

## A. Généralités sur le transport et le transfert de l'énergie thermique

De tous temps, les problèmes de transmission d'énergie, et en particulier de la chaleur, ont eu une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement d'appareils tels que les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs, les évaporateurs, les condenseurs, etc., mais aussi pour des opérations de transformations chimiques.

En effet, dans certains systèmes réactionnels, c'est la vitesse des échanges de chaleur et non la vitesse des réactions chimiques qui détermine le coût de l'opération (cas de réactions fortement endo- ou exothermique). En outre, de nos jours, par suite de l'accroissement relatif du prix de revient de l'énergie, on recherche dans tous les cas à obtenir le rendement maximal d'une installation pour une dépense d'énergie minimale.

Les problèmes de transfert de chaleur sont nombreux, et on peut essayer de les différencier par les buts poursuivis dont les principaux sont :

- l'augmentation de l'énergie transmise ou absorbée par une surface,
- l'obtention du meilleur rendement d'une source de chaleur,
- la réduction ou l'augmentation du passage d'un débit de chaleur d'un milieu à un autre.

Le potentiel qui provoque le transport et le transfert de l'énergie thermique est la température. Si deux points matériels placés dans un milieu thermiquement isolé sont à la même température, on peut affirmer qu'il n'existe aucun échange thermique global entre ces deux points dits en équilibre thermique (il s'agit bien d'un équilibre thermique car chacun des points matériels émet une énergie thermique nette de même module, mais de signe opposé).

Le transfert de chaleur au sein d'une phase ou, plus généralement, entre deux phases, se fait de trois façons :

### a) Par conduction.

Ce transport de chaleur se produit au sein d'une même phase – au repos ou mobile, mais tranquille (absence de remous) – en présence d'un gradient de température. Le transfert de chaleur résulte d'un transfert d'énergie cinétique d'une molécule à une autre molécule adjacente. Ce mode de transfert est le seul à exister dans un solide opaque. Pour les solides transparents, une partie de l'énergie peut être transmise par rayonnement. Avec les fluides que sont les gaz et les liquides, la convection et le rayonnement peuvent se superposer à la conduction.

### b) Par convection.

Le transfert de chaleur par convection se produit entre deux phases dont l'une est généralement au repos et l'autre en mouvement en présence d'un gradient de température. Par suite de l'existence du transfert de chaleur d'une phase à l'autre, il existe dans la phase mobile des fractions du fluide (ou agrégats) ayant des températures différentes. Le mouvement du fluide peut résulter de la différence de masse volumique due aux différences de températures (on parle alors de convection libre ou naturelle) ou à des moyens purement mécaniques (on parle alors de convection forcée).

Lorsqu'un fluide est en écoulement, une partie du transfert de chaleur dans le fluide se fait également par conduction et, dans le cas d'un fluide transparent, un transfert de chaleur par rayonnement peut accompagner les deux transferts précédents.

### c) Par rayonnement.

Un point matériel chauffé émet un rayonnement électromagnétique dans toutes les directions situées d'un même côté du plan tangent au point matériel. Lorsque ce rayonnement frappe un corps quelconque, une partie peut être *réfléchi*e, une autre *transmise* à travers le corps (dit diathermique si tout est transmis), et le reste est quantitativement *absorbé* sous forme de chaleur. Si on place dans une enceinte deux corps capables d'émettre un rayonnement thermique, il existe entre ces deux corps à températures différentes un échange de chaleur dû à l'absorption et à l'émission de ces rayonnements thermiques. Cet échange de chaleur est désigné habituellement sous le nom de *rayonnement*. Les transferts par rayonnement se poursuivent même lorsque l'équilibre thermique est atteint, mais le débit net de chaleur échangé est nul. Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de

la lumière, et il ne nécessite aucun support matériel, contrairement aux écoulements. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques.

Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de chaleur coexisteront mais, généralement, au moins une des trois formes pourra être négligée, ce qui simplifiera le traitement mathématique de l'appareil de transfert. Nous pouvons dire dès à présent, qu'aux températures ordinaires, le transport par rayonnement est négligeable, mais il peut devenir notable et prépondérant lorsque le niveau de température augmente.

En outre, signalons que certains transferts thermiques sont accompagnés d'un transfert de matière entre deux phases. Le flux de chaleur transféré en présence d'un changement de phase dépend de la nature et des propriétés physico-chimiques des phases en présence. C'est le cas de l'ébullition, de la condensation, mais aussi des problèmes d'humidification, de séchage, de cristallisation, etc.

Dans ce qui suit nous allons présenter, pour les trois types de transport de la chaleur, les lois générales qui les gouvernent. Puis nous traiterons, de manière simple, quelques applications où le mode de transport de chaleur étudié est prédominant.

## B. Transfert de chaleur par conduction

### 1. Introduction - Loi de Fourier

Le transfert de la chaleur par conduction est un transport de chaleur dans un milieu immobile ou mobile sans remous turbulent. Ce mode de transport de la chaleur est le seul à exister au sein d'un solide opaque, aussi la conduction concerne essentiellement les solides. Dans les liquides et les gaz le transport de la chaleur par conduction est très souvent négligeable devant les deux autres types de transport de la chaleur.

Le flux de chaleur (dimension  $W/m^2$ ) transféré par conduction dans une direction donnée est proportionnel au gradient de température dans cette direction. Cette loi, dite de **Fourier**, est donc telle que la composante sur l'axe  $Ox$  du flux est égale à :

$$\varphi_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

$\varphi_x$  est la composante du flux sur l'axe  $Ox$  et  $T$  la température au point considéré. Dans cette loi, postulée dès 1822 par *Fourier*, le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  est une caractéristique physico-chimique du point matériel désignée sous le nom de conductivité ou conductibilité thermique. Dans le système international, elle s'exprime en  $W/m.K$ .

Dans le tableau suivant sont reportées les conductivités de quelques corps solides, liquides et gazeux. D'une façon générale, les métaux sont beaucoup plus conducteurs de la chaleur que les substances non métalliques. Les gaz sont plutôt mauvais conducteurs : le caractère isolant de la laine de verre est dû à la présence de l'air emprisonné entre les fibres.

Matériau	$\lambda$ ( $W m^{-1} K^{-1}$ )	Matériau	$\lambda$ ( $W m^{-1} K^{-1}$ )
Chrome	449	Ardoise	2,2
Argent	419	Grès	1,8
Cuivre	386	Verre	0,78
Aluminium	204	Papier	0,48
Zinc	112	Chêne	0,17
Fer (pur)	73	Laine de verre	0,038
Acier Inox	16	Eau	0,556
Mercure	8,2	Air	0,0262

### 2. Équation générale du bilan de transfert de chaleur par conduction dans un milieu immobile

Soit un élément matériel de volume élémentaire  $dx dy dz$ . Nous devons appliquer à ce système élémentaire le bilan d'énergie en régime transitoire.

Le milieu solide étant soumis à des gradients de température, l'énergie interne du point matériel va varier. Le système étant immobile, son énergie cinétique est nulle, et les variations d'énergie potentielle sont négligeables. En fait, on se limite aux variations d'énergie interne et ceci restera valable même dans le cas où le système considéré est ouvert. Dans ces conditions, le bilan énergie s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot U \cdot dx dy dz) = \delta q + \delta W_s \quad (2)$$

$U$  est l'énergie interne par unité de masse  $\delta q$  et  $\delta W_s$  sont les débits élémentaires de chaleur et de travail fournis par le milieu extérieur au système.

Le débit élémentaire de travail d'origine mécanique est généralement nul. Le débit de chaleur  $\delta q$  se compose d'une part de la chaleur fournie par le milieu extérieur au système par conduction, soit  $\delta q_c$ , et

d'autre part de la chaleur engendrée à l'intérieur du volume élémentaire (effet joule, champ électromagnétique, bombardement électronique, etc.) soit  $\delta q_e$ .

$$\delta q_c = -\text{div } \varphi \cdot \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z \quad \text{et} \quad \delta q_e = q_e \cdot \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z$$

Le flux de chaleur par conduction s'écrit, de manière générale,  $-\lambda \cdot \text{grad } T$ , et  $q_e$  est le débit de chaleur engendré par unité de volume.

or :  $\text{div } \varphi = \text{div}(-\lambda \text{ grad } T) = -\lambda \text{ div}(\text{grad } T) = -\lambda \cdot \nabla^2 T$

avec :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{coordonnées cartésiennes})$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{coordonnées cylindriques})$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (\text{coordonnées sphériques})$$

L'équation (2) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot U \cdot \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z) = \lambda \cdot \nabla^2 T \cdot \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z + q_e \cdot \mathbf{d}x \mathbf{d}y \mathbf{d}z$$

soit :

$$\rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \cdot \nabla^2 T = q_e$$

ou encore :

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{q_e}{\lambda}$$

(3)

avec  $C_p$  capacité calorifique massique,  $q_e$  débit de chaleur engendré par unité de volume et  $\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$

diffusivité thermique ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

Les grandeurs physico-chimiques  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $C_p$  et donc  $\alpha$  sont supposées être, d'une part indépendantes de la température, et d'autre part, identiques dans tout le volume du solide (milieu à la fois homogène et isotrope).

### 3. Exemples d'applications

#### a) Problème du mur plan en régime stationnaire

Soit un mur d'épaisseur  $e$  dont les deux faces planes sont maintenues aux températures constantes  $T_1$  et  $T_2$ . Si  $\lambda$  est la conductibilité thermique du matériau constituant le mur, la loi de Fourier nous permet d'écrire, suivant  $x$ , direction normale à la surface du mur :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

Dans une section droite  $\Omega$ , le débit de chaleur transféré entre les deux faces planes du mur est donc :  $\Phi = \varphi \cdot \Omega$ . En régime stationnaire, et en l'absence de source interne, le débit de chaleur transféré est constant, ainsi donc que le flux. On peut donc intégrer l'équation différentielle à variables séparées :

$$-\int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi}{\lambda \cdot \Omega} \cdot dx$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\Phi}{\lambda \cdot \Omega} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{\Phi}{\lambda \cdot \Omega} \cdot e$$

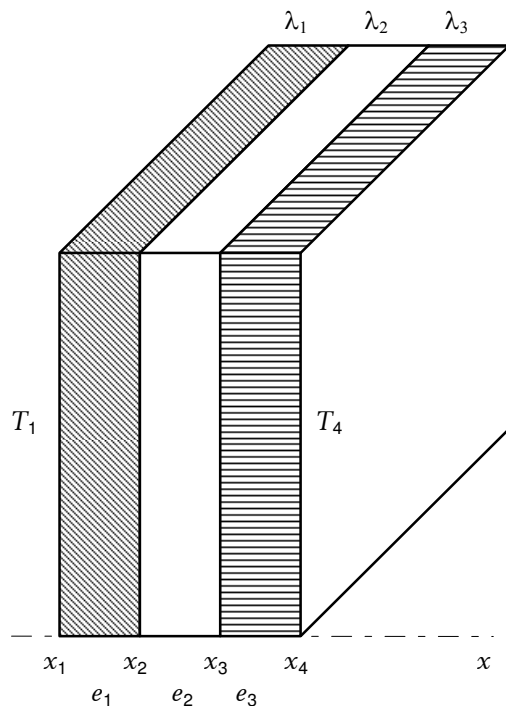
d'où :

$$\Phi = \Omega \cdot \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda \cdot \Omega}} \quad (4)$$

soit :

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{x - x_1}{e}$$

Il est facile de généraliser ce résultat à un mur composite multicouche. Si les faces extérieures de ce mur composite sont maintenues aux températures constantes  $T_1$  et  $T_4$ , en régime stationnaire, et en l'absence de source interne, le débit de chaleur transféré est constant.



$$\Phi = \frac{T_i - T_{i+1}}{\frac{e_i}{\lambda_i \cdot \Omega}} \quad \text{pour } i = 1, 2, 3$$

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_1 \cdot \Omega}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{e_2}{\lambda_2 \cdot \Omega}} = \frac{T_3 - T_4}{\frac{e_3}{\lambda_3 \cdot \Omega}}$$

$$\Phi = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 \cdot \Omega} + \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot \Omega} + \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot \Omega}}$$

$$\Phi = \Omega \cdot \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3}} \quad (5)$$

On vérifiera aisément que les différentes valeurs  $\frac{e_i}{\lambda_i \cdot \Omega}$  correspondent à des résistances

thermiques qui, placées en série, s'additionnent comme les résistances électriques.

b) *Problème de la conduite cylindrique en régime stationnaire*

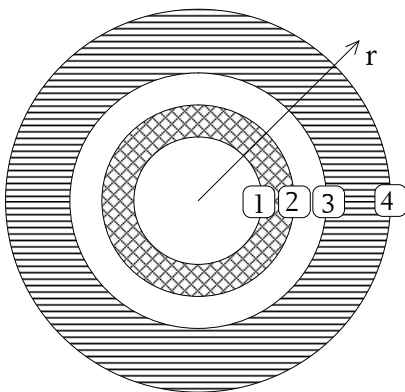
Soit une conduite cylindrique de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$ . La paroi interne du tube est à température  $T_1$  et la paroi externe à  $T_2$ . Si la longueur de la conduite est grande par rapport à son diamètre, le débit de chaleur transféré par conduction dans le tube est radial. Pour une conduite de longueur  $L$ , en l'absence de source de chaleur interne, le débit de chaleur transféré par conduction sur une surface cylindrique comprise entre la surface interne et la surface externe est constant. Soit  $\Phi$  ce débit.

