Ministère des Enseignements Primaire, Secondaire, Technique et de l'Artisanat

----

Ministère délégué chargé de l'Enseignement Technique et de l'Artisanat

REPUBLIQUE TOGOLAISE

Travail – Liberté – Patrie

Programme 2023

Enseignement de spécialité

Tle F4

Sciences Physiques

DERNIERE MISE A JOUR : *SEPTEMBRE 2022*

Sciences Physiques

T^{le} F_4

Programme 2023

Enseignement de spécialité

Sous la direction de :

Inspecteur ATCHOLADI Essodina
Directeur des Programmes et de la Pédagogie

Avec la participation de :

BOB AKITANI Kokou Amen Alexandre
LETP – LOME

SAMARA Yaovi Bamehossim
LETP – LOME

BOUBAKAR Badiou
LETP – LOME

LODONOU Koffi Mawukoenya
LETP – ATTIEGOU

BAKA Larou
MADRE AGATA CARELLI

BELLO Salim
IPRA – AZ HARNOUR

DOUNEGBLOE Koffi Mawuto Bertin
IP La PAIX

ISBN :

PRÉFACE

Le Ministre délégué chargé l'Enseignement
Technique et de l'Artisanat

Kokou Eké HODIN

AVANT – PROPOS

Ce support de cours a pour but de présenter des connaissances fondamentales en électricité. Il a été conçu afin de faciliter l'enseignement des sciences physiques dans les classes de Terminales F_{1}, F_4 et $T_{i\,/1}$ au Togo. Chaque chapitre comporte un cours suivi d'exercices résolus présentant d'une part les bases de l'électricité et d'autre part l'étude de quelques circuits électriques souvent rencontrés.

Nous souhaitons que ce travail permette à nos élèves d'acquérir une base théorique solide sur les circuits électriques et un savoir-faire dans la résolution des exercices afin de mieux préparer l'examen.

Nous tenons à remercier tous les collègues de différents instituts d'enseignement technique qui nous ont aidé dans la préparation de ce support de cours; ainsi qu'à ceux qui voudraient bien nous faire part de leurs remarques et suggestions constructives afin d'améliorer son contenu.

Les auteurs

TABLE DE MATIÈRES

PARTIE I : PHYSIQUE

Partie II : chimie

Physiques

Chapitre 1. LES NOMBRES COMPLEXES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, l'élève doit être capable de :

- Définir l'ensemble des nombres complexes ;
- Maitriser les opérations de calcul dans l'ensemble des nombres complexes.

I. INTRODUCTION

La résolution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ étant impossible dans IR, il convient de trouver un ensemble contenant IR dans lequel cette résolution est possible grâce à un nombre imaginaire **j** tel que $\mathbf{j^2 = -1}$ **.**

II. DEFINITION

On appelle nombre complexe, tout nombre qui s'écrit sous la forme **z = x + jy** avec (x ϵ IR ; y Є IR).

Exemple : z = 3 + 5j

L'ensemble des nombres complexes est noté ℂ.

III. OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1. COMPLEXE NUL - EGALITE DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

Soient deux nombres complexes : z = x + jy et z'= x'+ jy'

- **z = o** ⟷ **x = y = 0** (complexe nul)
- **z = z'** ⟷ $\begin{cases} \boldsymbol{x = x'} \\ \boldsymbol{y = y'} \end{cases}$ (Egalité de deux complexes)

2. REPRESENTATION D'UN NOMBRE COMPLEXE

a. Forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme **z = a + jb :** c'est la **forme algébrique** de **z** ou **forme rectangulaire** de **z.**

- **a** est appelé la partie réelle de z
- **b** est appelé la partie imaginaire de z

Exemple : z = 3 + 5j

NB : On appelle **module** d'un nombre complexe z, le nombre réel positif noté **:** $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

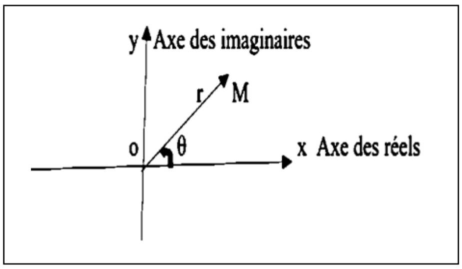
- Si b = 0 alors z = a. On dit que z est un nombre réel.
- Si a = 0 alors z = jb. On dit que z est un nombre imaginaire pur.

b. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe peut se mettre sous la forme $\mathbf{z = r(\cos\theta + j\sin\theta)}$: c'est la **forme trigonométrique** de z. (θ s'exprime en degré ou en radian et il est défini à 2π près)

- **r** est appelé module de z
- $\boldsymbol{\theta}$ est appelé argument de z note $\mathbf{arg(z)}$.

Exemple : z = 2(cos $\frac{\pi}{3} + jsin\frac{\pi}{3}$)



Dans un plan complexe, on peut associer le nombre complexe z = a + jb à un vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que M$\binom{a}{b}$. (Voir figure ci- contre)

c. Autres représentations des nombres complexes

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument α.

- L'écriture **z=** $\boldsymbol{\rho e^{j\alpha}}$ est appelée **forme exponentielle** de z.
  Ex : z= $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{3}}$
- L'écriture **z =** $\boldsymbol{\rho \llcorner \alpha}$ ou **z =** $[\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\alpha}]$ est appelé **forme polaire** de z.
  Ex : z = $\sqrt{2} \llcorner\frac{\pi}{3}$

$\rho \llcorner\alpha$ se lit $\rho\ polaire\ \alpha$

3. NOMBRE COMPLEXE CONJUGUE

Soit z un nombre complexe. On appelle conjugué de z, noté $\bar{z}$ le nombre complexe tel que :

- Si z = x + jy alors $\bar{z} = x - jy$
- Si z = r(cos θ + j sin θ) alors $\bar{z}$ = r(cos θ − j sin θ)
- Si z = $\rho e^{j\alpha}$ alors $\bar{z} = \rho e^{-j\alpha}$
- Si z = r $\llcorner\theta$ alors $\bar{z} = r \llcorner -\theta$

4. SOMME ET DIFFERENCE DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

Soient z = x + jy et z' = x'+ jy'

- z+z' = (x + x') + j(y + y')
- z−z' = (x − x') + j(y − y')

5. MULTIPLICATION ET QUOTIENT DE DEUX NOMBRES COMPLEXES

❒ **Avec la forme polaire :** Si $z_1 = r_1 \llcorner\theta_1$ ou $z_1 = r_1\, e^{j\theta 1}$ et $z_2 = r_2 \llcorner\theta_2$ ou $z_2 = r_2 e^{j\theta 2}$

- $z_1 \times z_2 = r_1\, e^{j\theta 1} \times r_2 e^{j\theta 2}$
  $= r1 \times r2 e^{j(\theta 1+\theta 2)}$

$$\boxed{z_1 \times z_2 = r_1 \times r_2 \llcorner\theta_1 + \theta_2}$$

- $\frac{z1}{z2} = \frac{r1}{r2} e^{j(\theta 1-\theta 2)}$

$$\boxed{\frac{z1}{z2} = \frac{r1 \angle \theta_1 - \theta_2}{r2}}$$

❒ **Avec la forme algébrique :** Si $z_1 = x_1 + jy_1$; $z_2 = x_2 + jy_2$

- $z_1 \times z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)$
  $= x_1x2 + jy1x2 + x1jy2 - y1y2$
  $= (\boldsymbol{x_1x_2 - y_1y_2}) + \boldsymbol{j(y_1x_2 + x_1y_2)}$

- $\frac{\boldsymbol{z1}}{\boldsymbol{z2}} = \frac{\boldsymbol{x1+jy1}}{\boldsymbol{x2+jy2}} = \frac{(\boldsymbol{x1+jy1})(\boldsymbol{x2-jy2})}{(\boldsymbol{x2+jy2})(\boldsymbol{x2-jy2})}$

$$\boxed{= \frac{(x1x2+y2y1)}{x2^2+y2^2} + j\frac{(y1x2-y2x1)}{x2^2+y2^2}}$$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

On donne la forme algébrique de : $z_1 = 1+j\sqrt{3}$ et $z_2 = 1- j$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous les autres formes.
2. Mettre sous forme algébrique z_1z_2 ; $\frac{\boldsymbol{z1}}{\boldsymbol{z2}}$.

EXERCICE 2 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1°) $Z_1 = (4-5j) + (3+2j)$ 2°) $Z_2 = (4-5j).(3+2j)$ 3°) $Z_3 = 3(4-5j)$

4°) $Z_4 = (2+5j)^2$ 5°) $Z_5 = 2j(4-5j)$ 6°) $Z_6 = (-1+3j)^3$

Réponse :
1°) $Z_1 = 7-3j$ 2°) $Z_2 = 22-7j$ 3°) $Z_3 = 12-15j$
4°) $Z_4 = -21+20j$ 5°) $Z_5 = 10+8j$ 6°) $Z_6 = 26-18j$

EXERCICE 3 :

On donne : $Z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$ et $Z_2 = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}$. Calculer le produit $Z_1.Z_2$ de ces deux nombres complexes.

Réponse : $Z_1.Z_2 = \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{12}}$

EVALUATION 1 :

Le nombre complexe $Z = (4 - 3j) - (5 + 6j)$ a pour forme algébrique :

a) $Z = 7 + 3j$ b) $Z = -1 - 9j$ c) $Z = -1 - 5j$ d) $Z = -1 + 9j$ e) J'ai besoin d'aide

Réponse : b)

EVALUATION 2 :

Le nombre complexe $Z = \frac{5+6j}{4-3j}$ a pour forme algébrique :

a) $Z = \frac{2}{25} + \frac{39}{25}j$ b) $Z = \frac{2}{25} - \frac{39}{25}j$ c) $Z = \frac{-2}{25} + \frac{39}{25}j$ d) $Z = -\frac{2}{25} + \frac{39}{25}j$ e) J'ai besoin d'aide

Réponse : a)

EVALUATION 3 :

Le nombre complexe $Z = (-3 + 2j)(\overline{-3 + 2j})$ a pour forme algébrique :

a) $Z = 13j$ b) $Z = 13 + 13j$ c) $Z = 13$ d) $Z = -13$ e) J'ai besoin d'aide

Réponse : c)

EVALUATION 4 :

Le nombre complexe $Z = (-3 + 2j) - (\overline{-3 + 2j})$ a pour forme algébrique :

a) $Z = 4j$ b) $Z = 4 + j$ c) $Z = 3$ d) $Z = -4j$ e) J'ai besoin d'aide

Réponse : a)

EVALUATION 5 :

Calculer le module du nombre complexe : $Z = (-\sqrt{3} + j)(1 + j)^2$

Réponse :

$|Z| = \left|(-\sqrt{3} + j)(1 + j)^2\right| = \left|-\sqrt{3} + j\right| \times |(1 + j)|^2 = 4$

EVALUATION 6 :

Dire si les égalités suivantes sont vraies ou fausses :

a) $1 + j = \sqrt{2}\llcorner\frac{\pi}{4}$

b) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j = cos\frac{2\pi}{3} + jsin\frac{2\pi}{3}$

c) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j = cos120° - jsin120°$

d) $-1 = -cos\pi + jsin\pi$

Réponse :

$a) \leftrightarrow vrai$; $b) \leftrightarrow vrai$; $c) \leftrightarrow vrai$ $d) \leftrightarrow fausse$

Chapitre 2. LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Donner les caractéristiques du champ magnétique créé par un aimant et par une bobine;
- Appliquer la loi de LAPLACE.

I. INTRODUCTION AU CHAMP MAGNETIQUE

Un champ magnétique est une région de l'espace où règnent des propriétés magnétiques.

1. LES SOURCES DE CHAMP MAGNETIQUE

a. Les sources naturelles

❒ **La Terre :** la terre crée un champ magnétique porté par le méridien magnétique et dirigé du sud vers le nord. C'est ce champ qui permet aux navires de s'orienter.

❒ **L'aimant :** l'aimant est constitué de l'oxyde magnétique de formule Fe_3O_4.

- Un aimant droit crée un champ magnétique orienté de son pôle Sud vers son pôle Nord. (Fig. 1a)
- Entre les deux branches d'un aimant en U les lignes de champs sont parallèles. (Fig. 1b)

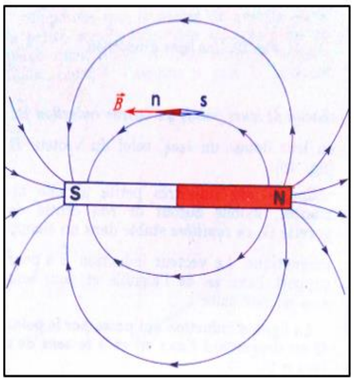


Figure 1.a)

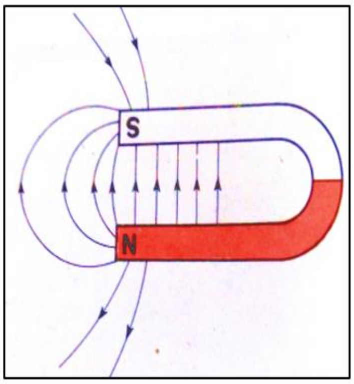


Figure 1.b)

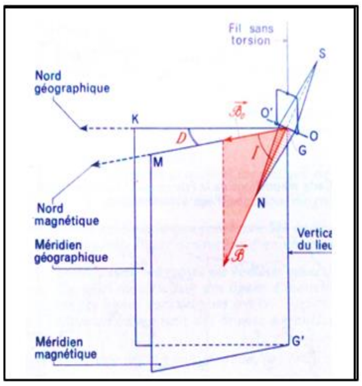
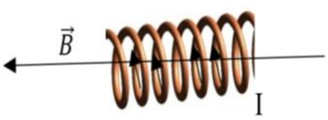


Figure 1-1

b. Les sources artificielles

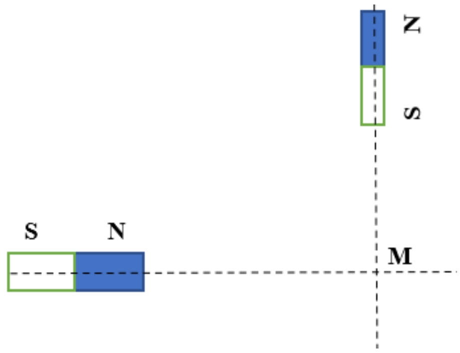
❒ Un fil conducteur parcouru par un courant électrique crée un champ magnétique.

❒ Une bobine traversée par un courant électrique crée un champ magnétique.



EXERCICE D'APPLICATION :

1. Sur le schéma ci – dessous, représentez le champ créé par chaque aimant et le champ résultant au point M.
2. Donnez une relation entre les trois champs.



2. CHAMP CREE PAR UN COURANT

a. Cas d'un courant rectiligne

Un fil conducteur rectiligne PQ traversé par un courant électrique crée un champ magnétique $\vec{B}$ dont les caractéristiques sont :

- Point d'application : le point M ;
- Direction : $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan défini par la droite (PQ) et le point M ;
- Sens : le sens est donné par la règle du bonhomme d'Ampère ;
- Intensité : $\|\vec{B}\| = 2.10^{-7}.\frac{I}{d}\begin{cases}I \text{ est l'intensité du courant (en Ampère)} \\ d = \text{distance OM (en mètre)}\end{cases}$

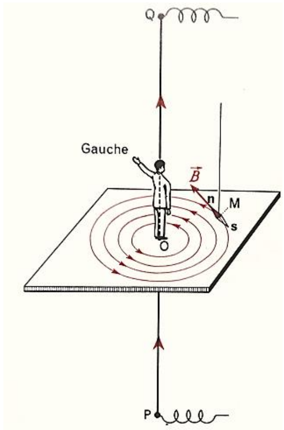


Figure 1-3

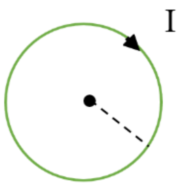
REGLE DU BONHOMME D'AMPERE : Le sens de l'induction magnétique créé par le courant électrique au point M est donné par le bras gauche de l'observateur d'Ampère qui regarde le point M : il est couché sur le fil de façon que le courant lui entre par les pieds et sorte par sa tête en regardant le point M.

N.B. : Afin de déterminer le sens du champ magnétique, parfois on peut utiliser les représentations suivantes :

$\vec{B}$ ⊙ *Champ $\vec{B}$ sortant*

$\vec{B}$ ⊗ *Champ $\vec{B}$ entrant*

b. Cas d'une spire

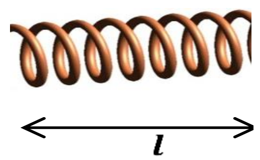


$$B_M = 2.10^{-7}.\frac{I}{d}$$

c. Cas d'une bobine plate de N spires

$$B_M = 2.10^{-7}.\frac{NI}{d}$$

d. Cas d'une bobine longue



❒ Un solénoïde est une bobine longue (l > 10 r) ; r étant le rayon de la spire. On appelle nombre de spires par mètre, la grandeur **n** = $\frac{N}{l}$ (exprimé en **spires/mètres**)

❐ **CARACTERISTIQUES DU CHAMP MAGNETIQUE :**

- Point d'application : tout point situé à l'intérieur de la bobine ;
- Direction : l'axe du solénoïde ;
- Sens : donné par la règle du bonhomme d'Ampère ;
- Intensité: $\mathbf{B = \mu_0 . n. I = \mu_0 . \frac{N}{l} . I}$ avec $\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}$ S.I. (perméabilité du vide)

II. INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

1. QUELQUES OBSERVATIONS

- En bougeant un aimant près d'une bobine, celle-ci est parcourue par un courant électrique.
- En appuyant sur la manivelle d'une moto, un courant électrique apparaît pour démarrer le moteur.

Ce sont des **phénomènes d'induction magnétique**.

2. LE FLUX MAGNETIQUE

Considérons une surface $\vec{S}$ traversée par un champ magnétique $\vec{B}$. (Figure 1-4)
Le flux Φ du champ magnétique à travers la bobine est :

$$\mathbf{\Phi = \vec{B} . \vec{S} = B.S.\cos\Theta}$$

Φ s'exprime en weber (Wb)

- Dans le cas de N spires, Φ = N.B.S.CosΘ
- Dans le cas d'une bobine Φ =N.B.S

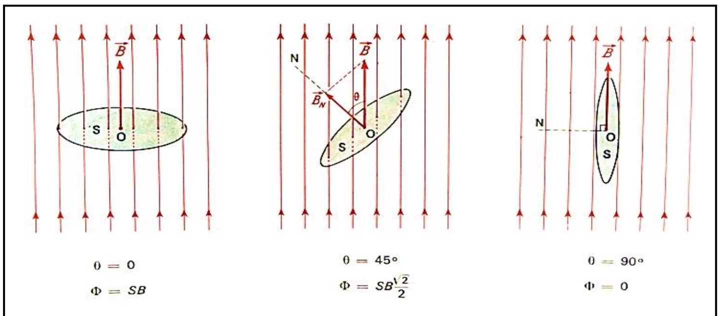


Figure 1-4

LOI DE LENZ : Le sens du courant induit est tel que l'effet qu'il crée s'oppose au déplacement (à la cause) qui lui donne naissance.

LOI DE FARADAY : Tout circuit soumis à une variation de flux (soit par variation du vecteur champ magnétique, soit par déplacement du circuit dans le champ, soit par variation de la surface) est le siège d'une f.é.m. induite qui a pour expression :

$$\mathbf{e = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ ou bien } e = -\frac{\Phi 2 - \Phi 1}{t2 - t1}}$$

On a : Φ = B.S donc $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BS)}{dt}$

En supposant que B = constante, $\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt}$ donc $\mathbf{e = -B.\frac{dS}{dt}}$

APPLICATION : Un conducteur MN est assujetti à se déplacer sur deux rails (rails de LAPLACE) baignant dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$; la vitesse constante du conducteur MN est $\vec{v}$; seule une portion l du conducteur est dans le champ $\vec{B}$.
(Voir figure 1-5)

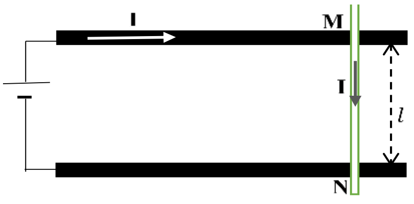
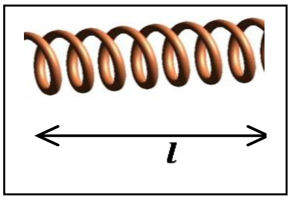


Figure 1-5

Question : Etablir l'expression de la f.é.m. qui naît aux bornes du conducteur.



Résolution : Pendant la durée dt, la barre MN parcourt une distance **d = v. dt.**
La barre MN a balayé l'aire $dS = d.l = v.l.dt \Rightarrow \frac{dS}{dt} = v.l$ $\frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} = -e$ d'où

$$\mathbf{e = -B.v.l}$$

N.B. : On peut évaluer la puissance du courant. En effet, si R est la résistance totale du circuit, la loi d'Ohm s'écrit : e = R.I   d'où $I = \frac{e}{R}$

Donc : $$\mathbf{P = \frac{e^2}{R}}$$

III. L'AUTO-INDUCTION

1. LE PHENOMENE D'AUTO-INDUCTION

Considérons le montage ci-contre :
On règle le rhéostat de sorte que sa résistance soit égale à celle de la bobine. Donc la branche A_1B_1 a même résistance que la branche A_2B_2 (Voir Figure 1-6).
Les lampes L_1 et L_2 sont identiques.

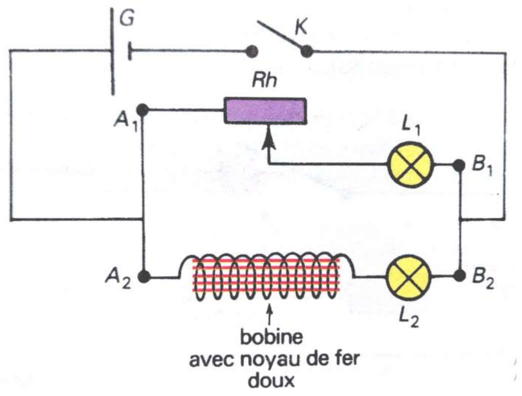


Figure 1-6

Lorsqu'on ferme l'interrupteur K, la lampe L_1 s'allume immédiatement mais la lampe L_2 s'allume progressivement pour atteindre l'éclat normal.

Lorsqu'on ouvre K, L_1 s'éteint immédiatement alors que L_2 s'éteint avec un retard.
La bobine est à l'origine de ce phénomène : une bobine s'oppose à l'établissement et à l'annulation (rupture) du courant dans un circuit ; c'est **le phénomène d'auto-induction**.

a. La force électromotrice d'auto-induction

Considérons une bobine de **N** spires et de longueur **l** parcouru par un courant d'intensité **I**.
Le champ créé par la bobine est : $B = \mu_o.\, n.\, I = \mu_o.\, \frac{N}{l}\,.\, I$
Le flux Φ de $\vec{B}$ à travers les N spires est $\Phi = NBS = N.\, \mu_o.\, \frac{N}{l}\,.\, I.S$

$$\mathbf{\Phi = N^2.\, \mu_o.\, \frac{1}{l}.\, S.I = LI}$$

La constante $\mathbf{L = N^2.\, \mu_o.\, \frac{S}{l}}$ est appelée **l'inductance de la bobine**. Elle s'exprime en **Henry (H)**. Ainsi, la force électromotrice d'auto-induction s'écrit :

$$\mathbf{e = -\,L\,\frac{di}{dt}}$$

b. Modèle d'une bobine

- ❐ La tension **U** aux bornes d'une bobine parcouru par un courant d'intensité **I** a pour expression :

Bobine sans résistance (L)

$u = L\,\frac{di}{dt}$

Bobine avec résistance (L ; r)

$u = ri + L\,\frac{di}{dt}$

- ❐ **L'énergie emmagasinée** dans une bobine d'inductance **L** parcouru par un courant d'intensité **I** a pour expression :

$$\mathbf{W = \frac{1}{2}\,L\,I^2}$$

2. LA FORCE DE LAPLACE

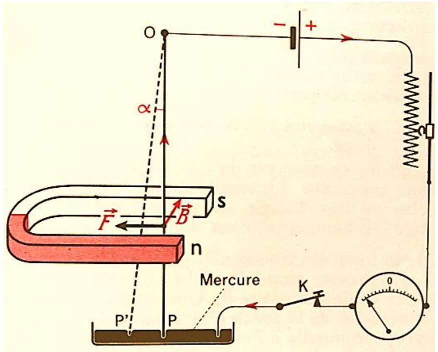


Figure 5-6

Lorsque le circuit est fermé, la barre se met en mouvement : elle est donc soumise à une force $\vec{F}$ due au passage du courant électrique : c'est l**a force de Laplace**. Elle est définie par la relation :

$$\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{I}\vec{\mathbf{l}} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

Son module est : $\|\vec{\mathbf{F}}\| = \mathbf{I.l.B.|Sin\alpha|}$

CAS PARTICULIER : Si α = 90°, (voir Figure 5-7) alors $\|\vec{F}\| = I.l.B$

a. Enoncé de la loi de LAPLACE

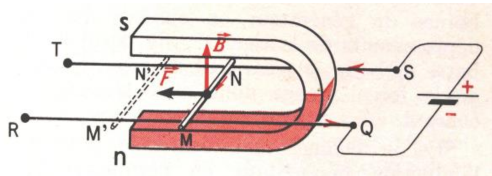


Figure 5-7

Un conducteur parcouru par un courant électrique et placé dans un champ magnétique est soumis à une force électromagnétique dite force de Laplace ayant les caractéristiques suivantes :

- Point d'application : milieu de la portion du conducteur soumis au champ magnétique ;
- Direction : perpendiculaire au plan défini par le conducteur et le champ magnétique ;
- Sens : le trièdre $(I\vec{l}\ ;\ \vec{B}\ ;\ \vec{F})$ est direct ;
- Intensité : $\|\vec{F}\| = I.l.B.|Sin\alpha|$

b. Travail de la force électromagnétique

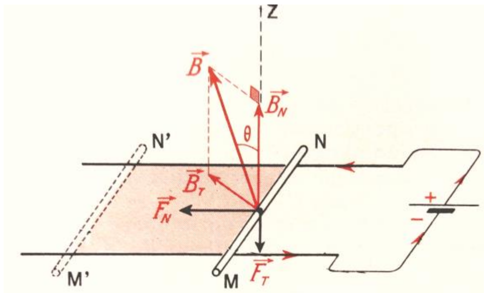


Figure 5-8

Le travail de la force magnétique ($\vec{F} = \vec{F}_N + \vec{F}_T$) de M à M's'écrit :

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{MM'} = (I.MN.B).MM'$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{W = I.S.B.Cos\theta}$ $\begin{cases} \mathbf{W} \text{ en joule} \\ \mathbf{I} \text{ en ampère} \\ \mathbf{S = MN.MM'} \text{ en mètre carré} \\ \mathbf{B} \text{ en tesla} \end{cases}$

EXERCICES D'APPLICATIONS

EXERCICE 1 :

Une bobine possède 800 spires de rayon moyen 2,5 cm. Sa longueur est l = 40 cm.

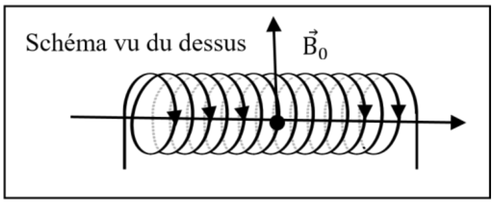
1. Peut-on assimiler cette bobine à un solénoïde infiniment long ? Justifier votre réponse.
2. Donner l'expression du champ magnétique au centre de cette bobine lorsqu'elle est parcourue par un courant continu d'intensité I.
3. Calculer la valeur de ce champ magnétique pour I = 2 A. On donne $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I.

Réponses

1) l > 10r : le solénoïde peut être considéré comme infiniment long.
2) $B = \mu_0.n.I$; $B = 5{,}02.10^{-3}$ T

EXERCICE 2 :

Dans cet exercice, on néglige le champ magnétique terrestre. Une bobine de longueur l = 20 cm, comporte N = 150 spires de rayon moyen R = 2 cm. On donne $\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ S.I.



1. Le champ magnétique, au centre de la bobine vaut B = 2 mT. Calculer l'intensité I du courant dans la bobine.

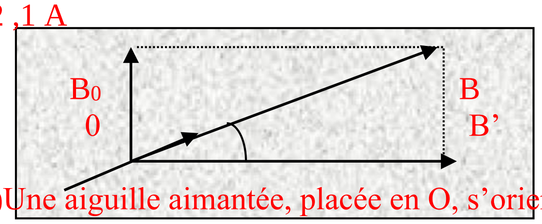
2. La bobine est maintenant parcourue par un courant d'intensité I'= 5 A et placée dans un champ magnétique uniforme de valeur B_0 = 3 mT. L'axe de la bobine et le champ $\vec{B_0}$ sont perpendiculaires.

a) Représenter sur un schéma $\vec{B_0}$ et $\vec{B'}$ (Champ créé par la bobine).
b) Quelle direction prendrait une aiguille aimantée placée en O ?
c) Calculer la valeur du champ magnétique résultant en O.

Réponses

1) I = 2 ,1 A

2. a)



b)Une aiguille aimantée, placée en O, s'orienterait suivant le champ B.

c)B' = $4,7.10^{-3}$ T ; B = $5,6.10^{-3}$ T ⇒ θ = 57,50°

EXERCICE 3 :

Un solénoïde est constitué d'un enroulement de fil de diamètre d = 1 mm, recouvert de vernis d'épaisseur négligeable. Les spires sont jointives et assimilées à des cercles parfaits de rayon r = 2,5 cm.

1. Calculer le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde.

2. La longueur du fil de cuivre utilisé est L = 62,8 m. Calculer la longueur l du solénoïde. Peut-on considérer ce solénoïde comme infiniment long ?

3. Le solénoïde est branché aux bornes d'un générateur de courant continu de f.é.m. 12 V et de résistance interne 3Ω. On néglige la résistance du solénoïde. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde.

4. Le solénoïde est maintenant placé dans un endroit où règne un champ magnétique uniforme de valeur $B_h = 2.10^{-7}$T. En l'absence de courant électrique une aiguille aimantée placée au centre du solénoïde, s'oriente perpendiculairement à l'axe du solénoïde. On établit un courant continu d'intensité I = 0,01 A. De quel angle dévie l'aiguille aimantée ?

Réponses

1) $n = \frac{1\text{ sp}}{10^{-3}\text{m}}$= 1000 m^{-1};

2) $\ell = \frac{L}{2\pi n r}$= 0,4 m ; ℓ □10r : donc c'est un solénoïde infiniment long.

3) □Calcul de I : loi de Pouillet : I = E/ r_0 = 4A ; □Calcul de B : B = $\mu_0 nI$ = 5.10^{-3} T.

4) Calcul de □ : B' = $\mu_0 nI'$ = $1,26.10^{-5}$ T où I' = 0,01 A ;

tan □ = B'/ B_h = 0,63 □ □ = 32 °.

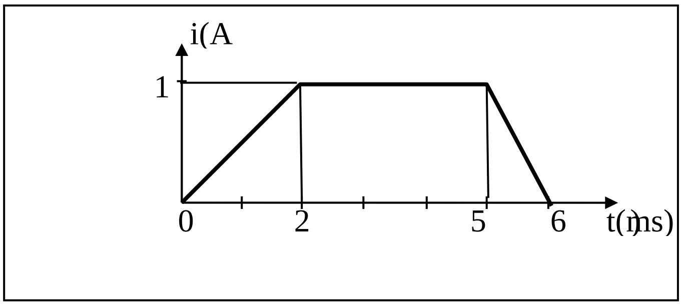
EXERCICE 4 :

Soit un solénoïde de longueur $\ell = 40$ cm, comportant 1 250 spires par mètre, de rayon R = 2 cm, parcouru par un courant i = 5 A.

1. Calculer le champ magnétique créé au centre O du solénoïde par le passage du courant.

2. En supposant le champ magnétique uniforme à l'intérieur du solénoïde, calculer le flux propre de ce solénoïde. En déduire son inductance L.

3. Le solénoïde est à présent parcouru par un courant d'intensité variant en fonction du temps comme l'indique la figure. Déterminer la force électromotrice auto- induite e qui apparaît aux bornes de la bobine pour chacune des trois phases. Tracer le graphe e = f(t) pour $t \in (0, 6$ ms).



Réponses

1) $B = \mu_0.I = 19,6$ mT

2) $\Phi_P = NBS = 3,1.10^{-2}$ Wb ; $L = \Phi_P = 8,2$ mH

3)

- $0 < t < 2$ ms : $e = -3,1$ V ;
- 2ms $< t < 5$ ms : $e = 0$ V ;
- 5 ms $< t < 6$ ms : $e = +6,2$ V

EXERCICE 5 :

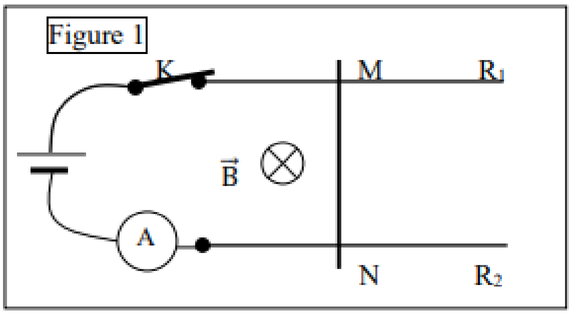
Une fine tige en aluminium, de masse 1 g et de longueur $\ell = 10$ cm, repose sur deux rails horizontaux. La tige est parcourue par un courant électrique d'intensité I = 5 A. L'ensemble du dispositif est placé dans un champ magnétique uniforme vertical de valeur B = 10 mT.

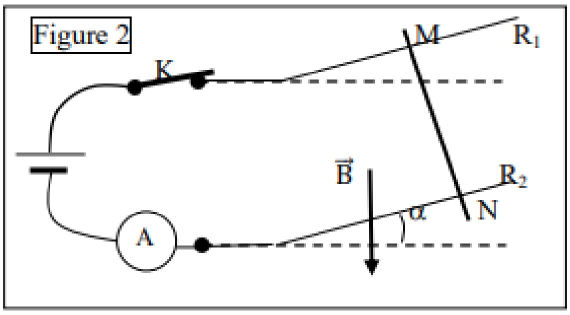
On donne $g = 10$ N.kg^{-1}.

1. Déterminer les caractéristiques de la force de Laplace agissant sur la tige. Représenter cette force sur la figure 1.

2. On incline les rails R_1 et R_2 d'un angle α par rapport à l'horizontale de manière à obtenir l'équilibre de la tige MN (voir figure 2).

Déterminer :





Réponses

1) $F = I.l\,B = 5.10^{-3}$ N

2) $\tan \alpha = {}^{F}\square{}^{IlB}$; $\square = 26{,}5°$; $P = mg$

Chapitre 3. LES GRANDEURS SINUSOÏDALES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Définir une grandeur sinusoïdale ;
- Représenter une grandeur sinusoïdale.

I. PRESENTATION

Une grandeur « y » fonction du temps est dite sinusoïdale si elle se met sous la forme

$$y = a\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta) \quad \begin{cases} a: \text{amplitude ou valeur maximale}(y_{max}) \\ \omega: \text{pulsation} \\ \theta: \text{phase à } t_0 = 0 \\ (\omega t + \theta): \text{phase à t quelconque} \end{cases}$$

Exemple : $u(t) = U_{max}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta_u)$: tension instantanée
$i(t) = I_{max}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta_i)$: intensité instantanée

NB : La différence de phase est par définition : $\boldsymbol{\varphi = \theta_u - \theta_i}$; on l'appelle encore **le déphasage** de u par rapport à i .

Une grandeur sinusoïdale est donc déterminée par : y_{max}; ω et θ.
$\overline{OC} = a\,\mathrm{Cos}(\omega t + \theta)$;
$\overline{OS} = a\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta)$; On pose $y = \overline{OS}$.
y est périodique de période T car elle reprend la même valeur aux instants (t + nT ; n∊ IN).

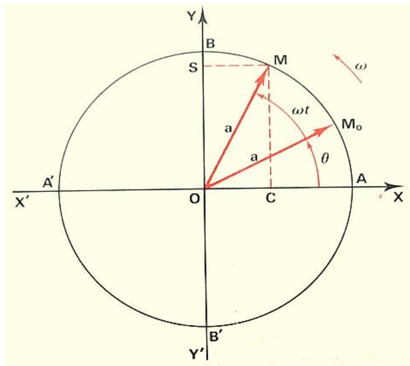


Figure 1-1

II. PROPRIETE DE LA FONCTION SINUSOÏDALE

- **La période T :** est le temps qui s'écoule pendant que la phase augmente de 2π. C'est la durée que met le vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$ pour effectuer un tour :

$$\mathbf{T = \frac{2\pi}{\omega}} \begin{cases} \boldsymbol{\omega} \textbf{ en rad/s} \\ \textbf{T en s} \end{cases}$$

- **La fréquence :** $\mathbf{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$ est le nombre de tours par seconde.

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega = 2\pi f}.$$

- **Quelques relations importantes :**

$$y(t) = -a\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta) = a\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta + \pi)$$
$$y(t) = a\,\mathrm{Cos}(\omega t + \theta) = a\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta + \tfrac{\pi}{2})$$

[Revoir les formules trigonométriques ci-contre].

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\mathrm{tg}\,x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

III. VALEUR EFFICACE D'UNE GRANDEUR SINUSOÏDALE

Notée Y, elle est obtenue par la relation : $\mathbf{Y = \frac{a}{\sqrt{2}}}$

NB : La valeur efficace Y d'une grandeur électrique sinusoïdale (courant, tension) est la valeur fournie par les instruments de mesure. (Appareil non polarisé).

Exemple : Ampèremètres ; voltmètre ; multimètres…

Dans le cas d'un courant i traversant une résistance, la valeur efficace de i est l'intensité d'un courant continu I qui, passant dans la même résistance que i, produirait pendant une même durée le même dégagement de chaleur que lui.

IV. REPRESENTATION D'UNE GRANDEUR SINUSOÏDALE

1. VECTEUR TOURNANT ET REPRESENTATION CARTESIENNE

Soit la fonction $y(t) = a\,\mathrm{Sin}(\omega t)$

On peut faire correspondre à tout instant t, le point M sur le cercle à un point M' dans le repère cartésien.

On obtient ainsi la représentation cartésienne de $y(t)$: **c'est une sinusoïde**.

(Voir Figure1-2).

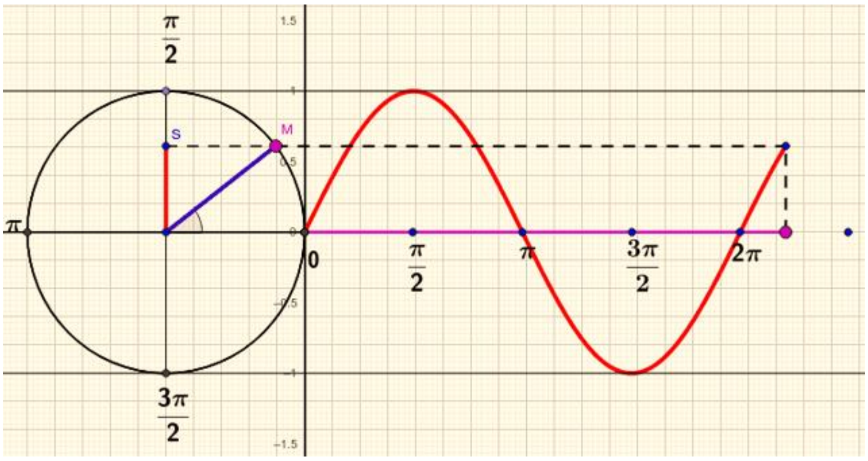


Figure 1-2

2. REPRESENTATION DE FRESNEL (OU VECTEUR DE FRESNEL)

La fonction $y(t) = a\,\mathrm{Sin}(\omega t + \theta)$ étant « engendrée » par un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω, on représente simplement ce vecteur générateur dans la position qu'il occupe à l'instant $t = 0$, comme s'il avait été « photographié » à cet instant.

Ainsi les fonctions : $y_1 = 8\,\mathrm{Sin}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ et $y_2 = 6\,\mathrm{Sin}\left(\omega t - \frac{\pi}{12}\right)$ sont représentés respectivement (Voir Figure 1-3).

Le vecteur de Fresnel est donc caractérisé par la phase initiale θ et la valeur maximale $a = y_{max}$.

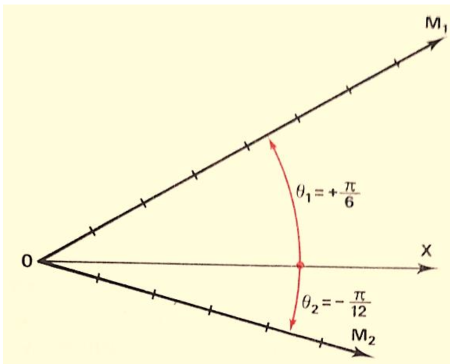


Figure 1-3

3. REPRESENTATION COMPLEXE

A toute grandeur sinusoïdale, on peut associer un nombre complexe.

$$y = Y\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow \text{(équivaut à)} \quad \underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y}\lfloor\boldsymbol{\varphi} \quad \begin{cases} \underline{\mathbf{Y}} \text{ est le nombre complexe} \\ \boldsymbol{\varphi} \text{ est son argument} \end{cases}$$

Exemples : $u = 5\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U} = 5\lfloor 0 = 5$;

$$i = 4\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{I} = 4\left\lfloor\frac{\pi}{3}\right. = 4\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3} + 4j\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3} = 2 + 3{,}46j$$

Remarque : Les représentations de Fresnel et les nombres complexes associés sont les deux représentations couramment utilisées.

Selon les cas, on est amené à utiliser l'une ou l'autre de ces représentations afin de résoudre facilement les problèmes rencontrés.

V. COMMENT CONSTRUIRE SOIGNEUSEMENT LE VECTEUR DE FRESNEL ?

Pour construire soigneusement le vecteur de Fresnel, on procède :

- Prendre un axe ; $\overrightarrow{Ox}$ comme origine des angles
- Porter sur cet axe le vecteur ; $\overrightarrow{OA}$ telle que la mesure algébrique donne 10 cm
- Construire ensuite le cercle de Diamètre OA
- Tracer un arc de cercle de centre O et de rayon 10 Cos $\boldsymbol{\varphi}$. On obtient deux intersections b1 et b2
  - Si $\boldsymbol{\varphi} > 0$; $\overrightarrow{OM}$ est porté par la demi-droite [0b1)
  - Si $\boldsymbol{\varphi} < 0$; $\overrightarrow{OM}$ est porté par la demi-droite [Ob2)
- La direction de $\overrightarrow{OM}$ étant déterminée, on place le point M en utilisant l'échelle choisie c'est-à-dire :

1cm $\longrightarrow$ x et OM $\longrightarrow$ Y

CONSTRUCTION :

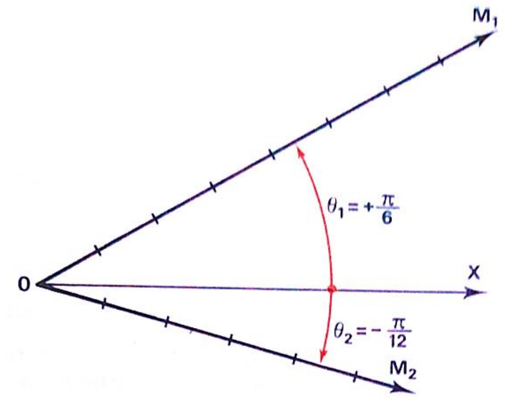


Figure 1-3

EXERCICES D'APPLICATIONS

EXERCICE 1 :

Soit $u = 220\sqrt{2}\sin\left(314\,t + \frac{\pi}{6}\right)$

1. Préciser ω ; T ; f ; Um et $\boldsymbol{\varphi}$.
2. Construire son vecteur de Fresnel et donner l'expression de sa valeur efficace complexe sous forme polaire et algébrique.

