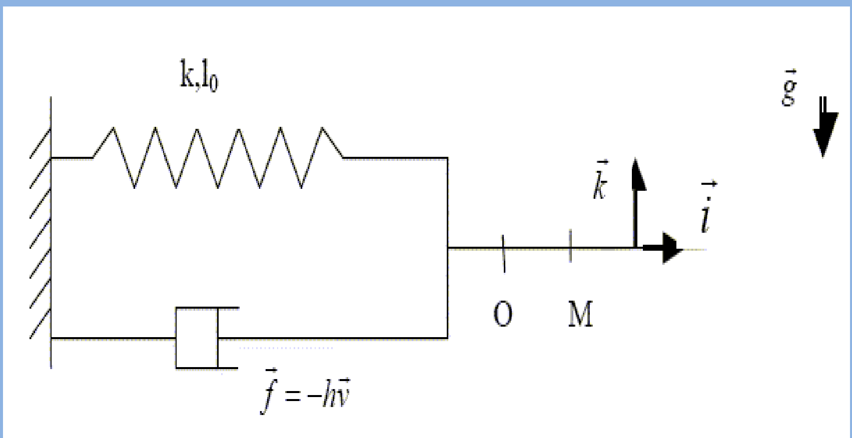
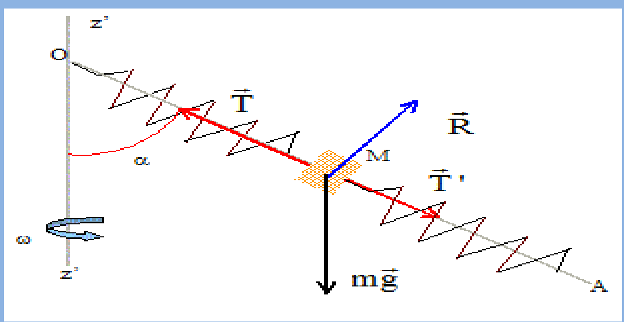
HUGUES SILA

EXERCICES CORRIGES DE MECANIQUE





Sur les 401 pages suivantes, je mets à la disposition de tous (en particulier les étudiants préparant le concours d'entrée en troisième année à l'Ecole Nationale Supérieure polytechnique de Yaoundé) les exercices corrigés de physique portant sur la partie MECANIQUE .

Je vous demande de bien lire la question, de bien réfléchir avant de chercher la solution proposée.

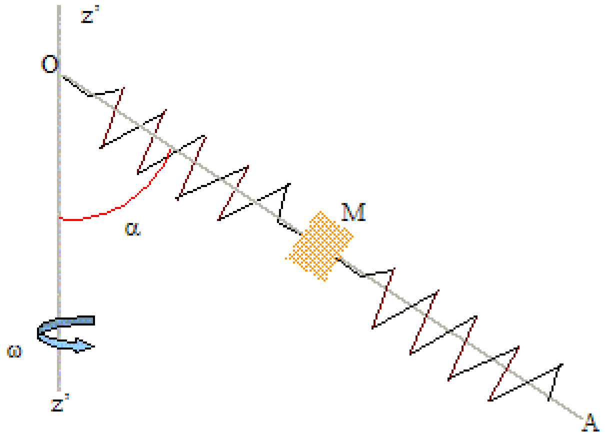
Toute critique est attendue à silhu06@yahoo.fr ou au +237 97 47 64 89

HUGUES SILA

ensemble de deux ressorts en rotation

Un point matériel M de masse m est attaché aux extrémités de deux ressorts de même caractéristiques (raideur k, longueur à vide l_0), enfilés sur une tringle OA de longueur L et fixés respectivement en O et en A.

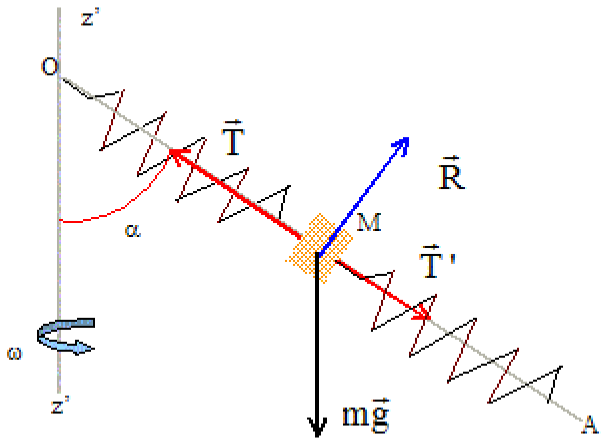
On repère la position de M par x, distance OM. La tringle OA est fixe.



Position M_0 du point M à l'équilibre : $OM_0 = x_0$.

Le système étudié est le solide ponctuel M ; il est soumis à son poids, aux tensions des ressorts et à l'action de la tige OA.

Les ressorts sont supposés être étirés.



A l'équilibre la somme vectorielle des forces est nulle.

Projetons chaque force sur OA, orienté de O vers A :

poids : mg cos α ; action de la tige : 0 ; tension T' : $k(L-x_0-l_0)$; tension T : $-k(x_0-l_0)$

d'où : $mg \cos\alpha + k(L-x_0-l_0) - k(x_0-l_0) = 0$

$mg \cos\alpha + kL - 2kx_0 = 0$

$x_0 = ½ [L + mg \cos\alpha / k]$.

Equation différentielle du mouvement :

Le point M étant à l'équilibre, on l'écarte d'une amplitude x_{max}($>x_0$) et on le lâche sans vitesse initiale

Ecrire la seconde loi de Newton sur l'axe OA, orienté de O vers A, **origine M_0** :

On note la position $M_0M = x$ à une date t quelconque.

poids : mg cos α ; action de la tige : 0 ; tension T' : $k(L-x_0-x-l_0)$; tension T : $-k(x_0+x-l_0)$ avec $x>0$.

d'où : $mg \cos\alpha + k(L-x_0-x-l_0) - k(x_0+x-l_0) = mx''$

$mg \cos\alpha + kL - 2kx_0 - 2kx = mx''$

Or $mg \cos\alpha + kL - 2kx_0 = 0$ d'où $mx'' + 2kx = 0$

$x'' + 2k/m\ x = 0$.

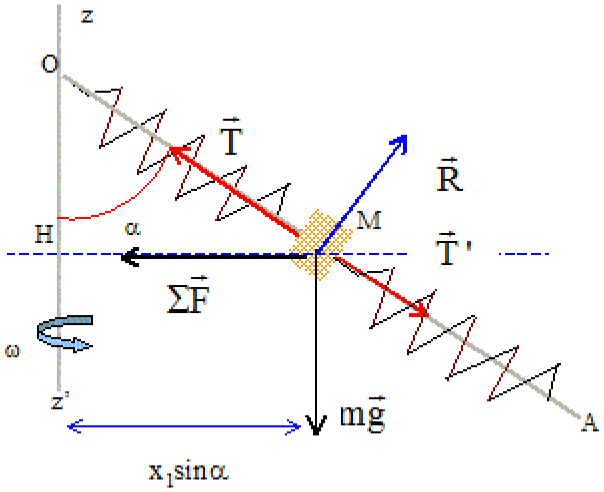
Expression de x(t) :

Il s'agit d'un oscillateur non amorti de pulsation $\omega_0 = [2k/m]^{½}$.

$x(t) = x_{max} \cos(\omega_0 t)$

La tringle OA tourne à présent autour de l'axe vertical avec une vitesse de rotation constante ω.

Nouvelle position d'équilibre x_1 :



Projection de la somme vectorielle des forces sur un axe perpendiculaire à OA :

R= mg sinα.

Le mouvement est circulaire uniforme de rayon MH = x_1 sinα ; l'accélération est centripète dirigée de M vers H.

La valeur de l'accélération est : ω^2 MH = $\omega^2 x_1 \sin\alpha$.

La seconde loi de Newton s'écrit suivant MH :

$$-R\cos\alpha + T\sin\alpha - T'\sin\alpha = m\,\omega^2 x_1 \sin\alpha.$$

$$-mg\cos\alpha + T - T' = m\,\omega^2 x_1.$$

$$-mg\cos\alpha + k(x_1-l_0) - k(L-x_1-l_0) = m\,\omega^2 x_1.$$

$$-mg\cos\alpha + 2kx_1 - kL = m\,\omega^2 x_1.$$

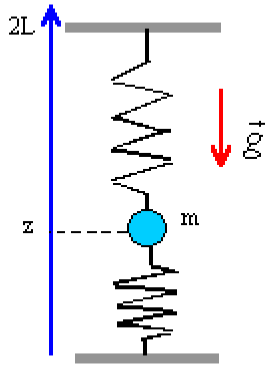
$$x_1\,[\,2k-m\,\omega^2] = mg\cos\alpha + kL$$

$$\mathbf{x_1 = (\,mg\cos\alpha + kL) / [\,2k - m\,\omega^2]}.$$

Problèmes à un degré de liberté

- deux ressorts verticaux
- pendule asymétrique
- oscillateur de Landau

deux ressorts verticaux



les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Un solide de masse m est fixée à 2 ressorts verticaux de raideur k et de longueur à vide l_0. Le mobile est astreint à des déplacements suivant la verticale. La position du centre de gravité du solide est repéré par la cote z. Dans un premier temps on néglige les frottements.

1. Exprimer les énergies potentielles en fonction de z. Préciser les origines choisies.
2. Etablir l'équation différentielle avec la variable z..
   - A l'instant initial on lâche le mobile à partir de la position $z=½l_0$. Déterminer l'expression de z(t).
   - La période du mouvement est-elle modifiée si on part de 0,25 l_0 ?
3. Exprimer les forces s'exerçant sur le mobile en fonction de z ; retrouver la condition d'équilibre.
   - Etablir l'équation différentielle vérifiée par z.
4. On tient compte des frottements en plaçant le dispositif dans un fluide visqueux de coefficient de viscosité η, qui exerce une force de freinage du type **F**= -6π η r **v**. Comment est modifiée l'équation différentielle ? La position d'équilibre est-elle changée ?
5. La période des oscillations dans l'air est T_0 et la pseudopériode dans un liquide est T. Etablir l'expression de la viscosité η du liquide en fonction de T_0, T et des caractéristiques de la sphère.

corrigé

étude énergétique de l'oscillateur (sans frottement) :

énergie potentielle de pesanteur : (origine z=0) mgz

énergie potentielle élastique, ressort inférieur : $½k(z-l_0)^2$.

ressort supérieur : $½k(2L-z-l_0)^2$.

énergie potentielle totale : $E_p= mgz + ½k(z-l_0)^2+ ½k(2L-z-l_0)^2$.

Les positions d'équilibre corespondent aux extrémums de l'énergie potentielle : dériver E_p par rapport à z et rechercher les valeurs de z qui annullnt cette dérivée.

$dE_p/dz = mg + k(z-l_0) - k(2L-z-l_0) = mg+2kz-2kL=0$

d'où $z_{équi} = L-mg/(2k)$.

<u>absence de frottement, donc l'énergie mécanique se conserve</u> :

énergie cinétique = ½mv²; $E_{méca} = E_p+E_{cinétique}$.

$E_{méca} = mgz + ½k(z-l_0)^2 + ½k(2L-z-l_0)^2 + ½mv^2$

dériver par rapport au temps :

$0= mgz' +k(z-l_0)z'-k(2L-z-l_0)z' +mvv'$

or v'=z"; v=z' et en divisant chaque terme par v il vient : mg +2kz-2kL+mz"=0

$z''+2k/m\, z = 2kL/m-g$. (1) avec $\omega_0^2 = 2k/m$

<u>solution de cette éauation différentielle</u> :

solution particulière de (1) : z(t) = L-gm/(2k)

solution générale de $z''+\omega_0^2 z=0$: $z(t) = A \cos(\omega_0 t)$

solution générale de (1) : $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + L-gm/(2k)$

<u>Comment trouver A</u> ? : à l'instant initial la position est z_0 = ½L

d'où : ½L = A+L-gm/(2k) ; A= - ½L+gm/(2k);

$z(t) = (- ½L+gm/(2k)] \cos(\omega_0 t) + L-gm/(2k)$

l'équation différentielle (1) est homogène, la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ est donc indépendante de la position initiale.

<u>Inventaire des forces</u> : **n** ,vecteur unitaire de l'axe z.

tension exercée par le ressort inférieur, verticale, vers le bas (hypothèse : ce ressort n'est pas comprimé) : $\mathbf{T_1} = -k(z-l_0)\mathbf{n}$

tension exercée par le ressort du haut, verticale, vers le haut : $\mathbf{T_2} = k(2L-z-l_0)\mathbf{n}$

poids, verticale, vers le bas : $\mathbf{P}= - mg\, \mathbf{n}$

A l'équilibre la somme des forces s'exerçant sur la sphère est nulle : $-k(z_{équi} - l_0) + k(2L-z_{équi} - l_0) - mg=0$

soit $z_{équi} = L-mg / (2k)$.

La relation fondamentale de la dynamique donne : $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} + \mathbf{P} = = m\mathbf{a}$.

en projection sur l'axe z : $-k(z-l_0) + k(2L-z-l_0) - mg = mz''$

$mz'' + 2kz = mg - 2kL$ ou $z'' + 2k/m\ z = g - 2kL/m$

<u>On tien compte de la force de frottement</u> :$\mathbf{F} = -6\pi\ \eta\ r\ \mathbf{v}$.

$\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} + \mathbf{P} + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

en projection sur l'axe z : $-k(z-l_0) + k(2L-z-l_0) - mg - 6\pi\ \eta\ r\ z' = mz''$

la position d'équilibre est obtenue en annulant lse deux termes en z' et z'', d'où :

$-k(z_{équi}-l_0) + k(2L-z_{équi}-l_0) - mg = 0$ soit $z_{équi} = L - mg / (2k)$.

Les frottements fluides ne modifient pas la position d'équilibre, contrairement aux frottements solides.

<u>équation différentielle</u> : $mz'' + 6\pi\ \eta\ r\ z' + 2kz = mg - 2kL$

$z'' + 6\pi\ \eta\ r/m\ z' + 2k/m\ z = g - 2kL/m$. On pose $\omega_0^2 = 2k/m$ et $\lambda = 3\pi\ \eta\ r/m$

$$z'' + 2\lambda\ z' + \omega_0^2\ z = g - 2kL/m.$$

équation sans second membre : $z'' + 2\lambda\ z' + \omega_0^2\ z = 0$

écquation caractéristique : $x2 + 2\lambda\ x + \omega_0^2 = 0$; discriminant : $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

si Δ négatif, régime oscillatoire amorti de période $T = 2\pi/\omega$ avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

soit $4\pi^2/T^2 = 4\pi^2/T_0^2 - \lambda^2$

$\lambda^2 = 4\pi^2(1/T_0^2 - 1/T^2)$; $\lambda = 2\pi(1/T_0^2 - 1/T^2)^{½}$.

Or $\lambda = 3\pi\ \eta\ r/m$ d'où : $\eta = 2m/(3r)(1/T_0^2 - 1/T^2)^{½}$.

pendule asymétrique

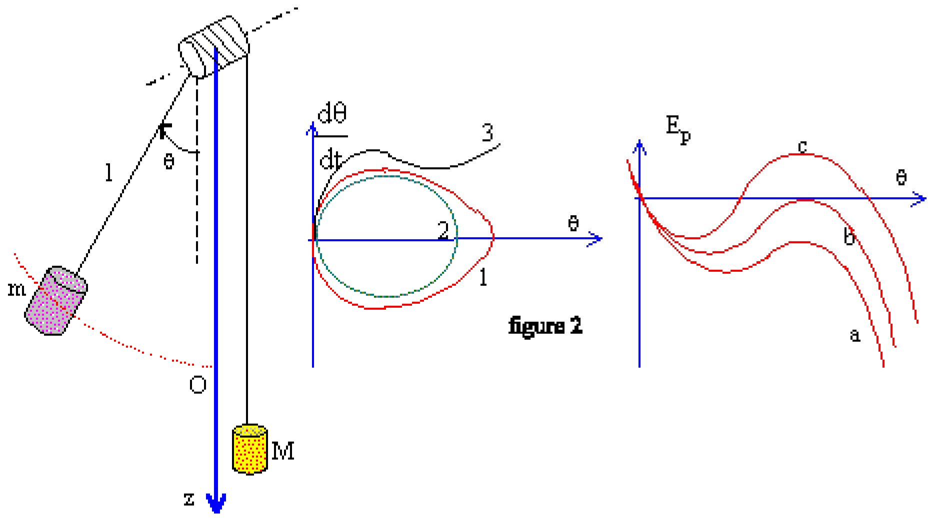


figure 2

Un objet, de masse m est fixé sur une tige très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre, de rayon R, peut tourner sans frottement autout d'un axe horizontal. Un fil de masse négligeable est enroulé sur le cylindre. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, la masse M se déplace verticalement vers le bas jusqu' à la cote z.. On admet que le système constitué par les deux masses m et M est conservatif.

1. Le fil est inextensible, éccrire une relation entre R, θ et z si les deux masses sont à la même altitude lorsque θ =0.
2. En déduire l'énergie cinétique E_c du système constitué par les deux masses en fonction de m, M, l et θ '=dθ/dt..
   - Montrer que l'énergie potentielle E_p peut s'exprimer en fonction de la seule variable θ.
3. Si la masse M dépasse une certaine valeur M_0, on constate qu'il n'existe plus de position d'équilibre. Exprimer M_0 en fonction de m, l et R.
4. Dans la suite M est inférieure à M_0. Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre θ_{e1} et θ_{e2} .
   - Discuter de la stabilité de ces positions d'équilibre.
5. Au voisinage de ces positions d'équilibre on peut approximer l'énergie potentielle $E_p(\theta)$ par $E_p(\theta)= E_0+C(\theta-\theta_e)^2$. Justifier cette approximation, expliciter la constante C et donner son signe pour chaque position d'équilibre.
6. Etablir l'équation du mouvement en supposant que la position angulaire initiale est proche de θ_{e1} puis de θ_{e2}. Justifier à nouveau le caractère stable ou instable de ces positions d'équilibre.
7. Le système est placée dans la position θ=0. Les masses sont lachées sans vitesse initiale à la date t=0. La figure 2 ci-dessus représente les trajectoires de phases pour l=50 cm, R= 5cm, m=100g et pour trois valeurs différentes de M, à savoir M=650g, 720g, 800 g. Associer à chaque valeur de M la trajectoire correspondante et préciser son sens de parcours. Justifier à partir du graphe $E_p(\theta)$.
   - Comment choisir M pour obtenir des trajectoires fermées en partant de ces conditions initiales.

corrigé

les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Si l'angle θ passe de zéro à une valeur positive, le cylindre tourne d'un angle θ et le fil inextensible se déroule d'une longueur Rθ ; alors la masse M descend de la valeur $z = R\theta$ avec θ en radians.

L'énergie cinétique de l'ensemble (masse m et masse M) est la somme de l'énergie cinétique de chaque masse :

$\frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}M(dz/dt)^2 = \frac{1}{2}MR^2(d\theta/dt)^2$; $\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2$.

$E_c = \frac{1}{2}(MR^2 + ml^2)(d\theta/dt)^2$.

énergie potentielle de pesanteur (origine θ =0 et z=0)

-Mgz : la masse M descend quand la masse m s'élève

+ mg l (1-cosθ) soit $E_p = -MgR\theta + mg\,l\,(1-\cos\theta)$.

recherche des positions d'équilibre : dériver l'énergie potentielle par rapport à θ puis chercher les valeurs de θ qui annule cette dérivée.

$dE_p/d\theta = -MgR + mg\,l\sin\theta = 0$ soit $-MgR + mg\,l\sin\theta = 0$

$\sin\theta = MR/(ml)$; il y a une (des) solution(s) si MR/(ml) est inférieur ou égal à un.

d'où la valeur maximale de M : $M_0 = ml/R$.

Danas la mesure où $M<M_0$ alors il y a deux solutions à l'équation $\sin\theta = MR/(ml)$

$\theta_{e1} = \sin^{-1}(MR/(ml) = \sin^{-1}(M/M_0)$ et $\theta_{e2} = \pi - \theta_{e2}$.(ces deux positions d'équilibre sont situées sur la même verticale)

stabilité de l'équilibre : recherche du signe de la dérivée seconde $d^2E_p/d\theta^2 = mgl\cos\theta$.

si θ appartient à [0 ; ½π] alors $\cos\theta > 0$ et $d^2E_p/d\theta^2 > 0$, équilibre stable correspondant à θ_{e1} .

si θ appartient à [½π ; π] alors $\cos\theta < 0$ et $d^2E_p/d\theta^2 < 0$, équilibre instable correspondant à θ_{e2}

---

développement limité au 2ème ordre de l'expression de l'énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre :

$f(a+h) = f(a) + h(f'(a) + \frac{1}{2}h^2 f''(a)$ avec $a = \theta_e$ et $a+h = \theta$ d'où $h = \theta - \theta_e$

$E_p(\theta) = E_p(\theta_e) + (\theta - \theta_e)f'(\theta_e) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_e)^2 f''(\theta_e)$

Or $f'(\theta_e) = 0$ (condition d'équilibre) et $f''(\theta_e) = d^2E_p(\theta_e)/d\theta^2 = mgl\cos\theta$.

d'où $E_p(\theta)$ voisin de : $E_p(\theta_e) + \frac{1}{2}\,d^2E_p(\theta_e)/d\theta^2\,(\theta - \theta_e)^2$ soit $C = 2\,d^2E_p(\theta_e)/d\theta^2$

$C_1 = 2\,mgl\cos\theta_{e1} = 2\,mgl\,(1-\sin^2\theta_{e1})^{1/2} = 2mgl\,((1-M^2/M_0^2)^{1/2}$ positif

$C_2 = 2\,mgl\cos\theta_{e2} = 2\,mgl\cos(\pi - \theta_{e1}) = -\,2\,mgl\cos\theta_{e1}$; négatif

---

Expression de l'énergie mécanique au voisinage d'une position d'équilibre :

$$E= E_c+ E_p = ½(MR^2 +ml^2)(d\theta/dt)^2+ E_p(\theta_e) + ½ \, d^2E_p(\theta_e)/d\theta^2 \, (\theta - \theta_e)^2 = \text{constante}$$

$$½(MR^2 +ml^2) \, \theta'^2 + E_p(\theta_e) + C \, (\theta - \theta_e)^2 = \text{constante}$$

dériver par rapport au temps : $0 = (MR^2 +ml^2) \, \theta' \, \theta'' +2C(\theta - \theta_e) \, \theta'$

donne $\theta' = 0$ et $\theta'' + 2C/(MR^2 +ml^2) \, \theta = 2C/(MR^2 +ml^2) \, \theta_e$.

pour $\theta = \theta_{e1}$: $C=C_1>0$, on pose $\omega_0^2= 2C_1/(MR^2 +ml^2)$

d'où : $\theta'' + \omega_0^2 \, \theta = \omega_0^2 \, \theta_{e1}$.

solution du type : $\theta = \theta_{e1} + A\cos(\omega_0 t + \varphi)$;

θ reste dans l'intervalle [$\theta_e + A$; $\theta_e - A$] on reste autour de la position d'équilibre θ_{e1}

pour $\theta = \theta_{e2}$: $C=C_2<0$, on pose $\omega_0^2= - 2C_2/(MR^2 +ml^2)$

d'où : $\theta'' - \omega_0^2 \, \theta = -\omega_0^2 \, \theta_{e2}$.

solution du type : $\theta = \theta_{e2} + A\exp(\omega_0 t) +B \exp(-\omega_0 t)$; A et B ne peuvent s'annuler simultanément et en conséquence $\theta - \theta_{e2}$ diverge au cours du temps comme $\exp(\omega_0 t)$. Equilibre instable.

---

l'énergie potentielle initiale des deux masse est nulle ; l'énergie cinétique initiale est nulle ; donc l'énergie mécanique initiale est nulle. d'autre part, d'après la figure 2, l'énergie potentielle admet un maxima relatif pour $\theta = \theta_{e2}$:

Deux cas sont alors possibles :

$Ep(\theta_{e2}) >0$: l'énergie cinétique du système s'annule pour un angle θ_1 compris entre 0 et θ_{e2} . Le système est confiné entre deux barrières de potentiel $\theta =0$ et $\theta =\theta_1$. (courbe 1)

$Ep(\theta_{e2}) <0$: l'énergie cinétique du système ne s'annule pas pour $\theta = \theta_{e2}$. L'angle dépasse la valeur θ_{e2}puis le système effectue ensuite des révolutions. (courbe 3)

La valeur critique M_c de la masse M qui détermine le passage d'une trajectoire de phase fermée à une trajectoire ouverte est solution de l'équation $Ep(\theta_{e2}) =0$

soit $0 = -MR\theta_{e2} + m \, l \, (1-\cos\theta_{e2})$ avec $\sin \theta_{e2} = M/M_0$ et $M_0 = ml/R$

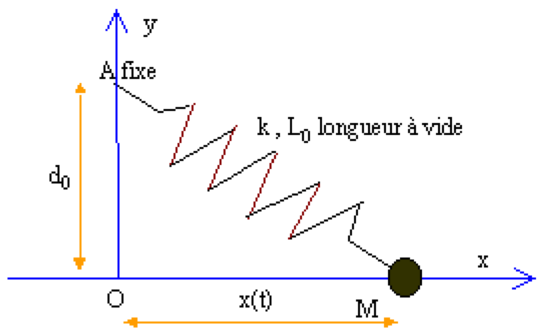
$$-M\theta_{e2} + M_0 \, (1-\cos\theta_{e2}) =0 \text{ ou bien : } (1-\cos\theta_{e2}) = \theta_{e2} \sin \theta_{e2} .$$

$$\sin^2(½\theta_{e2})= \theta_{e2} \sin (½\theta_{e2}) \cos(½\theta_{e2})$$

$$\tan (½\theta_{e2}) = \theta_{e2} \text{ soit } \theta_{e2}= 2,331.$$

$M_c = M_0 \sin 2{,}331 = 0{,}724$ kg.

oscillateur de Landau



M est un solide de petites dimensions de masse m, accroché à un ressort (masse négligeable) de raideur k, de longueur à vide L_0. L'autre extrémité du ressort est fxe en A. M peut coulisser sans frottement sur la tige horizontale OM.

1. Exprimer l'énergie potentielle élastique du système en prenannt $E_{p\ \text{élastique}} = 0$ en x =0.
2. Rechercher des positions d'équilibre.
   - Distinguer différents cas suivant la valeur de d_0. Donner alors l'allure de $E_{p\ \text{élastique}}$ en fonction de x
   - Tracer sur un graphique en trait plein les positions d'équilibre stable en fonction de d_0, et en trait pointillé les positions d'équilibre instable.
3. Exprimer la pulsation propre des oscillations de faible amplitude autour des positions d'équilibre stable en fonction de d_0, L_0, k et m en supposant d_0 différent de L_0.
4. Si $d_0 = L_0$ exprimer la période des petites oscillations . Cet oscillateur est-il harmonique ?

corrigé

Energie potentielle élastique du système : $E_{p,\ \text{élastique}} = ½k(L-L_0)^2$ avec $L^2 = d_0^2+x^2$

l'énergie potentielle de pesanteur de la masse est constante car elle se déplace sur un plan horizontal.

positions d'équilibre :

dériver l'énergie potentielle par rapport à la variable x et rechercher les valeurs de x qui annulent la dérivée.

$dE_{p,\ \text{élastique}} /dx = k(L-L_0)x / L = 0$

d'où x=0 et $L=L_0$ soit $d_0^2+x^2 = L_0^2$ soit $x^2 = L_0^2 - d_0^2$ ce qui impose $L_0>d_0$ (sinon il n'y a qu'une seule solution x=0)

stabilité de l'équilibre : x=0 et $L_0<d_0$

recherche du signe de la dérivée seconde : poser $u = k(L-L_0)x$ et v=L

$u' = kx^2/L+k(L-L_0)$; $v' = x/L$ puis $(u'v-v'u)/ v^2$

$d^2E_{p,\text{ élastique}}/dx^2 = kx^2/L^2 + k(L-L_0)/L - x^2/L^3\, k(L-L_0)$

pour x=0 , $d^2E_{p,\text{ élastique}}/dx^2 = k(L-L_0)/L = (d_0-L_0)/d_0$. positive, donc équilibre stable.

second cas : $L_0>d_0$; $x_1=0$ et $x_2= (L_0^2 - d_0^2)^{1/2}$ et $x_2= -(L_0^2 - d_0^2)^{1/2}$.

pour x =0 , la dérivée seconde est cette fois négative, équilibre instable.

pour $x= (L_0^2 - d_0^2)^{1/2}$:

$d^2E_{p,\text{ élastique}}/dx^2 = k(L_0^2 - d_0^2)/L^2 + k(L-L_0)/L - (L_0^2 - d_0^2)/L^3\, k(L-L_0) = k(L_0^2 - d_0^2)/d_0^2$

positive donc équilibre stable (même chose pour $x=x_3$)

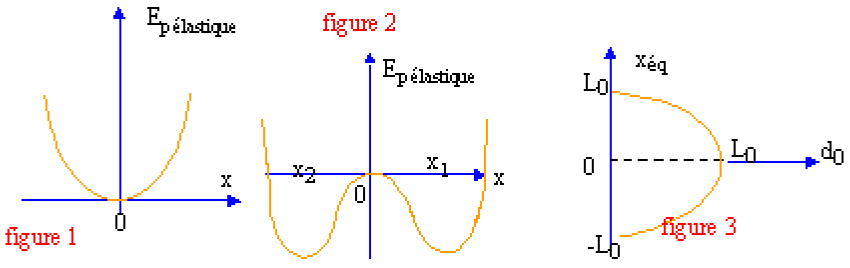


figure 3 : en trait plein les posirions stables d'équilibre ; en pointillés les positions instables

pour $L_0=d_0$, le système bifurque vers d'autres positions d'équilibre que x=0. l'allure du tracé (figure 2) rappelle une fourche d'où le nom " bifurcation fourche"

Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable:

le mouvement se fait suivant Ox : le système peut être modélisé par un oscillateur harmonique (ressort fictif de raideur $k_{\text{modèle}}$) de pulsation $\omega = (k_{\text{modèle}}/m)^{1/2}$.

$k_{\text{modèle}}$ est égale à la valeur de la dérivée seconde de l'énergie potentielle totale par rapport à x pour $x= x_{\text{éq}}$.

$d_0>L_0$	$k_{\text{modèle}} = k(d_0-L_0)/ d_0$.
$d_0<L_0$	$k_{\text{modèle}} = k(L^2_0-d^2_0)/ d^2_0$.

pour $L_0=d_0$, période des petites oscillations :

la dérivée seconde de l'énergie potentielle étant nulle il faut la développer à un ordre supérieur.

L'oscillateur n'est pas un oscillateur harmonique ; l'allure de la courbe représentant l'énergie potentielle ressemble à une parabole très aplatie.

Ecrire la conservation de l'énergie mécanique : $E= \frac{1}{2}m\, x'^2 + \frac{1}{2}k(L-L_0)^2 = \frac{1}{2}k((d_0^2+x_0^2)^{1/2}-L_0)^2$ avec $L^2=$

$d_0{}^2+x^2$

soit $x' = dx/dt = \{ k\, m^{-1}[((d_0{}^2+x_0{}^2)^{½}-L_0)^2 -((d_0{}^2+x^2)^{½}-L_0)^2]\}^{½}$.

pour les petites oscillations $x_0 << d_0$ et $x << d_0$ soit :

$(d_0{}^2+x_0{}^2)^{½} = d_0\ (x_0{}^2/d_0{}^2+1)^{½}$ proche de : $d_0\ (½x_0{}^2/d_0{}^2+1)$

et $(d_0{}^2+x_0{}^2)^{½}-L_0)^2$ proche de : $[d_0\ (½x_0{}^2/d_0{}^2+1) -d_0\ ]^2= [d_0\ ½x_0{}^2/d_0{}^2\ ]^2$.

de même : $(d_0{}^2+x^2)^{½}$ proche de : $d_0\ (½x^2/d_0{}^2+1)$ et $((d_0{}^2+x^2)^{½}-L_0)^2$ proche de : $[d_0\ ½x^2/d_0{}^2\ ]^2$.

par suite : $x' = dx/dt$ proche $\{ ½\, k\, m^{-1} d_0{}^{-1}[\ x_0{}^4 -x^4]^{½}\}$.

$dt = \{ k^{-1}\ 2m\ d_0[\ x_0{}^4 -x^4]^{-½}\}\ dx$

changement de variable $u = x/x_0$: $dt = \{ k^{-1}\ 2m\ d_0 x_0{}^{-2}[\ 1-u^4]^{-½}\}\ du$

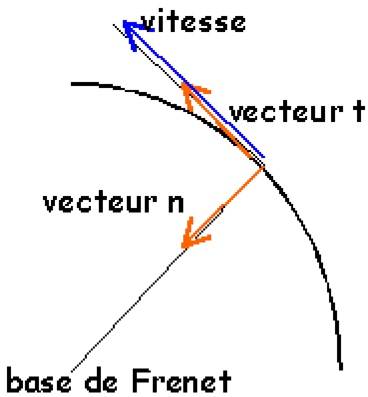
intégration entre 0 et $x = x_0$ ($u=1$) ; il s'écoule un quart de période T durant ce parcourt.

$0,25\ T = k^{-1}\ 2m\ d_0 x_0{}^{-1}$

dérivée par raport au temps du vecteur vitesse

derivée seconde par rapport au temps du vecteur position

variation du vecteur vitesse entre deux dates proches



$$a_N = \frac{v^2}{R} \quad \text{et} \quad a_T = \frac{dv}{dt}$$

th du centre d'inertie

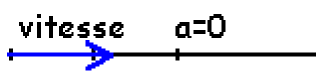
Dans un référentiel galiléen, somme des forces = masse * vecteur accélération du centre d'inertie

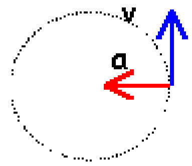
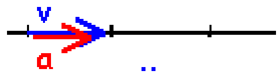
équations horaires

relations donnant la position du centre d'inertie à chaque instant

mouvement rectiligne uniforme

le vecteur vitesse est constant



mouvement circulaire uniforme la norme du vecteur vitesse est constante, mais la direction de ce vecteur change l'accélération est centripète, de valeur v²/ rayon arc cercle	
mouvement rectiligne uniformément accéléré la norme du vecteur accélération est constante, la valeur de la vitesse augmente vecteurs accélération et vitesse sont colinéaires de même sens	
mouvement rectiligne uniformément freiné la norme du vecteur accélération est constante, la valeur de la vitesse diminue vecteurs accélération et vitesse sont colinéaires de sens contraire	

exercice 1 cabine d'ascenceur

Une cabine d'ascenseur de masse M=300 kg transporte une charge de masse m=200kg. le cable exerce sur la cabine une force F d'intensité 5900N. g=10ms^{-2}. Il est alors possible que:

la cabine descende avec une accélération de -1,8 ms^{-2}.

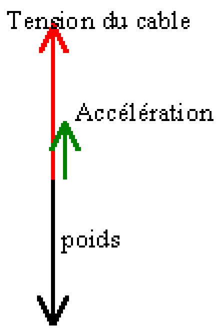
la cabine monte avec une accélérationde 0,55 ms^{-2}.

la cabine monte à vitesse constante

la cabine descende à vitesse constante

la cabine soit immobile

corrigé



tan(α)=1,16 /2

α=30°

Suivant un axe vertical dirigé vers le haut la seconde loi de Newton s'écrit:

-(M+m)g+F=(M+m)a

a=(-5000+5900)/ 500=1,8 ms^{-2}.

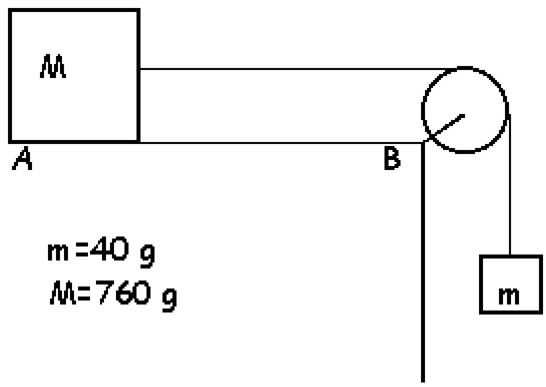
montée avec a=1,8ms^{-2}

.descente avec a= -1,8ms^{-2}

exercice 2 mouvement sur un plan horizontal

les frottements sont négligeables. g=10 m s^{-2}.

temps(s)	0,6	1	1,8
position (cm)	17,6	39,6	110
vitesse (ms^{-1})	0,45	0,65	1,05
Ec de la masse M (millijoule)	77	161	419



(répondre vrai ou faux)

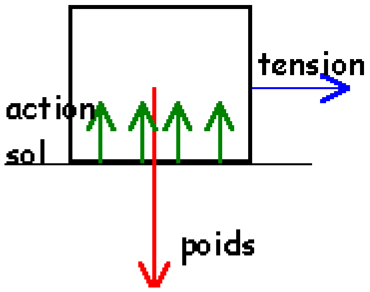
1. l'accélération est constante et sa valeur est 0,4 m s^{-2}.
2. le mouvement est uniformément accéléré.
3. la vitesse à l' instant t=0 est nulle.
4. la tension du fil est 0,4 N.

corrigé

faux la valeur de l'accélération est 0,5 m s^{-2}.

ΔV	0,2	0,4
Δt	0,4	0,8
a	0,2/0,4=0,5	0,4/0,8=0,5

vrai le mouvement est rectiligne et la valeur de l'accélérarion est constante.



faux la vitesse augmente de 0,5 m s^{-1} à chaque seconde.

à t=0 la vitesse initiale est donc: 0,65-0,5=0,15 m s^{-1}.

faux seule la tension effectue un travail mécanique, les autres forces sont perpendiculaires à la vitesse. Entre les instants t= 0,6 et t=1,8 s :

variation d'énergie cinétique de M: 0,342 J travail de la tension au cours du déplacement 1,1-0,176=0,924 m

th de l'énergie cinétique

tension*0,924=0,342

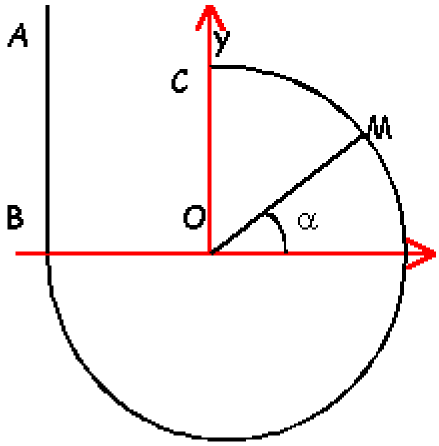
T=0,37 N

glissière circulaire -chute- vitesse-accélération

exercice 3

Le mobile de masse m est laché de A sans vitesse. Il se déplace dans une glissière ABMC, sans frottements. Au dela de C, il n'est soumis qu'à son poids AB=h=1 m ; OB=r=50 cm; g=10 ms^{-2}.

1. Quelle est la vitesse du mobile en C en ms^{-1} et km h^{-1}.
2. Donner l'équation de la trajectoire du mobile au dela de C
3. Exprimer l'accélération du mobile en M en fonction de h, g, r et α.



corrigé

th de l'énergie cinétique entre A et C (l'origine des altitudes est celle du point O) ou bien on écrit que l'énergie mécanique se conserve.

l'altitude de C doit être inférieure à celle de A, sinon C n'est pas atteint *(on part sans vitesse de A)*

Energie mécanique en A = énergie potentielle = mgh

Energie mécanique en C = 0,5 mV^2_C + mg R

V^2_C =2g(h-r) = 2*10(1-0,5)= 10

V_C=3,16 ms^{-1}=3,16*3,6 km h^{-1}

au dela de C, chute libre, le solide n'est soumis qu'à son poids.

expression de la vitesse en M :

conservation de l'énergie mécanique entre A et M:

dans le repère proposé

origine des temps: le passage en C

accélération (0; -10)

vitesse en C (-3,16 ; 0)

position OC (0; 0,5)

vitesse à la date t

(-3,16; -10 t)

position à la date t-3,x=-3,16t

y=-5t²+0,5

trajectoire

y= -5/3,16² x²+0,5

$mgh = 0,5\, mV^2_M + mg\, r \sin(\alpha)$

$V^2_M = 2g(h - r \sin(\alpha))$

accélération normale du mobile en M

$a_N = V^2_M/\text{rayon} = 2g(h/r - \sin(\alpha))$

accélération normale du mobile en M

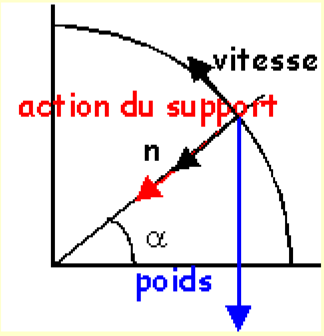
écrire la seconde loi de newton suivant un axe colinéaire à la vitesse et de même sens

$a_T = -g\cos(\alpha)$

-

-

-



exercice 4 relais 4 x 400

Un coureur X arrive avec un mouvement uniforme $v=7,5\ ms^{-1}$. A 10 m devant lui, le coureur Y s'élance d'un mouvement uniformèment accéléré $a=2\ ms^{-2}$.

1. Quel temps s'écoule entre le moment où Y démarre et le passage du témoin.
2. Pendant cette durée quelles sont les distances parcourues par X et Y.

Tous les coureurs ont une accélération de $2\ ms^{-2}$ jusqu'à atteindre une vitesse $v = 7,5\ ms^{-1}$ qu'il conserve jusqu'au passage du témoin. Les passages du témoin se font tous les 400 m. Quelle est la durée de la course ?

corrigé

origine des temps: t=0 au démarrage de Y

origine des abscisses: position de Y à t=0

équations horaires:

coureur X: $x=7,5t-10$ coureur Y: $x=t^2$ *tant que la vitesse est inférieure à 7,5 ms^{-2}.*

passage du témoin : les deux coureurs se rejoignent

$7,5t-10 = t^2$

la résolution donne t=1,73 s

la seconde solution t=5,77 s :*si X continue à courir à la même vitesse , il va rattraper Y*

distance parcurue par X en 1 ,73 s

à la vitesse de $7,5\ ms^{-1}$, en 1,73 s X parcourt une distance de :1,73*7,5= 13 m le premier coureur démarre avec une vitesse nulle:

mouvement uniformément accéléré jusqu' à atteindre la vitesse de 7,5 ms^{-1} puis mouvement uniforme

$x=t^2$ donc $v= 2t$; $t=7,5/2= 3,75$ s durée du mvt accéléré.

il a parcouru: $x=3,75^2= 14,06$ m

il lui reste a parcourir 400-14,06 = 385,94 m à la vitesse de 7,5 ms^{-1}. La durée de ce mvt est 385,94/7,5=51,46 s soit au total la course du premier dure: 55,2 s.

---

au passage du témoin quelle est la vitesse du second ?

3 m parcourus: $3=0,5 *2*t^2$; $t=1,732$ s ; $v=2t=3,46$ ms^{-1}

il lui reste à parcourir 400 m avant de rattraper le 3 ème.

mvt uniformèment accéléré jusqu' à atteindre la vitesse de 7,5 ms^{-1} puis mouvement uniforme

on ne change pas les origines définies ci dessus.

$x=0,5*2*(t-55,2)^2+3,46\ (t-55,2) +400$

$v=2((t-55,2)+3,46 =7,5$ d'où $t=55,2+2,02=57,2$ s

durée de l'accélération 2,02 s la distance parcourue est:

$x-400=2,02^2+3,46*2,02=11,06$ m

il lui reste à parcourir 400-11,06=388,94 m à la vitesse de 7,5 ms^{-1} durée =51,85 s

durée de la course du second (et du 3 ème):51,85+2,02=53,87s

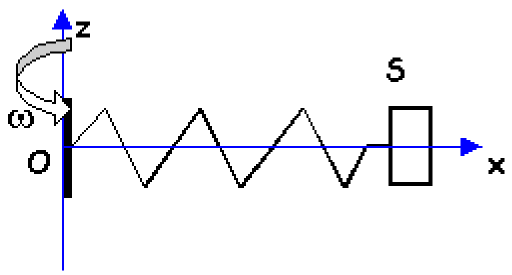
par contre le dernier parcourt 385,94 m à la vitesse de 7,5 ms^{-1} durée 51,46s

total: 216,4s

---

exercice 5 rotation d'un ressort

Le solide S de masse m=0,5 kg peut glisser sans frottements le long de la tige Ox (O fixe). On fait tourner l'ensemble autour de l'axe Oz à vitesse angulaire ω =5 rad s^{-1} constante. raideur k=100N m^{-1}. g=10 ms^{-2}. longueur à vide du ressort l_0=1 m.

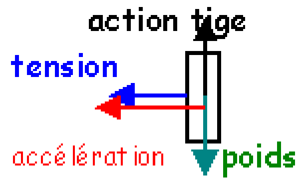


1. Quel est l'allongement du ressort ?
2. même question le ressort est incliné d'un angle α =30° sur l'horizontale.
3. Dans ce dernier cas déterminer la tension

T du ressort et l'action de la tige R.

corrigé

La somme des forces appliquées au solide S est égale au produit de sa masse par l'accélération. Projeter cette relation sur un axe horizontal à gauche.

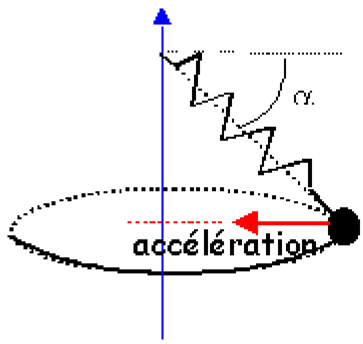


$k(L-L_0)=m\omega^2 L$

$(k- m\omega^2) L = kL_0$

$L= 100/(100-0,5*5^2)=1,143$ m

allongement 0,143 m



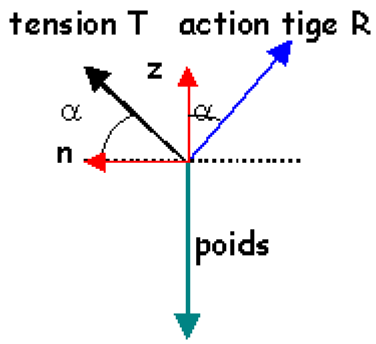
L'accélération est centripète dirigée suivant l'axe n ; le solide décrit un cercle de rayon $L\cos(\alpha)$

Même méthode en projection sur T

$T-mg\sin(\alpha)=m\omega^2L\cos(\alpha)$ ....$T=k(L-L_0)$

$L=(mg\sin(\alpha)+kL_0) / (k-m\omega^2\cos(\alpha))=1,149$m

d'où la tension $T=100(1,149-1)=14,9$ N



-

Même méthode en projection sur n

$T\cos(\alpha)-R\sin(\alpha)=m\omega^2L\cos(\alpha)$ ....$T=k(L-L_0)$

$R=(T-m\omega^2L)\cos(\alpha)/\sin(\alpha)=0,92$ N

exercice 6 vitesse - accélération - position

Soit la distribution de charges (microcoulombs) ci contre ;AB=d= 0,2 m ; Les deux charges placées en A et B sont fixes; par contre la charge placée en C est mobile sur la droite AB.

Quelle est la position d'équilibre de la charge placée en C, si elle existe ?On étudie le mouvement d'un petit mobile sur un axe Ox. Son accélération est constante de valeur a=6 m s^{-2}. Son abscisse initiale est x=-2 m; sa vitesse initiale est -3 ms^{-1}.

1. A quelle date et à quelle abscisse, le mobile s'arrête il puis change de sens de parcours.

Un objet décrit une trajectoire rectiligne; sa vitesse initiale est nulle et les deux premières secondes, son accélération valant 2 m s^{-2}. Les deux secondes suivantes son accélération est nulle.

Quelle est la distance parcourue durant ces 4 secondes ?

corrigé

La vitesse est une primitive de l'accélération

$v=at+v_0$ ..... $v=6t-3$

le mobile s'arrète si la vitesse s'annule ; t=0,5 s

puis il change de sens de parcours (mvt uniformément accéléré)

La position est une primitive de la vitesse

$x=0,5\ at^2+v_0t+x_0$ ..... $x=3t^2-3t-2$

abscisse à t=0,5 s : $3*0,5^2-3*0,5-2= -2,75$

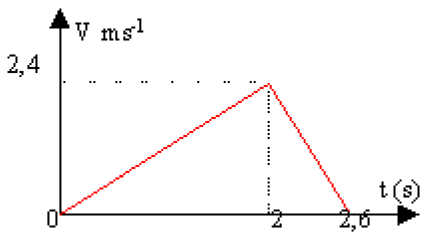
origines de temps et des distances :le départ

intervalle	position	vitesse	accélération		
[0;2]	$x=t^2$	$v=2t$	a=2	x(t=2)=4 m	v(t=2)=4 ms^{-1}
[2;4]	x=4(t-2)	v=4 ms^{-1}	a=0	x(t=4)=8 m	

total : 12 m parcourus

exercice 7

Un solide de masse M=2kg, est treuillé sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontal. frottements négligé; départ sans vitesse. Le cable casse à t=2 s . Le graphe ci contre représente la vitesse en fonction du temps lors de la montée.



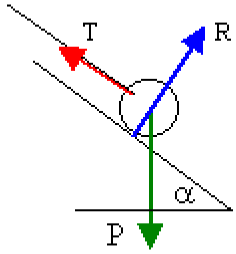
1. Déterminer les accélérations et α.
2. Quelle est la distance parcourue lors de la montée ?
3. déterminer la tension du cable.

corrigé

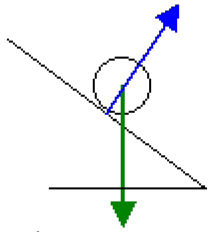
les coefficients directeurs des droites donnent les accélérations(ms^{-2}) a_1= 1,2 ;

a_2 = -4 (cable cassé et fin de la montée)

a_2=-gsin(α) d'où α = 24°



montée :
T - mgsin(α) = ma_1



descente a_2 = -gsin(α)

axe parallèle au plan vers le haut

origines des dates et des distances : bas du plan. Les équations horaires sont :

t < 2 : d_1=0,6 t²= 2,4 m

t > 2 : d_2= -2(t-2)²+2,4(t-2) + d_1

d_2= -2*0,6²+2,4*0,6+2,4 = 3,12 m

T=m(a_1+gsin(α))

T=2(1,2+4)= 10,4 N.

exercice 8 :

Une voiture de course démarre du stand de ravitaillement et accélère uniformément de 0 à 35 m/s en 11 secondes, en roulant sur une piste circulaire de rayon 500 m.

1. Calculer l'accélération tangentielle et l'accélération radiale si v =30m/s.
2. Déterminer la direction et l'intensité de la force qui s'exerce sur le pilote.

corrigé :

référentiel terrestre galiléen ; système : la voiture et le pilote

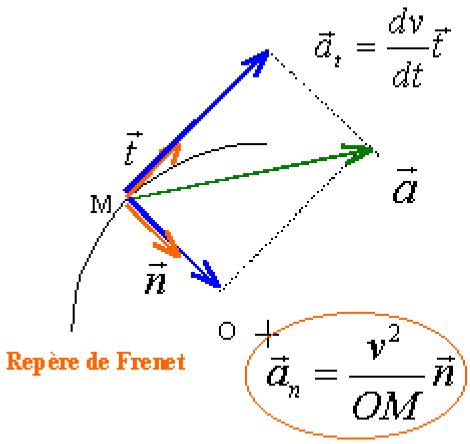
accélération tangentielle : variation de la vitesse divisée par la durée

35/11 = 3,18 m/s²

accélération normale : v² / rayon

la vitesse varie entre 0 et 11 s ; l' accélération normale varie aussi

30*30 / 500 = 1,8 m/s²



force = masse fois accélération

la force subie par le pilote est colinéaire au vecteur accélération et de même sens
Aurélie 15/01/07

Agrégation interne 2006 : modèle atomique de Thomson

Les atomes, selon Thomson (1902), sont constitués :

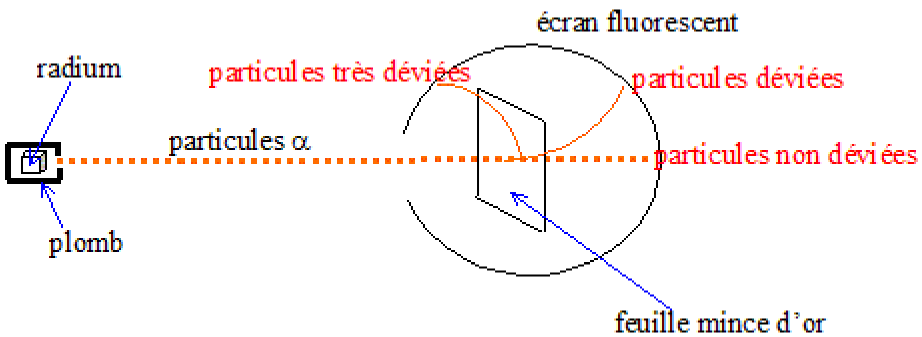
- d'une sphère pleine chargée positivement de manière uniforme : le rayon de la sphère est de l'ordre de 10^{-10} m
- d'électrons qui peuvent vibrer librement à l'intérieur de la sphère : l'atome reste électriquement neutre.

Ainsi l'atome d'hydrogène est représenté par une sphère de rayon R (charge + e), de centre O et un électron (charge - e, masse m).

Ce modèle n'était pas capable d'expliquer les raies du spectre d'émission de l'hydrogène. Il ne précisait pas la nature de la matière constituant la sphère positive, ni la densité de charge.

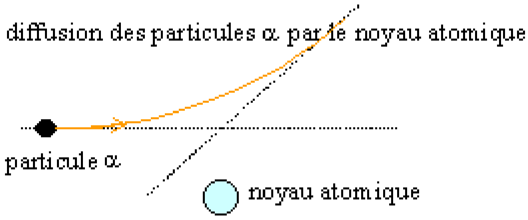
Rutherford, Schrodinger, Bohr firent évoluer le modèle de l'atome.

Expérience de Rutherford :



La plupart des particules ne sont pas déviées ; un petit nombre est très déviée : donc, la charge positive de l'atome est concentrée dans un volume de l'ordre de 10^{-13} m, appelé noyau, et non pas répartie sur une sphère de rayon 10^{-8} m.

Rutherford estima la taille du noyau d'or (Z=79) en déterminant la distance minimale d'approche R_0 des particules α correspondant à un angle de diffusion de 180°.



Valeur de R_0 si l'énergie cinétique initiale des particules α est de 7,7 MeV :

L'énergie initiale des particules α est sous forme cinétique : $\frac{1}{2}mv^2 = 7{,}7$ MeV $= 7{,}7\ 10^6$ eV $=7{,}7\ 10^6 * 1{,}6\ 10^{-19}$ J $=1{,}23\ 10^{-12}$ J

Lors de leur passage au plus près du noyau d'or, l'énergie de la particule α (charge +2e) est sous forme potentielle : $2Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 R_0)$.

L'énergie mécanique se conserve : $2Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 R_0) =1{,}23\ 10^{-12}$.

$R_0 = 2Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 *1{,}23\ 10^{-12})$ avec Z= 79 ; e = $1{,}6\ 10^{-19}$ C et $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\ 10^9$.

$R_0 =2*79*(1{,}6\ 10^{-19})^2 * 9\ 10^9 /(1{,}23\ 10^{-12}) = \underline{3\ 10^{-14}}$ m.

Mouvement de l'électron dans l'atome de Thomson :

L'atome d'hydrogène n'est soumis à aucune action extérieure. On s'intéresse à l'oscillation libre de l'électron par rapport à la sphère de centre O. On admet que l'électron ne perd pas d'énergie par rayonnement.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

A l'instant t, l'électron est en M tel que **OM**= **r** = r **e$_r$** (r<= R).

L'électron de l'atome d'hydrogène se déplace dans le champ électrostatique du proton représenté par une distribution volumique de charges uniforme de rayon R.

densité de charge volumique : ρ = charge / volume de la sphère de rayon R ; $\rho = e / (4/3\pi R^3) = 3e/(4\pi R^3)$.

L'électron n'est soumis qu'au champ électrique crée par une distribution volumique représentant le proton. Ce champ est radial.

Appliquons le théorème de Gauss à une sphère de centre O (centre de l'atome), de rayon r <R.

$$\oiint \vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}\ ;\ E\,4\pi r^2=\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\ \text{avec}\ \rho=\frac{3e}{4\pi R^3}\ ;\ E=\frac{e\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

A l'instant t=0, l'électron est écarté de sa position d'équilibre par une perturbation quelconque.

<u>Nature du mouvement</u> :

Il est alors soumis à la force centrale **F**=-e **E** = $-e^2/(4\pi\varepsilon_0 R^3)$ **r** .

Le référentiel d'étude étant galiléen :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M par rapport au point fixe O est égal au moment, par rapport à ce point, de la somme vectorielle des forces agissant sur le point matériel M . $\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}=\vec{OM}\wedge\Sigma\vec{F}}$

Or OM et **F** sont colinéaires ; le produit vectoriel OM ^ **F** est nul ; en conséquence le moment cinétique $\boldsymbol{\sigma_0}$ est constant : le mouvement est plan, perpendiculaire à $\boldsymbol{\sigma_0}$.

Dans un référentiel supposé galiléen, lié au proton, le pricipe fondamental appliqué au proton s'écrit :

$$m\frac{d\vec{r}^2}{dt^2}=\vec{F}=-e\vec{E}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}\ ;\ m\frac{d\vec{r}^2}{dt^2}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}=\vec{0}\ ;\ \frac{d\vec{r}^2}{dt^2}+\omega_0^2\vec{r}=\vec{0}\ \text{avec}\ \omega_0^2=\frac{e^2}{4m\pi\varepsilon_0 R^3}$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0.

La nature de la trajectoire (droite, cercle, ellipse) dépend des conditions initiales concernant la position et la vitesse.

Calcul de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de Lyman de l'atome d'hydrogène (λ_0 =121,8 nm) :

$\nu_0 = c/\lambda_0 = 3\ 10^8 / 121{,}8\ 10^{-9} = 2{,}67\ 10^{14}$ Hz.

$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 6{,}28 * 2{,}67\ 10^{14} = 1{,}68\ 10^{15}$ rad/s.

$\omega^2_0 = 2{,}82\ 10^{30}$; $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C ; $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg ; $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\ 10^9$.

$\omega^2_0 = e^2/(4\pi\varepsilon_0\, mR^3)$; $R^3 = e^2/(4\pi\varepsilon_0\, m\omega^2_0)$

$R^3 = (1{,}6\ 10^{-19})^2\ 9\ 10^9 / (9{,}1\ 10^{-31} * 2{,}82\ 10^{30}) = 9\ 10^{-29}$; $R = 4{,}5\ 10^{-10}$ m.

Cette valeur est supérieure à celle trouvée dans l'expérience de Rutherford ; elle est de l'ordre de grandeur du rayon de l'atome.

On admet que l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon a dans le plan Oxy perpendiculaire à un axe Oz dans le sens direct. Latome possède alors un moment dipolaire **p**= -e **r** équivalent à deux dipoles élémentaires $p_x(t)$ et $p_y(t)$.

Expression de ces dipoles : **p** = -e a $\mathbf{e_r}$ = $p_0\mathbf{e_r}$ avec p_0 = - ea

$p_x(t) = p_0 \cos(\omega_0 t)$; $p_y(t) = p_0 \sin(\omega_0 t)$

Expression de l'énergie mécanique E_m de l'oscillateur constitué par l'électron en fonction de p_0, ω_0, m et e :

$E_m = ½mv^2 + ½e^2/(4\pi\varepsilon_0 R^3)\, a^2$; or $v = \omega_0 a$ d'où :

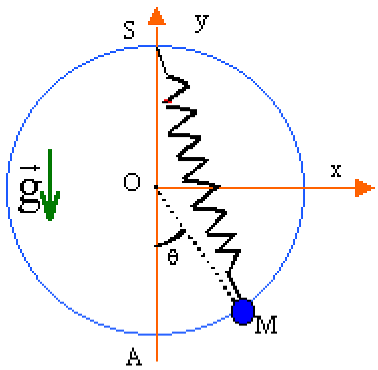
$E_m = ½[\, m\, \omega_0^2\, a^2 + e^2/(4\pi\varepsilon_0 R^3)\, a^2\,]$; or $\omega_0^2 = e^2/(4\pi\varepsilon_0\, mR^3)$ d'où :

$E_m = e^2\, a^2/(4\pi\varepsilon_0 R^3) = p_0^2/(4\pi\varepsilon_0 R^3) = p_0^2 m\, \omega_0^2 / e^2$.

solide glissant sur un anneau circulaire

travail, puissance, énergie

Un solide ponctuel M, de masse m; glisse sur un anneau de rayon R. Ce petit solide est fixé à l'extrémité d'un ressort de longueur à vide l_0, de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixée en S. Les frottements sont négligés.



1. Exprimer l'énergie mécanique du solide M pour une position repérée par l'angle θ. Lorsque θ = 90° le ressort n'est ni tendu, ni comprimé.
2. Etablir l'équation différentielle en fonction de θ et de ses dérivées.
3. Etudier le cas des oscillations de faible amplitude de part et d'autre de A.

corrigé

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Expression de l'énergie cinétique : $E_c = ½\, m\, v^2$

$$v = \omega R = \dot{\theta} R$$

$m\,s^{-1}$ $rad\,s^{-1}$ m

$E_c = ½\, mR^2\, \theta'^2$.

Expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$E_{pp} = mg\, h$

l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est prise en O : $h = -R\cos\theta$.

$E_{pp} = -mgR\cos\theta$.

Expression de l'énergie potentielle élastique :

$E_{pé} = ½\, k\, (SM-l_0)^2$

l'origine de l'énergie potentielle élastique est telle que $SM_{réf} = l_0$ pour $\theta = \pi/2$

exprimer SM en fonction de R et θ :

dans le triangle quelconque OSM :

$SM^2 = OM^2 + OS^2 - 2\, OM\, OS \cos(\pi-\theta)$

avec OM=OS=R et $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

$SM^2 = R^2+R^2 + 2R^2\cos\theta = 2R^2 (1+\cos\theta)$

or $(1+\cos\theta) = 2\cos^2(½\theta)$

$SM^2 = 4\, R^2 \cos^2(½\theta)$

$SM = 2R\, |\cos(½\theta)|$

θ appartient à $[-\pi\, ;\, \pi]$ donc θ appartient à $[-½\pi\, ;\, ½\pi]$

soit $|\cos(½\theta)| = +\cos(½\theta)$

$SM = 2R\cos(½\theta)$.

$E_{pé} = ½\, k\, (2R\cos(½\theta)-l_0)^2$

expression de l'énergie mécanique :

$\frac{1}{2} mR^2 \theta'^2 + \frac{1}{2} k (2R \cos(\frac{1}{2}\theta)-l_0)^2 - mgR\cos\theta = cte$

Cette énergie mécanique reste constante en l'absence de frottement.

équation différentielle du mouvement de M :

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement de M, dériver l'expression de l'énergie par rapport au temps.

dérivée de θ'^2 : $2 \theta' \theta''$.

dérivée de $\cos(\frac{1}{2}\theta)$: $-\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\theta) \theta'$

dérivée de u^2 : $2u u'$

dérivée de $(2R \cos(\frac{1}{2}\theta)-l_0)^2$: $2 (2R \cos(\frac{1}{2}\theta)-l_0) (-2R\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\theta)\theta')$

dérivée de $\cos \theta$: $-\sin\theta \theta'$

$\frac{1}{2} mR^2 2 \theta' \theta'' + \frac{1}{2} k 2 (2R \cos(\frac{1}{2}\theta)-l_0) (-2R\frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}\theta) \theta') - mgR (-\sin\theta) \theta' =0$

$R \theta'$ est commun à chaque terme et θ' supposée non nulle :

$mR \theta'' - k(2R \cos(\frac{1}{2}\theta)-l_0) \sin(\frac{1}{2}\theta) + mg\sin\theta = 0$

avec $2 \cos(\frac{1}{2}\theta)\sin(\frac{1}{2}\theta) = \sin\theta$

$mR \theta'' - kR \sin\theta + kl_0\sin(\frac{1}{2}\theta) + mg\sin\theta = 0$

$\theta'' + (g/R-k/m)\sin\theta + kl_0 / (mR) \sin(\frac{1}{2}\theta) =0$.

si θ est petit :

si l'amplitude est faible autour du point A alors $\sin\theta$ voisin de θ radian

et $\sin(\frac{1}{2}\theta)$ voisin de $\frac{1}{2}\theta$ radian

l'équation différentielle ci dessus s'écrit :

$\theta'' + (g/R-k/m)\theta + kl_0 / (2mR) \theta =0$.

$\theta'' + (g/R-k/m + kl_0 / (2mR)) \theta =0$.

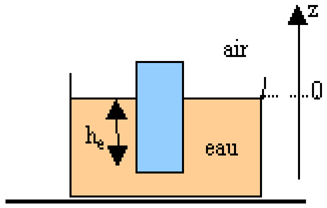
l'existence d'oscillation impose $g/R-k/m + kl_0 / (2mR)$ positif.

$g /R > k/m(l_0 / (2R) -1)$

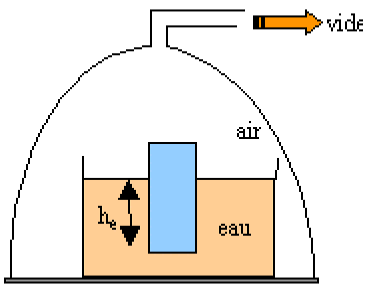
Poussée d'Archimède dans différents référentiels

référentiel galiléen
référentiel non galiléen en translation
référentiel non galiléen en rotation

1. Définir la poussée d'Archimède Pa subie par un corps C, de volume v, de masse volumique r, complétement immergé dans un liquide de masse volumique re.
2. Le corps est un cylindre de section S, de hauteur h, de masse volumique r < re partiellement immergé. Il est en équilibre. La pression atmosphérique est notée P0 dans le plan z=0. L'ensemble air-cylindre-liquide est en équilibre thermique à la température T. On suppose que l'air est un gaz parfait.



- Quelle est la pression dans l'eau dans le plan z= -he ?
- Quelle est l'expression rigoureuse de la pression p(z) dans un plan z >0 en fonction de z, T, de la masse d'une molécule d'air et de la constante de Boltzmann kB ?
- Quelle est l'expression approchée pour une altitude z faible ?
- En déduire la pression sur la face supérieure du cylindre en z = h-he en fonction de l'altitude et de g.
- En introduisant la masse volumique de l'air dans les conditions de température et de pression régnant à la surface libre exprimer la poussée d'Archimède subie par le cylindre. Que devient la pousée d'Archimède si on suppose constante la pression de l'air au voisinage du cylindre ?
- On place l'ensemble précédent sous une cloche à vide. On fait le vide. le cylindre s'enfonce t-il pendant cette opération ?



corrigé

La poussée d'Archimède exercée sur un corps de volume v entierement immergé est :
- la résultante des force de pression
- l'opposée du poids du volume de liquide déplacé.

$$\vec{P}_a = \oint p\,dS\,\vec{n} = -\rho_e v \vec{g}$$

Le principe fondamental de l'hydrostatique donne la pression dans le plan z = - he :
p(z= - he) = p0 +re g he .

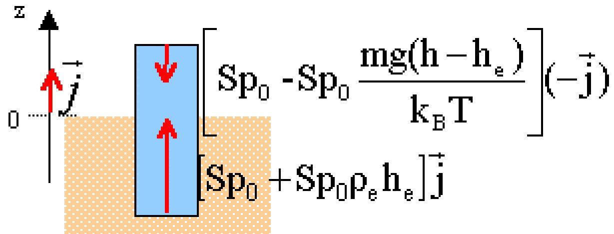
La pression dans une atmosphère isotherme varie avec l'altitude selon la loi :
(m : masse d'une molécule d'air)

$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

sur la face supérieure du cylindre z = h-he.
développement limité au premier ordre lorsque z est petit de l'exponentielle : e x voisin de 1+ x.

$$p \approx p_0\left(1 - \frac{mg(h-h_e)}{k_B T}\right) = p_0 - p_0\frac{mg(h-h_e)}{k_B T}$$

La poussée d'Archimède, résultante des forces de pression est alors :
la résultante des forces de pression sur la face latérale du cylindre est nulle, il reste les forces de pression exercée par l'eau sur le fond de section S, par l'air sur le haut.



Pa = S[p0 +re g he]+ S[p0 +p0 mg(h-he) / (kBT)]
Pa = S[re g he + p0 mg(h-he) / (kBT)].

la loi des gaz parfaits s'écrit : PV= n RT
M : masse molaire de l'air; ra : masse volumique de l'air
avec n = m / M et m / V = ra ;
d'où : P = ra RT / M = rakBT / m
par suite la poussée s'écrit : Pa = S[re g he + ra g(h-he)].
c'est à dire la somme des poids d'air et d'eau déplacés par le cylindre.
Si on suppose la pression de l'air uniforme au voisinage du cylindre, cela revient à négliger la poussée d'Archimède due à l'air.
La poussée d'Archimède n'existe qu'en présence d'un gradient de pression.

A l'équilibre le poids du cylindre est opposée à la poussée.
Si on fait le vide sous la cloche, la masse volumique de l'air décroît ; en conséquence la poussée d'Archimède due à l'air décroît. Pour maintenir l'équilibre la poussée due à l'eau doit augmenter et le cylindre va s'enfoncer.

référentiel non galiléen en translation :
Le dispositif précédent est placé dans un ascenceur vertical uniformément accéléré vers le bas avec une accélération g

1. Quelle est la résultante des forces de pression agissant sur un corps de volume v entierement immergé ? En déduire l'expression de la poussée d'Archimède.
2. Le cristallisoir et le cylindre précédent sont placé dans l'ascenceur à l'arrêt. La pression atmosphérique est supposée uniforme. L'ascenceur démarre vers le bas avec l'accélération g. Le cylindre s'enfonce t-il ?

corrigé

Dans le référentiel de l'ascenceur, en translation rectiligne par rapport à un référentiel terrestre, un petit volume v de liquide est en équilibre sous l'action :

- de son poids ;- des forces de pression ;- de la force d'entrainement.

$$\underbrace{\oint p\,dS\vec{n}}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\rho_e v\vec{g}}_{\text{poids}} \underbrace{-\rho_e v\vec{\gamma}}_{\text{force d'entraînement}} = \vec{0}$$

La poussée d'archimède est la résultante des forces de pression ; son module est égal au poids apparent du volume d'eau déplacé.

Pa = rev (g - g).

La poussée due à l'air est négligée. L'équilibre du cylindre de volume total V, dans le repère de l'ascenceur s'écrit :

ve est le volume du cylindre immergé.

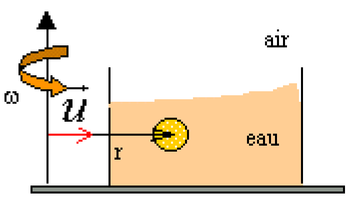
$$\underbrace{-\rho_e v_e(\vec{g}-\vec{\gamma})}_{\text{poussée}} + \underbrace{\rho V\vec{g}}_{\text{poids}} \underbrace{-\rho V\vec{\gamma}}_{\text{force d'entraînement}} = \vec{0} \Rightarrow \rho_e v_e = \rho V \ \forall \gamma$$

Le cylindre reste en équilibre lorsque l'ascenceur se déplace.

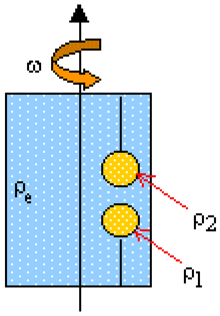
référentiel non galiléen en rotation :

Le cristallisoir est fixé sur un plateau horizontal tournant autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire de rotation w constante. On désigne par r la distance du petit volume d'eau à l'axe de rotation.

1. Quelle est la nouvelle résultante des forces de pression agissant sur le petit volume d'eau ? En déduire la poussée d'Archimède subie par un solide de volume v entierement immergé.



2. Un cylindre fermé, plein d'eau tourne autour de son axe à la vitesse w constante. Deux petites sphères de masses volumique r1 et r2 (r1< re <r2) sont respectivement attachées au plancher et au plafond par un fil sans masse. Déterminer qualitativement la position des deux pendules dans le repère tournant.



corrigé

Dans le référentiel de l'ascenceur, en rotation par rapport à un référentiel terrestre, un petit volume v de liquide est en équilibre sous l'action :

- de son poids ;- des forces de pression ;- de la force d'entrainement.

La force de Coriolis n'intervient pas à l'équilibre.

$$\underbrace{\oint p\,dS\,\vec{n}}_{\text{poussée}} + \underbrace{\rho_e v\vec{g}}_{\text{poids}} + \underbrace{\rho_e v\omega^2 r\,\vec{u}}_{\text{force d'entraînement}} = \vec{0}$$

$$\vec{P}_a = -\rho_e v(\vec{g} + \omega^2 r\,\vec{u})$$

Une boule de masse volumique r est soumise à deux forces radiales :

- la poussée d'Archimède centripète de module rev w2 r
- la force d'entrainement centrifuge de module rv w2 r

La résultante radiale est : $(\rho - \rho_e)v\omega^2 r\,\vec{u}$

La sphère supérieure (r2 >re) s'écarte de l'axe de rotation, alors que la sphère inférieure se rapproche de l'axe.

L'effet est d'autant plus grand que les sphères sont plus éloignées de l'axe et que la vitesse de rotation est grande.

l'avion et le missile

Un avion vole horizontalement à l'altitude h à la vitesse costante notée v. Un missile placé initialement au sol. A l'instant t = 0, l'avion passe à la verticale du missile; le missile décolle en direction de l'avion. la vitesse du misile est le double de celle de l'avion; on suppose que le missile est, à tout instant, dirigé vers l'avion.

1. Etablir l'équation de la trajectoire du missile.
2. Déterminer l'instant de l'impact.

équation différentielle

$$x\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = 0,5$$

les solutions

$$z = 0,5(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) + Cte$$

corrigé

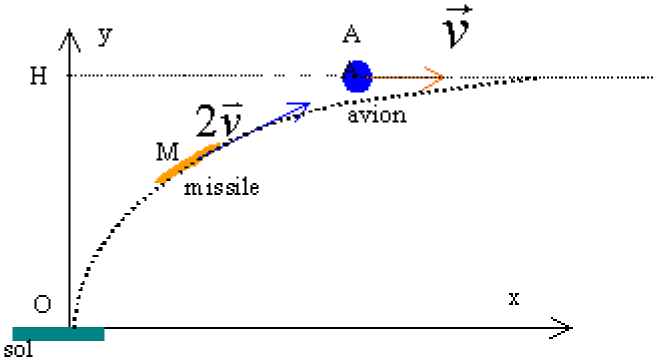
équations horaires du mouvement de l'avion :

$x(t) = v\,t$

$z(t) = h = cte$

trajectoire de l'avion : droite d'équation z = h

équations horaires du mouvement du misile :



$$\vec{OA}(vt;\, h)$$

$$\vec{OM}(x;\, y)$$

$$\vec{MA}(vt - x\,;\, h - y\,)$$

$$2\vec{v}\left(\frac{dx}{dt};\, \frac{dy}{dt}\right)$$

le vecteur 2v et le vecteur MA sont toujours colinéaires.

On note x' = dx / dy

$$\frac{dx}{dy} = \frac{vt - x}{h - y} = x'$$

vt-x = x' (h-y)

dériver cette relation par rapport au temps

$$v - \cancel{\frac{dx}{dt}} = -x'\cancel{\frac{dy}{dt}} + (h - y)\,\frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{dx}{dy}\,\frac{dy}{dt} \qquad \qquad \frac{dx'}{dy}\,\frac{dy}{dt}$$

v = (h-y) x'' dy / dt (1)

Au cours du temps très petit noté dt, le missile parcourt la distance très petite notée dL à la vitesse 2v.

Exprimons de deux manières différentes cette distance dL :

$dL = 2v\, dt$

$dL^2 = dx^2 + dy^2$

mettre dy^2 en facteur commun et remplacer dx/ dy par x':

$dL^2 = dy^2(1+x'^2)$

$$2v\, dt = dy\sqrt{1 + x'^2} \ \text{ soit } \ \frac{dy}{dt} = \frac{2v}{\sqrt{1 + x'^2}}$$

repport dans (1) :

x

$$\overset{1/2}{\cancel{y}} = x''(h-y)\frac{2\overset{1}{\cancel{v}}}{\sqrt{1+x'^2}}$$

Z'

$\sqrt{1+z^2}$

On retrouve l'équation différentielle dont on connaît les solutions :

$$z = 0{,}5\left(\sqrt{h-y} - \frac{1}{\sqrt{h-y}}\right) + Cte$$

Comment déterminer la constante ?

à l'instant t=0, le missile est au sol (y=0) et il est vertical (x'=z =0)

Cte = -0,5(h0,5 -h-0,5) ; cette constante sera notée C1.

On choisi h comme unité de longueur; alors C1 est nulle.

Comment passer de z = x' à x ?

On pose Y=h-y

La primitive de (Y)½ est : 2/3 (Y)1,5+ cte

La primitive de (Y)-0,5 est : 2 (Y)0,5+Cte.

d'où la trajectoire du missile : x = 1/3 (Y)1,5 + (Y)0,5 + C2.

Comment déterminer C2?

à t=0, le missile est en O (0 ; 0) et Y=h

C2= -1/3 h1,5 + h 0,5.

h étant l'unité de longueur, C2= 2/3.

---

instant de l'impact:

Le missile rencontre l'avion lorsque Y = 0.

d'une part : ximpact = C2=2/3

d'autre part : ximpact = v timpact

timpact = 2 /(3 v) , h étant l'unité de longueur

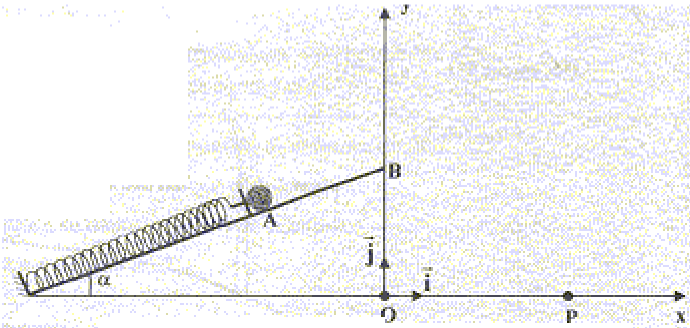
timpact = 2h /(3v)

Oscillateur élastique sur un plan incliné

ressort + bille *d'après concours kiné Berck 2006*

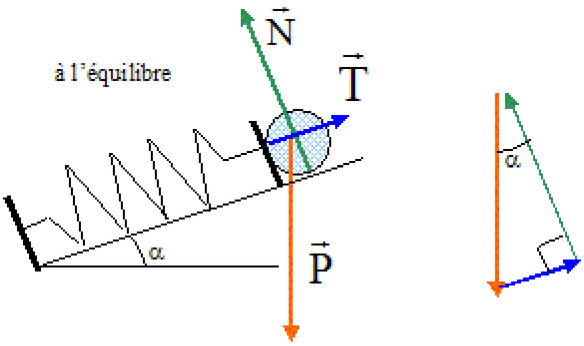
Un ressort de constante de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide l_0 est fixé par l'une de ses extrémités à une butée fixe. Il peut osciller sans frottement suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On relie l'extrrémité libre du ressort à une petite bille de masse m. On considérera cette bille comme ponctuelle. A l'équilibre, le ressort est comprimé de 1,0 cm par rapport à sa longueur à vide et la bille se trouve en A.

m= 200 g ; α= 20° ; y_B= 14 cm ; AB= 20 cm.



1. Déterminer la constante de raideur k du ressort.(en N/m).
   On comprime le ressort de 8,0 cm vers le bas depuis la position d'équilibre puis on lâche le système {bille ressort} sans vitesse initiale.
2. Calculer la vitesse v_A(en m/s) de la bille en A.
   On néglige les frottements entre A et B. La bille quitte le ressort en A avec la vitesse v_A.
3. Calculer la vitesse v_B(en m/s) de la bille en B.
   La bille quitte le plan incliné en B avec la vitesse v_B. On néglige l'action de l'air sur la bille. Le mouvement est étudié dans le repère Oij. La bille touche le sol en P.
4. Déterminer OP en cm.
5. Déterminer la durée en seconde mise par la bille pour aller de A en P.

corrigé



A l'équilibre T=kx=mgsinα d'où k= mgsinα / x = 0,2*9,8 sin20 / 0,01 = 67 N/m.

<u>vitesse</u> v_A(en m/s) de la bille en A.

origine des énergies potentielles : le point A (position d'équilibre). Ecrire la conservation de l'énergie mécanique.

Au point le plus bas (ressort comprimé de 8 cm suplémentaires, soit 9 cm en tout) l'énergie est sous forme potentielle élastique et de pesanteur

0,5*67*0,09²-0,2*9,8*0,08 sin 20 = 0,218 J

En A, l'énergie est sous forme cinétique : $\frac{1}{2}mv^2_A$

$0,218 = \frac{1}{2}mv^2_A$ soit $v^2_A = 0,218*2/0,2 = 2,18$; v_A= 1,5 m/s. (1,476 m/s)

<u>vitesse</u> v_B(en m/s) de la bille en B :

entre A et B seul le poids effectue un travail résistant (l'action du plan, perpendiculaire au plan ne travaille pas)

travail du poids : $mg(y_A-y_B) = -mgAB \sin\alpha = -0,2*9,8*0,2 \sin 20 = -0,134$ J

théorème de l'énergie cinétique entre A et B : $\frac{1}{2}mv^2_B - \frac{1}{2}mv^2_A = -mgAB \sin\alpha$

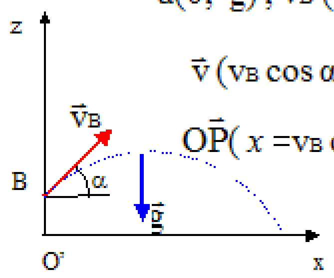
$v^2_B = v^2_A - 2gAB \sin\alpha = 2,18 - 2*9,8*0,2*\sin 20 = 0,84$; v_B= 0,92 m/s.

<u>calcul de OP</u> en cm : chute libre avec vitesse initiale

$\vec{a}(0;-g)$; $\vec{v}_B\,(v_B \cos\alpha\ ;\ v_B \sin\alpha\ )$; $\vec{OM}_0(0;h_B)$

$\vec{v}\,(v_B \cos\alpha\ ;\ v_B \sin\alpha - gt\ )$

$\vec{OP}(\ x = v_B \cos\alpha\ t\ ;\ z = -0,5\,gt^2 + v_B \sin\alpha\ t + h_B\ )$



$$\boxed{z = \frac{-0,5\,gx^2}{v_B^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h_B}$$

en P l'altitude est nulle : $0 = -4,9\, x^2/(0,92^2*\cos^2 20) + x \tan 20 + 0,14$

$-6,56\, x^2 + 0,364\, x + 0,14 = 0$ d'où $x = 0,176$ m (18 cm)

<u>durée en seconde mise par la bille pour aller de A en P</u> :

trajet BP : $OP = v_B \cos\alpha\ t$ soit $t = OP/(v_B \cos\alpha) = 0,176/(0,92*\cos 20) = 0,20$ s.

trajet AB : mouvement rectiligne uniformément retardé d'accélération a telle qie : $v^2_B - v^2_A = 2a\,AB$ soit $a = (0,92^2-1,5^2) / 0,4 = -4,61$ m/s.

vitesse primitive de l'accélération : $v = -at + v_A = -4,61\,t + 1,5$ soit $t = (v_B - v_A)/a = (1,5-0,92)/4,61 = 0,13$ s

total : 0,20+0,13 = 0,33 s.

<u>Question complémentaire</u> :

On comprime le ressort de 8,0 cm vers le bas depuis la position d'équilibre puis on lâche le système {bille ressort} sans vitesse initiale. Etablir l'expression de l'énergie mécanique du système {bille + ressort+ Terre} pour une position quelconque de la bille en contact avec le ressort ; en déduire l'équation différentielle du mouvement puis l'abscisse x(t) du centre d'inertie de la bille.

corrigé

expression de l'énergie mécanique du système {bille + ressort+ Terre} :

origine des énergies potentielles : le point A (position d'équilibre). Ecrire la conservation de l'énergie mécanique.

Axe choisi : origine A, axe parallèle au plan, orienté vers le haut ; l'abscisse x(t) = x, du centre d'inertie de la bille est donc négative.

énergie cinétique : $E_c = ½mv^2 = ½mx'^2$

énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgh = mg\ x \sin \alpha$.

énergie potentielle élastique : $E_{p\ élast} = ½k(\ l-l_0)^2 = ½k(\ l_{équi}-x-l_0)^2$

énergie mécanique du système {bille + ressort + Terre} : $E_m= ½mx'^2 + mg\ x \sin \alpha + ½k(\ l_{équi}-x-l_0)^2$ = constante.

équation différentielle du mouvement :

Dériver par rapport au temps l'expression de l'énergie mécanique :

$mx'\ x'' + mg\ x' \sin \alpha + k(\ l_{équi}-x-l_0)(-x') = 0$

simplifier par x' : $m\ x'' + mg \sin \alpha - k(\ l_{équi}-x-l_0) = 0$

or $mg \sin \alpha = k(\ l_{équi}-l_0)$ d'où : $m\ x'' +kx=0$.

c'est l'équation différentielle d'un oscillateurharmonique de pulsation $\omega_0 = (k/m)^{½}$.

abscisse x(t) du centre d'inertie de la bille :

solution de l'équation différentielle : $x(t) = A \cos (\omega_0 t + B)$

A et B sont déterminées par les conditions initiales (vitesse initiale nulle et x(0) = -0,0 8 m

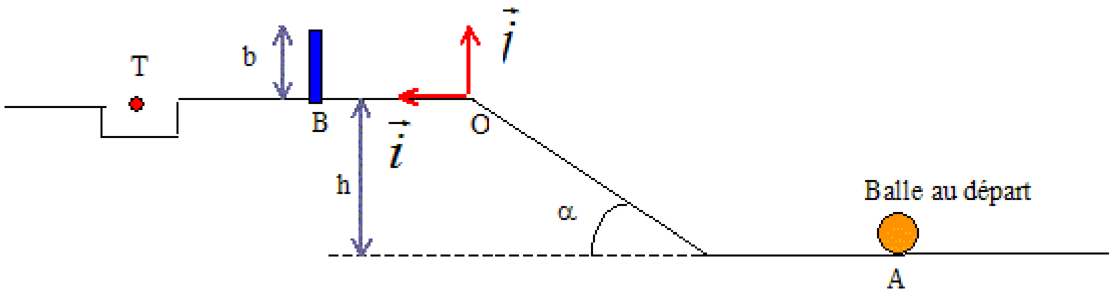
-0,08 = A cos B d'où B= πet A= 0,08 m

$x(t) = 0,08 \cos \cos (\omega_0 t + \pi)$

Aurélie 17 Aurélie 17 /10 /07

théorème de l'énergie cinétique ; trajectoire d'une balle de golf concours Berck 98/99

Le mini-golf de Berck fait la joie des petits et des grands. Un des points les plus difficiles à réaliser est représenté ci-dessous :



La balle , assimilée à un objet ponctuel de masse m, quitte le point A avec une vitesse horizontale v_A, monte la rampe d'angle α et de hauteur h, passe au dessus de la barrière de hauteur b et tombe dans le trou si "le point" est réussi.

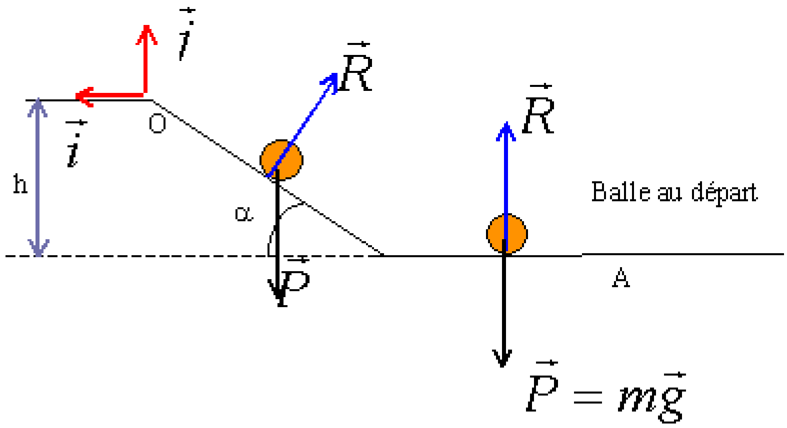
Les résultats numériques seront exprimés avec trois chifres sinificatifs.

Les frottements avec le sol ou l'air sont négligés.

g = 10,0 m/s² ; α =30,0° ; h= 50,0 cm ; x_T= 3,00 m.

La barrière est au milieu des points O et T.

Donner une condition sur v_A, en fonction de g et h pour que la balle parvienne en O.



Ecrire le théorème de l'énergie cinétique entre A et O.

Sur le plan horizontal, les forces sont perpendiculaires à la vitesse : en conséquence elles e travaillent pas.

Sur la rampe seul le poids effectue un travail (R, action du plan, est normale au plan).

le travail du poids est résistant en montée et vaut **W= -mgh**.

variation de l'énergie cinétique entre A et O :

$$\Delta E_c = ½m\,v_O^2 - ½m\,v_A^2$$

$$½m\,v_O^2 - ½m\,v_A^2 = -mgh$$

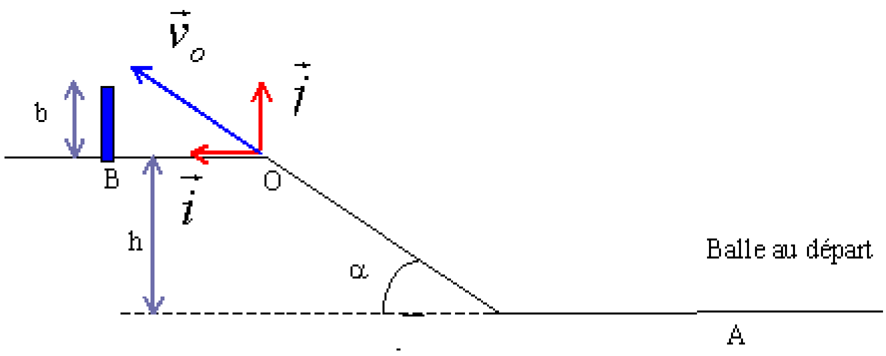
$$v_O^2 = v_A^2 - 2gh.$$

Pour atteindre O avec une vitesse nulle, la vitesse minimale en A doit être : $v_A = (2gh)^{½}$.

On suppose que la balle parvient en O.

Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse v_O, en O, en fonction de α, v_A, g et h.

$$\boxed{v_{ox} = v_o \cos\alpha} \quad \boxed{v_{oy} = v_o \sin\alpha}$$



$$v_{ox} = (v_A^2 - 2gh)^{½}\cos\alpha \;;\; v_{oy} = (v_A^2 - 2gh)^{½}\sin\alpha.$$

Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire en fonction de ces mêmes paramètres.

Au delà de O la balle est en chute libre (elle n'est soumise qu'à son poids).

Composantes de l'accélération : (0 ; -g)

La vitesse est une primitive de l'accélération :

$$v_x = v_{ox} = (v_A^2 - 2gh)^{½}\cos\alpha \;;\; v_y = -gt + v_{oy} = -gt + (v_A^2 - 2gh)^{½}\sin\alpha.$$

La position est une primitive de la vitesse :

$$x = v_x\,t = (v_A^2 - 2gh)^{½}\cos\alpha\; t \quad (1)$$

$$y = v_y\,t = -½gt^2 + (v_A^2 - 2gh)^{½}\sin\alpha\; t \quad (2)$$

(1) donne $t = x / \left((v_A^2 - 2gh)^{½}\cos\alpha \right)$

repport dans (2) :

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_A^2 - 2gh)\cos^2\alpha} + x \tan\alpha$$

Calculer la valeur umérique de v_A pour que la balle parvienne en T, centre du trou.

abscisse de T : x_T=3 m ; ordonnée y_T=0

$0 = -0{,}5\ g *3 / ((v_A^2-2gh)\cos^2\alpha) + \sin\alpha / \cos\alpha$.

$1{,}5\ g / ((v_A^2-2gh)\cos\alpha) = \sin\alpha$; $1{,}5\ g = (v_A^2-2gh)\cos\alpha\sin\alpha$

$(v_A^2-2gh) = 1{,}5\ g / (\cos\alpha\sin\alpha)$; $v_A^2=1{,}5\ g / (\cos\alpha\sin\alpha) +2gh$

$v_A^2=15/(\cos30 \sin30) +2*10*0{,}5 =44{,}641$

v_A= 6,68 m/s.

Calculer la valeur numérique (en cm) de la hauteur maximale b_{max} de la barrière pour que le "point" soit possible.

x_B= 1,5 m ;

$y_B= -0{,}5*10*1{,}5^2 / ((6{,}68^2-2*10*0{,}5) \cos^2 30) + 1{,}5 \tan 30$

y_B= 0,433 m = **43,3 cm**.

Le point T est le centre d'un trou de 20 cm de diamètre.

Donner l'encadrement nmérique de v_A (en km/h) qui permet de réussir ce point.

ordonnée y_T=0

$0 = -0{,}5\ g *x_T / ((v_A^2-2gh)\cos^2\alpha) + \sin\alpha / \cos\alpha$.

$0{,}5\ g *x_T / ((v_A^2-2gh)\cos\alpha) = \sin\alpha$; $0{,}5\ g *x_T = (v_A^2-2gh)\cos\alpha\sin\alpha$

$(v_A^2-2gh) = 0{,}5\ g *x_T / (\cos\alpha\sin\alpha)$; $v_A^2=0{,}5\ g *x_T / (\cos\alpha\sin\alpha) +2gh$

abscisse de T : **x_T=2,9 m**

$v_A^2=5*2{,}9/(\cos30 \sin30) +2*10*0{,}5$

v_A= 6,59 m/s = 6,59*3,6 km/h = **23,7 km/h**.

abscisse de T : **x_T=3,1 m**

$v_A^2=5*3{,}1/(\cos30 \sin30) +2*10*0{,}5$

v_A= 6,77 m/s = 6,77*3,6 km/h = **24,4 km/h**.

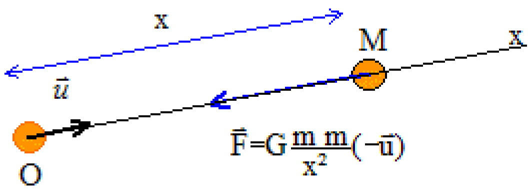
Deux boules dans l'espace (d'après concours Mines 74)

Deux boules homogènes ont même rayon a/4, même masse, même masse volumique r = 7800 kg m-3. Le référentiel est galiléen. Le centre de l'une est fixe en O, origine d'un axe Ox ; le centre de l'autre est en un point M d'abscisse x>0. La seule force appliquée à la boule de centre M est la force gravitationnelle exercée par l'autre boule. On peut remplacer chaque boule par un point matériel, de centre O ou M, et de même masse.

1. Donner l'expression de la force gravitationnelle subie par M en fonction de m, x et G, constante gravitationnelle. G= 6,67 10-11N m2 kg-1.
2. A l'instant initial on abandonne la boule mobile, sans vitesse, son centre M étant à l'abscisse x=a. Exprimer sa vitesse lorsque son centre se trouve à l'abscisse x. (Deux méthodes sont demandées)
3. Calculer l'instant t pour lequel M se trouve à l'abscisse x. On donne :
$$f(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}} = -a^{3/2}\left[\sqrt{\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)} + \arctan\sqrt{\frac{a}{x} - 1}\right.$$
4. Que vaut x lorsque les deux boules se heurtent ? Exprimer l'instant t1 du choc en fonction de G et r. Calculer t1.
5. En réalité la boule de centre O ne reste pas immobile. Ecrire l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit la distance x entre les centres des deux boules. Montrer que cette équation se déduit de celle qu'on a étudié jusqu' à maintenant en y remplçant G par 2G. Exprimer puis alculer t2, instant où les deux boules se heurtent.
6. Le choc entre les deux boules est élastique. Décrire qualitativement leurs mouvements ultérieurs. Indiquer un temps caractéristique de ce mouvement.
7. On suppose que le choc est mou ; la moitié de l'énergie cinétique est convertie en chaleur.Décrire qualitativement leurs mouvements ultérieurs..

corrigé

Expression de la force gravitationnelle subie par M en fonction de m, x et G :
La boule M est soumise à la force gravitaitonnelle attractive, exercée par la boule O.



vitesse lorsque son centre se trouve à l'abscisse x :
méthode 1 : écrire le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant initial d'abscisse x= a, de vitesse nulle et l'instant final d'abscisse x, de vitesse v.
La force F et le déplacement sont des vecteurs colinéaires et de même sens : le travail de cette force est moteur.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \int_a^x F dx = \int_a^x -G\frac{m^2}{x^2}dx = Gm^2\left[\frac{1}{x}\right]_a^x = Gm^2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right]$$

méthode 2 : utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

L'énergie potentielle de pesanteur à la distance x s'exprime par : Ep = -Gm2/x. L'origine de cette énergie est prise à l'infini.

