aura un mouvement rectiligne uniformément accéléré vers le haut.

2- L'expression de l'accélération algébrique en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $T$ .

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow -P \sin \sigma + 0 + T \cos \beta - f = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = \frac{T \cos \beta - (P \sin \alpha + f)}{m}$$

$$a_x = \frac{T \cos \beta}{m} - g(\sin \alpha + 0,09)$$

3- La nouvelle valeur de la tension T

$$T = \frac{m[a_x + g(\sin \alpha + 0,09)]}{\cos \beta} \quad \text{on a : } v_2^2 - v_1^2 = 2 \cdot a_x \cdot d \Rightarrow a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot d} = \frac{5,55^2 - 2,77^2}{2 \times 10}$$

$$a_x = 1,15 \text{ m.s}^{-2} \text{ d'où } T = \frac{200 \times [1,15 + 10 \times (\sin 20^\circ + 0,09)]}{\cos 30^\circ} = 1263,29 \text{ N}$$

4- La puissance exercée par la tension du câble.

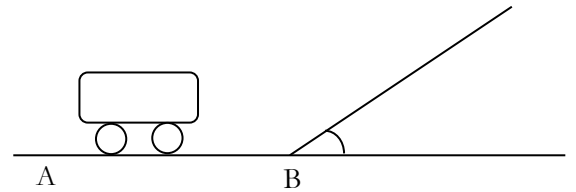
$$\vec{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{P} = T \times v \times \cos(\vec{T}, \vec{v}) = T \times v \times \cos \beta ; \text{ A.N : } p = 1263,29 \times 4,17 \times \cos 30^\circ = 4562,15 \text{ W.}$$

### SITUATION D'ÉVALUATION 04

Pendant les congés de Pâques, votre établissement scolaire organise une excursion à laquelle tu participes. Le véhicule que vous empruntez et sa et sa charge ont pour masse totale  $m = 2500 \text{ kg}$ . Sur un premier tronçon AB rectiligne et horizontale de la route, votre véhicule roule à la vitesse constante de  $70 \text{ km/h}$ . Ensuite, il aborde une côte de ligne de plus grande pente faisant un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale, en accélérant constamment jusqu'à atteindre la vitesse de  $106 \text{ km/h}$  pendant  $2,5 \text{ s}$ .

Durant les deux phases du mouvement, les forces de frottement exercées par la route sur le véhicule sont assimilées à une force unique de valeur  $f = 0,5 \times mg$ , avec  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , la valeur de l'intensité de la pesanteur.

L'un de vos camarades s'interroge sur la valeur de la force motrice du véhicule sur les deux parcours. Aide-le à en avoir une idée nette.



- 1- Donne le nom du référentiel dans lequel a lieu le mouvement du véhicule.
- 2- Énonce le théorème du centre d'inertie.
- 3- Détermine la force motrice du véhicule :
  - 3.1- sur le tronçon AB ;
  - 3.2- pendant son accélération sur le plan incliné.

### RESOLUTION DÉTAILLÉE

1- **Le nom du référentiel dans lequel a lieu le mouvement du véhicule.**

référentiel terrestre supposé galiléen

2- **Énoncé du théorème du centre d'inertie.**

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse  $m$  par le vecteur accélération  $\vec{a}_G$  de son centre d'inertie

3.1- Déterminons la force motrice du véhicule sur le tronçon AB ;

$$\vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}, \text{ car la vitesse est constante et est égale à } 70 \text{ km/h}$$

$$F = f ; \text{ A.N : } F = f = 0,5 \times mg = 0,5 \times 9,8 \times 2500 = 12\,250 \text{ N}$$

3.2- Déterminons la force motrice du véhicule pendant son accélération sur le plan incliné.

$$\vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a} \quad \text{sur } (B, \vec{t}) : -mg \cdot \sin \alpha - f + F = m \cdot a_x \Rightarrow -mg \cdot \sin \alpha - f + F = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{\Delta t}$$

$$\text{D'où : } F = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{\Delta t} + f + mg \cdot \sin \alpha ;$$

$$\text{A.N : } F = 2500 \times \frac{29,44^2 - 19,44^2}{2,5} + 12\,250 + 12\,250 = 2500 \times \frac{29,44^2 - 19,44^2}{2,5} + 12\,500 = 5,013 \cdot 10^5 \text{ N}$$

**F = 5,013.10<sup>5</sup> N**

## LEÇON 3 : INTERACTION GRAVITATIONNELLE

**COMPÉTENCE 1** : TRAITER UNE SITUATION SE RAPPORTANT À LA MÉCANIQUE

**THÈME 1** : MECANIQUE

**LEÇON 3** : INTERACTION GRAVITATIONNELLE (5 H)

### Exemple de situation

Regardant un match de football à la télévision, deux élèves de terminale C entendent le commentateur dire que les images reçues sont transmises par satellite.

Curieux, ils s'informent par internet et découvrent alors ce qui suit :

« Un satellite tourne autour de la Terre selon les lois de la gravitation, en décrivant une trajectoire en forme d'ellipse ou de cercle dont le plan passe par le centre de la Terre. Sa vitesse étant inversement proportionnelle à son altitude, elle est donc minimale lorsque le satellite est à l'apogée de son orbite (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre) et maximale lorsqu'il se trouve à son périégée (point de la trajectoire le plus proche de la Terre) ».

Le lendemain, avec leurs camarades de classe, ces élèves décident d'étudier les lois de la gravitation, de déterminer les caractéristiques du mouvement d'un satellite géostationnaire et de montrer l'intérêt des satellites géostationnaires.

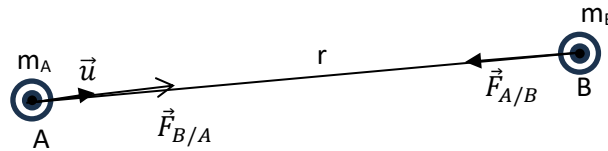
HABILETÉS	CONTENU
<b>Définir</b>	- la force d'interaction gravitationnelle. - le champ de gravitation.
<b>Énoncer</b>	la loi d'attraction universelle.
<b>Connaître</b>	- l'expression de la force d'interaction gravitationnelle. - l'expression du champ gravitationnel.
<b>Déterminer</b>	- la nature du mouvement d'un satellite. - les caractéristiques du mouvement d'un satellite.
<b>Connaître</b>	la troisième loi de Kepler.
<b>Utiliser</b>	la troisième loi de Kepler.
<b>Définir</b>	un satellite géostationnaire.
<b>Déterminer</b>	- les caractéristiques du mouvement d'un satellite géostationnaire. - la masse d'une planète.
<b>Connaître</b>	l'intérêt d'un satellite géostationnaire la notion d'impesanteur.

### 1) FORCE D'INTERACTION GRAVITATIONNELLE

#### 1.1) énoncé de la loi d'attraction universelle (loi de Newton)

Deux corps ponctuels A et B, de masses respectives  $m_A$  et  $m_B$ , situés à une distance  $r$  l'un de l'autre, s'attirent mutuellement avec des forces d'intensités proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de la distance  $r$ . Ces forces sont appelées **forces gravitationnelles**.

#### 1.2) expression de la force gravitationnelle



$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G \frac{m_A m_B}{r^2} \vec{u} \quad \text{en intensité} \quad F_{A/B} = F_{B/A} = G \frac{m_A m_B}{r^2}$$

où  $G$  : est la constante gravitationnelle ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  ou en  $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ )

#### Activité d'application 1

1) Complète le tableau ci-dessous.

Corps en interaction	masse en kg	distance (r) en m	force F en (N)
Soleil Terre	$2 \cdot 10^{30}$ $6 \cdot 10^{24}$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}$
Deux hommes	60 80	1	$3,2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$
<b>Conclusion</b>	<b>La force gravitationnelle est importante pour les grandes masses.</b>		

#### Activité d'application 2

1) Calcule la valeur des forces d'interactions entre la planète Uranus et l'un de ses satellites Ariel distants de  $r = 192000 \text{ km}$ .

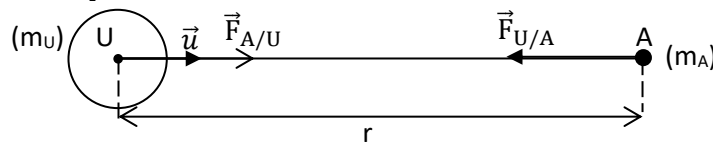
2) Représente qualitativement ces deux forces sur un schéma.

**Données** : masse d'Uranus :  $m_U = 8,84 \cdot 10^{25} \text{ kg}$  ; masse d'Ariel :  $m_A = 1,26 \cdot 10^{21} \text{ kg}$  ;  
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ .

#### Corrigé

1) Calcule de la force  $F = G \frac{m_A m_U}{r^2}$  ; A.N :  $F = 2,015 \cdot 10^{20} \text{ N}$

2)



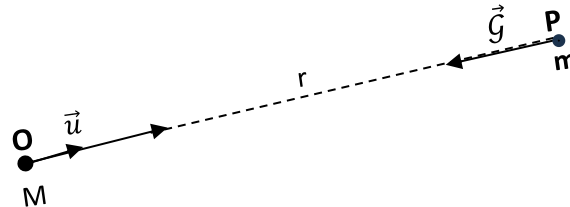
### 2) CHAMP GRAVITATIONNEL

#### 2.1) définition

Il existe un champ de gravitation en un point de l'espace si une particule de masse  $m$ , placée en ce point est soumise à une force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F}$ . Le vecteur champ de gravitation  $\vec{g}$  est défini par :  $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$ .

### 2.2) Champ créé par une charge ponctuelle

Considérons une masse ponctuelle  $M$  située en un point  $O$  de l'espace. On place une masse ponctuelle  $m$  en un point  $P$  à une distance  $r = OP$  de  $M$ . La loi de Newton donne la force gravitationnelle exercée par la masse  $M$  sur la masse  $m$ .  $\vec{F} = -G \frac{m.M}{r^2} \vec{u}$  ( $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigé de  $M$  vers  $n$ ).



Le champ gravitationnel créé par la masse  $M$  au point  $P$  est obtenu en divisant la force par  $m$ .

$$\vec{G}_{(P)} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{G.M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Une masse  $m$  placée en  $P$  est alors soumise à la force gravitationnelle :  $\vec{F} = m\vec{G}$

#### Caractéristiques du champ gravitationnel $\vec{G}_{(P)}$

Direction : la droite d'action de  $\vec{F}$  (la droite  $OP$ )

Sens : celui de  $\vec{F}$

Intensité :  $\mathcal{G} = \frac{G.M}{r^2}$  (en  $m.s^{-2}$ )

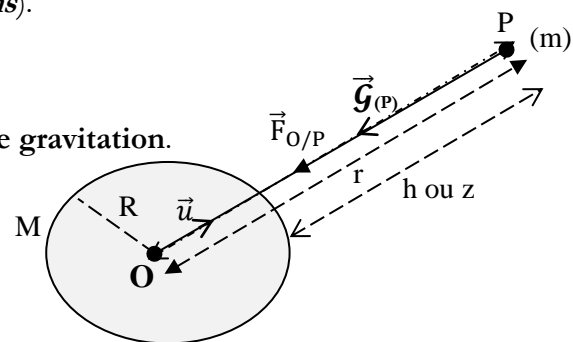
Point d'application : Au point  $P$

### 2.3) Objet de symétrie sphérique

Considérons une planète ou (le Soleil,...) que nous représentons par une boule de masse  $M$ , de rayon  $R$  et de centre  $O$ . Supposons qu'elle soit à symétrie sphérique (*c'est-à-dire que la matière est distribuée identiquement dans toutes les directions*).

$$\vec{F} = \vec{F}_{O/P} = -G \frac{m.M}{(R+h)^2} \vec{u} \quad \text{avec } r = R+h$$

$$\vec{G}_{(P)} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{G.M}{(R+h)^2} \cdot \vec{u} \quad \text{est appelé vecteur champ de gravitation.}$$



### 2.4) Champ gravitationnel terrestre

La terre assimilée à une sphère à répartition sphérique de masse  $M_T$  et de rayon  $R_T$ , crée dans tout l'espace qui l'entoure un champ gravitationnel.

- **Au niveau de sa surface** (sol) :  $\mathcal{G}_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,98 \cdot 10^{24}}{(6370 \cdot 10^3)^2} \approx g = g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  intensité du champ de pesanteur terrestre.

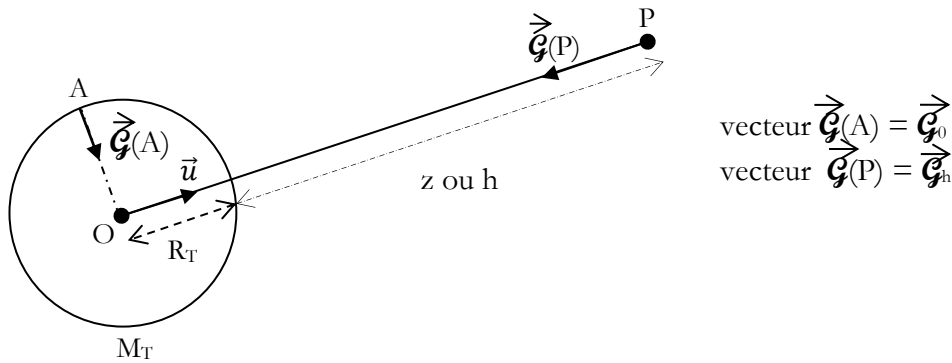
Le champ de pesanteur est le champ de gravitation créé par la Terre sur sa surface.

On écrira que :  $G.M_T = \mathcal{G}_0 \cdot R_T^2 = g_0 \cdot R_T^2$

- **A une altitude  $h$  de la terre**, notée :  $\mathcal{G}_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$  avec  $r = R + z = R + h$

avec  $R_T = 6370 \text{ km} \approx 6400 \text{ km}$  et  $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \approx 6,4 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

la relation entre  $\mathcal{G}_h$  et  $\mathcal{G}_0$  donne  $\mathcal{G}_h = \mathcal{G}_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}$  car  $\underline{G.M_T} = \underline{G_0.R_T^2} = \underline{g_0.R_T^2}$



**Activité d'application 3**

La distance terre-lune est  $h = 3,85.10^5$  km. Calcule la valeur du champ de gravitation terrestre :

1. au niveau du sol
2. sur la lune.

**Données :**

Rayon de la terre :  $R_T = 6,3.10^3$  km

Masse de la terre  $M_T = 6.10^{24}$  kg ; la constante de gravitation est :  $G = 6,67.10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>.kg<sup>-2</sup>

**Corrigé**

- 1) Au niveau du sol

$$\mathcal{G}_0 = \frac{G.M_T}{R_T^2} = 6,67.10^{-11} \times \frac{6.10^{24}}{(6,3.10^3)^2} = 10,08 \text{ m.s}^{-2}$$

- 2) A l'altitude h

$$\mathcal{G}_h = \frac{G.M_T}{(R_T+h)^2} = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2} = 6,67.10^{-11} \times \frac{6.10^{24}}{(6,3.10^6 + 3,85.10^8)^2} ; g_h = 2,6.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

**Activité d'application 4**

Le satellite Stella, de masse  $m = 48$  kg gravite à une altitude moyenne  $z = 800$  km au dessus de la mer.

- 1) exprime l'intensité  $G$  du champ gravitationnel terrestre en fonction de  $G_0$ ,  $z$  et  $R_T$  (rayon de la terre).
- 2) calcule la valeur de  $G$  à cette altitude ainsi que l'intensité de la force de gravitation  $F$  qui entraîne ce satellite.
- 3) détermine l'altitude  $z$  pour  $G = \frac{1}{2} G_0$ .

**Résolution détaillée**

- 1) expression de  $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = \frac{G.M_T}{r^2} \text{ avec } r = R + z; \underline{G.M_T} = \underline{G_0.R_T^2} = \underline{g_0.R_T^2} \text{ d'où } \mathcal{G}_h = G_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}$$

Calcul de  $\mathcal{G}$  à cette altitude

$$\mathcal{G}_h = \frac{9,8 \times (6370.10^3)^2}{(6370.10^3 + 800.10^3)^2} = 7,73 \text{ m/s}^2$$

Calcul de la force de gravitation  $F$  entraînant ce satellite

$$F = m\mathcal{G} = 48 \times 7,73 = 371,04 \text{ N}$$

- 2) altitude  $z$  est :

$$G_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2} = \frac{1}{2}G_0 \text{ alors } z = \sqrt{2 \cdot R_T^2} - R_T$$

$$AN : z = \sqrt{2 \times (6370 \cdot 10^3)^2} - 6370 \cdot 10^3 = 2638540,83 \text{ m} = 2638,540 \text{ km}$$

### 3) MOUVEMENT CIRCULAIRE DES SATELLITES

#### 3.1) Mouvement circulaires des satellites

**Systeme** : satellite de masse  $m$  assimilé à son centre d'inertie  $S$

**Référentiel** : géocentrique supposée galiléen

**NB** : Dans ce référentiel géocentrique les de la terre satellites décrivent des trajectoires circulaires

**Repère** : repère de Frenet ( $S, \vec{\tau}, \vec{n}$ )

**Bilan des forces extérieures** :

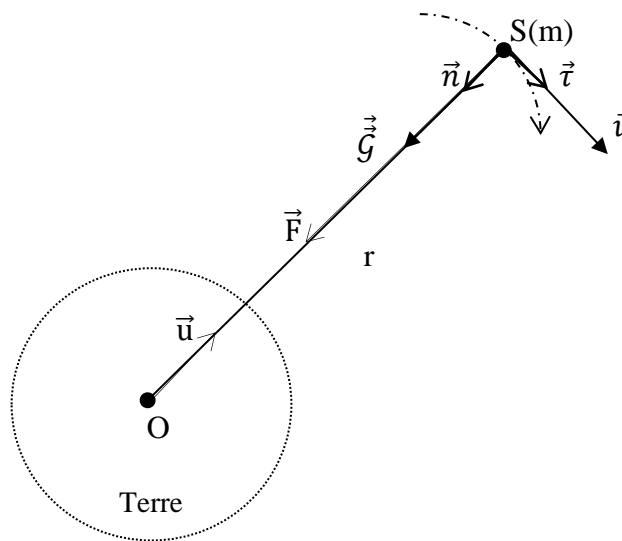
$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} : \text{la force de gravitation}$$

$$\text{Théorème du centre d'inertie : } \vec{F} = m \vec{g} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} = g \cdot \vec{n}$$

$$\text{On : } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \text{ (or } \vec{F} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{u} = G \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{n} \text{) d'où } \vec{a} = G \frac{M_T}{r^2} \vec{n} \text{ or } (\underline{G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2} \text{ et } r = h + R_T)$$

$$\text{Finalement : } \vec{a} = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2} \vec{n}$$

**Le mouvement du satellite est indépendant de sa masse, l'accélération est centripète.**



Dans un repère de Frenet centré sur le satellite  $S (S, \vec{\tau}, \vec{n})$

$$\vec{a}_G = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v_0^2}{r} \vec{n} = \vec{g} = g \cdot \vec{n} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$$

$$\text{Autre méthode : } \mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{W(\vec{F})}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0 \text{ car } \vec{F}_m \perp \vec{v} \Rightarrow W(\vec{F}) = \Delta E_C = 0 \Rightarrow \Delta E_C = 0 \Rightarrow v = \text{cste.}$$

**Le mouvement est donc uniforme.**

$$\vec{a}_G = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v_0^2}{r} \vec{n} \text{ or } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ car } v = \text{cte} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{v_0^2}{r} \vec{n} \quad (1)$$

$$\vec{F} = m_s \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_s} = -G \cdot \frac{M_T}{r^2} \vec{u} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \vec{n} \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v_0^2} = \text{Cste} \text{ (car } v = \text{cte, } M = \text{cte, } G = \text{cte} \text{ alors } r \text{ est constant).}$$

**Le mouvement du satellite est donc circulaire de rayon  $r$ .**

**Conclusion**

**Le mouvement d'un satellite de la Terre dans un référentiel géocentrique supposé galiléen est circulaire et uniforme.**

**3.2) Vitesse linéaire et vitesse angulaire du satellite**

Dans la base de Frenet  $S(S, \vec{\tau}, \vec{n})$  ;  $a_n = \mathcal{G} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \mathcal{G}.r \Rightarrow v = \sqrt{\mathcal{G}.r}$  or  $\mathcal{G} = \frac{G.M}{r^2}$

$v^2 = \frac{G.M}{r}$  avec  $r = R_T + z$  on a :  $v^2 = \frac{G.M}{R_T+z} \Rightarrow v = \sqrt{G.\frac{M}{R_T+z}}$  sachant que  $G.M_T = g_0 R_T^2$

On a :  $v = \sqrt{g_0 \cdot \frac{R_T^2}{R_T+z}} = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T+z}}$

**La vitesse est indépendante de la masse du satellite. Elle n'est fonction que de son altitude :  $v = f(z)$ .  $v$  diminue quand  $z$  augmente.**

$\omega = \frac{v}{r}$  or  $v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$  donc  $\omega = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{G.M}{r}} = \sqrt{\frac{G.M}{r^3}}$  or  $g_0 R_T^2 = G.M_T$  et  $R_T + z \Rightarrow \omega = R_T \sqrt{\frac{g_0}{(R_T+z)^3}}$

**3.3) Période du mouvement des satellites**

Le mouvement du satellite étant uniforme :  $T = \frac{2\pi r}{v}$  or  $v^2 = \frac{G.M}{r}$

$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{G.M}{r}} = \frac{4\pi^2 r^3}{G.M} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G.M}}$  or  $g_0 R_T^2 = G.M_T \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}} = \frac{2\pi}{R_T} \sqrt{\frac{(R_T+z)^3}{g_0}}$

**La période T est indépendante de la masse du satellite, elle croît avec l'altitude z**

**NB : Tous les satellites évoluant à la même altitude z ont la même période T.**

**4) 3<sup>ème</sup> LOI DE KEPLER**

**4.1) Exploitation**

$T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2}$  or  $v^2 = \frac{G.M_T}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{G.M_T}{r}} = \frac{4\pi^2 r^3}{G.M_T}$

$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_T}$  c'est troisième loi de Kepler ( $4\pi^2$ ;  $G, M_T$  sont constant) donc  $\frac{T^2}{r^3} = Cte$

**NB : Tous les satellites de la Terre respectent cette loi ; ce rapport ne dépend pas de la masse du satellite (m) mais seulement de la masse de la Terre  $M_T$ .**

La Lune est un satellite naturel de la Terre, on pourra donc écrire :  $\frac{T_L^2}{r_L^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_T}$

**Remarque :**

Dans un référentiel héliocentrique (Copernic) toutes les planètes décrivent autour du Soleil un mouvement circulaire et uniforme : Ce sont des satellites du Soleil on écrit :

$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_S} = Cste \Rightarrow$  **Le rapport  $\frac{r^3}{T^2}$  est constant pour toutes les planètes.**

**4.2) énoncé de la Loi**

Pour toutes les planètes, le rapport entre le cube du demi-grand axe  $r$  de la trajectoire et le carré de la période de révolution  $T$  est le même. On a :  $\frac{r^3}{T^2}$  est **constant**

**4.2.1) Les satellites géostationnaires**

**a) Définition**

Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît immobile par rapport à un observateur terrestre. Il tourne à la même vitesse angulaire dans le même sens que la Terre dans le même plan équatorial.

**b) Caractéristiques du mouvement**

- Sa trajectoire circulaire de centre O (centre de la Terre) appartient au plan équatorial (plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre et contenant O).
- Son sens est le sens de rotation de la Terre (d'ouest vers l'est)

<b>Satellites géostationnaires</b>	Période	$T = 23 \text{ h } 56 \text{ min} = 86\,164 \text{ s}$
	Altitude	$z = 35786 \text{ km} \approx 36\,000 \text{ km}$
	Vitesse angulaire	$\omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$
	$r_S = R + z$	$r_S = 42\,000 \text{ km}$
	vitesse linéaire	$3,074 \text{ km/s}$
Ces satellites ont la même période que celle de la Terre : $T_T = T_S$ avec $T_T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}}$ ; $T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}}$		

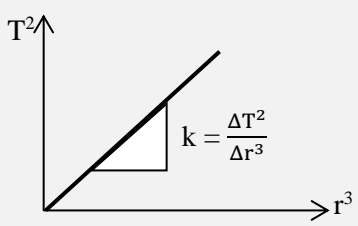
**c) Intérêt des satellites géostationnaires**

Grace à leur immobilité apparente, les satellites géostationnaires servent de réflecteur d'ondes électromagnétiques, ce qui permet la transmission de ces ondes vers tous les points de la Terre : radio, télévision, téléphone.

**NB : Notion d'impesanteur (apesanteur)**

L'impesanteur découle du fait que, localement dans un champ gravitationnel, les objets ont presque la même accélération qui est indépendante de leur masse.

**Exemples : Ascenseur en chute libre – un cosmonaute dans un satellite.**

3 <sup>ème</sup> loi de Kepler	$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{4\pi^2}$	<p><math>r</math> = rayon de la trajectoire (supposé circulaire) de la planète (en m).  <math>T</math> = période de rotation de la planète autour du soleil (en s)  <math>G</math> = constante de gravitation : <math>G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ USD}</math>  <math>Cste = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}</math> est une constante qui ne dépend que du solide attracteur  <math>M_S</math> est la masse du solide attracteur (soleil) : elle est indépendante de la masse du satellite (planètes).</p>
$Cste = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S}$ alors $\frac{a^3}{T^2} = Cste \Rightarrow$ pour les planètes (Venus et Terre) : $\frac{T_V^2}{r_V^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3}$		
Courbe de $T^2 = f(r^3)$ <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <math display="block">\frac{T^2}{r^3} = k \text{ et } \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = k \text{ d'où } M = \frac{4 \cdot \pi^2}{k \cdot G}</math> </div> </div>		

**SITUATION D'ÉVALUATION 01**

Un satellite artificiel S, de masse m, a une trajectoire supposée circulaire de rayon r<sub>1</sub>, autour de la Terre, dans le plan équatorial.

- 1) A partir de la loi d'attraction universelle, détermine l'accélération g de la pesanteur à l'altitude h du satellite en fonction de celle existant au sol, notée g<sub>0</sub>.
- 2) Montre que S est animé d'un mouvement circulaire uniforme.
- 3) Détermine la vitesse v<sub>1</sub> et ω<sub>1</sub> du satellite S ainsi que sa période T<sub>1</sub> en fonction de son rayon r<sub>1</sub>, g<sub>0</sub> et R. Fais l'application numérique de v<sub>1</sub> et T<sub>1</sub>
- 4) On désire que S deviennent un satellite géostationnaire.

**Données numériques : Période de révolution de la Terre : T = 86 164 s ; g<sub>0</sub> = 9,8 m.s<sup>-2</sup> ; m<sub>s</sub> = 2000 kg ; r<sub>1</sub> = 20 000 km ; rayon de la Terre : R = 6 400 km.**

RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) A partir de la loi d'attraction universelle, détermine l'accélération g de la pesanteur à l'altitude h du satellite en fonction de celle existant au sol, notée g<sub>0</sub>.

$$TCI : m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{G} \Rightarrow \vec{g} = \vec{G}$$

$$\vec{f} = m \cdot \vec{G} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u} ; \text{ donc } \vec{g} = \frac{\vec{f}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \vec{u}$$

$$g_0 = -G \cdot \frac{M}{R^2} \vec{u} \text{ et } g_h = -G \cdot \frac{M}{(R+z)^2} \vec{u} \Rightarrow g_h = g_0 \times \frac{R^2}{(R+z)^2}$$

2) Montrons que S est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

**Voir cours**

3) Détermine la vitesse v<sub>1</sub> et ω<sub>1</sub> du satellite S ainsi que sa période T<sub>1</sub> en fonction de son rayon r<sub>1</sub>, g<sub>0</sub> et R. Fais l'application numérique de v<sub>1</sub> et T<sub>1</sub>

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_1}} = \sqrt{\frac{g_0 \times R^2}{r_1}} \text{ et } \omega_1 = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r_1^3}} = R \sqrt{\frac{g_0 \times R^2}{r_1^3}} \text{ et } T_1 = \frac{2\pi \times r_1}{v_1} = 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{G \cdot M}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_1^3}{g_0 R^2}}$$

**Application numérique :**  $v_1 = \sqrt{\frac{9,8 \times (6400000)^2}{20000000}} = 4480 \text{ m.s}^{-1}$

$$\omega_1 = 6400000 \times \sqrt{\frac{9,8 \times (6400000)^2}{(20000000)^3}} = 1433,6 \text{ rad.s}^{-1}.$$

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{(20000000)^3}{9,8 \times (6400000)^2}} = 28049,93 \text{ s} = 28050 \text{ s}$$

4) On désire que S deviennent un satellite géostationnaire.

4.1) Donne la définition d'un satellite géostationnaire.

**Voir cours**

4.2) Calcule du rayon r<sub>s</sub>, de son orbite et déduis l'altitude h, à laquelle il se trouve pour qu'il soit géostationnaire.

Le satellite est géostationnaire si sa période est égale à celle de la Terre.

$$\frac{r_s^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} ; \quad r_s = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{g_0 \cdot R^2 \times \frac{T^2}{4\pi^2}}$$

AN:  $r_s = \sqrt[3]{9,8 \times \frac{(6370000 \times 86164)^2}{4\pi^2}} = 42\,430\,728 \text{ m} = 42\,431 \text{ km}.$

Déduisons l'altitude h = r<sub>s</sub> - R = 42 431 - 6 400 = 36031 km

**SITUATION D'ÉVALUATION 02**

Lors d'une activité de recherche sur l'intérêt des satellites, des élèves d'une classe de Terminale C découvrent que les satellites « Météosat » sont exploités pour obtenir des données spécifiques sur l'ozone, les océans ainsi que sur l'évolution du climat.

Ces satellites sont placés sur une orbite géostationnaire d'altitude Z égale à 36 000 km, dans le champ de pesanteur terrestre.

Avec les données suivantes :

- constante gravitationnelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ .
- rayon terrestre :  $R_T = 6370 \text{ km}$ .
- période de rotation de la terre : (24 h environ)

Tu es sollicité pour aider ces élèves, en plus des résultats de leurs recherches, à estimer la masse de la terre autour de laquelle tournent les satellites.

- 1- Définis un satellite géostationnaire puis donne la valeur approximative de sa période de rotation.
- 2-1 Montre que le mouvement d'un tel satellite autour de la terre est circulaire et uniforme.
- 2-2 Calcule la vitesse angulaire des satellites « Météosat »
- 2-3 Déduis-en leur vitesse linéaire.
- 3- Détermine la masse de la terre, autour de laquelle tournent les satellites (valeur approximative).
- 4- Déduis de la question précédente, la valeur du champ gravitationnel créé par la terre à l'altitude du satellite.

RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1- Définitions d'un satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît immobile par rapport à un observateur terrestre. Il tourne dans le même sens et à la même vitesse angulaire que celle de la Terre.

Sa période est :  $T = 24 \text{ h} \times 3600 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}$

2-1 Montre que le mouvement d'un tel satellite autour de la terre est circulaire et uniforme.

**Systeme** : satellite de masse m assimilé à son centre d'inertie S

**Référentiel** : géocentrique supposée galiléen

**Repère** : repère de Frenet (S,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ )

**Bilan des forces extérieures** :

$\vec{F} = m \cdot \vec{G}$  : la force de gravitation

Théorème du centre d'inertie :  $\vec{F} = m \vec{G} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{G} = G \cdot \vec{n}$

On :  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$  (or  $\vec{F} = -G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{u} = G \frac{M_T \cdot m}{r^2} \vec{n}$ ) donc  $\vec{a} =$

$G \frac{M_T}{r^2} \vec{n}$  or ( $G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$  et  $r = h + R_T$ )

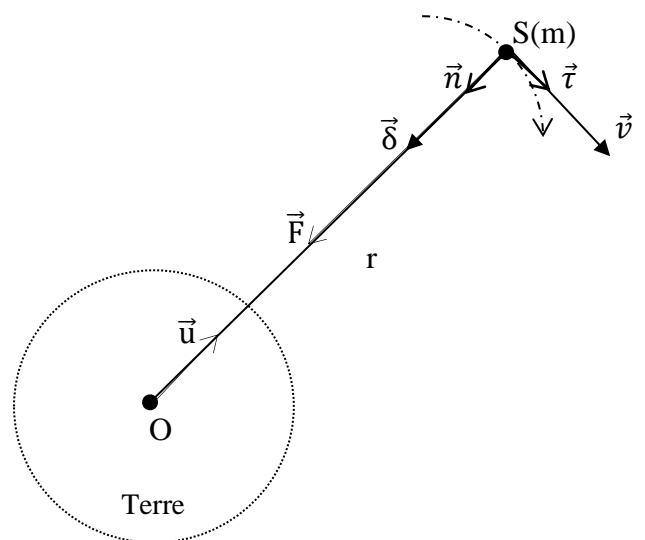
Finalement :  $\vec{a} = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2} \vec{n}$

Dans un repère de Frenet centré sur le satellite S (S,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ )

$\vec{a}_G = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + \frac{v_0^2}{r} \vec{n} = \vec{G} = G \cdot \vec{n} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$

Ou bien :  $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$  car  $\vec{F}_m \perp \vec{v} \Rightarrow W(\vec{F}) = \Delta E_C = \frac{P(\vec{F})}{\Delta t} = 0$

$\Rightarrow \Delta E_C = 0 \Rightarrow v = \text{cste} = v_0$  donc **Le mouvement est donc uniforme.**



$$\vec{a}_G = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v_0^2}{r} \vec{n} \text{ or } v = \text{cte} \Rightarrow \vec{a}_G = \frac{v_0^2}{r} \vec{n} \quad (1)$$

$$\vec{F} = m_s \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_s} = -G \cdot \frac{M_T}{r^2} \vec{u} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \vec{n} \quad (2)$$

(1) et (2)  $\Rightarrow \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v_0^2} = \text{Cste}$  (car  $v = \text{cte}$ ,  $M = \text{cte}$ ,  $G = \text{cte}$  alors  $r$  est constant).