EXERCICE 2 :

Pour un dipôle passif alimenté en sinusoïdal, la tension est $u = 230\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\,\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ et l'intensité du courant a pour équation : $i = 5\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Le déphasage $\boldsymbol{\varphi}$ du courant par rapport à la tension est :

a) $\varphi = 75°$; b) $\varphi = -75°$; c) $\varphi = -\frac{5\pi}{12}$ rad ; d) $\varphi = +\frac{\pi}{12}$ rad ; e) J'ai besoin d'aide.

EXERCICE 3 :

Une tension sinusoïdale d'équation : $u = 24\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ alimente un dipôle passif. Le courant d'intensité efficace I = 5 A est en quadrature arrière de la tension.

L'expression de l'intensité instantanée est :

a) $i = 5\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$; b) $i = 5\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(250\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$; c) $i = 3\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$;
d) $i = 5\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$; e) J'ai besoin d'aide.

EXERCICE 4 :

Aux bornes d'un dipôle, la tension est : $u = 48\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}100\pi t$ et le courant qui traverse ce dipôle est : $i = 5\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Calculer le déphasage $\boldsymbol{\varphi}$ de i par rapport à u.
2. Montrer alors que l'expression du courant peut s'écrire : $i = I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t + \varphi)$.

EXERCICE 5 :

Soient les trois tensions sinusoïdales ci-contre (Voir figure 1-4) :
Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont exactes ?

a) $\varphi_{2/3} = -1{,}05$ rad ; b) $\varphi_{3/1} = 60°$;
c) u_2 est en quadrature avant de u_3; d) u_2 est en phase avec u_1.

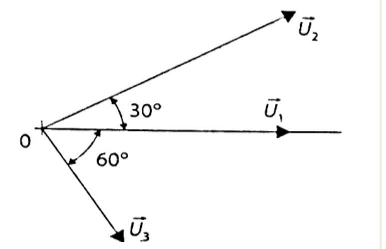


Figure 1-4

EXERCICE 6 :

Un relevé à l'oscilloscope est donné à la figure 1-6 :
Déterminer :

1. La période et la fréquence de ces tensions ;
2. Les valeurs efficaces de u_1 et u_2 ;
3. Le déphasage $\varphi_{2/1}$ de u_2 par rapport à u_1.
4. Ecrire les équations de ces tensions.

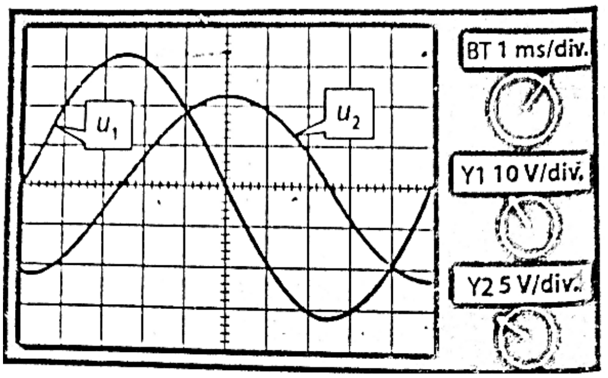


Figure 1-6

EXERCICE 7 :

1. Connaissant la valeur maximale d'un courant et l'une des trois grandeurs f, T, ω ; Calculer les deux autres :

I_{max}(A)	f(Hz)	T(ms)	ω (rad/s)
5	60		
7		1	
2	400		
4			157
3		60	
8			942

2. Donner l'expression du courant sous la forme : $i = I_{max}\,\mathrm{Sin}(\omega t)$.

Chapitre 4. IMPEDANCE D'UN DIPOLE

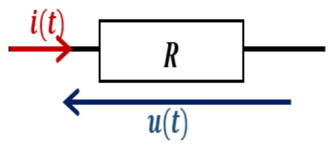
Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Définir et calculer une impédance ;
- Calculer une admittance ;
- Appliquer la loi d'ohm en régime sinusoïdal.

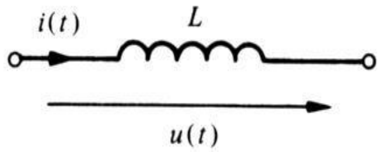
I. LES DIPOLES ELEMENTAIRES

Ce sont des dipôles passifs qui n'ont de tension en leur bornes qu'en circuit fermé.

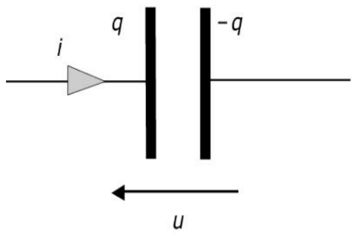
1. DIPOLE RESISTIF → RESISTANCE R (OHM (Ω))



2. DIPÔLE INDUCTIF → INDUCTANCE L (HENRY H)



3. DIPOLE CAPACITIF → CAPACITE C (FARAD F)



II. IMPEDANCE D'UN DIPOLE

1. DEFINITION

L'impédance d'un dipôle est le quotient de la tension efficace U par l'intensité efficace I qui traverse ce dipôle. Elle est notée Z.

$$\boldsymbol{Z} = \frac{U}{I} = \frac{U\times\sqrt{2}}{I\times\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Z} = \frac{U_m}{I_m}$$

L'impédance ne reste constante que si **la fréquence est invariable**. Donc elle est **fonction de la pulsation ω.**

2. ADMITTANCE D'UN DIPOLE

L'admittance d'un dipôle est l'inverse de l'impédance. Elle est notée Y.

$$Y = \frac{1}{Z} \quad \begin{cases} Y \text{ est en Siemens } (S) \\ Z \text{ est en } \Omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Y} = \frac{I}{U} = \frac{I_m}{U_m}$$

3. DIAGRAMME DE FRESNEL

Les valeurs instantanées d'une tension et d'un courant sinusoïdaux sont des fonctions sinusoïdales du temps d'équations horaires :

$u = U\sqrt{2}\,Sin(\omega t + \varphi_u)$ et $i = I\sqrt{2}\,Sin(\omega t + \varphi_i)$

Supposons que : $\varphi_u < 0$ et $\varphi_i > 0$

Associons : $u \leftrightarrow \vec{U}$ et $i \leftrightarrow \vec{I}$

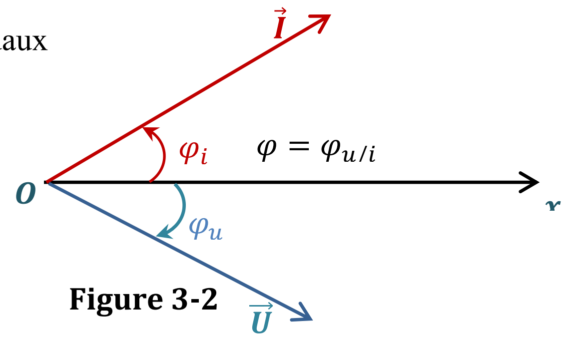


Figure 3-2

On obtient le graphique suivant (Figure 3-2)

- On appelle **déphasage de la tension par rapport au courant** $\varphi = \varphi_{u/i}$, la différence de phase entre la tension et le courant : $\boldsymbol{\varphi = \varphi_{u/i} = \varphi_u - \varphi_i}$.

Le déphasage de u par rapport à i est l'angle dont il faut tourner $\vec{I}$ pour l'amener sur $\vec{U}$;

REMARQUE : $\boldsymbol{\varphi_{i/u} = -\varphi = -\varphi_{u/i}}$

- Si $\boldsymbol{\varphi} > 0$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\varphi_u > \varphi_i}$ alors u est en avance sur i ou i est en retard sur u.
- Si $\boldsymbol{\varphi} < 0$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\varphi_u < \varphi_i}$ alors u est en retard sur i ou i et en avance sur u.
- Si $\boldsymbol{\varphi} = 0$ c'est-à-dire $\boldsymbol{\varphi_u = \varphi_i}$ alors u et i sont en phase.
- Si $\boldsymbol{\varphi} = \frac{\pi}{2}$ alors u et i sont quadrature.
- Si $\boldsymbol{\varphi = \pi}$ alors u et i sont en opposition de phase.

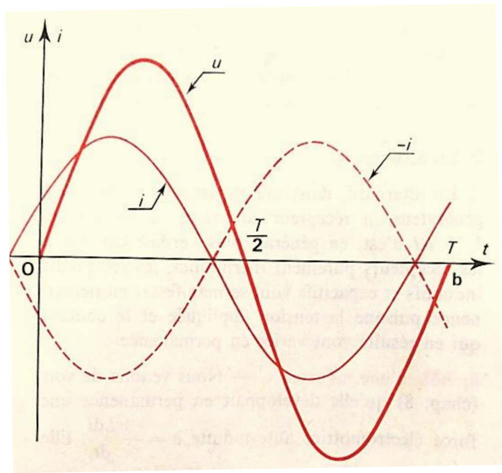


Figure 3-3

- <u>**DETERMINATION GRAPHIQUE DE φ :**</u>

Le vecteur $\vec{I}$ étant supposé arrêté, le vecteur $\vec{U}$ devra, à la vitesse angulaire ω, balayer l'angle $\boldsymbol{\varphi}$ pour le rejoindre. La durée de l'opération est le décalage horaire τ :

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\varphi}{2\pi}$$

u_2 est en avance sur u_1 car c'est u_2 qui a atteint premièrement son maximum.

III. LOI D'OHM EN REGIME SINUSOÏDAL

1. NOTION D'IMPEDANCE COMPLEXE

$\boldsymbol{u = U\sqrt{2}\,Sin(\omega t + \varphi_u)} \Leftrightarrow \underline{U} = \mathbf{U} \llcorner \boldsymbol{\varphi_u}$; et $\boldsymbol{i = I\sqrt{2}\,Sin(\omega t + \varphi_i)} \Leftrightarrow \underline{I} = \mathbf{I} \llcorner \boldsymbol{\varphi_i}$

Par définition l'impédance complexe est :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \rightarrow \underline{Z} = \frac{U \llcorner \varphi_u}{I \llcorner \varphi_i} \rightarrow \underline{Z} = \frac{U \llcorner (\varphi_u - \varphi_i)}{I} \quad \text{donc} \quad \underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} \llcorner \boldsymbol{\varphi}$$

$Z = |\underline{Z}|$ Impédance reelle

$$\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z\,Cos\,\varphi + j.Z\,Sin\,\varphi} \quad \begin{cases} R = Z\,Cos\varphi \\ X = Z\,Sin\,\varphi \end{cases}$$ (Forme trigonométrique)

R est appelé la résistance du dipôle

X est appelé la réactance du dipôle

On a alors : $\underline{\mathbf{Z}} = \mathbf{R + j\,X}$

2. NOTION D'ADMITTANCE COMPLEXE

L'admittance complexe est l'inverse de l'impédance complexe.

$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{1}}{\underline{\mathbf{Z}}}$ soit $\underline{Y} = \frac{I \angle \varphi i}{U \angle \varphi u}$ → $\underline{Z} = \frac{I \angle (\varphi i - \varphi u)}{U}$ $\underline{Y} = Y \angle \varphi$

$\underline{Y} = \frac{1}{Z} \text{Cos } \varphi + j \frac{1}{Z} \text{Sin } \varphi$ (Forme trigonométrique)

En posant : $\begin{cases} G = Y\,Cos(-\varphi) \\ B = Y\,Sin(-\,\varphi) \end{cases}$

On a: $\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{G} + \mathbf{jB}$ $\begin{cases} \text{G: Conductance (siemens)} \\ \text{B: Susceptance (siemens)} \end{cases}$

En régime sinusoïdal, la loi d'ohm s'écrit :

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \, . \, \underline{\mathbf{I}} \quad \text{ou} \quad \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \, . \, \underline{\mathbf{U}}$$

EXERCICE D'APPLICATION

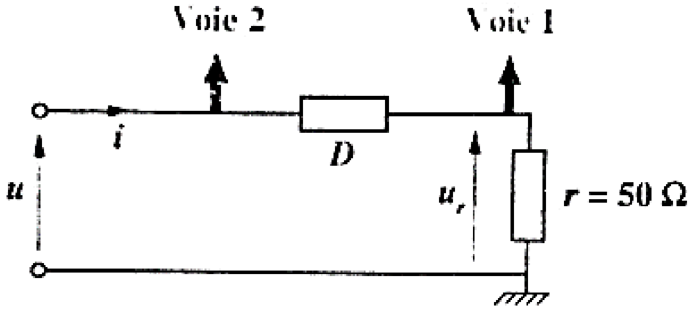
EXERCICE 1 :

On applique la tension sinusoïdale u = $120\sqrt{2}\, Sin(\omega t)$ à un dipôle passif linéaire d'impédance complexe $\underline{Z}$ = 60 + 80j.

1. Quelles sont les valeurs de la résistance et de la réactance ?
2. Calculer l'admittance complexe de ce dipôle et en déduire les valeurs de la conductance et de la susceptance.
3. Calculer la valeur efficace complexe du courant i correspondant.
4. Construire les vecteurs de Fresnel de u et de i.
5. Préciser le déphasage de u par rapport à i.

EXERCICE 2 :

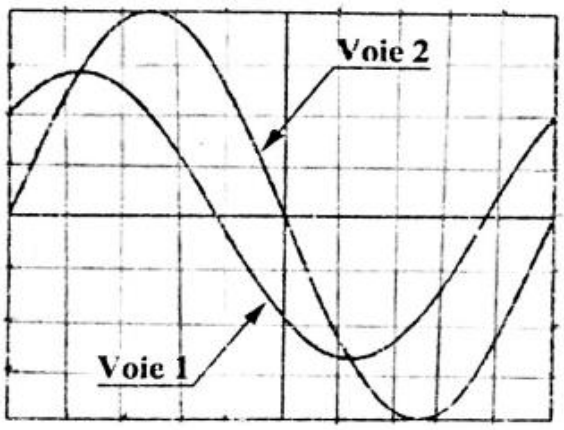
Dans le montage représenté ci-dessous, le dipôle D inconnu est :
- soit une résistance R ;
- soit un condensateur de capacité C ;
- soit une bobine parfaite d'inductance L.



Il est alimenté par une tension sinusoïdale u de fréquence f. Un oscilloscope bicourbe est branché comme l'indique le schéma ci-dessus.

1. On relève les courbes suivantes.

Voie 1 : 1 V/div ; Voie 2 : 1 V/div
base de temps : 20 µs/div



a. Préciser les grandeurs affichées sur les voies 1 et 2.

b. Sur quelle voie observe-t-on l'image de l'intensité i du courant circulant dans le circuit ?

c. La grandeur observée sur la voie 1 est-elle en phase, en avance ou en retard sur la grandeur observée sur la voie 2 ?

d. En déduire la nature du dipôle D.

2. Déterminer, à partir de ces courbes, la fréquence f de la tension u et le déphasage φ entre la tension u et l'intensité i du courant circulant dans le circuit.

3. Déterminer, à partir de ces courbes, les valeurs maximales de u et u_r (tension aux bornes de r). En déduire les valeurs efficaces U et U_r de ces tensions.

4. Sachant que $r = 50\ \Omega$, calculer la valeur efficace de l'intensité du courant dans le circuit.

5. Faire une représentation de Fresnel des tensions u et u_r. En déduire la valeur efficace de la tension aux bornes du dipôle D et calculer l'impédance du dipôle D.

1. a. Sur la voie 1 est visualisée la tension u_R aux bornes de la résistance, sur la voie 2 la tension u.

b. Comme $u_R = Ri$, on observe sur la voie 1 une image du courant.

c. Le signal sur la voie 1 coupe l'axe des temps avant celui de la voie 2, u_R donc i est en avance sur la tension u.

d. La tension u étant en retard sur le courant, nous pouvons affirmer que l'association est de nature capacitive.

2. Une période occupe sur l'écran 10 divisions donc $T = 10 \times 20\ \mu s = 200\ \mu s$. La fréquence est $f = \frac{1}{T} = 5\ kHz$.

Le décalage horaire τ est représenté par 1,3 divisions, T par 10 divisions et comme i est en avance sur u : $\varphi = -\left(\frac{\tau}{T}\right) \times 2\pi = -\frac{\pi}{4}$.

3. $\hat{U} = 4$ divisions $\Rightarrow$ $\hat{U} = 4 \times 1 = 4$ V.

$\hat{U}_R = 2{,}8$ divisions $\Rightarrow$ $\hat{U}_R = 2{,}8$ V.

$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = 2{,}8$ V ; $U_R = \frac{\hat{U}_R}{\sqrt{2}} = 2$ V.

4. $I = \frac{U_R}{R} = 40$ mA.

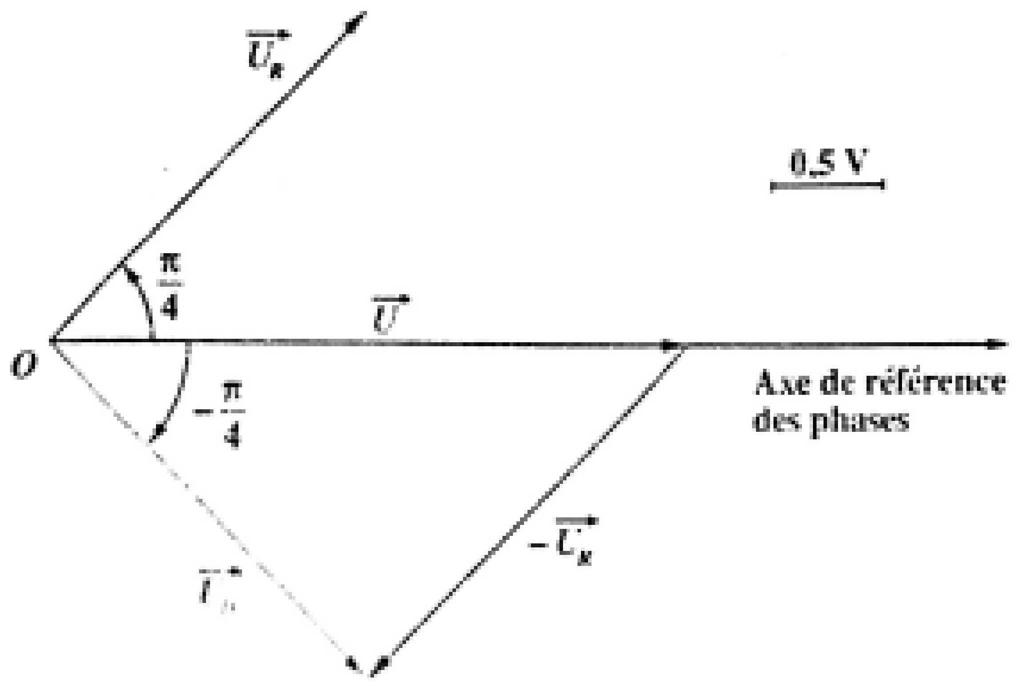
5. On prend la tension u comme référence des phases : $\theta_u = 0$; $U = 2{,}8$ V.

Le courant i est en avance de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à la tension u, u_R qui est en phase avec i est donc en avance de $\frac{\pi}{4}$ également. Les vecteurs associés à ces tensions ont pour caractéristiques : $\vec{U}(2{,}8 ; 0)$; $\vec{U_R}\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.

La tension u_D aux bornes du dipôle se détermine par la loi des branches :

$$u_D = u - u_R.$$

La construction de Fresnel donne : $\overrightarrow{U_D} = \overrightarrow{U} - \overrightarrow{U_R}$.



La tension u_D est en quadrature arrière par rapport à u_R, donc à i, le dipôle D est un condensateur. On mesure sur la construction : $U_D = 2$ V,

on en déduit $Z_D = \frac{U_D}{I} = 50\ \Omega$.

La valeur de la capacité du condensateur est : $C = \frac{1}{Z_D\omega} = 636$ nF.

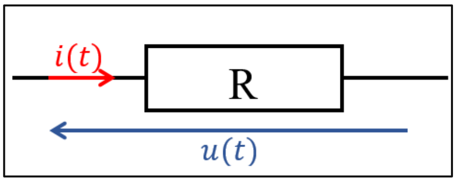
Chapitre 5. LES DIPOLES PASSIFS EN REGIME SINUSOIDAL

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Calculer l'impédance des dipôles R, L, et C
- Appliquer la loi d'ohm aux bornes des dipôles R, L et C
- Représenter le diagramme de Fresnel des dipôles de R, L et C

Les dipôles utilisés dans ce chapitre sont : les Conducteurs résistifs, les Bobines et les Condensateurs.

I. LE RESISTOR PARFAIT R



Un résistor de résistance R est un dipôle passif transformant en chaleur toute l'énergie électrique qu'il reçoit.

1. LOI D'OHM

Dans une résistance, la tension est proportionnelle au courant : **u = Ri**

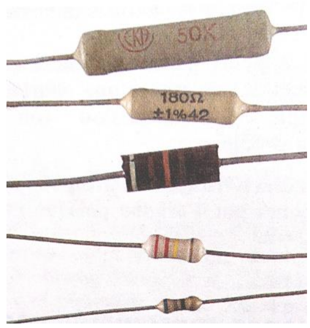
2. IMPEDANCE ET DIAGRAMME DE FRESNEL

❒ Soit : $u = U\sqrt{2}\ \text{Sin}\ (\omega t)$

D'après la loi d'ohm : $u = Ri \Rightarrow i = \frac{u}{R}$

$i = \frac{U}{R}\sqrt{2}\ \text{Sin}\ (\omega t)$ ce qui veut dire que $I = \frac{U}{R}$ Or $Z = \frac{U}{I}$ alors :

$$\mathbf{Z = R}$$



Quelques résistors

L'impédance dans une résistance est la valeur de la résistance R

Si $\begin{cases} u = U\sqrt{2}\ \text{Sin}(\omega t) \\ i = I\sqrt{2}\ \text{Sin}(\omega t) \end{cases}$ alors $\boldsymbol{\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0}$

❒ $\boldsymbol{\varphi = 0}$ ⇒ **la tension u et l'intensité i sont en phase** dans une résistance.

Diagramme de Fresnel

3. IMPEDANCE COMPLEXE

$u = U\sqrt{2}\ \text{Sin}(\omega t) \Rightarrow \underline{U} = U \lfloor 0$

$i = I\sqrt{2}\ \text{Sin}(\omega t) \Rightarrow \underline{I} = I \lfloor 0$

On sait que $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \Rightarrow \frac{U \lfloor 0}{I \lfloor 0} \Rightarrow \underline{Z} = Z \lfloor 0$ Or $Z = R$

$\underline{Z} = R \angle 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = R \cos 0 + j R \sin 0$

$$\mathbf{\underline{Z} = R}$$

4. ADMITTANCE COMPLEXE

L'admittance complexe s'écrit : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R}$

5. PUISSANCE APPARENTE ET FACTEUR DE PUISSANCE.

a. Puissance apparente

Le produit UI qui, sauf cas particulier(résistor), n'est pas égal à la puissance consommée (au sens énergétique du terme) porte le nom de puissance apparente et se note S :

$$\mathbf{S = UI} \begin{cases} \text{U en volts(V)} \\ \text{I en ampères(A)} \\ \text{S en volts – ampères (VA)} \end{cases}$$

b. Facteur de puissance

Le nombre k par lequel il faut multiplier le produit UI pour retrouver la puissance consommée P, est appelé « facteur de puissance ».

$$k = \frac{P}{UI} \begin{cases} \text{P en watts (W)} \\ \text{U en volts (V)} \\ \text{I en ampères(A)} \end{cases}$$

REMARQUES :

La puissance consommée P est par définition $P = \vec{U}.\vec{I}$

Pour un résistor, on a : $P = UI = RI^2$ Donc $\mathbf{k = 1}$

6. PUISSANCE INSTANTANEE.

A chaque instant, la puissance consommée par un dipôle quelconque est : $p = ui$

Or $\begin{cases} u = U\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t) \\ i = I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t - \varphi) \end{cases} \Rightarrow p = \left[U\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t)\right].\left[I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t - \varphi)\right] = 2UI\,\mathrm{Sin}(\omega t).\mathrm{Sin}(\omega t - \varphi)$

$\Rightarrow p = UI\,[\cos\varphi - \cos\,(2\omega t - \varphi)]$;

Sa valeur moyenne est donc : $\mathbf{P = UI\cos\varphi}$; Car le terme sinusoïdal : $UI\cos\,(2\omega t - \varphi)$ est parfois négative, parfois positive donc au cours d'une période(T) sa somme est nulle.

Récepteurs élémentaires sous tension sinusoïdale

	RÉSISTOR	CONDENSATEUR	RÉACTOR
Dipôles	i, R, u	i, C, u	i, L, u
Vecteurs associés à u et i	0, $\vec{I_r}$, $\vec{U}$	$\vec{I_C}$, 0, φ, $\vec{U}$	0, $\vec{U}$, φ, $\vec{I_L}$
Impédance	$Z = R$	$Z = \frac{1}{C\omega}$	$Z = L\omega$
Déphasage	$\varphi = 0$ rad	$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ rad	$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad
Facteur de puissance	$\cos\varphi = 1$	$\cos\varphi = 0$	$\cos\varphi = 0$
Puissance active	$P = UI = RI^2$	$P = 0$	$P = 0$
Puissance réactive	$Q = 0$	$Q = -UI = -C\omega U^2$	$Q = UI = L\omega I^2$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

On utilise en même temps une cuisinière électrique de 2,2 kW et un fer à repasser de 700 W. La tension de l'installation est 127 v. Calculer :

1. La puissance totale.
2. L'intensité du courant dans la ligne commune.
3. L'impédance équivalente à l'ensemble des appareils.

Réponses :

$P = 2900$ W ; $I = 22{,}8$ A ; $Z = 5{,}57$

EXERCICE 2 :

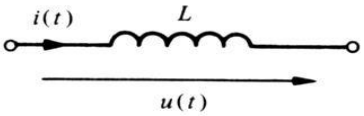
Une cuisinière électrique possède un élément chauffant de 1500 W. Calculer la durée nécessaire à l'ébullition de 3 litres d'eau prise 30°. On tiendra compte des pertes de chaleur égale à 30 % de l'énergie absorbée (chaleur massique de l'eau 4190 J/kg).

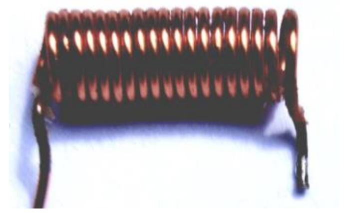
EXERCICE 3 :

Une ligne de 150 m de longueur et de 24 mm² de section alimente une installation devant fonctionner sous une tension U2 = 220 V. Le courant dans la ligne étant de 70 A, calculer :

1. La chute de tension ΔU dans la ligne.($\rho = 1{,}7.10^{-8}\ \Omega\text{m}$)
2. La tension U1 qui doit exister au départ en supposant :
    a) Que U2 et ΔU sont en phase.
    b) Que ΔU est en avance de 45° sur la tension U2.
3. Les pertes par effet joule dans la ligne.

II. L'INDUCTANCE PURE L (BOBINE PARFAITE)





Une bobine

1. LOI D'OHM

Dans une inductance pure, on a : $\mathbf{u = L\frac{di}{dt}}$ avec L : Inductance (H)

2. IMPEDANCE ET DIAGRAMME DE FRESNEL

❒ Soit $i = I\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_i)$

$$u = L\frac{d}{dt}(I\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_i))$$

$$= L\,I\sqrt{2}\,\frac{d}{dt}(\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_i))$$

$$= L\,\omega I\sqrt{2}\text{Cos}(\omega t + \varphi_i)$$

$$u = L\omega I\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \quad \text{or} \quad u = U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u)$$

On déduit que : $U = L\omega I$ et $\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$ Or $Z = \frac{U}{I} = \frac{L\omega I}{I}$

D'où l'impédance d'une inductance est : $\mathbf{Z = L\omega}$;

❒ Comme $\varphi_u = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$, alors $\boldsymbol{\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \frac{\pi}{2}}$.

Donc dans une inductance pure, **la tension est déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant ou la tension est en quadrature avance par rapport au courant.**

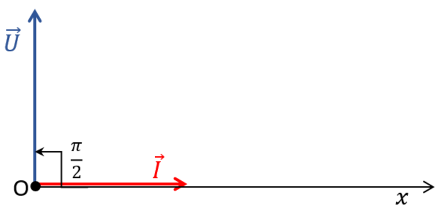


Diagramme de Fresnel

3. IMPEDANCE COMPLEXE

$u = U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u) \quad \Longrightarrow \quad \underline{U} = U\,\lfloor \varphi i + \frac{\pi}{2}$

$i = I\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_i) \quad \Longrightarrow \quad \underline{I} = I\,\lfloor \varphi i$

$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U\,\lfloor \varphi i + \frac{\pi}{2}}{I\,\lfloor \varphi i} = Z\,\lfloor \frac{\pi}{2}$ Or $Z = L\omega$ donc $\mathbf{\underline{Z} = L\omega\,\lfloor \frac{\pi}{2} = L\omega\,Cos\frac{\pi}{2} + j\,L\omega\,Sin\,\frac{\pi}{2}}$

D'où : $\mathbf{\underline{Z} = j\,L\omega}$

C'est donc une impédance imaginaire pure. On pose : $\underline{Z} = j\,X$ avec $X = L\omega$

X : Réactance de l'inductance

4. ADMITTANCE COMPLEXE

L'admittance complexe s'écrit : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{jL\omega} = -\frac{j}{L\omega}$

$$\underline{\mathbf{Y}} = \frac{-\mathbf{j}}{\mathbf{L\omega}} \quad \Rightarrow \quad G = 0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{L\omega} \text{ (susceptance de l'inductance)}$$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 4 :

Un réactor d'inductance L = 0,1 H est soumis à une tension $u = 120\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(100\pi t)$. Déterminer le courant qui le traverse.

EXERCICE 5 :

On applique une tension 120V, 400 Hz à une bobine purement inductive, L = 0,05 H. Calculer l'intensité du courant.

Réponse : I = 0,96 A

EXERCICE 6 :

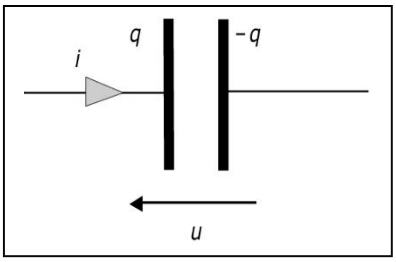
Une bobine à la fois inductive et résistante consomme 200W quand on lui applique une tension 150 V, 50 Hz. Le courant dans la bobine est alors de 2 A. Calculer :

1. La résistance de la bobine.
2. Son impédance.
3. Son facteur de puissance cosφ.

Réponses :

$r = 50\ \Omega$; $Z = 75\ \Omega$; $\cos\varphi = 0{,}67 = \frac{2}{3}$

III. LA CAPACITE PURE C

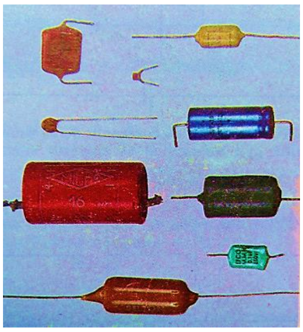


1. LOI D'OHM

Dans le condensateur, la charge $q(t) = C.u(t)$ or $i = \frac{dq}{dt}$

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \int du = \frac{1}{C}\int i dt \Longrightarrow \mathbf{u = \frac{1}{C}\int idt}$$

2. IMPEDANCE ET DIAGRAMME DE FRESNEL


Quelques condensateurs

❒ Soit $u(t) = U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u)$

$$i = C\frac{du}{dt}$$

$$= C\frac{d}{dt}(U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u))$$

$$= C\omega U\sqrt{2}\,\text{Cos}\,(\omega t + \varphi_u)$$

$$i = C\omega\, U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u - \frac{\pi}{2}) \quad \text{or} \quad Z = \frac{U}{I} = \frac{U}{C\omega U} \rightarrow \mathbf{Z} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C\omega}}$$

❒ Le déphasage de la tension par rapport à l'intensité est :

$$\varphi_{u/i} = \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - \varphi_u - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\varphi_{u/i} = \varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

⟹ u est en quadrature arrière par rapport à i.

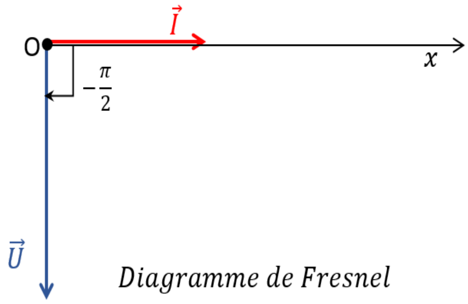


Diagramme de Fresnel

3. IMPEDANCE COMPLEXE

Soit : $u = U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u) \quad \Rightarrow \quad \underline{U} = U \llcorner \varphi_u$

$i = C\omega U\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = C\omega U \llcorner \varphi_u + \frac{\pi}{2}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \llcorner \varphi u}{C\omega U \llcorner \varphi u + \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{C\omega} \llcorner -\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{C\omega}\text{Cos}\,(-\frac{\pi}{2}) + j\frac{1}{C\omega}\text{Sin}\,(-\frac{\pi}{2}) \quad \text{donc}$$

$$\underline{\mathbf{Z}} = -\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{C\omega}}$$

$X = \frac{1}{C\omega}$ Réactance de la capacité

4. ADMITTANCE COMPLEXE

L'admittance complexe s'écrit : $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\frac{j}{C\omega}}$

$\underline{\mathbf{Y}} = \mathbf{jC\omega}$ avec G = 0 (conductance) et B = Cω (Susceptance)

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 7 :

Une bobine d'inductance L = 100 mH est parcourue par un courant d'intensité $i = 1{,}5\sqrt{2}\text{Sin}\,(100\pi t)$.

1. Déterminer :
   a) Calculer la réactance de cette bobine.
   b) Déterminer la tension instantanée u en ses bornes.
2. Répondre aux mêmes questions en remplaçant la bobine par un résistor de résistance R = 50 Ω.
3. Répondre aux mêmes questions en remplaçant la bobine par un condensateur de capacité C = 2μF.

Réponses :

1a) $X_L = L\omega = 31{,}41\ \Omega$ b) $u\,(t) = 15\pi\sqrt{2}\text{Sin}\,(100\pi t + \frac{\pi}{2})$.

2a) $X_R = R = 50\ \Omega$ b) $u\,(t) = 75\sqrt{2}\text{Sin}\,(100\pi t)$.

3a) $X_C = \frac{1}{C\omega} = 1591{,}55\ \Omega$ b) $u\,(t) = 2387{,}32\sqrt{2}\text{Sin}\,(100\pi t - \frac{\pi}{2})$.

EXERCICE 8 :

Un condensateur de capacité $C = 8\ \mu\,F$ est soumis à une tension $U = 140\ V$ de fréquence 50 Hz. Calculer le courant qui le traverse.

Réponse : $I = 0{,}35\ A$

EXERCICE 9 :

On place en parallèle un résistor de résistance $R = 100\ \Omega$ et un condensateur de capacité $C = 16\ \mu F$. Entre les bornes communes, on applique une tension 220 V, 50 Hz. Calculer :

1. Le courant I_R dans le résistor.
2. Le courant I_C dans le condensateur.
3. Le courant total I et son déphasage sur la tension.

Réponses :

$I_R = 2{,}2\ A$; $I_C = 1{,}1\ A$; $\underline{I} = 2{,}45 \llcorner -26{,}6°$

EXERCICE 10 :

Une tension $u = 120\sqrt{2}\ \text{Sin}(200\pi t)$ est appliquée à un condensateur de capacité $C = 4{,}7\ \mu F$.

1. Calculer la valeur efficace du courant.
2. Ecrire l'équation de la valeur instantanée du courant.

Réponses :

$I = 0{,}353\ A$; $i = 0{,}353\sqrt{2}\ \text{Sin}\,(200\pi t + \frac{\pi}{2})$

EXERCICE 11 :

Un dipôle à la fois capacitif et résistant consomme 27 w quand on lui applique une tension U = 120 V ; f = 50 Hz. Le courant absorbé est alors 0,5 A. Calculer :

1. La résistance du dipôle.
2. L'impédance du dipôle.
3. Le facteur de puissance cosφ.

NB : On supposera les élément R et C en série.

Réponses :

$R = 108\,\Omega\,; \quad Z = 240\,\Omega\,; \quad \cos\varphi = 0{,}45$

Chapitre 6. GROUPEMENTS DE DIPOLES ELEMENTAIRES

I. CIRCUITS SERIE

1. ASSOCIATION RESISTANCE ET INDUCTANCE PURE EN SERIE

Cette association d'une bobine parfaite d'inductance L et d'une résistance R est appelée **bobine réelle** (Figure 4-2). C'est une bobine dont la résistance est non négligeable.

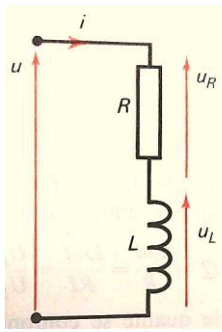


Figure 4-2

a. Relation entre la tension et courant

$\forall t;\ u = u_R + u_L \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u = Ri + L\frac{di}{dt}}$

Si $i = I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t)$ alors on a :

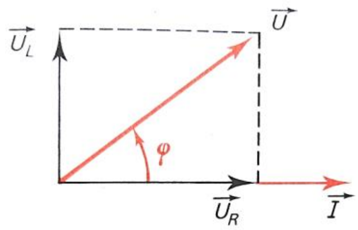
$u = RI\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,(\omega t) + L\frac{d}{dt}\,(I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,(\omega t)$

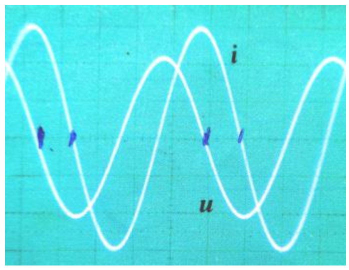
$\mathbf{u = RI\sqrt{2}\,Sin\,(\omega t) + L\omega I\sqrt{2}\,Sin\,(\omega t + \frac{\pi}{2})}$

b. Diagramme de Fresnel et impédance

A $u \rightarrow \vec{U}$; $u_R \rightarrow \vec{U}_R$; $u_L \rightarrow \vec{U}_L$ $\Rightarrow$ $\mathbf{\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L}$

Or $\mathbf{\vec{U}_R = RI \,\llcorner^{0}}$ et $\mathbf{\vec{U}_L = L\omega I \,\llcorner \pi/2}$





Diagrammes des tensions

Si nous plaçons le vecteur $\vec{I}$ de i horizontalement, on a, par la méthode de Pythagore :

$$U^2 = U^2_L + U^2_R$$
$$= R^2I^2 + (L\omega)^2I^2$$
$$= I^2(R^2 + (L\omega)^2)$$

Ainsi : $\frac{U^2}{I^2} = R^2 + (L\omega)^2$ Or $Z = \frac{U}{I}$

$$Z^2 = R^2 + (L\omega)^2$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$ s'appelle : **Impédance réelle du dipôle (R, L)**

$\tan\varphi = \frac{L\omega I}{RI} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)}$

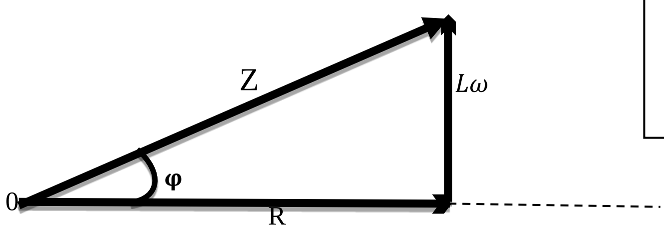


Diagramme des Impédances

N.B : A l'aide d'un oscilloscope bicourbe, on visualise simultanément le courant (via la tension $u_R = Ri$) et la tension u appliquée à l'ensemble du dipôle.
Voir digrammes des tensions : **La tension u est en avance sur le courant i.**

c. Impédance complexe

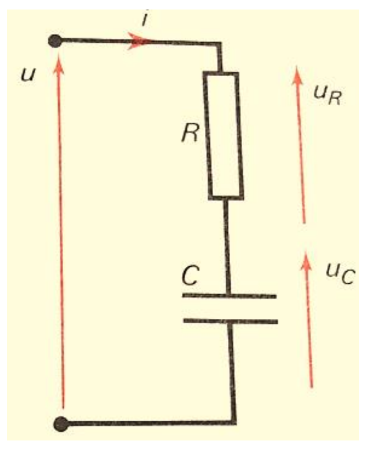
$u \longrightarrow \underline{U}$; $u_R \longrightarrow \underline{U}_R$; $u_L \rightarrow \underline{U}_L$ $\Rightarrow$ $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L$

$\underline{Z}.\underline{I} = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{\underline{Z} = R + jL\omega}$

N.B : Ne jamais poser cette opération : **U = U$_R$ + U$_L$**

2. ASSOCIATION RESISTANCE PURE ET CONDENSATEUR EN SERIE (R, C)

a. Relation entre u et i



$u = u_R + u_C$ soit $\mathbf{u = Ri + \frac{1}{C}\int idt}$

Si $i = I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t)$ alors $u = RI\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t) + \frac{1}{C}\int\left(I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,\omega t\right)dt$

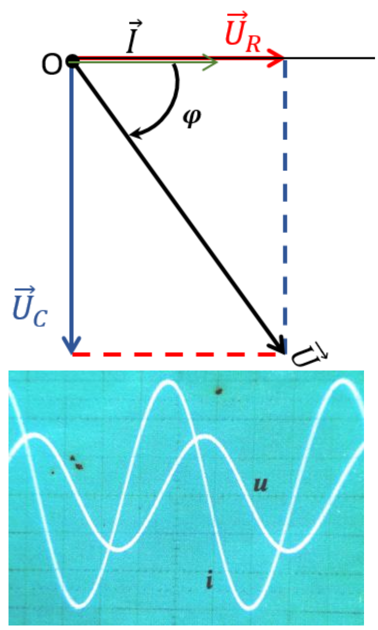
$$= RI\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,\omega t - \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\,\mathrm{Cos}\,(\omega t)$$

$$= RI\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\,\mathrm{Sin}(\omega t - \pi + \frac{\pi}{2})$$

$$\mathbf{u = RI\sqrt{2}\,Sin\,(\omega t) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\,Sin\,(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} u \to \vec{U} \\ u_R \to \vec{U}_R \\ u_C \to \vec{U}_C \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{U}_R = RI \angle 0 \\ \vec{U}_C = \frac{I}{C\omega} \angle -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C$$

b. Diagramme de Fresnel et impédance



Diagrammes des tensions

$U^2 = U_C^2 + U_R^2 \quad \Rightarrow Z^2.I^2 = \frac{I^2}{(C\omega)^2} + R^2I^2$

$$\Rightarrow Z^2.I^2 = I^2\left(\frac{1}{(C\omega^2)} + R^2\right)$$

$$\Rightarrow Z^2 = R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}} \quad \text{Impédance Réelle.}$$

Donc : $\mathbf{\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{R.C\omega}\right)}$

c. Impédance complexe

On associe : $\begin{pmatrix} u \to \underline{U} \\ u_R \to \underline{U}_R \\ u_C \to \underline{U}_C \end{pmatrix}$ et on obtient la relation : $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$

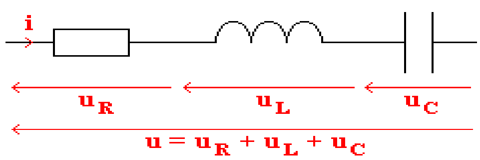
$\Leftrightarrow \quad \underline{Z}.\underline{I} = R\underline{I} - j\frac{1}{C\omega}\underline{I} = \underline{I}\,(R - j\frac{1}{C\omega})$. Comme $\underline{U} = \underline{Z}.\underline{I}$.