-Gm2/x + ½mv2 = -Gm2/a

par suite v² = 2Gm[1/x - 1/a]

La boule M est attirée par la boule O : le vecteur vitesse est orienté vers O, en sens contraire de l'axe et sa valeur est : v = [2Gm(1/x - 1/a)]½.

instant t pour lequel M se trouve à l'abscisse x :

la vitesse est la dérivée de l'abscisse par rapport au temps : v = dx/dt ; dt = dx/v puis intégrer entre a et x.

$$t = \int_a^x \frac{dx}{v} = -\frac{1}{\sqrt{2Gm}}\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}} = -\frac{1}{\sqrt{2Gm}}[f(x) - f(a)] = -\frac{f(x)}{\sqrt{2Gm}}$$

; f(a) étant nulle.

instant t1 du choc en fonction de G et r :

D'une part les deux boules de rayon r = 0,25 a, se heurtent lorsque x = ½a.

d'autre part f(½a) = - a3/2 [p/4+½]

enfin la masse de la boule M s'exprime par : volume * masse volumique

m = Vr avec V= 4/3p(a/4)3 d'où m = pra3 / 48

t1 = -f(½a) [2Gm]-½ = a3/2 [p/4+½] [1/24 Gpra3]-½ = [p/4+½] [1/24 Gpr]-½

t1 = (3,14/4 + 0,5)[6,67 10-11 * 3,14 *7800 /24]-½ = 4925 s.

équation différentielle du second ordre à laquelle obéit la distance x entre les centres des deux boules :

Le centre de masse des deux boules de même masse est située au milieu du segment OM. Ce centre de masse est fixe et les deux boules se déplacent symétriquement par rapport au centre de masse ; x étant la distance séparant les deux boules, l'abscisse de M est ½x, tandis que l'abscisse de O est -½x.

La seconde loi de Newton s'écrit alors : md²(½x) / dt² = -Gm²/x² soit md²x/dt² =-2Gm²/x²

dans l'étude précédente cette même loi s'écrivait : md²x/dt² = -Gm²/x²

Pour la calcul de t2 il suffit de remplacer dans l'expression de t1, G par 2 G : d'où t2 = 2-½t1 = 3483 s.

Le choc entre les deux boules est élastique :

Les boules rebondissent l'une sur l'autre ; après le choc les boules s'éloignent symétriquement : leurs vecteurs vitesses on même valeur mais sont de sens contraire.

Lorsque la distance de leurs centres est égale à x=a, elles s'immobilisent puis enssuite elles vont se rapprocher. Le mouvement est périodique, de période 2t2.

Le choc entre les deux boules est mou :

A chaque choc la moitié de l'énergie cinétique est dissipée en chaleur ; après chaque choc les valeurs des vitesses sont divisées par 2½.

Les rebonds seront donc de plus en plus petits ; les deux boules s'immobiliseront l'une contre l'autre.

Concours Capes : relèvement des virages, inclinaison du train, forme des roues 2007

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On s'interresse à un chemin de fer sur un sol plan horizontal, qui décrit une courbe en arc de cercle de rayon R_1 pour le rail n°1, à l'intérieur de la courbe, et $R_2 = R_1+L$ pour le rail n°2, à l'extérieur de la courbe, où L= 1435 mm est l'écartement des rails en Europe. On supposera que $L<<R_1$. On suppose que les roues du train ont un rayon respectivement r_1 pour la roue en contact sur le rail n°1 et r_2 pour le rail n°2. Ces roues de chaque côté de la voie ferrée sont sur le même axe Δ et sont solidaires ; elles roulent sans glissement sur les rails.

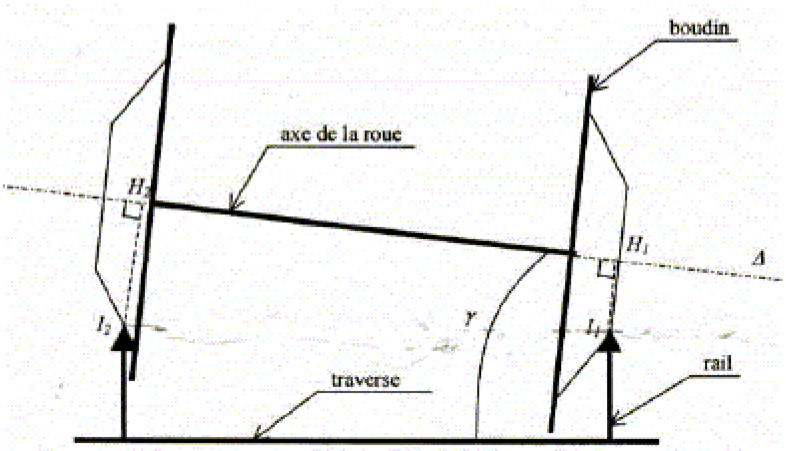
1. Exprimer le rapport $\Delta L_2/\Delta L_1$ des longueurs parcourues sur les deux rails en fonction de R_2 et R_1.
2. Exprimer le rapport $\Delta L_2/\Delta L_1$ en fonction de r_2 et r_1.
3. En déduire l'expression du rapport r_2/r_1 en fonction de L et R_1.

Variation du rayon des roues :

1. Montrer que dans le cas d'un chemin de fer rectiligne, les roues doivent avoir un rayon identique $r_1=r_2=r_0$.
2. Il existe donc un système qui permet de faire "varier" le rayon des roues : posons $r_1 = r_0-\delta$ et $r_2 = r_0+\delta$. On supposera d<<r0.
   Effectuer un développement limité au premier ordre en δ/r_0 du rapport r_2/r_1 ; en déduire l'expression de δ en fonction de L, r_0 et du rayon de courbure R_1.

Inclinaison du train :

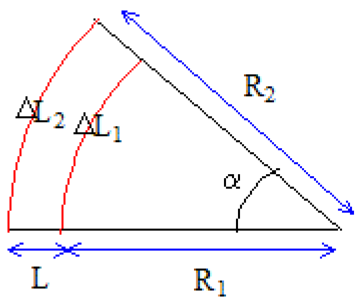
Les roues du train sont en fait des tronçons de cônes de même axe D, identiques et symétriques par rapport à l'axe du train.



On suppose que le plan est horizontal : la traverse est horizontale et les rails verticaux. Le point de contact du rail n°1 (respectivement n°2) avec la roue est noté I_1 (respectivement I_2) $L=I_1I_2$. H_1 (respectivement H_2) est le projeté orthogonal de I_1 (respectivement I_2) sur Δ. On a donc $r_1 = I_1H_1$ et $r_2 = I_2H_2$. Δ fait un angle γ avec l'horizontale.

1. Exprimer sin γ en fonction de L, r_1 et r_2 puis en fonction de R_1 et r_0.
2. Que vaut γ dans le cas du chemin de fer rectiligne.
3. On considère qu'une inclinaison de 2% reste tolérable pour les voyageurs. Si r_0 = 1,22 m calculer le rayon de courbure minimum $R_{1\,mini}$.

Expression du rapport $\Delta L_2/\Delta L_1$ des longueurs parcourues sur les deux rails en fonction de R_2 et R_1 :



$\Delta L_1 = R_1\alpha$ (α exprimé en radian) ; $\Delta L_2 = R_2\alpha$; **$\Delta L_2/\Delta L_1 = R_2 / R_1$**

Expression du rapport $\Delta L_2/\Delta L_1$ en fonction de r_2 et r_1 :

Si les roues tournent d'un angle β (radian) :

$\Delta L_1 = r_1\beta$; $\Delta L_2 = r_2\beta$; **$\Delta L_2/\Delta L_1 = r_2 / r_1$**

Expression du rapport r_2/r_1 en fonction de L et R_1.

$r_2/r_1 = R_2 / R_1 = (L+R_1) / R_1$; **$r_2/r_1 = L/R_1+1$**.

Variation du rayon des roues :

Dans le cas d'un chemin de fer rectiligne, R_1 tend vers l'infini ; en conséquence **$r_2/r_1 = 1$** et les roues doivent avoir un rayon identique $r_1=r_2=r_0$.

On pose $r_1 = r_0-\delta$ et $r_2 = r_0+\delta$. On supposera $d<<r_0$.

$r_2/r_1 = (r_0+\delta.) / (r_0-\delta) = (1+ \delta /r_0) / (1- \delta /r_0) = (1+ \delta /r_0) (1- \delta /r_0)^{-1}$
Effectuer un développement limité au premier ordre en δ /r_0 du rapport r_2/r_1 :

$(1- \delta /r_0)^{-1} = 1 +\delta /r_0$; $r_2/r_1 =(1+ \delta /r_0)^2$; **$r_2/r_1 = 1+ 2\delta /r_0$**.

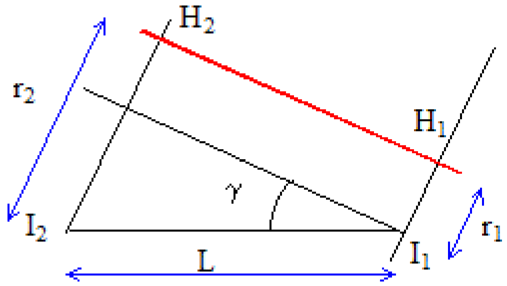
Expression de δ en fonction de L, r_0 et R_1:

d'une part $r_2/r_1 = L/R_1+1$; d'autre part $r_2/r_1 = 1+ 2\delta /r_0$.

$L/R_1+1 = 1+ 2\delta /r_0$; $L/R_1 = 2\delta /r_0$; **$\delta = ½Lr_0/R_1$**.

Inclinaison du train :

Expression de $\sin\gamma$ en fonction de L, r_1 et r_2 puis de R_1 et r_0.



sin γ =(r_2-r_1)/L avec $r_1 = r_0-\delta$ et $r_2 = r_0+\delta$ soit $r_2-r_1=2\delta$

sin γ = 2δ /L avec $\delta = \frac{1}{2}Lr_0/R_1$.

sin γ = r_0/R_1.

Dans le cas du chemin de fer rectiligne, R_1 tend vers l'infini et sin γ tend vers zéro : **γ =0**.

On considère qu'une inclinaison de 2% reste tolérable pour les voyageurs. Si r_0 = 1,22 m

Calcul du rayon de courbure minimum $R_{1\ mini}$:

$R_{1\ mini} = r_0$ / sin γ = 1,22 / 0,02 = **61 m**.

Concours Capes interne : Viscosimètre à chute verticale 2007

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Données (à pression atmosphérique et température normale)

masse volumique de l'acier ρ_1=7,86 10^3 kg m^{-3}, de la glycérine ρ_2=1,26 10^3 kg m^{-3}, ; g=9,81 m/s² ; rayon de la bille r= 5,0 mm.

Une bille en acier, sphérique, de rayon r, est maintenue immergée dans une solution de glycérine à l'aide d'un électroaimant. A l'instant t=0, on lâche la bille qui tombe verticalement. On étudie le mouvement dans le référentiel terrestre , supposé galiléen sur la durée de la chute.Les positions du centre d'inertie de la bille sont repérés sur un axe Ox, orienté vers le bas, muni d'un vecteur unitaire **i** et ayant pour origine O, position initiale du centre d'inertie de la bille.

Pour cette expérience, l'expression de la valeur de la force de frottement est donnée par la formule de stokes : **$f=6\pi\eta rv$**.

r : rayon de la bille en mètre, **v** : vitesse de la bille (m/s, **η** : viscosité du fluide.

I. Bilan des forces :

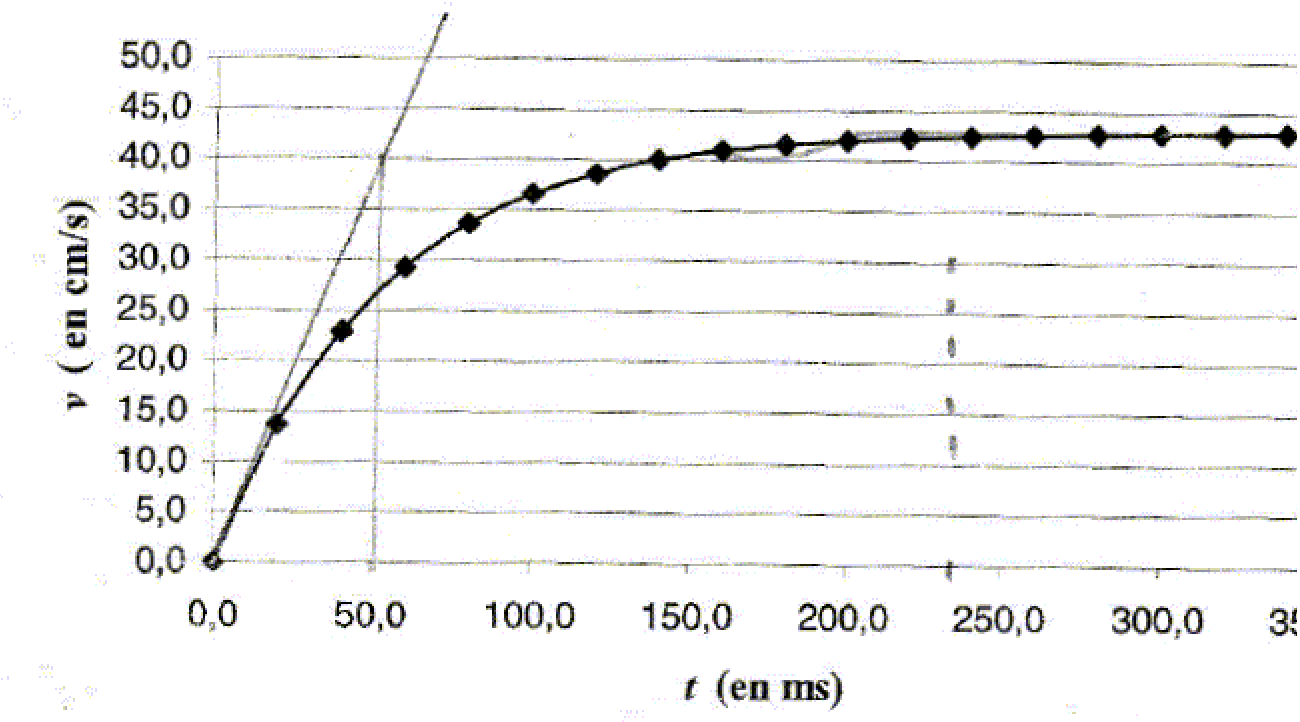
1. Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ?
2. Retrouver par analyse dimensionnelle, l'unité S.I de la viscosité du fluide.
3. Faire le bilan des trois forces qui s'appliquent à la bille.
4. Donner l'expression vectorielle de chaque force en utilisant les notations de l'énoncé.
5. Représenter ces forces sur un schéma (sans échelle mais en respectant la direction et le sens de leur somme vectorielle)

II. Equation différentielle du mouvement :

1. Montrer que l'équation différentielle régissant le mouvement est du type **$dv/dt = A+Bv$** où A et B sont des constantes. Donner l'expression littérales de ces constantes en fonction des données.
2. Vérifier que $A = 8{,}24\ m\ s^{-2}$.

III. Exploitation d'une chronophotographie :

Une chronophotographie a permis de tracer l'évolution de la vitesse en fonction du temps.



Une modélisation ultérieure donne l'évolution de la vitesse de la forme : **$v(t) = v_l(1-\exp(-t/\tau))$**.

1. Décrire la méthode qui permet, à partir d'une chronophotographie, de mesurer la vitesse instantanée d'n mobile.
2. Définir v_l et τ. Donner leur unités. Déterminer graphiquement les valeurs de ces deux grandeurs.
3. Exprimer v_l et τ en fonction de A et B.
4. A partir de la mesure de v_l et des données, calculer la viscosité η de la glycérine. Les tables donnent

$\eta_{\text{théorique}}$ = 0,83 Pa s. Comparer la valeur expérimentale et la valeur théorique (on calculera l'écart relatif). L'unité proposée correspond-elle à l'unité S.I déterminée précédemment ?

5. Déterminer graphiquement la date t_1 à partir de laquelle la vitesse devient constante. Quelle est la position $x(t_1)$ de la bille ? le régime transitoire est-il facilement observable à l'oeil nu ?
6. Proposer un protocole pour mesurer la viscosité d'un liquide à partir d'une seule mesure de vitesse.

IV. Etude énergétique :

Soit un point C tel que x_C= 15 cm.

1. Déterminer l'expression puis la valeur du travail de chaque force appliquée à la bille, autre que la force de frottement, lors du déplacement OC.
2. En supposant que la vitesse de la bille en C est v_C=0,43 m/s, calculer le travail de la force de frottement.

I. Bilan des forces :

référentiel : objet par rapport auquel on se repère pour l'étude du mouvement d'un système ; on lui associe un repère et une origine des temps.

référentiel galiléen : dans ce référentiel le principe d'inertie ou 1ère loi de Newton s'applique " un point matériel pseudo-isolé demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme".

Retrouvons par analyse dimensionnelle, l'unité S.I de la viscosité du fluide :

f : force ou masse * accélération ou masse * longueur / temps^2 ; [**f**]= $\mathbf{M\,L\,T^{-2}}$.

6π : sans dimension ; r : longueur ; [**r**]= **L**. ; v : vitesse ou longueur / temps ; [**v**]= $\mathbf{L\,T^{-1}}$.

η= f/(6π rv) ; [η]= $\mathbf{M\,L\,T^{-2}L^{-1}\,T\,L^{-1}}$; [η]= $\mathbf{ML^{-1}T^{-1}}$

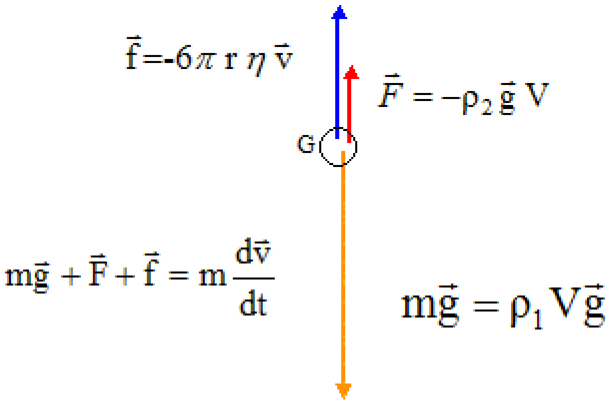
Bilan des trois forces qui s'appliquent à la bille :

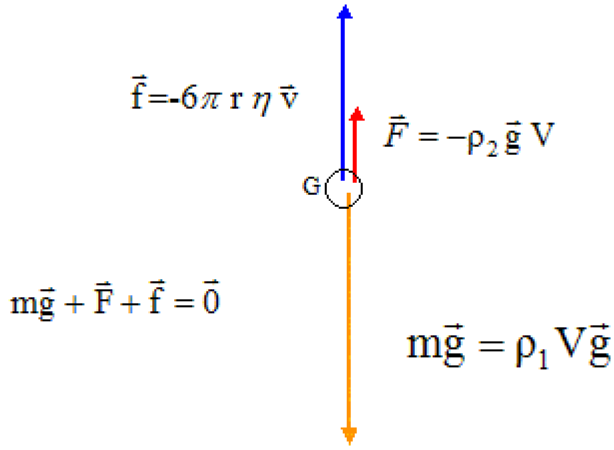
poids : vertical, vers le bas, valeur mg avec m = $4/3\pi r^3\rho_1$; $\mathbf{P}$= $4/3\pi r^3\rho_1\, g\mathbf{i}$.

Poussée d'archimède : verticale, vers le haut, valeur $4/3\pi r^3\rho_2 g$; $\mathbf{F}$= $4/3\pi r^3\rho_2\, g(-\mathbf{i})$.

frottement : vertical, vers le haut ; $\mathbf{f}$=$6\pi\eta r v(-\mathbf{i})$.

t <0,25 s t >0,25 s





II. Equation différentielle du mouvement :

La seconde loi de Newton (écrite ci-dessus) s'écrit, suivant l'axe Ox : mg-F-f=mdv/dt

$4/3\pi r^3\rho_1\, g-4/3\pi r^3\rho_2\, g\, -6\pi\eta rv = 4/3\pi r^3\rho_1\, dv/dt$

$g(1-\rho_2\, /\rho_1)-4{,}5\eta/(r^2\rho_1)\, v = dv/dt$

$A=g(1-\rho_2\, /\rho_1)$; **$B= -4{,}5\eta/(r^2\rho_1)$**.

$A = 9{,}81(1-1{,}26/7{,}86)=$**$8{,}24\ m\ s^{-2}$**.

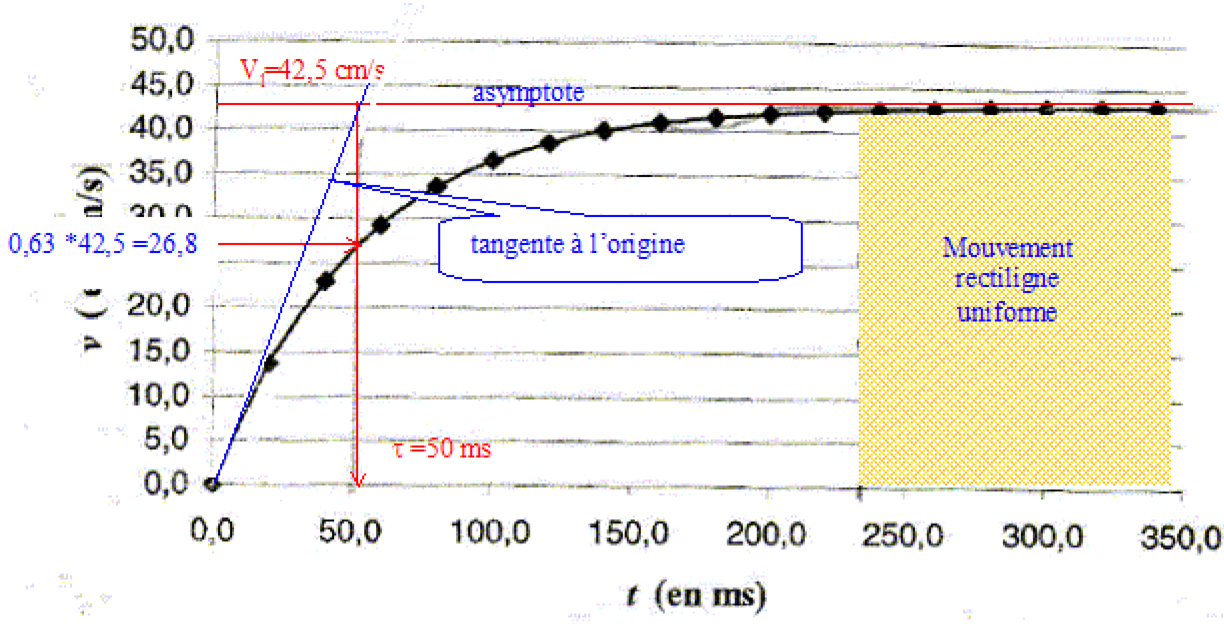
III. Exploitation d'une chronophotographie :

Apartir d'une chronophotographie, la vitesse instantanée d'un mobile se calcule à partir de :

$v(t_i) = [OM_{i+1}-OM_{i-1}] / (2\Delta t)$.

Δt durée petite, intervalle de temps séparant deux chronophotographies successives.

v_l : vitesse limite de chute (m/s) ; **τ** : constante de temps (s).



<u>Expression de</u> v_l <u>et</u> τ <u>en fonction de A et B</u> :

v(t) = v_l(1-exp(-t/τ)) ; dv/dt = **v_l/τ exp(-t/τ)** ;

repport dans l'équation différentielle : **dv/dt = A+Bv**

$v_l/\tau \exp(-t/\tau) = A+Bv_l(1-\exp(-t/\tau))$

Expression vérifiée quel que soit t si : $A+Bv_l = 0$ soit **$v_l = -A/B$** et si **$\tau = -1/B$**.

<u>Calculer la viscosité</u> η <u>de la glycérine</u> :

$B = -A/v_l = -8,24 / 0,425 = -19,4\ s^{-1}$; or $B = -4,5\eta/(r^2\rho_1)$

d'où $\eta = -Br^2\rho_1/4,5 = 19,4*(5\ 10^{-3})^2 *7,86\ 10^3/4,5$; **$\eta = 0,847$ kg m^{-1} s^{-1}**.

Les tables donnent $\eta_{\text{théorique}} = 0,83$ Pa s.

Ecart relatif : (0,847-0,83)/0,83 *100 = **2 %** (donc accord entre valeurs expérimentale et théorique)

L'unité proposée correspond à l'unité S.I déterminée précédemment :

pression (Pa) = force (N) / surface (m^2) = masse *accélération / surface ;

[pression * temps]=$M L T^{-2} L^{-2} T$ = **$ML^{-1}T^{-1}$**

A partir de la date t_1 =250 ms la vitesse devient constante. La position $x(t_1)$ de la bille est :

v(t) = v_l(1-exp(-t/τ)) ; par intégration $x(t) = v_l t + v_l\tau\exp(-t/\tau)$ **+ Cte**

Calcul de la constante : $x(0) = v_l\tau$ + Cte ; Cte = **$-v_l\tau$**

à t = 250 ms le terme $v_l\tau\exp(-t/\tau)$ s'annule d'où $x(t_1)$ =0,425*0,25 - 0,425 *0,050 = 0,085 m = 8,5 cm.

Le régime transitoire est facilement observable à l'oeil nu.

Protocole pour mesurer la viscosité d'un liquide à partir d'une seule mesure de vitesse :

Lorsque la vitesse limite est atteinte, mesurer la durée Δt correspondant au passage de la bille devant deux repères distants de d= 40 cm par exemple.

d'où $v_l = d/\Delta t$ puis procéder comme ci-dessus.

Soit un point C tel que x_C= 15 cm.

Expression puis valeur du travail moteur (descente) du poids, force constante, lors du déplacement OC :

W_1= P*OC= $\mathbf{4/3\pi r^3\rho_1 g x_C}$; $W_1=4/3*3,14*(5\ 10^{-3})^3*7,86\ 10^3*9,81*0,15=$**6,1 10^{-3} J**.

Expression puis valeur du travail résistant de la poussée d'Archimède, force constante, lors du déplacement OC :

W_2= -F*OC= $\mathbf{-4/3\pi r^3\rho_2 g x_C}$; W_2=**-9,7 10^{-4} J**.

En supposant que la vitesse de la bille en C est v_C=0,43 m/s, calcul du travail de la force de frottement :

théorème de l'énergie cinétique : $½mv^2_C-0 = W_1+W_2+W_f$.

$\mathbf{W_f = ½mv^2_C - W_1 - W_2}$; avec m = $\mathbf{4/3\pi r^3\rho_1}$ = 4,11 10^{-3} kg.

$\mathbf{W_f}$ = 0,5*4,11 10^{-3} *$0,43^2$ -6,1 10^{-3} + 9,7 10^{-4} = **-4,7 10^{-3} J**.

-

-

Champ gravitationnel de la terre ; champ de pesanteur terrestre concours Capes interne 2008

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

La tere est assimilée à une sphère homogène de centre O, de masse M et de rayon R. On note r=OM la distance du centre de la terre au point M et $\mathbf{u_r}$ = OM/r.

On note G, la constante de gravitation et **A(M)** le champ gravitationnel créé par la terre en M.

G=6,67 10^{-11} Nm^2kg^{-2} ; M= 6 10^{24} kg ; R= 6380 km.

Soit ρ la masse volumique de la terre. **Le fait d'assimiler la terre à une sphère homogène revient à faire quelle hypothèse sur ρ** ?

La masse volumique de la terre est constante. On note ρ_0 cette constante.

Exprimer ρ_0 en fonction de M et R. Calculer ρ_0.

volume d'une sphère : 4/3 π R^3 ; $\boldsymbol{\rho_0 = 3M/(4\pi R^3)}$ avec R= 6,38 10^6 m.

ρ_0 = 3*6 10^{24} /(4*3,14*(6,38 $10^6)^3$) ; ρ_0 =5,52 10^3 kg m^{-3} proche de **6 10^3 kg m^{-3}**.

Exprimer le champ gravitationnel créé par la terre en un point M extérieur à la terre, situé à la distance r.

$$\boxed{\vec{A}(M) = G\frac{M}{r^2}(-\vec{u}_r)}$$

Quelle est la topographie des lignes de champ ?

Par raison de symétrie, les lignes de champ sont radiales.

Exprimer puis calculer le champ gravitationnel créé par la terre à sa surface.

valeur de ce champ : $A_0 = GM/R^2$.

$A_0 = 6{,}67\ 10^{-11} * 6\ 10^{24}/(6{,}38\ 10^6)^2 = 9{,}83$ m/s^2 proche de **1 10^1 m/s^2**.

Exprimer le champ gravitationnel à une altitude h au dessus de la surface de la terre. Que devient cette expression si h<<R ?

$$\vec{A}(M) = G\frac{M}{(R+h)^2}(-\vec{u}_r) = A_0\frac{R^2}{(R+h)^2}(-\vec{u}_r) = A_0\frac{(-\vec{u}_r)}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2} \approx A_0\left(1-\frac{2h}{R}\right)(-\vec{u}_r)$$

On pose $\Delta A = A(h) - A_0$. **Calculer $|\Delta A/A_0|$ pour h = 10 km.**

$A(h) - A_0 = -A_0\,(2h/R)$; $|\Delta A/A_0| = $ **2h/R**.

$|\Delta A/A_0| = 2*10/6380 = 3{,}1\ 10^{-3} = 0{,}31$ %.

La variation est très faible. Ce champ peut être considéré comme constant tant que h est inférieur à 10 km.

C'est le cas des tirs balistiques ou des lâchés de ballon en météorologie.

On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

Comment définit-on un référentiel ?

Un référentiel est un objet par rapport auquel on étudie le mouvement d'un corps.

Comment définit-on un référentiel galiléen ?

Dans un référentiel galiléen, les lois de newton s'appliquent.

Rappeler la loi fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel galiléen.

$$p_A - p_B = \rho g(h_A - h_B).$$

pression en Pa ; masse volumique ρ en kg m^{-3} ; g en m/s^2 ; h : altitude en m.

Quelle est l'allure de la surface libre des océans ?

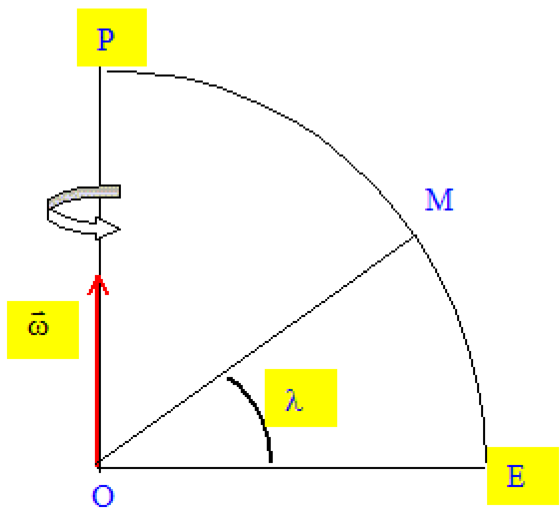
La terre est considérée comme une sphère homogène. En l'absence de vent, la surface des océans est à la même distance du centre de la terre.

En négligeant la rotation de la terre, la surface de l'eau est plane.

Influence de la rotation de la terre.

La tere est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire ω=7,29 10^{-5} rad/s. Soit M un point de la surface situé à la latitude λ.

Faire un schéma indiquant sur un quart de circonférence, le pôle nord P, l'équateur E, le point M, la latitude λ, le vecteur vitesse angulaire ω.

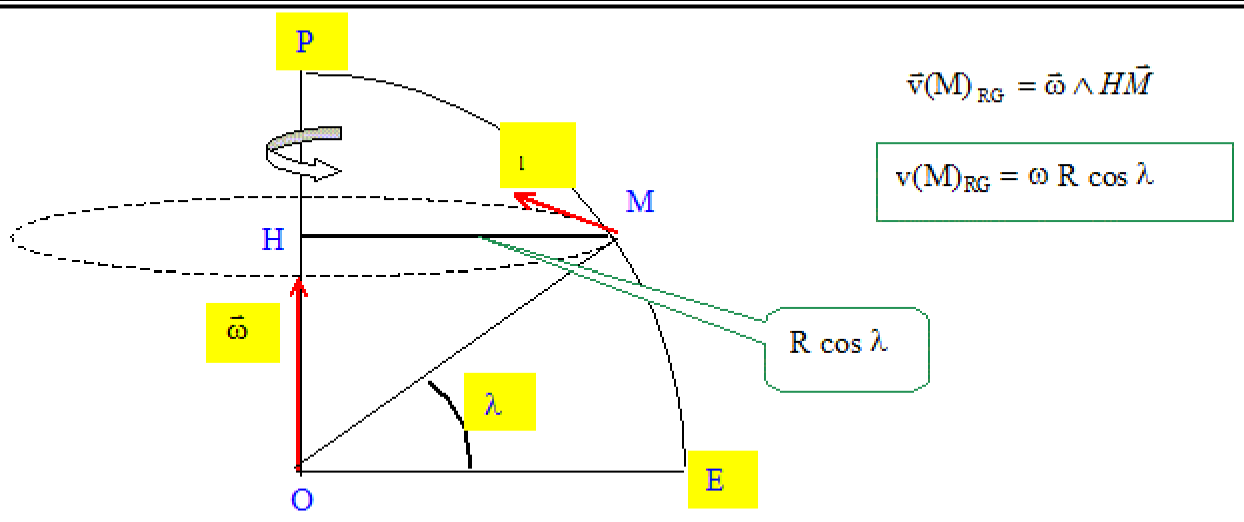


Le référentiel géocentrique R_G est supposé galiléen. **Comment définit-on ce référentiel** ?

Le référentiel héliocentrique a pour origine le Soleil et des axes pointant vers des étoiles lointaines qui paraissent fixes.

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et des axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique.

Exprimer, dans le référentiel géocentrique, la vitesse du point M, notée $v(M)_{RG}$, en fonction de R, ω, λ et d'un vecteur u_1 que l'on représentera sur le schéma.

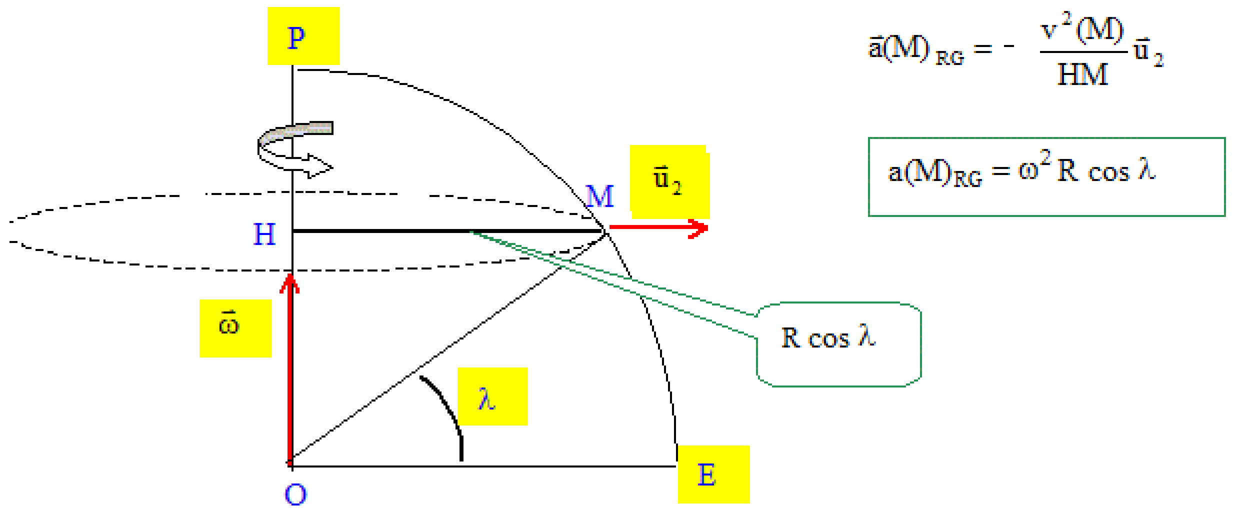


Déterminer puis calculer la valeur de cette vitesse en P et en E.

Au point P, cette vitesse est nulle ; au point E, cos λ =1 et v(E)= ω R.

v(E) = 7,29 10^{-5} *6,38 10^{6} = **465 m/s**.

Exprimer, dans le référentiel géocentrique, l'accélération du point M, notée $a(M)_{RG}$, en fonction de R, ω, λ et d'un vecteur u_2 que l'on représentera sur le schéma.



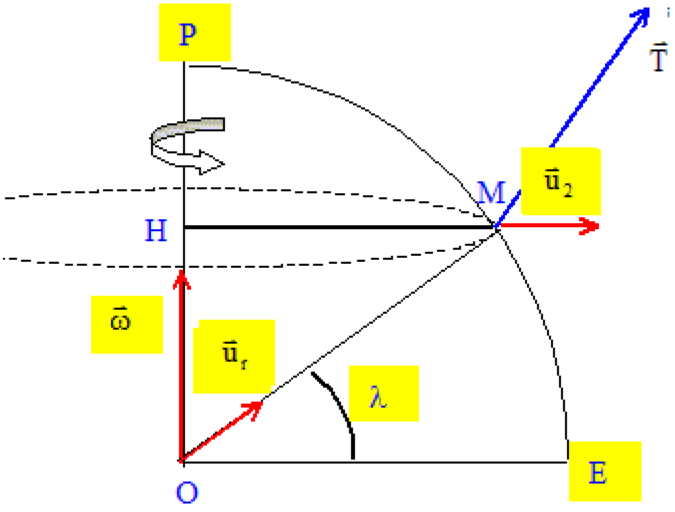
Déterminer puis calculer la valeur de cette accélération en P et en E.

Au point P, cette accélération est nulle ; au point E, cos λ =1 et a(E)= ω^2 R.

a(E) = (7,29 10^{-5} $)^2$*6,38 10^{6} = **3,39 10^{-2} m/s²**.

M assimilé à un point matériel de masse m, est fixé à un fil à plomb immobile à la surface de la terre.

Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à M(m) dans le référentiel géocentrique. On suppose que M(m) n'est soumis qu'à la force gravitationnelle exercée par la terre au point M et à la tension **T** du fil.



$$\vec{T} + G\frac{Mm}{R^2}(-\vec{u}_r) = m\,\omega^2 R\cos\lambda\,\vec{u}_2$$

Dans le référentiel terrestre, le poids de M(m) est défini comme l'opposé de la tension définie précédemment.

Déterminer l'expression du champ de pesanteur g(M) dans le référentiel terrestre.

$$m\vec{g} = G\frac{Mm}{R^2}(-\vec{u}_r) + m\,\omega^2 R\cos\lambda\,\vec{u}_2$$

$$\vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\vec{u}_r + \omega^2 R\cos\lambda\,\vec{u}_2$$

$$\boxed{\vec{g} = -A_0\vec{u}_r + \omega^2 R\cos\lambda\,\vec{u}_2}$$

Soit g(P) et g(E) la valeur du champ de pesanteur en P et en E. Déterminer puis calculer g(P) et g(E).

valeur de g(P) = A0 = 9,83 m/s^2.

valeur de g(E) = A_0-ω^2R = 9,83-3,39 10^{-2} =9,796 = 9,80 m/s^2.

La valeur de g(M) est différente au pôle et à l'équateur : la surface libre des océans ne sera pas plane.

Influence de l'aplatissement de la terre aux niveaux des pôles.

La terre est aplatie aux niveaux des pôles, ce qui modifie l'intensité de la pesanteur.

R_P =6357 km ; R_E=6378 km.

Les résultats expérimentaux conduisent à : g(P) = 9,82 m/s^2 et g(E) 9,78 m/s^2.

Les écarts sont dus pour 2/3 à la rotation et pour 1/3 à son applatissement.

En 1672, J.Richer constate qu'une horloge parfaitement réglée à Paris, retarde de 2 min par jour à Cayenne.

On modélise le balancier d'une horloge par un pendule simple de longueur L.

Rapeller l'expression de la période T d'un pendule simple.

$$T = 2\pi\,[L/g]^{1/2}.$$

On suppose que le champ de pesanteur à Paris est g_P=9,810 m/s^2 et que le champ de pesanteur à Cayenne est g_C= 9,780 m/s^2. La longueur du pendule est L=1,000 m.

L'horloge est parfaitement réglée à Paris.

Quel est le retard de cette horloge, par jour, si elle est transportée à Cayenne ?

période à Paris : $2\pi\,[9,810]^{-1/2} = 2,0060667$ s.

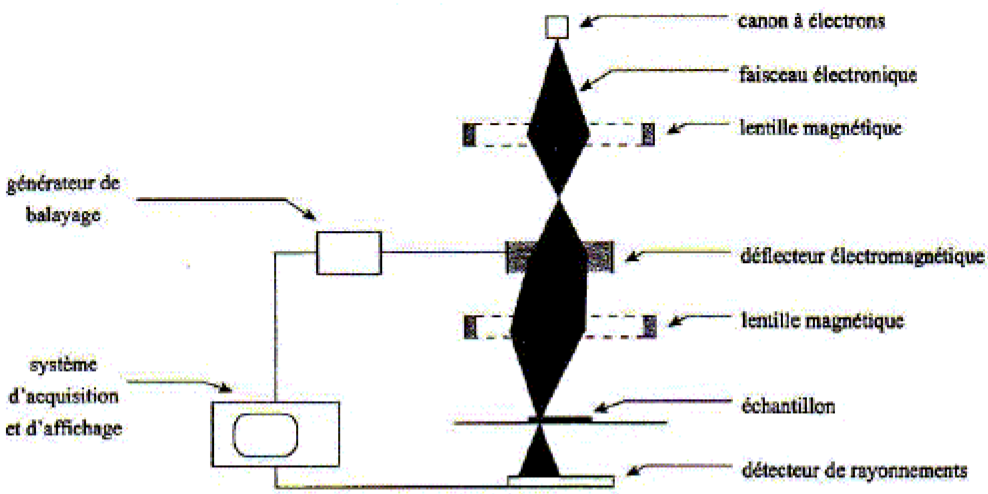
période à Cayenne : $2\pi\,[9,780]^{-1/2} = 2,009141$ s.

Retard : $3,0744\ 10^{-3}$ s.

retard par jour : $24*1800*3,0744\ 10^{-3}$ =132,8 s = 2 min 13 s.

Les électrons interagissent avec la matière et entrainent la production de rayonnements mesurables par des détecteurs.

On donne le schéma de principe d'un microscope électronique à balayage.



$h = 6{,}62\ 10^{-34}$ J s ; $c = 3{,}0\ 10^{8}$ m/s ; $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C ; $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg.

On écrit les vecteurs en gras et en bleu.

Dualité onde corpuscule.

Quelle était la nationalité du physicien De Broglie ?

Français.

Qu'est-ce que la dualité onde corpuscule ?

Dans l'infiniment petit, tout objet présente un double aspect corpusculaire et ondulatoire :

les aspects corpusculaire et ondulatoire sont inséparables. Une particule élémentaire se comporte à la fois comme une onde et un corpuscule. En réalisant une expéreince on observe l'un ou l'autre de ce double aspect.

Comment appelle t-on usuellement le corpuscule de lumière ?

Le photon.

Donner un exemple d'expérience s'interprétant à partir de l'aspect ondulatoire de la lumière et un autre exemple d'expérience s'interprétant avec son aspect corpusculaire.

Les expériences de diffraction et d'interférences sont expliquées par la nature ondulatoire de la lumière.

L'effet photoélectrique s'interprète on considérant l'aspect corpusculaire de la lumière.

Donner l'expression usuelle de la quantité de mouvement d'un électron dans le cadre de la physique non relativiste.

$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$.

Vérifier par analyse dimensionnelle que la quantité h/p est homogène à une longueur d'onde.

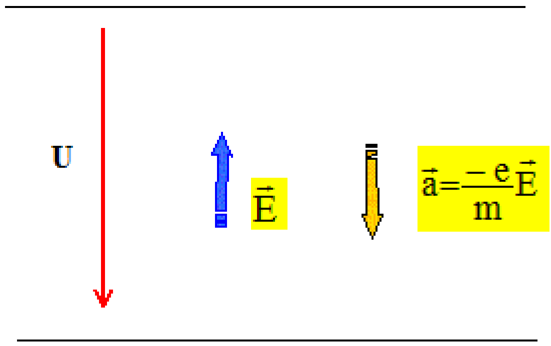
h : énergie multipliée par un temps ; une énergie est une force fois une distance ; une force est une masse fois une accélération (distance divisée par un temps au carré).

d'où : $[h] = M\ L^2 T^{-1}$.

p : masse fois distance divisée par un temps. $[p] = M\ L\ T^{-1}$. Par suite [h/p] = L.

***Dans le canon à électrons, les électrons supposés initialement au repos sont accélérés sous une tension U = 100 kV*.**

Préciser sur un schéma du canon (où les électrons sont accélérés de haut en bas) l'orientation de la différence de potentiel U ainsi que la direction et le sens du champ électrique E.



Exprimer en fonction de m, U et e la vitesse acquise en sortie du canon par les électrons en utilisant la physique classique. Faire l'application numérique et commenter.

Le poids de l'électron est négligeable devant la force électrique.

Travail moteur de la force électrique : W = e U

Ecrire le théorème de l'énergie cinétique : $E_{c\ fin} - E_{c\ départ} = eU$

½mv^2-0 = eU ; **v = [2eU/m]^{½}**.

v = [2*1,6 10^{-19}* 10^5 / 9,1 10^{-31}]^{½} = **1,87 10^8 m/s**.

Cette valeur est proche de la vitesse de la lumière : la mécanique classique ne s'applique plus ; il faut faire intervenir la mécanique relativiste.

Calculer la longueur d'onde associée au faisceau d'électrons.

λ = h/p = h/(mv) = 6,62 10^{-34} / (9,1 10^{-31} *1,87 10^8) =**3,9 10^{-12} m**.

En mécanique relativiste, l'énergie cinétique et la quantité de mouvement de l'électron s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{E}_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \quad \text{et} \quad \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$$

Exprimer à nouveau la vitesse acquise par l'électron en fonction de e, U, m et c. Faire l'application numérique.

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)=eU \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{eU}{mc^2}+1 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{\frac{eU}{mc^2}+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{\left(\frac{eU}{mc^2}+1\right)^2}=\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v=c\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{eU}{mc^2}+1\right)^2}}$$

$eU/(mc^2)= 1,6\ 10^{-19}*\ 10^5 / (9,1\ 10^{-31} *\ 9\ 10^{16}) =0,195$; $(1+0,195)^{-2} = 0,700$; $(1-0,700)^{½} =0,5474$

$v = 3\ 10^8*0,5474 =$ **$1,64\ 10^8$ m/s**.

Calculer la longueur d'onde associée au faisceau d'électrons.

$\lambda = h/ (mv)\ [1-v^2/c^2]^{½}$; $1-(v/c)^2=1-(1,64/3\ )^2=0,700$; $[1-v^2/c^2]^{½} = 0,8368$.

puis : $6,62\ 10^{-34} / (9,1\ 10^{-31} *1,64\ 10^8) *0,8368 =$ **$3,7\ 10^{-12}$ m**.

Un vide poussé est réalisé dans l'enceinte où se propage le faisceau électronique.

A quoi cela sert-il ?

Il faut éviter les chocs entre les électrons et les molécules d'air. Ces collisions disperseraient le faisceau.

Calculer, en précisant la valeur de la longueur d'onde utilisée, la valeur de la limite de résolution d'un microscope électronique donnée par :

$d_{min} = 0,61\ \lambda/\omega_0$. Prende $\omega_0 = 0,01$.

$d_{min} = 0,61 *3,7\ 10^{-12} / 0,01 =$ **$2,3\ 10^{-10}$m**.

Valeur très inférieure à la limite de résolution du microscope optique (voisine du micromètre) : la résolution du microscope électronique est donc meilleure que celle du microscope optique.

Doit-on augmenter ou diminuer la tension accélératrice U pour espérer améliorer la résolution des images obtenues ?

A ω_0 constant, augmenter la limite de résolution, c'est diminuer λ.

Or $\lambda = h/ (mv)\ [1-v^2/c^2]^{½}$, il faut donc augmenter la vitesse v : c'est à dire augmenter U. Mais dans ce cas on risque de voir se produire un phénomène de claquage électrique entre les parties métalliques soumises à une forte tension.

Circuit à looping; théorème de l'énergie cinétique; base de Frenet capesa 2004

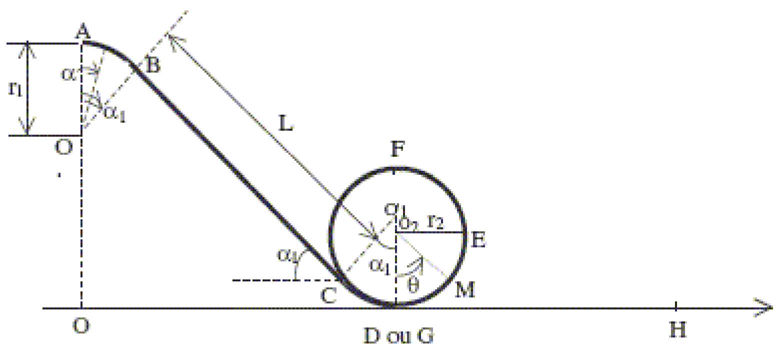
Un chariot de masse m de dimension négligeable se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Les frottements sont considérés comme négligeables.

Le rail est constitué de plusieurs parties : une portion de cercle AB (rayon r_1, angle α_1) une partie rectiligne BC de longueur L puis une portion de cercle CD de rayon r_1 suivie d'un tour d'hélice : DEFG, de rayon r_2 et d'axe horizontal (voir schéma), prolongée par une portion rectiligne horizontale GH.

On considère pour la résolution de l'exercice que la portion de circuit constituée par un tour d'hélice et le segment rectiligne GH sont contenus dans le plan vertical de la section initiale. La droite BC est tangente en B à la portion de cercle AB et est de même tangente en C à la portion de cercle CD.

Le chariot est lâché sans vitesse initiale du point A. On note g l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.



Données : $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$; $m = 1000\ kg$; $r_1 = 2{,}5\ m$; $r_2 = 2{,}0\ m$.

Dans un premier temps $\alpha_1 = 50°$.

Donner l'expression littérale de la vitesse du chariot en B en C puis en D en fonction de r_1, L, α_1 et g.

Le chariot est soumis à son poids et à l'action du support.

L'action du support est constamment perpendiculaire à la vitesse (absence de frottement) et, en conséquence, elle ne travaille pas.

Parcours AB : le travail du poids est moteur en descente

La différence d'altitude entre A et B vaut $h_1 = r_1(1-\cos\alpha_1)$; travail du poids : $W_1 = mgh_1 = mg\, r_1(1-\cos\alpha_1)$

variation de l'énergie cinétique : $\Delta Ec = ½mv^2_B - 0 = ½mv^2_B$.

théorème de l'énergie cinétique : $½mv^2_B = mg\, r_1(1-\cos\alpha_1)$; $v^2_B = 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)$.

$\mathbf{v_B = [2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)]^{½}}$.

Parcours BC : le travail du poids est moteur en descente

La différence d'altitude entre C et B vaut $h_2 = L\sin\alpha_1$; travail du poids : $W_2 = mgh_2 = mg\, L\sin\alpha_1$.

variation de l'énergie cinétique : $\Delta Ec = ½mv^2_C - ½mv^2_B$.

théorème de l'énergie cinétique : $½mv^2_C - ½mv^2_B = mg\, L\sin\alpha_1$.

$v^2_C = v^2_B + 2g\, L\sin\alpha_1$.

$\mathbf{v_C = [v^2_B + 2g\, L\sin\alpha_1]^{½}}$.

Parcours CD : le travail du poids est moteur en descente

La différence d'altitude entre C et D vaut $h_3 = r_1(1-\cos\alpha_1)$; travail du poids : $W_3 = mgh_3 = mg\, r_1(1-\cos\alpha_1)$

variation de l'énergie cinétique : $\Delta Ec = ½mv^2_D - ½mv^2_C$.

théorème de l'énergie cinétique : $½mv^2_D - ½mv^2_C = mg\, r_1(1-\cos\alpha_1)$; $v^2_D = v^2_C + 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)$.

$\mathbf{v_D = [\, v^2_C + 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)]^{½}}$.

Déterminer la vitesse du chariot à son passage en M sur l'hélice (assimilée à un cercle) repéré par l'angle θ.

Parcours DM : le travail du poids est résistant en montée.

La différence d'altitude entre M et D vaut $h_4 = r_2(1-\cos\theta)$; travail du poids : $W_4 = -mgh4_3 = -mg\, r_2(1-\cos\theta)$

variation de l'énergie cinétique : $\Delta Ec = ½mv^2_M - ½mv^2_D$.

théorème de l'énergie cinétique :

$½mv^2_M - ½mv^2_D = -mg\ r_2(1-\cos\theta)$; $v^2_M = v^2_D - 2g\ r_2(1-\cos\theta)$.

$\mathbf{v_M = [\ v^2_D - 2g\ r_2(1-\cos\theta)]^{½}}$.

En déduire la condition sur L pour que le chariot arrive en E (θ_E =90°).

On atteint E si la vitesse en ce point est positive ou nulle.

Or $v^2_E = v^2_D - 2g\ r_2(1-\cos 90) = v^2_D - 2g\ r_2$.

d'où : $v^2_D >= 2g\ r_2$.

Or $v^2_D = v^2_C + 2g\ r_1(1-\cos\alpha_1)$ et $v^2_C = v^2_B + 2g\ L\sin\alpha_1$ et $v^2_B = 2g\ r_1(1-\cos\alpha_1)$

$v^2_D = 2g\ r_1(1-\cos\alpha_1) + 2g\ L\sin\alpha_1 + 2g\ r_1(1-\cos\alpha_1)$

$v^2_D = 2g(\ r_1 + r_1)(1-\cos\alpha_1) + 2g\ L\sin\alpha_1$.

d'où : $4g\ r_1(1-\cos\alpha_1) + 2g\ L\sin\alpha_1 >= 2g\ r_2$.

$2g\ L\sin\alpha_1 >= 2g\ r_2 - 4g\ r_1(1-\cos\alpha_1)$

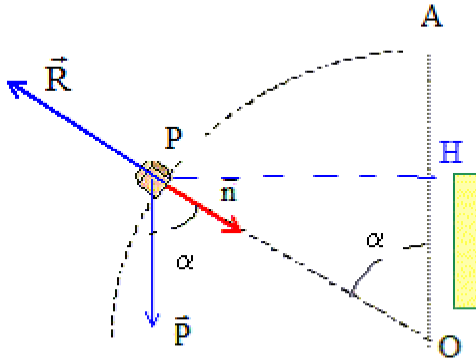
$\mathbf{L >= [\ r_2 - 2\ r_1(1-\cos\alpha_1)] / \sin\alpha_1}$.

Établir l'expression littérale de la valeur limite de L notée L_1, pour que le chariot arrive en E. Calculer sa valeur.

$\mathbf{L_1 = [\ r_2 - 2\ r_1(1-\cos\alpha_1)] / \sin\alpha_1}$.

$L_1 = [2-5*(1-\cos 50)/\sin 50$; $\mathbf{L_1 = 0,28\ m}$.

Établir l'expression de l'intensité de la réaction R de la piste en un point de la trajectoire entre A et B repéré par l'angle α.



$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\text{sur } \vec{n} : -R + mg\cos\alpha = m\frac{v_P^2}{r_1} \Rightarrow R = m\left(g\cos\alpha - \frac{v_P^2}{r_1}\right)$$

En déduire son expression en B. Calculer sa valeur numérique. Conclure.

$v^2_B/r_1 = 2g(1-\cos\alpha_1)$; $R_B = m[g\cos\alpha_1 - 2g(1-\cos\alpha_1)]$; $\mathbf{R_B = mg[3\cos\alpha_1 - 2]}$.

$R_B = 1000*(3\cos 50 - 2) = -72$ N

Le solide a décollé (quitté la piste) avant d'atteindre B.

Déterminer la valeur de α quand le chariot quitte la piste entre A et B.

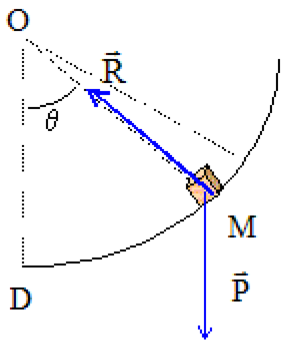
$\mathbf{R_B = 0 = mg[3\cos\alpha - 2]}$ soit $\cos\alpha = 2/3$; $\mathbf{\alpha = 48°}$.

À partir de cette question on va choisir une nouvelle valeur α_1 = 45°, afin que le chariot ne quitte pas la piste entre A et B.

Établir l'expression de la réaction du rail sur sa partie rectiligne BC. Calculer sa valeur.

$\mathbf{R = mg\cos\alpha_1} = 1000*9{,}81*\cos 45 = \mathbf{6{,}9\ 10^4\ N}$.

Établir l'expression de la réaction du rail sur la partie circulaire (de rayon r_2) en fonction de θ, m, g, r_1, r_2, α_1 et L (le chariot circule à l'intérieur du cercle).



$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$R - mg\cos\theta = m\frac{v_M^2}{r_2}$$

$$R = m\left(g\cos\theta + \frac{v_M^2}{r_2}\right)$$

$v^2_M = v^2_D - 2g\,r_2(1-\cos\theta)$; Or $v^2_D = v^2_C + 2g\,r_1(1-\cos\alpha_1)$ et $v^2_C = v^2_B + 2g\,L\sin\alpha_1$ et $v^2_B = 2g\,r_1(1-\cos\alpha_1)$.

$v^2_M = 2g\,r_1(1-\cos\alpha_1) + 2g\,L\sin\alpha_1 + 2g\,r_1(1-\cos\alpha_1) - 2g\,r_2(1-\cos\theta)$.

$v^2_M = 4g\, r_1\, (1-\cos\alpha_1) + 2g\, L\sin\alpha_1 - 2g\, r_2(1-\cos\theta)$.

$v^2_M / r_2 = 4g\, r_1 / r_2\, (1-\cos\alpha_1) + 2g/r_2\, L\sin\alpha_1 - 2g(1-\cos\theta)$.

$R = mg[3\cos\theta - 2 + 2[\, 2r_1 / r_2(1-\cos\alpha_1) + L/r_2\sin\alpha_1\,]]$.

Déterminer la condition sur L pour que le chariot puisse parcourir la boucle.

La réaction du support doit être positive ou nulle lorsque $\theta = \pi$.

$3\cos\pi - 2 + 2[\, 2r_1 / r_2(1-\cos\alpha_1) + L/r_2\sin\alpha_1\,] >= 0$.

$2r_1 / r_2\, (1-\cos\alpha_1) + L/r_2\sin\alpha_1 >= 2{,}5$.

$L/r_2\sin\alpha_1 >= 2{,}5 - 2r_1 / r_2\, (1-\cos\alpha_1)$

$L >= [2{,}5 - 2r_1 / r_2(1-\cos\alpha_1)]r_2 / \sin\alpha_1$.

En déduire l'expression de la valeur minimale de L notée L_2. Calculer sa valeur numérique.

$L_2 = [2{,}5 - 2r_1 / r_2\, (1-\cos\alpha_1)]r_2 / \sin\alpha_1$.

$L_2 = [2{,}5 - 2{,}5(1-\cos 45)]*2/\sin 45 =$ **5,0 m**.

Par raison de sécurité, on veut que la réaction du rail soit toujours supérieure au quart du poids du chariot.

Déterminer la nouvelle valeur minimale L_3, permettant au chariot d'arriveren G en toute sécurité, après un tour. Calculer sa valeur numérique.

$3\cos\pi - 2 + 2[\, 2r_1 / r_2\, (1-\cos\alpha_1) + L_3/r_2\sin\alpha_1\,] = 0{,}25$

$2r_1 / r_2\, (1-\cos\alpha_1) + L_3/r_2\sin\alpha_1 = 2{,}75$

$L_3/r_2\sin\alpha_1 = 2{,}75 - 2r_1 / r_2(1-\cos\alpha_1)$

$L_3 = [2{,}75 - 2r_1 / r_2(1-\cos\alpha_1)]r_2 / \sin\alpha_1$.

$L_3 = [2{,}75 - 2{,}5(1-\cos 45)]*2/\sin 45 =$ **5,7 m**.

On choisit $L = L_3$, le chariot se retrouve en G après voir effectué un tour.

Calculer v_G après ce tour.

$v_D = v_G = [\, v^2_C + 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)]^{½}$; $v^2_C = v^2_B + 2g\, L\sin\alpha_1$ et $v^2_B = 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)$.

$v_G = [\, 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1) + 2g\, L_3\sin\alpha_1 + 2g\, r_1(1-\cos\alpha_1)]^{½}$;

$v_G = [\,2g[2r_1(1-\cos\alpha_1) + L_3\sin\alpha_1]]^{½}$.

$v_G=[\,2*9{,}81[5*(1-\cos 45) + 5{,}9*\sin45]]^{½}$; **$v_G= 10{,}4$ m/s**.

Il aborde alors la dernière partie rectiligne (GH) de la piste sur laquelle il subit une force de freinage de valeur f=mg/4.

Calculer la longueur minimale DS = OH de ce circuit à looping pour rester dans des conditions de sécurité.

Sur cette partie horizontale seule la force de freinage travaille, le poids et l'action du plan étant perpendiculaires à la vitesse.

Travail résistant des forces de freinage : W = -f DS = -mg DS/4.

Théorème de l'énergie cinétique : $0-½mv^2_G= -mg\ DS/4$.

$v^2_G=g\ DS/2$; $DS= 2v^2_G/g =2*10{,}4^2/9{,}81$; **DS= 22 m**.

Acoustique : onde sonore ; émission, propagation, réception Concours Caplp externe 2008

Production d'un son.

Indiquer la diférence entre un bruit et un son musical.

Un son musical est un son possédant une hauteur fixe ; il est caractérisé par son timbre.On le symbolise par une note.

Bruit : toute sensation auditive désagréable et génante.

C'est une vibration de l'air qui se propage.

Citer deux sources émettrices de sons musicaux.

Vibration d'une corde de guitare ; vibration d'une fine lame de bois fixée sur le bec dans une clarinette.

Citer deux sources émettrices de bruit ou sons non musicaux.

Lame, corde vibrante ; dans le cas instruments " les cuivres" , les vibrations sont produites au niveau de l'embouchure : l'air y est injecté par bouffées conduisant à une série de tourbillons.

Les 3 qualités physiologiques des sons musicaux sont la hauteur, l'intensité et le timbre.

Préciser ce que chacune de ces qualités permet de distinguer et indiquer ce qui la caractérise.

Une note de musique est caractérisée par sa hauteur, grandeur liée à la fréquence fondamentale du son qu'elle représente.

A hauteur identique, les sons émis par deux instruments différents ne résonnent pas de la même manière. Le timbre résulte de la combinaison d'un son fondamental et de ses harmoniques.

Intensité d'un son : amplitude de la vibration, qui se mesure en décibels.

Dans le cas d'un son complexe, définir le fondamental et les harmoniques.

Le fondamental est l'harmonique de rang 1.

Les harmoniques d'un son musical ont des fréquences multiples de celle du fondamental.

Définir un son simple ou son pur ? Préciser la nature de la vibration.

Son pur : une seul fréquence (exemple du la_3 du diapason) ; la vibration est sinusoïdale.

Propagation d'un son :

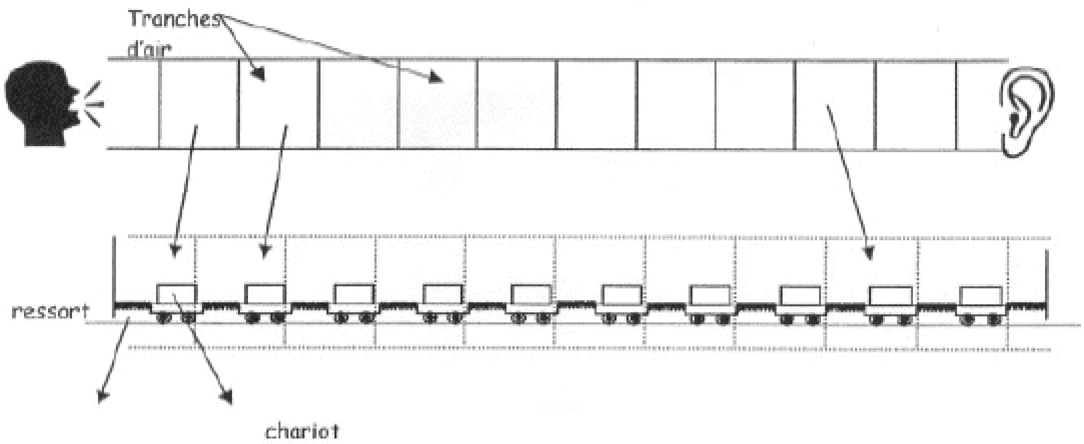
Décrire une expérience simple permettant de mettre en évidence la nécessité d'un milieu matériel pour qu'un son puisse se propager.

Faire sonner un réveil dans une chloche à vide dans laquelle on a retiré l'air : aucun son n'est perçu.

On considère un tube cylindrique rectiligne contenant de l'air à l'entrée duquel on place une lame vibrante émettant un son.

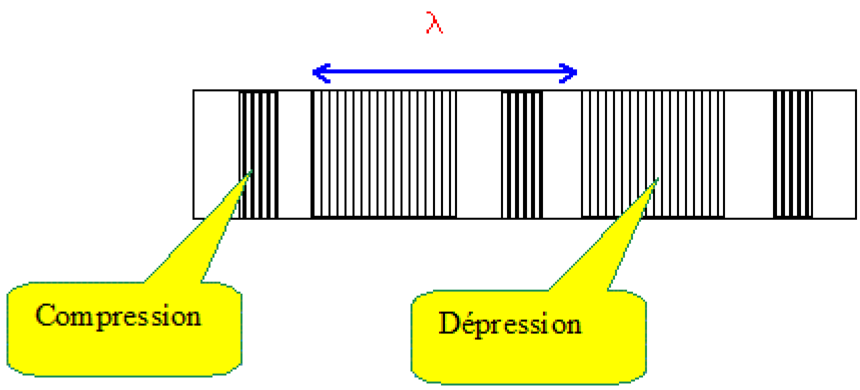
Réaliser un ou plusieur(s) schéma(s) et expliquer comment le son se propage dans le tube, en précisant la grandeur physique qui permet cette propagation.

Un modèle permettant d'étudier la propagation des sons consiste à découper le milieu de propagation en tranches identiques susceptibles de se comprimer et de se détendre. On fait correspondre à chaque tranche un chariot et un ressort.



1.

Une brève impulsion sur le premier chariot permet de simuler la propagation d'une onde progressive longitudinale : propagation d'une variation de pression.



***Une onde sonore est caractérisée par deux périodicités*. Nommer et expliquer ces deux périodicités.**

Période temporelle $T = 1/f$ (exprimée en seconde)

Période spatiale ou longueur d'onde λ (m) : $\lambda = cT$

La longueur d'onde est la distance entre deux points consécutifs se trouvant dans le même état vibratoire.

Définir la longueur d'onde sonore à partir de l'expression de la viration en un point de l'espace ?

Deux points se trouvant dans le même état vibratoire (en phase) sont distants d'un nombre entier de longueur d'onde.

Donner l'expression de la célérité d'une onde.

$c = \lambda f$ avec λ : longueur d'onde (m) et f : fréquence (Hz)

Proposer un montage expérimental permettant de déterminer la célérité d'une onde sonore.

A.N : f= 2000 Hz ; milieu de propagation : l'air ; c= 340 m/s ; **calculer la période T et la longueur d'onde λ.**

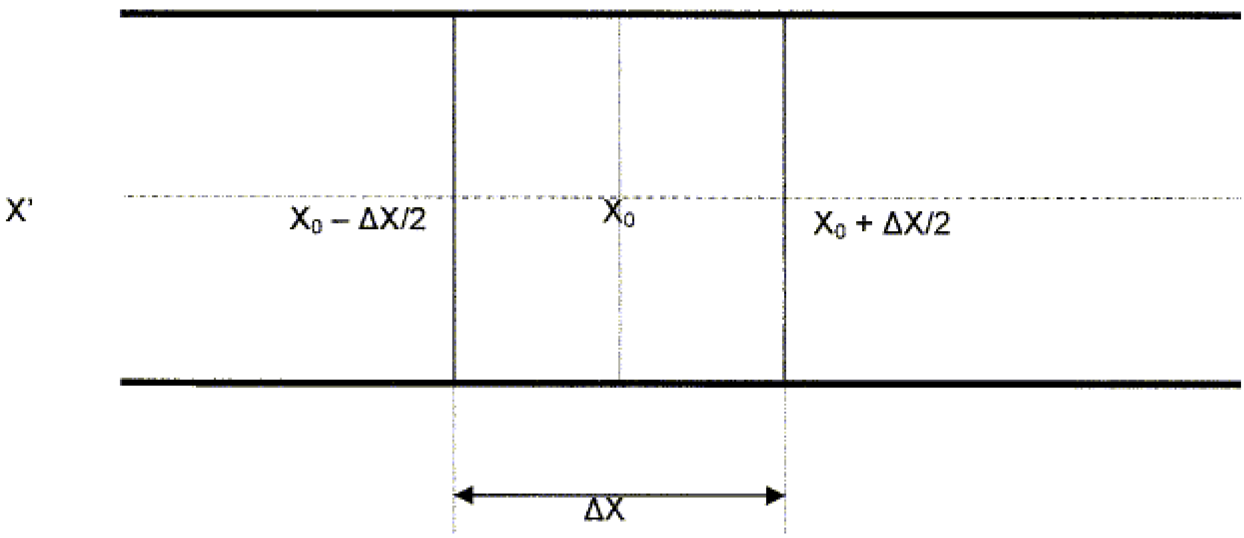
$T = 1/f = 1/2000 =$ **$5\ 10^{-4}$ s**.

$\lambda = c/f = 340/2000 =$ **0,17 m**.

Dans cette question, on se limite au cas particulier des ondes acoustiques planes se propageant dans un milieu homogène et compressible suivant une direction x'x.

Pour cela, on étudie les variations de volume et de pression d'un gaz emprisonné dans un tuyau droit de section S lorsqu'une onde acoustique se propage dans le tuyau.

Dans l'étude suivante, on considère une tranche de gaz centrée au point x_0.



La propagation des ondes sonores dans les gaz est en général un processus adiabatique. Dans ces conditions on peut écrire **$PV^{\gamma}=Cte$**.(1) γ est le rapport de la chaleur massique à presion constante sur la chaleur massique à volume constant.

On appliquera la théorie des gaz parfaits à la tranche de gaz considérée. La température absolue à l'équilibre sera notée $\mathbf{T_0}$ et la pression à l'équilibre sera notée $\mathbf{P_0}$.

Prende la différentielle logarithmique de (1) et exprimer en fonction de γ et P_0 le coefficient de compressibilité isotherme χ(en Pa^{-1}) est défini par :

$$\chi=-1/V\ .\ \Delta V/\Delta P.$$

$\log P + \gamma \log V = \log Cte$;

$dP/P + \gamma\, dV/V = 0$; $-\gamma\, dV/V = dP/P$; $-dV/dP = V/(\gamma P)$; $-1/V.\ dV/dP = 1/(\gamma P)$. $\chi=1/(\gamma P)$.

La réponse à la question précédente permet d'exprimer la vitesse v du son dans un gaz parfait par $\mathbf{v = [\gamma P_0 /\rho_0]^{1/2}}$,(2) lorsque ρ_0 est la masse volumique du gaz.

Exprimer la vitesse v en fonction de γ, R, T_0 et M(masse molaire du gaz).

Loi des gaz parfaits : PV = nRT avec n = masse / masse molaire ; n = m/M et masse volumique ρ = m/V.

$P = mRT/(VM) = m/V.\ RT/M = \rho\, RT/M$; $P/\rho = RT/M$

Repport dans (2) : $\mathbf{v= [\gamma RT/M]^{1/2}}$.

A.N : calculer la vitesse du son dans l'air à la température de 20°C. M = 29 g/mol.

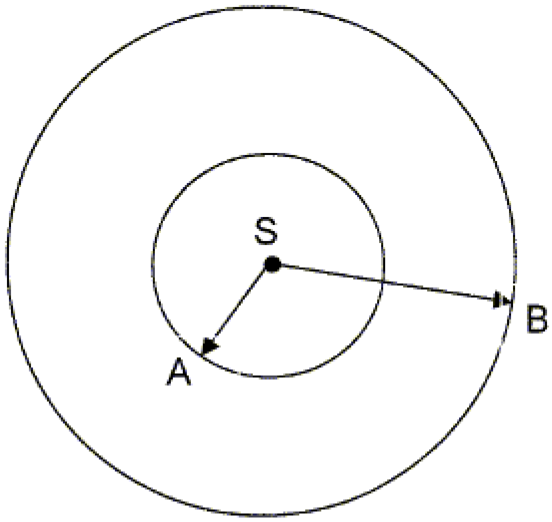
T = 273+20 = 293 K ; M= 0,029 kg ; R= 8,32 J $mol^{-1}K^{-1}$; γ=1,4.

$v = [1,4*8,31*293/0,029]^{1/2}$ =**343 m/s**.

Réception d'un son.

Soit une source S, considérée comme ponctuelle, qui émet un son. On appelle puissance acoustique la puissance P(watt) rayonnée dans l'air par une source S sous forme d'une onde sonore. L'air étant assimilé à un milieu élastique homogène et isotrope, les surfaces d'onde sont donc des sphères concentriques de centre S.

On appelle intensité acoustique notée I et exprimée en W m^{-2}, la puissance acoustique qui traverse une unité de surface. On considère deux surfaces d'onde de rayons respectifs r_1 et r_2 avec $r_1<r_2$.



Exprimer en fonction de r_1 et r_2, le rapport I_A/I_B des intensités acoustiques I_A en A et I_B en B.

P : puissance acoustique de la source sonore.

$P = I_A.4\pi r_1^2$; $P = I_B.4\pi r_2^2$;

$I_A/I_B = r_2^2/ r_1^2 = (r_2/r_1)^2$.

A une distance d_1 = 2 m d'une pompe à chaleur (source émettrice d'un son), l'intensité acoustique est $I_1 = 10^{-4}$ W m^{-2}.

Calculer l'intensité acoustique I_2 à une distance d_2 = 10 m de cette même pompe.

$I_2 = I_1 (d_1/d_2)^2 = 10^{-4}*0{,}2^2 = 4\ 10^{-6}$ W m^{-2}.

En déduire le niveau acoustique L à cette distance de 10 m. $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

$L = 10 \log(I_2/I_0) = 10 \log (4\ 10^{-6} /10^{-12}) =$ **66 dB**.

On souhaite que le niveau d'intensité acoustique ne dépasse pas 30 dB à 10 m de la source.

Quelle doit être la puissance acoustique maximale P_M du son émis par la pompe ?

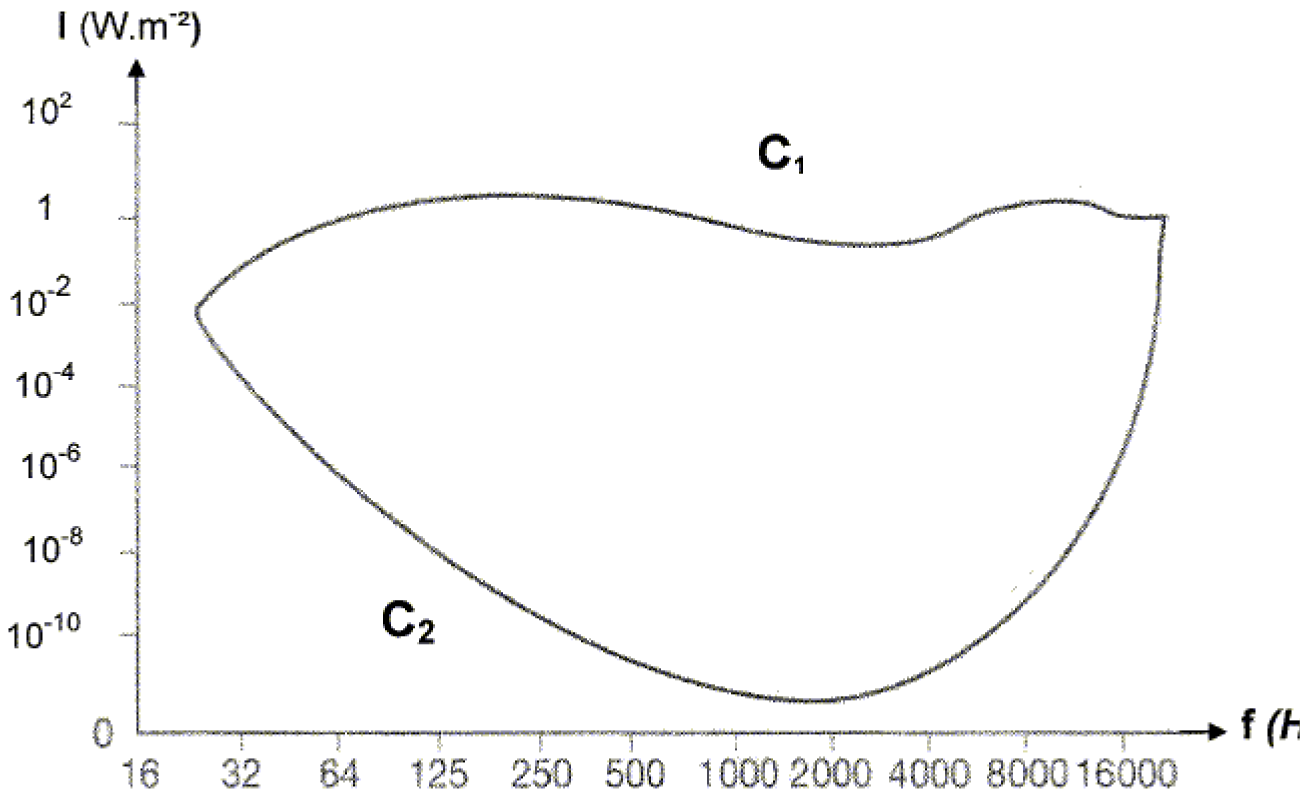
$P_M = 4\pi Id^2$; $I = I_0\ 10^{L/10} = 10^{-12} * 10^3 = 10^{-9}$ W m^{-2}.

$P_M = 4*3{,}14*10^{-9} *100 =$ **$1{,}3\ 10^{-6}$ W**.

Perception d'un son :

Chez l'homme, l'oreille est l'organe de perception des sons.

Le diagramme ci-dessous donne les variations de l'intensité acoustique I en fonction de la fréquence f (Hz) des sons perçus ; ces courbes définissent le champ auditif humain.

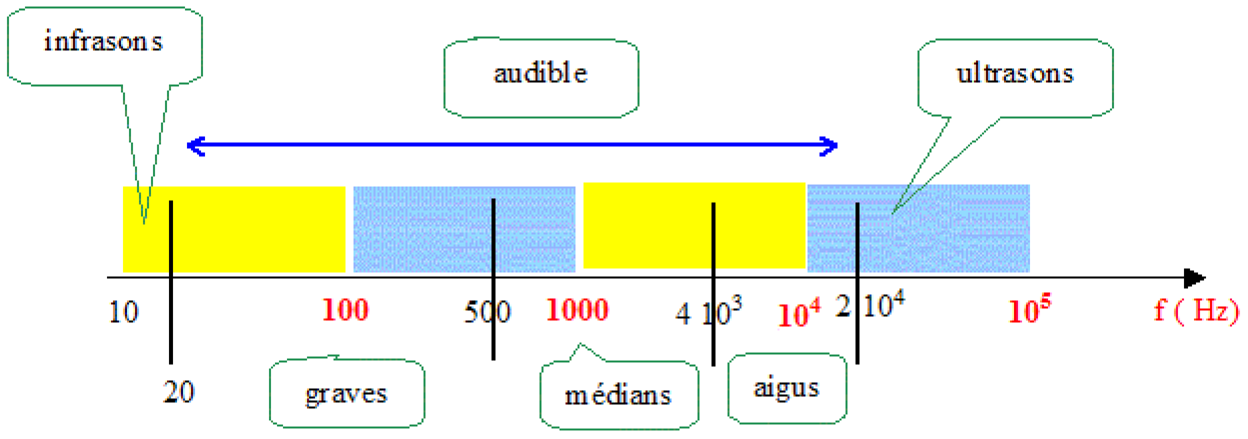


Le champ auditif humain

A partir du diagramme donné :

Situé sur un axe gradué de façon logarithmique en fréquence, les zones correspondant aux infrasons, aux ultrasons et au domaine de l'audiilité.

Pour le domaine de l'audiilité, situer la zone correspondant aux sons aigus, aux sons médium et aux sons graves.



Préciser à quoi correspondent les courbes C_1 et C_2. Quels noms portent ces courbes ?

C_1 : seuil de la douleur ; C_2 seuil d'audibilité.

La valeur de l'intensité acoustique de référence est $I_0 = 10^{-12}$ W m^{-2}.

Préciser à quoi correspond cette valeur et, à partir du diagramme, justifier ce choix.

La sensibilité de l'oreille est maximale vers 1000 Hz.

Si on se situe uniquement dans la zone des sons graves, cette valeur retenue pour I_0 est-elle encore justifiée ? Pourquoi ?

La sensibilité de l'oreille diminue dans le domaine des sons graves (20 Hz < f < 500 Hz).

On assimile l'oreille humaine à une surface d'aire S= 0,6 10^{-5} m^2.

Calculer l'énergie reçue par cette oreille en une journée si le niveau d'intensité acoustique est constant et égal à 30 dB.

Intensité acoustique $\mathbf{I = I_0\, 10^{L/10}} = 10^{-12} * 10^3 = 10^{-9}$ W m^{-2}.

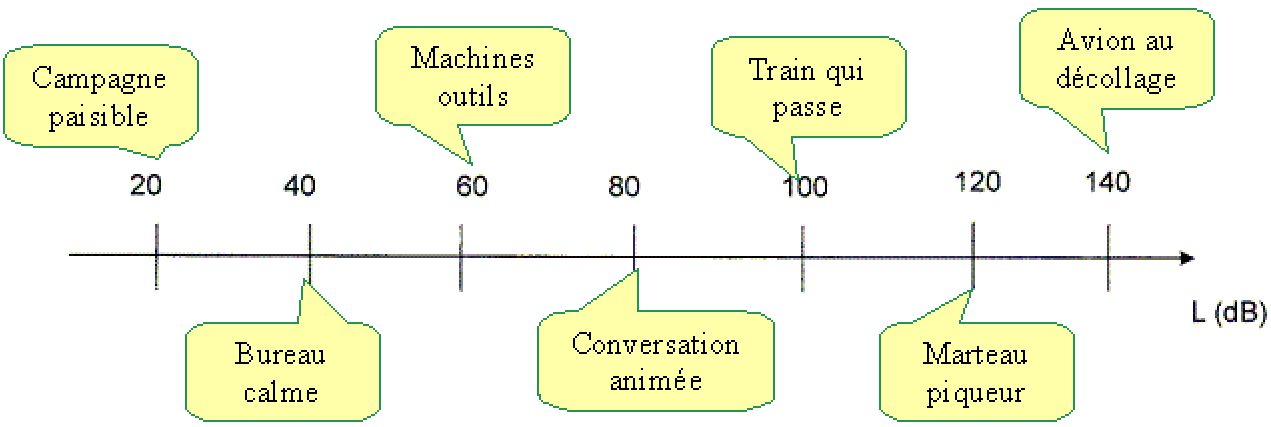
Puissance acoustique de la source : $P_M = I \,.\, S = 10^{-9} * 0{,}6\ 10^{-5} = \mathbf{6\ 10^{-15}}$ **W**.

Δt=1 jour = 24*3600 =8,64 10^4 s ; Energie = $P_M * \Delta t = 6\ 10^{-15} * 8{,}64\ 10^4 = \mathbf{5{,}2\ 10^{-10}}$ **J**.

Indiquer la forme des pavillons des appareils porte-voix et sonotone. Préciser pour quelle raison ces appareils ont leur efficacité.

Le pavillon est évasé : on atténue la dispersion de la surface d'onde ; on amplifie le son de la voix.

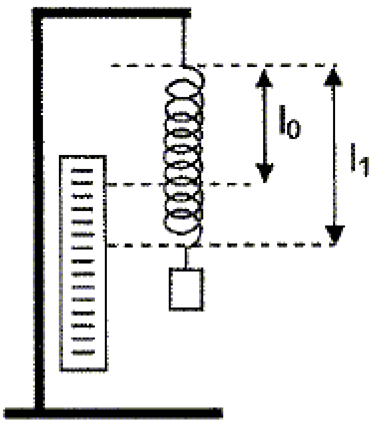
Reproduire l'axe gradué ci-dessous en associant aux bruits de la liste suivante les valeurs des niveaux d'intensité acoustique indiqués : machines rotatives d'outillage - campagne paisible - passage d'un train en gare - petit bureau calme - marteau piqueur - conversation animée - avion au décollage.



Les oscillations mécaniques concours caplp interne 2009.

Extrait d'un sujet de bac professionnel :

La vérifications des performances mécaniques de la suspension d'une voiture dans le cadre du contrôle technique est obligatoire tous les deux ans. Un des éléments fondamentaux de cette suspension est constitué par le ressort. La constante de raideur du ressort ainsi que la période propre de l'oscillateur élastique représenté par le ressort, sont deux critères pris en compte lors de cette vérification.



Un solide de masse m accroché à l'extrémité libre d'un ressort constitue un pendule élastique. On étudie l'quilibre de ce solide. Utiliser le dispositif ci-dessus, accrocher les différentes masses marquées à l'extrémité du ressort, noter les longueurs l_1 prises par le ressort. Compléter le tableau (g = 9,81 N/kg).

masse (kg)	0,1	0,125	0,15	0,175	0,2
F=P (N)					

l_1-l_0 (m)					
k = F /(l_1-l_0) (N/m)					

k est le coefficient de raideur du ressort. Calculer en N/m la valeur moyenne de k.

Déterminer la période propre de l'oscillateur (masse + ressort).

Proposer un protocol expérimental pour déterminer la période propre de l'oscillateur.

Accrocher une masse m = 150 g (par exemple) au ressort ; écarter la masse de sa position d'équilibre de quelques centimètres vers le bas, puis la lâcher.

Mesurer la durée de 10 oscillations (10 périodes). Faire plusieurs mesures et calculer la moyenne.

Etude de l'équilibre.

Effectuer le bilan des forces qui s'exercent sur la masse marquée.

Poids : verticale, vers le bas, valeur mg.

Force de rappel exercée par le ressort, opposée au poids, valeur $k(l_1-l_0)$

Le système étant à l'équilibre, énoncer le premier principe de Newton.

Dans un référentiel galilen, un solide pseudo-isolé est :

- soit au repos (si la vitesse initiale est nulle)

- soit son centre d'inertie est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, et réciproquement.

Ecrire la condition d'équilibre : $mg = k(l_1-l_0)$

Oscillations non amorties.

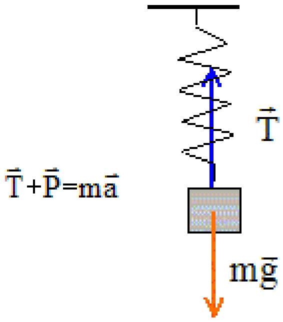
On écarte le solide de masse m d'une distance x_m au dessous de sa position d'équilibre, puis on le laisse osciller librement, après l'avoir lâché sans vitesse initiale,à l'instant =0.

Enoncer le second principe de Newton.

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse M du solide par l'accélération de son centre d'inertie.

Appliquer ce principe et en déduire, dans le cas général, l'équation du mouvement du centre d'inertie du solide.

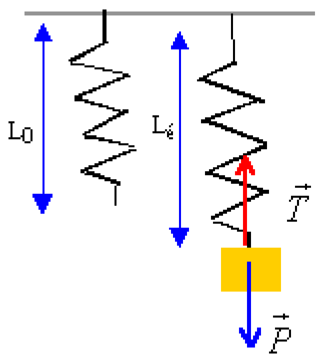
On note x(t) l'écart entre sa position à l'instant t et sa position d'équilibre.On prendra



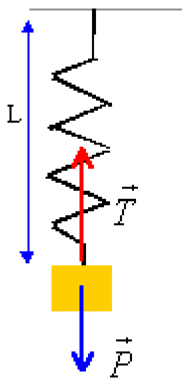
poids : vertical, vers le bas, appliqué au centre d'inertie, valeur : mg

tension du ressort : verticale, dirigée vers la position d'équilibre, appliquée au point de fixation masse ressort, valeur proportionnelle à la déformation du ressort.

L'origine de l'axe est la position d'équilibre stable du système masse ressort :



à l'équilibre : $mg = k(L_{éq}-L_0)$



écarté de sa position d'équilibre le ressort oscille : $L= L_{éq} +x$

$mg-k(L-l_0)= m\, d^2x/dt^2$

$mg-k(L_{éq} +x-l_0)= m\, d^2x/dt^2$

$mg-k(L_{éq} -l_0) - kx =m\, d^2x/dt^2$; or $mg = k(L_{éq}-L_0)$

$m\, d^2x/dt^2 + k\, x=0$ (1)

Pulsation ω_0 (rad s^{-1}) :
$\omega_0 = [k/m]^{½}$ d'où l'écriture de (1) : $d^2x/dt^2 + \omega^2_0\, x = 0$ ou $x'' +\omega^2_0\, x =0$. (1)

La solution de cette équation peut se mettre sous la forme x(t)=A cos(Bt) ou A et B sont des constantes positives non nulles :
Calcul de B pour que x(t)=AcosBt soit solution de l'équation différentielle.
dériver deux fois par rapport au temps :
$x' = AB (-\sin (Bt)$; $x'' = -AB^2\cos(Bt)$
repport dans (2) : $-AB^2\cos(Bt) + \omega^2_0 A \cos(Bt) =0$; $B=\omega_0$

On éloigne la masse de sa position d'equilibre d'une quantité x_m, on a donc à t=0, $x(0)=x_m$;
à partir de cette condition initiale,on détermine la constante A en fonction des données du problème.

$x(t=0)=A\cos(0) = d$ soit $A=x_m$.

$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t)$.

Montrer que la période propre du pendule est : $T_0 = 2\pi [m/k]^{½}$.

$\omega_0 = [k/m]^{½} = 2\pi / T_0$; d'où : $T_0 = 2\pi [m/k]^{½}$

A.N : **calculer le coefficient de raideur k, la période propre, la fréquence propre, la pulsation et écrire l'équation du mouvement**.

$m = 118$ g ; $l_0 = 10$ cm ; $l_1 = 12,7$ cm ; $x_m = 1,8$ cm ; $g=9,81$ N/kg.

$k = mg/(l_1-l_0) = 0,118*9,81 / (0,127-0,10) = 42,87 \sim$ **42,9 N/m**.

$T_0 = 2\pi [m/k]^{½} = 6,28 [0,118/42,87]^{½} = 0,3296 \sim$ **0,33 s** ; $f_0 = 1/T_0 = 1/0,3296 =$ **3,0 Hz** ; $\omega_0 = [k/m]^{½} = [42,87/0,118]^{½} =$ **19,0 rad/s**.

$x(t) = 1,8\ 10^{-2} \cos(19\ t)$.

<u>**Etude énergétique**</u>.

Ecrire l'expression de l'énergie mécanique du système masse ressort.

On prend l'origine de l'énergie potentielle à la position d'équilibre x=0.

$E_M = ½mv^2 + ½kx^2$.

Démontrer que l'énergie mcanique du système masse ressort est constante.

Si $x= x_m$, la vitesse est nulle, l'énergie mécanique est sous forme potentielle élastique $E_M = ½kx_m^2$.

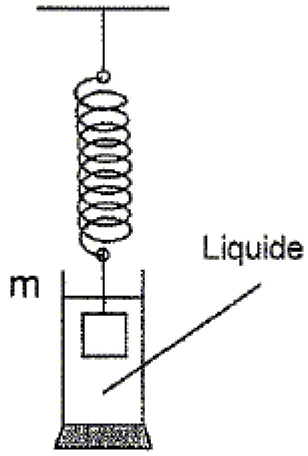
En l'absence de frottement, l'énergie mécanique se conserve : $E_M = ½kx_m^2 = ½mv^2 + ½kx^2 =$ constante.

Calculer l'énergie mécanique du système.

$E_M = ½kx_m^2 = 0,5*42,87*0,018^2 =$ **$6,9\ 10^{-3}$ J**.

<u>Etude des oscillations amorties</u>.

La masse marquée baigne dans un liquide. Depuis sa position d'équilibre, on écarte verticalement le solide de masse m d'une distance x_m =1,8 cm avant de le laisser osciller librement



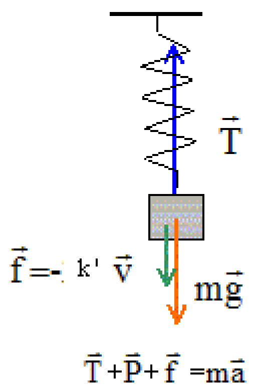
Enumérer les forces qui s'exercent sur la masse m.

poids, force de rappel exercée par le ressort, force de frottement fluide exercée par le liquide.

On écrit les vecteurs en gras et en bleu.

On note **f** = -α **v** la force de frottement fluide, où α est une constante et **v** le vecteur vitesse de la masse en translation verticale.

Ecrire sans la résoudre l'équation différentielle qui traduit le second principe de Newton.



écrire cette loi sur un axe vertical dirigé vers le bas ; l'origine de l'axe est la position d'équilibre stable du système masse ressort :

$L= L_{éq} +x$

$mg-k(L-l_0)-\alpha v= m\, d^2x/dt^2$

$mg-k(L_{éq} +x-l_0)-\alpha v= m\, d^2x/dt^2$

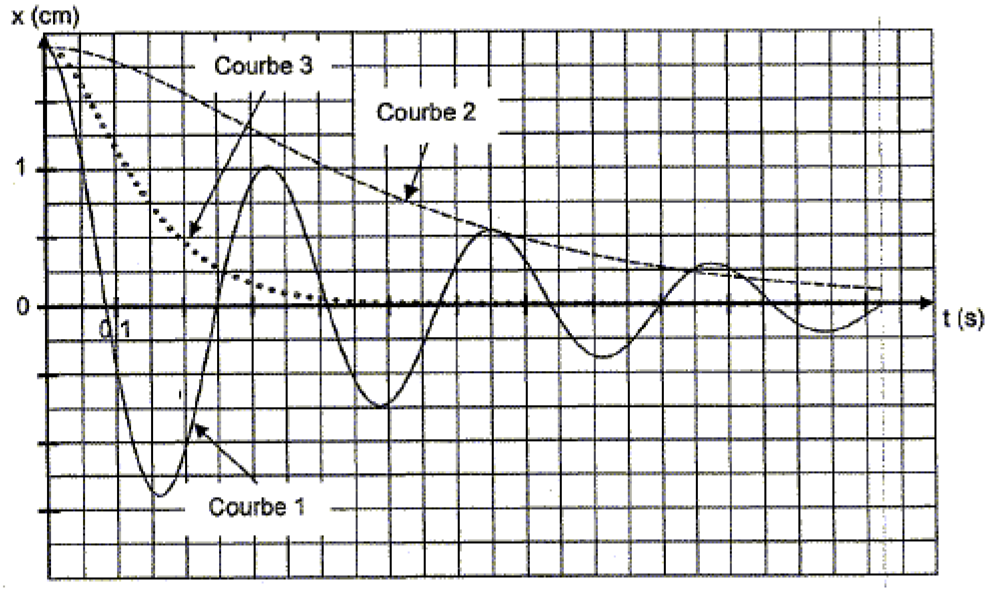
$mg-k(L_{éq} -l_0) - kx -\alpha v =m\, d^2x/dt^2$; or $mg = k(L_{éq}-L_0)$

$m\, d^2x/dt^2 +\alpha v + k\, x=0$ avec $v = dx/dt = x'$

$m\, d^2x/dt^2 +\alpha x' + k\, x=0$ (3)

(3) peut s'écrire : $d^2x/dt^2 +\alpha/ m\, x' + k/ m\, x=0$
or $\omega^2_0 = k/m$; on pose $2\lambda= \alpha /m$;
d'où : $d^2x/dt^2 +2\lambda\, x' + \omega^2_0\, x=0$ (4)

A l'aide de ce montage, en suivant le même protocole avec des liquides de viscosité différente, on obtiendrait les graphes suivants :



Pour les courbes 1 et 3 préciser la nature du mouvement observé ainsi que la grandeur que l'on peut déterminer sur la courbe 1 ; en déduire la valeur du coefficient α.

(3) régime apériodique.

(1) régime pseudo-périodique ; pseudo-période 2T = 0,65 s ; T = 0,325 s.

$d^2x/dt^2 + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = 0$; équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$; discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$.

On pose $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$; $\omega = \omega_0 [1-\lambda^2/\omega_0^2]^{½}$; $\mathbf{T = T_0[1-\lambda^2/\omega_0^2]^{-½}}$ avec $\lambda = \alpha/(2m)$ et T_0 = 0,3226 s (valeur issue du tableau suivant)

$(T_0/T)^2 = 1-\lambda^2/\omega_0^2$; $\lambda^2/\omega_0^2 = 1-(T_0/T)^2 = 1-(0{,}3226/0{,}325)^2 = 0{,}0147$; $\lambda = 0{,}12\ \omega_0 = 0{,}12*6{,}28/0{,}3226 = 2{,}36$

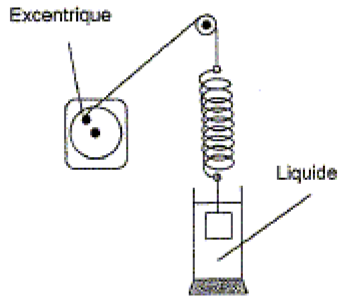
$\alpha = 2m\lambda = 2*0{,}118*2{,}36$ ~**0,56**.

La courbe 2 correspond à un amortissement critique. **Qu'est ce qu'un amortissement critique ? Quel est son intérêt ? Donner une application pratique**.

En mécanique (véhicules) , le régime critique assure un meilleur confort aux passagers en évitant les oscillations ; le retour du système à l'équilibre est le plus rapide. Il en est de même en électricité, on évite des oscillations.

Etude des oscillations entretenues.