**Le mouvement du satellite est donc circulaire de rayon  $r$ .**

**Le mouvement d'un satellite de la Terre dans un référentiel géocentrique supposé galiléen est circulaire et uniforme.**

2-2 Calcule la vitesse angulaire des satellites « Météosat »

C'est aussi celle de la terre :  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86\,400} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ .

2-3 Vitesse linéaire :  $v = (R_T + z) \times \omega = (6370 + 36\,000) \cdot 10^3 \times 7,27 \cdot 10^{-5} = 3080,3 \text{ m.s}^{-1}$

3- Masse de la terre.

$$\frac{T^2}{(R_T + z)^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_T} \text{ (Loi de Kepler) d'où } m_T = \frac{4 \cdot \pi^2 \times (R_T + z)^3}{G \times T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \times (6370000 + 36000000)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 86400^2}$$

$\Rightarrow m_T = 6,03 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

4- La valeur du champ gravitationnel créé par la terre à l'altitude du satellite.

$g_z = G \cdot \frac{M_T}{(R+z)^2}$  ; A.N :  $g_z = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,03 \cdot 10^{24}}{(6370000 + 36000000)^2} = 0,224 \text{ N.kg}^{-1} = 0,224 \text{ m.s}^{-2}$ .

**Interrogation écrite N°1**

Une planète du système solaire appelé saturne de masse  $M_s = 5,7 \cdot 10^{26} \text{ kg}$  de rayon  $R_s = 5,82 \cdot 10^4 \text{ km}$ .

Détermine :

- a) le champ  $g_s$  de gravitation à la surface de saturne.
- b) l'altitude  $h$  à laquelle le champ de pesanteur de Saturne est égal à la moitié de celui qui règne à sa surface. On donne :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ S.I}$ .

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Le champ  $g_s$  de gravitation à la surface de saturne est

$$g_s = \frac{G \cdot M_s}{R_s^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,7 \cdot 10^{26}}{(5,82 \cdot 10^7)^2} = 11,22 \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow g_s = 11,22 \text{ N.kg}^{-1}$$

2) l'altitude  $h$

$$g_s = \frac{G \cdot M_s}{R_s^2} \text{ et } g_h = \frac{G \cdot M_s}{(R_s + h)^2} \Rightarrow \text{on a : } \frac{g_h}{g_s} \Rightarrow g_h = g_s \cdot \frac{R_s^2}{(R_s + h)^2} = \frac{1}{2} g_s \Rightarrow 2 \cdot r^2 = (R_s + h)^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{2 \cdot R_s^2 - R_s} \text{ A.N: } h = \sqrt{2 \times (5,82 \cdot 10^4)^2 - 5,82 \cdot 10^4} = 2,72 \cdot 10^4 \text{ km ; } h = 2,41 \cdot 10^4 \text{ km.}$$

**COMPRÉHENSION**

Pour chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Vrai	Faux
1	L'interaction gravitationnelle est toujours attractive	×	
2	La constante G dans l'expression $F_{1/2} = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$ dépend des objets que l'on étudie		×
3	L'interaction gravitationnelle s'exerce toujours à distance.		×
4	Plus les corps en interaction sont volumineux, plus l'interaction gravitationnelle est forte		×
5	Plus les objets sont éloignés, plus l'interaction gravitationnelle est faible.	×	
6	Lorsque deux corps sont en interaction, le plus lourd exerce une force plus importante que le plus léger.		×
7	Sur une planète, l'interaction gravitationnelle exercée est appelé la masse.		×

Mets une croix dans la bonne case selon l'affirmation est vraie ou fausse.

**Exercice 1**

Ton camarade de classe découvre sur internet que pour la recherche d'informations sur l'atmosphère terrestre, un satellite a été placé en orbite « polaire » en 2006. Ce satellite d'observation de la Terre de masse  $m = 4,1$  tonnes, devrait fournir des informations pour l'amélioration des prévisions météorologiques.

Sa trajectoire passe pratiquement au-dessus des pôles géographiques. Son orbite, quasi circulaire, est à une altitude  $h = 8,2 \cdot 10^3$  km au-dessus de la surface de la Terre  $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg et de rayon  $R_T = 6,38 \cdot 10^6$  m. Ce satellite a une vitesse  $v = 2,7 \cdot 10^4$  km/h dans le référentiel géocentrique.

**Données :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  S.I et Échelle : 1 cm pour  $1,5 \cdot 10^4$  N.**

Il t'es demandé(e) d'exploiter les informations contenues dans ce texte.

- 1) Énonce la loi de Newton.
- 2) Détermine la valeur de la force gravitationnelle  $\vec{F}_{T/S}$  exercée par la Terre sur le satellite.
- 3) Représente à l'échelle indiquée plus haut,  $\vec{F}_{T/S}$  et  $\vec{F}_{S/T}$  (la force exercée par le satellite sur Terre) sur un schéma.
- 4) Détermine la période T de ce satellite dans le référentiel géocentrique.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

**1) Loi de Newton**

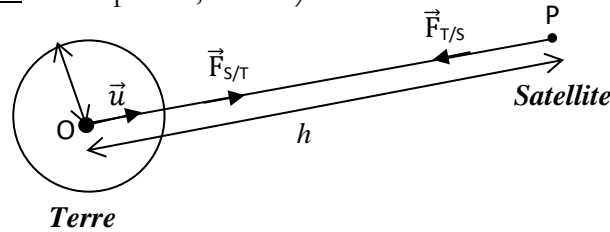
Deux corps ponctuels A et B de masses  $m_A$  et  $m_B$ , exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposés, dirigées suivant la droite (AB), de valeurs proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de leur distance.

**2) Calcul de la valeur de cette force**

$$F_{T/S} = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{5,97 \cdot 10^{24} \times 4,1 \cdot 10^2}{(6380000 + 820000)^2} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ N}$$

**3) Représentation des forces  $\vec{F}_{T/S}$  et  $\vec{F}_{S/T}$  :**

$\vec{F}_{T/S}$  et  $\vec{F}_{S/T}$  sont opposés et ont la même valeur. Chaque force est représentée par un vecteur de longueur 2,1 cm. (Échelle : 1 cm pour  $1,5 \cdot 10^4$  N).



**4) Détermination de la période de révolution T de ce satellite :**

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} = \frac{2\pi \times (6,38 \cdot 10^6 + 8,2 \cdot 10^5)}{7500} = 6032 \text{ s} = 1 \text{ h } 40 \text{ min } 32 \text{ s}$$

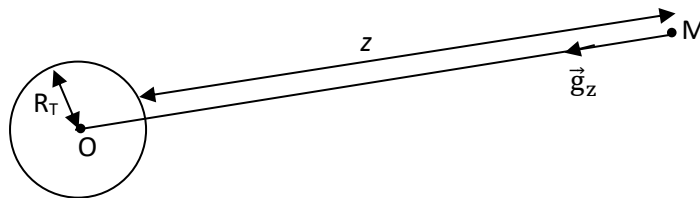
**Exercice 2**

Toute la masse de la Terre de rayon R, est supposée être concentrée en son centre O.

- 1) Représente la Terre ainsi que le vecteur champ de gravitation  $\vec{g}_z$  qu'elle crée en un point M situé à une altitude z.
- 2) Donne les expressions littérales de  $g_z$  et  $g_0$  qui représentent respectivement les valeurs des vecteurs champs de gravitation à l'altitude z et à la surface de la Terre.
- 3) Établis la relation qui lie ces deux grandeurs  $g_z$  et  $g_0$ .
- 4) Montre que pour de faibles altitudes z ( $z \ll R_T$ )

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1) Représentation du vecteur champ de gravitation  $\vec{g}_z$  en un point M situé à l'altitude z.



- 2) Expressions littérales de  $g_z$  et  $g_0$

$$g_z = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \text{ et } g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

- 3) Relation qui lie ces deux grandeurs  $g_z$  et  $g_0$ .

$$g_z = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} = G \frac{M_T}{R_T^2 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} = G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}; \quad g_z = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

- 4) Pour ( $z \ll R_T$ )

$$\left(1 + \frac{z}{R_T}\right) \ll 1 \times \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2} = 1 - \frac{2z}{R_T}; \quad g_z = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} = g_0 \left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^{-2}$$

Finalemment :  $g_z = g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right)$

**Exercice 3** (application satellite géostationnaire N°1)

La période de rotation de la Terre, de rayon  $R_T = 6380$  km, autour de l'axe de ses pôles, dans le référentiel géocentrique, est  $T = 86\,164$ s.

1) Détermine pour un point situé sur l'équateur :

1.1) la valeur de la vitesse  $v$  ;

1.2) la vitesse angulaire  $\omega$ .

2) Un satellite de la Terre décrit une trajectoire circulaire à une altitude  $h = 830$  km, à la vitesse constant  $v = 7550$  m.s<sup>-1</sup> dans le référentiel géocentrique.

2.1) Calcule sa période de rotation  $T$ .

2.2) Compare cette période à celle de la Terre autour de l'axe de ses pôles.

2.3) Justifie que ce satellite n'est pas géostationnaire.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1)

1.1) Calcul de la valeur de la vitesse linéaire  $v$  pour un point situé sur l'équateur :

$$v = \frac{2\pi R_T}{T} ; \text{A.N : } v = \frac{6380000 \times 2\pi}{86164} = 465,4 \text{ m.s}^{-1} = 1\,674,85 \text{ km.h}^{-1}$$

1.2) Calcul de la vitesse angulaire  $\omega$  pour un point situé sur l'équateur

$$\omega = \frac{2\pi}{T} ; \text{A.N : } \omega = \frac{2\pi}{86164} ; \text{AN } \omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}.$$

2)

2.1) Calcul de la période de rotation du satellite.

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} ; \text{A.N : } T = \frac{2\pi \times (6380 + 830) \times 1000}{7550} = 6\,000 \text{ s}$$

2.2) Comparaison de cette période à celle de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

$$T_{\text{Terre}} = 86\,164 \text{ s} > T = 6\,000 \text{ s}$$

2.3) Ce satellite n'est pas géostationnaire car sa période est différente de celle de la Terre.

**Exercice 4** (application satellite géostationnaire)

La Terre de masse  $M_T = 5,976 \cdot 10^{24}$  kg a une répartition de masse à symétrie sphérique de rayon  $R_T = 6370$  km. La période de son mouvement de rotation autour de l'axe des pôles est  $T = 86\,164$ s.

Un satellite de la Terre évolue sur une orbite circulaire de rayon  $r_1 = 25\,000$  km.

1) Montre que le mouvement du satellite est uniforme.

2) Détermine sa vitesse  $v$ .

3) Déduis la période du mouvement du satellite.

4) Détermine le rayon  $r_1$  de l'orbite du satellite pour qu'il soit géostationnaire.

Donnée :  $g_0 = 9,8$  m.s<sup>-2</sup>.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Système : le satellite ;

Référentielle galiléen : référentiel géocentrique

Bilan des forces extérieures : la force gravitationnelle :  $\vec{F}_{T/S} = G \frac{M_T m}{r_1^2} \vec{n}$

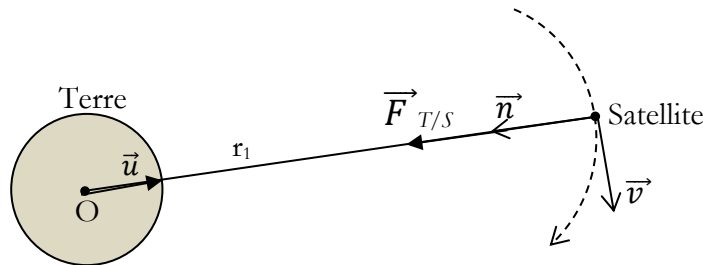
Appliquons le théorème du centre d'inertie dans le référentiel géocentrique.

$$\vec{F}_{\text{Terre/satellite}} = G \frac{M_T m}{r_1^2} \vec{n} = m \cdot \vec{a} = m \cdot r \cdot \omega^2 \vec{n} = m \cdot \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

- Expression vectorielle de l'accélération  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = G \frac{M_T}{r_1^2} \vec{n}$

- La vitesse angulaire est :  $\omega^2 = G \frac{M_T}{r_1^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{G \frac{M_T}{r_1^3}}$

Donc  $\vec{a}_T = \vec{0}$  ;  $\frac{dv}{dt} = 0$  ;  $v = \text{constante}$  : le mouvement du satellite est uniforme



2) Détermination de la vitesse  $v$  du satellite

$$\vec{a} = \vec{a}_n; \frac{GM_T}{r_1^2} = \frac{v^2}{r_1}; v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}} \text{ or } g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}. \text{ Donc } v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2}{r_1}}$$

$$\text{D'où } v = R_T \sqrt{\frac{g_0}{r_1}}; \text{ A.N : } v = 6\,370\,000 \times \sqrt{\frac{9,8}{25\,000\,000}} = 4\,000 \text{ m.s}^{-1}$$

3) La période  $T$  du mouvement du satellite

$$T = \frac{2\pi r_1}{v}; \text{ A.N : } T = \frac{2\pi \times 25\,000\,000}{4000} = 39\,269 \text{ s}$$

4) Détermination du rayon  $r_1'$  de l'orbite du satellite pour qu'il soit géostationnaire.

Le satellite est géostationnaire si sa période et sa vitesse sont égales à celles de la Terre.

$$\frac{r_1'^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}; r_1' = \sqrt[3]{\frac{GM_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{R_T^2} \times \frac{R_T^2 \times T^2}{4\pi^2}}$$

$$r_1' = \sqrt[3]{g_0 \times \frac{R_T^2 \times T^2}{4\pi^2}}; \text{ AN: } r_1' = \sqrt[3]{9,8 \times \frac{(6\,370\,000 \times 86\,164)^2}{4\pi^2}} = 42\,430\,728 \text{ m}$$

$$r_1' = 42\,431 \text{ km.}$$

### Exercice 5 (application 3<sup>ème</sup> loi de Kepler)

La lune tourne autour de la terre en 27,32 jours suivant une orbite circulaire de rayon

$$r_L = 3,84.10^5 \text{ km.}$$

La Terre de rayon  $R_T = 6370 \text{ km}$  décrit autour du Soleil en 365,25 jours une orbite considérée comme circulaire de rayon  $r_T = 1,496.10^8 \text{ km}$ .

La valeur du poids d'un objet de masse  $m = 1 \text{ kg}$ , placé en l'un des pôles de la Terre est  $P = 9,83 \text{ N}$ .

1) Détermine le rapport de la masse  $M_S$  du Soleil et celle  $M_T$  de la Terre.

2) Établis l'expression de la masse  $M_T$  de la Terre en fonction de  $G$ ,  $m$ ,  $P$  et  $R_T$ .

3) Détermine la masse  $M_S$  du Soleil.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) Détermination du rapport de la masse du Soleil et celle de la Terre.

En utilisant la troisième loi de KEPLER, on obtient :  $\frac{r_L^3}{T_L^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$  et  $\frac{r_T^3}{T_T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$  soit

$$\frac{M_S}{M_T} = \left(\frac{r_T}{r_L}\right)^3 \times \left(\frac{T_L}{T_T}\right)^2 ; \text{A.N.} : \frac{M_S}{M_T} = \left(\frac{1,496 \cdot 10^8}{3,84 \cdot 10^5}\right)^3 \times \left(\frac{27,32}{365,25}\right)^2$$

$$\frac{M_S}{M_T} = 33 \cdot 10^4$$

2) Expression de la masse  $M_T$  de la Terre

On a :  $P = mg_0 = G \frac{GM_T m}{R_T^2}$  , Donc  $M_T = \frac{PR_T^2}{Gm}$

3) Détermination de la masse  $M_S$  du Soleil

$$M_S = 33 \cdot 10^4 M_T ; M_S = 33 \cdot 10^4 \times \frac{PR_T^2}{Gm} ; \text{A.N.} : M_S = 33 \cdot 10^4 \times \frac{9,83 \times (6370 \ 000)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 1}$$

$$M_S = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

**Exercice 6 (Interrogation écrite)**

Des élèves d’une classe de Terminale C découvrent dans une revue scientifique l’importance des satellites. Pour approfondir leurs connaissances sur un satellite artificiel qui décrit une orbite circulaire de même centre que la Terre, dans un référentiel géocentrique, il sollicite ton aide. On donne  $R_T = 6370 \text{ km}$  ;  $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ , vitesse angulaire  $\omega = 8,055 \cdot 10^{-4} \text{ rad.s}^{-1}$ .

- 1- Précise la nature et les caractéristiques de la force responsable du mouvement.
- 2- Calcule :
  - 2.1- l’altitude à laquelle évolue le satellite ;
  - 2.2- sa vitesse linéaire ;
  - 2.3- l’intensité du champ gravitationnel à l’altitude considéré.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1- Nature et caractéristiques de la force

Nature : c’est une force d’attraction

- point d’application : centre d’inertie du satellite ;
- Direction : la droite reliant le centre d’inertie de la terre à celui du satellite ;
- Sens : orienté vers le centre d’inertie de la terre ;
- Intensité :  $F = G \cdot \frac{m_S \cdot M_T}{r^2}$

2-

2.1- altitude

$$\omega = \frac{v}{r} \text{ avec } v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} \text{ et } r = R_T + h \text{ or } G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2$$

on obtient  $\omega = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r^3}}$  soit  $\omega = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)^3}}$  ce qui conduit à  $h = \sqrt[3]{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{\omega^3}} - R_T$  ; A.N :  $h = 2,12 \cdot 10^6 \text{ m}$ .

2.2- vitesse linéaire

$$v = r \cdot \omega = (R_T + h) \times \omega ; \text{AN} : v = 6,84 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

2.3- intensité du champ  $g_h$

$$g_h = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \text{ avec } G \cdot M_T = g_0 \cdot R_T^2 ; \text{on obtient} : g_h = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{(R_T + h)^2} ; \text{A.N} : g_h = 5,52 \text{ m.s}^{-2}$$

**Exercice 7** (Application 3<sup>ème</sup> loi de Kepler)

Le tableau ci-dessous indique la période de révolution ainsi que le rayon des trajectoires des cinq satellites d'Uranus découverts depuis la terre, avant 1950.

**Données :**  $G = 6,67.10^{-11}$  S.I et le tableau suivant.

Satellite	T(s)	R(km)
Miranda	$1,22.10^5$	130000
Ariel	$2,17.10^5$	192000
Umbriel	$3,56.10^5$	267000
Titania	$7,5.10^5$	438000
Oberon	$1,16.10^6$	486000

- 1- Vérifie la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler
- 2- Détermine la masse d'Uranus

**Résolution détaillée**

1) Vérification de la troisième loi de Kepler.

Satellite	T(s)	$T^2(s^2)$	r(km)	$r^3(m^3)$	$T^2/r^3(s^2/m^3)$
Miranda	$1,22.10^5$	$1,49.10^{10}$	130000	$2,2.10^{24}$	$6,77.10^{-15}$
Ariel	$2,17.10^5$	$4,71.10^{10}$	192000	$7,1.10^{24}$	$6,77.10^{-15}$
Umbriel	$3,56.10^5$	$12,67.10^{10}$	267000	$19,03.10^{24}$	$6,77.10^{-15}$
Titania	$7,5.10^5$	$56,25.10^{10}$	438000	$84,02.10^{24}$	$6,77.10^{-15}$
Oberon	$1,16.10^6$	$135.10^{10}$	486000	$114,79.10^{24}$	$6,77.10^{-15}$

La troisième loi de Kepler est vérifiée car  $\frac{T^2}{r^3} = cte$

2) Déterminons la masse

3<sup>ème</sup> loi de Kepler est :  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_U} \Rightarrow M_U = \frac{4.\pi^2}{k.G}$  ; A.N :  $M_U = \frac{4 \times \pi^2}{6,77.10^{-15} \times 6,67.10^{-11}} = 8,74.10^{25}$  kg.

**EXERCICE 8**

On se propose de déterminer la masse de Jupiter en étudiant le mouvement de ses principaux satellites : I<sub>0</sub>, Europe, Ganymède et Gallisto. Le mouvement d'un satellite de masse m, est étudié dans un repère ayant son origine au centre de Jupiter. On supposera que Jupiter et ses satellites ont une répartition de masse à symétrie sphérique. Le satellite se déplace à la distance r du centre de Jupiter.

**Données :**  $G = 6,67.10^{-11}$  SI.

- 1- Détermine
  - 1.1- la nature de son mouvement
  - 1.2- l'expression de sa vitesse v en fonction de r, de la masse M de Jupiter et de la constante de gravitation G.
- 2- Dédus l'expression de la période T du satellite et vérifie la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler.
- 3- Les périodes de révolution des principaux satellites de Jupiter ont été déterminés et ont pout valeurs suivantes :

	I <sub>0</sub>	Europe	Ganymède	Gallisto
T(heures)	42,5	85,2	171,7	400,5
r.10 <sup>3</sup> km	422	671	1070	1883

3.1- Représente la courbe  $T^2 = f(r^3)$  et conclus :

**Échelle :** 1 cm  $\leftrightarrow$   $10^{11}$  s<sup>2</sup> et 1 cm  $\leftrightarrow$   $4.10^{26}$  m<sup>3</sup>

3.2- Détermine la masse de Jupiter.

Résolution détaillée

1.1- la nature de son mouvement

Voir cours : le mouvement est circulaire pour  $r = cte$  et uniforme pour  $v = cte$ .

1.2- l'expression de sa vitesse  $v$  en fonction de  $r$ , de la masse  $M$  de Jupiter et de la constante de gravitation  $G$ .

$$v = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

2- Dédus l'expression de la période  $T$  du satellite :  $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M}}$

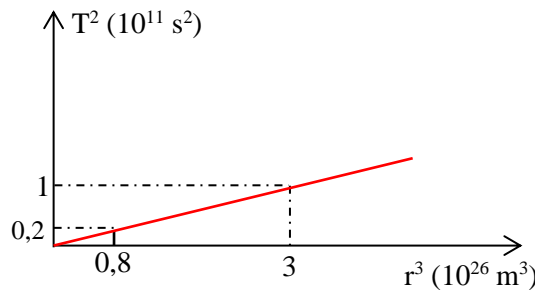
et vérifions la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler :  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_U} = Cte.$

3-

3.1- Représente la courbe  $T^2 = f(r^3)$

	I <sub>0</sub>	Europe	Ganymède	Gallisto
T(heures)	42,5	85,2	171,7	400,5
T <sup>2</sup> (s <sup>2</sup> )	0,23.10 <sup>11</sup>	0,94.10 <sup>11</sup>	3,82.10 <sup>11</sup>	20,8.10 <sup>11</sup>
r.10 <sup>3</sup> km	422	671	1070	1883
r <sup>3</sup> (m <sup>3</sup> )	0,75.10 <sup>26</sup>	3.10 <sup>26</sup>	12,3.10 <sup>26</sup>	66,8.10 <sup>26</sup>

**Échelle :** 1 cm  $\leftrightarrow$   $10^{11}$  s<sup>2</sup> et 1 cm  $\leftrightarrow$   $10^{26}$  m<sup>3</sup>



Je conclus :

La courbe  $T^2 = f(r^3)$  est une droite passant par l'origine des axes donc  $\frac{T^2}{r^3} = cste = k$

3.2- Déterminons la masse de Jupiter.

$$k = \frac{\Delta T^2}{\Delta r^3} = \frac{(20,8-0,94).10^{11}}{(66,8-3).10^{26}} = \frac{19,86.10^{11}}{63,8.10^{26}} = 3,11.10^{-16} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

$$3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler est : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M_J} \Rightarrow M_J = \frac{4.\pi^2}{k.G} ; \text{A.N : } M_U = \frac{4.\pi^2}{3,11.10^{-16} \times 6,67.10^{-11}} = 1,9.10^{27} \text{ kg.}$$

## PRINCIPALES DONNÉES SUR LE SYSTÈME SOLAIRE

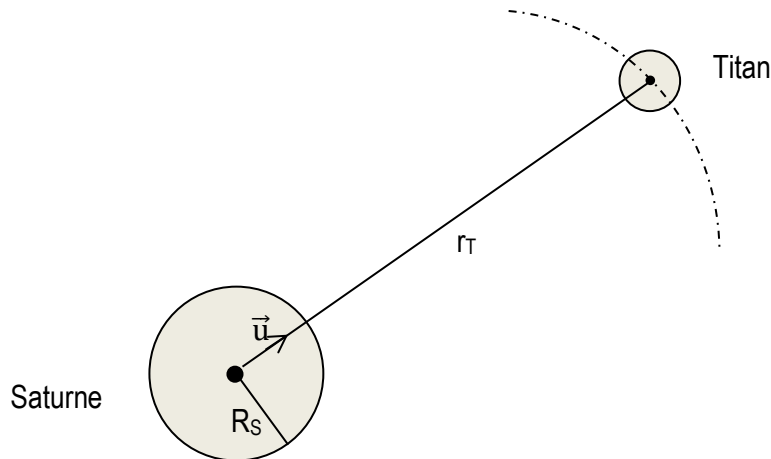
Corps	rayon moyen (m)	masse (kg)	période de rotation propre (s)	rayon moyen de l'orbite (m)	période du mouvement orbital (s)
Soleil	$6,96.10^8$	$1,98.10^{30}$	$2,3.10^6$	-	-
Mercure	$2,34.10^6$	$3,28.10^{23}$	$5,03.10^6$	$5,79.10^{10}$	$7,60.10^6$
Venus	$6,26.10^6$	$4,83.10^{24}$	$2,1.10^7$	$1,08.10^{11}$	$1,94.10^7$
Terre	$6,37.10^6$	$5,98.10^{24}$	$8,62.10^4$	$1,49.10^{11}$	$3,16.10^7$
Mars	$3,32.10^6$	$6,40.10^{23}$	$8,86.10^4$	$2,28.10^{11}$	$5,94.10^7$
Jupiter	$6,98.10^7$	$1,90.10^{27}$	$3,54.10^4$	$7,78.10^{11}$	$3,74.10^8$
Saturne	$5,82.10^7$	$5,68.10^{26}$	$3,61.10^4$	$1,43.10^{12}$	$9,30.10^8$
Uranus	$2,37.10^7$	$8,67.10^{25}$	$3,85.10^4$	$2,87.10^{12}$	$2,66.10^9$
Neptune	$2,24.10^7$	$1,05.10^{26}$	$5,69.10^4$	$4,50.10^{12}$	$5,20.10^9$
Pluton	$2,93.10^6$	$5,37.10^{24}$	$5,52.10^5$	$5,91.10^{12}$	$7,82.10^9$
Lune	$1,74.10^6$	$7,34.10^{22}$	$2,36.10^6$	$3,84.10^8$	$2,36.10^6$

**BACCALAURÉAT SESSION 2013 – Série C**

**EXERCICE**

Le 15 octobre 1997, le véhicule spatial CASSINI emportait à son bord la sonde HUYGENS destinée à l'exploration des anneaux de Saturne. Titan, le plus gros satellite de Saturne, a été découvert en 1655. On étudie le mouvement supposé circulaire de Titan dans le référentiel centré sur Saturne et dont les trois axes sont dirigés vers trois étoiles lointaines supposées fixes.

On notera  $M_S$  la masse de Saturne et  $M_T$  la masse de Titan.



**Données :**

- Constante de gravitation universelle :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  S.I
- Rayon de l'orbite de Rhéa  $r_R = 527070$  Km
- Période de révolution de Rhéa autour de Saturne  $T_R = 4,518$  jours soit 390355 s.
- Rayon de l'orbite de Dioné  $r_D = 377400$  Km
- Période de révolution de Dioné autour de Saturne  $T_R = 2,737$  jours soit 236477 s.

1- Reproduis le schéma ci-dessus et y représente qualitativement la force gravitationnelle  $\vec{F}$  qui agit sur Titan.

2- Donne l'expression vectorielle de cette force et du champ de gravitation.

3- Établis l'expression du vecteur-accélération du centre d'inertie de Titan sur son orbite et représente-le qualitativement sur le schéma précédent.

4- Montre que le mouvement de Titan sur son orbite est uniforme.

5- Établis en fonction de  $G$ ,  $M_S$ , et  $r_T$  :

5.1 l'expression de la vitesse  $v_T$  du centre d'inertie de Titan et celle de la vitesse angulaire  $\omega_T$ .

5.2 l'expression de la période de révolution  $T_T$  de Titan autour de Saturne.

6- Montre qu'au cours de sa révolution autour de Saturne :

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = K = \text{constante (3}^{\text{e}} \text{ loi de Kepler)}$$

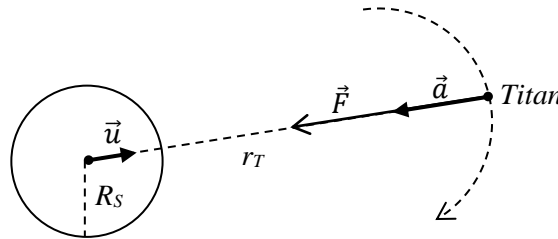
7- En fait Saturne possède un cortège de satellites dont au moins 60 ont été identifiés à ce jour. Parmi eux, figurent Rhéa et Dioné découverts par Jean-Dominique Cassini respectivement en 1672 et 1684.

7.1 Montre que ces deux satellites vérifient la 3<sup>e</sup> loi de Kepler.

7.2 Déduis la masse  $M_S$  de Saturne.

RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1- Reproduis le schéma et représentons qualitativement la force gravitationnelle  $\vec{F}$  qui agit sur Titan.



2- Donnons l'expression vectorielle de cette force.

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M_S \times m_T}{r_T^2} \vec{u} = m_T \times \vec{a}$$

3- Établissons l'expression du vecteur-accélération du centre d'inertie de Titan sur son orbite et représentons-le.

$$\vec{F} = m_T \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_T} = -G \cdot \frac{M_S}{r_T^2} \vec{u} \text{ et voir le schéma pour le vecteur } \vec{a}$$

4- Montrons que le mouvement de Titan sur son orbite est uniforme.

$$m_T \times \vec{a} = m_T \times \vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Dans la base de Frenet (M,  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{n}$ )

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \text{ et } \frac{dE_C}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot \left( \frac{dv^2}{dt} \right) = m \cdot \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{v} \cdot \vec{a} \text{ et comme } (\vec{a} \perp \vec{v}) \text{ donc } \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\frac{dE_C}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte alors le mouvement est uniforme.}$$

ou

$$\text{Autre méthode : } \mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{W(\vec{F})}{\Delta t} = 0 \text{ car } \vec{F}_m \perp \vec{v}_0 \Rightarrow W(\vec{F}) = \Delta E_C = 0$$

$\Rightarrow \Delta E_C = 0 \Rightarrow v = \text{cste} = v_0$  donc **Le mouvement est donc uniforme.**

5.1- Établissons l'expression de la vitesse  $V_T$  du centre d'inertie de Titan,

$$a_n = \mathcal{G} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \mathcal{G} \cdot r \Rightarrow v = \sqrt{\mathcal{G} \cdot r} \text{ or } \mathcal{G} = \frac{G \cdot M}{r^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_S}{r_T}$$

5.2- Établissons l'expression de la période de révolution  $T_T$  de Titan autour de Saturne.

$$T = \frac{2\pi r}{v} \text{ or } v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{G \cdot M}{r}} = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot M} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r_T^3}{G \cdot M_S}}$$

6- Montre qu'au cours de sa révolution autour de Saturne :  $\frac{T_T^2}{r_T^3} = K = \text{constante}$  (3<sup>e</sup> loi de Kepler)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r_T^3}{G \cdot M_S}} \Rightarrow T^2 = (2\pi)^2 \times \left( \sqrt{\frac{r_T^3}{G \cdot M_S}} \right)^2 \Rightarrow 4 \cdot \pi^2 \times \left( \frac{r_T^3}{G \cdot M_S} \right) \text{ soit } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_S} \text{ et comme } G \text{ et } M_S$$

sont des constantes donc  $\frac{T_T^2}{r_T^3} = \text{constante}$ .