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi \cdot S = \varphi \cdot (2 \cdot \pi \cdot r \cdot L) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \\ - \int_{T_1}^{T_2} 2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda \cdot dT &= \int_{R_1}^{R_2} \Phi \cdot \frac{dr}{r} \\ T_1 - T_2 &= \frac{\Phi}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln \frac{R_2}{R_1} \\ \Phi &= \lambda \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}} \end{aligned} \quad (6)$$

Cette dernière relation peut s'écrire, en introduisant  $e = R_2 - R_1$  :

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \frac{e}{R_2 - R_1} \cdot \ln \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_2}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot R_1}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda \cdot (S_2 - S_1)} \ln \frac{S_2}{S_1}} \\ \Phi &= \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda \cdot \bar{S}_{\ln 1,2}}} \end{aligned}$$

La quantité  $\bar{S}_{\ln 1,2} = \frac{S_2 - S_1}{\ln \frac{S_2}{S_1}} = \bar{S}_{\ln 2,1} = \frac{S_1 - S_2}{\ln \frac{S_1}{S_2}}$  est appelée moyenne logarithmique des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .



Le raisonnement développé pour le mur composite peut être reproduit pour la conduite gainée multicouche, à condition de remplacer  $\Omega$  par les moyennes logarithmiques respectives :

$$\Phi = \frac{T_1 - T_4}{\frac{e_1}{\lambda_1 \cdot \bar{S}_{\ln 1,2}} + \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot \bar{S}_{\ln 2,3}} + \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot \bar{S}_{\ln 3,4}}} \quad (7)$$

On retrouve les résistances thermiques qui, placées en série, s'additionnent :  $\frac{e}{\lambda \cdot \bar{S}_{\ln}}$ .

c) *Problème de la conduite cylindrique recouverte d'un manchon isolant*

Dans les problèmes concrets, la conduite se trouve généralement plongée dans un fluide, de température  $T_F$  et il se produit alors un transfert de chaleur par *convection* entre la surface externe du manchon isolant et le fluide.

Soient  $R_i$  et  $R_e$  les rayons intérieur et extérieur du tube,  $\lambda$  sa conductivité thermique. On ajoute un manchon concentrique qui l'enveloppe, d'épaisseur  $e$  et de conductivité  $\lambda_m$ . On suppose que la température du fluide extérieur est inférieure aux températures intérieures, et que le débit de chaleur est donc dirigé vers l'extérieur. On se propose d'étudier l'incidence de l'épaisseur du manchon isolant sur les pertes de chaleur.

Le débit de chaleur transféré est donné par la formule (6), pour le tube et pour le manchon :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \ln \frac{R_e}{R_i}} \quad \text{tube} \qquad \Phi = \frac{T_e - T_m}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda_m} \ln \frac{R_e + e}{R_i}} \quad \text{manchon}$$

Ainsi qu'il sera vu plus loin, on peut écrire que le débit de chaleur transféré par convection est :

$$\Phi = S \cdot h_C (T_m - T_F) = 2 \cdot \pi \cdot (R_e + e) \cdot L \cdot h_C (T_m - T_F) = \frac{T_m - T_F}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (R_e + e) \cdot h_C}}$$

Des trois expressions du débit de chaleur on déduit que :

$$\Phi = \frac{T_i - T_F}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \ln \frac{R_e}{R_i} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda_m} \ln \frac{R_e + e}{R_i} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (R_e + e) \cdot h_C}}$$

ou encore :

$$\Phi = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_F)}{\frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_e}{R_i} + \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{R_e + e}{R_e} + \frac{1}{h_C \cdot (R_e + e)}} \quad (8)$$

La résistance thermique est la somme de deux résistances de conduction et d'une résistance de convection. La présence d'un isolant augmente la résistance de conduction, ce qui est souhaité, mais diminue la résistance de convection (par augmentation de la surface d'échange), ce qui l'est moins.

Calculons la dérivée de  $\Phi$  par rapport à  $e$ , qui devrait logiquement être négative :

$$\frac{d\Phi}{de} = \frac{-2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_F)}{\left[ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_e}{R_i} + \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{R_e + e}{R_e} + \frac{1}{h_C \cdot (R_e + e)} \right]^2} \cdot \left[ \frac{1}{\lambda_m} \cdot \frac{1}{R_e + e} + \frac{1}{h_C} \cdot \frac{-1}{(R_e + e)^2} \right]$$

$$\frac{d\Phi}{de} = \frac{-2 \cdot \pi \cdot L \cdot (T_i - T_F)}{\left[ \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R_e}{R_i} + \frac{1}{\lambda_m} \ln \frac{R_e + e}{R_e} + \frac{1}{h_C \cdot (R_e + e)} \right]^2} \cdot \frac{1}{\lambda_m \cdot (R_e + e)^2} \cdot \left[ e + R_e - \frac{\lambda_m}{h_C} \right] \quad (9)$$

On voit que cette dérivée est susceptible d'être positive dans certaines conditions. En effet, si  $\frac{\lambda_m}{h_C} < R_e$ , la dérivée est toujours *négative* (le crochet de droite est toujours positif), quel que soit  $e$ , et l'augmentation de l'épaisseur d'isolant réduit le débit de chaleur, et donc les pertes.

Par contre, si  $\frac{\lambda_m}{h_C} > R_e$  il existe une valeur  $e_{\min} = \frac{\lambda_m}{h_C} - R_e$  pour laquelle le débit est maximal. Lorsque

l'épaisseur varie de 0 à  $e_{\min}$ , la dérivée est positive, et le débit augmente. En clair, les pertes thermiques sont plus importantes qu'en l'absence d'isolant quand  $e < e_{\min}$ .

La condition  $\frac{\lambda_m}{h_C} < R_e$  est d'autant plus facile à vérifier que le diamètre du tube cylindrique est grand.

En revanche, pour des tubes de petit diamètre, une épaisseur d'isolant insuffisante peut, dans certains cas, accroître les pertes thermiques avec le milieu extérieur, ce qui va à l'encontre du but recherché.

On appelle cette valeur  $R_c = \frac{\lambda_m}{h_c}$  le **rayon critique**. On a toujours intérêt à faire en sorte que  $R_c$  soit inférieur à  $R_e$ , en choisissant un meilleur isolant, de conductivité plus faible.

d) *Problème à symétrie sphérique*

Soit une armature sphérique de rayon intérieur  $R_1$  et de rayon extérieur  $R_2$ . La paroi interne est à température  $T_1$  et la paroi externe à  $T_2$ . On suppose que le débit de chaleur transféré par conduction dans la couche sphérique est radial. En l'absence de source de chaleur interne, le débit de chaleur transféré par conduction sur une surface sphérique comprise entre la surface interne et la surface externe est constant. Soit  $\Phi$  ce débit.

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi \cdot S = \varphi \cdot (4 \cdot \pi \cdot r^2) = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \\ - \int_{T_1}^{T_2} 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot dT &= \int_{R_1}^{R_2} \Phi \cdot \frac{dr}{r^2} \\ T_1 - T_2 &= \frac{\Phi}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \\ \Phi &= 4 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \lambda} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 \cdot R_2}} \\ \Phi &= \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot R_2)}} \end{aligned} \tag{10}$$

Plus généralement, lorsqu'il y a plusieurs couches :

$$\Phi = \frac{T_i - T_e}{\sum_k \frac{e_k}{\lambda_k \cdot (4 \cdot \pi \cdot R_k \cdot R_{k+1})}}$$

On pourra, à titre d'exercice, se demander si, comme dans le cas de la conduite cylindrique, il existe un rayon critique conduisant à des cas où une épaisseur d'isolant trop faible entraînerait une perte de chaleur supérieure à la perte subie en l'absence d'isolant.

e) *Problème de l'ailette*

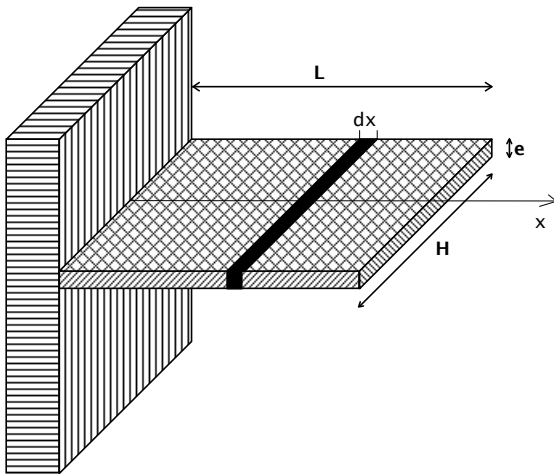
L'ailette a pour fonction d'amplifier les échanges de chaleur entre un *mur plan* et un fluide extérieur. Le transfert entre l'ailette et le mur se fait par conduction, alors que les échanges avec le fluide extérieur ont lieu par convection.

Un exemple très contemporain de ce type d'application est le refroidissement des microprocesseurs, dont la tendance à l'échauffement est combattue par un abaissement de la tension de fonctionnement, d'une part, et par des radiateurs à ailettes, d'autre part.

Considérons une ailette d'épaisseur  $e$ , de longueur  $L$ , de largeur  $H$ . L'épaisseur est supposée être petite par rapport à la longueur et la largeur. On néglige toutes les variations de température sur une section droite de l'ailette, et on suppose que  $T$  est fonction de la seule distance  $x$  par rapport au mur.

On pose :

- $T_F$  température du fluide extérieur
- $T_0$  température du mur, et donc de l'ailette en  $x = 0$
- $\lambda$  conductivité thermique de l'ailette
- $h$  coefficient d'échange moyen entre l'ailette et l'air



Considérons le petit volume en forme de parallélépipède de largeur  $H$ , d'épaisseur  $e$  et de longueur  $dx$  :

- Il reçoit de la chaleur par **conduction**, du côté du mur, sur une surface  $\Omega = H \cdot e$ .
- Il cède de la chaleur par **conduction** par la face opposée, sur la même surface  $\Omega$ .
- Il cède de la chaleur par **convection** sur une surface  $S = P \cdot dx$  où  $P = 2(H + e)$  est le périmètre.

Sur ce petit volume, le bilan thermique va s'écrire :

$$\varphi_x \cdot \Omega - \varphi_{x+dx} \cdot \Omega - h \cdot S \cdot (T_x - T_F) = 0$$

Or :

$$\varphi_{x+dx} = \varphi_x + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad \varphi_x = -\lambda \cdot \frac{dT_x}{dx}$$

soit :

$$\varphi_x - \varphi_{x+dx} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot dx \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\lambda \cdot \frac{d^2 T_x}{dx^2}$$

Ce qui donne :

$$\lambda \cdot \frac{d^2 T_x}{dx^2} \cdot dx \cdot \Omega - h \cdot P \cdot dx \cdot (T_x - T_F) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega} \cdot (T - T_F) = 0 \quad (11)$$

Remarquons que l'expression  $\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}$  a la dimension d'une surface.

Posons :

$$\theta = T - T_F \quad D = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}} \quad \text{et} \quad X = \frac{x}{D}$$

L'équation (11) devient finalement :

$$\frac{d^2 \theta}{dX^2} - \theta = 0 \quad (12)$$

Notons que  $\theta$  a la dimension d'une température, alors que  $X$  est sans dimension.

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$\theta = A \cdot \text{ch}(X) + B \cdot \text{sh}(X)$$

On détermine  $A$  et  $B$  à partir des conditions aux limites :

- $x = 0$  donne  $X = 0$  et  $\theta = T_0 - T_F = \theta_0$  donc  $A = \theta_0$
- $x = L$  donne  $X = \frac{L}{D}$  et  $\frac{d\theta}{dX} = 0$  (en négligeant la transmission de chaleur en bout d'ailette)

$$\text{soit : } \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{X=\frac{L}{D}} = \theta_0 \cdot \text{sh} \frac{L}{D} + B \cdot \text{ch} \frac{L}{D} = 0 :$$

La distribution de température s'écrit alors :

$$\theta = \theta_0 \cdot \left( \text{ch} X - \frac{\text{sh} \frac{L}{D} \cdot \text{sh} X}{\text{ch} \frac{L}{D}} \right) = \theta_0 \cdot \frac{\text{ch} \left( \frac{L}{D} - X \right)}{\text{ch} \frac{L}{D}} \quad (13)$$

$$T = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{\text{ch} \frac{L-x}{D}}{\text{ch} \frac{L}{D}} \quad \text{avec } D = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}} \quad (14)$$

La température à l'extrémité ( $x = L$ ) s'écrit :

$$T_L = T_F + \frac{T_0 - T_F}{\text{ch} \frac{L}{D}}$$

L'écoulement de chaleur à l'intérieur de l'ailette, pour  $x = 0$  est donné par :

$$\Phi_0 = -\lambda \cdot \Omega \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda \cdot \Omega \cdot \frac{T_0 - T_F}{D} \cdot \left. \frac{\text{sh} \frac{L-x}{D}}{\text{ch} \frac{L}{D}} \right|_{x=0} \quad (15)$$

$$\Phi_0 = \frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \cdot (T_0 - T_F) \cdot \text{th} \frac{L}{D} = \sqrt{\lambda \cdot \Omega \cdot h \cdot P} \cdot (T_0 - T_F) \cdot \text{th} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}} \right)$$

Le **rendement** d'une ailette est défini comme étant le rapport entre la chaleur réellement transmise à travers l'ailette et la chaleur qui serait transmise par convection ou rayonnement à partir de la surface de base de la tige, si l'ailette était supprimée.

$$\eta = \frac{\frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \cdot (T_0 - T_F) \cdot \text{th} \frac{L}{D}}{h \cdot \Omega \cdot (T_0 - T_F)} \quad \text{avec } \frac{1}{D} = \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{P \cdot \lambda}{\Omega \cdot h}} \cdot \text{th} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}} \right) \quad (16)$$

ou encore, en remarquant que ( $e \ll H$ ) :

$$\frac{P}{\Omega} = \frac{2 \cdot (H + e)}{H \cdot e} \approx \frac{2 \cdot H}{H \cdot e} = \frac{2}{e}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{e \cdot h}} \cdot \text{th} \left( L \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{e \cdot \lambda}} \right) \quad (17)$$

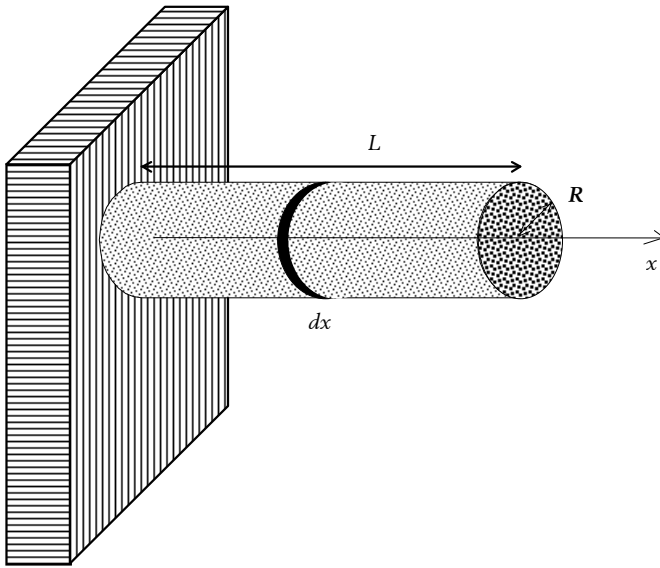
f) **Problème de la barre encastrée**

La barre encastrée se traite comme l'ailette, avec quelques nuances. En général, on ne néglige pas la transmission de chaleur en bout de barre.