Afin d'obtenir des oscilattions d'amplitude constante dans le liquide à faible viscosité, l'extrémité du ressort est reliée à un excentrique entraîné par un moteur.



L'amplitude maximale x_m des oscillations varie avec la fréquence de rotation N du moteur. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

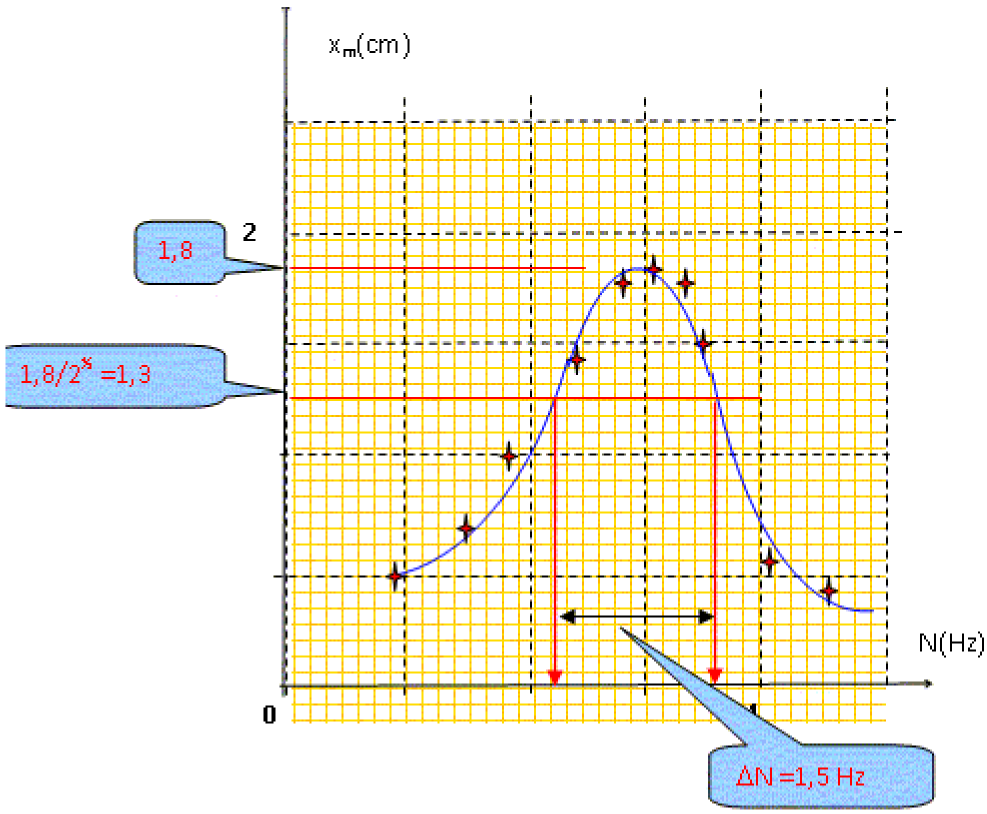
N(tr/s)	1	1,5	2	2,5	2,8	3,1	3,3	3,5	4	4,5
x_m(cm)	0,5	0,7	0,9	1,4	1,7	1,8	1,7	1,5	1,1	0,8

Comment appelle t-on les systèmes "moteur excentrique " et "masse ressort" ?

Moteur excentrique : l'excitateur ; masse ressort : le résonateur.

Tracer la courbe x_m=f(N). Déterminer la bande passante et le facteur de qualité.

Bande passante : ensemble des fréquences telle que $x > x_m/2^{½}$.

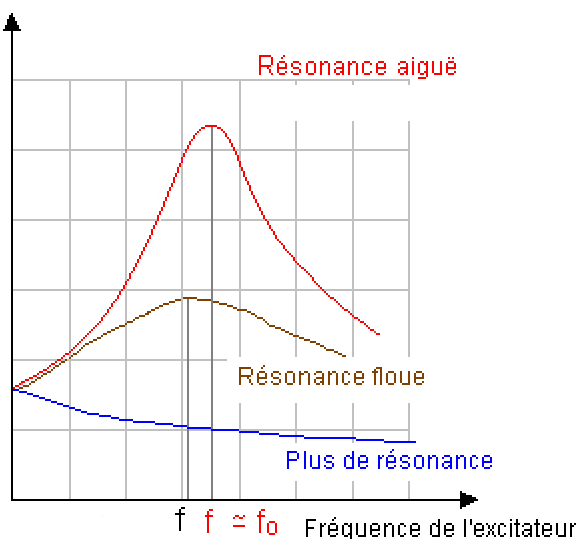


Facteur de qualité : $Q = N_0/\Delta N = 3{,}1 / 1{,}5 \sim 2$.

En utilisant le même protocole expérimental mais avec des liquides de plus en plus visqueux, **quelle aurait été l'évolution de l'allure des courbes $x_m=f(N)$? Comment appelle t-on le phénomène observé** ?

La courbe donnant les variations de l'amplitude des oscillations du résonateur en fonction de la fréquence qui lui est imposée par l'excitateur s'appelle courbe de résonance.

Si l'amortissement augmente la fréquence de résonance diminue et la résonance devient plus floue. La résonance disparaît si l'amortissement devient très important.



champ et interactions.

Capes 96 exercice suivant : diffusion de Rutherford

forces centrales

forces centrales

1. On considère deux objets ponctuels de masse m_1 et m_2 situés à une distance r l'un de l'autre, aux points M_1 et M_2.
   - Exprimer la force d'interaction exercée par m_1 sur m_2. Le vecteur unitaire sera dirigé de M_1 vers M_2.
   - Montrer que si m_1 est une masse à symétrie sphérique de centre M_1, la relation précédente est vérifiée à l'extérieur de la sphère (On pourra utiliser le théorème de Gauss).
   - Etablir l'expression de l'énergie potentielle Ep du système constitué par les masses m_1 et m_2 . On choisira par convention que l'énergie potentielle s'annule lorsque les masses sont infiniment distantes.
2. On considère le système isolé constitué des deux objets ponctuels de masses m_1 et m_2 situés en M_1 et M_2 dans un référentiel galiléen. L'origine du repère est notée O. On note G le centre d'inertie du système.
   - Exprimer le vecteur OG en fonction des vecteurs OM_1 et OM_2.
   - Préciser en justifiant le mouvement du point G. En déduire que le référentiel barycentrique est galiléen.
   - On appelle f_2 la force qu'exerce m_1 sur la masse m_2 et M_1M_2 = r . Etablir la relation, dans le référentiel barycentrique,

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_2$$

   dans laquelle on établira l'expression de la masse réduite μ en fonction de m_1 et m_2.

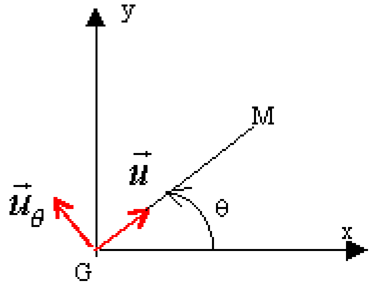
3. Dans la suite, on se place dans le référentiel barycentrique. L'objet de masse m_1 se déplace à la vitesse v_1 et l'objet de masse m_2 à la vitesse v_2.
   - Etablir l'expression du moment cinétique de l'ensemnle du système par rapport à un point N quelconque.
   - Montrer que sa valeur est indépendante de la position du point N.

   $\vec{\sigma}$ **moment cinétique**

   $$\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \ et\ G\vec{M} = M_1\vec{M}_2 = r\vec{u}$$

   - **montrer que :** $\vec{\sigma} = \mu G\vec{M} \wedge \vec{v}$

   - Justifier que le moment cinétique est conservé et que le mouvement est plan.
   - Dans le plan de la trajectoire, orientée par le moment cinétique, on note (r,θ), les coordonnées polaires du vecteur GM. Montrer que $C=r^2\,\theta'$ est constant au cours du temps. Justifier le nom de constante des aires donnée à ½C.



- Donner l'expression de l'énergie cinétique Ec du système constitué par les deux objets
- Montrer que cette expression est identique à celle obtenue pour un objet de masse μ se déplaçant à la vitesse v.
- Exprimer Ec en utilisant les coordonnées polaires. En déduire que :

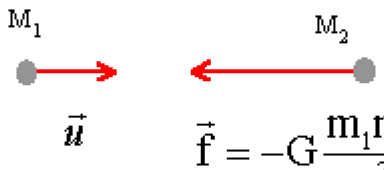
$$Ec = ½\mu[(\frac{dr}{dt})^2 + \frac{C^2}{r^2}]$$

- Ecrire l'expression de l'énergie mécanique du système.

4. On considère le système constitué d'un noyau atomique de masse M de charge Ze, et d'une particule a(noyau d'hélium de masse m et de charge 2e. L'interaction gravitationnelle peut être négligée devant l'interaction électrostatique; le justifier en considérant M=3,27 10^{-25} kg; Z=79 ; m= 6,65 10^{-27} kg. permittivité du vide ε_0 = 8,85 10^{-12} F/m.
   - Par analogie avec les résultats précédents donner l'expression de l'énergie mécanique du système.

corrigé

Force de gravitation exercée par m_1 sur m_2 distants de r :



$$\vec{f} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}$$

G est la constante de gravitation.

La symétrie sphérique indique que le champ est radial et ne dépend que de r.

théorème de gauss : le flux du champ de gravitation à travers une surface fermée est égal à la somme des masses intérieures multipliée par - 4πG.

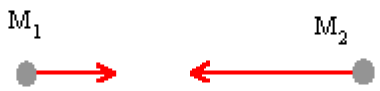
$$\oiint_S \vec{G}\cdot d\vec{S} = -4\pi \; G\Sigma m_{int}$$

On prend comme surface de Gauss une sphère de rayon r : sur cette sphère le champ de gravitation a une norme constante et est colinéaire au vecteur surface.

pour r supérieur au rayon de la répartition de masse, la somme des masses intérieures est m_1.

$$g(r)\,4\pi r^2 = -4\pi G m_1.$$

$$g(r) = -\,G m_1/r^2$$



$\vec{u}$ $$\vec{g}(r) = -G\frac{m_1}{r^2}\vec{u}$$

Pour une répartition de matière à symétrie sphérique, le champ de gravitation à l'extérieur est identique à celui crée par un point matériel confondu avec le centre de la sphère.

D'après le principe des actions mutuelles la force qui s'exerce sur M_1 est l'opposée de la force qui s'exerce sur M_2. Le travail de ces deux forces est :

$$\partial W = \vec{f}\cdot d\vec{OM}_2 - \vec{f}\cdot d\vec{OM}_1 = \vec{f}\cdot d\vec{M_1M_2} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}dr$$

On peut trouver, par intégration, une fonction énergie potentielle telle que dW=- dEp

$Ep = -Gm_1m_2 / r$. cette énegie tend vers zéro si r tend vers l'infini.

définition du barycentre :

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

dériver par rapport au temps, utiliser la relation fondamentale de la dynamique pour chaque point

$$(m_1+m_2)\frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = m_1\underbrace{\frac{d^2\vec{OM}_1}{dt^2}}_{\vec{f}} + m_2\underbrace{\frac{d^2\vec{OM}_2}{dt^2}}_{-\vec{f}} = \vec{0}$$

Le mouvement de G est donc un mouvement rectiligne uniforme. En conséquence, le référentiel barycentrique, en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel du laboratoire, est galiléen.

écrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque masse puis soustraire membre à membre

$$\frac{d^2\vec{OM}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{OM}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{M_2M}_1}{dt^2} = \vec{f}_2\underbrace{\left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_2}\right)}_{1/\mu}$$

Le moment cinétique des deux masses s'écrit :

$$\vec{\sigma}_N = \vec{NM}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{NM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$$
$$\vec{\sigma}_N = (\vec{NG} + \vec{GM}_1) \wedge m_1\vec{v}_1 + (\vec{NG} + \vec{GM}_2) \wedge m_2\vec{v}_2$$
$$m_1\vec{GM}_1 + m_2\vec{GM}_2 = \vec{0} \;(1) \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0} \;(2)$$
$$\vec{\sigma} = \vec{GM}_1 \wedge m_1\vec{v}_1 + \vec{GM}_2 \wedge m_2\vec{v}_2$$

(1) est la définition du barycentre; dériver cette expression par rapport au temps pour obtenir (2)

La dernière expression du moment cinétique ne dépend plus de N.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0} \text{ et } \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \text{ donnent } \vec{v}_1 = -\frac{m_2\vec{v}}{m_1+m_2} \textit{ et } \vec{v}_2 = -\frac{m_1\vec{v}}{m_1+m_2}$$

$$\vec{\sigma} = -\vec{GM}_1 \wedge \frac{m_1m_2\vec{v}}{m_1+m_2} + \vec{GM}_2 \wedge \frac{m_1m_2\vec{v}}{m_1+m_2} = \vec{M_1M}_2 \wedge \frac{m_1m_2\vec{v}}{m_1+m_2} = \mu G\vec{M} \wedge \vec{v}$$

La particule fictive de masse μ subit une force centrale notée f_2 de la part de G. La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est nulle et le moment cinétique est constant.

Le moment cinétique est un invariant vectoriel et le mouvement est dans un plan contenant G ,orthogonal au moment cinétique.

---

en coordonnées polaires le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{\sigma} = \mu G\vec{M} \wedge \vec{v} = \mu r\,\vec{u} \wedge (\dot{r}\vec{u} + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta) = \mu r^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$$

l'invariance du moment cinétique conduit à : $r^2\, d\theta/dt = C$

en notant dS l'aire balayée pendant la durée dt, la vitesse aérolaire est également une constante du mouvement:

$$dS/dt = \tfrac{1}{2} r^2\, d\theta/dt = \tfrac{1}{2}C$$

expression de la loi des aires dont l'énoncé est le suivant :

dans un mouvementà force centrale,le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales.

énergie cinétique dans le référentiel barycentrique :

$Ec = ½m_1v_1^2 +½m_2v_2^2$

remplacer les vitesses par leurs expressions en fonction de v:

$Ec = ½ m_1(m_2/(m_1+m_2))^2v^2 + ½ m_2(m_1/(m_1+m_2))^2v^2 = ½ \mu v^2$.

en coordonnées polaire l'énergie cinétique s'écrit :

$Ec= ½ \mu[r'^2 + r^2 \theta'^2]$

faire apparaître $C = r^2\theta'$

$Ec= ½ \mu[r'^2 + C^2/r^2]$

l'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et potentielle

$E = ½ \mu[r'^2 + C^2/r^2] -Gm_1m_2/r$.

---

force gravitationnelle : $6,67\ 10^{-11}*3,27\ 10^{-25}*\ 6,65\ 10^{-27} / d^2 = 1,45\ 10^{-61} /d^2$

force de Coulomb : $9\ 10^9 *79 * (1,610^{-19})^2 / d^2 =1,82\ 10^{-26} /d^2$

force de coulomb / force de gravitation = $1,2\ 10^{35}$.

énergie du système : $E = ½\mu v^2 + 2Ze^2 / (4\pi\varepsilon_0 r$

th de l'énergie cinétique- réaction du sol

1	Un chariot de masse m=200g, de dimension négligeable, est mobile sans frottement sur une piste situé dans le plan vertical. On prendra $g=10 m.s^{-2}$. La piste est formée de plusieurs parties
énergie	AB partie circulaire de centre 0 et de rayon r constant et d'angle θ =AOB

trajectoire parabolique

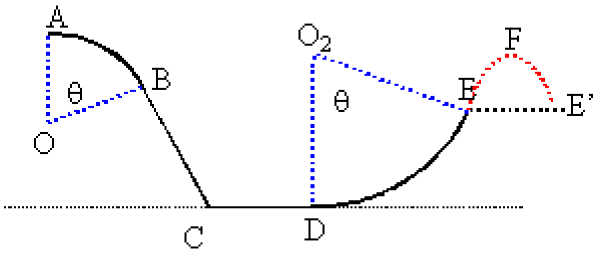
variable.

BC partie rectiligne de longueur 2r se raccordant tangentiellement à AB

CD partie rectiligne de longueur r

DE circonférence de rayon 2r, de centre O_2 et raccordé tangentiellement à CD avec $\theta = DO_2E$

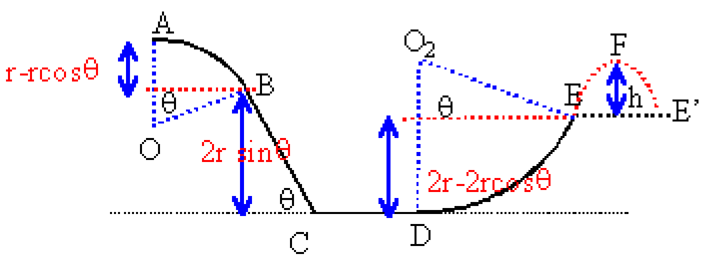
La piste est interrompue entre E et E' , situés dans une même plan horizontal; le chariot décrit alors une parabole ESE' de sommet S qui se raccorde à la piste en E et E', puis la piste E'F.



1. Le chariot est abandonné sans vitesse en A. Déterminer ses vitesses en B, C, D, E en fonction de r et θ, ainsi que la réaction R de la piste ne ces points. Application Numérique: La partie circulaire DE représente un sixième de circonférence, de rayon 1m. Calculer les vitesses et les réactions en B, C, D, E.
2. Pour quelles valeurs de θ, le chariot quitte t-il la piste entre A et B?
3. Etablir, par des considérations énergétiques, la relation entre l'altitude h de S au-dessus du plan horizontal EE' et l'angle θ.
4. Exprimer la distance de raccordement D=EE' en fonction de h et θ. AN r =1m
5. Calculer la force de freinage, constante, qu'il faut appliquer entre C et D pour que le chariot s'arrête en D, dans les conditions de la question 1

corrigé

altitudes :



$h_B = 2r \sin\theta$; $h_A = 2r \sin\theta + r(1-\cos\theta)$; $h_E = 2r(1-\cos\theta)$

énergies :

en A l'énergie mécanique est sous forme potentielle de pesanteur : mgh_A.

en B, l'énergie mécanique est sous forme cinétique et potentielle de pesanteur :

$\frac{1}{2} mv^2_B + mg\, h_B$.

en C et en D, l'énergie mécanique est sous forme cinétique: $\frac{1}{2}mv^2_C = \frac{1}{2}mv^2_D$.

en E l'énergie mécanique est sous forme cinétique et potentielle de pesanteur

$\frac{1}{2} mv^2_E + mg\, h_E$.

l'action du support perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas; seul le poids travaille et l'énergie mécanique se conserve.

$mgh_A = \frac{1}{2} mv^2_B + mg\, h_B$.

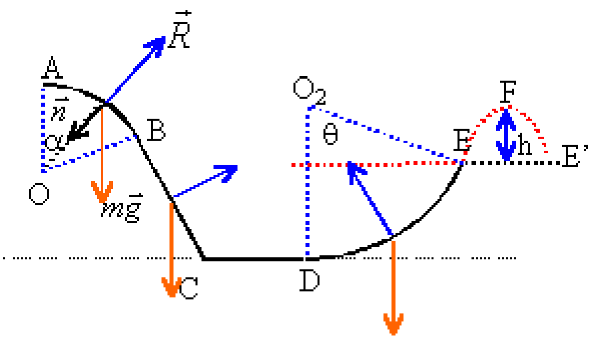
$v^2_B = 2g(h_A - h_B) = 2g\, r(1-\cos\theta)$ d'où $v_B = 3{,}13$ m/s

(en supposant que le solide n'a pas quité la piste en B)

$v^2_C = 2gh_A = 2g\, r(1+2\sin\theta-\cos\theta)$ d'où $v_C = 6{,}6$ m/s

$v^2_E = v^2_C - 2gh_E = 2g\, r(1+2\sin\theta-\cos\theta) - 2g\, r(2-2\cos\theta) = 2gr(-1+2\sin\theta+\cos\theta)$ d'où $v_E = 4{,}9$ m/s

réaction du support:



sur l'arc AB : relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe n de la base de Frenet

$-R+mg\cos\alpha = mv^2/r$

$R = m(g\cos\alpha - v^2/r)$ avec $v^2 = 2gr\,(h_A-h) = 2gr(1-\cos\alpha)$

$R = mg(3\cos\alpha-2)$

on quitte le support et on décolle si R=0 soit $\cos\alpha = 2/3$ et $\alpha = 48,18°$

en conséquence le point B n'est pas atteint (θ=60° supérieur à 48,18°)

sur le plan BC : relation fondamentale de la dynamique suivant un axe perpendiculaire au plan

$R-mg\cos\theta = 0$ d'où $R= 0,2*10*\cos60 = 1$ N

(pas de décollage, le solide reste sur le plan donc pas d'accélération suivant la normale au plan)

sur l'arc DE (en E): relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe n de la base de Frenet

$R-mg \cos \theta = mv^2_E/(2r)=mg(-1+2\sin\theta+\cos\theta)$

$R= mg(-1+2\sin\theta+2\cos\theta) = 0,2*10(-1+1,732+1)= 3,4$ N

mouvement parabolique :

au sommet S, la composante verticale de la vitesse est nulle.

la composante horizontale de la vitesse vaut $v_E\cos\theta$.

énergie cinétique : $½ m (v_E\cos\theta)^2$

énergie potentielle de pesanteur : $mgh_S=mg(h+h_E)$

l'énergie mécanique se conserve entre E et S:

$½ m (v_E\cos\theta)^2+mg(h+h_E) = ½mv^2_E+mgh_E$.

$½ mv^2_E-½ m (v_E\cos\theta)^2 = mgh$

$½ (v_E\sin\theta)^2 =gh$

---

distance EE': 2 fois l'abscisse du point S du fait de la symétrie de la parabole

au point S, la composante verticale de la vitesse est nulle: $v_E\sin\theta-gt=0$ d'où $t = v_E\sin\theta/g$

abscisse de S : $x_S= v_E\cos\theta\ t = v_E\cos\theta\ v_E\sin\theta/g = v_E^2\sin\theta \cos\theta /g$

$EE'= 2v_E^2\sin\theta \cos\theta /g = 2 (v_E\sin\theta)^2 \cos\theta /(g \sin\theta) = 4gh\cos\theta /(g \sin\theta) =4 h$

cotan θ.

force de frottement entre C et D:

l'énergie mécanique est sous forme cinétique en C: ½ mv^2_C.

entre C et D, poids et action du support, perpendiculaires à la vitesse ne travaillent pas.

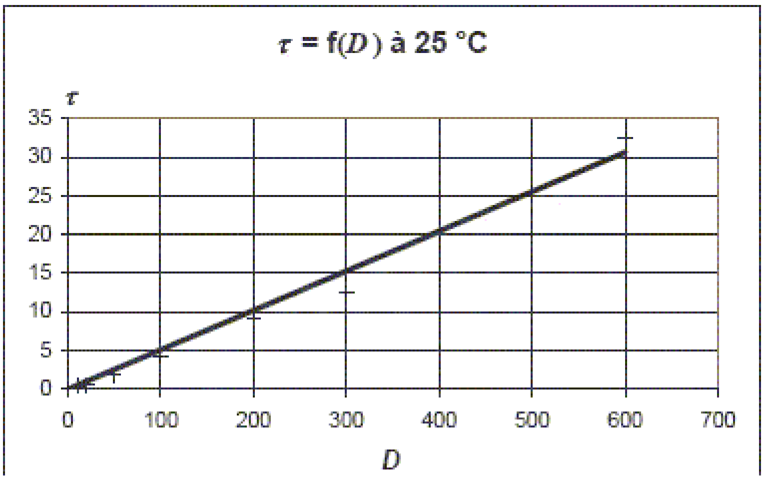
seule la force de frottement travaille : -f r

th de l'énergie cinétique entre C et D : 0-½ mv^2_C= -f r

f = ½ mv^2_C/r = mg(2 sinθ + 1-cosθ) = 0,2*10(1,732 +1-0,5) = 4,46 N

Etude du comportement rhéologique d'une huile végétale pure BTS chimiste 2007

L'étude expérimentale se fait à l'aide d'un rhéomètre rotatif, à température et pression constantes. Il est constitué d'une partie mobile qui tourne à vitesse choisie par l'opérateur et d'une partie fixe : le bécher dans lequel se trouve le fluide de masse volumique ρ à étudier. On obtient les valeurs suivantes et le rhéogramme correspondant :



D	τ
0	0
10	0,4
20	0,52
50	1,84
100	4,18
200	9,2
300	12,5
600	32,6

Définir les grandeurs (et leur unité) définies en abscisse et ordonnée.

τ : contrainte de cisaillement exprimée en pascal (Pa)

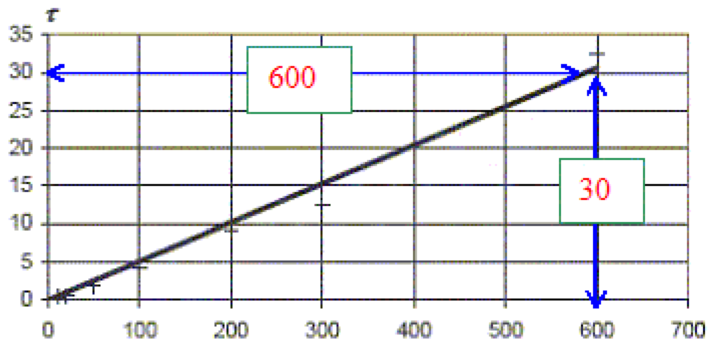
D : vitesse de déformation (seconde^{-1}).

Choisir, parmi les trois adjectifs suivants, celui qui est le plus approprié pour définir le comportement du fluide :
newtonien, rhéofluidifiant, rhéoépaississant.

Le rhéogramme est une droite donc comportement **newtonien**.

Détreminer l'équation de cette courbe; quelle grandeur physique est représentée par la pente ?

La pente de la droite correspond à la **viscosité dynamique (Pa s)**

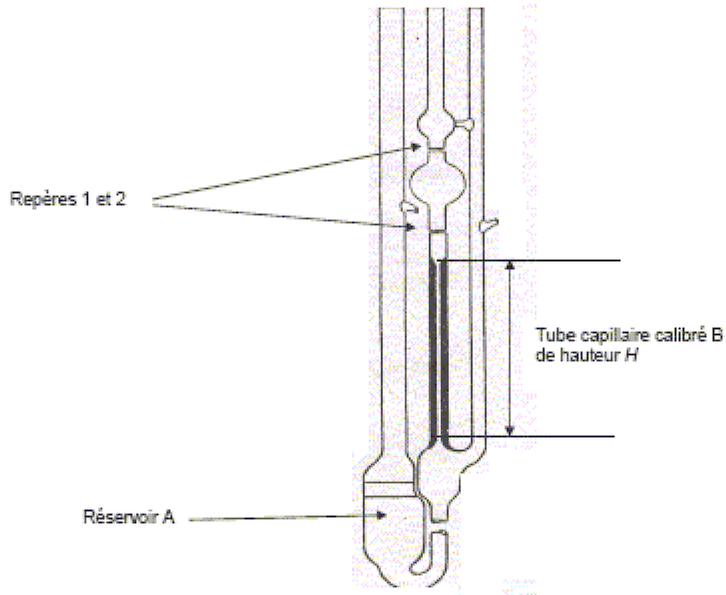


$$\text{pente} = \frac{\tau}{D} = \frac{30}{600} = 0{,}05 \text{ Pa s}$$

$$\tau = 0{,}05\ D$$

Etude de la viscosité dynamique d'une huile végétale pure en fonction de la température.

On utilise un viscosimètre de type Ubbelöhde en verre indilatable dont le schéma est le suivant :



Ce viscosimètre contient un tube capillaire calibré B placé verticalement dans une cuve thermostatée. On introduit le fluide à étudier dans le réservoir A, et on mesure le temps que met le volume V de fluide contenu entre les repères 1 et 2 pour s'écouler à travers le capillaire.

L'écoulement du fluide se fait sous une différence de pression constante ΔP due à la seule hauteur hydrostatique du fluide dans le capillaire. L'écoulement du fluide se fait à une température uniforme, fixée grâce au bain thermostaté. La loi d'écoulement dans les capillaires est la suivante :

$$\boxed{Q=\frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu H}}$$

Q est le débit volumique du fluide, R et H respectivement le rayon et la longueur du tube capillaire ; µ la viscosité dynamique et ΔP la différence de pression existant entre les deux extrémités du tube capillaire. Cette expression est valable pour un fluide incompressible en écoulement laminaire permanent.

Expliquer les termes "fluide incompressible" et "écoulement laminaire" :

Un fluide est "incompressible" si sa **masse volumique est constante** à tempérture constante.

Dans certains écoulements, les particules diffusent très lentement : elles s’écartent peu les unes des autres.

Les différentes couches du fluide glissent les unes par rapport les autres : elles ne se mélangent pas

L’écoulement est dit **laminaire**.

Pour effectuer une mesure, on aspire le fluide de masse volumique r à l'aide d'une poire d'aspiration jusqu'au dessus du trait de remplissage supérieur puis on mesure le temps d'écoulement du fluide entre les deux traits.

Exprimer ΔP en utilisant les notations de l'énoncé. On note g=9,81 l'accélération de la pesanteur.

ΔP est due à la seule hauteur hydrostatique H du fluide dans le capillaire :

$$\Delta P = \rho g H.$$

Rappeler la relation entre le débit volumique Q et V, volume du fluide écoulé entre les deux traits du réservoir pendant le temps t.

$Q = V/t$.

Exprimer μ en fonction de V, t, R^4, ρ et g.

$$\boxed{Q=\frac{\pi R^4 \rho g H}{8\mu H}=\frac{V}{t} \Rightarrow \mu=\frac{\pi R^4 \rho g t}{8V}}$$

Préciser les grandeurs physiques, mesurées dans les conditions de l'expérience, dépendant de la température dans l'expression de μ.

Le verre du capillaire est indilatable: R et V indépendants de la température.

La masse volumique du fluide dépend de la température.

La durée de l'écoulement dépend de la température.

La première mesure t_1 de temps d'écoulement se fait à la température T_1=298 K.

Exprimer μ_1 à cette température.

$\mu_1 = A\,\rho_1 t_1$ avec $A = \pi R^4 g / (8V)$ = constante.

La seconde mesure t_2 de temps d'écoulement se fait à la température T_2.

Exprimer μ_2 à cette température.

$\mu_2 = A\,\rho_2 t_2$ avec $A = \pi R^4 g / (8V)$ = constante.

Donner l'expression du rapport μ_2/μ_1 et en déduire une relation de la forme $\mu_2 = K\,\rho_2\,t_2$. Exprimer K.

$\mu_2/\mu_1 = \rho_2 t_2 / (\rho_1 t_1) = K\,\rho_2\,t_2$ si $K = 1/(\rho_1 t_1)$

Calculer la valeur numérique de K à partir du tableau ci-dessous :

T(K)	1/T (K^{-1})	ρ (kg m^{-3})	t(s)	μ	ln μ
298		915	443,1	0,0510	
303		913	366,5		
308		908	308,3		

313		905	262,5		
318		902	224,9		
323		899	194,7		
328		896	170,2		

K = 1/(915*443,1)=**$2,47\ 10^{-6}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-1}$**. (2,4665)

Compléter le tableau.

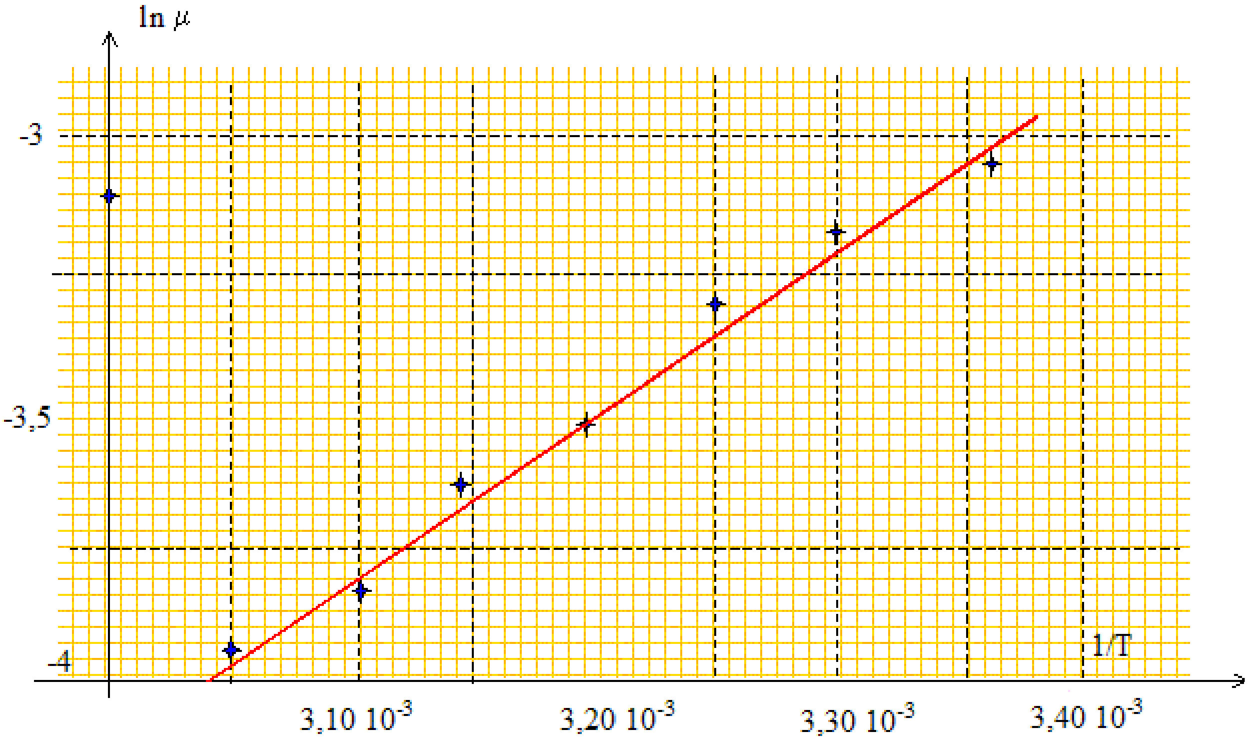
T(K)	1/T (K^{-1})	ρ (kg m^{-3})	t(s)	μ **(Pa s)**	ln μ
298	**$3,36\ 10^{-3}$**	915	443,1	0,0510	**-2,98**
303	**$3,30\ 10^{-3}$**	913	366,5	**$4,21\ 10^{-2}$**	**-3,17**
308	**$3,25\ 10^{-3}$**	908	308,3	**$3,52\ 10^{-2}$**	**-3,35**
313	**$3,19\ 10^{-3}$**	905	262,5	**$2,99\ 10^{-2}$**	**-3,51**
318	**$3,14\ 10^{-3}$**	902	224,9	**$2,55\ 10^{-2}$**	**-3,67**
323	**$3,10\ 10^{-3}$**	899	194,7	**$2,20\ 10^{-2}$**	**-3,82**
328	**$3,05\ 10^{-3}$**	896	170,2	**$1,92\ 10^{-2}$**	**-3,95**

$\mu_2 = K\ \mu_1\ \rho_2\ t_2$

Montrer que le comportement de cette huile végétale pure en fonction de la température peut être modélisée par la relation $\mu = A\exp(B/T)$.

$$\ln \mu = \ln A + B/T$$

On trace la courbe : $\ln \mu = f(1/T)$



La courbe est une droite : le modèle **μ = A exp(B/T)** est correct.

Cinématique : vitesse , accélération, base de Frenet, projectile.

Les équations horaires d'un mouvement plan sont :

$x(t)=t$; $y(t)=(1-t^2)^{½}$.

Quelle est la nature de la trajectoire ?

Eliminer le temps

$y^2 = 1-t^2$ et $t^2 = x^2$.

d'où : $y^2 = 1-x^2$; $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$.

cercle de centre O (origine du repère) et de rayon R= 1.

Déterminer le vecteur vitesse et sa valeur :

Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et a le sens du mouvement.

dx/dt = $\mathbf{v_x = 1}$.

dy/dt = v_y = ½ (-2t)$\mathbf{(1-t^2)}^{-½}$; $\mathbf{v_y = -t\ (1-t^2)}^{-½}$

$$\vec{v} = 1\,\vec{i} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\vec{j}$$

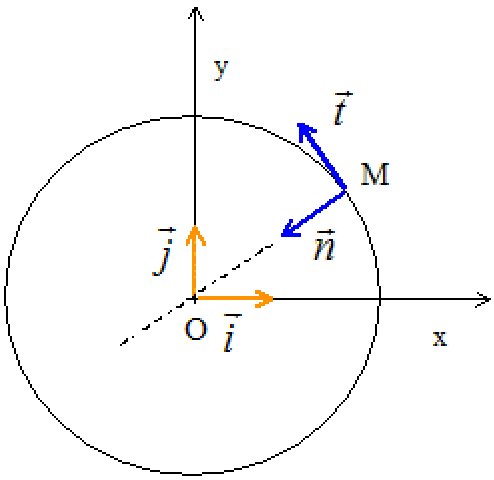
valeur $\mathbf{v^2 = v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}}$

$v^2 = 1 + t^2/(1-t^2) = 1 / (1-t^2)$.

$\mathbf{v = 1 / (1-t^2)^{½}}$.

En déduire les composantes normale et tangentielle du vecteur accélération :

Dans la base de Frenet associée au point M :



Accélération normale dirigée suivant le vecteur unitaire n de la base de Frenet :

valeur (norme) $a_N = v^2/ R$ avec R= 1.

$\mathbf{a_N = 1 / (1-t^2)}$.

Accélération tangentielle suivant le vecteur unitaire t de la base de Frenet :

$a_T = dv/dt$ avec $v = 1 / (1-t^2)^{½}$.

$$\mathbf{a_T = t\,(1-t^2)^{-3/2}}.$$

Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération :

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

$dx/dt = \mathbf{v_x = 1}$ donc $\mathbf{dv_x/dt = 0}$.

$dy/dt = v_y = ½\,(-2t)\mathbf{(1-t^2)}^{-½}$; $v_y = -t\,(1-t^2)^{-½}$

On pose $u = -t$ soit $u' = -1$

et $w= (1-t^2)^{-½}$ soit $w' = t\,(1-t^2)^{-3/2}$

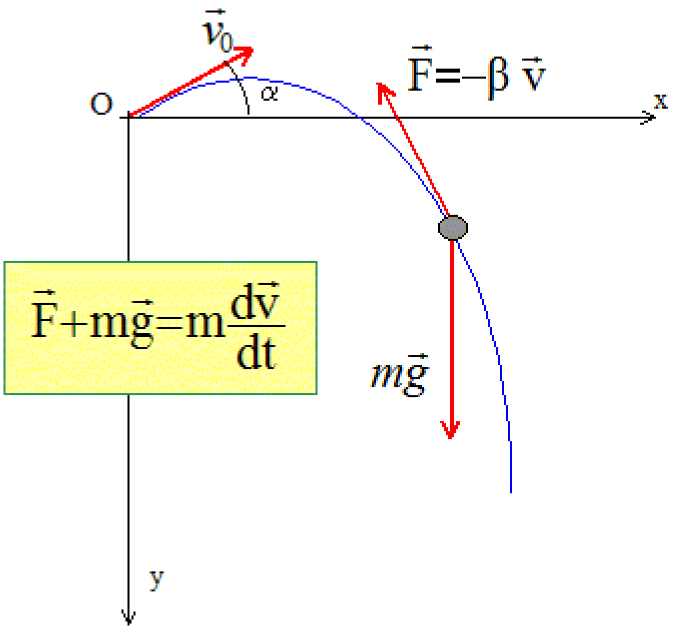
$dv_y/dt = u'w + uw' = -(1-t^2)^{-½} - t^2(1-t^2)^{-3/2}$

$$\mathbf{dv_y/dt = -\,(1-t^2)^{-3/2}}.$$

On lance un projectile avec une vitesse initiale de module v_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

Le projectile est soumis à une force de résistance de l'air, colinéaire au vecteur vitesse mais de sens contraire, de norme βv, avec β positif.

Expression du vecteur vitesse.



On note v_x et v_y les composantes du vecteur vitesse.

Projection sur l'axe Ox : $-\beta v_x + 0 = m\, dv_x/dt$.

$$\mathbf{dv_x/dt + \beta/m\, v_x = 0}.$$

Solution de cette équation différentielle : $v_x = A \exp(-\beta/m\, t)$.

à t=0, $v_x = v_0 \cos\alpha$ d'où $A = v_0 \cos\alpha$

$$\mathbf{v_x = v_0 \cos\alpha \exp(-\beta/m\, t)}.$$

Projection sur l'axe Oy : $-\beta v_y + mg = m\, dv_y/dt$.

$$\mathbf{dv_y/dt + \beta/m\, v_y = g}. \quad (1)$$

Solution de cette équation différentielle sans second membre: $v_y = B \exp(-\beta/m\, t)$.

Solution particulière de (1) : $v_y = mg/\beta$ (régime permanent, vitesse limite constante).

Solution générale de (1) : $v_y = B \exp(-\beta/m\, t) + mg/\beta$.

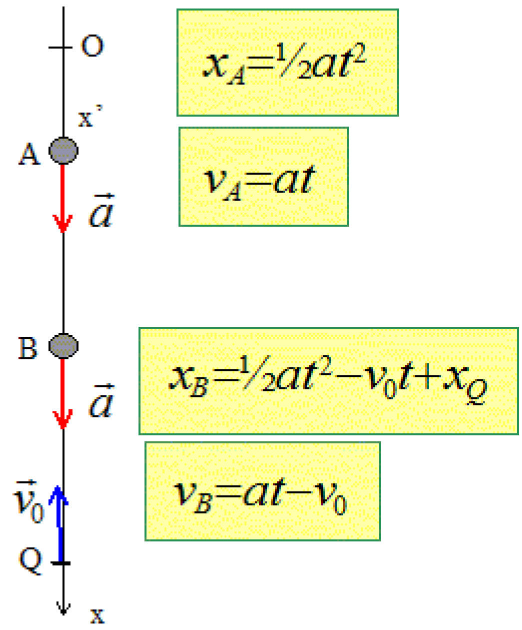
à t=0, $v_y = -v_0 \sin\alpha$ d'où $B = -v_0 \sin\alpha - mg/\beta$

$$\mathbf{v_y = (-v_0 \sin\alpha - mg/\beta) \exp(-\beta/m\, t) + mg/\beta}.$$

Soit x'x un axe vertical dirigé vers le bas. Un mobile ponctuel A part d'un point O de x'x, choisi comme origine, sans vitesse initiale ; il décrit la demi droite Ox avec une accélération constante, vecteur a. Au même instant un mobile B est lancé avec une vitesse v_0 dirigée vers le haut d'un point Q de x'x. B est animé d'un monvement d'accélération constant vecteur a' = vecteur a.

A et B se croisent en M. A l'instant de leur rencontre les deux mobiles ont des vitesses de même valeur.

Calculer les normes OQ et OM.



Au point M : $½at^2-v_0t+x_Q=½at^2$.

$x_Q= v_0t$.

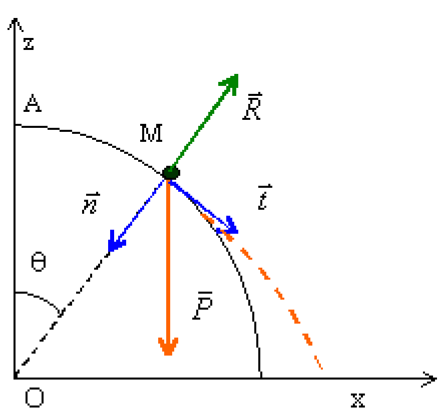
Les vitesses en M ont même norme mais sont de sens contraire :

$at = -at + v_0$ soit : $\mathbf{t = ½v_0/a}$.

d'où $\mathbf{x_Q = ½v_0^2/a}$.

$x_M = ½at^2$; $\mathbf{x_M = 0{,}125\ v_0^2/a}$.

mouvement circulaire



Une bille de masse m est lachée sans vitesse du point A d'une sphère de rayon r, de centre O.

Les frottements sont négligés.

1

Exprimer dans le repère de Frenet l'accélération de la bille.

réaction du support

Ecrire l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ et de ses dérivées. Exprimer la réaction du support.

corrigé

système : bille ; référentiel terrestre galiléen

projection de la relation fondamentale de la dynamique du point dans le repère de Frenet.

$$\textbf{vitesse (mouvement circulaire)}\ \vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{t} = r\dot{\theta}\vec{t}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{r}\vec{n} = r\ddot{\theta}\ \vec{t} + \frac{v^2}{r}\vec{n}$$

$$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$mg\cos\theta - R = m\frac{v^2}{r}\ \textbf{et}\ mg\sin\theta = mr\ddot{\theta}$$

$$\mathbf{R = m(g\cos\theta - r\dot{\theta}^2)}\ et\ \mathbf{\ddot{\theta} - \frac{g}{r}\sin\theta = 0}$$

2

Exprimer les énergies potentielle, cinétique et mécanique en fonction de θ et θ'.

En déduire la vitesse de la bille à chaque instant

vitesse de la bille

corrigé

Energie cinétique : $0,5\ mv^2 = 0,5\ mr^2\theta'^2$

Energie potentielle de pesanteur (origine en O) : $mgz = mg\ r \cos\theta$.

Energie mécanique : $E = 0,5\ mr^2\theta'^2 + mg\ r\cos\theta$.

En absence de frottements, l'énergie mécanique se conserve.

Sa valeur initiale est $E = mgr$

$mgr = 0,5\ mr^2\theta'^2 + mg\ r\cos\theta$.

$gr = 0,5\ r^2\theta'^2 + g\ r\cos\theta$

$r^2\theta'^2 = v^2 = 2gr(1-\cos\theta)$

3

la bille quitte le support

Exprimer la réaction du support en fonction de m, g, θ.

Pour quelle valeur de θ, la bille quitte -t-elle le support ?

Quelle est alors sa vitesse ?

corrigé

$R = mg\cos\theta - mv^2/r = m\ (g\cos\theta - 2gr(1-\cos\theta))$

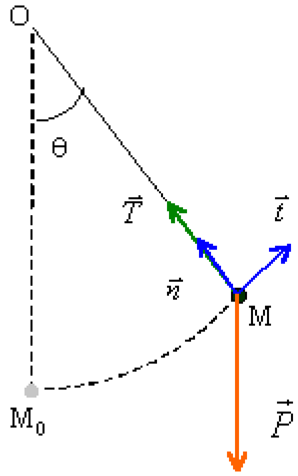
$R = mg\ (3\cos\theta - 2)$.

La bille reste en contact tant que la réaction du support est positive ou nulle.

$3\cos\theta - 2 > 0$ ou $\cos\theta > 2/3$ soit $\theta < 48°$

La vitesse de la bille vaut alors :

$v^2 = 2gr(1-\cos\theta) = 2gr(1-2/3) = 2gr / 3$



4

pendule simple

équation horaire

période

La bille est lancée de la position d'équilibre stable M_0 avec une vitesse v_0 horizontale.

Ecrire l'équation différentielle du mouvement (cas des amplitudes faibles).

Donner l'équation horaire et exprimer la période en fonction de L et g (L = longueur du pendule)

corrigé

système = masse m ; référentiel terrestre galiléen.

$$\text{vitesse (mouvement circulaire)}\ \vec{v} = L\frac{d\theta}{dt}\vec{t} = L\dot{\theta}\,\vec{t}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{L}\vec{n} = L\ddot{\theta}\ \vec{t} + \frac{v^2}{L}\vec{n}$$

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$-mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{L}\ \text{et}\ -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$T = m\left(g\cos\theta + L\dot{\theta}^2\right)\ et\ \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0\ avec\ \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\text{amplitude faible} : \sin\theta \approx \theta \text{ d'où : } \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{g}{L}$$

équation différentielle d'un oscillateur harmonique

$$\theta = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \text{ à } t = 0 ; \theta = 0 \text{ d'où } A = 0$$

$$\dot{\theta} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \text{ à } t = 0,\ \dot{\theta} = \frac{v_0}{L} = B\omega \text{ d'où } B = \frac{v_0}{L\omega}$$

$$\theta = \frac{v_0}{L\omega}\sin(\omega t) \text{ période } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

5

aspect énergétique

Exprimer les énergies potentielle, cinétique et mécanique de la masse m fixée au fil.

Exprimer la vitesse à chaque instant.

Montrer que par dérivation par rapport au temps on retrouve l'équation différentielle du mouvement.

corrigé

Energie cinétique : $0,5\ mv^2 = 0,5\ mL^2\theta'^2$

Energie potentielle de pesanteur (origine en M_0 et axe vertical ascendant) :

$mgz = mg\ L(1 - \cos\theta)$.

Energie mécanique : $E = 0,5\ mL^2\theta'^2 + mg\ L(1 - \cos\theta)$.

En absence de frottements, l'énergie mécanique se conserve.

Sa valeur initiale est $E = 0,5mv_0^2$

$0,5mv_0^2 = 0,5\ mL^2\theta'^2 + mg\ L(1 - \cos\theta)$.

$0,5v_0^2 = 0,5\ L^2\theta'^2 + g\ L(1 - \cos\theta)$.

$L^2\theta'^2 = v^2 = v_0^2 - 2gL(1 - \cos\theta)$

En dérivant cette expression par rapport au temps :

$L^2\ 2\theta'\ \theta'' = 2gL\ \theta'\ (-\sin\theta)$

$L\theta'' + g\sin\theta = 0$

6

Quels sont les différents types de mouvements suivant les valeurs de la vitesse initiale ?

différents types de mouvement

corrigé

On a des oscillations autour de M_0 s'il existe une valeur de θ maximale pour laquelle

$d\theta / dt = 0$

$$v^2 = v_0^2 - 2gL(1-\cos\theta_{max}) = 0$$

$$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{v_0^2}{2gL}$$

cette équation a une solution si

$$-1 \leq 1 - \frac{v_0^2}{2gL} \leq 1 \text{ soit } 0 \leq v_0^2 \leq 4gL$$

Le fil doit d'autre part rester tendu : T positive ou nulle

$$T = mg\cos\theta_{max} + mL\theta'^2$$

$$T = mg\cos\theta_{max} \text{ et } \theta_{max} \leq \pi/2$$

$$0 \leq 1 - v_0^2/(2gL) \text{ soit } v_0^2 \leq 2gL$$

Si v_0^2 est supérieur à 4gL il n'y a pas de mouvement oscillatoire autour de M_0.

Le fil doit d'autre part rester tendu lorsque $\theta = \pi$.

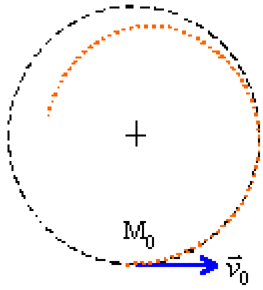
$$v^2(\theta = \pi) = v_0^2 - 4gL$$

$$T(\theta = \pi) = mg\cos\pi + mv^2(\theta = \pi) / L \text{ positive ou nulle}$$

$$-mg + m(v_0^2 - 4gL) > 0$$

si $v_0^2 > 5gL$ mouvement circulaire

si $2gL > v_0^2 > 5gL$



Pendule de Pohl: oscillations forcées concours physique ITPE 2009.

Un pendule de Pohl est constitué :

- D'un disque en rotation autour de son centre.

- D'un ressort spiral, qui exerce un couple mécanique qui tend à ramener le disque vers sa position d'équilibre.

- D'un pointeur placé sur le disque qui permet de repérer les écarts angulaires.

- D'un moteur, relié au ressort spiral, qui forcer les oscillations à une fréquence ajustable par l'utilisateur.

- D'un frein électromagnétique, permettant de régler l'effet d'amortissement (par courants de Foucault).

La position du disque résonateur est repéré par l'angle $\varphi(t)$.

Le ressort spiral a une extrémité soudée en O, point fixe., l'autre extrémité mobile soudée en A au bras excitateur de position φ_e.

Le bras excitateur peut être mis en mouvement sinusoïdal de fréquence f par un moteur pas-à-pas avec une bielle.

- Si φ_e = cste, régime libre. Le moteur est étteint.

- Si $\varphi_e = \Phi_e \cos(\omega t)$, régime forcé. Le moteur est en rotation à la fréquence f.

Le disque résonateur passe dans l'entrefer d'un système magnétique alimenté par une intensité I : une force de freinage dite de Foucault est induite sur le disque résonateur.

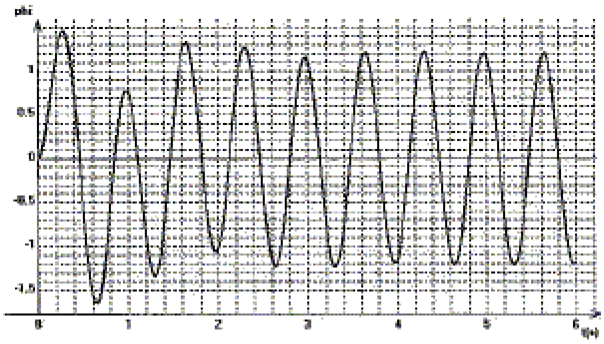
<u>Mise en équation</u>.

L'équation de la position du disque peut se mettre sous la forme :

$$\varphi'' + 2\,\xi\omega_0\varphi' + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\varphi_e.(1)$$

Le système est immobile et on met en route le moteur pas à pas qui crée une excitation sinusoïdale $\varphi_e = \Phi_e.\cos(\omega t)$

Décrire ce que l'on observe sur la courbe φ (t) ci-dessous.



A partir de t = 2,6 s, on observe un régime sinusoïdal forcé ; de t=0 à t = 2,6 s, le régime est transitoire.

Par la suite, on prendra $\varphi(t) = \Phi\cos(\omega t+\alpha)$. On notera $\underline{\varphi} = \Phi\exp(j\alpha)$ tel que $\varphi(t) = \mathrm{Re}(\underline{\varphi}\exp(j\omega t))$

Déterminer $\underline{\varphi}$ en fonction de Φ_e, ω, ω_0 et ξ.

$\underline{\varphi}' = j\omega\,\underline{\varphi}\exp(j\omega t)$; $\underline{\varphi}'' = -\omega^2\,\underline{\varphi}\exp(j\omega t)$; repport dans $\varphi'' + 2\,\xi\omega_0\varphi' + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\varphi_e$.

$$-\omega^2\,\underline{\varphi}\exp(j\omega t) + 2\,\xi\omega_0\,j\omega\,\underline{\varphi}\exp(j\omega t) + \omega_0^2\underline{\varphi}\exp(j\omega t) = \omega_0^2\,\Phi_e\exp(j\omega t).$$

$$-\omega^2\,\underline{\varphi} + 2\,\xi\omega_0\,j\omega\,\underline{\varphi} + \omega_0^2\underline{\varphi} = \omega_0^2\,\Phi_e.$$

$$\underline{\varphi} = \omega_0^2\,\Phi_e / [\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\,\xi\omega_0\,\omega].$$

Déterminer l'intervalle auquel appartient α.

$\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e\ [\omega_0^2-\omega^2- 2j\ \xi\omega_0\ \omega] / [(\omega_0^2-\omega^2)^2+ (2\ \xi\omega_0\ \omega)^2]$.

tan $\alpha = -2\xi\omega_0\ \omega / (\omega_0^2-\omega^2)$; si ω tend vers zéro, alors tan α tend vers zéro ; α tend vers zéro par valeur négative.

si ω tend vers ω_0^-, alors tan α tend vers -l'infini ; α tend vers -½π.

si ω tend vers ω_0^+, alors tan α tend vers +l'infini ; α tend vers +½π.

si ω tend vers l'infini, alors tan α tend vers $2\xi\omega_0 /\omega$; α tend vers zéro par valeur positive.

α appartient à l'intervalle]-½π ; +½π [.

Ecrire $\underline{\varphi}$ en excitation très basse fréquence.

$\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e / [\omega_0^2-\omega^2+ 2j\ \xi\omega_0\ \omega]$ avec $\omega_0^2 >> \omega^2$ d'où $\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e / [\omega_0^2+ 2j\ \xi\omega_0\ \omega]$

$\underline{\varphi} = \omega_0\ \Phi_e / [\omega_0+ 2j\ \xi\ \omega] = \omega_0\ \Phi_e\ [\omega_0- 2j\ \xi\ \omega] / [\omega_0^2+ 4\ \xi^2\ \omega^2]$

Module de $\underline{\varphi}$: $|\underline{\varphi}| = \mathbf{\Phi} = \mathbf{\omega_0\ \Phi_e / [\omega_0^2+ 4\ \xi^2\ \omega^2]^{½}}$; tan $\alpha = \mathbf{2\xi\ \omega / \omega_0}$.

Ecrire $\underline{\varphi}$ en excitation très haute fréquence.

$\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e / [\omega_0^2-\omega^2+ 2j\ \xi\omega_0\ \omega]$ avec $\omega_0^2 << \omega^2$ d'où $\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e / [- \omega^2+ 2j\ \xi\omega_0\ \omega]$

$\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e\ [- \omega^2- 2j\ \xi\omega_0\ \omega] / [\ \omega^4+ (2\ \xi\omega_0\ \omega)^2]$

Module de $\underline{\varphi}$: $|\underline{\varphi}| = \mathbf{\Phi} = \mathbf{\omega_0^2\ \Phi_e / [\omega\ [\ \omega^2+ (2\ \xi\omega_0\ )^2]^{½}]}$; tan $\alpha = \mathbf{2\xi\ \omega_0 / \omega}$.

Tracer le diagramme asymptotique $\Phi(\omega)$ pour les TBF et les THF.

TBF : $\mathbf{\Phi} = \Phi_e / [1+ 4\ \xi^2\ (\omega/\omega_0)^2]^{½} \sim \Phi_e(1-2\ \xi^2\ (\omega/\omega_0)^2)$; asymptote $\mathbf{\Phi} = \Phi_e$.

THF : $\mathbf{\Phi} = \omega_0^2\ \Phi_e / [\omega^2\ [1+ (2\ \xi\omega_0/\omega\ )^2]^{½}] \sim \omega_0^2\ \Phi_e /\omega^2\ (1-2\ \xi^2\ (\ \omega_0/\omega\ )^2)$; asymptote $\mathbf{\Phi} = 0$.

Exprimer Φ en fonction de Φ_e, ω, ω_0 et ξ.

$\underline{\varphi} = \omega_0^2\ \Phi_e / [\omega_0^2-\omega^2+ 2j\ \xi\omega_0\ \omega] = \omega_0^2\ \Phi_e\ [\omega_0^2-\omega^2- 2j\ \xi\omega_0\ \omega] / [(\omega_0^2-\omega^{2)2}+ (2\ \xi\omega_0\ \omega)^2]$

Module de $\underline{\varphi}$: $|\underline{\varphi}| = \mathbf{\Phi = \omega_0^2\ \Phi_e / [(\omega_0^2-\omega^2)^2+ (2\ \xi\omega_0\ \omega)^2]^{½}}$.

Démontrer que $\Phi > \Phi_e$ implique que ω soit inférieur à une valeur à alculer en fonction uniquement de ω_0 et ξ.

$\Phi > \Phi_e$; $\omega_0^2\,\Phi_e / [(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\,\xi\omega_0\,\omega)^2]^{½} > \Phi_e$; $\omega_0^2 / [(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\,\xi\omega_0\,\omega)^2]^{½} > 1$.

$\omega_0^4 > (\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\,\xi\omega_0\,\omega)^2$; $\omega_0^4 > \omega_0^4 + \omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + 4\,\xi^2\omega_0^2\,\omega^2$.

$0 > \omega^2 - 2\omega_0^2 + 4\,\xi^2\omega_0^2$; $\omega^2 < 4\omega_0^2(½-\xi^2)$; $\omega < 2\omega_0(½-\xi^2)^{½}$.

Quelle condition sur ξ doit être vérifiée pour que la relation précédente soit possible ?

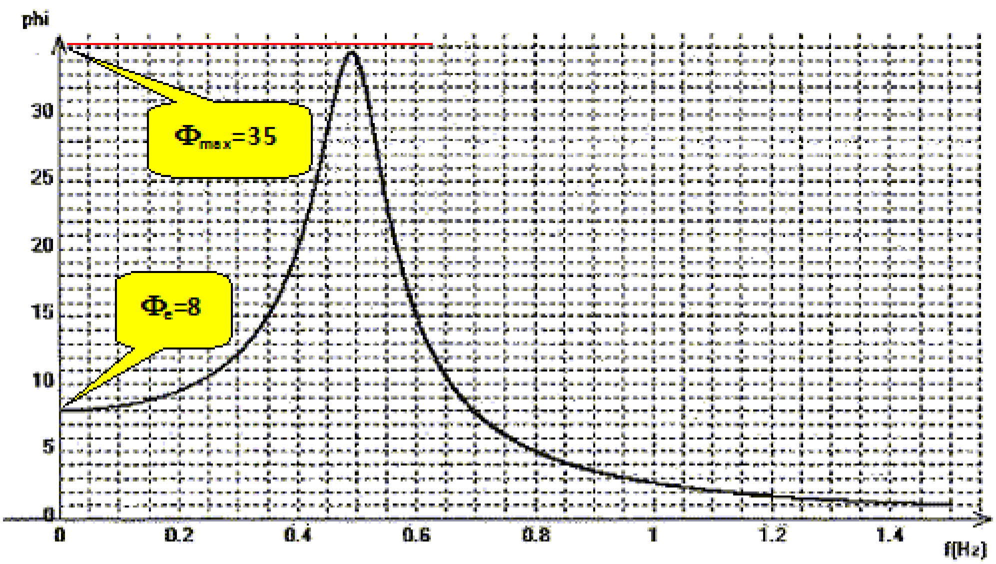
$½-\xi^2 > 0$; $0,5 > \xi^2$; $\xi < 0,5^{½}$; $\xi < 0,71$.

Dans le cas où $\xi \ll 1$, **calculer la valeur maximale de Φ en fonction de Φ_e et ξ sachant que le maximum est lors en $\omega \sim \omega_0$.**

$\Phi = \omega_0^2\,\Phi_e / [(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\,\xi\omega_0\,\omega)^2]^{½}$.

$\Phi_{max} \sim \omega_0^2\,\Phi_e/(2\,\xi\omega_0^2)$; $\Phi_{max} \sim \Phi_e/(2\,\xi)$.

On a relevé $\Phi(f)$ avec f fréquence d'excitation.



$\xi = \Phi_e/(2\Phi_{max}) = 8/70 = \mathbf{0,114}$.

Sachant que $\xi = \xi_0 + \mu I^2$ avec $\xi_0 = 2,7\ 10^{-3}$; $\mu = 0,45\ A^{-2}$ **en déduire la valeur de l'intensité I.**

$I = [(\xi - \xi_0)/\mu]^{½} = [(0,114 - 2,7\ 10^{-3})/0,45]^{½} = \mathbf{0,25\ A}$.

Pour une intensité nulle dans les bobines, quelle valeur prendrait Φ à une fréquence d'excitation de 0,5 Hz ? Conclure.

$\xi = \xi_0 = 2{,}7\ 10^{-3}$; 0,5 Hz est la fréquence de résonance, $\Phi = \Phi_{max}$.

$\Phi_{max} \sim \Phi_e/(2\ \xi) = \Phi_e/(2 * 2{,}7\ 10^{-3}) = 185\ \Phi_e$.

L'amplitude à la résonance est trop grande : on va sans doute détruire une partie du système mécanique.

Dynamique du point matériel (référentiel galiléen)

Chute verticale

les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Un point matériel de masse m, est abandoné sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur terrestre. Exprimer la vitesse du point M dans les cas suivants :

1. Chute libre (sans frottement)
2. Chute avec une force de frottement du type : **F**= -k **v**.
3. Chute avec frottement du type : **F**= -k_1 v **v**.

corrigé

La chute se fait suivant la verticale descendante. (On choisit un axe Oz, vertical, orienté vers le bas, l'origine est situé à l'altitude h, moment du lâché). La force de frottement s'oppose au mouvement, elle est dirigée en sens contraire de l'axe Oz.

Ecrire le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oz, le référentiel d'étude étant galiléen.

m**g** + **f** = m**a**

chute libre : m**g** = m**a** soit **a=g**.

la vitesse est une primitive de l'accélération : v = gt+ Cte

la vitesse initiale est nulle : la constante d'intégration est nulle. v= gt , indépendante de la masse m.

<u>chute avec frottement</u> : m**g** + **f** = m**a**

mg-kv=mz" = mv' ou v'+k/m v = g ou v'+ v/τ =g avec τ =m/k

v'+ v/τ =g (1)

solution générale de l'équation v'+ v/τ =0 : v= A exp(t/τ)

solution particulière de (1) : v_{limite} = gτ.

solution générale de l'équation (1) : v = A exp(t/τ) +v_{limite} .

à l'instant initial, la vitesse est nulle : 0= A+v_{limite} soit A= -v_{limite} .

v = v_{limite} (1- exp(t/τ)).

$mg-k_1v^2=mz'' = mv'$ ou $v'= g-k_1/m\, v^2= g(1-\beta^2v^2)$ avec $\beta^2 = k_1/(mg)$.

$v'= dv/dt= g(1-\beta^2v^2)$.

en séparant les variables vitesse et temps : dv / (1-β²v²) =gdt

or 1 /(1-β²v²) = ½ /(1+βv) +½/(1-βv)

primitive de dv /(1+βv) : 1/β ln(1+βv) ; primitive de dv /(1-βv) : -1/β ln(1-βv) ;

d'où 1/β ln(1+βv) -1/β ln(1-βv) = gt +Cte

la constante d'intégration est nulle car la vitesse initiale est nulle.

ln[(1+βv) / (1-βv)]= β gt

soit (1+βv) / (1-βv) = exp(β gt) ; 1+βv = (1-βv)exp(β gt)

vβ(1+exp(β gt))=exp(β gt)–1 soit v = (exp(β gt)–1) / [β(1+exp(β gt))].

la vitesse limite est : $1/\beta = (mg/k_1)^{½}$.

l'écureuil et le chasseur

Un écureuil, de masse m, se trouve sur une branche à l'altitude h par rapport au sol. Il aperçoit un chasseur qui pointe une arme sans sa direction. L'écureuil se laisse alors tomber vers le sol au moment où la pierre quitte la fronde.

1. La pierre frappe-t-elle l'écureuil ? (le petit animal est assimilé à un point matériel)

corrigé

les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

L'écureuil est en mouvement de chute libre verticale vers le bas, sans vitesse initiale.

Le projectile a une trajectoire parabolique : la direction de la vitesse initiale du projectile pointe vers la position initiale de l'écureuil.

référentiel galiléen : le sol ou la surface de la terre au pied de l'arbre.

repère : (O,x,y) avec Oy dirigé vers le haut, origine au sol .

Trajectoire de l'écureuil , initialement à l'abscisse x_0 : $y_E = -\frac{1}{2}gt^2+h$; $x_E=x_0$.

Trajectoire du projectile, situé initialement à l'origine du repère :

a$(0 ; -g)$; **v**$_0(v_0\cos\alpha ; v_0\sin\alpha)$; OM_0 (0,0)

vitesse, primitive de l'accélération : **v**$(v_0\cos\alpha ; -gt + v_0\sin\alpha)$

position, primitive de la vitesse : **OM** $(x_P=v_0\cos\alpha\, t ; y_P= -\frac{1}{2}gt^2 +v_0\sin\alpha\, t)$

trajectoire : $t= x_P / (v_0\cos\alpha)$; repport dans y_P : $y_P = -\frac{1}{2}g\, x_P^2/ (v_0\cos\alpha)^2 + x_P \tan\alpha$.

A la date t_1 de l'éventuelle rencontre : $y_P = y_E$ et $x_P= x_0$

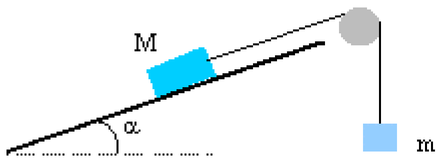
$x_0= v_0\cos\alpha\, t_1$ et $-\frac{1}{2}gt_1^2 + h = -\frac{1}{2}gt_1^2 +v_0\sin\alpha\, t_1$ soit $h = v_0\sin\alpha\, t_1$.

$v_0 \sin\alpha\, t_1 / (v_0\cos\alpha\, t_1) = \tan \alpha = h / x_0$.

l'écureuil saute et est touché par le projectile.

---

mobile et contre-poids



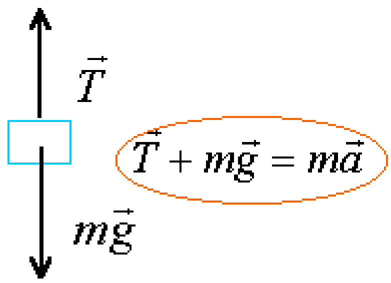
L'objet de masse m se déplace sans frottement sur le plan incliné. La poulie a une masse faible et en conséquence la tension du fil est la même de chaque côté.

1. Pour quelle masse m, le système est-il en équilibre ?
2. Si m=3M, quel est le sens du mouvement ? Quelle est la tension du fil ? α=30° et m=1kg.

corrigé

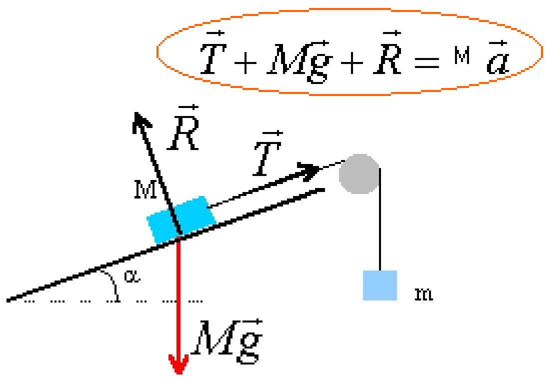
Les deux solides sont assimilés à des points matériels. A l'équilibre l'accélération est nulle.

référentiel terrestre galiléen.



le contre-poids est soumis à deux forces verticales : le poids mg, vers le bas et la tension du fil, vers le haut

projection de la seconde loi de Newton sur un axe vertical, orienté vers le bas : mg-T=ma (1). ou a = g -T/m



le mobile est soumis à trois forces : - le poids Mg, vertical vers le bas, la tension T du fil et l'action du plan R qui en l'absence de frottement est perpendiculaire au plan.

projection de la seconde loi de Newton sur un axe parallèle au plan orienté vers le haut :

-Mg sina +T=Ma (2) ; a = -gsina + T / M.

or (1) donne T = mg-ma

repport dans (2) : -Mgsina +mg-ma = Ma ; -Mgsinα +mg = (M+m)a

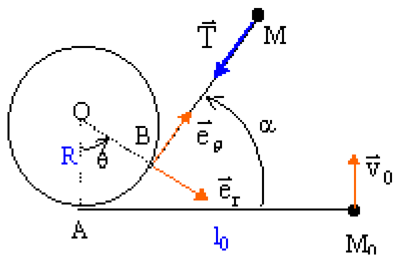
$a = g(m - M\sin\alpha) / (M+m)$.

à l'équilibre a=0 soit : $m = M\sin\alpha$.

si m=3M alors $a = gM(3-\sin\alpha)/(4M) = 0{,}25\, g(3-\sin\alpha)$; a est positive et M monte le plan

tension du fil : $T = m(g-a) = mg\,(1-0{,}25(3-\sin\alpha)) = 1*9{,}8(1-0{,}25\,(3-\sin 30)) =$ 3,675 N.

le fil s'enroule sur le cylindre



Un cylindre d'axe vertical, de rayon R, est fixé sur un plan horizontal. On attache à sa base, au point A un fil de longueur initiale l_0. L'autre extrémité est fixée à un solide de petite dimensions de masse M, astreint à glisser sans frottement sur le plan horizontal. (voir figure : schéma en vue de dessus) A l'instant initial le solide est en M_0 et on lui communique la vitesse v_0. Le fil s'enroule sur le cylindre et reste tendu au cours du mouvement.

1. Le fil est inextensible : quelle est la relation entre la longueur du fil non enroulé l(t) et l_0, $\alpha(t)$, R ?
2. Montrer que la norme de la vitesse reste constante au cours du mouvement.
   - En déduire l'angle α (t) en fonction de v_0, l_0, R et du temps.
   - Déterminer l'instant final où le fil est entierement enroulé autour du cylindre.

corrigé

les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

$\alpha(t) = \theta(t)$,angles dont les côtés sont perpendiculaires.

longueur de l'arc de cercle AB : $R\theta(t) = R\alpha(t)$

longueur du fil non enroulé : $l(t) = l_0 - R\alpha(t)$.

référentiel terrestre galiléen ; système : le point M est soumis à son poids **P**, l'action du support **R** (perpendiculaire au support et opposée au poids en absence de frottement), la tension **T** du fil.

La seconde loi de newton s'écrit : **P** + **R**+**T**=m**a**= -T$\mathbf{e}_\theta$

On utilise les coordonnées cylindriques (r,θ,z) avec z=0 aucune force ne s'applique suivant $\mathbf{e}_r$; la tension du fil modifie la direction du vecteur vitesse, tandis que la norme de la vitesse reste constante.

vecteur vitesse : $\mathbf{v} = d\mathbf{OM}/dt$ avec $\mathbf{OM} = R\,\mathbf{e}_r + l(t)\mathbf{e}_\theta$

$\mathbf{v} = R\,d\mathbf{e}_r/dt + dl(t)/dt\;\mathbf{e}_\theta + l(t)d\mathbf{e}_\theta/dt$

Dérivée des vecteurs $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$: les vecteurs $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ ne dépendent que de l'angle θ.

Ces vecteurs se décomposent dans une base fixe $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$ dans laquelle $d\mathbf{e}_x/dt$ et $d\mathbf{e}_y/dt$ sont nulles

$\mathbf{e}_r = \cos\theta\;\mathbf{e}_x + \sin\theta\;\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\;\mathbf{e}_x + \cos\theta\;\mathbf{e}_y$.

$d\mathbf{e}_r/dt = -\sin\theta\;\theta'\mathbf{e}_x + \cos\theta\;\theta'\;\mathbf{e}_y$ et $d\mathbf{e}_\theta/dt = -\cos\theta\;\theta'\;\mathbf{e}_x - \sin\theta\;\theta'\;\mathbf{e}_y$.

$$d\mathbf{e}_r/dt = \theta'\mathbf{e}_\theta \text{ et } d\mathbf{e}_\theta/dt = -\theta'\mathbf{e}_r$$

par suite : $\mathbf{v} = R\,d\theta/dt\;\mathbf{e}_\theta + dl(t)/dt\;\mathbf{e}_\theta - l(t)d\theta/dt\;\mathbf{e}_r$

or $l(t) = l_0 - R\alpha(t)$ d'où en dérivant : $dl(t)/dt = -Rd\alpha/dt = -Rd\theta/dt$

alors $\mathbf{v} = R\,d\theta/dt\;\mathbf{e}_\theta - Rd\theta/dt\;\mathbf{e}_\theta - l(t)d\theta/dt\;\mathbf{e}_r$ soit $\mathbf{v} = -\,l(t)d\theta/dt\;\mathbf{e}_r$

composante de la vitesse suivant $\mathbf{e}_r$: $v_r = -\,l(t)d\theta/dt = \text{constante} = -v_0$.

$l(t)d\theta/dt = l(t)d\alpha/dt = v_0$ soit $d\alpha/dt = v_0 / l(t)$

angle $\alpha(t)$:

$dl(t)/dt = -Rd\alpha/dt$ soit $dl(t)/dt = -R\,v_0 / l(t)$ ou bien $l(t)\,dl(t)/dt = -R\,v_0$.

par intégration : $\frac{1}{2}l^2(t) = -R\,v_0\,t + \text{constante}$

à $t=0$, $\frac{1}{2}l_0^2 = 0 + \text{constante}$ d'où : $l^2(t) = l_0^2 - 2R\,v_0\,t$

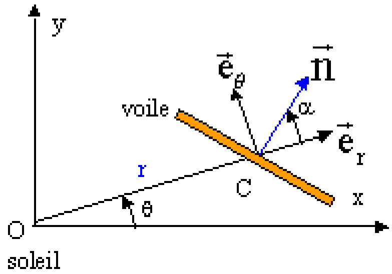
$l(t) = [l_0^2 - 2R\,v_0\,t]^{1/2} = l_0 - R\alpha(t)$ donne $\alpha(t) = R^{-1}[l_0 - [l_0^2 - 2R\,v_0\,t]^{1/2}]$

l'angle $\alpha(t)$ augmente avec le temps.

à l'instant final t_f, la longueur du fil non enroulé est nulle.

$l(t) = [l_0^2 - 2R\,v_0\,t_f]^{1/2} = 0$ soit $t_f = l_0^2/(2R\,v_0)$.

voile solaire



On étudie le mouvement d'une voile solaire de masse m, de surface S et de centre de masse C. Le mouvement est supposé plan dans un référentiel galiléen lié au soleil.

La voile est soumise à la force gravitationnelle $\mathbf{F}_S$ due au soleil $\mathbf{F}_S = -GmM_S/r^2\, \mathbf{e}_r$ (M_S est la masse du soleil) et à la force $\mathbf{F}$ due au rayonnement solaire. $\mathbf{F} = k \cos^2\alpha /r^2\, \mathbf{n}$ avec $k=PS/(2\pi c)$; P puissance totale du rayonnement solaire ; c : vitesse de la lumière dans le vide ; l'angle α est constant.

1. Montrer que l'accélération du centre de masse C est : $\mathbf{a} = A\mathbf{e}_r/r^2 + B\mathbf{e}_\theta/r^2$. Exprimer A et B en fonction de G, m, k, i.
   - Ecrire les équations différentielles en r et θ.
2. Les vecteurs vitesse $\mathbf{v}$ et $\mathbf{e}_r$ font un angle Φ constant.
   - Montrer que $d^2r/dt^2=r'' = b/r^2$ avec b un coefficient constant négatif.
   - Exprimer b en fonction de A, B et tan Φ.
   - Multiplier cette équation par r' et l'intégrer avec les conditions initiales suivantes : $r(0)=r_0$; $r'(0)=[-2b/r_0]^{½}$.
3. En déduire l'expression de r(t) sous la forme $r(t) = r_0 (1+ at)^\beta$.
   - Trouver la valeur numérique de β.
   - Exprimer a en fonction de b et r_0. Commenter le signe de a.
   - Déterminer θ (t) et l'équation de la trajectoire en prenant θ (0)=0.

corrigé

accélération :

référentiel galiléen lié au soleil ; système : le point C de masse m.

Ecrire le principe fondamental de la dynamique : $\mathbf{F}_S + \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

Exprimer les forces dans la base polaire :

$$m\mathbf{a} = -GmM_S/r^2\, \mathbf{e}_r + k \cos^2\alpha /r^2 \cos \alpha\, \mathbf{e}_r + +k \cos^2\alpha /r^2 \sin \mathbf{a}\mathbf{e}_\theta .$$

$$\mathbf{a} = [-GM_S/r^2 + k\, m^{-1} \cos^3\alpha /r^2]\mathbf{e}_r + k\, m^{-1} \cos^2\alpha \sin \alpha /r^2\, \mathbf{e}_\theta .$$

en conséquence : $A= -GM_S + k\, m^{-1} \cos^3\alpha$; $B= k\, m^{-1} \cos^2\alpha \sin \alpha$.

L'accélération s'écrit en coordonnées polaires :

$$\mathbf{a}_r = r''-r\theta'^2 \text{ et } \mathbf{a}_\theta = r\theta'' + 2r'\theta'$$

les équations différentielles demandées sont : $r''-r\theta'^2 = A/r^2$ (**1**) et $r\theta'' + 2r'\theta' = B/r^2$ (**2**).

à partir de la vitesse :

Les vecteurs vitesse **v** et $\mathbf{e}_r$ font un angle Φ constant.

$\mathbf{v}.\mathbf{e}_r = \mathbf{v}_r = r' = v\cos\Phi$ et $\mathbf{v}.\mathbf{e}_\theta = \mathbf{v}_\theta = r\,\theta' = v\sin\Phi$ d'où $\lambda = \tan\Phi = \mathbf{v}_r/\mathbf{v}_\theta = r'/(r\,\theta')$ (**3**).

trouver b : éliminer la variable θ dans les équations (**1**) et (**2**).

(**3**) s'écrit : $\theta' = r'/(r\lambda)$; dériver par rapport au temps ce quotient

$$\theta'' = 1/\lambda[r''/r - r'^2/r^2]$$

(**1**) s'écrit : $r'' - r\,r'^2/(r\lambda)^2 = A/r^2$ soit $r'' - r'^2/(r\lambda^2) = A/r^2$ (**1'**)

(**2**) s'écrit : $r/\lambda[r''/r - r'^2/r^2] + 2r'^2/(r\lambda) = B/r^2$ soit $1/\lambda\,(r'' + r'^2/r) = B/r^2$ (**2'**).

(**1'**) + λ(**2'**) donne : $A/r^2 + \lambda^{-1} B/r^2 = r'' - r'^2/(r\lambda^2) + (r''\lambda^{-2} + r'^2\lambda^{-2}/r) = r''(1+\lambda^{-2})$

$r'' = 1/r^2\,(A + \lambda^{-1}B)/(1+\lambda^{-2}) = b/r^2$ soit $b = (A + \lambda^{-1}B)/(1+\lambda^{-2})$.

intégration : multiplions chaque membre par r' :

$$r'r'' = b\,r'/r^2 \text{ avec } r'r'' = r'\,dr'/dt$$

primitive de $r'r''$: $\frac{1}{2}r'^2 + Cte$; primitive de r'/r^2 : $-1/r + cte$.

soit $-b/r = \frac{1}{2}r'^2 + Cte$

La constante se calcule à partir des conditions initiales : $r(0)=r_0$; $r'(0)=[-2b/r_0]^{1/2}$.

$-b/r_0 = \frac{1}{2}[-2b/r_0] + Cte$ soit $Cte = 0$.

en conséquence : $-b/r = \frac{1}{2}r'^2$ (**4**)

la solution de (**4**) est de la forme : $r(t) = r_0\,(1+at)^\beta$.

dériver par rapport au temps : $r' = \beta a r_0 (1+at)^{\beta-1}$.

repport dans (**4**) : $-br_0^{-1}(1+at)^{-\beta} = \frac{1}{2}\beta^2 a^2 r_0^2 (1+at)^{2(\beta-1)}$.

cette expression doit être vérifiée quelque soit β :

d'où : $-\beta = 2(\beta-1)$ et : $-br_0^{-1} = \frac{1}{2}\beta^2 a^2 r_0^2$

soit $\beta = 2/3$ et $a^2 = -2br_0^{-3}\beta^{-2}$.

le signe de a est positif car la distance r=OC augmente avec le temps : la voile solaire s'éloigne du soleil.

$\lambda = r' / (r\,\theta')$ (3) élever au carré : $\lambda^2 = r'^2 / (r\,\theta')^2$

et $-b/r = \frac{1}{2} r'^2$ (4) d'où $\lambda^2 = (-2b)\, r^{-3}\, \theta'^{-2}$

soit $\theta' = \lambda^{-1}(-2b)^{1/2}\, r^{-3/2}$ avec $r(t) = r_0\,(1+ at)^{\beta}$.

d'où $\theta' = \lambda^{-1}\,(-2b)^{1/2}\,[r_0(1+ at)^{\beta}]^{-3/2} = \lambda^{-1}\,(-2b)^{1/2}\, r_0^{-3/2}\,(1+ at)^{-3\beta/2} = d\theta/dt$

séparer les variables θ et t : $d\theta = \lambda^{-1}\,(-2b)^{1/2}\, r_0^{-3/2}\,(1+ at)^{-3\beta/2}\, dt$

remplacer β par sa valeur $\beta = 2/3$: $d\theta = \lambda^{-1}\,(-2b)^{1/2}\, r_0^{-3/2}\,(1+ at)^{-1}\, dt$

primitive de $(1+ at)^{-1}$: $a^{-1} \log (1+at) + cte$

or $a = (-2b)^{1/2} r_0^{-3/2} \beta^{-1}$ d'où :

$\theta = \lambda^{-1}\,(-2b)^{1/2}\, r_0^{-3/2}\, a^{-1} \log (1+at) + cte = \lambda^{-1}\beta \log (1+at) + cte$

or à t=0 , $\theta_0 = 0$: la constante d'intégration est donc nulle

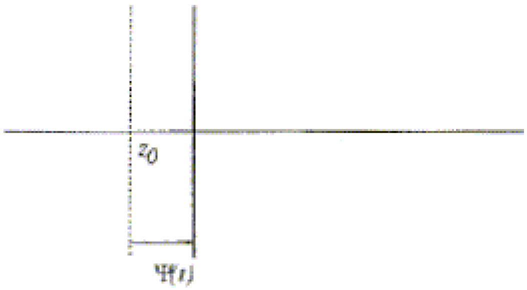
$\theta = \lambda^{-1}\beta \log (1+at)$ soit $\lambda^{-1} \log (1+at)^{\beta}$ avec $r(t) = r_0\,(1+ at)^{\beta}$.

$\theta = \lambda^{-1} \log (r(t) / r_0)$ soit $r(t) = r_0\, e^{(\theta\,\lambda)}$. spirale logarithmique

les ultrasons : aspect énergétique ; densité d'énergie sonore, atténuation

concours physique agrégation 2008.

Une onde sonore transporte de l'énergie.



On place dans le milieu un piston sans masse, d'extension transversale suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets de bord, placé perpendiculairement à la direction de propagation d'une onde sonore, à l'abscisse $z = z_0$. Au passage de l'onde il se déplace de $\Psi(t)$.

Le principe fondamental de la dynamique indique qu'un piston sans masse n'est soumis à aucune force de la part du milieu extérieur.

Le principe de l'action et de la réaction indique que le piston n'exerce, en retour, aucune action sur le milieu : le piston ne perturbe donc pas l'onde.

Pour décrire la déformation du milieu, on isole une tranche d'épaisseur infinitésimale **dz** et on écrit que cette tranche est déplacée de $\boldsymbol{\xi(z, t)}$.

$$\Psi(t) = \boldsymbol{\xi(z_0, t)}.$$

On fait le vide à gauche du piston et un opérateur maintient le piston en position. L'opérateur imprime alors au piston un mouvement caractérisé par le même déplacement $\Psi(t)$ que dans la situation précédente.

- A droite du piston, rien n'a changé par rapport à la situation précédente : l'onde qui s'y propage est identique.

- A gauche du piston, une onde sonore ne peut pas se propager dans le vide.

<u>Force F(t) exercée par l'opérateur, par unité de surface, pour imposer le déplacement</u> $\Psi(t)$:

Le piston étant sans masse, la force exercée par l'opérateur compense la force pressante exercée par le milieu.

F(t) = p + $\pi(z_0,t)$.

Compressibilité adiabatique χ du milieu (l'indice S signifie " à entropie constante").

La tranche d'aire Σ(épaisseur initiale dz et volume initial Σdz), d'épaisseur finale dz+dξ, de volume final Σ(dz + dξ) subit une variation de pression dp = π :

$$\chi = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_S \Rightarrow \delta p = -\frac{1}{\chi}\frac{1}{V}\delta V\,;\ \pi = -\frac{1}{\chi}\frac{1}{\Sigma(dz + d\xi)}(\Sigma(dz + d\xi) - \Sigma dz)$$

$$\pi = -\frac{1}{\chi}\frac{1}{dz + d\xi}d\xi = -\frac{1}{\chi}\frac{\frac{d\xi}{dz}}{1 + \frac{d\xi}{dz}} \Rightarrow \boxed{\pi(z_0,t) = -\frac{1}{\chi}\left.\frac{d\xi}{dz}\right|_{z_0}}$$

On peut négliger dξ /dz devant 1 dans la mesure où le volume de la tranche varie peu et dans la mesure où la variation de pression π est petite devant p_0.

On suppose que le déplacement du piston est sinusoïdal de pulsation Ω : $\Psi(t) = \Psi_0 \cos(\Omega t)$.

Puissance mécanique moyenne P dépensée par l'opérateur, par unité de surface pendant une période de l'onde :

Puissance instantanée P(t) = $\Psi'(t)$. F(t)

Or $\Psi(t) = \boldsymbol{\xi(z_0, t)}$, soit $\boldsymbol{\xi(z, t)} = \Psi_0 \cos[\Omega (t - (z-z_0) / c)]$.

$$\left.\frac{\partial \xi}{\partial z}\right|_{z_0} = -\frac{\Omega}{c}(-\psi_0 \sin(\Omega t)) = \frac{\Omega}{c}\psi_0 \sin(\Omega t) \Rightarrow \pi(t) = p - \frac{1}{\chi}\frac{\Omega}{c}\psi_0 \sin(\Omega t)$$

$$\psi'(z_0, t) = -\Omega\psi_0 \sin(\Omega t) \text{ d'où: } P(t) = -\Omega\psi_0 \sin(\Omega t)\left(p - \frac{1}{\chi}\frac{\Omega}{c}\psi_0 \sin(\Omega t)\right)$$

$$< P(t) > = -p\Omega\psi_0 < \sin(\Omega t) > + \frac{1}{\chi}\frac{\Omega^2}{c}\psi_0^2 < \sin^2(\Omega t) > = 0 + \frac{1}{2\chi}\frac{\Omega^2}{c}\psi_0^2 = \frac{1}{2\chi}\frac{\Omega^2}{c}\psi_0^2$$

$$\text{Or } \rho_0\chi c^2 = 1 \text{ d'où : } \boxed{< P(t) > = \frac{1}{2}\Omega^2 c\rho_0\psi_0^2}$$

Puissance moyenne déployée par l'opérateur pour imprimer un mouvement quelconque au piston :

On suppose que le déplacement est la somme de deux fonctions sinusoïdales de pulsation Ω_1 et Ω_2.

Déplacement : $\xi_1 + \xi_2$; surpression $\pi_1 + \pi_2$; la valeur moyenne d'un sinus étant nulle, $<P> = <P_1>$

$+<P_2>$.

Tout mouvement peut être décomposé en somme de fonctions sinus de pulsation ψ_n par la transformée de Fourier.

$$\text{Or } \rho_0\chi c^2 = 1 \text{ d'où : } <P(t)> = \frac{1}{2}\Omega^2 c\rho_0\psi_0^2 = c\rho_0 <\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2>$$

$$<P> = c\rho_0\int <\left(\frac{\partial\psi_\Omega}{\partial t}\right)^2> d\Omega = \boxed{c\rho_0 \boxed{<\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2>}}$$

Vitesse quadratique moyenne

-

Densité d'énergie sonore.

Considérons un élément de volume dV du milieu d'extension petite devant la longueur d'onde de la perturbation sonore. Lors du passage de l'onde, cet élément de volume est comprimé (ou déprimé) et mis en mouvement.

Masse dm de set élément : $dm = \rho_0\, dV$. On note v sa vitesse.

Energie cinétique de cet élément : $dE_c = ½dm\, v^2 = ½\rho_0\, v^2\, dV$.

Energie potentielle de compression ou travail reçu lorsque la pression varie de p à p $+\pi$:

Travail élémentaire : $d^2W = -pd^2V$.

Dans le cas d'une transformation adiabatique : $d^2V = \chi\, dp\, dV$.

En conséquence : $d^2W = -\chi\, p\, dp\, dV$ puis intégrer de p à $p+\pi$:

$$dE_p = \chi\int_p^{p+\pi} p\, dp\, dV = \frac{\chi}{2}\left[(p+\pi)^2 - p^2\right]dV = \boxed{\chi(\pi p + ½\pi^2)dV}$$

L'énergie interne moyenne augmente lors du passage de l'onde de : (en tenant compte du fait que $<\pi>=0$)

$$<dE_c> + <dE_p> = ½\rho_0 <v^2> dV + \chi(<\pi> p + ½ <\pi^2>)dV$$
$$= \boxed{½\rho_0 <v^2> dV + ½\chi <\pi^2> dV}$$

Pour une onde sinusoïdale : π (z, t) = -1/χ dξ/dz avec **ξ(z, t) = Ψ_0** cos [Ω (t- (z-z_0) / c)].

dξ/dz = $\Psi_0 \Omega$ / c sin [Ω (t- (z-z_0) / c)].

π (z, t) = -$\Psi_0\Omega$ / (χ c) sin [Ω (t- (z-z_0) / c)]

vitesse **v** (z, t)= dξ/dt = –$\Psi_0\Omega$ sin [Ω (t- (z-z_0) / c)] = **π (z, t) χ c**.

Soit en valeur quadratique moyenne : <**v^2(z, t)**> = < **π^2 (z, t)** > **χ^2 c^2** .

Densité d'énergie sonore : <v^2(z, t)> / (2χc^2) + ½ρ_0 <v^2(z, t)> .

Or ρ_0**χ c^2** = 1 d'où la densité d'énergie sonore : **ρ_0 <v^2(z, t)>** =**χ**< **π^2 (z, t)** >.

Atténuation du son.

Lors du passage de l'onde acoustique une tranche du milieu subit une alternance de phases de compression et de détente. Cette alternance conduit à une variation alternative de la température de la tranche.

On se place dans le cadre de l'approximation acoustique : le volume de la tranche varie peu et la variation de pression π est petite devant p_0. On pourra remplacer les variations de pression et de température par leurs différentielles.

Que devient l'énergie d'une onde lors de son atténuation ?

L'énergie mécanique est convertie en énergie interne : la température du milieu va donc augmenter.

Dans un gaz parfait la température dépend de la pression :

équation des gaz parfaits : pV = nRT

Pour une transformation adiabatique :

$$pV^\gamma = \text{Cste} \; ; \; V = \frac{nRT}{p} \text{ d'où : } p\left(\frac{nRT}{p}\right)^\gamma = p^{1-\gamma}T^\gamma = p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T = \text{Cste}$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{dp}{p} = 0 \; ; \; \frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\pi}{p} \; ; \; \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\pi}{p} \Rightarrow \boxed{T = T_0\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{\pi}{p}\right)}$$

si la variation de pression π est positive, la température s'élève.

Atténuation de l'onde :

La conduction de la chaleur est supposée régie par la loi de Fourier : (D est le coefficient de diffusion thermique).

Cette équation décrit un phénomène irréversible ; la chaleur va naturellement du chaud vers le froid.

$$\boxed{j_Q = -D\frac{\partial T}{\partial z}}$$

Prenons le cas d'une onde sinusoïdale, de longueur d'onde λ. A un instant donné, la température est alors une fonction sinusoïdale de l'abscisse, de ptériode spatiale λ : $T(z) = T_0 + T_1 \cos(2\pi z / \lambda + \Phi)$.

Expression du courant thermique associé :

$$j_Q = -D\frac{\partial T}{\partial z} = -DT_1\left(\frac{-2\pi}{\lambda}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t + \Phi\right) = \boxed{DT_1\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}t + \Phi\right)}$$

Le courant thermique est d'autant plus grand que la longueur d'onde λ est plus petite (fréquence élevée).

Les ondes de haute fréquence seront atténuées plus rapidement.

Equation différentielle ; méthode d'Euler.

d'après bac Antilles septembre 2005

Une équation au service des sciences physiques

L'équation différentielle $dx/dt + \alpha x = \beta$ (1), (α et β étant des grandeurs constantes), permet de décrire un grand nombre de phénomènes physiques variables au cours du temps: intensité, tension, vitesse, grandeur radioactive.

solutions

Equation différentielle

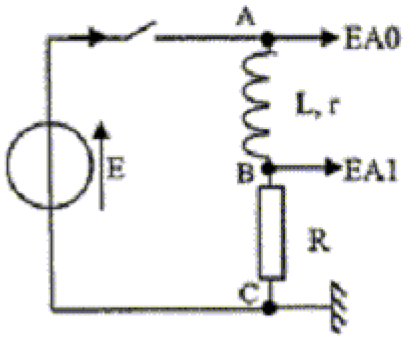
$\boxed{\frac{dx}{dt} + \alpha x = \beta \text{ avec } \alpha, \beta \text{ constants}}$

$\boxed{x = \frac{\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$ $\boxed{\text{si } \beta \neq 0}$

$\boxed{x = X_0 e^{-\alpha t} \text{ avec } X_0 \text{ constante}}$ $\boxed{\text{si } \beta = 0}$

A. Dans le domaine des systèmes électriques :

Cette première partie tend à montrer la validité du modèle pour un circuit électrique mettant en jeu une bobine d'inductance L et de résistance r = 11,8 ohms ,(donc non négligeable), et un conducteur ohmique de résistance R = 12 ohms, alimenté par un générateur délivrant une tension continue E = 6,1 V.



expression littérale de la constante de temps τ en fonction des paramètres du circuit : $\tau = L/(R+r)$

loi d'additivité des tensions $E = u_{AB} + u_{BC}$.

tension aux bornes de la bobine : $u_{AB} = L di/dt + r\,i$

tension aux bornes du résistor : $u_{BC} = Ri$

$E = L di/dt + r\,i + Ri$; $di/dt + (R+r)/L\ i = E/L$ équation différentielle vérifiée par l'intensité.

en posant $\alpha = (R+r)/L$ et $\beta = E/L$ on retrouve le modèle mathématique

équation horaire littérale i(t) d'après le modèle mathématique : $i(t) = \beta/\alpha(1-\exp(-\alpha t)$

$i(t) = E/(R+r)\ (1-\exp(-(R+r)t/L)$

dériver par rapport au temps : $di/dt = E/(R+r)\ \exp(-(R+r)t/L)$

repport dans l'équation différentielle :

$E/(R+r)\ \exp(-(R+r)t/L) + E/L(1-\exp(-(R+r)t/L) = E/L$

La solution proposée valide bien l'équation différentielle.