7.1 Montrons que ces deux satellites vérifient la 3<sup>e</sup> loi de Kepler.

Calculons les rapports  $\frac{T_T^2}{r_T^3}$  et  $\frac{T_D^2}{r_D^3}$

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{(390355)^2}{(527070 \cdot 10^3)^3} = 1,041 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3} \text{ et } \frac{T_D^2}{r_D^3} = \frac{(236477)^2}{(377400 \cdot 10^3)^3} = 1,041 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2 \cdot \text{m}^{-3}$$

7.2 Déduisons la masse  $M_S$  de Saturne.

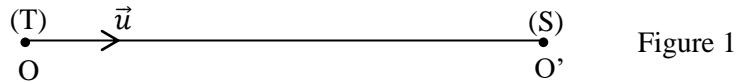
$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_S} \text{ ou } \frac{T_D^2}{r_D^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_S} \Rightarrow M_S = \frac{4 \cdot \pi^2 \times r_D^3}{G \times T_D^2} = \frac{4 \cdot \pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \times \frac{1}{1,041 \cdot 10^{-15}} = 5,68 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

**BACCALAURÉAT SESSION 2015 – Série C**

**EXERCICE**

Le mouvement d'un satellite (S) de masse  $m_s$  est étudié dans le référentiel géocentrique considéré galiléen. La Terre est assimilée à une sphère homogène de masse  $M_T$ , de rayon  $R_T$  et de centre O. La période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles est notée  $T_T$ . Le satellite (S) est assimilable à un point matériel O' se déplaçant d'un mouvement uniforme sur une trajectoire circulaire de rayon  $r = R_T + h$ , h étant l'altitude du satellite.

**Données :**  $M_T = 6.10^{24} \text{ kg}$  ;  $R_T = 6380 \text{ km}$  ;  $G = 6,67.10^{-11} \text{ SI}$  ;  $T_T = 86164 \text{ s}$ .



1-

1.1 Donne l'expression de la valeur F de la force gravitationnelle  $\vec{F}$  exercée par la Terre sur le satellite en fonction de  $m_s$ ,  $M_T$ ,  $R_T$ , h et G (constante universelle de gravitation).

1.2 Exprime le vecteur force  $\vec{F}$  en fonction du vecteur unitaire  $\vec{u}$ .

2- Reproduis la figure 2 et représente qualitativement :

2.1 le vecteur force  $\vec{F}$  au point O' ;

2.2 les vecteurs vitesses et accélérations aux points A et B de la trajectoire (figure 2).

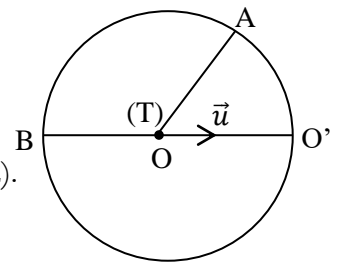


Figure 2

3-

3.1 Établis l'expression de la vitesse  $v_S$  du satellite en fonction de  $M_T$  ;  $R_T$  ; h et G.

3.2 Exprime la vitesse du satellite en fonction de sa période de révolution T et

montrer que le rapport  $\frac{T^2}{(R_T + h)^3}$  est constant.

4- Le satellite est géostationnaire.

4.1 Donne le nom du plan dans lequel se trouve la trajectoire de ce satellite.

4.2 Calcule son altitude h et la vitesse v avec laquelle il parcourt sa trajectoire.

4.3 La lune est un satellite de la Terre. Soit O'' son centre d'inertie. Sa période de révolution autour de la terre est :  $T_L = 27 \text{ j } 07 \text{ h } 43 \text{ min}$ .

Calcule la distance D séparant les centres d'inertie de la Terre et de la Lune, en utilisant le résultat de la question 3.2.

5- On admet que  $D = 3,84.10^5 \text{ km}$  et on donne  $M_L = 7,34.10^{22} \text{ kg}$ .

On place entre ces deux astres à une distance d par rapport au centre de la Terre, un satellite S' de masse m'au point I (figure 3).

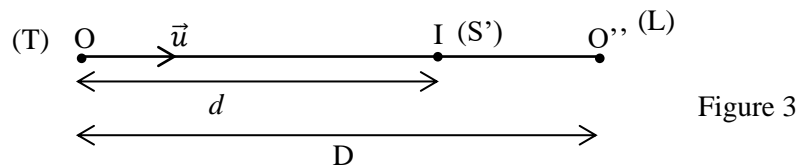


Figure 3

On supposera que les centres d'inerties de la Terre, de la Lune et du satellite S' sont alignés.

5.1 Exprime les valeurs  $F_1$  et  $F_2$  des forces respectivement exercées par la Terre et par la Lune sur S', en fonction de G,  $M_T$ ,  $M_L$ , d et D.

5.2 Calcule d si  $F_2 = F_1$ .

**BACCALAURÉAT SESSION 2018 – Série C**

**EXERCICE**

Un satellite artificiel gravite à la vitesse constante  $v$  sur une orbite circulaire dans le plan équatorial de la Terre à l'altitude  $h$ . Sa période de révolution est  $T$  et sa masse est  $m$ .

La Terre est assimilée à une sphère homogène de centre  $O$ , de rayon  $R = 6378$  km et de masse  $M$ .

Le satellite est aminé d'un mouvement circulaire et uniforme dans le référentiel géocentrique.

- 1) Donne l'expression de la valeur  $f$  de la force  $\vec{f}$  exercée par la Terre sur le satellite en fonction de  $m$ ,  $M$ ,  $R$ ,  $G$  et  $h$ .
- 2) Dédus de ce qui précède, l'accélération  $g$  de la pesanteur à partir de la loi d'attraction gravitationnelle en fonction de  $M$ ,  $R$ ,  $G$  et  $h$ .
- 3) Exprime  $g$  en fonction de  $g_0$ ,  $R$  et  $h$  ( $g_0$  est la valeur de  $g$  au sol et  $G$  la constante de gravitation universelle).
- 4) Le poids du satellite au sol est  $P_0$ .
  - 4-1) Exprime le poids  $P$  en altitude en fonction de  $P_0$ ,  $R$  et  $h$ .
  - 4-2) Calcule  $P$ .

Données :  $h = 600$  km ;  $P_0 = 470,4$  N.

- 5) Le satellite en mouvement circulaire et uniforme a pour période de révolution  $T$ .

5.1- Démontre que sa vitesse linéaire a pour expression  $v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$ .

5.2- Établis la relation  $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R^2}$  (3<sup>ème</sup> loi de Kepler).

5.3- Dédus de la question 5.2, l'expression de  $T_0$  en fonction de  $R$  et  $g_0$ .  
( $T_0$  est la période d'un satellite fictif qui graviterait à l'altitude  $h = 0$ ).

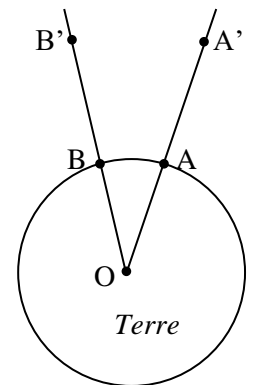
5.4- Calcule les valeurs de  $g_0$ ,  $m$  et  $g$ .

Donnée :  $T_0 = 5066$  s.

5.5- Exprime  $T$  en fonction de  $T_0$ ,  $R$  et  $h$ .

5.6- Calcule la période  $T$ .

- 6) Le plan de l'orbite du satellite passe par deux villes  $A$  et  $B$ . Ces deux villes situées sur l'équateur sont distantes de  $\widehat{AB} = 851,5$  km. Le satellite passe par les points  $A'$  et  $B'$ . (voir figure ci-dessus). On néglige la rotation de la Terre.



6.1- Détermine la distance  $\widehat{A'B'}$  en kilomètre, parcourue par le satellite en passant au-dessus des deux villes.

6.2- Calcule la durée  $\Delta t$  en seconde, du survol du satellite de la ville  $A$  à la ville  $B$ .

On donne la valeur de sa vitesse  $v = 7562,3$  m.s<sup>-1</sup>.

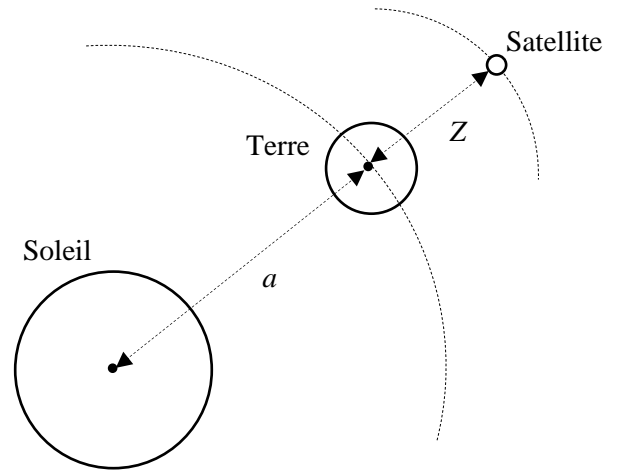
**BACCALAURÉAT SESSION 2022 – Série C**

**EXERCICE**

Dans le but de vérifier les lois de la gravitation, votre professeur met à votre disposition les données ci-dessous relatives au mouvement d'un satellite géostationnaire autour de la terre, et au mouvement de la Terre elle-même autour du Soleil (voir figure).

Données :

- $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI, la constante de gravitation universelle ;
- $g_0 = 9,8$  N/kg, l'intensité de la pesanteur ;
- $T = 86\,400$ s, la période de rotation de la Terre ;
- $R = 6\,400$  km, le rayon de la Terre ;
- $Z = 36\,000$  km, l'altitude à laquelle se trouve le satellite au dessus de la Terre ;
- $T_s = 365$  jours, la période de révolution de la Terre autour du Soleil ;
- $a = 1,5 \cdot 10^8$  km, la distance Terre-Soleil.



1. Définis un satellite géostationnaire.
2. Écris l'expression :
  - 2.1 de l'intensité de la force gravitationnelle exercée par la Terre sur un satellite de masse  $m$  situé à l'altitude  $Z$ , en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$ ,  $R$  et  $Z$  ;
  - 2.2 de l'intensité du champ gravitationnel terrestre  $g$  à l'altitude  $Z$  ;
  - 2.3 de l'intensité du champ gravitationnel terrestre  $g_0$  à la surface de la Terre ;
  - 2.4 de  $g$  en fonction de  $g_0$ .
3. Montre que :
  - 3.1 le mouvement du satellite est circulaire et uniforme ;
  - 3.2 la période  $T$  du satellite à l'altitude  $Z$  est

$$T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g_0}} (R+Z)^{3/2}.$$

- 4 Dédus de ce qui précède :
  - 4.1 la troisième loi de Kepler ;
  - 4.2 la masse de la Terre et celle du Soleil.

**RESOLUTION DETAILLEE**

1. Un satellite géostationnaire est un engin spatial qui tourne autour de la Terre avec la même période que celle de la Terre. **Ou** (Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît immobile par rapport à un observateur terrestre). **→ 0,5 pt**

2.1) L'expression de l'intensité de la force gravitationnelle

$$F = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{(R+Z)^2} \quad \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

2.2) l'expression de l'intensité du champ gravitationnel terrestre  $g$  à l'altitude  $Z$  ;

$$g = G \cdot \frac{M_T}{(R+Z)^2} \quad \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

2.3) l'expression de l'intensité du champ gravitationnel terrestre  $g_0$  à la surface de la Terre ;

$$g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R^2} \quad \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

2.4) l'expression de g en fonction de  $g_0$ .

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+z)^2} \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

3.1) Montrons que le mouvement du satellite est circulaire et uniforme ;

Système : Satellite de masse m

Référentiel géocentrique supposé galiléen

Bilan des forces : force gravitationnelle  $\vec{F}$   $\rightarrow 0,25 \text{ pt}$

Appliquons le théorème du centre d'inertie :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau = \frac{\vec{F}}{m}$

$\vec{F}$  est centripète, l'accélération est centripète. :  $\vec{a} \perp \vec{v}$  à chaque instant : le mouvement est uniforme.

$$\vec{a} = \vec{a}_n \Rightarrow a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte.} : \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

Le mouvement du satellite est donc circulaire et uniforme. de rayon  $R+z$ .  $\rightarrow 0,5 \text{ pt}$

3.2) la période T du satellite à l'altitude z est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \cdot (R+z)}{v} \text{ or } a = a_n = \frac{v^2}{R+z} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

$$\text{or } v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R+z}} \text{ or } G \cdot M = g_0 \cdot R \cdot T^2 \Rightarrow v = R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R+z}} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

$$\text{d'où } (T = \frac{2\pi \cdot (R+z)}{v} \text{ et } v = R \cdot \sqrt{\frac{g_0}{R+z}}) \Rightarrow T = \frac{2\pi \cdot (R+z)}{R \cdot \sqrt{g_0}} \times \sqrt{R+z}$$

$$T = \frac{2\pi}{R \cdot \sqrt{g_0}} \sqrt{(R+z)^3} = \frac{2\pi}{R \cdot \sqrt{g_0}} \cdot (R+z)^{3/2} \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

4.1) Déduisons la troisième loi de Kepler ;

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2}{R^2 \cdot g_0} \cdot (R+z)^3 \Rightarrow \frac{T^2}{(R+z)^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{R^2 \cdot g_0} = \text{cte car } (4 \cdot \pi^2, R^2, g_0 \text{ sont constants}) \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

4.2) Déduisons la masse de la Terre et celle du Soleil.

$$\frac{T^2}{(R+z)^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{R^2 \cdot g_0} \text{ or } g_0 \cdot R^2 = G \cdot M \Rightarrow \frac{T^2}{(R+z)^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

• Pour la terre :  $M_T = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{T^2 \cdot G}$  avec  $r = R+z \rightarrow 0,25 \text{ pt}$

$$M_T = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (6,4 \cdot 10^6 + 3,6 \cdot 10^7)^3}{(86400)^2 \times 6,67 \cdot 10^{-11}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

• Pour le Soleil :  $M_S = \frac{4 \cdot \pi \cdot a^3}{T^2 \cdot G}$  avec  $r = a \rightarrow 0,25 \text{ pt}$

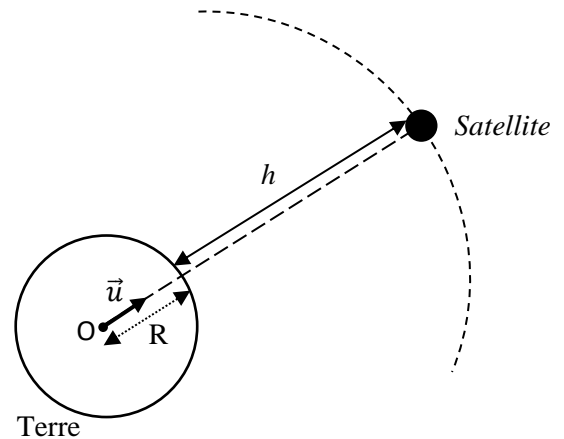
$$M_T = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^3}{(365 \times 24 \times 3600)^2 \times 6,67 \cdot 10^{-11}} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \rightarrow 0,25 \text{ pt}$$

**BACCALAURÉAT SESSION 2024 – Série C**

**EXERCICE**

Dans le but de vérifier vos acquis, votre professeur de Physique-Chimie vous demande d'étudier le mouvement du satellite géostationnaire nommé RASCOM autour de la Terre. Ce satellite (S), supposé ponctuel, de masse  $m$ , décrit autour de la Terre, une trajectoire circulaire centrée sur O, à une altitude  $h$  de la surface de la Terre, comme l'indique la figure ci-contre.

La Terre est assimilée à un corps à répartition sphérique de masse, de centre O, de masse  $M$  et de rayon  $R$



**Données :**

- $M = 6.10^{24}$  kg ;
- $R = 6\,380$  km ;
- $G = 6,67.10^{-11}$  S.I. est la constante de gravitation universelle ;
- $T = 86\,400$  s est la période de rotation de la Terre.

Le professeur vous demande de déterminer l'altitude  $h$  à laquelle se situe le satellite.

1. Donne :
  - 1.1. le référentiel d'étude du satellite ;
  - 1.2. la définition d'un satellite géostationnaire ;
  - 1.3. l'expression de la force exercée par la Terre sur le satellite ;
  - 1.4. l'expression du vecteur champ de gravitation terrestre.
2. Montre que le mouvement du satellite est uniforme.
3. Établis l'expression de :
  - 3.1. la vitesse linéaire  $v$  du satellite ;
  - 3.2. la vitesse angulaire  $\omega$  du satellite ;
  - 3.3. la période  $T_s$  du satellite.
4. Détermine l'altitude  $h$  à laquelle se situe le satellite.

**RESOLUTION DETAILLEE**

- 1.1. le référentiel d'étude du satellite : le référentiel géocentrique → **0,25 pt**
- 1.2. C'est un satellite qui tourne à la même vitesse angulaire et dans le même sens que la Terre dans le plan équatorial. → **0,5 pt**
- 1.3. l'expression de la force exercée par la Terre sur le satellite

$$\vec{F} = - G \cdot \frac{M \cdot m}{(R+h)^2} \cdot \vec{u} \rightarrow \mathbf{0,5\ pt}$$

- 1.4. l'expression du vecteur champ de gravitation terrestre.

$$\vec{F} = - m \cdot \vec{g} \Rightarrow \vec{g} = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \cdot \vec{u} \rightarrow \mathbf{0,5\ pt}$$

2. Montre que le mouvement du satellite est uniforme.

Système : le satellite

Référentiel : géocentrique supposé Galiléen

Force : la force de gravitation

Théorème du centre d'inertie :  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  d'où  $\vec{a} = - G \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \cdot \vec{u}$

Le vecteur accélération  $\vec{a}$  est centripète :  $a_r = 0$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}, \text{ le mouvement du satellite est uniforme. } \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

3.1. la vitesse linéaire  $v$  du satellite :

$$a = a_n = \frac{G.M}{(R+h)^2} = \frac{v^2}{(R+h)} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{R+h}} \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

3.2. la vitesse angulaire  $\omega$  du satellite ;

$$v = (R+h).\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R+h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{G.M}{(R+h)^3}} \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

3.3. la période  $T_s$  du satellite.

$$T_s = \frac{2.\pi}{\omega} \Rightarrow T_s = 2\pi. \sqrt{\frac{(R+h)^3}{G.M}} \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

4. Détermine l'altitude  $h$  à laquelle se situe le satellite

$$T_s^2 = 4.\pi^2. \frac{(R+h)^3}{G.M} \Rightarrow R+h = \sqrt[3]{\frac{T_s^2.G.M}{4.\pi^2}} \text{ d'où } h = \sqrt[3]{\frac{T_s^2.G.M}{4.\pi^2}} - R \rightarrow 0,75 \text{ pt}$$

**Satellite géostationnaire  $T_s = T$**

$$h = \sqrt[3]{\frac{(86.400)^2 \times 6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}}{4.\pi^2}} - 6.380.000 = 35.725.855 \text{ m} \approx 36.000 \text{ km. } \rightarrow 0,5 \text{ pt}$$

## LEÇON 4 : MOUVEMENTS DANS LES CHAMPS ( $\vec{g}$ et $\vec{E}$ ) UNIFORMES

**COMPÉTENCE 1** : TRAITER UNE SITUATION SE RAPPORTANT À LA MÉCANIQUE

**THÈME 1** : MECANIQUE

**LEÇON 4** : MOUVEMENT DANS UN CHAMP UNIFORME (8H)

### Exemple de situation

Pour faire découvrir les différentes disciplines, le Lycée Moderne de San Pedro a organisé des journées portes ouvertes auxquelles ont participé les élèves de la TC2.

En EPS, au cours du match de basketball, un élève de cette classe, placé au milieu du terrain, lance la balle et marque un panier.

Au stand de Physique-Chimie, le principe de déviation d'un faisceau d'électrons dans une télévision analogique est expliqué à l'aide du tube de Crookes.

De retour en classe, les élèves de la TC2 veulent approfondir leur connaissance sur les mouvements de la balle de basketball et du faisceau d'électrons.

Ils entreprennent alors de déterminer les équations cartésiennes des trajectoires de la balle et du faisceau d'électrons puis les différentes grandeurs caractéristiques des trajectoires.

HABILETÉS	CONTENUS
Définir	Un champ uniforme
Représenter	1) le vecteur champ électrostatique uniforme 2) le vecteur champ de pesanteur
Déterminer	Le vecteur accélération - dans un champ de pesanteur uniforme ; - dans champ électrostatique uniforme.
Déterminer	1) les équations horaires du mouvement ; 2) l'équation cartésienne de la trajectoire ; 3) les expressions de la : - flèche ; - portée ; - déviation angulaire ; - déflexion électrostatique.
Utiliser	4) les équations horaires des mouvements. 5) l'équation cartésienne de la trajectoire.
Connaître	L'intérêt du champ électrostatique

### INTRODUCTION

C'est un chapitre de dynamique qui présente l'étude du mouvement d'un système matériel (projectile ou particule élémentaire) dans le champ de pesanteur uniforme et dans le champ électrostatique uniforme.

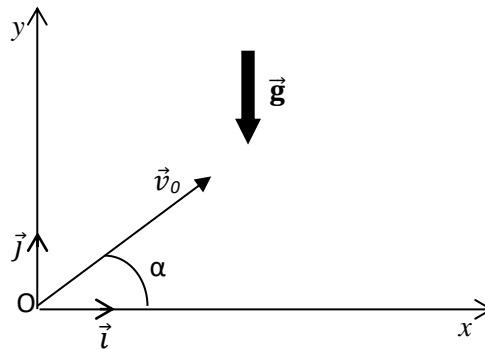
## 1) PROJECTILE LANCE DANS CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

### Problème

Un projectile de masse  $m$  est lancé dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  terrestre, considéré localement comme uniforme. Le vecteur vitesse de lancement  $\vec{v}_0$ , supposé dans le plan vertical, fait un angle de tir  $\alpha$  avec le plan horizontal.

Étudions le mouvement du centre d'inertie  $G$  du projectile.

### 1.1) ETUDE DYNAMIQUE



#### 1.1.1) Systeme

Le projectile de masse  $m$

#### 1.1.2) Référentiel

Référentiel terrestre supposé galiléen lié au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

#### 1.1.3) Bilan des forces extérieures

$\vec{P}$  : Le poids du projectile de masse  $m$

$\vec{F}$  : Les forces de résistances de l'air

#### 1.1.4) Théorème du centre d'inertie

$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$  d'où  $\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  les résistances de l'air étant négligeables alors  $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$

$m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$  finalement  $\vec{g} = \vec{a}$

**Remarque** :  $\vec{a}$  et  $\vec{g}$  ont la même direction et le même sens ; l'accélération  $\vec{g}$  de pesanteur ne dépend pas de la masse du projectile.

### 1.2) ÉTUDE CINÉMATIQUE

#### 1.2.1) Équation horaire du mouvement

$\mathbf{a = g = 9,8 m \cdot s^{-2}}$  est une constante donc le mouvement est uniformément varié. On a alors l'équation horaire : de la position  $\vec{OG}$  du centre d'inertie  $G$  du projectile.

$$\vec{OG} = \frac{1}{2} \vec{g} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{OG}_0 \quad \text{car } \vec{a} = \vec{g}$$

et celle de la vitesse  $\vec{v}_G$  de son centre d'inertie  $G$ ,

$$\vec{v} = \vec{g} \cdot t + \vec{v}_0 \quad \text{car } \vec{a} = \vec{g}$$

$\vec{v}_0$  est la vitesse du projectile à la date  $t = 0s$  ;

$G_0$  est la position du centre d'inertie du projectile à la date  $t = 0s$ .

**Remarque** :

- Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  ont la même direction (la verticale), le mouvement du centre d'inertie  $G$  a lieu suivant la verticale.

- Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  ont des directions différentes, le mouvement du centre d'inertie G se déroule dans le plan vertical contenant  $G_0$ .

• À l'instant initial  $t = 0$  on a :

$$\vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = -g \end{cases} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \overrightarrow{OG_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Remarque : Si le point d'application du vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  de lancement est confondu à celui de l'origine du repère considéré alors ( $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ ) sinon alors ( $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0$ )

• À l'instant  $t \neq 0$  ; l'équation horaire est

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \vec{g}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OG_0}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha . t \quad (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha . t \quad (2) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{g}.t + \vec{v}_0$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ d'où } \overrightarrow{OG} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Le mouvement du projectile se déroule dans le plan perpendiculaire à (oz) donc le plan (xoy) car  $z = 0 = \text{Cste}$ .

### 1.2.2) Équation de la trajectoire

L'équation de la trajectoire s'obtient comme suit :

(1)  $\Rightarrow x = v_0 \cos \alpha . t$  alors  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  et en remplaçant la valeur de t dans z on a ce qui suit :

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x . \tan \alpha \quad \text{pour } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

La trajectoire est une parabole de concavité tournée vers les y négatif.

## 1.3) CARACTERISTIQUES D'UN TIR

### 1.3.1) Portée horizontale

#### a) Définition

La portée horizontale d'un tir est la distance entre le point de lancement du projectile et le point d'impact de ce projectile sur l'horizontale passant par le point de lancement.

#### b) Expression

On considère que le point de lancement  $G_0$  est confondu avec l'origine O du repère dans ce cas  $OP = G_0P = d$ , portée horizontale du tir. P est le point d'impact sur l'horizontale (Ox) = ( $G_0x$ ).

**Coordonnées de P** :  $x_P = d$  ; porté du tir et en P :  $y_P = 0$ .

d'après (3) :  $y_P = 0 \Rightarrow d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

**Durée du tir** : D'après (2),  $z_P = 0 \Rightarrow t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

La portée est maximale pour  $\alpha = 45^\circ$  alors  $d = \frac{v_0^2}{g}$

Pour  $v_0$  fixée et pour la même portée  $X = d$ , il existe deux angles de tir possibles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que :

- $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$  ;
- $\alpha_1 < 45^\circ$  : Tir tendu ;

-  $\alpha_2 > 45^\circ$  : Tir en cloche.

### 1.3.2) Flèche d'un tir

#### a) Définition

La flèche d'un tir est la hauteur maximale  $h$  que le projectile peut atteindre au-dessus de l'horizontale passant par le point de lancement  $G_0$ .

#### b) Expression

En considérant que le point de lancement  $G_0$  est confondu avec l'origine  $O$  du repère alors  $h = y_s$  où  $S$  est le sommet de la trajectoire parabolique.

#### Caractéristiques de S :

Au sommet : la dérivée  $y'(x) = 0 \Rightarrow v_y(S) = 0$  tangente horizontale.

**Durée pour atteindre le sommet S :**  $v_y(S) = 0 \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

En remplaçant  $t_s$  dans  $y(t)$  on obtient l'expression de la flèche :  $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

#### Remarque :

- Flèche maximale  $h = \frac{v_0^2}{2g}$  pour  $\alpha = 90^\circ$  (tir vertical).
- $x_s = x(P) = \frac{1}{2} d \Rightarrow x_s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$  c'est l'abscisse au sommet.

## 1.4) ENERGIE MECANIQUE DU PROJECTILE

### 1.4.1) Expressions des énergies

$$E = E_c + E_{pp}$$

$E$  : Énergie mécanique du projectile

Énergie cinétique du projectile  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Énergie potentielle de pesanteur du projectile :  $E_{pp} = mgz$  ; dans les conditions où  $E_{pp} = 0$  pour  $z = 0$ , l'axe  $(Oz)$  étant orienté vers le haut.

### 1.4.2) Conservation de l'énergie mécanique

Dans le champ de pesanteur uniforme, en l'absence de tout frottement, l'énergie mécanique du projectile se conserve  $E = Cste$ .

Alors  $\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_{pp} = 0 \Rightarrow \Delta E_c = - \Delta E_{pp} = mg(z_1 - z_2)$

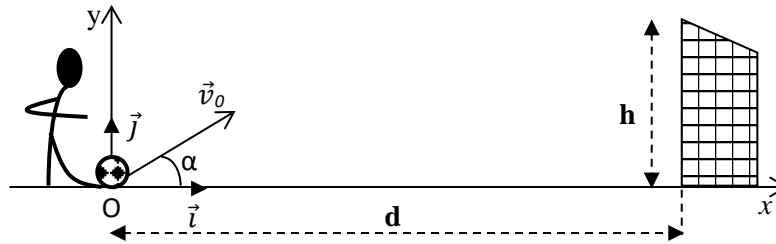
Soit  $\Delta E_c = \mathbf{W}(\vec{P})$  : Expression du théorème de l'énergie cinétique.

## SITUATION D'ÉVALUATION 1 (Mouvement dans un champ uniforme $\vec{g}$ ) Tle D

La finale du tournoi qui oppose le Lycée Moderne Inagohi de San-Pédro au le Lycée Municipal de San-Pédro s'est terminé par un match nul. Pour désigner un vainqueur, on opte pour la séance de tir au but. Tu es désigné pour le tir de la victoire de ton Lycée.

Le ballon est posé sur le sol horizontal à la distance  $d$  du but. A l'instant  $t = 0s$ , tu tires et communique au ballon une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha = 45^\circ$  par rapport à l'horizontal dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Le poteau à une hauteur  $h$  et on suppose que le gardien n'a pas pu intercepter le ballon.

**Données :**  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ;  $d = 6 \text{ m}$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $h = 2,5 \text{ m}$ .



**1) trajectoire**

- 1-1) En utilisant le théorème du centre d'inertie, montre que  $\vec{a} = \vec{g}$ .
- 1-2) Détermine les équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  du mouvement.
- 1-3) Détermine l'équation de la trajectoire en fonction de  $g$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  et fais l'application numérique.

**2) Le lycée ayant remporté le tournoi**

- 2-1) Calcule la portée  $d$  et la flèche  $h$  de ton tir.
- 2-2) Dis si ton tir a permis de remporter le tournoi.

RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

**1) trajectoire**

1.1) Voir cours

1.2) équations horaires

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t & (1) \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t & (2) \end{cases}$$

1.3) équation de la trajectoire

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \cdot \tan \alpha \Rightarrow y = -0,098 x^2 + x$$

**2) Le lycée ayant remporté le tournoi**

2.1) Calcule la portée et la flèche de ton tir.

la portée est :  $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{10^2 \times \sin(2 \times 45)}{9,8} = 10,2 \text{ m}$

la flèche est :  $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{10^2 \times \sin^2(45^\circ)}{2 \times 9,8} = 2,55 \text{ m}$

2.2) Vérifions si le tir a permis de remporter le tournoi

$$h' = -0,098 d^2 + d = -0,098 \times 6^2 + 6 = 2,47 \text{ m}$$

où  $d = v_0 \cos \alpha \cdot t' \Rightarrow t' = \frac{d}{v_0 \cos \alpha} = \frac{6}{10 \times \cos 45^\circ} = 0,85 \text{ s}$

$$h' = -0,5 \times 9,8 \times (0,85)^2 + 10 \times (\sin 45^\circ) \times 0,85 = 2,47 \text{ m}$$

$h' < h$  donc il a marqué le but et à remporter la victoire.

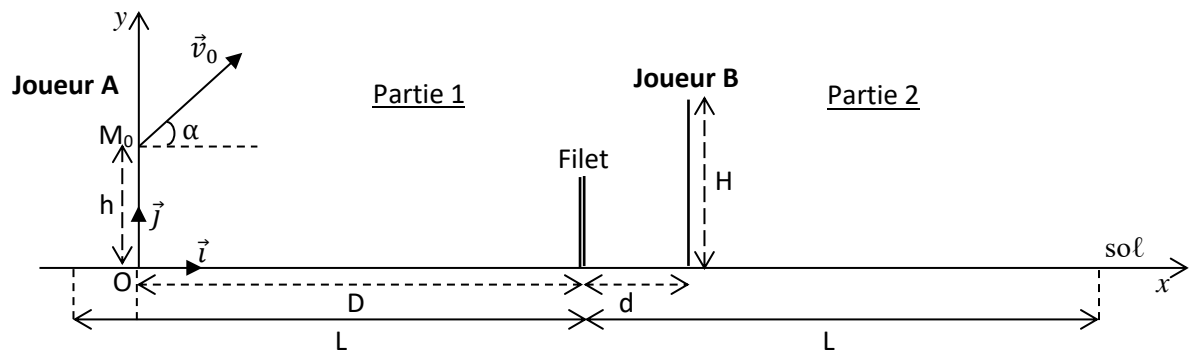
**SITUATION D'ÉVALUATION 2 (Mouvement dans un champ uniforme  $\vec{g}$ ) Tle C**

(Dans tout l'exercice, la balle de tennis sera assimilable à un point matériel. On négligera la résistance de l'air sur la balle et on supposera la surface du jeu parfaitement horizontale.)