Considérons une barre cylindrique encastrée de longueur  $L$ , de rayon  $R$ . On néglige toutes les variations de température sur une section droite de la barre et on suppose que  $T$  est fonction de la seule distance  $x$  par rapport au mur.

On pose :

- $T_F$  température du fluide entourant la barre
- $T_0$  température du mur, et donc de la barre en  $x = 0$
- $\lambda$  conductivité thermique de la barre
- $h$  coefficient d'échange moyen entre la barre et l'air



Considérons le petit volume en forme de cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $dx$  :

- Il reçoit de la chaleur par **conduction**, du côté du mur, sur une surface  $\Omega = \pi R^2$ .
- Il cède de la chaleur par **conduction** par la face opposée, sur la même surface  $\Omega$ .
- Il cède de la chaleur par **convection** sur une surface  $S = P \cdot dx$  où  $P = 2\pi R$  est le périmètre.

Sur ce petit volume, le bilan thermique va s'écrire :

$$\varphi_x \cdot \Omega - \varphi_{x+dx} \cdot \Omega - h \cdot S \cdot (T_x - T_F) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega} \cdot (T - T_F) = 0 \quad (18)$$

En posant :  $\theta = T - T_F$   $D = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}}$  et  $X = \frac{x}{D}$

L'équation différentielle est la même :  $\frac{d^2 \theta}{dX^2} - \theta = 0 \quad (19)$

La solution de l'équation différentielle du second ordre est du type :

$$\theta = A \cdot \text{ch}(X) + B \cdot \text{sh}(X)$$

On détermine  $A$  et  $B$  à partir des conditions aux limites :

- $x = 0$  donne  $X = 0$  et  $\theta = T_0 - T_F = \theta_0$  donc  $A = \theta_0$
- $x = L$  donne  $X = \frac{L}{D}$  mais cette fois, on ne néglige pas la transmission de chaleur en bout de barre.

On écrit que la chaleur qui arrive par conduction à travers la section  $\Omega$  est évacuée par convection à travers la surface de l'extrémité  $\Omega_L$ . Lorsque la barre est pleine, et que l'extrémité est plate,  $\Omega$  et  $\Omega_L$  sont égaux, mais ils peuvent être différents (voir le doigt de gant). De même, le coefficient convectif  $h_L$  peut être différent de  $h$ .

$$\varphi_L \cdot \Omega = h_L \cdot \Omega_L (T_L - T_F) = -\lambda \cdot \Omega \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L}$$

Si l'on remarque que  $\frac{dT}{dx} = \frac{1}{D} \frac{d\theta}{dX}$ , alors : 
$$h_L \cdot \Omega_L \cdot \theta_L = -\frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \left. \frac{d\theta}{dX} \right|_{x=\frac{L}{D}}$$

$$h_L \cdot \Omega_L \cdot \left( \theta_0 \cdot \operatorname{ch} \frac{L}{D} + B \cdot \operatorname{sh} \frac{L}{D} \right) = -\frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \cdot \left( \theta_0 \cdot \operatorname{sh} \frac{L}{D} + B \cdot \operatorname{ch} \frac{L}{D} \right)$$

On pose :  $\beta = \frac{h_L \cdot D}{\lambda} \cdot \frac{\Omega_L}{\Omega}$  (nombre sans dimension) et on trouve : 
$$B = -\theta_0 \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{L}{D} + \beta \cdot \operatorname{ch} \frac{L}{D}}{\beta \cdot \operatorname{sh} \frac{L}{D} + \operatorname{ch} \frac{L}{D}}$$

Finalement :

$$\theta = \theta_0 \cdot \frac{\beta \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{L}{D} - X \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{L}{D} - X \right)}{\beta \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{L}{D} \right) + \operatorname{ch} \left( \frac{L}{D} \right)} \quad (20)$$

$$T = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{\beta \cdot \operatorname{sh} \frac{L-x}{D} + \operatorname{ch} \frac{L-x}{D}}{\beta \cdot \operatorname{sh} \frac{L}{D} + \operatorname{ch} \frac{L}{D}} \quad (21)$$

La température à l'extrémité ( $x = L$ ) s'écrit :

$$T_L = T_F + \frac{T_0 - T_F}{\beta \cdot \operatorname{sh} \frac{L}{D} + \operatorname{ch} \frac{L}{D}} \quad (22)$$

Le calcul de l'écoulement de chaleur (pour  $x = 0$ ) donne :

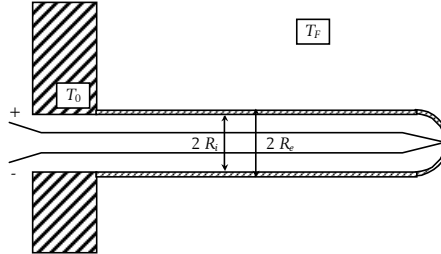
$$\Phi_0 = -\lambda \cdot \Omega \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda \cdot \Omega \cdot \frac{T_0 - T_F}{D} \cdot \frac{\beta \cdot \operatorname{ch} \frac{L}{D} + \operatorname{sh} \frac{L}{D}}{\beta \cdot \operatorname{sh} \frac{L}{D} + \operatorname{ch} \frac{L}{D}} \quad (23)$$

$$\Phi_0 = \frac{\lambda \cdot \Omega}{D} \cdot (T_0 - T_F) \cdot \frac{\beta + \operatorname{th} \frac{L}{D}}{1 + \beta \cdot \operatorname{th} \frac{L}{D}}$$

$$\text{avec } D = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}} \quad \text{et } \beta = \frac{h_L \cdot D}{\lambda} \cdot \frac{\Omega_L}{\Omega}$$

g) *Problème du doigt de gant*

Le doigt de gant est un cas particulier de la barre encastree. Il s'agit d'un cylindre creux dont l'extrémité est soit plane, soit hémisphérique. Un usage classique est la mesure de température à l'aide d'un thermocouple. On est généralement intéressé par le profil de température, et plus particulièrement par la valeur  $T_L$  de la température à l'extrémité.



Soient  $R_e$  et  $R_i$  les rayons extérieur et intérieur et  $L$  la longueur du doigt. Évaluons  $\Omega$  la section à travers laquelle s'écoule la chaleur par conduction,  $\Omega_L$  la surface de l'extrémité hémisphérique,  $P$  le périmètre.

$$\Omega = \pi \cdot (R_e^2 - R_i^2) \quad \Omega_L = 2 \cdot \pi \cdot R_e^2 \quad P = 2 \cdot \pi \cdot R_e$$

- Remarquons que si l'on néglige la transmission de chaleur à l'extrémité, l'équation (14) donne le profil :

$$T = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{\text{ch} \frac{L-x}{D}}{\text{ch} \frac{L}{D}} \quad \text{avec } D = \sqrt{\frac{\lambda \cdot \Omega}{h \cdot P}}$$

$$T_L = T_F + \frac{T_0 - T_F}{\text{ch} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}} \right)} = T_F + \frac{T_0 - T_F}{\text{ch} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot 2R_e}{\lambda \cdot (R_e^2 - R_i^2)}} \right)}$$

Alors :

$$T_L = T_F + \frac{T_0 - T_F}{\text{ch} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h}{\lambda \cdot e}} \right)} \quad \text{si } e = R_e - R_i \ll R_e$$

(24)

- Si l'on prend en compte la transmission de chaleur à l'extrémité, c'est l'équation (21) qui donne le profil :

$$T = T_F + (T_0 - T_F) \cdot \frac{\beta \cdot \text{sh} \frac{L-x}{D} + \text{ch} \frac{L-x}{D}}{\beta \cdot \text{sh} \frac{L}{D} + \text{ch} \frac{L}{D}} \quad \text{avec : } \beta = \frac{h \cdot D}{\lambda} \cdot \frac{\Omega_L}{\Omega} = \sqrt{\frac{h \cdot \Omega}{\lambda \cdot P}} \cdot \frac{\Omega_L}{\Omega}$$

Alors :

$$T_L = T_F + \frac{(T_0 - T_F)}{\beta \cdot \text{sh} \frac{L}{D} + \text{ch} \frac{L}{D}} = T_F + \frac{(T_0 - T_F)}{\sqrt{\frac{h \cdot \Omega}{\lambda \cdot P}} \cdot \frac{\Omega_L}{\Omega} \cdot \text{sh} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}} \right) + \text{ch} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h \cdot P}{\lambda \cdot \Omega}} \right)}$$

$$T_L = T_F + \frac{(T_0 - T_F)}{\sqrt{\frac{h \cdot e}{\lambda}} \cdot \frac{R_e}{e} \cdot \text{sh} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h}{\lambda \cdot e}} \right) + \text{ch} \left( L \cdot \sqrt{\frac{h}{\lambda \cdot e}} \right)} \quad \text{si } e \ll R_e \quad (25)$$

## C. Transfert de chaleur par convection

### 1. Introduction

Le transfert de chaleur par convection apparaît entre deux phases dont l'une au moins est mobile, en présence d'une différence de température. Le mouvement des phases peut être provoqué par une dégradation d'énergie mécanique, le transfert de chaleur est dit de *convection forcée*. Le mouvement peut être provoqué par l'existence même du transfert de chaleur par suite de l'apparition dans le milieu d'une différence de masse volumique, le transfert de chaleur est dit de *convection naturelle* ou *libre*. Dans ce qui suit, nous nous limiterons au transfert de chaleur par convection forcée qui est le mode de transfert de chaleur essentiel pour de nombreux appareils industriels de transfert de l'énergie thermique.

### 2. Définition des conductances partielles et globales de transfert par convection

L'écoulement de la phase mobile se faisant généralement à l'intérieur ou à l'extérieur de conduites, dans de nombreux problèmes industriels le transfert de chaleur par convection forcée se fait entre deux phases mobiles séparées par une phase solide.

Imaginons un fluide chaud à la température  $T_C$  s'écoulant d'un côté d'une paroi métallique et un fluide froid à la température  $T_F$  s'écoulant de l'autre côté de la paroi d'épaisseur  $x$ . En régime stationnaire, les distributions de température observées entre le fluide chaud et le fluide froid sont voisines de celles schématisées sur la Figure 1.

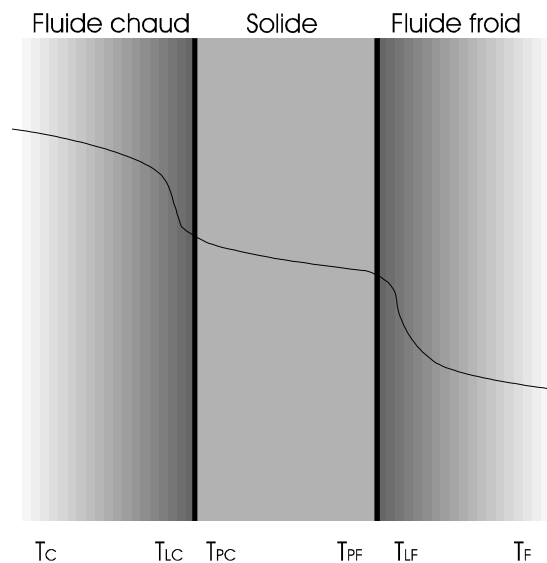


Figure 1

L'étude des écoulements d'un fluide à l'intérieur ou à l'extérieur d'une conduite montre qu'il est toujours possible de répartir la distribution des vitesses du fluide en deux zones principales :

- Une première zone située au voisinage de la paroi. Son épaisseur occupe toute la conduite si l'écoulement est laminaire mais elle décroît très rapidement lorsque l'écoulement devient de plus en plus turbulent. Dans cette première zone, le transport de la chaleur, se fait, comme le transport de la matière et de la quantité de mouvement, par diffusion moléculaire.
- Une deuxième zone située au delà de la première, et dans laquelle le fluide est animé d'un mouvement tourbillonnant aléatoire entraînant très rapidement une égalisation de la vitesse de la température et des compositions du fluide.

En écoulement turbulent, dans la première zone ou *couche limite*, les gradients de température, de vitesse et de compositions sont très importants, de telle sorte que la résistance principale au transfert est localisée dans la couche limite.