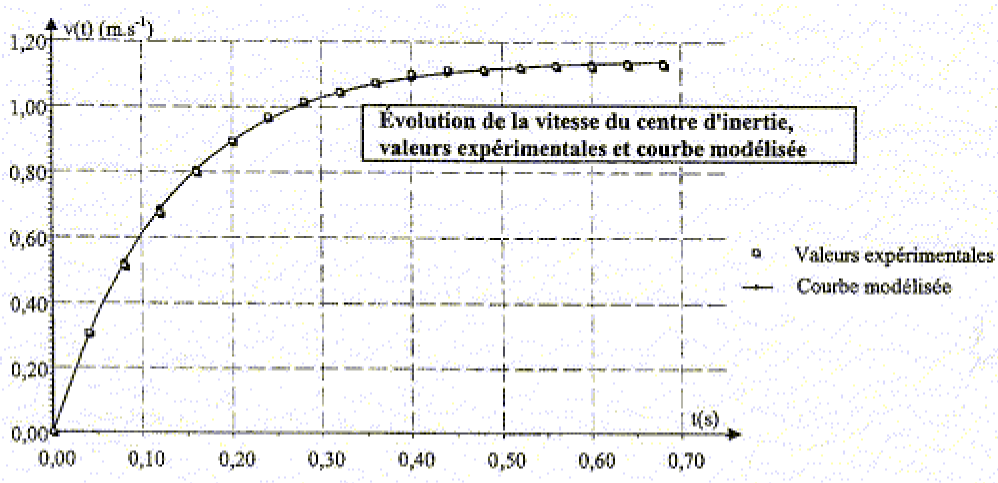
Sachant que $\tau = L/(R+r)$, cette équation horaire peut s'écrire $i(t) = E/(R+r)\,(1-\exp(-t/\tau))$.

On appellera I l'intensité en régime permanent : au bout d'un temps suffisamment long le régime permanent est atteint et $\exp(-t/\tau)$ tend vers zéro;

d'où $I= E/(R+r)$.

dans le domaine mécanique :

L'étude de la chute d'une bille d'acier, de masse m, dans un fluide de masse volumique ρ_{fluide} a été exploitée grâce à un logiciel.



L'équation mathématique associée à la courbe modélisée, vérifie $v(t) = 1,14(1-\exp(-t/0,132))$ (3), avec v(t) en $m.s^{-1}$ et t en s. Cette équation est identifiable à la solution du modèle mathématique correspondant à β différent de zéro.

$v(t) = 1,14(1-\exp(-t/0,132))$ identifié à : $v(t) = \beta/\alpha\,(1-\exp(-\alpha t))$

d'où $\alpha= 1/0,132 = 7,58\ s^{-1}$; $\beta/\alpha = 1,14$ soit $\beta = 1,14\ \alpha= 1,14/0,132=8,64\ m\ s^{-2}$.

$(1-\exp(-t/0,132))$ est sans dimension ; le second membre doit être homogène à une vitesse, en conséquence β/α est homogène à une vitesse, exprimée dans ce cas en $m\ s^{-1}$.

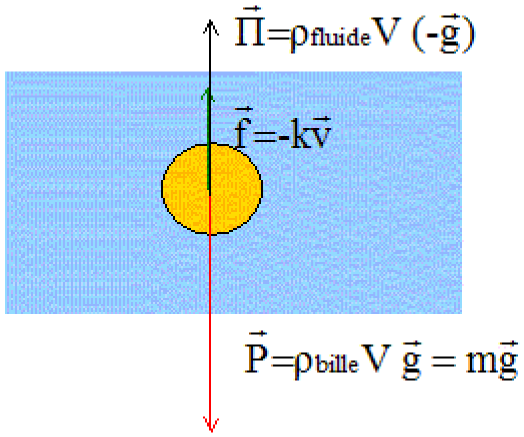
L'équation différentielle ayant l'équation (3) pour solution vérifie l'écriture : $dv/dt + \alpha\, v=\beta$ soit $dv/dt + 7,58\ v = 8,64$

Forces appliquées à la bille :

poids, vertical vers le bas, valeur mg : $V\rho_{bille}g$

poussée d'Archimède, verticale vers le haut, valeur $\Pi= V\rho_{fluide}g$

force de frottement fluide, colinéaire et de sens contraire à la vitesse, valeur f= kv, (k=constante)



$$\vec{f}+\vec{P}+\vec{\Pi}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

En utilisant un axe vertical orienté vers le bas, la seconde loi de Newton s'écrit :

$mdv/dt = -kv + mg-V\rho_{fluide}\, g$; $mdv/dt + kv = mg-V\rho_{fluide}\, g$; $mdv/dt + kv = g(m-V\rho_{fluide})$

$dv/dt + k/m\ v = g(1-V\rho_{fluide}/m)$.

expression littérale des coefficients α et β de l'équation :

$\alpha = k/m$ et $\beta = g(1-V\rho_{fluide}/m)$.

valeur du coefficient β si la poussée d'Archimède était nulle : $\beta = g$

Or l'équation différentielle ayant l'équation (3) pour solution vérifie l'écriture dv/dt + 7,58 v = 8,64 dans laquelle β = 8,64, valeur différente de 9,81.

La poussée d'Archimède doit donc être prise en compte.

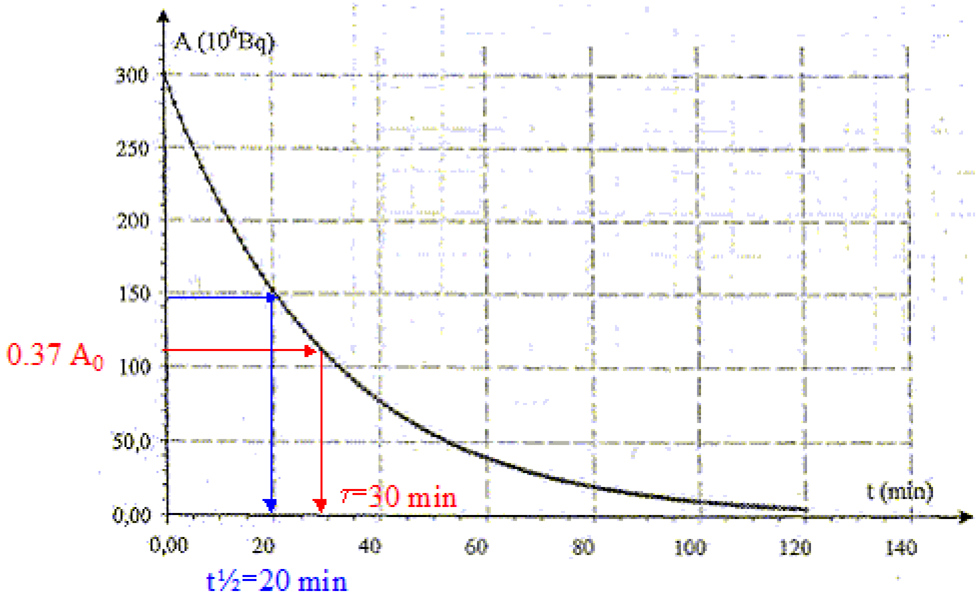
Dans le domaine de la radioactivité :

Le ^{11}C est un traceur radioactif utilisé pour suivre en particulier l'évolution de la maladie de Parkinson. Le traceur radioactif se fixe sur le cerveau. L'activité moyenne résiduelle évolue au cours du temps selon la loi $A(t) = A_0\exp(-\lambda t)$.

analyse dimensionnelle : dans l'expression "$\exp(-\lambda t)$" , λt est sans dimension, en conséquence λ est homogène à l'inverse d'un temps $[\lambda]=T^{-1}$.

relation liant λ à la constante de temps τ du radio isotope : $\lambda= 1 / \tau$.

Loi d'évolution A(t) en fonction de τ : $A(t) = A_0 \exp(-t/\tau)$.



constante de temps τ : à $t=\tau$, $A(\tau)= A_0 \exp(-1) = 0,37\ A_0$.

demi vie t½ : durée au bout de laquelle l'activité A(t) est égale à la moitié de l'activité initiale A_0.

valeur de $\lambda = 1/\tau = 1/\ 30 = 3,4\ 10^{-2}\ min^{-1}$.

$A(t) = A_0\exp(-\lambda t)$; $dA(t)/dt = -A_0\lambda\exp(-\lambda t)$; $dA(t)/dt = -\lambda A(t)$

or $$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t$$

relation liant $A(t+\Delta t)$, $A(t)$, λ et Δt : $A(t+\Delta t) = A(t) -\lambda A(t)\ \Delta t$; $A(t+\Delta t) = A(t)(1-\lambda\Delta t)$.

La méthode d'Euler impose de se fixer un pas Δt pour effectuer les calculs. Ce pas doit être de l'ordre du dixième de la constante de temps, c'est à dire de l'ordre de 3 min : la valeur $\Delta t = 15$ min n'est pas correctement adaptée à l'étude.
On choisit de faire les calculs avec un pas $\Delta t = 5$ min.

$A_{Euler}(5)= A_0(1-3,4\ 10^{-2}*5)=0,83\ A_0= 0,83*3,00\ 10^8 = 2,4910^8$ Bq.

$A_{théorique}(10)= A_0\exp(-10\lambda)=3,00\ 10^8 \exp(-3,4*0,1)=2,14\ 10^8$ Bq.

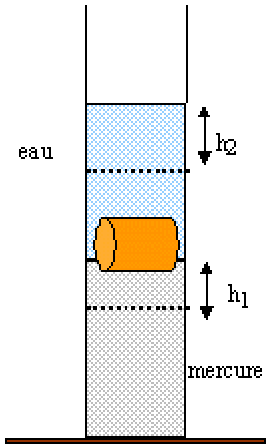
date (min)	A_{Euler} (Bq)	$A_{théorique}$ (Bq)
0	$3,00\ 10^8$	$3,00\ 10^8$
5	$2,4910^8$	$2,53\ 10^8$
10	$2,07\ 10^8$	$2,14\ 10^8$
15	$1,72\ 10^8$	$1,80\ 10^8$

On considérera que le choix de Δt est pertinent si l'écart relatif entre A_{Euler} et $A_{théorique}$ est inférieur à 5%.

Le plus grand écart est : 0,08/100 / 1,8 = 4,4%

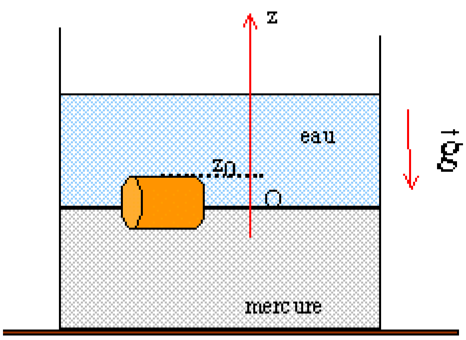
La valeur proposée pour Δt est donc correctement adaptée.

un objet flotte à la surface de séparation de 2 liquides



Une éprouvette graduée (section S) contient du mercure (ρ_1 = 13600 kg/m^3) et de l'eau (ρ_2= 1000 kg/m^3). Un objet cylindrique (hauteur h, section s) flotte à la surface de séparation des deux liquides. Le niveau du mercure s'élève de h_1 = 80 divisions et le niveau de l'eau s'élève de h_2 = 160 divisions.

1. Calculer la masse volumique ρ de ce solide homogène.
2. Même expérience en utilisant un récipient suffisamment large afin que les niveaux des liquides ne change pratiquement pas lors de l'introduction du cylindre. Un dispositif mantient ce solide à la surface de séparation des liquides. Quelle est la hauteur d'immersion dans chaque liquide ?



3. Le cylindre est légerement écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui même. Quelle est

la période des oscillations ?

corrigé

masse volumique du solide homogène :

Le volume du cylindre V (m^3) est égal au volume de liquide déplacé.

On note u la longueur d'une graduation et S la section de l'éprouvette (u en mètre et S en m²)

$V = u\, h_2\, S$

volume immergé dans le mercure : $V_1 = u\, h_1\, S$

volume immergé dans l'eau : $V_2 = u\,(h_2 - h_1)\, S$

le solide est en équilibre sous l'action de la Poussée d'Archimède et du poids du solide: la poussée d'Archimède et le poids du cylindre ont même norme.

Poids : $V\rho\, g = u\, h_2\, S\rho\, g$

Poussée exercée par le mercure : $V_1\, \rho_1\, g = u\, h_1\, S\, \rho_1\, g$

Poussée exercée par l'eau : $V_2\, \rho_2\, g = u\,(h_2 - h_1)\, S\, \rho_2\, g$

$u\, h_2\, S\rho\, g = u\, h_1\, S\, \rho_1\, g + u\,(h_2 - h_1)\, S\, \rho_2\, g$

simplification par u g S : $h_2\, \rho = h_1\, \rho_1 + (h_2 - h_1)\, \rho_2$.

$\rho = 1 / h_2\, [h_1\, \rho_1 + (h_2 - h_1)\, \rho_2]$

calculs : $\rho = 1/160\, [80*13600+80*1000] =$ 7 300 kg/m^3.

On choisit un axe vertical orienté vers le haut ; l'origine est située à la surface de séparation des liquides.

z_0 est l'ordonnée de la partie supérieure du cylindre.

Poids du cylindre : $s\, h\, \rho\, g$

Poussée exercée par le mercure : $s\,(h - z_0)\, \rho_1\, g$

Poussée exercée par l'eau : $s\, z_0\, \rho_2\, g$

$s\, h\, \rho\, g = s\,(h - z_0)\, \rho_1\, g + s\, z_0\, \rho_2\, g$

simplification par g s : $h\,\rho = (h-z_0)\,\rho_1 + z_0\,\rho_2$

$$h\,\rho = h\,\rho_1 - \rho_1 z_0 + z_0\,\rho_2$$

$z_0 = h\,(\rho_1 - \rho)\,/\,(\rho_2 - \rho_1)$ dans l'eau.

$h - z_0 = h(\rho - \rho_2)\,/\,(\rho_2 - \rho_1)$ dans le mercure.

On note z la position de la partie supérieure du cylindre, à une date t, par rapport à la position d'équilibre.

les lettres écrites en **bleu** et en **gras** sont associées à des grandeurs vectorielles.

poids $\mathbf{P} = s\,h\,\rho\,\mathbf{g}$.

poussée : $\mathbf{F} = s\,(h-z_0-z)\,\rho_1\,(-\mathbf{g}) + s\,(z_0+z)\,\rho_2\,(-\mathbf{g})$.

Dans un référentiel galiléen lié au récipient, la 2ème moi de Newton s'écrit :

$$s\,(h-z_0-z)\,\rho_1\,(-\mathbf{g}) + s\,(z_0+z)\,\rho_2\,(-\mathbf{g}) + s\,h\,\rho\,\mathbf{g} = m\,\mathbf{a}. \quad (1)$$

or à la position d'équilibre (z = 0)

$$s\,(h-z_0)\,\rho_1\,(-\mathbf{g}) + s\,(z_0)\,\rho_2\,(-\mathbf{g}) + s\,h\,\rho\,\mathbf{g} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

soustraire (2) de (1) :

$$s\,z\,\rho_1\,(-\mathbf{g}) - s\,z\,\rho_2\,(-\mathbf{g}) = m\,\mathbf{a}.$$

masse du cylindre : $m = sh\rho$.

$$s\,z\,\rho_1\,(-\mathbf{g}) - s\,z\,\rho_2\,(-\mathbf{g}) = sh\rho\,\mathbf{a}.$$

$$\rho_1 z\,(-\mathbf{g}) - z\,\rho_2\,(-\mathbf{g}) = \rho\,\mathbf{a}.$$

projection sur un axe vertical :

$$\rho\,z'' + (\rho_1 - \rho_2)\,g\,z = 0$$

$$z'' + (\rho_1 - \rho_2)\,g/\rho\,z = 0$$

du type $z'' + \omega^2 z = 0$

$\rho_1 > \rho_2$ le mouvement est oscillatoire périodique

$$\omega^2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho h}\,g \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{(\rho_1 - \rho_2)g}}}$$

mécanique des fluides incompressibles sup

révisions lycée (voir le Quiz)

cours 1 débit- vitesse- Bernoulli

Parmi les fluides, on distingue les liquides (incompressibles) et les gaz (compressibles).

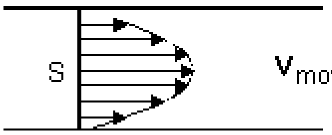
---

débit volumique q_V et débit massique q_m :

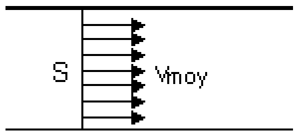
$$q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (m^3.s^{-1}) \qquad q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (kg.s^{-1}) \qquad q_m = \rho . q_V \quad (kgm^{-3})$$

---

vitesse (ms^{-1})et débit (m^3s^{-1})



$$v_{moy} = \frac{q_V}{S}$$



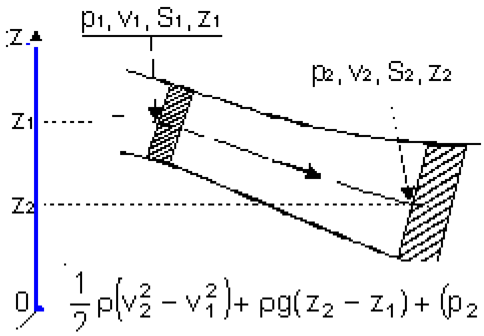
La vitesse moyenne est d'autant plus grande que la section est faible.

Le débit reste constant (liquide , gaz si température constante et vitesse faible)

Bernoulli (dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide parfait)

$$\text{Bernoulli } p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte \text{ (fluide parfait)}$$

p: pascal **ρ**: kgm^{-3} **z** altitude (m) **v**: vitesse (ms^{-1}) **g=9,8** ms^{-2}



$$\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g\left(z_2 - z_1\right) + \left(p_2 - p_1\right) = 0$$

écoulement (1)→(2) sans échange de travail

écoulement (1)→(2) avec échange d'énergie

$$\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g\left(z_2 - z_1\right) + \left(p_2 - p_1\right) = \frac{P}{q_v} \text{ watt}$$

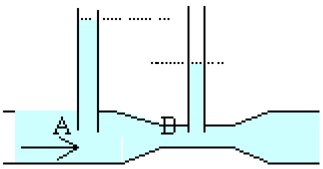
puissance P échangée

P >0 si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe)

P <0 si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine)

---

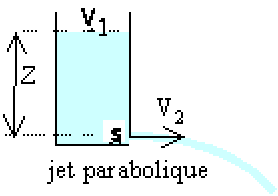
applications



Phénomène de Venturi

Un conduit de section S_A subit un étranglement en B où sa section est S_B. La vitesse dufluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue.

Théorème de Torricelli



réservoir muni d'un orifice de section s à sa base, $s^2 << S^2$

(S section de la surface libre)

la pression à la surface du liquide est égale à celle de sortie (on néglige la variation de pression liée à l'atmosphère terrestre) et le débit se conserve [$sV_2 = SV_1$].

$$V_2^2 = 2g\,z$$

cours 2

viscosité

La viscosité η est due aux frottements ; ces derniers s'opposent au glissement des couches fluides les unes sur les autres. L'unité de viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa s) ou Poiseuille (Pl) . La viscosité des liquides diminue si la température augmente.

pertes de charge

Un fluide réel, en mouvement, subit des pertes d'énergie à cause des frottements sur les parois des canalisations.

écoulements laminaire ou turbulent.

Le nombre de Reynolds (sans unité) permet de déterminer si un écoulement est laminaire ou turbulent

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta}$$

ρ : masse volumique du fluide (kgm^{-3}) ; v : vitesse moyenne(ms^{-1}),

D : diamètre de la conduite (m)

η = viscosité dynamique du fluide (Pa s)

Re < 2000 écoulement laminaire

Re > 3000 écoulement turbulent

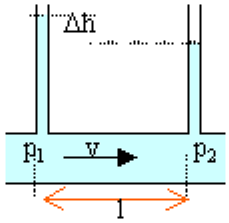
Bernoulli appliqué à un fluide réel avec pertes de charge

$$\frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \rho g(z_2 - z_1) + (p_2 - p_1) = -\Delta p$$

Δp(pascals) représente les pertes de charge entre (1) et (2)

---

débit si écoulement laminaire : loi de Poiseuille

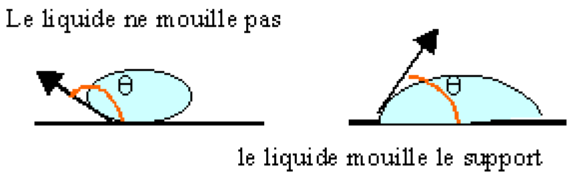


$$q_v = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta \cdot \ell} \cdot (p_1 - p_2)$$

q_v: débit-volumique ($m^3 \cdot s^{-1}$),
r: rayon intérieur (m),
η: viscosité dynamique du fluide (Pa·s),
ℓ : longueur entre les points (1) et (2) (m),
p_1 et p_2 : pression du fluide aux points (1) et (2) (Pa).

---

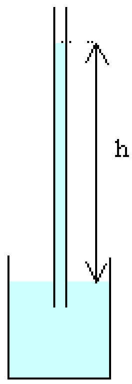
cours 3 capillarité



On retrouve cet angle à la surface libre d'un liquide près des bords du récipient ; il provoque la formation d'un ménisque dans les tubes.

Les agents tensioactifs abaissent la valeur de la tension superficielle des liquides dans lesquels ils sont ajoutés pour les rendre mouillants, détergents, émulsifiants.

loi de Jurin

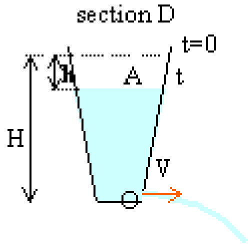


$$h = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \cos\theta}{r \cdot \rho \cdot g}$$

r(m) rayon intérieur du tube
ρ :kgm^{-3} masse volumique du liquide
g : intensité de la pesanteur
γ Nm^{-1} tension superficielle du liquide
θ : angle de raccordement liquide/solide

Un tube capillaire est un tube de rayon intérieur faible. Plongé un tube capillaire, ouvert aux 2 extrémités, dans un liquide, provoque la montée du liquide mouillant ou la descente du liquide non mouillant d'une hauteur h.

exercice 1



vidange d'un réservoir, la clepsydre

Le récipient est à symétrie de révolution autour d'un axe vertical

1. Quelle est la vitesse de l'eau sortant due l'orifice de section s?
2. Quelle forme faut il donner au récipient pour que H-h soit une fonction affine du temps ?

---

corrigé

Th de Bernoulli entre la surface A et l'orifice de sortie O: le fluide est à la pression atmosphérique en A et en O. La vitesse en A est négligeable devant la vitesse V en O si S>>s

$$\rho g(H-h) = 0{,}5\ \rho\ V^2 \text{ d'où } V^2=2g(H-h)$$

---

conservation du débit volumique entre un point de la surface et l'orifice dh/ dt étant la vitesse en A

$$sv = S\frac{dh}{dt} \text{ ou } \frac{dh}{dt} = \frac{s}{S}\sqrt{2g(H-h)}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{H-h}} = \frac{s}{S}\sqrt{2g}dt$$

par intégration :

$$h(t) = H - \left[\sqrt{H} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right]^2$$

---

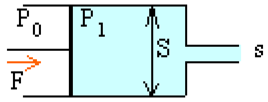
forme du récipient

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2g(H-h)} \text{ est constant}$$

$$D = Cte(H-h)^{\frac{1}{4}}$$

exercice 2

seringue



Le piston se déplace sans frottement ; le liquide est supposé parfait de masse volumique ρ.

1. Exprimer le débit volumique a en fonction de la vitesse d'écoulement v dans l'aiguille et V dans le corps de la seringue
2. Exprimer la force que l'opérateur doit exercer sur le piston en fonction du débit a et des données.

corrigé

conservation du débit volumique entre le corps de la seringue et l'aiguille

$$vs=VS$$

relation de Bernoulli entre ces mêmes points

$$P_1 + 0,5\,\rho V^2 = P_0 + 0,5\,\rho v^2$$

$$P_1 - P_0 = 0,5\,\rho(V^2 - v^2)$$

Ecrire que le piston est à l'équilibre en régime permanent (pas d'accélération)

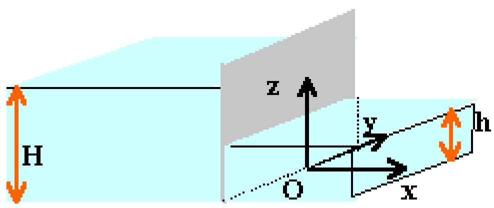
$$F + P_0\,S - P_1\,S = 0$$

$$F = (P_1 - P_0)S$$

$$F = 0,5\,\rho S\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2}\right)a^2$$

forces de pression sur la porte d'une écluse

exercice 3



Une porte d'écluse de largeur L retient de l'eau liquide supposé incompressible de masse volumique ρ.

1. Calculer à l'équilibre la résultante et le moment résultant (par rapport à O) des forces de pression s'exerçant sur cette porte.
2. Montrer que ce torseur est équivalent à une force appliquée en un point C, appelé centre de pression que l'on déterminera.

H=6 m ; h=2 m ; L=4 m ;

corrigé

forces de pression

On note p_0 la pression de l'air ambiant.

pression dans le liquide à une altitude z

à gauche : $p = p_0 + \rho\, g\, (H-z)$

à droite : $p = p_0 + \rho\, g\, (h-z)$

force pressante sur une surface de largeur L de hauteur dz située à l'altitude z

liquide à gauche : $p\, Ldz = (p_0 + \rho\, g\, (H-z))Ldz$ dirigée à droite

intégrer entre 0 et H

liquide à droite : $p\, Ldz = (p_0 + \rho\, g\, (h-z))Ldz$ dirigée à gauche

intégrer entre 0 et h

force pressante due à l'air (partie droite)

$p_0 Ldz$ intégrer entre h et H

résultante des forces de pression :

$F = 0{,}5\, \rho\, g\, L\, (H^2-h^2)$ dirigée suivant Ox

moment résultant par papport à O

partie gauche

$$\vec{M} = \int_0^H \vec{OM} \wedge p dS\, \vec{i} = \left(p_0 \frac{H^2}{2} + \frac{\rho g H^3}{6}\right) L\, \vec{j}$$

partie droite

$$\vec{M} = \int_0^h z\vec{k} \wedge (p_0 + \rho g (h-z)) L\, dz(-\vec{i}) + \int_h^H z\vec{k} \wedge p_0 L\, dz(-\vec{i}) = (p_0 \frac{h^2}{2} + \frac{\rho g h^3}{6}) L(-\vec{j})$$

$$\vec{M} == \left(\frac{\rho g L}{6}(H^3 - h^3)\right)\vec{j}$$

On cherche à mettre ce moment sous la forme $\vec{M} = \vec{OC} \wedge \vec{F}$

les vecteurs moment et force ayant les expressions ci dessus.

$$\vec{OC} = \frac{H^2 + hH + h^2}{3(H+h)}\vec{z}$$

applications numériques : F = 2,3 10^5 N et OC = 2,17 m

d'après concours interne d'ingénieur territorial 2005 Mécanique, électricité, énergétique

Mécanique (4 pts).

On peut lire dans un documentation relative à une rame de TGV que celle-ci a une masse M=380 t à vide et 425 t en charge, une longueur L=200 m, une vitesse de croisière en palier (mouvement uniforme horizontal) v= 300 km/h ; alimentation 25kV-50Hz ; capacité : 516 places. On considère que le train roule sur un sol horizontal ; g = 9,8 m/s².

1. Sachant que le train met 7 minutes pour passer de l'arrêt à sa vitesse de croisière, quelle est son accélération supposée constante, pendant cette phase ?
2. Ce train de masse 420 t, passe sur un pont de 570 m de long alors qu'il roule à 300 km/h. Or ce pont fait un bruit caractéristique dès qu'une partie du train roule sur lui. Combien de temps dure ce bruit ?
3. Toujours à la même vitesse, ce train aborde une courbe dont le rayon de courbure est de 6 km. Comme les passagers ne sont pas attirés vers les parois latérales des wagons pendant ce tournant, on demande de quel angle la voie est relevée.
4. La puissance électrique consommée étant de 2000 kW en palier, les pertes thermiques et mécaniques dans la motrices étant estimées à 10 % de la puissance absorbée, en déduire l'intensité des forces de frottements opposées à l'avancement du train lorsqu'il roule à 300 km/h en palier.

corrigé

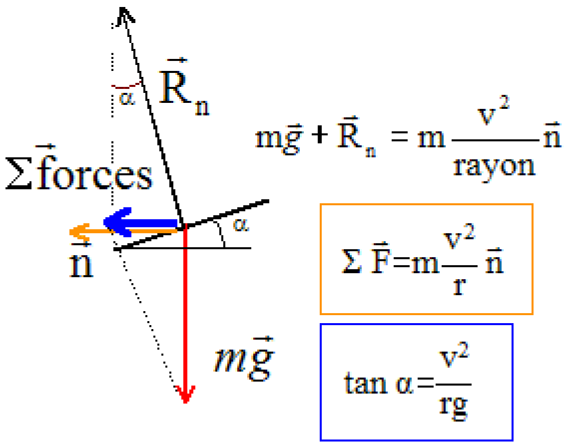
accélération a = Δv/Δt avec Δv en m/s et Δt en seconde.

Δv = 300 / 3,6 = 83,33 m/s ; Δt = 7*60 = 420 s ; a = 83,33/420=0,198 m/s².

durée du bruit : le bruit est audible dès que la motrice aborde le pont jusquà ce que le dernier wagon quitte le pont.

La distance parcourue par la motrice est donc : longueur du pont + longueur du train = 570+200=770 m.

vitesse du train : 300 / 3,6 = 83,33 m/s ; durée (s) = distance (m) / vitesse (m/s) = 770/83,33 = 9,2 s.



tan α = $83{,}33^2$ / (6 10^3 *9,8) = 0,118 soit α = 6,7°.

Puissance(en valeur absolue) des frotttements : 200 kW

puissance d'une force = vecteur vitesse scalaire vecteur force

d'où 200 = v f soit f = 200 / 83,33 = 2,4 kN.

Electricité (3 pts)

Une installation fonctionnant sous 220 v - 50 Hz monophasé comprend :
- Un appareillage de puissance utile 29440 W, de rendement η=0,8 et de facteur de puissance cosφ=0,75
- Un ensemble de 200 lampes de 100 W chacune.

La ligne qui alimente cette installation est équivalente au dipole série de caractéristiques : R_{li}=0,05 Ω ; L_{li} = 0,001 H et C_{li} = 12500 μF. On demande :

1. L'intensité du courant dans la ligne.
2. Le facteur de puissance de l'installation.
3. Les pertes par effet joule dans la ligne.
4. La puissance apparente au départ de la ligne.
5. La tension au départ de la ligne.
6. Le facteur de puissance au départ de la ligne.

corrigé

On note U : valeur efficace de la tension ; I : intensité efficace du courant ; P=UI cos φ(watt) puissance active

S= UI, puissance apparente (V A) et Q = UI sin φ(var) puissance réactive

La puissance consommée par l'appareillage vaut : P_{utile} / rendement =29440 / 0,8 = 36800 W = 36,8 kW

Q est positif si l'appareillage est inductif ; négatif si l'appareillage est capacitif

	P (watt)	S (VA)	|Q |(var)
appareillage	36800	P/cosφ=36800/0,75 = 49067	S sinφ= 32455
lampes	20000	20000	0
total installation	56800	$(56800^2+32455^2)^{½}$=65416	32455

intensité du courant dans la ligne : I= S/U =65416/220 =297 A.

facteur de puissance de l'installation : cosφ= P/S = 56800/65416 =0,87.

pertes par effet joule dans la ligne : $rI^2 = 0,05*297^2$ = 4410 W.

fréquence : f = 50 Hz ; pulsation ω= 2πf = 314 rad/s

réactance de la ligne X =Lω-1/(Cω) = 0,001*314 - 1/(0,0125*314)=0,314-0,255 =0,059 Ω.

Puissance réactive de la ligne $Q_{li} = XI^2 = 0,059*297^2$ = 5204 var.

Puissance réactive totale : $Q=Q_{li} + Q_{inst}$= 5204+32455 = 37660 var

Puissance active totale : $P=P_{li} + P_{inst}$= 4410+56800=61210 W

Puissance apparente au départ de la ligne : $S= (P^2 + Q^2)^{½} = (37660^2 + 61210^2)^{½}$=71867 VA.

tension au départ de la ligne : U= S/I =71867/297 = 242 V.

facteur de puissance au départ de la ligne : P/S =61210/71867= 0,85.

Energétique (3 pts)

On considère un mur de béton de 10 cm d'épaisseur qui sépare un milieu à 18°C d'un milieu à -20°C. La conductivité thermique du béton est λ= 1,1 W $m^{-1}K^{-1}$. On adoptera h=8,12 W $m^{-2}K^{-1}$ pour tous les coefficients globaux de convection et rayonnement entre l'air et le béton.

1. Calculer le flux thermique φ par m^2 de paroi.
2. Le mur étant constitué de deux parois de béton de 5 cm d'épaisseur séparées par une couche d'air de 5 cm, calculer le nouveau flux φ' et les températures dans le mur. On admettra que la transmission de chaleur dans la couche d'air se fait uniquement par convection et rayonnement.

corrigé

résistance thermique du mur : $R = e/\lambda + 1/h$; e : épaisseur du béton

résistance thermique de l'ensemble : résistance thermique du béton + résistance due à la convection et rayonnement de chaque côté de la paroi en béton.

$R = 0{,}1/1{,}1 + 2/8{,}12 = 0{,}337\ W^{-1}\ m^2\ K.$

coefficient de transmission : $K = 1/R = 1/0{,}337 = 2{,}96\ Wm^{-2}K^{-1}$.

flux thermique surfacique : $\Phi = K(\theta_c-\theta_f) = 2{,}96(18+20) =$ 113 W m^{-2}.

---

résistance thermique de l'ensemble : résistance thermique du béton + résistance due à la convection et rayonnement de chaque côté de la paroi en béton + résistance thermique due à la convection et rayonnement dans l'air interne.

résistance thermique du mur : $R' = e/\lambda + 3/h$; e : épaisseur du béton

$R' = 0{,}1/1{,}1 + 3/8{,}12 = 0{,}46\ W^{-1}\ m^2\ K.$

coefficient de transmission : $K' = 1/R' = 1/0{,}46 = 2{,}17\ Wm^{-2}K^{-1}$.

flux thermique surfacique : $\Phi' = K'(\theta_c-\theta_f) = 2{,}17\ (18+20) =$ 82,5 W m^{-2}.

températures internes du mur :

$R_1 = 1/h + e_1/\lambda = 1/8{,}12 + 0{,}05/1{,}1 = 0{,}169$; $K_1 = 1/0{,}169 = 5{,}93$; $(\theta_c-\theta_1) = \Phi'/K_1 = 82{,}5/5{,}93 = 13{,}9$ d'où $\theta_1 = 18-13{,}9 =$ 4,1°C.

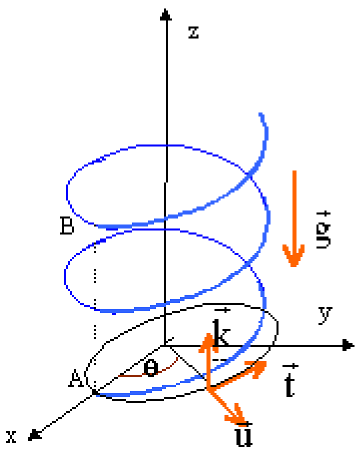
même calcul à partir de l'extérieur :

$R_1 = 1/h + e_1/\lambda = 1/8{,}12 + 0{,}05/1{,}1 = 0{,}169$; $K_1 = 1/0{,}169 = 5{,}93$; $(\theta_2-\theta_f) = \Phi'/K_1 = 82{,}5/5{,}93 = 13{,}9$ d'où $\theta_2 = 13{,}9-20 =$ - 6,1°C

un anneau glisse sur une hélice.

Un anneau de masse m, de dimensions négligeables glisse de déplace sur une piste hélicoïdale circulaire d'axe Oz et dont les équations paramètriques sont : $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; $z = h\theta$.

Les forces appliquées sont le poids, une force de frottement d'intensité constante f, colinéaire à la vitesse mais de sens contraire et une réaction de la piste normale au déplacement à chaque instant.



Dans un référentiel terrestre galiléen :

1. Exprimer les composantes cartésiennes de la force de frottement en fonction de f, r, θ et α angle entre la vitesse et le plan horizontal. Pour la suite on admettra que cet angle est constant et on exprimera tan α en fonction de h et r.
2. Calculer le travail de la force de frottement lors du déplacement entre les points B (θ =4π) et A (θ=0).
3. Exprimer en fonction des données le travail du poids et de la réaction de la piste entre B et A.
4. En déduire la vitesse de l'anneau au point A sachant que sa vitesse initiale était nulle en B. Discuter.

corrigé

Dans le repère local (u, t, k) les composantes de la force de frottement sont :

(0 ; f cos α ; f sin α)

$$\vec{f} = f\cos\alpha\,\vec{t} + f\sin\alpha\,\vec{k}$$

$$\text{or } \vec{t} = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

$$\vec{f} = -f\cos\alpha\sin\theta\,\vec{u}_x + f\cos\alpha\cos\theta\,\vec{u}_y + f\sin\alpha\,\vec{k}$$

composante de la vitesse, dérivée du vecteur position par rapport au temps :

(-r sinθ θ ' ; r cosθ θ ' ; hθ ')

ou dans le repère local (u, t, k) :

(0, rθ ' ; hθ ')

tan α = hθ ' / (rθ ') = h / r.

travail de la force de frottement :

déplacement élémentaire :

$dx = -r \sin\theta \, d\theta$; $dy = r \cos\theta \, d\theta$; $dz = h \, d\theta$;

frottement $(-f \cos\alpha \sin\theta ; f \cos\alpha \cos\theta ; f \sin\alpha)$

produit scalaire entre les vecteurs frottement et déplacement

$-f r \cos\alpha \sin^2\theta \, d\theta + f r \cos\alpha \cos^2\theta + f h \sin\alpha \, d\theta$.

Pour obtenir le travail sur le déplacement B vers A, integrer entre 4π et 0, α et r sont constants

en remarquant que $\sin^2\theta = ½(1-\cos(2\theta))$ et que $\cos^2\theta = ½(1+\cos(2\theta))$

$W = -4\pi f [r \cos\alpha + h \sin\alpha]$.

travail du poids de B en A :

travail élémentaire au cours du déplacement élémentaire $hd\theta$:

$dW = mghd\theta$

Pour obtenir le travail sur le déplacement B vers A, integrer entre 4π et 0:

$W = 4\pi \, mgh$.

le travail de la réaction normale est nul (force perpendiculaire au déplacement)

vitesse en A :

écrire le théorème de l'énergie cinétique entre B et A : (en B la vitesse est nulle)

$½mv^2_A = 4\pi \, mgh - 4\pi f [r \cos\alpha + h \sin\alpha]$.

$v^2_A = 8\pi [gh - f/m[r \cos\alpha + h \sin\alpha]]$.

cela est possible à condition que les frottements ne soient pas trop importants :

$mgh > 4\pi f [r \cos\alpha + h \sin\alpha]$.

Mouvement d'un solide ponctuel en microgravité (mécanique)

Données : pesanteur à la surface de la Terre : g_0=9,8 m/s² ; rayon de la Terre R= 6370 km . Le centre de la Terre est noté C ; M : masse de la Terre et G la constante de la gravitation.

référentiel géocentrique : solide formé par le centre de la terre et par les centres de 3 étoiles lointaines ; l'origine du repère est le centre de la Terre ; les trois axes pointent vers des étoiles lointaines qui paraissent fixes.

Le référentiel géocentrique est pratiquement galiléen au voisinage de la Terre si on ne tient pas compte des attractions des autres astres.

Placer un véhicule spatial (masse m) ur une orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude h = 300 km :

L'étude est faîte dans le référentiel géocentrique

1ère méthode : ce véhicule est lancé verticalement depuis la surface de la Terre avec une vitesse v_0 afin qu'il atteigne l'altitude h ; sa vitesse devient nulle ; on lui communique alors une vitesse horizontale v_1.

Calculs des vitesses en écrivant la conservation de l'énergie mécanique lors de la montée :

énergie potentielle à la distance r du centre de la Terre : -mMG/r (l'origine de cette énergie potentielle est prise à l'infini)

à la surface de la Terre, l'énergie mécanique vaut : $\frac{1}{2}mv_0^2$ - mMG/R

à l'altitude h où la vitesse est nulle, l'énergie mécanique vaut : - mMG/(R+h)

L'énergie mécanique se conserve : $\frac{1}{2}mv_0^2$ - mMG/R = - mMG/(R+h) ; v_0^2 =2MG[1/R - 1/(R+h]= 2MGh / (R(R+h))

De plus en assimilant le poids à l'attraction terrestre (à la surface de la Terre) : mg = GMm/R² soit GM= g_0R²

d'où : $v_0^2 = 2g_0Rh / (R+h)$ = $2*9,8*6,37\ 10^6*3\ 10^5 / 6,67\ 10^6 = 5,61\ 10^6$; v_0 =2370 m/s.

Ecrire la 2è loi de Newton sur l'orbite circulaire : le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation de la Terre ;

l'accélération est centripète de valeur $a_N = v_1^2 / (R+h)$; d'où $GMm/(R+h)^2 = mv_1^2 / (R+h)$

$v_1^2 = GM/(R+h) = g_0R^2/(R+h)$; $v_1 = R[g_0/(R+h)]^{1/2} = 6,37\ 10^6[9,8/6,67\ 10^6]^{1/2}$ = 7721 m/s.

vitesse angulaire du satellite : $\omega = v_1/(R+h) = 1,16\ 10^{-3}$ rad/s.

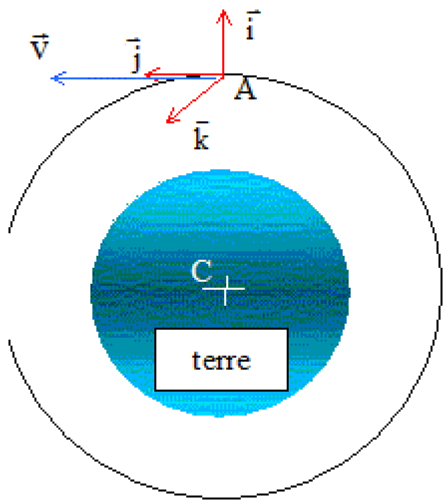
En réalité il est plus économique de :

- Traverser verticalement l'atmosphère afin de limiter le freinage ; puis en modifiant l'inclinaison de la poussée du moteur on gagne l'orbite elliptique de Holmann dont l'apogée est l'altitude h. Cette apogée étant atteinte, on met à nouveau en marche le moteur pour obtenir la vitesse v_1.

- Dans le cas de satellite géostationnaire, dont l'orbite est dans le plan équatorial, il vaut mieux que la base de lancement soit proche de l'équareur.

Le satellite est sur son orbite ; on étudie le mouvement d'un petit objet, en impesanteur (ou microgravité), libre de se déplacer dans le satellite.

Le référentiel d'étude (r) est lié au satellite. Le centre de masse du satellite, noté A, est le centre de ce référentiel. L'objet est assimilé à un point matériel P de masse m repéré, dans (r), par les cordonnées du point P (x, y, z) ; la position initiale P_0 a les coordonnées (x_0, y_0, z_0).



Forces s'exerçant, dans (r), sur l'objet P :

attraction terrestre :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{CP^3}\overrightarrow{CP} \quad \text{or } GM = v^2(R+h) = \omega^2(R+h)^3$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{m\omega^2(R+h)^3}{CP^3}\overrightarrow{CP}}$$

force d'inertie : $\boxed{\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HP}}$

HP projection de **CP** sur la plan de la trajectoire du satellite (les grandeurs écrites en bleu et gras sont des vecteurs)

force de Coriolis : $\boxed{\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}}$ La force de Coriolis, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas.

L'attraction terrestre dérive de l'énergie potentielle : $-GMm/CP = -m\,\omega^2 (R+h)^3/CP$.

La force d'inertie centrifuge dérive de l'énergie potentielle : $-\frac{1}{2}m\,\omega^2\,HP^2$.

Energie potentielle totale de P : $E_P = -m\,\omega^2 (R+h)^3/CP + -\frac{1}{2}m\,\omega^2\,HP^2 = -m\,\omega^2[(R+h)^3/CP + \frac{1}{2}HP^2]$

Exprimons cette énergie potentielle au voisinage de A : x, y et z petits deavnt R+h.

on note, pour simplifier l'écriture r= R+h ; avec : $HP^2 = (r+x)^2+y^2 = r^2+2rx+x^2+y^2$ et $CP^2 = HP^2+z^2$

d'où $1/CP = (r^2+2rx+x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$.

mettre r² en facteur commun : $1/CP = r^{-1}(1+2x/r+(x^2+y^2+z^2)/r^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Or : $(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$ voisin de $1-\frac{1}{2}\varepsilon+3/8\,\varepsilon^2$ avec $\varepsilon = 2x/r+(x^2+y^2+z^2)/r^2$

d'où : $1/CP = r^{-1}[1-x/r-(x^2+y^2+z^2)/(2r^2)+3x^2/(2r^2)]$

soit $E_P = -m\omega^2 r^2[1-x/r-(x^2+y^2+z^2)/(2r^2)+3x^2/(2r^2)] - \frac{1}{2}m\omega^2[r^2+2rx+x^2+y^2] = -m\omega^2[1{,}5\,r^2-\frac{1}{2}(z^2-3x^2)]$.

force totale et équations différentielles régissant le mouvement de P :

Ecrire la seconde loi de Newton : $\boxed{m\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial t^2} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p + \vec{F}_{ic}}$

$mx'' = -dE_p/dx + F_{ic\,x} = 3m\omega^2 x + 2\,m\omega y'$ (1)

$my'' = -dE_p/dy + F_{ic\,y} = -2\,m\omega x'$ (2)

$mz'' = -dE_p/dz + F_{ic\,z} = -m\omega^2 z$ ou bien $z'' + \omega^2 z = 0$ (3)

La solution de (3) est du type : $z = z_0\cos(\omega t+\varphi)$ avec $z(0) = z_0$ et $z'(0) = 0$; or $z' = -z_0\,\omega\sin(\omega t+\varphi)$ d'où $0 = -z_0\,\omega\sin\varphi \longrightarrow \varphi = 0$ ou π.

de plus $z(0) = 0 = z_0\cos\varphi$ donne $\varphi = 0$. $z = z_0\cos(\omega t)$.

Par intégration (2) devient : $y' = -2\omega(x-x_0)$ (4)

Repport dans (1) : $x'' = 3\omega^2 x - 4\,\omega^2(x-x_0)$ soit $x'' + \omega^2 x = 4\,\omega^2 x_0$.

la solution est du type : x= A cos(ωt) + B sin(ωt)+ $4x_0$.

or $x(0)=x_0$ soit $x_0 = A + 4x_0$ --> A= $-3x_0$; de plus x'(0)=0 soit -Aω sin(0)+ Bω cos(0) =0 --> B=0 ; $x= x_0$ (4-3cos(ωt)).

Repport dans (4) : y'= $6\omega x_0$[cos(ωt)-1] ; par intégration $y = 6x_0$[sin(ωt)-ωt] + y_0.

La trajectoire est une cycloïde décalée par rapport à l'axe des x. Initialement la force d'inertie centrifuge l'emporte ; puis la vitesse augmente et la force de Coriolis courbe la trajectoire.

haut parleur (Capes 95)

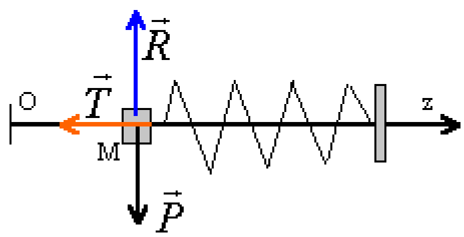
1

oscillations libres

La partie mécanique d'un haut parleur est constituée d'une membrane mobile, en forme de cône, solidaire d'un mandrin cylindrique sur lequel est enroulé le fil du bobinage. L'ensemble est maintenu en place par des suspensions élastiques qui jouent le rôle de guidage (le mouvement est limité à une translation de l'équipage mobile) . La partie mobile peut être représentée par une masse m, assimilable à un point matériel, mobile sans frottement sur une tige horizontale Oz. Elle est rappelée vers sa position d'équilibre (le point O) par un ressort de masse négligeable, de raideur k, pouvant travailler en extension comme en compression. On repère le point M par son abscisse z.

1. On écarte M de sa position d'équilibre et on le lache sans vitese à l'instant t=0, à l'abscisse z_0. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de M.
2. En déduire la pulsation et la période T_0 du mouvement.
3. Calculer la période et la fréquence si m=8g et k=1536 Nm^{-1}.

corrigé



systéme étudié : la masse m; référentiel du laboratoire supposé galiléen.

trois foces s'exercent sur le point M :

le poids , la réaction du système de quidage et la tension du ressort $\vec{T} = -k\vec{z}$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R} = m\vec{a}$$
$$projection\,sur\,Oz : mz'' = -kz$$

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique :

$$pulsation\,\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad période\,T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

application numérique : ω_0=438,2 rad s^{-1}; T_0=14,3 ms ; N_0=69,8 Hz

---

2

oscillations libres amorties

L'action de l'air ambiant sur la membrane se résume à une force colinéaire à la vitesse et de sens contraire , le coef de proportionalité étant positif

$$\vec{F} = -f\vec{v}$$

.

1. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement
2. Le système fonctionne en régime critique, déterminer en fonction de k et m la valeur fc de f. calculer fc.
3. Ecrire l'équation différentielle en fonction de ω_0 et α=f / fc.
4. La masse m étant abandonnée sans vitesse en z_0 à l'instant t=0, donner l'allure des graphes z=f(t) lorsqueα est supérieur, inférieur ou égal à 1.
5. Dans le cas où α est inférieur à 1, déterminer l'expression de la pseudo période T en fonction de T_0 et α. Calculer T pour α =0,1.
6. Lorsque α est nettement inférieur à 1, on peut considérer que le mouvement est sinusoïdal de périodeT_0.(z=a cos(ωt+ϕ) Exprimer l'énergie E de cet oscillateur en fonction de k et a puis en fonction de m, ω_0 et a.
7. Calculer la valeur W du trawail de la force de frottement mis en jeu au cours d'une période en fonction de m, a, ω_0 et α.
8. En déduire l'expression du rapport Q=-2p E / W en fonction de m, f et ω_0 . Quel nom donne t-on habituellement à Q

corrigé

Aux forces précédentes on ajoute la force de frottement

$$m\vec{a} = -f\vec{v} - k\vec{z} + \vec{P} + \vec{R}$$
$$m\ddot{z} + f\,\dot{z} + k\,z = 0$$

l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle s'écrit :

$$m\, r^2+f\, r+k = 0$$

La nature des solutions dépend du signe du discriminant $\Delta=f^2-4km$

Le régime critique correspond à $\Delta=0$ soit $\mathbf{f_c^2= 4km}$

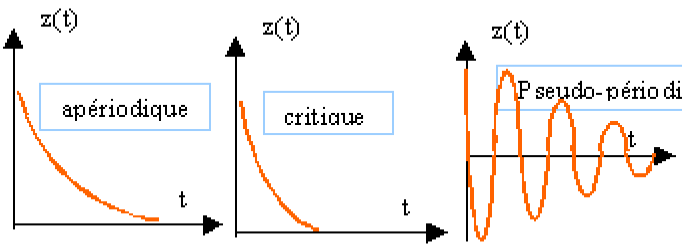
valeur numérique $f_c=7$ kg s^{-1}.

L'équation différentielle s'écrit en remplaçant **k/m** par ω_0^2 et **f** par αf_c.

$$z''+ 2\alpha\omega_0\, z'+\omega_0^2\, z= 0$$

le discriminant réduit s'écrit : $\Delta'= \omega_0^2\,(\alpha^2-1)$

- $\alpha<1$ $\Delta'<0$ frottement faible régime pseudopériodique
- $\alpha=1$ $\Delta'=0$ régime critique
- $\alpha>1$ $\Delta'>0$, frottement important, régime apériodique.



---

frottement faible $\alpha<1$, les solutions de l'éqution différentielle sont de la forme :

$$z = A\exp(-\alpha\varpi_0 t)\cos(\varpi_0\sqrt{1-\alpha^2}\,t+\varphi)$$

à t=0 : $z=z_0$ et $z'=0$ permettent de déterminer A et φ.($A=z_0$et $\varphi=0$)

La pseudo-période est égale à : (α très faible devant 1)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} = T_0\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \approx T_0(1+\frac{\alpha^2}{2})$$

application numérique : T=14,3 ms

l'écart relatif est $\alpha^2/2 = 0,5\%$

L'énergie de cet oscillateur est la somme de son énergie potentielle élastique (énergie potentielle de pesanteur est constante, mouvement sur une horizontale) et de son énergie cinétique.

$$E=0,5\, mv^2+0,5\, kz^2 = 0,5\, m\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)+0,5\, ka^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

or $k=m\omega_0^2$ d'où $E=0,5\ ka^2$.

<u>travail de la force de frottement au cours d'une période</u> :

$$W=\int_0^T \vec{F}\cdot\vec{v}dt=-\int_0^T f\dot{z}^2dt=-fa^2\omega_0^2\int_0^T \sin^2(\omega_0 t+\varphi)dt$$

$$W=-fa^2\omega_0^2\frac{T_0}{2}=-2\pi\alpha m\omega_0^2a^2$$

Expression du facteur de qualité Q de l'oscillateur :

$$Q=-2\pi\frac{E}{W}=\frac{1}{2\alpha}=\frac{m\omega_0}{f}$$

3

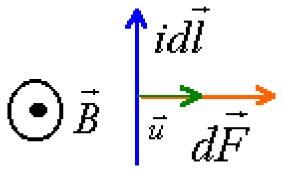
oscillations forcées

Sur le mandrin cylindrique de l'équipage mobile , on enroule sous forme de spires jointives une longueur l de fil conducteur et l'ensemble est plongé dans un champ magnétique radial de norme constante.

1. Déterminer la force magnétique exercée sur l'enroulement lorsqu'il est parcouru par un courant i.
2. On impose un courant i sinusoïdal $i=I_0\sin\omega t$. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement de M en fonction de ω_0, α,i B, l et m. Quelle est la signification physique de l'équation sans second membre ? Qu'appelle t-on régime forcé ?
3. On cherche en régime forcé une solution de la forme $z=a\cos(\omega t.+\varphi)$. Déterminer a et φ.
4. Tracer l'allure de la courbe $a/I_0=f(t)$ si $\alpha<<1$ et $\alpha>>1$. Faire apparaître la grandeur Q sur le graphique.

corrigé

force de Laplace exercée sur un élément de courant :



$d\vec{F}=id\vec{l}\wedge\vec{B}=idlB\vec{u}$

sur tout le fil : $\vec{F}=ilB\,\vec{u}$

Il suffit d'ajouter la force de Laplace au autres forces

mz''=-fz'-kz+ilB

soit $z'' + 2\alpha\omega_0 z' + \omega_0^2 z = Bl/m\, I_0 \cos(\omega t)$

La solution de l'équation différentielle sans second membre correspond au régime transitoire. Ce régime disparaît au bout d'un temps assez court, quelle que soit la valeur de α, pour faire place à un régime permanent

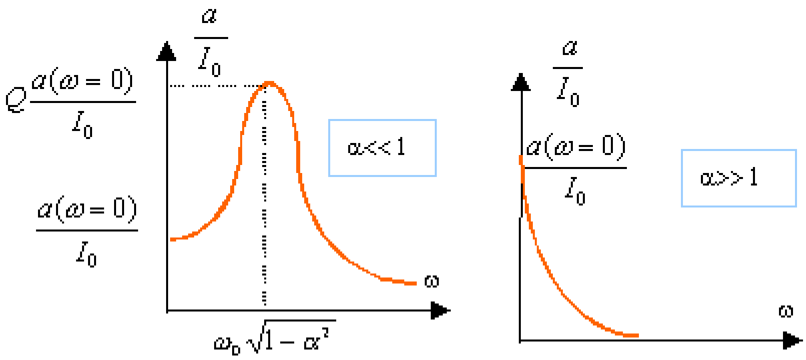
La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et de la solution particulière acos(ωt). Le régime permanent correspond au régime foré imposé par l'exitateur.

solution de l'équation (méthode utilisant les nombres complexes).

$$\bar{i} = I_0 \exp(j\omega t)\,;\; \bar{z} = a \exp(j\omega t + \varphi)\,;\; \dot{\bar{z}} = j\omega \bar{z}\,;\; \ddot{\bar{z}} = -\omega^2 \bar{z}$$
$$(-\omega^2 + 2j\alpha\,\omega\,\omega_0 + \omega_0^2)\bar{z} = \frac{Bl}{m}\bar{i}$$

On trouve :

$$\bar{z} = a \exp(j\varphi) = \frac{Bl/m}{(-\omega^2 + 2j\alpha\,\omega\,\omega_0 + \omega_0^2)}\bar{i}$$
$$a = \frac{Bl/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\alpha\,\omega\,\omega_0)^2}} I_0$$
$$\tan\varphi = \frac{-2\alpha\,\omega\,\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



4

étude énergétique

La bobine du haut parleur de résistance r et d'inductance L est alimentée par une tension u variable.

1. L'équipage mobile étant animé d'une vitesse v, calculer la valeur de la fem aux bornes de la bobine.
2. Ecrire l'équation aux mailles relative au circuit de l'enroulement.
3. En combinant cette relation à l'équation différentielle précédente, montrer que le produit ui se met sous la forme de 5 termes dont on donnera la sigification.

4. Bilan de puissance de fonctionnement : la puissance acoustique est mesurée à l'aide d'un sonomètre. Le haut parleur est monté sur un baffle, il rayonne de façon isotrope dans le demi espace face au haut parleur.. Le sonomètre étant placé à 1 m du haut parleur, on peut considéré que la souce est quasi ponctuelle. Le haut parleur est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence variable mais de valeur efficace u constante. L'intensité sonore en dB est I_{db}=10 log ($I/10^{-12}$)

fréquence Hz	P électrique watt	Intensité dB
60	0,196	89
200	0,847	99

- Calculer l'intensité acoustique pour les 2 fréquence données.
- En déduire la puissance acoustique émise par le haut parleur et son rendement acoustique.
- Que devient la puissance électrique non transformée en puissance acoustique.

corrigé

e= -Blv

l'équation électrique relative au circuit s'écrit :

$$u = ri + L\frac{di}{dt} + Blv \text{ d'autre part } 0 = \mathrm{m}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + fv + kz - iBl$$

multiplier la première par i et la seconde par v, puis ajouter :

$$ui = ri^2 + Li\frac{di}{dt} + \mathrm{mv}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + fv^2 + kzv = ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{1}{2}mv^2) + fv^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{1}{2}kz^2)$$

ui : puissance reçue par le dipole

ri² : puissance dissipée par effet joule

0,5 Li² : puissance stockée dans la bobine

0,5 mv²: énergie cinétique de l'équipage mobile

fv² : puissance de la force de frottement

0,5 kz² : énergie potentielle élastique

La puissance acoustique émise sur une demi sphère est égale à 2πI

A 60 Hz, Pa=5 mW et à 200 Hz, Pa=50 mW.

rendement : pa/ p=2,5 % à 60Hz et 6 % à 200 Hz.

La puissance moyenne fournie par le générateur est égale à la somme de la puissance sonore rayonnée par la source et de la puissance perdue par effet joule.

haut parleur (Capes 95)

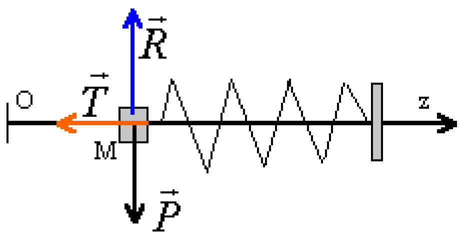
1

oscillations libres

La partie mécanique d'un haut parleur est constituée d'une membrane mobile, en forme de cône, solidaire d'un mandrin cylindrique sur lequel est enroulé le fil du bobinage. L'ensemble est maintenu en place par des suspensions élastiques qui jouent le rôle de guidage (le mouvement est limité à une translation de l'équipage mobile) . La partie mobile peut être représentée par une masse m, assimilable à un point matériel, mobile sans frottement sur une tige horizontale Oz. Elle est rappelée vers sa position d'équilibre (le point O) par un ressort de masse négligeable, de raideur k, pouvant travailler en extension comme en compression. On repère le point M par son abscisse z.

1. On écarte M de sa position d'équilibre et on le lache sans vitese à l'instant t=0, à l'abscisse z_0. Ecrire l'équation différentielle du mouvement de M.
2. En déduire la pulsation et la période T_0 du mouvement.
3. Calculer la période et la fréquence si m=8g et k=1536 Nm^{-1}.

corrigé



systéme étudié : la masse m; référentiel du laboratoire supposé galiléen.

trois foces s'exercent sur le point M :

le poids , la réaction du système de quidage et la tension du ressort

$$\vec{T} = -k\vec{z}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R} = m\vec{a}$$
$$projection\,sur\,Oz : mz'' = -kz$$

L'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique :

$$\text{pulsation}\,\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{période}\,T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

application numérique : ω_0=438,2 rad s^{-1}; T_0=14,3 ms ; N_0=69,8 Hz

L'action de l'air ambiant sur la membrane se résume à une force colinéaire à la vitesse et de sens contraire , le coef de proportionalité étant positif

$$\vec{F} = -f\vec{v}$$

.

2

oscillations libres amorties

1. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement
2. Le système fonctionne en régime critique, déterminer en fonction de k et m la valeur fc de f. calculer fc.
3. Ecrire l'équation différentielle en fonction de ω_0 et α=f / fc.
4. La masse m étant abandonnée sans vitesse en z_0 à l'instant t=0, donner l'allure des graphes z=f(t) lorsqueα est supérieur, inférieur ou égal à 1.
5. Dans le cas où α est inférieur à 1, déterminer l'expression de la pseudo période T en fonction de T_0 et α. Calculer T pour α =0,1.
6. Lorsque α est nettement inférieur à 1, on peut considérer que le mouvement est sinusoïdal de périodeT_0.(z=a cos(ωt+ϕ) Exprimer l'énergie E de cet oscillateur en fonction de k et a puis en fonction de m, ω_0 et a.
7. Calculer la valeur W du trawail de la force de frottement mis en jeu au cours d'une période en fonction de m, a, ω_0 et α.
8. En déduire l'expression du rapport Q=-2p E / W en fonction de m, f et ω_0 . Quel nom donne t-on habituellement à Q

corrigé

Aux forces précédentes on ajoute la force de frottement

$$m\vec{a} = -f\vec{v} - k\vec{z} + \vec{P} + \vec{R}$$
$$m\ddot{z} + f\,\dot{z} + k\,z = 0$$

l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle s'écrit :

$m\,r^2+f\,r+k = 0$

La nature des solutions dépend du signe du discriminant $\Delta=f^2-4km$

Le régime critique correspond à Δ=0 soit **$f_c^2= 4km$**

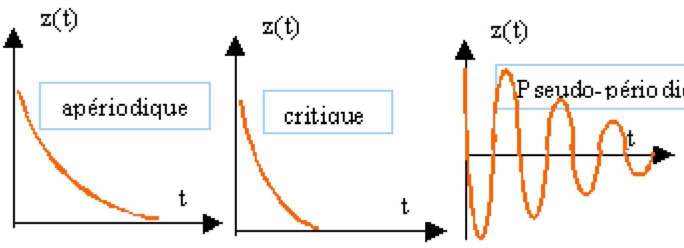
valeur numérique f_c=7 kg s^{-1}.

L'équation différentielle s'écrit en remplaçant **k/m** par ω_0^2 et **f** par αf_c.

$$z'' + 2\alpha\omega_0 z' + \omega_0^2 z = 0$$

le discriminant réduit s'écrit : $\Delta' = \omega_0^2 (\alpha^2 - 1)$

- $\alpha<1$ $\Delta'<0$ frottement faible régime pseudopériodique
- $\alpha=1$ $\Delta'=0$ régime critique
- $\alpha>1$ $\Delta'>0$, frottement important, régime apériodique.



frottement faible $\alpha<1$, les solutions de l'éqution différentielle sont de la forme :

$$z = A\exp(-\alpha\varpi_0 t)\cos(\varpi_0\sqrt{1-\alpha^2}\,t+\varphi)$$

à t=0 : $z=z_0$ et $z'=0$ permettent de déterminer A et φ.($A=z_0$et $\varphi=0$)

La pseudo-période est égale à : (α très faible devant 1)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\alpha^2}} = T_0\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \approx T_0(1+\frac{\alpha^2}{2})$$

application numérique : T=14,3 ms

l'écart relatif est $\alpha^2/2 = 0,5\%$

L'énergie de cet oscillateur est la somme de son énergie potentielle élastique (énergie potentielle de pesanteur est constante, mouvement sur une horizontale) et de son énergie cinétique.

$E=0,5\ mv^2+0,5\ kz^2 = 0,5\ m\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)+0,5\ ka^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$

or $k=m\omega_0^2$ d'où $E=0,5\ ka^2$.

<u>travail de la force de frottement au cours d'une période</u> :

$$W = \int_0^T \vec{F}\cdot\vec{v}dt = -\int_0^T f\,\dot{z}^2 dt = -fa^2\omega_0^2\int_0^T \sin^2(\omega_0 t+\varphi)dt$$

$$W = -fa^2\omega_0^2\frac{T_0}{2} = -2\pi\alpha m\,\omega_0^2 a^2$$

Expression du facteur de qualité Q de l'oscillateur :

$$Q = -2\pi\frac{E}{W} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{m\omega_0}{f}$$

Sur le mandrin cylindrique de l'équipage mobile , on enroule sous forme de spires jointives une longueur l de fil conducteur et l'ensemble est plongé dans un champ magnétique radial de norme constante.

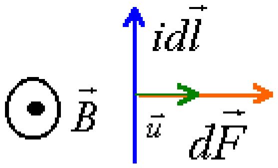
3

oscillations forcées

1. Déterminer la force magnétique exercée sur l'enroulement lorsqu'il est parcouru par un courant i.
2. On impose un courant i sinusoïdal $i=I_0\sin\omega t$. Ecrire la nouvelle équation différentielle du mouvement de M en fonction de ω_0, α,i B, l et m. Quelle est la signification physique de l'équation sans second membre ? Qu'appelle t-on régime forcé ?
3. On cherche en régime forcé une solution de la forme z=a cos (ωt.+φ). Déterminer a et φ.
4. Tracer l'allure de la courbe a/I_0 =f(t) si α<<1 et α>>1. Faire apparaître la grandeur Q sur le graphique.

corrigé

force de Laplace exercée sur un élément de courant :



$d\vec{F} = id\vec{l}\wedge\vec{B} = idlB\vec{u}$

sur tout le fil : $\vec{F} = ilB\,\vec{u}$

Il suffit d'ajouter la force de Laplace au autres forces

mz''=-fz'-kz+ilB

soit **$z''+2\alpha\omega_0 z'+\omega_0^2 z = Bl/m\, I_0\cos(\omega t)$**

La solution de l'équation différentielle sans second membre correspond au régime transitoire. Ce régime disparaît au bout d'un temps assez court, quelle que soit la valeur de α, pour faire place à un régime permanent

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et de la solution particulière acos(ωt). Le régime permanent correspond au régime foré imposé par l'exitateur.

<u>solution de l'équation</u> (méthode utilisant les nombres complexes).

$$\bar{i} = I_0 \exp(j\omega t)\,;\ \bar{z} = a\exp(j\omega t+\varphi)\,;\ \dot{\bar{z}} = j\omega\,\bar{z}\,;\ \ddot{\bar{z}} = -\omega^2\bar{z}$$

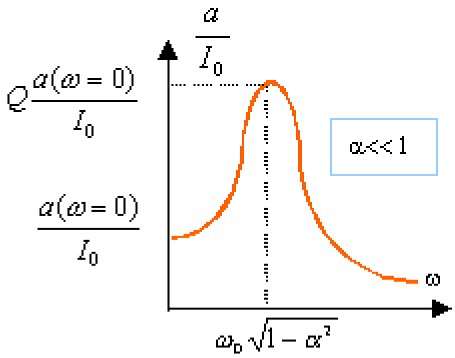
$$(-\omega^2 + 2j\alpha\,\omega\,\omega_0 + \omega_0^2)\bar{z} = \frac{Bl}{m}\bar{i}$$

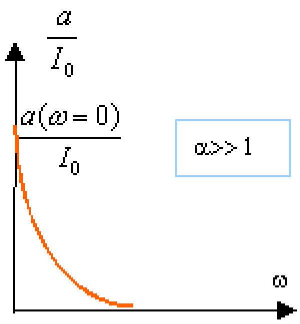
On trouve :

$$\bar{z} = a\exp(j\varphi) = \frac{Bl/m}{(-\omega^2 + 2j\alpha\,\omega\,\omega_0 + \omega_0^2)}\bar{i}$$

$$a = \frac{Bl/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4(\alpha\,\omega\,\omega_0)^2}}\,I_0$$

$$\tan\varphi = \frac{-2\alpha\,\omega\,\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$





La bobine du haut parleur de résistance r et d'inductance L est alimentée par une tension u variable.

4

étude énergétiq ue

1. L'équipage mobile étant animé d'une vitesse v, calculer la valeur de la fem aux bornes de la bobine.
2. Ecrire l'équation aux mailles relative au circuit de l'enroulement.
3. En combinant cette relation à l'équation différentielle précédente, montrer que le produit ui se met sous la forme de 5 termes dont on donnera la sigification.
4. Bilan de puissance de fonctionnement : la puissance acoustique est mesurée à l'aide d'un sonomètre. Le haut parleur est monté sur un baffle, il rayonne de façon isotrope dans le demi espace face au haut parleur.. Le sonomètre étant placé à 1 m du haut parleur, on peut considéré que la souce est quasi ponctuelle. Le haut parleur est alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence variable mais de valeur efficace u constante. L'intensité sonore en dB est I_{db}=10 log ($I/10^{-12}$)

fréquence Hz	P électrique watt	Intensité dB
60	0,196	89
200	0,847	99

- Calculer l'intensité acoustique pour les 2 fréquence données.
- En déduire la puissance acoustique émise par le haut parleur et son rendement acoustique.
- Que devient la puissance électrique non transformée en puissance acoustique.

corrigé

e= -Blv

l'équation électrique relative au circuit s'écrit :

$$u = ri + L\frac{di}{dt} + Blv \text{ d'autre part } 0 = \mathrm{m}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + fv + kz - iBl$$

multiplier la première par i et la seconde par v, puis ajouter :

$$ui = ri^2 + Li\frac{di}{dt} + \mathrm{mv}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} + fv^2 + kzv = ri^2 + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\frac{1}{2}mv^2) + fv^2 +$$

ui : puissance reçue par le dipole

ri^2 : puissance dissipée par effet joule

0,5 Li^2 : puissance stockée dans la bobine

0,5 mv^2: énergie cinétique de l'équipage mobile

fv^2 : puissance de la force de frottement

0,5 kz^2 : énergie potentielle élastique

La puissance acoustique émise sur une demi sphère est égale à $2\pi I$

A 60 Hz, Pa=5 mW et à 200 Hz, Pa=50 mW.

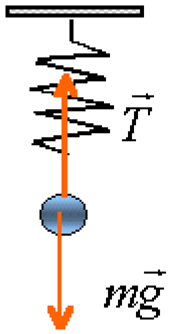
rendement : pa/ p=2,5 % à 60Hz et 6 % à 200 Hz.

La puissance moyenne fournie par le générateur est égale à la somme de la puissance sonore rayonnée par la source et de la puissance perdue par effet joule.

oscillateur élastique vertical concours ITPE 2008

Une sphère, supposée ponctuelle, de masse m=100 g est suspendue à un ressort vertical sans masse, de raideur k dans un champ de pesanteur uniforme d'intensité g. L'autre extrémité du ressort est fixe en O. Le problème est paramétré par un axe vertical orienté vers le bas. On notera z l'abscisse de la sphère.

Déterminer la position d'équilibre $z_{éq}$ de la sphère en fonction de la longueur à vide du ressort L_0, m, g et k.



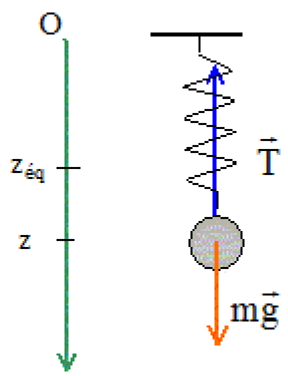
A l'équilibre le poids est opposé à la tension et la tension est proportionnelle à l'allongement du ressort.

$mg=k(L_{éq}-L_0)$; masse en kg ; $L_{éq}-L_0$ en mètre ; $z_{éq} = L_{éq}$.

$\mathbf{z_{éq} = L_0 + mg/k}$.

On écarte la sphère de sa position d'équilibre et on lache la sphère sans vitesse initiale.

Etablir l'équation du mouvement de la sphère.



$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Ecrire la seconde loi de Newton sur l'axe Oz : $-k(z-L_0)+mg=mz''$

$-k(z-z_{éq} +z_{éq} -L_0)+mg = mz''$; $-k(z-z_{éq}) -k(z_{éq} -L_0)+mg = mz''$

Or $k(z_{éq} -L_0)= mg$ d'où : $-k(z-z_{éq}) = mz''$.

On choisit la position d'équilibre comme nouvelle origine en posant $u = z-z_{éq}$:

il vient : $-ku = mu''$ soit $u'' +k/m\, u= 0$; $\mathbf{u''+\omega_0^2 u = 0}$ (**1**) avec $\omega_0^2 = k/m$.

Quel est la nature du mouvement ?

(**1**) est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : mouvement sinusoïdal périodique non amorti.

Donner la position u de la sphère par rapport à la position d'équilibre en fonction du temps ; on note u(t=0) = a.

$u(t) = A \cos(\omega_0 t+\varphi)$

à t=0, $u(0) = a = A \cos\varphi$; d'où $\varphi =0$ et $A=a$.

$\mathbf{u(t) = a \cos(\omega_0 t)}$.

Proposer deux méthodes expérimentales permettant de déterminer k.

méthode statique :

Accrocher une masse m au ressort et mesurer son allongement x : à l'équilibre, le poids a même valeur que la tension.

$mg = kx$ d'où $k = mg/x$

mesure de la période des petites oscillations :

Faire osciller le système {ressort + masse acrochée à l'extrémité} dans un plan vertical en écartant le ressort de 10 degrés par rapport à la verticale. Mesurer la durée de 10 oscillations (10 périodes T)

$T = 2\pi(m/k)^{½}$; $k = 4\pi^2 m/T^2$.

Etablir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

On choisit l'origine de l'énergie potentielle à la position d'équilibre $z_{éq}$.

Travail du poids mg pour passer de la position $z_{éq}$ à la position z >0 : $mg(z-z_{éq})$

La variation de l'énergie potentielle de pesanteur est l'opposé du travail du poids : $\Delta E_{pp} = mg(z_{éq}-z)$

En posant $u = z-z_{éq}$: $\Delta E_{pp} = -mgu$

$\Delta E_{pp} = E_{pp}(z) - E_{pp}(z_{éq}) = -mgu-0$ d'où $\mathbf{E_{pp}(u) = -mgu}$.

Etablir l'expression de l'énergie potentielle élastique du ressort.

On choisit l'origine de l'énergie potentielle à la position d'équilibre $z_{éq}$.

Travail de la tension $T= -k(z-L_0)$ pour passer de la position $z_{éq}$ à la position z >0 :

$$\int_{z_{éq}}^{z} \vec{T}\cdot d\vec{z} = -k\int_{z_{éq}}^{z} (z-L_0)\cdot d\vec{z} = -½k\left[(z-L_0)^2\right]_{z_{éq}}^{z} = -½k\left[(z-L_0)^2\right] + ½k\left[(z_{éq}-L_0)^2\right]$$

$$½k\left[(z-L_0)^2\right] = ½k\left[(z-z_{éq}+z_{éq}-L_0)^2\right] = ½k\left[(z_{éq}-L_0)^2+(z-z_{éq})^2+2(z_{éq}-L_0)(z-z_{éq})\right]$$

$$-½k\left[(z-L_0)^2\right] + ½k\left[(z_{éq}-L_0)^2\right] = -½k(z-z_{éq})^2 - k(z_{éq}-L_0)(z-z_{éq}) = -½ku^2 - mgu$$

La variation de l'énergie potentielle élastique est l'opposé du travail de la tension : $\Delta E_{pé} = ½ku^2+mgu$

$\Delta E_{pé} = E_{pé}(z) - E_{pp}(z_{éq}) = ½ku^2 + mgu$ d'où $\mathbf{E_{pé}(u) = ½ku^2 + mgu}$.

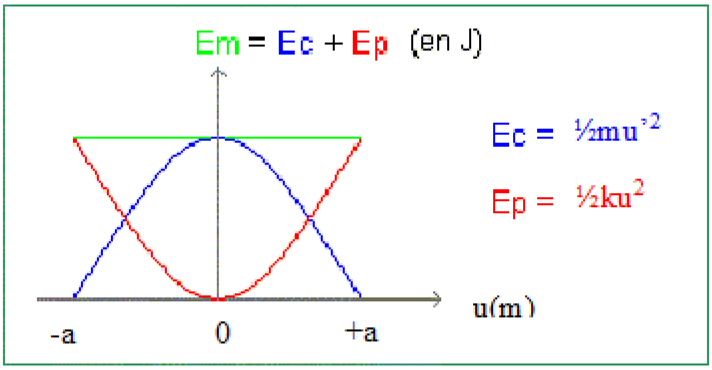
Total énergie potentielle : $\mathbf{Ep = ½ku^2}$.

Dans quelle condition peut-on considérer le système comme conservatif ?

Si seule la tension et le poids travaillent (absence de frottements) le système est conservatif.

Tracer sur un même graphique les courbes représentant l'énergie mécanique et l'énergie

potentielle du système en fonction de u.



Montrer comment on peut lire la valeur de l'énergie cinétique.

Energie cinétique = énergie mécanique - énergie potentielle

Energie mécanique = ½ka².

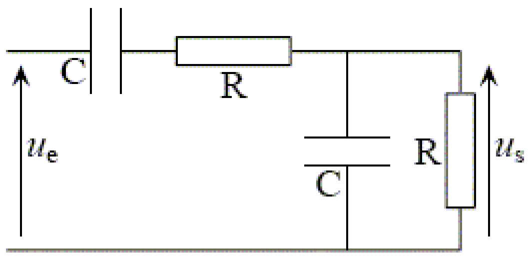
Montrer qu'en moyenne il y a équipartition de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

$$\langle Ec\rangle = \tfrac{1}{2}m(a\omega_0)^2\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t)dt = \tfrac{1}{2}m(a\omega_0)^{22}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1-\cos(2\omega_0 t)}{2}dt = \frac{m(a\omega_0)^{22}}{4} = \boxed{\frac{ka^2}{4}}$$

$$\langle Ep\rangle = \tfrac{1}{2}ka^2\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_0 t)dt = \tfrac{1}{2}ka^2\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}dt = \boxed{\frac{ka^2}{4}}$$

Fonction de transfert, diagramme de Bode concours ITPE 2007

Les grandeurs soulignées sont des nombres complexes.



Déterminer la fonction de transfert $\underline{T}(\omega) = \underline{U}_s/\underline{U}_e$.

admittance complexe de R et C en parallèle :

$\underline{Y} = 1/R + jC\omega$.

impédance complexe : $\underline{Z} = 1/\underline{Y} = 1/(1/R+jC\omega) = \mathbf{R/(1+jRC\omega)}$.

impédance complexe de l'ensemble :

$\underline{Z}_1 = R+1/(jC\omega) + \underline{Z}$.

$$\underline{Z}_1 = R+\frac{1}{jC\omega}+\frac{R}{1+jRC\omega}=\frac{1+jRC\omega}{jC\omega}+\frac{R}{1+jRC\omega}=\frac{(1+jRC\omega)^2+jRC\omega}{(1+jRC\omega)jRC\omega}$$

$\underline{\mathbf{U}}_s/\underline{\mathbf{U}}_e=\underline{\mathbf{Z}}/\underline{\mathbf{Z}}_1$

$$\underline{T}(\omega)=\frac{jR^2C\omega}{(1+jRC\omega)^2+jRC\omega}$$

Développer le dénominateur :

$1-(RC\omega)^2+3jRC\omega$

Multiplier numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée : $1-(RC\omega)^2-3jRC\omega$

Le dénominateur s'écrit : $\mathbf{D}= [1-(RC\omega)^2]^2 + 9(RC\omega)^2 = \mathbf{1+7(RC\omega)^2+(RC\omega)^4}$.

Le numérateur s'écrit :

$\underline{\mathbf{N}}=jR^2C\omega\,[1-(RC\omega)^2-3jRC\omega]= \mathbf{3(RC\omega)^2+[1-(RC\omega)^2]\,jRC\omega}$.

Etablir à partir de $\underline{T}(\omega)$, l'équation différentielle reliant $u_s(t)$ à $u_e(t)$.

La multiplication par $j\omega$ est associée à la dérivée première par rapport au temps.

La multiplication par $(j\omega)^2 = -\omega^2$ est associée à la dérivée seconde par rapport au temps.

$N= \mathbf{-3R^2C^2(-\omega^2) + [1-(RC\omega)^2]\,R\,C\,j\omega}$.

$u_s(t) = 1/D\ [\mathbf{-3R^2C^2\,u_e''(t) + (1-(RC\omega)^2)\,RC\,u_e'(t)}]$

Calculer la phase φ.

$\tan\varphi = [1-(RC\omega)^2]\,R\,C\,\omega / [3(RC\omega)^2]$

tan φ =[1 -(RCω)^2] / (3RCω).

Calculer le gain T.

$\underline{N}$ = **3(RCω)^2+ [1 -(RCω)^2] jRCω**.

norme de $\underline{N}$: $N^2 = 9(RC\omega)^4 +[1 -(RC\omega)^2]^2 (RC\omega)^2$

$N^2 = 9(RC\omega)^4 +[1 -2(RC\omega)^2+(RC\omega)^4] (RC\omega)^2$

$N^2 = 9(RC\omega)^4 +(RC\omega)^2 -2(RC\omega)^4+(RC\omega)^6$

$N^2 = (RC\omega)^2 [1 +7(RC\omega)^2+(RC\omega)^4]$

$N= RC\omega[1 +7(RC\omega)^2+(RC\omega)^4]^{½}$.

Or D = **$1+7(RC\omega)^2 +(RC\omega)^4$**.

T= N/D = **$RC\omega [1 +7(RC\omega)^2+(RC\omega)^4]^{-½}$**.

Déterminer le maximum T_{max} de T et la fréquence f_0 correspondante.

Dériver T par rapport à ω : On pose x = RCω

T = **$x [1 +7x^2+x^4]^{-½}$**.

x= ; x' = 1

$v = [1 +7x^2+x^4]^{-½}$; $v'=-0,5 [14x+4x^3][1 +7x^2+x^4]^{-3/2}$.

$T ' = [1 +7x^2+x^4]^{-½} -0,5x [14x+4x^3][1 +7x^2+x^4]^{-3/2}$.

$T ' = [1 +7x^2+x^4]^{-3/2} \{[1 +7x^2+x^4] -0,5x [14x+4x^3] \}$

T ' = 0 si : $1 +7x^2+x^4=7x^2+2x^4$

$x^4 = 1$; $x = x_0 = 1$; $RC\omega_0 = 1$; $\omega_0 =1/(RC)$.

Or $\omega_0 =2\pi f_0$; **$f_0 = 1/(2\pi RC)$**.

T_{max} = **$[1 +7+1]^{-½}$** = **1/3**.

Il s'agit bien d'un maximum car lorsque x tend vers zéro ou l'infini, T tend vers zéro.

Calculer les fréquences de coupure e la largeur de la bande passante.

Les fréquences de coupures (à 3 dB) sont telles que : $T = T_{max} / 2^{½}$ ou $T^2 = ½ T^2_{max} = 1/18$.

soit $T^2 = \mathbf{x^2 [1 +7x^2+x^4]^{-1}} = 1/18$

$18x^2 = 1 +7x^2+x^4$; $1-11x^2+x^4=0$

Changement de variable : $X= x^2$; $1-11X + X^2=0$

$\Delta = 121-4 = 117$; $\Delta^{½} = 10,816$

$X_1 = (11-10,816)/2 = 0,0916$; $X_2 = (11+10,816)/2 = 10,908$.

$x_1 = 3,30$; $x_2 = 0,30$.

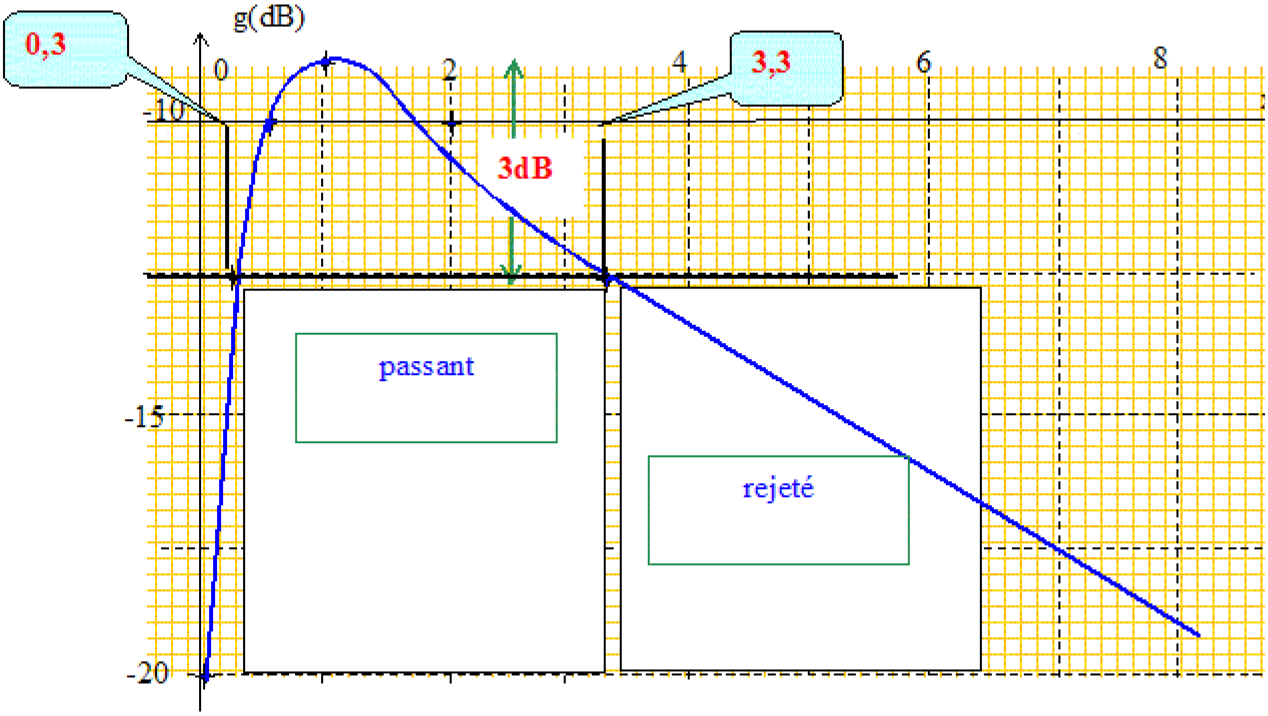
$f_1 = \mathbf{3,30\ f_0}$; $f_2 = \mathbf{0,30\ f_0}$; $\Delta f = f_1 - f_2 = \mathbf{3\ f_0}$.

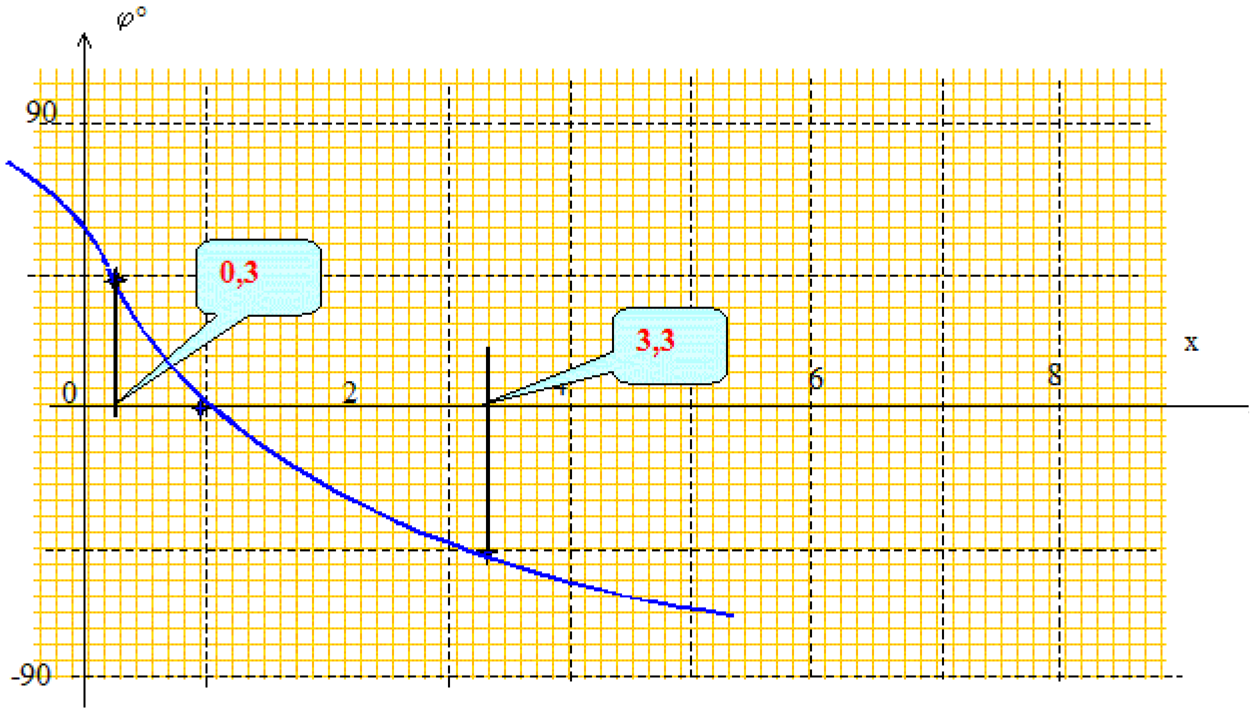
Tracer le diagramme de Bode en gain, en phase.

$\mathbf{T = [1/x^2 +7+ x^2]^{-½}}$.

Il faut représenter la fonction : g(dB) = 20 log T = $\mathbf{-10 \log (1/x^2 +7+x^2)}$

x	0,1	0,3	0,5	1	2	3,3	4	5	10
g(dB)	-20,9	-12,6	-10,5	-9,5	-10,5	-12,6	-13,6	-15	-20,3
φ(°)	73	45	28	0	-28	-45	-51	-58	-73





Etude d'un satallite dans le champ gravitationnel terrestre concours ITPE 2006

Introduction.

Qu'appelle t-on interaction newtonienne ? Donner deux exemples.

L'interaction de type newtonienne s'exprime sous la forme **k/r^2**. (k est une constante)

Gravitation (attractive) k = -GMm

Electrostatique (Coulomb) : attractive ou répulsive : $k= q_1q_2 / (4\pi\varepsilon_0)$.

Les forces newtoniennes sont des forces centrales.

Préciser ce terme. Citer des forces centrales qui ne sont pas newtoniennes.

La direction de la force passe par un point unique O.

La force est indépendante du temps.

La force ne dépend que de la distance r=OM.

La force linéaire de **Hooke** est " centrale", non "newtonienne" :

$$\vec{F}(M) = -k\,\vec{OM}$$ k : raideur d'un ressort.

Les forces proportionnele à $\mathbf{r^p}$ sont centrales, non newtoniennes.

On considère un point matériel M de masse m, soumis à une force centrale.

Montrer que le moment cinétique L_0 de la particule M par rapport au centre de force O est constant dans le temps. Conclure.

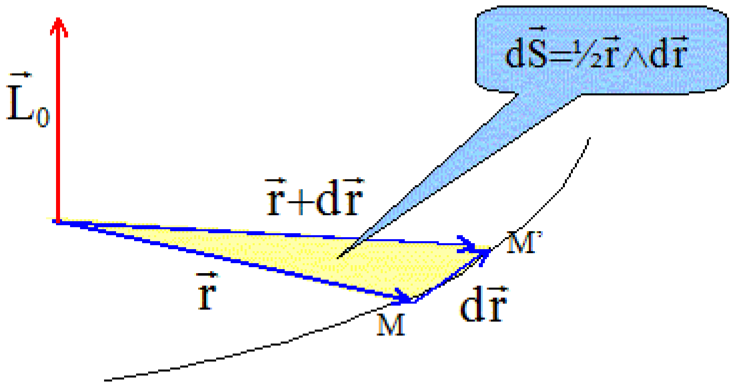
Théorème du moment cinétique en O.

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{OM} \wedge \left(\frac{1}{r^p}\right)\vec{OM} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{Cte}$$

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \vec{OM} \text{ et } \vec{v} \perp \text{ à } \vec{L}_0$$

Le moment cinétique étant un vecteur constant, **la trajectoire est plane**, contenue dans un plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique.

Qu'appelle t-on "loi des aires".



$$\vec{L}_0 = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{Cte}$$

$$L_0 dt = m\vec{r} \wedge d\vec{r} = 2m\,d\vec{S} \Rightarrow S = ½\boxed{\frac{L_0}{m}}t = ½\,Ct$$

OM est proportionnelle au temps.

C= L_0/m est la constante des aires.

La trajectoire est parcourue suivant la loi des

aires.

Dans un mouvementà force centrale, le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des durées égales.

Partie 1.

On assimile la terre à une sphère homogène de centre O, de rayon R et de masse M. L'objet de l'étude est un satellite terrestre S, assimilable à un point matériel de masse m, soumis au champ gravitationnel terrestre.

A quelle condition peut-on supposer que le mouvement du satellite peut s'étudier dans un référenteil galiléen lié à la Terre ?

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un objet isolé est soit immobile, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Un référentiel terrestre est galiléen dans la mesure où l'expéreince est de courte durée.

Le référentiel géocentrique (solide formé par le centre de la terre et les centres d'étoiles lointaines qui semblent fixes) est commode pour l'étude des satellites de la terre. Ce référentiel est galiléen pour des durées inférieures à 1 jour (on peut alors négliger la rotation de la terre autour du soleil).

Par la suite on étudie S dans un référentiel galiléen lié à la terre. On utilise le repère cylindrique. On note r la distance OS et v le module de la vitesse de S dans ce référentiel.

Utiliser le thèorème de Gauss pour calculer le champ gravitationnel terrestre en tout point de l'espace.

$$\iint \vec{g} \bullet d\vec{S} = -4\pi G \sum m_{\text{intérieure}}$$

On choisit comme surface S est une sphère de rayon r : $S = 4\pi r^2$.

$$4\pi r^2 g = 4\pi G \sum m_{\text{intérieure}} \Rightarrow g = \frac{G \sum m_{\text{intérieure}}}{r^2} ;\ \text{si } r>R,\ g = \frac{G M}{r^2}$$

Le vecteur champ de gravitation est dirigé vers O.

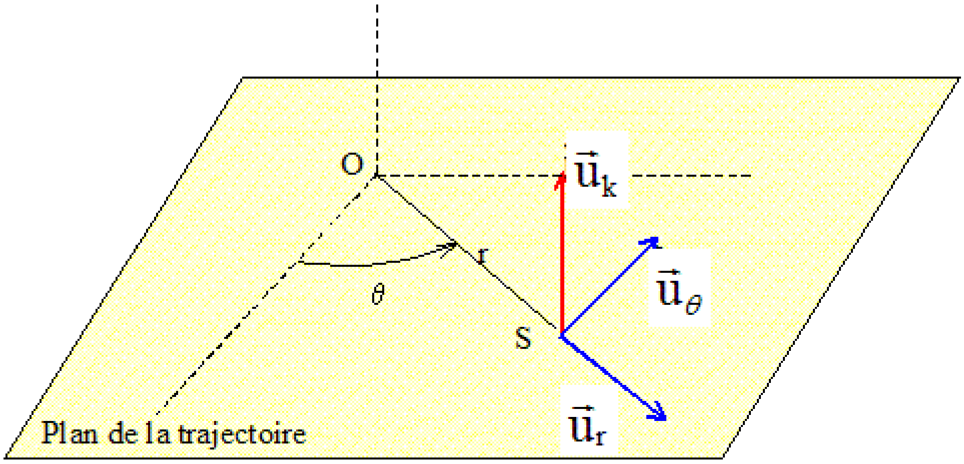
En déduire le potentiel gravitationnel V associé.

Le champ de gravitation dérive d'un potentiel scalaire V :(ce potentiel est nul à l'infini)

$$-\int_r^{\infty} g\,dr = GM\int_r^{\infty} -\frac{dr}{r^2} = GM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} = -\frac{GM}{r}$$

Expression de l'énergie mécanique du satellite.

L'énergie mécanique E est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.



$$\vec{OS} = r\,\vec{u}_r \;;\; \vec{v} = \frac{d r\,\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta \;;\; v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{mGM}{r} = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{mGM}{r}$$

avec C= $r^2\theta$ ' **constante des aires**.

Ecrire E sous la forme de deux termes : $E_{cr}(r') + E_{eff}(r)$.