Donc : $\mathbf{\underline{Z} = R - j\frac{1}{C\omega}}$ C'est **l'impédance complexe du dipôle (R, C)**

REMARQUE : La tension u est en retard par rapport au courant i.

3. ASSOCIATION R, L, C (RESISTANCE – BOBINE – CONDENSATEUR)

a. Relation entre u et i



$\forall t$, $u = u_R + u_L + u_C \Leftrightarrow \mathbf{u = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt}$

Si $i = I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}(\omega t)$ alors :

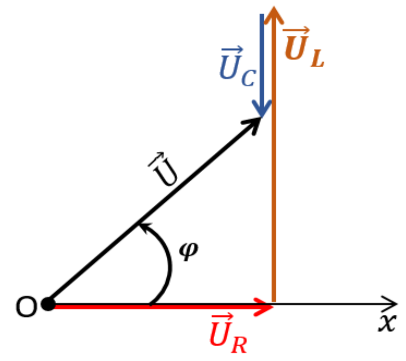
$$\mathbf{u = RI\sqrt{2}\,Sin(\omega t) + L\omega I\sqrt{2}\,Sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I\sqrt{2}}{C\omega}\,Sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

On associe : $\begin{pmatrix} u \rightarrow \vec{U} \\ u_R \rightarrow \vec{U}_R \\ u_C \rightarrow \vec{U}_C \\ u_L \rightarrow \vec{U}_L \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{U}}_\mathbf{R} + \vec{\mathbf{U}}_\mathbf{C} + \vec{\mathbf{U}}_\mathbf{L}$

b. Diagramme de Fresnel et impédance

$$U^2 = U_R^2 + (\vec{U}_C - \vec{U}_L)2$$
$$= R^2 I^2 + (L\omega \vec{I} - \frac{\vec{I}}{C\omega})2$$
$$= R^2 I^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})2\ I2$$
$$\frac{U^2}{I^2} = R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \qquad \text{Or} \qquad Z = \frac{U}{I}$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{Z} = \sqrt{\mathbf{R}^2 + (\mathbf{L\omega} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C\omega}})^2}$$

Le déphasage : $\tan\varphi = \frac{L\omega I - \frac{I}{C\omega}}{RI} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{tan}^{-1}(\frac{\mathbf{L\omega} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{C\omega}}}{\mathbf{R}})$



Construction de Fresnel

c. Impédance complexe

On associe : $\begin{pmatrix} u \rightarrow \underline{U} \\ u_R \rightarrow \underline{U}_R \\ u_C \rightarrow \underline{U}_C \\ u_L \rightarrow \underline{U}_L \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C + \underline{U}_R$

$$\underline{Z}.\underline{I} = R.\underline{I} + jL\omega\underline{I} - j\frac{1}{C\omega}\underline{I}$$
$$= R\underline{I} + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\underline{I}$$
$$= R\underline{I} + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\underline{I}$$

D'où $\underline{Z} = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)j.$

La réactance est donc : $X = L\omega - \frac{1}{C\omega}$

d. Les trois cas possibles

$\underline{Z} = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)j$ et $\varphi = \tan^{-1}(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R})$

- ❒ 1^{er} cas : $L\omega > \frac{1}{C\omega}$

$\Longrightarrow$ On dit que **le circuit est inductif**, c'est-à-dire l'impédance de la bobine l'emporte sur celle de la capacité.

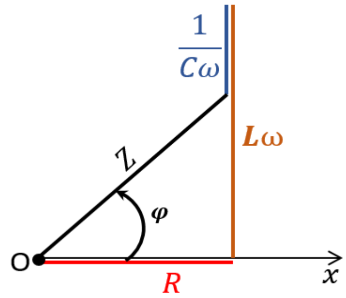


Diagramme des impédances :

- ❒ 2^{eme} cas : $L\omega < \frac{1}{C\omega}$

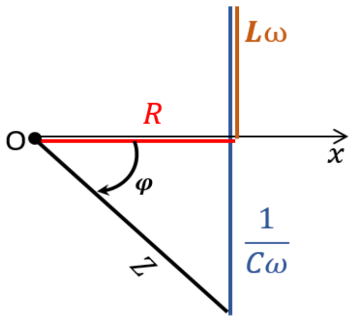


Diagramme des impédances :

$2^{ème}$ cas

La tension est en retard sur le courant. L'impédance de la capacité l'emporte sur celle de l'inductance : on dit que **le circuit est capacitif**.

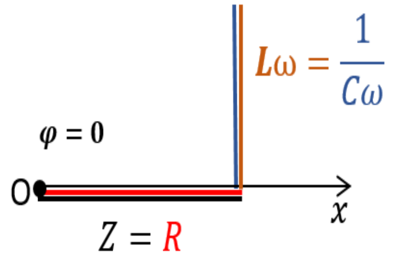
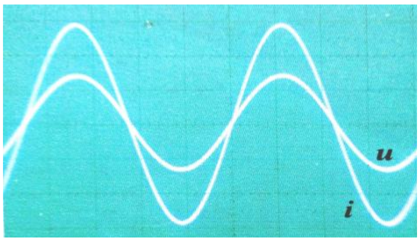


Diagramme des impédances :

$3^{ème}$ cas



❒ 3^{eme}cas : $L\omega = \frac{1}{C\omega}$

$\varphi = 0 \Longrightarrow$ **u et i sont en phase** .
Le circuit se comporte comme un dipôle résistif. On dit que l'on est à **la résonance et l'intensité I devient maximale.**

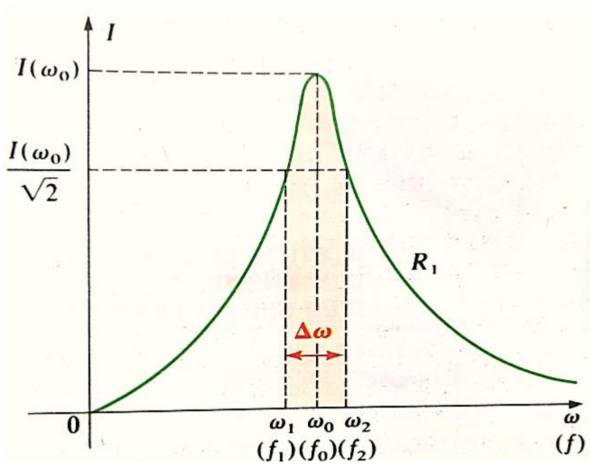
e. Etude de la résonance

Lorsqu'on fait varier la fréquence f(ou pulsation ω) dans un circuit RLC tout en gardant la tension constante, l'intensité du courant varie suivant la courbe de la figure 4-4.

❒ A la résonance : **le courant est maximal** et on a $\boldsymbol{\omega = \omega_0}$(La pulsation du générateur est égale à celle du circuit).

Soit : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Pulsation propre du circuit.
- $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ frequence propre
- $I_{max} = I_0 = \frac{U}{Z} = \frac{U}{R}$



Courbe de la résonance

(Figure 4-4)

❒ **LE FACTEUR DE QUALITE OU COEFFICIENT DE SURTENSION :**

Ce phénomène de résonance entraine $U_C > U$. Ce qui n'est pas normal . On parle alors de surtension qui est caractérisée par un coefficient appelé **coefficient de surtension** ou **facteur de qualité**

$$\mathbf{Q = \frac{U_C}{U}}$$

CONSEQUENCE :
Il y a surtension aux bornes du condensateur ; **cette tension très élevée peut détériorer le condensateur.**
On a alors : $L\omega_0 I_0 = \frac{I_0}{C\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad U_L = U_C$; d'où: $Q = \frac{U_L}{U}$

$Q = \frac{\frac{I_0}{C\omega_0}}{RI_0} = \frac{1}{RC\omega_0}$ Or $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ alors $\mathbf{Q = \frac{L\omega_0}{R}}$

❒ **La Bande passante :** C'est l'intervalle de fréquence sur lequel $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$.

$$I = \frac{I_O}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{U}{Z} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \quad ; \quad Z = R\sqrt{2} \quad ; \; Z^2 = 2R^2$$

$$R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})2 \;= 2R^2;$$

$$(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 = R^2 \Rightarrow \begin{cases} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = -R & ① \\ \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = +R & ② \end{cases}$$

① $\Rightarrow LC\omega^2 - 1 + RC\omega = 0 \qquad \Rightarrow \Delta = (-RC)^2 + 4LC$

Soit : $\omega_2' = \frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0$. Cette réponse est Physiquement inacceptable

Donc : $\boldsymbol{\omega_1' = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \Rightarrow f_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{4\pi LC}}$

② $\Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = +R \Rightarrow LC\omega^2 - 1 - RC\omega = 0 \;\; \Rightarrow \Delta = (-RC)^2 + 4LC$

Soit : $\omega_2' = \frac{RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} < 0$ Cette réponse est Physiquement inacceptable

Donc : $\boldsymbol{\omega_2' = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \Rightarrow f_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{4\pi LC}}$

LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE s'écrit :

$$\mathbf{l} = |\mathbf{f_2} - \mathbf{f_1}|$$
$$= \frac{RC + \sqrt{\Delta} + RC - \sqrt{\Delta}}{4\pi LC}$$
$$= \frac{2RC}{4\pi LC} \Rightarrow \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{2\pi L}} = \Delta\mathbf{f}$$

II. CIRCUITS PARALLELE

1. CIRCUIT BOUCHON IDEAL

Le dipôle est formé d'un **réactor parfait en parallèle avec un condensateur parfait**. (Figure 4-5 (a))

Le courant total $\vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{L} + \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{C}$ a pour valeur efficace la différence des valeurs efficaces : $\mathbf{I} = |\mathbf{I_L} - \mathbf{I_C}|$

L'admittance est : $\mathbf{Y} = \frac{|\mathbf{1 - LC\omega^2}|}{\mathbf{L\omega}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}}$

A la résonance : $\mathbf{LC\omega^{2^2} = 1}$

Les deux courants $\vec{I}_L$et $\vec{I}_C$ ont la même valeur efficace et le courant $\vec{I}$ du circuit principal est nul. Sa phase devient indéterminée. Son impédance est infiniment grande.

Malgré la tension U appliquée, le courant I est nul, on dit que le circuit est « bouchon » (Figure 4-5 (b)).

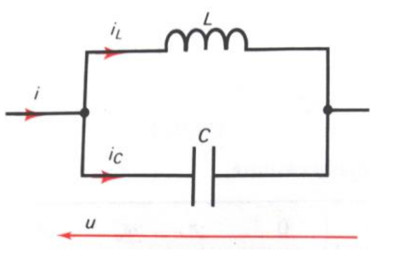


Figure 4-5 (a)

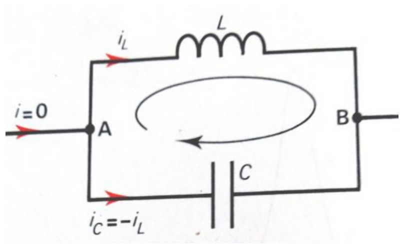


Figure 4-5 (b)

2. CIRCUIT BOUCHON REEL (ASSOCIATION BOBINE REELLE ET CONDENSATEUR EN PARALLELE)

Appliquons aux bornes du groupement la tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,\omega t$ et cherchons le courant total

$$i = I\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,(\omega t - \varphi)$$

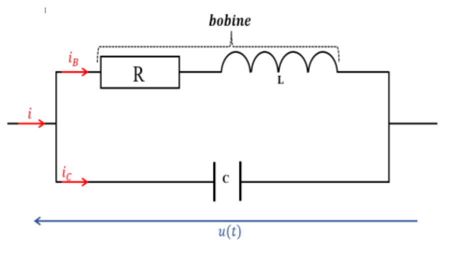


Figure 4-6

a. Méthode vectorielle

Au courant i_B dans la bobine, associons le vecteur de Fresnel $\overrightarrow{I_B}$ tel que :

- $I_B = \frac{U}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$
- $(\overrightarrow{I_B}; U) = \varphi_B = \tan^{-1}(\frac{L\omega}{R})$

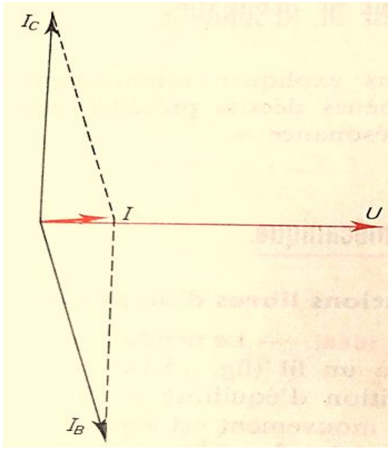


Figure 4-7

$i_C \rightarrow \vec{I}_C$ tel que :

$*$ $I_C = C\omega U$

$*$ $(\vec{I}_C ; \vec{U}) = -\pi/2$

En disposant $\vec{U}$ horizontalement, construisons $\vec{I}$

$$\vec{I} = \overrightarrow{I_B} + \vec{I}_C$$

b. Méthode complexe

L'admittance complexe de la bobine est : $\underline{Y}_B = \frac{1}{R+jL\omega} = \frac{R}{R^2+(L\omega)^2} - j\frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2}$

L'admittance complexe du condensateur est : $\underline{Y}_C = \frac{1}{\frac{-j}{C\omega}} \Rightarrow \underline{Y}_C = jC\omega$

L'admittance du groupement est :

$$\underline{Y} = \underline{Y}_B + \underline{Y}_C = \frac{R}{R^2+(L\omega)^2} - j\frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2} + jC\omega$$

$$\underline{Y} = \frac{R}{R^2+(L\omega)^2} - j(C\omega - \frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2})$$ Or $\underline{I} = \underline{Y}.\underline{U}$ c'est-à-dire I = Y . U

Donc : $$\mathbf{I = \sqrt{\left[\frac{R}{R^2+(L\omega)^2}\right]^2 + \left[\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2}\right)\right]^2}\,.\,U}$$

$\underline{I} = \underline{Y}.\underline{U} \Rightarrow \text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arg}(\underline{Y}) + \text{Arg}(\underline{U}) \Rightarrow -\varphi = \text{Arg}(\underline{Y}) + 0 \Leftrightarrow \varphi = -\tan^{-1}\left[\frac{C\omega - \frac{L\omega}{R^2+(L\omega)^2}}{\frac{R}{R^2+(L\omega)^2}}\right]$

Donc : $$\boldsymbol{\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{L\omega - C\omega(R^2+L^2\omega^2)}{R}\right]}$$

REMARQUE : Le circuit bouchon a deux rôles : **Filtrage et amplification sélective de courant.**

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

On branche en parallèle :

- Une résistance R= 200Ω
- Une bobine d'inductance L= 0,4 H et de résistance r = 80Ω
- Un condensateur parfait de capacité C = 6μF. On applique au groupement la tension $u = 220\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(100\pi t)$

Déterminer le courant total absorbé $i = I\sqrt{2}\,\text{Sin}\,(100\pi t - \varphi)$ en utilisant :

1. La méthode complexe
2. La méthode vectorielle.

EXERCICE 2 : Dipôles en série

On applique une tension de (220 V, 50 Hz) entre les bornes d'un dipôle comportant un résistor R = 30 Ω en série avec un réactor L = 0,16 H.

Calculer :

1. L'impédance du dipôle.
2. L'intensité du courant.
3. Le facteur de puissance.
4. La puissance absorbée.

Réponses Exercice 2 :

1° $Z = 58{,}3\ \Omega$; 2° $I = 3{,}78\ A$; 3° $\cos\varphi = 0{,}515$;   4° $P = 428\ W$.

EXERCICE 3 : Dipôles en série

On applique une tension de $120\ V, 50\ Hz$ entre les bornes d'un dipôle comportant en série une bobine inductive et résistante et un condensateur. La tension entre les bornes du condensateur est $60\ V$. Sachant que $R = 380\ \Omega$ et $C = 16\ \mu\ F$:

1. Calculer le courant dans le dipôle.
2. Calculer l'impédance du dipôle puis les valeurs possibles de l'inductance de la bobine.
3. Construire les graphiques de Fresnel correspondants.

Réponses Exercice 3:

1° $I = 0{,}3\ A$; 2° $Z = 400\ \Omega$; 3°$L_1 = 1{,}04\ H$; $L_2 = 0{,}24\ H$.

EXERCICE 4 : Dipôles en série

Une installation électrique, alimentée en monophasé sous une tension de (230 V/50 Hz), absorbe un courant d'intensité 55 A avec un facteur de puissance de 0,8 $(\varphi > 0)$. Le câble d'alimentation a les caractéristiques suivantes :

- Nombre de conducteurs : 2+Terre ;
- Ame : cuivre de section 10 mm² ($\rho = 2.25.10^{-8}\Omega m$);
- Longueur : 50 m ;
- Réactance linéique d'un conducteur en :$\mu = 0{,}08.10^{-3}\Omega m^{-1}$.

Calculer :

1. La résistance du câble ;
2. Sa réactance ;
3. Son impédance ;
4. La chute de tension ΔU en ligne (en volts).
5. En considérant que la chute de tension est essentiellement due à la résistance, déterminer, par une construction de Fresnel, la tension U_1 au départ du câble : $\vec{U}_1 = \vec{U}_2 + R\vec{I}$

Réponses Exercice 4:

1) R =   ;   2) X =   Ω ;   3)Z = ;   4)ΔU =   ; 5)   .

EXERCICE 5 : Dipôles en parallèle

Deux bobines B_1 et B_2 sont en parallèle. Entre leurs bornes communes on applique une tension de $120\ V$, $5Hz0$. Sachant que $R_1 = 50\ \Omega$; $L_1 = 0{,}2\ H$; $R_2 = 40\ \Omega$; $L_2 = 0{,}4\ H$:

1. Calculer l'impédance de chacune des deux bobines.
2. Calculer le courant dans chacune d'elles et les déphasages correspondants.
3. Déterminer le courant total.

Réponses : 1) $Z_1 = 80\ \Omega$; $Z_2 = 131\ \Omega$;   2) $I_1 = 1{,}5\ A$; $\varphi_1 = 51°$; $I_2 = 0{,}92\ A$;

$\varphi_2 = 72°$; 3) $I = 2{,}4\ A$; $\varphi = 60°$

EXERCICE 6 : Dipôles en parallèle

Trois récepteurs élémentaires parfaits sont en parallèle et soumis à la tension commune ($U = 120$ V, $f = 50$ Hz) On donne :$R = 400\ \Omega$; $L = 0,48$ H ; $C = 12\ \mu$ F.

1. Calculer les courants partiels.
2. Déterminer le courant total.
3. Quelle est la capacité du condensateur qu'il faudrait mettre en parallèle avec ces trois récepteurs pour que le courant total I soit en phase avec U.

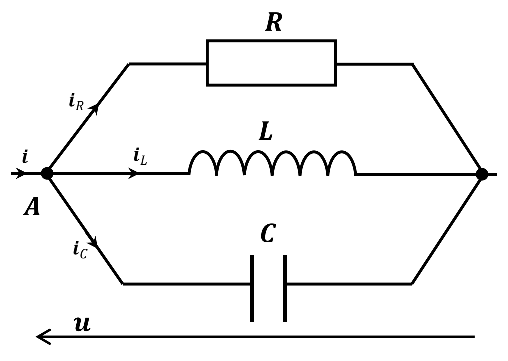
EXERCICE 7 : Bobine et condensateur

Une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 220$ V et de fréquence $f = 50$ Hz est appliquée à un système comportant une bobine B à la fois résistante ($r = 300\ \Omega$) et inductive ($L = 1,92$ H) en série avec un condensateur de capacité C variable.

1. Faire le schéma du circuit ainsi réalisé, en utilisant les symboles des dipôles élémentaires (r, L, C).
2. Le facteur de qualité Q d'une bobine est le rapport de sa réactance à sa résistance.
   a) Calculer Q pour la fréquence d'utilisation $f = 50$ Hz .
   b) En déduire l'angle de déphasage φ_B propre à la bobine.
3. Pour $C = 16\ \mu$F , calculer les valeurs efficaces :
   a) Du courant commun (I) ;
   b) De la tension entre les bornes de la bobine (U_B) ;
   c) De la tension entre les bornes du condensateur (U_C) ;
4. Construire à une échelle convenable, le graphique de Fresnel des tensions , u_B , u_C et u.
5. Montrer que le courant i est en retard de $\varphi = 0,93$ rad sur la tension u.
6. Calculer la valeur C' du condensateur qui mettra le courant i en avance de $\varphi' = -0,93$ rad sur la tension u.

EXERCICE 8 : Dipôle RLC parallèle

On dispose d'un résistor $R = 40\ \Omega$, d'un réactor $L = 0,096$ H et d'un condensateur de capacité $C = 53\ \mu$F. On met R , L et C en parallèle entre les bornes A et B d'une tension sinusoïdale u de valeur efficace $U = 100$ V et de pulsation $\omega = 100$ rad.s^{-1}.



(Figure 1)

A. Méthode de Fresnel

1. Pourquoi choisit-on la tension u pour référence des phases ?
2. Donner les caractéristiques (valeur efficace et phase) des trois courants dérivés i_R , i_L et i_C.
3. Exprimer le courant principal i (valeur instantanée) en fonction des autres courants ; en déduire la relation vectorielle correspondante.
4. Effectuer une construction de Fresnel des quatre courants en prenant une échelle convenable
5. Déduire de cette construction les caractéristiques du courant principal i puis calculer l'impédance Z du circuit.

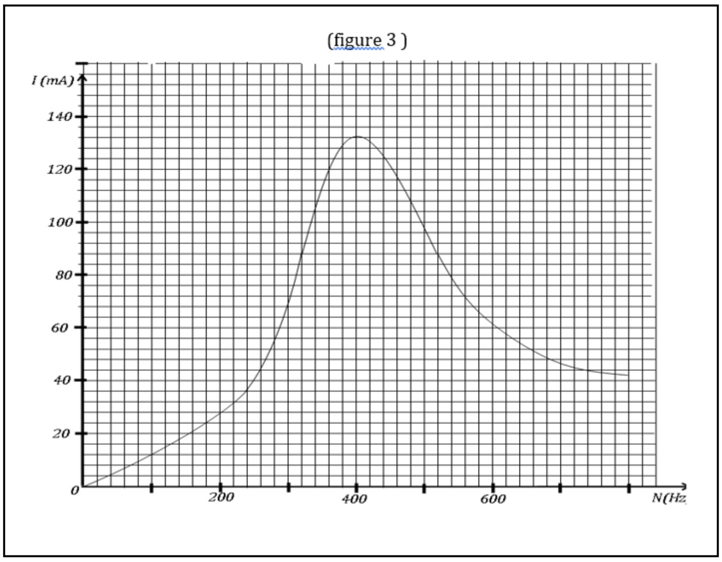
B. Méthode des complexes

1. L'admittance $\underline{Y}$ d'un dipôle est l'inverse de son impédance $\underline{Z}$.
2. Donner sous la forme $a + jb$ les admittances complexes $\underline{Y_R}$, $\underline{Y_L}$ et $\underline{Y_C}$ associés aux dipôles élémentaires.
3. En déduire l'expression de l'admittance équivalente $\underline{Y}$ du circuit.
4. Déterminer l'expression de l'intensité complexe $\underline{I}$ du courant principal.
5. Pour quelle valeur L' du réactor le circuit devient-il purement résistif ?

EXERCICE 9 : Etude d'un circuit '' d'accord''

Pour déterminer les caractéristiques du circuit de détection de signal d'une « chaîne électronique », on le connecte aux bornes d'un générateur de tension sinusoïdale G. B. F. Dont la tension efficace garde une valeur constante U. Le circuit est constitué de trois dipôles montés en série : un conducteur ohmique de résistance R, une bobine d'inductance L et de résistance r et un condensateur de capacité C. Un ampèremètre permet de mesurer l'intensité efficace I du courant dans le circuit.

1. Un voltmètre permet de mesurer la tension efficace Uc aux bornes du condensateur. La fréquence du G. B.F. étant fixé à la valeur N = 300 Hz, on lit : I = 68 mA, Uc = 8,2 V.
   a) Faire le schéma conventionnel du montage ainsi réalisé, puis Calculer l'impédance Zc du condensateur.
   b) Calculer la capacité C du condensateur.



2. On fait varier la fréquence N du générateur et on mesure l'intensité efficace I. On obtient la courbe I = f(N) : Voir figure 3.
   a) Déduire de cette courbe la fréquence No du signale que ce circuit d'accord détectera en fonctionnement normal et l'intensité Io du courant correspondant.
   b) A partir des résultats précédents, calculer l'inductance L de la bobine.
   c) Calculer la tension efficace Uc aux bornes du condensateur qu'on notera Uco.

3. On rappelle que le facteur de qualité est défini par $Q = \frac{N_o}{\Delta N}$ où ΔN représente la largeur de la bande passante et RT = (r + R), la résistance totale du circuit.
   a) La bande passante est l'ensemble des fréquences pour lesquelles : $I \geq \frac{I_o}{\sqrt{2}}$. Sur la courbe I = f(N),
   b) (Figure 3), déterminer la largeur de cette bande et en déduire le facteur de qualité Q.
   c) En appliquant la loi d'ohm en sinusoïdal montrer que les limites N_1 et N_2 de la bande sont solutions positives des équations : $2\pi LN_1 - \frac{1}{2\pi CN_1} = -R_T$ et $2\pi LN_2 - \frac{1}{2\pi CN_2} = R_T$; déduire des expressions précédentes l'expression de ΔN en fonction de RT et L. (0,75 pt)
   d) Le facteur de qualité Q du circuit peut alors s'exprimer par la relation :

      i) $Q = \frac{LN_o}{R_T}$; ii) $Q = \frac{2\pi LN_o}{R_T}$; iii) $Q = \frac{1}{R_T}\sqrt{(L/C)}$.

      Choisir la(les) bonne(s) réponse(s) tout en justifiant votre choix.
   e) Déduire des questions 3a) et 3c), la valeur RT de la résistance totale du circuit ainsi que la valeur efficace U du générateur.
   f) Sachant que R = 30 Ω. Calculer la résistance interne r de la bobine.

Chapitre 7. LES GRANDEURES ACTIVES ET REACTIVES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

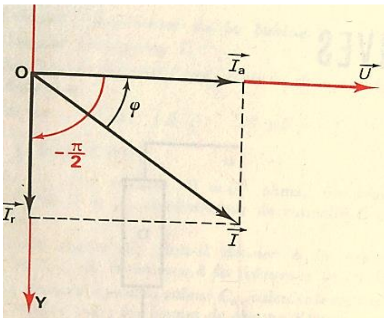
- Calculer les différents types de puissances active, réactive et apparente en régime sinusoïdal.

NB : Dans tout ce qui suit, nous ne considérerons que des dipôles globalement récepteurs.

I. LES COURANTS

1. COURANT ACTIF

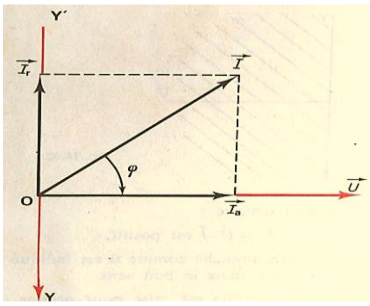
Le courant actif $I_a = I\cos\varphi$, est la mesure algébrique de la projection du vecteur $\vec{I}$ sur le vecteur $\vec{U}$. Le courant actif est la composante active du courant, c'est-à-dire celle qui produit la consommation de puissance active P (watts), seule capable de produire de l'énergie. C'est pourquoi le courant actif est aussi appelé « Courant watté ».



Dipôle inductif (Figure 5-1)

2. COURANT REACTIF

Le courant réactif $I_r = I\sin\varphi$, est la mesure algébrique de la projection du vecteur $\vec{I}$ sur le vecteur $\overrightarrow{Oy}$. Cette mesure aura le même signe que $\sin\varphi$, donc φ. Le courant réactif est la composante réactive du courant, c'est-à-dire celle qui ne produit pas la consommation de puissance active P (watts). C'est pourquoi le courant réactif est aussi appelé « Courant déwatté ».



Dipôle capacitif (Figure 5-2)

3. RELATION ENTRE LES TROIS COURANTS

- Vecteurs de Fresnel : $\vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{a} + \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{r}$
- Valeurs efficaces : $\mathbf{I^2 = I_a^2 + I_r^2}$ (3)

4. APPLICATION

Lorsque plusieurs dipôles sont en parallèles, le courant dans le circuit principal est donné la somme vectorielle : $\vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{1} + \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{2} + \vec{\mathbf{I}}_\mathbf{3}$ (1) .

- La projection sur l'axe $\overrightarrow{OU}$ donne :

$$I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 + I_3\cos\varphi_3.$$

Soit : $\mathbf{I_a = I_{a1} + I_{a2} + I_{a3}}$

Donc le courant actif consommé par plusieurs dipôles en parallèle est égal à la somme(arithmétique) des courants actifs consommés par chaque dipôle.

- La projection sur l'axe $\overrightarrow{OY}$ donne : $I\sin\varphi = I_1\sin\varphi_1 + I_2\sin\varphi_2 + I_3\sin\varphi_3$.

Soit : $\mathbf{I_r = I_{r1} + I_{r2} + I_{r3}}$.

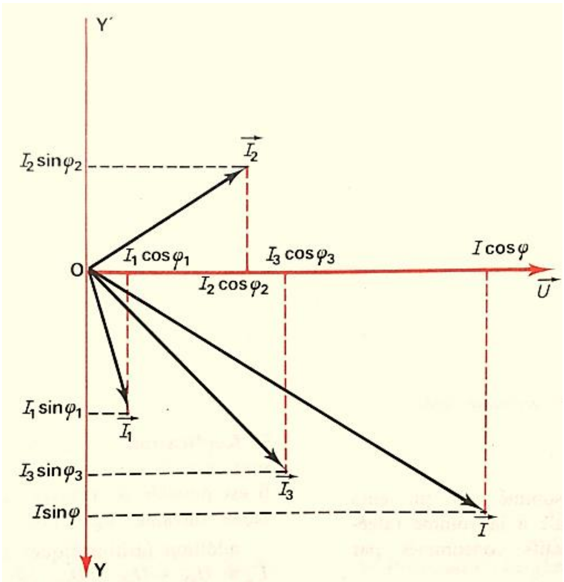


Figure 5-3

Donc le courant réactif consommé par plusieurs dipôles en parallèle est égal à la somme(algébrique) des courants réactifs consommés par chaque dipôle.

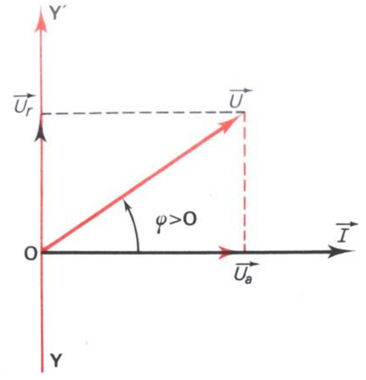
- La valeur efficace du courant dans le circuit principal peut maintenant être calculer par la relation (3).

II. LES TENSIONS

1. TENSION ACTIVE – TENSION REACTIVE

De même que les intensités, les tensions actives et réactives ont pour expressions :

$$\mathbf{U_a = U\cos\varphi} \quad \text{et} \quad \mathbf{U_r = U\sin\varphi}$$



Tensions active et réactive : dipôle inductif (Figure 5-4)

2. RELATIONS ENTRE LES TENSIONS

- Vecteurs de Fresnel : $\vec{U} = \vec{U}_a + \vec{U}_r$
- Valeurs efficaces : $U^2 = U_a^2 + U_r^2$ (3 bis)

3. APPLICATION

Lorsque plusieurs récepteurs sont en série, donc traversés par le même courant, il est possible de trouver la tension totale de la façon suivante :

- Addition (arithmétique) des tensions actives :

$$\mathbf{U_a = U_{a1} + U_{a2} + U_{a3}}$$

- Addition (algébrique) des tensions réactives :

$$\mathbf{U_r = U_{r1} + U_{r2} + U_{r3}}$$

- Calculer de la valeur efficace de la tension U :

$$\mathbf{U^2 = U_a^2 + U_r^2}$$

III. LES PUISSANCES

1. PUISSANCE ACTIVE

Elle correspond à l'énergie fournie au dipôle. Elle se mesure à l'aide d'un wattmètre et a pour expression :

$$\mathbf{P = UI\cos\varphi = \vec{U}.\vec{I} = UI_a = U_aI} \quad \begin{cases} \mathbf{P\ en\ watts(W)} \\ \mathbf{U\ en\ volts(V)} \\ \mathbf{I\ en\ ampère(A)} \end{cases}$$

2. PUISSANCE APPARENTE

Pouvant être mesurer directement à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre, la puissant apparente a pour expression :

$$\mathbf{S = UI} \quad \begin{cases} \mathbf{S\ en\ Vots\ ampère(VA)} \\ \mathbf{U\ en\ volts(V)} \\ \mathbf{I\ en\ ampère(A)} \end{cases}$$

3. PUISSANCE REACTIVE

a. <u>Définition</u>

La puissance réactive est égale au produit de la valeur efficace de la tension par le courant réactif (ou de U et I_r) : $\mathbf{Q = UI_r = U_rI = UI\sin\varphi} \begin{cases} \mathbf{Q\ en\ volts-ampères\ réactifs(var)} \\ \mathbf{U\ en\ volts(V)} \\ \mathbf{I\ en\ ampère(A)} \end{cases}$. Elle se mesure à l'aide d'un wattmètre dont la bobine tension est en série avec un réactor parfait (au lieu d'un résistor).

b. Signe de la puissance réactive

La puissance réactive a le signe de sinφ, donc de φ :

- Dipôle inductif : $\varphi > 0 \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow Q > 0$
- Dipôle capacitif : $\varphi < 0 \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow Q < 0$

REMARQUE : **Les dipôles inductifs consomment de la puissance réactive** ($Q > 0$), tandis que **les dipôles capacitifs** en fournissent ($Q < 0$).

4. TRIANGLE DES PUISSANCES

Le triangle des puissances (voir figure 5-5 ci-dessous) donne immédiatement les relations :

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}\ ; \quad \sin\varphi = \frac{Q}{S}\ ; \quad \tan\varphi = \frac{Q}{P} \text{ et } S^2 = P^2 + Q^2$$

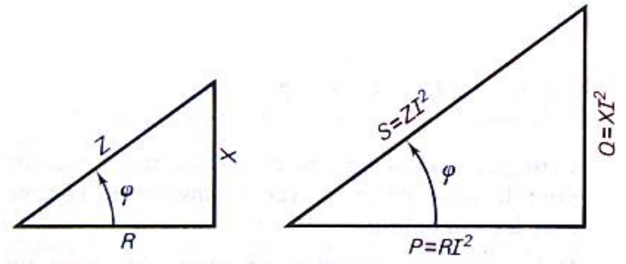
5. CAS PARTICULIER D'UN CIRCUIT R, L, C

Un dipôle RLC série a un triangle des puissances semblable à celui des impédances (Voir Figure 5-5), dans le rapport I^2 et nous pouvons écrire :

$$P = RI^2;\quad Q = XI^2 \text{ et } Q = ZI^2$$

En particulier, pour chaque récepteur élémentaire, nous pouvons dresser le tableau :

Dipôle parfait	P	Q	S
R	RI² = UI	0	UI
L	0	XI²	UI
C	0	-XI²	UI



Le triangle des impédances est semblable au triangle des puissances

(Figure 5-5)

6. LOIS RELATIVES AUX PUISSANCES

a. Puissance active

ThEorEme de BOUCHEROT : La puissance active consommée P par plusieurs récepteurs est égale à la somme arithmétique des puissances actives consommées par chacun d'eux.

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Démonstration :

- En parallèle on a : $I\cos\varphi = I_1\cos\varphi_1 + I_2\cos\varphi_2 + I_3\cos\varphi_3$ (1)

En multipliant (1) par U on obtient : $UI\cos\varphi = UI_1\cos\varphi_1 + UI_2\cos\varphi_2 + UI_3\cos\varphi_3 \quad \Leftrightarrow \quad P = P_1 + P_2 + P_3$.

- En série on a : $U = U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2 + U_3\cos\varphi_3$ (2)

En multipliant (2) par I, on obtient : $IU = IU_1\cos\varphi_1 + IU_2\cos\varphi_2 + IU_3\cos\varphi_3 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P = P_1 + P_2 + P_3}$.

b. Puissance réactive

ThEorEme de BOUCHEROT : La puissance réactive consommée par plusieurs récepteurs est égale à la somme algébrique des puissances réactives consommées par chacun d'eux.

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

c. Puissance apparente

Les puissances apparentes ne doivent jamais être additionnées. La puissance apparente totale se calcule par la formule :

$$\mathbf{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Exercices d'application

EXERCICE 1 :
Deux moteurs M1 et M2 sont en parallèles. Leur tension commune est U = 220 v (50 Hz). Connaissant : (I1 = 35 A; cos $\boldsymbol{\varphi}$1 = 0,85) et (I2 = 40 A; cos $\boldsymbol{\varphi}$2 = 0,7). Calculer le courant total et le facteur de puissance global.

SOLUTION :

Récepteur	P (W)	Q (var)
M1	6550	4060
M2	6160	6280

$\Rightarrow S^2 = 12{,}7^2 + 10{,}3^2 = 267 \Rightarrow S = 16{,}35$ kVA $\quad \Rightarrow I = \frac{S}{U} = \frac{16350}{220} = 74{,}3$ A

$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{12710}{16350} = 0{,}78$

EXERCICE 2 :
Une installation consomme 410 A sous une tension de (5000 V,50 Hz) et avec un cos φ de 0,9 (φ > 0). La ligne qui l'alimente a une résistance de 1**Ω** et une réactance inductive de 2 **Ω**. Calculer la tension au départ de la ligne et le cos **φ** correspondant.

SOLUTION :

Récepteur	P (kW)	Q (k var)
Ligne	168,1	336,2
Installation	1845	893,574
Total	2013,1	1229,774

⇒ S = 2359 kVA; U = 5750 V ; cos **φ** = 0,85

IV. LES ENERGIES

1. ENERGIE ACTIVE

Elle correspond à la puissance active et s'exprime en kWh. Elle est mesurée par un compteur d'énergie active. C'est elle qui est facturée dans les ménages par la CEET. On la note **W.**

2. ENERGIE REACTIVE

Elle correspond à la puissance réactive et s'exprime en var-heures (varh) ou en kvarh ; elle est mesurée par un compteur d'énergie réactive. Celle-ci n'existe que dans les installations industrielles. L'énergie réactive n'est en général pas facturée. Cependant si la consommation en est excessive il y a pénalisation du consommateur ; on la note $\mathbf{W_r}$.

3. ENERGIE APPARENTE

On peut la calculer par la relation : $\mathbf{W_a} = \sqrt{\mathbf{W}^2 + \mathbf{W_r}^2}$

4. FACTEUR DE PUISSANCE MOYEN

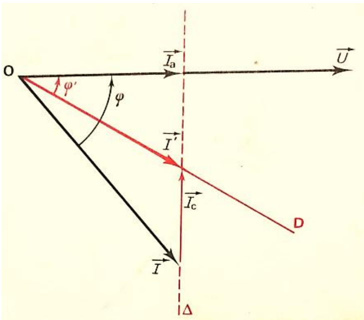
Le facteur de puissance moyen est le quotient de l'énergie active l'énergie apparente : $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{W}}{\sqrt{\mathbf{W}^2+\mathbf{W_r}^2}}$

V. LE RELEVEMENT DE FACTEUR DE PUISSANCE

Dans une installation, il est important d'améliorer le facteur de puissance pour pouvoir réduire l'intensité totale absorbée évitant ainsi :

- Des pertes par effet joule supplémentaire
- Des chutes de tension plus élevée entrainant des risques de perturbation de la tension de distribution.

Pour une énergie active W_a donnée, le facteur de puissance est d'autant meilleur que l'énergie réactive est faible. Pour pouvoir compenser l'installation c'est-à-dire augmenter l'énergie réactive, on branche en parallèle une batterie de condensateurs avec l'installation, sa capacité étant calculée pour qu'on ait la valeur de Cos φ souhaitée.



Graphique de Fresnel correspondant au relèvement du facteur de phase (Figure 5-6)

Le calcul de cette capacité est donné par :

- Sans le condensateur, l'installation absorbe :
  - La puissance active P = UI Cos φ
  - La puissance réactive Q = UI Sin φ = Ptanφ
- Avec le condensateur branché, l'ensemble (installation + condensateur) absorbe :
  - La puissance active P'=P (puisque le condensateur ne consomme aucune puissance active)
  - La puissance réactive Q' = P tan $\varphi' < Q$
- La différence (Q – Q') des puissances réactives est fournie par la batterie de condensateurs de capacité :

$$C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega U^2} \quad \text{ou} \quad C = \frac{I^2}{P\omega(\tan\varphi - \tan\varphi')}$$

NB : Les condensateurs sont montés en parallèle avec le moteur ou l'installation dont ils relèvent le cos**φ**.
La puissance réactive fournie par un condensateur de capacité C est $Q_C = U^2C\omega$.

Donc : $\mathbf{Q - Q' = Q_C = P(\tan\varphi - \tan\varphi')}$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 3 :
On veut relever de 0,7 à 0,8 le facteur de puissance d'une installation consommant 50 kW sous une tension de 380 V, 50 Hz. Calculer la capacité du condensateur nécessaire.
$\cos\varphi = \mathbf{0,7}$; $\tan\varphi = 1{,}02$; $\cos\varphi' = 0{,}8$; $\tan\varphi' = \mathbf{0,75}$

SOLUTION :
Puissances réactives :
Avant : $Q = P\tan\varphi = 50 \times 1{,}02 = 51\ \text{kvar}$
Après : $Q' = P\tan\varphi' = 50 \times 0{,}75 = 37{,}5\ \text{kvar}$
Fournie par le condensateur : $Q_c = 51 - 37{,}5 = 13{,}5\ \text{kvar}$
Capacité du condensateur : $C = \frac{Q_c}{U^2\omega} = \frac{13500}{380^2 \times 100\pi} = 298\ \mu F$.
Courant avants :
Avant : $I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{50000}{380*0{,}7} = 188\ A$;
Après : $I' = \frac{P}{U\cos\varphi'} = \frac{50000}{380*0{,}8} = 164\ A$
On trouve $I_c = 36\ A$. D'où : $C = \frac{I_c}{U\omega} = \frac{36}{380*100\pi} = 300\ \mu F$

EXERCICE 4 : Boucherot
Les relevés mensuels des consommations d'une installation sont les suivants :
$W = 9000\ kWh$; $W_r = 9000\ kvh$. Calculer le facteur de puissance correspondant.