La distribution des températures dans la phase fluide peut s'obtenir en théorie par la résolution du bilan différentiel d'énergie, soit :

$$\rho \cdot C_P \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_e \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q - \ell'_w \quad (26)$$

$u_x, u_y, u_z$  sont les composantes du vecteur vitesse  $u$

$q$  est le débit de chaleur engendré par unité de volume

$\ell'_w$  est le débit de travail perdu par unité de volume

$\lambda_e$  est la conductivité thermique apparente du fluide

Pour résoudre cette équation il faut connaître les valeurs locales et instantanées du vecteur vitesse et la valeur locale de la conductivité thermique. Il faut donc associer à l'équation précédente celles traduisant les bilans différentiels de matière et de quantité de mouvement. La résolution simultanée de ce système d'équations n'est envisageable que dans les cas simples de géométrie et d'écoulements et principalement pour l'écoulement laminaire. Pour l'écoulement turbulent des hypothèses simplificatrices et des approximations sur les distributions de vitesse doivent être faites pour obtenir une expression théorique donnant la distribution des températures et le flux transféré à la paroi.

Par suite de ces difficultés et de l'impossibilité de mesurer, pour l'écoulement turbulent, l'épaisseur et les températures de la couche limite, on définit le flux de chaleur transféré à la paroi de manière purement phénoménologique, en posant :

$$d\Phi = h_i \cdot dS_i \cdot (T_C - T_{PC}) = h_e \cdot dS_e \cdot (T_{PF} - T_F) \quad (27)$$

Les deux coefficients  $h_i$  et  $h_e$  représentent les coefficients de transfert partiel (ou conductance partielle de transfert) interne et externe. La définition des coefficients  $h_i$  et  $h_e$  est arbitraire puisque leur valeur dépend du choix de la force motrice. Pour évaluer les conductances précédentes à partir de la connaissance du débit transféré, il est nécessaire de connaître la température du fluide à la surface du solide, température délicate à mesurer. Aussi, préfère-t-on définir le débit transféré par rapport à une différence de température plus facilement accessible, par exemple celle entre les températures des noyaux turbulents des fluides intérieur et extérieur, soit :

$$d\Phi = U \cdot dS_m \cdot (T_C - T_F) \quad (28)$$

Le coefficient  $U$  représente une conductance globale de transfert et  $S_m$  désigne une valeur moyenne de la surface solide de séparation.

$$d\Phi = \frac{(T_C - T_F)}{\frac{1}{U \cdot dS_m}} = \frac{(T_C - T_F)}{\frac{1}{h_i \cdot dS_i} + \frac{x}{\lambda \cdot dS_m} + \frac{1}{h_e \cdot dS_e}} \quad (29)$$

La résistance globale est la somme des trois résistances partielles placées en série.

Les conductances  $h_i, h_e, U$  sont des conductances locales car elles permettent d'évaluer le flux transféré local. Pour évaluer le débit de chaleur transféré dans une phase ou entre les deux phases entre l'entrée et la sortie, l'usage courant est de prendre soit la moyenne arithmétique, soit la moyenne logarithmique des différences de température intervenant dans l'expression du débit local. Ainsi pour le fluide interne, si  $\Phi$  désigne le flux transféré entre l'entrée et la sortie on écrira :

$$\Phi = h_{ma} \cdot (\Delta T)_{ma} \quad \text{où} \quad (\Delta T)_{ma} = \frac{(T_C - T_{PC})_{sortie} + (T_C - T_{PC})_{entree}}{2} \quad (30)$$

$$\Phi = h_{ml} \cdot (\Delta T)_{ml} \quad \text{où} \quad (\Delta T)_{ml} = \frac{(T_C - T_{PC})_{sortie} - (T_C - T_{PC})_{entree}}{\ln \frac{(T_C - T_{PC})_{sortie}}{(T_C - T_{PC})_{entree}}} \quad (31)$$

Les coefficients de transfert  $h_{ma}$  et  $h_{ml}$  sont des coefficients globaux du système ouvert basés sur la moyenne arithmétique ou la moyenne logarithmique des différences de températures. Ils sont en général différents et, comme nous le verrons plus loin, dans de nombreux échangeurs de chaleur, les coefficients de transferts locaux sont voisins des coefficients globaux basés sur la moyenne logarithmique des différences de température.

### 3. Représentation des conductances de transfert

L'analyse adimensionnelle du flux de chaleur transféré fait apparaître deux critères contenant le coefficient de transfert convectif.

#### a) Le critère de Margoulis (ou Stanton)

Il représente l'efficacité locale du transport transversal par rapport au transport longitudinal. Il est tel que :

$$Ms_t = \frac{h}{\rho \cdot u_m \cdot C_p} \quad (32)$$

On relie ce critère d'une part au critère de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \left( \alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p} \right) \quad (33)$$

où  $\nu$  et  $\alpha$  désignent respectivement les diffusivités de quantité de mouvement (ou viscosité cinématique) et thermique et d'autre part au critère de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho \cdot u_m \cdot D}{\mu_m} \quad (34)$$

où  $\mu_m$  est la viscosité moyenne du fluide et  $D$  une longueur caractéristique de l'enceinte dans laquelle s'effectue le transfert.

Le critère de Prandtl est caractéristique des propriétés physico-chimiques diffusionnelles du fluide et le critère de Reynolds est caractéristique de la nature de l'écoulement.

Deux autres critères peuvent intervenir également :

- le rapport  $\frac{L}{D}$  où  $L$  est la longueur d'une conduite cylindrique de diamètre  $D$ . Ce rapport permet de tenir compte des perturbations dues aux extrémités de la conduite.
- le rapport  $\left(\frac{\mu_m}{\mu_p}\right)^{0,14}$  où  $\mu_p$  est la viscosité du fluide à la température de la paroi. Ce rapport permet de tenir compte des variations de viscosité en fonction de la température (variation importante dans le cas des liquides).

À l'exception des gaz sous faibles pressions, pour lesquels l'analogie entre les trois transferts de matière, de chaleur et de quantité de mouvement est sensiblement réalisée, Colburn a montré expérimentalement qu'un meilleur accord était observé dans tous les cas entre les trois transports en considérant les trois critères adimensionnels suivants :

♦ pour la matière : 
$$j_m = Ms_m \cdot (Sc)^{2/3} \quad (35)$$

$Ms_m$  est le critère de Margoulis pour la matière : 
$$Ms_m = \frac{k_D}{u_m}$$

où  $k_D$  est la conductance globale de transfert de matière.

$Sc$  est le critère de Schmidt : 
$$Sc = \frac{\nu}{D_t}$$

où  $D_t$  est la diffusivité du soluté transféré dans la phase fluide.

♦ pour la chaleur : 
$$j_t = Ms_t \cdot (Pr)^{2/3} \quad (36)$$

♦ pour la quantité de mouvement : 
$$\frac{f}{2} = \frac{\tau}{\rho \cdot u_m^2} \quad (37)$$

On peut dire que le facteur de frottement est le critère de Margoulis relatif au transfert de quantité de mouvement.

L'analogie de Colburn est telle que :

$$\boxed{j_m = j_t = \frac{f}{2}} \quad (38)$$

Cette relation est assez bien vérifiée expérimentalement. Aussi, utilise-t-on indifféremment pour le transfert convectif de la chaleur les critères  $Ms_t$  ou  $j_t$ .

b) *Le critère de Nusselt*

Il représente le rapport d'une dimension géométrique de l'appareil à l'épaisseur de la couche limite dans le modèle à deux zones. Il est tel que :

$$\boxed{\text{Nu} = \frac{h \cdot D}{\lambda}} \quad (39)$$

Bien que les critères de *Margoulis* ou le facteur  $j_t$  soient directement accessibles par l'expérience, le critère de *Nusselt* est plus usuel pour représenter les variations du coefficient de transfert en fonction des grandeurs intervenant dans les nombres adimensionnels.

Nous allons dans ce qui suit donner quelques-unes des corrélations permettant d'avoir un ordre de grandeur du coefficient de transfert. La dispersion des résultats peut atteindre 30 à 50 % à cause de certains paramètres difficilement contrôlables tels que l'état de surface et l'encrassement des supports solides. Nous nous limiterons au cas de la convection forcée, l'écoulement du fluide étant dû à un gradient de pression statique et dynamique et non à un gradient de pression potentielle.

**4. Principales corrélations en convection forcée**

a) *A l'intérieur des conduites*

Comme dans le cas du transfert de quantité de mouvement, les relations sont différentes selon la nature de l'écoulement du fluide à l'intérieur de la conduite.

(1) *Régime d'écoulement laminaire*

Les profils de températures à l'intérieur de la conduite peuvent être obtenus théoriquement pour différentes conditions aux limites. Les hypothèses classiques postulées à la paroi étant :

- température de la paroi constante
- flux de chaleur transféré à la paroi constant

Pour ces deux hypothèses, les études théoriques, dues à l'origine à *Graetz*, montrent que, pour des tubes très longs, le critère de *Nusselt*  $\text{Nu}$  tend vers une valeur limite, soit :

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= 3,66 && \text{pour une conduite cylindrique et une température constante à la paroi.} \\ \text{Nu} &= 4,36 && \text{pour une conduite cylindrique et un flux constant à la paroi.} \end{aligned}$$

Dans la pratique, on admettra que ces valeurs sont atteintes lorsque le régime est établi :

$$\text{pour } \frac{L}{D} > 0,03 \cdot \text{Re} \quad \text{et} \quad \text{Gz} < 10 \quad \text{on prendra :} \quad \text{Nu} = 3,66 \quad (40)$$

$$\text{pour } \frac{L}{D} > 0,03 \cdot \text{Re} \quad \text{et} \quad \text{Gz} > 10 \quad \text{on prendra :} \quad \text{Nu} = 1,6 \cdot (\text{Gz})^{1/3} \quad (41)$$

$\text{Gz}$  désigne le critère de *Graetz* :

$$\text{Gz} = \text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{D}{L} \quad (42)$$

Pour les tubes circulaires de longueur finie,  $\frac{L}{D} < 0,03 \cdot \text{Re}$ , on pourra utiliser :

- la relation de *Hausen* valable pour  $\text{Gz} < 100$  :

$$\text{Nu} = 3,66 + \frac{0,0668 \cdot \text{Gz}}{1 + 0,04 \cdot (\text{Gz})^{2/3}} \quad (43)$$

$$\text{Nu} = 3,66 + \frac{0,085 \cdot \text{Gz}}{1 + 0,047 \cdot (\text{Gz})^{2/3}} \cdot \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (44)$$

- la relation de *Sieder et Tate* valable pour  $\text{Gz} > 100$  :

$$\text{Nu} = 1,6 \cdot (\text{Gz})^{1/3} \quad (45)$$

$$\text{Nu} = 1,86 \cdot (\text{Gz})^{1/3} \cdot \left( \frac{\mu_m}{\mu_p} \right)^{0,14} \quad (46)$$

(2) **Régime d'écoulement turbulent**

A partir des modèles de distribution des vitesses en écoulement turbulent dans les conduites cylindriques circulaires et en tenant compte des analogies entre transfert de chaleur et transfert de quantité de mouvement on aboutit aux relations dites de Prandtl-Taylor et de Von Karman. Ces relations sont, en fait, trop complexes et pas plus précises que certaines relations empiriques.

Dans la pratique, on utilisera les relations dites de *Sieder et Tate* :

$$\text{Gaz : } \quad \boxed{\text{Nu} = 0,023 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,4}} \quad (47)$$

$$\text{Liquides : } \quad \boxed{\text{Nu} = 0,027 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{1/3}} \quad (48)$$

$$\text{ou} \quad \text{Nu} = 0,027 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{1/3} \cdot \left( \frac{\mu_F}{\mu_P} \right)^{0,14} \quad (49)$$

On trouve parfois :

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= 0,023 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,4} & T_p > T_F \\ \text{Nu} &= 0,023 \cdot \text{Re}^{0,8} \cdot \text{Pr}^{0,3} & T_p < T_F \end{aligned} \quad (50)$$

Pour les conduites fermées non circulaires, on peut utiliser toutes ces relations, à condition toutefois de remplacer le diamètre introduit dans les divers critères par le diamètre hydraulique défini précédemment.

b) **A l'extérieur d'obstacles solides**

Nous nous limiterons aux conduites isolées et en faisceau qui correspondent aux cas rencontrés dans les échangeurs de chaleur multitubulaires.

Pour des tubes cylindriques isolés de diamètre compris entre 0,3 et 15 cm, Hilpert a étudié le transfert de chaleur avec de l'air dont la température variait de 19 à 24°C, la température du tube étant de 100°C. L'ensemble de ces résultats expérimentaux peut être représenté par une équation de la forme :

$$\text{Nu} = \frac{h_m \cdot D}{\lambda} = a \cdot \left( \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} \right)^n = a \cdot (\text{Re})^n \quad (51)$$

où  $D$  est le diamètre de la conduite cylindrique.

Les valeurs de  $a$  et  $n$  à utiliser sont données dans le tableau suivant :

Re	$n$	$a$	Nu
1 – 4	0,330	0,891	0,891 – 1,42
4 – 40	0,385	0,821	1,40 – 3,40
40 – 4000	0,466	0,615	3,43 – 29,6
4000 – 40000	0,618	0,174	29,5 – 121
40000 – 200000	0,805	0,0239	121 – 528

L'équation précédente établie pour l'air reste valable pour les gaz diatomiques. Pour les liquides, il est nécessaire de faire intervenir le critère de Prandtl. *Ulsamer* propose une relation du type :

$$\text{Nu} = \frac{h_m \cdot D}{\lambda} = a \cdot \left( \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} \right)^n \cdot (\text{Pr})^{0,3} = a \cdot (\text{Re})^n \cdot (\text{Pr})^{0,3} \quad (52)$$

Re	$n$	$a$
0,1 – 50	0,385	0,91
50 – 10000	0,500	0,60

Dans les faisceaux de tubes, les tubes peuvent être disposés dans une direction normale à l'écoulement, soit dans un même plan, soit en quinconce. Il est difficile de préciser la nature de l'écoulement, car la section offerte au passage du fluide varie constamment. Certains auteurs définissent un critère de Reynolds avec la vitesse du fluide entre deux tubes. Aucune équation n'est applicable directement aux échangeurs industriels.