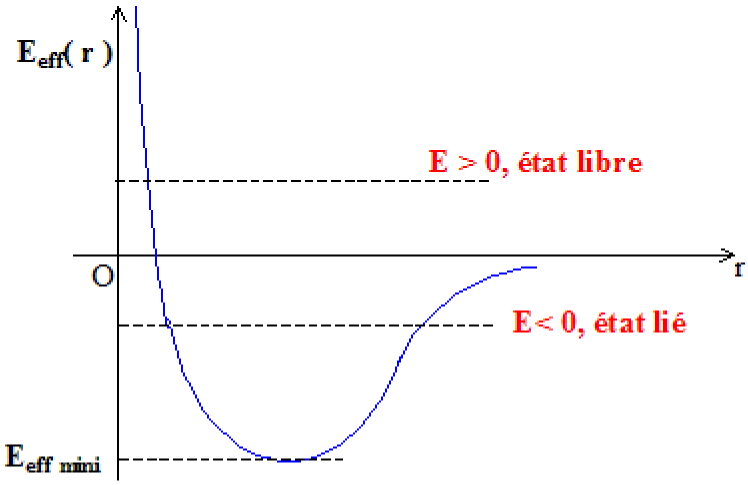
$$E = \tfrac{1}{2}m\,\dot{r}^2 + \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}m\,\frac{C^2}{r^2}} - \boxed{\frac{mGM}{r}}}_{E_{eff}(r)}$$

Terme répulsif

Terme attractif

Le terme ½mr'² représente l'énergie cinétique d'une particule de masse m effectuant un mouvement suivant r : énergie cinétique radiale.

Tracer l'allure de E_{eff} (r) en fonction de r.



Les trajectoires associées à une interaction newtonienne sont des coniques.

Préciser la nature de la conique-trajectoire en fonction du signe de E. On pose $|E|=E_0$.

E>0 et e >1 : hyperbole

E=0 et e=1 : parabole

$-E_{eff\ mini} < E < 0$ et $0<e<1$: ellipse

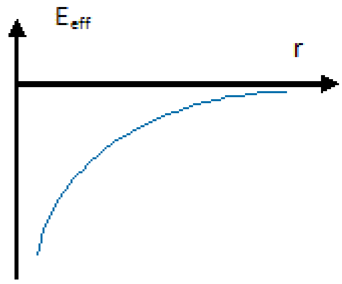
$E= -E_{eff\ mini}$: cercle

$E< -E_{eff\ mini}$: mouvement impossible ; l'énergie initiale est insuffisante pour satelliser S.

La trajectoire peut-elle être une droite ? Si oui, à quelle condition ? Tracer dans ce cas E_{eff} (r).

Si la vitesse initiale v_0 est dirigée vers le centre de la terre, la trajectoire est une droite.

E_{eff} ne contient plus que le terme attractif : -GmM / r ; la courbe est une branche d'hyperbole.



On se place dans le cas d'une trajectoire liée.

Exprimer le module v de la vitesse de S en fonction de E_0 et r. A quelle condition la trajectoire est-elle un cercle ?

$E_0 = ½mv^2$-GmM/r ; $v = [2(E_0/m + GM/r)]^{½}$.

La trajectoire est un cercle si E_{eff} est minimale. Dériver E_{eff} par rapport à r et chercher la valeur de r qui annule cette dérivée.

Exprimer le rayon du cercle en fonction de la vitesse initiale v_0 et des autres données.

$r = MG / v_0^2$.

Calculer $\mathbf{v_l}$, appelée première vitesse cosmique, vitesse initiale de S dans le cas limite ou le rayon du cercle est R_T.

$\mathbf{v_l} = (MG/R_T)^{½}$ avec $GM = g_0R^2{}_T$; $\mathbf{v_l} = (g_0R_T)^{½} = (9{,}8 * 6{,}4\ 10^6)^{½}$ ~ **8 km /s**.

Qu'appelle t-on vitesse de libération v_L pour le satellite S ? La calculer. Quelle est la trajectoire de S pour $\mathbf{v_0=V_L}$?

C'est la vitesse initiale permettant au satellite se s'éloigner indéfiniment de la terre (de se libérer de l'attraction terrestre)

L'énergie du satellite, (situé à l'infini) est nulle : $½mv_L^2 - GmM/R_T = 0$; $v_L^2 = 2GM/R_T$; $\mathbf{v_L} = 2^{½}\mathbf{v_l}$ ~ **11 km/s**.

pour $\mathbf{v_0=V_L}$ le satellite s'éloigne indéfiniment de la terre en décrivant un arc de parabole.

Dans le cas où l'énergie mécanique de S est strictement positive, **calculer v_{inf}, vitesse de S "à l'infini". Quel est alors le mouvement de S ? Préciser qualitativement sur le graphe le domaine de r pour lequel le mouvement s'observe. Que vaut alors la force exercée par la terre sur S** ?

La force exercée par la terre sur le satellite à l'infini est nulle. L'énergie potentielle est nulle (l'origine de cette énergie est prise à l'infini) ;

$E_0 = ½mv_{inf}^2$, valeur positive, la trajectoire est une hyperbole.

Le satellite S est embarqué à bord d'une navette spatiale qui le libère dans le plan équatorial terrestre en un point S_0 défini par la distance $OS_0 = r_0$ avec la vitesse initiale v_0.On se place toujours dans le référentiel galiléen précédent lié à la Terre.

Sachant que E= - GmM/(2a) , **calculer a, le demi grand-axe de l'ellipse-trajectoire en fonction de r_0 et v_0. A quelle condition sur v_0, cette ellipse est-elle un cercle de rayon r_0** ?

$E = -GMm/(2a) = ½mv_0^2 - GmM/r_0$; $1/(2a) = -½ v_0^2 /(GM) + 1//r_0 = (-½ v_0^2r_0 + GM) / (GMr_0)$; $2a = GMr_0 /(-½ v_0^2r_0 + GM)$.

Si $v_0^2r_0 = GM$, l'éllipse est un cercle.

Pour une trajectoire circulaire, établir une relation entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de S.

$E = -GMm/(2r) = E_c + E_p = ½m\,v^2 - GmM/r$; $E_c = -GMm/(2r) + GmM/r = ½GMm/r$; $E_c = -½E_p$.

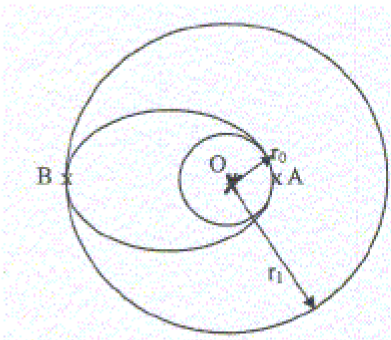
Calculer le rayon de cette orbite pour que le satellite soit « géostationnaire», c'est-à-dire fixe pour un observateur immobile par rapport à la surface de la Terre. On rappelle que la Terre effectue une rotation sur elle-même en 24h.

Ecrire la 3ème loi de kepler : $T^2/r^3 = 4\pi^2/(GM)$; $r^3 = GM\,T^2/(4\pi^2)$

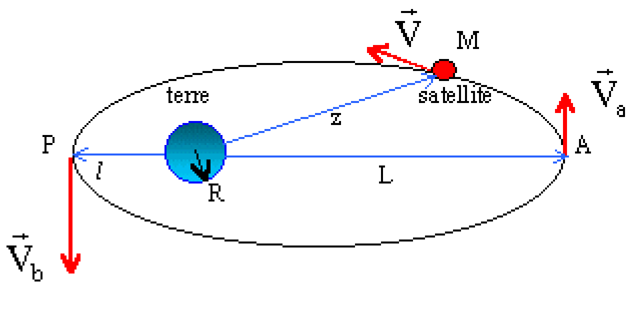
$r = [\,6{,}67\ 10^{-11} * 6\ 10^{24} * (24*3600)^2 / (4*3{,}14^2]^{1/3} = 4{,}2\ 10^7$ **m**.

L'altitude de l'orbite initiale atteignable par la navette n'est pas suffisante pour un satellite géostationnaire. L'orbite circulaire, de rayon r_0, sur laquelle est lâché le satellite dans un premier temp sest appelée «orbite basse». Il Ifaut ensuite transférer le satellitesur une «orbite haute» caractériséepar $OS=r_1$, r_1 étant

le rayon de l'orbite géostationnaire. Pour cela on utilise une trajectoire intermédiaire, elliptique, appelée« ellipse de transfert» de demi-grand axe $2a = r_0 + r_l$.



Sur la trajectoire elliptique, calculer les vitesses V_A et V_B du point S en A et B. Dessiner les vecteurs correspondants.



la force de gravitation est une force centrale, le moment cinétique se conserve

en particulier en A et P : on note $Z_a = R+L$ et $Z_p = R+ l$; m : masse du satellite

$m\,V_aZ_a = mV_pZ_p$; $V_aZ_a = V_pZ_p$; $V_p = V_aZ_a / Z_p$.

Le satellite est sur la trajectoire circulaire« basse» en A. A l'aide d'un moteur interne, on modifie par une brève impulsion sa vitesse et il passe sur la trajectoire elliptique. Quand il y est stabilisé, et qu'il passe en B, on modifie encore une fois sa vitesse par le même procédé afin qu'il se mette sur la trajectoire circulaire «haute ». **En déduire la variation d'énergie à communiquer au satellite pour chaque étape, puis pour l'ensemble de la manoeuvre. Cette variation totale est-elle positive ou négative** ?

L'énergie mécanique sur la trajectoire elliptique se conserve

aux points A et B : $E = - GMm / (r_1 + r_0)$.

énergie mécanique sur l'orbite circulaire basse au point A : $E_1 = -½ mGM / r_0$

variation d'énergie mécanique en A : $\Delta E = E - E_1 = - GMm / (r_1 + r_0) + ½ mGM / r_0$; $\Delta E = GMm (r_1 - r_0) / [2(r_1 + r_0)r_0]$.

ΔE est positive.

Energie mécanique sur l'orbite circulaire haute : au point B : $E_2 = -½ mGM / r_1$

variation d'énergie mécanique en A : $\Delta E = E_2 - E = - ½ mGM / r_1 + GMm / (r_1 + r_0)$; $\Delta E = GMm (r_1 - r_0) / [2(r_1 + r_0)r_1]$.

ΔE est positive.

amortisseur : oscillations mécaniques forcées concours ITPE (travaux publics) interne 2006

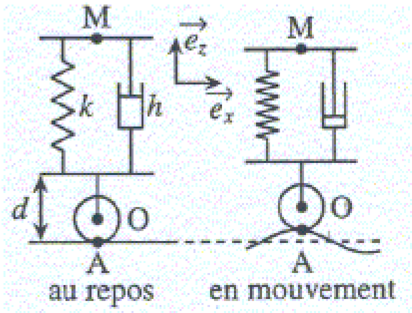
Un véhicule automobile est modélisé par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h.

On rappelle qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de M par rapport à O.

L'axe OM reste vertical.

On se propose d'étudier le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v suivant x sur une route dont le profil est défini par $\mathbf{z_A(x) = a \cos (2\pi x/\lambda)}$.

La roue et la partie basse de la suspension sont supposés indéformables (OA et d sont donc constantes).



Pour simplifier, on pourra supposer d=0. On note $z_O(t)$ la variation d'altitude du point O par rapport à la position au repos. On repère le mouvement de la masse par son élongation z(t) par rapport à sa position d'équilibre stable quand le véhicule est au repos. On admet que le référentiel lié au sol est galiléen.

Que représente λ dans l'expression de $z_A(x)$?

$$z_A(x) = a \cos (2\pi x/\lambda)$$

2π /λ a la dimension de l'inverse d'une longueur.

λ est une longueur " **période spatiale**" : distance séparant deux points consécutifs de la route se trouvant dans le même état.

Montrer que la force de frottement fluide peut s'écrire :

$$\boxed{\vec{f}=-h(\dot{z}-\dot{z}_0)\vec{e}_z}$$

vitesse de M par rapport au sol = vitesse de M par rapport à O + vitesse de O par rapport au sol

$$V_{M / sol} = V_{M /O} + V_{O / sol}$$

$$V_{M /O} = V_{M / sol} - V_{O / sol}$$

"une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse de M par rapport à O"

d'où l'expression de f ci-dessus.

Etablir l'équation différentielle en z(t) du mouvement de la masse lorsque la vitesse v suivant x est constante .

M est soumise à une force de rappel due au ressort et à la force de frottement fluide. Ecrire la seconde loi de Newton suivant z.

$$\boxed{-h(\dot{z}-\dot{z}_0)\,\vec{e}_z+kz(-\vec{e}_z)=m\ddot{z}\,\vec{e}_z}$$

$$\boxed{m\ddot{z}+h\dot{z}+kz=h\dot{z}_0}$$

$$\boxed{\ddot{z}+\frac{h}{m}\dot{z}+\frac{k}{m}z=\frac{h}{m}\dot{z}_0}$$

La vitesse v étant constante suivant x : x= vt

$$\mathbf{z_A(t)=z_O(t)=a\cos(2\pi vt/\lambda)}$$

$$z'_O=-2\pi av/\lambda\ \sin(2\pi vt/\lambda)$$

$$\boxed{\ddot{z}+\frac{h}{m}\dot{z}+\frac{k}{m}z=\frac{h}{m}\dot{z}_0=\frac{h}{m}\left(-\frac{2\pi av}{\lambda}\right)\sin\frac{2\pi vt}{\lambda}}$$

Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.

On pourra utiliser la notation complexe $\underline{z}$ =Z exp(jωt), calculer l'amplitude complexe Z et en déduire l'amplitude réelle correspondante.

La route joue le rôle d'excitateur : elle impose sa fréquence.

$\underline{z'}=Zj\omega\exp(j\omega t)=j\omega\underline{z}$

$\underline{z''}=-Z\omega^2\exp(j\omega t)=-\omega^2\underline{z}$

$-2\pi hav/(m\lambda)=A$; $2\pi/\lambda=\omega$; $A\sin(\omega t)$

Grandeur complexe associée : $A\exp(j\omega t)$

L'équation différentielle s'écrit :

$-\omega^2\underline{z}+h/m\ j\omega\,\underline{z}+k/m\,\underline{z}=A\exp(j\omega\Omega t)$

$[-\omega^2+k/m+j\,h/m\,\omega]\,\underline{z}=A\exp(j\omega t)$

amplitude complexe :

$$\underline{z}=\frac{A}{-\omega^2+\frac{k}{m}+j\frac{h\omega}{m}}=\frac{A\left(-\omega^2+\frac{k}{m}-j\frac{h\omega}{m}\right)}{\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)^2+\left(\frac{h\omega}{m}\right)^2}$$

amplitude réelle : module du nombre complexe z.

$$|\underline{z}|==\frac{A}{\sqrt{\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)^2+\left(\frac{h\omega}{m}\right)^2}}$$

A quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

Le dénominateur de l'expression ci-dessus doit être le plus grand possible.

C'est à dire $\omega^2 >> k/m$.

On doit se trouver le plus loin possible de condition de résonance ($\omega^2 = k/m$)

Or $z_A(x) = a \cos(2\pi vt/\lambda)$ soit $\omega = 2\pi v/\lambda$

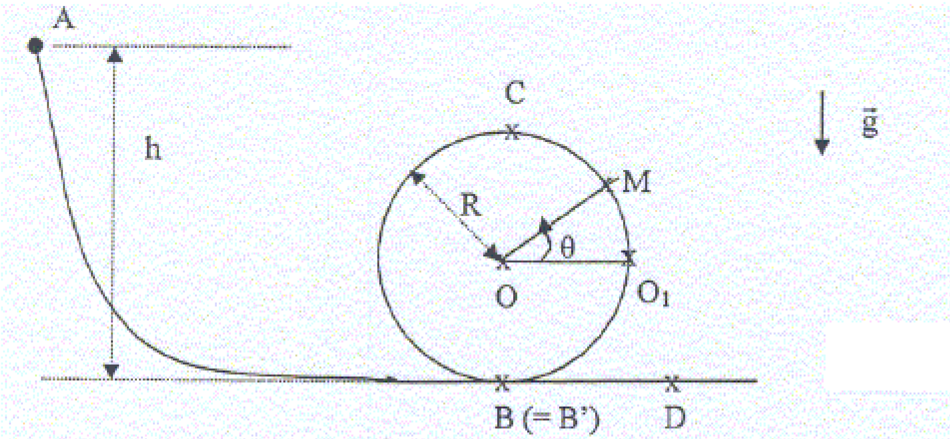
$$\mathbf{(2\pi v/\lambda)^2 >> k/m}$$

$$v >> \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mécanique : le looping, concours ITPE 2005

On considère un point matériel M de masse m pouvant se déplacer sans frottements sur le profil décrit sur la figure ci-dessous. Ce profil est un « support », le point M représente par exemple un petit véhicule de manège se déplaçant sur des rails et effectuant un « looping ». La hauteur h est supérieure au diamètre 2R.

Le point M est lâché sans vitesse initiale du point A. En B, il suit le profil circulaire décrit par la boucle de centre O et rayon R, en tournant dans le sens trigonométrique. Cette boucle est en fait une hélice très aplatie (en toute rigueur M passe en B' après la boucle; on admettra que B'= B). On considérera que le mouvement est circulaire sur la boucle BCB (et non hélicoïdal). Eventuellement de retour en B, le point continue sa course vers D, puis au delà.



Donnée s: m = 10 kg ; h = 20 m ; R = 5 m ;g = 10m s^{-2} (accélération de la pesanteur)

Calculer la vitesse V_B du point M en B. Comparer V_B et V_D.

Entre A et B, en l'absence de frottements, l'énergie mécanique se conserve.

L'énergie mécanique en A est sous forme potentielle de pesanteur : $E_M(A) = mgh$

L'énergie mécanique en B est sous forme cinétique : $E_M(A) = ½mV^2_B$.

La conservation de l'énergie mécanique conduit à : $V^2_B = 2\ gh$; $V_B = (2\ gh)^{½} = (20*20)^{½} =$ **20 m/s**.

Entre B et D, en l'absence de frottement, l'énergie mécanique se conserve : B et D étant à la même altitude, les énergies cinétiques en B et en D sont identiques.

Donc $\mathbf{V_B = V_D}$.

Exprimer la vitesse V du point M en un point de la boucle BCB.

altitude du point M (par rapport à B, origine des altitudes)

$h_M = R + R \sin\theta = R(1+\sin\theta)$

Energie mécanique du solide en M :

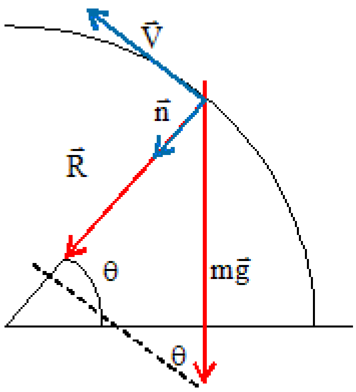
$E_M(M) = mgR(1+\sin\theta) + ½mV^2$.

Conservation de l'énergie mécanique : $E_M(M) = E_M(A)$

$mgR(1+\sin\theta) + ½mV^2 = mgh$

$\mathbf{V = (2g(h-R(1+\sin\theta)))^{½}}$.

Définir, exprimer et dessiner la réaction R exercée par le support sur le point matériel M.



$$\vec{R} + m\vec{g} = m\,\vec{a}$$

$$\text{suivant } \vec{n} : R + mg\sin\theta = m\frac{V^2}{R}$$

Réaction = m (V^2/R - g sin θ) et V^2 = 2gh -2g R(1+sin θ) ; **R**éaction = m (2gh/R -2g-3gsin θ)

Réaction = 10(20*20/5 -20 -30 sin θ) ; **R**éaction = 600-300 sin θ.

sin θ, fonction croissante entre -90° et +90 ° : donc **R**éaction décroît de 900 N à 300 N.

sin θ, fonction décroissante entre +90° et +270 ° : donc **R**éaction croît de 300 N à 900 N.

Réaction est minimale au sommet de la trajectoire et vaut 300 N ; avec h = 20 m, **R**éaction ne s'annule pas.

A quelle condition le point M quitte-t-i1 le profil ? En déduire une condition sur la hauteur h. Quel est alors son mouvement ultérieur ?

Réaction = m (2gh/R -2g-3gsin θ)

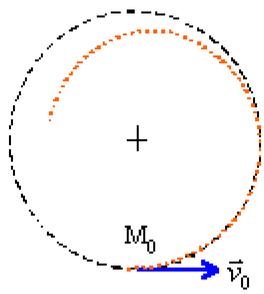
Si **R**éaction s'annule, le solide quitte la piste circulaire : 2gh/R -2g-3gsin θ = 0

Au point le plus haut (sin θ = 1), on ne quitte pas le profil si **R**éaction est supérieure ou égale à zéro.

2gh/R -2g-3g =0 ; 2h/R = 5 ; h = 2,5 R = 2,5*5 = **12,5 m**.

La valeur minimale de la hauteur h est 12,5 m, afin que le solide ne quitte pas la piste circulaire.

Si h est inférieure à 12,5 m, le solide quitte la piste avant d'atteindre le point le plus haut : son mouvement est alors une chute libre. (courbe orange)



Si le solide n'atteint pas le point O_1, il ne quitte pas le profil, mais rebrousse chemin.

Il en résulte un mouvement oscillatoire autour de B.

Hauteur minimale permettant d'atteindre O_1avec une viteese nulle :

mgh = mgR soit h=R = 5 m.

Si h est compris entre 5 m et 12,5 m, le solide quitte le profil et son mouvement ultérieur est une chute libre.

Calculer h_{lim},la hauteur limite (on précisera si elle est minimale ou maximale) afin que le point puisse atteindre le point D.

Pour atteindre le point D, il suffit de passer en C (après ça descend) avec une réaction du support supérieure ou égale à zéro. La hauteur cherchée est supérieure ou égale à 12,5 m (voir calcul ci-dessus).

Quelle est alors le mouvement de M sur la partie BD ? Le point s' arrêtera-t-il par la suite ?

Sur la partie BD, la vitesse reste constante : le mouvement est rectiligne uniforme.

D'après le principe d'inertie, le solide est soumis à des forces qui se neutralisent.

En l'absence de frottement, le solide se déplace à vitesse constante et ne s'arrête pas.

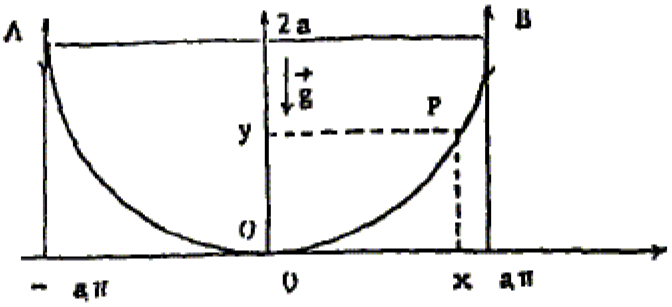
Mais dans la réalité, il existe des frottements et le solide va finir par s'arrêter.

Mécanique : anneau sur un morceau de cycloïde concours ITPE (travaux publics) interne 2004

Soit un plan vertical dans lequel on considère un référentiel cartésien (Oxy).

Dans ce plan, un fil de fer, de section négligeable, a la forme d'un morceau de cycloïde défini par ses équations paramétriques

$x = a(\Phi+\sin\Phi)$; $y = a(1-\cos\Phi)$. a constante positive ; Φ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.



Donner en fonction de Φ les différentielles dx et dy.

$dx = a(1+\cos\Phi)\, d\Phi$; $dy = a \sin\Phi\, d\Phi$.

En déduire celle de la pente $y'(\Phi)$ du graphe et vérifier que les tangentes qui y sont

représentées ont bien l'allure convenable y'(+ ou - π) et y'(0).

$y' = dy/dx = \sin \Phi / (1+\cos \Phi)$.

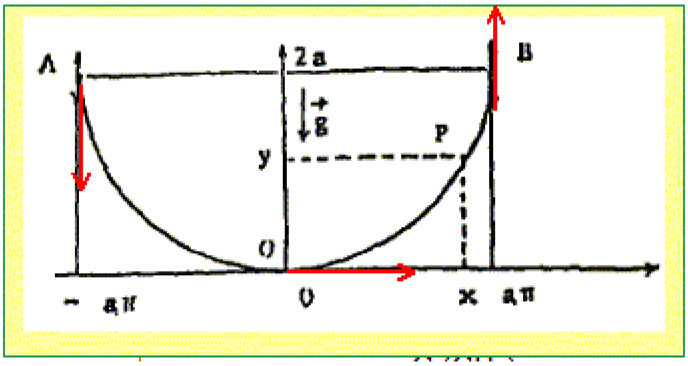
or $\sin \Phi = 2 \sin (½\Phi) \cos (½\Phi)$ et $1+ \cos \Phi = 2 \cos^2(½\Phi)$

d'où $y' = \tan(½\Phi)$

$y'(0) = 0$ = tangente horizontale

$y'(-\pi)$ tend vers - l'infini : tangente verticale ;

$y'(+\pi)$ tend vers + l'infini : tangente verticale.



On abandonne en A, sans vitesse initiale, un anneau de taille négligeable et de masse m qui glisse sans frottement sur le fil de fer.

Donner l'expression de la différentielle de l'abscisse curviligne s=OP de cet anneau, quand celui-ci se trouve au point P(x,y).

On rappelle que $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$.

$(dx)^2= a^2(1+\cos \Phi)^2 (d \Phi)^2 = a^2[1+2\cos \Phi+ \cos^2\Phi] (d \Phi)^2$

$(dy)^2 = a^2 \sin^2 \Phi (d \Phi)^2$

$(ds)^2 = a^2 [1+2\cos \Phi+ \cos^2\Phi+ \sin^2 \Phi] (d \Phi)^2$

$(ds)^2 = a^2 [1+2\cos \Phi+ 1] (d \Phi)^2$

$(ds)^2 = 2a^2 [1+\cos \Phi] (d \Phi)^2 = 4a^2 \cos^2(½\Phi)(d \Phi)^2$

$ds = 2a \cos(½\Phi) d \Phi$.

En déduire l'expression de l'abscisse curviligne s, dont l'origine est prise en O(0,0) en fonction de Φ.

$$s=2a\int_0^{\Phi}\cos(\tfrac{1}{2}\Phi)\,d\Phi=4a[\sin(\tfrac{1}{2}\Phi)]_0^{\Phi}=\boxed{4a\sin(\tfrac{1}{2}\Phi)}$$

Toujours pour cet anneau en P, trouver en fonction de Φ l'expression de :

L'énergie potentielle E_p , l'origine étant prise en O(0 ; 0).

$E_p= mg\ y = mg\ a\ (1-\cos\Phi)$

Or $1-\cos\Phi = 2 \sin^2(\tfrac{1}{2}\Phi)$ d'où $\mathbf{E_p= 2mga \sin^2(\tfrac{1}{2}\Phi)}$.

$E_p(0) = 0$; $E_p(\pi) =E_p(-\pi) = 2mga$.

L'énergie cinétique E_c.

$E_c= \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\ (ds/dt)^2$ avec $ds/dt = ds/d\Phi * d\Phi/dt = ds/d\Phi\ \Phi'$.

$E_c= \tfrac{1}{2}m\ \mathbf{[2a \cos(\tfrac{1}{2}\Phi)]^2}\Phi'^2 = \mathbf{2a^2\ m \cos^2(\tfrac{1}{2}\Phi)]^2\Phi'^2}$

L'énergie cinétique est nulle en A (pas de vitesse initiale) ; en conséquence elle est nulle en B.

L'énergie mécanique est constante (absence de frottement) et vaut 2mga

en O, l'énergie mécanique est sous forme cinétique et vaut : $E_c(0) = 2mga$.

Expression de l'énergie mécanique.

$E_M= E_p+E_c = \mathbf{2mga \sin^2(\tfrac{1}{2}\Phi)} + \mathbf{2a^2\ m \cos^2(\tfrac{1}{2}\Phi)]^2\Phi'^2}$

On pose $q= \sin(\tfrac{1}{2}\Phi)$.

Exprimer l'énergie mécanique en fonction de q et q'=dq/dt.

$q' = \tfrac{1}{2} \cos(\tfrac{1}{2}\Phi)\ \Phi'$.

$E_M=2mga\ q^2 + 8a^2\ m\ q'^2 = \mathbf{2\ ma\ (\ g\ q^2 + 4aq'^2\ )}$.

Montrer qu'une différentiation supplémentaire, par rapport au temps, de E_M conduit à une équation différentielle du type :

$q'' + \omega^2 q = 0$. Préciser la valeur de ω.

$E_M/ (2am) = \mathbf{g\ q^2 + 4aq'^2}$ = constante

différentier par rapport au temps :

$0 = 2gq\, q' + 8aq'\, q''$

$gq + 4a\, q''=0$ soit **$q'' + g/(4a)\, q=0$** avec **$\omega=[g/(4a)]^{½}$**.

En déduire la loi horaire q(t).

A t=0, l'anneau passe pour la première fois en O(0;0).

La solution de l'équation différentielle ci-dessus est du type $q= A \sin(\omega t+\varphi)$

Or à t=0, y=0 soit $\Phi= 0$; q=0.

$A \sin \varphi = 0$ conduit à $\varphi = 0$ et **$q= A \sin(\omega t)$**

Comment trouver A ?

$q'(0) = A\omega$

En O l'énergie mécanique st sous forme cinétique et vaut : $2mga =8a^2\, m\, q'^2$ soit $q'= [g/(4a)]^{½}$.

par suite : $[g/(4a)]^{½} = A\omega$; $A= [g/(4a)]^{½} / \omega$; $A= [g/(4a)]^{½} [g/(4a)]^{-½} =1$

$q=\sin(\omega t)$

Donner l'expression de s(t) :

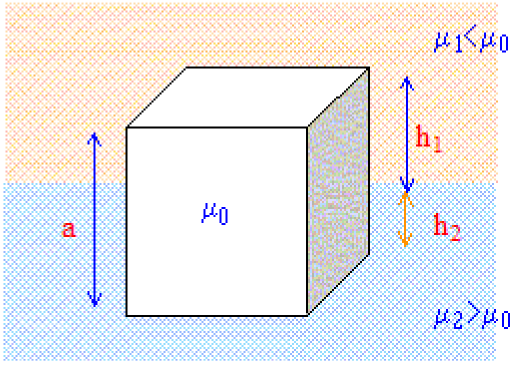
$s(t) = 4a \sin(½\Phi) =$ **$4a \sin(\omega t)$**.

hydrostatique : cube en équilibre entre deux liquides concours ITPE (travaux publics) interne 2004

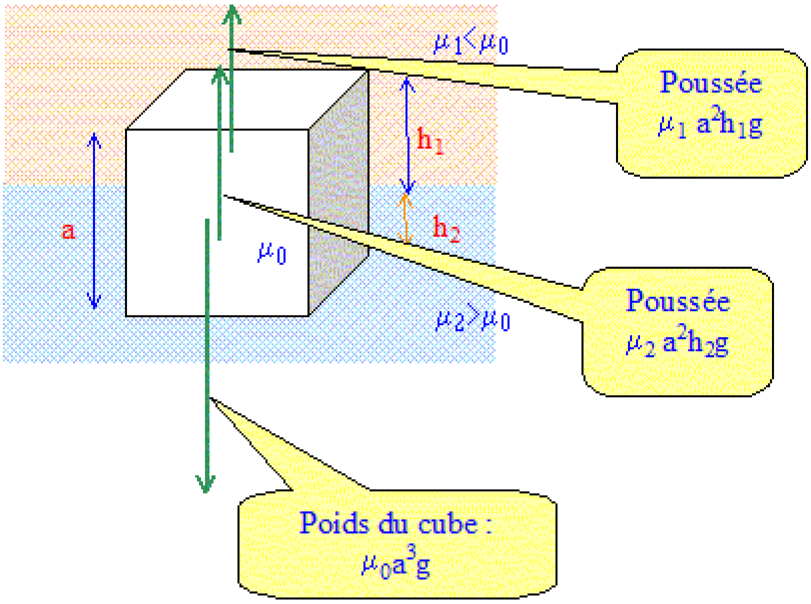
Un cube de coté a et de masse volumique μ_0 est immergé entre deux liquides de masse volumique respective μ_1 et μ_2.

Déterminer les hauteurs h_1 et h_2 d'immersion dans les liquides lorsque le cube est à l'équilibre.

A.N : a = 5 cm ; μ_1 =0,7 kg L^{-1} ; μ_0 =0,8 kg L^{-1} ; μ_2 =1 kg L^{-1}.



Le cube est en équilibre sous l'action de son poids, vertical, vers le bas et des deux poussées d'Archimède, verticales vers le haut.



A l'équilibre les forces se neutralisent.

$$\mu_0 a^3 g = \mu_1 a^2 h_1 g + \mu_2 a^2 h_2 g$$

$$\mu_0 a = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 \ (\mathbf{1})$$

De plus $\mathbf{a = h_1+h_2}$ d'où après repport dans (1) :

$$\mu_0 h_1 + \mu_0 h_2 = \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2.$$

$$h_1 (\mu_0 - \mu_1) = h_2(\mu_2 - \mu_0)$$

$$\mathbf{h_1 / h_2 = (\mu_2 - \mu_0) / (\mu_0 - \mu_1)} = (1\text{-}0{,}8) / (0{,}8\text{-}0{,}7) = 2$$

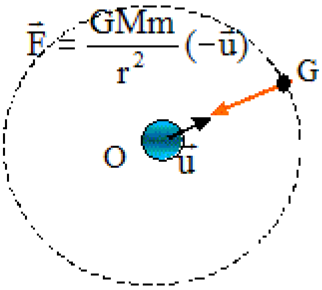
$$\mathbf{h_1 = 2\ h_2}\ ;\ \mathbf{h_2} = a/3 = 5/3 = \mathbf{1{,}67\ cm}.$$

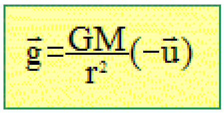
$$\mathbf{h_1} = \mathbf{3{,}33\ cm}.$$

Satellite : période, énergie mécanique concours ITPE (travaux publics) interne 2003

On admet que la terre est une sphère de centre C, de rayon R, de masse M.

Pour un point P, le champ gravitationnel terrestre est , avec CP et r > R.





La valeur de ce champ au sol est $g_0 = 10$ m/s^2.

On donne R= 6400 km ; masse du satellite m = 20 kg ; altitude du satellite z = 12,8 km.

Calculer l'énergie nécessaire pour amener la masse m de l'altitude zéro jusqu'à l'altitude z.

La vitesse initiale et la vitesse finale sont supposées nulles.

L'énergie à mettre en oeuvre est égale à l'opposée du travail du poids.

E= m g z.

$E = 20 * 10 * 12{,}8\ 10^3 = \underline{\mathbf{2{,}56\ 10^6}}$ **J**.

Calculer la période T de cette masse satellisée en orbite circulaire autour de la terre à l'altitude z.

Ecrire la troisième loi de Kepler

$$\mathbf{T^2 / r^3 = 4\pi^2/(GM) = 4\pi^2/(g_0R^2)}.$$

avec $r = R+z = 6400+12{,}8 = 6412{,}8$ km $= 6{,}4128\ 10^6$ m.

$R= 6{,}4\ 10^6$m ; $g_0 = 10$ m/s².

$T^2 = r^3\ 4\pi^2/(g_0R^2)$; $\mathbf{T = 2\pi/R\ (r^3/g_0)^{½}}$.

$T= 2*3{,}14/6{,}4\ 10^6\ ((6{,}4128\ 10^6)^3 / 10)^{½} = \underline{\mathbf{5{,}04\ 10^3}}$ **s**.

Calculer l'énergie mécanique de ce satellite.

$$E_M = -GMm/(2r) = -g_0R^2m/(2r).$$

$E_M = -20*10\ (6{,}4\ 10^6)^2\ /(2*\ 6{,}4128\ 10^6)$

$E_M = -6{,}38\ 10^8$ **J.**

Le même satellite sera considéré sur une orbite circulaire rasante autour de la terre, puis autour de la lune.

Démontrer que la période de révolution d'un tel satellite ne dépend que de la masse volumique de la planète.

$$T^2 / r^3 = 4\pi^2/(GM)$$

$$T^2 = 4\pi^2 r^3/(GM) \quad (1)$$

masse (kg) = masse volumique (kg m^{-3}) * volume (m^3)

$M = \rho\ 4/3\pi\ r^3$ avec r voisin de R

$4\pi r^3\ /M = 3/\rho.$

Repport dans **(1)** : $T^2 = 3\pi/(G\rho)$

$$T = [3\pi/(G\rho)]^{1/2}.$$

Calculer la masse volumique ρ de la terre. $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ SI

$\rho = 3\pi/(GT^2)$ avec $T = 5{,}04\ 10^3$ s ; $T^2 = 2{,}54\ 10^7$.

$\rho = 3*3{,}14\ /\ (6{,}67\ 10^{-11}*2{,}54\ 10^7) = 3*3{,}14/(6{,}67*2{,}54) = 5{,}56\ 10^3$ **kg m^{-3}.**

Calculer la masse volumique ρ' de la lune sachant que 8T'=9T avec T' période de révolution autour de la lune.

$$\rho' = 3\pi/(GT'^2)$$

$T'^2 = 81/64\ T^2$

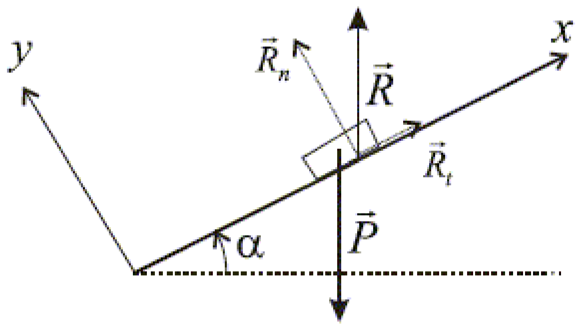
$\rho' = 3\pi/(GT^2)*64/81 = \rho*64/81.$

$\rho' = 5{,}56\ 10^3*64/81 = 4{,}4\ 10^3$ **kg m^{-3}.**

propriétés mécanique d'un verre : coefficient de frottement, modèle d'élasticité
concours Mines 04

Coefficient de frottement :

On se propose de mesurer le coefficient de frottement du verre sur le verre, note μ. Pour cela, on dispose d'une grande vitre plane et d'un petit morceau de verre parallèlépipédique de masse m. On pose le petit morceau de verre sur la vitre initialement horizontale et on incline doucement la vitre. On notera α l'angle que fait la vitre avec l'horizontale.



Le coefficient de frottement μ est défini comme suit : tant que le morceau de verre ne glisse pas sur la vitre, la norme de la composante tangentielle de la réaction du support est inférieure à μ fois la norme de la composante normale de la reaction : $\boxed{\|\vec{R}_t\| \leq \mu \|\vec{R}_n\|}$

En supposant que le petit morceau de verre soit immobile,

exprimer les composantes normale et tangentielle de la réaction en fonction de la masse m du petit morceau de verre, de l'accélération de la pesanteur g et de l'angle α.

A l'équilibre le poids du morceau de verre est opposée l'action du plan : mg = R

$R_t = mg \sin \alpha$; $R_n = mg \cos \alpha$.

En déduire une condition sur l'angle α et sur le coefficient de frottement μ pour que le petit morceau de verre ne glisse pas.

$R_t <= \mu R_n$; $\sin \alpha <= \mu \cos \alpha$; **$\tan \alpha <= \mu$.**

Expérimentalement, on remarque que pour $\alpha >= 35°$ le petit morceau de verre se met à glisser.

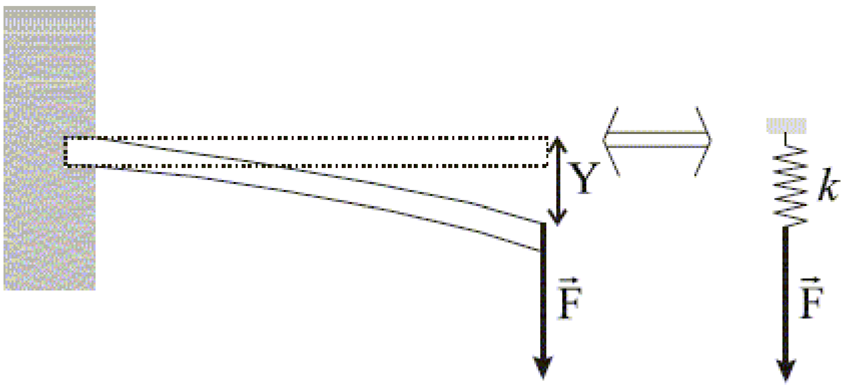
En déduire la valeur de μ.

$\mu = \tan 35 =$ **0,70**.

Un modèle d'élasticite d'une fibre de verre :

Le verre est un matériau très dur. On peut toutefois le déformer légèrement sans le casser : on parle d'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice aminciée à l'extremité de laquelle on accroche un brin d'ADN. L'expérience consistait à suivre la déformation de flexion de la fibre. La masse volumique du verre est ρ= 2500 kg.m^{-3}.

La fibre de verre de longueur L et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids). Quand on applique une force verticale F (on supposera que la force F reste verticale tout au long de l'expérience) à l'extremité libre de la fibre, celle-ci est deformée. L'extremité est déplacée verticalement d'une distance Y que l'on appelle la flêche.



La flèche Y est donnée par la relation suivante (on notera la présence du facteur numérique 7, sans dimension, qui est en fait une valeur approchée pour plus de simplicité) :

$$\boxed{Y = \frac{7L^3F}{Ed^4}}$$

où E est le module d'Young du verre. Pour les applications numériques on prendra pour le module d'Young E=7.10^{10} SI.

Quelle est l'unité SI du module d'Young E ?

E = 7L^{3}F/(Yd^4).

7 est sans dimension ; Y et d sont des longueurs : $[Yd^4]= L^5$; L est une longueur : $[L^3]=L^3$;

F est une force , une masse fois une ccélération :$[F] = MLT^{-2}$;

d'où $[E] =L^3\, MLT^{-2}\, L^{-5} =$ $\mathbf{M\, L^{-1}T^{-2}}$.

En considérant uniquement la force F, **montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression analytique en fonction de E, d et L**.

$$\boxed{Y = \frac{7L^3F}{Ed^4}}$$ donne :

$F =YEd^4/(7L^3) = k(Y-0)$ avec $\mathbf{k = Ed^4/(7L^3)}$.

Calculer numériquement k pour une fibre de longueur L= 7 mm et de diamètre d = 10 µm.

$k = 7.10^{10}\, (10^{-5})^4 / (7*(7\, 10^{-3})^3)) =$ $\mathbf{2{,}9\ 10^{-4}\ N\ m^{-1}}$.

Démontrer l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur k, lorsque sa longueur est L.

L'énergie potentielle élastique est l'opposée du travail de la force de rappel -kx avec $x= L-L_0$. (ici $L_0=0$)

$$\boxed{E_{pé} = -W_{0\to L} = -\int_0^L -kxdx = ½kL^2}$$

En reprenant l'analogie du ressort, quelle est alors l'énergie potentielle élastique de la fibre de verre lorsque la flèche vaut Y ?

On donnera la relation en fonction de E, d et L.

$E_{pé} = ½k\, Y^2 =$ $\mathbf{Ed^4/(14L^3)Y^2}$.

On a tous fait l'expérience suivante : faire vibrer une règle ou une tige lorsque une de ses extrémités est bloquée. On cherche ici à chercher les grandeurs pertinentes qui fixent la fréquence des vibrations. L'extrémité de la tige vaut Y(t) à l'instant t. On admet que lors des vibrations de la fibre, l'énergie cinétique de la fibre de verre est donnée par l'expression :

$\mathbf{E_c =\rho Ld^2\, [dY/dt]^2}$.

Ecrire l'expression de l'énergie mécanique de la fibre en négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$\mathbf{E_M = Ed^4/(14L^3)Y^2 + \rho Ld^2\, [dY/dt]^2}.$$

Justifier que l'énergie mécanique se conserve au cours du temps. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.

En absence de force non conservative (frottement par exemple) , l'énergie mécanique se conserve.

Dériver l'expression de l'énergie mécanique par rapport au temps :

$$0 = 2Ed^4/(14L^3)\, Y\, .dY/dt + 2\rho Ld^2\, [dY/dt]\, d^2Y/dt^2.$$

Simplifier par $2d^2dY/dt$:

$$0 = Ed^2/(14L^3)\, Y + \rho L\, d^2Y/dt^2.$$

$$\mathbf{0 = Ed^2/(14\rho L^4)\, Y + d^2Y/dt^2}.$$

Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration d'une tige de verre de module d'Young E, de longueur L et de diamètre d.

pulsation $\omega_0^2 = Ed^2/(14\rho L^4)$; $\omega_0 = d/L^2\, [E/(14\rho]^{½}$; fréquence $f_0 = \omega_0 /(2\pi)$

$$\mathbf{f_0 = d\, [E/(14\rho]^{½} /(2\pi L^2)}.$$

Calculer numériquement la fréquence des vibrations d'une fibre de verre de longueur 7 mm et diamètre 10 µm.

$$f_0 = 10^{-5}\, [7.10^{10} / (14*2500)]^{½} / (6{,}28*49\ 10^{-6})$$

f_0 = **46 Hz**.

Etude du mouvement de quelques satellites concours Mines 03

La Terre possède un seul satellite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre, dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense…

Cette partie se propose d'étudier quelques caractéristiques du mouvement des satellites terrestres.

Dans cette partie, on désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre.

On donne R_T = 6370 km, $M_T = 5{,}98.10^{24}$ kg.

On rappelle que la constante de gravitation universelle a pour valeur $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}.

Mouvement de la Lune autour de la Terre.

Le centre L de la Lune décrit, de manière uniforme, autour de la Terre, une orbite circulaire de centre T telle qu'en un jour le segment [TL] balaie un angle de 0,230 radian.

Déterminer, en jours, la période T_L de ce mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre.

T_L correspond à 2π radians ; un jour corespond à 0,230 rad.

d'où $T_L = 2\pi / 0{,}230$ = **27,3 jours**.

Sachant que le rayon R_{TL} de l'orbite circulaire décrite par la Lune est de $3{,}84.10^5$ km,

en déduire la valeur de la masse de la Terre

3^{è} loi de Kepler : $\mathbf{T^2_L / R^3_{TL} = 4\pi^2/(GM_T)}$.

$M_T = 4\pi^2 R^3_{TL}/(GT^2_L)$

avec $R_{TL} = 3{,}84\ 10^8$ m ; $R^3_{TL} = 5{,}66\ 10^{25}$; $T_L = 27{,}3*24*3600 = 2{,}36\ 10^6$ s ; $T^2_L = 5{,}57\ 10^{12}$.

M_T=4*3,14^2* 5,66 10^{25}/(6,67.10^{-11} *5,57 10^{12}) ; **M_T= 6,0 10^{24} kg**.

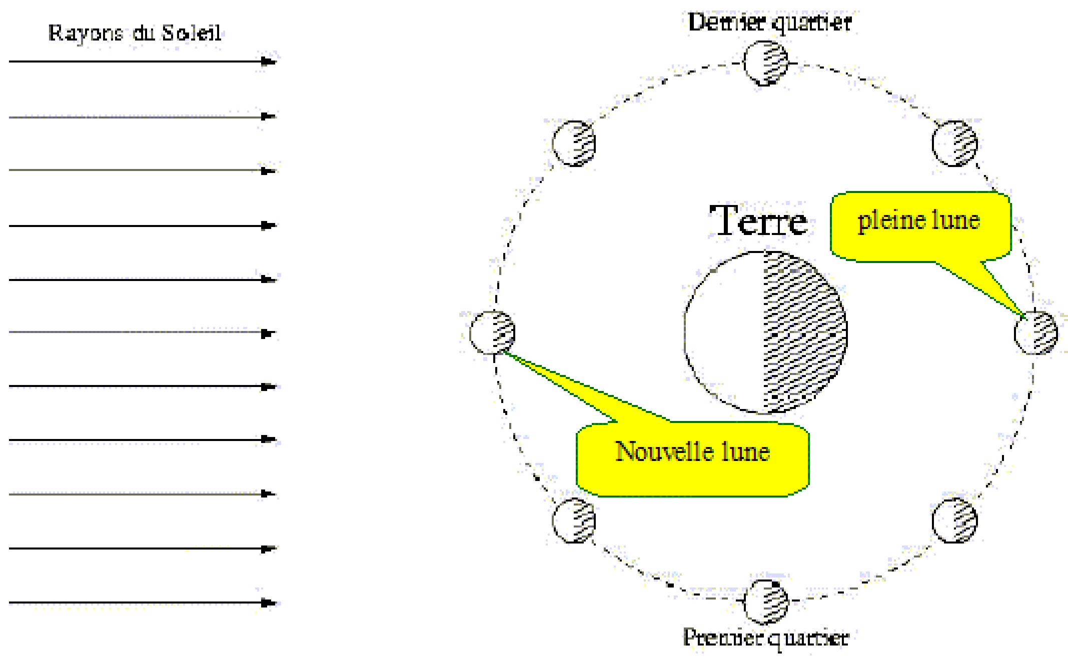
On sait que la Lune, dans son mouvement autour de la Terre, nous présente toujours la même face.

En déduire les caractéristiques du mouvement propre de la Lune.

La lune tourne sur elle même : elle effectue un tour en 27,3 jours.

Le schéma suivant représente les différentes phases de la Lune. On dit que la Lune est nouvelle lorsque la face qu'elle présente à la Terre n'est pas éclairée.

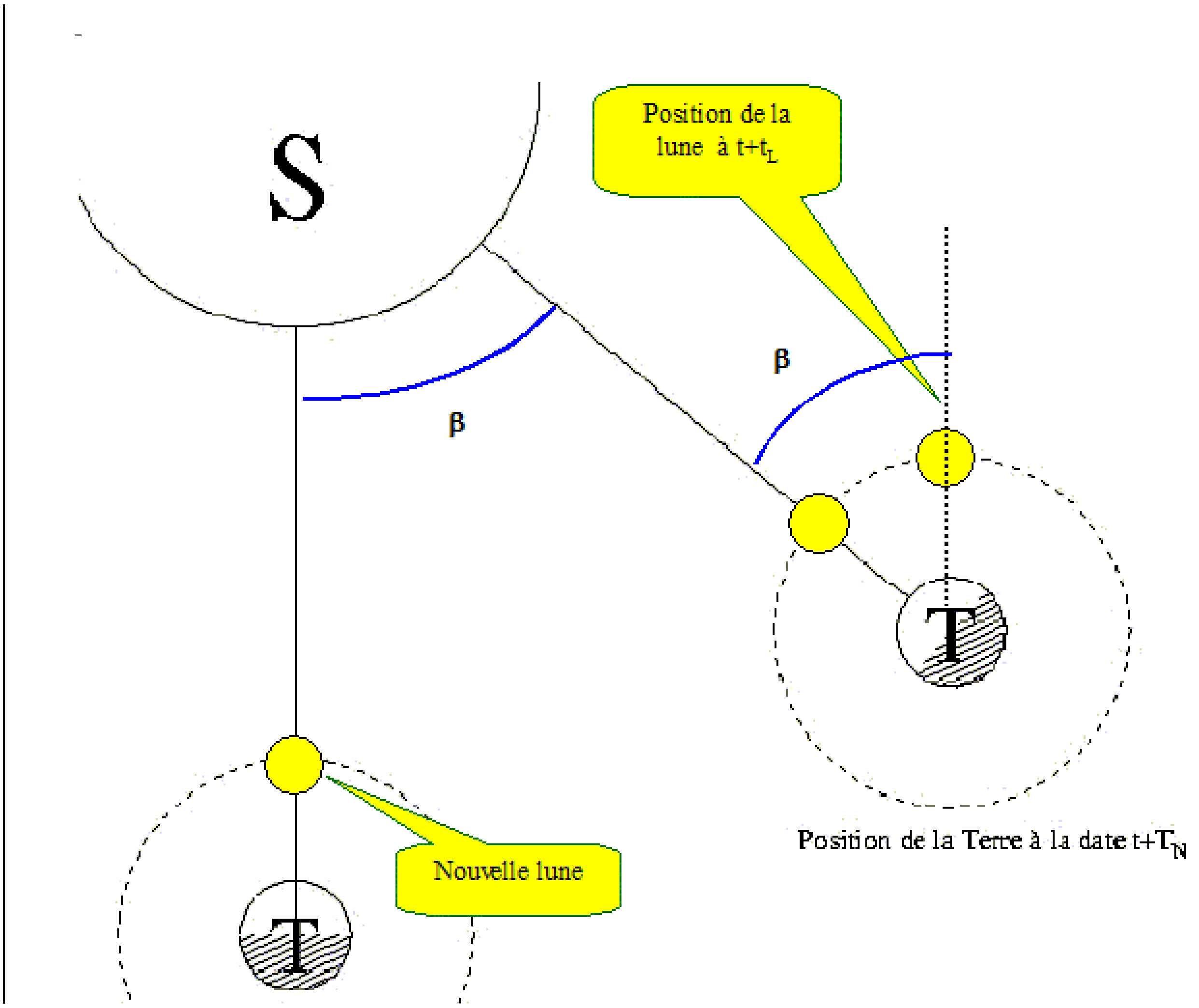
Identifier la nouvelle Lune sur ce schéma, et préciser comment elle est alors vue depuis la Terre.



Le cycle des phases de la Lune, appelé lunaison, dure T_N = 29,5 jours. Pour expliquer la différence entre cette durée, et la période du mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre, on doit prendre en compte le mouvement de la Terre autour du Soleil.

Sur le schéma (II) de la feuille annexe, dessiner les positions de la Lune lors des nouvelles lunes successives à t et t + T_N.

Dessiner aussi la position de la lune à la date t + T_L.



Sachant que la Terre est en orbite circulaire de période T_T = 365 jours autour du Soleil, retrouver la valeur de T_N = 29,5 jours pour la lunaison.

En 27,3 jours, la terre décrit autour du soleil un angle $\beta = 2\pi * 27,3/365 = 0,47$ rad.

La lune se retrouve à la position " nouvelle lune" lorsqu'elle a parcouru sur son orite un angle de $2\pi + 0,47 = 6,75$ rad.

Ce qui correspond à : 6,75/0,23 = 29,4 jours.

Quelques aspects de la satellisation.

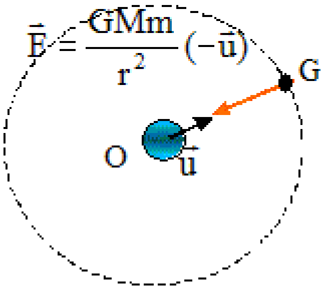
En l'absence de précision explicite, on négligera tout frottement dû à l'atmosphère sur le satellite.

On s'intéresse à un satellite artificiel, de masse m, en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.

Montrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme, et exprimer littéralement la vitesse v_0.

Schéma représentant la terre, le satellite sur sa trajectoire et la force exercée par la terre sur le satellite.

On note **r = R +h**.



$$\boxed{m\vec{a} = \frac{GMm}{r^2}(-\vec{u})}$$

Référentiel d'étude du mouvement du satellite : **géocentrique**.

L'origine du repère est le centre de la terre.

La force de gravitation est centripète, perpendiculaire à la vitesse : la puissance de cette force est donc nulle.

En conséquence, cette force ne modifie pas la valeur de la vitesse : le mouvement est uniforme.

Expression du vecteur accélération a du point G.

$$\boxed{m\vec{a} = \frac{GMm}{r^2}(-\vec{u})} \qquad \boxed{\vec{a} = \frac{GM}{r^2}(-\vec{u})}$$

Caractéristiques du vecteur accélération d'un point matériel ayant un mouvement circulaire uniforme :

Ce vecteur est appliqué au point G ; il est dirigé de G vers O : on dit que l'accélération est centripète.

La valeur de l'accélération s'exprime par : **$a = v^2/r$**.

v : vitesse en m/s et r (m) rayon de l'orbite circulaire.

Vitesse du satellite :

$$\boxed{a = \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}} \qquad \boxed{v^2 = \frac{GM}{r}}$$

remarquons que $GM = g_0 R^2_T$.

Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude h = 832 km au-dessus de la Terre.

Calculer numériquement la vitesse v_0 de SPOT sur son orbite.

r = 6,37 10^6 + 8,32 10^5 =7,53 10^6 m ; v=6,37 10^6.[9,81/7,02 10^6]^{½} =**7,5 10^3 m/s**.

La vitesse de libération v_l d'un satellite est la plus petite vitesse qu'il faut lui communiquer à la surface de la Terre pour qu'il aille à l'infini (en « se libérant » de l'attraction terrestre).

Exprimer v_l en fonction de G, M_T et R_T et calculer sa valeur.

Energie mécanique du satellite à la surface de la terre : E_M= -GM_Tm/R_T + ½mv^2_l.

Energie mécanique du stellite à l'infini : E_M=0.

Conservation de l'énergie mécanique : -GM_Tm/R_T + ½mv^2_l=0

v^2_l= $2GM_T/R_T$; **v_l= [$2GM_T/R_T$]^{½}**.

v_l =[2*6,67.10^{-11}*5,98.10^{24}/6,37 10^6]^{½} ; **v_l =11,2 10^3 m/s**.

Dans le cas d'une orbite circulaire du satellite autour de la Terre, montrer que l'énergie mécanique E_m du satellite est liée à son énergie cinétique E_c par : E_m = - E_c.

On note r =R_T+h avec h : altitude du satellite.

E_m= -GM_Tm/r + ½mv^2.

de plus v^2 = GM_T/r d'où : E_m= -GM_Tm/r + ½GM_Tm/r = -½GM_Tm/r = -E_c.

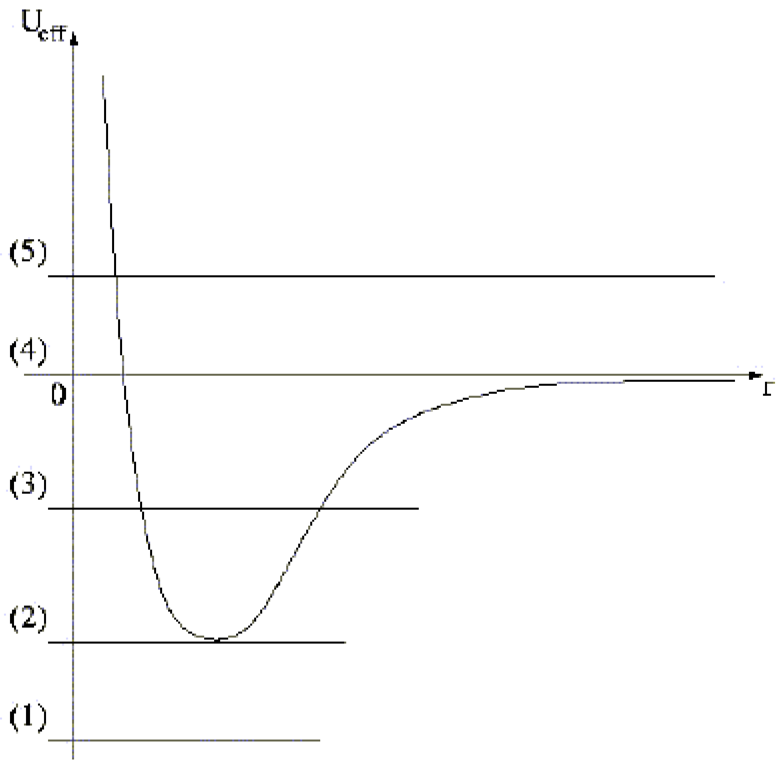
Si l'on tient à présent compte de la force de frottement de l'atmosphère sur le satellite, en déduire, en le justifiant, son effet sur la vitesse du satellite.

L'énergie mécanique du satellite diminue sous l'effet des frottements.

Or E_m = -E_c : l'énergie cinétique du satellite augmente ; la vitesse du satellite croît.

Pour un satellite de masse m en mouvement (quelconque) autour de la Terre, et uniquement soumis à la force gravitationnelle terrestre, l'énergie mécanique peut s'écrire de la même façon que celle d'un point matériel en mouvement rectiligne placé dans un potentiel effectif $U_{eff}(r)$ dont la courbe représentative est donnée :

E= ½m$(dr/dt)^2$+$U_{eff}(r)$ avec r la distance du satellite au centre de la Terre.



Après avoir justifié que l'énergie mécanique E du satellite est une constante de son mouvement, préciser, pour chacune des valeurs de E (notées de (1) à (5)) représentées sur la figure 4, la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état, lié ou de diffusion.

Le satellite est soumis à la force de gravitation conservative exercée par la terre : l'énergie mécanique est donc constante.

position (1) : E <U_{eff}(r) ce qui impliquerait ½m(dr/dt)^2 : c'est impossible.

position (2) : état lié : mouvement circulaire uniforme.

position (3) : état lié : la trajectoire est une ellipse.

position (4) : état libre : la trajectoire est une parabole.

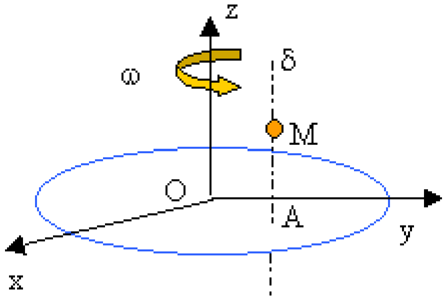
position (5) : état libre : la trajectoire est une hyperbole.

un petit cheval de bois sur un manège

1 Le manège est constitué d'un disque de centre O tournant autout de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante. Le référentiel d'étude est galiléen. Le cheval de bois M effectue un mouvement vertical suivant l'axe δ, d'amplitude a; le mouvement du

coordonnées cartésiennes, cylindriques.

cheval est périodique : $z = a(1+\sin(\Omega t))$



1. Donner les équations paramètriques du mouvement du cheval M ainsi que sa trajectoire.
2. Donner les coordonnées etle module du vecteur vitesse.
3. Donner les coordonnées et le module du vecteur accélération.
4. Reprendre les calculs précédents en coordonnées cylindriques (l'origine des angles polaires coincide avec Ox).

corrigé

équation horaires du mouvement de M :

$$x(t) = OA\cos(\omega t) = R\cos(\omega t)$$

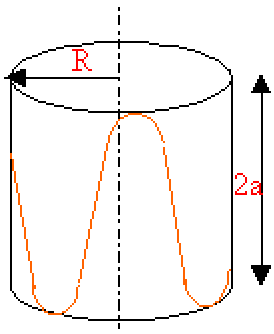
$$y(t) = OA\sin(\omega t) = R\sin(\omega t)$$

$$z(t) = a(1+\sin(\Omega t))$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ et } z^2 = a^2(1+\sin(\Omega t))^2$$

$$OM^2 = R^2 + a^2(1+\sin(\Omega t))^2$$

la trajectoire est représentée ci dessous.



Le vecteur vitesse est la dérivée par rapport au temps du vecteur position:

dérivée de : $\cos(\omega t)$: $-\omega \sin(\omega t)$

dérivée de : $\sin(\omega t)$: $\omega \cos(\omega t)$

$x'(t) = R(-\omega)\sin(\omega t)$

$y'(t) = R\omega\cos(\omega t)$

$z'(t) = a\Omega\cos(\Omega t)$

$$v^2 = R^2\omega^2 + a^2\Omega^2\cos^2(\Omega t)$$

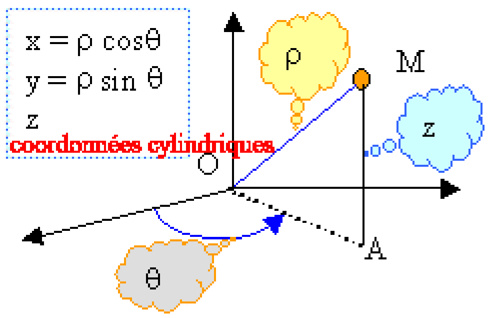
le vecteuraccélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse :

$$x''(t) = -R\omega^2 \cos(wt) = -\omega^2 x(t)$$

$$y''(t) = -R\omega^2 \sin(wt) = -\omega^2 y(t)$$

$$z''(t) = -a\Omega^2\sin(\Omega t)$$

$$a^2 = R^2\omega^4 + a^2\Omega^4\sin^2(\Omega t)$$



vecteur position : $\rho = R$; $\theta = \omega t$; $z = a(1+\sin(\Omega t))$

trajectoire : $\rho = R$; $z = a(1+\sin(\Omega/\omega\ \theta))$

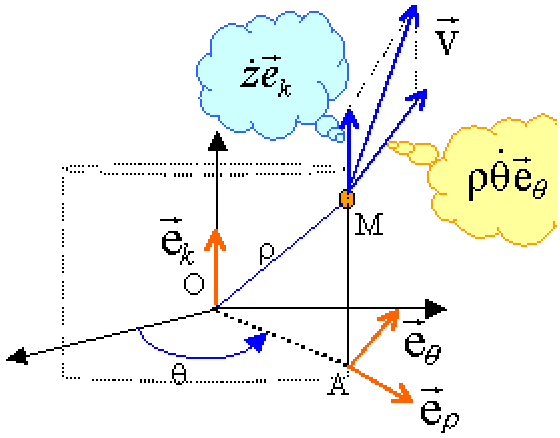
vecteur vitesse : dérivée par rapport au temps du vecteur position

$$\overline{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_k$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{e}_k$$

nul car $\rho = cte$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \vec{e}_\theta\dot{\theta}$$

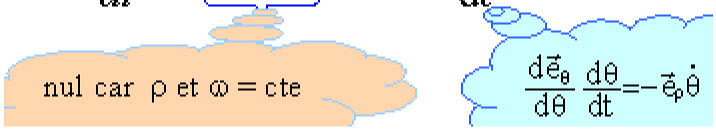


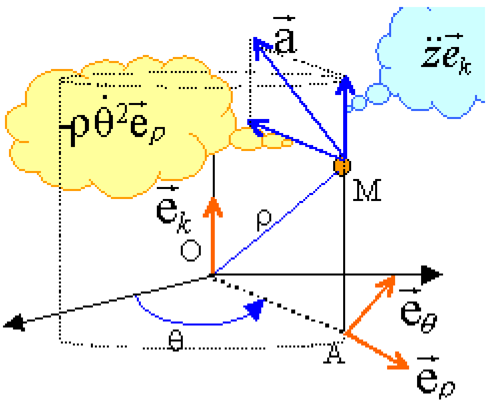
ρθ ' = ρω ; z ' = aΩ cos(Ω/ω θ)); v² = (ρω)² + a²Ω² cos²(Ω/ω θ))

vecteur accélération : dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps

$$\vec{v}=\rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\dot{z}\vec{e}_k$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\underbrace{\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta+\rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta}+\rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}+\ddot{z}\vec{e}_k$$





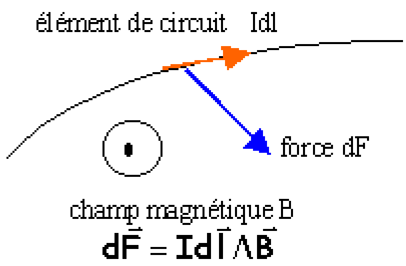
a² = (Rω²)² + a²Ω⁴ sin²(Ω/ω θ)

–

forces magnétiques sup

cours 1 loi de Laplace - moment magnétique

Un conducteur électrique parcouru par le courant I , et placé dans un champ magnétique B, est soumis à une force , appelée force de Laplace



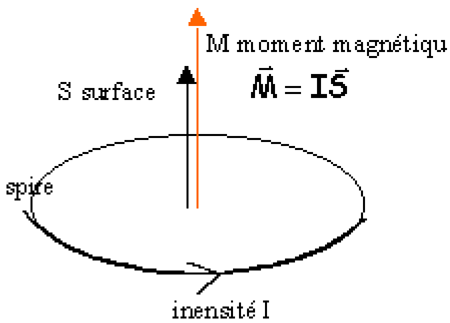
Cette force est perpendiculaire au plan formé par le conducteur et le champ magnétique .

son sens : le trièdre formé par les 3 vecteurs est direct

l'observateur d'Ampère allongé sur le fil , le courant entrant par les pieds, regarde dans la direction du champ; son bras gauche indique le sens de la force.

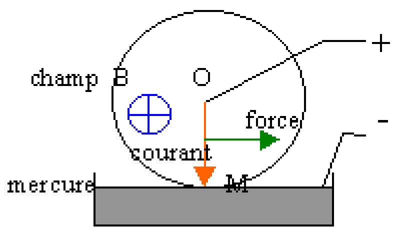
son module : I dl B sin(α)

α angle formé entre I dl et B



roue de Barlow

exercice 1



La roue est placée dans un champ magnétique uniforme B perpendiculaire au plan de la roue. Le contact en M est ponctuel et le courant traverse la roue suivant le rayon OM. Calculer

1. la force de Laplace résultante
2. son moment par rapport à l'axe de rotation
3. la puissance du moteur ainsi constitué lorsque la roue éffectue n tours par seconde.

corrigé

Pour tous les éléments de longueur dl du rayon OM, les forces de Laplace sont perpendiculaires à OM et de même sens.

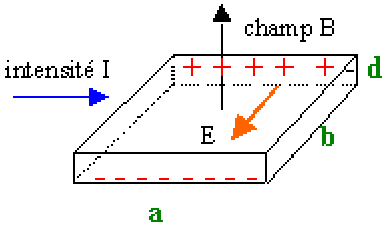
La résultante F a pour module F= BIR

Elle est appliquée au milieu N du segment OM. Son moment Γ par rapport à l'axe de rotation est donc : Γ = FR/2 = BIR²/2

Travail de cette force au cours d'un tour : W=Γ 2π= π BIR²

Pendant une seconde, la roue éffectue n tours. Le travail éffectué en 1 s est égale à la puissance : P= nπ BIR²

cours 2



effet Hall

cet effet est utilisé pour la mesure de champs magnétiques

Soit un ruban métallique plat de longueur a, d'épaisseur h et de largeur b, placé dans un champ magnétique perpendiculaire aux grandes faces. Ce ruban est traversé par un courant d'intensité I.

- Les électrons libres sont mis en mouvement en sens contraire de I. En présence du champ magnétique , ces électrons sont soumis à une force qui les dévie. Il y a accumulation d'électrons sur la face avant du ruban.
- Il apparait une différence de potentiel U entre les 2 faces du ruban et un champ électrique E de module U/b.
- Les électrons qui arriveront ensuite seront soumis en plus à une force électrique . On arrivera rapidement à un régime permanent dans lequel les électrons seront soumis à 2 forces opposées.

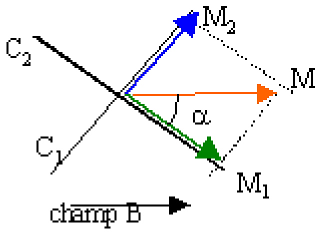
evB = eU/b

Or l'intensité est égal à la densité de courant fois la surface

I= Nev S d'où : U=b/NS * IB = constante * IB

la tension de Hall est proportionelle à l'intensité et au champ magnétique B

exercice 2 deux cadres solidaires



Deux cadres C_1 et C_2 perpendiculaires , identiques, sont solidaires et mobiles autour du même axe commun vertical. Ils sont placés dans un champ magnétique horizontal .Quelle relation lie les intensités i_1 et i_2 des courants qui traversent les cadres et l'angle α afin que le système soit en équilibre.

corrigé

M_1 et M_2 : moments magnétiques des 2 cadres. $M_1 = i_1 S$ et $M_2 = i_2 S$.

(S: surface totale d'un cadre)

le système est soumis à 2 couples de moment total nul (équilibre)

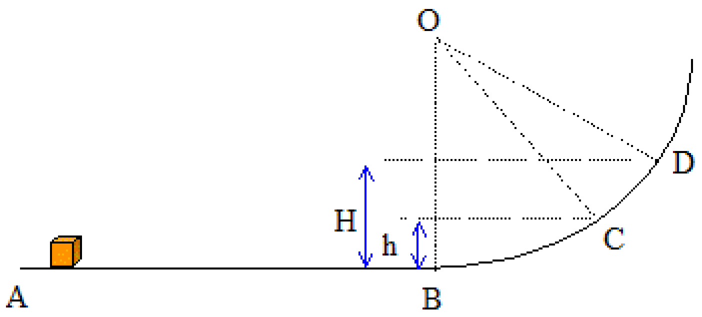
$$\vec{C}_1 = \vec{M}_1 \wedge \vec{B} \text{ et } \vec{C}_2 = \vec{M}_2 \wedge \vec{B} \text{ total : } \vec{C} = (\vec{M}_1 + \vec{M}_2) \wedge \vec{B}$$

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 \text{ parallèle à } \vec{B}$$

donc $\tan(\alpha) = i_2 / i_1$

Théorème de l'énergie cinétique (mécanique)

I- Un solide (S) de masse m = 5 kg est mobile sur des rails ABC situés dans un plan vertical. AB= 4,0 m ; BD est un arc de cercle de rayon R = 10 m. (S) est initialement immobile en A. On exerce entre A et B, sur (S), une force F parallèle à AB et de valeur constante constante . Le solide monte jusqu'en D puis revient en arrière. H= 3 m ; g = 9,8 m s^{-2}. Les frottements sont néglileables.



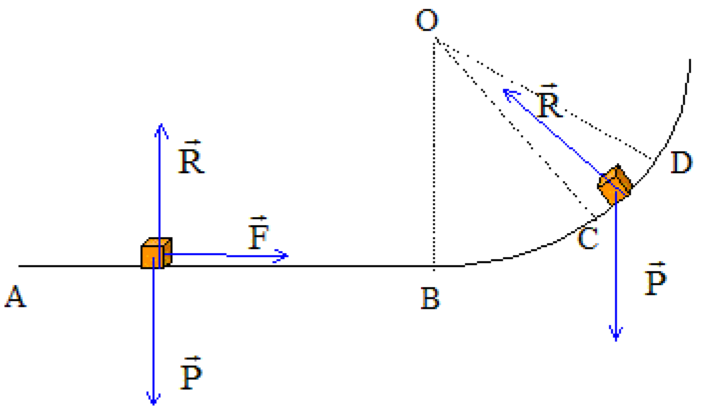
1. Exprimer puis calculer la vitesse de (S) en B.
2. Exprimer puis calculer la valeur de F.
3. Exprimer puis calculer la vitesse de (S) en C. (h = 1,5 m). Montrer que la vitesse en C est la même à l'aller et au retour.
4. Déterminer l'action R du support au point C.
5. Au point D le solide peut-il être en équilibre ?
6. Comparer la durée des trajets AB et BA.

II- Les frottements ne sont plus négligés. La valeur f des frottements est constante. Le solide s'arrête au retour en B.

1. Exprimer puis calculer f et F.
2. Comparer à l'aller et au retour :
   - les valeurs de la vitesse en un point quelconque de l'arc BD
   - la durée des trajets BC et CB.

III On exerce sur le solide (S) une force F' plus faible ; ce dernier atteint D puis s'arrête, au retour, à une hauteur h' = 0,5 m. Justifier ce comportement du solide.

corrigé



<u>théorème de l'énergie cinétique</u> :

de B en D : R, perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas. Le travail du poids est résistant (montée) et vaut : W_P= - mgH

L'énergie cinétique en D est nulle (arrêt) ; l'énergie cinétique en B vaut : ½mv² (v : vitesse en B)

La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide : 0-½mv² = -mgH

v²= 2gH = 2*9,8 * 3 = 58,8 ; v = 7,7 m/s.

de A en B : les forces R et P perpendiculaires à la vitesse, ne travaillent pas. Le travail de la force F vaut W_F=F AB.

L'énergie cinétique en A est nulle (arrêt) ; l'énergie cinétique en B vaut : ½mv² (v : vitesse en B)

La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide : ½mv² -0= F AB

F= mv²/(2AB) = 5*7,7² / 8 = 36,7 N.

vitesse de (S) en C :

de B en C : R, perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas. Le travail du poids est résistant (montée) et vaut : W_P= - mgh

L'énergie cinétique en C vaut ½mv^2_C ; l'énergie cinétique en B vaut : ½mv² (v : vitesse en B)

La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide : ½mv^2_C -½mv² = -mgh

v^2_C = v² -2gh = 58,8 -2*9,8*1,5 =29,4 ; v_C = 5,4 m/s.

L'expression de cette vitesse indique que v_C ne dépend que de la vitesse en B et de l'altitude h, peut importe le sens du parcours.

ou bien appliquer le théorème de l’énergie cinétique entre les deux passages du solide en M situé sur l'arc BD à l'aller puis au retour :

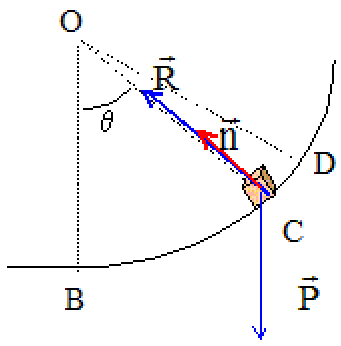
R ne travaille pas ; le travail du poids est nul (au même point la différence d'altitude est nulle). Donc l'énergie cinétique, par suite la valeur de la vitesse ne change pas à l’aller et au retour.

action R du support au point C :

Ecrire la seconde loi de Newton sur un axe normal à la trajectoire et dirigé vers O :

$\vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}$

$$\boxed{R - mg\cos\theta = m\frac{v_C^2}{OC}}$$



R est centripète, dirigée vers O et sa valeur est : R= m[v^2_C/OC + g cosθ]

cos θ = (OB-h) / OB = (10 -1,5) / 10 = 0,85 ; θ = 31,8°.

R= 5(29,4/10+9,8 * 0,85)= 56,3 N.

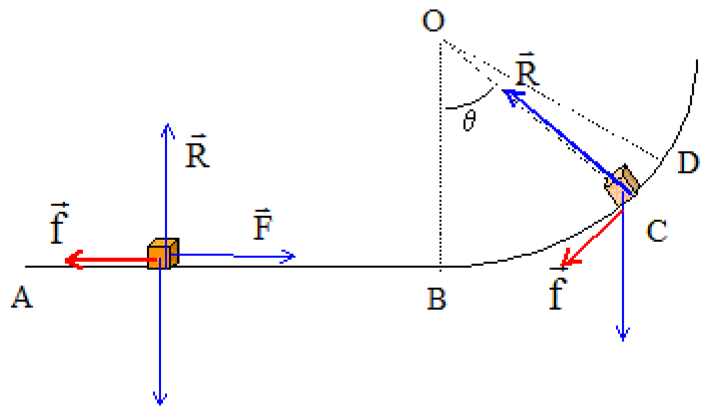
Au point D le solide ne peut pas être en équilibre : la somme vectorielle des forces n'est pas nulle. durée des parcours AB et BA :

AB : écrire la seconde loi de Newton : F=ma soit a = F/m = constante ; vitesse initiale nulle :

AB=½at² = ½F/mt² soit t² = 2AB m/F = 8*5/36,7 =117,4 ; t = 1,1 s.

BA : solide pseudo-isolé , donc mouvement rectiligne uniforme . AB = vt soit t = AB/v = 4/7,7=0,52 s.

Les frottements ne sont plus négligés. La valeur f des frottements est constante. Le solide s'arrète au retour en B.



Exprimer puis calculer f et F : théorème de l'énergie cinétique :

de D en B : R, perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas. Le travail du poids est moteur (descente) et vaut : W_P= mgH

Le travail de f (résistant) vaut : W_f= -f *longueur de l'arc de cercle DB = -f OC θ (θ en radian)

cos θ = (OB-H) / OB = (10 -3) / 10 = 0,7 ; θ = 0,795 rad.

L'énergie cinétique en D est nulle (arrêt) ; l'énergie cinétique en B est nulle (arrêt)

La variation de l'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces appliquées au solide :

0-0= mgH - f *OC θ d'où f = mgH /(OC θ) = 5*9,8*3/(10*0,795)= 18,5 N.

<u>sur le trajet complet</u> : R, perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas. Le poids ne travaille pas (altitude identique au départ A et à l'arrivée B)

Le travail de f (résistant) vaut : W_f= -f (AB+2OC θ) ; le travail de F vaut W_F=F AB

L'énergie cinétique en A est nulle (arrêt) ; l'énergie cinétique en B est nulle (arrêt)

0-0 = -f (AB+2OC θ) + F AB soit F= f (AB+2OC θ) /AB = 18,5(4+20*0,795) / 4 = 92 N.

<u>Comparer à l'aller et au retour</u> :

- les valeurs de la vitesse en un point quelconque de l'arc BD

appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre les deux passages du solide en M situé sur l'arc BD à l'aller puis au retour :

R ne travaille pas ; le travail du poids est nul (au même point la différence d'altitude est nulle). Le travail des frottements est négatif, donc la vitesse diminue : la vitesse au retour est plus petite qu'à l'aller.

- la durée des trajets BC et CB :

La vitesse est plus faible au retour, donc la durée du retour est plus grande que celle de l'aller.

Le solide s'arrête au retour sur l'arc de cercle lorsque la somme vectorielle des forces est nulle.

L'angle θ_1 vaut alors : cos θ_1 = (OB-h') / OB = (10-0,5) / 10 = 0,95 ; θ_1 = 0,318 rad.

A la descente le travail du poids est moteur. La force motrice est mg sin θ_1 = 5*9,8*0,312 = 15,3 N, valeur insuffisante pour vaincre les frottements (18,5 N).

Pa r contre la force motrice en D vaut : mg sin θ = 5*9,8 *0,714 =35 N valeur suffisante pour vaincre les frottements : le mobile ne reste pas en D.

Jet d'eau de Genève

d'après concours interne d'ingénieur territorial 2004

Hydraulique

Le jet d'eau de diamètre initial d_B=107 mm s'élève verticalement à une hauteur de h=156 m. En négligeant les pertes par frottement calculer :

1. La vitesse v_B à la base du jet.
2. La vitesse dans le tuyau d'amenée de diamètre d_A=1 m.
3. Le débit volumique.
4. La puissance nécessaire pour alimenter le jet d'eau.
5. Si on remplaçait l'eau par du mercure de masse volumique 13,6 10^3 kg/m^3, à quelle hauteur monterait le jet dans les mêmes conditions de vitesse d'éjection ? g = 10 m/s².

corrigé

L'énergie cinétique initiale de l'eau est convertie en énergie potentielle de pesanteur :

$\frac{1}{2}mv_B^2$ = mgh soit v_B= $(2gh)^{\frac{1}{2}}$=$(2*10*156)^{\frac{1}{2}}$=55,9 m/s.

rapport des section des tuyaux (S/s) = rapport des carrés des diamètres : $(d_A/d_B)^2$ = $(1/0,107)^2$ = 87,34

Débit volumique (m^3 s^{-1}) : Q_v= S v ; S section en m² et v : vitesse d'écoulement de l'eau en ms^{-1} ;

Le débit volumique se conserve : S v_A = s v_B d'où : v_A = s/S v_B =55,9 /87,34= 0,64 m/s.

<u>débit volumique</u> : Q_v= section (m²) * vitesse (m/s) = $\pi d_A^2/4 * v_A$=3,14/4 *0,64 = 0,5 m^3/s.

<u>puissance</u> nécessaire pour alimenter le jet d'eau : Q_v ρ_{eau} g h avec ρ_{eau} = 10^3 kg/m^3.

P= 0,5*10^3*10*156 = 7,8 10^5 W = 780 kW.(la valeur réelle est 1000 kW)

La masse volumique du mercure est 13,6 fois plus grande que celle de l'eau.

Dans le cas du mercure et dans les mêmes conditions diviser h par 13,6 : 11,5 m.

Pendule de Pohl: oscillations libres amorties **concours physique ITPE 2009**.

Un pendule de Pohl est constitué :

- D'un disque en rotation autour de son centre.

- D'un ressort spiral, qui exerce un couple mécanique qui tend à ramener le disque vers sa position d'équilibre.

- D'un pointeur placé sur le disque qui permet de repérer les écarts angulaires.

- D'un moteur, relié au ressort spiral, qui forcer les oscillations à une fréquence ajustable par l'utilisateur.

- D'un frein électromagnétique, permettant de régler l'effet d'amortissement (par courants de Foucault).

La position du disque résonateur est repéré par l'angle $\varphi(t)$.

Le ressort spiral a une extrémité soudée en O, point fixe., l'autre extrémité mobile soudée en A au bras excitateur de position φ_e.

Le bras excitateur peut être mis en mouvement sinusoïdal de fréquence f par un moteur pas-à-pas avec une bielle.

- Si φ_e = cste, régime libre. Le moteur est étteint.

- Si $\varphi_e = \Phi_e \cos(\omega t)$, régime forcé. Le moteur est en rotation à la fréquence f.

Le disque résonateur passe dans l'entrefer d'un système magnétique alimenté par une intensité I : une force de freinage dite de Foucault est induite sur le disque résonateur.

Mise en équation.

Les grandeurs écrites en gras et en bleu sont des vecteurs.

Le moment cinétique du disque résonateur est $\mathbf{L}=\boldsymbol{\sigma}_0 = J\varphi' \mathbf{u_z}$ où J est une constante.

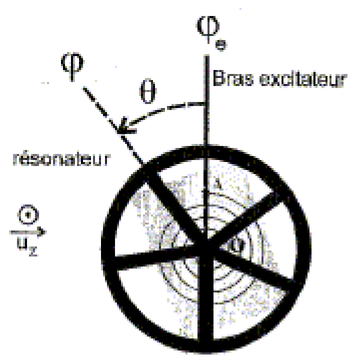
Quelle est l'unité du moment d'inertie J ? kg m^2.

Le moment de la force de rappel est $-C\theta\, \mathbf{u_z}$ où C est une constante.

Le moment de la force de freinage est $-k\varphi' \mathbf{u_z}$ où $k = k_0+\lambda I^2$ avec k_0 et λ constantes.

Comment peut-on justifier techniquement la présence du terme k_0 ?

Les forces de freinage sont dues au frottement mécanique (terme k_0) et aux forces de Laplace (courants de Foucault, terme λI^2)



Démontrer que l'équation de la position du disque peut se mettre sous la forme :

$$\varphi'' + 2\,\xi\omega_0\varphi' + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\varphi_e.$$

Enoncé du théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel :

Le référentiel d'étude étant galiléen :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M par rapport au point fixe O est égal au moment, par rapport à ce point, de la somme vectorielle des forces agissant sur le point matériel M . $\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \Sigma\vec{F}}$

$J\varphi'' = -k\varphi' - C\theta$ avec $\theta = \varphi - \varphi_e$.

$J\varphi'' + k\varphi' + C(\varphi - \varphi_e) = 0$; $J\varphi'' + k\varphi' + C\varphi = C\varphi_e$; $\varphi'' + k/J\varphi' + C/J\varphi = C/J\varphi_e$.

On pose $\omega_0^2 = C/J$ et $k/J = 2\xi\omega_0$; $\xi = k/(2C^{½}J^{½})$ d'où : $\varphi'' + 2\xi\omega_0\varphi' + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\varphi_e$.(**1**)

Quel est l'unité de ξ ?

Chaque terme de l'équation (**1**) a la dimension T^{-2}, inverse du carré d'un temps.

Dimension de φ' : T^{-1} ; dimension de ω_0 : T^{-1} ; en conséquence ξ est sans dimension.

Le terme $\xi\omega_0$ correspond à l'amortissement.

Etude du régime libre sans freinage de Foucault.

Le moteur pas à pas est éteint. La bielle est réglée pour $\varphi_e = 0$. On écarte le système de cette position et on le lâche. On enregistre φ (t) en degré pour un régime pseudo-périodique.

Ecrire la solution φ(t) **en fonction de** ω_0 **et** $\xi = \xi_0$ **sans chercher à calculer les constantes d'intégration**.

$$\varphi'' + 2\xi_0\omega_0\varphi' + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (2)$$

Equation caractéristique : $r^2 + 2\xi_0\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$; discriminant $\Delta = (2\xi_0\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi_0^2 - 1)$

Ce discriminant est négatif dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

$\varphi(t) = A \exp(-\xi_0\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + B)$ avec A et B des constantes d'intégration.

Exprimer la pseudo-période T uniquement en fonction de ω_0 **et** ξ_0.

pulsation $\omega = \omega_0(1 - \xi_0^2)^{½}$; $T = 2\pi/\omega = 2\pi / [\omega_0(1 - \xi_0^2)^{½}]$.

On définit le décrément logarithmique $\delta = 1/n \ln[\varphi(t) / \varphi(t+nT)]$ avec n entier positif.

Exprimer δ **en fonction uniquement de** ξ_0.

$\cos(\omega_0 t + B) = \cos(\omega_0(t + nT) + B)$; $\varphi(t) = A \exp(-\xi_0\omega_0 t) \cos(\omega_0 t + B)$

$\varphi(t+nT) = A \exp[-\xi_0\omega_0 (t+nT)] \cos(\omega_0(t+nT)+B)$;

$\varphi(t) / \varphi(t+nT) = \exp(-\xi_0\omega_0 t) / \exp[-\xi_0\omega_0 (t+nT)] = \exp[-\xi_0\omega_0 t + \xi_0\omega_0 (t+nT)]$
$=\exp(\xi_0\omega_0 nT)$

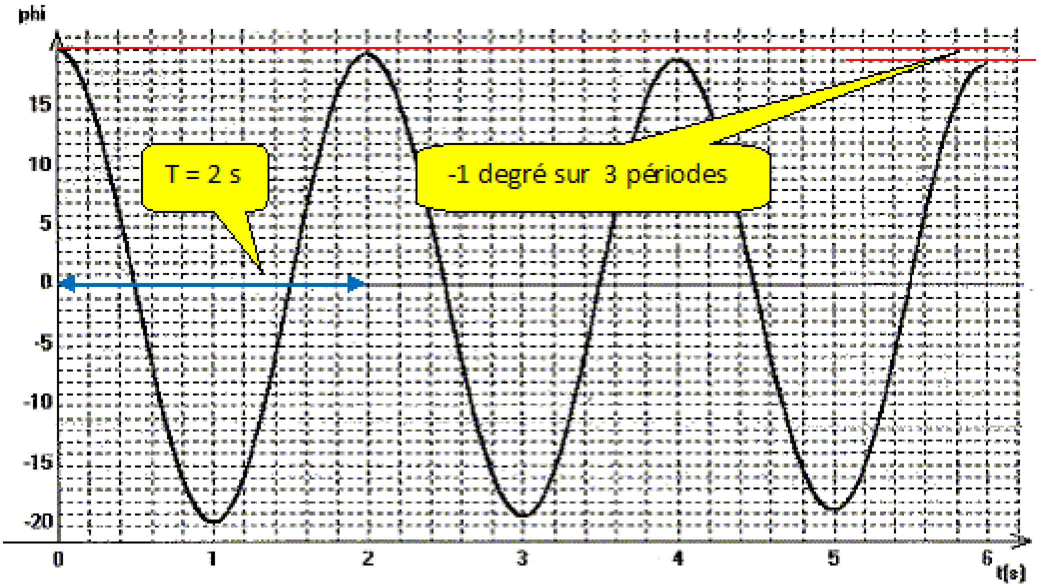
$\delta = \xi_0\omega_0 T = \xi_0\omega_0 2\pi / [\omega_0(1-\xi_0^2)^{½}] = \mathbf{\xi_0 2\pi / (1-\xi_0^2)^{½}}$.

Quelles sont les conditions de validité de la formule : $\boldsymbol{\delta \sim 2\pi\xi_0}$?

Si $\xi_0^2 \ll 1$, $(1-\xi_0^2)^{-½} \sim 1+\xi_0$ et $\delta \sim \xi_0 2\pi (1+\xi_0) \sim \mathbf{2\pi\xi_0}$.

Cela correspond à un amortissement assez faible.

Mesurer la valeur de δ pour avoir la plus grande précision possible sur l'enregistrement suivant :



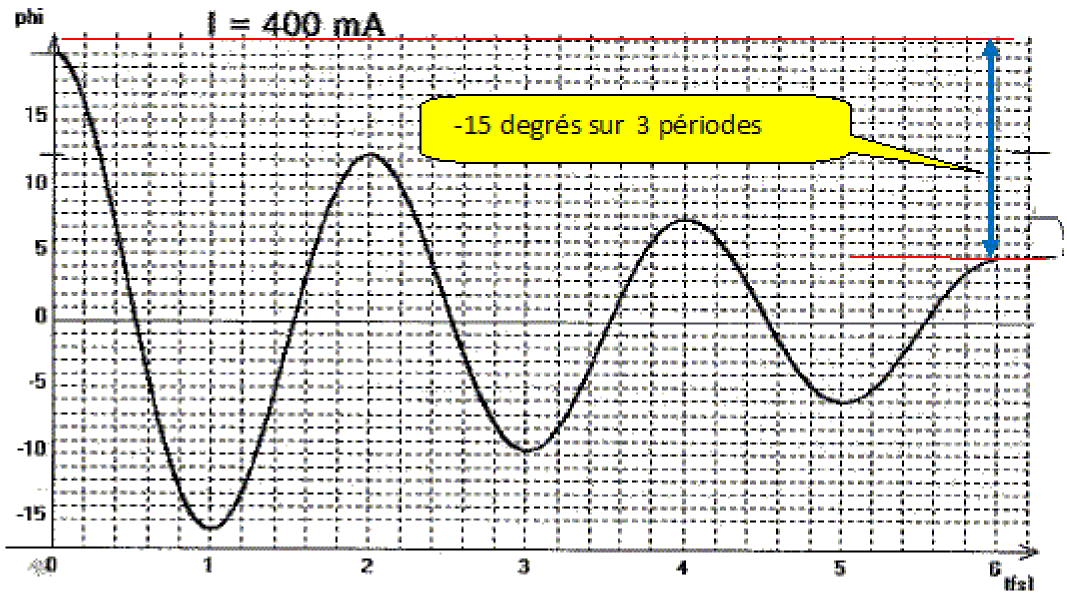
$\delta = 1/3 \ln(20/19)$; $\delta = \mathbf{0{,}017}$; $\boldsymbol{\delta \sim 2\pi\xi_0}$; $\xi_0 = \delta/(2\pi) = 0{,}017/6{,}28$; $\xi_0 = \mathbf{2{,}7\ 10^{-3}}$.

Fréquence propre : $1/T_0 = 1/2 =$ **0,5 Hz**.

Etude en régime libre avec freinage de Foucault.

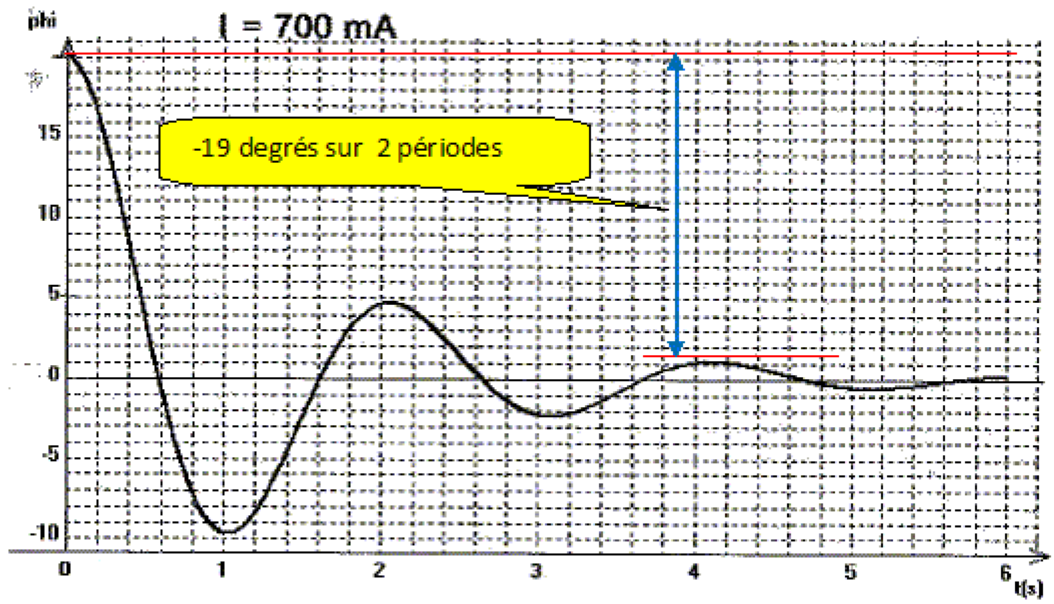
On effectue la même expérience avec une intensité dans les bobines.

$I = 400$ mA ; **déduire la valeur de ξ de la courbe**.



$\delta = 1/3 \ln(20/5)$; $\delta =$ **0,46** ; **$\delta \sim 2\pi\xi_0$** ; $\xi_{400} = \delta/(2\pi) = 0{,}46/6{,}28$; **$\xi_{400} = 7{,}4\ 10^{-2}$**.

I = 700 mA ; **déduire la valeur de ξ de la courbe**.



$\delta = 1/2 \ln(20/1)$; $\delta =$ **1,5** ; **$\delta \sim \xi_0 2\pi/(1-\xi_0^2)^{½}$** ;

$\delta^2 = \xi_0^2\, 4\pi^2/(1-\xi_0^2)$; $\delta^2(1-\xi_0^2) = \xi_0^2\, 4\pi^2$.

$2{,}25 - 2{,}25\,\xi_0^2 = 39{,}5\,\xi_0^2$; $\xi_0^2 = 5{,}4\ 10^{-2}$; **$\xi_{700} = 0{,}23$**.

Sachant que $\xi = \xi_0 + \mu I^2$, **en déduire la valeur de μ**.

ξ_0 = 2,7 10^{-3} ; $\mu = (\xi - \xi_0) / I_2$ = (7,4 10^{-2} - 2,7 10^{-3}) / $0,4^2$ =0,44 A^{-2}.

$\mu = (\xi - \xi_0) / I_2$ = (0,23 - 2,7 10^{-3}) / $0,7^2$ =0,46 A^{-2}. Valeur moyenne : **μ = 0,45 A^{-2}**.

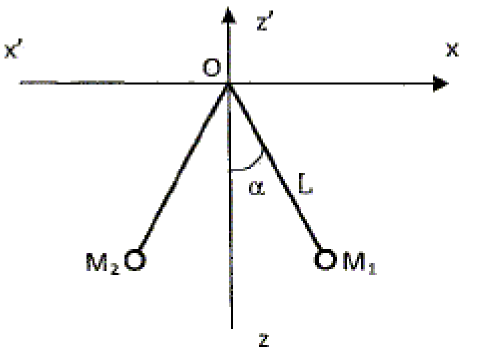
A partir de quelle valeur de I aura t-on un amortissement suffisant pour avoir un retour du disque à sa position d'équilibre sans dépassement ?

Régime critique : ξ = 1 et I ~1 /$\mu^{½}$ =1/$0,45^{½}$ =**1,5 A**.