Au cours d'un match de tennis, un joueur A situé dans la partie (1) du court, frappe la balle en  $M_0$  à la hauteur  $h$  au-dessus du sol et à la distance  $D$  du filet. La balle part avec une vitesse  $\vec{v}_0$  inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale dans le plan perpendiculaire au filet. Il souhaite faire passer la balle

au dessus de son adversaire (joueur B) situé à une distance  $d$  derrière le filet dans la partie (2).  
L'adversaire immobile, tient sa raquette à bout de bras. Elle atteint la hauteur maximale  $H$  par rapport au sol.

**Données :**  $h = 0,5 \text{ m}$  ;  $H = 2,5 \text{ m}$  ;  $d = 2 \text{ m}$  ;  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $D = 9 \text{ m}$  ;  $v_0 = 12 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $\alpha = 60^\circ$  ;  
 $L = 12 \text{ m}$ .



- 1- Établir l'équation de la trajectoire de la balle après le choc avec la raquette.
- 2- Montre que :
  - 2.1- son adversaire B n'intercepte pas la balle ;
  - 2.2- la balle retombe dans l'air de jeu.
- 3- Détermine :
  - 3.1- la date  $t_B$  de passage de la balle au-dessus de la raquette.
  - 3.2- par deux méthodes différentes la vitesse de la balle au point de chute P.

**Résolution**

- 1- Établir l'équation de la trajectoire de la balle après le choc avec la raquette.

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha \cdot t) \text{ et } y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t + h$$

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha + h ; \text{ A.N : } y(x) = -0,14x^2 + 1,73x + 0,5$$

- 2.1 Montrons que son adversaire B n'intercepte pas la balle ;

Au point d'abscisse  $x_B = D + d = 11 \text{ m}$

Ordonnée de la balle :  $Y = -0,14 \times (11)^2 + 1,73 \times 11 + 0,5 = 2,59 \text{ m} > H = 2,5 \text{ m}$  donc il ne peut intercepter la balle.

- 2.2- Montrons que la balle retombe dans l'air de jeu.

Au point de chute P de la balle,  $y_P = 0$

$$-0,14x^2 + 1,73x + 0,5 = 0 \Rightarrow \Delta = 3,2729 \text{ et } \sqrt{\Delta} = 1,81$$

$$x_1 = (-1,73 - 1,81) / (-2 \times 0,14) = 12,64 \text{ m et } x_2 < 0.$$

$x_P < D + L = 21 \text{ m}$  donc la balle retombe dans la surface de jeu.

- 3.1- Déterminons la date  $t_B$  de passage de la balle au-dessus de la raquette.

Lorsque la balle passe au-dessus de la raquette :  $x = D + d$

$$t_B = \frac{D+d}{v_0 \cos \alpha} ; \text{ A.N : } t_B = 1,83 \text{ s}$$

- 3.2- Déterminons par deux méthodes différentes la vitesse de la balle au point de chute P.

**1<sup>ère</sup> méthode :**

$$v_P = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h} = 12,41 \text{ m.s}^{-1}.$$

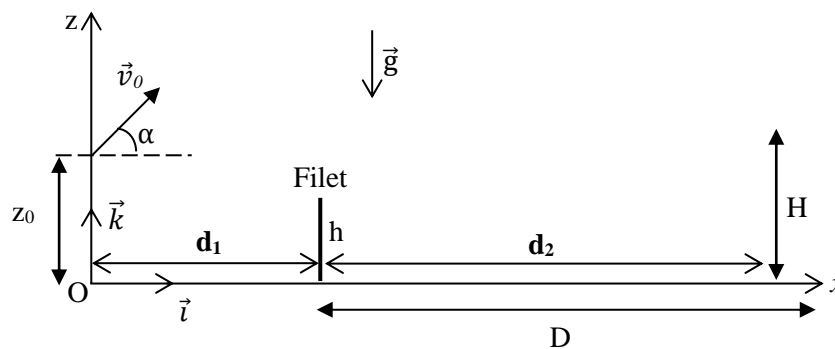
**2<sup>ème</sup> méthode :**

$$t_B = \frac{x_p}{v_0 \cos \alpha} = 2,11 \text{ s} \text{ or } \vec{v}_p \begin{cases} v_{px} = v_0 \cos \alpha = 6 \text{ m.s}^{-1} \\ v_{py} = -g \cdot t_p + v_0 \sin \alpha = -10 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \text{ et } v_p = \sqrt{v_{px}^2 + v_{py}^2}$$

$$v_p = 12,30 \text{ m.s}^{-1}$$

**SITUATION D'ÉVALUATION 03**

Votre classe assiste à un match de tennis. Au cours du jeu, un joueur fait un lob qui ne sera réussi que si la balle passe au-dessus de l'adversaire et retombe avant la ligne de fond de court située à la distance **D = 12 m** du filet. Le joueur qui fait le lob est situé à la distance **d<sub>1</sub> = 2 m** du filet de hauteur **h = 1 m**. Il frappe la balle, à la date t = 0 s, à une hauteur **z<sub>0</sub> = 0,3 m** du sol et lui communique un vecteur-vitesse  $\vec{v}_0$ , de valeur **v<sub>0</sub> = 10 m.s<sup>-1</sup>**. Son adversaire situé de l'autre côté du filet, à la distance **d<sub>2</sub> = 4 m**, tend sa raquette verticalement pour essayer de toucher la balle. Le tennis de sa raquette est alors situé à une hauteur **H = 2,3 m** du sol.



**N.B :** Le vecteur-vitesse  $\vec{v}_0$  de la balle est contenu dans le plan vertical et sa direction forme un angle  $\alpha = 60^\circ$  avec l'horizontale dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  représentée sur la figure. Les forces de frottements dues à l'air sont négligeables.

**Données :**  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

Il t'es demandé(e) d'étudier le mouvement de centre d'inertie G de la balle.

- 1) Identifie les forces extérieures appliquées à la balle juste après avoir été frappée par le joueur.
- 2) Établis :
  - 2.1- les équations horaires du mouvement de G ;
  - 2.2- l'équation de la trajectoire de la balle.
- 3) Détermine la hauteur à laquelle la balle passe :
  - 3.1- au-dessus du filet ;
  - 3.2- au-dessus de l'adversaire.
- 4) Justifie que le lob est réussi.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1) Identifie les forces extérieures appliquées à la balle

$\vec{P}$  le poids de la balle.

- 2.1- les équations horaires du mouvement de G ;

TCI :  $\vec{a} = \vec{g}$  ;  $x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha$  et  $y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + z_0$

- 2.2- équation cartésienne de la trajectoire du centre d'inertie du ballon en fonction de  $\alpha$ ,  $g$ , et  $v_0$ .

$$z = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha + z_0.$$

- 3.1- au-dessus du filet  $x = d_1$

$$z = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot d_1^2 + d_1 \cdot \tan \alpha + z_0.$$

$$z = -\frac{9,8}{2 \times 10^2 \times \cos(60^\circ)^2} \times 2^2 + 2 \times \tan 60^\circ + 0,3 = -0,784 + 3,764 = 3 \text{ m} \Rightarrow z = 3 \text{ m}$$

3.2- au-dessus de l'adversaire.

Lorsque la balle arrive au dessus de l'adversaire,  $x = d_1 + d_2$

$$z = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot (d_1 + d_2)^2 + (d_1 + d_2) \cdot \tan \alpha + z_0.$$

$$z = -\frac{9,8}{2 \times (10^2) \times \cos 60^2} \times (4 + 2)^2 + (4 + 2) \times \tan 60^\circ + 0,3 = -7,056 + 10,692 = 3,6 \text{ m}.$$

4) Le lob est réussi si  $x < d_1 + D$  pour  $z = 0$

et  $z > H$  pour  $x = d_1 + d_2 = 2 + 4 = 6 \text{ m}$

$$z = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan \alpha + z_0. \Rightarrow -0,196 x^2 + 1,75 x + 0,3 = 0 ;$$

Solution :  $x = 9 \text{ m}$  (la balle retombe à 9 m du point O).

Pour  $x = d_1 + d_2 = 6 \text{ m}$  ;  $z = 3,6 \text{ m} > H$  et pour

$z = 0$ ,  $x = 9 \text{ m} < d_1 + D = 2 + 12 = 14 \text{ m}$ . Donc le lob est réussi.

### SITUATION D'ÉVALUATION 04

Pendant un match de rugby, l'équipe de ton établissement bénéficie d'une pénalité. Le joueur proposé à l'exécution du coup de pied de cette pénalité place le ballon de masse  $m = 420 \text{ g}$  au sol en un point O, face aux poteaux à la distance  $D = 50 \text{ m}$ . Il se propose de lui communiquer une vitesse

$v_0 = 24 \text{ m.s}^{-1}$  tel que  $\vec{v}_0$  fasse un angle  $\alpha = 40^\circ$  par rapport au sol.

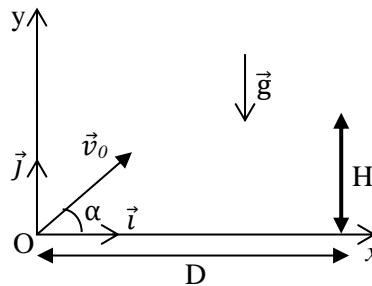
**N.B** : Pour marquer, il faut que le ballon passe au-dessus de la barre transversale qui se trouve à la hauteur  $H = 3,0 \text{ m}$  du sol.

L'origine des dates est la date de départ du ballon du point O.

L'action de l'air sera négligée.

Tu es désigné(e) pour montrer que le joueur pourra marquer cette pénalité en appliquant sa stratégie.

Données :  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .



- 1) Nomme la force extérieure qui s'exerce sur le ballon.
- 2) Établis dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ;
  - 2.1- les équations horaires du mouvement du centre d'inertie du ballon ;
  - 2.2- l'équation cartésienne de trajectoire du centre d'inertie du ballon en fonction de  $\alpha$ ,  $g$ , et  $v_0$ .
- 3) Détermine :
  - 3.1- le temps que mettra le ballon pour parvenir aux poteaux ;
  - 3.2- la vitesse qu'aura le ballon à son passage au niveau des poteaux.
- 4) Montre que cette pénalité sera marquée.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

- 1) La force extérieure qui s'exerce sur le ballon est son poids  $\vec{P}$
- 2.1- équations horaires du mouvement du centre d'inertie du ballon ;

TCI :  $\vec{a} = \vec{g}$  ;  $x(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$  et  $y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha$

2.2- équation cartésienne de trajectoire du centre d'inertie du ballon en fonction de  $\alpha$ ,  $g$ , et  $v_0$ .

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2 + x \cdot \tan\alpha$$

3.1- le temps que mettra le ballon pour parvenir aux poteaux ;

$$t = \frac{D}{v_0 \cdot \cos\alpha} \text{ A.N : } t = \frac{50}{24 \times \cos 40^\circ} = 2,72 \text{ s}$$

3.2- la vitesse qu'aura le ballon à son passage au niveau des poteaux.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} ; \text{ A.N : } v = \sqrt{(24 \times \cos 40^\circ)^2 + (-9,8 \times 2,7 + 24 \times \sin 40^\circ)^2}$$

$$v = 21,44 \text{ m.s}^{-1}$$

4) Montrons que cette pénalité sera marquée.

La pénalité sera marquée si pour  $x = D$ ,  $y > H$

Déterminons  $y$  pour  $x = D$  ;  $y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot D^2 + D \cdot \tan\alpha = -\frac{9,8}{2 \times 24^2 \times \cos^2(40^\circ)} \cdot (50)^2 + 50 \times \tan 40^\circ =$

$$5,72 \text{ m} \Rightarrow y = 5,7 \text{ m}$$

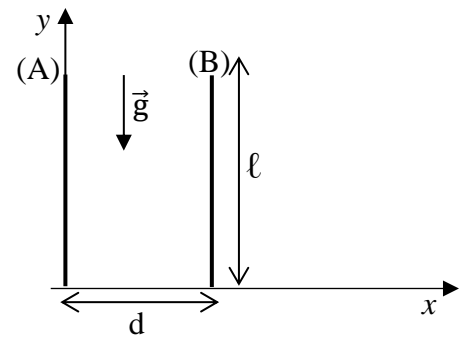
**Comme 5,7 m > 3 m** alors la pénalité sera marquée.

**SITUATION D'ÉVALUATION 05**

Deux plaques métalliques verticales (A) et (B) placées dans le vide à une distance  $d = 4 \text{ cm}$  l'une de l'autre sont soumises à une différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  positive. La hauteur des plaques est  $\ell = 50 \text{ cm}$ . Entre les plaques, se superposent deux champs : le champ de pesanteur supposé uniforme  $\vec{g}$  et un champ électrostatiques uniforme  $\vec{E}$ . Une petite sphère ponctuelle M de masse  $m$ , portant une charge électrique positive  $q$ , est abandonnée sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0 \text{ s}$  en un point  $M_0$  de coordonnées  $x_0 = \frac{d}{2}$  et  $y_0 = \ell$ .

**Données :**  $g = 10 \text{ m.s}^{-1}$  et  $\frac{q}{m} = 10^{-6} \text{ C.kg}^{-1}$ .

- 1) Citres les forces extérieures qui s'exercent sur la petite sphère.
- 2) Établis l'expression de son vecteur-accélération  $\vec{a}$  en fonction de  $m$ ,  $q$ ,  $\vec{g}$  et  $\vec{E}$ .
- 3) Détermine dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :
  - 3.1) les coordonnées du vecteur-accélération  $\vec{a}$  de la sphère.
  - 3.2) les coordonnées de son vecteur-vitesse  $\vec{v}$  ainsi que celles de son vecteur-position  $\vec{OM}$  en fonction du temps.
- 4) Établis l'équation cartésienne de la trajectoire.
- 5) Déduis la nature de cette trajectoire.
- 6) Calcule la date de rencontre de la sphère avec le plan horizontal passant par O.
- 7) Détermine la valeur de  $U_{AB}$  pour que la trajectoire de la sphère passe par le point P de coordonnées  $(d, 0)$ .



**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1) Les forces extérieures qui s'exercent sur la petite sphère.
  - Le poids de la sphère :  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$
  - La force électrostatique :  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
- 2) L'expression de son vecteur-accélération  $\vec{a}$  en fonction de  $m$ ,  $q$ ,  $\vec{g}$  et  $\vec{E}$ .

$$\vec{P} + \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m \cdot \vec{g} + q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g} + \frac{q}{m} \vec{E}$$

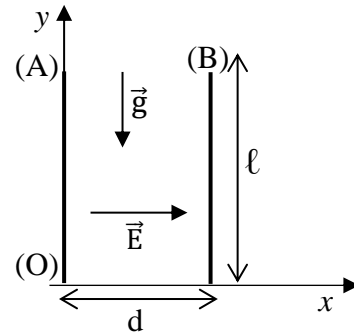
3)

3.1) les coordonnées du vecteur-accélération  $\vec{a}$  de la sphere dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  :

$U_{AB} = V_A - V_B$  est positive donc  $V_A > V_B$ ;  $\vec{E}$  est orienté de (A) vers (B).

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = g_x + \frac{q}{m} E_x \\ a_y = g_y + \frac{q}{m} E_y \end{cases} \quad \text{Or } \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = g \end{cases} ; \quad \vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = \frac{d}{2} \\ y_0 = \ell \end{cases}$$

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E \\ E_y = 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{q}{m} E \\ a_y = -g \end{cases} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$$



3.2) les coordonnées de son vecteur-vitesse  $\vec{v}$  ainsi que celles de son vecteur-position  $\vec{OM}$  en fonction du temps.

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot t + \vec{v}_0 = \vec{a} \cdot t \quad \text{et} \quad \vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{OM}_0$$

A la date  $t = 0s$  ; on a :

$$\vec{OM}_0 \begin{cases} x_0 = \frac{d}{2} \\ y_0 = \ell \end{cases} ; \quad \vec{v} \begin{cases} v_x = a_x \cdot t = \frac{q}{m} E \cdot t \\ v_y = a_y \cdot t = -g \cdot t \end{cases} \quad \vec{OM} = \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 + x_0 = \frac{q \cdot E}{2 \cdot m} \cdot t^2 + \frac{d}{2} \\ y(t) = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 + y_0 = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + \ell \end{cases}$$

4) Établir l'équation cartésienne de la trajectoire.

$$y(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + \ell \Rightarrow t^2 = -\frac{2}{g}(y - \ell) \quad \text{Donc } x = -\frac{q \cdot E}{m \cdot g}(y - \ell) + \frac{d}{2} \quad \text{ou } x = -\frac{q \cdot E}{m \cdot g} y + \frac{q \cdot E \cdot \ell}{m \cdot g} + \frac{d}{2}$$

5) L'équation obtenue est celle d'une droite. La trajectoire est donc rectiligne.

6) La date de rencontre de la sphere avec la plan horizontal passant par O.

Dans le plan passant par O,  $y = 0$  m

$$\text{Donc } -\frac{g}{2} t^2 + \ell = 0 \Rightarrow t^2 = \frac{2 \cdot \ell}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot \ell}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,5}{10}} = 0,32 \text{ s}$$

7) Déterminons la valeur de  $U_{AB}$  pour que la trajectoire de la sphere passe par le point P de coordonnées  $(d, 0)$ .  $\Rightarrow x = d$  et  $y = 0$

$$x = -\frac{q \cdot E}{m \cdot g} y + \frac{q \cdot E \cdot \ell}{m \cdot g} + \frac{d}{2} \Rightarrow d = -\frac{q \cdot E \cdot \ell}{m \cdot g} + \frac{d}{2} \Rightarrow d = -\frac{q \cdot U_{AB} \cdot \ell}{m \cdot d \cdot g} + \frac{d}{2} \Rightarrow \left(d - \frac{d}{2}\right) = -\frac{q \cdot U_{AB} \cdot \ell}{m \cdot d \cdot g}$$

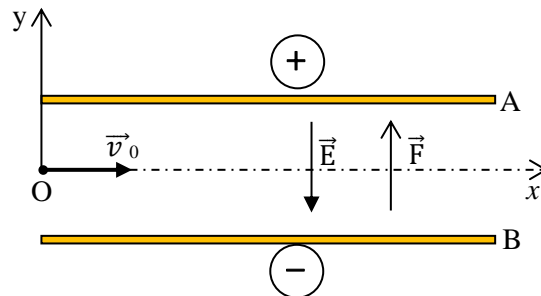
$$-\frac{d}{2} = -\frac{q \cdot U_{AB} \cdot \ell}{m \cdot d \cdot g} \Rightarrow U_{AB} = \frac{m \cdot g \cdot d^2}{2 \cdot q \cdot \ell} = \frac{g \cdot d^2}{2 \cdot \frac{q}{m} \cdot \ell} ; \quad \text{A.N : } U_{AB} = \frac{10 \times (0,04)^2}{2 \times 10^{-6} \times 0,5} = 16 \text{ 000 V}$$

## 2) PARTICULE CHARGÉE EN MOUVEMENT DANS UN CHAMP $\vec{E}$ UNIFORME

### Problème

Un électron de charge ( $q = -e < 0$ ) et de masse  $m$  pénètre en  $O$  entre deux plaques métalliques horizontales chargées et parallèles avec une vitesse constante  $\vec{v}_0$  parallèle aux plaques.

Étudions le mouvement des particules entre les plaques.



### 2.1) ÉTUDE DYNAMIQUE

#### 2.1.1) système

Particule chargée électron ( $q = -e < 0$ ) de masse  $m$ .

#### 2.1.2) référentiel

du laboratoire considéré comme galiléen lié au repère orthonormé bidimensionnel  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

#### 2.1.3) bilan des forces extérieures

$\vec{P}$  : le poids de la particule

$\vec{F}$  : force électrostatique

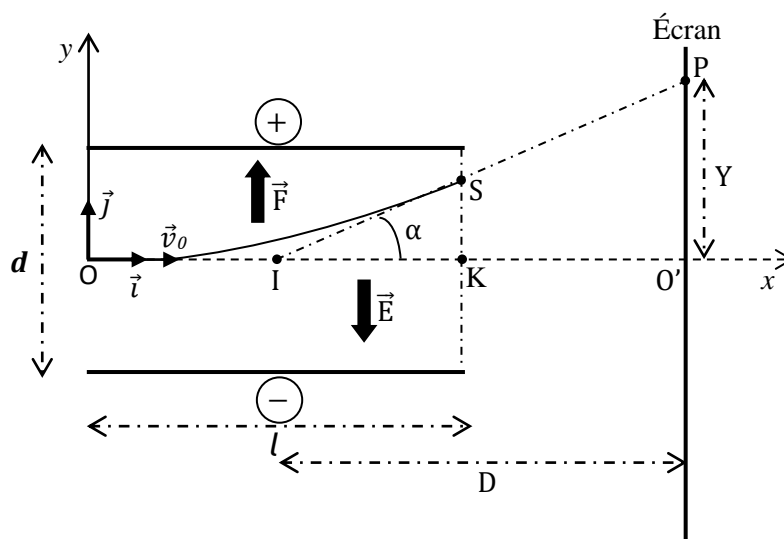
#### 2.1.4) théorème du centre d'inertie

$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}$  ; Le poids de la particule entre les plaques est négligeable devant la force électrostatique  $\vec{F}$  on écrit donc  $\vec{P} \ll \vec{F}$  Finalement  $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$  ; d'où  $\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

$\vec{a}$  est constant car ( $\vec{E}$ ,  $q$  et  $m$  sont constant) et dépend de la masse et de charge de la particule.

Le vecteur accélération  $\vec{a}$  et le vecteur champ électrostatique  $\vec{E}$  sont colinéaires.

### 2.2) ÉTUDE CINÉMATIQUE



2.2.1) équation horaire du mouvement

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OM}_0; \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (q = -e < 0)$$

• À l'instant initial  $t = 0$  on a :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{-qE}{m} \end{cases} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases} \quad \overrightarrow{OM}_0 \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

• À l'instant  $t \neq 0$  ; l'équation horaire est

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overrightarrow{OM}_0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qE}{m} \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } q = -e \quad \text{d'où } \overrightarrow{OM} \begin{cases} x(t) = v_0 t & (1) \\ y(t) = \frac{e.E}{2.m} t^2 & (2) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{g}.t + \vec{v}_0$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{qE}{m} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } q = -e \quad \text{d'où } \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = \frac{e.E}{m}.t \end{cases}$$

Le mouvement du projectile se déroule dans le plan perpendiculaire à (oz) donc le plan (xoy).  
car  $y = 0 = \text{Cste}$ .

2.2.2) équation de la trajectoire

En tirant  $t$  dans l'équation (1) on a :  $t = \frac{x}{v_0}$

et en remplaçant dans l'équation horaire (2) on a :  $y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2$

La particule décrit une trajectoire parabolique de centre O, d'axe (oy) et de concavité tournée vers les y positif.

**Remarque** :  $y = K.x^2$  (concavité tournée vers les y positif) et  $y = -K.x^2$  (concavité tournée vers les y négatif) ; avec  $K = \frac{eE}{2mv_0^2} > 0$

2.3) ÉTUDE DE LA TRAJECTOIRE

2.3.1) Coordonnée sortie (soit  $\ell$  la longueur de la plaque)

Le faisceau d'électrons sort des plaques si son abscisse vaut la longueur des plaques ( $x = \ell$ ) d'où  $x_s = \ell$ . On obtient  $y_s$  en remplaçant  $x = \ell$  dans l'expression de l'équation de la trajectoire ;

on obtient  $y = \frac{eE}{2mV_0^2} x^2$  d'où  $y = \frac{eE}{2mV_0^2} \ell^2$

Coordonnées de sortie  $\begin{cases} x_s = \ell \\ y_s = \frac{eE}{2mV_0^2} \ell^2 \end{cases}$

2.3.2) vecteur vitesse de sortie

À la sortie S, on détermine le temps  $t_s$  de sortie :  $x_s = \ell = v_0.t_s$  alors  $t_s = \frac{\ell}{v_0}$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \\ v_y(t) = \frac{eE}{m} t \end{cases} \quad \text{coordonnées de la vitesse de sortie } (t_s = \frac{\ell}{v_0}) \quad \text{d'où } \vec{v}_s = \begin{cases} v_{xs} = v_0 \\ v_{ys} = \frac{eE}{mv_0} \ell \end{cases}$$

2.3.3) la condition de sortie des particules des plaques

Le faisceau de particule arrivera à sortir des plaques s'il parcourt la distance  $\ell$  et que son ordonnée à la

sortie soit inférieure à  $d/2$  :  $\begin{cases} x = \ell \\ y < \frac{d}{2} \text{ pour } y \text{ positif} \end{cases}$  ou :  $\begin{cases} x = \ell \\ y > -\frac{d}{2} \text{ pour } y \text{ négatif} \end{cases}$

$$y_S = \frac{eE}{2mV_0^2} \ell^2 < \frac{d}{2} \text{ avec } E = \frac{U}{d}; \text{ La condition s'écrit : } \frac{eU}{m.d^2.V_0^2} \ell^2 < 1$$

2.3.4) Déflexion électrique d'un faisceau de particule

**On place un écran (E) à une distance D du milieu des plaques (D = IO')**

a) Déviaton angulaire

C'est l'angle  $\alpha$  de déviation que fait le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  à partir du milieu I des plaques avec l'axe

(O, x) porté par le vecteur vitesse.  $\tan \alpha = \frac{y_S}{IK} = \frac{y_S}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2y_S}{\ell}$

$$\tan \alpha = \frac{2y_S}{\ell} = \frac{v_{Sy}}{v_{Sx}} = \frac{eE\ell}{m.v_0^2} = \frac{eU.\ell}{m.d.v_0^2}$$

**NB** : le faisceau de particules dévie toujours à partir du milieu des plaques.

b) Déflexion électrostatique

b1) Définition

C'est la distance entre l'axe (O, x) porté le vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  et le point d'impact de la particule sur l'écran (E) : (Y = O'P).

b2) Expression de la déflexion électrique Y

A la sortie les particules sont uniquement soumises à leur poids qui est négligeables, donc à aucune forces extérieures, alors isolées ( $m\vec{a} = \vec{0}$  d'où  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$  alors  $\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ ) ; son mouvement est donc rectiligne uniforme de vitesse  $\vec{v}_S$  de sortie.

$\tan \alpha = \frac{Y}{D}$  alors  $Y = D.\tan \alpha$  avec  $\tan \alpha = \frac{e.E.\ell}{m.V_0^2}$  et  $E = \frac{U}{d}$  ( $\tan \alpha = \frac{eU\ell}{m.d.V_0^2}$ )

$$Y = \frac{e.\ell.D}{m.d.v_0^2} U \quad ; \quad Y = k.U \text{ avec } k = \frac{e.\ell.D}{m.d.v_0^2}$$

**La déflexion électrique est proportionnelle à la tension appliquée aux bornes du condensateur**

**Utilisation** : la déviation électrostatique est utilisée dans les tubes cathodiques des oscilloscopes et des TV.

**2.4) ETUDE ÉNERGÉTIQUE DE LA PARTICULE**

2.4.1) Expressions des énergies

$$E = E_C + E_{pe}$$

E : Énergie mécanique de la particule

Énergie cinétique de la particule  $E_c = \frac{1}{2}m.v^2$

Énergie potentielle électrostatique :  $E_{pe}(M) = qV_M$

où  $V_M$  est le potentiel du point M considéré et q la charge de la particule.

2.4.2) Conservation de l'énergie mécanique

Dans un champ électrostatique uniforme, l'énergie mécanique d'une particule, de charge q, reste constante. Ainsi  $\frac{1}{2}mv^2 + qV = cste.$

Pour un déplacement d'un point A à un point B, on aura :  $\frac{1}{2}mv_B^2 + qV_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + qV_A$

Soit  $\frac{1}{2} m (v_B^2 - v_A^2) = q(V_A - V_B)$ .

On obtient ainsi le théorème de l'énergie cinétique :  $\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F})$

**SITUATION D'ÉVALUATION 01 (Mouvement dans un champ uniforme  $\vec{E}$ ) Tle D**

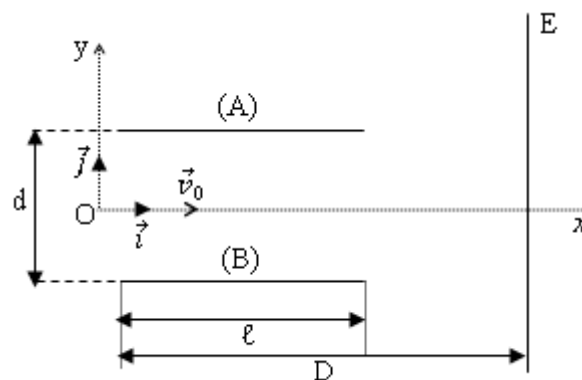
Lors d'une évaluation, votre professeur vous propose le schéma ci-dessous. Sur ce schéma, ont été représentés :

- un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé;
- un condensateur plan dont les armatures (A) et (B), de longueur  $\ell = 5 \text{ cm}$ , séparées d'une distance  $d = 2 \text{ cm}$ , sont soumises à une tension  $U_{AB} = 100 \text{ V}$ .

Entre les armatures de ce condensateur, pénètre à la date  $t = 0s$ , au point O, avec un vecteur-vitesse  $\vec{v}_0$  horizontal, un électron, de masse  $m = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$  et de charge  $q = -e$ . À la sortie du condensateur, l'électron se déplace dans le vide et arrive en un point P d'un écran fluorescent (E) placé à la distance  $D = 20 \text{ cm}$  de l'origine O du repère.

**N.B :** Le poids de l'électron est négligeable devant les autres forces.

**Données :**  $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$  ;  $v_0 = 1,3.10^7 \text{ m/s}$



Votre professeur vous demande d'étudier le mouvement de cet électron.

- 1) Nomme les forces extérieures appliquées à l'électron :
  - 1.1) entre les armatures du condensateur ;
  - 1.2) entre le condensateur et l'écran fluorescent
- 2) Détermine le signe des armatures et représente le vecteur champ électrostatique et la force électrique.
- 3) Établis, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les équations horaires et l'équation cartésienne de la trajectoire de l'électron.
- 4) Détermine :
  - 4.1) à la sortie du condensateur,
    - 4.1.1) le déplacement vertical  $y_M$  de l'électron
    - 4.1.2) l'angle  $\alpha$  de déviation de sa trajectoire
  - 4.2) les coordonnées du point d'impact P de l'électron sur l'écran fluorescent (E).
  - 4.3) la vitesse  $v_P$  de l'électron à son arrivée en P sur l'écran (E).

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Les forces qui s'exercent sur l'électron :

1.1) La force électrostatique  $\vec{F} = -e\vec{E}$

1.2) l'électron n'est soumis à aucune force.

2)  $U_{AB} = 100 \text{ V} > 0$  ;  $U_{AB} = V_A - V_B > 0$  alors  $V_A > V_B$  alors A(+) et B(-)

3) Équation horaire et équation de la trajectoire

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = v_0 t & (1) \\ y(t) = \frac{e.E}{2.m} t^2 & (2) \end{cases} \text{ et } y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2 \text{ finalement } y = \frac{eU_{AB}}{2mdv_0^2} x^2$$

4.1.1) Détermination du déplacement vertical  $y_M$  de l'électron à la sortie du condensateur.

$$\text{Pour } y = y_M ; x = \ell ; y_M = \frac{eU_{AB}}{2mdv_0^2} \ell^2$$

$$\underline{\text{A.N.}} : y_M = \frac{1,6.10^{-19} \times 100}{2 \times (9,1.10^{-31}) \times (0,02) \times (1,3.10^7)^2} \times (0,05)^2 = 1,3.10^{-3} = 1,3 \text{ mm}$$

4.1.2) Déterminons l'angle  $\alpha$  de déviation de sa trajectoire

$$\tan \alpha = \frac{2y_S}{\ell} = \frac{2y_M}{\ell} ; \text{ A.N. : } \tan \alpha = \frac{2 \times 1,3.10^{-2}}{50} = 0,052 ; \alpha = \tan^{-1}(0,052) = 2,98^\circ$$

4.2) Déterminons les coordonnées du point d'impact P de l'électron sur l'écran fluorescent (E).