Dans le cas des rangées de tubes en quinconce, *Colburn* recommande la relation :

$$Nu = \frac{h_m \cdot D}{\lambda} = 0,33 \cdot (Pr)^{1/3} \cdot \left( \frac{\rho \cdot u_{\max} \cdot D}{\mu} \right)^{0,6} \quad (53)$$

$u_{\max}$  représente la vitesse du fluide dans la section minimale rencontrée.

Cette équation est valable pour des critères de Reynolds compris entre 2000 et 32000. Pour des rangées de tubes alignés, *Colburn* a suggéré de ramener la constante 0,33 de l'équation précédente à 0,26.

Lorsque le nombre de rangées de tubes augmente, le coefficient de transfert augmente puis atteint une valeur asymptotique d'ailleurs indépendante de la forme géométrique du faisceau dès que le nombre de rangées est supérieur à 10.

## 5. Étude des échangeurs de chaleur

Les échangeurs de chaleur sont des appareils où le transfert de chaleur à basses et moyennes températures se fait sans changement de phase.

### a) Description des principaux types d'échangeurs de chaleur

#### (1) Échangeurs double tube

Ces échangeurs sont constitués par des éléments rectilignes de deux tubes concentriques raccordés à leurs extrémités par des coudes. Les divers éléments sont tous assemblés par des raccords à démontage rapide, et un remplacement des tubes est possible. Les problèmes de dilatation thermique et d'étanchéité entre le tube intérieur et le tube extérieur sont résolus par l'utilisation de presse étoupe ou de joint torique.

Les tubes sont généralement en acier et les longueurs courantes sont de 3,6 - 4,5 ou 6 m. On utilise également quelquefois des tubes en verre et en graphite.

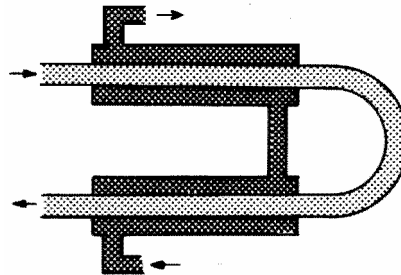


Figure 2

Ces appareils sont intéressants pour les facilités qu'ils offrent pour le démontage et l'entretien. Ils peuvent fonctionner en contre courant pur, ce qui permet d'obtenir de bons rendements. Par contre, ils présentent les inconvénients suivants :

- risque de fuites aux raccords.
- flexion du tube intérieur si la longueur est importante.
- surface d'échange faible pour le volume global de l'appareil par suite du rayon minimal des coudes reliant les longueurs droites des tubes.

Ces échangeurs utilisés depuis l'origine conviennent aux produits sales, pour des débits faibles, des températures et des pressions élevées.

## (2) Échangeurs à faisceau et calandre

Ce type d'échangeurs est de loin le plus répandu dans les unités de transformations des industries chimiques et pétrochimiques. Un faisceau de tubes est situé à l'intérieur d'une calandre dans laquelle circule le deuxième fluide. Cette conception se retrouve également dans les condenseurs, les rebouilleurs et les fours multitubulaires.

Le faisceau est monté en deux plaques en communication avec des boîtes de distribution qui assurent la circulation du fluide à l'intérieur du faisceau en plusieurs passes. Le faisceau muni de chicanes est logé dans une calandre possédant des tubulures d'entrée et de sortie pour le deuxième fluide circulant à l'extérieur des tubes du faisceau selon un chemin imposé par les chicanes.

Tous les éléments entrant dans la construction de ces échangeurs ont fait l'objet d'une normalisation, tant par la T.E.M.A. (*Tubular Exchangers Manufacturer's Association*) que l'A.S.M.E. (*American Society of Mechanical Engineers*) ou l'A.P.I. (*American petroleum institute*).

Dans les ouvrages généraux consacrés au transfert de chaleur, on trouvera les schémas des principaux types d'échangeurs à faisceau et calandre.

La calandre est généralement réalisée en acier au carbone et les brides portant les boîtes de distribution et le couvercle sont soudées. Les tubes du faisceau répondent à des spécifications très sévères. Le choix du matériau dépend de l'utilisation :

- acier au carbone pour usage courant ;
- laiton amirauté pour les appareils travaillant avec l'eau de mer ;
- aciers alliés pour les produits corrosifs et les températures élevées ;
- aluminium et cuivre pour les très basses températures.

Les tubes sont fixés dans les plaques par mandrinage et la perforation des trous dans les plaques est réalisée selon une disposition normalisée, soit au pas triangle, soit au pas carré. Le pas triangle permet de placer environ 10 % de plus de tubes que le pas carré sur une plaque tubulaire de diamètre donné, mais, en contre partie, la disposition des tubes rend difficile le nettoyage des tubes par insertion de grattoirs.

Les chicanes qui permettent d'allonger le chemin du fluide circulant dans la calandre sont souvent constituées par un disque de diamètre légèrement inférieur à celui de la calandre comportant une section libre représentant 20 à 45 % de la section.

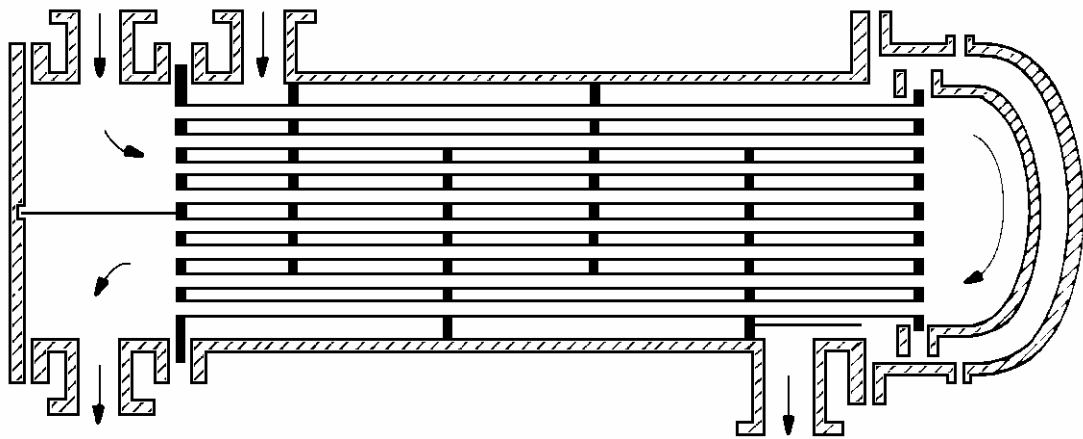


Figure 3

Les boîtes de distribution et de retour sont cloisonnées. Ce cloisonnement permet au fluide de traverser successivement plusieurs sections du faisceau, ce qui a pour objet d'accroître la vitesse du fluide et d'augmenter le coefficient de transfert à l'intérieur des tubes. Cette disposition correspond toujours à un nombre pair de passages (ou passes) dans le faisceau.

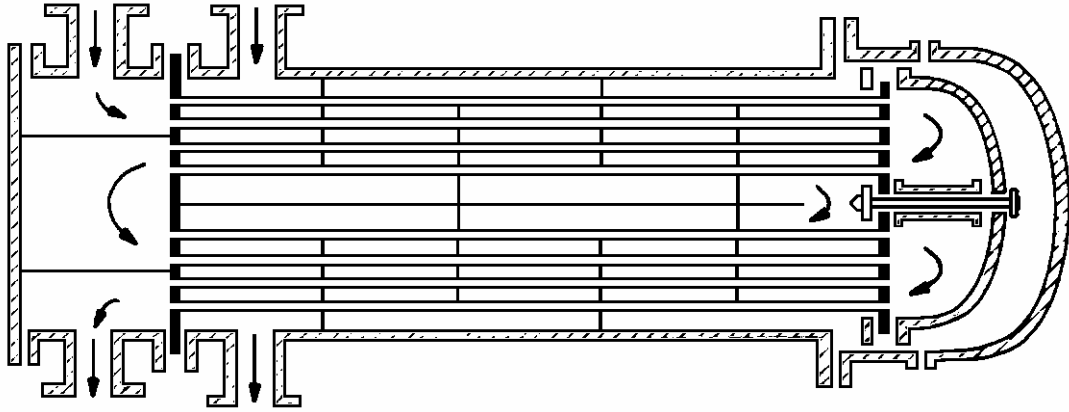


Figure 4

### (3) Échangeurs à plaques

Les échangeurs à plaques se présentent sous diverses formes :

- les échangeurs à plaques hélicoïdales ;
- les échangeurs à plaques planes ;
- les échangeurs à plaques munies d'ailettes ;
- les échangeurs à tubes munis d'ailettes.

Dans tous ces échangeurs, les surfaces d'échange sont très supérieures à celles des échangeurs à faisceau et calandre, pour un encombrement géométrique donné. En outre, les écoulements secondaires et les pertes de charge correspondantes sont éliminés ainsi que les problèmes de court circuit et de dilatation différentielle. Cependant leur réalisation est beaucoup plus délicate et onéreuse et ils ne sont généralement utilisés que pour des échanges ne nécessitant pas en valeur absolue de très grandes surfaces d'échange.

Les échangeurs à spirale sont formés par une paire de plaques enroulées selon une hélice délimitant deux espaces annulaires rectangulaires où les fluides circulent à contre-courant. Ce type d'échangeur peut être très compact. Ainsi un échangeur de 1 m de diamètre, de 1,5 m de long avec une spirale de 30 m, conduit à une surface d'échange de 100 m<sup>2</sup>. On peut nettoyer les espaces annulaires en enlevant leur couvercle. Ces échangeurs sont réalisés en acier inoxydable, en Inconel et en nickel.

Les échangeurs à plaques planes sont constitués de plaques disposées sur un bâti selon une disposition voisine des plaques des filtres presses. Les plaques d'échange sont désormais standardisées et elles sont réalisées en acier inoxydable, en Inconel, en nickel, et également en bronze et en cupronickel. De tels échangeurs peuvent être très polyvalents et on peut en particulier faire circuler des fluides de très grandes viscosités. On ne peut cependant dépasser des pressions supérieures à 30 atm et des températures supérieures à 150°C. Par rapport à un échangeur à faisceau en acier inoxydable, les échangeurs à plaques planes construits dans le même matériau et à surfaces d'échange identiques sont moins onéreux. Un échangeur ayant des plaques carrées de 0,85 m d'arête, de 3,80 m de long et comportant 416 plaques permet une surface d'échange minimum de 416 m<sup>2</sup>.

Les échangeurs à plaques munies d'ailettes (ou à plaques fines) sont fabriqués à partir de tôle emboutie entre deux plaques planes soudées aux deux extrémités par des rainures permettant le passage des fluides. Des échangeurs se sont développés durant la dernière guerre mondiale pour des échanges thermiques à basses températures, nécessités par le fractionnement des mélanges gazeux. La pression ne peut pas dépasser 50 atm à 35°C. Les plaques sont généralement réalisées en aluminium et leur association constitue un échangeur économiquement rentable lorsque les surfaces d'échange deviennent supérieures à 370 m<sup>2</sup>.

Dans les échangeurs tubulaires à ailettes, des ailettes planes soudées sur des tubes cylindriques permettent d'augmenter le rapport de la surface externe du tube à la surface interne d'un facteur allant de 1 à 40.

Signalons enfin l'existence d'échangeurs à blocs de graphite. Chaque bloc de graphite est percé de rangées de trous traversés de manière appropriée par le fluide chaud et le fluide froid. L'association de plusieurs blocs permet l'obtention d'échangeurs très performants.

**(4) Échangeurs refroidis par une circulation forcée d'air**

Le refroidissement d'un fluide chaud par l'air ambiant s'est développé considérablement depuis 1960, et pour refroidir un fluide, on s'orientera de plus en plus vers cette solution, surtout si l'on ne souhaite pas récupérer la chaleur évacuée. L'air ambiant traverse avec une très grande vitesse des tubes munis d'ailettes à travers lesquels circule le fluide que l'on veut refroidir. Le faisceau de tubes est très généralement constitué de tubes de 1,5 cm de diamètre extérieur munis d'ailettes de 1,25 à 1,5 cm de hauteur, l'espacement entre ailettes étant tel que le rapport entre la surface des ailettes et celle du tube soit de 7 à 20. La longueur des tubes varie de 2,4 à 9 m et la largeur du faisceau de 1,20 à 3,60 m. Le faisceau peut comporter jusqu'à 30 rangées de tubes entassées les unes au-dessus des autres.

L'écoulement de l'air à travers ces rangées de tubes est obtenu à l'aide d'une hélice composée de 4 à 6 pales et le débit d'air peut être modulé en modifiant la vitesse de rotation et l'orientation des pales. Dans certains cas, ces modifications sont réalisées automatiquement, ce qui permet d'adapter le débit d'air aux variations de température et d'humidité de l'air extérieur.

L'air aspiré par l'hélice est distribué sur les rangées de tubes par l'intermédiaire d'une chambre dont la hauteur est supérieure au rayon de l'hélice. La vitesse d'aspiration de l'air est de l'ordre de 5 à 10 m/s. Autour de l'hélice se trouve une couronne dont la hauteur joue un rôle important sur la vitesse de l'air.

Un inconvénient non négligeable de ces appareils est le bruit provoqué par les hélices d'aspiration, bruit que l'on peut cependant réduire en équipant l'ensemble de panneaux isolants, ou en réduisant la vitesse de rotation des hélices.