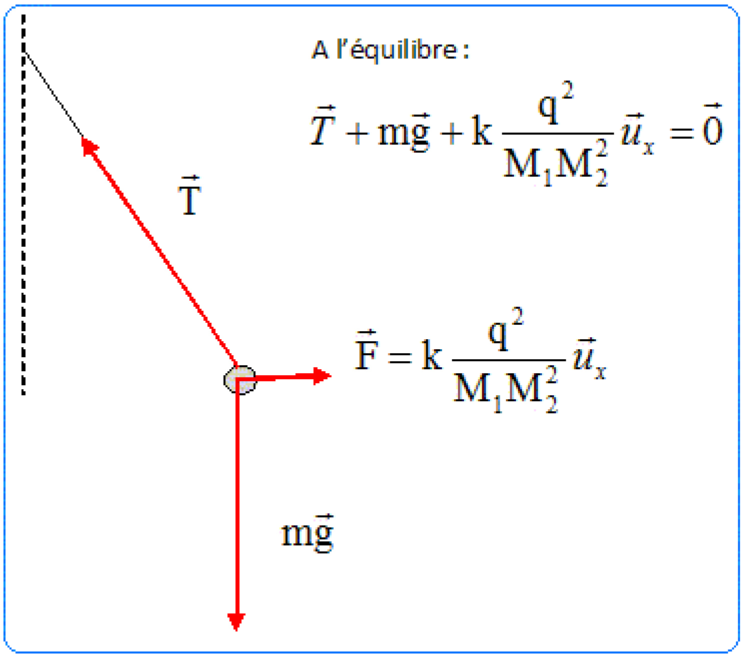
Aurélie 11/02/09

Pendule électrostatique, énergie, concours physique ITPE 2009.

On considère le système représenté ci-dessous. Les deux points matériels M_1 et M_2 ont la même masse m et portent la même charge +q. Les deux fils de longueur L sont supposés inextensibles et sont attachés au même point O. On note α l'angle entre la verticale et le fil OM_1.



Représenter sur un schéma les forces appliquées à M_1.



Par projection de cette condition d'équilibre, déduire deux relations scalaires.

$M_1M_2 = 2L\sin\alpha$; projection sur x'Ox : $-T\sin\alpha + kq^2 / (2L\sin\alpha)^2 = 0$

projection sur z'Oz : $T\cos\alpha - mg = 0$.

En travaillant dans l'approximation des petits angles, déterminer l'expression de $\alpha_{éq}$. On donne k = 9 109 SI.

$\sin\alpha \sim \alpha$; $\cos\alpha \sim 1$ d'où $T \sim mg$ et $mg\,\alpha = kq^2 / (2L\,\alpha)^2$; $\alpha^3 = kq^2 / (4L^2 mg)$; $\boldsymbol{\alpha = [kq^2 / (4L^2 mg)]^{1/3}}$.

A.N : $g = 10$ m /s^2 ; L = 1 m ; m = 10 g ; $q = 3\ 10^{-7}$ C.

$\alpha = [9\ 10^9 * (3\ 10^{-7})^2 / (4*0{,}01*10)]^{1/3} = 0{,}126$ rad ~ **0,13 rad**.

Déterminer à une constante près, l'énergie potentielle de pesanteur du point matériel M_1 :

$$E_{pp} = mgz + cste = -mgL \cos \alpha + cste.$$

On peur choisir le point O comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur ; dans ce cas la constante est nulle.

Déterminer à une constante près, l'énergie potentielle d'interaction électrostatique du point matériel M_1 :

$$E_{pe} = k\, q^2/M_1M_2 + cste = k\, q^2/(2L\sin \alpha) + cste.$$

Commenter l'expression de l'énergie potentielle du système constitué par les deux charges : $E_p = 2mgz + k\, q^2/(x_1-x_2) + cste$, où z est l'ordonnée commune des deux charges et x_1, x_2 sont les abscisses respectives de M_1 et M_2.

Le premier terme est une fonction croissante de z ; le second terme est une fonction décroissante de (x_1-x_2) : la somme des deux termes prévoit l'existence d'un minimum de l'énergie potentielle.

Par un développement limité à l'ordre 2 montrer que l'expression de l'énergie potentielle est :

$$E_p(\alpha) = -2mgL(1-\alpha^2/2) + kq^2/(2L\alpha)$$

$E_{pp} = -2mgL \cos \alpha$. (origine en O) avec $\cos \alpha \sim 1-½\alpha^2$ si α est petit.

$E_{pe} = k\, q^2/(2L\sin \alpha)$. (l'énergie potentielle électrostatique est nulle quand les charges sont suffisamment éloignées.

avec $\sin \alpha \sim \alpha$ si α est petit.

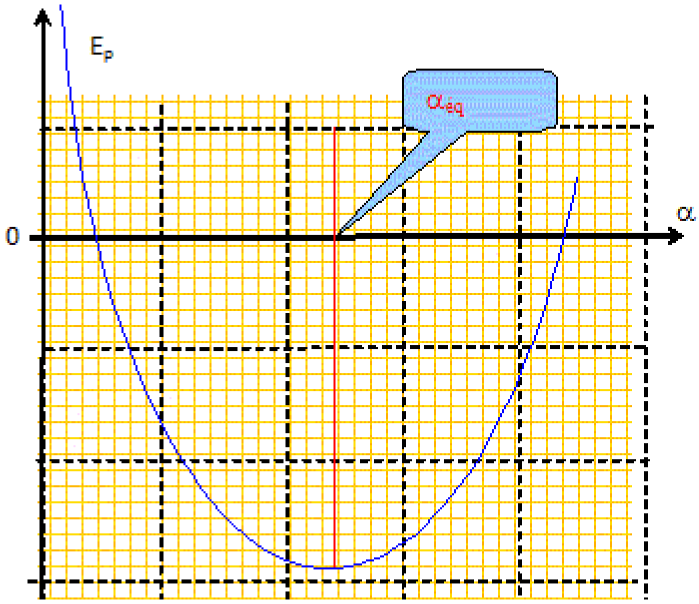
d'où $E_p \sim k\, q^2/(2L\, \alpha) - 2mgL(1-½\alpha^2)$

A partir de l'expression de E_p retrouver l'expression de $\alpha_{éq}$.

La position d'équilibre correspond à un extrémum de l'énergie potentielle. On cherche la valeur de α qui annule la dérivée de l'énergie potentielle.

$dE_p/d\alpha = -k\, q^2/(2L\, \alpha^2) + 2mgL\alpha = 0$; $\boldsymbol{\alpha = [kq^2 / (4L^2 mg)]^{1/3}}$.

Tracer l'allure de E_p pour α petit. L'équilibre trouvé est-il stable où instable ?



La position d'équilibre correspond à un minimum de l'énergie potentielle : l'équilibre est stable.

Aurélie 26/02/08

Les cyclotrons : équation différentielle et nombres complexes concours ITPE 2008

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On étudie un proton considéré comme une masse ponctuelle m = 1,6 10^{-27} kg, de charge e = 1,6 10^{-19} C et de vitesse instantanée **v**.

Il n'est pas relativiste : 10 v < 3 10^{8} m/s. On négligera toute force dissipative dans ce problème.

Il est dans une zone de l'espace où règne un champ électrique **E** et un champ magnétique **B**.

On rappelle que la force de Lorentz est : **F** = e(**E** + **v**^ **B**)

Bilan des forces :

Quelle est l'unité du champ électrique ? **V m^{-1}**.

Rappeler l'ordre de grandeur du champ magnétique à la surface de la terre.

composante horizontale du champ magnétique terrestre : **2 10^{-5} T**.

Dans le cas du proton ci-dessus évoluant à v = 0,01 c dans un champ magnétique plus intense que celui de la terre,

Justifier que le poids est toujours négligeable.

mg = 1,6 10^{-27} * 9,8 = 1,6 10^{-26} N

force magnétique : e v B ; on choisit v = 3 10^{6} m/s et B = 0,01 T.

evB = 1,6 10^{-19}* 3 10^{6} *0,01 = 5 10^{-15} N, valeur très supérieure à celle du poids.

Variation de l'énergie cinétique :

Rappeler la définition d'une énergie potentielle.

Energie potentielle : énergie qui est échangée par un corps qui se déplace sous l'action d'une force conservative.

L' énergie potentielle, définie à une constante près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

" potentielle" signifie que cette énergie peut être emmagasinée par un corps et peut ensuite être transformée en une autre forme d'énergie.

Quel est le lien entre E et le potentiel V ? **E** = - **grad** V.

Démontrer que l'énergie potentielle dont dérive la force de Lorentz est E_p = eV + Cte.

F = e**E** + e**v**^ **B**.

Une force perpendiculaire à la vitesse ne travaille pas : le travail de la force de Lorentz se résume donc au travail de e**E**.

travail élémentaire au cours du déplacement **dl** : dW = e**E** • **dl** = -e **grad** V• **dl**.

travail au cours d'un déplacement fini d'un point 1 à un point 2 : W = -e(V_2-V_1)

La variation de l'énergie potentielle au cours de ce déplacement est l'opposé du travail de la force :

$\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = e(V_2 - V_1)$

Par suite l'énergie potentielle vaut : **Ep = e V + Cte**.

Déterminer la variation d'énergie cinétique du proton allant de A vers C.

L'énergie mécanique étant constante, la variation d'énergie cinétique est l'opposé de la variation de l'énergie potentielle.

$$\Delta Ec = e(V_1 - V_2).$$

Trajectoire dans un champ magnétique

seul.

On travaille dans un référentiel galiléen (O, $\mathbf{u_x}$, u_y, $\mathbf{u_z}$) orthonormé direct.

$\mathbf{B} = B\mathbf{u_z}$; $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ dans cette partie.

A t=0, le proton est en O avec une vitesse initiale $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{u_x}$.

Quelle est la définition d'un référentiel galiléen ?

dans ce référentiel le principe d'inertie ou 1ère loi de Newton s'applique " un point matériel pseudo-isolé demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme".

Démontrer que le mouvement est plan.

conditions initiales : vitesse initiale $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{u_x}$, portée par l'axe Ox.

La force magnétique initiale est portée par l'axe Oy.

$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$; $\mathbf{B} = B\mathbf{u_z}$; $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{u_x}$; $\mathbf{F} = e\,v_0\,\mathbf{u_x} \wedge B\mathbf{u_z} = e\,v_0 B(-u_y)$

Le mouvement est dans le plan (Ox, Oy), perpendiculaire à $\mathbf{B}$.

Déterminer les deux équations différentielles du mouvement liant x(t) et y(t).

On posera $\omega_e = eB/m$.

La seconde loi de Newton s'écrit : $e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = m\mathbf{a}$.

v	$v_x=dx/dt$	$v_y=dy/dt$	$v_z=0$
B	0	0	B
v^ B	B dy/dt	-B dx/dt	0

e**v**^ **B**	eB dy/dt	-eB dx/dt	0
e**v**^ **B**= m**a**.	eB dy/dt = m d^2x/dt^2. **$\omega_e dy/dt = d^2x/dt^2$.**	-eB dx/dt = m d^2y/dt^2. **$-\omega_e dx/dt = d^2y/dt^2$.**	**$d^2z/dt^2=0$.**

Soit $p(t) = x(t) + jy(t)$ avec $j^2=-1$. **Ecrire l'équation différentielle de p(t).**

$dp(t)/dt = dx(t)/dt + jdy(t)/dt$

$d^2p(t)/dt^2 = d^2x(t)/dt^2 + jd^2y(t)/dt^2$

$dp(t)/dt = 1/\omega_e\,(-d^2y/dt^2 + jd^2x/dt^2) = 1/\omega_e\,(j^2d^2y/dt^2 + jd^2x/dt^2)$

$dp(t)/dt = j/\omega_e\,(jd^2y/dt^2 + d^2x/dt^2)$; **$dp(t)/dt = j/\omega_e\, d^2p(t)/dt^2$.**

Trajectoire.

Quelles sont les deux conditions initiales sur p(t) ?

A t=0, le proton est en O avec une vitesse initiale $\mathbf{v}(0) = v_0\,\mathbf{u_x}$.

$p(0) = 0$; $dp(0)/dt = dx(0)/dt + jdy(0)/dt = v_0$; $dp(0)/dt = v_0$.

Résoudre l'équation différentielle et déterminer p(t).

$\mathbf{dp(t)/dt = j/\ \omega_e d^2p(t)/dt^2}$ s'écrit : $\mathbf{d^2p(t)/dt^2} + j\boldsymbol{\omega_e}\mathbf{dp(t)/dt = 0}$

équation caractéristique : $r^2 + j\omega_e r = 0$; solutions $r_1=0$ et $r_2= - j\omega_e$.

$p(t) = A + B \exp(- j\omega_e t)$

à $t = 0 : 0 = A+B$ soit $B = -A$

$dp(t)/dt = - j\omega_e B \exp(- j\omega_e t)$; $dp(0)/dt = v_0=- j\omega_e B$; $B = jv_0/\omega_e$

$\mathbf{p(t) = jv_0/\omega_e (\exp(- j\omega_e t)-1)}$.

En déduire x(t) et y(t).

$\exp(- j\omega_e t) = \cos(\omega_e t) -j \sin(\omega_e t)$; $p(t) = jv_0/\omega_e[\cos(\omega_e t)-1 -j \sin(\omega_e t)]$

$p(t) =v_0/\omega_e \sin(\omega_e t) + jv_0/\omega_e[\cos(\omega_e t)-1] = x(t) + jy(t)$

$\mathbf{x(t) = v_0/\omega_e \sin(\omega_e t)}$; $\mathbf{y(t) = v_0/\omega_e[\cos(\omega_e t)-1]}$.

La trajectoire est un cercle.

Démontrer que le rayon est $R =mv_0/(eB)$.

$y+v_0/\omega_e =v_0/\omega_e \cos(\omega_e t)$

$x^2+(y+v_0/\omega_e)^2 = [v_0/\omega_e]^2 [\sin^2(\omega_e t) +\cos(\omega_e t)^2] = [v_0/\omega_e]^2$

centre du cercle A $(0 ; -v_0/\omega_e)$; rayon $R = v_0/\omega_e = mv_0/(eB)$.

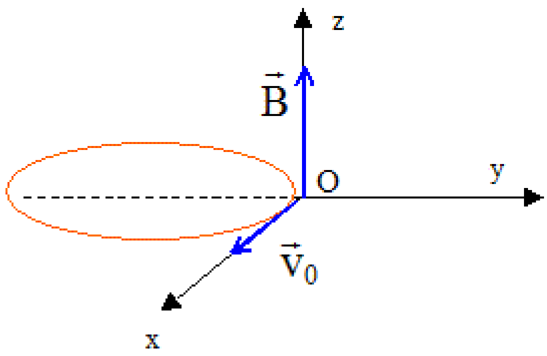
Montrer que le temps Δt mis pour décrire un demi cercle est indépendant de v_0.

demi circonférence : $\pi R=\pi mv_0/(eB)$.

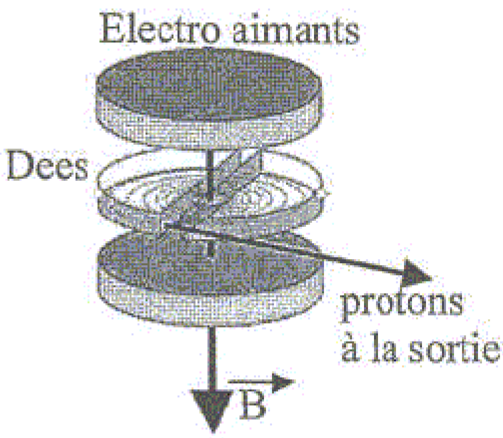
La valeur de la vitesse est constante égale à v_0 : la force magnétique, perpendiculaire à la vitesse, ne modifie pas la valeur de la vitesse.

durée $\Delta t = \pi R/v_0 = \mathbf{\pi m/(eB)}$.

Dessiner le cercle ainsi que le repère (O, x, y).



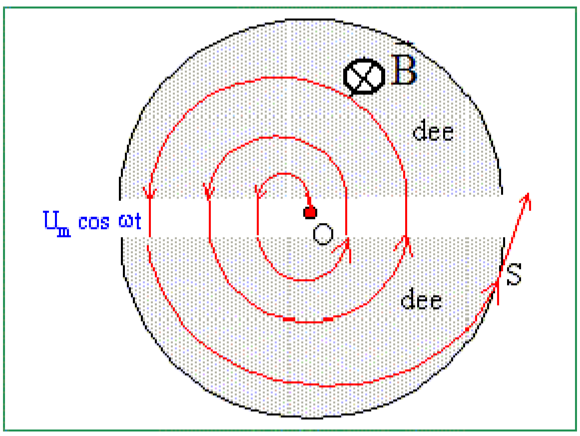
Le premier cyclotron 1,2 MeV construit se compose d'un électro-aimant dans l'entrefer duquel on loge une boîte métallique de diamètre 28 cm (11 pouces) maintenue sous vide. La chambre contient deux électrodes creuses en forme de "D" entre lesquelles est appliquées une tension alternative de 4000 V à haute fréquence. En son centre se trouve une source qui fournit des protons. Les protons décrivent une trajectoire dans le plan médian, du centre jusqu'au bord.



Entre les dees, la seule force prépondérante est celle due à **E**.

Dans les dees, la seule force prépondérante est celle due à **B**.

Dessiner le cyclotron "vu d'en haut" en représentant soigneusement la trajectoire des protons ainsi que le champ magnétique B.



B est perpendiculaire à la figure, dirigé vers l'arrière.

Calculer la vitesse de sortie des protons d'énergie cinétique finale 1,2 MeV.

1,2 MeV = 1,2 * 1,6 10^{-13} J =1,92 10^{-13} J ; $½mv^2$= 1,92 10^{-13}.

v = [2*1,92 10^{-13}/1,67 10^{-27}]^{½} =1,516 10^7 = **1,5 10^7 m/s**.

Quelle énergie cinétique (en keV) prennent-ils à chaque tour (deux passages entre les dees à chaque tour) ?

A chaque passage entre les dees, l'énergie cinétique augmente de : eU

2 eU = 2*1,6 10^{-19}*4000 =1,28 10^{-15} J = 8 000 eV = **8 keV**.

Combien de tours font-ils dans le cyclotron ?

1,2 MeV = 1200 keV ; 1200/8 = **150 tours**.

Quelle est la fréquence de la tension alternative ? A.N avec R_{max} = 14 cm.

Pour une accélération maximale, à chaque demi tour, la tension alternative doit changer de signe et prendre sa valeur maximale.

La demi période de la tension alternative est égale à la durée d'un demi tour.

½T=πR/v ; f = 1/T = **v/(2πR)** =1,516 10^7 /(6,28*0,14) = **1,72 10^7 Hz**.

Quelle est la valeur du champ magnétique B ?

R= mv/(eB) soit **B = mv/(eR)** = 1,67 10^{-27} *1,516 10^7 /(1,6 10^{-19} *0,14) =**1,13 T**.

Pourquoi la technologie du type cyclotron avec ses dees a été abandonnée dans les années 50 au profit d'anneaux d'accélération ?

La quantité de fer pour construire l'aimant qui engendre le champ magnétique dans tout le volume de l'accélérateur devient trop important

Pertes de Larmor du cyclotron.

Le proton accéléré rayonne. La puissance perdue est P = e^2 / (6π ε_0 c^3) a^2 avec a : accélération, ε_0 = 8,8 10^{-12} F m^{-1}, c = 3 10^8 m/s.

Estimer la puissance du rayonnement lors du dernier tour.

accélération centripère a = v^2/R=(1,516 10^7)2 / 0,14 = 1,64 10^{15} m/s^2.

P = (1,6 10^{-19})^2/ [6*3,14* 8,8 10^{-12} *(3 10^8)^3] =**9,38 10^{-39} W**.

Estimer l'énergie perdue en eV lors du dernier tour.

P *2Δt avec Δt = ½T = 0,5/f = 0,5/1,72 10^{7} =2,9 10^{-8} s

P= 9,38 10^{-39}*2*2,9 10^{-8} = 5,45 10^{-46} J

5,45 10^{-46} /1,6 10^{-19} = **3,4 10^{-27} eV**.

L'évolution des accélérateurs de protons.

En supposant que le champ magnétique est sensiblement le même dans les différents cyclotrons à protons, **estimer l'énergie de sortie du 60 pouces construit en 1939**.

On passe d'un diamètre de 11à 60 pouces : 60/11 = 5,5.

vitesse de sortie : v = eBR/m : si le rayon est multiplié par 5,5, alors v^2 est multipliée par $5,5^2$ =30.

L'énergie de sortie est sous forme cinétique : 1,2 MeV correspond à 11 pouces d'où : 30*1,2 = **36 MeV**.

***Pour des énergies de 15 MeV, l'expression correcte de la pulsation du cyclotron devient* eB/m [1-v^2/c^2]^{½}**.

En quoi cette expression est génante pour le fonctionnement du cyclotron ?

La fréquence du champ électrique dépend de la vitesse.

Comment le synchrocyclotron de Mc Millan (1945) résolut-il ce problème ?

Un synchrocyclotron est un cyclotron dont la fréquence du champ électrique est lentement diminuée afin de compenser l'augmentation de masse des particules accélérées quand leur vitesse s'approche de celle de la lumière.

Quest-ce qu'un synchrotron ?

Le synchrotron est un dispositif permettant l'accélération de particules chargées.L'énergie atteinte par les particules est très élevée.

Comme dans le cyclotron, les particules décrivent des cercles entre les pôles d'électro-aimants disposés en anneau.

A chaque tour les particules sont accélérées. Les particules sont confinées sur le cercle, en ajustant le champ magnétique à l'énergie atteinte.

On injecte les particules "en bouffées" dans l'anneau, à champ magnétique faible.

Ces dernières sont accélérées, puis éjectées quand le champ magnétique atteint sa valeur maximale.

moment cinétique

théorème de Koënig

Les vecteurs sont écrits en **gras** et en **bleu**

On considère les points matériels de masses respectives m_1 = 1 kg; m_2 = 2 kg , m_3 = 3 kg ; repère galiléen (O, **i**, **j**, **k**). Leurs coordonnées sont :

M_1 (2t ; 3t² ; 1) ; M_2 (t²-1 ; -t ; 2t) ; M_3 (-2 ; t-1 ; 1-t²)

1. Calculer les moments cinétiques en O des trois points matériels ainsi que celui du système.
2. Appliquer le théorème de Koënig pour en déduire le moment cinétique **L*** dans le référentiel barycentrique.
3. Donner les expressions littérales des forces **F**$_1$, **F**$_2$, **F**$_3$ agissant respectivement sur chaque point ; exprimer **F** résultante des forces appliquée au système.
4. Déterminer le moment en O des forces **F**$_1$, **F**$_2$, **F**$_3$ et **F.**

corrigé

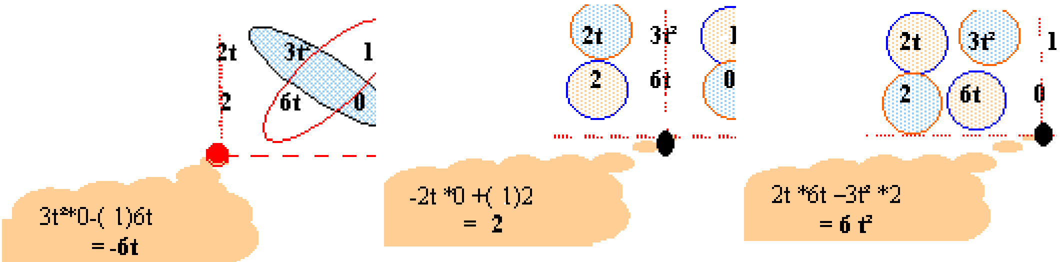
Calcul des moments cinétiques en O point de l'espace galiléen:

$$\boxed{\vec{L}_{O_i} = \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i}$$

le vecteur vitesse **v**$_i$ est la dérivée du vecteur position **OM**$_i$ par rapport au temps.

OM$_1$ (2t ; 3t² ; 1)	**OM**$_2$ (t²-1 ; -t ; 2t)	**OM**$_3$ (-2 ; t-1 ; 1-t²)
v$_1$ (2 ; 6t ; 0)	2 **v**$_2$: (4t ; -2 ; 4)	3 **v**$_3$: 0 ; 3 ; -6t)
OM$_1$ ^**v**$_1$ (-6t ; 2 ; 6t²)	**OM**$_2$ ^ 2**v**$_2$ (0 ; 4t²+4 ; 2t²+2)	**OM**$_3$ ^ 3**v**$_3$ (-3t²+6t -3 ; -12t ; -6)

comment calculer un produit vectoriel ?



Le moment cinétique total en O du système de points est égal à la somme vectorielle des moments cinétiques en O des trois points composant le système.

$$\mathbf{L_O} = \mathbf{L_{O1}} + \mathbf{L_{O2}} + \mathbf{L_{O3}}$$

$\mathbf{L_{O1}}$ (-6t ; 2 ; 6t²) ; $\mathbf{L_{O2}}$ (0 ; 4t²+4 ; 2t²+2) ; $\mathbf{L_{O3}}$ (-3t²+6t -3 ; -12t ; -6)

$\mathbf{L_O}$:
suivant **i** : $-6t +0 -3t^2 +6t -3$ soit $-3t^2 -3$
suivant **j** : $2 + 4t^2 +4 -12t$ soit $4t^2-12t + 6$
suivant **k** : $6t^2 + 2t^2 +2 -6$ soit $8t^2-4$

---

théorème de Koënig :

Dans le référentiel barycentrique R* le moment cinétique est indépendant du point par rapport auquel on le calcule; ce moment cinétique est noté **L***.

Le moment cinétique d'un système de points calculé en un point O dans le référentiel R est égal à la somme vectorielle du moment cinétique en O de son centre de masse affecté de la masse totale du système et de son moment cinétique dans R*.

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{OG} \wedge \Sigma m_i \vec{v}_i + \vec{L}^*}$$

vitesse des points matériels :

le vecteur vitesse $\mathbf{v_i}$ est la dérivée du vecteur position $\mathbf{OM_i}$ par rapport au temps.

$\mathbf{OM_1}$ (2t ; 3t² ; 1) donc $\mathbf{v_1}$ (2 ; 6t ; 0)

$\mathbf{OM_2}$ (t²-1 ; -t ; 2t) donc $\mathbf{v_2}$ (2t ; -1 ; 2)

$\mathbf{OM_3}$ (-2 ; t-1 ; 1-t²) donc $\mathbf{v_3}$ (0 ; 1 ; -2t)

vecteur quantité de mouvement du système de points :

$$\mathbf{p_S} = m_1\mathbf{v_1} + m_2\mathbf{v_2} + m_3\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} + 2\,\mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3}\,.$$

suivant l'axe **i** : 2 +2*2t-3*0 = 2(1+2t)

suivant l'axe **j** : 6t-2 +3 = 6t+1

suivant l'axe **k** : 0+ 2*2+3*(-2t) = 2(2-3t)

p_S [2(1+2t) ; 6t+1 ; 2(2-3t)]

barycentre G :

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2 + m_3\vec{OM}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1}{6}(\vec{OM}_1 + 2\vec{OM}_2 + 3\vec{OM}_3)$$

OM_1 (2t ; 3t² ; 1) ; **OM_2** (t²-1 ; -t ; 2t) ; **OM_3** (-2 ; t-1 ; 1-t²)

suivant **i** : 1/6(2t +2(t²-1) +3(-2)) soit 1/6 (2t² +2t-8)

suivant**j** : 1/6(3t² +2(-t) +3(t-1)) soit 1/6 (3t² + t -3)

suivant **k** : 1/6(1 +2(2t) +3(1-t²)) soit 1/6 (-3t² +4t+4)

OG : 1/6(2t² +2t-8 ; 3t² + t -3 ; -3t² +4t+4)

OG	1/6(2t² +2t-8)	1/6(3t² + t -3)	1/6(-3t² +4t+4)
p_S	2(1+2t)	6t+1	2(2-3t)
OG^p_S	1/6(-15t² -6t-16)	1/6(14t² -32t + 40)	1/6(4t² -36 t -2)
L_O	-3t² -3	4t²-12t + 6	8t²-4
L* = L_O - OG^p_S	-½t² +t -1/3	1/3 (5t² -20t -2)	22/3 t²+6t -11/3

forces :

Pour chaque point , appliquer le principe fondamental de la dynamique

$$\boxed{\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}}$$

v_1 (2 ; 6t ; 0)	2 **v_2** (4t ; -2 ; 4)	3 **v_3** (0 ; 3 ; -6t)
F_1 (0 ; 6 ; 0)	**F_2** (4 ; 0 ; 0)	**F_3** (0 ; 0 ; -6)

F_1 +**F_2** +**F_3** = **F** : (4 ; 6 ; -6) moments des forces en O :

appliquer le théorème du moment cinétique à chaque point matériel :

$$\boxed{\vec{M}_{O_i} = \frac{d\vec{L}_{O_i}}{dt}}$$

L_{O1} (-6t ; 2 ; 6t²) ; L_{O2} (0 ; 4t²+4 ; 2t²+2) ; L_{O3} (-3t²+6t -3 ; -12t ; -6)

L_{O1}(-6t ; 2 ; 6t²)	L_{O2} (0 ; 4t²+4 ; 2t²+2)	L_{O3} (-3t²+6t -3 ; -12t ; -6)
M_{O1}(-6 ; 0 ; 12t)	M_{O2} (0 ; 8t ; 4t)	M_{O3}(-6t+6 ; -12 ; 0)

le moment résultant est égal à la somme vectorielle des différents moments :

M_O : (-6t ; 8t-12 ; 16t)

autre méthode :

appliquer le théorème du moment cinétique au système pris dans sa totalité :

L_O	-3t²-3	4t²-12t + 6	8t²-4
M_O	-6t	8t-12	16t

Moment cinétique : déplacement d'un insecte sur un disque

compléter les mots qui manquent

2,5 angles kg rad

Un insecte de masse m = 1,0 g se déplace sur le bord d'un disque (masse M=0,50 kg ; rayon R= 15 cm). Quel est le déplacement du disque lorsque l'insecte effectue un tour complet (retour au point de départ) ? Les frottements sont négligés.

L'insecte en se déplaçant entraîne le disque ;ce dernier tourne plus lentement que l'insecte.

Ecrire la conservation du moment cinétique du système {insecte, disque}

Moment d'inertie du disque : I1=½MR²

M = 0,5 kg, R = 0,15m : I1 = 0,5*0,5*0,15²= 5,62 10^-3 m²

Moment d' inertie de l'insecte : I2 = mr²

m = 10^-3 kg et r = 0,15 m : I2 = 10^-3*0,15² =2,25 10^-5 kg m²

Conservation du moment cinétique :

I1 . "omega"1 = I2 . "omega"2

où "omega"1 et "omega"2 sont respectivement les vitesses angulaires (

/s) du disque et de l'insecte.

$$\tfrac{1}{2}MR^2\,\omega_1 = mR^2\,\omega_2\ ;\ \tfrac{1}{2}M\omega_1 = m\,\omega_2\ ;\ \omega_1 = \frac{2m}{M}\ \omega_2$$

De plus les vitesses angulaires sont constantes, donc proportionnelles aux

balayés.

L'insecte fait un tour ; l'angle balayé est "alpha"2 = 2 pi radians.

Le disque tourne de l'angle "alpha"1 pendant le même temps.

$$\omega_1 = \frac{2m}{M}\ \omega_2 \rightarrow \alpha_1 = \frac{2m}{M}\ \alpha_2$$

"alpha"1 = 2 10^-3 / 0,5 * 6,28 = 10^ -2 rad.

ou bien "alpha"1*180 / 3,14 = 1,4 degrés.

22

nf

Moment cinétique (ou moment angulaire)

La grandeur physique qui joue un rôle analogue à la quantité de mouvement dans le cas des rotations est le vecteur moment cinétique (ou moment angulaire).

1) Dans le cas d'un objet ponctuel:

Le moment cinétique se définit par:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\text{Unités : } \left[\frac{kg \cdot m^2}{s}\right] = [m] \cdot \left[\frac{kg \cdot m}{s}\right]$$

où:

- r est le vecteur position du point par rapport à une origine qu'il faut spécifier et

- p sa quantité de mouvement. L un vecteur perpendiculaire au plan formé par r et p.

Sa grandeur, ou norme, est L = r . p . sin α

où α est l'angle entre r et p.

2) Dans le cas d'un solide:

Le moment cinétique total d'un solide en rotation est donné par la somme vectorielle des moments angulaires de tous les

points qui constituent le solide:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

La direction du vecteur L coïncide avec l'axe de rotation si celui-ci est un axe de symétrie du solide.

Moment d'inertie

Le moment cinétique peut aussi se déterminer à partir de la vitesse angulaire ω de l'objet:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\text{Unités : } \left[\frac{kg \cdot m^2}{s}\right] = \left[kg \cdot m^2\right] \cdot \left[s^{-1}\right]$$

où I est le moment d'inertie, un scalaire qui décrit la répartition de la masse dans l'espace.

Le moment d'inertie autour de l'axe de rotation du solide constitué des masses mi , di étant la distance entre la masse mi et l'axe de rotation.

$$I = \sum_i m_i \cdot d_i^2 = \int r^2 \cdot dm \qquad \text{Unités : } \left[kg \cdot m^2\right]$$

Lorsque l'axe de rotation ne passe pas par le centre de gravité, on utilise la règle de Steiner:

$$I = I_G + m \cdot \ell^2$$

où ℓ est la distance qui sépare l'axe de rotation du centre de gravité de l'objet

Théorème fondamental du moment cinétique

Le moment de force est égal à la variation du moment cinétique en fonction du temps:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Ce qui implique que dans un SYSTEME ISOLE, le moment angulaire total est CONSERVÉ.

étude dynamique des anneaux de Saturne, atmosphère de Titan physique concours Mines 08

La planète Saturne est assimilée à un corps à répartition sphérique de masses, de centre O_S, de masse m_S= 6 10^{26} kg, de rayon R_S. On suppose que le référentiel saturnien, de point fixe O_S et en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique, est galiléen. On note G la constante de gravitation.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides.

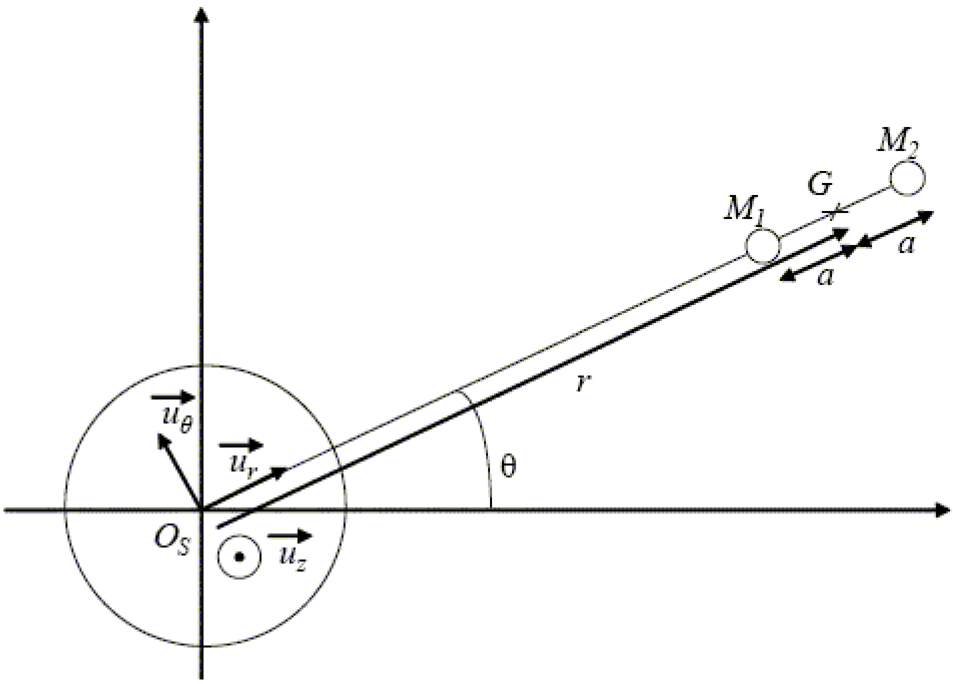
Supposons qu'un anneau soit un agglomérat solide de corps (rochers, cailloux, blocs de glace), en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Saturne. On isole deux de ces corps formant un doublet δ =({M_1, M_2}, de faible taille à l'échelle astronomique, de centre d'inertie G, de même masse , à la distance 2a l'un de l'autre ; on suppose, en outre, que :

• O_S, M_1, M_2 restent alignés en permanence ;

• on pose $\mathbf{u_r} = \mathbf{O_SG}/O_SG$, $\mathbf{O_SG}= r\,\mathbf{u_r}$; $\theta=\omega\, t$, et on dfinit le repère cylindrique ($\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_\theta}$,$\mathbf{u_z}$)

• il vient $\mathbf{O_SM_1}= (r-a)\,\mathbf{u_r}$ et $\mathbf{O_SM_2}= (r+a)\,\mathbf{u_r}$; $a<<r$

• le référentiel R_{Sd} =(O_S, $\mathbf{u_r}$, $\mathbf{u_\theta}$,$\mathbf{u_z}$) est appelé référentiel saturno-doublet : c'est un référentiel non galiléen en rotation uniforme par rapport au référentiel saturnien, à la vitesse angulaire ω et dans lequel O_S, G, M_1, M_2 sont immobiles.



On néglige l'influence de tous les autres corps de l'anneau sur le système δ.

En écrivant le théorème de la résultante cinétique sur le doublet δ, établir l'identité $\mathbf{Gm_S/r^2 =\omega^2 r}$.

G est immobile dans le réfrentiel R_{Sd} ; G est soumis à la force de gravitation de Saturne et à une force d'inertie centripète : ces deux forces sont opposées.

$$Gm_S\, 2m / r^2 (-\mathbf{u_r})+ 2m\, \omega^2\, r\, \mathbf{u_r} =\mathbf{0}.$$

Faire l'inventaire de toutes les forces subies par M_1 dans R_{Sd} et montrer que leur somme vectorielle peut s'écrire $\Sigma\, \mathbf{f} = f(a,r)\mathbf{u_r}$: on donnera l'expression de f(a,r), comme une fonction des variables a et r et des paramètres G, m et m_S .

- Force de gravitation exercée par Saturne :

$Gm_Sm/(r-a)^2(-\mathbf{u_r})$

- Force de gravitation exercée par M_2 :

$G\ m^2 / 4a^2\ \mathbf{u_r}$.

- Force d'inertie centrifuge : $m\ \omega^2\ (r - a)\mathbf{u_r}$.

$\Sigma\ \mathbf{f} = [\ m\ \omega^2\ (r - a) + G\ m^2 / 4a^2 - Gm_Sm/(r-a)^2]\ \mathbf{u_r}$.

$\mathbf{f(a,r) = m\ \omega^2\ (r - a) + G\ m^2 / 4a^2 - Gm_Sm/(r-a)^2}$.

On admet pour la suite que par un développement limité au premier ordre en $a/r<<1$, cette fonction a pour valeur approchée :

$f(a,r) = G\ m^2 / 4a^2 - 3Gm_Sma/r^3$.

Il y aura dislocation progressive de l'anneau si la résultante des forces a tendance à éloigner M_2 de M_1, donc si $f(a,r) <0$.

Montrer que cette condition se traduit par l'existence d'une valeur minimale r_0 de r (on l'appelle limite de Roche) ne dépendant que de m_S, et de $\mu = m/a^3$.

On donne $\mu = 720$ kg m^{-3}.

$G\ m^2 / 4a^2 - 3Gm_Sma/\mathbf{r_0}^3 = 0$; $m/4a^2 = 3m_Sa/\mathbf{r_0}^3$; $\mathbf{r_0}^3 = 12m_Sa^3/m$; $\mathbf{r_0 = (12m_S/\mu)^{1/3}}$.

Déduire de ce qui précède un ordre de grandeur de r_0. Conclure en considérant que les anneaux ont un rayon de l'ordre de 10^8 m.

$r_0 = (12*6\ 10^{26}/720)^{1/3} = (\ 10^{26}/10)^{1/3} = (\ 10*10^{24})^{1/3} = 10^{1/3}\ 10^8 \sim 2{,}2\ 10^8$ m.

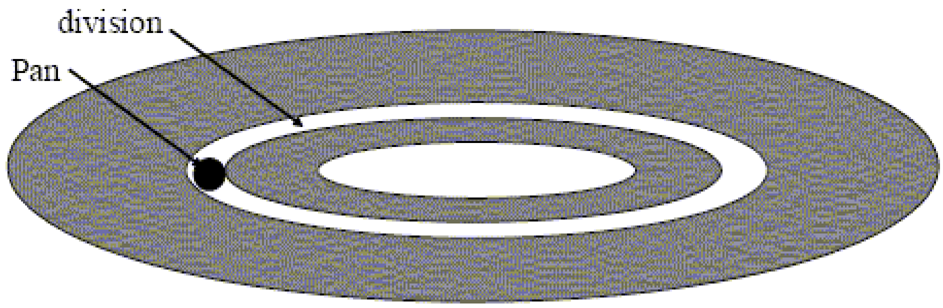
Cette valeur est supérieure au rayon des anneaux : les anneaux résulte de la dislocation d'un solide.

Dans ce qui suit, on assimile tous les corps autour de Saturne à des petits et moyens blocs solides indépendants en orbite circulaire et on néglige toutes les forces d'interaction entre eux devant l'attraction gravitationnelle de la planète.

Divisions des anneaux.

Les anneaux sont divisés : la première division fut observée par Cassini qui détecta le premier une bande circulaire vide de blocs, et découpant ainsi « l'anneau » en deux anneaux distincts (cette division est encore appelée division Cassini). On en a détecté un très grand nombre depuis.

On s'intéresse ici à la division observée sur le rayon orbital d'un petit satellite sphérique, Pan, de centre O_P, de rayon r_P, et de rayon orbital $r_P = O_SO_P$.



Le référentiel saturno-Pan R_{SP} est en rotation uniforme autour du référentiel saturnien, suiveur du mouvement de Pan, dans lequel O_S et O_P restent fixes. On considère deux petits rochers A et B encore présents dans cette bande et tournant dans le même sens. A est en orbite circulaire de rayon r_A légèrement inférieur à r_P, B est en orbite circulaire de rayon r_B légèrement supérieur à r_P.

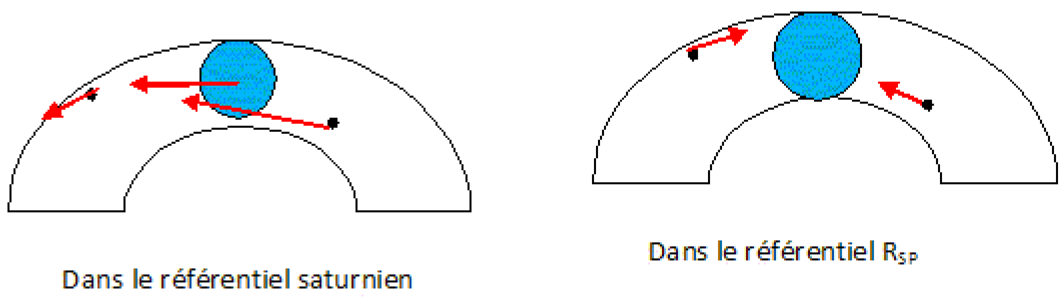
Montrer que plus le rayon de l'orbite circulaire d'un corps satellisé autour de Saturne est grand, plus sa vitesse le long de son orbite est faible.

Ecrire la 3^{è} loi de Kepler : $T^2/r^3 = 4\pi^2/(Gm_S)$ avec 2π r = v T ; $T^2/r^2 = 4\pi^2/v^2$.

$4\pi^2/(v^2r) = 4\pi^2/(Gm_S)$; $v^2 = Gm_S/r$; **$v = (Gm_S/r)^{½}$**.

Tracer dans le référentiel saturnien, l'allure des vecteurs vitesses des centres des trois corps (l'échelle est arbitraire).

En déduire, dans le référentiel R_{SP}, l'allure des vecteurs vitesses de A et de B et les tracer sur la figure.



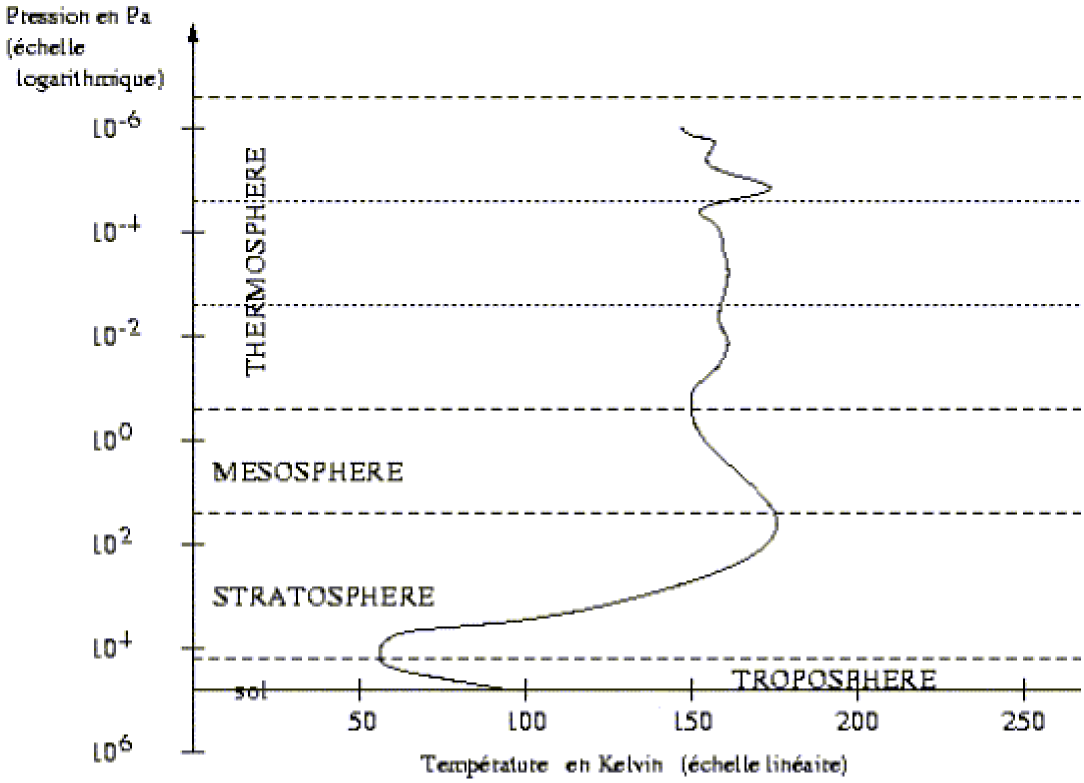
En déduire pourquoi et AB ne pourront rester sur leur orbite, et pourquoi on dit que Pan « nettoie » la bande décrite par sa trajectoire en dessinant une division dans les anneaux.

A et B ne peuvent que s'écraser ou rebondir sur Pan, au regard des directions et sens de leurs vitesse.

L'atmosphère de Titan.

Saturne possède un satellite remarquable, Titan, sur lequel la sonde Huygens, véhiculée par la capsule spatiale Cassini, s'est posée avec succès le 14 janvier 2005. Les capteurs embarqués ont permis d'enregistrer les variations de la pression et de la température en fonction de l'altitude.

La figure suivante donne sur l'axe de gauche la pression de l'atmosphère en pascals, en échelle logarithmique, sur l'axe de droite l'altitude correspondante en km, en échelle non régulière, et sur l'axe horizontal la température en Kelvin en échelle linéaire. La courbe tracée permet donc de suivre l'évolution de la température en fonction de l'altitude ou de la pression.



On admettra que dans l'atmosphère, l'accélération de la pesanteur de Titan garde une valeur constante g_T=1,6 m s^{-2}. R = 8,3 J mol^{-1} K^{-1} la constante des gaz parfaits. On note μ(z) la masse volumique du gaz et P(z) sa pression à l'altitude z.

On assimile la mésosphère et la thermosphère à un gaz parfait en évolution isotherme de masse molaire M.

En écrivant l'équation d'état des gaz parfaits et la loi de la statique des fluides, établir l'équation différentielle vérifiée par P(z).

loi des gaz parfaits : P(z) V = nRT avec m =

n M et μ = m/V d'où $P(z) = \mu RT/M$.

loi de la statique des fluides : $dP(z) = -\mu(z)\, g_T\, dz$

$dP(z) = -P(z)M\, g_T / (RT)\, dz$; $\mathbf{dP(z) / P(z) = -Mg_T/(RT)\, dz}$.

Résoudre cette équation sans chercher à déterminer la constante d'intégration et en déduire si le modèle adopté est conforme avec les données de la figure.

$\ln P(z) = -M\, g_T\, z / (RT) + \text{cste}$.

$\ln P(z_0) = -M\, g_T\, z_0 / (RT) + \text{cste}$; $\text{cste} = \ln P(z_0) + M\, g_T\, z_0 / (RT)$

$\ln P(z) - \ln P(z_0) = -M\, g_T\, (z - z_0) / (RT)$.

Dans la mésosphère et la thermosphère, la température varie peu et à une chelle logarithmique de la pression correspond une échelle linéaire de la température. Le modèle est donc conforme.

Dans la troposphère, on admet que le principal constituant est le diazote N_2, de masse molaire M = 28 $g\,mol^{-1}$, assimilé à un gaz parfait de rapport des capacités calorifiques γ = 1,4, et que les évolutions sont adiabatiques et reversibles. On note P_0 et μ_0 les valeurs de la pression et de la masse volumique au niveau du sol.

Etablir l'expression de la pression P en fonction de P_0, μ_0, γ, g_T et z.

adiabatique reversible : $P^{1-\gamma}\, T^{\gamma} = \text{cste}$; $P^{(1-\gamma)/\gamma}\, T = P_0^{(1-\gamma)/\gamma}\, T_0$.

$dP(z) = -P(z)M\, g_T / (RT)\, dz$ s'écrit : $dP(z) = -P \,.\, P^{(1-\gamma)/\gamma} M\, g_T / (RP_0^{(1-\gamma)/\gamma}\, T_0)\, dz$

$dP(z) = -P^{1/\gamma} M\, g_T / (RP_0^{(1-\gamma)/\gamma}\, T_0)\, dz$ avec $P_0 = \mu_0 RT_0/M$; $M/(RT_0) = \mu_0 / P_0$.

$dP(z) = -P^{1/\gamma}\, \mu_0\, g_T / P_0^{1/\gamma} dz$; $P^{-1/\gamma}\, dP(z) = -\mu_0$

$g_T / P_0^{1/\gamma} dz$

Intégration entre 0 et z : $\gamma/(\gamma-1)P^{(\gamma-1)/\gamma} = -\mu_0 g_T / P_0^{1/\gamma} z$ + cste.

à l'altitude z=0 : $\gamma/(\gamma-1)P_0^{(\gamma-1)/\gamma}$ = cste d'où : $\gamma/(\gamma-1)P^{(\gamma-1)/\gamma} - \gamma/(\gamma-1)P_0^{(\gamma-1)/\gamma} = -\mu_0 g_T / P_0^{1/\gamma} z$.

$\mathbf{P^{(\gamma-1)/\gamma} - P_0^{(\gamma-1)/\gamma} = -(\gamma-1)/\gamma\, \mu_0 g_T P_0^{-1/\gamma} z}$.

Déterminer une valeur approchée de l'altitude à laquelle P s'annule et en déduire si le modèle adopté est conforme avec les données de la figure.

P=0 si : $P_0^{(\gamma-1)/\gamma} = (\gamma-1)/\gamma\, \mu_0 g_T P_0^{-1/\gamma} z$; $P_0 = (\gamma-1)/\gamma\, \mu_0 g_T z$; $z = P_0\gamma / ((\gamma-1)\mu_0 g_T)$

Or $P_0 = \mu_0 RT_0/M$ d'où $\mathbf{z = \gamma RT_0 / ((\gamma-1)Mg_T)}$.

Le graphe donne T_0 = 90 K :

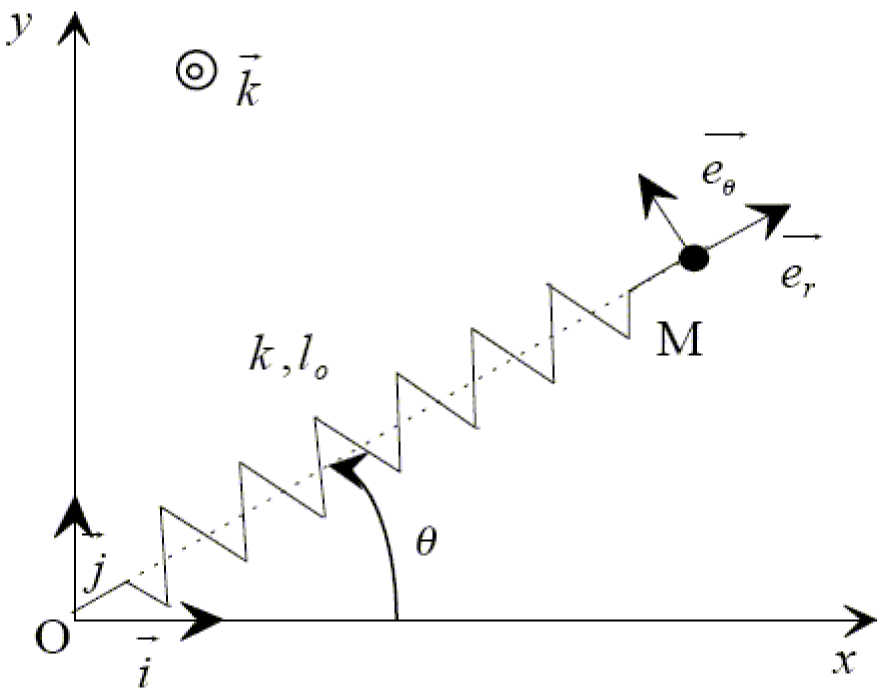
$z = 1{,}4 \cdot 8{,}3 \cdot 90 / (0{,}4 \cdot 28\ 10^{-3} \cdot 1{,}6)$ = 58 000 m = 58 km.

La pression ne s'annule pas à cette altitude d'après le graphe : modèle non conforme.

Aurélie 02/04/08

Etude d'un ressort dans deux référentiels ; forces d'inertie ; énergie potentielle effective Mines 2002

Etude dans le référentiel R du laboratoire.



Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Le mouvement est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen et associé à un repère (O, **i, j**, **k**). Un palet M de masse m peut se mouvoir sans

frottement dans le plan (, O x,y) horizontal (table à coussin d'air par exemple). Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : **g**=-g**k**.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0 , de raideur k , dont l'autre extremité est fixée en O. La position de M est repèrée dans la base (**i**, **j**) par OM = x**i** +y **j** ou dans la base ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$) par **OM** = r $\mathbf{e_r}$.

Faire un bilan des forces. Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique,

L_O par rapport à O.

Le palet est soumis à son poids (verticale, vers le bas, valeur mg), à l'action du plan (verticale, vers le haut, opposée au poids) et à la tension T du ressort (dirigée suivant OM, valeur $k|l-l_0|$)

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{T} \wedge \vec{OM} = \vec{0}, \vec{T} \text{ et } \vec{OM} \text{ sont colinéaires}}$$

Le moment cinétique L_O est donc constant.

A t=0, la masse est lâchée, sans vitesse initiale d'une longueur $l=1,2l_0$: **OM** (t=0) $=1,2l_0$ **i**.

Calculer L_O. Quelle est la nature de la trajectoire ?

$L_O = m\mathbf{v_0} \wedge$ **OM** (t=0) ; or $\mathbf{v_0}$ est nulle , donc L_O est nul.

La trajectoire est l'axe Ox.

Déterminer l'évolution temporelle de la longueur du ressort, l(t) =OM(t). Préciser l'intervalle de variation de l , longueur du ressort.

La seconde loi de Newton s'écrit : **T** = m**a** ; $-k(l-l_0)$ **i** = m**a** ;

projection sur l'axe Ox : $-k(l-l_0) = mx''''$ et en posant $x = (l-l_0)$: $kx+mx''=0$

$x'' + \omega_0^2 x=0$ avec $\omega_0^2 = k/m$.

Solution générale de cette équation différentielle $x(t) =A \cos (\omega_0 t+\varphi)$

à t=0 $x(0) = 0,2\, l_0 = A\cos \varphi$ d'où : $A = 0,2\, l_0$ et $\varphi =0$.

$x(t) =0,2\, l_0 \cos (\omega_0 t)$; $\mathbf{l = l_0 +0,2\, l_0 \cos (\omega_0 t)}$.

La longueur du ressort varie entre $0,8\, l_0$ et $1,2\, l_0$.

On lance la particule d'un point $\mathbf{OM_0}$=**OM**(t=0) $=l_1$ **i**, avec une vitesse initiale $\mathbf{v_0} = l_1\omega$ **j**.

Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y).

Préciser L_0 en fonction de r et $d\theta/dt$ puis en

fonction des conditions initiales et des vecteurs de base.

On notera L, le module de $\mathbf{L_0}$.

$\mathbf{L_O}$ = m$\mathbf{v_0}$^ **OM** (t=0) = mdθ/dt $\mathbf{e_\theta}^{r}\mathbf{e_r}$ = $ml_1\omega$ **j** ^l_1 **i** =$ml_1^2\omega$**k**.

Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique.

$E_p = ½k(l-l_0)^2 = ½k(r-l_0)^2$

Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?

Non, le mouvement s'effectue dans un plan horizontal.

Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique E_M.

Le poids et l'action du support, perpendiculaires à la vitesse, ne travaillent pas.

La tension dérive d'une énergie potentielle, c'est une force conservative. L'énergie mécanique est donc constante.

Préciser l'expression de E_M en fonction des conditions initiales.

énergie potentielle élastique initiale : $E_p(0) = ½k(l_1-l_0)^2$

énergie cinétique initiale : $E_c(0) = ½m(l_1\omega)^2$.

énergie mécanique initiale $E_M(0) = ½k(l_1-l_0)^2 + ½m(l_1\omega)^2$.

Préciser l'expression de E_M en fonction de r, dr/dt, dq/dt, m , k et l_0.

valeur de la vitesse à la date t : $v = [\ (dr/dt)^2 + r^2(d\theta/dt)^2\ ]^{½}$.

$E_M = ½k(r-l_0)^2 + ½m[\ (dr/dt)^2 + r^2(d\theta/dt)^2\ ]$.

Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire $E_M = ½m\ (dr/dt)^2 + E_{eff}(r)$.

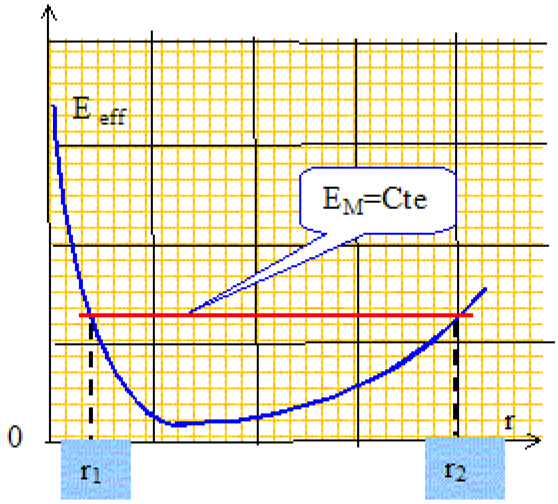
$E_M = ½m\ (dr/dt)^2 + ½k(r-l_0)^2 + ½m\ r^2(d\theta/dt)^2$.

On pose $E_{eff}\ (r) = ½k(r-l_0)^2 + ½m\ r^2(d\theta/dt)^2 = E_{eff}\ (r) = ½k(r-l_0)^2 + ½m\ r^2\omega^2$.

Conservation du moment cinétique : $L = ml_1^2\omega = m\ r^2 d\theta/dt$; $d\theta/dt = l_1^2\omega / r^2$

d'où $\mathbf{E_{eff}\ (r) = ½k(r-l_0)^2 + ½ml_1^4\omega^2 / r^2}$.

Tracer l'allure de E_{eff} (r).



La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction ?

La trajectoire de la particule d'énergie mécanique E_M est limitée par les deux valeurs r_1 et r_2 : la particule est liée au pôle d'attraction et ne peut pas être libre de s'en éloigner indéfiniment.

La vitesse de la particule peut-elle s'annuler au cours de son mouvement ?

$\mathbf{L_O} = m\mathbf{v} \wedge \mathbf{OM}\ (t) = m l_1^2 \omega \mathbf{k}$.

Le moment cinétique reste constant : en conséquence la vitesse ne peut pas s'annuler.

La particule peut-elle passer par le centre d'attraction au cours de son mouvement ?

Le moment cinétique reste constant : en conséquence OM=r ne peut pas s'annuler.

On cherche à déterminer une condition entre l_1 et ω pour avoir un mouvement circulaire.

Montrer que dans ce cas le mouvement est uniforme.

Dans ce cas $r = l_1$ = Cte ; de plus le moment cinétique reste constant : $\mathbf{L_O} = m\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{OM}\ (t) = m l_1^2 \omega \mathbf{k}$.

$m\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{OM}\ (t) = m\,v\,l_1 \mathbf{k} = m l_1^2 \omega \mathbf{k}$ d'où $v = \omega l_1$ = Cte.

La valeur de la vitesse étant constante, le mouvement est uniforme.

Déterminer l_1 en fonction de k, l_0 et ω. Est-elle valable pour tout ω ?

Lorsque $\mathbf{E_{eff}}$ **(r)** est minimale, le mouvement est circulaire uniforme de rayon $r = l_1$.

$dE_{eff}(r)/dr = 0$; $E_{eff}(r)/dr = k(r-l_0) - ml_1^4\omega^2/r^3 = 0$

$k(l_1-l_0) - ml_1^4\omega^2/l_1^3 = 0$; $k(l_1-l_0) = ml_1\omega^2$; $kl_0 = l_1(k-m\omega^2)$

$\mathbf{l_1 = kl_0/(k-m\omega^2)}$.

Le dénominateur ne peut être négatif ou nul ; donc ω doit être inférieur à $(k/m)^{½}$.

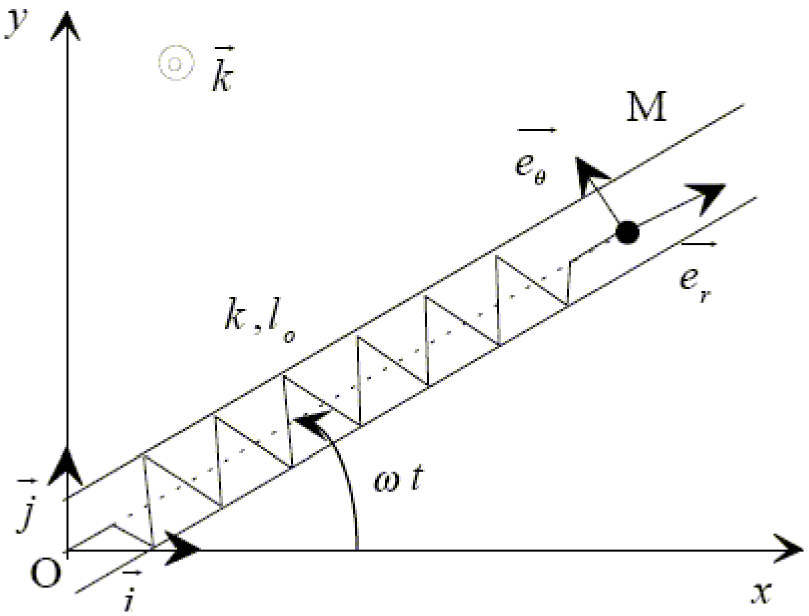
<u>Etude dans le référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe</u>.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Le mouvement est étudié dans le référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe Oz fixe, de vecteur vitesse **Ω** = ω**k**, et associé au repère (O, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$, **k**).

On considère une particule M de masse m pouvant se mouvoir sans frottement le long de l'axe (O, $\mathbf{e_r}$). Le champ de pesanteur est toujours suivant la verticale Oz : **g** = -g**k**.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0, de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en O. La position de M esr repérée dans la base ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$) par **OM**= r $\mathbf{e_r}$.



Préciser les expressions vectorielles des forces d'inertie dans la base ($\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_\theta}$, **k**).

Force d'inertie d'entraînement : $\mathbf{f_{ie}} = m\omega^2 r\, \mathbf{e_r}$.

Force d'inertie de Coriolis : $\mathbf{f_{iC}} = -2m\omega\, \mathbf{k} \wedge dr/dt\, \mathbf{e_r} = -2m\omega\, dr/dt\, \mathbf{e_\theta}$.

Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $E_{p\,f\,ie}$ que l'on précisera.

Considérons la fonction $E_p = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$.

-grad $E_p = -dE_p/dr\ \mathbf{e_r} = m\omega^2 r\ \mathbf{e_r}$.

La force $\mathbf{f_{ie}} = m\omega^2 r\ \mathbf{e_r}$ dérive de l'énergie potentielle $E_p = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$.

En est-il de même pour la force d'inertie de Coriolis ou complémentaire ?

La force d'inertie de Coriolis est perpendiculaire à la vitesse : elle ne travaille pas et ne dérive donc pas d'une énergie potentielle.

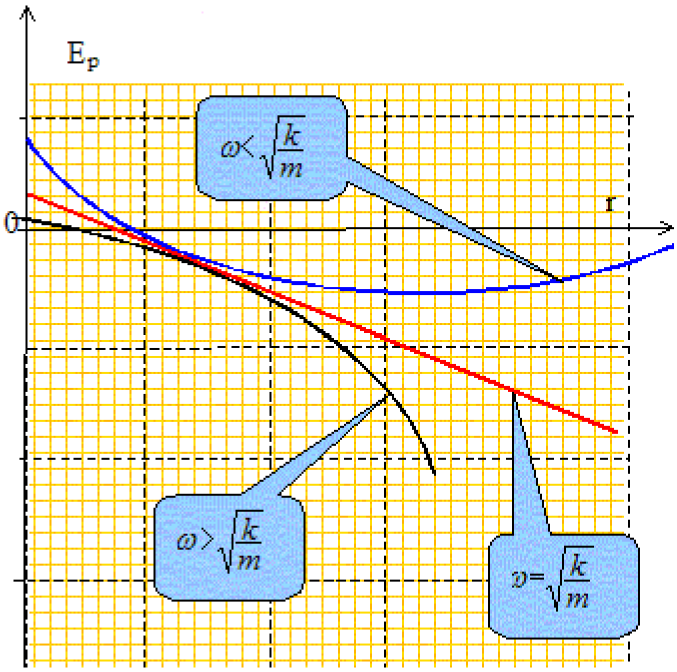
Déterminer l'énergie potentielle totale.

$$E_p = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2.$$

Tracer l'allure de $E_p(r)$. On distinguera trois cas possibles selon la valeur de ω.

$dE_p/dr = k(r-l_0)-m\omega^2 r = r(k-m\omega^2)-kl_0$.

La dérivée s'annule pour $r = kl_0/(k-m\omega^2)$.



Déterminer la longueur l_2 correspondant à la position d'équilibre dans R'.

La dérivée s'annule pour $r = kl_0/(k-m\omega^2)$; la dérivée est positive si $r > kl_0/(k-m\omega^2)$; la dérivée est négative si $r < kl_0/(k-m\omega^2)$;

Il s'agit donc d'un minimum d'énergie potentielle. $l_2 = kl_0/(k-m\omega^2)$.

A quelle condition sur ω le résultat est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ?

$k - m\omega^2$ doit êtrte positif soit $\boldsymbol{\omega < (k/m)^{1/2}}$; l'équilibre est stable du fait du minimum d'énergie potentielle.

Quel est alors le mouvement dans le référentiel du laboratoire ?

Circulaire uniforme.

Comparer l_2 et l_1 et conclure.

$l_2 = l_1$; dans le cas de ce mouvement circulaire uniforme les deux référentiels sont équivalents.

Energie potentielle : modélisation d'un oscillateur physique concours Mines 08

Soit un point matériel de masse m, en mouvement dans le champ de pesanteur g uniforme.

Les caractères gras, écrits en rouge, désignent des grandeurs vectorielles.

<u>Étude énergétique d'un oscillateur</u>.

Définir l'énergie potentielle associée à une force F.

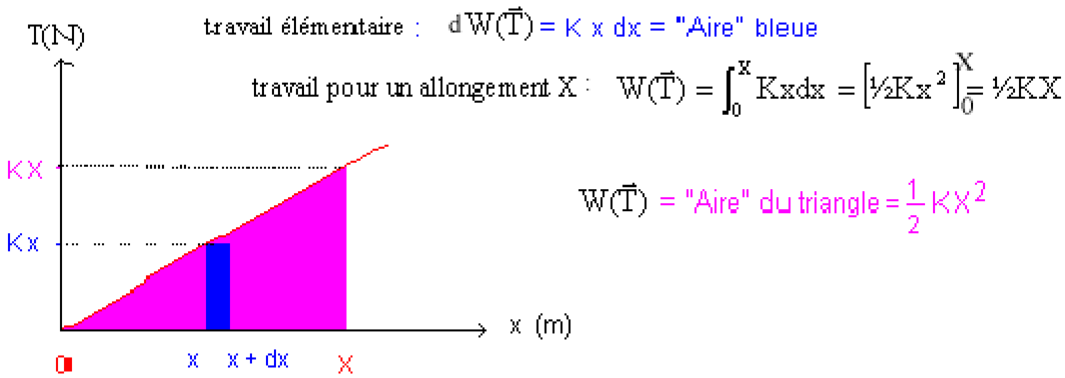
L'énergie potentielle d'un système physique est associée à une force dite conservative : une force conservative dérive d'une énergie potentielle : $F = -dE_p/dr$.

L'énergie potentielle est définie à une constante près ; la variation d'énergie potentielle est l'opposé du travail W d'une force conservative.

Pour une force de rappel élastique de constante K, déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'écart x à la position d'équilibre, à une constante additive près.

La tension T est proportionnelle à l'allongement x du ressort T= K x

K raideur du ressort (N/m)



On considère un mouvement conservatif de m sur l'axe horizontal Oy, autour d'une position d'équilibre Y_0, avec l'énergie potentielle $E_p(y) = E_0 + \alpha\,(y-Y_0)^2$, où α est une constante positive.

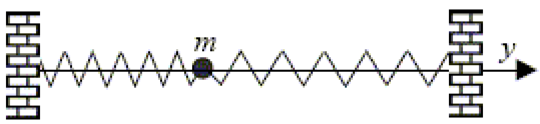
Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire qu'il s'agit d'oscillations harmoniques dont on précisera l'expression de la période.

Expression de l'énergie mécanique : $E_m = E_p(y) + E_c(y) = E_0 + \alpha\,(y-Y_0)^2 + \frac{1}{2} m(dy/dt)^2$ = constante.

Dériver par rapport au temps : $2\alpha\,(y-Y_0)\,dy/dt + m\,dy/dt\,.\,d^2y/dt^2 = 0$

Simplifier par dy/dt : $2\alpha\,(y-Y_0) + m\,d^2y/dt^2 = 0$; $\mathbf{d^2y/dt^2 + 2\alpha/m\;y = 2\alpha/m\;Y_0}$.

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = (2\alpha/m)^{1/2}$ et de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi\,(m/(2\alpha))^{1/2}$.



Les ressorts sont identiques, de raideur k et de longueur à vide L_0, tandis que les points d'attache sont distants de $2L_0$.

Exprimer Ep(y) si y désigne l'écart à la position d'équilibre, et calculer la période T_0 des oscillations de m si m =

200 g et k = 40 N/m.

Les énergies potentielles $\frac{1}{2}ky^2$ + Cte de chaque ressort s'ajoutent ; si on choisit la position d'équilibre comme origine de l'énergie potentielle, la constante est nulle.

$E_p(y) = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}ky^2 = \mathbf{ky^2}$.

On retrouve le cas précédent avec $Y_0 = 0$ et $\alpha = k$: $\mathbf{T_0 = 2\pi (m/(2\kappa))^{1/2}}$ = 6,28 $(0,2/80)^{1/2}$ =**0,31 s**.

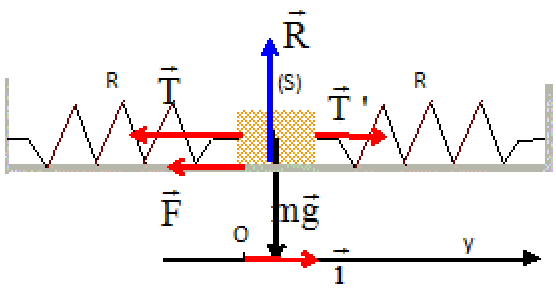
On envisage l'existence d'un frottement fluide d'intensité proportionnelle à la vitesse de m par rapport à l'axe du mouvement : **F = -ß m v**, où ß est une constante.

Donner la dimension ou l'unité SI de ß.

ß = **-F / (mv)** : force : masse * accélération = masse * longueur / temps^2 soit MLT^{-2}.

mv : masse * longueur / temps soit MLT^{-1} ; par suite [**ß**] = $\mathbf{T^{-1}}$.

Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la valeur numérique maximale de ß permettant les oscillations de m ?



$$\vec{T} = k(L_0 + y - L_0)(-\vec{i}) ; \vec{T}' = k(L_0 - y - L_0)\vec{i} ; \vec{F} = \beta m \frac{dy}{dt}(-\vec{i})$$

$$\vec{T} + \vec{T}' + \vec{F} = m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{i} \Rightarrow -2ky - \beta m \frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \beta\frac{dy}{dt} + \frac{2k}{m}y = 0}$$

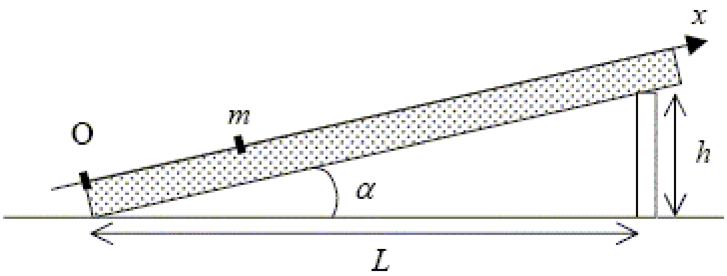
Polynôme caractéristique : $r^2 + ßr + 2k/m = 0$; discriminant $\Delta = ß^2 - 8k/m$.

Le régime est pseudo-périodique si $\Delta < 0$ soit $\mathbf{ß < 2\,(2k/m)^{1/2}}$; $ß < 2\,(80/\,0,2)^{1/2}$; **ß <**

40 s^{-1}.

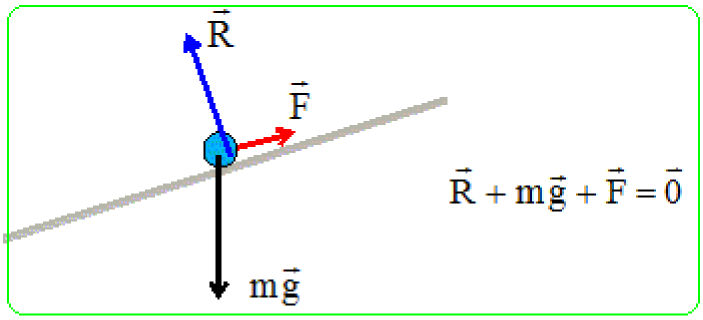
Modélisation d'un dispositif expérimental.

On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle α par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O, et un autre aimant, de masse m, est fixé sur un palet mobile sans frottement :



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force notée F, prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

Faire un bilan des forces à l'équilibre sur un schéma.



Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme : $\mathbf{F}(x) = k.(x_0 / x)^n.\mathbf{e_x}$, avec $k > 0$ et n entier naturel.

Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_e en fonction de x_0, k, m, g, L, h et n dans le cas des petits angles (h << L).

NB : cette approximation sera toujours utilisée dans la suite.

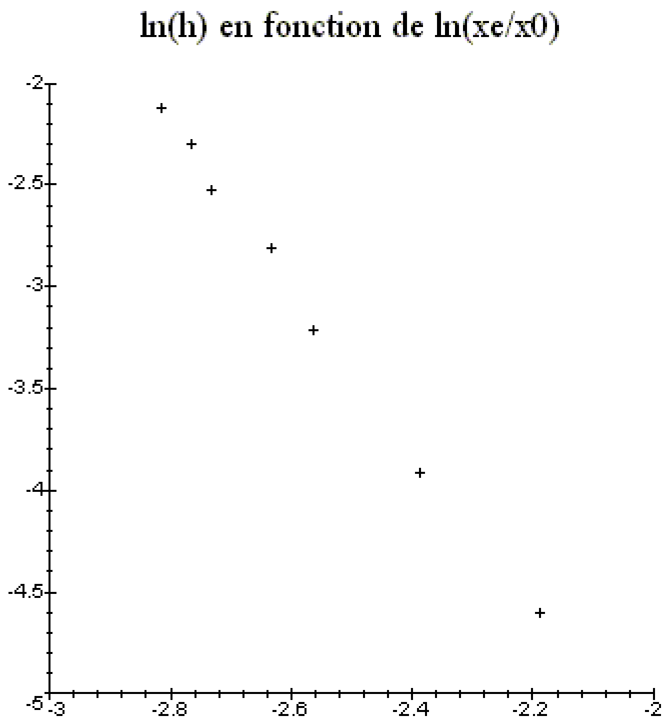
Projection sur Ox de la somme vectorielle des forces : $-mg \sin \alpha + F = 0$

sin α~ h/L ; $mgh/L = k.(x_0 / x_e)^n$; $(mgh / (kL))^{1/n} = x_0 / x_e$; $\mathbf{x_e = x_0 . [kL / (mgh)]^{1/n}}$.

On mesure x_e pour différentes cales, puis on représente ln(h) en fonction de $\ln(x_e / x_0)$. En prenant $x_0 = 1$ m,

déduire des mesures ainsi représentées ci-dessous les valeurs de n et de k.

On donne : L = 120 cm ; m = 189 g ; g = 9,81 m.s^{-2}.



ln(h)	-2,19	-2,39	-2,56	-2,63	-2,73	-2,76	-2,81
$\ln(x_e/x_0)$	-4,61	-3,91	-3,22	-2,81	-2,53	-2,30	-2,12

$mgh/L = k.(x_0 / x_e)^n$; $\ln h + \ln (mg/(kL)) = n \ln (x_0 / x_e) = - n \ln(x_e / x_0)$

coefficient directeur de la droite : -n = -(4,61-2,12) / (2,81-2,19) = - 4 ; **n = 4**.

$\ln k = \ln(mgh/L) + n \ln(x_e / x_0) = \ln (0,189*9,8 /1,2) + \ln h + 4 \ln (x_e / x_0)$

$\ln k = 0,435 + \ln h + 4 \ln (x_e / x_0)$

ln(h)	-2,19	-2,39	-2,56	-2,63	-2,73	-2,76	-2,81
ln(x_e/x_0)	-4,61	-3,91	-3,22	-2,81	-2,53	-2,30	-2,12
ln k	-20,1	-17,6	-15,0	-13,4	-12,4	-11,5	-10,9

k est de l'ordre de **10^{-6} N m^{-1}**.

Exprimer littéralement l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de m, à une constante additive près, en fonction de x, x_0, k, m, g, L, h et n, puis en fonction de x, x_0, x_e, k et n.

Energie potentielle de pesanteur : E_{pp} = mg x sin α + constante = mg x h/L + Constante.

Energie potentielle magnétique : chercher une primitive de F = k.$(x_0 / x)^n$ soit : 1/(n+1) k.x_0^n . x^{-n+1} / (n-1)

Energie potentielle totale : **$E_p(x)$= mg x h/L + k.x_0^n . x^{1-n} / (n-1) +Constante**.

Lorsqu'on se limite à des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, on rappelle qu'on peut utiliser pour l'énergie potentielle un développement de Taylor d'ordre 2 :

$$E_p(x) \approx E_p(x = x_e) + \frac{(x - x_e)^2}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=x_e}$$

En déduire une expression de Ep(x~ x_e) sous la forme : ½K$(x-x_e)^2$ + Cste ; on exprimera la constante K en fonction de x_e, x_0, k et n.

K : valeur de la dérivée seconde de l'énergie potentielle pour x = x_e.

K = n k x_0^n. x_e^{-1-n}.

Justifier qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente.

Ep(x~ x_e) = ½K$(x-x_e)^2$ + Cste

F = -dEp/dx = -K (x-x_e).

Toutes choses égales par ailleurs, **montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera ; en déduire une méthode de mesure de n que l'on décrira**

succinctement.

$T^2=4\,\pi^2\, m/K$; $K = n\, k x_0^{\,n} .\, x_e^{-1-n}$; $m/K = m\, x_e^{\,n+1} / (n\, k x_0^{\,n})$

Or $\mathbf{x_e = x_0 \,.\, [kL / (mgh)]^{1/n}}$ d'où : $m/K = x_0\, m\, [kL / (mgh)]^{(n+1)/n} / (n\, k x_0) = Cste \,.\, h^{-(n+1)/n}$.

Par suite $T = Cste \,.\, h^{-(n+1)/(2n)}$; $\ln T = \ln cste - (n+1) / (2n) \ln h$

Mesurer la période pour différentes valeurs de h puis tracer la fonction $\ln T = f(\ln h)$: droite de pente $- (n+1) / (2n) =-5/8$

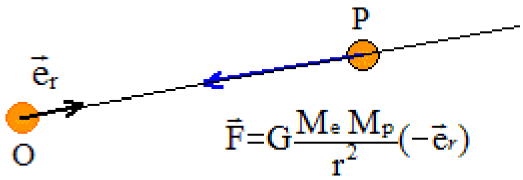
Mouvement d'une planète concours Mines 07

Les vecteurs sont écrits en bleu et en gras.

Nous voulons étudier le mouvement d'une planète, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_e de centre O, considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_p est située à une distance r=OP de O. Nous considérerons un référentiel lié à l'étoile comme un référentiel galiléen.

Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction des masses M_e et M_p, r, G, la constante universelle de gravitation

et le vecteur unitaire $\mathbf{e_r}$ = $\mathbf{OP}$/r.



Justifier précisément que le mouvement est plan. Préciser ce plan.

Ecrire le théorème du moment cinétique en O : $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{OP}\wedge\vec{F}=\vec{0}\Rightarrow L=\text{constante}}$

La trajectoire est plane : ce plan contient le point O et le vecteur force **F**. Ce plan est perpendiculaire au moment cinétique **L**.

On notera (**e**$_r$ et **e**$_\theta$). la base de projection dans ce plan et **e**$_z$, un vecteur unitaire suivant la direction du moment cinétique en O, **L**= L**e**$_z$.

Rappeler l'expression de la vitesse en coordonnées polaires.

$$\boxed{\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta}$$

Préciser l'expression de en fonction de L en fonction de M_p, r, dθ/dt.

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\wedge M_p\vec{v}=\vec{r}\wedge M_p\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)=M_p\vec{r}\wedge r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta=M_p r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z}$$

On suppose dans cette question que la planète décrit un mouvement circulaire de rayon R et de période T. On notera , le module de la vitesse v_c pour un mouvement circulaire.

Etablir l'expression de la vitesse v_c de la planète, en fonction de R,G et M_e.

$$\vec{F}=G\frac{M_e M_p}{r^2}(-\vec{e}_r)=M_p\,\vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=G\frac{M_e}{r^2}(-\vec{e}_r)\\ \\ \vec{a}_N=\frac{v_c^2}{r}(-\vec{e}_r)\end{array}\right\}\quad G\frac{M_e}{r^2}=\frac{v_c^2}{r}\ \text{soit}\ v_c^2=G\frac{M_e}{r};\ \boxed{v_c=\sqrt{G\frac{M_e}{r}}}$$

En déduire une relation entre r, T, G et M_e (3ème loi de Képler).

La période est la durée nécessaire pour décrire une circonférence de rayon r : $T = 2\pi r/v_c$.

$T^2 = 4\pi^2 r^2/v_c^2 = 4\pi^2 r^3/(GM_e)$; $T^2 / r^3 = 4\pi^2 / (GM_e)$.

Exprimer alors la vitesse v_c en fonction de G,T et M_e.

$1/r^3 = 4\pi^2/(T^2 GM_e)$; $v_c^6 = (GM_e)^3/r^3$

$v_c^6 = 4\pi^2 (GM_e)^2/T^2$; $\mathbf{v_c = [2\pi GM_e /T]^{1/3}}$.

En déduire l'énergie cinétique et l'énergie mécanique en fonction de G,T, M_p et M_e.

$E_c = ½M_p v_c^2 = \mathbf{½M_p [2\pi GM_e /T]^{2/3}}$.

$E_p = -GM_e M_p /r$ avec $1/r = [4\pi^2/(T^2 GM_e)]^{1/3}$.

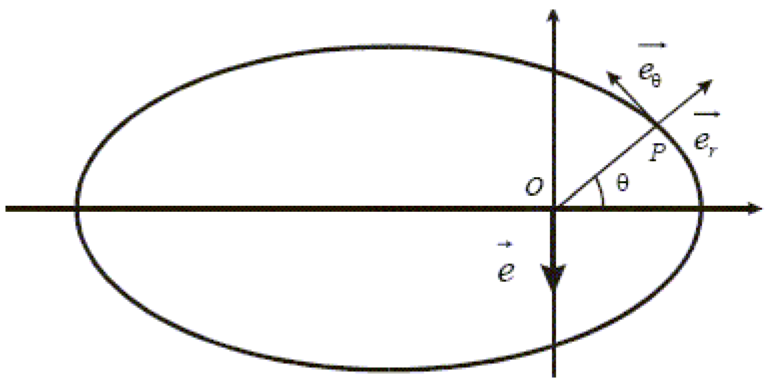
$E_p = -M_p [2\pi GM_e /T]^{2/3}$.

$E_M = E_c + E_p = \mathbf{-½M_p [2\pi GM_e /T]^{2/3}}$.

On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est $r(\theta) = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$ où p est une distance appelée paramètre et e, un coefficient positif sans dimension appelé l'excentricité compris entre 0 et 1. On se propose d'étudier le mouvement de la planète à l'aide du vecteur excentricité,

$$\vec{e} = -\frac{L}{GM_e M_p}\vec{v} + \vec{e_\theta}$$

où **v** est la vitesse de la planète, est $\mathbf{e_\theta}$ un vecteur orthogonal au ½ grand axe de l'ellipse.



Montrer que ce vecteur est constant. Il suffira de montrer que la dérivée de ce vecteur est nulle.

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\frac{-L}{GM_eM_p}\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\frac{-L}{GM_eM_p}\left(\frac{-GM_e}{r^2}\vec{e}_r\right)-\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r=\frac{-M_pr^2\frac{d\theta}{dt}}{GM_eM_p}\left(\frac{-GM_e}{r^2}\vec{e}_r\right)-\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r=\vec{0}$$

En faisant le produit scalaire **e. e$_\theta$** et en s'aidant du dessin, **montrer que r(θ)=p/[1+ecos(θ)] et en déduire que le module de e vaut l'excentricité e de la trajectoire. Préciser p en fonction de G, M$_e$, M$_p$ et L**.

$$\vec{e}\cdot\vec{e}_\theta=\frac{-L}{GM_eM_p}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)+\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta=\frac{-Lr}{GM_eM_p}\frac{d\theta}{dt}+1=\frac{-L^2}{GM_eM_p^2r}+1$$

$$\vec{e}\cdot\vec{e}_\theta=e\cos(\theta+\pi)=-e\cos\theta$$

$$e\cos\theta=\frac{L^2}{GM_eM_p^2r}-1\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{GM_eM_p^2}{L^2}(1+e\cos\theta)$$

$$p = L^2/(GM_eM_p^2)$$

Préciser la valeur de l'excentricité pour un mouvement circulaire.

L'excentricité est nulle dans le cas d'un mouvement circulaire.

Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de L en fonction de r, v$_c$ et M$_p$.

$$L = M_p\, v_c r$$

Retrouver à l'aide du vecteur excentricité, l'expression de la vitesse de la planète, en fonction de r, G et M$_e$.

$$\vec{e}=\frac{-L}{GM_eM_p}\vec{v}_c+\vec{e}_\theta=\vec{0}\,;\ \frac{-M_pv_cr}{GM_eM_p}\vec{v}_c+\vec{e}_\theta=\vec{0}\Rightarrow v_c\vec{v}_c=\frac{GM_e}{r}\vec{e}_\theta\Rightarrow\|\vec{v}_c\|=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

Aurélie 24/01/08

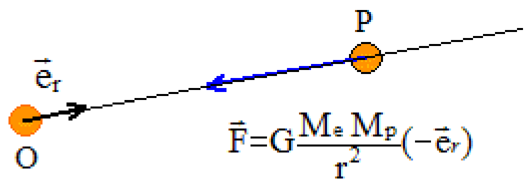
Mouvement d'une planète concours Mines 07

Les vecteurs sont écrits en bleu et en gras.

Nous voulons étudier le mouvement d'une planète, assimilée à un point matériel dans le champ de gravitation d'une étoile de masse M_e de centre O, considérée comme ponctuelle et fixe. La planète de masse M_p est située à une distance r=OP de O. Nous considérerons un référentiel lié à l'étoile comme un référentiel galiléen.

Exprimer la force exercée par l'étoile sur la planète en fonction des masses M_e et M_p, r, G, la constante universelle de gravitation

et le vecteur unitaire $\mathbf{e_r}$ = **OP**/r.



Justifier précisément que le mouvement est plan. Préciser ce plan.

Ecrire le théorème du moment cinétique en O : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow L = \text{constante}$

La trajectoire est plane : ce plan contient le point O et le vecteur force **F**. Ce plan est perpendiculaire au moment cinétique **L**.

On notera ($\mathbf{e_r}$ et $\mathbf{e_\theta}$). la base de projection dans ce plan et $\mathbf{e_z}$, un vecteur unitaire suivant la direction du moment cinétique en O, **L**= L$\mathbf{e_z}$.

Rappeler l'expression de la vitesse en coordonnées polaires.

$$\boxed{\vec{v}=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta}$$

Préciser l'expression de en fonction de L en fonction de M_p, r, dθ/dt.

$$\vec{L}=\vec{r}\wedge M_p\vec{v}=\vec{r}\wedge M_p\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)=M_p\vec{r}\wedge r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta=\boxed{M_p r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_z}$$

On suppose dans cette question que la planète décrit un mouvement circulaire de rayon R et de période T. On notera , le module de la vitesse v_c pour un mouvement circulaire.

Etablir l'expression de la vitesse v_c de la planète, en fonction de R,G et M_e.

$$\vec{F}=G\frac{M_e M_p}{r^2}(-\vec{e}_r)=M_p\,\vec{a}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=G\dfrac{M_e}{r^2}(-\vec{e}_r)\\ \\ \vec{a}_N=\dfrac{v_c^2}{r}(-\vec{e}_r)\end{array}\right\}\quad G\frac{M_e}{r^2}=\frac{v_c^2}{r}\text{ soit }v_c^2=G\frac{M_e}{r};\ \boxed{v_c=\sqrt{G\frac{M_e}{r}}}$$

En déduire une relation entre r, T, G et M_e (3ème loi de Képler).

La période est la durée nécessaire pour décrire une circonférence de rayon r : T = $2\pi r/v_c$.

$T^2 = 4\pi^2 r^2/v_c^2 = 4\pi^2 r^3/(GM_e)$; $T^2 / r^3 = 4\pi^2 / (GM_e)$.

Exprimer alors la vitesse v_c en fonction de G,T et M_e.

$1/r^3 = 4\pi^2/(T^2 GM_e)$; $v_c^6 = (GM_e)^3/r^3$

$v_c^6 = 4\pi^2 (GM_e)^2/T^2$; $v_c = [2\pi GM_e/T]^{1/3}$.

En déduire l'énergie cinétique et l'énergie mécanique en fonction de G,T, M_p et M_e.

$E_c = ½M_p v_c^2 = ½M_p [2\pi GM_e/T]^{2/3}$.

$E_p = -GM_eM_p/r$ avec $1/r = [4\pi^2/(T^2GM_e)]^{1/3}$.

$E_p = -M_p\,[2\pi G M_e / T]^{2/3}$.

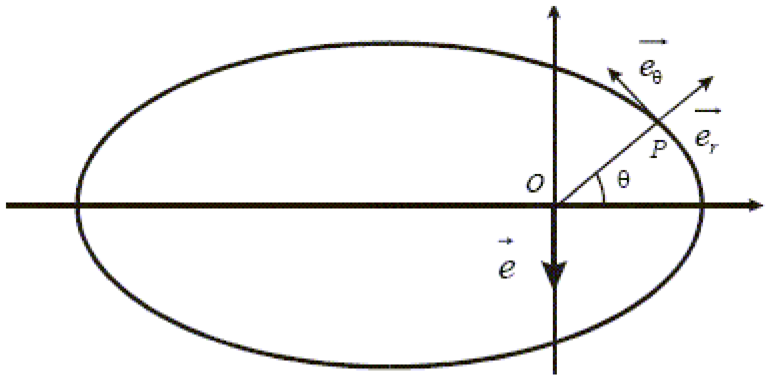
$E_M = E_c + E_p = -\frac{1}{2}M_p\,[2\pi G M_e / T]^{2/3}$.

-

On rappelle que l'équation polaire d'une ellipse est $r(\theta)=\dfrac{p}{1+e\cos(\theta)}$ où p est une distance appelée paramètre et e, un coefficient positif sans dimension appelé l'excentricité compris entre 0 et 1. On se propose d'étudier le mouvement de la planète à l'aide du vecteur excentricité,

$$\vec{e} = -\frac{L}{GM_eM_p}\vec{v}+\vec{e_\theta}$$

où **v** est la vitesse de la planète, est $\mathbf{e_\theta}$ un vecteur orthogonal au ½ grand axe de l'ellipse.



Montrer que ce vecteur est constant. Il suffira de montrer que la dérivée de ce vecteur est nulle.

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\frac{-L}{GM_eM_p}\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=\frac{-L}{GM_eM_p}\left(\frac{-GM_e}{r^2}\vec{e}_r\right)-\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r=\frac{-M_pr^2\frac{d\theta}{dt}}{GM_eM_p}\left(\frac{-GM_e}{r^2}\vec{e}_r\right)-\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r=\vec{0}$$

En faisant le produit scalaire **e. $\mathbf{e_\theta}$** et en s'aidant du dessin, **montrer que r(θ)=p/[1+ecos(θ)] et en déduire que le module de e vaut l'excentricité e de la trajectoire. Préciser p en fonction de G, M_e, M_p et L**.

$$\vec{e}\cdot\vec{e}_\theta=\frac{-L}{GM_eM_p}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)+\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_\theta=\frac{-Lr}{GM_eM_p}\frac{d\theta}{dt}+1=\frac{-L^2}{GM_eM_p^2r}+1$$

$$\vec{e}\cdot\vec{e}_\theta=e\cos(\theta+\pi)=-e\cos\theta$$

$$e\cos\theta=\frac{L^2}{GM_eM_p^2r}-1\Rightarrow\frac{1}{r}=\frac{GM_eM_p^2}{L^2}(1+e\cos\theta)$$

$p = L^2/(GM_eM_p^2)$

Préciser la valeur de l'excentricité pour un mouvement circulaire.

L'excentricité est nulle dans le cas d'un mouvement circulaire.

Dans le cas d'un mouvement circulaire, préciser la valeur de L en fonction de r, v_c et M_p.

$L = M_p v_c r$

Retrouver à l'aide du vecteur excentricité, l'expression de la vitesse de la planète, en fonction de r, G et M_e.

$$\vec{e}=\frac{-L}{GM_eM_p}\vec{v}_c+\vec{e}_\theta=\vec{0}\ ;\ \frac{-M_pv_cr}{GM_eM_p}\vec{v}_c+\vec{e}_\theta=\vec{0}\Rightarrow v_c\vec{v}_c=\frac{GM_e}{r}\vec{e}_\theta\Rightarrow\|v_c\|=\sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

Mesure de la hauteur d'un building à l'aide d'un baromètre. concours mines 06

sans calculatrice.

Mesure de la hauteur d'un building à l'aide d'un baromètre.

Le fluide étudié ici est l'atmosphère terrestre. Le principe fondamental de la statique des fluides s'écrit ici :

$dP/dz= -\rho g$.

(si l'axe Oz est dirigé verticalement vers le haut, où **P** est la pression, ρ la masse volumique du fluide et **g** la norme du champ de pesanteur terrestre).

On assimile localement l'air à un gaz parfait isotherme à la température T_0.

Quelle est l'expression de la masse volumique ρ en fonction de la masse molaire de l'air M, de la pression P, de la constante des gaz parfaits R et de la température T_0 ?

Loi des gaz parfaits : $P V = nRT_0$ soit $P = n/V\ RT_0$

masse volumique : $\rho = m/V$; $n= m/M$ (quantité de matière (mol) = masse (g) / masse molaire (g/mol))

d'où : $P= m/V\ RT_0/M$; $P= \rho\ RT_0/M$; $\boldsymbol{\rho = PM/(RT_0)}$.

La masse molair de l'air est 29 g/mol. Justifier.

L'air contient : fraction molaire du dioxygène 0,2 ; fraction molaire du diazote : 0,8.

$M(O_2) = 32$ g/mol ; $M(N_2) = 28$ g/mol.

M(air) = 0,2*32+0,8*28 proche 29 g/mol.

Déduire, des questions précédentes, l'expression littérale de la pression en fonction de l'altitude z, de M, g, R, T_0 et P_0

(pression atmosphérique au niveau du sol), en admettant que g reste constant dans l'atmosphère.

$\boldsymbol{dP/dz= -\rho\ g}$ et $\boldsymbol{\rho = PM/(RT_0)}$.

d'où : $dP/dz = -PMg/(RT_0)$; $dP/ P = -Mg/(RT_0)\ dz$; $d \ln (P) = -Mg/(RT_0)\ dz$

$\ln P = -Mg/(RT_0)\ z + Cte$.

si z=0; $P= P_0$ d'où : $\ln (P/P_0) = -Mg/(RT_0)\ z$.