Réponse : $k = 0{,}825$

EXERCICE 5 : Boucherot
Une tension de (130 V, 50 Hz) est appliquée à un circuit comportant un résistor $R = 100\ \Omega$ en série avec un réactor $L = 0{,}64\ H$. Calculer :
1. Le courant dans le circuit.
2. Les tensions entre les bornes de chaque élément.
3. Les puissances actives, réactives et apparentes de chaque élément et de l'ensemble du circuit.

NB : Calculer d'abord Z puis I (On ne peut appliquer la méthode de Boucherot pour calculer I)

Réponse :
1°) $I = 0{,}58\ A$; 2°) $U_R = 58\ V$; $U_L = 116\ V$;
3°) Pour l'ensemble : $P = 33{,}5\ W$; $Q = 67\ var$; $S = 75{,}5\ VA$.

EXERCICE 6 : Boucherot
Une tension de 120 V, 50 Hz est appliqué à un montage série se composant d'un résistor $R = 200\ \Omega$, d'un réactor $L = 0{,}96\ H$ d'un condensateur $C = 6{,}4\ \mu F$. Calculer :
1. Le courant dans le circuit.
2. Les tensions entre les bornes de chaque élément.
3. Les puissances actives, réactives et apparentes de chaque récepteur et de l'ensemble.

EXERCICE 7 : Boucherot
Une installation monophasée fonctionne sous une tension de 240 V. Elle comporte :
- Un moteur de puissance utile 18 kW, de rendement 90 % et de $\cos\varphi = 0{,}8$.
- Cent lampes à LED de 12 W chacune.

Calculer :

1. Le courant absorbé par le moteur.
2. Le courant absorbé par l'ensemble des lampes.
3. Le courant total.
4. Le facteur de puissance de l'installation.

EXERCICE 8 : Boucherot

Le compartiment électrique d'une machine est constitué de sept dipôles récepteurs (D_i ; $1 \leq i \leq 7$) groupés comme l'indique la figure 2.

Lorsqu'on l'alimente par une tension sinusoïdale de valeur efficace U = 220 V et de fréquence f = 50 Hz, les puissances actives et réactives absorbées par chacun des dipôles sont relevées dans le tableau ci-dessous :

Dipôles	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
P(W)	100	150	300	200	200	20	0
Q(var)	50	50	-500	-100	200	50	-1350

A partir du tableau donner les listes $\mathscr{L}1$ et $\mathscr{L}2$ respectivement des dipôles inductifs et capacitifs dans ce circuit électrique.

1) Calculer les valeurs efficaces du courant i_1 et de la tension u_2 aux bornes du dipôle D_2.

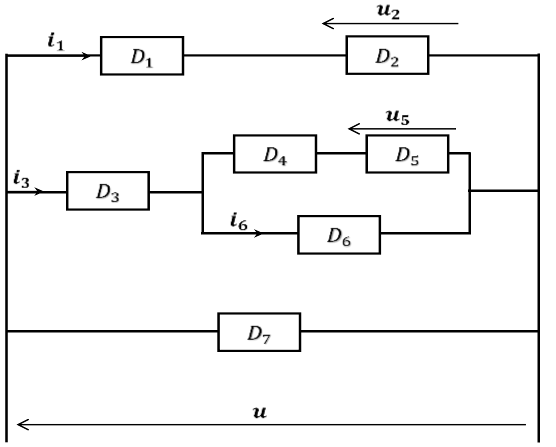
2) a- Déterminer la puissance apparente totale S_T dans la branche du groupement $\{D_3; D_4; D_5; D_6\}$; en déduire I_3.

b- Montrer que la valeur efficace de la tension aux bornes de D_5 est $U_5 = 84\ V$.

3) a- Quelle est la capacité C_7 (en microfarads) du condensateur D_7 ?

b- Calculer le facteur de puissance global k du compartiment.

4) Sur quel valeur I_0 minimum (en ampère) doit-on régler le disjoncteur qui protège ce circuit ?



(Figure 2)

Réponse Exo 5 :

1°) $\mathcal{L}_1 = \{D_1; D_2;\ D_5; D_6\}$ *et* $\mathcal{L}_2 = \{D_3; D_4;\ D_7\}$;

2°) $I_1 = \frac{S_A}{U} = \frac{\sqrt{(P_1+P_2)^2+(Q_1+Q_2)^2}}{U} = 1{,}22\ A$; $U_2 = \frac{\sqrt{(P_1)^2+(Q_1)^2}}{I_1} = 129{,}6\ V$

3°) a- $S_T = \sqrt{(P_3+P_4+P_5+P_6)^2+(Q_3+Q_4+Q_5+Q_6)^2} = 800{,}56\ VA \Rightarrow I_3 = \frac{S_T}{U} = 3{,}64\ A$

b- Montrons que $U_5 = 84\ V$:

$$U_6 = \frac{S_{456}}{I_3} = \frac{\sqrt{(P_4+P_5+P_6)^2+(Q_4+Q_5+Q_6)^2}}{I_3} = 122{,}52\ \mathrm{V}$$

$\mathrm{I}_5 = \frac{S_{46}}{U_6} = \frac{\sqrt{(P_4+P_5)^2+(Q_4+Q_5)^2}}{U_6} = 3{,}36\ \mathrm{A}$ Donc : $U_5 = \frac{S_5}{I_5} = \frac{\sqrt{(P_5)^2+(Q_5)^2}}{I_5} = 84{,}18\ \mathrm{V}$. CQFM.

4°) a- Calcul de C_7 : $C_7 = \frac{|Q_7|}{2\pi f U^2} = 88{,}78\ \mu F$

b- Calcul de k : $k = \frac{P}{S} = \frac{P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7}{S} = 0{,}52$

5°) Détermination de I_0 :

$P_T = P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7 = 970\ W$;

$Q_T = Q_1+Q_2+Q_3+Q_4+Q_5+PQ_6+Q_7 = -1600\ var$

$S = \sqrt{(P_T)^2+(Q_T)^2} = 1871{,}06\ VA$; Donc : $I_0 = \frac{S}{U} = 8{,}5\ A$

EXERCICE 6 : Relèvement de facteur de puissance
Un moteur a une puissance utile de 16,3 kW, un rendement de 85% et un cos$\boldsymbol{\varphi}$ de 0,8. Il fonctionne sous une tension 240V,50 Hz. Calculer :

1. L'intensité absorbée.
2. La capacité du condensateur permettant de relever le facteur de puissance à 0,85.
3. L'intensité en ligne après la mise en place du condensateur.

Réponse : 1) $I = 100\ A$; 2) $C = 140\ \mu F$. 3) $I' = 94\ A$

EXERCICE 7 : Relèvement de facteur de puissance
Une installation 220 V, 50 Hz comporte :

- Des récepteurs purement thermiques R consommant ensemble 15 kW ;
- 6 moteurs identiques ayant chacun pour caractéristiques : $P_u = 4\ kW$; $\eta = 75\ \%$; $\cos\boldsymbol{\varphi} = 0{,}68$

On demande :

1. L'intensité du courant quand tous les appareils fonctionnent et le facteur de puissance résultant.
2. La capacité du condensateur relevant le cos$\boldsymbol{\varphi}$ d'un moteur à 0,8. On précisera le courant consommé par un moteur avant et après le relèvement.

EXERCICE 8 : Relèvement de facteur de puissance
Une installation 380 V, 50 Hz comporte 60 projecteurs de 75 W et un moteur de 7 Kw de rendement 70 % et de cos φ = 0,65. Calculer :

1. L'intensité absorbée par le moteur.
2. L'intensité totale quand fonctionnement le moteur et les projecteurs.
3. Le facteur de puissance globale de l'installation.
4. La capacité du condensateur relevant à 0,8 le facteur de puissance du moteur.

EXERCICE 9 : Relèvement de facteur de puissance
Une installation monophasée 2240 V, 50Hz comporte deux moteurs : $\begin{cases} M_1 : 6\ kW,\ \eta = 75\ \%,\ \cos\varphi = 0{,}7 \\ M_2 : 11\ kW,\ \eta = 88\ \%,\ \cos\varphi = 0{,}8 \end{cases}$
Calculer :

1. Les courants I_1 et I_2 absorbés par chaque moteur.
2. Le courant total dans la ligne.
3. La capacité du condensateur à installer pour relever le facteur de puissance de M_1 à la valeur 0,86.

Chapitre 8. LES CIRCUITS TRIPHASES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

- Définir un circuit triphasé
- Distinguer une tension simple d'une tension composée
- Calculer les puissances active et réactive d'une installation triphasée
- Améliorer le facteur de puissance

INTRODUCTION : L'énergie électrique produite est transportée et distribuée sous forme d'un système de tensions triphasées pour des raisons économiques.

I. LE RESEAU TRIPHASE

Le tableau d'arriver d'une ligne alimentant un atelier par exemple comporte 4 bornes dont 3 bornes de phases repérées par les nombres 1, 2, 3 appelées fils de phase et une borne neutre N appelée fil neutre.

- Mesurons les tensions efficaces entre N et chacune des bornes de phase : nous trouvons trois valeurs égales :

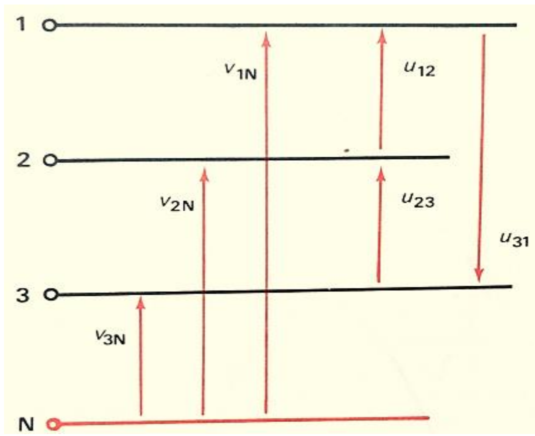
$$\mathbf{V_1 = V_2 = V_3 = 220\ V}$$

Ces trois tensions sont dites **simples.**

- Mesurons les tensions efficaces entre phases, c'est-à-dire entre deux des bornes 1, 2, 3. Nous trouvons trois valeurs égales :

$$\mathbf{U_{12} = U_{23} = U_{31} = 380\ V}\ .$$

Ces trois tensions sont dites **composées.**



Installation triphasée (Figure 6-1)

1. TENSIONS SIMPLES

a. Définition

On appelle **tensions simples**, les tensions notées **v** qui existent entre un fil de phase et le fil neutre.

b. Propriétés

- Les trois (3) tensions simples ont la même valeur efficace.
- Elles sont régulièrement déphasées de $-2\pi/3$ les unes par rapport aux autres c'est-à-dire que $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$ sont respectivement déphasées de $-2\pi/3$ et $-4\pi/3$ par rapport à $\mathbf{v_1}$.
- Ce sont des tensions sinusoïdales de même fréquence.

c. Représentation graphique

En prenant $\mathbf{v_1}$ comme référence, on a :

$\mathbf{v_1 = V\sqrt{2}\sin(\omega t)}$; $\mathbf{v_2 = V\sqrt{2}\sin(\omega t - 2\pi/3)}$; $\mathbf{v_3 = V\sqrt{2}\sin(\omega t - 4\pi/3)}$

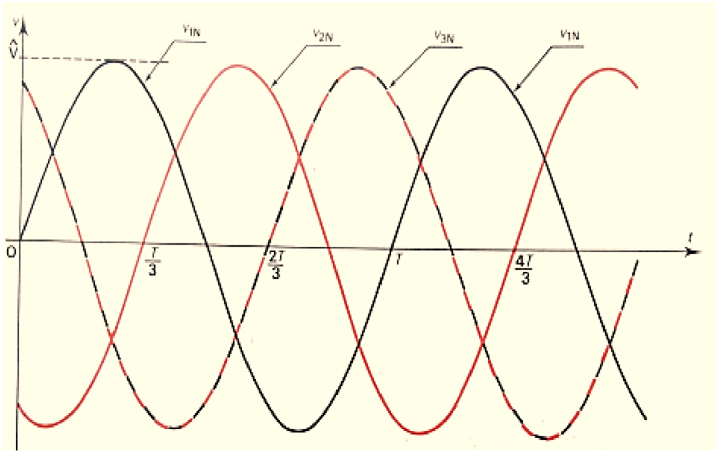
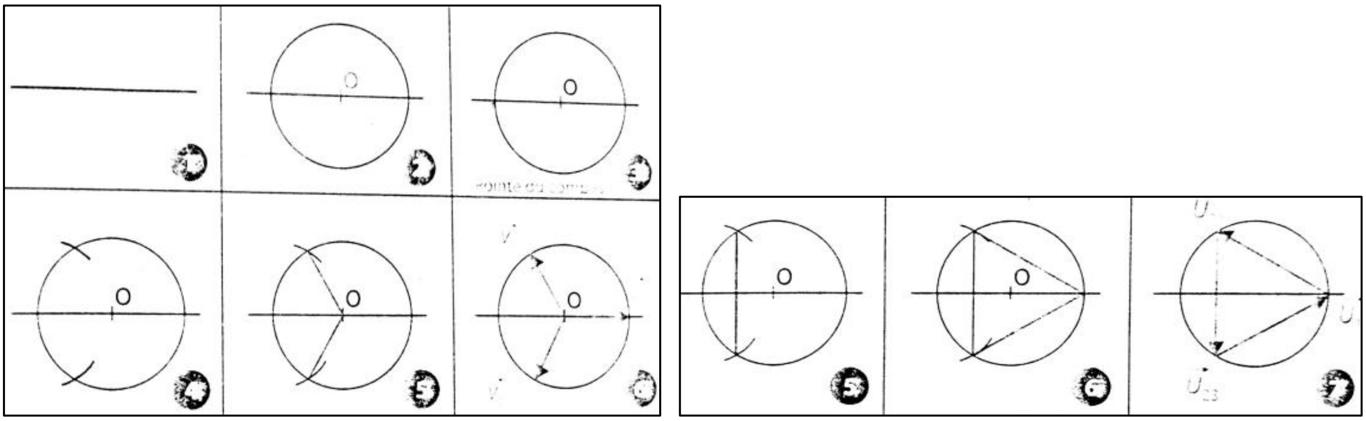


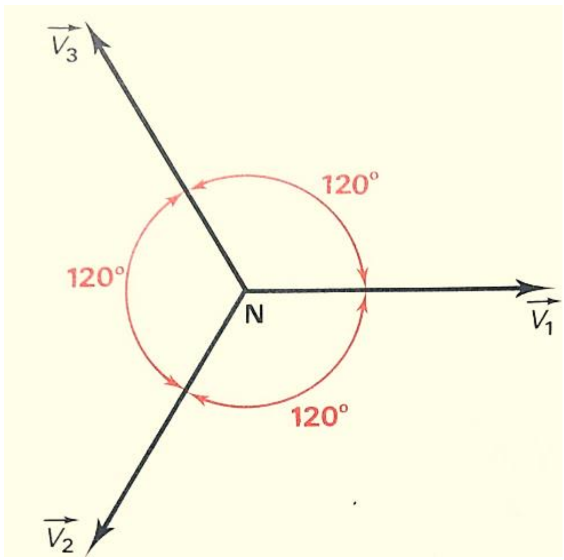
Figure 6-2 : courbes (graphe) des trois tensions simples

d. Représentation de Fresnel

Méthode pour tracer des tensions simples et composées :



Associons à $\mathbf{v_1}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{V_1}}$; à $\mathbf{v_2}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{V_2}}$ et à $\mathbf{v_3}$ le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{V_3}}$.



Les vecteurs de Fresnel $\overrightarrow{\mathbf{V_1}}$; $\overrightarrow{\mathbf{V_2}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{V_3}}$ forment une étoile régulière. Ce qui confère à $\mathbf{v_1}$; $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$ le nom de **tensions étoilées.**

Le triangle formé par les sommets $\mathbf{A_1A_2A_3}$ de ces trois vecteurs est équilatéral et on déduit :

$$\overrightarrow{\mathbf{V_1}}+\overrightarrow{\mathbf{V_2}}+\overrightarrow{\mathbf{V_3}}=\vec{\mathbf{0}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}+\mathbf{v_3}=\mathbf{0}$$

Un tel ensemble de tensions porte le nom de **système triphasé équilibré de tensions.**

En notation complexe, les tensions s'écrivent :

$$\underline{\mathbf{V1}} = \mathbf{V} \angle \mathbf{0°} \;;\quad \underline{\mathbf{V2}} = \mathbf{V} \angle -\mathbf{120°} \;;\quad \underline{\mathbf{V3}} = \mathbf{V} \angle -\mathbf{240°}$$

2. TENSIONS COMPOSEES

a. Définition

On appelle tensions composées, les tensions **u** qui existent entre deux fils de phase.

b. Propriétés

- $\mathbf{u_{12}}$ = Potentiel du fil 1 - Potentiel du fil 2

$$\boxed{u_{12} = v_1 - v_2}$$

- Les tensions composées se déterminent par la somme vectorielle des tensions simples (Voir figure 6-4)

$v_1 \rightarrow \vec{V_1}$

$v_2 \rightarrow \vec{V_2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{U_{12}} = \vec{V_1} - \vec{V_2}}$

$u_{12} \rightarrow \vec{U_{12}}$

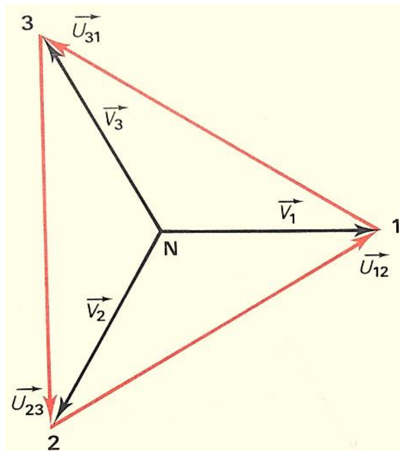


Figure 6-4

- De la même manière :

$\mathbf{\vec{U_{23}} = \vec{V_2} - \vec{V_3}}$ et $\mathbf{\vec{U_{31}} = \vec{V_3} - \vec{V_1}}$

c. Représentation de Fresnel

En considérant $\mathbf{v_1}$ comme référence, on a :

$u_{12} = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/6) \Longrightarrow U_{12} \angle \pi/6$

$u_{23} = U\sqrt{2}\sin(\omega t - 2\pi/3 + \pi/6) \Longrightarrow U_{23} \angle -\pi/2$

$u_{13} = U\sqrt{2}\sin(\omega t - 4\pi/3 + \pi/6) \Longrightarrow U_{31} \angle -7\pi/6$

Les tensions composées $\mathbf{u_{12}}$, $\mathbf{u_{23}}$ et $\mathbf{u_{31}}$ constituent elles aussi un système triphasé équilibré.

NB : Il est important de respecter l'ordre de successions des fils (permutation circulaire des indices 1 ; 2 ; 3) pour que le système soit équilibré.

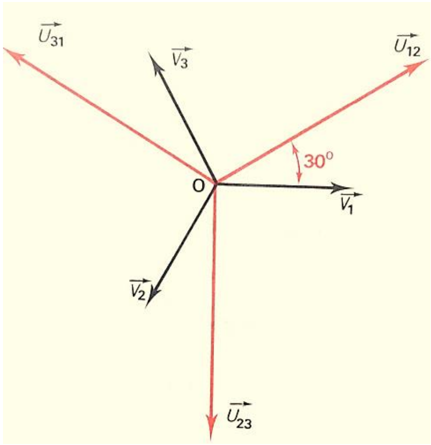


Figure 6-5

$\|\vec{V_1}\| = \|\vec{V_2}\| \rightarrow$ Le triangle ABN est isocèle en N(car NB = NA). (Voir figure 6-6).

$$\text{L'angle en } \widehat{N} = 2\pi/3 = 120°$$

$$2\alpha + 2\pi/3 = \pi \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°}$$

$$BA = 2\,AH = 2 * AN\cos\alpha \quad \text{or} \quad AB = U$$

Donc : $U = 2 \times V \times \sqrt{3}/2$ soit $\boxed{U = V\sqrt{3}}$

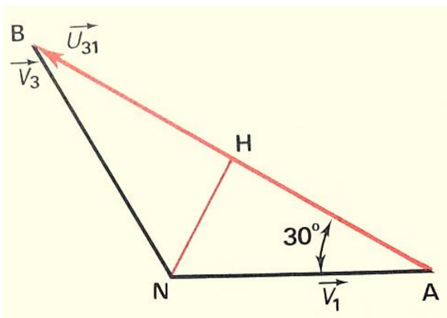


Figure 6-6

II. COUPLAGE DES RECEPTEURS TRIPHASES

1. DEFINITIONS ET SYMBOLES DES MONTAGES

- Tout récepteur que l'on peut brancher soit entre un fil de phase et le neutre ou soit entre deux fils de phases est un récepteur monophasé.
- On appelle récepteurs triphasés, des récepteurs constitués par l'ensemble de trois (3) récepteurs monophasés.

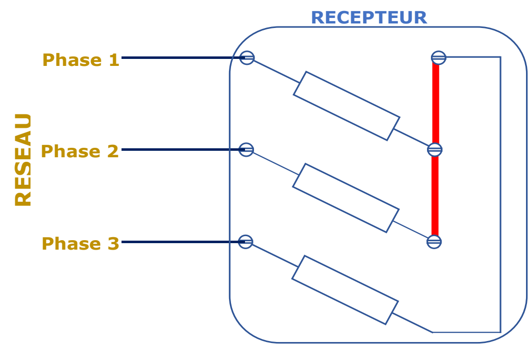


Figure 6-7a : Couplage (pratique) étoile d'un récepteur triphasé équilibré

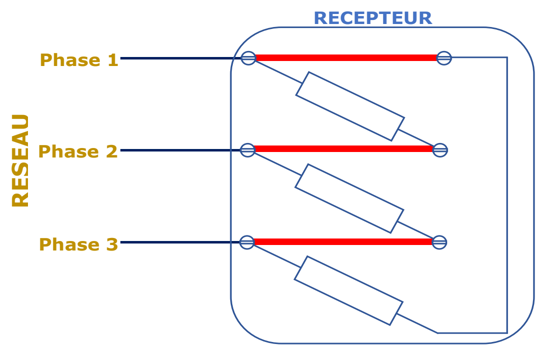
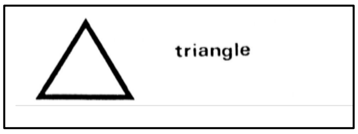


Figure 6-7b : Couplage(pratique) triangle d'un récepteur triphasé équilibré

Les récepteurs triphasés peuvent être couplé de trois façons différentes :



2. MONTAGE ETOILE

Centre de l'étoile, est une borne commune relié au neutre. Les trois (3) autres bornes sont reliées au fil de phase 1, 2 et 3. Chaque phase est alimentée par l'une des tensions simples d'un système équilibré.

Loi des nœuds s'écrit : $\mathbf{i_1 + i_2 + i_3 = i_n}$

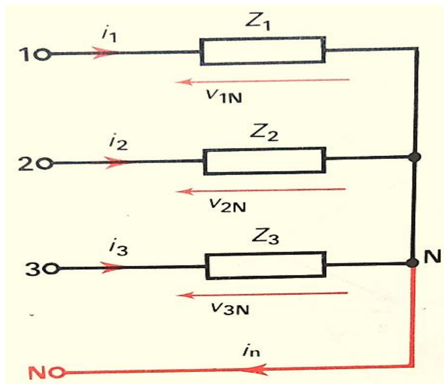


Figure 6-8 : Schéma du montage étoile avec neutre

CAS PARTICULIER : Dans le cas où les trois (3) phases du récepteur triphasé sont identiques (récepteur triphasé de constitution symétrique) ; $\mathbf{i_1}; \mathbf{i_2}$ et $\mathbf{i_3}$ ont la même valeur efficace I et sont respectivement déphasés du même angle par rapport aux tensions $\mathbf{v_1}$; $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$. On a alors :

$\mathbf{i_1 = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_1)}$; $\mathbf{i_2 = I\sqrt{2}\sin(\omega t - 2\pi/3 - \varphi_2)}$; $\mathbf{i_3 = I\sqrt{2}\sin(\omega t - 4\pi/3 - \varphi_3)}$

Donc : $\mathbf{i_1 + i_2 + i_3 = i_n} \Rightarrow \vec{I_1} + \vec{I_2} + \vec{I_3} = \vec{I_n}$

En résumé :

1. **Montage étoile équilibré :** Les trois dipôles sont identiques et ont donc :

- Même impédance Z $\Rightarrow Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$;
- Même déphasage $\varphi \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$;
- Ils sont tous soumis à une tension simple V $\Rightarrow V_1 = V_2 = V_3 = V$;
- Ils seront tous parcourus par un courant I $\Rightarrow I_1 = I_2 = I_3 = I$

Avec : $\boxed{I = \frac{V}{Z}}$ et $\boxed{i_n = 0}$

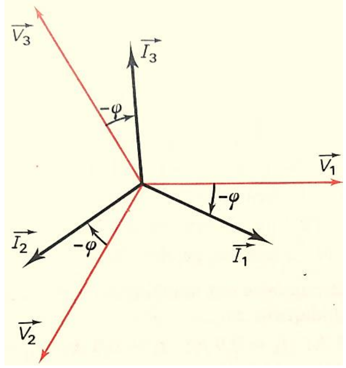


Figure 6-9 : Vecteurs de Fresnel pour un récepteur équilibré

Exemple : C'est le cas d'un moteur triphasé

Représentation de FRESNEL (Voir Figure 6-9)

Les courants $\mathbf{i_1}; \mathbf{i_2}$ et $\mathbf{i_3}$ constituent un système équilibré. On dit que **le récepteur est équilibré.**

2. **Montage étoile déséquilibré :** Les trois dipôles sont de nature différente et ont donc :

- Impédances différentes : $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$;
- Déphasages des courants par rapport aux tensions simples sont différents : $\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$;
- Ils sont tous soumis des tensions simples :

$$\begin{cases} V_1 \neq V_2 \neq V_3 \text{ si le neutre n'est pas relié} \\ V_1 = V_2 = V_3 = V \text{ si le neutre est relié (Car le réseau est toujours équilibré)} \end{cases} ;$$

- Ils seront parcourus par les courants $I_1 = \frac{V_1}{Z_1}; \quad I_2 = \frac{V_2}{Z_2}; \quad I_3 = \frac{V_3}{Z_3}$

Example : Z_1 est un résistor parfait ; Z_2 est un réactor parfait et Z_3 est un condensateur parfait.

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 : Montage étoile

Sur le secteur 220/380 V, on place deux projecteurs de lumière (récepteur résistif) de 150 W en parallèle entre chaque fil de phase et le neutre.

1. Calculer le courant dans chacun des fils de ligne.
2. Quel est le courant dans le neutre ?
3. On éteint un projecteur de la phase 2 et les deux projecteurs de la phase 3. Calculer le courant dans chaque fil de phase et déterminer celui du neutre.

Solution Exercice 1 :

Puissance par phase : $P = 150 \times 2 = 300$ W. Courant dans un fil de phase : $I = \frac{P}{V} = \frac{300}{220} = 1{,}36$ A ; $I_N = 0$.

I_1 est inchangé, I_3 est nul: $I_2 = \frac{150}{220} = 0{,}68$ A

EXERCICE 2 : Montage étoile déséquilibré

Sur un secteur 230/400 V avec fil neutre, on monte :

- Entre N et la phase 1, un résistor de 60 **Ω** ;
- Entre N et la phase 2, deux résistors de 60 **Ω** en parallèle ;
- Entre N et la phase 3, trois résistors de 60 **Ω** en parallèle.

1. Quelle est l'intensité du courant dans chaque fil de ligne ?
2. Quelle est la valeur du courant dans le neutre déterminé graphiquement ?

Solution Exercice 2 :

Pour I_1 : a) $\mathbf{I_1 = 3,83\ A}$. b) $\mathbf{I_1 = 4,78\ A}$. c) $\mathbf{I_1 = 6,66\ A}$.

Pour I_2 : a) $\mathbf{I_2 = 3,83\ A}$. b) $\mathbf{I_2 = 7,66\ A}$. c) $\mathbf{I_2 = 1,91\ A}$.

Pour I_3 : a) $\mathbf{I_3 = 3,83\ A}$. b) $\mathbf{I_3 = 1,27\ A}$. c) $\mathbf{I_3 = 11,5\ A}$.

a) $\mathbf{I_n = 0\ A}$. b) $\mathbf{I_n = 6,6\ A}$. c) $\mathbf{I_n = 23\ A}$. d) $\mathbf{I_n = 8,9\ A}$.

EXERCICE 3 : Montage étoile déséquilibré

Sur le secteur triphasé 230/400 V (50 Hz), on monte en étoile (avec neutre) trois récepteurs :

- Entre la phase 1 et le neutre :$Z_1 = 50\ \Omega, \cos\varphi_1 = 0{,}8$ (inductif)
- Entre la phase 2 et le neutre :$Z_2 = 40\ \Omega, \cos\varphi_2 = 1$ (inductif)
- Entre la phase 3 et le neutre :$Z_3 = 100\ \Omega, \cos\varphi_3 = 0$ (capacitif).

1. Quelle est l'intensité du courant qui traverse chacun des récepteurs ?
2. Placer ces courants sur un graphique de Fresnel.
3. Quelle est la valeur de l'intensité du courant dans le neutre ?

Solution Exercice 3:

Pour I_1: a) $\mathbf{I_1 = 2,95\ A}$. b) $\mathbf{I_1 = 4,6\ A}$. c) $\mathbf{I_1 = 8\ A}$.

Pour I_2: a) $\mathbf{I_2 = 5,75\ A}$. b) $\mathbf{I_2 = 10\ A}$. c) $\mathbf{I_2 = 8,5\ A}$.

Pour I_3: a) $\mathbf{I_3 = 2,3\ A}$. b) $\mathbf{I_3 = 4\ A}$. c) $\mathbf{I_3 = 3,5\ A}$.

a) $\boldsymbol{I_n = 0\ A}$. b) $\boldsymbol{I_n = 6\ A}$. c) $\boldsymbol{I_n = 9\ A}$. d) $\boldsymbol{I_n = 12,65\ A}$.

EXERCICE 4 : Groupement étoile équilibré de récepteurs

Un récepteur triphasé équilibré, formé de trois impédances identiques couplées en étoile, est alimenté par le réseau (230/400 V ; 50 Hz). Chaque phase comporte une résistance $R = 60\ \Omega$ en série avec inductance $L = 0{,}6\ H$.

1. Déterminer l'impédance complexe de chaque dipôle.
2. Donner le schéma du montage.

3. Déterminer les valeurs efficaces des courants en ligne ainsi que leur déphasage par rapport aux tensions correspondantes.
4. Calculer les puissances actives, réactive et apparente du groupement et le facteur de puissance du groupement.
5. Le réseau étant à quatre fils :
   a) Donner le schéma du montage permettant de mesurer la puissance active avec un seul wattmètre ;
   b) Quels devront être les calibres intensité et tension minimales de ce wattmètre ?
   c) Quelle valeur indiquera-t-il ?

Solution Exercice 4 :

$\underline{Z} = R + jL\omega = 60 + 0{,}6 \times 314j = 60 + 188j = \mathbf{198 \llcorner 72°}$

Voir le cours: les courant en ligne sont confondus avec les courants par phase: $\mathbf{I = J}$

$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{V}{Z} = \mathbf{1,16\ A}$; $\boldsymbol{\varphi} = \left(\widehat{\vec{I}_1, \vec{V}_1}\right) = \left(\widehat{\vec{I}_2, \vec{V}_2}\right) = \left(\widehat{\vec{I}_3, \vec{V}_3}\right) = \mathrm{Arg}\underline{Z} = 72°$

$P = \sqrt{3}\, UI\cos\varphi = \mathbf{248\ W}$; $Q = \sqrt{3}\, UI\sin\varphi = \mathbf{764\ var}$; $S = \sqrt{3}\, UI = \mathbf{804\ VA}$;

$k = \frac{P}{S} = \mathbf{0,31 = \cos\varphi}$.

a- Voir le cours.

b- Le circuit courant du wattmètre est traverse par le courant en ligne, son calibre doit donc être supérieur à 1,15 A. Le circuit tension est soumis à une tension étoilée, son calibre doit être supérieur à 230 V.

c- La lecture représente la puissance consommé par phase, soit le tiers de la puissance active totale.

3. MONTAGE TRIANGLE

Trois dipôles récepteurs sont montés en triangle si chacun d'eux est branché entre deux fils de phase. Le neutre n'est pas utilisé.

- **Les courants dans les dipôles du récepteur** sont repérés par des doubles indices : $\boldsymbol{j_{12}; j_{23}}$; $\boldsymbol{j_{31}}$.

- **Les courants dans les fils de ligne ou courants en ligne :** Ils sont notés $\boldsymbol{i_1}$, $\boldsymbol{i_2}$ $\boldsymbol{et\ i_3}$. On les oriente arbitrairement des bornes 1, 2, 3 vers les récepteurs.

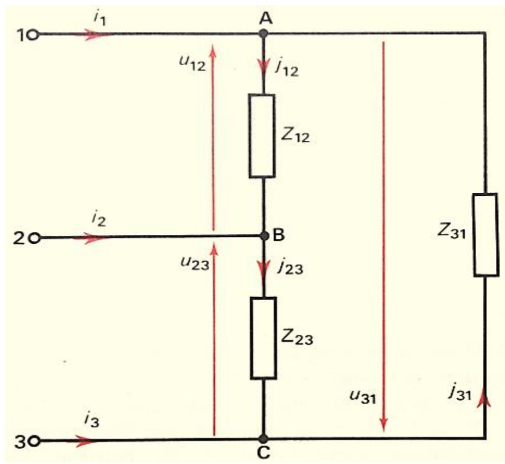


Figure 6-9

- **Relations entre courants :**

La loi des nœuds nous donne :

Au nœud A, on a : $\boldsymbol{i_1 + j_{31} = j_{12} \Rightarrow i_1 = j_{12} - j_{31}}$

Au nœud B, on a : $\boldsymbol{i_2 + j_{12} = j_{23} \Rightarrow i_2 = j_{23} - j_{12}}$

Au nœud C, on a : $\boldsymbol{i_3 + j_{23} = j_{31} \Rightarrow i_3 = j_{31} - j_{23}}$

Les vecteurs de FRESNEL sont donc :

$\overrightarrow{I_1} = \overrightarrow{J_{12}} - \overrightarrow{J_{31}}$; $\overrightarrow{I_2} = \overrightarrow{J_{23}} - \overrightarrow{J_{12}}$; $\overrightarrow{I_3} = \overrightarrow{J_{31}} - \overrightarrow{J_{23}}$

Par addition des courants en ligne, nous obtenons :

$$i_1 + i_2 + i_3 = (j_{12} - j_{31}) + (j_{23} - j_{12}) + (j_{31} - j_{23}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0}$$

NB : Les valeurs efficaces des tensions d'un réseau triphasés sont souvent indiquées sous la forme (V/U). Donc avant de relier un récepteur triphasé à un réseau triphasé, il faut veiller à ce que les tensions soient compatibles. (Voir les figures 6-7a et 6-7a).

CHOIX DU COUPLAGE :

Un récepteur prévu pour fonctionner avec **380V** par phase et qui doit être relié à un réseau **220/380V** sera couplé en triangle, chaque phase supportant alors la tension composée.

Exemple : Un récepteur triphasé équilibré porte, sur sa plaque signalétique, l'indication 220/380 V.

Cela signifie qu'il doit être branché :

- En étoile, sur un réseau dont la tension composée est de 380 V ;
- En triangle, sur un réseau dont la tension composée est de 220 V.

- Dans le cas du montage étoile de la figure 6-7a (connexion en rouge), chaque dipôle est soumis à une tension simple.
  - Si la tension composée du réseau est 380 V, la tension simple correspondante vaut 220 V et notre récepteur fonctionne correctement.
  - Si la tension composée du réseau est 220 V, la tension simple correspondante vaut 127 V et notre récepteur est **sous-alimenté.**
- Dans le cas du montage triangle de la figure 6-7b (connexion en rouge), chaque dipôle est soumis à une tension composée.
  - Si la tension composée du réseau est 220 V, la tension nominale du récepteur étant aussi de 220 V celui-ci fonctionne correctement.
  - Si la tension composée du réseau est 380 V, la tension nominale du récepteur étant 220 V celui-ci est en **surtension.**

En résumé :

1. **Montage triangle équilibré :** Les trois dipôles sont identiques et ont donc :

- Même impédance $Z \Rightarrow Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$;
- Même déphasage $\varphi \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$;
- Ils sont tous soumis à une tension composée U $\Rightarrow U_{12} = U_{23} = U_{31} = U$;
- Ils seront tous parcourus par un courant J $\Rightarrow J_{12} = J_{23} = J_{31} = J$

Avec : $\boxed{J = \frac{U}{Z}}$

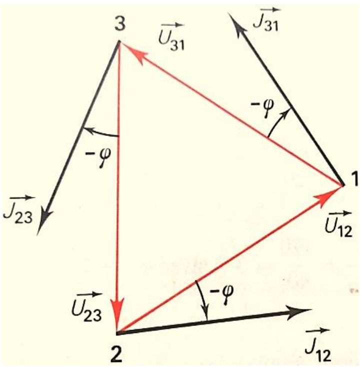


Figure 6-10 : Graphique de Fresnel pour un récepteur equilibré couplé en triangle

- **Les courants dans les dipôles :** $j_{12},\ j_{23}\ et\ J_{31}$ constituent eux aussi un système triphasé équilibré.

- **Les courants en ligne** : i_1 , i_2 et i_3 ont la même valeur efficace I et constituent eux aussi un système triphasé équilibré.

$$\boxed{I = J\sqrt{3}}$$

Exemple : C'est le cas d'un moteur triphasé, couplé en triangle.

Représentation de FRESNEL (Voir Figure 6-10)

2. **Montage triangle déséquilibré :** Les trois dipôles sont quelconques, ils ne sont pas forcément de même nature et :

- Leurs impédances sont différentes : $Z_{12} \neq Z_{23} \neq Z_{31}$;
- Leurs impédances complexes ont des arguments différents : $\varphi_1 \neq \varphi_2 \neq \varphi_3$;
- Chaque dipôle est soumis à une tension composée de même valeur efficace (Car le réseau est toujours équilibré) : $U_{12} = U_{21} = U_{31} = U$;
- Ils seront parcourus par les courants $J_{12} = \frac{U_{21}}{Z_{12}}$; $J_{21} = \frac{U_{21}}{Z_{21}}$; $J_{31} = \frac{U_{31}}{Z_{31}}$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 6 : Groupement triangle équilibrés de récepteurs

On monte en triangle sur un réseau 127/220 V trois récepteurs identiques dont l'impédance est $Z = 35\ \Omega$ et le $cos\ \varphi = 0{,}7$. Calculer :

1. Le courant dans un récepteur et son déphasage sur la tension correspondante.
2. Le courant dans un fil de ligne.

Solution Exercice 6:

Courant : $J = \frac{U}{Z} = \frac{220}{35} = 6{,}3\ A$. Déphasage : à $cos\ \varphi = 0{,}7$ correspond $\varphi = 45°$. Courant dans un fil de phase : $I = J\sqrt{3} = 6{,}3 \times 1{,}73 = 10{,}9\ A$.

EXERCICE 7 : Groupement triangle équilibrés de récepteurs

A°) Sur le secteur triphasé 230/400 V - 50 Hz, on monte en triangle un ensemble 1 constitué de trois résistors identiques tels que $R = 80\ \Omega$.

1- Quelle est l'intensité du courant qui travers chaque résistor ?

a) $J = 5\ A$; b) $J = 2{,}8\ A$; c) $J = \sqrt{3}\ A$; d) $J = 4\ A$; e) $J = 6\ A$.

2- Quelle est l'intensité du courant dans chaque fil de ligne ?

a) $I = 4{,}9\ A$; b) $I = 8{,}66\ A$; c) $I = \sqrt{3}\ A$; d) $I = 7{,}32\ A$; e) $I = 9{,}66\ A$.

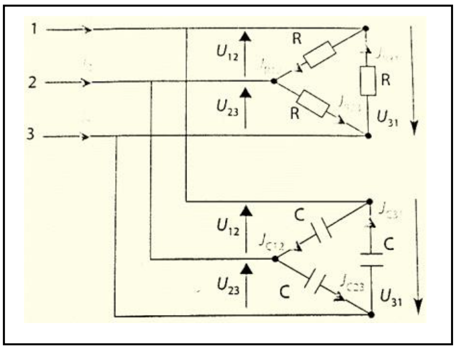
B°) Sur ce même réseau, on monte en triangle, à la place de l'ensemble 1, un ensemble 2 formé de trois condensateurs identiques tels que $C = 15\ \mu F$.

1- Quelle est l'intensité du courant qui travers chaque condensateur ?

a) $J = 1{,}80\ A$; b) $J = 2{,}8\ A$; c) $J = \sqrt{3}\ A$; d) $J = 1{,}88\ A$; e) $J = 2{,}88\ A$.

2- Quelle est l'intensité du courant dans chaque fil de ligne ?

a) $I = 4{,}05\ A$; b) $I = 2{,}55\ A$; c) $I = \sqrt{3}\ A$; d) $I = 3{,}25\ A$; e) $I = 1{,}87\ A$.



C°) Les ensembles 1 et 2 sont maintenant montés sur ce même réseau (voir figure ci-contre).

Quels sont les intensités des courants en ligne : I_1, I_2 , $et\ I_3$, déterminées à l'aide d'une méthode graphique ?

EXERCICE 8 : Groupement triangle déséquilibrés de récepteurs

Sur un réseau triphasé TBT, $U = 48\ V\ et\ f = 50\ Hz$, on branche, en triangle, trois dipôles de nature différente :

- Un résistor $R = 100\ \Omega$ entre la phase 1 et la phase 2 ;
- Une bobine $r = 30\ \Omega\ et\ L = 0{,}2\ H$ entre la phase 2 et la phase 3.
- Un condensateur $C = 20\ \mu F$ entre la phase 3 et la phase 1.

1. Quels sont les intensités des courants en ligne : I_1, I_2 , $et\ I_3$, déterminées à l'aide d'une méthode graphique ?
2. Vérifier la relation : $\vec{I}_1 + \vec{I}_2 + \vec{I}_3 = \vec{0}$

EXERCICE 9 : Groupement triangle déséquilibrés de récepteurs

Sur le secteur 133/230 V-50 Hz, on monte en triangle trois récepteurs :

- Entre 1 et 2 : $Z_{12} = 50\ \Omega$ avec $cos\,\varphi_{12} = 0{,}8$ (inductif),
- Entre 2 et 3 : $Z_{23} = 40\ \Omega$ avec $cos\varphi_{23} = 1$,
- Entre 3 et 1 : $Z_{31} = 100\ \Omega$ avec $cos\,\varphi_{31} = 0$, (capacitif).

1. Calculer l'intensité du courant qui travers chacun des récepteurs.
2. Préciser son déphasage sur la tension composée correspondante.
3. Placer les vecteurs courants sur un graphique de Fresnel.
4. Déterminer l'intensité du courant dans chaque phase.