**b) Calcul des échangeurs**

Rappelons que les échangeurs de chaleur sont des appareils où le transfert de chaleur à **basses et moyennes températures** se fait **sans changement de phase**.

Des méthodes de calcul plus ou moins élaborées existent pour les échangeurs à faisceau et calandre. Les calculs reposent en partie sur les calculs élémentaires que l'on peut effectuer sur les échangeurs double-tube auxquels nous allons nous limiter dans la suite de ce chapitre. L'utilisation des échangeurs à plaques et à refroidissement à air étant plus récente, il n'existe pas de normes et de codifications aussi précises. En outre, par suite de leur très grande variété, il est difficile de proposer des théories et des corrélations générales.

Le but d'un échangeur de chaleur est de récupérer une certaine quantité de chaleur dans des conditions économiques optimales qui sont un compromis entre les frais d'investissement et les frais de fonctionnement. **La dualité perte de charge - transfert de chaleur** est à la base de tout calcul d'échangeur. En effet, les résistances au transfert thermique seront d'autant plus faibles que les vitesses locales d'écoulement du fluide seront plus élevées. Dans ces conditions, on pourra utiliser des surfaces d'échange plus réduites (diminution de l'investissement), mais les pertes de charge étant plus grandes, la pompe de recirculation devra être plus puissante, ce qui entraîne une augmentation du prix de fonctionnement. Ainsi, l'obtention des conditions optimales de fonctionnement d'un échangeur ne peut se concevoir sans une étude en parallèle du transfert de chaleur et de la perte de charge.

En outre, les fluides véhiculés à l'intérieur et à l'extérieur des tubes ne sont pas obligatoirement propres et un encrassement des surfaces se produit dans le temps. La formation de ces dépôts, généralement mauvais conducteurs de la chaleur, augmente les résistances au transfert thermique et conditionne la fréquence des arrêts pour nettoyage et entretien. Dans l'optimisation de l'échangeur, il faut tenir compte de ces variations du transfert thermique au cours du temps et les conditions optimales de fonctionnement d'un échangeur usagé seront différentes de celles de l'échangeur neuf.

**(1) Étude du transfert de chaleur**

Quel que soit le type d'échangeur, si on ne tient compte que des conditions d'entrée et de sortie des deux fluides, le débit de chaleur transféré du fluide 1 (fluide chaud) au fluide 2 (fluide froid), en régime stationnaire et en l'absence de source de chaleur interne, s'écrit :

$$\Phi = \dot{m}_1 \cdot C_{p1} \cdot (T_{1E} - T_{1S}) = \dot{m}_2 \cdot C_{p2} \cdot (T_{2E} - T_{2S}) \quad (54)$$

$\dot{m}$  et  $C_p$  représentent le débit massique et la capacité calorifique massique des fluides. Les indices  $E$  et  $S$  sont relatifs à l'entrée et à la sortie de chacun des fluides.

Exprimons le débit transféré en fonction d'une force motrice (différence de température)  $\Delta T_m$  d'où :

$$\Phi = \frac{\Omega}{\sum_i R_i} \cdot \Delta T_m = U \cdot \Omega \cdot \Delta T_m \quad (55)$$

$\Omega$  est la surface d'échange de l'appareil et  $U$  la conductance globale de transfert définie par rapport à la force motrice  $\Delta T_m$ .

Pour un échangeur de géométrie donnée,  $\Omega$  est connu, mais les valeurs de  $U$  et  $\Delta T_m$  dépendent des caractéristiques de fonctionnement de l'appareil, et nous allons donner dans ce qui suit les expressions de  $\Delta T_m$  et  $U$  pour les caractéristiques de fonctionnement relatives aux échangeurs double tube.

(a) *Différence de température moyenne  $\Delta T_m$*

La différence de température moyenne dépend de la nature, du débit des deux fluides, mais également du sens d'écoulement des deux fluides.

Dans le cas des échangeurs à double tube, les écoulements des fluides peuvent être soit à cocourant, soit à contre courant.

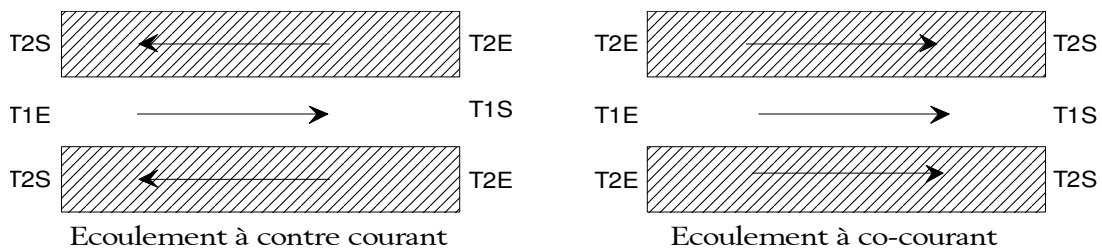


Figure 5

En supposant constant le coefficient de transfert global  $U$  entre les deux extrémités de l'échangeur, un bilan thermique dans l'échangeur permet de montrer que :

$$\Phi = \Omega \cdot U \cdot (DTML) \quad (56)$$

$(DTML)$  représente la moyenne logarithmique des différences de températures aux deux extrémités (on trouve parfois l'abréviation américaine LMTD), soit :

$$DTML = \frac{(\Delta T)_0 - (\Delta T)_L}{\ln \frac{(\Delta T)_0}{(\Delta T)_L}} \quad (57)$$

Échangeur à contre courant

$$(\Delta T)_0 = T_{1E} - T_{2S}$$

$$(\Delta T)_L = T_{1S} - T_{2E}$$

Échangeur à co-courant

$$(\Delta T)_0 = T_{1E} - T_{2E}$$

$$(\Delta T)_L = T_{1S} - T_{2S}$$

(58)

On remarque que la formulation est identique pour les deux associations, mais pour des températures d'entrée et de sortie des fluides identiques, l'association à contre-courant conduit à des débits échangés très supérieurs à ceux obtenus avec une association à co-courant.

Les relations établies dans le cas des échangeurs à double tube ne peuvent pas être utilisées directement pour des échangeurs à faisceau et calandre. Cependant la différence de température à utiliser s'obtient, comme l'a indiqué sous sa forme définitive Nagle, en multipliant la  $DTML$  relative aux deux extrémités par un facteur correctif  $F$  dépendant de deux coefficients  $E$  et  $R$  définis ainsi :

$$E = \frac{T_{2S} - T_{2E}}{T_{1E} - T_{2E}} \quad R = \frac{T_{1E} - T_{1S}}{T_{2S} - T_{2E}} \quad (59)$$

Dans les ouvrages généraux, on trouve des courbes donnant le facteur correctif  $F$  en fonction de  $E$  et  $R$  pour différents types de fonctionnement des échangeurs à faisceau et calandre.

(b) Coefficient de transfert global  $U$

L'étude du transfert de chaleur entre le fluide chaud et le fluide froid au travers de la paroi fait apparaître dans le cas le plus général les 5 résistances de transfert indiquées sur la figure 6.

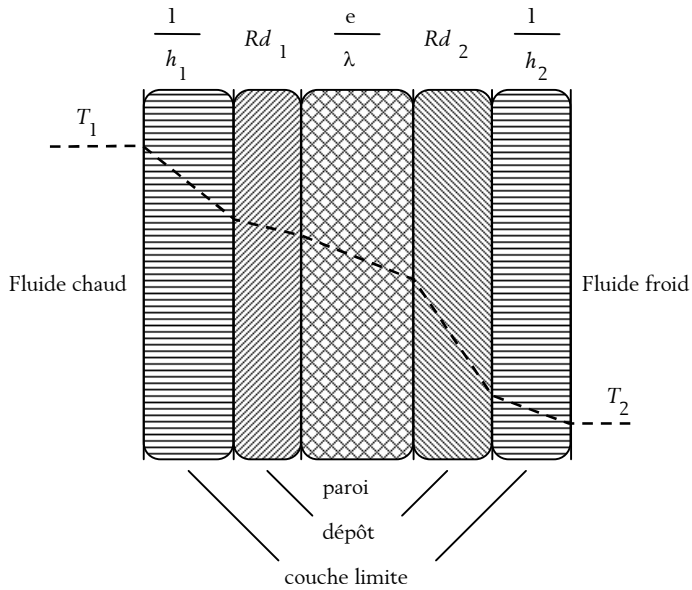


Figure 6

$R_1 = 1/h_1$  est la résistance de transfert par convection côté fluide chaud.

$Rd_1$  est la résistance de transfert par conduction dans le dépôt d'encrassement côté fluide chaud.

$Rp = e/\lambda$  est la résistance de transfert par conduction dans la paroi métallique. Dans la plupart des cas, cette résistance est négligeable devant les autres. C'est ce que nous supposons dans la suite des calculs.

$Rd_2$  est la résistance de transfert par conduction dans le dépôt d'encrassement côté fluide froid.

$R_2 = 1/h_2$  est la résistance de transfert par convection côté fluide froid.

Le débit de chaleur transféré faisant apparaître une surface de transfert  $\Omega$ , il est nécessaire de rapporter les résistances de transfert énumérées précédemment à une même surface de référence. Dans les échangeurs industriels, quel que soit leur type, le fluide chaud circule à l'intérieur du tube, alors que le fluide froid circule à l'extérieur, sauf cas très particulier. Généralement, **on convient de choisir en référence la surface extérieure du tube chaud** et on rapporte les autres résistances à cette même surface en multipliant les diverses résistances par le rapport correspondant des diamètres, d'où les nouvelles valeurs des résistances :  $R_1^*$ ,  $Rd_1^*$ ,  $Rd_2^*$ ,  $R_2$ .

La résistance globale est alors donnée par la relation :

$$\frac{1}{U_s} = \frac{1}{h_2} + Rd_2^* + Rd_1^* + \frac{1}{h_1^*} \quad (60)$$

$U_s$  représente le coefficient global de transfert du tube usagé (sale) par opposition au coefficient global de transfert  $U$  du tube neuf tel que :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1^*} \quad (61)$$

Le coefficient de transfert  $h_1$  est évalué à l'aide de la relation de Sieder et Tate, ou par toute autre relation permettant de prévoir les coefficients de transfert convectif à l'intérieur d'une conduite cylindrique circulaire. Pour l'estimation des coefficients  $h_2$ , la plupart des auteurs sont d'accord pour une utilisation des relations établies lors des écoulements intérieurs, à condition toutefois d'apporter aux critères adimensionnels apparaissant dans les corrélations deux modifications essentielles :

- la première est relative aux diamètres équivalents à utiliser dans les corrélations ;
- la deuxième concerne l'évaluation du flux massique du fluide extérieur.

Pour les échangeurs double tube, la section annulaire étant constante, le flux massique s'obtient en divisant le débit massique par l'aire de la section annulaire comprise entre les deux tubes.

Pour ce qui concerne les *diamètres équivalents*, on distinguera le *diamètre hydraulique*, tel que calculé précédemment avec le périmètre mouillé, et le *diamètre équivalent*, calculé avec le périmètre de transfert.

Pour les échangeurs à faisceau et calandre, ces grandeurs sont beaucoup plus difficiles à définir, car l'écoulement du fluide dans la calandre se fait avec des orientations et des vitesses différentes selon la disposition des chicanes. Cependant, par suite de l'effort de normalisation dans la construction de ces échangeurs, on a pu préciser les modifications à apporter sur les valeurs des diamètres équivalents et du flux massique.

Connaissant  $h_1$  et  $h_2$ , il est alors possible de trouver la valeur de la résistance globale du tube propre. Après un certain temps d'utilisation, il peut se former des dépôts à l'intérieur et à l'extérieur des tubes, augmentant la résistance globale au transfert. Le coefficient de transfert  $U_s$  sera par suite inférieur à celui du tube neuf. Dans la plupart des cas, l'appareil sera calculé pour la valeur minimale du coefficient de transfert relatif au tube usagé. On convient de manière empirique qu'un échangeur doit fonctionner sans nettoyage durant une année et dans la norme T.E.M.A., on trouve une liste des valeurs des résistances d'encrassement pour divers produits véhiculés dans les industries pétrochimiques.

Nous pouvons désormais calculer le coefficient de transfert global et le débit transféré dans l'échangeur en utilisant pour la différence de température moyenne la valeur  $DTML$  (multipliée par le facteur correctif  $F$  dans le cas des échangeurs à faisceau et calandre).

En réalité, ce résultat n'est correct qu'à condition que le coefficient de transfert global  $U_s$  reste constant tout au long de l'échangeur. Cette hypothèse ne peut être qu'approchée puisque le coefficient de transfert dépend des propriétés physico-chimiques des fluides qui varient au cours de leur traversée de l'échangeur. Il est possible cependant de continuer à calculer le débit transféré par la relation (56) à condition de prendre une valeur moyenne de  $U_s$  égale à la valeur du coefficient de transfert pour des valeurs moyennes des températures du fluide chaud et froid appelées généralement températures calorifiques. On trouvera dans les ouvrages généraux des relations permettant d'évaluer, pour des conditions de fonctionnement données, les températures calorifiques d'un échangeur double tube. Ces températures ne sont pas directement nécessaires pour le calcul du débit transféré, mais dans la mesure où elles correspondent aux conditions de températures moyennes des fluides dans l'appareil, elles permettent d'obtenir des valeurs moyennes du critère de Reynolds caractéristique de la nature de l'écoulement des deux fluides dans l'échangeur.

## (2) Étude des pertes de charge

Les deux fluides traversant l'échangeur s'écoulent chacun sous l'effet d'une différence de potentiel égale à une différence de pression totale appelée perte de charge. Les analogies entre le transfert de chaleur et de quantité de mouvement en régime stationnaire sont telles qu'à une augmentation du coefficient de transfert de chaleur correspond également une augmentation de la perte de charge. Industriellement, on essaie de limiter cette perte de charge à 1 atm pour des échangeurs fonctionnant sur refoulement d'une pompe. En revanche, si l'écoulement est dû à la force de pesanteur, il est clair que la perte de charge ne devra pas dépasser la différence de la pression potentielle à l'intérieur des tubes.