$x_P = 20 \text{ cm}$

$$\text{Au point P, } x = D \text{ et } y_P = (D - \frac{\ell}{2}) \tan \alpha$$

$$\underline{\text{A.N.}} : y_P = (20 - \frac{5}{2}) . 10^{-2} \times \tan 2,98^\circ ; y_P = 9,1.10^{-3} \text{ m} = 9,1 \text{ mm}$$

4.3) Déterminons la vitesse  $v_P$  de l'électron à son arrivée en P sur l'écran (E).

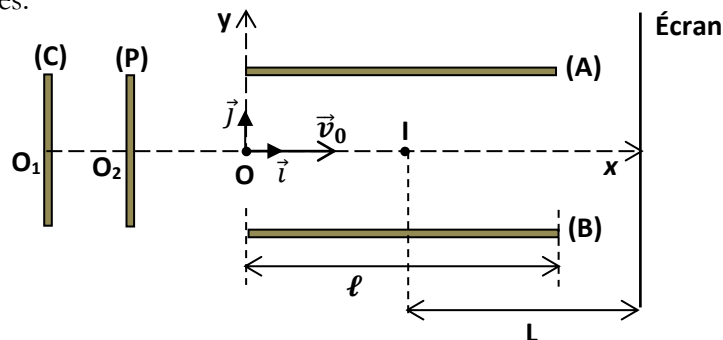
Entre le condensateur et l'écran, le mouvement de l'électron est rectiligne et uniforme.

$$\text{Donc } v_P = v_M = v_S \text{ avec } \begin{cases} v_{xS} = v_0 \\ v_{yS} = \frac{e\ell E}{mv_0} = \frac{e.\ell.U_{AB}}{mdv_0} \end{cases}$$

$$v_P = \sqrt{v_0^2 + (\frac{eU_{AB}}{mdv_0} \ell)^2} = \sqrt{(1,3.10^7)^2 + (\frac{1,6.10^{-19} \times 0,05 \times 100}{9,1.10^{-31} \times 0,02 \times 1,3.10^7})^2} = 1,34.10^7 \text{ m/s}$$

**SITUATION D'ÉVALUATION 02 (Mouvement dans un champ uniforme  $\vec{E}$ ) Tle C**

Votre professeur vous soumet un exercice comportant le dispositif schématisé ci-après. Ce dispositif est constitué de deux (02) compartiments. Les armatures (C) et (P) sont verticales et les armatures (A) et (B) sont horizontales.



**Données :**  $|U_0| = [V_C - V_P] = 1270 \text{ V}$  ;  $q = -e = -1,6.10^{-19} \text{ C}$  ;  $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$  ;  $d = 3 \text{ cm}$  ;  $\ell = 8 \text{ cm}$  ;  $L = 18 \text{ cm}$  ;  $OI = \frac{\ell}{2}$ .

1) Les électrons sont émis en C avec une vitesse négligeable. Ils arrivent ensuite en P avec une vitesse  $\vec{v}_0$ . On établit une différence de potentielle  $U_0$  entre les armatures (C) et (P)

1.1- Donne en justifiant le signe de la tension  $U_0$ .

1.2- Représente le champ  $\vec{E}$  et la force électrostatiques  $\vec{F}$  entre les armatures (C) et (P).

1.3- Donne et justifie la nature du mouvement des électrons entre (C) et (P).

1.4- Montre que la vitesse  $v_{O_2}$  des électrons à leur passage en P est  $v_{O_2} = 2,11 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ .

1.5- Montre que la vitesse  $v_{O_2} = v_0$

2) Les électrons pénètrent en O entre les armatures horizontales (A) et (B) d'un condensateur. Les armatures de longueur  $\ell$  sont distantes de  $d$ . On établit entre (A) et (B) une tension  $U = V_A - V_B > 0$ .

2.1- Détermine les équations horaires du mouvement entre les armatures en fonction de  $v_0$ ,  $e$ ,  $E$  et  $m$ .

2.2- Dédus l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de  $U$ ,  $U_0$  et  $d$ . Donne la nature de la trajectoire des électrons entre (A) et (B)

2.3- Détermine la valeur limite  $U_\ell$  de la tension  $U$  pour que les électrons arrivent à sortir des plaques.

3) Le faisceau d'électrons arrive ensuite sur un écran (E) avec la valeur limite de la tension  $U_t = 357,1875 \text{ V}$ .

3.1- Représente qualitativement la trajectoire des électrons à la sortir des plaques.

3.2- Montre que le déplacement  $D$  du spot sur l'écran est  $y_D = 6,75 \text{ cm}$ .

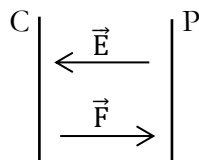
### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1.1- le signe de la tension  $U_0$ .

$$\Delta E_C = -e(V_C - V_P) \Rightarrow V_C - V_P = \frac{\Delta E_C}{-e} \Rightarrow U_{CP} = U_0 = \frac{\Delta E_C}{-e} < 0$$

$U_0$  est une tension négative.

1.2- Représentons le champ  $\vec{E}$  et la force électrostatiques  $\vec{F}$  entre les armatures (C) et (P).



1.3- Donne et justifie la nature du mouvement des électrons entre (C) et (P).

$\Delta v_0 > 0$ , la vitesse croît de 0 à  $v_p$  donc le mouvement est MRUA

$$\text{ou } \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} = \frac{-e \cdot U}{m \cdot d} \vec{i} \text{ est constante}$$

1.4- Montre que la vitesse  $v_{O_2}$  des électrons à leur passage en P est  $v_{O_2} = 2,11 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$ .

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = -e(V_C - V_P) \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{-2 \cdot e U_0}{m}}$$

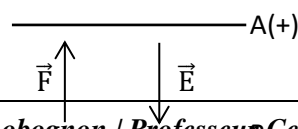
$$v_0 = \sqrt{\frac{-2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times (-1270)}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 2,11 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

1.5- Montre que la vitesse  $v_{O_2} = v_0$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}} \text{ donc le mouvement est rectiligne uniforme.}$$

2.1- les équations horaires du mouvement entre les armatures en fonction de  $v_0$ ,  $e$ ,  $E$  et  $m$ .

$$U = V_A - V_B > 0 \Rightarrow V_A > V_B$$



TCI :  $\vec{a} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m}$

$x(t) = v_{0x} \cdot t$  et  $y(t) = -e \times (-E) / 2 \cdot m \cdot t^2 = e \times E / 2 \cdot m \cdot t^2 \Rightarrow y(x) = \frac{e \cdot E}{2 \cdot m \cdot v_0^2} x^2$

2.2- Déduis l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de U, U<sub>0</sub> et d.

comme :  $v_0 = \sqrt{\frac{-2 \cdot e \cdot U_0}{m}}$  et  $E = \frac{U}{d} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{U}{4 \cdot d \cdot U_0} \cdot x^2}$  La trajectoire est une parabole.

Donne la nature de la trajectoire des électrons entre (A) et (B)

Le mouvement des électrons est rectiligne uniformément accélérés

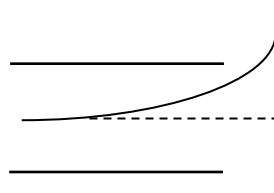
car la vitesse est passée de  $v_0$  à  $v_p = \sqrt{v_0^2 + (\frac{e \cdot U_{AB}}{m \cdot d \cdot v_0})^2}$

2.3 Détermine la valeur limite U<sub>ℓ</sub> de la tension U pour que les électrons arrivent à sortir des plaques.

$y_s < \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{U}{4 \cdot d \cdot U_0} \ell^2 < \frac{d}{2} \Rightarrow U > -\frac{2 \cdot d^2 \cdot U_0}{\ell^2} \Rightarrow U > -\frac{2 \times (0,03)^2 \times (-1270)}{(0,08)^2}$

$\Rightarrow U > 357,1875 \text{ V}$

3.1- Représentons qualitativement la trajectoire des électrons à la sortir des plaques.



3.2- Montrons que le déplacement D du spot sur l'écran est y<sub>D</sub> = 6,75 cm.

$\tan \alpha = \frac{2 \cdot y_s}{\ell} = -\frac{U \cdot \ell}{2 \cdot d \cdot U_0}$  et  $\tan \alpha = \frac{D}{L} \Rightarrow D = L \cdot \tan \alpha$

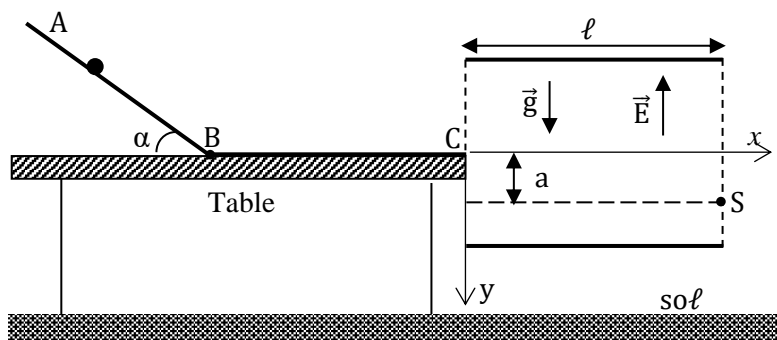
$D = -\frac{U_f \cdot \ell \cdot L}{2 \cdot d \cdot U_0}$  ; A.N :  $D = -\frac{357,1875 \times 0,08 \times 0,18}{2 \times 0,03 \times (-1270)} = 0,0675 \text{ m} = 6,75 \text{ cm}$ .

**D = 6,75 cm**

**SITUATION D'ÉVALUATION 03 (Mouvement dans les champs  $\vec{g}$  et  $\vec{E}$  uniformes) Tle C**

On constitue, à l'aide d'éléments de glissière un tremplin ABC coudé en B. Les portions AB et BC sont rectilignes. L'ensemble est posé sur une table horizontale. AB forme un angle α avec le plan de la table, BC est parallèle au plan, C arrive juste au bord de la table.

Un corpuscule de masse m et de charge q considéré comme ponctuel est lâché en A dans vitesse initiale. Il glisse le long de ce tremplin. Les frottements sont assimilables à une force unique  $\vec{f}$  constamment parallèle au déplacement et de valeur constante sur tout le trajet ABC. On admettra que le passage au point B ne modifie pas la valeur de la vitesse du corpuscule.



**Données :**  $m = 10 \text{ g}$  ;  $f = 10^{-2} \text{ N}$  ;  $\alpha = 30^\circ$  ; charge du corpuscule  $q = 10^{-3} \text{ C}$  ;

$AB = BC = L = 50 \text{ cm}$  ;  $g = 10 \text{ N/kg}$  ;  $\ell = 2 \text{ cm}$  ;  $a = 1 \text{ cm}$

1- Détermine :

1.1- l'accélération algébrique  $a_1$  du corpuscule entre A et B.

1.2- l'accélération algébrique  $a_2$  du corpuscule entre B et C.

1.3- la valeur  $v_B$  de la vitesse du corpuscule en B en fonction de  $g, L, \alpha, f$  et  $m$ .

1.4- la valeur  $v_C$  de la vitesse du corpuscule en C en fonction de  $g, L, \alpha, f$  et  $m$ .

1.5- la durée du parcours ABC.

2- Au-delà du point C, le corpuscule quitte la table avec la vitesse  $v_C = 1,7 \text{ m.s}^{-1}$  et évolue dans un espace où règne deux champs uniformes. Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  et le champ électrostatique  $\vec{E}$ . On étudie le mouvement du corpuscule dans le repère orthonormé  $(C_x, C_y)$ .

2.1- Établis les équations horaires du mouvement du corpuscule.

2.2- Montre que l'équation cartésienne de la trajectoire du corpuscule s'écrit :  $y = \frac{1}{2} \left( g - \frac{qE}{m} \right) \frac{x^2}{v_C^2}$

2.3- Détermine la valeur de  $E$  pour que le corpuscule sorte de l'espace champ  $\vec{E}$  au point S. d'ordonnées  $a$ .

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1.1- l'accélération algébrique  $a_1$  du corpuscule entre A et B.

$$\text{T.C.I: } \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow m g \sin \alpha - f = m \cdot a_x \quad ; \quad a_1 = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

$$\text{A.N: } a_1 = 10 \times \sin 30^\circ - \frac{10^{-2}}{0,01} = 4 \text{ m.s}^{-2}$$

1.2- l'accélération algébrique  $a_2$  du corpuscule entre B et C.

$$\text{T.C.I: } \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{f} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow -f = m \cdot a_x \quad ; \quad a_2 = -\frac{f}{m}$$

$$\text{A.N: } a_2 = -\frac{10^{-2}}{0,01} = -1 \text{ m.s}^{-2}$$

1.3- la valeur  $v_B$  de la vitesse du corpuscule en B en fonction de  $g, AB, \alpha, f$  et  $m$ .

$$\text{T.E.C: } \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f}) \text{ et } W(\vec{R}) = 0 ; \quad v_A = 0$$

$$v_B = \sqrt{2 \cdot AB \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right)} \quad \text{ou} \quad v_B^2 - v_A^2 = 2 \cdot a_x \cdot AB \quad \text{avec} \quad a_x = g \sin \alpha - \frac{f}{m}$$

$$\text{A.N: } v_B = \sqrt{2 \times 0,5 \times 4} = 2 \text{ m.s}^{-1}$$

1.3- la valeur  $v_C$  de la vitesse du corpuscule en C en fonction de  $g, AB, BC, \alpha, f$  et  $m$ .

$$\text{T.E.C: } \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f}) = W(\vec{f}) = -f \times BC$$

$$v_C = \sqrt{v_B^2 + 2 \cdot BC \left( -\frac{f}{m} \right)} \Rightarrow v_C = \sqrt{\left( 2 \cdot AB \left( g \sin \alpha - \frac{f}{m} \right) \right)^2 + 2 \cdot BC \left( -\frac{f}{m} \right)}$$

$$\text{ou } v_C^2 - v_B^2 = 2 \cdot a_x \cdot BC \Rightarrow v_C^2 = 2 \cdot a_2 \cdot BC + v_B^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 + 2 \cdot a_2 \cdot BC}$$

$$\text{A.N: } v_C = \sqrt{(2)^2 + 2 \times 0,5 \times (-1)} = 1,73 \text{ m.s}^{-1}$$

1.4- la durée du parcours ABC.

$$a_1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a_1} = \frac{v_B - v_A}{a_1} \quad \text{A.N: } \Delta t = \frac{2}{4} = 0,5 \text{ s}$$

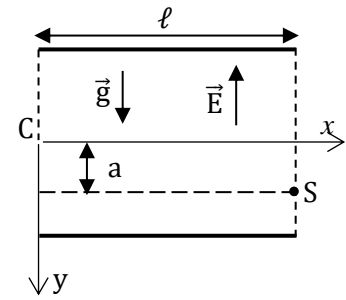
$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a_2} = \frac{v_C - v_B}{a_2} \quad \text{A.N: } \Delta t = \frac{1,73 - 2}{-1} = 0,27 \text{ s}$$

2.1- Établir les équations horaires du mouvement du corpuscule.

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \vec{a}.t^2 + \vec{v}_0.t + \overline{OM}_0 \quad \text{avec T.C.I: } \vec{a} = \vec{g} \text{ et } \vec{a} = \frac{q.\vec{E}}{m}$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = g - \frac{qE}{m} \end{cases} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x} = v_C \\ v_{0y} = 0 \end{cases} \quad \overline{OM}_0 \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_C \cdot t & (1) \\ y(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(g - \frac{qE}{m}\right) \cdot t^2 & (2) \end{cases}$$



2.2- L'équation cartésienne de la trajectoire du corpuscule s'écrit :  $y = \frac{1}{2} \left(g - \frac{qE}{m}\right) \frac{x^2}{v_C^2}$

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_C} \quad \text{alors} \quad y(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(g - \frac{qE}{m}\right) \cdot \left(\frac{x}{v_C}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \left(g - \frac{qE}{m}\right) \frac{x^2}{v_C^2}$$

2.3- Déterminer la valeur de E pour que le corpuscule sorte de l'espace champ  $\vec{E}$  au point S d'ordonnées 1 cm.

La charge est négative : car  $\vec{F} = q.\vec{E}$  ;  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  sont opposés.

$$E = \left(g - \frac{2.a.v_C^2}{l^2}\right) \times \frac{m}{q}; \quad \text{A.N: } E = \left(10 - \frac{2 \times 0,01 \times (1,7)^2}{(0,02)^2}\right) \times \frac{0,01}{-10^{-3}} = 1345 \text{ V}$$

## LEÇON 5 : OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES

**COMPÉTENCE 1** : TRAITER UNE SITUATION SE RAPPORTANT À LA MÉCANIQUE

**THÈME 1** : MECANIQUE

**LEÇON 5** : OSCILLATIONS MÉCANIQUES LIBRES

**Exemple de situation**

Un élève en classe de T<sup>le</sup>C au Lycée Moderne Inagoi de San-Pédro découvre dans une revue scientifique les informations suivantes :

« L'amortisseur d'une automobile fonctionne en duo avec un ressort de suspension pour assurer le confort à bord du véhicule ainsi que sa bonne tenue de route. Le rôle des amortisseurs est de maintenir les roues en contact avec le sol. Le ressort est soumis au processus de compression-détente continu en perdant à chaque fois un peu d'énergie. Si le ressort travaille seul, les oscillations se prolongent dans le temps. La fréquence et l'amplitude des mouvements occasionnés par le ressort doivent être contrôlés ».

Voulant en savoir davantage l'élève informe ses camarades et ensemble, ils entreprennent de définir un oscillateur mécanique, de déterminer son équation différentielle et les caractéristiques du mouvement d'un oscillateur mécanique non amorti puis de montrer la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti.

HABILETÉS	CONTENUS
Définir	Un oscillateur mécanique
Connaître	Les caractéristiques générales d'un oscillateur mécanique
Déterminer	L'équation différentielle d'un oscillateur mécanique non amorti.
Connaître	La forme générale de la solution de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique
Déterminer	Les caractéristiques du mouvement d'un oscillateur mécanique non amorti 1) la pulsation propre ; 2) la période propre ; 3) la fréquence propre ; 4) l'amplitude ; 5) la phase à l'origine des dates.
Écrire	la solution de l'équation différentielle.
Montrer	la conservation de l'énergie mécanique d'un oscillateur non amorti.
Tracer	les graphes $x(t)$ et $v(t)$ .
Exploiter	les graphes $x(t)$ et $v(t)$ .

## 1) CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES D'UN OSCILLATEUR MECANIQUE

### 1.1) Définitions

#### 1.1.1) Oscillateur mécanique

C'est un système mécanique qui effectue un mouvement d'aller-retour de part et d'autre de sa position d'équilibre.

**Exemples :** une balançoire, un pendule élastique constitué d'un ressort et d'un solide fixé à l'une de ses extrémités.

#### 1.1.2) Oscillateur libre

C'est un oscillateur abandonné à lui-même après excitation extérieure.

**Exemples :** pendule simple, pendule élastique.

#### 1.1.3) Oscillateur harmonique

C'est un oscillateur dont l'abscisse par rapport à sa position d'équilibre est une fonction sinusoïdale du temps.

**Exemples :**  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  ;  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

### 1.2) Période et fréquence

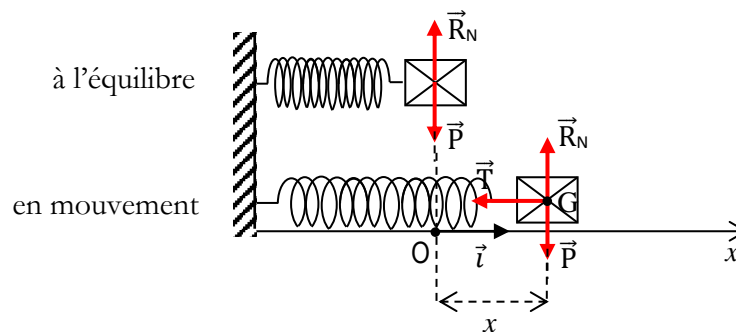
- La période est le temps que met un oscillateur pour effectuer un mouvement d'aller-retour. Il est exprimée en secondes (s) :  $T = \frac{\Delta t}{n \text{ brs}}$

- La fréquence est le nombre d'oscillation complète effectué en une seconde. Il est exprimé en hertz (Hz).  $N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

## 2) ÉTUDE D'UN PENDULE ELASTIQUE HORIZONTAL

### 2.1) dispositif expérimental

Un solide (S) de masse  $m$  est accroché à l'extrémité libre d'un ressort horizontal de raideur  $k$ . Le solide peut se déplacer horizontalement sans frottement sur un axe ( $x'x$ ) parallèle à l'axe du ressort comme l'indique la figure. A l'équilibre, le centre d'inertie  $G_0$  coïncide avec l'origine  $O$  du repère.



On allonge le ressort de  $x$  en allongeant le solide vers la droite.

**Étudions le mouvement du centre d'inertie G du solide**

### 2.2) équation différentielle du mouvement

**Système :** Le solide de masse ( $m$ )

**Référentiel :** Référentiel terrestre considéré comme galiléen

Bilan des forces extérieures :

$\vec{P}$  : le poids du solide de masse ( $m$ )

$\vec{R}_N$  : la réaction normal de l'axe de coulissement

$\vec{T}$  : la tension du ressort (**Force de rappel : toujours dirigé vers l'origine O**)

Théorème du centre d'inertie :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$  ;  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}$

Exprimons les vecteurs en fonction de  $\vec{l}$  :  $\vec{T} = -k \cdot \overline{OG} = -k \cdot x \cdot \vec{l}$  avec  $OG = x$  et  $\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{l}$  ;  $\overline{OG}$  et  $\vec{T}$  sont toujours opposés :  $OG = x$

finalement :  $-k \cdot x \cdot \vec{l} = \ddot{x} \cdot \vec{l}$  et  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$  (1) C'est l'équation différentielle du mouvement du solide

### 2.3) Solution de l'équation différentielle

La solution  $x(t)$  de cette équation différentielle est une fonction sinusoïdale de la forme :

$$x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Le mouvement du centre d'inertie de l'oscillateur est donc rectiligne sinusoïdale

$x$  est l'élongation à l'instant de date  $t$ .

$X_m$  est l'amplitude des oscillations (ou élongation maximale) en mètres (m).

$\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur **exprimée en rad.s<sup>-1</sup>** :

$\omega_0 t + \varphi$  : est la phase à l'instant de date  $t$  **s'exprime en radians (rad)**

$\varphi$  : est la phase à l'origine des dates  $t = 0$  **s'exprime en radian (rad)**.

**Remarque** :  $X_m$  et  $\varphi$  se détermine à l'aide des conditions initiales de la vitesse  $v_0$  et de la position  $x_0$ .

### Activité d'application 1

1) Un pendule A effectue 120 oscillations par minute. Détermine sa période, sa fréquence et sa pulsation propre.

2) l'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdal est donnée par la relation :  $x(t) = 3 \cos(20t + \frac{\pi}{4})$  ;  $x(\text{cm})$ ,  $t(\text{s})$

2.1) Donne la valeur de la pulsation propre, l'amplitude des oscillations et la phase à l'origine des dates.

2.2) Calcule sa période et sa fréquence propres.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) Période propre  $T_0 = \frac{\Delta t}{n}$  ;  $T_0 = \frac{60}{120} = 0,5$  s ; la fréquence propre  $N_0 = \frac{n}{\Delta t} = \frac{120}{60} = 2$  Hz.

La pulsation propre  $\omega_0 = 2\pi \cdot N_0 = 2 \times 2\pi = 4 \cdot \pi$  rad.s<sup>-1</sup>.

2.1) pulsation propre est  $\omega_0 = 20$  rad/s ; l'amplitude est  $X_m = 3$  cm =  $3 \cdot 10^{-2}$  m ;

la phase à l'origine est  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  rad

2.2) Sa période propre est :  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{20} = 0,314$  rad/s et la fréquence propre est

$$N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{20}{2\pi} = 3,18 \text{ Hz.}$$

### 2.4) Expression de la pulsation propre $\omega_0$ ; de la période propre $T_0$ et de la fréquence propre $N_0$

$$\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

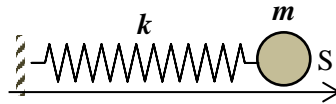
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 x \text{ soit } \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{cases} \quad \text{Par identification des équations on a : } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad ; \text{ finalement } \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}} \quad \text{et } N_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \text{ finalement } \boxed{N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

### Activité d'application 2

Un pendule élastique horizontal est réalisé à l'aide d'un ressort dont la raideur est  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  et d'un solide dont la masse est  $m = 100 \text{ g}$ .



Détermine la pulsation propre  $\omega_0$ , la période propre  $T_0$  et fréquence propre  $N_0$  de ce pendule élastique horizontale ainsi constitué.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

1) Calcul de la pulsation propre  $\omega_0$ ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 10 \text{ rad/s}; \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,1}{10}} = 0,63 \text{ s}; \quad N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 1,59 \text{ Hz}$$

#### 2.5) Expression $v_x(t)$ et $a_x(t)$

##### 2.5.1) expression de la vitesse

Si on a  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  alors  $v_x(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$v_x(t) = \omega_0 X_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ avec } \mathbf{V}_m = \omega_0 \cdot \mathbf{X}_m$$

$\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{v}(t)$  sont en quadrature de phase. Quand l'une atteint son extrémum, l'autre s'annule et réciproquement.

##### 2.5.2) expression de l'accélération

Si on a  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  alors  $a_x(t) = \ddot{x}(t) = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$a_x(t) = \omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi) \text{ avec } \mathbf{a}_m = \omega_0^2 \cdot \mathbf{X}_m$$

$\mathbf{a}(t)$  et  $\mathbf{x}(t)$  sont en opposition de phase. Les deux s'annulent aux mêmes instants mais quand l'une est maximum, l'autre est minimum.

#### 2.6) Illustrations graphiques

Posons  $\varphi = 0$  et  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ , on obtient :

$$x(t) = \mathbf{X}_m \cos(2\pi t/T_0); \quad v_x(t) = \mathbf{V}_m \cos(2\pi t/T_0 + \frac{\pi}{2}) \text{ et } a_x(t) = \mathbf{a}_m \cos(2\pi t/T_0 + \pi)$$

Sur une période, on obtient le tableau suivant :

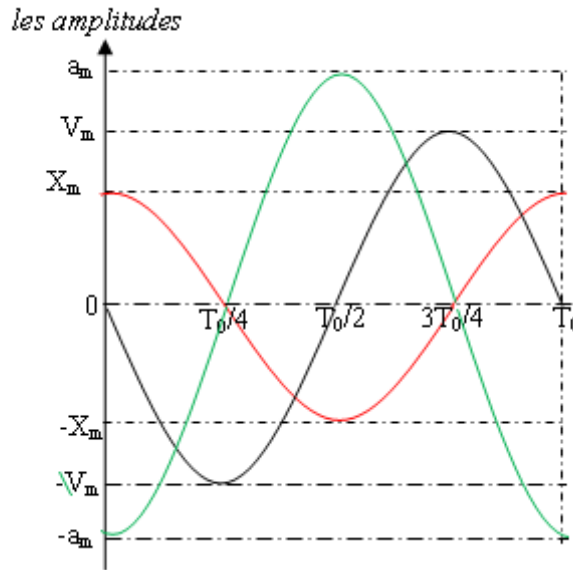
t(s)	0	$T_0/4$	$T_0/2$	$3T_0/4$	$T_0$
x(cm)	$X_m$	0	$-X_m$	0	$X_m$
v(m/s)	0	$-V_m$	0	$V_m$	0
a(m/s <sup>2</sup> )	$-a_m$	0	$a_m$	0	$-a_m$

**NB** : Lorsque  $\varphi = 0$ , l'instant de passage à ces positions correspond à la période  $t = \frac{T_0}{4}$

Lorsque  $\varphi \neq 0$ , pour trouver l'instant de passage à ces positions, il suffit de résoudre l'équation

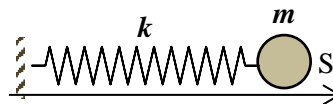
$X_m \cos(\omega_0.t + \varphi) = x_0$  ( avec  $x_0 = 0$  ;  $X_m$ , ;  $-X_m$ ).

Soit  $x = 0$  ;  $\Rightarrow \cos(\omega_0.t + \varphi) = 0 \Rightarrow \cos(\omega_0.t + \varphi) = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$



**Application N°3**

L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdale est donnée par la relation  $x = 3 \cdot \cos(20t + \frac{\pi}{4})$  ;  $x(\text{cm})$ ,  $t(\text{s})$



- 1) Détermine l'expression de la vitesse  $v_x$  et de l'accélération  $a_x$  de l'oscillateur à chaque instant
- 2) Calcul la vitesse et l'accélération aux dates  $t = 0\text{s}$  et à  $t = 4\text{s}$ .

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Vitesse et accélération à la date  $t$

- vitesse :  $v_x = \frac{dx}{dt} = -60 \sin(20t + \frac{\pi}{4})$  (cm/s) ou  $v_x = -0,6 \sin(20t + \frac{\pi}{4})$  (m/s)
- accélération :  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -1200 \cos(20t + \frac{\pi}{4})$  (cm/s<sup>2</sup>) ou  $a_x = -12 \cos(20t + \frac{\pi}{4})$  (m/s<sup>2</sup>)

3) Calcul de la valeur de la vitesse  $v$  et de l'accélération  $a$  à la date  $t = 0\text{s}$  et  $t = 4\text{s}$

● **valeur de v**

$t = 0\text{s} : v_x(0) = -0,6 \sin(20 \times 0 + \frac{\pi}{4}) = -0,42 \text{ m/s}$

$t = 4\text{s} : v_x(0) = -0,6 \sin(20 \times 4 + \frac{\pi}{4}) = 0,47 \text{ m/s}$

● **valeur de a**

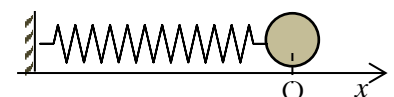
$a_x = -12 \cos(20 \times 0 + \frac{\pi}{4}) = -8,49 \text{ m/s}^2$

$a_x = -12 \cos(20 \times 4 + \frac{\pi}{4}) = -7,5 \text{ m/s}^2$

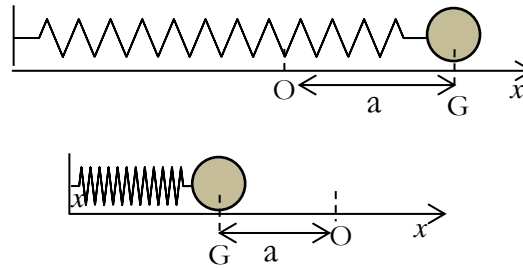
**NB : il faut mettre la calculatrice en mode radian (rad) pour effectuer les calculs.**

**Application N°4**

Un pendule élastique horizontal est réalisé à l'aide d'un ressort de raideur  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  et d'un solide de masse  $m = 100 \text{ g}$ .



- 1) Calcule la pulsation propre  $\omega_0$
- 2) On allonge le pendule de  $a = +4$  cm et l'abandonne sans vitesse initiale à  $t = 0$ s. Détermine l'expression horaire  $x(t)$  de ce pendule.
- 3) On raccourcie ce même pendule de  $a = -4$  cm et l'abandonne sans vitesse initiale à  $t = 0$ s. Détermine l'expression horaire  $x(t)$  de ce pendule.



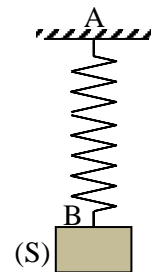
**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

- 1) la pulsation propre est :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 10$  rad/s
- 2) équation horaire  $x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos(10t)$
- 3) équation horaire  $x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \cos(10t + \pi)$

**EXERCICE** (Tle C) Pendule élastique vertical.

On dispose d'un ressort à spire non jointives de masse négligeable, de longueur  $\ell = AB$ , fixé en un point A. La constante de raideur du ressort est  $k = 2,5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ . On accroche le solide S sur le ressort à vide et on déplace verticalement S de  $y = 2$  cm vers le bas puis on l'abandonne sans vitesse initiale.

- 1- Établis l'équation différentielle du mouvement de (S).
  - 2- La période des oscillations est  $T = 1,25$  s. Calcule la masse  $m$  du solide (S).
  - 3- Établis l'équation horaire qui est de la forme  $y = Y_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$
- On précisera le sens positif, les origines des espaces et du temps choisis.



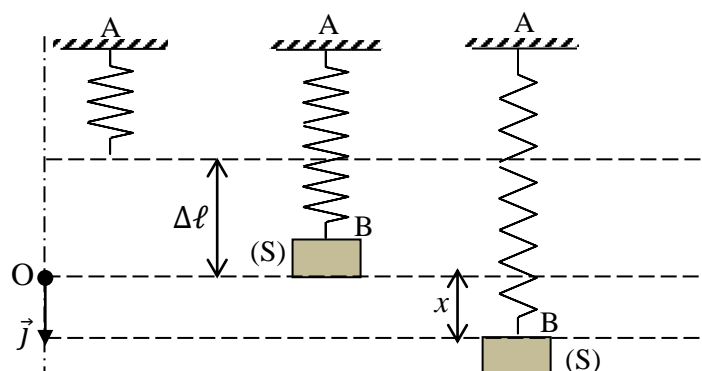
**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1- Montrons que le mouvement de (S) est rectiligne sinusoïdal.