III. PUISSANCES EN REGIME TRIPHASE

1. EXPRESSIONS DES PUISSANCES

a. Récepteur couplé en étoile

Chacune des phases, soumise à la tension simple de valeur efficace $\boldsymbol{V = U/\sqrt{3}}$ et parcourue par un courant de valeur efficace I, absorbe la puissance active $\boldsymbol{P1 = VIcos\varphi = U/\sqrt{3}\,Icos\varphi}$ avec $\boldsymbol{\varphi = (\overrightarrow{I_1};\overrightarrow{V_1})}$.

- Selon le théorème de Boucherot, la puissance globale active $\boldsymbol{P}$ consommée par le récepteur triphasé est :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad \text{or} \quad P_1 = P_2 = P_3$$

$$P = 3P_1 = 3\times U/\sqrt{3}\, I cos\varphi$$

$\boxed{P = \sqrt{3}\, UI cos\varphi}$ Puissance active consommée par le récepteur triphasé.

- Selon le théorème de Boucherot, la puissance globale réactive Q consommée par le récepteur triphasé est :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \text{or} \quad Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{U}{\sqrt{3}} I\, sin\,\varphi$$

$$Q = 3Q_1 = \frac{U}{\sqrt{3}} I\, sin\,\varphi$$

$\boxed{Q = \sqrt{3}\, UI \sin\varphi}$ Puissance réactive consommée par le récepteur triphasé.

- La puissance apparente s'écrit :

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$S = \sqrt{3U^2I^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi)}$$

$\boxed{S = \sqrt{3}\, UI}$ Puissance apparente d'un récepteur triphasé.

b. Récepteur couplé en triangle

Chaque phase du récepteur est soumise à une tension composée U et traversée par le courant de phase $J = \frac{I}{\sqrt{3}}$. Elle absorbe la puissance active $P_1 = UJcos\varphi = U\frac{I}{\sqrt{3}}cos\varphi$ avec $\varphi = (\overrightarrow{J_{12}}; \overrightarrow{U_{12}})$.

- Selon le théorème de Boucherot, la puissance globale active P consommée par le récepteur triphasé est :

$$P = 3P_1 = 3U\frac{I}{\sqrt{3}}cos\varphi$$

$\boxed{P = \sqrt{3}\, UI cos\varphi}$ Puissance active consommée par le récepteur triphasé.

- Selon le théorème de Boucherot, la puissance globale réactive Q consommée par le récepteur triphasé est :

$$\boxed{Q = \sqrt{3}\, UI \sin\varphi}$$

- La Puissance apparente s'écrit :

$$\boldsymbol{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \sqrt{3}\, UI}}$$

NB : U et I sont des grandeurs mesurées sur la ligne alors que $\boldsymbol{\varphi}$ est relative à la phase du récepteur.

2. MESURAGE DES PUISSANCES ACTIVES ET REACTIVES

La mesure des puissances en triphasé est très utile pour déterminer le facteur de puissance et le rendement d'un récepteur donné. Cette mesure peut se faire avec différents appareils tels :

- **NANOVIP (Contrôleur d'énergie électrique) :**

Cet appareil de mesure portable permet de mesurer les grandeurs $U, I, f, P, Q, S\ et\ cos\varphi$. Il réalise des mesures (AC ; DC ; et AC+DC) monophasé ou triphasé.

(à compléter : photo et schéma de raccordement du récepteur et du mesureur NANOVIC)

- **Pince multifonctions**

Cette pince permet de mesurer les grandeurs $U, I, f, P, Q, S\ et\ cos\varphi$.

(à compléter : photo et branchement de la pince)

- **Wattmètre :**

a. Mesure de la puissance consommée par un seul dipôle

Il mesure la puissance $P = \vec{U}.\vec{I}$. (Voir figure 6-11)

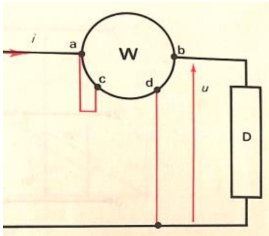


Figure 6-11 :

b. Ligne triphasée avec fil neutre et récepteur en étoile

On branche le Wattmètre (W) entre la phase 1et le neutre. On lit : $\boldsymbol{L = VIcos\varphi}$

D'où : $P = 3L = 3VIcos\varphi$

$$\boxed{\boldsymbol{P = \sqrt{3}\, UIcos\varphi}}$$

c. Ligne triphasée sans fil neutre et récepteur en étoile ou en triangle

Avec le branchement des deux Wattmètres, (Voir figure 6-12) exprimons les mesures $\boldsymbol{L_A}$ et $\boldsymbol{L_B}$:

$$L_A = U_{13}I_1cos(\vec{I_1};\vec{U_{13}}) = UIcos(\vec{I_1};\vec{U_{13}})$$

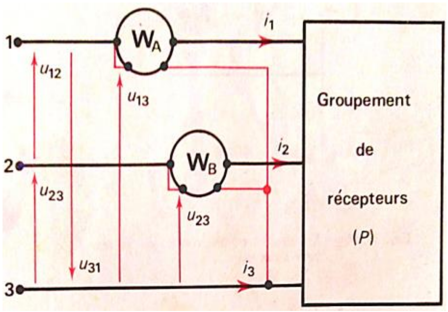


Figure 6-12

$$L_B = U_{23}I_2cos(\overrightarrow{I_2};\overrightarrow{U_{23}}) = UIcos(\overrightarrow{I_2};\overrightarrow{U_{23}})$$

Or $(\overrightarrow{I_1};\overrightarrow{U_{13}}) = \varphi - \frac{\pi}{6}$ et $(\overrightarrow{I_2};\overrightarrow{U_{23}}) = \varphi + \frac{\pi}{6}$

D'où : $\boldsymbol{L_A = UIcos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)}$ et $\boldsymbol{L_B = UIcos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)}$

- En effectuant $L_A + L_B = UI[cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) + cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)]$

  Or $cosp + cosq = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$L_A + L_B = UI(2cos\varphi cos\frac{\pi}{6})$$

$$= \sqrt{3}UIcos\varphi = P$$

D'où : $$\boxed{\boldsymbol{P = L_A + L_B}}$$

N.B. : **Cette relation est valable même en déséquilibré.**

- Effectuant $L_A - L_B = UI[cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)]$

  Or $cosp - cosq = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right)sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$L_A - L_B = UI(2sin\varphi sin\frac{\pi}{6})$$

$$= UIsin\varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

D'où : $$\boxed{\boldsymbol{Q = \sqrt{3}(L_A - L_B)}}$$

N.B. : **Cette relation n'est pas valable si le montage est déséquilibré.**

REMARQUE : Les lectures $\boldsymbol{L_A}$ et $\boldsymbol{L_B}$ permettent de connaître rapidement les puissances active et réactive consommées par le récepteur triphasé.

- Par ailleurs : $\boldsymbol{L_A + L_B = P = \sqrt{3}UIcos\varphi}$ et $\boldsymbol{L_A - L_B = \frac{Q}{\sqrt{3}} = UIsin\varphi}$

$$\frac{\boldsymbol{L_A - L_B}}{\boldsymbol{L_A + L_B}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}}tan\varphi$$

D'où : $$\boxed{\boldsymbol{\tan\varphi = \sqrt{3}\frac{L_A - L_B}{L_A + L_B}}}$$

Ainsi, le facteur de puissance est déterminé par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{\cos\varphi = cos\left[\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\frac{L_A - L_B}{L_A + L_B}\right)\right]}}$$

3. LES PUISSANCES EN REGIME TRIPHASE DESEQUILIBRE

La puissance active d'un récepteur triphasé déséquilibré peut être obtenue en faisant la somme des puissances consommées par chaque phase (attention ! la présence du neutre est souvent nécessaire suivant le type de wattmètre utilisé) ; même chose pour la puissance réactive. La puissance apparente est calculée à partir des valeurs de P et Q mesurées.

Par ailleurs, $\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{P}{Q}}$ ne correspond pas au facteur de puissance ; il est appelé **le facteur global de l'installation** car il n'a pas de réalité physique, le déphasage étant différent sur chacune des phases.

4. METHODE DE BOUCHEROT

La méthode de Boucherot s'emploie comme en monophasé, en effectuant séparément la somme des puissances actives et réactives, puis en calculant la puissance apparente.

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n}\\ \boldsymbol{Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n}\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\boldsymbol{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}\right\} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{Cos\varphi = \frac{P}{S}}$$

5. RELEVEMENT DU FACTEUR DE PUISSANCE

- **Les condensateurs sont montés en triangle :**

$$Q = P.\tan\varphi : \ \textit{Puissance réactive sans condensateurs}$$
$$Q' = P.\tan\varphi' : \ \textit{Puissance réactive avec condensateurs}$$
$$Q_C = Q - Q' : \ \textit{Puissance réactive dela batterie de condensateurs}$$
$$C = \frac{Q_C}{3U^2\omega} : \textit{Capacité de chaque condensateur}$$

- **Les condensateurs sont montés en étoile :** La méthode est identique, nous remplaçons U *par* V dans le calcul de la capacité d'un condensateur.

$$Q = P.\tan\varphi : \ \textit{Puissance réactive sans condensateurs}$$
$$Q' = P.\tan\varphi' : \ \textit{Puissance réactive avec condensateurs}$$
$$Q_C = Q - Q' : \ \textit{Puissance réactive dela batterie de condensateurs}$$
$$C = \frac{Q_C}{V^2\omega} = \frac{3Q_C}{U^2\omega} : \textit{Capacité d'un condensateur}$$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 10 :

Une ligne triphasée de réseau (220/380V) alimente un moteur triphasé :

- Couplage en triangle
- Absorbant un courant en ligne de 15A
- De facteur de puissance 0,8
- Dont chaque phase présente une résistance de 1Ω.

Calculez pour ce moteur :

1. Les puissance active et réactive absorbées
2. Les pertes par effet joules
3. Les lectures L_A et L_B observées en utilisant la méthode des deux Wattmètres.

EXERCICE 11 : Puissance en triphasé

Un moteur triphasé est monté sur un réseau 2230/400 V-50 Hz ; il absorbe un courant de 25 A. Son facteur de puissance est 0,75. Quelles sont les puissances active, réactive et apparente ?

Pour P : a) $P = 11\ kW$; b) $P = 13\ kW$; c) $P = 15\ kW$.

Pour Q : a) $Q = 11{,}5\ kvar$; b) $Q = 13{,}5\ kvar$; c) $Q = 15{,}5\ kvar$.

Pour S : a) $S = 13{,}4\ kVA$; b) $S = 15{,}4\ kVA$; c) $S = 17{,}4\ kVA$.

EXERCICE 12 : Puissance en triphasé

Sur un moteur triphasé équilibré, on relève les indications suivantes : $7{,}5\ kW$; $\eta = 0{,}85$; $400\ V/16{,}7$; $693V/9{,}6\ A$; $50\ Hz$

1. Quelle est la tension nominale des enroulements ?

a) 400 V; b) $693\ V$; c) $230\ V$.

2. Quelle sera le couplage sur un réseau 400 V ?

a) étoile; b) $triangle$; c) $impossible\ de\ le\ coupler$.

3. Quelle est la puissance absorbée au réseau ?

a) 8823 W; b) $9253\ W$; c) $6375\ W$.

4. Quel est, avec un réseau triphasé 400 V, le facteur de puissance ?

a) 0,562; b) 0,662 ; c) 0,762.

EXERCICE 13 : Puissance en triphasé

Sur un réseau triphasé 133/230 V-50 Hz, on branche un ensemble de récepteurs en triangle :

- Entre les phases 1 et 2, on branche un moteur monophasé :$P_a = 1840\ W; cos\varphi = 0{,}8$.
- Entre les phases 2 et 3, on branche 5 lampes en parallèle de 150 W chacune.
- Entre les phases 3 et 1, on branche 15 tubes fluorescents de 50 $W\ chacun$; $cos\varphi = 0{,}5$.

1. Calculer les courants dans les récepteurs.
2. Placer ces vecteurs sur un graphique de Fresnel.
3. Construire les vecteurs des courants en ligne. Déterminer la valeur efficace de ces courants et leurs déphasages respectifs.

Solution : Exercice 13

1- Courant dans le moteur : $J_{12} = \frac{P}{U\cos\varphi} \Rightarrow J_{12} = \frac{1840}{230\times 0,8} \Rightarrow J_{12} = 10\ A.$

- Courant dans les lampes : $J_{23} = \frac{P}{U} \Rightarrow J_{23} = \frac{5\times 150}{230} \Rightarrow J_{23} = 3,26\ A$

- Courant dans les tubes : $J_{31} = \frac{P}{U\cos\varphi} \Rightarrow J_{31} = \frac{15\times 50}{230\times 0,5} \Rightarrow J_{12} = 6,5\ A.$

2- Déterminons le déphasage de chaque courant J :

Pour J_{12}: $\varphi_{12} = 36,86°$; Pour J_{23}: $\varphi_{23} = 0°$; Pour J_{31}: $\varphi_{31} = 60°$

Commençons par le tracé des tensions composées. Traçons les courants J : échelle : $1\ cm \cong 3\ A/$

3- Les courants en ligne :

$\overrightarrow{I_1} = \overrightarrow{J_{12}} - \overrightarrow{J_{31}} \Rightarrow I_1 = 12,5\ A$; $\varphi_1 = 68°$

$\overrightarrow{I_2} = \overrightarrow{J_{23}} - \overrightarrow{J_{12}} \Rightarrow I_2 = 10\ A$; $\varphi_2 = 68°$

$\overrightarrow{I_3} = \overrightarrow{J_{31}} - \overrightarrow{J_{23}} \Rightarrow I_3 = 9,75\ A$; $\varphi_3 = 60°$

EXERCICE 14 :

Sur un secteur triphasé 230/400 V-50 Hz avec fil neutre, on monte, entre N et la phase 1, un résistor de 330 **Ω** ; entre N et la phase 2, deux résistors de 330 **Ω** en parallèle ; entre N et la phase 3, trois résistors 330 **Ω** en parallèle.

1. Calculer l'intensité du courant dans chaque fils de ligne et déterminer graphiquement l'intensité du courant dans le neutre.
2. On supprime la liaison à la phase 2. Déterminer l'intensité du courant dans le fils neutre.
3. Calculer l'intensité du courant dans chaque résistor et la tension entre les bornes de chacun d'eux si on supprime le fil neutre.

Réponses Exercice 14 :

1- $I_1 = 0,7\ A$; $I_2 = 1,4\ A$; $I_3 = 2,1\ A$; $I_N = 1,2\ A$.

2− $I_N = 1,8\ A$.

3- $I_1 = I_3 = 0,9\ A$; $U_{R1} = 99\ V$; $I_{R3} = 297\ V$

EXERCICE 15 : Puissance en triphasé

Sur un secteur triphasé 133/230 V-50 Hz, on monte, en étoile, trois récepteurs purement résistifs définis par la puissance qu'ils consomment sous 230 V :

- Entre 1 et N : $P_1 = 3\ kW$;
- Entre 2 et N : $P_2 = 4\ kW$;
- Entre 3 et N : $P_3 = 5\ kW$;

1. Calculer l'intensité du courant dans chaque récepteur.
2. Déterminer graphiquement l'intensité du courant dans le neutre.

Réponses EXercice 15 :

1- $I_1 = 7{,}55\ A$; $I_2 = 10\ A$; $I_3 = 12{,}6\ A$.

2− $I_N = 4{,}4\ A$.

EXERCICE 16 : Puissance en triphasé

La plaque signalétique d'un moteur triphasé porte les indications :$P_u = 1{,}5\ kW$; $\eta = 0{,}8$; $cos\varphi = 0{,}75$. La tension du réseau est 230/400-50 Hz.

1. Calculer le courant dans la ligne lorsque le moteur fonctionne dans les conditions nominales.
2. Déterminer la capacité de chacun des trois condensateurs qu'il faut monter en triangle pour amener le facteur de puissance à 0,9.

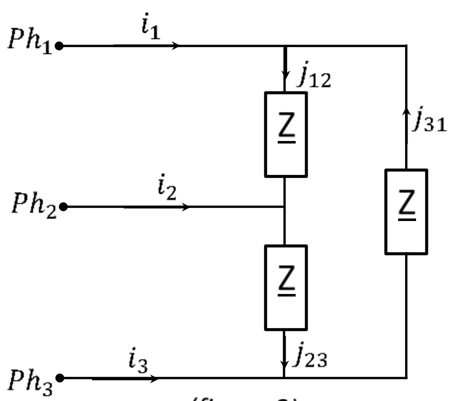
Réponses Exercice 16 :

1- $I = 3{,}6\ A$; 2− $C = 4{,}95\ \mu F$.

EXERCICE 17 : Les récepteurs triphasés

Un récepteur triphasé équilibré, formé de trois dipôles identiques couplées comme l'indique la figure 2, est alimenté par le réseau (230/400V ; 50 Hz). Chaque dipôle comporte une résistance R de 30 Ω en série avec une inductance L de 0,096 H.

1. Le couplage est-il étoile ou triangle ?
2. Calculer l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un dipôle.
3. Déterminer la valeur efficace de l'intensité J du courant traversant une impédance puis celle du courant I en ligne.
4. Calculer les puissances active P_1 , réactive Q_1 et apparente S_1 du récepteur.
5. On branche sur le même réseau un second récepteur, la puissance consommée par le groupement est déterminée par la méthode des deux wattmètres qui donne : $L_1 = 7000$ W et $L_2 = 3500$ W .



(figure 2)

a) Donner le schéma de principe de cette méthode.
b) Déterminer les puissances active P_t et réactive Q_t consommées par le groupement sachant que $Q_t = \sqrt{3}(L_1 - L_2)$.

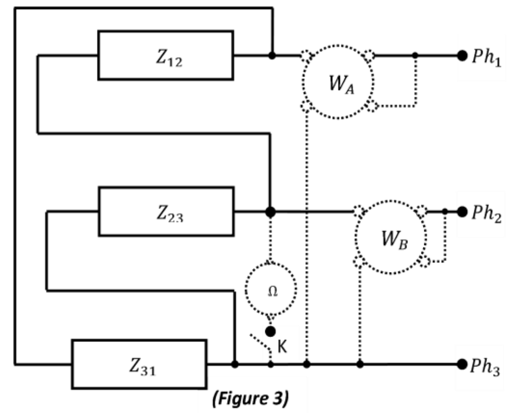
c) Des résultats précédents déduire les puissances active P_2 et réactive Q_2 consommées par le second récepteur.
d) Que peut-on en déduire sur sa constitution ? (On précisera s'il est inductif ou capacitif ; équilibré ou déséquilibré).

EXERCICE 18 : Couplage d'un récepteur triphasé

Un récepteur triphasé est constitué de trois dipôles inductifs $(Z_{12},\ Z_{23},\ Z_{31})$ identiques d'inductance $Z = 42\ \Omega$ et de facteur de puissance $\cos\varphi = 0{,}71$. Il fonctionne normalement lorsque la tension aux bornes de chacun de ces dipôles est de 380 V.

1°) Choisir parmi les affirmations i), ii), et iii) celle(s) qui est (sont) correcte(s) ; le récepteur fonctionne correctement lorsqu'il est couplé en :

i) Étoile sur un réseau $(220/380\ \mathrm{V}, 50\ \mathrm{Hz})$,
ii) Triangle sur un réseau $(220/380\ \mathrm{V}\ , 50\ \mathrm{Hz})$,
iii) Étoile sur un réseau $(380/660\ \mathrm{V}, 50\ \mathrm{Hz})$.



(Figure 3)

2°) On connecte à présent le récepteur triphasé sur un réseau $(220/380\ \mathrm{V}\ ,50\ \mathrm{Hz})$ en branchant les pôles de chacun des dipôles entre deux fils de phase (le neutre n'est pas utilisé) voir figure 3.

a) Il s'agit d'un montage triangle ; vrai ou faux ?
b) Si vrai :

b_1) Déterminer l'intensité J du courant traversant un dipôle, puis celle du courant I en ligne.

b_2) Calculer les puissances active P, réactive Q et apparente S du récepteur triphasé.

3°) Pour vérifier le bon fonctionnement du récepteur, on branche à présent trois appareils de mesures (en pointillé sur la figure 3) : deux wattmètres monophasés W_A , W_B et un ohmmètre. (On ferme K lorsque le récepteur est hors tension).

a) Quelles doivent être les indications L_A et L_B des wattmètres ? On rappelle que pour un récepteur équilibré la puissance réactive peut être déterminée par la relation : $Q = \sqrt{3}(L_A - L_B)$.
b) L'ohmmètre indique $R = 19{,}88\ \Omega$. Cette mesure est-elle en accord avec les caractéristiques du récepteur ? Justifier votre réponse.
c) Montrer que la puissance dissipée par effet joule P_J a pour expression : $P_J = \frac{3}{2}RI^2$; calculer P_J puis la comparer avec P.

Chapitre 9. LES TRANSFORMATEURS MONOPHASES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :

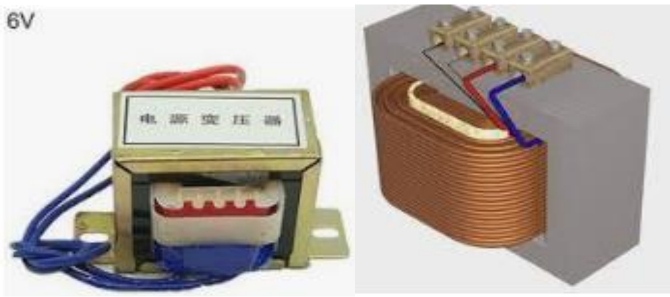
- Comprendre le fonctionnement d'un transformateur ;
- Reconnaitre les indications portées sur une plaque signalétique d'un transformateur ;
- Déterminer les grandeurs de fonctionnement d'un transformateur monophasé parfait ;
- Avoir des notions sur le transformateur réel ;
- Avoir une idée sur le transformateur triphasé.

I. TRANSFORMATEUR MONOPHASE A VIDE

1. GENERALITES

a. Introduction

Le transformateur permet d'adapter, selon les besoins, une tension alternative sinusoïdale en l'élevant ou en l'abaissant sans en modifier la fréquence.



b. Constitution générale du transformateur monophasé

Le transformateur monophasé est constitué d'un circuit magnétique fermé et de deux circuits électriques indépendants qui sont :

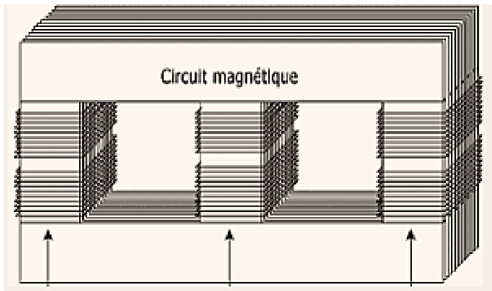


Figure 7-1

- **Le circuit magnétique** est constitué d'un assemblage de tôles ferromagnétiques (feuilletage) ou d'une ferrite. (Voir figure 7-1). Il a pour rôle, la canalisation du flux magnétique.

- **Les deux circuits électriques** sont :
  - Le circuit primaire constitué d'un enroulement unique alimenté sous une tension sinusoïdale correspondant en général à celle du réseau de distribution ;
  - Le circuit secondaire ; il peut comporter un ou plusieurs enroulements ; chaque enroulement délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace en général différente de celle de la tension primaire.

c. Expérience

Le Matériel utilisé pour l'expérimentation se compose de :

- Alimentation TBTS- 0 à 12 V-50 Hz.
- Deux bobines à point milieu comportant chacune 100 spires (deux fois 50).
- Un oscilloscope et deux voltmètres.
- Un circuit magnétique expérimental pouvant recevoir les deux bobines.

Expérimentation :

- Plaçons la bobine B_2 dans l'axe de la bobine B_1.
- La bobine B_1(100 spires) soumise à une tension sinusoïdale (figure 7-2) induit dans la bobine
- B_2(100 spires) une force électromotrice (f.é.m.) alternative sinusoïdale de même fréquence mais de valeur efficace réduite. La f.é.m. induite est maximale quand les deux bobines sont accolées.
- Les deux bobines sont montées sur le circuit magnétique (Fig. 7-3). La f.é.m. induite aux bornes de B_2 a la même valeur efficace que la tension d'alimentation de la bobine B_1.
- Faisons varier séparément le nombre de spires des bobines ou la tension d'alimentation.

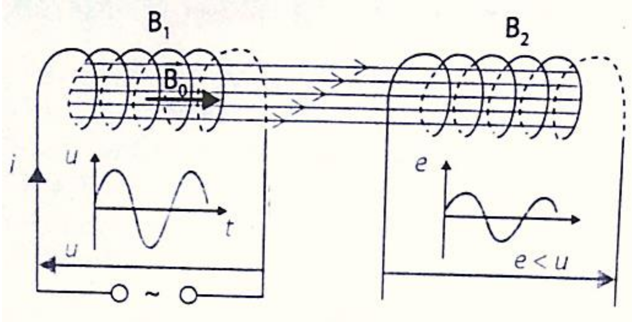


Figure 7-2 : Création d'une f.é.m. induite sinusoïdale

N° ligne	$U_1(V)$	N_1	$U_2(V)$	N_2	$\frac{N_2}{N_1}$	$\frac{U_2}{U_1}$
1	12	100	6	50	0,5	0,5
2	12	100	24	200	2	2
3	12	100	12	100	1	1
4	12	50	24	100	2	2
5	6	100	3	50	0,5	0,5

Tableau 1.

OBSERVATIONS :

- Nous constatons que le circuit magnétique est feuilleté.
- Retirons la bobine B_1 du circuit magnétique et introduisons dans celui-ci un noyau ferromagnétique (acier doux) massif. Après quelques minutes de fonctionnement, la bobine étant alimentée sous la même tension que précédemment, la température du noyau de fer devient anormalement élevée.

2. PRINCIPE DU TRANSFORMATEUR

a. Origine de la tension secondaire

La bobine B_1(enroulement primaire) de la figure 7-3, alimentée sous une tension sinusoïdale, crée au travers de la section droite du circuit magnétique, un flux magnétique variable sinusoïdal (circuit magnétique non saturé).

Cette variation du flux engendre, aux bornes de la bobine B_2(enroulement secondaire), une force électromotrice dont la valeur instantanée est donnée par

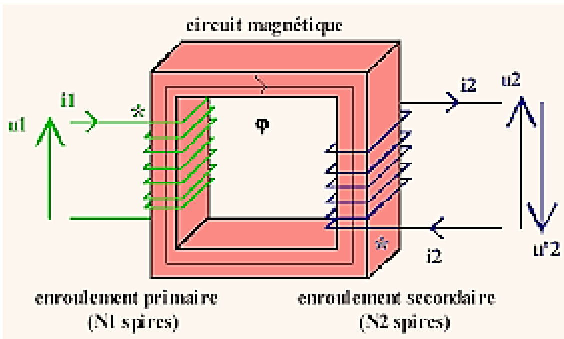


Figure 7- 3 : Les deux bobines B_1et B_2 sont placés sur un même circuit magnétique

la loi de Faraday :

$$e_2 = N_2 \frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}$$

b. Existence des f.é.m. induites

Appelons φ le flux instantané alternatif à travers chacune des spires des deux enroulements. Ce flux, variant au cours du temps, induit des f.é.m. aux bornes des bobines :

- Au primaire : $e_1 = -N_1 \frac{d\varphi}{dt}$
- Au secondaire : $e_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}$

On en déduit la relation : $\frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1} = \mathbf{m}$

c. Conséquence sur la construction

Pour un nombre de spires et une fréquence donnée, la f.é.m. induite sera d'autant plus élevée que le flux embrassé par la bobine B_2 sera maximal.

- **Enroulements :** Les enroulements primaire et secondaire, soigneusement isolés l'un par rapport à l'autre, sont bobinés concentriquement (figure 7- 4b) ou fractionnés (figure7- 4a) et disposés sur le même noyau du circuit magnétique.

- **Circuit magnétique :** Les joints magnétiques (entrefers) seront réduits au maximum afin de limiter les fuites de flux qui provoquent une chute de la tension au secondaire.

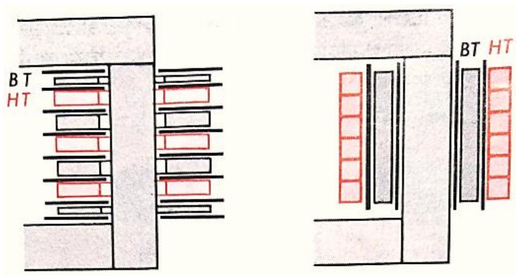
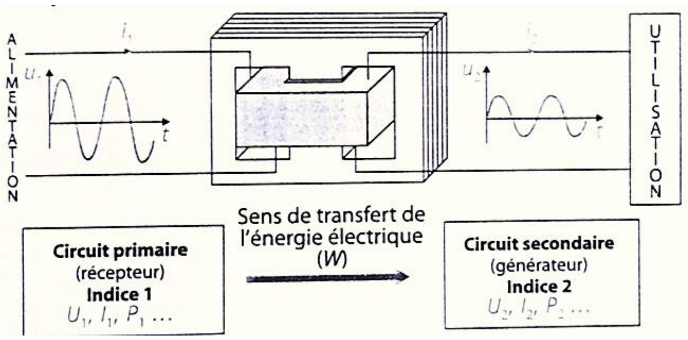


Figure 7-4 :

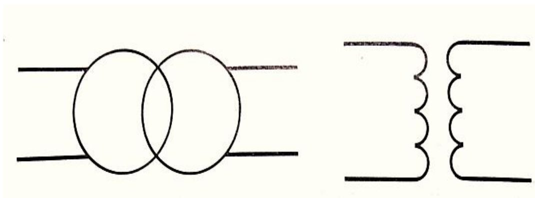
a) dispositions alternées b) dispositions concentriques

des bobines primaire et secondaire

3. CONVENTIONS ET SYMBOLISATIONS



Conventions



Les deux symboles du transformateur monophasé

4. VALEUR EFFICACE DE LA FORCE ELECTROMOTRICE AU SECONDAIRE

Les résultats obtenus lors de l'expérimentation (tableau 1) permettent de constater que la valeur efficace de la force électromotrice, mesurée de la tension à vide secondaire, est, d'une part, dépendante du nombre de spires et de la tension au primaire (lignes 1 et 2), d'autre part, dépendante du nombre de spires et de la tension au primaire (ligne 4 et 5).

La formule de Boucherot permet de calculer, à partir des paramètres électriques et technologiques, cette valeur efficace : $\boldsymbol{E_2 = U_{2v} = 4,44\, fN_2\widehat{\Phi}}$ $\begin{cases} \widehat{\Phi}: flux\ maximal\ en\ Webers\ (Wb) \\ f: fréquence\ en\ hertz\ (Hz) \\ E_2: en\ Volts\ (V). \end{cases}$

Avec : $\widehat{\Phi} = \widehat{B}.S \begin{cases} \widehat{B}: valeur\ maximale\ du\ champ\ en\ teslas\ (T) \\ S: section\ droite\ du\ circuit\ magnétique\ en\ m^2. \end{cases}$

Remarque : la formule de Boucherot est aussi applicable à l'enroulement primaire : $E_1 = U_1 = 4{,}44\, fN_1\widehat{\Phi}$

5. RAPPORT DE TRANSFORMATION (m)

a. Rapport conventionnel des nombres de spires.

Il est défini lors de la construction du transformateur : $\boldsymbol{m = \frac{N_2}{N_1}}$

b. Rapport des tensions

Les résultats montrent que le rapport conventionnel des nombres de spires est égal au rapport de la tension secondaire à la tension primaire : $\boldsymbol{m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1}}$ {**m est un nombre sans unité**

Remarque : A vide, un transformateur est parfait (aucune perte) pour les tensions : $\boldsymbol{U_2 = m.U_1}$

c. Influence des nombres de spires sur la tension secondaire

N° ligne	Nombre de spires	Tensions	Rôle du transformateur
1	$N_2 < N_1$	$U_2 < U_1$	**Abaisseur**
2	$N_2 > N_1$	$U_2 > U_1$	**Élévateur**
3	$N_2 = N_1$	$U_2 = U_1$	**Séparateur**

Tableau 2

6. REMARQUES SUR LES CIRCUITS MAGNETIQUES SOUMIS A UN FLUX MAGNETIQUE VARIABLE.

L'échauffement du circuit magnétique constaté lors de l'expérimentation a deux origines :

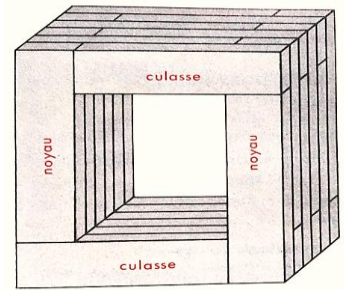


Figure 7-7 : Circuit magnétique feuilleté

a. Existence de courants induits appelés courants de Foucault

Le flux magnétique variable donne naissance à des courants induits qui circulent dans toute la masse du circuit magnétique sur des plans perpendiculaires aux lignes de champ. ***Ces courants de Foucault produisent de l'effet joule dans le matériau de résistivité ρ, d'où des pertes d'énergie***.

En fractionnant le circuit (figure 7-7), par empilement des tôles d'acier alliées à du silicium (augmentation de la résistivité), isolées l'une par rapport à l'autre par des oxydes minéraux, les effets de ces courants sont considérablement réduits.

b. Phénomène d'hystérésis

Au cours d'une période du courant, le champ magnétique créé par la bobine B_1 (primaire) évolue suivant un cycle appelé cycle d'hystérésis (figure 7-8), observable sur un oscilloscope.

Lorsque l'excitation magnétique H décroît, il y a un retard à la désaimantation ; d'où hystérésis (retard de l'effet sur la cause).

Ce cycle qui se renouvelle à chaque période du courant, provoque aussi un échauffement du circuit magnétique donc une perte d'énergie. Celle-ci sera réduite en choisissant un matériau présentant un cycle étroit (aire de la surface du cycle réduite).

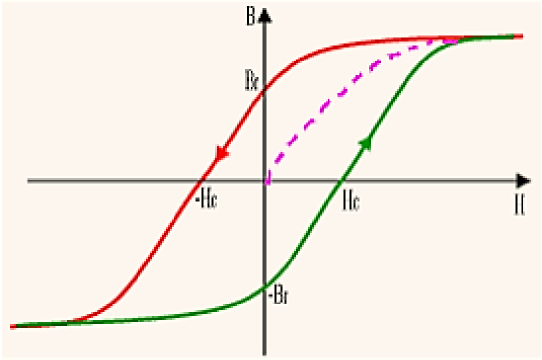


Figure 7-8 : cycle d'hystérésis

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

L'enroulement primaire d'un transformateur monophasé, alimenté sous une tension de fréquence 50 Hz, produit, dans la section droite du circuit magnétique, un flux maximal de 1,93 mWb.

Quel est le nombre de spires de l'enroulement secondaire qui permet d'obtenir une f.é.m. égale à 52 V ?

a) $N_2 = 539$; b) $N_2 = 2392$; c) $N_2 = 121$; d) $N_2 = 0{,}12$.

EXERCICE 2 :

Un transformateur monophasé alimenté sous une tension de 230 v/50 Hz comporte au primaire 705 spires et au secondaire 77 spires.

Quelle est la tension disponible à vide au secondaire ?

a) $U_2 = 2110\,V$; b) $U_2 = 0{,}474\ mV$; c) $U_2 = 25{,}1\,V$; d) $U_2 = 3{,}1\,V$.

EXERCICE 3 :

Quelle est la section S du circuit magnétique qui permet d'obtenir 1,2 T à partir d'un enroulement alimenté sous une tension de 230 V/ 50 Hz et comportant 1200 spires ?

Réponse Exercice 3 :

$S = 7{,}19.10^{-4}\ m^2$

EXERCICE 4 :

Un transformateur monophasé, alimenté sous une tension de 230 V/ 50 Hz, délivre au secondaire une f.é.m. de 25,2 V. Quelle serait sa valeur pour une fréquence de 60 Hz ?

Réponse Exercice 4: $U_{2v} = \ V$

EXERCICE 5 :

Quelle est la tension primaire d'un transformateur délivrant au secondaire une tension de 400 V avec un rapport de transformation égal à 1,6 ?

II. TRANSFORMATEUR EN FONCTIONNEMENT

1. INTRODUCTION

Le transformateur monophasé est utilisé principalement pour les circuits de commande et de signalisation des équipements électriques pour lesquels la puissance n'excède pas quelques kilowatts.

QUESTION : Comment déterminer les intensités nominales des courants primaire et secondaire ?

- Prenons connaissance des indications portées sur une plaque signalétique (figure 7- 9).

Les valeurs des grandeurs électriques sont les valeurs nominales à ne pas dépasser en régime de fonctionnement permanent de la machine.

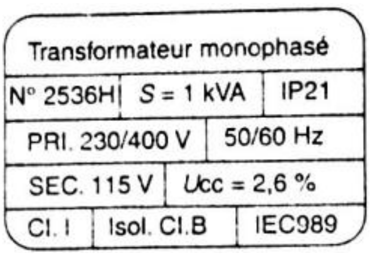


Figure 7- 9 : Plaque signalétique

$$\left\{\begin{array}{c} Puissance\ apparente: 1kVA \\ Fréquence: 50\ Hz \\ Tension\ primaire: 230\ V \\ Tension\ secondaire: 115\ V \\ Tension\ de\ court-circuit: 2{,}6\ \% \\ Indice\ de\ protection: IP\ 21. \\ Isolation: classe\ B. \\ Protection\ des\ personnes: classe\ I \\ Norme: IEC989 \end{array}\right.$$

- Hypothèse de calcul : le transformateur est considéré comme parfait (absence de chute de tension et de pertes de puissance) : $S_1 = S_2 \Rightarrow U_1 I_1 = U_2 I_2$. D'où : $I_{1N} = \frac{S}{U_{1N}}$ et $I_{2N} = \frac{S}{U_{2N}}$.

2. EXPERIENCE

a. Schéma de montage

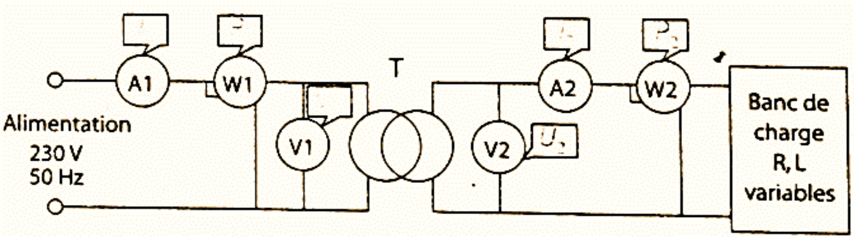


Figure 7- 10 : Schéma de montage

b. Tableau de résultats

Les mesurages ont été effectués pour trois régimes de fonctionnement du transformateur :

- A vide (circuit secondaire ouvert) ;
- Demi-charge nominale ;
- Charge nominale.

$U_1 = 230\,V; f = 50Hz; cos\varphi = 1$									
Mesures					**Calculs**				
$I_2(A)$	$U_2(V)$	$P_2(w)$	$I_1(A)$	$P_1(w)$	$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{I_1}{I_2}$	$cos\varphi_1$	$\Delta U_2(V)$	η
0	120,5	0	1,10	47	0,519	-	0,184	0	0
5	118	590	3,32	656	0,509	0,664	0,850	2,5	0,90
9	116,5	1050	4,90	1120	0,502	0,544	0,985	4	0,94

Tableau 3

3. FONCTIONNEMENT A VIDE ($I_2 = 0$)

A vide, le transformateur est équivalent à une bobine à noyau de fer matérialisée par son primaire (figure 7-11).

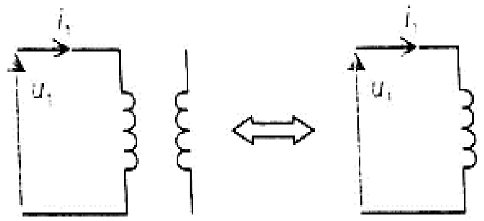


Figure 7- 11 : Modèle équivalent au transformateur à vide

a. Courant primaire (I_{1V}) et facteur de puissance $\cos \varphi_{1V}$:

Ce courant, appelé aussi **courant magnétisante** parce qu'il est à l'origine du champ magnétique, est presque en quadrature avec la tension primaire (figure7-12). Il en résulte que le facteur de puissance à vide est très faible.

Le courant magnétisant sera alors souvent négligeable par rapport au courant nominal, particulièrement pour les transformateurs ayant une puissance de quelques kilovoltampères.

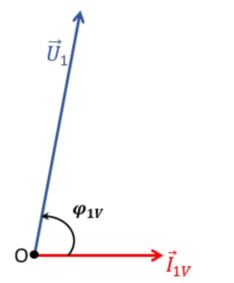


Figure 7-12 : courant primaire à vide

b. Tension secondaire à vide (U_{2V}):

La connaissance de la tension secondaire à vide permet le calcul du rapport de transformation :

$$m = \frac{U_{2V}}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

c. Puissance absorbée (P_{1V}):

La faible valeur du courant à vide fait que les pertes par effet Joule dans l'enroulement primaire sont négligeables : $R_1 I_1^2 \ll P_{1V}$

La puissance mesurée à vide P_{1V} correspond à la puissance perdue dans le circuit magnétique par hystérésis et par courant de Foucault, ce sont les « pertes fer ».

4. FONCTIONNEMENT EN CHARGE

a. Chute de la tension secondaire

Au fur et à mesure que la charge augmente, la tension secondaire diminue. Cette chute de tension a pour origine la résistance des enroulements et les fuites de flux magnétique.

Elle se calcule à partir des relevés de mesures ou du tracé de la caractéristique externe $U_2 = f(I_2)$ de la figure 7-13. (Voir Exercice 10).

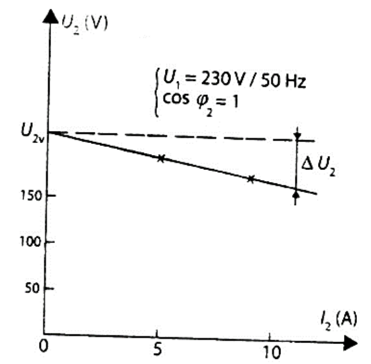


Figure 7-13 : caractéristique externe $U_2 = f(I_2)$ à $\cos \varphi_2$ constant.

- **Chute de tension absolu (ΔU_2) :** Elle est égale à la différence des tensions secondaires à vide et en charge et s'exprime en volts :
$$\Delta U_2 = U_{2V} - U_2$$

- **Chute de tension relative (δU_2) :** C'est cette valeur qui est précisée sur les fiches techniques des constructeurs. Généralement exprimée en pourcentage, elle est égale au rapport de la chute de tension absolue à la tension secondaire à vide :
$$\delta U_2 = \frac{\Delta U_2}{U_{2V}} = \frac{U_{2V} - U_2}{U_{2V}}$$

b. Rapport de transformation

- **Rapport des tensions :** La tension secondaire diminuant au fur et à mesure que le courant secondaire augmente, le rapport $\frac{U_2}{U_1}$ n'est plus constant : $\boldsymbol{m}_{en\ charge} < \boldsymbol{m}_{à\ vide}$.