$\boldsymbol{P = P_0 \exp(-Mg/(RT_0)\ z)}$.

Justifier l'hypothèse 'g constant' (on donnera un ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche atmosphérique).

$g_0 = GM/R^2$;$g = GM/(R+z)^2$; d'où $\boldsymbol{g = g_0\ [1+z/R]^{-2}}$.

L'épaisseur de l'atmosphère est voisine de z = 30 km et le rayon terrestre vaut R= 6400 km.

En conséquence z/R est proche de zéro et g proche de g_0 pour une altitude inférieure à 30 km.

Le baromètre indique une pression de P_0 = 1 010 mbar au niveau du sol et P = 950 mbar en haut de la tour.

En déduire que la hauteur H de celle-ci peut s'écrire sous la forme approchée :

$$H = k(P_0-P) / P_0.$$

où k est une constante dont on définira l'unité, la valeur approximative et la signification.

$$P = P_0 \exp(-Mg/(RT_0)\ z).$$

P_0 étant proche de P, l'exponentielle est proche de 1 : $-Mg/(RT_0)\ z$ est proche de zéro.

Effectuer un développement limité de l'exponentielle à l'ordre 1, au voisinage de zéro :

$P=P_0\ (1 -(Mg/(RT_0)\ z)$; $P / P_0 =1 -(Mg/(RT_0)\ z$; $1-P / P_0 =(Mg/(RT_0)\ z$

$(P_0-P) / P_0 = (Mg/(RT_0)\ z$; $z = RT_0 /(Mg)(P_0-P) / P_0 = k(P_0-P) / P_0$.

$$k = RT_0 /(Mg).$$

$(P_0-P) / P_0$: grandeur sans unité ; z : hauteur en mètre ; k s'exprime donc en mètre.

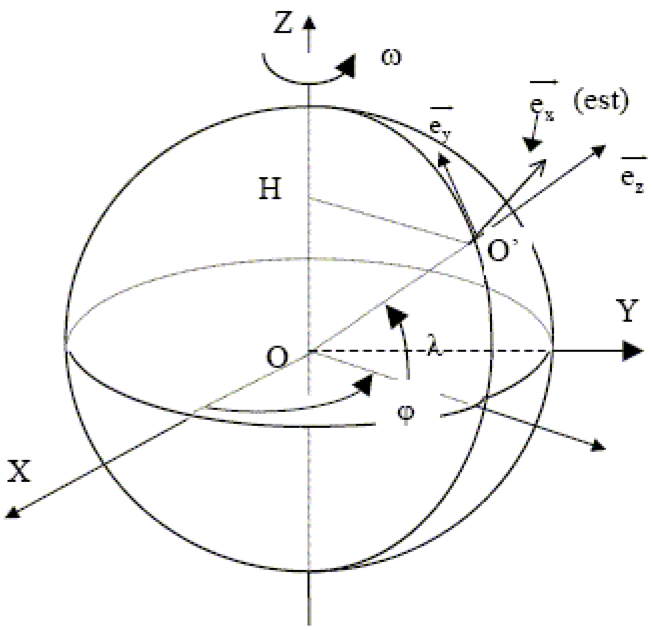
Donner l'ordre de grandeur de H.

Données numériques : $g = 10\ m.s^{-2}$, R = 8,31 S.I et T_0 = 300 K.

M = 0,029 kg/mol ; **k**= 8,31*300/(0,029*10) proche de : 8600 m.

$(P_0-P) / P_0$= 60/1010 proche de 0,06 ; d'où z=H proche de : 8600*0,06 soit **520 m**.

Utilisation indirecte du baromètre.



On se propose ici d'étudier la chute libre du baromètre depuis le sommet du building sans vitesse initiale et en l'absence de frottement.

Soit le référentiel géocentrique O, X, Y, Z. où O est le centre de la Terre. Les axes OX, OY et OZ sont dirigés vers des étoiles fixes.

Le référentiel géocentrique O, X, Y, Z est supposé galiléen.

Les grandeurs écrites en gras et en bleu sont des vecteurs.

Le référentiel terrestre de base (O',$\mathbf{e_x}$, $\mathbf{e_y}$, $\mathbf{e_z}$) est tel que : O' est à la surface de la Terre, $\mathbf{e_x}$ est dirigé vers l'est ($\mathbf{e_x}$ rentre dans la feuille), $\mathbf{e_y}$ est dirigé vers le nord, $\mathbf{e_z}$ passe par le centre de la Terre.

L'angle λ définit la latitude du point O' (c'est l'angle entre $\mathbf{e_z}$ et le plan équatorial).

La Terre effectue un tour sur elle-même à la vitesse angulaire constante $\omega = d.\varphi/dt \sim 7.10^{-5}$ rad.s^{-1}.

φ est l'angle entre OX et la projection de $\mathbf{e_z}$ dans le plan OXY.

Le référentiel terrestre n'est donc pas galiléen.

On donne aussi le rayon de la Terre R= 6400 km.

On lâche le baromètre de masse m depuis une altitude H, sans vitesse initiale.

Exprimer les composantes du vecteur rotation **ω** dans la base (O',**e**$_x$, **e**$_y$, **e**$_z$) en fonction de ω et λ.

$$\boldsymbol{\omega} = 0\ \mathbf{e_x} + \omega\cos\lambda\ \mathbf{e_y} + \omega\sin\lambda\ \mathbf{e_z}.$$

Soient x, y, z, les composantes de M dans le référentiel terrestre.

Exprimer les composantes des trois forces appliquées à l'objet M.

poids : $\mathbf{P} = 0\ \mathbf{e_x} + 0\ \mathbf{e_y} - mg\ \mathbf{e_z}$.

force d'inertie d'entraînement : $\mathbf{F_e} = 0\ \mathbf{e_x} - m\omega^2(R+z)\cos\lambda\sin\lambda\ \mathbf{e_y} + m\omega^2(R+z)\cos^2\lambda\ \mathbf{e_z}$.

force de Coriolis : $\mathbf{F_c} = m\ (-2\omega z'\cos\lambda + 2\omega y'\sin\lambda)\mathbf{e_x} - 2m\omega x'\sin\lambda\ \mathbf{e_y} + 2m\omega x'\cos\lambda\ \mathbf{e_z}$.

En déduire les équations différentielles rigoureuses vérifiées par x, y, z et leurs dérivées par rapport au temps.

$$x'' = -2\omega z'\cos\lambda + 2\omega y'\sin\lambda \quad (1)$$

$$y'' = -\omega^2(R+z)\cos\lambda\sin\lambda - 2\omega x'\sin\lambda \quad (2)$$

$$z'' = -g + \omega^2(R+z)\cos^2\lambda + 2\omega x'\cos\lambda \quad (3)$$

-

Dans le système d'équations différentielles précédent, quels termes peut-on négliger ? (On précisera par rapport à quoi on les néglige)

z et x sont très inférieurs au rayon terrestre R, donc R+z proche de R.

$\omega^2R = 49.10^{-10} * 6{,}4\ 10^6$ proche 0,03 ; donc ω^2R négligeable devant g.

y' << z' et on ne prend en compte que la composante de la force de Coriolis suivant **e**$_x$.

Simplifiez alors le système d'équations différentielles et le résoudre littéralement en fonction de H, ω,λ, g et R.

$$x'' = -2\omega z' \cos\lambda \ (1)$$

$$y'' = -\omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda \ (2)$$

$$z'' = -g \ (3)$$

---

(3) donne **z' = -gt** +Cte (la constante est nulle, la vitesse initiale étant nulle)

$z = -\frac{1}{2}gt^2$ +Cte (la constante est nulle car l'origine O' est à l'altitude H)

(2) donne : $y = -\frac{1}{2}\omega^2 R \cos\lambda \sin\lambda \, t^2$

(1) donne : $x'' = 2\omega \cos\lambda g \, t$

$x' = \omega \cos\lambda g t^2$; $x = 1/3\omega \cos\lambda g \, t^3$

Au bout de combien de temps le baromètre touche-t-il le sol ?

On donne : H = 500 m, λ= 30° (sin 30° = 0,5 et cos 30° ˜ 0,9), g ˜ 10 m.s^{-2}.

Au sol z = -H = -500 m ; 500 = 0,5*10 t^2 ; t^2 = 100 ; **t = 10 s**.

En déduire l'ordre de grandeur des composantes x_1 et y_1 de M, lorsque l'objet tombe sur le sol.

x_1 = 1/3 *7 10^{-5}*0,9*10*10^3 = 0,7*0,3 = 0,021 m = **21 cm**.

y_1 = -0,5*49 10^{-10} *6,4 10^6*0,5*0,9*100 = -0,5*0,49*6,4*0,5*0,9 =-0,70 m = **-70 cm**.

Si on fait l'expérience, on constate que, selon la direction , le baromètre n'est absolument pas dévié par rapport à la direction d'un fil à plomb.

Pour quelle raison ?

Le fil a plomb prend en compte la force d'inertie d'entraînem

mécanique : étude de la suspension d'un véhicule, méthode des nombres complexes concours mines 06

Les grandeurs vectorielles sont écrites en gras et en bleu.

Le véhicule étudié est modélisé par un parallélépipède, de centre de gravité G et de masse M, reposant sur une roue par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe OG reste toujours vertical. L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale **v** = v $\mathbf{u_x}$.

La suspension, quant à elle, est modélisée par un ressort de raideur constante $k = 1{,}0.10^5$ N.m^{-1} (de longueur à vide L_0) et un amortisseur fluide de constante d'amortissement constante $\lambda = 4{,}0.10^3$ U.S.I. La masse de l'ensemble est M = 1000 kg .

La position verticale du véhicule est repérée par z_G dans le référentiel galiléen proposé ayant son origine sur la ligne moyenne des déformations du sol. On note z_O la cote du centre de la roue par rapport au niveau moyen de la route.

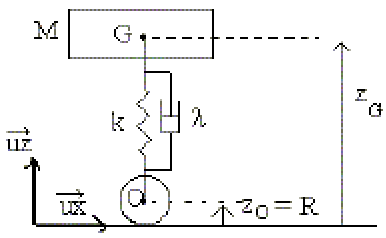


fig 1 : la route est parfaitement horizontale

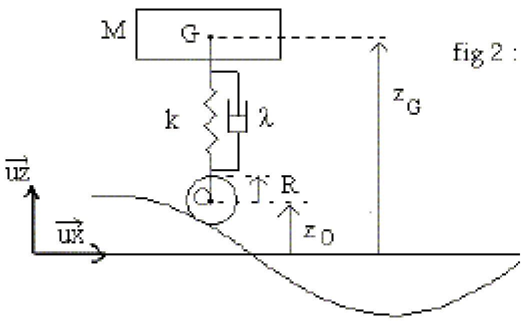


fig 2 :

L'amortissement entre M et la roue introduit une force de frottement fluide, exercée par l'amortisseur sur M, qui s'écrit :

$$\mathbf{F} = -\lambda\,(dz_G/dt - dz_O/dt)\,\mathbf{u_z}.$$

La route est parfaitement horizontale.

La route ne présente aucune ondulation et le véhicule n'a aucun mouvement vertical.

Déterminer la position z_{Geq} de G lorsque le véhicule est au repos.

Le véhicule est soumis à son poids (verticale, vers le bas, valeur Mg), à la force de rappel exercée par la suspension (verticale, vers le haut, valeur $k(L_0-L)$).

A l'équilibre les deux forces se compensent :

$$Mg = k(L_0-L) \text{ avec } L = z_{Géq}-z_O.$$

$$Mg = k(L_0-z_{Géq}+z_O)$$

$$\mathbf{z_{Géq} = L_0 + z_O - Mg/k}.$$

Suite à une impulsion soudaine, le véhicule acquiert un mouvement d'oscillations verticales. On cherche dans cette question à établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement par une méthode énergétique.

On étudie le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment. On posera $z = z_G - z_{Geq}$.

Etablir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

$$E_{pp} = Mgz_G + Cte.$$

On choisit l'origine de l'énergie potentielle à l'altitude $z = z_{Geq}$. La constante vaut alors : $Cte = - Mgz_{Geq}$.

$$E_{pp} = Mg(z_G - z_{Geq}) \; ; \; \mathbf{E_{pp} = Mgz}.$$

Etablir l'expression de l'énergie potentielle élastique.

$$E_{pe} = ½k(L-L_0)^2 + Cte \text{ avec } L = z_G - z_O.$$

$$E_{pe} = ½k(z_G - z_0 - L_0{}^2 + Cte \; ; \; E_{pe} = ½k(z_G - z_{Geq} + z_{Geq} - z_O - L_0)^2 + Cte$$

$$E_{pe} = ½k(z - L_0 - z_O + z_{Geq} - z)^2 + Cte \; ; \; \mathbf{E_{pe} = ½k(z - Mg/k)^2 + Cte}.$$

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la masse et en déduire l'équation différentielle en z caractéristique du mouvement.

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique est égale à la puissance de la force de frottement fluide (force non conservative).

$$E_M = ½Mv^2 + E_{pp} + E_{pe}.$$

$$dE_M/dt = M\, v\, dv/dt + Mg\, dz/dt + k(z - Mg/k)\, dz_G/dt$$

$$dE_M/dt = M\, v\, dv/dt + kz\, dz_G/dt$$

De plus : $z = z_G - z_{Geq}$; $dz/dt = dz_G/dt$ et $v = dz/dt$; $dv/dt = d^2z_G/dt^2$

$$\mathbf{dE_M/dt = (Md^2z/dt^2 + kz)\, dz/dt}.$$

Force de frottement fluide sur une route horizontale : $\mathbf{F} = - \lambda\, dz_G/dt\, \mathbf{u_z}$

puissance de la force de frottement fluide : $\mathbf{F} \bullet dz_G/dt\, \mathbf{u_z} = -\lambda\, dz_G/dt\, \mathbf{u_z} \bullet dz_G/dt\, \mathbf{u_z}$

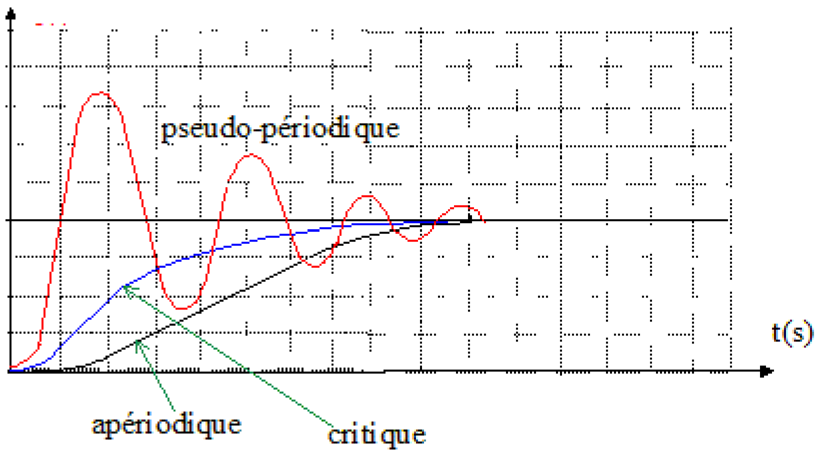
$\mathbf{F} \bullet dz_G/dt\, \mathbf{u_z} = -\lambda\, d^2z_G/dt^2$

Par suite : $Md^2z/dt^2 + kz = -\lambda dz/dt$

$$\mathbf{d^2z/dt^2 + \lambda/M\, dz/dt + k/M\, z = 0}.$$

Dessiner, qualitativement, les allures envisageables de la fonction z(t).

(la résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée).



La route est ondulée : (fig 2)

Le véhicule se déplace à vitesse horizontale constante v sur un sol ondulé. L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude A. z_O peut alors s'écrire $z_O = R + A\cos(\omega t)$.

On étudie maintenant le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment. On posera $z = z_G - z_{Geq}$.

Pour les applications numériques on prendra L = 1 m ; A = 10 cm

Quelle est l'unité de λ ?

λ/M dz/dt a la dimension d'une accélération. $[\lambda/M\, dz/dt] = L\, T^{-2}$.

$[dz/dt] = L\, T^{-1}$; $[M] = M$; $[\lambda]\, M^{-1}\, L\, T^{-1} = L\, T^{-2}$.

$[\lambda] = M\, T^{-1}$. (unité : kg s^{-1})

Exprimer ω en fonction de v et L. Vérifier l'homogénéité du résultat.

$\omega = 2\pi / T$ avec $T = L/v$ d'où : $\boldsymbol{\omega = 2\pi v/L}$, exprimé en rad s^{-1}.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen,

établir l'équation différentielle en z régissant le mouvement.

$$Md^2z/dt^2 = -Mg - k(L-L_0) - \lambda(dz_G/dt - dz_O/dt)$$

avec $dz_O/dt = -A\omega\sin(\omega t)$ et $L = z_G - z_O$.

$$Md^2z/dt^2 = -[Mg + k(z_G - z_O - L_0)] - \lambda(dz_G/dt + A\omega\sin(\omega t))$$

Or $Mg = k(L_0 - z_{Géq} + R)$ d'où : $Mg + k(z_G - z_O - L_0) = k(z_G - z_{Géq} + R - z_O) = kz - kA\cos(\omega t)$.

$$Md^2z/dt^2 = -kz + kA\cos(\omega t) - \lambda dz_G/dt - \lambda A\omega\sin(\omega t)$$

$$\mathbf{d^2z/dt^2 + \lambda/M\, dz/dt + k/M\, z = kA/M \cos(\omega t) - \lambda A\omega/ M\sin(\omega t)}. (1)$$

Justifier qualitativement le fait que l'on recherche la solution z(t) de cette équation

différentielle sous une forme sinusoïdale $z(t) = z_{max}.\cos(\omega t+\varphi)$.

La solution générale de (**1**) s'obtient en additionnant :

- la solution générale de l'équation homogène (régime transitoire)

$$\mathbf{d^2z/dt^2 + \lambda/M\, dz/dt + k/M\, z} = 0$$

- une solution particulière de (**1**) correspondant au régime forcé.

Le régime transitoire étant de courte durée, la solution particulière (régime forcé) s'impose rapidement.

Résolution par la méthode des complexes.

On pose $\underline{z} = \underline{Z}.\exp(j\omega t)$, réponse complexe du véhicule à l'excitation sinusoïdale et $\underline{z_O} - R = \underline{A}\exp(j\omega t)$.

Montrer que $$\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{\left(\frac{k}{M} + j\frac{\omega\lambda}{M}\right)}{\left(-\omega^2 + j\omega\frac{\lambda}{M} + \frac{k}{M}\right)}$$

$\mathbf{d^2z/dt^2 + \lambda/M\, dz/dt + k/M\, z}$ va s'écrire :

Dériver par rapport au temps correspond à la multiplication par $j\omega$:

$\mathbf{d^2z/dt^2} = -\omega^2\underline{Z}.\exp(j\omega t)$

$\mathbf{dz/dt} = j\omega\underline{Z}.\exp(j\omega t)$; $\mathbf{\lambda/M\, dz/dt} = \lambda/M j\omega\underline{Z}.\exp(j\omega t)$

$\mathbf{[-\omega^2 + j\, \lambda\omega/M + k/M]\, \underline{Z}.\exp(j\omega t)}$.

---

k/M Acos(ωt) –λ / M Aω sin(ωt) va s'écrire :

à **Acos(ωt)** on associe $\underline{A}\exp(j\omega t)$;

à sa dérivée **-Aω sin(ωt)** on associe $j\omega\,\underline{A}\exp(j\omega t)$;

d'où l'écriture $\mathbf{[\, k/M + \lambda / M j\omega]\, \underline{A}\exp(j\omega t)}$.

Mettre sous la forme : $$\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{\underline{H_1}}{\underline{H_2}}$$

$\mathbf{\underline{H_2} = -\omega^2 + j\, \lambda\omega/M + k/M}$

On pose $\omega_0^2 = k/M$ d'où : ω_0^2 [$-\omega^2 / \omega_0^2 + j\,\lambda\omega / (M\omega_0^2) + 1$]

On pose alors $Q = (kM)^{1/2} / \lambda$.

$-\omega^2 + j\,\lambda\omega/M + k/M$ s'écrit : ω_0^2 [$-\omega^2 / \omega_0^2 + j\,\omega / (Q\omega_0) + 1$]

$\underline{H_1} = k/M + \lambda / Mj\omega = k/M\,(1 + j\omega\,\lambda / k) = \omega_0^2\,[1 + j\omega\,\lambda / k]$

On pose alors $\omega_1 = k/\lambda$.

$k/M + \lambda / Mj\omega = \omega_0^2\,[1 + j\omega / \omega_1]$

$\omega_0^2 = k/M = 1{,}0\ 10^5 / 1000 = 100$; $\omega_0 = 10$ **rad s^{-1}**

$\omega_1 = k/\lambda = 1{,}0\ 10^5 / 4{,}0\ 10^3 = 25$ **rad s^{-1}**

$Q = (kM)^{1/2} / \lambda = 10^4 / 4{,}0\ 10^3 = \mathbf{2{,}5}$.

Donner l'expression du module $|\underline{Z} / \underline{A}|$ en fonction de ω_0, ω_1 et Q.

Module de $\underline{H_1}$: $[1+(\omega / \omega_1)^2]^{1/2}$

Module de $\underline{H_2}$: $[(1-(\omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega / (Q\omega_0))^2]^{1/2}$

d'où :

$$\boxed{\frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2\right)}}}$$

Etude fréquentielle.

On souhaite maintenant étudier l'amplitude des oscillations en fonction de la vitesse de la voiture.

Pour cela on étudie donc $|\underline{Z} / \underline{A}|$ en fonction de ω.

Tracer le diagramme de Bode asymptotique relatif à |Z / A|. Tracer l'allure de |Z / A|.

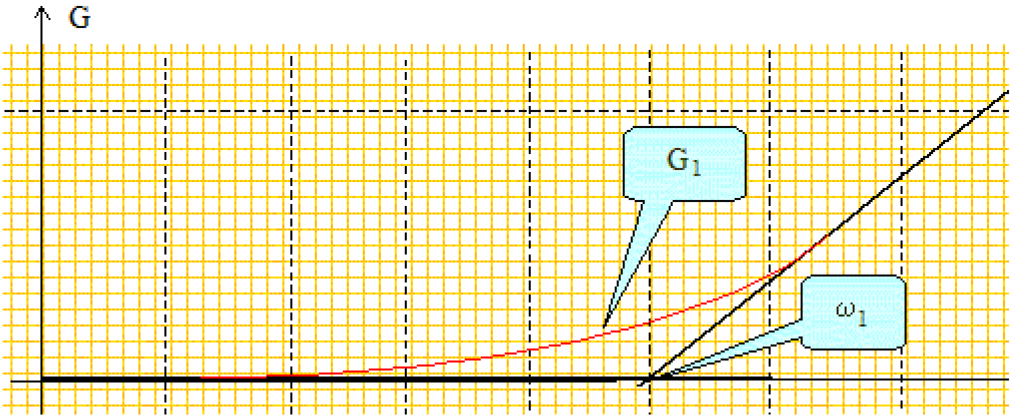
Remarque : on pourra tracer au préalable les diagrammes relatifs à $|\underline{H}_1|$ puis à $|\underline{H}_2|$.

$$G_1 = 20 \log [1+(\omega / \omega_1)^2]^{½} = 10 \log [1+(\omega / \omega_1)^2]$$

si ω tend vers 0, alors G_1 tend vers 0.

si ω tend vers l'infini, alors G_1 tend vers l'infini. G_1 est équivalent à 20 log (ω / ω_1).

La pente de l'asymptote est 20 dB par décade.

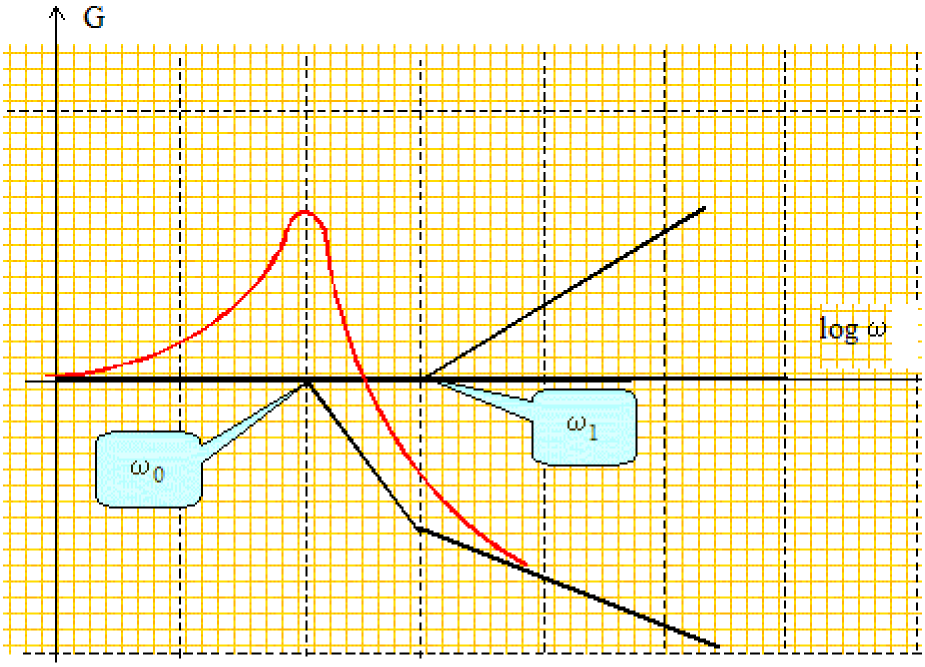


$$G_2 = 20 \log [(1-(\omega^2 / \omega_0^2)^2+(\omega/ (Q\omega_0))^2]^{½} = 10 \log[(1-(\omega^2 / \omega_0^2)^2+(\omega/ (Q\omega_0))^2]$$

si ω tend vers 0, alors G_2 tend vers 0.

si ω tend vers l'infini, alors G_2 tend vers l'infini. G_2 est équivalent à 40 log (ω / ω_0).

La pente de l'asymptote est 40 dB par décade.



ω_r, valeur de ω pour laquelle l'amplitude est maximale, est de l'ordre de grandeur de ω_0.

Quelle est la valeur de v correspondante ?

$$\omega = 2\,\pi\, v/L$$

v = ω_0 L/(2π) = 10 *1/6,28 =1,59 m/s ou 1,593*3,6 = **5,7 km/h**.

Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule pour $\omega = \omega_0$.

Module de $\underline{H_1}$: $[1+(\omega_0 / \omega_1)^2]^{½} = [1+(10/25)^2]^{½} = 1{,}077$

Module de $\underline{H_2}$: $[(1-(\omega_0^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega_0 / (Q\omega_0))^2]^{½} = [1/Q^2]^{½} = 1/2{,}5 = 0{,}4$.

module de $\underline{H_1}$ / $\underline{H_2}$: 1,077/0,4 = 2,69.

amplitude maximale : A*2,69 = 10*2,69 = **26,9 cm**.

Dans le film « le salaire de la peur », Yves Montand conduit un camion (ω_0 =25 rad s^{-1}) chargé de nitroglycérine. Il passe sur une tôle ondulée de période spatiale 1 m et pour laquelle A=10 cm. Afin d'éviter l'explosion du chargement il doit traverser la taule à une vitesse inférieure à 5 km/h ou supérieure à 50 km/h.

Justifier qualitativement ceci à l'aide des résultats précédents.

D'après le graphe ci-dessus, au voisinage de ω_0 , pour une même valeur du gain, on trouve deux valeurs de ω.

C'est à dire deux valeurs de la vitesse pour lesquelles l'amplitude des oscillations risque de conduire à une explosion.

mécanique : station spatiale, référentiel géocentrique, référentiel lié au satellite concours Mines 05

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Une station spatiale est sur une orbite circulaire autour de la Terre. Son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique K, d'origine O considéré comme galiléen. La station est, dans cette partie, assimilée `a un point S de masse M_S, repéré par le rayon vecteur **R**=**OS**.

Enoncer le principe d'inertie en rappelant la définition d'un référentiel galiléen.

référentiel galiléen : dans ce référentiel le principe d'inertie ou 1ère loi de Newton s'applique " un point matériel pseudo-isolé demeure dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme".

Définir le référentiel géocentrique.

Le référentiel héliocentrique a pour origine le Soleil et des axes pointant vers des étoiles lointaines qui paraissent fixes.

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et des axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique.

Sur quelle échelle de temps ce référentiel peut-il être considéré comme approximativement galiléen ?

Sur des durées très inférieures à une année, le référentiel géocentrique peut être considéré en translation uniforme dans le référentiel héliocentrique.

Définir le moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_O$ de la station S par rapport à l'origine O du référentiel.

$\boldsymbol{\sigma}_O = \mathbf{OM} \wedge M_S \mathbf{v} = M_S \mathbf{R} \wedge \mathbf{v}$.

Montrer que ce vecteur forme une constante du mouvement.

Déduire que le mouvement du satellite s'effectue dans un plan que l'on définira à partir de σ_O.

Nature du mouvement :

Le satellite est alors soumis à la force centrale **F**= GM_SM_T/R^2 **u**. **u** est un vecteur unitaire

Le référentiel d'étude étant galiléen :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M par rapport au point fixe O est égal au moment, par rapport à ce point, de la somme vectorielle des forces agissant sur le point matériel M . $\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}=\vec{OM}\wedge\Sigma\vec{F}}$

Or OM et **F** sont colinéaires ; le produit vectoriel OM ^ **F** est nul ; en conséquence le moment cinétique σ_0 est constant : le mouvement est plan, perpendiculaire à σ_0.

Montrer d'autre part, que le mouvement circulaire du satellite s'effectue avec un vecteur vitesse angulaire ω constant et dirigé suivant σ_0 .

Le mouvement étant circulaire : **v** = **ω**^**R**. Les vecteurs **ω** et **R** sont de plus perpendiculaires.

$\sigma_O = M_S\mathbf{R}\wedge\mathbf{v} = M_S\mathbf{R}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{R}) = M_SR^2\boldsymbol{\omega}$.

σ_O et ω sont des vecteurs colinéaires et de même sens. σ_O étant un vecteur constant, il en résulte que ω est un vecteur constant.

Exprimer ω en fonction de la masse de la Terre, M_T , de la constante de gravitation universelle,

G et du rayon R.

La 2ème loi de Newton appliquée au satellite s'écrit :

$M_S\omega^2R= GM_SM_T/R^2$.

$\omega^2= GM_T/R^3$; **$\omega= [GM_T/R^3]^{½}$**.

La station spatiale internationale en construction depuis 1998 est située à une altitude d'environ 400 km.

Calculer sa période de rotation T.

Rayon terrestre moyen R_T = 6400 km ; g_0 = 9,8 m s^{-2}.

$g_0 =GM_T/R_T^2$; $\omega = 2\pi /T$; $R=R_T+h$.

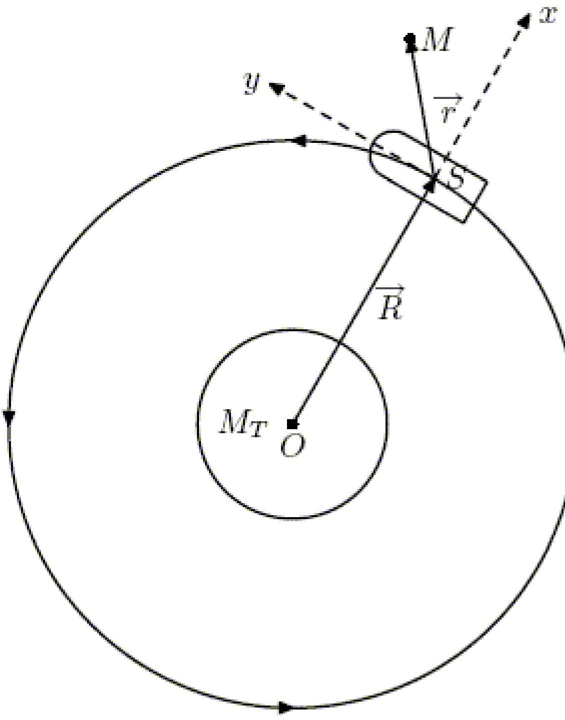
d'où : $\omega =2\pi /T =[g_0R_T^2/R^3]^{½}$; **$T =2\pi [R^3 /(g_0R_T^2)]^{½}$**.

$R^3 =(6,8\ 10^6)^3 =3,144\ 10^{20}\ m^3$; $g_0R_T^2= 9,8*(6,4\ 10^6)^2 =4,014\ 10^{14}$.

$T =6,28(3,144\ 10^{20}/ 4,014\ 10^{14})^{½}$; **$T = 5,56\ 10^3$ s**.

-

-



La station spatiale est en rotation synchrone autour de la Terre ; elle tourne sur elle-même avec un vecteur vitesse angulaire identique à celui de son mouvement orbital, **ω**.

On désigne par K' le référentiel lié à la station. L'origine de ce référentiel est situé au centre de masse, S, de la station. L'axe Sx est dirigé suivant **R**, l'axe Sz est porté par le moment cinétique $\boldsymbol{\sigma_O}$ et l'axe Sy complète le trièdre orthonormé.

Dans ce référentiel, un corps ponctuel M, de masse m, est en mouvement dans le plan Sxy. Il est repéré dans la station par le rayon vecteur **r** = **SM**.

Pourquoi le référentiel K' n'est-il pas galiléen ?

K' n'est pas animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel géocentrique.

Définir le point coïncident à M et donner son accélération $\mathbf{a_e}$(M) en fonction de r, R et ω.

En déduire la force d'inertie d'entraînement $\mathbf{f_e}$ exercée sur la masse m dans K'.

Si la particule M est animée d'une vitesse v dans K', quelle force d'inertie supplémentaire lui est appliquée ?

Exprimer cette force en fonction de m, ω et v.

$$\vec{a}_e = -\omega^2(\vec{r} + \vec{R})$$

$$\boxed{\text{Force d'inertie : } \vec{f}_e = -m\vec{a}_e = +m\omega^2(\vec{r} + \vec{R})}$$

$$\boxed{\text{Force de Coriolis : } \vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$$

$$\boxed{\text{Force de gravitation : } \vec{F} = \frac{-GM_T m(\vec{r} + \vec{R})}{(r+R)^3}}$$

La particule se trouvant dans le voisinage proche de la station, l'inégalité r << R sera toujours vérifiée dans la suite du problème.

A l'aide d'un développement limité arrêté au premier ordre en r/R, montrer que la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur le corps M s'écrit :

$\mathbf{F} = -m\omega^2(\mathbf{R} + \mathbf{r} - 3x\,\mathbf{u_x})$.

où $\mathbf{u_x}$ est le vecteur unitaire porté par l'axe Sx et (x, y) sont les coordonnées de $\mathbf{r}$ dans K'.

$$(r+R)^{-3} = R^{-3}\left(1+\frac{r}{R}\right)^{-3} \approx R^{-3}\left(1-3\frac{r}{R}\right)$$

$$\vec{F} \approx \frac{-GM_T m(\vec{r}+\vec{R})}{R^3}\left(1-3\frac{r}{R}\right) \approx -m\omega^2\left(1-3\frac{r}{R}\right)(\vec{r}+\vec{R}) \approx -m\omega^2\left((\vec{r}+\vec{R})-3x\vec{u}_x\right)$$

Le corps M est une balle qu'un cosmonaute lance en direction de la Terre avec la vitesse relative $\mathbf{v_0} = -v_0\mathbf{u_x}$ ($v_0 << \omega R$) dans K' depuis l'origine S de ce référentiel.

Etablir l'équation du mouvement dans K' de la balle sous la forme de deux équations différentielles pour les variables x et y.

Ecrire la deuxième loi de Newton à la balle dans le référentiel K' :

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega^2\left((\vec{r}+\vec{R})-3x\vec{u}_x\right)-2m\vec{\omega}\wedge\vec{v} \ +m\omega^2(\vec{r}+\vec{R}) = 3m\omega^2 x\vec{u}_x - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

Projections sur chaque axe :

$mx'' = 3m\omega^2 x + 2m\omega y'$; $\mathbf{x'' - 2\omega y' - 3\omega^2 x = 0}$. (1)

$my'' = -2m\omega x'$; $\mathbf{y'' + 2\omega x' = 0}$.(2)

Intégrer ces équations, montrer que la trajectoire suivie est une ellipse et déterminer sa période de parcours.

(2) donne $y' = -2\omega x + Cte$; à t=0 y'=0, x=0 d'où Cte =0

$y' = -2\omega x$ (3); repport dans (1)

$$\mathbf{x'' + \omega^2 x = 0}.$$

x= A sin (ωt) +B ; à t=0 , x=0 donc B=0

x' = Aω cos (ωt) ; à t= x'=-v_0 d'où A=-v_0 /ω

x= -v_0 /ω sin (ωt).

repport dans (**3**) : y'=2$v_0$sin (ωt) ; y = -2v_0/ω cos (ωt)+ Cte.

à t=0, y=0 soit Cte =2v_0/ω. **y= 2v_0 /ω[1– cos (ωt)]**.

Ellipse de centre (0 ; 2v_0 /ω) ; demi-grand axe : 2v_0 /ω ; demi-petit axe v_0 /ω ; période T = 2π/ω.

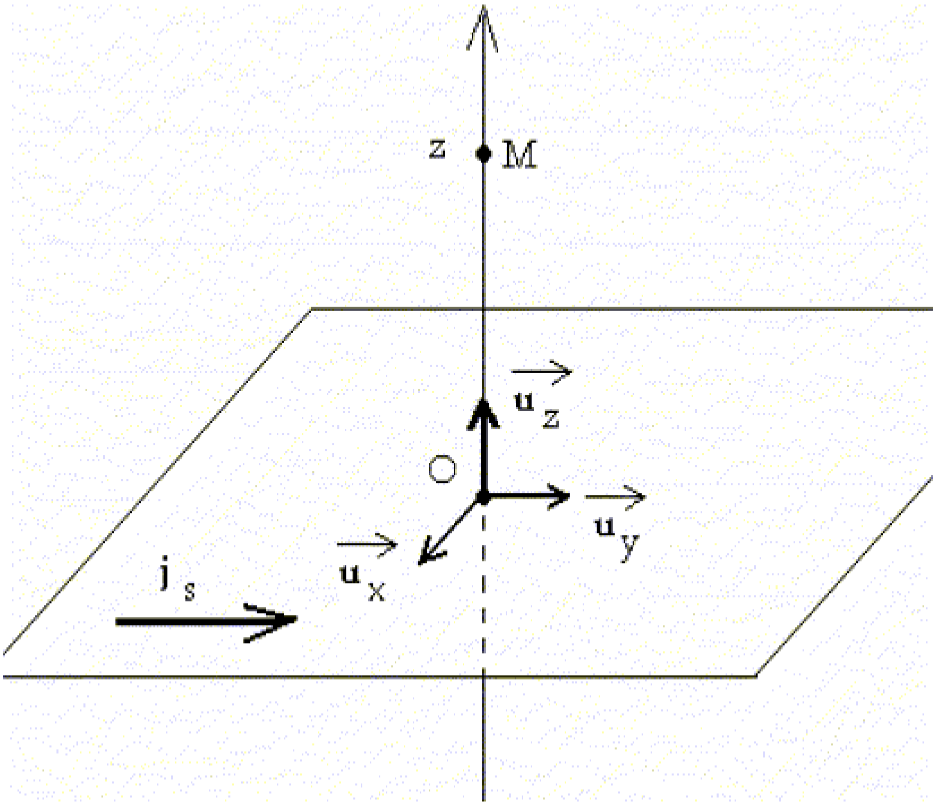
champs électrostatique et magnétostatique d'un spire concours Mines 05 et 02

sans calculatrice.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

Champ magnétique crée par un plan.

Le plan infini P = (O, x, y) est parcouru par un courant électrique constant de densité surfacique $\mathbf{j_S}$=j $\mathbf{u_y}$. Soit M un point de l'axe (O, z) de cote z.



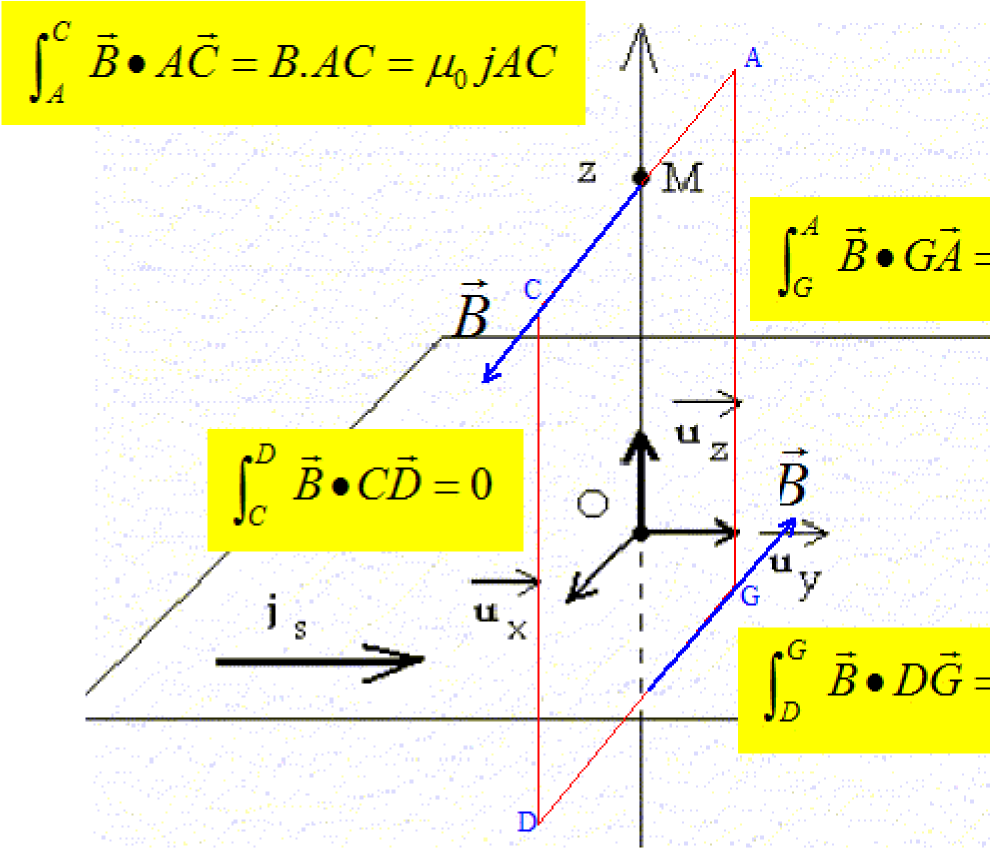
Donner, en la justifiant, l'expression vectorielle du champ magnétique B en M.

Le plan O $\mathbf{u_y}$ $\mathbf{u_z}$, parallèle à j_S, est un plan de symétrie des courants: en conséquence, le champ magnétique **B** est perpendiculaire à ce plan : **B** =B$\mathbf{u_x}$.

Par translation suivant $\mathbf{u_x}$, la distribution de courant est invariante ; par translation suivant $\mathbf{u_y}$, la distribution de courant est invariante : donc la valeur du champ magnétique ne dépend que de z.

La règle de l'observateur d'Ampère donne le sens du champ magnétique : si z>0, **B** est dirigé suivant $\mathbf{u_x}$; si z<0, **B** est dirigé suivant $-\mathbf{u_x}$.

Appliquer le thorème d'Ampère à la boucle ci-dessous :



La circulation de **B** sur la boucle ACDG vaut : 2B .AC = μ_0jAC d'où **B= ½μ_0j**.

Montrer que ce champ présente une discontinuité à la traversée du plan et vérifier que cette discontinuité peut s'écrire :

Δ**B** = **B**(z=0$^+$)-**B**(z=0$^-$) = μ_0j**u$_x$**.

B(z=0$^+$) = ½μ_0j**u$_x$** ; **B**(z=0$^-$) = -½μ_0j**u$_x$** ; Δ**B** = ½μ_0j**u$_x$** + ½μ_0j**u$_x$** =μ_0j**u$_x$**

On admet que cette expression de la discontinuité est toujours valable à la traversée d'une membrane portant une densité surfacique de courant j, même si cette membrane n'est pas un plan infini. On considère un solénoide idéal, infini, parcouru par un courant constant d'intensite i, comportant n spires par mètre de longueur. On admet que le champ magnétique est nul à l'extérieur et uniforme à l'intérieur de la bobine.

Déduire de l'expression de la discontinuite ci-dessus la norme du champ magnetique à l'intérieur du solénoide, en fonction de n, μ_0 et i.

champ extérieur : $\mathbf{B}_{ext} = 0$; champ intérieur, uniforme : $B_{int}\,\mathbf{u_x}$;

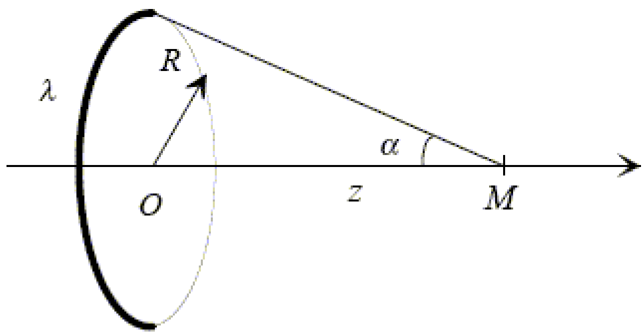
discontinuité à la traversée de la membrane : $\mu_0\, j\, \mathbf{u_x}$

$B_{int}\,\mathbf{u_x} - \mathbf{B}_{ext} = \mu_0\, j\, \mathbf{u_x}$; soit $B_{int}\,\mathbf{u_x} = \mu_0\, j\, \mathbf{u_x}$.

La densité surfacique j est égale à l'intensité traversant une largeur d divisée par cette même largeur : j= n i d'où : $\mathbf{B_{int}\,u_x = \mu_0\, n\, i\, u_x}$.

Champ électrostatique crée par une spire circulaire.

On donne une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz. Cette spire porte une charge positive Q répartie uniformément avec une densité linéique de charge λ en $C.m^{-1}$.



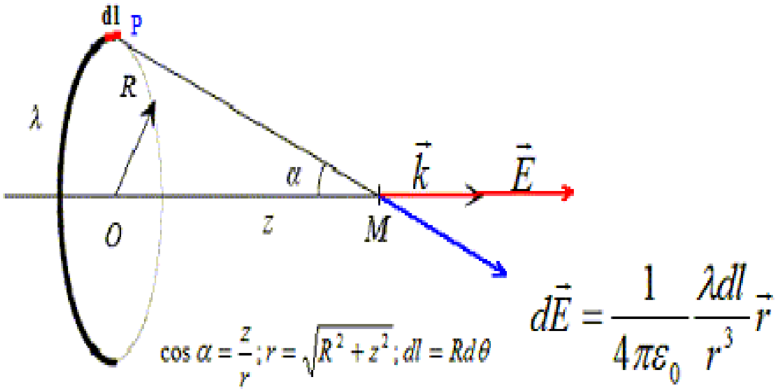
Montrer par des arguments de symétrie que, sur l'axe, le champ électrostatique $\mathbf{E}$ est porté par l'axe et prend la forme de $\mathbf{E}=E\mathbf{k}$.

$\mathbf{k}$ est un vecteur unitaire porte par l'axe Oz.

Tout plan défini par le point M et un diamètre de la spire ne modifie par la distribution de la charge :

$\mathbf{E}$ appartient à l'intersection de tous ces plans, c'est à dire que $\mathbf{E}$ est porté par l'axe Oz.

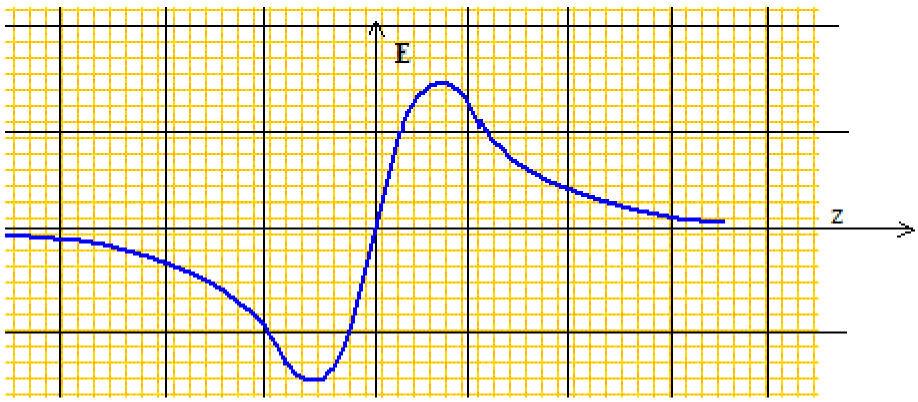
Dans une symétrie par raport au plan contenant la spire, z devient -z : donc E(-z) = -E(z).



$$\vec{E}\bullet\vec{k} = \int_{spire}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r^3}\vec{r}\bullet\vec{k} = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{r^2}\cos\alpha$$

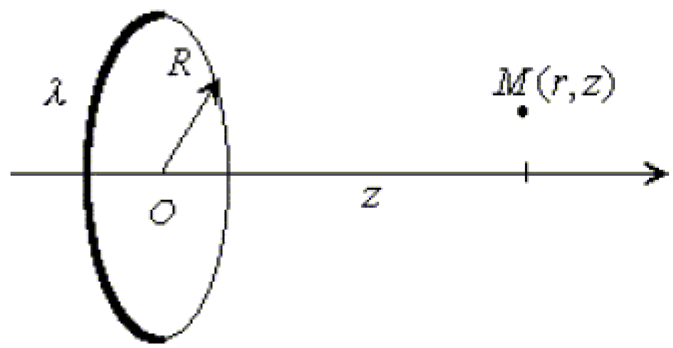
$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{r^2}\cos\alpha = \frac{z}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R}{r^3} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{\lambda R \quad z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Tracer le graphe de la fonction E(z).



***Champ au voisinage de l'axe*.**

On s'intéresse maintenant au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point M défini par des coordonnées cylindriques (r, θ , z).



Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en M, le champ E n'a pas de composante orthoradiale E_θ .

Tout plan contenant l'axe Oz ne modifie par la distribution de la charge.

Pour r et z donnés, toute rotation autour de l'axe Oz ne modifie pas le champ E : E est indépendant de θ.

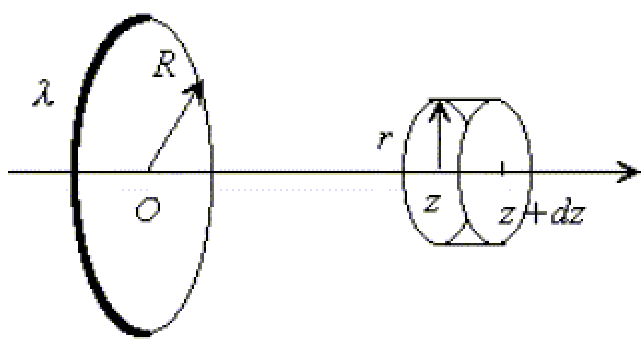
Montrer qu'au voisinage de l'axe, le flux du champ E est conservatif. Que peut-on dire de sa circulation sur un contour fermé ?

A voisinage de l'axe, il n'y a pas de charge. Le théorème de Gauss conduit à :

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0}$$

Le champ **E** est à flux conservatif. Le champ **E** est à circulation conservative sur un contour fermé.

Calculer le flux de E à travers une surface fermée cylindrique d'axe Oz dont les bases sont des disques de rayon r petit et de cotés z et z+dz.



$$E(z+dz)\ \pi r^2 - E(z)\ \pi r^2 + 2\pi r dz\ E(r,z)=0$$

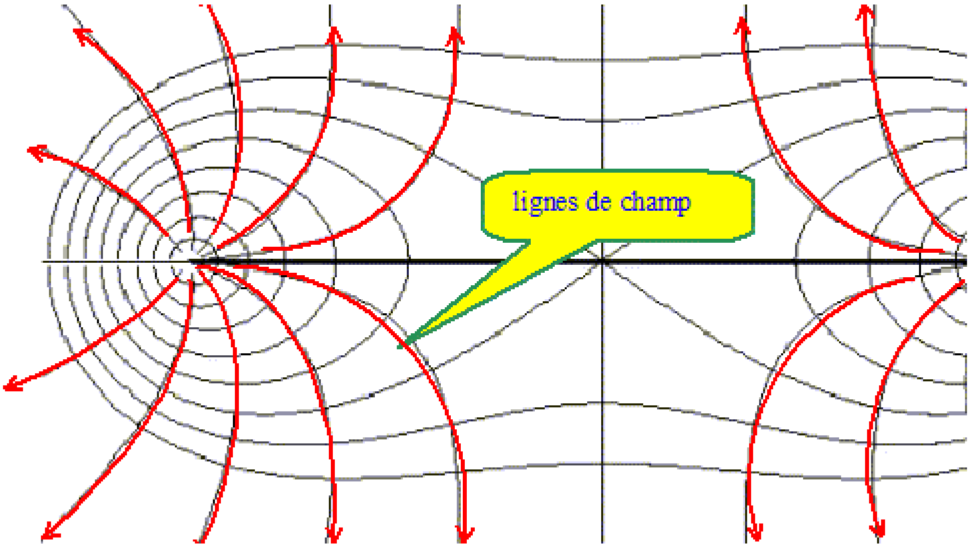
E(r,z)= -½ r [E(z+dz)-E(z)] / dz = **-½r dE(z) / dz**.

Calculer l'expression de $E_r(z,r)$.

$$\frac{dE}{dz}=\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}-\frac{3z^2}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\right)\Rightarrow E(r,z)=-\frac{1}{2}r\frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}-\frac{3z^2}{\left(R^2+z^2\right)^{5/2}}\right)$$

A l'aide d'un logiciel de simulation, on trace les lignes de champ et les équipotentielles.

Sur la feuille donnée en annexe, préciser les lignes de champ avec des flèches en supposant λ > 0.



Qu'obtiendrait-on comme allure de lignes de champ à grande distance ?

La spire est alors équivalente à une charge ponctuelle située en son centre O et les lignes de champ sont des droites passant par O.

Qu'obtiendrait-on comme allure d'équipotentielles à grande distance ?

Des sphères centrées sur O.

Montrer que les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles. Que se passe-t-il au centre ?

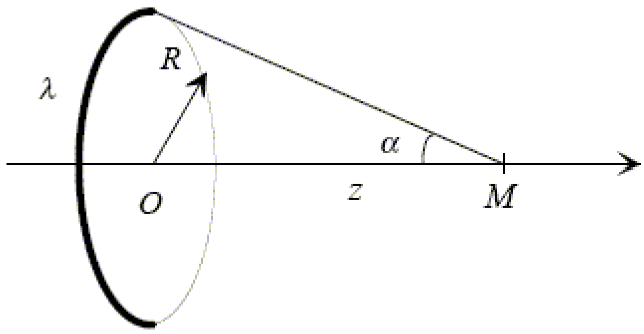
"équipotentielle" signifie potentiel V constant soit dV=0 et en conséquence **E**. d**l**=0

Le champ **E** est donc orthogonal aux équipotentielles.

Le champ est nul au centre.

Champ magnétostatique créé par une spire parcourue par un courant I.

Champ sur l'axe :



On donne une spire circulaire de rayon r , de centre O, d'axe Oz . Cette spire est parcourue par un courant électrique d'intensité I constante.

Montrer par des arguments de symétrie que, sur l'axe, le champ magnétostatique B est porté par l'axe et prend la forme de B=B**k**.

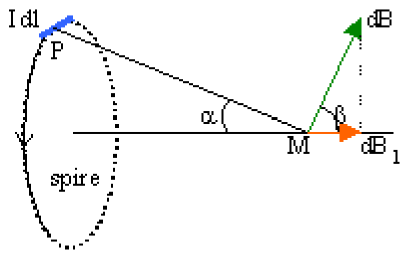
k est un vecteur unitaire porte par l'axe Oz.

tout plan contenant l'axe de la spire est plan d'antisymétrie.

système invariant par rotation autour de l'axe : **B** est porté par l'axe Oz.

La règle de l'observateur d'Ampère donne le sens du champ magnétique **B**.

Calculer le champ magnétostatique créé en un point M de l'axe tel que OM = z . On écrira $B(z) = B_0\, f(z/r)$ où $B_0 = B(O)$



l'élément de courant Idl crée en M , le champ élémentaire dB, perpendiculaire à PM, de module :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin(\theta)}{PM^2}$$

Idl et PM étant perpendiculaire $\sin(\theta)=1$

Par raison de symétrie le champ résultant sera porté par l'axe horizontal. La composante utile sera $dB\cos(\beta) = dB\sin(\alpha)$

Pour tous les éléments Idl, l'angle α et PM sont les mêmes. L'intégration de dB sur toute la spire donne le module du champ résultant ($\sin\alpha$ = rayon r / PM)

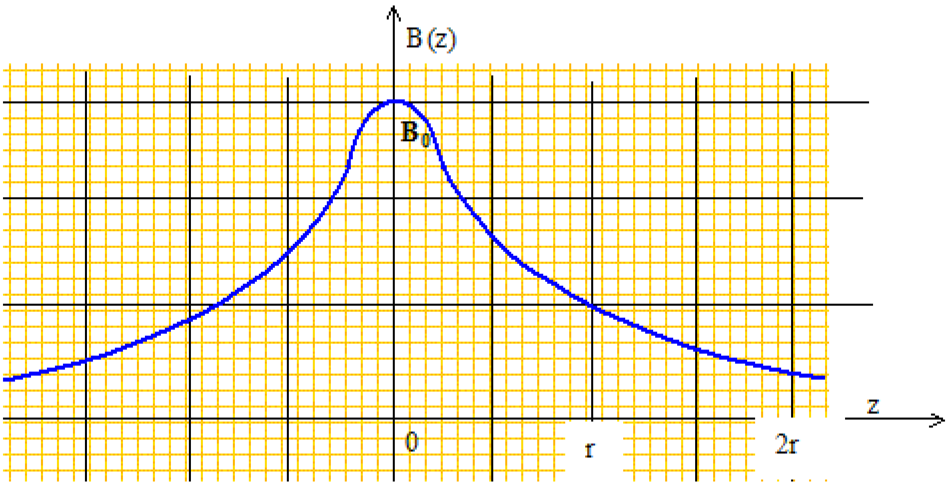
$$B = \int_0^{2\pi r}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin(\alpha)}{PM^2}dl = \frac{\mu_0 I}{2r}\sin^3(\alpha)$$

Au centre de la spire α=90°et $\sin\alpha$ =1 d'où **$B_0 = \mu_0 I/(2r)$**.

$\cot\alpha = z/r$; $1+\cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$; $\sin\alpha = 1/(1+\cot^2\alpha)^{½} = [1+(z/r)^2]^{-½}$

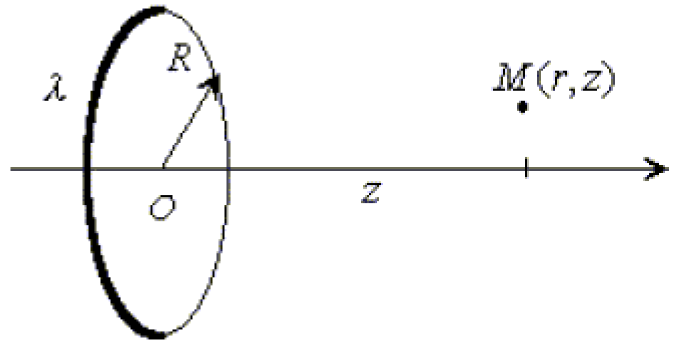
par suite **$B=B_0[1+(z/r)^2]^{-3/2}$**

Tracer le graphe représentant les variations de la fonction B(z).



Champ au voisinage de l'axe.

On s'intéresse maintenant au champ électromagnétique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point M défini par des coordonnées cylindriques (r, θ , z).

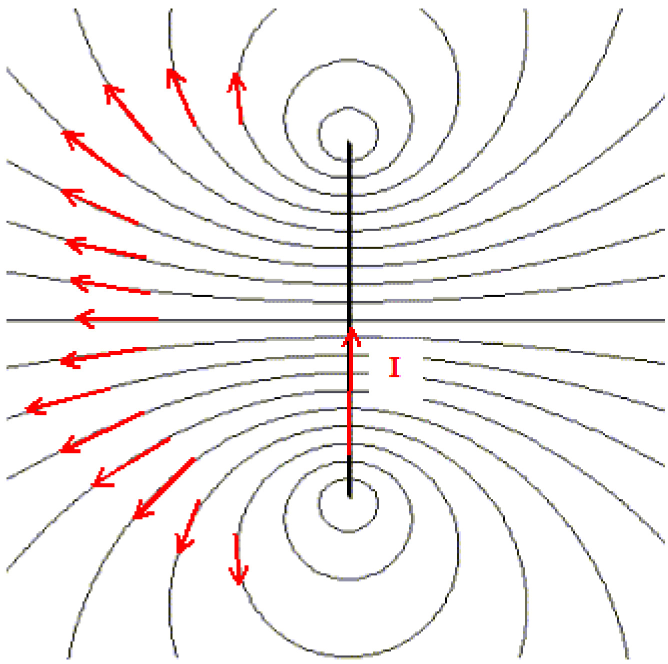


Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en M, le champ B n'a pas de composante orthoradiale B_θ .

tout plan contenant l'axe Oz de la spire est plan d'antisymétrie : **B** appartient à ce plan, donc $B_\theta=0$.

Pour r et z donnés, le système est invariant par rotation autour de l'axe : **B** ne dépend pas de θ.

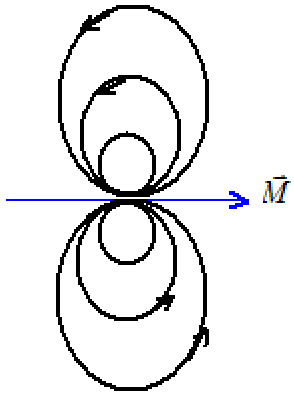
Compléter sur la feuille les lignes de champ par des flèches en indiquant leur sens, en précisant le sens du courant.



Lignes de champ magnétostatique

Qu'obtiendrait-on comme allure de lignes de champ à grande distance ?

La spire est assimilable à un dipole électromagnétique.



Quelle(s) différence(s) fondamentale(s) a-t-on entre les deux topographies ?

Les lignes de champ électrostatique divergent à partir des charges ; les lignes de champ électromagnétique tournent autour des courants.

Montrer qu'au voisinage de l'axe, la circulation de B est conservative.

Il n'y a pas de courant au voisinage de l'axe : la circulation de **B** est conservative.

Que peut-on dire du flux de B à travers une surface fermée ?

Le flux de **B** est toujours conservatif.

Calculer explicitement B (z, r) . **B(r,z)= -½r dB(z) / dz**.

$B=B_0[1+(z/R)^2]^{-3/2}$; $dB(z)/dz = -3z\, B_0 /r^2[1+(z/R)^2]^{-5/2}$

$$\mathbf{B(r,z)= 3rz\, B_0 /(2R^2)[1+(z/r)^2]^{-5/2}}.$$

facteur de qualité : étude d'un oscillateur amorti concours Mines 04

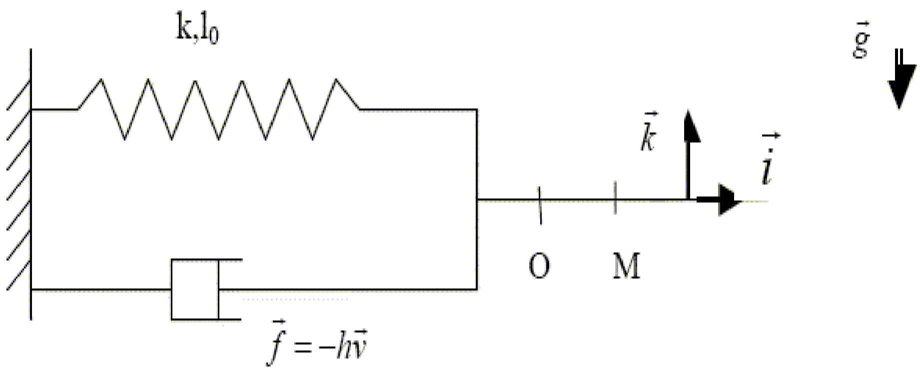
Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On considère le dispositif mécanique suivant, placé dans le référentiel R du laboratoire, supposé galiléen.

Il est composé d'une bille M, supposée ponctuelle, de masse m qui glisse sans frottement sur un axe horizontal. Elle est reliée :

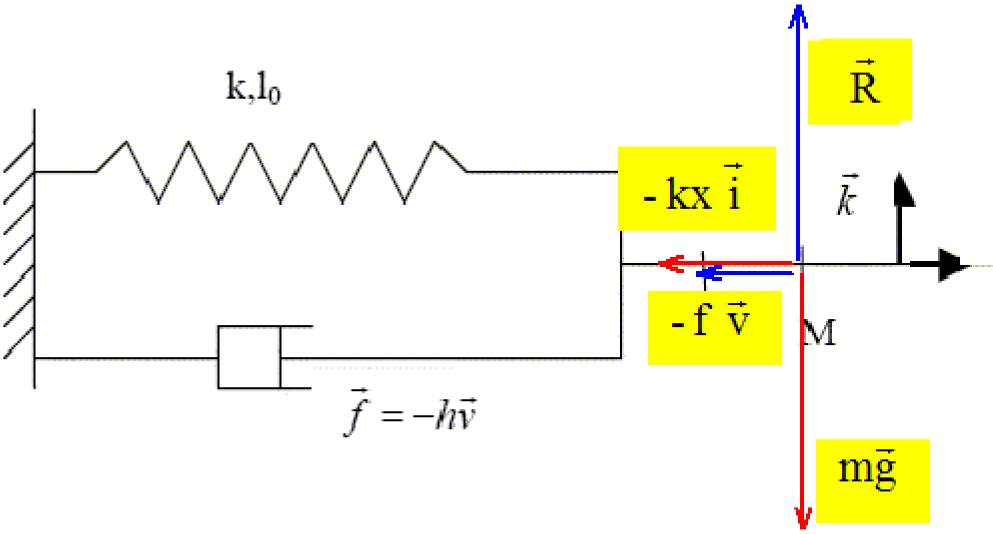
• à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, maintenu fixé à une de ses extrémités à un mur vertical.

• à un dispositif « amortisseur » fixé au même mur, qui soumet la bille à une force de frottement de type fluide **f** = -h **v**.



On note O, la position de la bille quand le ressort est à sa longueur à vide, et en prenant O comme origine, on repère la position de M par x= mesure algébrique de OM.

Faire un bilan des forces et justifier très brièvement que le système n'est pas conservatif.



La force de frottement fluide n'est pas conservative : l'énergie mécanique va diminuer.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la bille, montrer que la variation de l'énergie mécanique s'écrit sous la forme :

$dE_m = -hv^2dt$.

Entre les instants t et t +dt :

Le poids et l'action du support, perpendiculaires à la vitesse, ne travaillent pas. La puissance de ces forces est nulle.

Travail de la force de rappel : -kxdx ; puissance : -kxdx/dt.

Travail de la force de frottement fluide : -fv dx avex dx=vdt soit $-fv^2dt$; puissance : $-fv^2$

Théorème de l'énergie cinétique : $dE_c/dt = -kx\, dx/dt - fv^2$.

or $kx\, dx = d_{E\text{potentielle élastique}} = dE_p$, d'où : $dE_c/dt + dE_p/dt = -fv^2$; $d(E_c+E_p)/dt = dE_M/dt$.

$dE_M/dt = -fv^2$.

Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la bille dans R, et montrer que :

$$\ddot{x} + \frac{w_0}{Q}\dot{x} + w_0{}^2 x = 0 \text{ avec } w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m w_0}{h}$$

Sur l'axe des abscisses : $-kx - hv = md^2x/dt^2$ avec $v = dx/dt$.

$d^2x/dt^2 + h/m\, dx/dt + k/m\, x = 0$

On pose $\omega_0^2 = k/m$; $Q = m\omega_0/h$ soit $h/m = \omega_0/Q$.

d'où : $\mathbf{d^2x/dt^2 + \omega_0/Q\, dx/dt + \omega_0^2\, x = 0}$. (**1**)

On se place dans le cas du régime pseudo-périodique. Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = e^{-\frac{w_0}{2Q}t} A\cos(wt + \varphi) \text{ avec A et } \varphi \text{ des consta}$$

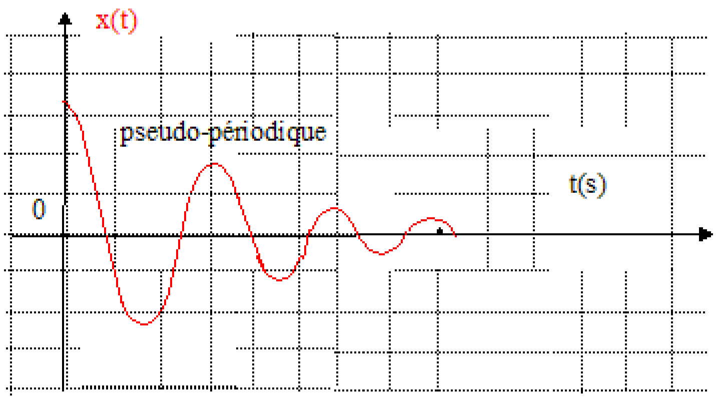
Donner la condition sur Q pour être dans un tel régime.

Equation caractéristique liée à (**1**) :

$\mathbf{r^2 + \omega_0/Q\, r + \omega_0^2 = 0}$. Discriminant $\Delta = (\omega_0/Q)^2 - 4\omega_0^2$.

Le discriminant est négatif dans le cas du régime pseudo-périodique.$(\omega_0/Q)^2 - 4\omega_0^2 < 0$ soit $\mathbf{Q > 0{,}5}$.

Tracer l'allure de x(t).



On se place dans le cas de l'amortissement faible Q >>1.

Exprimer $|\Delta T/T_0| = |(T-T_0)/T_0|$ en fonction de Q et en déduire que ω proche ω_0.

$\omega=\omega_0[1-1/(4Q^2)]^{½}$; $\omega_0 = 2\pi/T_0$; $\omega = 2\pi/T$; $\omega/\omega_0 = T/T_0 = [1-1/(4Q^2)]^{½}$;

$|(T-T_0)/T_0| = |\,[1-1/(4Q^2)]^{½} - 1|$

Or si Q<<1, $[1-1/(4Q^2)]^{½}$ voisin de $1-1/(8Q^2)]$ et $|\,[1-1/(4Q^2)]^{½} - 1|$ proche de $1/(8Q^2)$

$$|\Delta T/T_0| = 1/(8Q^2).$$

Si Q >>1, alors ΔTproche de 0, T proche deT_0 et ω proche de ω_0.

Interprétation énergétique du facteur de qualité Q.

On suppose $\omega=\omega_0$.

Justifier que l'énergie potentielle de M peut s'écrire $E_p(t) = ½kx^2(t)$, puis expliciter $E_p(t)$.

Travail de la force de rappel : dW= -kx dx

$$W = -k\int_0^x x\,dx = -½kx^2 ; E_p = -W ; E_p = ½kx^2$$

$$x(t) = A\,e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega_0 t + \varphi) ; E_p = ½kA^2\,e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Expliciter $E_c(t)$, l'énergie cinétique de M en fonction du temps.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{A\omega_0}{2Q} e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega_0 t+\varphi) - A\omega_0 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

$$E_c = ½m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\left(\frac{1}{2Q}\cos(\omega_0 t+\varphi)+\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} ; E_c = \frac{kA^2}{2} e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\left(\frac{1}{2Q}\cos(\omega_0 t+\varphi)+\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)^2$$

Montrer que l'énergie mécanique $E_m(t)$ est de la forme $E_c(t) = K_1\exp(-K_2 t)$ où l'on exprimera K_1 en fonction de A et k , et K_2 en fonction de ω_0 et Q.

$$E_m = ½kA^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{kA^2}{2} e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\left(\frac{1}{2Q}\cos(\omega_0 t+\varphi)+\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)^2$$

$$E_m = ½kA^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\left(\cos^2(\omega_0 t+\varphi) + \left(\frac{1}{2Q}\cos(\omega_0 t+\varphi)+\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)^2\right)$$

$$\text{or } Q \gg 1 : E_m = \underbrace{½kA^2}_{K_1} e^{\overbrace{\frac{-\omega_0}{Q}}^{-K_2}t}$$

On définit la variation d'énergie mécanique par: $\Delta E_m(t)=|E_m(t+T-E_m(t)|$.

Montrer que $Q = 2\pi E_m(t)/\Delta E_m(t)$.

$$E_m(t+T) = \tfrac{1}{2}kA^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t} e^{\frac{-\omega_0}{Q}T} = \tfrac{1}{2}kA^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t} e^{\frac{-2\pi}{Q}} ; E_m(t) = \tfrac{1}{2}kA^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}$$

$$\Delta E_m = \tfrac{1}{2}kA^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\left(e^{\frac{-2\pi}{Q}} - 1\right) ; \frac{\Delta E_m}{E_m(t)} = e^{\frac{-2\pi}{Q}} - 1 \approx 1 - \frac{-2\pi}{Q} - 1 \approx \frac{2\pi}{Q} \text{ car } Q >> 1$$

continuité, discontinuité ; pendule simple, dipôle RLC, nombres complexes concours Mines 05

sans calculatrice.

Les vecteurs sont écrits en gras et en bleu.

On rappelle qu'une fonction y=f(x) est une fonction continue en x_0 si et seulement si la limite à gauche en x_0 de f est égale à la limite à droite et à la valeur $f(x_0)$. Dans tout ce sujet, on notera x_0^- une valeur de x immédiatement inférieure à x_0, x_0^+ une valeur de immédiatement supérieure à x. La continuité peut donc s'écrire aussi :

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0).$$

On rappelle les coordonnées dans la base polaire des vecteurs position **OM**, vitesse **v** et accélération **a** dans le cas du mouvement circulaire de rayon r :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \qquad \vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta \qquad \vec{a} = -r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r$$

On considère un mobile ponctuel de masse constante m soumis, dans un référentiel galiléen, à un ensemble de forces de résultante **f**, partout et constamment définie dans l'espace et le temps.

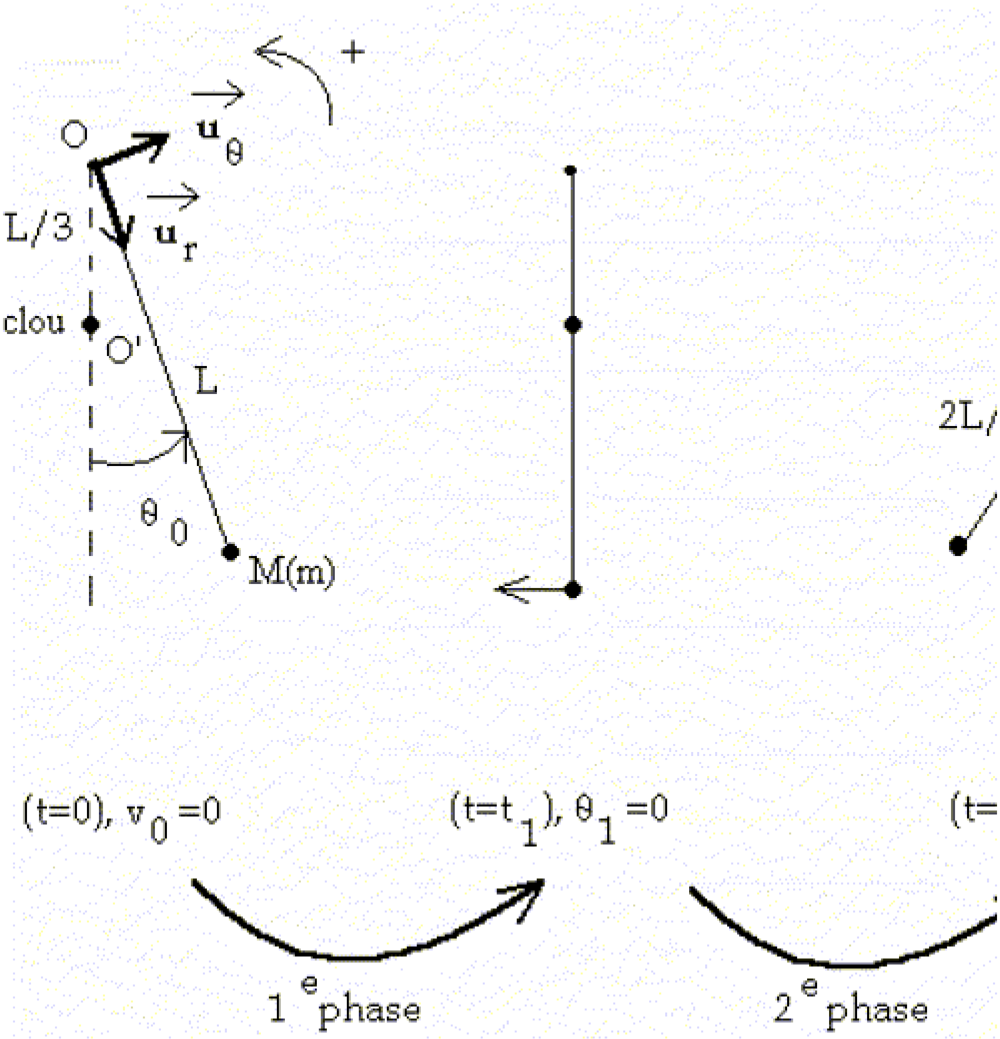
En utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou théorème du

centre d'inertie), montrer que, sous cette hypothèse, la norme du vecteur vitesse du mobile est une fonction continue du temps.

f = md**v**/dt

f est "partout et constamment définie" ; donc le vecteur vitesse est une fonction dérivable par rapport au temps et en conséquence la vitesse est une fonction continue.

On étudie un pendule simple modifié, présenté sur la figure ci-dessous.

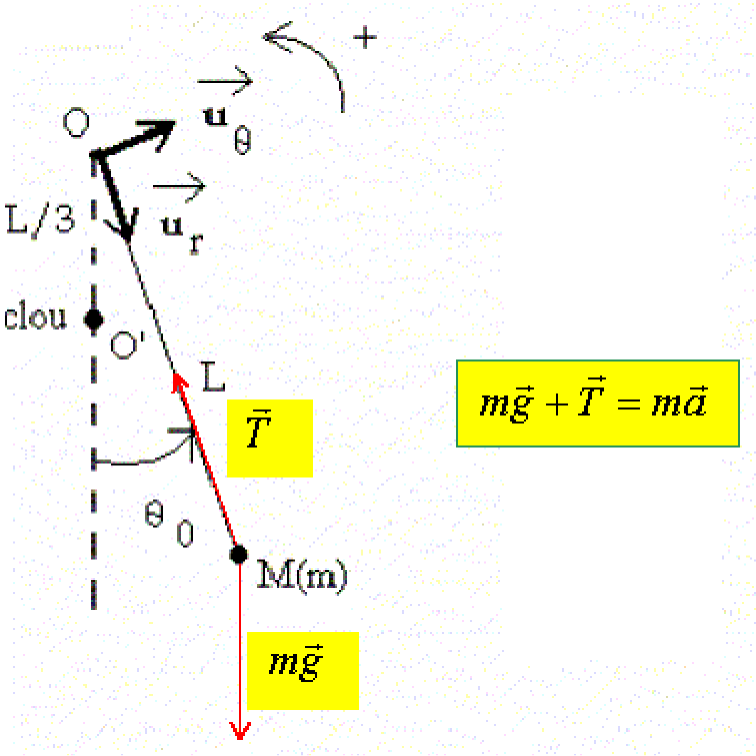


Un mobile ponctuel M de masse m, est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse negligeable, dont l'autre extrémité est fixe en O. On néglige tout frottement et on repère l'inclinaison θ du brin de fil soutenant M par rapport à la verticale. Lorsque θ>0, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L. A la verticale et en dessous de O, un clou est plante en O' avec OO'=L/3, qui bloquera la partie haute du fil vers la gauche : quand θ<0, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil

2L/3. A la date t=0, on abandonne sans vitesse initiale le mobile M en donnant au fil une inclinaison initiale $\theta_0>0$.

On note t_1 la date de la première rencontre du fil avec le clou, t_2 la date de première annulation de la vitesse du mobile pour $\theta<0$. L'intervalle de dates $[0,t_1[$ est nommé premiere phase du mouvement, l'intervalle $]t_1, t_2]$ est nommé deuxième phase. A la date t_1^- immédiatement inférieure à t_1, le fil n'a pas encore touché le clou et à la date t_1^+ immédiatement supérieure, le fil vient de toucher le clou.

Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ pour la première phase du mouvement.



Sur $\mathbf{u_r}$: $-T + mg\cos\theta = -mL(d\theta/dt)^2$.

Sur $\mathbf{u_\theta}$: $-mg\sin\theta = mL\, d^2\theta/dt^2$.

d'où l'équation différentielle : $d^2\theta/dt^2 + g/L \sin\theta = 0$.

Dans l'hypothèse des petites oscillations, on suppose que sin θ proche de θ.

Reconnaitre l'équation différentielle d'un certain type d'oscillateur et en déduire, sans résoudre l'équation, la durée δt_I de la première phase du

mouvement.

oscillateur harmonique : $d^2\theta/dt^2 + g/L\ \theta = 0$.

$\omega_0^2 = g/L$; période $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\ [L/g]^{½}$.

La première phase du mouvement correspond à un demi-aller soit à un quart de période : $\delta t_I = 0{,}5\pi\ [L/g]^{½}$.

En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse de M à la date t_1^-.

L'énergie mécanique initiale est sous forme potentielle de pesanteur. On choisi l'origine de cette énergie au point le plus bas de la trajectoire de M.

$E_M(0) = mgL(1- \cos\theta_0)$.

L'énergie mécanique à la date t_1^- est sous forme cinétique : $E_M(t_1^-) = ½mv^{-2}$.

La tension **T**, perpendiculaire à la vitesse **v**, ne travaille pas ; le poids est une force conservative :donc, l'énergie mécanique se conserve.

$mgL(1- \cos\theta_0) = ½mv^{-2}$; $v^- = [\ 2gL(1- \cos\theta_0)]^{½}$.

En déduire la vitesse angulaire $\omega_1^- = d\theta/dt$ à cette date.

$\omega_1^- = -v^- /L = -[\ 2g/L(1- \cos\theta_0)]^{½}$.

Le blocage de la partie superieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique.**Déterminer la vitesse v^+ de M à la date t_1^+.**

La valeur (norme) du vecteur vitesse est une fonction continue : $v^+ = v^-$.

En déduire la vitesse angulaire $\omega_1^\pm = d\theta/dt$ à cette date.

$\omega_1^+ = v^+$ / longueur du fil.

Or la longueur du fil est égale à 2L/3 d'où :

$\omega_1^+ = 3v^+ /(2L) = -[\ 9g/(2L)\ (1- \cos\theta_0)]^{½}$.

Donner sans calcul la durée δt_{II} de la deuxième phase.

hypothèse : petites oscillations ; la période devient : $T = 2\pi\,[2L/(3g)]^{½}$.

La seconde phase du mouvement correspond à un demi-aller soit à un quart de période : $\boldsymbol{\delta t_{II} = 0{,}5\pi\,[2L/(3g)]^{½}}$.

Déterminer l'expression de l'angle θ_2 à la date t_2.

Ecrire la conservation de l'énergie mécanique : $mgL(1-\cos\theta_0) = ½mv^{-2} = mg\,2L/3(1-\cos\theta_2)$

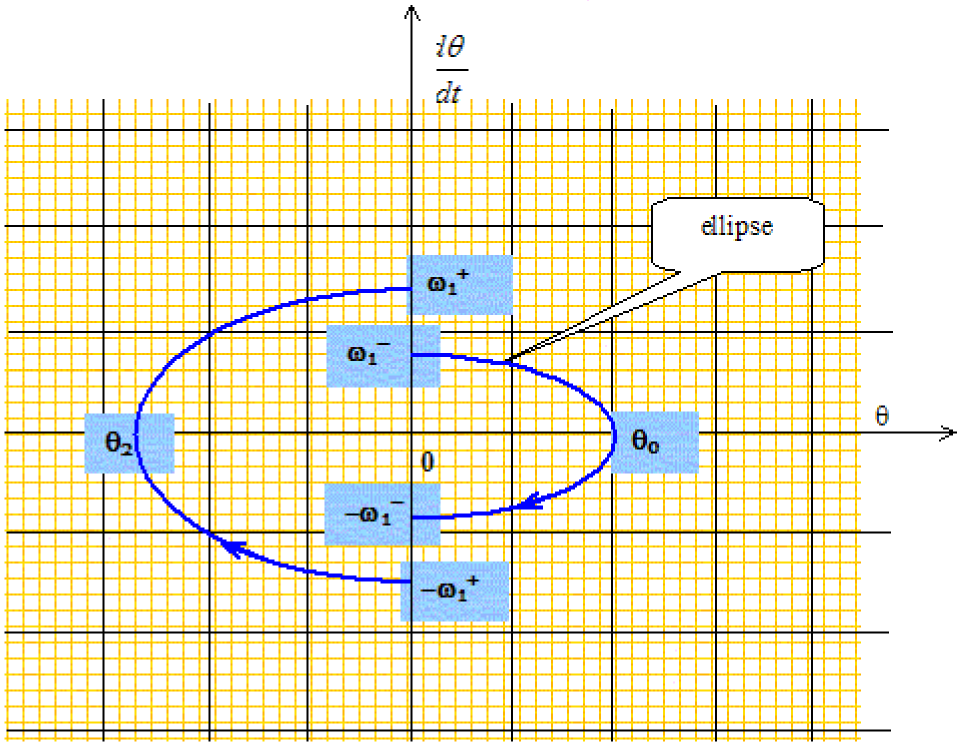
$1-\cos\theta_0 = 2/3(1-\cos\theta_2)$; $1/3-\cos\theta_0 = -2/3\cos\theta_2$; $\boldsymbol{\cos\theta_2 = 1{,}5\cos\theta_0 - 0{,}5}$.

Décrire brièvement la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période T.

à $t > t_2$, le pendule rebrousse chemin ; il repasse à la position d'équilibre avec la même vitesse qu'à l'aller ; il atteindra enfin la position $\theta=\theta_0$ et on retrouvera la phase n°1, puis la phase n°2.

période $T = 2(\delta t_I+\delta t_{II}) = \boldsymbol{\pi\,[L/g]^{½}+\pi\,[2L/(3g)]^{½}}$.

Dresser l'allure du portrait de phase, dans le système d'axes (θ ; $d\theta/dt$). Conclure.



La modification brutale de la longueur du fil, entraîne une discontinuité de la vitesse angulaire

Electricité

Un circuit électrique comprend un résistor de résistance R, une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C, toutes constantes.

Expliquer pourquoi la tension aux bornes du condensateur et l'intensité du courant traversant la bobine sont des fonctions continues du temps.

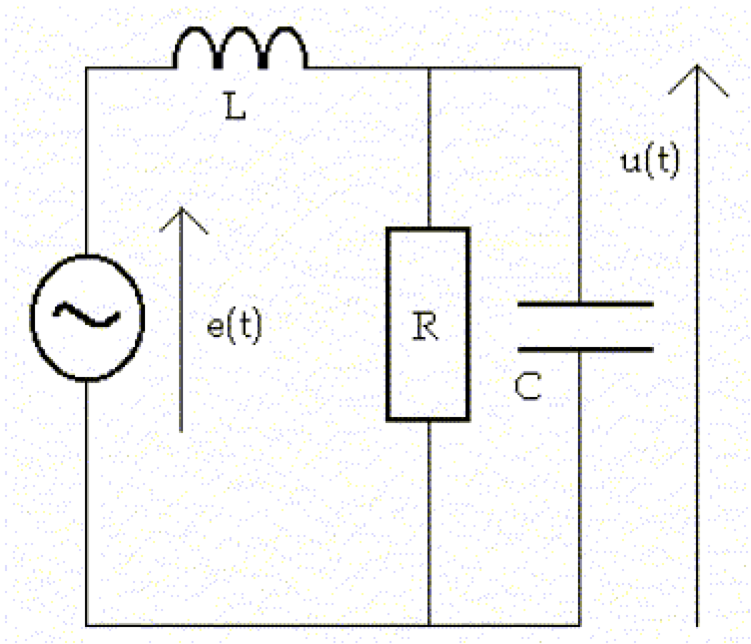
L'énergie électrique stockée dans un condensateur est une fonction continue.

Or $E_C = ½Cu^2_C$; C étant une constante, alors u_C est une fonction continue du temps.

L'énergie électromagnétique stockée dans une bobine inductive est une fonction continue.

Or $E_L = ½Li^2$; L étant une constante, alors i est une fonction continue du temps.

On considère le circuit de la figure ci-dessous, alimenté par un générateur de tension alternative sinusoidale du type e(t) =E cos (ωt) et on s'interèsse au régime sinusoidal forcé.



Etablir l'expression de la fonction de transfert complexe en boucle ouverte de ce circuit assimilé à un quadripôle : $\underline{H} = \underline{u} / \underline{e}$.

Admittance complexe de l'ensemble R C : $\underline{Y}_1 = 1/R + jC\omega = (1+jRC\omega)/R$

Impédance complexe correspondante : $\underline{Z}_1 = R/(1+jRC\omega)$

Impédance complexe du dipôle RLC: $\underline{Z} = jL\omega + \underline{Z}_1$

$\underline{H} = \underline{Z}_1 / \underline{Z}$

$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}} = \frac{R}{R + jL\omega(1+jRC\omega)} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}} = \frac{1 - LC\omega^2 - \frac{jL\omega}{R}}{\left(1 - LC\omega^2\right)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}$$

En déduire la relation entre les grandeurs réelles e(t) et u(t) et et leurs éventuelles dérivées temporelles.

$\underline{e} = \underline{u}\,[1 + LC\,(j\omega)^2 + L/R\; j\omega]$

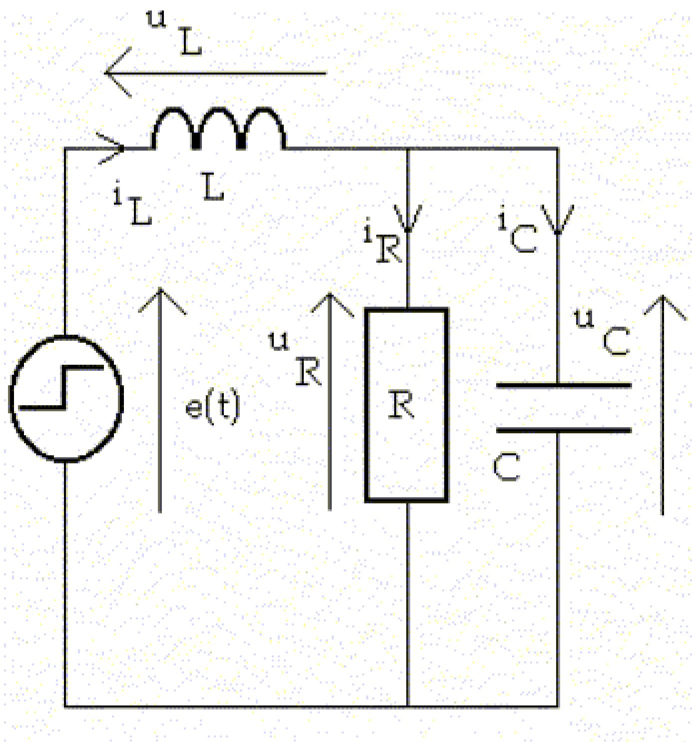
La dérivée première par rapport au temps correspond à la multiplication par jω.

La dérivée seconde par rapport au temps correspond à la multiplication par $(j\omega)^2$.

d'où $\mathbf{e(t) = u(t) + L/R\ du(t)/dt + LC\ d^2u(t)/dt^2}$.

On considère maintenant le circuit de la figure ci-dessous, alimenté par un générateur d'échelon de tension dont la tension est :

$e(t)=0$ pour $t<0$ et $e(t)=E$ pour $t>0$.



A la date t_0^- , toutes les grandeurs électriques sont nulles : $u_L=u_R=u_C=0$ et $i_L=i_R=i_C=0$. On admettra pour la suite de cette partie que la tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$\mathbf{e(t) = u_c + L/R\ du_c\ dt + LC\ d^2u_c / dt^2}$.

Montrer que le type de régime dépend de la valeur de la résistance R, comparée à celle d'une résistance critique R_C dont on donnera l'expression.

L'observation d'oscillations amorties a-t-elle lieu pour $R>R_C$ ou pour $R<R_C$? Interpréter physiquement.

équation caractéristique associée à : $\mathbf{u_c + L/R\ du_c\ dt + LC\ d^2u_c / dt^2} = 0$

$LC\ r^2 + L/R\ r + 1 = 0$; $\Delta = (L/R)^2 - 4LC$

Le discriminant est nul si R prend la valeur $\mathbf{R_C=2(L/C)^{½}}$.

Si $R<R_C$, alors $\Delta>0$, régime apériodique.

Si $R>R_C$, alors $\Delta<0$, régime pseudopériodique (amortissement).

Pour de grande valeur de R, l'intensité i_R est très faible et le circuit se comporte comme un dipôle LC.

Donner en les justifiant les valeurs des six grandeurs électriques u_L, u_R, u_C, i_L, i_R et i_C à la date t_0^+.

u_C =q/C=0, le condensateur ne se charge pas instantanément.

$u_R=u_C=R\ i_R=0$: donc $i_R=0$.

$u_C+u_L=E$; $u_C=0$ par suite $u_L=E$.

Continuité de l'intensité i_L : $i_L(t_0^-) = i_L(t_0^+) = 0$

additivité des intensités (loi des noeuds) : $i_L= i_R+ i_C =0$; $i_R=0$ donc $i_C =0$

On considère un condensateur plan formé de deux plaques de surface très grande, séparées par une tranche de vide d'épaisseur e très petite. On suppose que cette épaisseur diminue brusquement de e à e'=½e.

Quelles sont dans ce cas les grandeurs électriques (capacité, charge, tension, énergie électrique) encore continues et par quels coefficients respectifs sont multipliées les autres ?

Justifier quantitativement et interpréter physiquement les réponses.

La capacité est inversement proportionnelle à l'épaisseur e : si e est divisée par 2, alors la capacité C double.

La charge du condensateur ne se fait pas instantanément : la charge q est une grandeur continue.

Or $u_C=q/C$; si C double alors u_C est divisée par deux. (discontinuité de u_C).

Energie stockée par le condensateur : ½ q^2/C ; C double et la charge q est constante, donc l'énergie est divisée par deux. (discontinuité de l'énergie)

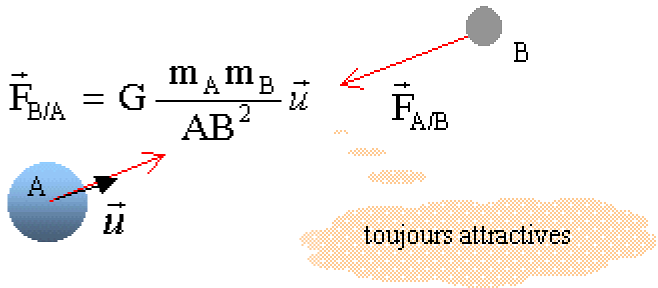
La diminution de l'énergie est due au travail positif de la force électrique attractive existant entre les plaques lors de leur, rapprochement.

enseignement ; concours CAPLP externe 2006 : gravitation et satellite

L’interaction de gravitation est l’une des quatre interactions fondamentales de la physique. Elle fut introduite en 1687 pour interpréter le mouvement des planètes, le mouvement de la Lune et le mouvement des corps dans le voisinage de la Terre.

Loi de la gravitation universelle (Newton est à l'origine de cette loi)

Deux corps A et B de masses respectives m_A et m_B séparés d'une distance d=AB exercent l'un sur l'autre des forces opposées attractives, importantes dans l'infiniment grand, négligeables dans l'infiniment petit.



Les trois autres interactions fondamentales de la Physique sont l'interaction électromagnétique, l'interaction forte, l'interaction faible.

L'interaction électromagnétique et l'interaction forte existent à l’échelle d’un noyau atomique.

Étude du mouvement d’un satellite artificiel autour de la Terre :

Le satellite de masse m, assimilable à un point matériel, est en orbite circulaire autour de la Terre à une altitude h. On suppose que la Terre, de rayon R et de masse M, a une répartition de masse à symétrie sphérique.

Référentiel géocentrique :

Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et des axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique. Ce référentiel peut être considéré comme galiléen pour des durées de quelques minutes.

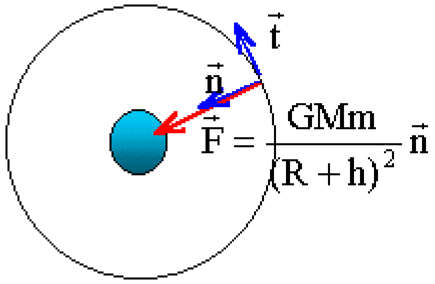
Montrons que la trajectoire circulaire implique un mouvement uniforme :

Le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation centripète ; cette force est à chaque instant perpendiculaire à la vitesse et en conséquence sa puissance est nulle. L'énergie cinétique du satellite ne varie pas : donc la valeur de la vitesse est constante (mouvement uniforme).

Expression de la vitesse v et la période T de ce satellite en fonction de G, M, R, h :

le satellite est soumis à la seule force de gravitation centripète exercée par la planète

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{(R+h)}\vec{n} = \frac{GM}{(R+h)^2}\vec{n}$$



M : masse (kg) de la planète ; m : masse du satellite (kg) ; R (m) rayon planète ; h (m) altitude depuis le sol

suivant l'axe **n** la seconde loi de Newton s'écrit : $GMm/(R+h)^2 = m\, a_N = mv^2/(R+h)$

d'où la valeur de la vitesse (m/s): $v^2 = GM/(R+h)$. <u>indépendante de la masse du satellite</u>

Le satellite S.P.O.T. (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre), lancé en 1986, évolue à l'altitude h = 832 km.