Système : le solide S

Référentiel : terrestre supposé Galiléen lié au repère  $(O, \vec{k})$

Bilan des forces :  $\vec{P}$  le poids du solide (S) ; la tension du ressort  $\vec{T}_0$



- A l'équilibre :  $\vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0}$ . En projetant sur  $y'y$ , on a :  $P - T = 0 \Rightarrow m\mathbf{g} - k\Delta\ell = 0$
  - Théorème du centre d'inertie :  $\vec{P} + \vec{T} = m\cdot\vec{a}$
- En projetant sur  $y'y$  :  $P - T = m\cdot\ddot{y} \Rightarrow m\cdot g - k(\Delta\ell + y) = m\cdot\ddot{y} \Rightarrow m\cdot g - k\Delta\ell - k\cdot y = m\cdot\ddot{y}$   
 D'après (1) :  $m\cdot g - k\Delta\ell = 0$

On a finalement :  $-k \cdot y = m \cdot \ddot{y}$  soit  $\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$

2- Calcule la masse m du solide.

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \implies T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \times m}{k} \text{ d'où } m = \frac{k \times T^2}{4 \times \pi^2} = \frac{2,5 \times 1,25^2}{4 \times \pi^2} = 0,099 \text{ kg} = 100 \text{ g}$$

3- Établissons l'équation horaire y de S.

- Sens positif : sens vertical ascendant
- Origine des espaces : la position d'équilibre
- Origine des temps : instant où le solide est abandonné sans vitesse initiale.

Une solution de cette équation est :  $y = Y_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$  avec  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi}{1,25} = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$Y_m$  et  $\varphi$  sont données par les conditions initiales :  $y = Y_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$

A  $t = 0$ ,  $y = Y_m \cdot \sin \varphi = y_0 \implies \sin \varphi < 0$  avec  $y_0 = -2 \text{ cm} = -2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

A  $t = 0$ ,  $\dot{y} = \omega \cdot Y_m \cdot \cos \varphi = 0 \implies \cos \varphi = 0$

Donc pour  $\sin \varphi < 0$  et  $\cos \varphi = 0$ , on a :  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi = \frac{3 \cdot \pi}{2}$  d'où  $Y_m = \frac{y_0}{\sin \varphi} = \frac{-2 \cdot 10^{-2}}{\sin(-90^\circ)} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Finalement :  $y = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(5 \cdot t - \frac{\pi}{2})$  ou  $y = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(5 \cdot t + \frac{3 \cdot \pi}{2})$  avec  $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$

### 3) ENERGIE MÉCANIQUE DU SYSTÈME (RESSORT + SOLIDE)

#### 3.1) Expression des énergies

##### 3.1.1) Expression de l'énergie cinétique

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 \text{ avec } x(t) = X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \text{ donc } E_C = \frac{1}{2} m \cdot (-\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi))^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \text{ or } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ d'où } m \cdot \omega_0^2 = k ; E_C = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

##### 3.1.2) Expression de l'énergie potentielle élastique

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \text{ avec } x(t) = X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \text{ donc } E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

##### 3.1.3) Expression de l'énergie mécanique

$E = E_C + E_{pp} + E_{pe}$  ; ( $E_{pp} = mgz = 0$  car on suppose que l'axe du ressort est pris comme origine du potentiel ( $z = 0$ )).

#### 3.2) Conservation de l'énergie mécanique

$$E_m = E_C + E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

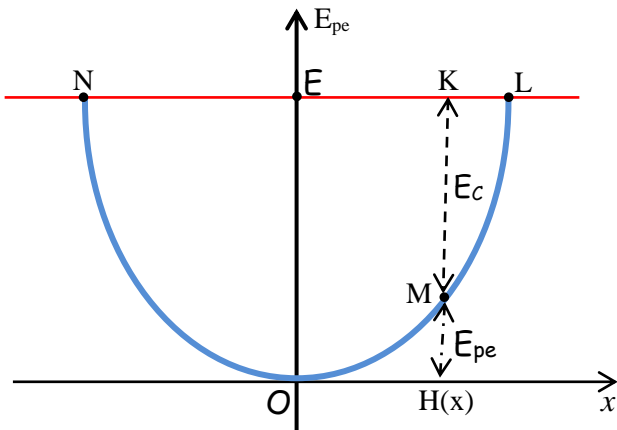
$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 [(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))] = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2} m V_m^2 = \text{constant} ; \text{ avec } k = m \cdot \omega_0^2 \text{ et } V_m = \omega_0 \cdot X_m$$

Finalement :  $E = E_0 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 = \frac{1}{2} m V_m^2 = E_{\max} = \text{constante}$

L'énergie mécanique totale d'un oscillateur non amorti est donc constante.

Représentation graphique des énergies



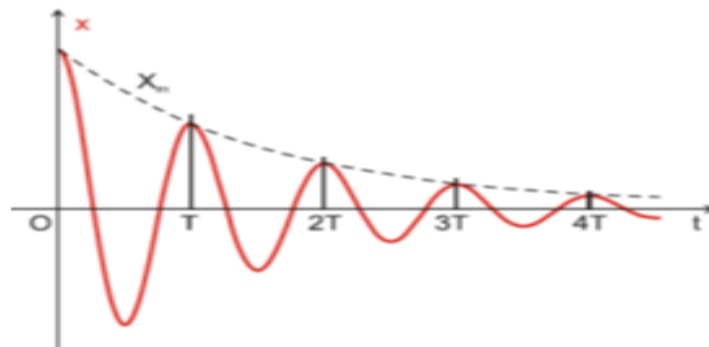
- $\overline{HK} = E$  : énergie mécanique du système
- $\overline{HM} = E_{pe}$  : énergie potentielle élastique du ressort
- $\overline{MK} = \overline{HK} - \overline{HM} = E - E_{pe} = E_c$
- $\overline{HK} = E_c$  : énergie cinétique du solide S.

**3.3) Non-conservation de l'énergie mécanique**

En plus des trois (03) forces décrites, le solide est soumis maintenant soumis à la force  $\vec{f}$ .  
 d'où  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$  avec  $\vec{f} = -\alpha \cdot \vec{v}$  (forces de frottement ou force de résistance de l'air).

L'équation différentielle est modifiée :  $-k \cdot x - \alpha \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \cdot \dot{x} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$ .

- Lorsque les frottements sont faibles, le solide effectue des oscillations avant de s'immobiliser dans sa position d'équilibre (**régime pseudo-périodique amorti**). **L'amplitude  $X_m$  diminue**



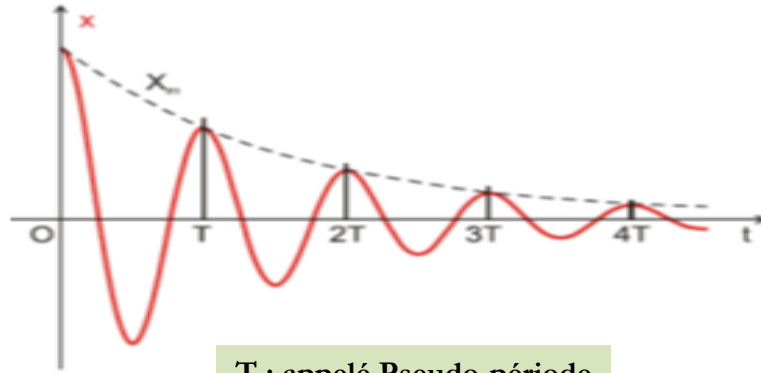
- Lorsque les frottements sont importants, le solide revient à sa position d'équilibre sans osciller autour de celle-ci. (**Régime apériodique**).
- Entre les deux régimes, il existe une valeur de  $\alpha$  conduisant au régime critique. Le solide revient très rapidement, sans osciller, à sa position d'équilibre.

**REMARQUE : Terminale D**

Si un oscillateur mécanique n'est pas entretenu :

- **l'amplitude  $X_m$  diminue** au cours du temps à cause des frottements.
- **l'énergie mécanique diminue** au cours du temps et se transforme en énergie calorifique.

**NB** : l'entretien consiste à apporter de l'énergie pour compenser l'énergie mécanique perdue.



**T : appelé Pseudo-période**

**Activité d'application 4**

l'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne sinusoïdal est donnée par la relation  $x(t) = 0,1\cos(20t + \frac{\pi}{4})$  ;  $x(m)$  ;  $t(s)$  et  $m = 100g$

- 1) Établir pour cet oscillateur, l'expression de la vitesse  $v(t)$  et de l'accélération  $a(t)$
- 2) Déduis sa vitesse et son accélération maximales
- 3) Calcul l'énergie cinétique  $E_C$  et l'énergie potentielle  $E_p$
- 4) Montre que l'énergie mécanique  $E = E_C + E_p$  se conserve.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Vitesse  $v_x(t)$  et accélération  $a_x(t)$  à la date  $t$

vitesse :  $v_x = \frac{dx}{dt} = -2\sin(20t + \frac{\pi}{4})$  (m/s)

accélération :  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -40\cos(20t + \frac{\pi}{4})$  (m/s<sup>2</sup>)

2) Déduisons la vitesse et l'accélération maximales

$V_m = \omega_0 X_m = 20 \times 0,1 = 2$  m/s

$a_m = \omega_0^2 X_m = 20^2 \times 0,1 = 40$  m/s<sup>2</sup>

3) Calcul des énergies  $E_C$  et  $E_p$

■  $E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot (-2\sin(20t + \frac{\pi}{4}))^2 = 0,5 \times 0,1 \times (-2)^2 \times \sin^2(20t + \frac{\pi}{4}) = 0,2\sin^2(20t + \frac{\pi}{4})$

■  $E_p = \frac{1}{2}k \cdot x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 (0,1\cos(20t + \frac{\pi}{4}))^2 = 0,5 \times (0,1) \times (20)^2 \times (0,1)^2 \cos^2(20t + \frac{\pi}{4})$   
 $= 5 \cdot 10^{-4} \cos^2(20t + \frac{\pi}{4}) = 0,2\cos^2(20t + \frac{\pi}{4})$  avec  $k = m \cdot \omega_0^2$

4) Montrons que l'énergie mécanique se conserve.

$E = E_C + E_p = 0,2\sin^2(20t + \frac{\pi}{4}) + 0,2\cos^2(20t + \frac{\pi}{4}) = 0,2 (\sin^2(20t + \frac{\pi}{4}) + \cos^2(20t + \frac{\pi}{4})) = 0,2$  J

**Détermination de  $X_m$  et  $\varphi$  avec  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .**

$$(1) x_0 = X_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x_0}{X_m}$$

$$(2) v_{0x} = -X_m \omega_0 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{v_{0x}}{-\omega_0 X_m}$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{(x_0)^2}{(X_m)^2} + \frac{(v_{0x})^2}{\omega_0^2 X_m^2} \Rightarrow \frac{(x_0)^2}{(X_m)^2} + \frac{(v_{0x})^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1 \Rightarrow X_m^2 = x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}$$

$$X_m^2 = x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2} \Rightarrow X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\omega_0}\right)^2}$$

**Pour tout mouvement oscillatoire**

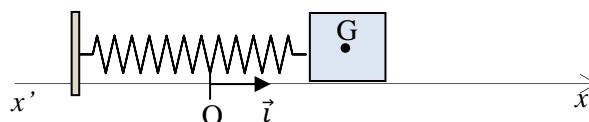
Si on a :  $x_0 = \pm a$  et  $v_{0x} = 0$  alors  $X_m = x_0$

Si on a :  $x_0 = \pm a$  et  $v_{0x} \neq 0$  alors  $X_m > x_0$

**SITUATION D'ÉVALUATION (Terminale D)**

Un groupe d'élèves de ta classe s'exerce en vue de réussir le prochain devoir de Physique. À cet effet, ces élèves découvrent dans un manuel, un exercice qui comporte de schéma ci-après. Sur ce schéma, est représenté un pendule élastique constitué d'un ressort de constante de raideur  $k = 25 \text{ N.m}^{-1}$  et d'un solide de masse  $m = 250 \text{ g}$ . À l'équilibre, le centre d'inertie  $G$  du solide (S) est à la verticale du point  $O$ , origine du repère  $(O, \vec{i})$ .

Le solide est écarté de sa position d'équilibre vers la droite.  $G$  occupe alors la position  $G_0$  telle que  $\overline{OG_0} = x_0 = 2 \text{ cm}$ . Il est ensuite lancé à l'instant  $t = 0$ , avec une vitesse initiale  $v_0 = 0,20 \text{ m.s}^{-1}$ . Le pendule oscille alors sans frottement autour du point  $O$ , le long d'un axe horizontal  $(x'x)$ .



Ces élèves veulent déterminer les caractéristiques de l'oscillateur mais ils ont du mal à s'accorder sur la méthode à utiliser. Ils sollicitent alors ton aide.

- 1) Cite les forces extérieures qui s'exercent sur le solide
- 2) Établis l'équation différentielle qui régit le mouvement du centre d'inertie  $G$  du solide.
- 3) Montre que l'équation horaire  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de cette équation différentielle.
- 4) Détermine :
  - 4.1) les valeurs de l'amplitude  $X_m$  et de la phase  $\varphi$  à l'origine ;
  - 4.2) l'expression de la vitesse instantanée  $v(t)$  du solide (S)
  - 4.3) L'énergie mécanique de l'oscillateur.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

N° 1,2,3) Voir Cours

$$4) \omega_0 = \sqrt{\frac{25}{0,25}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

4.1)

Détermination de l'amplitude  $X_m$  et la phase initiale  $\varphi$

A la date  $t = 0\text{ s}$  ;  $x = x_0 = X_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi > 0$   
 et  $v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin \varphi$ . Or  $x_0 > 0$  et  $v_{0x} < 0 \Rightarrow \sin \varphi > 0$   
 Donc  $\cos \varphi > 0$  et  $\sin \varphi > 0$

Déterminons  $\varphi$  et  $X_m$  à l'aide des conditions initiales. Il vient, pour  $t_0 = 0\text{ s}$  ;

$$\begin{cases} x_0 = X_m \cos \varphi & (1) \\ v_{0x} = \omega_0 X_m \sin \varphi & (2) \end{cases} \quad \tan \varphi = -\frac{v_{0x}}{\omega_0 x_0} = -\frac{-0,2}{10 \times 0,02} = \frac{0,2}{10 \times 0,02} = 1$$

L'équation  $\text{tgx} = \text{tga}$  (où  $a \in \mathbb{R}$ ) alors la solution de l'équation est  $S = \{x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

tan alors  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ( $\cos \varphi > 0$  et  $\sin \varphi > 0$ )

avec  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  ;  $X_m = \frac{0,02}{\sin \frac{\pi}{4}} = 0,028\text{ m} > 0$

4.2) expression de la vitesse instantanées  $v(t)$  du solide (S)

$$v_x(t) = -0,28 \sin \left( 10t + \frac{\pi}{4} \right)$$

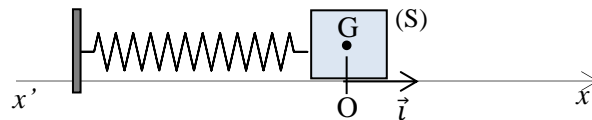
4.3) Détermination de l'énergie mécanique de l'oscillateur.

$$E_m = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 X_m^2 ; \text{A.N } E_m = \frac{1}{2} \times 0,25 \times 10^2 \times (0,028)^2$$

$$E_m = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

### SITUATION D'ÉVALUATION (Terminale C)

Pour l'étude d'un oscillateur mécanique lors d'une séance de travaux pratiques, un groupe d'élèves de Terminale Scientifique fixe à un support l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et l'autre extrémité du ressort à un solide (S). Le solide de masse  $m = 100\text{ g}$  et de centre d'inertie G peut se déplacer sans frottement le long d'un axe ( $x'x$ ) muni d'un repère ( $O, \vec{i}$ ). Lorsque le ressort de raideur  $k = 120\text{ N.m}^{-1}$  est au repos, le centre d'inertie G du solide se trouve à la verticale de O.



L'un des élèves écarte le solide (S) de cette position. Lorsque l'abscisse de son centre d'inertie est  $x_0 = 2,0\text{ cm}$ , il le lance avec une vitesse  $v_0 = 1,2\text{ m.s}^{-1}$  vers le point O à la date  $t = 0\text{ s}$ .

Le solide effectue alors un mouvement de va-et-vient autour de O.

N.B : L'énergie potentielle est nulle dans la position d'équilibre du système.

Étant membre du groupe, il t'est demandé(e) d'étudier le mouvement du système (ressort+solide).

- 1) Cite les forces extérieures qui s'appliquent au solide (S) lorsque  $x$  est différent de 0.
- 2) Établis l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du solide (S).
- 3) Déduis l'équation horaire du mouvement du solide sous la forme  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$
- 4) Détermine
  - 4.1) la vitesse de (S) au passage par la position d'équilibre ;
  - 4.2) l'expression, à la date  $t$  ; de l'énergie cinétique  $E_c(t)$  et l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}(t)$  de (S).
  - 4.3) la valeur de l'énergie mécanique  $E$  du système.

### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

N° 1,2) Voir Cours

3) Déduis l'équation horaire du mouvement du solide sous la forme  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{120}{0,1}} = 34,64 \text{ rad.s}^{-1}$$

Détermination de l'amplitude  $X_m$  et la phase initiale  $\varphi$

A la date  $t = 0 \text{ s}$  ;  $x = x_0 = X_m \sin \varphi$  et  $v_{0x} = \omega_0 X_m \cos \varphi$ . **Or  $x_0 > 0$  et  $v_{0x} < 0$**

**Donc  $\sin \varphi > 0$  et  $\cos \varphi < 0$**

**NB : la position de  $x_0$  donne le sens et le signe de  $v_{0x}$**

Déterminons  $\varphi$  et  $X_m$  à l'aide des conditions initiales. Il vient, pour  $t_0 = 0 \text{ s}$  ;

$$\begin{cases} x_0 = X_m \sin \varphi & (1) \\ v_{0x} = \omega_0 X_m \cos \varphi & (2) \end{cases} \quad \tan \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{v_{0x}} = \frac{34,64 \times 0,02}{-1,2} = -0,577$$

alors  $\varphi = -29,985^\circ = -30^\circ = -\frac{\pi}{6} \text{ rad}$  et comme ( $\cos \varphi < 0$  et  $\sin \varphi > 0$ ) alors  $\varphi = (\pi - \frac{\pi}{6}) \text{ rad}$

$$\varphi = \frac{5\pi}{6} \text{ rad et } X_m = \frac{x_0}{\sin \varphi} = \frac{0,02}{\sin \frac{5\pi}{6}} = 0,04 \text{ m d'où } X_m = 4 \text{ cm. Donc } x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(34,64 t + \frac{5\pi}{6})$$

4)

4.1) La vitesse de (S) au passage par la position d'équilibre :

$$v(t) = 1,3856 \cos(34,64t + \frac{5\pi}{6}) ; \text{ au passage par la position d'équilibre } (x = 0 \text{ et } v_x < 0).$$

Donc  $\sin(34,64t + \frac{5\pi}{6}) = 0$  et  $\cos(34,64t + \frac{5\pi}{6}) < 0$ .

$$\sin(34,64t + \frac{5\pi}{6}) = \sin \pi \Rightarrow (34,64t + \frac{5\pi}{6}) = \pi \text{ d'où } t = \frac{\frac{\pi}{6}}{34,64} = \frac{\pi}{6 \times 34,64} \text{ s} = \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{34,64}$$

$$v_x = 1,3856 \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}) = 1,3856 \cos \pi = -1,3856 \text{ m.s}^{-1}. \text{ Soit } v_x = -1,3856 \text{ m.s}^{-1} = -1,4 \text{ m.s}^{-1}.$$

4.2) Expression de l'énergie cinétique  $E_c(t)$  et de l'énergie potentielle élastique  $E_{pe}(t)$  de (S)

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \times 0,1 \times (1,3856)^2 \times \left[ \cos(34,64t + \frac{5\pi}{6}) \right]^2$$

$$E_c(t) = 9,6 \cdot 10^{-2} \times \left[ \cos(34,64t + \frac{5\pi}{6}) \right]^2$$

$$E_{pe}(t) = \frac{1}{2} \times 120 \times (0,04)^2 \times \left[ \sin(34,64t + \frac{5\pi}{6}) \right]^2$$

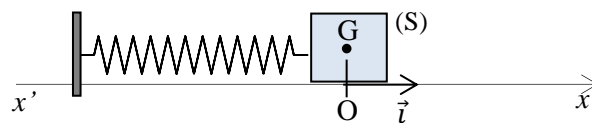
$$E_{pe}(t) = 9,6 \cdot 10^{-2} \times \left[ \sin(34,64t + \frac{5\pi}{6}) \right]^2$$

4.3) La valeur de l'énergie mécanique du système  $E = E_c(t) + E_{pe}(t)$

$$\underline{\underline{E = 9,6 \cdot 10^{-2} \text{ J}}}$$

### SITUATION D'ÉVALUATION N°3 (Terminale C)

Pour l'étude d'un oscillateur mécanique lors d'une séance de travaux pratiques, un groupe d'élèves de Terminale Scientifique fixe à un support l'une des extrémités d'un ressort à spires non jointives, de masse négligeable et l'autre extrémité du ressort à un solide (S). Le solide de masse  $m = 100 \text{ g}$  et de centre d'inertie G peut se déplacer sans frottement le long d'un axe ( $x'x$ ) muni d'un repère (O,  $\vec{i}$ ). Lorsque le ressort de raideur  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  est au repos, le centre d'inertie G du solide se trouve à la verticale de O.



L'un des élèves écarte le solide (S) de cette position. Lorsque l'abscisse de son centre d'inertie est  $x_0 = -4,5 \text{ cm}$ , il le lance avec une vitesse  $v_0 = 0,45 \text{ m.s}^{-1}$  vers le point O à la date  $t = 0 \text{ s}$ .

Le solide effectue alors un mouvement de va-et-vient autour de O.

**N.B :** L'énergie potentielle est nulle dans la position d'équilibre du système.  
 Étant membre du groupe, il t'est demandé(e) d'étudier le mouvement du système (ressort+solide).

- 1) Utilise le théorème du centre d'inertie et établis l'équation différentielle du mouvement du centre d'inertie G du solide.
- 2) En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , vérifie que l'équation du mouvement de G est de la forme  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$
- 3) Détermine cette équation horaire.
- 4) Calcule l'énergie mécanique  $E_0$  du système (ressort + solide) à l'instant  $t = 0$ .
- 5) Écris l'expression de l'énergie mécanique E en fonction de k et  $X_m$  et utilise le résultat de la question précédente pour confirmer la valeur de l'amplitude  $X_m$  trouver à la question 3.
- 6) Détermine la vitesse du solide lors de son première passage à la position d'équilibre.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

**1) équation différentielle du mouvement**

**Système :** Le solide de masse (m)

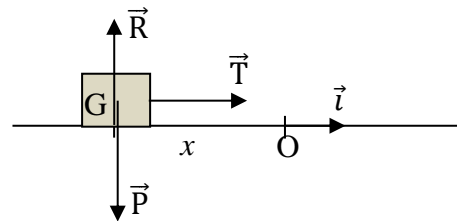
**Référentiel :** Référentiel terrestre considéré comme galiléen

Bilan des forces extérieures :

$\vec{P}$  : le poids du solide de masse (m)

$\vec{R}_N$  : la réaction normal de l'axe de coulissement

$\vec{T}$  : la tension du ressort



Théorème du centre d'inertie :  $\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$  ;  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}$

Exprimons les vecteurs en fonction de  $\vec{l}$  :  $\vec{T} = -k \cdot \overrightarrow{OG} = -k \cdot x \cdot \vec{l}$  avec  $OG = x$  ;  $\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{l}$  ;

finalement :  $-k \cdot x \cdot \vec{l} = \ddot{x} \cdot \vec{l}$

finalement  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$  (1) C'est l'équation différentielle du mouvement du solide

2)

$$\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{k}{m} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$$

donc  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  vérifie l'équation

3) Équation horaire

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10}{0,1}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

Détermination de l'amplitude  $X_m$  et la phase initiale  $\varphi$

A la date  $t = 0 \text{ s}$  ;  $x = x_0 = X_m \cos \varphi$  et  $v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin \varphi$ . Or  $x_0 < 0$  et  $v_{0x} > 0$

**Donc  $\cos \varphi < 0$  et  $\sin \varphi < 0$**

**NB :** la position de  $x_0$  donne le sens par rapport à  $\vec{l}$  et le signe de  $v_{0x}$

Déterminons  $\varphi$  et  $X_m$  à l'aide des conditions initiales. Il vient, pour  $t_0 = 0 \text{ s}$  ;

$$\begin{cases} x_0 = X_m \cos \varphi & (1) \\ v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin \varphi & (2) \end{cases} \quad \tan \varphi = -\frac{v_{0x}}{\omega_0 x_0} = -\frac{0,45}{10 \times (-0,045)} = 1$$

L'équation  $\text{tg} x = \text{tga}$  (où  $a \in \mathbf{R}$ ) alors la solution de l'équation est  $S = \{x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbf{Z}\}$

$$\text{tg} x = \text{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow \varphi = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \text{rad} = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

**N.B :** Pour calculer l'amplitude  $X_m$ , l'angle doit être en degré ( $\frac{5\pi}{4}$  rad = 225 ° (degré))

$$X_m = \frac{x_0}{\cos\varphi} = \frac{-4,5}{\cos 225^\circ} = 6,36 \text{ cm d'où } X_m = 6,36 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{Donc } x(t) = 6,36 \cdot 10^{-2} \sin(10 t + \frac{5\pi}{4})$$

4) Calcule l'énergie mécanique  $E_0$  du système (ressort + solide) à l'instant  $t = 0$ .

$$E_0 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_0^2$$

$$\text{A.N : } E_0 = 0,5 \times 0,1 \times (0,45)^2 + 0,5 \times 10 \times (-0,045)^2 = 0,010125 + 0,010125 = 0,02025 \text{ J}$$

5) l'expression de l'énergie mécanique  $E$  en fonction de  $k$  et  $X_m$  et utilise le résultat de la

$$E_0 = E = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \Rightarrow X_m = \sqrt{\frac{2 \times E_0}{k}}; \text{ A.N : } X_m = \sqrt{\frac{2 \times 0,02025}{10}} = 6,36 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Le résultat concorde avec  $X_m$  calculé à la question

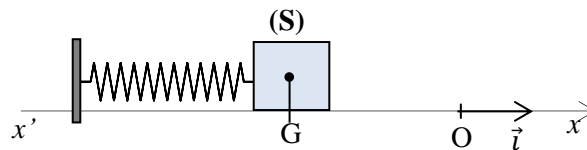
6) la vitesse du solide lors de son première passage à la position d'équilibre.

à la position d'équilibre  $x = 0$  donc  $v = V_m = \omega_0 \cdot X_m = 10 \times 0,0636 = 0,636 \text{ m.s}^{-1}$ .

### SITUATION D'ÉVALUATION N°4 (Terminale D)

Un groupe d'élève d'une classe de Terminale D désire déterminer la constante de raideur d'un ressort de masse négligeable à spires non jointives, pour cela il dispose verticalement le ressort et accroche une masse  $m$  à l'une de ses extrémités, l'autre étant fixe. Il s'allonge de  $a$ .

Ils disposent ensuite le ressort comme l'indique la figure ci-dessous. À l'extrémité fixe (S) est le solide de masse  $m$  qui peut se déplacer sans frottement le long de l'axe (Ox).



À l'équilibre, le centre d'inertie  $G$  de (S) coïncide avec l'origine  $O$  du repère. Ensuite ils compriment le ressort en le poussant vers la gauche. Le point  $G$  occupe la position  $G_0$  d'abscisse  $x_0$ . À l'instant  $t = 0$ , ils lâchent le solide sans vitesse initiale.

**Données :**  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $a = 10 \text{ cm}$  ;  $m = 200 \text{ g}$  ;  $x_0 = -15 \text{ cm}$

1) Vérifie que sa constante de raideur est  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$ .

2)

2.1- Représente les forces qui agissent sur le solide (S) sur la figure.

2.2- Établis l'équation différentielle qui régit le mouvement de  $G$ . Donne sa nature.

2.3- Calcule la pulsation propre  $\omega_0$  et la période propre  $T_0$ .

2.4- Vérifie que quelles que soient les valeurs de  $X_m$  et  $\varphi$ , l'équation horaire  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation différentielle précédente.

3-

3.1- Détermine l'amplitude  $X_m$  et la phase à l'origine  $\varphi$  du mouvement.

3.2- Détermine l'expression de la vitesse  $v(t)$  du solide et déduis sa valeur maximale.

3.3- Donne l'expression de l'énergie mécanique de cet oscillateur à  $t = 0$ .

3.4- Utilise la conservation de l'énergie mécanique et retrouve la valeur maximale de la vitesse du solide.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1) Vérifie que sa constante de raideur est  $k = 20 \text{ N.m}^{-1}$ .

A l'équilibre  $\vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$  alors  $P = T \Rightarrow m.g = k.x \Rightarrow k = \frac{m.g}{x}$  ; A.N :  $k = \frac{0,2 \times 10}{0,1} = 20 \text{ N.m}^{-1}$ .

2.2- Établis l'équation différentielle qui régit le mouvement de G. Donne sa nature.

**Systeme** : Le solide de masse (m)

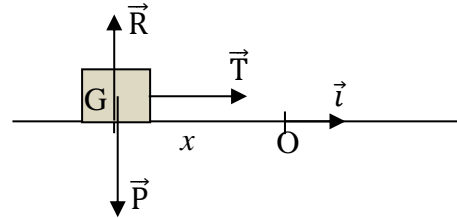
**Référentiel** : Référentiel terrestre considéré comme galiléen

Bilan des forces extérieures :

$\vec{P}$  : le poids du solide de masse (m)

$\vec{R}_N$  : la réaction normal de l'axe de coulissement

$\vec{T}$  : la tension du ressort



Théorème du centre d'inertie :  $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$  ;  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m.\vec{a}$

Exprimons les vecteurs en fonction de  $\vec{l}$  :  $\vec{T} = -k.OG = -k.x.\vec{l}$  avec  $OG = x$  ;  $\vec{a} = \ddot{x}.\vec{l}$  ;

finalement :  $-k.x.\vec{l} = \ddot{x}.\vec{l} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

C'est l'équation différentielle du mouvement du solide

Le mouvement du solide est rectiligne sinusoïdale.

2.3- Calcule la pulsation propre  $\omega_0$  et la période propre  $T_0$ .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$$

2.4-

$$\dot{x} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = -\omega_0^2 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$\ddot{x} = -\frac{k}{m} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$  donc  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  vérifie l'équation différentielle.

3.1- Détermine l'amplitude  $X_m$  et la phase à l'origine  $\varphi$  du mouvement.

A la date  $t = 0s$  ;  $x = x_0 = X_m \cos \varphi$  et  $v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin \varphi$ .

**Or  $x_0 < 0$  et  $v_{0x} = 0$ , donc  $\cos \varphi < 0$  et  $\sin \varphi = 0$**

**NB** : la position de  $x_0$  donne sa valeur, le sens et le signe de  $v_{0x}$  par rapport à  $\vec{l}$

Déterminons  $\varphi$  et  $X_m$  à l'aide des conditions initiales. Il vient, pour  $t_0 = 0s$  ;

$$\begin{cases} x_0 = X_m \cos \varphi = -a & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin \varphi = 0 & (2) \end{cases}$$

$$X_m = \frac{x_0}{\cos \varphi} > 0 \text{ et } \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi \text{ rad}$$

**Donc :  $x(t) = 0,15 \sin(10 t + \pi)$**

3.2- Détermine l'expression de la vitesse  $v(t)$  du solide et déduis sa valeur maximale.

$$v(t) = -1,5 \cos(10 t + \pi) \text{ et } V_m = \omega_0 X_m = 10 \times 0,15 = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$$

3.3- Donne l'expression de l'énergie mécanique de cet oscillateur à  $t = 0$ .

$$E_m(0) = \frac{1}{2} k.(x_0)^2 + \frac{1}{2} m.v_0^2 \text{ or } v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$$

3.4- Conservation de  $E_m$  :  $\frac{1}{2} m.V_m^2 = \frac{1}{2} k.(x_0)^2 \Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{k.(x_0)^2}{m}} = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\text{A.N : } V_m = 0,15 \times \sqrt{\frac{20}{0,2}} = 1,5$$

**SITUATION D'ÉVALUATION 05**

Au cours d'une séance de travaux pratiques (TP), un professeur et ses élèves étudient le pendule élastique.