  Ce rapport variant avec la charge, le calcul du rapport de transformation doit être effectué à partir de la tension secondaire à vide : $\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{U_{2V}}}{\boldsymbol{U_1}}$

- **Rapport des courants :** Au voisinage du point nominal, le rapport $\frac{I_1}{I_2}$ tend vers la valeur du rapport des tensions à vide tout en lui restant supérieur : $\frac{I_1}{I_2} > \frac{U_{2V}}{U_1} \Rightarrow I_1 > mI_2$.
- **Hypothèse simplificatrice :** Le courant à vide est négligeable devant le courant nominal. Il en résulte, qu'en charge, les deux rapports sont égaux. Le transformateur est alors parfait pour les courants :

$$\boldsymbol{\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_{2V}}{U_1} \quad \Rightarrow \quad I_1 = mI_2}$$

c. Rendement

C'est le rapport de la puissance restituée par le secondaire (puissance utile) à la puissance absorbée par le primaire ; le rendement est maximal au voisinage du point de fonctionnement nominal : $\boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{P_2}}{\boldsymbol{P_1}}$

d. Influence du facteur de puissance (charge inductive)

Puissance nominale (VA)	**Chute de tension ΔU_2 en % avec cos φ de :**			**Rendement η avec cos φ de :**		
	0,3	0,6	1	0,3	0,6	1
100	1,9	2,7	3,3	0,82	0,90	0,94

On constate que la diminution du facteur de puissance du circuit d'utilisation s'accompagne d'une modification de la chute de tension et d'une baisse du rendement.

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 6 :

L'essai à vide d'un transformateur monophasé a donné résultats suivants : $U_1 = 232\ V$; $f = 50\ Hz$; $I_1 = 0{,}748\ A$; $P_{1V} = 27{,}4\ W$. Est le facteur de puissance ?

a) $cos\varphi_{1V} = 0{,}158$; b) $cos\varphi_{1V} = 0{,}0883$; c) $cos\varphi_{1V} = 6{,}33$;

d) $cos\varphi_{1V} = 0{,}118$.

EXERCICE 7 :

Un transformateur abaisseur monophasé est alimenté sous une tension de 400 V. Sachant que le rapport des nombres de spires des enroulements est de 0,125, quelle est la valeur de la tension secondaire à vide ?

EXERCICE 8 :

Un transformateur porte sur sa plaque les indications suivantes :

$U_1 = 400\,V$; $f = 50\,Hz$; $S = 1{,}6\,kVA$; $U_2 = 24\,V$. Quelles sont les intensités nominales des courants primaire et secondaire ?

EXERCICE 9 :

L'essai d'un transformateur monophasé, alimenté sous une tension constante de 230 V, a donné les résultats suivants : $U_{2V} = 418\,V$ (à $vide$) ; $U_2 = 398\,V$ ($en\ charge$) . Quelle est en pourcentage, la valeur de la chute de tension relative ?

EXERCICE 10 :

À partir de la caractéristique externe $U_2 = f(I_2)$ de la figure 7-13, déterminer, en valeurs absolue et relative, la chute de tension pour un courant secondaire d'intensité égale à 8 A.

EXERCICE 11 :

La chute de tension d'un transformateur monophasé 230/24 V est de 5,6 % dans les conditions nominales de fonctionnement. Quelle est la tension secondaire à vide de ce transformateur ?

EXERCICE 12 :

Lors d'une opération de maintenance, les mesurages effectués sur un transformateur monophasé 230 V/12 V ont donné les mesures suivantes : $U_1 = 235\,V$; $U_{2v} = 12{,}8\,V$; $I_2 = 48\,A$. Calculer l'intensité du courant primaire.

III. BILAN DES PUISSANCES D'UN TRANSFORMATEUR

1. ORIGINE DES PERTES DANS LE TRANSFORMATEUR

a. Les pertes dans le fer

Les pertes dans le fer, notées P_F, sont dues aux pertes par courants de Foucault et à l'hystérésis engendrées par le flux magnétique variable.

La tension d'alimentation ainsi que la fréquence sont pratiquement toujours constantes. Il en résulte que ces pertes, indépendantes de la charge, sont invariables. $\forall\, \boldsymbol{I_2},\ \boldsymbol{P_F = constante}$.

NB : **Les pertes fer sont pratiquement égales à la puissance absorbée par le primaire du transformateur fonctionnant à vide : $\boldsymbol{P_F \approx P_{1v}}$**

b. Les pertes par effet Joule

Les pertes par effet Joule, notées P_J, sont de deux sortes :

- Au primaire : $P_{J_1} = R_1.I_1^2$
- Au secondaire : $P_{J_2} = R_2.I_2^2$

Les pertes par effet Joule globales sont : $\boldsymbol{P_J = P_{J_1} + P_{J_2}}$

Le mesurage, en courant continu, de la résistance des enroulements et la connaissance des intensités des courants, permettent le calcul de ces pertes.

c. Essai en court-circuit ($\boldsymbol{U_2 = 0}$)

- Le secondaire étant court-circuité par un câble de section suffisante, on applique une tension réduite sur le primaire du transformateur (Voir figure 7-14). La puissance de court-circuit est alors :

$$\boldsymbol{P_{1_{cc}} = P_J \text{ ; avec } P_J = P_{J1} + P_{J2}}$$

Le transformateur est, dans ces conditions de fonctionnement, parfait pour les courants :

$$\boldsymbol{I_{1cc} = mI_{2cc}.}$$

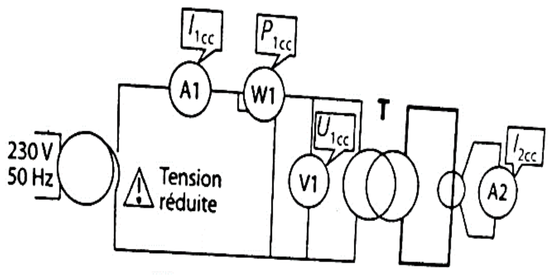


Figure 7-14 : Essai en court-circuit

- La tension de court-circuit U_{cc} indiquée sur une plaque signalétique est le pourcentage de la tension nominale qu'il faut appliquer au primaire pour obtenir au secondaire un courant de court-circuit I_{2cc}égal au courant nominal I_{2N}.

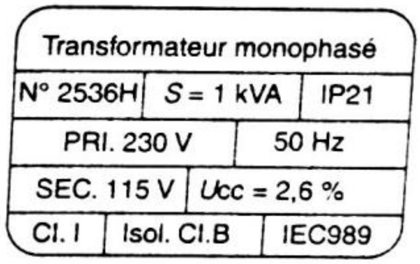
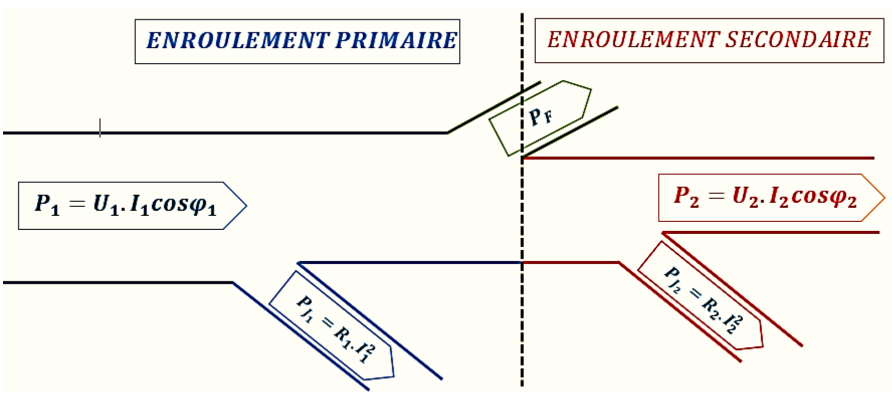


Figure 7-15 : Plaque signalétique

Exemple figure 7-15 : $U_{1cc} = 2,6\frac{230}{100} = 5,98\,V$.

2. BILAN DES PUISSANCES



3. RENDEMENT

a. Calcul direct à partir des puissances $\boldsymbol{P_1}$ et $\boldsymbol{P_2}$

$$\boldsymbol{\eta = \frac{P_2}{P_1}}$$

b. Calcul direct par la méthode des pertes séparées

La connaissance de la puissance secondaire P_2 ainsi que les différentes pertes permet le calcul de la puissance primaire P_1 : $P_2 = U_2 I_2 cos\varphi_2$; $P_1 = P_2 + P_F + P_J \Rightarrow \quad \eta = \frac{P_2}{P_2+P_F+P_J}$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 13 :

L'essai à vide d'un transformateur monophasé 230 V/24 V de 63 VA a donné les mesures suivantes : $U_1 = 230\,V$; $P_{1v} = 6{,}5\,W$; $I_{1v} = 22\,mA$. Calculer les pertes par effet Joule à vide ($R_1 = 23\,\Omega$) et montrer que celles-ci sont négligeables par rapport à la puissance à vide en effectuant le rapport de ces deux puissances.

EXERCICE 14 :

La tension de court-circuit inscrite sur la plaque signalétique d'un transformateur 230 V/48 V de 250 VA est de 4 %.

Quelle tension faut-il appliquer aux bornes de l'enroulement primaire pour effectuer l'essai de court-circuit du transformateur dans les conditions nominales ?

EXERCICE 15 :

Un transformateur monophasé 400 V/ 115 V, d'une puissance de 100 VA, alimente un récepteur absorbant un courant d'intensité 0,87 A avec un facteur de puissance de 0,82. Les essais à vide et en court-circuit ont donné les résultats suivants : $P_{1v} = 8{,}5\,W$; $P_{cc} = 6{,}4\,W$. Calculer le rendement du transformateur.

EXERCICE 16 : Transformateur parfait

La plaque signalétique d'un transformateur monophasé porte les indications suivantes :

$U_1 = 220\,V$; $U_2 = 24\,V$; $f = 50\,Hz$; $S_n = 60\,VA$

La section utile du circuit magnétique est 2cm x 3 cm. Sachant que le champ magnétique a une amplitude de 1,6 T, calculer :

1. Le nombre de spire de chacun des enroulements (la tension secondaire correspondante à U_{1n} étant de 24 V) ;
2. La valeur nominale du courant primaire et le courant secondaire correspondant ;
3. Les puissances active et réactive absorbées par le primaire lorsque :

a) Le secondaire débite le courant $I_2 = 2A$;
b) Le facteur de puissance du récepteur inductif est $cos\varphi_2 = 0{,}8$.

SOLUTION Exercice 16 :

1. Calcul de $N_1 et\ \ N_2$:

Le champ magnétique a pour amplitude : $\hat{B} = \frac{U_1}{N_1\omega S}\sqrt{2}$ d'où $N_1 = \frac{U_1}{\hat{B}\omega S}\sqrt{2}$ avec $\omega = 2\pi f$

$\Rightarrow N_1 = \frac{220}{1{,}6\times2\times\pi\times50\times2\times3\times10^{-4}}\sqrt{2} \Rightarrow N_1 = 1032\ spires$.

$\frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} \quad \Leftrightarrow \quad N_2 = N_1\frac{U_2}{U_1} \Rightarrow N_2 = \frac{2{,}2\sqrt{2}10^4\times24}{9{,}6\pi\times220} \Rightarrow N_2 = 113\ spires$

2. Calcul de $I_{1n} et\ \ I_2$:

$I_{1n} = \frac{S_n}{U_{1n}} \Rightarrow I_{1n} = \frac{60}{220} = 0{,}273\ A \Rightarrow I_{1n} = 273\ mA$

$I_2 = \frac{I_1}{m} = I_1\frac{N_1}{N_2} \Rightarrow I_2 = \frac{60}{24} \Rightarrow I_2 = 2{,}5\ A$

3. Calcul de P_1 et Q_1

$P_1 = P_2 = U_2I_2\cos\varphi_2 \Rightarrow P_1 = 24\times2\times0{,}8 \Rightarrow P_1 = 38\ W$

$Q_1 = Q_2 = U_2I_2\sin\varphi_2 \Rightarrow Q_1 = Q_2 = 24\times2\times0{,}6 \Rightarrow Q_1 = 28{,}8\ var$

EXERCICE 17 : Transformateur parfait

1. Un transformateur monophasé abaisseur de tension (220 V/12 V) alimente une charge résistive de résistance $R_2 = 10\ \Omega$. Calculer la valeur efficace du courant secondaire lorsque $U_1 = 220\ V$.
2. On met en série avec le primaire une résistance $R_1 = 1\ k\Omega$. Figure 7- ; l'ensemble est soumis à la tension $U_1 = 220\ V$. Calculer :
   a) La résistance R_2' transférée au secondaire ;
   b) La nouvelle valeur efficace du courant débité par le secondaire.

SOLUTION Exercice 17 :

1. Calcul de I_2: $I_2 = \frac{U_2}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{12}{10} \Rightarrow I_2 = 1{,}2\ A.$
2.
   a) Calcul de R_2' : La résistance R_1 transférée au secondaire (figure7- b) devient :
   $R_2' = m^2R_1 \Rightarrow R_2' = 10^3m^2$ or $m = \frac{U_2}{U_1} \Rightarrow R_2' = 3\ \Omega$.
   b) Calcul de La nouvelle valeur efficace du courant débité par le secondaire :

$$I_2' = \frac{U_2}{R_2'+R_2} \Rightarrow I_2' = \frac{12}{3+10} \Rightarrow I_2' = 0{,}92\ A.$$

EXERCICE 18 : Transformateur parfait

Le primaire d'un transformateur comporte 780 spires ; quand on lui applique une tension de 220 V, le secondaire délivre une tension de 12 V. Calculer :

1. Le rapport de transformation de l'appareil
2. Le nombre de spire du secondaire
3. La tension qu'il faut appliquée au primaire pour obtenir 6,3 V au secondaire.

EXERCICE 19 : Transformateur parfait

Pour construire un transformateur de caractéristiques : (220 V/12 V , 50Hz) on utilise une carcasse magnétique dont la section utile est 6 cm².

1. Le champ magnétique maximal dans les tôles devant être égale à 1,1 T, calculer le nombre de spires de chacun des enroulements.
2. Expliquer ce qui se passerait si on commettait l'une des erreurs suivantes :
   - On monte moins de spires que prévu au secondaire ;
   - On monte moins de spires que prévu au primaire ;
   - On utilise pour le primaire le fil dont le diamètre a été calculé pour le secondaire ;
   - On applique (successivement) $\left| \begin{array}{l} 220\,V\ au\ secondaire \\ 12\,V\ \ au\ primaire. \end{array} \right.$

EXERCICE 20 : Transformateur

On applique au primaire d'un transformateur, la tension sinusoïdale : $u_1 = 220\sqrt{2}sin100\pi t.$

1. Déterminer les expressions instantanées :
   a) De la f.é.m. e_1 induite dans les 900 spires du primaire ;
   b) Du flux magnétique ψ à travers la section de 8 cm² du circuit magnétique ;
   c) Du champ magnétique b dans les tôles ;
   d) De la f.é.m. e_2 induite dans les 98 spires du secondaire ;
   e) De la tension u_2 aux bornes du secondaire.
2. Représenter les vecteurs de Fresnel des cinq fonctions précédentes.

EXERCICE 21 : Transformateur

On applique la tension $\underline{U_1} = 220\,V\lfloor 0°$ au primaire d'un transformateur dont les enroulements comportent respectivement $N_1 = 1660\,spires$ et $N_2 = 90\,spires.$

1. La charge est constituée par un dipôle d'impédance $\underline{Z} = 10\,\Omega\,\lfloor -30°$. Calculer les valeurs complexes :
   a) De la tension aux bornes du secondaire ;
   b) Du courant débité par le secondaire ;
   c) Du courant absorbé par le primaire, et construire les vecteurs de Fresnel correspondants.
2. On monte en parallèle avec le premier dipôle une résistance $R = 10\,\Omega.$
   a) Calculer la valeur complexe du courant absorbé par le primaire.
   b) En déduire l'indication lue sur un ampèremètre numérique placé au primaire.

EXERCICE 22 : Transformateur

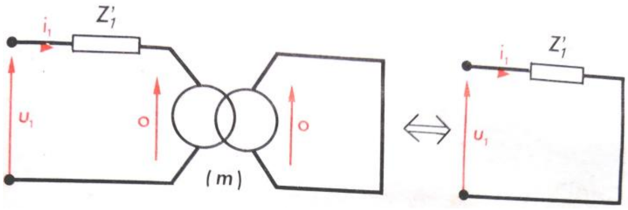
Un transformateur, de rapport $m = \frac{1}{10}$, débite dans une charge d'impédance $\underline{Z} = 20 + 10j$. On applique au primaire la tension $\underline{U_1} = 220\,V\lfloor 0°.$

1. Calculer l'impédance $\underline{Z}_1'$ transférée au primaire.
2. Faire le schéma équivalent au montage initial
3. En déduire la valeur complexe du courant absorbé par le primaire.

REPONSES Exercice 22 :

1) $\underline{Z}_1' = 2{,}24\ k\,\Omega\ \lfloor 26{,}6°$; 3) a- $\underline{I}_1 = 98{,}4\ mA\ \lfloor -26{,}6°$; $I_2 = 1{,}1\ A,$; $I_1' = 0{,}55\ A\ et\ I_2' = 2{,}2\ A$;

2) schéma :



EXERCICE 23 : Transformateur

On considère le montage de la figure 7-17 pour lequel $\underline{U}_1 = 220\ V\lfloor 0°$. Les rapports de transformation des transformateurs T et T' sont respectivement $m = 4$ et $m' = 0{,}25$. Calculer :

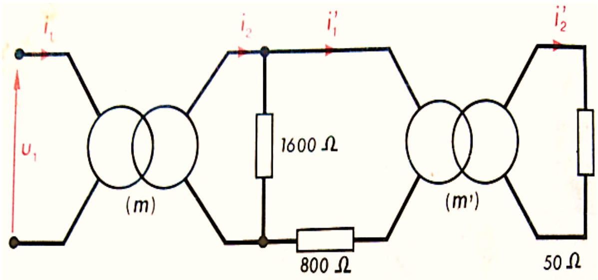


Figure 7-17

1. L'impédance de la charge transférée au primaire du transformateur T' ;
2. L'impédance du circuit d'utilisation du transformateur T,
3. Les valeurs efficaces :
   a) Des courants $i_1, i_2, i_1'\ et\ i_2'$dans les enroulements des transformateurs ;
   b) Des tensions $u_2, u_1'\ et\ u_2'$ aux bornes des enroulements.

REPONSES Exercice 23 :

1) $\underline{Z}_1' = 800\ \Omega$; 2) $\underline{Z}_1 = 50\ \Omega$;

3) a- $I_1 = 4{,}4\ A$; $I_2 = 1{,}1\ A,$; $I_1' = 0{,}55\ A\ et\ I_2' = 2{,}2\ A$; b- $U_2 = 880\ V$; $U_1' = 440\ V\ et\ U_2' = 110\ V$

EXERCICE 24 : Transformateur Parfait

Un transformateur monophasé possède les caractéristiques suivantes : $U_{1n} = 10\ kV$; $f = 50\ Hz$; $S_n = 280\ kVA$; $N_1 = 8500\ spires$.

La section utile du circuit magnétique est 5,5 cm x 6cm.

Calculer :

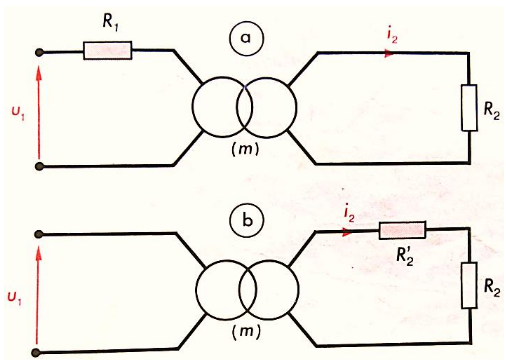


Figure 7-18

1. L'amplitude du champ magnétique dans les tôles ;
2. Le nombre de spire du secondaire sachant que la tension secondaire correspondant à U_{1n} est de 700 V ;
3. La valeur nominale du courant primaire et du courant

secondaire correspondant ;

4. Les puissances active et réactive absorbées par le primaire lorsque :
   a) Le secondaire débite le courant $I_2 = 350\ A$;
   b) Le facteur de puissance du circuit récepteur inductif est $cos\varphi_2 = 0{,}6$.

REPONSES Exercice 24 :

1) $\hat{B} = 1{,}6\ T$; 2) $N_2 = 595\ spires$; 3) $I_{1n} = 28\ A$; $I_2 = 400\ A$;

4) $P_1 = 147\ kW;\ Q_1 = 196\ kvar$.

EXERCICE 25 : Transformateur industriel

Un transformateur monophasé possède les caractéristiques suivantes :

- Puissance apparente nominale $S_n = 1\ kVA$,
- Tension nominale au primaire $U_{1n} = 220\ V, (f = 50\ Hz)$,
- Section utile du circuit magnétique $s = 30\ cm^2$.
- À vide, sous la tension primaire de 220 V, il absorbe la puissance $P_O = 45\ W$; La tension au secondaire vaut 25,4 V.

En court-circuit, sous la tension primaire $U_{1cc} = 10\ \%U_{1n}$, il absorbe la puissance $P_{cc} = 94\ W$.

1. Sachant que l'amplitude du champ magnétique dans les tôles est :$\hat{B} = 1{,}6\ T$, calculer le nombre de spires de chaque enroulement.
2. Quelle est la valeur nominale du courant dans le secondaire ? Déduire de l'essai en court-circuit la valeur de l'impédance complexe $\underline{Z}_S$ du transformateur ramené au secondaire.
3. Le transformateur, dont le primaire est soumis à la tension $U_{1n} = 220\ V$, alimente une charge inductive de facteur de puissance $cos\varphi_2 = 0{,}8$.
   a) Construire le graphe de $I_2 \mapsto U_2$.
   b) Construire le graphe de $I_2 \mapsto \eta$. (On considérera les charges $\frac{1}{4}I_{2n};\ \frac{1}{2}I_{2n};\ \frac{3}{4}I_{2n};\ \ I_{2n}\ et\ \frac{5}{4}I_{2n}$).
   c) En déduire la valeur maximale du rendement ainsi que le courant correspondant.
4. Le transformateur, toujours alimenté sous la tension $U_1 = 220\ V$ débite désormais un courant de valeur efficace constante $I_2 = I_{2n}$ dans une charge dont le facteur de puissance $cos\varphi_2$ est variable.
   a) A l'aide du triangle de kapp, expliciter la chute de tension en fonction de φ_2 et suivre ses variations.
   b) Construire le graphe de $\varphi_2 \mapsto U_2$.

REPONSES Exercice 25 :

1. *L'amplitude du champ magnétique a pour expression :* $\hat{B} = \frac{U_1}{N_1 \omega S}\sqrt{2}$ *d'où* $N_1 = \frac{U_1}{\hat{B}\omega S}\sqrt{2}$ *avec* $\omega = 2\pi f$

$\Rightarrow N_1 = \frac{220}{1{,}6\times2\times\pi\times50\times3\times10^{-3}}\sqrt{2} \Rightarrow N_1 = 206\ spires$.

Le rapport de transformation s'écrit : $m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_{20}}{U_1} \Leftrightarrow N_2 = N_1\frac{U_{20}}{U_1} \Rightarrow N_2 = \frac{206\times25{,}4}{220} \Rightarrow N_2 = 24\ spires$

2. a- *La valeur nominal du courant secondaire est donné par la relation :* $I_{2n}\ \frac{S_n}{U_{2n}}$ *; or la tension* U_{2n} *est ici égale 25,4 V (tension à vide correspondant à* $U_{1n} = 220\ V$*) ; donc* $I_{2n} = \frac{10^3}{25,4}$ ⇒ $I_{2n} = 39,4\ A$.

b- *Déduction de l'impédance complexe* $\underline{Z_S}$ *du transformateur ramené au secondaire.*

Dans l'essai en court-circuit les pertes magnétiques sont négligeables devant les pertes par effet Joule $(R_S I_{2n}^2)$ *; La puissance absorbée est égale à :* $P_{cc} = R_S I_{2n}^2 \Leftrightarrow R_S = \frac{P_{cc}}{I_{2n}^2} \Rightarrow R_S = \frac{94}{39,4^2} \Rightarrow R_S = 60,6\ m\Omega$.

D'autre part, l'essai en court-circuit permet d'écrire : $-m\ \underline{U}_{1cc} = \underline{Z}_S \underline{I}_{sn} \Rightarrow m\ U_{1cc} = Z_s\ I_{2n}$.

D'où : $Z_s = \frac{m\ U_{1cc}}{I_{2n}} \Rightarrow Z_s = \frac{25,4\times220}{220\times10\times39,4} = 6,45.10^{-2}\ \Omega$.

La réactance X_S *a donc pour valeur :* $X_S = \sqrt{Z_S^2 - R_S^2} \Rightarrow X_S = \sqrt{64,5^2 - 60,1^2} = 22,1\ m\Omega$.

En définitive, on a : $\underline{Z_S} = 60,6 + 22,1\ j$

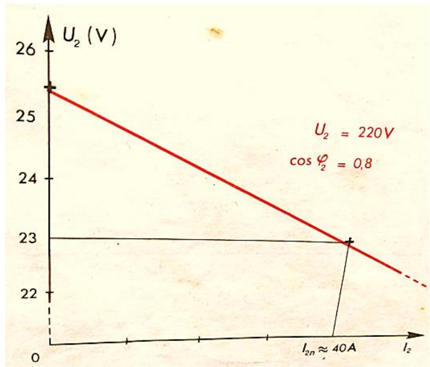
3. a- *Dans l'approximation de kapp, la chute de tension au secondaire a pour expression :* $\Delta U_2 = (R_s cos\varphi_2 + X_s sin\varphi_2) I_2$

Lorsque le facteur de puissance $cos\varphi_2$ *est constant,* ΔU_2 *est proportionnel au courant* I_2.

$\Delta U_2 = 61,7.10^{-3} I_2$. *La tension secondaire s'écrit donc :* $U_2 = U_{20} - \Delta U_2 \Rightarrow U_2 = 25,4 - 61,7.10^{-3}.I_2$.

Le graphe de $I_2 \mapsto U_2$ *est une portion de la droite passant par les points :*

- $I_2 = 0 \mapsto U_2 = 25,4\ V$
- $I_2 = I_{2n} = 39,4\ A \mapsto U_2 = 23,0\ V$



b- *Le rendement* $\eta = \frac{P_2}{P_1}$ *du transformateur a pour expression :*

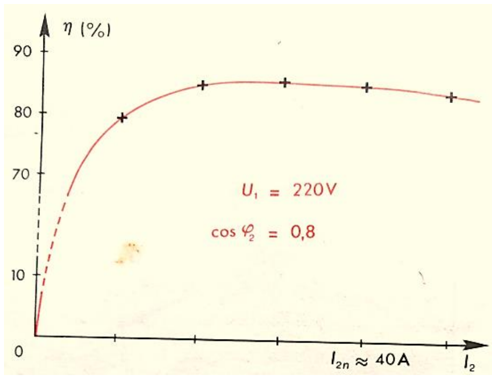
$$\eta = \frac{U_2 I_2 cos\varphi_2}{U_2 I_2 cos\varphi_2 + P_{mag} + R_S I_2^2}$$

Dans l'essai à vide, les pertes par effet Joule sont négligeables devant les pertes magnétiques P_{mag} *; on a donc :* $P_{mag} = P_0 = 45\ W$.

D'où $\eta = \frac{0,8\ U_2 I_2}{0,8\ U_2 I_2 + 45 + 60,6.10^{-3} I_2^2} 100$

En utilisant l'expression de U_2 en fonction I_2 $(U_2 = 25,4 - 61,7.10^{-3}.I_2)$, on remplit le tableau suivant :

I_2	0	$\frac{1}{4}I_{2n}$	$\frac{1}{2}I_{2n}$	$\frac{3}{4}I_{2n}$	I_{2n}	$\frac{5}{4}I_{2n}$
$I_2(A)$	0	9,85	19,7	29,6	39,4	49,3
$U_2(V)$	25,4	24,8	24,2	23,6	23,0	22,4
η %	0	79,3	84,8	85,1	83,9	82,1



On en déduit le graphe de la fonction : $I_2 \mapsto \eta$ correspondant à $U_1 = 220\ V$ et $cos\varphi_2 = 0,8$.

Ce graphe montre que :

- *Le rendement maximal est voisin de 85%,*
- *Le courant correspondant est compris entre 25 A et 30 A.*

Or, on démontre que le rendement passe par son maximum sensiblement lorsque le courant I_2 est tel que :

Pertes par effet joule = pertes magnétiques :

$R_s I_2^2 = P_{mag}$

IV. TRANSFORMATEURS TRIPHASES



Chapitre 10. LES MACHINES A COURANT CONTINU

Objectifs pédagogiques *: A la fin de ce chapitre, je dois être capable de :*

- *Comprendre le fonctionnement d'une machine à courant continu ;*
- *Reconnaitre les indications portées sur une plaque signalétique d'une machine à courant continu ;*
- *Déterminer les caractéristiques d'une machine à courant continu ;*
- *Calculer le rendement d'une machine à courant continu.*

I. QUELQUES RAPPELS

1. CREATION D'UNE FORCE ELECTROMOTRICE

Un conducteur de section cylindrique, libre de se déplacer en translation, est posé sur deux rails conducteurs alimentés en courant continu. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme dont les lignes de champ sont orthogonales au conducteur (Voir figure 8-1).

À la fermeture de l'interrupteur, le conducteur se déplace sous l'effet d'une force, appelée **force électromagnétique de Laplace**.

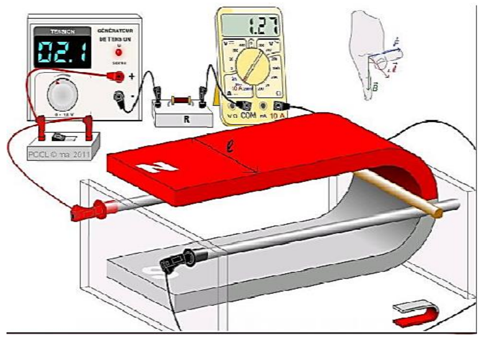


Figure 8-1 : Expérience des rails de Laplace

2. CARACTERISTIQUES DE LA FORCE $\vec{F}$:

- **Direction :** perpendiculaire au vecteur champ $\vec{B}$ ainsi qu'au conducteur.
- **Sens :** Donné par la règle des trois doigts de la droite.
- **Module :** Proportionnel à la norme du champ $\vec{B}$, à l'intensité du courant I, à la longueur soumise au champ ($\boldsymbol{l}$) du conducteur, et au sinus de l'angle α formé par le conducteur et le vecteur champ (loi de Laplace).

$$\boldsymbol{F = BIlsin\alpha}$$

Cas particulier : Dans la plupart des applications, $\boldsymbol{sin\alpha = 1}$ ($\boldsymbol{\alpha = 90}$°) et on a donc :

$$\boldsymbol{F = BIl}\begin{cases}\boldsymbol{B}\ en\ teslas\ (T)\\ \boldsymbol{I}\ en\ ampères\ (A)\\ \boldsymbol{F}\ en\ newtons\ (N)\end{cases}$$

L'inversion du sens de la force (donc du déplacement), s'obtient en inversant, soit le sens du vecteur champ, soit le sens du courant, mais jamais les deux en même temps.

3. MOUVEMENT DE ROTATION

Prenons pour exemple l'équipage mobile d'un appareil de mesure magnétoélectrique constitué d'une bobine en forme

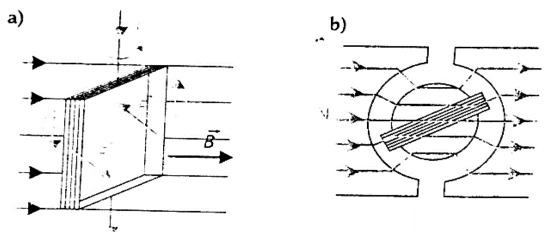


Figure 8-2 : Cadre mobile placé dans un champ magnétique radial de cadre et comportant N spires (fig. 2a), placée dans un champ magnétique radial (fig.2b).

Les conducteurs verticaux sont perpendiculaires aux lignes de champ, quelle que soit la position de la bobine. Le système de forces $\vec{F}_1 et\ \vec{F}_2$ forme un couple entraînant en rotation le cadre, jusqu'à sa position d'équilibre.

II. MACHINE A COURANT CONTINU (MCC)

1. CONSTITUTION D'UNE MACHINE A COURANT CONTINU

Toute machine à courant continu comporte un circuit magnétique, formé d'une partie fixe, **le stator** ou **inducteur**, séparé par un **entrefer** d'une partie tournante, le **rotor** ou **induit**.

L'inducteur : constitué de bobines alimentées en courant continu ou d'aimants permanents, est la source de champ magnétique et comporte $2p$ pôles.

Le stator : comporte en dehors des pôles principaux, les pôles auxiliaires de commutation.

Les pôles principaux : généralement bobinés et alimentés en courant unidirectionnel, créent le flux magnétique dans l'entrefer.

Le circuit électrique relatif à l'alimentation de l'inducteur est appelé circuit d'excitation.

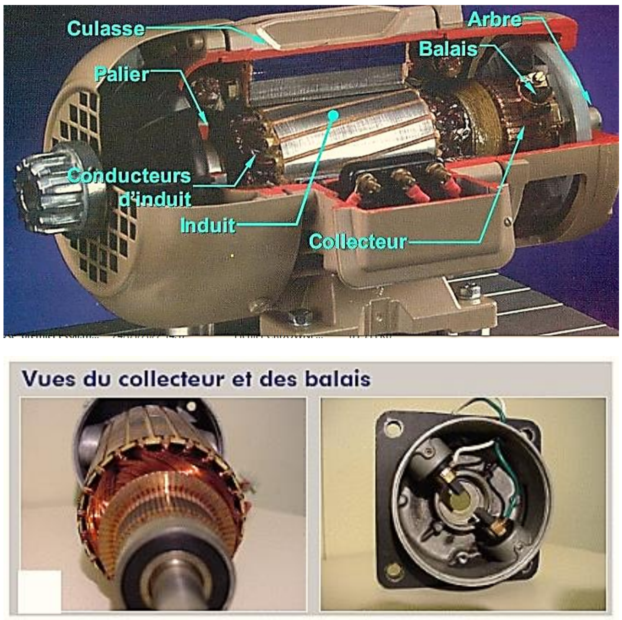


Figure 8-3 : Les différentes parties d'une MCC

Le Rotor se compose des éléments suivants :

- **L'induit :** il est formé de N conducteurs regroupés en $\frac{N}{2}$ spires, et relié électriquement au bâti par l'intermédiaire de balais frottant sur le collecteur.
- **Le collecteur :** est l'ensemble des entrées/sorties des bobines de l'induit. Ces entrées et sorties sont soudées à la partie arrière de chacune des lames, conformément à un schéma de bobinage.

2. PRINCIPE DE FONCTIONNEMENT

L'inducteur crée le champ magnétique dans lequel baigne l'induit.

- Si un courant traverse les conducteurs de l'induit, ceux-ci seront soumis à des forces de Laplace qui fournissent de l'énergie mécanique et provoquent la rotation du rotor : de l'énergie électrique est transformée en énergie mécanique : **Fonctionnement en moteur.**
- Si l'induit non alimenté tourne, les conducteurs seront le siège de f.é.m. induites et de l'énergie mécanique est transformée en énergie électrique : **Fonctionnement en génératrice.**

EXPERIMENTATION :

- **Mise en service du moteur :**

Le moteur est alimenté au travers d'un variateur de vitesse (figure 8-4) qui délivre deux tensions d'alimentation unidirectionnelles :

- Une tension fixe pour l'inducteur ;
- Une tension variable pour l'induit.

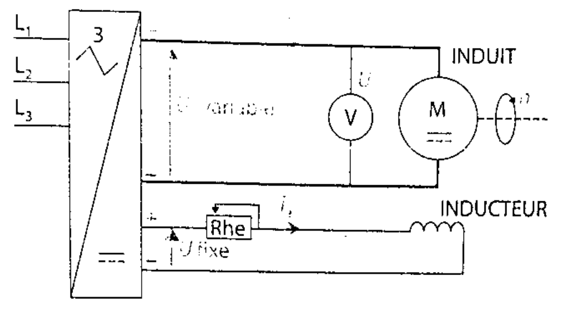


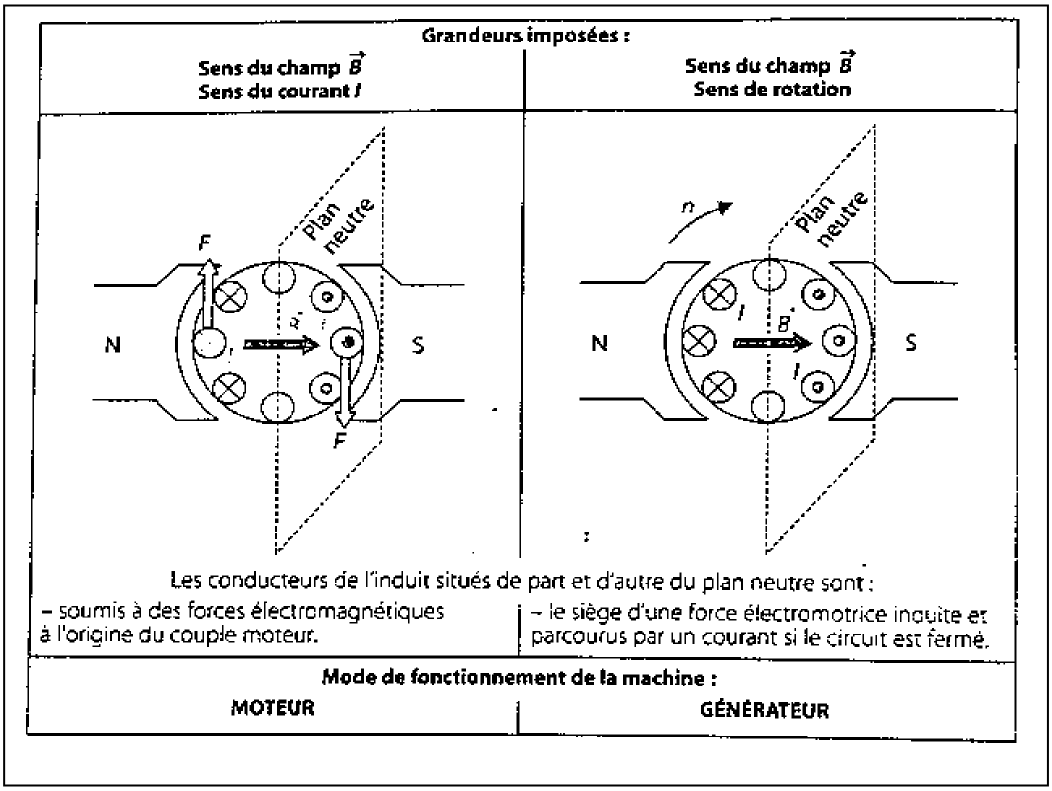
Figure 8-4

- **Existence d'une force électromotrice :**

Le moteur étant en rotation, nous coupons l'alimentation de l'induit tout en maintenant l'inducteur sous tension.

Le voltmètre branché aux bornes de l'induit indique une tension qui décroit au fur et à mesure que la vitesse du moteur diminue.

- **Réversibilité de la machine à courant continu :**



REMARQUES IMPORTANTES :

Les deux phénomènes, **force et induction électromagnétiques**, coexistent en permanence quel que soit le mode de fonctionnement de la machine :

- **Moteur :** existence d'une force électromotrice qui s'oppose à la tension.

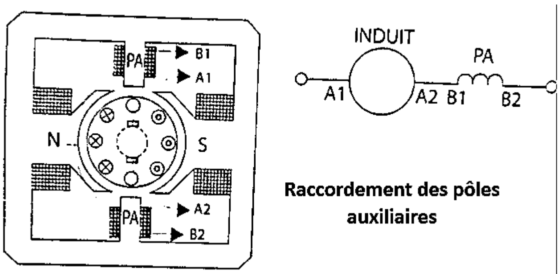
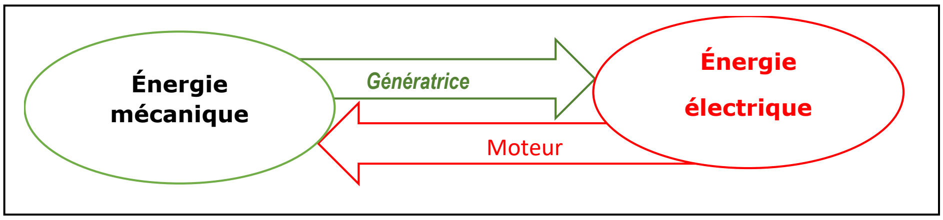


Figure 8-5

- **Générateur :** existence de forces créant un couple résistant.
- **Rôle des pôles auxiliaires :** En fonctionnement moteur ou générateur, le courant dans un conducteur de l'induit s'inverse lors du franchissement du plan neutre : il y a COMMUTATION.

Positionnés sur le plan neutre, les pôles auxiliaires (PA), en série avec l'induit (figure 8-5), limitent les effets néfastes de la commutation (étincelles aux balais).

CONCLUSION : L'énergie mécanique et les f.é.m. induites dépendent du flux coupé par les conducteurs ; ce flux existe dans les deux modes de fonctionnement et la machine à courant continu peut donc fonctionner réversiblement et convertir de l'énergie :



3. EXPRESSION DE LA FORCE ELECTROMOTRICE D'UNE MACHINE BIPOLAIRE

Au cours de la rotation, chacune des spires de l'induit, en coupant le flux inducteur, est le siège d'une force électromotrice alternative rendue unidirectionnelle par l'intermédiaire du collecteur :

$$\boldsymbol{e} = \frac{|\Delta\boldsymbol{\Phi}|}{\boldsymbol{\Delta t}}$$

La valeur moyenne de la f.é.m. créée par l'ensemble des spires est proportionnelle :

- Au nombre N de conducteurs de l'induit ;
- À la fréquence de rotation de l'induit (n) ;
- Au flux sous un pôle (Φ).

$$E = Nn\Phi \begin{cases} n \text{ en tours par seconde } (trs/s) \\ \Phi \text{ en Webers } (Wb) \\ E \text{ en volts } (V) \end{cases}$$

En général, le rotor tournant à la vitesse $\boldsymbol{\Omega = 2\pi n}$, quel que soit le mode de fonctionnement, la f.é.m. qui apparaît entre les balais s'écrit :

$$\boldsymbol{E = K\Phi\Omega} \begin{cases} \Omega \text{ en radians par seconde } (rad/s) \\ \Phi \text{ en Webers } (Wb) \\ E \text{ en volts } (V) \end{cases}$$

K est une constante dépendante de la technologie utilisée pour concevoir la machine.Elle s'exprime en $V.Wb^{-1}.rad^{-1}.s$.

REMARQUES :

- **La f.é.m. E est pratiquement continue** grâce au collecteur et au nombre élevé N de conducteurs.

- **Fonctionnement en génératrice :** E est la f.é.m. de la machine ; fonctionnement en moteur : E est la f.c.é.m. qui s'oppose à la tension d'alimentation.
- **Lorsque le flux Φ est constant** (aimants permanents ou bobines parcourues par un courant d'intensité constante), $K\Phi = k_o = Cte \Rightarrow E = k_o\Omega$: **la f.é.m. est alors proportionnelle à la vitesse de rotation.**

4. VARIATION DE LA FORCE ELECTROMOTRICE

Le fonctionnement en générateur à vide (figure 8-6) permet de mettre en évidence l'influence des paramètres : *fréquence de rotation et courant d'excitation (image du flux)* par le relevé de la caractéristique interne $E = f(i_e)$.