La perte de charge (ou plutôt le facteur de frottement  $f/2$ ) à l'intérieur des tubes est évaluée à l'aide des relations classiques. Ces calculs sortent du cadre de ce cours.

## D. Transfert de chaleur par rayonnement

### 1. Introduction

La plupart des corps matériels solides, liquides ou gazeux, portés à une température supérieure à 0 K émettent un rayonnement électromagnétique. Lorsque ce dernier est absorbé, il est transformé en énergie thermique. Tout corps qui émet ce type de rayonnement est capable d'absorber un rayonnement de même nature. Ainsi il apparaîtra entre deux corps capables d'émettre ce type de rayonnement un échange de chaleur dit par rayonnement. Ce type d'échange existe même lorsque les deux corps sont à la même température mais dans ce cas le débit net de chaleur échangé est nul (les deux corps sont dits en équilibre thermique). Le débit de chaleur croît au fur et à mesure que la différence de température entre les deux milieux augmente mais il dépend aussi du niveau des températures. On peut dire dès à présent que les échanges par rayonnement augmentent et deviennent prédominants aux températures élevées.

### 2. Lois du cosinus ou loi de Lambert

Soient deux éléments de surface  $dS_1$  et  $dS_2$  échangeant un rayonnement :

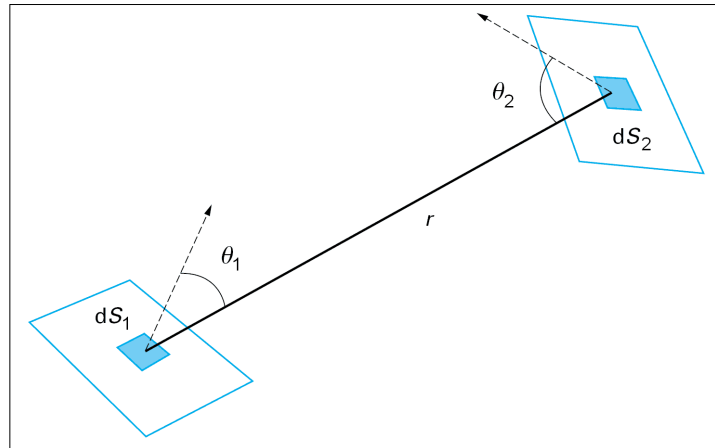
L'élément  $dS_1$  est vu du centre de  $dS_2$  sous l'angle solide :

$$d\omega_2 = \frac{dS_1 \cdot \cos \theta_1}{r^2}. \text{ De même}$$

l'élément  $dS_2$  est vu du centre de  $dS_1$  sous l'angle solide :

$$d\omega_1 = \frac{dS_2 \cdot \cos \theta_2}{r^2} \text{ où } r \text{ est la}$$

distance entre les centres de  $dS_1$  et  $dS_2$ .



Le flux  $q$  rayonné par  $dS_1$  par

unité d'angle solide porte le nom

d'intensité  $I_1$  du rayonnement et le débit de chaleur rayonné par la surface  $dS_1$  vers  $dS_2$  est donné par la loi de **Lambert** (ou loi du cosinus) :

$$d\Phi_{1 \rightarrow 2} = q \cdot \cos \theta_1 = I_1 \cdot dS_1 \cdot d\omega_1 \cdot \cos \theta_1 \quad (1)$$

soit en tenant compte de la relation donnant  $d\omega_1$  :

$$d\Phi_{1 \rightarrow 2} = I_1 \cdot \frac{dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2} \quad (2)$$

La symétrie de cette relation permet d'écrire que le débit net de chaleur échangé entre les éléments  $dS_1$  et  $dS_2$  est égal à :

$$d\Phi_{1 \leftrightarrow 2} = (I_1 - I_2) \cdot \frac{dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2} \quad (3)$$

Le **pouvoir émissif** d'une surface, soit  $e^0$ , est par définition, le flux émis par cette surface sur une surface hémisphérique située en avant de la surface émettrice. En intégrant l'équation (2) sur une surface hémisphérique  $S_2$  centrée sur le centre de  $dS_1$  on obtient :

$$d\Phi_{1 \rightarrow 2} = 2 \cdot \pi \cdot I_1 \cdot dS_1$$

$$\text{d'où : } e_1^0 = 2 \cdot \pi \cdot I_1 \quad (4)$$

### 3. Définition du corps noir et loi d'émission du corps noir

Les caractéristiques du rayonnement thermique entre deux surfaces sont bien connues dans le cas des **corps noirs** ou corps radiants parfaits. Un corps noir absorbe intégralement tout rayonnement incident, et la qualité et l'intensité du rayonnement qu'il émet ne dépend que de sa température. Le pouvoir émissif d'un corps noir vers une surface hémisphérique située en avant de la surface noire est donné par la loi de **Stephan-Boltzmann** :

$$e_1^0 = \sigma \cdot T_1^4 \quad (5)$$

$T$  étant exprimé en kelvin (K).

La constante  $\sigma$  dite de Stephan vaut dans le système international :

$$\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4 \quad (6)$$

Il est quelquefois intéressant de connaître la répartition du rayonnement du corps noir dans le spectre des longueurs d'onde et le déplacement de cette répartition en fonction de la température.

Si  $e_\lambda^0$  est le pouvoir émissif monochromatique pour la longueur d'onde  $\lambda$  de telle sorte que  $e_\lambda^0 d\lambda$  représente le pouvoir émissif à travers la demi-sphère située en avant pour les rayonnements de longueur d'onde comprises entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ , la relation entre  $e_\lambda^0$ ,  $\lambda$ ,  $T$  est donnée par la loi de **Planck** :

$$e_\lambda^0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot c^2 \cdot \lambda^{-5}}{e^{k \cdot \lambda \cdot T} - 1} \quad (7)$$

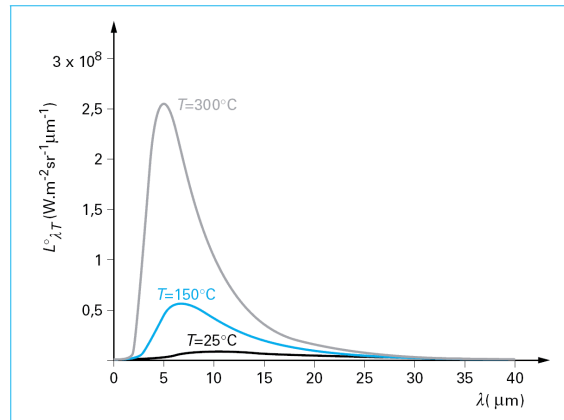
$c$ est la vitesse de la lumière :	$c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
$h$ est la constante de Planck :	$h = 6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
$k$ est la constante de Boltzmann :	$k = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

La loi de Planck est plus facile à retenir sous la forme :

$$\frac{e_\lambda^0}{T^5} = f(\lambda T) = \frac{C_1 \cdot (\lambda T)^{-5}}{e^{\lambda \cdot T} - 1} \quad (8)$$

avec  $C_1 = 3,7417 \cdot 10^{-16} \text{ W}\cdot\text{m}^2$   
 $C_2 = 1,43877 \cdot 10^{-2} \text{ m}\cdot\text{K}$

Le pouvoir émissif monochromatique à une température quelconque part de 0 à  $\lambda = 0$ , passe par un maximum et revient à zéro pour  $\lambda = +\infty$ . Pour toutes les longueurs d'ondes, il croît avec la température, mais il croît d'autant plus vite que la longueur d'onde est plus courte, aussi la valeur du maximum se déplace vers les courtes longueurs d'ondes lorsque la température s'élève.



La longueur d'onde de l'intensité maximum est inversement proportionnelle à la température absolue, c'est la loi de déplacement de **Wien** :

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2897 \mu\text{m}\cdot\text{K} \quad (9)$$

### 4. Coefficient d'absorption et d'émission d'une surface

Le rapport du pouvoir émissif d'une surface réelle à celui de la surface noire à la même température est appelé coefficient ou facteur d'émission. Ce facteur peut être spécifique d'une longueur d'onde, d'une direction ou de manière globale (coefficient d'émission monochromatique, directionnel ou total).

De même les rayonnements frappant une surface réelle ne sont pas totalement absorbés. Une partie est réfléchiée ou diffusée ou même transmise à travers le corps (cas des corps transparents aux rayonnements thermiques dits diathermiques).

La fraction absorbée est le coefficient d'absorption. Il peut être spécifique d'une longueur d'onde ou total.

D'après la loi de **Kirchhoff**, les coefficients d'absorption et d'émission pour une surface et son environnement à la même température sont égaux, tant du point de vue monochromatique que du point de vue global. Donc, d'une manière générale, la différence entre le facteur d'absorption et le facteur d'émission est due à la différence de température du rayonnement incident et du rayonnement émis. Cependant de nombreux corps sont tels que le facteur d'absorption monochromatique est indépendant de la longueur d'onde et par suite de la température du rayonnement incident. Dans ces conditions, la valeur unique du coefficient d'absorption sera égale au coefficient d'émission et la surface sera qualifiée de grise.

Les coefficients d'absorption et d'émission sont par définition des grandeurs comprises entre zéro (corps transparent) et un (corps noir), mais pour un même matériau les coefficients d'émission peuvent varier en fonction de la température, de l'état de surface et du degré d'oxydation dans le cas des métaux. Les coefficients d'absorption dépendent non seulement des paramètres précédents, mais également de la qualité du rayonnement incident mesuré par sa distribution spectrale. On trouvera dans divers ouvrages généraux des tableaux et des courbes donnant les valeurs et les variations des coefficients d'absorption et d'émission.

## 5. Échange par rayonnement entre diverses surfaces séparées ou non par un gaz transparent

### a) Échange entre surfaces noires séparées par un milieu transparent

Pour trouver l'échange de chaleur par rayonnement entre les éléments de surface  $dS_1$  et  $dS_2$ , il suffit d'appliquer la loi du cosinus aux deux éléments de surface. On obtient la relation (3).

En exprimant les intensités en fonction des pouvoirs émissifs, on aboutit dans le cas de surfaces noires, à :

$$d\Phi_{1\leftrightarrow 2} = \frac{\sigma}{\pi} (T_1^4 - T_2^4) \cdot \frac{dS_1 \cdot dS_2 \cdot \cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2}{r^2} \quad (10)$$

Pour des surfaces noires aux températures uniformes  $T_1$  et  $T_2$ , le débit de chaleur échangé s'obtient par intégration de la relation précédente, soit :

$$\Phi_{1\leftrightarrow 2} = \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4) \cdot \iint_{S_1 S_2} \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot dS_1 \cdot dS_2}{\pi \cdot r^2} \quad (11)$$

Le calcul de l'intégrale du second membre est possible analytiquement pour certaines géométries simples. On écrit généralement le résultat de cette intégrale sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\iint_{S_1 S_2} \frac{\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot dS_1 \cdot dS_2}{\pi \cdot r^2} = S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (12)$$

$F_{12}$  est la fraction du rayonnement émis par la surface  $S_1$  dans toutes les directions qui frappe la surface  $S_2$  (et qui est absorbé par  $S_2$  si la surface  $S_2$  est noire). De même,  $F_{21}$  est la fraction du rayonnement émis par  $S_2$  dans toutes les directions qui frappe  $S_1$ .  $F_{12}$  et  $F_{21}$  sont appelés **facteur géométrique** ou **facteur de forme**.

La symétrie de l'intégrale donnant les facteurs géométriques implique l'égalité (12) avec les facteurs de forme  $F_{12}$  et  $F_{21}$ . Bien que ces facteurs aient été établis pour le cas des surfaces noires, ils continuent pour des surfaces réelles à représenter la fraction du rayonnement émis par une des deux surfaces et reçu par l'autre (cette fraction n'étant pas nécessairement absorbée si la deuxième surface n'est pas noire).

Par suite de la signification physique des facteurs de forme, on aurait pu écrire à priori le débit échangé entre deux surfaces noires  $S_1$  et  $S_2$ , soit :

$$\Phi_{1\leftrightarrow 2} = S_1 \cdot F_{12} \cdot \sigma \cdot T_1^4 - S_2 \cdot F_{21} \cdot \sigma \cdot T_2^4 \quad (13)$$

Dans cette écriture, les deux termes  $S_1 F_{12}$  et  $S_2 F_{21}$  doivent nécessairement être égaux pour qu'à l'équilibre thermique ( $T_1 = T_2$ ), le débit net échangé soit nul. On retrouve bien les relations (11) et (12).

En présence de  $n$  surfaces noires, par suite de leur signification physique, les facteurs de forme devront satisfaire aux égalités suivantes :

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$S_i \cdot F_{ij} = S_j \cdot F_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$
(14)

Pour des géométries particulières telles que les surfaces engendrées par des droites parallèles à une direction donnée, les facteurs de forme sont calculables facilement sans qu'il soit nécessaire de résoudre la double intégrale de surface.

En outre, dans de nombreux cas pratiques, les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  se trouvent en présence de surfaces pour lesquelles le débit de chaleur net échangé par rayonnement est nul. De telles surfaces peuvent être totalement réfléchissantes ou partiellement absorbantes, mais alors le débit émis est sensiblement égal au débit absorbé. De telles surfaces sont dites **sans flux** ou **réfractaires**, car les réfractaires des fours à combustion se comportent généralement comme des surfaces sans flux. Seule la chaleur apportée par convection par le gaz intérieur au four est transmise au milieu extérieur par conduction à travers la paroi. Mais comme le débit de chaleur apporté par rayonnement sur les parois du réfractaire est très grand par rapport aux pertes thermiques, l'hypothèse du débit net nul rayonné par les parois du four est une très bonne approximation. Cette hypothèse simplifie notablement les problèmes de transfert de chaleur par rayonnement entre une source et un récepteur placés dans l'enceinte d'un four.