Le dispositif est horizontal et constitué d'un solide (S) de masse  $m = 100\text{ g}$  et d'un ressort à spires non jointives de constante de raideur  $k = 40\text{ N.m}^{-1}$ . Le solide (S) fixé à une des extrémités du ressort, peut se déplacer sans frottements le long d'un banc à coussin d'air suivant l'axe  $x'x$ . L'autre extrémité du ressort reste fixée à un support solide du banc (voir figure ci-dessous).



À l'équilibre du système (solide + ressort), le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine du repère

$(O, \vec{i})$  liée à la tige. L'énergie potentielle du système est alors nulle. Tu es choisi pour manipuler. Tu écarter le solide (S) de sa position d'équilibre en comprimant le ressort. L'abscisse de G est alors  $x_0 = -2,5\text{ cm}$ .

Dans cette nouvelle position, Tu lâches le solide sans vitesse initiale. La position du centre d'inertie G est repérée par son abscisse au cours du temps. On prendra comme origine des dates le moment du lâcher.

**1) Étude du mouvement**

- 1.1- Sur un schéma, représente les forces appliquées au solide, juste après le lâcher.
- 1.2- Établis l'équation différentielle qui régit ce type de mouvement.

**2) Détermination des grandeurs**

La solution de l'équation différentielle est de la forme  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

- 2.1- Calcule les valeurs de  $X_m$ ,  $\omega_0$  et  $\varphi$  et réécris  $x(t)$ .
- 2.2- Vérifie que l'expression de la vitesse de S est  $v_x = -0,5 \sin(20t + \pi)$ .

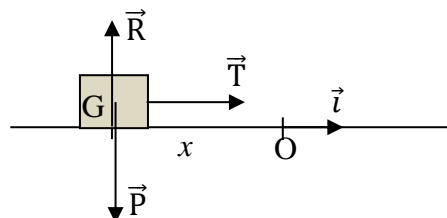
**3) Étude énergétique**

Le solide (S) passe pour la deuxième fois au point d'abscisse  $x = 0$ , à la date  $t'$  et avec une vitesse de valeur  $v'$ .

- 3.1- Détermine la valeur de  $t'$  et les caractéristiques de  $\vec{v}'$ .
- 3.2- Établis en fonction du temps, les expressions  $E_c$ ,  $E_p$  et  $E_m$ .
- 3.3- Dédus de ce qui précède, que le système est conservatif. Calcule la valeur de l'énergie mécanique  $E_m$ .

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

**1.1) Représentation**



**1.2) équation différentielle du mouvement**

**Système :** Le solide de masse (m)

**Référentiel :** Référentiel terrestre considéré comme galiléen

Bilan des forces extérieures :

$\vec{P}$  : le poids du solide de masse (m)

$\vec{R}_N$  : la réaction normal de l'axe de coulissement

$\vec{T}$  : la tension du ressort

Théorème du centre d'inertie :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$  ;  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R}_N = m \cdot \vec{a}$

Exprimons les vecteurs en fonction de  $\vec{l}$  :  $\vec{T} = -k \cdot \overline{OG} = -k \cdot x \cdot \vec{l}$  avec  $OG = x$  ;  $\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{l}$  ;

finalement :  $-k \cdot x \cdot \vec{l} = \ddot{x} \cdot \vec{l}$

finalement  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$  (1) C'est l'équation différentielle du mouvement du solide

2.1- Calcule les valeurs de  $X_m$ ,  $\omega_0$  et  $\varphi$  et réécris  $x(t)$ .

$X_m$  : Amplitude ou abscisse maximale ;  $\omega_0$  : pulsation propre ;  $\varphi$  : phase à l'origine ( $t = 0$ )

Calcule des valeurs

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \text{A.N} : \omega_0 = \sqrt{\frac{40}{0,1}} = 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

Soit  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$  ; à  $t = 0$ ,  $x = x_0$  et  $\dot{x} = 0$

$$(1) \text{ à } t = 0, x = X_m \cos \varphi = -0,025 \Rightarrow \cos \varphi < 0$$

$$(2) \text{ à } t = 0, \dot{x} = -\omega \cdot X_m \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \text{ ou } \varphi = 0$$

Si  $\varphi = 0$  l'équation (1) n'est pas vérifiée car  $\cos \varphi = 1 > 0$  donc  $\varphi = \pi$  rad

$$\text{A.N} : (1) : X_m = \frac{x_0}{\cos \varphi} = 0,025 \text{ m. finalement : } x(t) = 0,025 \cos(20 \cdot t + \pi)$$

2.2- Vérifions que l'expression de la vitesse de S est  $v_x = -0,5 \sin(20t + \pi)$ .

On a :  $x(t) = 0,025 \cdot \cos(20 \cdot t + \pi)$

$$v_x = \dot{x} = -0,025 \times 20 \cdot \sin(20t + \pi) = -0,5 \sin(20t + \pi)$$

3.1-

- Déterminons la valeur de  $t'$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ s}$$

$$1^{\text{er}} \text{ passage } t = \frac{T_0}{4} \text{ et } 2^{\text{ème}} \text{ passage } t' = \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{4} + \frac{T_0}{4} = \frac{3 \times T_0}{4} \Rightarrow t' = \frac{3 \times \pi}{40} = 0,236 \text{ s}$$

Passage par la position d'équilibre : équation :  $\cos(a \cdot t + b) = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

- passage pour la 1<sup>ère</sup> fois,  $n = 0$

- passage pour la 2<sup>ème</sup> fois,  $n = 1$

Une autre méthode de détermination de  $t'$

$$\text{équation trigonométrique : } \cos(20t + \pi) = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\text{l'équation devient : } \cos(20 \cdot t + \pi) = -\cos(20 \cdot t) = 0 \Rightarrow \cos(20 \cdot t) = -\cos\left(\frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \Rightarrow 20 \cdot t = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

$$t' = \frac{3 \times \pi}{40} = 0,24 \text{ s}$$

- Les caractéristiques de  $\vec{v}$  :

Direction : celle de l'axe ( $x'x$ )

Sens : contraire au sens de  $\vec{l}$

$$\text{Norme : } v' = \left| 0,5 \times \left( 20 \times \frac{3 \cdot \pi}{40} + \pi \right) \right| = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$$

3.2- Établis en fonction du temps, les expressions  $E_C$ ,  $E_P$  et  $E_m$ .

$$\blacksquare E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot (-0,5 \sin(20t + \pi))^2 = 0,5 \times 0,1 \times (-0,5)^2 \times \sin^2(20t + \pi) = 0,0125 \sin^2(20t + \pi)$$

$$\blacksquare E_P = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = 0,5 \times 40 \times (0,025^2 \cos^2(20t + \pi)) = 0,0125 \cos^2(20t + \pi)$$

$$E = E_C + E_p = 0,0125\sin^2(20t + \pi) + 0,0125\cos^2(20t + \pi) = 0,0125(\sin^2(20t + \pi) + \cos^2(20t + \pi))$$

$$E = E_C + E_p = 0,0125 \text{ J.}$$

3.3- Dédus de ce qui précède, que le système est conservatif

$E_m = \text{Cte} \Rightarrow$  système conservatif :

Calcule la valeur de l'énergie mécanique  $E_m$ .

$$\underline{E_m = 0,0125 \text{ J}}$$

### INTERROGATION ÉCRITE

La trajectoire d'un point animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdale est un segment de droite de longueur  $\ell = 20 \text{ cm}$ . La période du mouvement est  $T = 0,4 \text{ s}$ .

À  $t = 0$ , le point se trouve à l'abscisse  $x = -5 \text{ cm}$  et se déplace dans le sens négatif.

Établis l'équation horaire  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  de ce mouvement.

#### RÉSOLUTION DÉTAILLÉE

$$X_m = \frac{\ell}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \times \frac{1}{T_0} = 2\pi \times \frac{10}{4} = 5\pi$$

• Détermination de  $\varphi$  :  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Condition initiale  $x_0$  et  $v_{0x}$ .

$$(1) x_0 = x(t=0) \Rightarrow X_m \cos\varphi = x_0 = -5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \cos\varphi < 0$$

$$(2) v_{0x} = v_x(t=0) \Rightarrow -\omega_0 X_m \sin\varphi = v_{0x} < 0 \Rightarrow \sin\varphi > 0$$

$$\text{Calcul de } \varphi : \cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} = \frac{-5 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^{-2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ car } (\cos\varphi < 0 \text{ et } \sin\varphi > 0)$$

$$x(t) = 0,1 \cdot \cos\left(5\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

• Détermination de  $\varphi$  :  $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Condition initiale  $x_0$  et  $v_{0x}$ .

$$(1) x_0 = x(t=0) \Rightarrow X_m \sin\varphi = x_0 = -5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow \sin\varphi < 0$$

$$(2) v_{0x} = v_x(t=0) \Rightarrow \omega_0 X_m \cos\varphi = v_{0x} < 0 \Rightarrow \cos\varphi < 0$$

$$\text{Calcul de } \varphi : \sin\varphi = \frac{x_0}{X_m} = \frac{-5 \cdot 10^{-2}}{10 \cdot 10^{-2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \varphi = -\frac{5\pi}{6} \text{ car } (\cos\varphi < 0 \text{ et } \sin\varphi < 0)$$

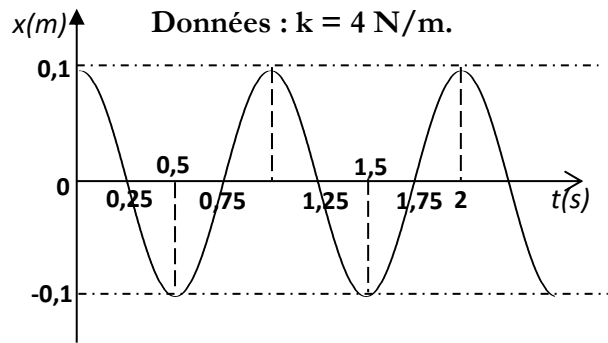
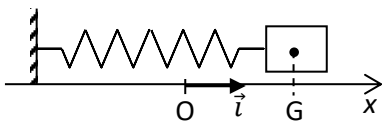
$$x(t) = 0,1 \cdot \sin\left(5\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) \text{ ou } x(t) = 0,1 \cdot \sin\left(5\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

**SITUATION D'ÉVALUATION 06**

Lors d'une séance de travaux dirigés, votre professeur vous demande d'étudier un pendule élastique horizontal non amorti en vue de déterminer la masse et l'énergie mécanique du système. Ce pendule élastique horizontal comprend un solide de masse  $m$  et un ressort de masse négligeable de raideur  $k$ . Le solide de centre d'inertie  $G$ , peut glisser sans frottement sur une tige horizontale. Lorsque le solide est à l'équilibre, son centre d'inertie  $G$  se situe au point  $O$ , origine du repère  $(O, \vec{i})$ . Le solide est écarté de  $x_0$  de sa position d'équilibre et abandonné sans vitesse initiale à la date  $t = 0s$ .

L'enregistrement des positions successives de  $G$  au cours du temps par un dispositif approprié a permis d'obtenir la courbe ci-dessous.

Tu es chargé de rédiger le compte rendu.



- 1) Détermine à partir de l'enregistrement et des données :
  - 1.1- l'amplitude ou élongation maximale  $X_m$ , la période des oscillations  $T_0$  et la masse  $m$  du solide.
  - 1.2- Écris l'équation horaire du mouvement sous la forme  $x(t) = X_m \cos(\omega_0.t + \varphi)$
  - 1.3- Les dates pour lesquelles
    - 1.3.1- l'énergie potentielle élastique est maximale.
    - 1.3.2- l'énergie cinétique est maximale.
  - 1.4- Calcule l'énergie mécanique du système.
- 2) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique,
  - 2.1- Calcule la vitesse maximale du solide.
  - 2.2- Établis l'équation différentielle du mouvement.

**RÉSOLUTION DÉTAILLÉE**

1.1- l'amplitude ou élongation maximale  $X_m = 0,1 \text{ m}$   
 la période des oscillations  $T_0 = k_n \times d = 0,25 \times 4 = 1 \text{ s}$

la masse  $m$  du solide est :  $\omega_0 = \frac{2.\pi}{T_0} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2.\pi}{T_0} \Rightarrow m = \frac{k.T_0^2}{4.\pi^2}$

A.N :  $m = \frac{4 \times (1)^2}{4.\pi^2} = 0,1 \text{ kg} = 100 \text{ g}$

1.2- l'équation horaire du mouvement sous la forme  $x(t) = X_m \cos(\omega_0.t + \varphi)$   
 à  $t = 0, x_0 = X_m = + 0,1 \text{ m} > 0$  ; ou à  $t = 0, v_{0x} = 0 \text{ m.s}^{-1}$ .

**NB : On pourrait avoir à  $t = 0, x_0 = - X_m = - 0,1 \text{ m} < 0$**

$v_{0x} = v(t=0) = - \omega_0.X_m \sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$ .(rad)

$x_0 = x(t=0) = X_m \cos\varphi \Rightarrow X_m = \frac{x_0}{\cos\varphi} > 0$  ou  $\cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} = \frac{X_m}{X_m} = 1$  alors :  $\varphi = 0 \text{ rad}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{0,1}} = 6,32 \text{ rad.s}^{-1}$ . et  $x(t) = 0,1 \cos(6,32.t)$

1.3.1- Les dates pour lesquelles l'énergie potentielle élastique est maximale.

pour  $E_{pmax} = \frac{1}{2} .kX_m^2$  ( $x = X_m$  et  $v_x = 0$ ) ; ici la variable est  $x$  car  $x = f(t)$ .

donc pour  $x = X_m \Rightarrow t = 0 ; 1 ; 2 ; 3$

1.3.2- Les dates pour lesquelles l'énergie cinétique est maximale.

pour  $E_{C_{max}} = \frac{1}{2}.mV_m^2$  ( $\mathbf{x} = 0$  et  $\mathbf{v}_x = V_m$ ) ; ici la variable est  $x$  car  $x = f(t)$ .

donc pour  $x = 0 \Rightarrow t = 0,75 ; 1,75$

1.4- Calcule l'énergie mécanique du système.

$$E = \frac{1}{2}.kX_m^2 ; \text{A.N} : E = 0,5 \times 4 \times (0,1)^2 = 0,02 \text{ J}$$

2.1- Calcule la vitesse maximale du solide en utilisant la conservation de  $E_m$ .

$$E = \frac{1}{2}.kX_m^2 = \frac{1}{2}.mV_m^2 \Rightarrow V_m = \sqrt{\frac{k}{m}.X_m} ; \text{A.N} : V_m = \sqrt{\frac{4}{0,1}.(0,1)} = 0,63 \text{ m.s}^{-1}$$

2.2- Établis l'équation différentielle du mouvement.

$$E_m = \frac{1}{2}.k.x^2 + \frac{1}{2}.m.v^2 = \text{cste} \quad \text{équivalent à} \quad E_m = \frac{1}{2}.k.x^2 + \frac{1}{2}.m.\dot{x}^2 = \text{cste}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}.k.(2.\dot{x}.x^2) + \frac{1}{2}.m.(2.\dot{x}.\ddot{x}) = 0 \Rightarrow \dot{x}(k.x + m.\ddot{x}) = 0$$

Quel que soit  $\dot{x}$  on a :  $k.x + m.\ddot{x} = 0$  soit  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  (équation différentielle)

**NB : Pour la fonction  $v = f(t)$  ;**

Les dates pour lesquelles l'énergie potentielle élastique est maximale.

$$\text{pour } E_{P_{max}} = \frac{1}{2}.kX_m^2 \quad (\mathbf{v}_x = 0 \text{ et } \mathbf{x} = X_m) ; \text{ici la variable est } x \text{ car } x = f(t).$$

Les dates pour lesquelles l'énergie cinétique est maximale.

$$\text{pour } E_{C_{max}} = \frac{1}{2}.mV_m^2 \quad (\mathbf{v}_x = V_m \text{ et } \mathbf{x} = 0) ; \text{ici la variable est } x \text{ car } x = f(t).$$

### SITUATION D'ÉVALUATION 07

La figure ci-dessous appelée cuvette ouverte de potentielle représente la variation de l'énergie potentielle élastique d'un pendule élastique horizontale, constitué d'un ressort de constante de raideur  $k$  et d'une masse  $m$ , en fonction de l'élongation  $x$ .

1) pendule élastique horizontal

1.1- exprime l'énergie potentielle élastique du ressort en fonction de l'élongation  $x$ .

1.2- établis l'expression de l'énergie mécanique totale  $E_m$

du système ressort-masse en fonction de  $k$  et  $X_m$  avec  $\mathbf{x} = X_m \sin(\omega_0.t + \varphi)$ .

2) Cuvette de potentielle :

2.1- donne la nature de la courbe. Justifie.

2.2- déduis l'amplitude du mouvement à partir de cette courbe,

2.3- l'énergie mécanique du système (ressort+masse) et déduis la raideur  $k$  du ressort.

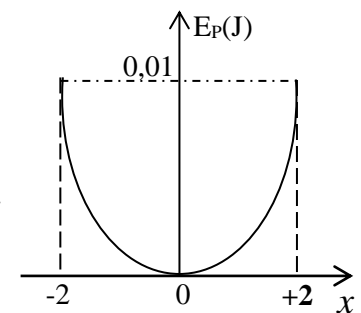
2.4- Détermine graphiquement les énergies cinétiques en  $x = 0$  et  $x = 2$  cm puis représente  $E_C$  et  $E_M$  sur la même courbe.

3) L'équation différentielle du mouvement de ce pendule étant :  $\ddot{x} + 10.\pi^2 x = 0$ ,

3.1- Détermine la masse  $m$  du solide de ce pendule.

3.2- Établis l'équation horaire du mouvement de ce pendule sachant qu'à  $t = 0$ , le pendule passe par sa position d'équilibre en allant dans le sens des élongations négatives.

3.3- Nomme la durée d'une oscillation d'un pendule et calcule cette durée pour ce pendule



**RESOLUTION DÉTAILLÉE**

1.1- l'énergie potentielle élastique du ressort en fonction de l'élongation  $x$ .  $E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

1.2-  $E_m = E_p + E_c = \text{or } E_p = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \sin^2(\omega \cdot t + \varphi)$

$E_c = \frac{1}{2} k \cdot \dot{x}^2$   $E_c = \frac{1}{2} m(-\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi))^2$  et  $E_c = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E_m = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 [(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))] = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2$

$E_m = \frac{1}{2} k \cdot X_m^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega_0^2 X_m^2 = \frac{1}{2} m V_m^2$

:2.1- la courbe est une parabole,  $E_p = f(x)$  avec  $f(x) = a \cdot x^2 + b$  ;  $a = \frac{1}{2} k$  et  $b = 0$ .

2.2- D'après la courbe l'amplitude :  $X_m = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ .

2.3-  $E_m = E_{pmax} = 0,01 \text{ J}$

La raideur  $k = \frac{2 \cdot E_m}{X_m^2}$  ; A.N :  $k = \frac{2 \times 0,01}{(0,02)^2} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

2.4- Détermine graphiquement les énergies cinétiques en  $x = 0$  et  $x = 2 \text{ cm}$

en  $x = 0$ ,  $E_p(0) = 0$  ; donc  $E_c(0) = E_m = 0,01 \text{ J}$

en  $x = 2 \text{ cm}$ ,  $E_p(0) = 0,01 \text{ J}$  ; donc  $E_c = 0 \text{ J}$

$E_c(x) = E_m - E_p(x) = 0,01 - \frac{1}{2} k \cdot x^2$  ; Donc  $E_c(x)$  est aussi une parabole.

$E_m = \text{cte} = 0,01 \text{ J}$ , Pour tout  $x \in [-2; 2]$

3) L'équation différentielle du mouvement de ce pendule étant :  $\ddot{x} + 10 \cdot \pi^2 x = 0$ ,

3.1- Détermine la masse  $m$  du solide de ce pendule.

$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega^2}$  ; A.N :  $m = \frac{50}{10 \cdot \pi^2}$  ;  $m = 0,51 \text{ kg}$ .

3.2- Établis l'équation horaire du mouvement

Condition initiale :  $X_m = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

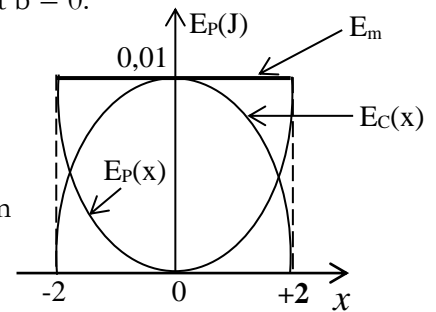
$x_0 = X_m \sin \varphi = 0$  (1)

$v_{0x} = \omega_0 X_m \cos \varphi = v_{0x} = -v_0$  (2) (1)  $\Rightarrow \sin \varphi = 0$  alors  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi \text{ rad}$  et on ( $\sin \varphi$

$> 0$  et  $\cos \varphi < 0$ ).  $x(t) = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{10} \cdot t + \pi)$

3.3- Nomme la durée d'une oscillation d'un pendule et calcule cette durée pour ce pendule

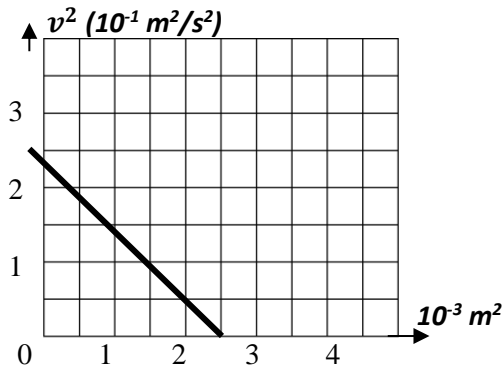
la durée d'une oscillation s'appelle période ,  $T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \times 3,14}{3,14 \times \sqrt{10}} = 0,63 \text{ s}$



**SITUATION D'ÉVALUATION****Partie 1**

Dans un oscillateur mécanique, la relation entre  $v^2$  et  $x^2$  s'écrit :  $v^2 = \frac{2.E_m}{m} - \omega_0^2 . x^2$

( $E_m = 0,0625 \text{ J}$  ;  $m = 0,5 \text{ kg}$ ). Soit ci-dessous la courbe  $v^2 = f(x^2)$



- 1) La valeur de la pulsation  $\omega_0$  est :
  - a)  $10 \text{ rad.s}^{-1}$
  - b)  $20 \text{ rad.s}^{-1}$
  - c)  $40 \text{ rad.s}^{-1}$
- 2) La valeur de l'amplitude  $X_m$  est :
  - a)  $0,02 \text{ m}$
  - b)  $0,05 \text{ m}$
  - c)  $0,03 \text{ m}$
- 3) La valeur de la raideur  $k$  est :
  - a)  $60 \text{ N.m}^{-1}$
  - b)  $100 \text{ N.m}^{-1}$
  - c)  $50 \text{ N.m}^{-1}$

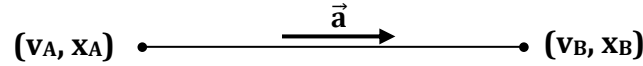
# Maths pour les Sciences physiques

**FICHE MÉTHODE CINÉMATIQUE**

**Détermination de l'accélération**

**Résolution par la cinématique :** Mouvement Rectiligne Uniformément Varié (MRUV) ou l'accélération est constante

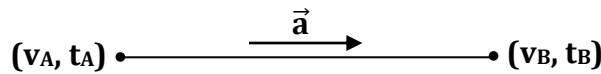
Couple  $(x, v)$  :



$$v_B^2 - v_A^2 = 2a.(x_B - x_A) \text{ or } (x_B - x_A) = AB ; v_B^2 - v_A^2 = 2a.AB$$

finalement  $a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2AB}$

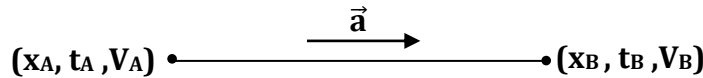
Couple  $(v, t)$  :



$$a = \Delta v / \Delta t ; v_B = a.(t_B - t_A) + v_A$$

finalement  $a = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$

Couple  $(x, t)$  :



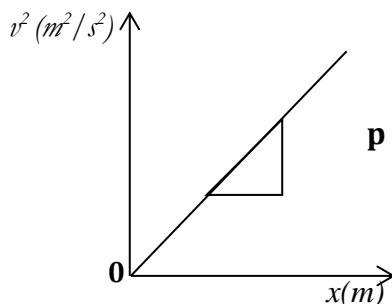
$$v_B = \frac{1}{2} a.(t_B - t_A)^2 + v_A(t_B - t_A) + x_A \text{ si } v_A = v_0 = 0 \text{ m/s ; } x_B - x_A = AB$$

$$a = \frac{2(x_B - x_A)}{(t_B - t_A)^2} = \frac{2AB}{(t_B - t_A)^2}$$

**Détermination graphique de l'accélération  $\vec{a}$**

**Courbe de  $V^2$  en fonction de  $x$**

Si on a la courbe  $v^2 = f(x)$  alors  $v^2 = 2ax$  ; sachant que  $v_0 = 0$  ;  $x_0 = 0$

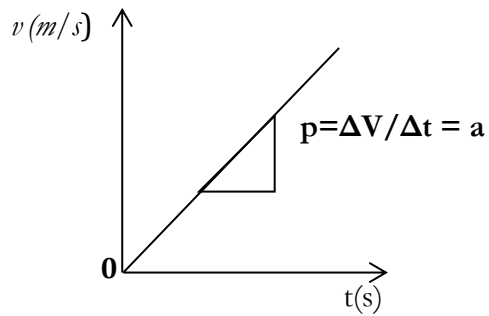


$$p = \Delta V^2 / \Delta x = 2a$$

finalement  $a = \frac{p}{2} ; v^2 = 2 \left( \frac{p}{2} \right) x$

**Courbe de  $V$  en fonction du temps  $t$**

Si on a la courbe  $v = f(t)$  alors  $v = a.t$  sachant que  $v_0 = 0$  ;  $t_0 = 0$

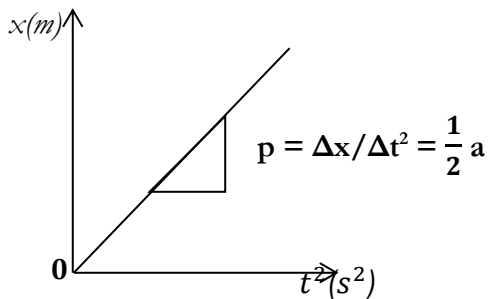


finalement :  $p = a$  ;  $v = p.t$

**Courbe de  $x$  en fonction de  $t^2$**

Si on a la courbe  $x = f(t^2)$  alors  $x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0t + x_0$  sachant que  $v_0 = 0$  ;  $x_0 = 0$  et  $t_0 = 0$

L'équation horaire devient :  $x(t) = \frac{1}{2} at^2$



finalement  $a = 2p$  ;  $x = p.t^2$

**FICHE MÉTHODE : TCI**

**ACCÉLÉRATION ET FORCE DE FROTTEMENT**

$$\text{TCI : } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$$

**Accélérations sur tous les types de parcours**

Les forces de frottements :  $\vec{f}$

Le poids :  $\vec{P}$

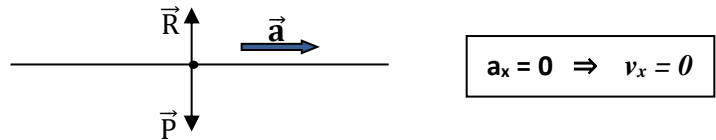
La réaction normale :  $\vec{R}$

L'accélération :  $\vec{a}$

**Parcours horizontal sans frottements**

TCI :  $\vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$ .  $0 + 0 = m \cdot a_x \Rightarrow a_x = 0$

Schéma :



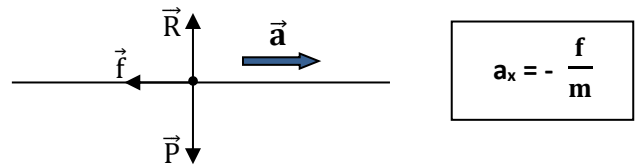
La vitesse est nulle, donc le solide est au repos

**Parcours horizontal avec frottements**

TCI :  $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$  et projetons sur l'axe horizontale dans le sens de  $\vec{a}$  :  $-f + 0 + 0 = m \cdot a_x$

$\Rightarrow a_x = -\frac{f}{m}$

Schéma :



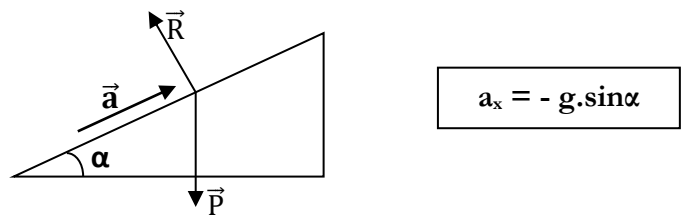
**Parcours incliné d'angle  $\alpha$  sans frottements**

- pente ascendante

TCI :  $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$

$-mg \cdot \sin\alpha + 0 = m \cdot a \Rightarrow a_x = -g \cdot \sin\alpha$

Schéma :

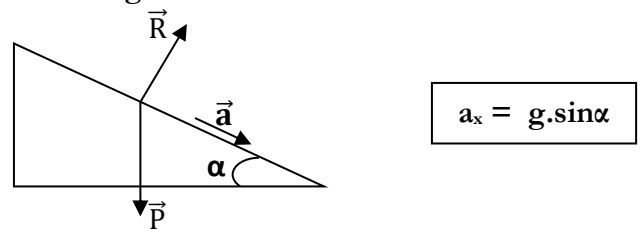


- pente descendante

TCI :  $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$

$mg \sin\alpha + 0 = m \cdot a_x$  ; alors  $a_x = g \cdot \sin\alpha$

Schéma :



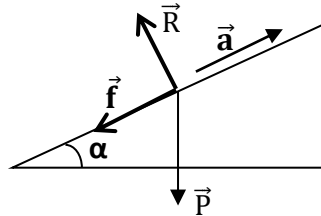
**Parcours incliné d'angle  $\alpha$  avec frottement**

- pente ascendante

TCI :  $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$

-  $f - mg \cdot \sin\alpha + 0 = ma$  ; alors  $a_x = -g \cdot \sin\alpha - \frac{f}{m}$

Schéma :



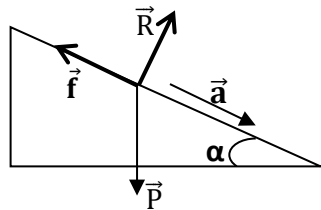
$$a_x = -g \cdot \sin\alpha - \frac{f}{m}$$

- pente descendante

TCI :  $\vec{f} + \vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$

-  $f + 0 + mg \cdot \sin\alpha = m \cdot a$  ; alors  $a_x = g \cdot \sin\alpha - \frac{f}{m}$

Schéma :



$$a_x = g \sin\alpha - \frac{f}{m}$$

**ACCÉLÉRATION ET FORCE DE TRACTION**

$$\text{TCI : } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}$$

❖ **Accélérations sur tous les types de parcours**

- Les forces de frottements :  $\vec{f}$
- Le poids :  $\vec{P}$
- La réaction normale :  $\vec{R}$
- la force de traction  $\vec{F}$
- L'accélération :  $\vec{a}$

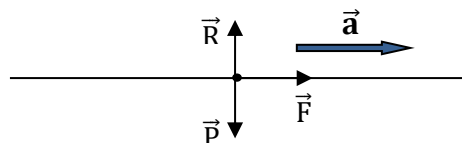
**Parcours horizontal sans frottement**

$\vec{F}$  : La force de traction qui fait avancer l'engin (moteur) ou un cycliste (motocycliste) qui propulse en avant son engin.