Pour un même courant d'excitation, les f.é.m. sont proportionnelles aux fréquences de rotation :

$$\boldsymbol{\frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}}$$

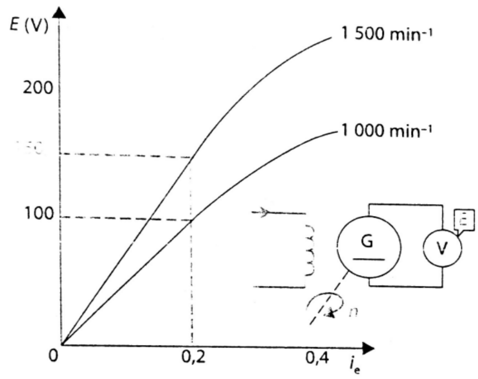
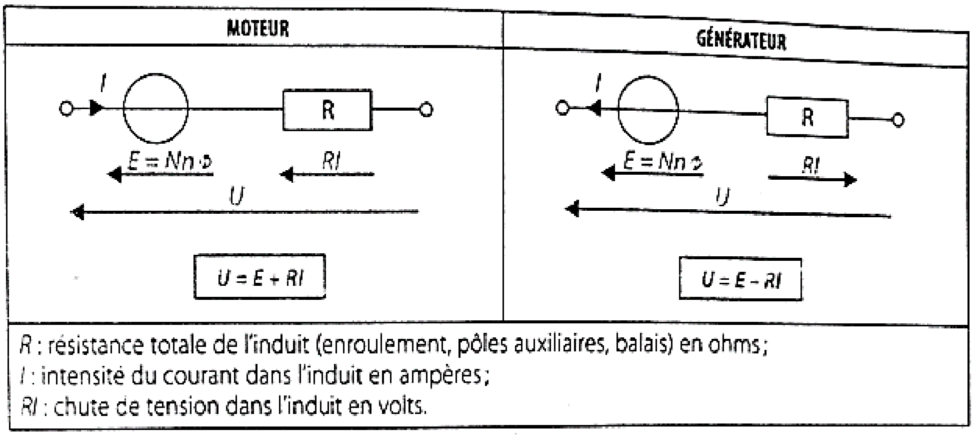


Figure 8-6 : Fonctionnement en générateur
Caractéristique interne $E = f(i_e)$

5. LOIS D'OHM



6. PUISSANCE ET COUPLE ELECTROMAGNETIQUE

La puissance électromagnétique, fournie par la source d'alimentation au moteur et plus précisément à l'induit, est intégralement transformée en puissance mécanique : $EI = T_{em}\Omega$.

a. <u>Puissance électromagnétique symbolisée par $\boldsymbol{P_{em}}$</u>

$$\boldsymbol{P_{em} = EI}\begin{cases} E \text{ en Volts } (V) \\ I \text{ en ampères } (A) \\ P_{em} \text{ en watts } (W) \end{cases}$$

b. Moment du couple électromagnétique symbolisée par T_{em}

$$\boldsymbol{T_{em}} = \frac{\boldsymbol{P_{em}}}{\boldsymbol{\Omega}} \begin{cases} P_{em} \text{ en watts } (W) \\ \Omega \text{ en radians par seconde } (rad.s^{-1}) \\ T_{em} \text{ en newtons} - \text{mètres } (Nm). \end{cases}$$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

Le flux maximum utile sous chaque pôle inducteur d'une machine à courant continu, parfaitement compensée, est $\Phi = 24\, mWb$.

La f.é.m. vaut $E = 200\, V$ lorsque le rotor tourne à $n = 1200\, tr.min^{-1}$.

1. Calculer en $rad.s^{-1}$, la vitesse de rotation Ω.
2. Calculer la constante K de la machine.
3. Le courant dans l'induit valant $I = 10\, A$, Calculer le moment T du couple électromagnétique.
4. Le flux Φ restant constant, quelle est la valeur E'de la f.é.m. lorsque la vitesse de rotation du rotor devient $n' = 1500\, tr.min^{-1}$?
5. Quelle devrait être la valeur Φ' du flux pour que la f.é.m. reste égale à $E = 200\, V$ à la fréquence de rotation $n' = 1500\, tr.min^{-1}$?

Corrigé de l'exercice 1 :

1. Le tachymètre et la dynamo tachymétrique donnent la fréquence de rotation n en $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$. On calcule Ω (1 tour = 2π rad et 1 min = 60 s) :

$$\Omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \times 1\,200}{60} \approx 126 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. De $E = K\Phi\Omega$ on tire :

$$K = \frac{E}{\Phi\Omega} = \frac{200}{0{,}024 \times 126} \approx 66{,}1 \text{ V} \cdot \text{Wb}^{-1} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}.$$

3. $T = K\Phi I = 66{,}1 \times 0{,}024 \times 10 \approx 15{,}9 \text{ N} \cdot \text{m}.$

4. Si le flux Φ reste constant, la f.é.m. $E = K\Phi\Omega$ s'écrit $E = kn$ (avec $k = 2\pi K\Phi = \text{Cte}$), la f.é.m. est alors proportionnelle à la fréquence de rotation.

On écrit la proportion : $k = \dfrac{E}{n} = \dfrac{E'}{n'} \Rightarrow E' = \dfrac{En'}{n} = \dfrac{200 \times 1\,500}{1\,200} = 250 \text{ V}.$

5. La vitesse est la même (Ω') qu'à la question **4.**
On écrit les deux expressions des f.é.m. correspondant aux deux valeurs du flux :

$$E = K\Phi'\Omega' \quad (1) \quad ; \quad E' = K\Phi\Omega' \quad (2)$$

et on divise les égalités membre à membre :

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{E}{E'} = \frac{K\Phi'\Omega'}{K\Phi\Omega'} = \frac{\Phi'}{\Phi} \Rightarrow \Phi' = \frac{E\Phi}{E'} = \frac{200 \times 0{,}024}{250} = 0{,}0192 \text{ Wb}.$$

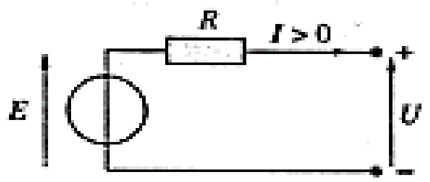
EXERCICE 2 :

Une machine à courant continu, parfaitement compensée, fonctionne en génératrice. L'inducteur est constitué d'aimants permanents. L'induit débite un courant $I = 20\ A$ sous une tension $U = 220\ V$ lorsqu'il tourne à $n = 1500\ tr.min^{-1}$.

1. Représenter le schéma électrique équivalent de l'induit. Préciser la convention utilisée pour orienter le courant et la tension.
2. Calculer la f.é.m. E sachant que la résistance mesurée entre les balais vaut $R = 3{,}2\ \Omega$.
3. Calculer la puissance P absorbée par la machine et le moment T du couple électromagnétique.
4. Calculer la puissance utile de la machine et son rendement.

Corrigé de l'exercice 2 :

L'inducteur, constitué d'aimants permanents, n'est donc pas alimenté et établit un flux Φ constant sous chaque pôle.



1. On utilise la convention générateur (U et I orientés dans le même sens) car la machine est génératrice.

2. La loi des mailles s'écrit : $E - RI - U = 0$; on calcule : $E = U + RI$

$$E = 220 + 3{,}2 \times 20 = 284\ \text{V}.$$

À cause de la chute ohmique RI, la machine fournit une tension U inférieure à sa f.é.m. E.

3. Seul l'induit reçoit la puissance mécanique P fournie par le moteur d'entraînement, qui s'oppose au couple électromagnétique résistant de la génératrice.

$$P = T\Omega = K\Phi I\Omega = EI = 284 \times 20 = 5\,680\ \text{W}.$$

$$T = \frac{P}{\Omega} = \frac{P}{2\pi n} = \frac{5\,680 \times 60}{2\pi \times 1\,500} \approx 36{,}2\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

4. La puissance utile de la génératrice est la puissance électrique qu'elle fournit à la charge : $P_u = UI = 220 \times 20 = 4\,400\ \text{W}$.

Son rendement vaut : $\eta = \dfrac{P_u}{P_a} = \dfrac{P_u}{P} = \dfrac{4\,400}{5\,680} = 77\ \%$.

EXERCICE 3 :

La machine de l'exercice 2 fonctionne maintenant en moteur.

1. Représenter le schéma électrique équivalent de l'induit. Préciser la convention utilisée pour orienter le courant et la tension.

2. Le rotor tourne à $n' = 1200\ tr.min^{-1}$.Quelle est sa f.é.m. E' ?

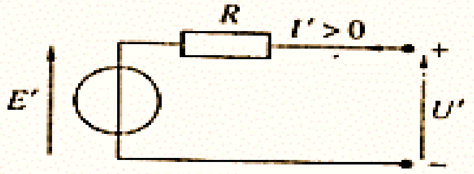
3. En déduire la tension d'alimentation U' de l'induit traversé par un courant d'intensité $I' = 12A$.

4. Calculer le moment T' du couple électromagnétique.

5. Calculer la valeur des pertes par effet Joule et la puissance absorbée par la machine.

Corrigé de l'exercice 3 :

1. On utilise la convention récepteur (U' et I' orientés en sens inverse) car la machine fonctionne en moteur.



2. Le flux étant constant (aimants permanents), la f.é.m. E est proportionnelle à la fréquence de rotation n (*cf. exercice 5.1*) : $E = kn$. On écrit la proportion : $k = \frac{E}{n} = \frac{E'}{n'}$

$$\Rightarrow E' = \frac{En'}{n} = \frac{284 \times 1\,200}{1\,500} \approx 227\ \text{V}.$$

3. La loi des mailles s'écrit maintenant : $E' + RI' - U' = 0$;
on en déduit : $U' = E' + RI' = 227 + 3{,}2 \times 12 = 265\ \text{V}$;
pour que le moteur puisse tourner, il faut lui appliquer une tension U' supérieure à sa f.é.m. E' (qui est ici une f.c.é.m.).

4. T' est le moment du couple moteur.

$$T' = \frac{P'}{\Omega'} \quad \text{avec} \quad P' = E'I' \quad (\text{voir } \textit{exercice 5.2})$$

$$T' = \frac{E'I'}{2\pi n'} = \frac{227 \times 12 \times 60}{2\pi \times 1\,200} = 21{,}7\ \text{N}\cdot\text{m}.$$

5. Seul l'induit, de résistance R, est traversé par le courant I' et absorbe de la puissance électrique.

$$P_J = RI'^2 = 3{,}2 \times 12^2 = 461\ \text{W} \ ; \quad P_a = U'I' = 265 \times 12 = 3\,180\ \text{W}.$$

EXERCICE 4 :

Le conducteur de la figure 1, parcouru par un courant d'intensité $I = 20\ A$ et placé dans un champ uniforme d'intensité $B = 80\ mT$, se déplace sur les deux rails distants l'un de l'autre de $d = 12\ cm$. Quel est le module du vecteur force ?

a) $F = 19{,}2\ N$; b) $F = 0{,}16\ N$; c) $F = 0{,}192\ N$; d) $F = 240\ N$.

EXERCICE 5 :

L'induit d'un moteur à courant continu comporte 680 conducteurs et tourne à une fréquence de rotation de 1270 tours par minute. Quelle est la f.é.m. du moteur sachant que le flux sous un pôle est de 15 m Wb ?

EXERCICE 6 :

A partir de la figure 7 déterminer, pour le même courant d'excitation (0,2 A) et pour une fréquence de rotation de 850 $trs.min^{-1}$, la f.é.m. de la machine.

EXERCICE 7 :

L'induit d'un moteur à courant continu est alimenté sous une tension de 430 V et absorbe un courant d'intensité $21{,}5\ A$. Sa résistance mesurée à chaud est de $2{,}78\ \Omega$. Quelle est la f.é.m. du moteur ?

EXERCICE 8 :

Un moteur à courant continu a une f.é.m. de $415\ V$pour une fréquence de rotation de $2440\ trs.min^{-1}$. Quelle sera, à excitation constante et pour une fréquence de rotation de $2000\ trs.min^{-1}$, la nouvelle valeur de la force électromotrice ?

EXERCICE 9 :

Un moteur à courant continu, alimenté sous une tension de $500\ V$, absorbe un courant d'intensité $830\ A$. La résistance de l'induit est de $33\ m\Omega$ et sa fréquence de rotation est égale à $1020\ trs.min^{-1}$.

Calculer :

1. La puissance électromagnétique ;
2. Le moment du couple électromagnétique correspondant.

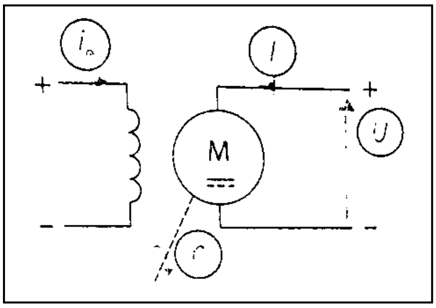
III. MOTEURS A COURANT CONTINU - REGLAGE DE LA VITESSE ET RENDEMENT

1. MOTEURS A EXCITATION SEPAREE

a. Généralités

i. Introduction

Le moteur à courant continu admet quatre (04) variables d'exploitation (ce sont les quatre grandeurs qu'un opérateur, ou un automate, peut régler afin de fixer, ou modifier, l'état de fonctionnement du moteur) :



U	Tension aux bornes de l'induit
I	Intensité du courant dans l'induit
i_e	Intensité du courant d'excitation
n	Fréquence de rotation

Il suffit de donner une valeur à trois paramètres, par exemple i_e, U et I, pour que la machine fixe elle-même la valeur du quatrième, soit n. ***L'état de fonctionnement du moteur (état stable) est fonction de trois variables indépendantes.***

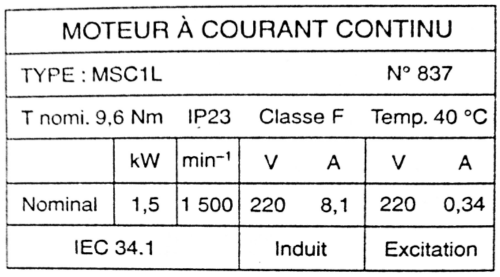
L'étude d'un moteur va nous conduire à relever et à exploiter des caractéristiques : Une caractéristique est une relation graphique entre deux variables dont les mesurages ont été effectués, les deux autres paramètres étant maintenus constants

Exemple : $n = f(U)$ à i_e, et I constantes.

ii. Plaque signalétique

Le constructeur précise, entre autres caractéristiques, les valeurs nominales des grandeurs électriques et mécaniques.

La puissance indiquée est toujours la puissance mécanique recueillie sur l'arbre (Puissance utile)



MOTEUR À COURANT CONTINU						
TYPE : MSC1L				N° 837		
T nomi. 9,6 Nm	IP23		Classe F		Temp. 40 °C	
	kW	min⁻¹	V	A	V	A
Nominal	1,5	1 500	220	8,1	220	0,34
IEC 34.1			Induit		Excitation	

Figure 8-7

iii. Expérimentation

- **Schéma de montage :**

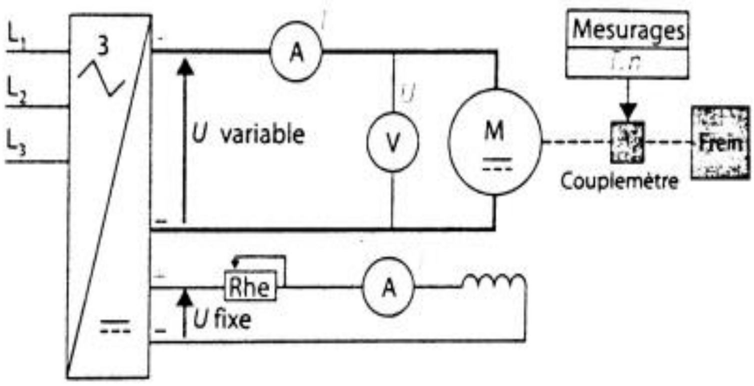


Figure 8-8

- **Tableau des résultats :**

Excitation $r_e = 638\,\Omega$		***Induit*** $R = 3,12\,\Omega$					
$\mathbf{U_e}$ **(V)**	$\mathbf{i_e}$ **(A)**	**U(V)**	**I(A)**	Charge	$\mathbf{n(trs.min^{-1})}$	T(Nm)	$\mathbf{P_u}$ **(kW)**
204	0,32	220	**0,40**	0	1650	0	0
204	0,32	220	**2,20**	1/4	1647	1,43	0,247
204	0,32	220	**4,09**	1/2	1585	4,15	0,689
204	0,32	220	**6,08**	3/4	1537	6,83	1,10
204	0,32	220	**8,10**	4/4	1500	9,70	1,52
204	0,32	220	**10,40**	5/4	1450	12,70	1,93

(Confer la caractéristique n= f(I) : figure 8-9)

b. Les conditions à remplir au démarrage

Le circuit d'excitation étant alimenté, deux conditions sont nécessaires :

- L'intensité du courant dans l'induit ne doit pas dépasser les limites fixées par le constructeur (Par exemple 1,8 I_N) ;
- Le moment du couple moteur doit être supérieur au moment du couple résistant.

i. Intensité du courant dans l'induit :

De la loi d'Ohm : $U = E + RI$, on déduit : $\boldsymbol{I = \frac{U-E}{R}}$

DEMARRAGE DIRECT :

Au démarrage, on a : $n = 0 \Rightarrow E = 0$. L'intensité du courant de démarrage I_{dd} est limitée par la résistance R de l'induit : $I_d = \frac{U}{R}$.

Pour le moteur de l'expérience on a $I_d = \frac{220}{3,12} = 70,5\ A$! ***Cette valeur représentant environ 9 fois l'intensité nominale. Elle est donc inacceptable.***

LIMITATION DU COURANT :

Le démarrage est géré par le variateur qui comporte une rampe, généralement réglable, limitant l'intensité au démarrage (I_d) à environ 1,5 $fois$ l'intensité nominale. En l'absence de variateur, le courant sera limité par un rhéostat de démarrage.

c. Fréquence de rotation

À partir des expressions de la force électromagnétique : $E = U - RI$ et $E = Nn\Phi$ ou $E = K\Phi\Omega$, on tire la relation de la fréquence de rotation :

$$\boldsymbol{n = \frac{E}{N\Phi} = \frac{U-RI}{N\Phi}} \begin{cases} E \text{ et } U \text{ en volts } (V) \\ R \text{ en Ohm } (\Omega) \\ \Phi \text{ en Webrs } (Wb) \\ n \text{ en tours par seconde } (s^{-1}). \end{cases}$$

i. Réglage de la fréquence de rotation :

La fréquence de rotation est proportionnelle à la f.é.m. et inversement proportionnel au flux, donc au courant d'excitation, d'où les deux paramètres de réglage :

Tension aux bornes de l'induit	**Courant d'excitation**
$U \uparrow \quad \Rightarrow \quad n \uparrow$	$i_e \downarrow \quad \Rightarrow \quad n \uparrow$
$U \downarrow \quad \Rightarrow \quad n \downarrow$	$i_e \uparrow \quad \Rightarrow \quad n \downarrow$
à i_e *constante*	à U *constante*

INVERSEMENT DU SENS DE ROTATION :

Elle s'effectue en inversant les polarités du circuit d'excitation, **moteur hors tension et arrêté.**

Consigne de securite :

En cas de coupure du circuit d'excitation, l'induit étant sous tension, le flux est réduit au rémanent (presque nul).

Cette cause entraîne une brutale accélération du moteur et une vitesse dépassant les limites admissibles (emballement du moteur), d'où la règle suivante :

ALIMENTER LE CIRCUIT D'EXCITATION AVANT DE METTRE L'INDUIT SOUS TENSION.

METTRE HORS TENSION L'INDUIT AVANT LA COUPURE DE L'EXCITATION.

Fonctionnement a tension d'induit et courant d'excitation constants :

La caractéristique $n = f(I)$, de la figure 8-9, montre que la fréquence de rotation varie peu avec la charge (inférieure à 10 % au point nominal).

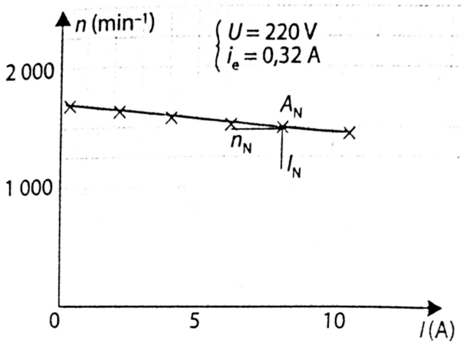


Figure 8-9 : Caractéristique de la vitesse $n = f(I)$

d. Couple électromagnétique et couple utile

i. Moment du couple électromagnétique :

Le couple électromagnétique a pour expression :

$T_{em} = \frac{P_{em}}{\Omega} = \frac{EI}{2\pi n}$; or $E = Nn\Phi$, donc : $T_{em} = \frac{Nn\Phi I,}{2\pi n} = \frac{N\Phi I}{2\pi}$

La constante de la machine a donc pour expression : $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{N\Phi}}{\boldsymbol{2\pi}}$.

On en déduit : $\boldsymbol{T_{em} = kI}$

Conclusion : Pour un fonctionnement à courant d'excitation constant (flux constant), le moment du couple électromagnétique est proportionnel à l'intensité du courant dans l'induit.

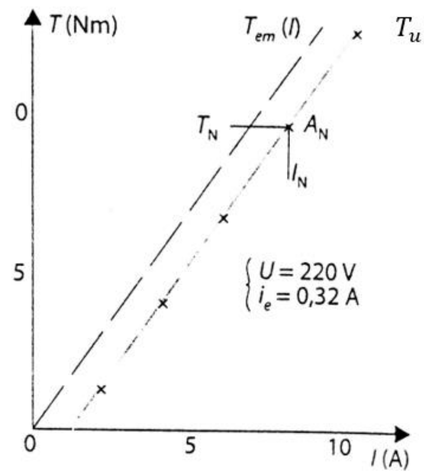


Figure 8-10 : Caractéristique de couple $T = f(I)$

COUPLE UTILE ET CARACTERISTIQUE MECANIQUE $T_u(n)$:

Si les pertes mécaniques (frottements, ventilation) sont négligées, devant la puissance nominale, alors le couple utile est assimilable au couple électromagnétique : $\boldsymbol{T_u \approx T_{em}}$.

$T_u = f(n)$ est pratiquement parallèle à l'axe des couples (Figure 8-11)

e. Couple électromagnétique et couple utile

Hypothèse : La chute de tension dans l'induit (RI) est compensée par le variateur, quelque soit $I, on\ a$:

$E \approx U \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{n = \frac{U}{N\Phi}}$.

À excitation constante, la fréquence de rotation est proportionnelle à la tension aux bornes de l'induit.

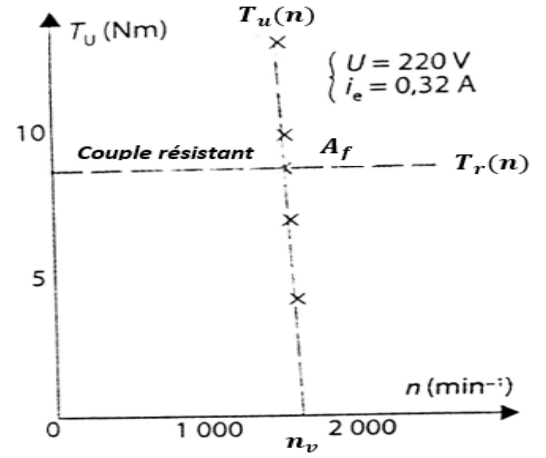


Figure 8-11 : Caractéristique mécanique $T_u = f(n)$

f. Point de fonctionnement du moteur :

C'est le point (A_f) où les moments des couples moteur et résistant sont égaux (Pour un régime de fonctionnement stable du moteur : $i_e, n, U\ et\ I\ constantes$)(Figure 8-11).

$$\boldsymbol{T_u = T_r}$$

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 10 :

Quelle est la f.é.m. d'un moteur à excitation séparée dont l'induit, alimenté sous une tension de 420 V, absorbe un courant d'intensité égale à 35,5 A ? (Choisir la bonne réponse en la justifiant)

Résistance de l'induit : R= 1,79 *Ω*.

a) E= 484 V ; b) E= 635 V ; c) E= 356 V ; d) E= 418 V.

EXERCICE 11 :

A partir de la plaque signalétique de la figure 8-7, quelle doit être la résistance du rhéostat qui permet de régler à 0,3 A l'intensité du courant d'excitation ? (Choisir la bonne réponse en la justifiant)

Résistance de l'inducteur est : re = 638 *Ω*.

a) Rh= 733 *Ω* ; b) Rh= 572 *Ω* ; c) Rh= 3140 *Ω* ; d) Rh= 95,3 *Ω*.

EXERCICE 12 :

Un moteur à courant continu, à excitation indépendante et constante, a pour résistance d'induit $R = 0{,}8\ \Omega$.

Il est alimenté sous la tension nominale $U = 130\ V$ également maintenue constante ;

- À vide, l'induit absorbe le courant $I_0 = 1{,}2\ A$;
- En charge, lorsque le courant I est de 20 A, la fréquence de rotation vaut 1200 tr/min (fonctionnement nominal)

1. La pointe de courant acceptée au démarrage étant égale à 2, calculer la valeur de la résistance R_d à mettre en série avec l'induit.
2. Déterminer, pour le fonctionnement en charge :
   a) La f.é.m. E ;
   b) Le couple électromagnétique T_{em} ;
   c) Le couple de pertes T_p (que l'on supposera constant quel que soit n) ;
   d) La puissance utile P_u.
3. Calculer la fréquence de rotation :
   a) À vide ;
   b) Lorsque le couple résistant vaut 10 Nm.

Solution de l'EXERCICE 12 :

1. Au démarrage on a : $n = 0 \Rightarrow E = 0$; le modèle du moteur se réduit à une résistance.

La loi d'ohm permet d'écrire : $R + R_d = \frac{U}{I_d} \Rightarrow R_d = 2{,}45\ \Omega$.

2. 1. Lorsque l'induit tourne, l'expression de la f.é.m. est : $E = U - RI \Rightarrow E = 0$; $E = 114\ V$

2.2. L'expression du couple électromagnétique est :

$T_{em} = \frac{EI}{2\pi n} \Rightarrow T_{em} = \frac{114\times 20\times 60}{2\pi\times 120} \Rightarrow T_{em} = 18{,}1\ Nm$.

2.3. À vide, les pertes autres que par effet Joule ont pour valeur :

$P = UI_0 - RI_0^2 \Rightarrow P = 130 \times 1{,}2 - 0{,}8 \times 1{,}2^2 = 155\ W$.

On en déduit le couple de pertes : $T_p = \frac{P}{2\pi n} \Rightarrow T_p = \frac{155}{2\pi(1200/60} = 1{,}2\ N$. $T_p = 1{,}2\ Nm$

2.4. Le couple utile, en fonctionnement nominal, vaut alors : $T_u = T - T_p \Rightarrow T_u = 18{,}1 - 1{,}2 = 16{,}9\ Nm$.

Et la puissance utile s'écrit : $P_u = 2\pi T_u \Rightarrow P_u = 2\pi \frac{1200}{60} \times 16{,}9 \approx 2125\ W$. $P_u = 2125\ W$.

3 3.1. À vide la f.é.m. a pour valeur : $E_0 = U - RI_0 \Rightarrow E_0 = 130 - 0{,}8 \times 1{,}2 = 129\ V$.

(On constate que $E_0 \approx U$*).*

3.2. Le couple résistant vaut maintenant 10 Nm. On en déduit le couple électromagnétique :

$T = T_u + T_p \Rightarrow T = 10 + 1{,}2 = 11{,}2\ N.m$.

L'expression : $T_{em} = k\Phi I$ *montre qu'à flux constant, le couple électromagnétique est proportionnel au courant* I *dans l'induit. On peut alors calculer le courant :* $\frac{I}{11{,}2} = \frac{20}{18{,}1} \Rightarrow I = 12{,}4\ A$.

On en déduit la nouvelle f.é.m. : $E = U - RI \Rightarrow E = 130 - 0{,}8 \times 12{,}4 = 120\ V$.

La fréquence de rotation est telle que : $\frac{n}{120} = \frac{1200}{114} \Rightarrow n = 12{,}63\ tr/min$

2. BILAN DES PUISSANCES DU MOTEUR

a. Les différend modes d’excitation des moteurs à courant continu:

- **Introduction :**

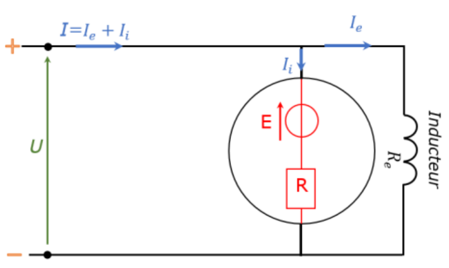
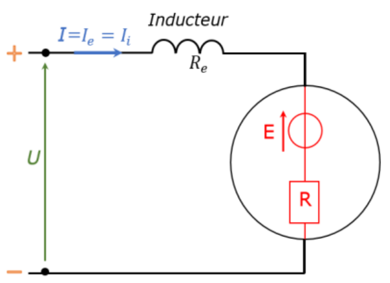
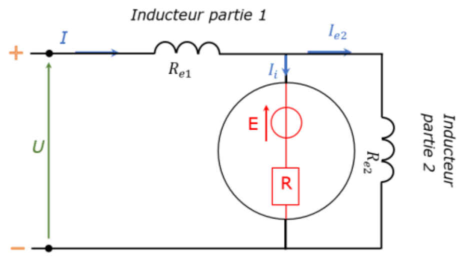
Le mode d’excitation peut modifier considérablement les caractéristiques mécaniques d’un moteur à courant continu ; ces caractéristiques seront exploitées pour des applications particulières.

- **Les moteurs autoexcités :**

Le moteur à excitation séparée nécessite pour fonctionner deux alimentations à courant continu indépendantes.

Il est toutefois possible, pour des moteurs fonctionnant à tension constante, d’utiliser une source unique qui alimentera l’induit et l’inducteur.

Les désignations de ces moteurs en fonction du mode de raccordement de l’inducteur par rapport à l’induit (dérivation, série ou composée) sont :

<table>
<tr><td>Moteur à excitation dérivation</td><td>Moteur à excitation série</td><td>Moteur à excitation composée</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">NB : un moteur à excitation dérivation peut toujours fonctionner en excitation séparée.
Le schéma équivalent de l’induit est en rouge (E, R).</td></tr>
</table>

b. Bilan des puissances d’un moteur à excitation séparée :

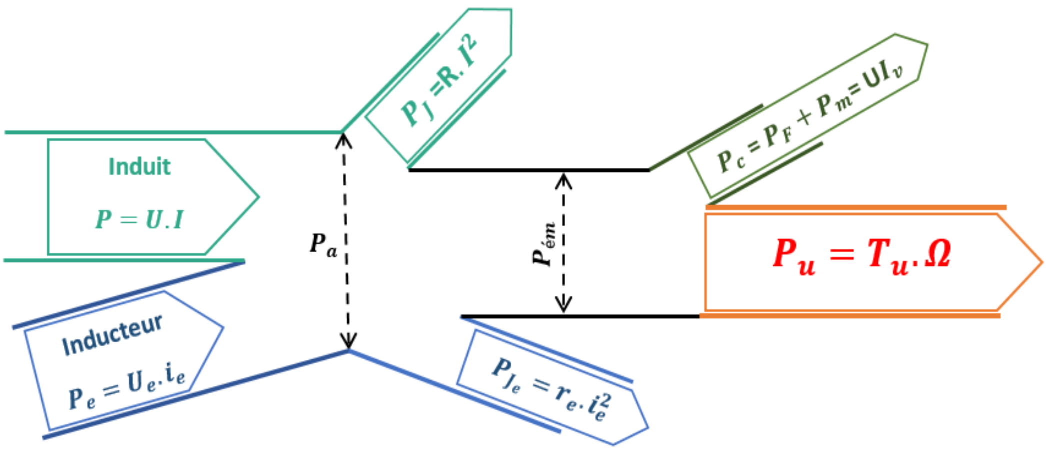


Figure 8-13 : Arbre (Bilan) des puissances du moteur à excitation séparée

- **Puissance absorbée (P_a)** est la somme des puissances absorbées par l'induit et l'inducteur :

Induit	Inducteur	Total
UI	$U_e I_e$	$P_a = UI + U_e I_e$

- **La Puissance utile (P_u)** se calcule directement si le moment du couple est mesurable. Si ce n'est pas le cas, il sera nécessaire d'appliquer la méthode des pertes séparées pour quantifier la puissance perdue :

Calcul direct	Calcul indirect
$P_u = T_u\,\Omega$	$P_u = P_a - \sum Pertes$

- **La Puissance perdue** est la somme des puissances perdues par effet Joule et des pertes collectives :

Pertes par effet Joule		Pertes collectives
Induit	**Inducteur**	**Pertes fer + Pertes mécaniques**
$P_J = RI^2$	$P_{J_e} = r_e i_e^2$	$P_c = P_v = UI_v$

QUESTION : Comment effectuer le mesurage des pertes collectives ?

Ces pertes sont indépendantes de la charge, donc du courant absorbé. Elles ne dépendent que de la fréquence de rotation et du flux. Elles sont données par la mesure de la puissance absorbée par le moteur fonctionnant à vide :

$$\boldsymbol{P_c = UI_v}$$

La force électromotrice ainsi que la fréquence de rotation devront toutefois être indiquées aux valeurs qu'elles avaient en charge.

REMARQUE : Lorsque les pertes collectives sont négligeables, la puissance utile est égale à la puissance électromagnétique ($P_{ém}$).

CALCUL DU RENDEMENT : (méthode des pertes séparées)

$$\boldsymbol{\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_a - \Sigma Pertes}{P_a}}$$

3. MOTEUR À EXCITATION SÉRIE

L'inducteur est en série avec l'induit. Le courant absorbé par l'induit est aussi le courant d'excitation.

a. Loi d'Ohm

$$\boldsymbol{U = E + (R_e + R)I} \quad \begin{cases} \boldsymbol{R} : résistance\ de\ l'induit \\ \boldsymbol{R_e} : résistance\ de\ l'inducteur \\ (\boldsymbol{R_e + R})\boldsymbol{I} : chute\ de\ tension\ totale \end{cases}$$

b. Fréquence de rotation

$$n = \frac{E}{N\Phi} \quad \text{avec } \Phi = K'I$$

- Le flux magnétique étant proportionnel au courant absorbé (machine non saturée), la fréquence de rotation suivra les variations de la charge.
- À vide, le courant est très inférieur au courant nominal, ce qui entraîne une insuffisance du flux et donc une vitesse excessive du moteur. Le moteur série s'emballe.

MISE EN GARDE : Ne jamais alimenter sous la tension nominale un moteur série quand celui-ci est désaccouplé de la charge.

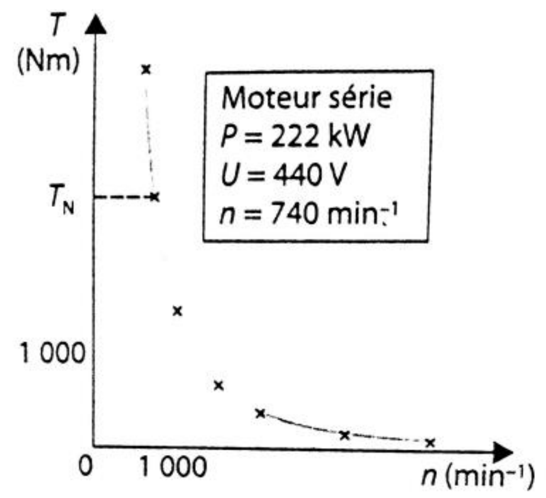


Figure 8-13 : Caractéristique mécanique T = f(n) d'un moteur série.

c. Moment du couple moteur

Par définition : $T = \frac{Nn\Phi I,}{2\pi n} = \frac{N\Phi I}{2\pi}$;

Ainsi, en posant $k = \frac{N}{2\pi}$, on obtient : $T = k\Phi I$

Or, pour un moteur série, le flux est également proportionnel au courant : $\Phi = K'I$. Donc $T = kk'I^2$;

En posant $K = kk'$, on a :

$$\boldsymbol{T = KI^2}$$

d. Caractéristique mécanique t = f(n) relevé à tension constante

(Voir figure 8 – 13) :

e. Application

Le moteur à excitation série est présent dans tous les véhicules à essence, car il entraîne de fortes charges à faible vitesse : **c'est le démarreur.**

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 13 : Véhicule électrique

Un moteur à courant continu excité en série, alimenté sous 440 V, entraîne un véhicule de 10 tonnes ; son rendement est de 0, 80 tandis que celui de la transmission est égal à 0,90.

1. En palier, la vitesse du véhicule est de 36 km/h ; on admet que la résistance passive au roulement représente 3 % du poids du véhicule.

a) Calculer le courant absorbé par le moteur.

b) On a relevé la caractéristique à vide de ce moteur à 500 tr/min :

I(A)	25	50	100	150	200
E(V)	108	202	326	383	418

Sachant que la résistance de l'induit et celle de l'inducteur valent respectivement : 0,08 Ω et 0,02 Ω, calculer la fréquence de rotation du moteur lorsque le véhicule est en palier.

2. Le véhicule aborde une rampe : On constate alors que l'intensité du courant absorbé double. Calculer la nouvelle vitesse du véhicule.

EXERCICE 14 : Démarreur d'une voiture

Le démarreur d'une voiture est un moteur à courant continu en excitation série ; il est alimenté par une batterie de f.é.m. 13,9 V et de résistance 0,02 Ω.

En fonctionnement normal, il :

- Tourne à la fréquence de 1800 tr/min,
- Est parcouru par le courant $I = 180\ A$.
- Au décollage, le courant appelé est de 300 A.

1. Calculer en fonctionnement normal :

a- La tension appliquée aux bornes du démarreur.

b- le couple électromagnétique qu'il fournit.

2. En déduire le couple au décollage si le moteur est supposé non saturé.

Réponses EXERCICE 14 :

1.a-) $U = 10{,}3\ V$; 1.b-) $T_{em} = 5{,}3\ N.m$; 2.) $T_d = 14{,}7\ N.m$

EXERCICE 15 : Moteur série

Un moteur série est tel que : $U_n = 220\ V$; $I_n = 10\ A$; $R_i = 1{,}5\ \Omega\ (inducteur)$; $R = 2\ \Omega\ (induit)$.

Sa caractéristique à vide $E(J)$ a été relevée en laboratoire à 1500 tr/min :

J(A)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E(V)	0	50	100	152	200	220	235	240	246	248	250

1. Sachant qu'en régime nominal le couple utile vaut $T_u = 14{,}6\ N.m$, calculer les valeurs nominales :

a- de la fréquence de rotation, b- du couple électromagnétique, c- couple de pertes.

2. Au démarrage, sous la tension nominale, on tolère une pointe de courant égale à 2. Déterminer la résistance du rhéostat R_d à utiliser ; préciser son montage.

3. En régime permanent, sous 220 V et avec le rhéostat R_d, le moteur absorbe le courant $I = 7\ A$. Calculer :

a- la fréquence de rotation ; b- le couple utile .

4. Pour augmenter la fréquence de rotation, on élimine R_d et on connecte en dérivation sur l'enroulement inducteur, un dispositif électronique qui se comporte comme une résistance de 1,5 Ω. L'ensemble étant toujours alimenté sous 220 V, le courant absorbé par l'induit vaut désormais 12 A. Calculer les nouvelles valeurs :

a- de la f.é.m. ; b- de la fréquence de rotation ; c- du couple utile.

N.B : Dans tout le problème, on supposera que le couple de pertes reste sensiblement constant.

Réponses EXERCICE 15 :

1.a-) $n = 1110\ tr/min$; 1.b-) $T_{em} = 15{,}9\ N.m$; 1.c-) $T_p = 1{,}3\ N.m$

2.) $R_d = 7{,}5\ \Omega$ ($en\ série\ avec\ le\ moteur$);

3.a) $n = 895\ tr/min$; 3b.) $T_u = 9{,}4\ N.m$;

4.a) $E = 187\ V$; 4.b) $n = 1194\ tr/min$; 4.c .) $T_u \approx 16{,}6\ N.m.$

Chimie

Chapitre 1. LES ACIDES ET LES BASES EN SOLUTIONS AQUEUSES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce cours, je dois être capable de :

- Définir : solution aqueuse, concentrations d'une solution aqueuse, un indicateur coloré.
- Classer les espèces contenues dans une solution en espèces minoritaires et ultra-minoritaires ;
- Définir le pH d'une solution aqueuse ;
- Ecrire la réaction d'autoprotolyse de l'eau et le produit ionique de l'eau ;
- Classer les solutions aqueuses selon leur pH.

I. LES CONCENTRATIONS D'UNE SOLUTION AQUEUSE

- **Une solution aqueuse** est un mélange homogène obtenu en dissolvant un soluté (solide, liquide ou gazeux) dans l'eau.
- On appelle **concentration molaire** ou **molarité** d'une solution aqueuse la quantité (en moles) ou le nombre de moles de soluté dissout dans un litre de solution.

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{V}} \begin{cases} \mathrm{C}: \text{concentration molaire en mol/L} \\ \mathrm{n}: \text{quantité de matière en mol} \\ \mathrm{V}: \text{volume en L} \end{cases}$$

REMARQUE :

- Une solution molaire est une solution dont la concentration est de 1mol/L.
- Une solution décimolaire est une solution dont la concentration est de 0,1mol/L.
- Une solution centimolaire est une solution dont la concentration est de 10^{-2}mol/L.

- On appelle **concentration massique** ou **titre massique** d'une solution aqueuse la quantité (en grammes) ou la masse de soluté dissout dans un litre de solution.

$$Cm = \frac{m}{V} \begin{cases} C_m: concentration\ massique\ en\ g/L \\ m: masse\ en\ g \\ V: Volume\ en\ L \end{cases}$$

- Relation entre la concentration molaire C et la concentration massique C_m

$$C = \frac{C_m}{M} \Leftrightarrow C_m = M.C \quad (M: masse\ molaire\ du\ soluté\ en\ g/mol)$$

II. LA CONCENTRATION D'UNE ESPECE CHIMIQUE DANS UNE SOLUTION AQUEUSE

La concentration C_A ou [A] d'une espèce chimique A dans une solution est la quantité (en moles) de cette espèce dissoute dans un litre de solution.

$$[A] = \frac{n_A}{V} \Leftrightarrow n_A = [A].V$$

III. LA DILUTION D'UNE SOLUTION AQUEUSE

- **La dilution** est l'opération qui consiste à diminuer la concentration d'une solution aqueuse. Soit une solution aqueuse S_i (solution mère) de concentration molaire C_i et de volume V_i. On ajoute progressivement un volume V_e d'eau distillée jusqu'à obtention d'une solution S_f de concentration C_f et volume V_f tel que $V_f = V_i + V_e$.

$$n_f = n_i \Leftrightarrow C_f.V_f = C_i.V_i \text{ d'où } \mathbf{C_f = C_i.\frac{V_i}{V_f} = \frac{C_iV_i}{V_i + V_e}}$$

- Le paramètre $n = \frac{C_i}{C_f} = \frac{V_f}{V_i}$ est appelé **facteur de dilution.**

MODE OPERATOIRE : A l'aide d'une pipette, on prélève Vi de la solution mère qu'on introduit dans une fiole jaugée de capacité V_f ; puis on complète avec de l'eau distillée jusqu'au trait de jauge.