En présence des surfaces sans flux, la fraction du rayonnement émis par la surface noire  $S_1$  dans toutes les directions et qui frappe la surface noire  $S_2$  ne se limite pas à  $F_{12}$  (rayonnement direct). Elle est en réalité supérieure à  $F_{12}$  puisqu'une autre fraction du rayonnement émis par  $S_1$  peut frapper  $S_2$  après réflexion sur les surfaces réfractaires sans flux  $S_R$ . Le facteur de forme ainsi défini sera désigné par  $\overline{F}_{12}$  et le débit de chaleur échangé entre les surfaces noires  $S_1$  et  $S_2$  en présence de surface sans flux  $S_R$  sera égal à :

$$\Phi_{1 \leftrightarrow 2} = S_1 \cdot \overline{F}_{12} \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$
(15)

Comme les facteurs  $F_{ij}$  les facteurs  $\overline{F}_{ij}$  satisfont aux relations (14). Dans la plupart des ouvrages généraux, on trouve des courbes donnant les facteurs  $F_{ij}$  et  $\overline{F}_{ij}$  pour des géométries classiques rencontrées lors des études de fours où les transferts par rayonnement sont importants.

**b) Échange entre surfaces non noires séparées par un milieu transparent en présence ou non de surfaces sans flux**

Soit une enceinte composée de surfaces non noires  $S_1, S_2, \dots$ , et de surfaces réfractaires  $S_R, S_S, \dots$ . En régime stationnaire, le débit de chaleur net issu de  $S_1$  est la somme de tous ses échanges mutuels avec  $S_1, S_2, \dots$ . Cependant, l'échange entre  $S_1$  et  $S_2$  est le fruit d'un jeu complexe mettant en œuvre des réflexions à partir de toutes les surfaces réfractaires ou non.

On peut écrire le débit émis par la surface  $S_1$  et absorbé par la surface  $S_2$  sous la forme :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = S_1 \cdot \mathcal{F}_{12} \cdot \sigma \cdot T_1^4$$
(16)

De même, le débit émis par  $S_2$  et absorbé par  $S_1$  peut être écrit :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = S_2 \cdot \mathcal{F}_{21} \cdot \sigma \cdot T_2^4$$
(17)

Dans ces conditions, le débit net échangé par rayonnement entre  $S_1$  et  $S_2$  est tel que :

$$\Phi_{1 \leftrightarrow 2} = S_1 \cdot \mathcal{F}_{12} \cdot \sigma \cdot T_1^4 - S_2 \cdot \mathcal{F}_{21} \cdot \sigma \cdot T_2^4$$
(18)

Puisqu'à l'équilibre thermique  $T_1 = T_2$ , le débit net transféré devant être nul, les facteurs de forme ainsi définis vérifient également les relations (14). Mais contrairement aux coefficients  $F$  et  $\bar{F}$ , leur évaluation dans le cas le plus général s'avère délicate voire impossible. Mac Adams a proposé une méthode rigoureuse dans le cas où les surfaces puits et sources en nombre restreint peuvent être assimilés à des surfaces grises. En remplaçant les facteurs d'absorption et d'émission par des valeurs moyennes dépendant de la température, on peut étendre le calcul précédent aux cas des surfaces réelles. Signalons cependant que les limitations de cette méthode approchée n'ont pas encore été complètement étudiées.

c) *Échange entre surfaces non noires séparées par un milieu non transparent en présence ou non de surfaces sans flux*

Si les gaz diatomiques (oxygène, azote, hydrogène) sont transparents au rayonnement thermique dans tout le spectre d'émission du corps noir, il n'en est pas de même pour le gaz carbonique et la vapeur d'eau (produits de combustion des hydrocarbures) qui présentent des bandes d'absorption dans l'infrarouge. D'après la loi de Kirchhoff, ces gaz émettent donc un rayonnement thermique dans ces mêmes bandes de fréquences. D'autres constituants gazeux absorbent le rayonnement thermique ( $\text{CO}$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{SO}_2$ ,  $\text{NH}_3$ , etc.), mais leur influence reste généralement faible devant celle de la vapeur d'eau et du gaz carbonique.

On définit pour le gaz une épaisseur moyenne fictive  $L$  et les coefficients d'absorption et d'émission du gaz dépendent de la température mais aussi du produit  $pL$  et de la pression totale  $p_t$ .

Dans les ouvrages généraux, on trouve des courbes dues à Hottel et coll. donnant les facteurs totaux d'émission pour le gaz carbonique et la vapeur d'eau. Il existe des règles empiriques permettant d'évaluer les facteurs d'absorption à partir des facteurs d'émission. Cependant, comme l'a souligné Mac Adams, on ne commet pas d'erreur grossière en prenant une valeur moyenne identique pour les facteurs d'absorption et d'émission du gaz. Dans ces conditions, le gaz étant donc supposé gris, le débit de chaleur net échangé entre le gaz et une surface quelconque  $S_1$  sera donné par une relation du type :

$$\Phi_{G \leftrightarrow 1} = S_1 \cdot \mathcal{F}_{1G} \cdot \sigma \cdot (T_G^4 - T_1^4) \quad (19)$$

où  $T_G$  représente la température du gaz.

La détermination des facteurs  $\mathcal{F}_{1G}$  est alors voisine de celle des gaz transparents. Si  $f$  désigne le facteur de transmission pour une distance  $L$ , le facteur total d'émission du gaz gris pour une épaisseur du gaz égale à  $L$  est :

$$\varepsilon = 1 - f \quad (20)$$

pour une épaisseur égale à  $nL$ , il est égal à :

$$\varepsilon_{nL} = (1 - f)^n \quad (21)$$

En pondérant les débits échangés entre les différentes surfaces par le facteur de transmission correspondant, on peut déterminer ainsi les facteurs géométriques puis le débit de chaleur net échangé par rayonnement.

Pour un gaz réel, on divise le spectre de fréquence en différentes classes et on considère que chacune des classes ainsi définie se comporte soit comme un gaz transparents soit comme un gaz gris. Le facteur de forme du gaz réel s'obtient ensuite par pondération des facteurs de forme correspondant à chacune des classes. On voit apparaître très rapidement la complexité du calcul. Heureusement que dans de nombreux cas pratiques, on pourra se limiter à n'envisager que deux classes dans le spectre des fréquences.

## 6. Application aux calculs élémentaires de four

Soit un four ouvert constitué par une paroi de réfractaire et traversée par un gaz chaud dont la température d'entrée est connue. Dans le four on place un objet de surface externe  $S_1$ . On demande de préciser la température de l'objet ainsi que celle du gaz à la sortie du four.

Ce calcul peut être effectué dans les deux cas simplifiés suivants.

a) *Le four est uniforme en température*

La paroi des réfractaires est donc supposée à la température uniforme  $T_R$ . Si  $T_1$  est la température de l'objet placé à l'intérieur du four, les différents bilans s'écrivent respectivement :

- Bilan global

$$m_G c_P (T_{GS} - T_{GE}) = H S (T_{ex} - T_{GS}) \quad (22)$$

où

$m_G$  est le débit massique du gaz,

$c_P$  est la capacité calorifique massique à pression constante,

$T_{GS}$  et  $T_{GE}$  représentent la température du gaz à la sortie et à l'entrée du four,

$H$  est le coefficient de transfert global caractéristique de l'échange de chaleur entre le gaz contenu dans le four et le milieu extérieur à la température  $T_{ex}$ ,

$S$  est la surface d'échange qui correspond au coefficient global  $H$ .

- Bilan sur le gaz

$$m_G c_P (T_{GS} - T_{GE}) = h_R S_R (T_R - T_{GS}) + \sigma S_R \mathcal{F}_{RG} (T_R^4 - T_{GS}^4) + \sigma S_1 \mathcal{F}_{1G} (T_1^4 - T_{GS}^4) + h_1 S_1 (T_1 - T_{GS}) \quad (23)$$

$h_R$  est le coefficient de transfert convectif caractéristique de l'échange par convection entre le gaz et la surface de réfractaire.

- Bilan sur la surface  $S_1$

$$0 = \sigma S_1 \mathcal{F}_{1G} (T_{GS}^4 - T_1^4) + h_1 S_1 (T_{GS} - T_1) + \sigma S_1 \mathcal{F}_{1R} (T_R^4 - T_1^4) \quad (24)$$

$h_1$  est le coefficient de transfert convectif caractéristique de l'échange par convection entre le gaz et la surface  $S_1$ .

La résolution des équations (22), (23) et (24) permet de déterminer les trois grandeurs inconnues  $T_{GS}$ ,  $T_1$  et  $T_R$ .

Bien entendu ce calcul nécessite la connaissance des facteurs géométriques  $\mathcal{F}_{1R}$ ,  $\mathcal{F}_{1G}$  et  $\mathcal{F}_{RG}$ .

- ❖ Si la surface réfractaire  $S_R$  est une surface sans flux, les trois facteurs géométriques sont nuls, et dans ces conditions :

$$T_{GS} = T_1 = \frac{m_G c_P T_{GE} + H S T_{ex}}{m_G c_P + H S}$$

$$T_R = \frac{(m_G c_P + h_R S_R) \cdot H S T_{ex} + (h_R S_R - H S) \cdot m_G c_P T_{GE}}{(m_G c_P + H S) \cdot h_R S_R}$$

- ❖ Si la surface  $S_R$  n'est pas une surface sans flux, mais que le gaz est transparent, les facteurs géométriques  $\mathcal{F}_{1G}$  et  $\mathcal{F}_{RG}$  sont nuls. L'échange de chaleur par rayonnement n'apparaît qu'entre les surfaces  $S_1$  et  $S_R$ .

Si la surface  $S_R$  entoure complètement la surface  $S_1$  et si la surface  $S_1$  ne peut pas se voir elle-même, tout rayonnement issu de  $S_1$  frappe nécessairement la surface  $S_R$ .

Dans ces conditions :

$$F_{1R} = 1 \quad \text{avec } F_{11} = 0$$

Par suite des relations de réciprocité :

$$F_{R1} = \frac{S_1}{S_R} \quad \text{et} \quad F_{RR} = 1 - F_{R1} = \frac{S_R - S_1}{S_R}$$

Si les surfaces  $S_1$  et  $S_R$  sont deux surfaces grises de facteur total d'émission respectifs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_R$ , les facteurs géométriques  $\mathcal{F}_{11}$ ,  $\mathcal{F}_{1R}$ ,  $\mathcal{F}_{R1}$  et  $\mathcal{F}_{RR}$  peuvent être calculés à l'aide du raisonnement préconisé par Mac Adams. On trouve :

$$\mathcal{F}_{11} = \frac{\varepsilon_1^2 S_1 (1 - \varepsilon_R)}{\varepsilon_1 S_1 (1 - \varepsilon_R) + \varepsilon_R S_R} \quad \mathcal{F}_{1R} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_R S_R}{\varepsilon_1 S_1 (1 - \varepsilon_R) + \varepsilon_R S_R}$$

$$\mathcal{F}_{R1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_R S_1}{\varepsilon_1 S_1 (1 - \varepsilon_R) + \varepsilon_R S_R} \quad \mathcal{F}_{RR} = \frac{\varepsilon_R^2 (S_R - \varepsilon_1 S_1)}{\varepsilon_1 S_1 (1 - \varepsilon_R) + \varepsilon_R S_R}$$

- ❖ Si le gaz n'est pas transparent, pour un gaz gris on reprendra le raisonnement précédent en introduisant un facteur de transmission. Pour un gaz réel, on l'assimilera à une superposition de gaz gris et d'un gaz transparent.

**b) Le four ne dépend que d'une variable d'espace**

Les dimensions géométriques du four sont telles qu'une des trois dimensions joue un rôle particulier par rapport aux deux autres. On admettra que les températures ( $T_G$ ,  $T_R$ ,  $T_1$ ) ne dépendent que d'une variable d'espace (soit  $x$ ) et qu'en outre dans une direction normale à cette variable les différentes températures ont une valeur uniforme.

Dans ces conditions, les bilans différentiels entre deux sections droites du four distantes de  $x$  et  $x + dx$  par rapport à l'entrée du four sont identiques à celles établies précédemment, soit :

- Bilan global

$$m_G c_p dT_G = H dS (T_{ex} - T_G) \quad (25)$$

- Bilan sur le gaz

$$m_G c_p dT_G = h_R dS_R (T_R - T_G) + \sigma dS_R \mathcal{F}_{RG} (T_R^4 - T_G^4) + \sigma dS_1 \mathcal{F}_{1G} (T_1^4 - T_G^4) + h_1 dS_1 (T_1 - T_G) \quad (26)$$

- Bilan sur la surface  $S_1$

$$0 = \sigma dS_1 \mathcal{F}_{1G} (T_G^4 - T_1^4) + h_1 dS_1 (T_G - T_1) + \sigma dS_1 \mathcal{F}_{1R} (T_R^4 - T_1^4) \quad (27)$$

Les facteurs géométriques  $\mathcal{F}_{1R}$ ,  $\mathcal{F}_{1G}$  et  $\mathcal{F}_{RG}$  peuvent être évalués en ne considérant que les surfaces et le gaz compris entre les deux sections droites entre lesquelles sont écrits les bilans différentiels. Si l'hypothèse selon laquelle une variable d'espace prédomine devant les deux autres est justifiée, les facteurs géométriques ainsi calculés sont identiques à ceux calculés dans le cas précédent.

La résolution des équations différentielles de bilan permet ensuite de calculer les profils de température entre l'entrée et la sortie du four.