TCI :  $\vec{R} + \vec{F} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$  :

$0 + 0 + F = m \cdot a_x$

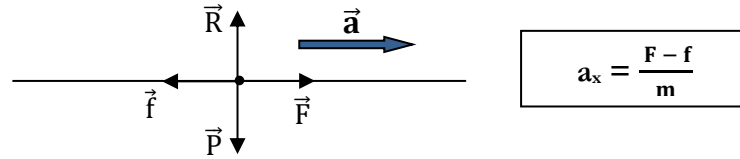
Schéma :



$$a_x = \frac{F}{m}$$

**Parcours horizontal avec frottements**

TCI :  $\vec{R} + \vec{f} + \vec{F} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$  :  
 $0 - f + F + P = m \cdot a_x$

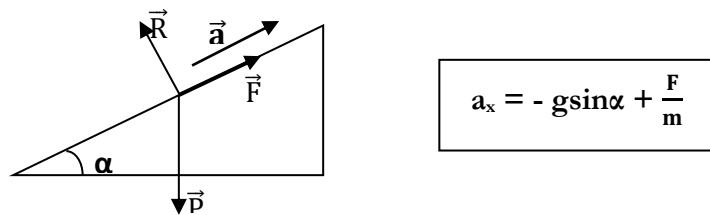


$$a_x = \frac{F - f}{m}$$

**Plan inclinée sans frottement**

- pente ascendante

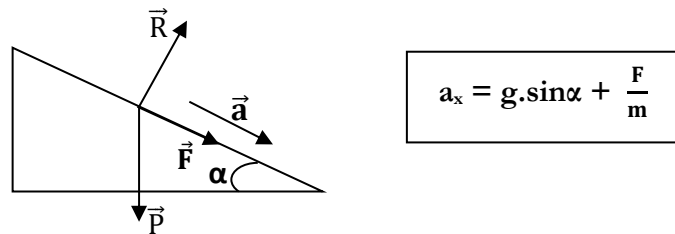
TCI :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$   
 $-mg \cdot \sin\alpha + 0 + F = ma$  ; alors  $a_x = -g \sin\alpha + \frac{F}{m}$



$$a_x = -g \sin\alpha + \frac{F}{m}$$

- pente descendante

TCI :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$   
 $mg \cdot \sin\alpha + 0 + F = m \cdot a$  ; alors  $a_x = g \cdot \sin\alpha + \frac{F}{m}$

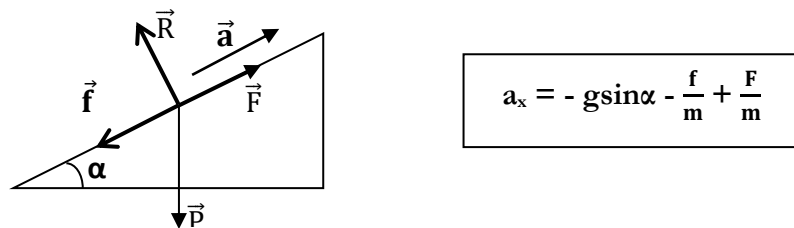


$$a_x = g \cdot \sin\alpha + \frac{F}{m}$$

**Plan inclinée avec frottement**

- pente ascendante

TCI :  $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$   
 $-f - mg \cdot \sin\alpha + 0 + F = m \cdot a$  ; alors  $a_x = -g \cdot \sin\alpha - \frac{f}{m} + \frac{F}{m}$

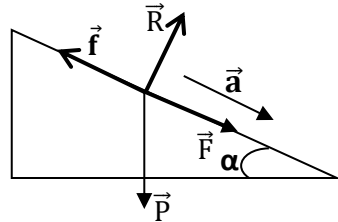


$$a_x = -g \sin\alpha - \frac{f}{m} + \frac{F}{m}$$

- pente descendante

**TCI** :  $\vec{f} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  ; projetons sur la plus grande pente dans le sens de  $\vec{a}$

$$-f + mg \cdot \sin\alpha + F = m \cdot a \quad \text{alors} \quad a = g \sin\alpha - \frac{f}{m} + \frac{F}{m}$$



$$a = g \sin\alpha - \frac{f}{m} + \frac{F}{m}$$

N.B : La force de traction  $\vec{F}$  n'est pas toujours colinéaire au déplacement (AB) alors ; si elle ne l'est pas alors on a :  $W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos(\vec{F}, \vec{AB}) = F \times AB \times \cos\alpha$

**FICHE MÉTHODE : TEC**  
**THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE**

Dans un référentiel galiléen la variation de l'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme algébrique des travaux des forces extérieures appliquées au système entre ces deux instants.

$$\text{TEC} : \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$$

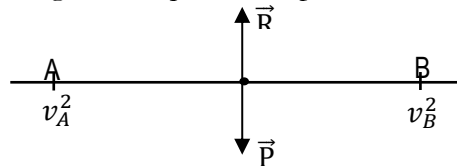
Les forces de frottements :  $\vec{f}$

Le poids :  $\vec{P}$

La réaction normale :  $\vec{R}$

**Piste horizontale sans frottement**

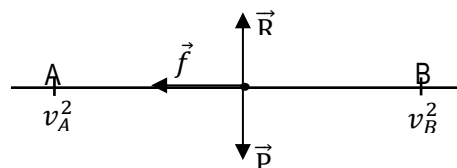
Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB



T.E.C :  $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  et  $W(\vec{P}) = 0 \Rightarrow v_A = v_B$

**Piste horizontale avec frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

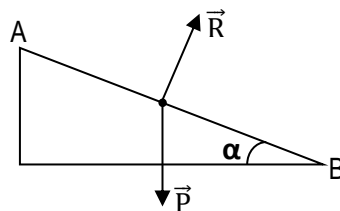


T.E.C :  $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{f})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  ;  $W(\vec{P}) = 0$  et  $W(\vec{f}) = -f \times AB$

$$v_B^2 = v_A^2 - \frac{2 \cdot f \times AB}{m}$$

**Piste avec un plan incliné descendant sans frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

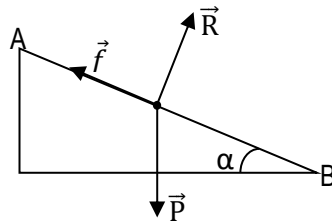


T.E.C :  $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  et  $W(\vec{P}) = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot AB \cdot \sin\alpha$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2g \cdot AB \cdot \sin\alpha$$

**Piste avec un plan incliné descendant avec frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

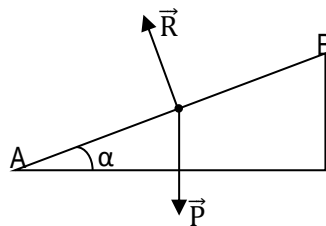


T.E.C :  $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{R}) + W(\vec{P}) + W(\vec{f})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  et  $W(\vec{P}) = m.g.h = m.g.AB.\sin\alpha$  et  $W(\vec{f}) = -f.AB$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2g.AB.\sin\alpha - \frac{2.f \times AB}{m}$$

**Piste avec un plan incliné ascendant sans frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

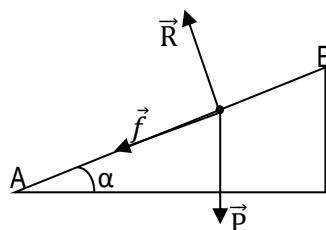


T.E.C :  $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{R}) + W(\vec{P})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  et  $W(\vec{P}) = -m.g.h = -m.g.AB.\sin\alpha$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2g.AB.\sin\alpha$$

**Piste avec un plan incliné ascendant avec frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB



T.E.C :  $\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  et  $W(\vec{P}) = -m.g.h = -m.g.AB.\sin\alpha$  et  $W(\vec{f}) = -f.AB$

$$v_B^2 = v_A^2 - 2g.AB.\sin\alpha - \frac{2.f \times AB}{m}$$

**FORCE DE TRACTION**

$$\text{T.E.C : } \Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum W(\vec{F}_{\text{ext}})$$

Les forces de frottements :  $\vec{f}$

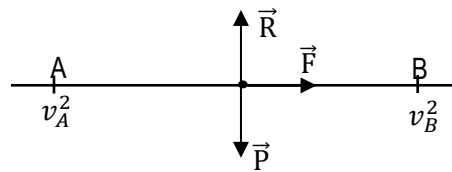
Le poids :  $\vec{P}$

La réaction normale :  $\vec{R}$

La force de traction :  $\vec{F}$  (colinéaire au déplacement) :  $\vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB$

**Piste horizontale sans frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

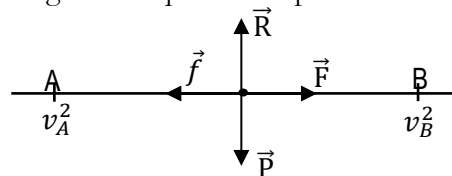


$$\text{T.E.C : } \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F}) \text{ avec } W(\vec{R}) = 0 ; W(\vec{P}) = 0 \text{ et } W(\vec{F}) = F \cdot AB$$

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2 \cdot F \times AB}{m}$$

**Piste horizontale avec frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

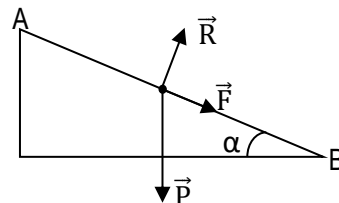


$$\text{T.E.C : } \frac{1}{2}m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F}) + W(\vec{f}) \text{ avec } W(\vec{R}) = 0 ; W(\vec{P}) = 0 ; W(\vec{F}) = F \cdot AB \text{ et } W(\vec{f}) = -f \cdot AB$$

$$v_B^2 = v_A^2 + \frac{2 \cdot F \times AB}{m} - \frac{2 \cdot f \times AB}{m}$$

**Piste avec un plan incliné descendant sans frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

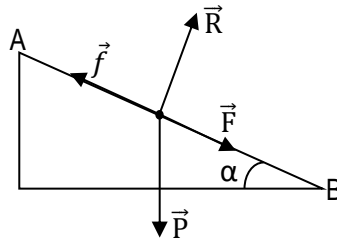


$$\text{T.E.C : } \frac{1}{2}m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2}m \cdot v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F}) \text{ avec } W(\vec{R}) = 0 ; W(\vec{P}) = m \cdot g \cdot AB \cdot \sin\alpha \text{ et } W(\vec{F}) = F \cdot AB$$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot \frac{F \times AB}{m} + 2g \cdot AB \cdot \sin\alpha$$

**Piste avec un plan incliné descendant avec frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

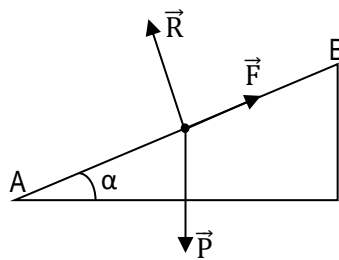


T.E.C :  $\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F}) + W(\vec{f})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  et  $W(\vec{P}) = m.g.AB.\sin\alpha$  ;  
 $W(\vec{F}) = F.AB$  et  $W(\vec{f}) = -f.AB$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot \frac{F \times AB}{m} + 2g.AB.\sin\alpha - \frac{2.f \times AB}{m}$$

**Piste avec un plan incliné ascendant sans frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB

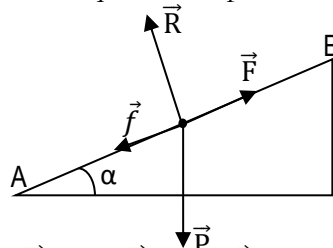


T.E.C :  $\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  ;  $W(\vec{P}) = - m.g.AB.\sin\alpha$  et  
 $W(\vec{F}) = F.AB$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot \frac{F \times AB}{m} - 2g.AB.\sin\alpha$$

**Piste avec un plan incliné ascendant avec frottement**

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur un parcours horizontal distant de AB



T.E.C :  $\frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{F}) + W(\vec{f})$  avec  $W(\vec{R}) = 0$  ;  $W(\vec{P}) = - m.g.AB.\sin\alpha$  ;  
 $W(\vec{F}) = F.AB$  et  $W(\vec{f}) = -f.AB$

$$v_B^2 = v_A^2 + 2 \cdot \frac{F \times AB}{m} - 2g.AB.\sin\alpha - \frac{2.f \times AB}{m}$$

**NB : Dans le cas où la force de traction n'est pas colinéaire au déplacement alors :**

$$W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \times AB \times \cos\alpha$$

**Dérivés de quelques fonctions**

<i>Fonctions</i>	$\ln u$	$\cos u$	$\sin u$	$u^n$	$\frac{1}{u}$	$\sqrt{u}$	$e^u$
<i>Dérivés</i>	$\frac{u'}{u}$	$-u' \sin u$	$u' \cos u$	$n \cdot u' u^{n-1}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u' e^u$

<i>Fonctions</i>	$\frac{1}{u'} \ln u$	$\frac{1}{u'} e^u$	$u' \cos u$	$u' \sin u$	$u^n$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$-\frac{u'}{u^2}$
<i>Primitives</i>	$\frac{1}{u}$	$e^u$	$\sin u$	$-\cos u$	$\frac{u'}{n+1} u^{n+1}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{u}$

**FORCES CENTRIPÈTES**

La force de gravitation et la force de Lorentz sont des forces centripètes. (Forces dont la droite d'action est radiale et dirigée vers le centre d'un cercle ; porté par la normale  $\vec{n}$ .)

• **Force gravitationnelle**

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m.M}{r^2} \cdot \vec{u} = G \cdot \frac{m.M}{r^2} \cdot \vec{n} = m \cdot \vec{a}$$

Force centripète alors :  $\vec{a}_T = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} = \vec{0}$  d'où  $v = \text{constante}$ , **le mouvement est uniforme.**

$G \cdot \frac{m.M}{r^2} \cdot \vec{n} = m \cdot \frac{v_0^2}{r} \vec{n} \Rightarrow G \cdot \frac{m.M}{r^2} = m \cdot \frac{v_0^2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{G.M}{v_0^2}}$  est constante dont **le mouvement est circulaire.**

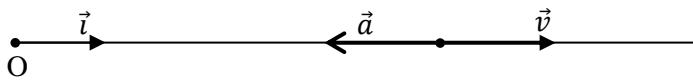
• **Force de Lorentz**

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = m \cdot \vec{a}$$

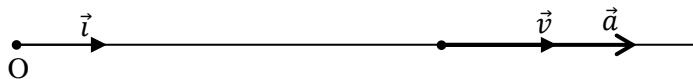
Force centripète alors :  $\vec{a}_T = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t} = \vec{0}$  d'où  $v = \text{constante}$ , **le mouvement est uniforme.**

$|q| \cdot v_0 \cdot B \cdot \vec{n} = m \cdot \frac{v_0^2}{r} \vec{n} \Rightarrow \boxed{r = \frac{m \cdot v_0}{|q| \cdot B}}$  est constante dont **le mouvement est circulaire.**

**NATURE D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORMEMENT VARIÉ**



$$a_x < 0 \text{ et } v_x > 0 \Rightarrow a_x \cdot v_x < 0$$



$$a_x > 0 \text{ et } v_x > 0 \Rightarrow a_x \cdot v_x > 0$$

•  $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} > 0 \Rightarrow \Delta V_x > 0 \Rightarrow \text{la vitesse croît}$

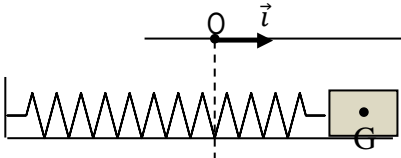
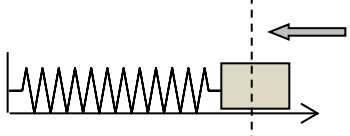
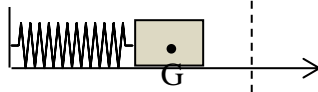
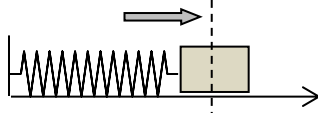
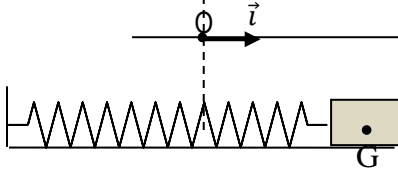
•  $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} < 0 \Rightarrow \Delta V_x < 0 \Rightarrow \text{la vitesse décroît}$

**ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE POUR LES PHYSIQUE-CHIMIE**

Forme de l'équation différentielle	Solution de l'équation différentielle
$\ddot{x} + \frac{x}{\tau} = 0$	$x = pe^{-\frac{t}{\tau}}$ Équation différentielle linéaire, du premier ordre, à coefficient réel constant ( $\tau$ est la constante de temps) la constante $p$ se détermine à partir d'une condition particulière imposée à $x$ à une date donnée.
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x = p \cos \omega_0 t + q \sin \omega_0 t$ Équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients réels constants $\omega_0$ : pulsation [rad/s]; $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ : période [s] $p, q, x_m$ et $\varphi$ sont des constantes qui dépendent des conditions particulières du mouvement (en général les conditions initiales). La solution est harmonique.
$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0$	$x = pe^{\alpha t} + qe^{-\alpha t}$ Équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients réels constants $\omega_0$ : pulsation [rad/s]; $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ : période [s] $p, q$ et $\varphi$ sont des constantes qui dépendent des conditions particulières du mouvement (en général les conditions initiales). La solution diverge c.à.d que $x$ tend vers l'infini quant $t$ tend vers l'infini.
$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Équation différentielle linéaire, du deuxième ordre, à coefficients réels constants. Équation caractéristiques : $r^2 + \alpha.r + \omega_0^2 = 0$ <b>a) Si <math>\Delta &gt; 0</math> le régime est régime apériodique</b> • <u>solution de l'équation caractéristique</u> : $r_1 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{\Delta})$ et $r_2 = \frac{1}{2}(-\alpha - \sqrt{\Delta})$ avec $r_1$ et $r_2$ sont réelles et négatives. • <u>solution de l'équation différentielle</u> : $x = pe^{r_1 t} + qe^{r_2 t}$ , $p$ et $q$ sont des constantes. La solution diverge c.à.d que $x$ tend vers zéro quant $t$ tend vers l'infini. • <u>autres formes de la solution</u> : $x = e^{-\frac{\alpha t}{2}} [p \cdot \text{ch}(\sqrt{\Delta} \cdot t) + q \cdot \text{sh}(\sqrt{\Delta} \cdot t)]$ ; $x = p \cdot e^{-\frac{\alpha t}{2}} \text{ch}(\sqrt{\Delta} \cdot t + q)$ <b>b) Si <math>\Delta &lt; 0</math> le régime est régime pseudo-périodique</b> • $\Delta = -\omega^2 = (i\omega)^2$ avec $(i)^2 = -1$ , $\omega$ et $T$ sont respectivement la pseudo-pulsation et la pseudo-période $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0$ ; $T = \frac{2\pi}{\omega} > T_0$ : on pose parfois $(j)^2 = -1$ . • <u>solution de l'équation caractéristique</u> : $r_1 = \frac{1}{2}(-\alpha + i\omega)$ et $r_2 = \frac{1}{2}(-\alpha - i\omega)$ avec $r_1$ et $r_2$ sont des complexes • <u>solution de l'équation différentielle</u> : $x = e^{-\frac{\alpha t}{2}} [p \cdot \cos \omega t + q \cdot \sin \omega t]$ ; $p$ et $q$ sont des constantes réelles. • <u>autres formes de la solution</u> : $x = p \cdot e^{-\frac{\alpha t}{2}} \cos(\omega t + \varphi)$ $p$ et $\varphi$ sont des constants.

$\ddot{x} + a\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	<p>c) <u>Si <math>\Delta=0</math> le régime est critique</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Solution de l'équation différentielle :</u></li> </ul> $x = e^{\frac{-at}{2}} [p \cdot t + q] ; p \text{ et } q \text{ sont des constantes}$
<p>Résolution des équations différentielle linéaires à coefficients réels constants dont le second membre est non nul</p> $x(t) \rightarrow a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$	<p>La solution de cette équation est la somme de :</p> <p>a) de la solution générale de l'équation différentielle homogène</p> <p>b) et d'une solution particulière de l'équation complète.</p>

**DÉTERMINATION DES CONDITIONS INITIALES**

Temps	Oscillations mécaniques
$t = 0$ (élongation maximale)	 $x = X_m$ $V_x = 0$
$t = \frac{T_0}{4}$ (vitesse maximale vers $x < 0$ )	 $x = 0$ $V_x = -V_m < 0$
$t = \frac{T_0}{2}$ (raccourcissement maximal)	 $x = -X_m < 0$ $V_x = 0$
$t = \frac{3T_0}{4}$ (vitesse maximale vers les $x > 0$ )	 $x = 0$ $V_x = V_m > 0$
$t = T_0$	 $x = X_m > 0$ $V_x = 0$

Positions	temps
Initiale extrémité 1	$t = 0 \text{ s}$
1 <sup>er</sup> passage à la position d'équilibre	$t = \frac{T_0}{4}$
Passage à l'extrémité 2	$t = \frac{2 \times T_0}{4} = \frac{T_0}{2}$
2 <sup>ème</sup> passage à la position d'équilibre	$t = \frac{3 \cdot T_0}{4}$
Retour à l'état initial	$t = T_0$

**OSCILLATIONS MÉCANIQUES**

**Détermination de  $X_m$  et  $\varphi$  avec  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .**

$$(1) x_0 = X_m \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x_0}{X_m}$$

$$(2) v_{0x} = -X_m \omega_0 \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{v_{0x}}{-\omega_0 X_m}$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{(x_0)^2}{(X_m)^2} + \frac{(v_{0x})^2}{\omega_0^2 X_m^2} \Rightarrow \frac{(x_0)^2}{(X_m)^2} + \frac{(v_{0x})^2}{\omega_0^2 X_m^2} = 1 \Rightarrow X_m^2 = x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}$$

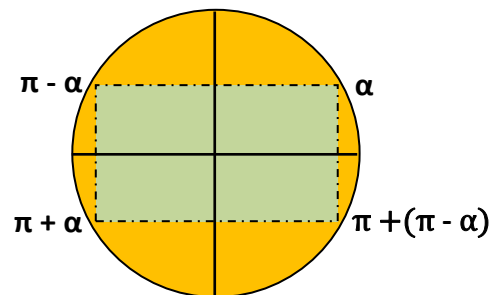
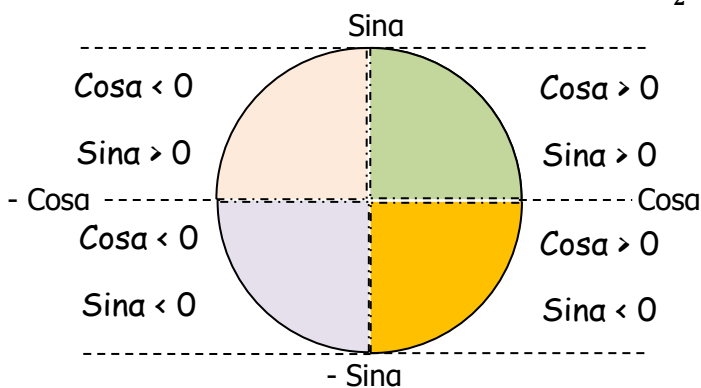
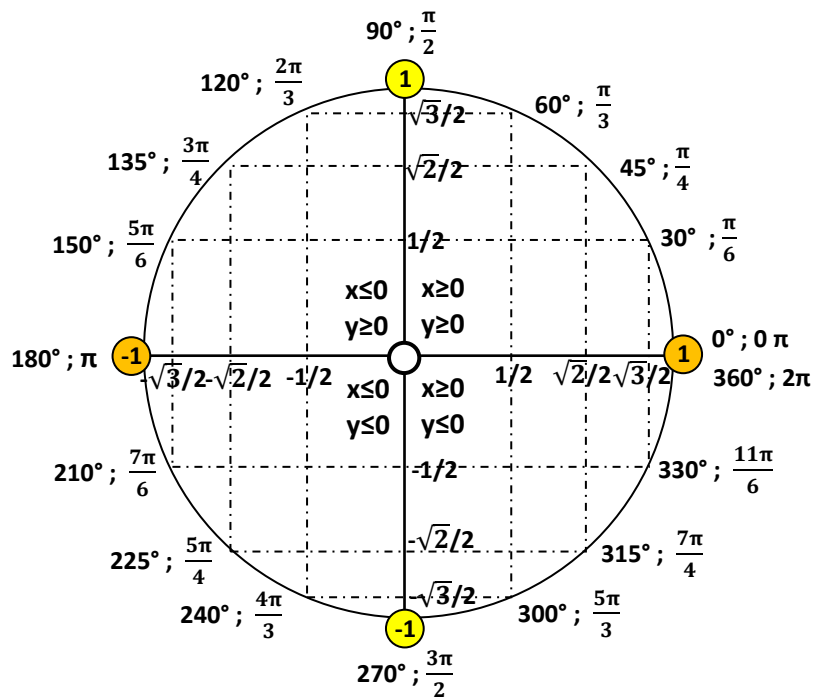
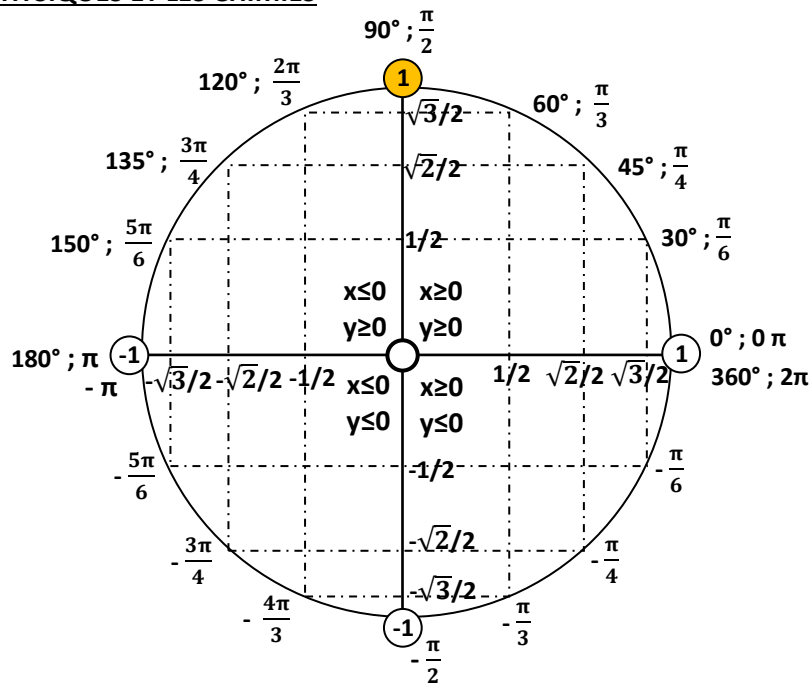
$$X_m^2 = x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2} \Rightarrow X_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}} \Rightarrow X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{0x}}{\omega_0}\right)^2}$$

**Pour tout mouvement oscillatoire**

Si on a :  $x_0 = \pm a$  et  $v_{0x} = 0$  alors  $X_m = a$

Si on a :  $x_0 = \pm a$  et  $v_{0x} \neq 0$  alors  $X_m > a$

■ LA TRIGONOMÉTRIE EST TRÈS NÉCESSAIRES EN MÉCANIQUE : SURTOUT DANS LES LEÇONS FAISANT INTERVENIR LES PHYSIQUES ET LES CHIMIES



Fonctions	Expression à $t = 0s$	Conditions	Solutions
$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$	$X_m \cos(\varphi) = x_0$ $-\omega_0 X_m \sin(\varphi) = v_{0x}$	1) $\cos\varphi > 0$ et $\sin\varphi > 0$ 2) $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi > 0$ 3) $\cos\varphi > 0$ et $\sin\varphi < 0$ 4) $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi < 0$	$\tan\varphi = -\frac{v_{0x}}{\omega_0 x_0}$
$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$	$X_m \sin(\varphi) = x_0$ $\omega_0 X_m \cos(\varphi) = v_{0x}$	1) $\cos\varphi > 0$ et $\sin\varphi > 0$ 2) $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi > 0$ 3) $\cos\varphi > 0$ et $\sin\varphi < 0$ 4) $\cos\varphi < 0$ et $\sin\varphi < 0$	$\tan\varphi = \frac{\omega_0 x_0}{v_{0x}}$

**NB :** Le signe de  $x_0$  dépend de la position de l'abscisse  $x$  sur l'axe ( $x'x$ )  
Le signe de  $v_0$  dépend de l'orientation de la vitesse  $\vec{v}$  par rapport au vecteur unitaire de l'axe ( $O, \vec{i}$ )

$\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$	$\sin(0) = \sin(2\pi) = 0$
$\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$	$\sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$	$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\cos(-\frac{\pi}{2}) = -1$

$x$	$\theta$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\cos x$	$1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-1$
$\sin x$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$0$

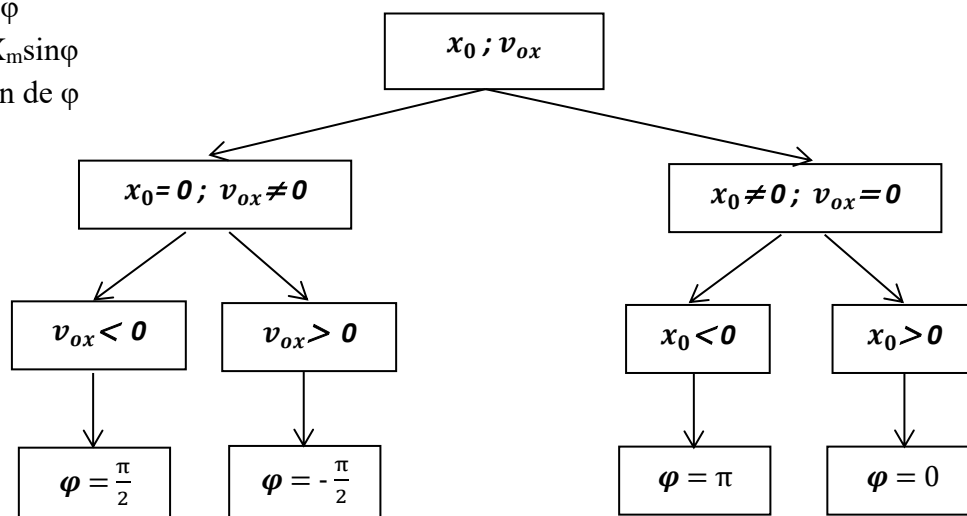
### Détermination de $X_m$ et $\varphi$

Pour déterminer  $X_m$  et  $\varphi$  on travail (à  $t = 0$ ) :

Soit  $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$  solution de l'équation différentielle.

- $x_0 = X_m \cos\varphi$
- $v_{0x} = -\omega_0 X_m \sin\varphi$

Détermination de  $\varphi$



**Cas particulier  $x_0 \neq 0 ; v_{0x} \neq 0$**

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-X_m \omega_0 \sin\varphi}{X_m \cos\varphi} = -\omega_0 \tan\varphi \Rightarrow \tan\varphi = -\frac{v_{0x}}{x_0 \omega_0} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(-\frac{v_{0x}}{x_0 \omega_0}\right)$$

Équations trigonométriques	Solutions	Exemples
$\sin x = \sin a$ où $a \in [-1; 1]$	soit $\alpha$ une solution • deux angles supplémentaires ont même sinus $S = \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$	$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$ $x = \frac{\pi}{6}$ $S = \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = (\frac{5\pi}{6}) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\cos x = \cos a$ où $a \in [-1; 1]$	soit $\alpha$ une solution • deux angles opposés ont même cosinus $S = \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$	$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \sin \frac{\pi}{3}$ $x = \frac{\pi}{3}$ $S = \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou} \\ x = (-\frac{\pi}{3}) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tga}$ où $a \in \mathbb{R}$	soit $\alpha$ une solution • deux angles anti-supplémentaires ont même tangente $S = \{x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$	$\operatorname{tag} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4})$ $x = \frac{\pi}{4}$ $S = \{x = -\frac{\pi}{4} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\tan(-x) = -\tan x$	$\cos(\pi+x) = -\cos x$ $\sin(\pi+x) = -\sin x$ $\tan(\pi+x) = \tan x$	$\cos(\pi-x) = -\cos x$ $\sin(\pi-x) = \sin x$ $\tan(\pi-x) = -\tan x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\tan(\frac{\pi}{2} - x) \times \tan x = 1$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ $\tan(\frac{\pi}{2} + x) \times \tan x = -1$	<b>NB : Pour <math>\tan x</math></b> $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

■ **INTERPRETATION sur le résultat d'une variation**

- Si la variation de l'énergie cinétique est positive ( $\Delta E_c > 0$ ) alors la vitesse  $v$  augmente
- Si la variation de l'énergie cinétique est négative ( $\Delta E_c < 0$ ) alors la vitesse  $v$  diminue
- Si  $\frac{\Delta V}{\Delta t} > 0$  ; alors la vitesse  $v$  augmente et l'accélération  $a_x$  est positive (déplacement dans le même sens que  $\vec{v}$ )
- Si  $\frac{\Delta V}{\Delta t} < 0$  ; alors la vitesse  $v$  diminue et l'accélération  $a_x$  est négative. (déplacement dans le sens contraire à  $\vec{v}$ )
- Si  $\frac{\Delta x}{\Delta t} > 0$  ; alors l'abscisse  $x > x_0$  , la vitesse  $v_x$  est positive (déplacement dans le même sens que  $\vec{v}$ )
- Si  $\frac{\Delta x}{\Delta t} < 0$  ; alors l'abscisse  $x < x_0$  , la vitesse  $v_x$  est négative (déplacement dans le sens contraire à  $\vec{v}$ )