NOTION D'IMPURETE D'UN SOLUTE :

On considère une solution de volume V, de masse volumique ρ et dont le pourcentage de corps pur est P (en %). Par définition :

- La masse du corps pur est : $m_p = m.P = \rho.V.P$
- La concentration massique vaut : $C_m = \frac{m_p}{V} = \frac{\rho\,.\,V\,.\,P}{V} = \rho.P$
- La concentration molaire vaut donc : $C = \frac{C_m}{M} = \frac{\rho\,.\,P}{M}$

IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS AQUEUSES

1. EQUATION DE DISSOLUTION D'UN SOLUTE DANS L'EAU

La dissolution d'un soluté dans l'eau s'accompagne de son ionisation.

- **ELLE PEUT ETRE TOTALE :**

EXEMPLES :

$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$ $\qquad$ $NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$

$AgCl \rightarrow Ag^+ + Cl^-$ $\qquad$ $HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$

- **ELLE PEUT AUSSI ETRE PARTIELLE :**

EXEMPLES :

$CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$

$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4^+ + OH^-$

$R-NH_2 + H_2O \rightleftarrows R-NH_3^+ + OH^-$

2. ELECTRONEUTRALITÉ D'UNE SOLUTION AQUEUSE

Une solution aqueuse étant électriquement neutre, le nombre de charges positives contenues dans la solution doit être égal au nombre de charges négatives. En d'autres termes, on a :

$$\sum_i \mathbf{q_i^{(-)}[anion]} = \sum_i \mathbf{q_i^{(+)}[cation]}$$

EXEMPLE : Soit une solution aqueuse obtenue en dissolvant du sulfate de sodium Na_2SO_4 et de l'hydroxyde d'aluminium Al $(OH)_3$.

- Les équations des réactions de dissolution sont :

$Na_2SO_4 \rightarrow 2Na^+ + SO_4^{2-}$ $\qquad$ $Al(OH)_3 \rightarrow Al^{3+} + OH^-$

- Les espèces chimiques présentes dans la solution sont : $H_3O^+, OH^-, Na^+, Al^{3+}, SO_4^{2-}$.
- L'équation d'électroneutralité de cette solution aqueuse (REN) s'écrit sous la forme :

$$[H_3O^+] + [Na^+] + 3[Al^{3+}] = [OH^-] + 2[SO_4^{2-}]$$

V. LA RELATION DE CONSERVATION DE LA MATIERE

Le nombre de moles de l'espèce X introduite dans la solution aqueuse est égale à la somme du nombre de moles de X ionisé et du nombre de mole X non ionisé (restant). En d'autres termes, on a :

$$X + H_2O \rightleftarrows X_{ionisé} + X_{restant}$$

La relation de conservation de la matière (RCM) s'écrit sous la forme :

$$n_{Xintroduit} = n_{Xionisé} + n_{Xrestant}$$

Exemple : Soit une solution d'acide éthanoïque de concentration c_a et de volume V_a.

- Equation de dissolution :

$$CH_3COOH + H_2O \rightleftarrows CH_3COO^- + H_3O^+$$
$$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

- Les espèces chimiques présentes dans la solution sont :
  - Ions : H_3O^+, OH^-, CH_3COO^-;
  - Molécules : H_2O; CH_3COOH.

- L'équation d'électroneutralité de cette solution aqueuse (REN) s'écrit :

$$[CH_3COO^-] + [OH^-] = [H_3O^+] \Rightarrow [CH_3COO^-] = [H_3O^+] - [OH^-]$$

- La relation de conservation de la matière (RCM) s'écrit sous la forme :

$$n_{CH_3COOH_{introduit}} = n_{CH_3COOH_{ionisé}} + n_{CH_3COOH_{restant}}$$

$$c_aV_a = n_{CH_3COO^-} + n_{CH_3COOH} \Leftrightarrow c_aV_a = [CH_3COOH]\cdot V_a + [CH_3COO^-]\cdot V_a$$

D'où : $$c_a = [CH_3COOH] + [CH_3COO^-]$$

VI. LA CLASSIFICATION DES ESPECES CHIMIQUES EN SOLUTIONS AQUEUSES

Les différentes espèces chimiques présentes dans une même solution aqueuse ont des concentrations parfois très différentes, ce qui nous amène à les classer en espèces minoritaires, ultra minoritaires et majoritaires.

Par définition :

- Une espèce A est **minoritaire** devant une espèce B si : $\frac{[A]}{[B]} < 10^{-2} \Leftrightarrow [B] > 100[A]$.
- Une espèce A est **ultra minoritaire** devant une espèce B si : $\frac{[A]}{[B]} < 10^{-4} \Leftrightarrow [B] > 10^4[A]$.
  - Dans les deux cas précédents, l'espèce B est dite **majoritaire**.

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

Sur l'étiquette d'une bouteille commerciale d'ammoniac, on peut lire :

- Masse molaire : 17 g/mol
- Masse volumique : 450 kg/m^3
- Pourcentage massique : 33 %

1- Quel volume V faut-il prélever pour préparer 500 mL d'une solution S de concentration C = 0,10 mol. L^{-1} ?

2- Décrire le mode opératoire pour préparer les 500 mL de S.

3- La solution a un pH = 11,1 à 25°C. Calculer les concentrations et les quantités de matière des ions $H30^+$ et OH^- présents dans S.

EXERCICE 2 :

On dispose d'une bouteille d'acide méthanoïque titrant 98 % en masse. La masse volumique de l'acide est 1,22 $g.cm^{-3}$. Avec une pipette, on prélève 11,5 cm^3 de l'acide que l'on verse dans une fiole jaugée de 1 L. On verse ensuite de l'eau pure pour obtenir 1 L de solution que l'on note S1.

1- Déterminer la masse m d'acide méthanoïque prélevée.

2- Déterminer la concentration C_1 de la solution S_1.

3- Quel volume d'eau pure faut-il verser sur les 20 mL de la solution S_1 pour avoir une solution S_2 de concentration C_2 = 0, 10mol.L^{-1} ?

4- On dilue 10 fois la solution S_2. Calculer le volume d'eau pure nécessaire à cette dilution et la concentration C_3 de la solution S_3 obtenue.

Chapitre 2. LE PRODUIT IONIQUE DE L'EAU

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce cours, je dois être capable de :

I. AUTOPROTOLYSE DE L'EAU

1. LE PH DE L'EAU PURE

A 25°C le pH de l'eau pure est égale à 7. L'eau pure contient donc des ions H_3O^+ tel que $[H_3O^+] = 10^{-7}\text{mol/L}$.

2. L'AUTOPROTOLYSE DE L'EAU

La présence dans l'eau des ions H_3O^+ résulte de l'ionisation partielle de l'eau selon l'équation :

$$H_2O + H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$
$$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

Cette réaction est limitée et connue sous le nom **d'autoprotolyse de l'eau.** Dans l'eau pure à 25°C : $[H_3O^+] = [OH^-] = 10^{-7}\text{mol/L}$.

3. LE PRODUIT IONIQUE DE L'EAU

- Toute solution aqueuse contient, entre autres, des ions hydronium H_3O^+ et des ions hydroxyde OH^-. Dans une solution aqueuse quelconque, les concentrations des ions H_3O^+ et OH^- peuvent être très différentes, mais leur produit reste constant. Ce produit est appelé produit ionique de l'eau, noté K_e. $K_e = [H_3O^+]\cdot[OH^-]$ où $[H_3O^+]$ et $[OH^-]$ sont exprimées en mol/L.

- Par commodité, on définit le pK_e par la relation : $pK_e = -\log K_e \quad \Leftrightarrow \quad K_e = 10^{-pK_e}$.

K_e et pK_e ne dépend que de la température. Ils sont indépendants de la présence et de la nature des substances dissoutes.

Le tableau suivant donne quelques valeurs du produit ionique de l'eau à différentes températures :

θ (°C)	0	10	20	25	30	37	40	50	60
K_e(× 10^{-14})	0,12	0,29	0,68	1	1,5	2,4	2,9	5,5	9,6
pK_e	14,92	14,54	14,17	14	13,82	13,62	13,54	13,26	13,02

❒ **EXPRESSION DU pH D'UNE SOLUTION EN FONCTION DE LA CONCENTRATION EN IONS HYDROXYDE OH^- :**

$K_e = [H_3O^+]\cdot[OH^-] \quad \Rightarrow \quad [H_3O^+] = \frac{K_e}{[OH^-]}$ donc $pH = -\log[H_3O^+] = -\log\left(\frac{K_e}{[OH^-]}\right)$

D'où : $pH = pK_e + \log[OH^-]$ et $[OH^-] = 10^{pH-pK_e}$

A 25°C on a : $pK_e = 14$; $pH = 14 + \log[OH^-]$; $[OH^-] = 10^{pH-14}$

II. LE PH D'UNE SOLUTION AQUEUSE

1. DÉFINITION

Les ions H_3O^+ se trouvent dans toute solution aqueuse. Le pH (potentiel d'hydrogène) d'une solution aqueuse est défini à partir de la concentration en ions H_3O^+ par la relation :

$$\mathbf{pH = -\log[H_3O^+]} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathbf{H_3O^+}] = 10^{-pH}$$

Cette relation est valable pour : $10^{-6}\text{mol.L}^{-1} \leq [H_3O^+] \leq 10^{-2}\text{mol.L}^{-1}$
D'après la relation précédente on en déduit que le pH d'une solution aqueuse est d'autant plus faible que sa concentration en ion $[H_3O^+]$ est élevée.

2. MESURE DU PH D'UNE SOLUTION AQUEUSE

On mesure le pH d'une solution aqueuse à l'aide d'un **pH-mètre** (mesure précise). On trouver un intervalle dans lequel se situe le pH d'une solution en utilisant un papier pH ou un indicateur coloré.

III. LA CLASSIFICATION DES SOLUTIONS AQUEUSES

Une solution aqueuse peut être acide, basique ou neutre.

1. SOLUTION NEUTRE

Une solution aqueuse est neutre si elle contient autant d'ions hydronium H_3O^+ que d'ions hydroxyde OH^-.

$$K_e = [H_3O^+]\cdot[OH^-] \Rightarrow [OH^-] = \frac{K_e}{[H_3O^+]} \text{ et } [H_3O^+] = [OH^-] \Rightarrow K_e = [H_3O^+]^2$$

D'où: $\quad pH = -\frac{1}{2}\log K_e = \frac{1}{2}pK_e$

A 25°C on a: $\quad pK_e = 14\ ;\ pH = \frac{1}{2}pK_e = 7$

2. SOLUTION ACIDE

Une solution aqueuse est acide si elle contient plus d'ions hydronium H_3O^+ que d'ions hydroxyde OH^-.

$$[H_3O^+] > [OH^-] \Rightarrow [H_3O^+] > \frac{K_e}{[H_3O^+]} \Leftrightarrow [H_3O^+]^2 > K_e$$

Donc : $\quad 2pH < pK_e \quad$ d'où $\quad pH < \frac{1}{2}pK_e$.

A 25°C, $pK_e = 14$. Une solution aqueuse est acide si et seulement si son $pH < 7$.

3. SOLUTION BASIQUE

Une solution aqueuse est basique si elle contient plus d'ions hydroxyde OH^- que d'ions hydronium H_3O^+.

$$[H_3O^+] < [OH^-] \Rightarrow [H_3O^+] < \frac{K_e}{[H_3O^+]} \Leftrightarrow [H_3O^+]^2 < K_e$$

Donc : $\quad 2pH > pK_e \quad$ d'où $\quad pH > \frac{1}{2}pK_e$.

A 25°C, $pK_e = 14$. Une solution aqueuse est basique si et seulement si son $pH > 7$.

IV. LES INDICATEURS COLORÉS

Un indicateur coloré est une substance qui en solution aqueuse change de couleur pour intervalle de pH appelé zone de virage. La couleur de l'indicateur coloré dans la zone de virage est la teinte sensible.

Indicateurs colorés	Milieu acide	Zone de virage	Milieu basique
Hélianthine	Rouge	Orange ($3,1<pH<4,4$)	Rouge
BBT	Jaune	Vert ($6,0<pH<7,6$)	Bleu
Phénolphtaléine	Incolore	Rose $8,2<pH<10,0$	Violacé

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

Parmi les informations suivantes, indiquer celles qui sont erronées ; les corriger.

1- Toute solution aqueuse contient des ions hydroniums et des ions hydroxydes.
2- A toute température, $[H_3O^+].[OH^-] = Ke = 1.0.10^{-14}$.
3- Le produit ionique de l'eau ne dépend que de la température.
4- A 25°C, une solution dont le pH est égal à 7,2 est basique.
5- A 25°C, une solution telle que pH = 7,0 est de l'eau pure.
6- Toute solution telle que pH = 7,0 est neutre.
7- Le pH d'une solution dont la concentration des ions $H_3O^+ = 1,0.10^{-9}$ vaut 9,0.
8- Le pH d'une solution dont la concentration des ions OH^- est de 1,0 mol/L vaut 14,0.

EXERCICE 2 :

On donne le produit ionique de l'eau $Ke = 2,5.10^{-13}$ à la température de 80°C.

1- Une solution aqueuse à cette température a un pH = 6,5 ; est-elle acide ou basique ?
2- 200 mL d'une solution aqueuse contiennent 10^{-4} mol d'ions OH^- ; quel est son pH à 80°C ?
3- Le pH d'une solution est 4,7 à 80°C, en déduire $[OH^-]$.
4- Ke augmente lorsque la température augmente ; dans le corps humain, à 37°C, le sang à un pH voisin de 7,4. Le sang est-il un liquide : neutre ? Acide ? Basique ?

EXERCICE 3 :

Une solution commerciale d'hydroxyde de sodium a une densité par rapport à l'eau de 1,38 et titre 35% d'hydroxyde de sodium en masse.

1- Quelle est la concentration de cette solution commerciale ?
2- Quel volume v1 de cette solution doit-on diluer par de l'eau pure pour obtenir un litre de solution de pH égal à 12,5.
3- On verse 5 mL de la solution commerciale dans l'eau. Quel est le pH de la solution obtenue.
4- On rappelle que la dissociation de NaOH dans l'eau est totale.

Chapitre 3. LES ACIDES FORTS ET LES BASES FORTES

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce cours, je dois être capable de :

- Définir : un acide fort et une base forte ;
- Définir le pH des solutions d'acides forts et le pH des solutions de bases fortes ;

I. LA NOTION D'ACIDE FORT

1. UN ACIDE FORT : L'ACIDE CHLORHYDRIQUE

Les solutions d'acide chlorhydrique sont obtenues par dissolution dans l'eau du chlorure d'hydrogène HCl, gazeux.

Considérons une solution aqueuse d'acide chlorhydrique de concentration Ca = 10^{-2} mol/L. Mesurons son pH à 25°C. On trouve pH = 2,0.

- Equations de dissolution :

$HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$ $\qquad$ $2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$

- Inventaire des espèces chimiques présentes en solution ;

  - Ions : H_3O^+ , OH^-, Cl^-
  - Molécules : H_2O

- Calcul des concentrations des espèces chiques présentes en solution :

$$[H_3O^+] = 10^{-pH} \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-2} mol/L$$

$$[OH^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]} = 10^{pH-14} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-12} mol/L$$

R.E.N : $[H_3O^+] = [OH^-] + [Cl^-] \Rightarrow [Cl^-] = [H_3O^+] - [OH^-]$

Comme OH^- est ultra-minoritaire devant H_3O^+ alors on a : $[Cl^-] = [H_3O^+]$ soit $[Cl^-] = c_a = 10^{-2} mol/L$

On en déduit que : $[Cl^-] = c_a \Rightarrow n_{Cl^-} = c_a V_a$

D'où : $\mathbf{n_{Cl^-} = n_{HCl\ introduit}}$

NB : La réaction du chlorure d'hydrogène HCl sur l'eau est une réaction totale. On dit que l'acide chlorhydrique est un acide fort.

2. LA RELATION ENTRE LE PH ET LA CONCENTRATION CA DE LA SOLUTION

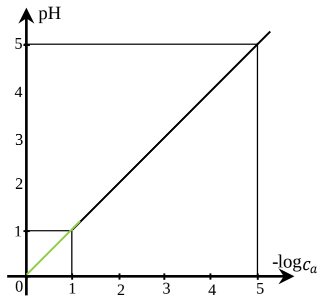
Dans une solution d'acide chlorhydrique on a : $[H_3O^+] = c_a$ Or $pH = -\log[H_3O^+]$.

Donc : $\mathbf{pH = -\log c_a}$ **avec** $\mathbf{10^{-6} mol/L \leq c_a \leq 10^{-2} mol/L}$ $\Leftrightarrow$ **soit** $\mathbf{c_a = 10^{-pH} mol/L}$

METHODE GRAPHIQUE :

On mesure le pH de quelques solutions d'acide chlorhydrique. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

c_a (mol/L)	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
pH	2	3	4	5	6
$-\log c_a$	2	3	4	5	6



Echelle : **1cm → 1unité de $-\log c_a$** et **1cm → 1unité de pH**

La courbe $pH = f(-\log c_a)$ est une droite linéaire ⇒ $pH = a \cdot (-\log c_a)$

$$a = \frac{\Delta pH}{\Delta(-\log c_a)} = \frac{5-2}{5-2} = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{pH = -\log c_a}$$

3. GENERALISATION : LES ACIDES FORTS

Un acide fort est une espèce chimique qui s'ionise totalement dans l'eau en donnant, en autres, des ions hydronium H_3O^+.

$$AH + H_2O \rightarrow A^- + H_3O^+$$

Exemples : HBr : Acide bromhydrique ;

HI : Acide iodhydrique ;

HNO_3 : Acide bromhydrique ;

REMARQUE : *Pour un diacide fort tel que l'acide sulfurique* H_2SO_4 *de concentration* c_a, *on a :*

$$H_2SO_4 + H_2O \rightarrow SO_4^{2-} + 2H_3O^+$$

$$\mathbf{[H_3O^+] = 2c_a} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{pH = -\log(2 \cdot c_a)}$$

4. LA DILUTION D'UNE SOLUTION D'ACIDE FORT

Soit un volume V_1 d'une solution S_1 d'acide fort et de pH = pH_1.

Diluons n fois cette solution : on obtient une solution S_2 de volume $V_2 = n\,V_1$, n est le facteur de dilution.

Au cours d'une dilution le nombre de mole de soluté dissout se conserve :

$$c_2V_2 = c_1V_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{V_1}{V_2}c_1 = \frac{c_1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad pH_2 = -\log c_2 = -\log\left(\frac{c_1}{n}\right) = -\log c_2 + \log n = pH_1 + \log n$$

$$\Rightarrow \quad pH_2 = pH_1 + \log n$$

CONCLUSION : Lorsqu'on dilue n fois une solution d'acide fort AH de concentration Ca, telle que $\frac{Ca}{n} \gg 10^{-6}\,mol/L$, les concentrations des ions H_3O^+ et A^- sont divisées par n et le pH augmente de logn**.**

II. LA NOTION DE BASE FORTE

1. UNE BASE FORTE : L'HYDROXYDE DE SODIUM

Les solutions d'hydroxyde de sodium sont obtenues par dissolution dans l'eau de l'hydroxyde de sodium NaOH.

L'hydroxyde de sodium est un solide ionique contenant des ions Na^+ et OH^-. La dissolution dans l'eau provoque la dispersion des ions selon la réaction :

$$NaOH \rightarrow Na^+ + OH^-$$

Considérons une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration $c_b = 10^{-2}mol/L$. Mesurons son pH à 25°C. On trouve $pH = 12{,}0$.

- Inventaire des espèces chimiques présentes en solution :

$$NaOH \rightarrow H_3O^+ + Na^+$$
$$2H_2O \rightleftarrows H_3O^+ + OH^-$$

- Ions : H_3O^+, OH^-, Na^+;
- Molécules : H_2O.

- Calcul des concentrations des espèces chiques présentes en solution :

$$[H_3O^+] = 10^{-pH} \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-12}mol/L$$

$$[OH^-] = \frac{Ke}{[H_3O^+]} = \frac{10^{-14}}{[H_3O^+]} = 10^{pH-14} \Rightarrow [OH^-] = 10^{-2}mol/L$$

REN : $[H_3O^+] + [Na^+] = [OH^-] \Rightarrow [Na^+] = [OH^-] - [H_3O^+]$

Comme H_3O^+ est ultra-minoritaire devant OH^- alors on a : $[Na^+] = [OH^-]$ soit $[Na^+] = c_b = 10^{-2}mol/L$

On en déduit que : $[Na^+] = c_b \Rightarrow n_{Na^+} = c_bV_b$ d'où $n_{Na^+} = n_{NaOH_{introduit}}$.

La réaction de l'hydroxyde de sodium NaOH sur l'eau est une réaction totale. On dit que l'hydroxyde de sodium NaOH est une base forte.

2. LA RELATION ENTRE LE PH ET LA CONCENTRATION C_B DE LA SOLUTION

Dans une solution d'hydroxyde de sodium NaOH, on a :

$$[OH^-] = c_b \quad \text{or} \quad pH = -\log[H_3O^+] = pK_e + \log[OH^-]$$

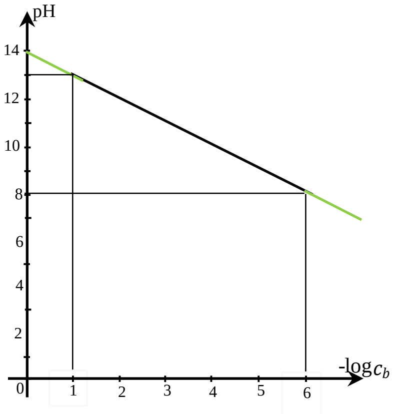
$$\mathbf{pH = pK_e + \log c_b \text{ avec } 10^{-6}mol/L \leq c_b \leq 10^{-2}mol/L \Leftrightarrow \text{ soit } c_b = 10^{pH-pK_e}mol/L}$$

A 25°C, $pK_e = 14$ et on en déduit : $\mathbf{pH = 14 + \log c_b}$ **avec** $\mathbf{10^{-6}mol/L \leq c_b \leq 10^{-2}mol/L}$

Soit : $$c_b = 10^{pH-14} mol/L$$

METHODE GRAPHIQUE : On mesure le pH de quelques solutions d'hydroxyde de sodium. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

c_a (mol/L)	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
pH	12	11	10	9	8
$-\log c_b$	2	3	4	5	6



Echelle : $1cm \rightarrow 1$unité de $-\log c_b$ et $1cm \rightarrow 1$unité de pH

La courbe $pH = f(-\log c_b)$ est une droite affine $\Rightarrow pH = a \cdot (-\log c_b) + b$

Les point (2 ; 12) et (6 ; 8) appartiennent à la droite.

Donc : $\begin{cases} 2a + b = 12 \\ 6a + b = 8 \end{cases}$ soit $a = -1$ et $b = 14$

D'où : $$\mathbf{pH = 14 + \log c_b}$$

3. GENERALISATION : LES ACIDES FORTS

- Une base forte est une espèce chimique qui se dissocie totalement dans l'eau en donnant en outre des ions hydroxyde OH^-.

$$B + H_2O \rightarrow BH^+ + OH^-$$

Exemples : $NaOH$: Hydroxyde de sodium ;

KOH : Hydroxyde de potassium ;

$Ca(OH)_2$: Hydroxyde de calcium ;

$C_2H_5O^-$: Ion éthanoate…

- On distingue des monobases fortes qui libèrent une mole d'ions OH^- par mole de base et des polybases fortes qui libèrent plusieurs moles d'ions OH^- par mole de base.

Pour une dibase forte telle que l'acide sulfurique $Ca(OH)_2$ de concentration c_b, on a :

$$Ca(OH)_2 \rightarrow Ca^{2+} + 2OH^-$$

$$\mathbf{[OH^-] = 2c_b \Rightarrow pH = pK_e + \log(2 \cdot c_b)}$$

A 25°c, pKe = 14 et on en déduit alors l'expression : **pH = 14 + log(2C_b)**

4. LA DILUTION D'UNE SOLUTION D'ACIDE FORT

Soit un volume V_1 d'une solution S_1 de base forte et de pH = pH_1. Diluons n fois cette solution : on obtient une solution fille S_2 de volume $V_2 = n \cdot V_1$, n est le facteur de dilution.

Au cours d'une dilution le nombre de mole de soluté dissout se conserve :

$$n_1 = n_2 \Rightarrow c_2V_2 = c_1V_1 \Rightarrow c_2 = \frac{V_1}{V_2}c_1 = \frac{c_1}{n}$$

$$pH_1 = 14 + \log c_1 \Rightarrow pH_2 = 14 + \log c_2 = 14 + \log\left(\frac{c_1}{n}\right) = 14 + \log c_1 - \log n = pH_1 - \log n$$

$$\Rightarrow pH_2 = pH_1 - \log n$$

CONCLUSION : Lorsqu'on dilue n fois une solution de base forte de concentration C_b, telle que $\frac{Cb}{n} \gg 10^{-6}\,mol/L$, la concentration des ions hydroxyde OH^- est divisée par n et le pH diminue de $\log(n)$.

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1 :

A 10 mL d'une solution de chlorure d'hydrogène, on ajoute 40 mL d'eau et on obtient alors une solution de pH = 2,7. Quelle est la concentration de la solution de chlorure d'hydrogène ?

1- Quel volume d'eau distillée doit-on ajouter à 40 mL d'une solution de concentration 2.10^{-2} mol/L pour avoir une solution de pH = 2,4 ?

2- On mélange 20 mL d'une solution d'acide chlorhydrique de pH = 3,1 avec 10 mL d'une solution d'acide chlorhydrique de pH = 2,3. Déterminer le pH du mélange obtenu.

3- A 20 mL de solution d'acide chlorhydrique de pH = 3, on ajoute 20 mL d'une solution décimolaire de chlorure de sodium. Quelles sont les molarités des différentes espèces chimiques présentes dans la solution ? quel est son pH ? Vérifier son électroneutralité. 5. On dispose de 10 mL d'une solution d'acide chlorhydrique 10^{-2} mol/L.

a) Calculer le nombre de moles d'ions H_3O^+ présents dans la solution.

b) On ajoute un volume V d'eau pure. Quelle est la nouvelle concentration molaire des ions H_3O^+ en fonction de V ? Pour quelle valeur de V le pH a-t-il varié d'une unité ?

EXERCICE 2 :

On dissout 11,2 cm^3 de chlorure d'hydrogène pris dans les conditions normales dans 500 mL d'eau pire. Le pH de la solution S obtenue est égal à 3. Le volume molaire dans les conditions normales est 22,4 L.

1- Calculer les concentrations molaires des différentes espèces chimiques présentes dans la solution S. Montrer que la réaction entre le chlorure d'hydrogène et l'eau est totale.

2- Quel volume de chlorure d'hydrogène faut-il dissoudre dans la solution S pour que son pH devienne égal à 2 ? La solution de pH = 2 est notée S_1.

3- Avec quel volume d'eau faut-il diluer cette solution S_1 pour que le pH soit égal à 4 ?

4-Décrire deux expériences montrant la nature des ions H_3O^+ et Cl^- présents dans la solution.

EXERCICE 3 :

1 - Une solution S_1 de dihydroxyde de magnésium $Mg(OH)_2$ a un pH = 12.
 a) Quelles sont les concentrations des espèces chimiques présentes dans la solution S_1 ?
 b) Quelle masse de $Mg(OH)_2$ trouve-t-on dans 2 L de cette solution ?

2 - Une solution S_2 d'acide chlorhydrique a un pH = 3,7.
 a) Quelles sont les concentrations des espèces chimiques présentes dans S_2 ?
 b) Quel volume de chlorure d'hydrogène a-t-on dissous dans l'eau pour préparer 500 mL de la solution S2 ?

3 - On dilue 1000 fois la solution S_2 pour obtenir une solution S'_2.
 a) Quelles sont les concentrations des espèces chimiques présentes dans S'_2?
 b) Quelle est la valeur du pH de la solution S'_2 ?

4 - Une solution S_3 est préparée en mélangeant V_1 = 600 mL de V_1, V_2 = 400 mL de S_2 et V = 300 mL d'une solution de chlorure de magnésium $MgCl_2$ de concentration C = 10^{-1} mol. L^{-1}.
 a) Calculer les concentrations des ions Mg^{2+} et Cl^- dans S_3.
 b) La solution S_3 est-elle acide, basique ou neutre ?
 c) Calculer son pH.

5 - On mélange un volume V'_1 de S_1 avec un volume V'_2 de S_2 de telle sorte que l'on obtienne une solution finale S de volume V' = 300 mL et de pH = 11,5. Calculer V'_1 et V'_2.

Données : Volume molaire gazeux : V_0 = 24 L. mol^{-1} ; Masses molaires atomiques en g. mol^{-1} : Mg (24) ; O (16) ; H (1).

EXERCICE 4 :

On prépare une solution S en mélangeant une solution S_1 d'acide chlorhydrique de volume V_1 = 60 mL, de concentration $C_1 = 4.10^{-2}$ mol. L^{-1} et une solution S_2 d'acide nitrique de volume V_2 = 40 mL, de concentration $C_2 = 10^{-2}$ mol. L^{-1}.

1 - Quel est le pH de la solution S ?

2 - Déterminer la concentration molaire des espèces chimiques présentes dans la solution S.

3 - Quel volume d'eau faut-il ajouter à la solution S pour avoir une solution S' de pH = 2 ?

4 - A la solution S', on ajoute 50 mL d'une solution de soude (hydroxyde de sodium) de concentration molaire 2.10^{-2} mol. L^{-1}. Quelle est la nature du mélange obtenu ? Justifier votre réponse. Calculer son pH.

EXERCICE 5 :

Une solution A a été préparée en mélangeant :

— 20,0 mL d'acide chlorhydrique à la concentration $C_1 = 2{,}00.10^{-2}$ mol/L ;

— 10,0 mL d'acide nitrique de concentration $C_2 = 1{,}50.10^{-2}$ mol/L ;

— 5,0 mL d'acide chlorhydrique de concentration $C_2 = 1{,}20.10^{-2}$ mol/L ;

— 5,0 mL de solution d'hydroxyde de sodium à la concentration $C_4 = 5{,}0.10^{-2}$ mol/L ;

— 10,0 mL de solution saturée d'hydroxyde de calcium de concentration $C_5 = 2{,}70.10^{-2}$ mol/L.

1 - Quel est le pH de la solution A ?
2 - On veut obtenir, à partir de la solution A, une solution B de pH = 7,0. Déterminer le volume V d'acide chlorhydrique ou d'hydroxyde de sodium à rajouter à la solution A pour obtenir la solution B.
3 - Déterminer la concentration des espèces en présence dans la solution B.

NB : Les acides et les bases utilisés pour préparer ce mélange sont tous forts.

Chapitre 4. LA REACTION ENTRE ACIDE FORT ET BASE FORTE

Objectifs pédagogiques : A la fin de ce cours, je dois être capable de :

- Ecrire l'équation-bilan de la réaction entre un acide et une base ;
- Tracer la courbe de la variation du pH au cours d'un dosage ;
- Définir l'équivalence acido-basique ;
- Déterminer les coordonnées du point d'équivalence ;
- Choisir l'indicateur coloré convenable au dosage.

I. LA NATURE DE LA REACTION ENTRE LES SOLUTIONS D'ACIDE CHLORHYDRIQUE ET D'HYDROXYDE DE SODIUM

Dans un bécher, on mélange un volume V_a d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique ($H_3O^+ + Cl^-$), de concentration C_a, et un volume V_b d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium ($Na^+ + OH^-$), de concentration C_b.

- Il se produit une réaction entre la solution aqueuse d'acide chlorhydrique et la solution aqueuse d'hydroxyde de sodium. La réaction est exothermique et quasi-totale.

- L'équation-bilan de la réaction est :

$$(H_3O^+ + Cl^-) + (Na^+ + OH^-) \rightarrow 2H_2O + (Na^+ + Cl^-)$$

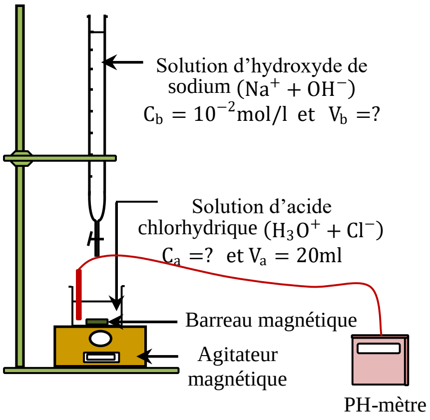
Ou plus simplement : $H_3O^+ + OH^- \rightarrow 2H_2O$

- Les ions Na^+ et Cl^- étant des ions spectateurs, ils ne participent pas à la réaction entre l'acide chlorhydrique et l'hydroxyde de sodium.

II. LA VARIATION DU PH AU COURS DU DOSAGE D'UNE SOLUTION AQUEUSE D'ACIDE CHLORHYDRIQUE PAR UNE SOLUTION AQUEUSE D'HYDROXYDE DE SODIUM

1. ETUDE EXPÉRIMENTALE

Après avoir noté le pH initial, on ajoute progressivement la solution aqueuse d'hydroxyde de sodium et on relève la valeur du pH du mélange après chaque ajout. Un agitateur magnétique assure une bonne homogénéisation de la solution. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau suivant :



V_b(mL)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
pH	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,9
V_b(mL)	18	19	20	21	22	24	26	28	30
pH	3,3	3,6	7	10	10,5	10,9	11	11,1	11,2

2. GRAPHE pH = (V_b) et ses principales caracteristiques

Le graphe pH = f(V_b) est croissante et présente trois parties distinctes :

- **Partie AB :** la courbe est presque rectiligne et le pH varie peu lors de l'ajout de la base
- **Partie BC :** nous observons un saut de pH et la courbe change de concavité (présence d'un point d'inflexion). Le saut de pH encadre le point d'équivalence qui est déterminé par la méthode des tangentes.
- **Partie CD :** le pH varie ensuite faiblement, la courbe tend vers une asymptote horizontale.

3. ETUDE DE L'EQUIVALENCE ACIDO-BASIQUE ET DE LA DEMI-EQUIVALENCE

L'équivalence est obtenue lorsque la quantité d'ions OH^- apportés par l'ajout de la base est égale à la quantité d'ions H_3O^+ initialement présents dans le bécher. A l'équivalence :

$n(H_3O^+)$ initialement présents = $n(OH^-)$ajouté soit $C_aV_a = C_bV_b$

D'où : $$C_a = C_b \frac{V_{bE}}{V_a}$$

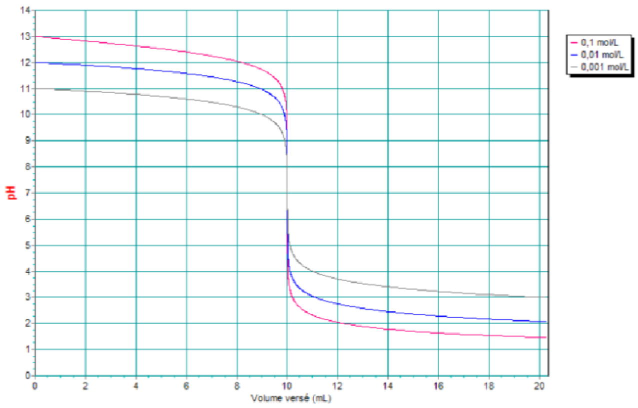
<u>LES COORDONNEES DU POINT D'EQUIVALENCE E :</u>

Elles sont déterminées par la méthode des tangentes : $V_{bE} = 20$ mL et $pH_E = 7$

A l'équivalence, on a : $[H_3O^+]_E = [OH^-]_E$; la solution est neutre et son pH vaut 7,0 à 25°C.

III. LE DOSAGE D'UNE SOLUTION AQUEUSE D'HYDROXYDE DE SODIUM PAR UNE SOLUTION AQUEUSE D'ACIDE CHLORHYDRIQUE

Etudions de même l'évolution du pH d'une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium ($C_b =?$ $V_b = 10mL$) à laquelle on ajoute une solution aqueuse d'acide chlorhydrique. ($C_a = 0{,}1mol/L$; $V_a =?$)



L'équivalence encore obtenue pour pH = 7 est telle que :

$n(H_3O^+)$ initialement présents = $n(OH^-)$ajouté :

$$C_aV_a = C_bV_b \Leftrightarrow C_aV_{aE} = C_bV_b$$

IV. GÉNÉRALISATION : REACTION ENTRE UN MONOACIDE FORT ET UNE MONOBASE FORTE

On obtient des résultats similaires avec des solutions d'autres acides forts et d'autres bases fortes. Dans tous les cas, la courbe de variation de pH présente un seul point d'inflexion au point d'équivalence E. Au point d'équivalence :

$$n_{H_3O^+} = n_{OH^-} \Leftrightarrow C_aV_a = C_bV_b$$
$$[H_3O^+]_E = [OH^-]_E$$

La solution est neutre. Son pH = 7 à 25°c.

On peut utiliser un indicateur coloré pour déterminer le point d'équivalence. L'indicateur coloré convenable est celui dont les limites de la zone de virage encadrent le ph du point d'équivalence. Pour un dosage acide fort-base forte, l'indicateur coloré convenable est le BBT (bleu de bromothymol).

Indicateur	Zone de virage et couleur
a) Hélianthine b) Bleu de bromophénol c) Bleu de bromothymol	Rouge 3,1 -- 4,4 jaune Jaune 3,0 -- 4,6 bleu Jaune 6,0 -- 7,6 bleu

EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1:

L'étiquette d'une bouteille contenant une solution S0 d'acide chlorhydrique porte les indications suivantes :

- Acide chlorhydrique commercial ;
- Masse volumique : ρ = 1190 $Kg.m^{-3}$;
- Pourcentage en masse d'acide pur : 37 %
- Masse molaire moléculaire du chlorure d'hydrogène : M(HCl) = 36,5 $g.mol^{-1}$

1 - Montrer que la concentration de la solution commerciale S_o est C_o =12,06 $mol.L^{-1}$

2 - On prélève 4,0 mL de cette solution commerciale et on complète à 500 mL avec de l'eau distillée.

a) Quelle est la concentration C de la solution S ainsi préparée ?

b) Quel son pH ?

3 - Afin de vérifier cette solution S, on dose S par une solution d'hydroxyde de potassium de concentration C_B = $4{,}00.10^{-2}$ $mol.L^{-1}$. Dans 20,0 mL de cette dernière solution, on vers V_S mL de la solution S et l'on mesure le pH après chaque ajout. On obtient les résultats suivants :

V_S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8,5	9	10	11	12	13
pH	12,6	12,5	12,45	12,35	12,25	12,1	11,95	11,7	11,15	3,6	2,72	2,3	2,1	2	1,9

a) Faire un schéma du dispositif utilisé pour le dosage.

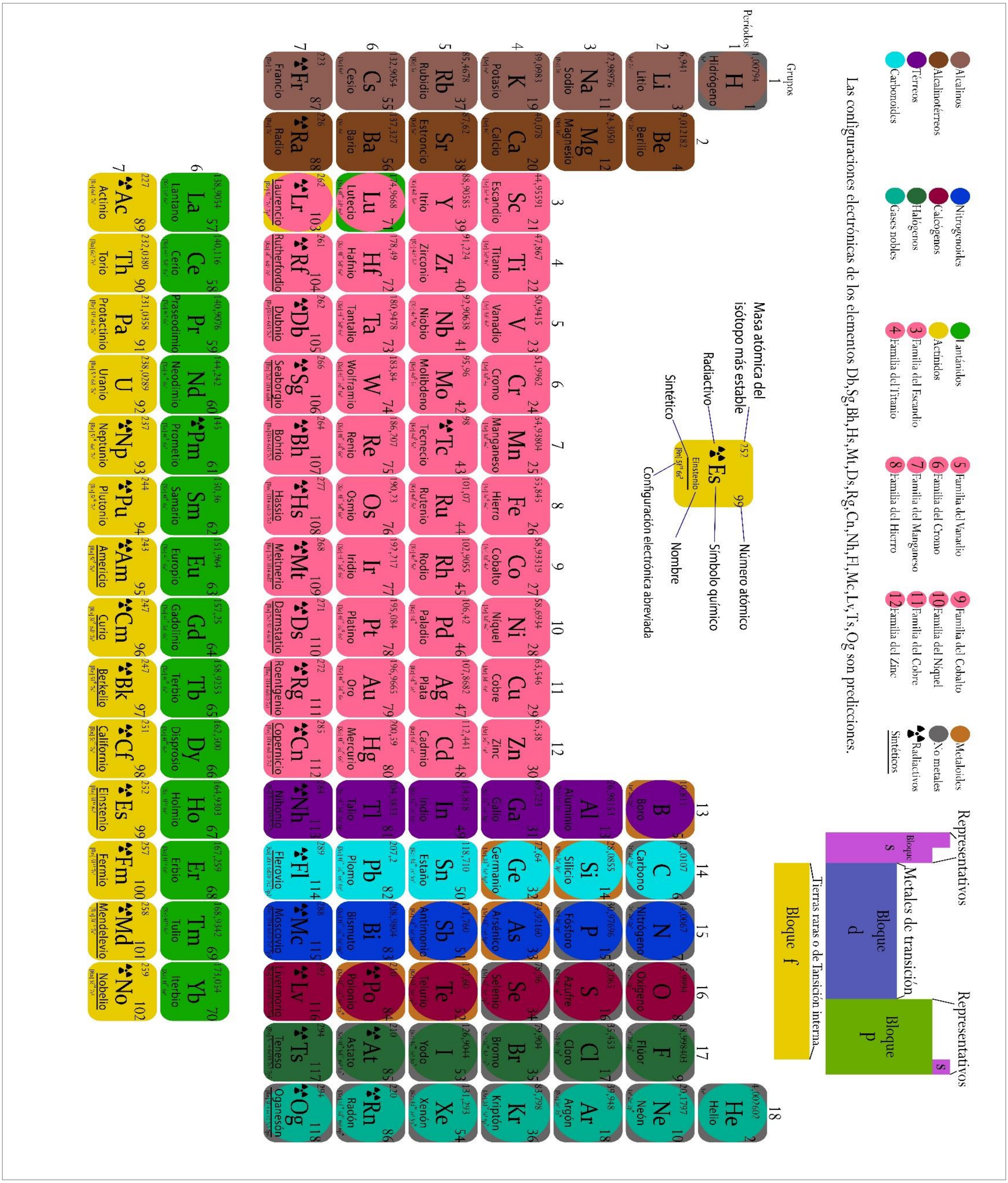
b) Construire la courbe pH = f (V_S).

c) Déterminer graphiquement le volume équivalent V_{SE}.

EXERCICE 2 :

ANNEXES

ANNEXE 1 : Tableau de classification périodique des éléments chimiques



ANNEXE 2 : Progression du cours 2023

RÉFÉRENCES