La période de révolution T du satellite (seconde) est le temps mis par le satellite pour faire un tour et ce d'un mouvement uniforme.

$$2\pi(R+h) = vT$$

élever au carré, puis remplacer v^2 par l'expression ci dessus.

$$4\pi^2 (R+h)^2 = v^2 T^2 = GM/(R+h)\, T^2$$

$$\text{ou } T^2 = 4\pi^2/(GM)(R+h)^3.$$

soit $T^2/(R+h)^3 = 4\pi^2/(GM)$ rapport constant pour une planète donnée.(3ème loi de Kepler)

distance en mètre, période en seconde, masse en kg.

$T^2 = 4\pi^2(R+h)^3/(GM)$ avec R= 6,38 10^6 m ; h= 8,32 10^5 m ; G= 6,67 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2} ; M=5,98 10^{24} kg.

$T^2 = 4*3,14^2*(6,38\ 10^6+8,32\ 10^5)^3 / (6,67\ 10^{-11}*5,98\ 10^{24}) = 3,71\ 10^7\ s^2$; T= 6,09 10^3 s

Cette valeur étant différente du jour sidéral T_j=86164s, SPOT n'est pas géostationnaire

Pour « établir » cette loi, Képler s'appuya sur les observations faites par une autre personne : Tycho Brahé.

Vitesse d'évasion d'un satellite.

Les vecteurs sont écrits en bleu et en gras.

La force exercée par la Terre sur le satellite en orbite circulaire est une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle E_p, ainsi on a : **F** = -dEp/dr $\mathbf{e_r}$ où

$\mathbf{e_r}$ représente le vecteur unitaire radial et r le rayon de l'orbite ciculaire.

Expression de l'énergie potentielle E_p du satellite en fonction de G, M, m et r (on adoptera comme origine de l'énergie potentielle celle pour r infini).

Expression vectorielle du champ de force **f**(r) auquel est soumis le satellite :

Le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation attractive exercée par la Terre. La direction de cette force passe toujours par le point O, centre de la Terre : il s'agit donc d'un champ de forces centrales.

$\mathbf{f}(r) = GMm/r^2(-\mathbf{e}_r)$

Montrons que la force **f** qui s'exerce sur le satellite S dérive d'une énergie potentielle de gravitation E_p.

Le travail de la force **f**(r) ne dépend que des positions initiale et finale (peu importe le chemin suivi) : la force est conservative.

On peut associer à cette force, une fonction scalaire ou énergie potentielle notée $E_p(r)$, définie à une constante près ; la variation de l'énergie potentielle entre les points A et B est égale à l'opposée du travail de la force**f**(r) entre ces points.

$$W_{A\to B}(\vec{f})=\int_A^B \vec{f}\,d\vec{r}=\int_A^B -GMm\,\frac{dr}{r^2}=\left[\frac{GMm}{r}\right]_A^B=GMm\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)=-\Delta E_p=E_p(A)-E$$

En prenant B situé à l'infini (par convention cette énergie potentielle est nulle à l'infini), il vient : $E_p = -GMm/r$.

Pour éloigner deux masses l'une de l'autre, il faut exercer un travail moteur, opposé au travail de la force de gravitation donc égal à la variation d'énergie potentielle :

$\Delta E_p > 0$; $E_{p\ fin} - E_{p\ initial} > 0$; or $E_{p\ fin}$ tend vers zéro donc $E_{p\ initial} < 0$

l'énergie potentielle de gravitation est donc négative quelle que soit la distance r finie

Le signe négatif dans le terme d'énergie potentielle traduit le fait que celle-ci augmente si R croît.

<u>Expression de la vitesse d'évasion</u> (vitesse de libération) du satellite pour laquelle l'énergie mécanique E s'annule.

<u>Expression de l'énergie mécanique</u> E_{sol} de ce satellite dans le référentiel géocentrique avant son lancement :

l'énergie potentielle vaut $E_p = -GMm/R$; l'énergie cinétique communiquée par la Terre vaut : $E_c = ½mv^2$ avec v = 463 m/s

l'énergie mécanique vaut : $E_{sol} = -GMm/R + ½mv_{lib}^2$

L'énergie mécanique à une distance infinie est nulle d'où : $½mv_{lib}^2 = GMm/R$

$v_{lib}^2 = 2MG/R$; $v_{lib} = [2MG/R]^{½}$.

<u>Calcul de cette vitesse d'évasion</u> pour un corps quelconque se situant à la surface de la Terre :

$v_{lib} = [2*5{,}98\ 10^{24}*6{,}67\ 10^{-11} / 6{,}38\ 10^{6}]^{½}$=<u>11,2 km/s</u>.

L'énergie cinétique moyenne d'agitation des molécules de l'atmosphère terrestre est de l'ordre de $E_c = 1{,}5\ kT$, où k est la constante de Boltzmann et T la température absolue de l'atmosphère.

<u>Calcul de cette énergie cinétique d'agitation pour une température absolue de</u> 300 K : $k = 1{,}38\ 10^{-23}\ J\ K^{-1}$.

$E_c = 1,5\ kT = 1,5 * 1,38\ 10^{-23} * 300 = 6,21\ 10^{-21}$ J.

Comparaison à l'énergie cinétique d'une molécule de dioxygène qui s'évaderait de la surface terrestre.

masse d'une molécule de dioxygène : $m = 0,032 / N_A = 0,032 / 6,02\ 10^{23} = 5,32\ 10^{-26}$ kg

$E_c = ½mv_{lib}^2 = 0,5*5,32\ 10^{-26} *(11,2\ 10^3)^2 = 3,33\ 10^{-18}$ J.

conclusion : la molécule de dioxygène ne peut pas être libérée de l'attraction terrestre ; cette molécule reste au voisinage de la Terre.

Paradoxe !

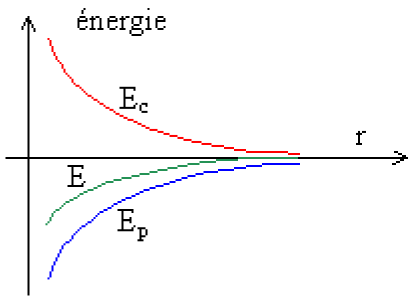
Expression l'énergie mécanique E d'un satellite en orbite terrestre en fonction de G, M, m et r : (r= R+h)

$E = E_p + E_c = ½mv^2 - GMm/r$

or $v^2 = GM/r$ d'où $E = - ½GMm/r$

Relation entre E et E_c : $E = -E_c$; relation entre E et E_p : $E = ½\ E_p$.

Allure des courbes E_c , E_p , E en fonction de r :



Un satellite d'observation évolue sur une orbite circulaire très basse (h = 180 km), ce qui permet de discerner des détails d'environ un mètre sur la Terre. Par suite des collisions avec les molécules de l'air des couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement **f** de norme $f = \beta mv^2/h$ où h représente l'altitude, m la masse du satellite, v sa vitesse et ß une constante valant 10^{-8} S.I.

L'énergie mécanique du satellite freiné par l'atmosphère diminue du travail de **f**.

Or $E = -E_c = -½mv^2$; si E diminue alors la vitesse du satellite augmente.

Or $E = -½E_p = -½mGM/r$; si E diminue alors la distance r diminue.

Expression approchée de la variation Δh du satellite après une révolution :

D'une part $E= - ½mGM/r$ d'où $\Delta E= ½mGM/r^2 \Delta r$.

D'autre part ΔE= travail de la force de frottement de valeur $f=\beta mv^2/ h$

Travail de cette force durant un tour ($2\pi r$) : $-\beta mv^2 2\pi r / h$

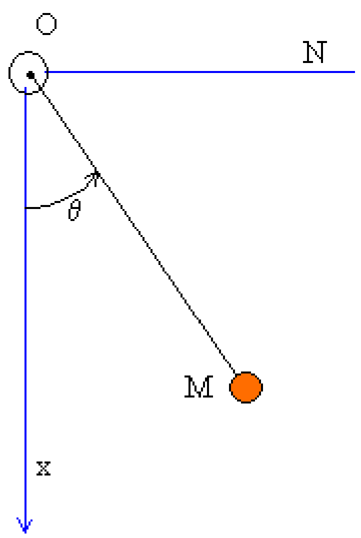
Par suite : $½mGM/r^2 \Delta r = -\beta mv^2 2\pi r / h$; $½GM/r^2 \Delta r =- \beta v^2 2\pi r / h$

Or $v^2 = GM/r$ d'où $1/(2r) \Delta r =- \beta 2\pi r / h$; $\Delta r = -4\beta \pi r^2/h$.

AN : $\Delta r = -4\ 10^{-8}*3{,}14 * (6{,}38\ 10^6 +1{,}8\ 10^5)^2 / 1{,}8\ 10^5 =$ 30 m.

CAPES physique chimie (d'après concours 2000) La résonance paramétrique

Depuis des siècles, en la cathédrale de St Jacques de Compostelle, un très gros encensoir d'une cinquantaine de kilogrammes accroché à une corde d'une vingtaine de mètres, est mis en oscillation. Il est manipulé par huit hommes et atteint une amplitude de 80 °. On se propose de modéliser le comportement de ce système.



On considère un pendule simple de longueur variable $\ell(t)$, réalisé à l'aide d'un fil inextensibleMON coulissant à travers d'un anneau en O. Son extrémité N est animée d'un mouvement sinusoïdal de faible amplitude de sorte que :

$OM(t) = \ell(t)=\ell_0(1+\varepsilon \cos(\Omega t))$ avec $\varepsilon \ll 1$.

On agit ansi périodiquement sur la longueur OM du pendule

1. Donner l'expression du moment cinétique du pendule par rapport à O.
   - En appliquant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle du mouvement.
   - Montrer qu'en se limitant aux termes du second ordre, et en posant $\omega_0^2=g/\ell_0$, on obtient l'équation :

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\omega_0^2\frac{\theta^2}{2}\right)=\varepsilon\left[\omega_0^2\cos(\Omega t)\ \theta\frac{d\theta}{dt}+2\Omega\sin(\Omega t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

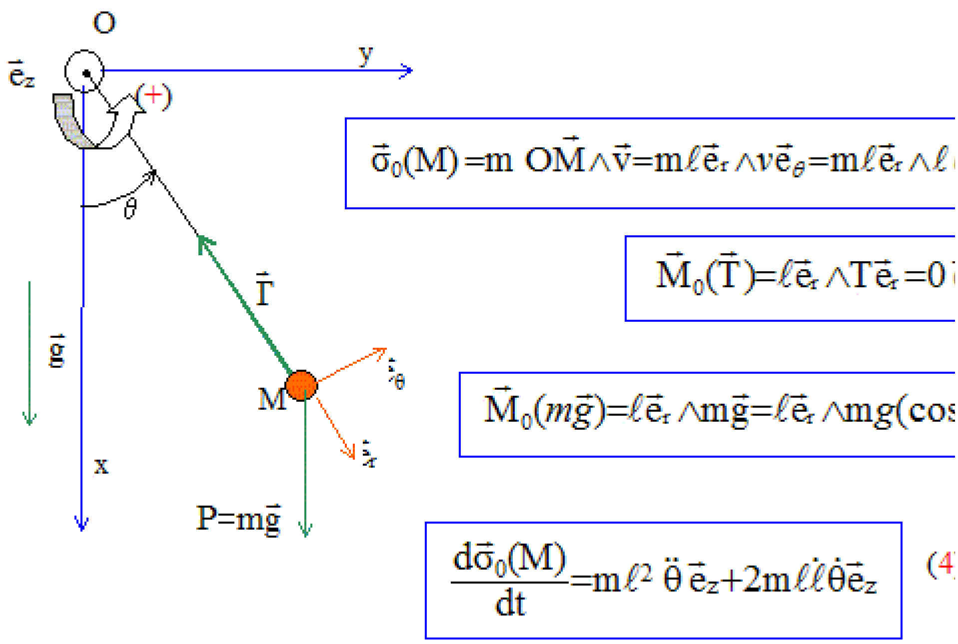
2. Par une approche énergétique on peut déterminer la condition de résonance. Un solution approchée de l'élongation angulaire $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme : $\theta(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi)$. La variation de A(t) avec le temps étant faible, on peut écrire $dA/dt \ll \omega_0 A/(2\pi)$
   On suppose de plus que l'énergie mécanique E est proportionnelle au carré A^2 de l'amplitude A.
   - Dans ces conditions montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt}=\varepsilon\left[2\Omega\sin(\Omega t)-\left(\tfrac{1}{2}\omega_0+\Omega\right)\sin((2\omega_0+\Omega)t+2\varphi)-\left(\tfrac{1}{2}\omega_0-\Omega\right)\sin((2\right.$$

   - On se propose de calculer la moyenne de 1/E dE/dt.
   Calculer la moyenne du second membre de l'équation dans les deux cas suivants : Ω différent de $2\omega_0$; $\Omega = 2\omega_0$; montrer que dans ce deuxième cas l'énergie croît exponentiellement. ***C'est le phénomène de résonance paramétrique***.

corrigé

<u>Expression du moment cinétique du pendule par rapport à O</u> :



(1) : j'exprime le moment cinétique

La masse m est soumise à deux forces : la tension du fil et son poids :

(2) Le moment, par rapport à O, de la tension est nul : cette force rencontre le point O.

(3) : j'exprime le moment en O du poids.

(4) : j'applique le théorème du moment cinétique
<u>En appliquant le théorème du moment cinétique, j'établis l'équation différentielle du mouvement</u> :

(4) donne l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ(t) en fonction du temps : $\theta'' + 2\ell'/\ell\, \theta' + g/\ell \sin\theta = 0$.

or $\ell(t)=\ell_0(1+\varepsilon \cos(\Omega t))$ avec $\varepsilon \ll 1$; $\ell' = -\ell_0\varepsilon\, \Omega \sin(\Omega t)$

or $\varepsilon \ll 1$ d'où $1/\ell = 1/(\ell_0(1+\varepsilon \cos(\Omega t)))$ proche de : $(1-\varepsilon \cos(\Omega t))/\ell_0$

d'où : $\theta'' - 2\varepsilon\, \Omega \sin(\Omega t)(1-\varepsilon \cos(\Omega t))\, \theta' + g/\ell_0 (1-\varepsilon \cos(\Omega t)) \sin\theta = 0$.

pour les petites oscillations θ proche sin θ ; et en posant $\omega_0^2=g/\ell_0$, on obtient l'équation :

$$\theta'' + \omega_0^2\, \theta - (1-\varepsilon \cos(\Omega t))\, [\, 2\varepsilon\, \Omega \sin(\Omega t)\, \theta'\,] - \omega_0^2\, \theta\, \varepsilon \cos(\Omega t) = 0.$$

Développer en négligeant le terme en ε^2 : $\theta'' + \omega_0^2\, \theta - 2\varepsilon\, \Omega \sin(\Omega t)\, \theta'$ -

$\omega_0^2\varepsilon\theta\cos(\Omega t)=0$

$\theta'' + \omega_0^2\,\theta = \varepsilon[2\Omega\sin(\Omega t)\,\theta' + \omega_0^2\theta\cos(\Omega t)]$

en multipliant chaque terme par θ' : $\theta''\,\theta' + \omega_0^2\,\theta\,\theta' = \varepsilon[2\Omega\sin(\Omega t)\,\theta'^2 + \omega_0^2\theta\,\theta'\cos(\Omega t)]$

Or $\theta''\,\theta' + \omega_0^2\,\theta\,\theta' = d/dt[\frac{1}{2}\theta'^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2]$

d'où : $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \omega_0^2\frac{\theta^2}{2}\right) = \varepsilon\left[\omega_0^2\cos(\Omega t)\,\theta\frac{d\theta}{dt} + 2\Omega\sin(\Omega t)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]}$

Par une approche énergétique on peut déterminer la condition de résonance :

Un solution approchée de l'élongation angulaire $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme : $\theta(t) = A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

$\theta' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) + A'\cos(\omega_0 t+\varphi)$.

La variation de A(t) avec le temps étant faible, on peut écrire $dA/dt \ll \omega_0 A/(2\pi)$: d'où $\theta' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$

repport dans $[\frac{1}{2}\theta'^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2]$:

$\frac{1}{2}A^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}A^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi) = \frac{1}{2}A^2\omega_0^2$

par suite : $d/dt[\frac{1}{2}\theta'^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2\theta^2] = \frac{1}{2}\omega_0^2 dA^2/dt = \varepsilon[2\Omega\sin(\Omega t)\,\theta'^2 + \omega_0^2\theta\,\theta'\cos(\Omega t)]$

avec $\theta = A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi)$ et $\theta' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$, d'où :

$\frac{1}{2}\omega_0^2 dA^2/dt = \varepsilon[2A^2\omega_0^2\Omega\sin(\Omega t)\sin^2(\omega_0 t+\varphi) - \omega_0^3A^2\cos(\omega_0 t+\varphi)\sin(\omega_0 t+\varphi)\cos(\Omega t)]$

or $\cos(\omega_0 t+\varphi)\sin(\omega_0 t+\varphi) = \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t+2\varphi)$ et $2\sin^2(\omega_0 t+\varphi) = 1-\cos(2\omega_0 t+2\varphi)$

par suite : $\frac{1}{2}\omega_0^2 dA^2/dt = \frac{1}{2}\varepsilon A^2\omega_0^2[2\Omega\sin(\Omega t)(1-\cos(2\omega_0 t+2\varphi)) - \omega_0\sin(2\omega_0 t+2\varphi)\cos(\Omega t)]$

de plus : $\sin(\Omega t)\cos(2\omega_0 t+2\varphi) = \frac{1}{2}[\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) + \sin(\Omega t-2\omega_0 t-2\varphi)]$

et $\sin(2\omega_0 t+2\varphi)\cos(\Omega t) = \frac{1}{2}[\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) + \sin(2\omega_0 t+2\varphi-\Omega t)]$

en conséquence : $\frac{1}{2}\omega_0^2 dA^2/dt = \frac{1}{2}\,\varepsilon A^2\omega_0^2\,[2\Omega\sin(\Omega t) - \Omega(\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) - \Omega(\sin(\Omega t-2\omega_0 t-2\varphi)) - \frac{1}{2}\,\omega_0(\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) + \sin(2\omega_0 t+2\varphi-\Omega t))]$

or $\sin(2\omega_0 t+2\varphi-\Omega t) = -\sin(\Omega t-2\omega_0 t-2\varphi)$

$\frac{1}{2}\omega_0^2 dA^2/dt = \frac{1}{2}\,\varepsilon A^2\omega_0^2\,[2\Omega(\sin(\Omega t) - (\frac{1}{2}\,\omega_0+\Omega)\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) - (\frac{1}{2}\,\omega_0-\Omega)\sin(\Omega t-2\omega_0 t-2\varphi)]$

$dA^2/dt = \varepsilon A^2\,[2\Omega(\sin(\Omega t) - (\frac{1}{2}\,\omega_0+\Omega)\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) - (\frac{1}{2}\,\omega_0-\Omega)\sin(\Omega t-2\omega_0 t-2\varphi)]$

On suppose de plus que l'énergie mécanique E est proportionnelle au carré A^2 de l'amplitude A.

$E = kA^2$ avec k une constante ; $dE^2/dt = 2E\,dE/dt = k\,dA^2/dt$

$2E\,dE/dt = \varepsilon E^2\,[2\Omega(\sin(\Omega t) - (\frac{1}{2}\,\omega_0+\Omega)\sin(\Omega t+2\omega_0 t+2\varphi) - (\frac{1}{2}\,\omega_0-\Omega)\sin(\Omega t-2\omega_0 t-2\varphi)]$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = \varepsilon\left[2\Omega\sin(\Omega\,t) - \left(\tfrac{1}{2}\omega_0+\Omega\right)\sin((2\,\omega_0+\Omega)t+2\varphi) - \left(\tfrac{1}{2}\omega_0-\Omega\right)\sin((2\,\omega_0-\Omega)t\right.}$$

Calcul de la moyenne de 1/E dE/dt :

Ω différent de $2\omega_0$:

la moyenne d'une fonction sinus est nulle : dE/E est nulle ; l'énergie mécanique de l'oscillateur est constante.

Ω égal à $2\omega_0$:

$1/E\,dE/dt = \varepsilon\,[2\Omega(\sin(\Omega t) - 2{,}5\,\omega_0\sin(4\omega_0 t+2\varphi)]$

$\langle\sin(\Omega t)\rangle = 0$; $\langle\sin(4\omega_0 t+2\varphi)\rangle = \sin(2\varphi)$

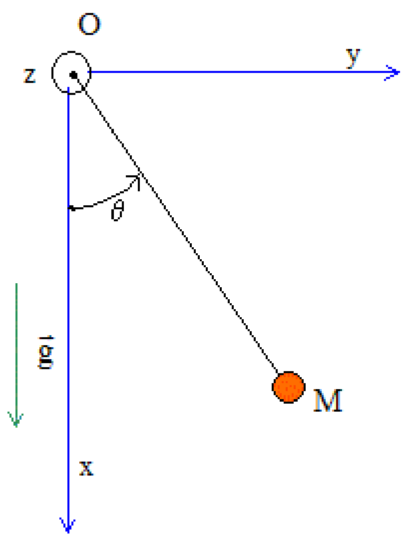
$\langle 1/E\,dE/dt\rangle = \varepsilon\,2{,}5\,\omega_0\sin(2\varphi) = \beta =$ constante

$\langle dE/dt\rangle = \beta\,\langle E\rangle$; solution du type : $\langle E\rangle = e^{\beta t}$.

L'énergie croît exponentiellement. ***C'est le phénomène de résonance paramétrique.***

CAPES physique chimie (d'après concours 2000) Etude d'un pendule simple

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes.



Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m, accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide au point O fixe. On suppose le fil rigide sans masse. L'ensemble est plongé dans le champ de pesanteur terrestre uniforme. On écarte le fil de sa position d'équilibre d'un angle $\theta(t=0) = \theta_0$ et on le lâche sans vitesse initiale.

OM=ℓ=1,0 m

Oscillations de faible amplitude :

1. Enoncer le théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel.
2. Montrer que la trajectoire du point M est plane.
3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ(t) en fonction du temps. Donner l'expression de la pulsation ω_0 du mouvement.
4. On mesure pour 20 périodes une durée de 40,12 s. En déduire la valeur de g.

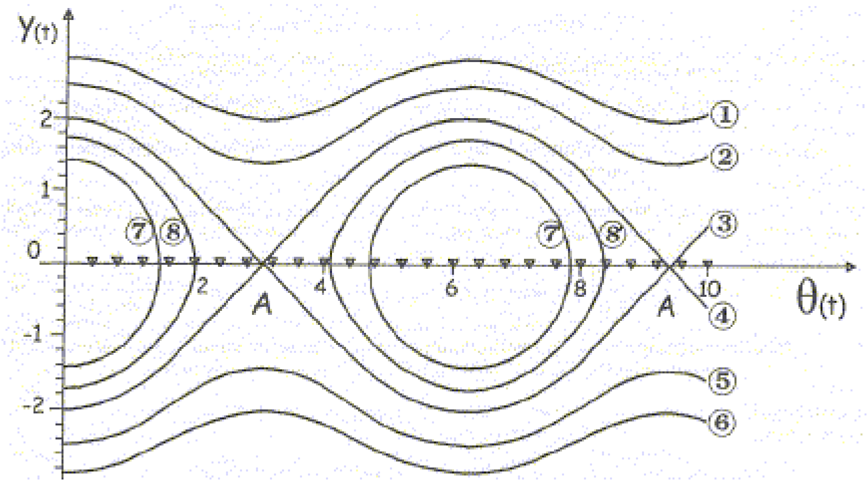
Cas général :

On se place dans le cas d'oscillations d'amplitude plus importante. On désigne par E_m l'énergie mécanique, E_p l'énergie potentielle et E_c l'énergie cinétique du pendule.

1. Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle en fonction de m, g, ℓ , θ et dθ/dt. On prend l'origine de l'énergie potentielle pour θ = 0.
2. En déduire que l'équation de la trajectoire dans le plan de phase du point P de coordonées θ (t) et $y = 1/\omega_0 d\theta/dt$ peut se mettre sous la forme :

$$y^2 + 2(1-\cos\theta) = 2E_m/ (mg\ell).$$

L'allure générale du portrait de phase de cette équation est donnée ci-dessous :



- Quelles sont les trajectoires de phase correspondant à $E_m < 2mg\ell$?
- A quelle situation correspondent les points A ?
- Quelles sont les courbes correspondant : - à un mouvement oscillatoire périodique autour d'une position d'équilibre stable ? - A un mouvement de révolution.

corrigé

Oscillations de faible amplitude :

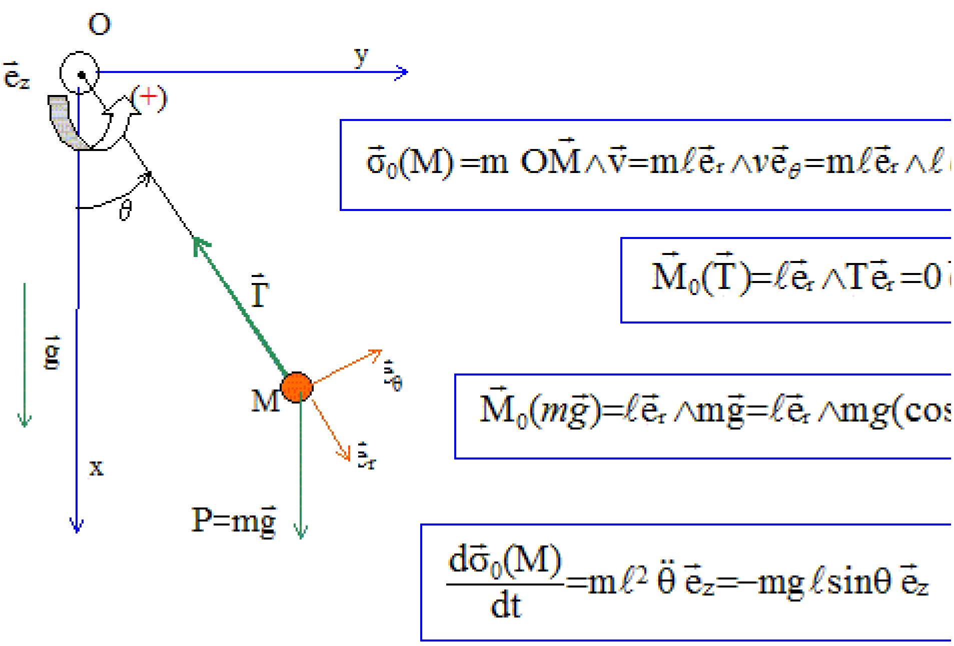
Enoncé du théorème du moment cinétique appliqué à un point matériel :

Le référentiel d'étude étant galiléen :

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique du point matériel M par rapport au point fixe O est égal au moment, par rapport à ce point, de la somme vectorielle des forces agissant sur le point matériel M .

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \Sigma\vec{F}}$$

La masse m est soumise à deux forces : la tension du fil et son poids.



(1) : j'exprime le moment cinétique

(2) Le moment, par rapport à O, de la tension est nul : cette force rencontre le point O.

(3) : j'exprime le moment en O du poids.

(4) : j'applique le théorème du moment cinétique

(4) montre que la trajectoire du point M est plane, celui de la figure.

(4) donne l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ(t) en fonction du temps : $\theta'' + g/\ell \sin\theta = 0$

Dans le cas des faibles amplitudes angulaires, on peut confondre sin θ et l'angle θ exprimé en radian.

D'où : $\theta'' + g/\ell\, \theta = 0$

Expression de la pulsation ω_0 du mouvement : $\omega_0 = (g/\ell)^{½}$.

valeur de g :

On mesure pour 20 périodes une durée de 40,12 s. $T_0 = 40{,}12 / 20 = 2{,}006$ s

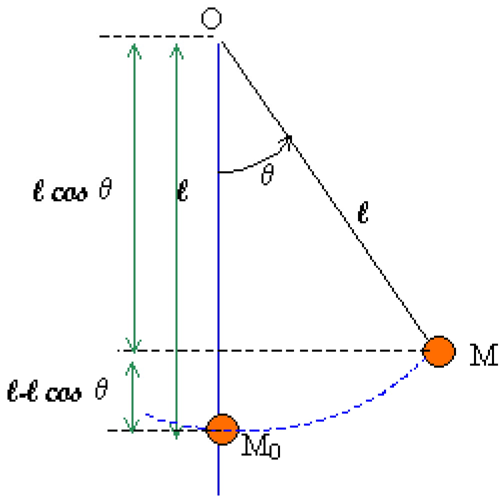
Or $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 6{,}28 / 2{,}006 = 3{,}13$ rad/s. $g=\omega_0^2\ell = 9{,}80$ m s^{-2}.

Cas général :

On se place dans le cas d'oscillations d'amplitude plus importante. On désigne par E_m l'énergie mécanique, E_p l'énergie potentielle et E_c l'énergie cinétique du pendule.

<u>Expressions des énergies cinétique et potentielle en fonction</u> de m, g, ℓ , θ et dθ/dt = θ '. On prend l'origine de l'énergie potentielle pour θ = 0.

$$E_c = ½mv^2 = ½m(\ell\theta ')^2.$$



$$E_p = mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$E_m= ½m(\ell\theta ')^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

<u>Equation de la trajectoire dans le plan de phase du point P de coordonées</u> θ (t) et $y = 1/\omega_0 d\theta/dt$:

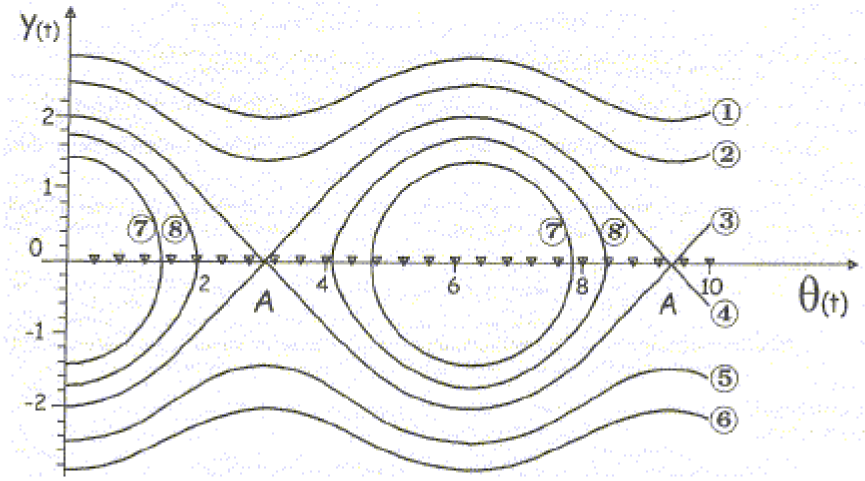
$$E_m= m\ell\,[½\,\ell\,\theta '^2 +g\,(1-\cos\theta)]\ ;\ 2E_m/(\,m\ell\,)= \ell\,\theta '^2 +2g\,(1-\cos\theta)$$

$$2E_m/(\,mg\,\ell\,) =\ell\,/g\,\theta '^2 +2\,(1-\cos\theta)$$

$$\text{or } \omega_0 = (g/\ell)^{½}\ ;\ 2E_m/(\,mg\,\ell\,) = (\theta '/\omega_0\,)^2 +2\,(1-\cos\theta)$$

$$y^2 + 2(1-\cos\theta) = 2E_m/\,(mg\ell).$$

L'allure générale du portrait de phase de cette équation est donnée ci-dessous :



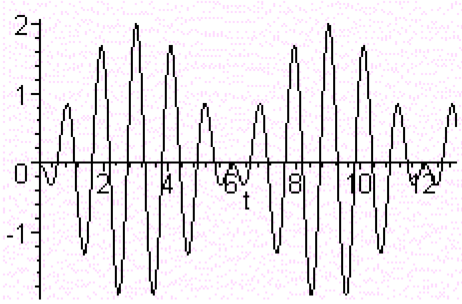
Les trajectoires de phase 7 et 8 correspondant à $E_m<2mg\ell$.
Les points A correspondent à un équilibre instable.
Les courbes 7 et 8 correspondent à un mouvement oscillatoire périodique autour d'une position d'équilibre stable.

Les courbes 1 à 4 correspondent à un mouvement de révolution.

Pendule excité : force d'inertie (concours Enac)

Un pendule de longueur L est attaché à un point O' fixe. Soit g =9,8 m/s² l'accélération de la pesanteur ; on pose $\omega_0=(g/L)^{½}$.

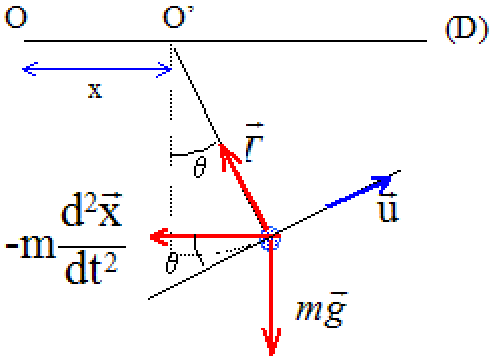
1. Calculer L sachant que la période des oscillations vaut T= 1s
2. O' se déplace maintenant sur une droite horizontale. L'abscisse de O' sur la droite est nulle si le pendule est vertical ; si , t>0, l'abscisse de O' sur la droite vaut : $x= x_m(1-\cos(\omega t))$. Montrer que si t>0, l'angle θ formé par le pendule avec la verticale obéit à : $\theta'' + \omega_0^2 \sin\theta = -x_m\, \omega^2/L \cos\theta \cos(\omega t)$.
3. Déterminer θ en supposant que cet angle reste petit.
4. On donne ci-dessous le graphe de $\cos(2\pi t)-\cos(5/6\ 2\pi t)$. Comment est le graphe de θ(t) si $\omega/\omega_0=5/6$ en supposant que θ reste petit ? Quelle condition qualitative doit vérifier x_m pour qu'il soit correct ? Expliquer pourquoi le pendule semble s'arrêter périodiquement et justifier la période de ces arrêts.



corrigé

période $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(L/g)^{½}$ d'où $L = T^2 g/(4\pi^2)$ = 1*9,8 / (4*3,14²)= 0,248 m.

O est fixe. On choisit un référentiel en translation par rapport au référentiel terrestre. Dans ce référentiel, le pendule est soumis à son poids, à la tension du fil et à la force d'inertie d'entraînement. Ecrire la relation fondamentale de la dynamique :



$$-m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

en projection sur $\vec{u}$:

$$\boxed{-mx''\cos\theta - mg \sin\theta = n}$$

avec $x = x_m(1-\cos(\omega t))$ et $x'' = \omega^2 x_m \cos(\omega t)$

d'où : $-\omega^2 x_m \cos(\omega t) \cos\theta - g \sin\theta = L\theta''$

diviser par L et remplacer g/L par ω^2_0 : $-\omega^2 x_m / L \cos(\omega t) \cos\theta - \omega^2_0 \sin\theta = \theta''$

$\theta'' + \omega_0^2 \sin\theta = -x_m\, \omega^2/L \cos\theta \cos(\omega t)$.

si l'angle est petit : $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1$.

$\theta'' + \omega_0^2\, \theta = -x_m\, \omega^2/L \cos(\omega t)$ (1)

la solution de cette équation différentielle est la somme de :

la solution générale de l'équation sans second membre $\theta'' + \omega_0^2\, \theta = 0$, c'est à dire : $\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

d'une solution particulière de l'équation complète : $\theta = C\cos(\omega t)$

Pour déterminer C, on repporte θ et $\theta'' = -\omega^2 C\cos(\omega t)$ dans (1) :

$-\omega^2 C\cos(\omega t) + \omega_0^2 C\cos(\omega t) = -x_m\,\omega^2/L\cos(\omega t)$

d'où $C = x_m\,\omega^2/(L(\omega^2-\omega_0^2))$

La solution générale est : $\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_m\,\omega^2/(L(\omega^2-\omega_0^2))\cos(\omega t)$

Déterminer A et B par les conditions initiales : $\theta(0)=0$ et $\theta'(0)=0$ (la vitesse initiale de O' étant nulle, la vitesse initiale du solide m est nulle)

$\theta(0)=0$ donne : $A + x_m\,\omega^2/(L(\omega^2-\omega_0^2)) = 0$ soit $A = -x_m\,\omega^2/(L(\omega^2-\omega_0^2))$

$\theta' = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\,\omega_0\cos(\omega_0 t) - x_m\,\omega^3/(L(\omega^2-\omega_0^2))\sin(\omega t)$

$\theta'(0) = -B\omega_0 = 0$ soit $B=0$

$\theta = x_m\,\omega^2/(L(\omega^2-\omega_0^2))[\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$

$\omega/\omega_0 = 5/6$ d'où $\theta = x_m/(L(1-(6/5)^2))[\cos(5/6\,\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)]$

de plus $\omega_0 = (g/L)^{½} = (9{,}8/0{,}248)^{½} = 6{,}28 = 2\pi$ rad/s

$\theta = x_m/(L(1-(6/5)^2))[\cos(5/6\,2\pi\,t) - \cos(2\pi t)]$

le graphe de θ est donc semblable à celui de $\cos(2\pi t)-\cos(5/6\,2\pi t)$ à un changement d'échelle verticale près.

θ doit rester petit soit $x_m\,\omega^2/(L(\omega^2-\omega_0^2)) \ll 1$ ou bien $x_m \ll L|(\omega^2-\omega_0^2)|/\omega^2$

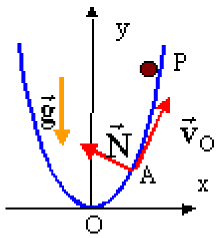
Le pendule s'arrête lorsque $\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) = 0$ soit $\omega t - \omega_0 t = 2k\pi$.(k entier)

$t = 2k\pi/|\omega - \omega_0|$ avec $\omega = 5/6\omega_0 = 5/6 * 6{,}28 = 5{,}23$ rad/s ; $|\omega - \omega_0| = 6{,}28-5{,}23 = 1{,}05$ rad/s

d'où la période des arrêts : T= 2*3,14/1,05 = 6 s.

Oscillations d'un point matériel sur un guide parabolique

Un mobile P de petites dimensions, de masse m, est astreint à se déplacer sans frotement, dans le plan xOy à l'intérieur d' un guide parabolique d'équation $y = x^2/(2p)$. p constante positive.



A la date t=0, le point P se trouve en A d'abscisse p, possédant la vitesse v_0, tangente à l'arc de parabole. Le mobile est soumis à son poids et à l'action du support N, perpendiculaire à la vitesse en l'absence de frottement.

1. Déterminer x'^2 (x' = dx/dt, composante horizontale de la vitesse) en fonction de la seule variable x.
2. Déterminer l'altitude maximale y_1 atteinte par le mobile (O symbolise le sol).
   - En déduire la composante horizontale x" de l'accélération en fonction de la seule variable x.
   - Même question pour la composante verticale y".
3. Déterminer en fonction de la seule variable x, les composantes horizontale N_x et verticale N_y de l'action du support.
   - Le mobile peut-il rester sur son support ?

corrigé

Seul le poids travaille (N est perpendiculaire à la vitesse) et en conséquence l'énergie mécanique du mobile P est constante.

en A : $E_{méca} = ½mv_0^2 + mgy_0$ avec $y0 = p^2 / (2p) = ½p$.

$E_{méca} = ½mv_0^2 + ½mgp$

en un point M (x,y) : $E_{méca} = ½mv^2 + mgy$ avec $y = x^2 / (2p)$

$$E_{méca} = ½mv^2 + mgx^2/(2p)$$

$$½mv_0^2 +½mgp = ½mv^2 + mgx^2/(2p)$$

$$v_0^2+gp = v^2 + gx^2/p \text{ soit } v^2 = v_0^2+gp -gx^2/p \ (1).$$

D'autre part en dérivant y par rapport au temps (x est une fonction du temps) :

$$y = x^2 / (2p) \text{ donne } y' = 2x\, x' / (2p) = x\, x'/p \text{ soit } y'^2 = x^2\, x'^2 / p^2 \ (2)$$

vitesse v : $v^2 = x'^2 + y'^2$.

$$v_0^2+gp -gx^2/p = x'^2 + x^2\, x'^2 / p^2 = x'^2 [\ 1+x^2 / p^2\ ]$$

en muliplant par p^2 : $x'^2 = [p^2v_0^2+gp^3 -gpx^2] / [\ p^2 +x^2\ ]$.(3)

Quand le mobile atteint l'altitude maximale y_1, la vitesse devient nulle :

$$x'^2 = 0= [p^2v_0^2+gp^3 -gpx_1^2] / [\ p^2 +x_1^2\ ].$$

$$p^2v_0^2+gp^3 -gpx_1^2=0 \text{ soit } x_1^2=(pv_0^2+gp^2) /g.$$

or $y_1 = x_1^2/ (2p)$ d'où $y_1= (v_0^2+gp) /(2g)$.

<u>accélération</u> : dériver x' et puis y' par rapport au temps

(3) donne : $2x'x'' = [(-2gpxx')(p^2+x^2)-(p^2v_0^2+gp^3 -gpx^2)(2xx')]\ (p^2+x^2)^{-2}$.

$$x'' =[(-gpx)(p^2+x^2)-(p^2v_0^2+gp^3 -gpx^2)(x)]\ (p^2+x^2)^{-2}.$$

$[(-gpx)(p^2+x^2)-(p^2v_0^2+gp^3 -gpx^2)(x)]$ s'écrit : $-gp^3x-gpx^3-p^2v_0^2x-gp^3x +gpx^3= -2gp^3x-p^2v_0^2x$

$$x'' = -p^2x(2gp+v_0^2)(p^2+x^2)^{-2}.$$

$$y' = x\, x' / (p) \text{ soit } y'' = x'^2/p +xx''/p$$

or $x'^2 = [p^2v_0^2+gp^3 -gpx^2]\ [\ p^2 +x^2\ ]^{-1}$.

$$y'' = [pv_0^2+gp^2 -gpx^2]\ [\ p^2 +x^2\ ]^{-1} -px^2(2gp+v_0^2)(p^2+x^2)^{-2}$$

réduire au même dénominateur $(p^2+x^2)^2$

$$y'' =[(pv_0^2+gp^2 -gx^2)(p^2+x^2)-px^2(2gp+v_0^2)](p^2+x^2)^{-2}$$

$(pv_0^2+gp^2 -gpx^2)(p^2+x^2)-px^2(2gp+v_0^2) = p^3v_0^2+gp^4 -gp^2x^2 + pv_0^2x^2+gp^2x^2 -$

$gx^4-2gp^2x^2-px^2v_0^2$

$= p^3v_0^2+gp^4 -gx^4-2gp^2x^2$

d'où $y'' = (p^3v_0^2+gp^4 -gx^4-2gp^2x^2)(p^2+x^2)^{-2}$.

action du support :

ce qui est écrit en **bleu** et en **gras** est un vecteur.

La relation fondamentale de la dynamique s'acrit : m**g** + **N** = m**a**.

soit $N_x = mx''$ et $N_y = m(y''+g)$

$N_x = -mp^2x(2gp+v_0^2)(p^2+x^2)^{-2}$.

$N_y = m[(p^3v_0^2+gp^4 -gx^4-2gp^2x^2)(p^2+x^2)^{-2} +g]$

réduire au même dénominateur $(p^2+x^2)^2$:

$N_y = m[p^3v_0^2+gp^4 -gx^4-2gp^2x^2+gp^4+gx^4+2gp^2x^2](p^2+x^2)^{-2}$

$N_y = m[p^3v_0^2+2gp^4](p^2+x^2)^{-2}$

La composante N_y est toujours positive ; N_x est négative si $x>0$ et positive si $x<0$:

L'action du support **N** est donc orientée vers la concavité de la parabole et le contact est toujours réalisé.

moteur asynchrone

étude générale :

La plaque signalétique d'un moteur asynchrone triphasé à rotor bobiné porte les indications suivantes:

230 /400 V; 50 Hz; n = 1440 tr/min; I = 11,5 A - 6,5 A.

1. Quelle est la vitesse de synchronisme n_s (tr/min).
2. Quel est le nombre de pôles du moteur.
3. Le champ magnétique inducteur est produit par quels les

enroulements, stator ou rotor ?

4. Quelle est la tension maximale que doit supporter un enroulement du stator ?
   - pour un couplage étoile, quel réseau utiliser : 133 / 230 V ; 230 / 400 V ; 400 / 690 V ;
   - pour un couplage triangle, quel réseau utiliser : 133 / 230 V ; 230 / 400 V ; 400 / 690 V
5. En couplage étoile, quel est le courant nominal en ligne ?
6. Quelle est la puissance apparente du moteur ?
7. Quel est le facteur de puissance du moteur :
   - A vide ;
   - Quand la charge augmente;
8. En fonctionnement à vide, la tension U est ramenée à $U_{N/2}$; que devient la vitesse de rotation.
9. Quel est la valeur du glissement g :
   - au tout début du démarrage;
   - à la vitesse de synchronisme ;
   - au fonctionnement nominal ;
10. En charge nominale, quelle est la fréquence des courants rotoriques ?
11. La résistance d'un enroulement du stator est R= 5,4 Ω; le stator est couplé en triangle. Quelle est la résistance entre deux bornes du stator est (en Ω) ?

corrigé

Le glissement étant faible, la vitesse de synchronisme est légèrement supérieure à la vitesse nominale.

$$\boxed{n_S = \frac{f}{p}}$$

n_S : vitesse au synchronisme (tr/s)
f : fréquence du courant (Hz)
p : nombre de paires de pôles

f = 50 Hz ; n_S= 50*60 = 3000 tr/min si p = 1 ; n_S= 1500 tr/min si p = 2 ; n_S= 1000 tr/min si p = 3.

On choisira n_s = 1500 tr/min (1500/60 = 25 tr/s), légèrement supérieure à 1440 tr/min

Le nombre de paires de pôles est p = 50/25 = 2.(2p = 4 pôles)

Le champ magnétique est produit par le stator, alimenté par un système triphasé de tensions.

La tension maximale que peut supporter un enroulement correspond à la plus petite des tensions indiquées sur la plaque signalétique; soit 230 V.

La tension nominale aux bornes d'un enroulement est 230 V.

Pour un couplage étoile, la tension aux bornes d'un enroulement correspond à une tension simple; il faut donc utiliser un réseau 230 / 400 V. Pour un couplage triangle, la tension aux bornes d'un enroulement correspond à une tension composée; il faut donc utiliser un réseau 130 / 230 V.

En couplage étoile, le courant nominal en ligne est I = 6,5 A.

La puissance apparente nominale du moteur ne dépend pas du couplage.

S = rac carrée (3) U_{eff} I_{eff} = 1,732*400*6,5 = 4500 VA.

Le facteur de puissance est faible pour un fonctionnement à vide.

La composante réactive importante du courant à vide correspond à la magnétisation du circuit.

Quand la puissance active augmente beaucoup, le courant en ligne augmente peu. Or P = racine(3)UI.cosφ

Quand la charge augmente, le facteur de puissance augmente .

A vide, la vitesse de rotation est proche de la vitesse de synchronisme; elle ne dépend donc que de la fréquence f. Or la fréquence f n'est pas modifiée.

La vitesse de rotation ne varie pratiquement pas pour un fonctionnement sous tension réduite.

$$\boxed{g = \frac{n_S - n}{n_S}}$$

n_S : vitesse au synchronisme (tr/s)
$g \approx 0$ à vide ; $g = 1$ au démarrage
$g \approx 2$ à 5% au point nominal

$g = f_r / f$ la valeur de f_r , fréquence des courants rotoriques, est faible

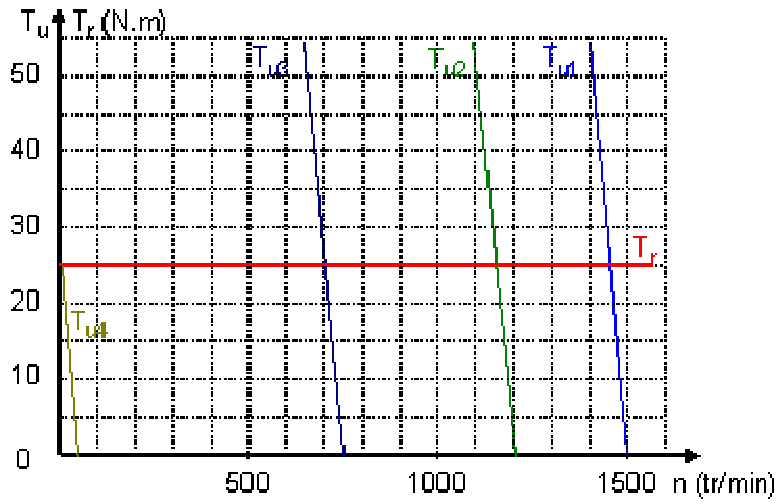
f_r = gf soit 50*0,04 = 2 Hz.

Pour un couplage étoile, R_B = 2.R;

pour un couplage triangle, R_B = 2.R/3

Puisque le stator est couplé en triangle et R = 5,4 Ω, R_B = 3,6 Ω.

fonctionnement à U/ f constant :



Pour le moteur asynchrone utilisé, le nombre de pôles est 4. On fait varier à la fois la fréquence f et la valeur efficace U des tensions statoriques, en conservant le rapport U/f constant. Le moteur entraîne une charge de couple résistant T_r constant. L'expression du couple électromagnétique peut se mettre sous la forme: $T_{em} = kT_{em.max}.(n_s\text{-}n)$ où $T_{em.max}$ est la valeur maximale de T_{em}, et k, une constante dépendant du moteur.

1. Quel est le dispositif alimentant le stator (un hacheur triphasé ; un redresseur commandé triphasé ; un onduleur triphasé)
2. Pour la courbe d'indice 3, quelle est la vitesse de synchronisme n_s ? - Quelle est la fréquence f (Hz).
3. Les caractéristiques T_u = f(n) sont parallèles entre elles. Quand la fréquence varie, le glissement conserve-t-il la même valeur ?
4. Quelle est la fréquence minimale pour que le moteur démarre avec sa charge ?
5. Pour une vitesse de rotation proche de 1000 tr/min, quelle est la fréquence f ?

corrigé

Dispositif alimentant le stator: onduleur triphasé à U/f constant.

Le redresseur commandé ne permet pas de faire varier f.

Pour la courbe 3, la vitesse de synchronisme est 750 tr/min.

fréquence f = p.n_s, avec n_s = 750 tr/min

soit 12,5 tr/s et p = 2d'où f = 25 Hz.

Quand la fréquence varie, le glissement varie.

T_r = constant. Entre T_u = 0 et T_u = T_r, la variation de vitesse (n_s - n) reste la même quand f (donc n_s) varie,

mais $g = (n_s - n)/n_s$ varie.

La vitesse de synchronisme minimale est 50 tr/min;

elle correspond à $f_{min} = p.n_s$ soit f = 2*50/60 = 1,7 Hz.

Pour n = 1000 tr/min, n_s = 1050 tr/min;

elle correspond à $f = p\ n_s$ soit f = 2*1050/60 = 35 Hz.

Les caractéristiques d'un moteur asynchrone sont les suivantes :
- 230 / 400 V; 50 hz ; couplage étoile

- puissance utile 15 kW ; intensité en ligne I= 33 A ; facteur de puissance : 0,85

- fréquence de rotation dans ces conditions : 720 tr/min

1. Quel est le nombre de paires de pôles ?
2. Quel est le glissement ?
3. Quel est le moment du couple utile ?
4. Quel est le rendement ,

corrigé

$$\boxed{n_s = \frac{f}{p}}$$

n_s : vitesse au synchronisme (tr/s)
f : fréquence du courant (Hz)
p : nombre de paires de pôles

vitesse au synchronisme : n_s = 50*60 / p = 3000 / p tr /min

la fréquence de rotation est inférieure à la vitesse nominale, tout en restant proche de n_s : d'où p = 4 et n_s = 750 tr/min

glissement :

$$\boxed{g = \frac{n_s - n}{n_s}}$$

n_s : vitesse au synchronisme (tr/s)
$g \approx 0$ à vide ; $g = 1$ au démarrage
$g \approx 2$ à 5% au point nominal

g = (750-720) / 750 = 0,04 (4%)

moment du couple utile : P_{utile} / (2πn) avec n = 720 /60 = 12 tr/s

P_{utile} / (2πn)= 15000 / (6,28*12)= 199 Nm.

rendement : P_{utile} / $P_{absorbée}$

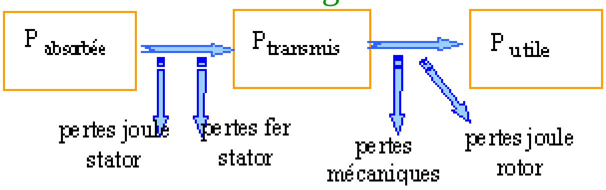
Puissance absorbée = rac carrée(3) U I cosφ = 1,732*380*33*0,85= 18461 W

η= 15000 / 18461 = 0,812 (81,2 %)

moteur asynchrone :

Un moteur asynchrone triphasé absorbe une puissance P= 8 kW. Les pertes statoriques sont égales à 0,6 kW. Si le glissement est g est égal à 3,5 %, quelle est la valeur des pertes par effet joule dans le rotor ?

corrigé



les pertes par effet joule dans le rotor sont égales au glissement fois la puissance transmise .

puissance transmise : puissance absorbée moins ensemble des pertes statoriques

$P_{transmise}$ = 8000-600 = 7400 W.

glissement g = 0,035

pertes joules dans le rotor : 0,035*7400 = 259W.

machines synchrones

alternateur triphasé :

Dans sa zone utile, à la fréquence de rotation de 1200 tr/min, la valeur efficace E de la fem délivrée par un alternateur triphasé est proportionnelle à l'intensité du courant d'excitation par : E= 180 i_e.(E en volt et i_e en ampère)

1. Quelle est la fem E_1 à 1500 tours/min et pour une excitation d'intensité i_e = 0,8 A ?

corrigé

le flux est proportionnel à l'intensité i_e : $\Phi = k\, i_e$.

$$\boxed{\begin{array}{l} E = KNpn\Phi \\ E = KNf\Phi \end{array}}$$

N conducteurs par phase

E : fem induite (V)
K : coef de Kapp de la machine
p : nombre de paires de pôles
n : fréquence de rotation (tr/s)
Φ flux (webers)
f fréquence de la fem (Hz)

d'une part E= [K Np k] n i_e.

d'autre part E= 180 i_e.

donc le terme constant [K Np k] vaut 180 / n avec n = 1200/60 = 20 tr/s ; [K Np k]= 9

à 1500 trs/min soit n_1=1500 / 60 = 25 trs/s : $E_1 = 9\, n_1\, i_{e1}$ = 9*25*0,8 = 180 V.

alternateur triphasé :

Un alternateur triphasé dont les enroulements de l'induit sont couplés en étoile produit, à vide, une tension entre deux bornes U de valeur efficace 2,6 kV et de fréquence f=50 Hz. L'enroulement statorique comporte 2 encoche par pôle et par phase et 12 conducteurs par encoches. Le flux utile sous un pôle est Φ = 45 mWb. La fréquence de rotation de la roue polaire est n = 500 tr/min

1. Quel est le nombre de pôles 2 p de l'alternateur ?
2. Calculer le nombre N de conducteurs actifs par phase.
3. Déterminer le coefficient de Kapp K de la machine.
4. A la puissance nominale,l'alternateur fournit l'intensité I= 600 A à une charge qui absorbe la puissance P= 2,1 MW avec un facteur de puissance cos φ = 0,9. Le rendement de l'alternateur est alors η = 0,85.
   - Calculer la tension U entre deux bornes de l'induit en charge.
   - Calculer l'ensemble des pertes de l'alternateur.

corrigé

n = 500 / 60 trs/s

np = f d'où p = f/n = 50 *60/500 = 6 paires de pôles soit 2p =12 pôles.

nombre de conducteurs par phases : N = 2 *12*2p = 288 conducteurs.

couplage étoile : donc la fem E correspond à une tension simple.

la valeur relevée entre deux bornes de l'induit correspond à une tension composée

en conséquence E = U / (racine carrée (3) = 2600 / 1,732 = 1500 V.

$$E = KNpn\Phi$$
$$E = KNf\Phi$$

N conducteurs par phase

- E : fem induite (V)
- K : coef de Kapp de la machine
- p : nombre de paires de pôles
- n : fréquence de rotation (tr/s)
- Φ flux (webers)
- f fréquence de la fem (Hz)

K = E / (N$f\Phi$) = 1500 / (288*50*0,045) = 2,31.

$$P_M = T_M\Omega$$
$$P = UI\sqrt{3}\cos\varphi$$

- P_M : puissance mécanique reçue
- T_M : moment couple moteur
- Ω : vitesse angulaire (rad/s)
- P : puissance utile fournie à la charge par un alternateur
- U tension composée (val efficace)
- I intensité en ligne
- cos φ : facteur de puissance de la charge

U = P / (1,732 I cos φ) = 2,1 10^6 / (1,732*600*0,9) = 2245 V.

rendement η = P / (P+pertes)

pertes = P(1-η) / η = 2,1 10^6 (1-0,85) / 0,85 = 3,7 10^5 W.

Les caractéristiques d'un alternateur sont les suivantes :
- couplage des enroulements du stator en étoile; fréquence f=50 Hz ;

- expression de la caractéristique à vide E_v = 180 i_e(E_v en volt et intensité en ampère)

- résistance d'une phase de l'induit r = 0,12 Ω ; réactance synchrone X= 1,2 Ω;

1. Déterminer l'impédance synchrone de la machine.
2. L'alternateur alimente une charge triphasée, inductive, équilibrée, de facteur de puissance cos φ=0,8. La tension efficace entre deux bornes de l'induit est U= 2,5 kV ; l'intensité efficace du courant en ligne est I= 400 A.
   - Quelle est l'intensité ie du courant d'excitation sachant que la roue polaire tourne à 1500 tr/min ?
   - Calculer les pertes par effet joule dans l'induit.
   - Un essai à vide a donné Pv = 90 kW (y compris l'excitation);

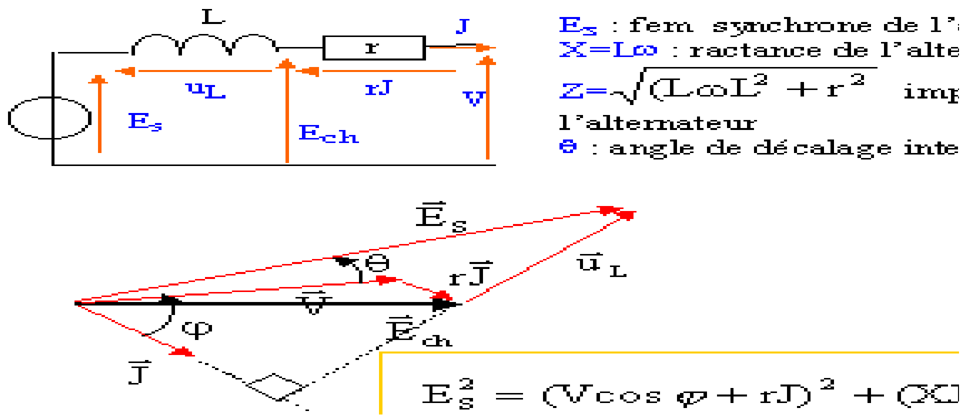
quel est le rendement de l'alternateur ?

corrigé

impédance synchrone Z_s:

$Z_s^2 = X^2 + r^2 = 1,2^2 + 0,12^2 = 1,454$ d'où $Z_s = 1,206\ \Omega$.

fem induite en charge :



montage étoile : la tension aux bornes d'une enroulement est 2500 / rac. carrée (3) = 1443,4 V

si cos φ = 0,8 alors sin φ = 0,6

$E^2_s = (1443,4 * 0,8 + 0,12*400)^2 + (1,2*400+1443,4 *0,6)^2 = 3,258\ 10^6$
d'où E_s = 1805 V.

puis 1805 = 180 i_e d'où i_e = 10 A.

pertes par effet joule : 3 r i²

$P_j = 3*0,12*400^2$ = 58 kW.

rendement :

total des pertes : p = 58+90 = 148 kW

puissance mécanique reçue par le moteur : P= UI rac.carrée (3) cos φ

P = 2500*400*1,732*0,8 = 1385,6 kW

η= P / (P+pertes) = 1385,6 / (1385,6+148) = 0,903 (90,3 %)

moteur synchrone :

Un moteur synchrone triphasé, tétrapolaire est alimenté par un réseau triphasé 240V/ 416 V; 50 Hz. Les enroulements du sttor sont couplés en étoile ; la réactance synchrone du moteur est X=8 Ω ; La fem synchrone du moteur se confond avec sa fem à vide E_S= 400 i_e. On néglige la résistance de l'induit ainsi que toutes les autres pertes. Le mteur fonctionne à couple constant de moment T= 44 Nm. On se propose de faire varier la puissance réactive absorbée par le moteur en réglant l'intensité d'excitation i_e.

1. Calculer la fréquence de rotation n du moteur (tr/ min)
2. Calculer la puissance active absorbée par le moteur.
3. L'excitation est fixée à $i_e = i_{e1}$ et on observe que le courant est en retard sur la tension de 37°. Calculer :
   - l'intensité efficace du courant en ligne.
   - la puissance réactive Q_1 absorbée par le moteur.
   - la fem synchrone du moteur
   - l'intensité i_{e1}.
4. Mêmes questions si le courant est en phase avec la tension (excitation optimale)
5. Mêmes questions si le courant est en avance de 37°sur la tension.

corrigé

2p = 4 soit p = 2 paires de pôles

np = f soit n = f/p = 50 / 2 = 25 tr/s ou bien 25*60 = 1500 tr/min.

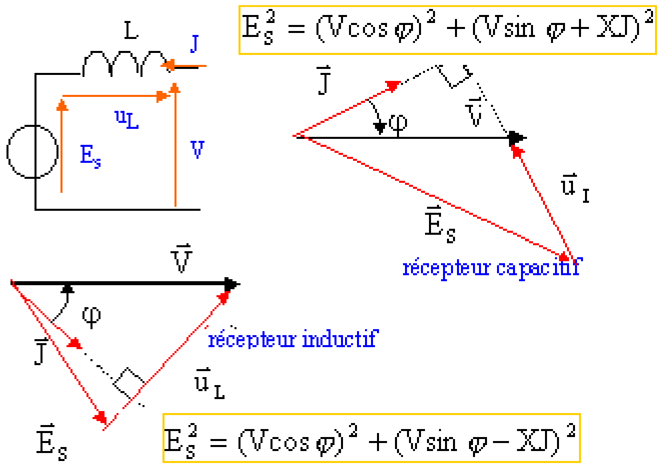
puissance active :

$$P_M = T_M \Omega$$
$$P = UI\sqrt{3}\cos\varphi$$

P_M : puissance mécanique reçue
T_M : moment couple moteur
Ω : vitesse angulaire (rad/s)
P : puissance utile fournie à la charge par un alternateur
U tension composée (val efficace)
I intensité en ligne
cos φ : facteur de puissance de la charge

P = T Ω avec W= 2π n/60 = 6,28*1500/60 = 157 rad/s

P = 44*157 = 6,9 kW.



le courant étant en retard sur la tension, le circuit est inductif.

cos 37 =0,8 d'où sin 37 = 0,6 ; X= 1,2Ω ; V = 240 V

calcul de I : P_{active} = 6900 = UI rac.carrée(3) cos 37

d'où I = 6900 / (416*1,732*0,8) = 11,97 A.

puissance réactive : Q_1 = UI rac.carrée (3) sin37 = 416*11,97*1,732*0,6= 5,17 kvar.

fem synchrone :

E^2_S =(240*0,8)² + (240*0,6 - 8*11,97)² =39191 d'où E_S= 198 V.

courant d'excitation i_e = 198/400= 0,495 A.

mêmes calculs avec cos φ = 1 et sin φ = 1.

P_{active} = 6900 = UI rac.carrée(3) soit I =6900 / (416*1,732) = 9,57 A.

$Q_1 = 0$

E^2_S =240² + (8*9,57)² =6,346 10^4 d'où E_S= 252 V.

courant d'excitation i_e = 252/400= 0,63 A.

le courant étant en retard sur la tension, le circuit est capacitif.

cos 37 =0,8 d'où sin (-37)= -0,6 ; X= 1,2Ω ; V = 240 V

calcul de I : P_{active} = 6900 = UI rac.carrée(3) cos 37

d'où I = 6900 / (416*1,732*0,8) = 11,97 A.

puissance réactive : Q_1 = UI rac.carrée (3) sin(-37) = -416*11,97*1,732*0,6= -5,17 kvar.

fem synchrone :

E^2_S =(240*0,8)² + (240*0,6 + 8*11,97)² =9,446 10^4 d'où E_S= 307 V.

courant d'excitation i_e = 307/400= 0,767 A.

moteur à excitation indépendante

fiche cours :

Ce moteur reçoit :

la puissance électrique P_a =UI de la source qui alimente l'induit.

la puissance $P_e= U_eI_e$ de la source qui alimente l'inducteur

il fournit de la puissance mécanique $P_u =T_u\Omega$ à une charge :

T_u : moment du couple utile(Nm) ; Ω vitesse angulaire (rad/s)

pertes joule dans l'induit : $P_j=RI^2$ (R résistance en ohms de l'induit)

pertes mécaniques P_m, dues aux frottements

pertes magnétiques P_f ou pertes dans le fer

Un essai à vide permet de déterminer les pertes mécaniques et les pertes dans le fer

rendement : $\eta = P_u /(P_a +P_e)$

exercice 1 :

Un moteur à excitation indépendante fonctionne sous la tension d'induit U=230 V. En fonctionnement nominal, l'induit est parcouru par un courant d'intensité I= 40 A. La résistance de l'induit est : R=0,3 Ω et celle de l'inducteur est r= 120 Ω. Un essai à vide à la fréquence de rotation nominale donne les résultats suivants : U_0 = 225 V ; I_0 = 1,2 A. Sachant que la tension d'alimentation de l'inducteur est : U_2 = 140 V calculer le rendement du moteur.

corrigé

puissance (W) absorbée par l'induit : UI= 230*40 = 9200 W.

puissance absorbée par l'inducteur : U^2_2 / r = 140 / 120 = 163,3 W.

perte mécanique + perte fer sont calculées à partir de l'essai à vide :

$U_0I_0 = RI_0^2 + P_m + P_f$ soit $P_m + P_f = U_0I_0 - RI_0^2$

$P_m + P_f = 225*1,2 - 0,3*1,2^2 = 269,6$ W.

pertes par effet joule dans l'induit : $P_j = RI^2 = 0,3*40^2 = 480$ W.

pertes totales : 269,6 +480 = 749,6 W

total puissance reçue : 9200+163,3 = 9363,3

puissance utile P_u = 9200-749,6 = 8450,4 W

rendement : 8450,4 / 9363,3 = 0,90 (90%)

exercice 2 :

L'essai d'une machine à courant continu en générateur à vide à excitation indépendante a donné les résultats suivants : fréquence de rotation : n_G= 1500 tr/min ; intensité du courant d'excitation I_e = 0,52 A ; tension aux bornes de l'induit : U_{G0} = 230 V.

La machine est utilisée en moteur. L'intensité d'excitation est maintenue constante quelle que soit le fonctionnement envisagé. la résistance de l'induit est R =1,2 Ω.

1. le moteur fonctionne à vide; l'intensité du courant dans l'induit est I_0 = 1,5 A et la tension à ces bornes est U_0 = 220 V Calculer :
   - la force électromotrice.
   - les pertes par effet joule dans l'induit.
   - la fréquence de rotation.
   - la somme des pertes mécaniques et des pertes fer.
   - le moment du couple de pertes correspondant aux pertes mécaniques et pertes fer. Ce moment sera supposé constant par la suite.
2. Le moteur fonctionne en charge. La tension d'alimentation de l'induit est U=220 V et l'intensité du courant qui le traverse est I=10 A. Calculer :
   - la force électromotrice
   - la fréquence de rotation.
   - le moment du couple électromagnétique.
   - le moment du couple utile.
   - la puissance utile.

corrigé

$U_0 = E + RI_0$ soit $E = U_0 - RI_0 = 220-1,2*1,5 = 218,2$ V.

perte joule induit : $RI^2_0 = 1,2*1,5^2 = 2,7$ W.

la fréquence de rotation est proportionnelle à la fem :

$E = k\,\Omega$ soit $k = E / \Omega$

dans le fonctionnement en générateur E= 230 V et $\Omega = 1500/60 *2\pi$ =157 rad/s d'où k = 230/157 = 1,465 V rad^{-1} s.

lors du fonctionnement en moteur à vide : $\Omega = E/k = 218,2 / 1,465 =$ 148,9 rad/s = 148,9/(2*3,14) *60 = 1423 tr/min.

puissance absorbée à vide = puissance joule + pertes mécaniques + pertes fer

$U_0I_0 = RI^2_0 + P_m+P_f$ d'où $P_m+P_f = U_0I_0 - RI^2_0 =220*1,5-2,7 = 327,3$ W.

Le moment du couple Γ_r (Nm) est égal à la puissance P_m+P_f (W) divisée par la vitesse de rotation (rad/s)

$\Gamma_r = 327,3 / 148,9 = 2,2$ Nm.

$U = E + RI$ soit $E = U - RI = 220-1,2*10 = 208$ V

la fréquence de rotation est proportionnelle à la fem :

$E = k\,\Omega$ soit $\Omega = E / \kappa = 208 / 1,465 =$ 141,98 rad/s = 141,98 / (2π) *60 = 1356 tr/mn.

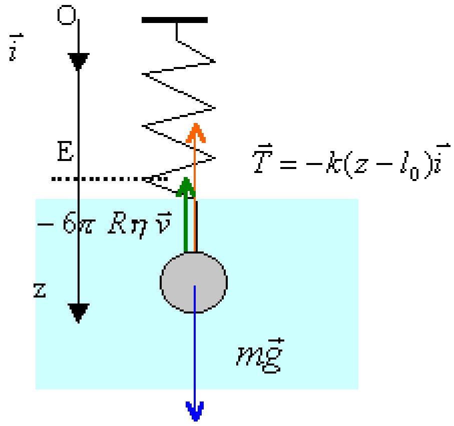
moment du couple électromagnétique (Nm) = puissance électromagnétique (W) / vitesse angulaire (rad/s)

$\Gamma_é = EI / \Omega = 208*10/141,98 = 14,65$ Nm.

moment du couple utile = $\Gamma_é - \Gamma_r = 14,65-2,2 = 12,45$ Nm.

puissance utile $P_u = \Gamma_u\,\Omega = 12,45*141,98 = 1767,5$ W.

oscillateurs mécaniques



1

équation horaire

Une bille de rayon R accrochée à un ressort est plongée dans un liquide de coefficient de viscosité η. Elle est soumise à une force de frottement fluide.

La raideur du ressort est k et sa période d'oscillation dans l'air est T_0.

Ecrire l'équation différentielle en $X = (z-z_e)$ du mouvement en prenant pour origine la position d'équilibre E de la sphère. On posera $2\lambda = 6\pi R\eta / m$.

Exprimer l'équation horaire du mouvement de la sphère.

corrigé

système : bille ; référentiel terrestre galiléen

projection de la relation fondamentale de la dynamique sur l'axe Oz

$$m\ddot{z} = -6\pi R\eta\dot{z} + mg - k(z-l_0) \quad (1)$$

au point E position d'équilibre : $\ddot{z} = 0 ; z = z_e = c$

(1) s'écrit : $mg = k(z_e - l_0)$ d'où $m\ddot{z} = -6\pi R\eta\dot{z} - k(z-z_e)$

$$\ddot{X} = \frac{-6\pi R\eta}{m}\dot{X} - \frac{k}{m}X = 0 \text{ ou } \ddot{X} + 2\lambda\dot{X} + \omega_0^2 X$$

C'est l'équation différentielle linéaire à coefficients constants (sans second membre) d'un oscillateur amorti.

Les solutions sont du type :

$$X = e^{-\lambda t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$
$$avec\ \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$$

2

coefficient de viscosité

On obtient des oscillations amorties de pseudo-période T= 2π / ω. Donner l'expression de η en fonction du rayon de la bille, de T_0, et de T.

corrigé

pseudo période des oscillations amorties T= 2π / ω.

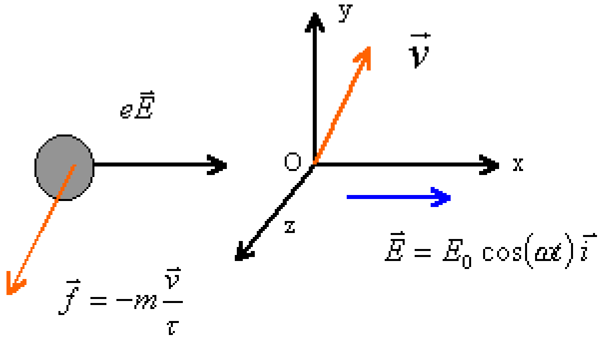
période des oscillations non amorties (dans l'air) : T_0= 2π / ω_0.

$\omega^2=\omega_0^2-\lambda^2$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \left(\frac{3\pi R\eta}{m}\right)^2 \ avec\ m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$$
$$\eta = \frac{8\pi R^2\rho}{9}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}$$

3

proton dans un champ électrostatique oscillant



Un proton de masse m et de charge e est soumis à une force de freinage f et à l'action d'un champ électrostatique E variable (voir schéma) . le poids est négligeable.

Ecrire l'équation différentielle où figure la vitesse.

Montrer qu'au bout d'un temps suffisamment long (régime permanent) le mouvement s'effectue suivant ox

corrigé

système : proton référentiel terrestre galiléen

relation fondamentale de la dynamique :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\frac{\vec{v}}{\tau} + eE_0\cos(\omega t)\,\vec{i}$$

$$\dot{v}_x = -\frac{v_x}{\tau} + \frac{eE_0\cos(\omega t)}{m}$$

$$\dot{v}_y = -\frac{v_y}{\tau} \textbf{ intégration : } v_y = Ae^{-t/\tau} \rightarrow 0 \textbf{ si } t \rightarrow \infty$$

$$\dot{v}_z = -\frac{v_z}{\tau} \textbf{ intégration : } v_z = Ae^{-t/\tau} \rightarrow 0 \textbf{ si } t \rightarrow \infty$$

résolution de la première équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants avec second membre. La solution est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

$$\dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = \frac{eE_0\cos(\omega t)}{m}$$

$$v_x = Ce^{-t/\tau} + V\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow V\cos(\omega t + \varphi) \textbf{ si } t \rightarrow \infty$$

4

utiliser les nombres complexes

Montrer que la solution du régime permanent est Vx = V cos(ωt + φ) où V et φ sont des fonctions de ω à déterminer.

corrigé

$$\dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = \frac{eE_0\cos(\omega t)}{m}$$

$$\text{on pose } \underline{v}_x = V\exp j(\omega t + \varphi) \text{ soit } \underline{\dot{v}}_x = j\omega V\exp j(\omega t + \varphi)$$

$$V\exp j(\omega t + \varphi)\left[j\omega + \frac{1}{\tau}\right] = \frac{eE_0\exp(j\omega t)}{m}$$

$$V\exp j\varphi\left[j\omega + \frac{1}{\tau}\right] = \frac{eE_0}{m}$$

$$Ve^{j\varphi} = \frac{eE_0/m}{j\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{eE_0/m}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}\left(j\omega - \frac{1}{\tau}\right)$$

il suffit d'écrire que les modules sont égaux et que les arguments sont égaux.

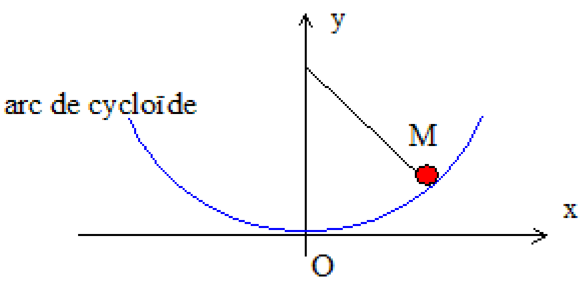
$$V\exp(j\varphi) = \frac{eE_0/m}{j\omega + \frac{1}{\tau}} = \frac{eE_0/m}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}\left(j\omega - \frac{1}{\tau}\right)$$

$$V = \frac{eE_0/m}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2}} \text{ égalité des modules}$$

$$\varphi = \arctan(-\omega\tau) \text{ égalité des arguments}$$

Pendule cycloïdal : oscillateur harmonique

Les frottements sont négligés. Le petit solide de masse m se déplace sur l'arc de cycloïde dont les éqations paramètriques sont : $x = a(\theta + \sin\theta)$ et $y = a(1-\cos\theta)$. a est une constante et θ varie de $-\pi$ à $+\pi$.



1. Exprimer la longueur d'un déplacement élémentaire

ds en fonction de a, θ et dθ puis l'abscisse curviligne OM = s en fonction de a et θ.

2. Exprimer l'énergie mécanique du mobile en fonction de s et s'.
3. Etablir l'équation différentielle relative à s en dérivant par rapport au temps l'expression précédente. En déduire la période T du mouvement.
4. A l'instant initial t=0, $\theta = \theta_M$ (position M_0) la vitesse initiale est nulle. Quelle est la vitesse de passage en O ? Quelle est la durée du parcours M_0O ?

corrigé

déplacement élémentaire ds = racine carrée (dx^2+dy^2)

$x= a(\theta+\sin\theta)$ d'où $dx = a(1+\cos\theta)d\theta$; $y=a(1-\cos\theta)$ d'où $dy = a \sin\theta \, d\theta$;

$ds^2 = a^2[(1+\cos\theta)^2+ \sin^2\theta]d\theta^2 = a^2(2+2\cos\theta)d\theta^2 = 2a^2(1+\cos\theta)d\theta^2 = 4a^2 \cos^2 (½\theta)d\theta^2$

$ds = 2a \cos (½\theta)d\theta$.

longueur de l'arc OM: intégrer entre 0 et θ. (primitive de cos (½θ) : 2 sin (½θ))

$$s=2a\int_0^\theta \cos(½\theta)\, d\theta=4a\int_0^\theta \cos(½\theta)\ d(½\theta)=4a[\sin(½\theta)]_0^\theta=4a\ \sin$$

énergie mécanique = énergie potentielle + énergie cinétique

Le solide de masse m est soumis à son poids et à la tension du fil (celle-ci ne travaille pas, elle est perpendiculaire à la vitesse)

énergie potentielle E_p= mgy avec y altitude de M

$E_p= mga(1-\cos\theta) = 2mg\, a \sin^2(½\theta) = 2mga [s/(4a)]^2 = mg\, s^2/(8a)$

énergie cinétique $Ec= ½ms'^2$; énergie mécanique $E= ½ms'^2 +mg\, s^2/(8a)$.

équation différentielle :

l'énergie mécanique est constante (seul le poids travaille)

$dE/dt = 0$

$0 = m\, s''\, s' + mg\, s\, s'/(4a)$; $0 = s'' + g/(4a)\, s$.

équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω telle que $\omega^2 = g/(4a)$

période $T = 2\pi/\omega = 4\pi\, [a/g]^{1/2}$, valeur indépendante de l'amplitude θ_M.

vitesse de passage en O : date de ce premier passage en O : $t = 0{,}25\, T = \pi\, [a/g]^{1/2}$

l'énergie mécanique initiale est sous forme potentielle : $2mg\, a \sin^2(\frac{1}{2}\theta_M)$

l'énergie mécanique finale est sous forme cinétique (O : origine de l'énergie potentielle) : $\frac{1}{2}mv^2$

l'énergie mécanique se conserve : $\frac{1}{2}mv^2 = 2mg\, a \sin^2(\frac{1}{2}\theta_M)$

$v^2 = 4g\, a \sin^2(\frac{1}{2}\theta_M)$

Aurélie 07/01/09

interaction d'une onde électromagnétique avec une onde sonore concours physique agrégation 2008.

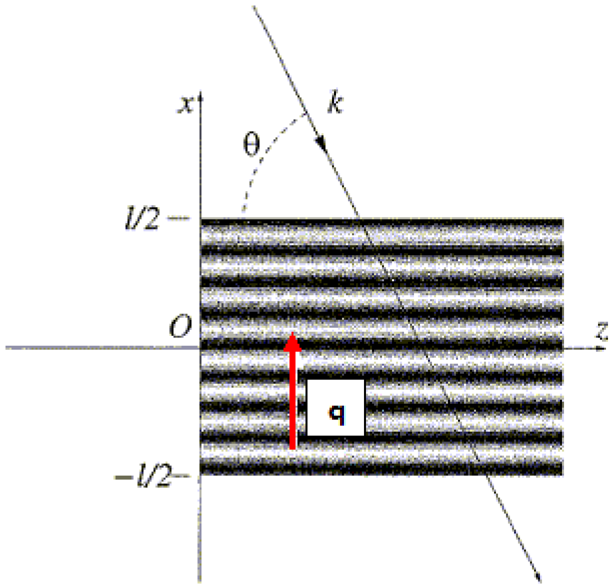
On va étudier comment la présence d'une onde sonore modifie la propagation d'une onde électromagnétique.

Le milieu diélectrique est parcouru par une onde sonore qui modifie la densité d'atomes et entraîne donc une modification de l'indice du milieu :

$$n(r,t) = n_0 + n_1(r,t).$$

On note Ω : pulsation de l'onde sonore ; $\omega >> \Omega$: pulsation de l'onde électromagnétique.

On pourra donc en général considérer que le motif n(r) du à la présence de l'onde sonore est figé pendant que l'onde électromagnétique le traverse.



Interaction d'une onde lumineuse avec une onde sonore : k est le vecteur d'onde de la lumière et q celui de l'onde sonore de longueur d'onde Λ.

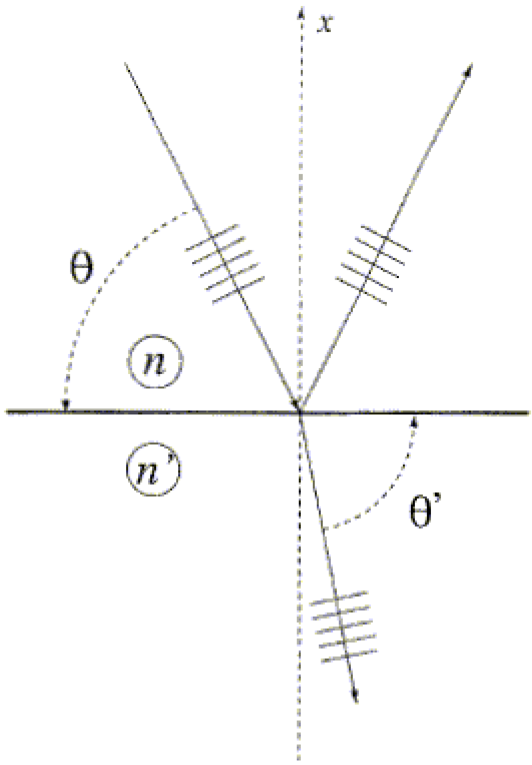
Régime de Bragg :

On considère une tranche du milieu diélectrique d'épaisseur ℓ dans la direction Ox traversé par une onde lumineuse de pulsation ω de longueur d'onde dans le milieu λ et donc de vecteur d'onde dans le milieu $\mathbf{k} = n\omega/\lambda\ \mathbf{e_k}$, et dans laquelle se propage aussi une onde sonore dans la direction Ox. On appellera Ω la pulsation de l'onde sonore et Λ sa longueur d'onde. On introduira le vecteur d'onde correspondant $\mathbf{q} = n\Omega/\Lambda\ \mathbf{e_x}$.

$$n_1(r,t) = n_1 \cos(\Omega t - qx + \varphi).$$

On pourra prendre lorsque cela sera utile une onde sonore de fréquence 80 MHz et une onde lumineuse de longueur d'onde dans le vide 532 nm.

Pour décrire cette situation, nous allons considérer en fait le milieu comme une succession continue de dioptres représentant la variation d'indice dans la direction x. Chacun de ces dioptres élémentaires réfléchit une partie de l'onde lumineuse incidente, et l'addition de toutes ces ondes élémentaires représentera une onde lumineuse réfléchie par l'onde sonore.



réflexion d'une onde lumineuse par un dioptre : les angles ne sont pas définis selon la convention habituelle.

Réflexion par un dioptre :

on note n et n' les indices de réfraction des deux milieux homogènes.

Rappeler les lois de Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction par le dioptre.

Le rayon incident et le rayon réfléchi sont coplanaires ; l'angle de réflexion a même mesure que l'angle d'incidence ; le rayon traverse la normale à la surface.

Le rayon réfracté et le rayon incident sont coplanaires ; le rayon réfracté traverse la normale à la surface ; on note i (angle d'incidence) et i' (angle de réfraction) les angles définis entre les rayons et la normale.

n sin i = n' sin i'soit avec la figure ci-dessus : **n cos θ = n' cos θ '**.

On appelle les expressions de Fresnel donnant les coefficients de réflexion en amplitude pour une onde d'incidence θ (on note θ ' l'angle d'émergence) défini sur la figure :

$$r_{-|-} = \frac{n \sin\theta - n' \sin\theta'}{n \sin\theta + n' \sin\theta'} \; ; \; r_{||} = \frac{n' \sin\theta - n \sin\theta'}{n' \sin\theta + n \sin\theta'}$$

où $r_{-|-}$ et $r_{||}$ indiquent une polarisation respectivement perpendiculaire ou parallèle au plan d'incidence.

En conséquence la lumière rélféhie par un dioptre est généralement polarisée :

- on diminue les reflets sur une photo en utilisant un filtre polarisant

- le coefficient de reflexion parallèle peut s'annuler : diminution des pertes dans les systèmes optiques utilisant des lasers.

Enfin si n > n' et cos θ = n'/n, il y a réflexion totale (absence de rayon réfracté) : alors les coefficients de réflexion valent 1.

Réflexion par un faible saut d'indice :

On se place dans le cas particulier où la différence d'indice de part et d'autre du dioptre est très faible. On note n l'indice d'un côté et n+δn l'indice de l'autre côté du dioptre.

De même on note θ ' = θ +δθ.

La loi de Descartes pour la réfraction s'écrit : n cos θ = (n+δn) cos (θ +δθ).

Développer et ne conserver que les termes au premier ordre :

$$\cos(\theta+\delta\theta)\sim\cos\theta+\delta\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}$$

$$n\cos\theta=n\cos\theta+\delta n\cos\theta+n\,\delta\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\Rightarrow 0=\delta n\cos\theta+n\delta\,\theta\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}$$

$$\delta n\cos\theta-n\,\delta\,\theta\,\sin\theta=0\Rightarrow\boxed{\delta\,\theta=\frac{1}{n\tan\theta}\delta\,n}$$

<u>Expression des coefficients de réflexion</u> :

$$r_\perp=\frac{n\sin\theta-(n+\delta n)\sin(\theta+\delta\,\theta)}{n\sin\theta+(n+\delta n)\sin(\theta+\delta\,\theta)}\ ;\ \sin(\theta+\delta\,\theta)=\sin\theta+\delta\theta\frac{\partial\sin\theta}{\partial\theta}=\sin\theta$$

$$r_\perp=\frac{n\sin\theta-(n+\delta n)(\sin\theta+\delta\theta\cos\theta)}{n\sin\theta+(n+\delta n)(\sin\theta+\delta\theta\cos\theta)}=\frac{-n\,\delta\theta\cos\theta-\delta n\sin\theta}{2n\sin\theta+\delta n\sin\theta+n\,\delta\theta\cos\theta}$$

$$Or\ \delta\,\theta=\frac{1}{n\tan\theta}\delta\,n\Rightarrow n\,\delta\,\theta=\delta n\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$r_\perp=\frac{-\delta n\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\delta n\sin\theta}{2n\sin\theta+2\delta n\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}=\boxed{\frac{-\delta n}{2n(\sin^2\theta+\dfrac{\delta n}{n}\cos^2\theta)}}$$

$$r_{II}=\frac{(n+\delta n)\sin\theta-n\sin(\theta+\delta\,\theta)}{(n+\delta n)\sin\theta+n\sin(\theta+\delta\,\theta)}=\frac{(n+\delta n)\sin\theta-n(\sin\theta+\delta\theta\cos\theta)}{(n+\delta n)\sin\theta+n(\sin\theta+\delta\theta\cos\theta)}$$

$$r_{II}=\frac{\delta n\ \sin\theta-n\delta\,\theta\cos\theta}{2n\sin\theta+n\delta\,\theta\cos\theta+\delta n\ \sin\theta}=\frac{\delta n\ \sin\theta-\delta n\ \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{2n\sin\theta+\delta n\ \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\delta n\ \sin\theta}$$

$$r_{II}=\frac{\delta n(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{2n\sin^2\theta+2\delta n}=\boxed{\frac{\delta n(\sin^2\theta-\cos^2\theta)}{2n(\sin^2\theta+\dfrac{\delta n}{n})}}$$

Sous incidence rasante θ tend vers zéro et cos θ tend vers 1. Les deux coefficients sont identiques : l'amplitude de l'onde réfléchie ne dépend pas de la polarisation.

$$\delta r\sim-\delta n/(2n\sin^2\theta)$$

<u>Réflexion par une variation d'indice</u>.

On suppose que l'indice dépend continuellement de la cote x.

Montrer qu'une tranche d'épaisseur δx contribue à la réflexion par le coefficient :

$$\delta r = -\frac{1}{2n\sin^2\theta}\frac{dn}{dx}\,\delta x$$

Variation de l'indice à travers la tranche : δn = dn/dx δx.

On se retrouve dans le cas où la différence d'indice de part et d'autre du dioptre est très faible. On note n l'indice d'un côté et n+δn l'indice de l'autre côté du dioptre.

L'expression $\delta r \sim -\delta n / (2n \sin^2\theta)$ s'écrit : $\delta r \sim -1/(2n \sin^2\theta)$. dn/dx .δx.

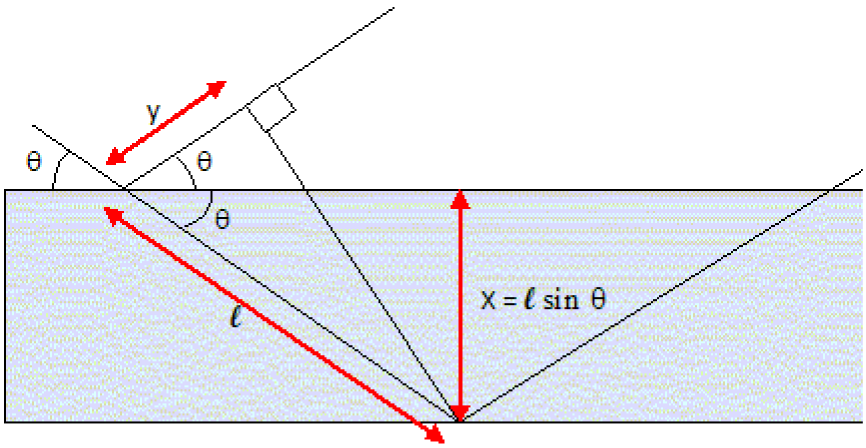
<u>Diffraction de Bragg</u>.

Calcul de dn/dx dans le cas où le milieu est traversé par l'onde sonore décrite au début.

$n(r,t) = n_1 \cos(\Omega t - qx + \varphi)$; $dn/dx = qn_1 \sin(\Omega t - qx + \varphi)$.

Dans le cas étudié ici, l'indice est partout très peu différent de sa valeur moyenne, on pourra donc considérer avec une bonne approximation que la lumière s'y propage en ligne droite. On prend comme référence de phase l'onde réfléchie par le plan de cote x=0.

<u>Phase de l'onde réfléchie par le plan de cote x</u> :



$$\ell - y = \ell - \ell\cos(2\theta) = (1-\cos(2\theta))\,\frac{x}{\sin\theta} = \frac{-2\sin^2\theta}{\sin\theta}\,x = -2x\sin\theta$$

$$\Delta\Phi = 2\pi/\lambda\ (-2x \sin\theta).$$

Amplitude complexe de l'onde réfléchie par le plan de cote x :

amplitude complexe : $\delta r \sim -1/(2n \sin^2\theta)\ .\ dn/dx\ .\delta x$ avec $dn/dx = qn_1 \sin(\Omega t - qx + \varphi)$.

déphasage : $-4\pi/\lambda \sin\theta\ x = -2k \sin\theta\ x$ avec $k = 2\pi/\lambda$.

$$dr = -\frac{qn_1}{2n\sin^2\theta}\sin(\Omega t - qx + \varphi)e^{(-2ik\sin\theta x)}$$

$$dr = -\frac{qn_1}{2n\sin^2\theta}\,\frac{e^{i(\Phi-qx)} - e^{-i(\Phi-qx)}}{2i}\,e^{(-2ik\sin\theta x)}$$

$$r = -\frac{qn_1}{4n\,i\sin^2\theta}\int_{-l/2}^{l/2}\left(e^{i(\Phi-qx)} - e^{-i(\Phi-qx)}\right)e^{(-2ik\sin\theta x} dx$$

$$= -\frac{qn_1 e^{i\Phi}}{4n\,i\sin^2\theta}\left(\underbrace{\int_{-l/2}^{l/2}\left(e^{-2ik\sin\theta x - iqx}\right.}_{\ell \mathrm{sinc}((q+2k\sin\theta)\ell/2)} \underbrace{\left. - e^{-2ik\sin\theta x + iqx}\right)}_{\ell \mathrm{sinc}((q-2k\sin\theta)\ell/2)} dx\right.$$

mouvement dans un champ newtonien

1

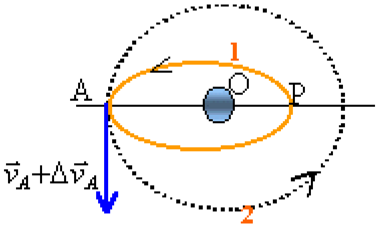
orbite circulaire

orbite elliptique

Un solide ponctuel de masse m est lancé depuis la terre avec une vitesse initiale v_0 formant un angle α avec la verticale. La Terre de masse M>>m est en conséquence immobile. Ce solide décrit une ellipse (grand axe 2a) dont l'un des foyers est le centre de la Terre. A son apogée, notée A sa vitesse est v_A ; on lui communique alors pendant un laps de temps très court une force constante tangente à l'orbite. La vitesse augmente sans que la position change.

1. La nouvelle orbite étant circulaire de rayon r =R+h (h : altitude comptée depuis le sol), exprimer la variation de vitesse en fonction de R, h, α, v_0 et g_0.
2. On applique à nouveau une force constante, tangente à l'orbite, pendant un laps de temps τ très court. Il y a un brusque changement de vitesse sans changement de position. La nouvelle orbite est une ellipse. Déterminer ces paramètres (a: demi grand axe et e excentricité) en fonction de R et h afin que $r_{Périgée}$=R. Expression de l'énergie totale sur une orbite elliptique : E= -GMm/(2a).
3. Déterminer le sens et la norme de F en fonction de τ, m, R, h et g_0.

corrigé



ancienne orbite :

Le vecteur accélération passe par le point fixe O:

le moment cinétique est constant égal au départ à L = mR v_0 sinα.(R rayon terrestre)

et égal à L= m $r_A v_A$ sur l'ellipse en A. (r_A=R+h)

loi de aires : la vitesse aérolaire est constante ρ²θ' = C = L / m = cte

v_A= C / r_A= R v_0 sinα / (R+h).

nouvelle orbite circulaire :

relation fondamentale de la dynamique suivant l'axe n de la base de Frenet

GMm / (R+h)² = mv²/ (R+h) avec GM=g_0R²

$v^2 = g_0R^2 / (R+h)$

$$\Delta v_A = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}} - \frac{Rv_0 \sin\alpha}{R+h}$$

l'ancienne orbite est circulaire de rayon R+h, la nouvelle orbite esr elliptique de périgée R.

La partie commune est l'apogée de la nouvelle orbite.

nouvelle orbite elliptique :

apogée : R+h; périgée : R donc 2a = 2R+h ou $a = R+\frac{1}{2}h$.

équation de la trajectoire en coordonnées polaires :

$r = p / (1+e\cos\theta)$

$r_{apogée} = p / (1-e)$ et $r_{périgée} = p / (1+e)$ ou bien $e = h / (2R+h)$.

l'énergie doit diminuer pour passer d'une orbite circulaire à une orbite elliptique.

énergie après freinage sur la nouvelle orbite elliptique.

$-GMm / (2R+h) = \frac{1}{2}m(v-\Delta v)^2 - GMm / (R+h)$

$(v-\Delta v)^2 = 2GM[\, 1/(R+h) - 1/ (2R+h)]$ avec $GM=g_0R^2$

$$\Delta v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}}\left(1-\sqrt{\frac{2R}{R+h}}\right)$$

appliquer la relation fondamentale de la dynamique pendant la durée τ du freinage
$F=dp/dt = m\Delta v / \tau$.

La mécanique de Newton - chute verticale

La mécanique de Newton étudie les systèmes qui sont animés de vitesses faibles devant la vitesse de la lumière (pour les grandes vitesse --> mécanique relativiste) et qui ont des masses et des dimensions à notre échelle. (à l'échelle de l'atome -> mécanique quantique)

référentiel :

Un référentiel est un solide par rapport auquel on étudie un mouvement On prend souvent comme référentiel le solide Terre.

- Le référentiel géocentrique (construit à partir des centres de la Terre et de trois étoiles lointaines qui paraissent fixes) est utilisé pour étudier le mouvement des satellites terrestres.

- Le référentiel héliocentrique (construit à partir des centres du soleil et de trois autres étoiles,) est utilisé pour étudier les voyages interplanétaires ou le mouvement des planètes autour du Soleil.

Un repère d'espace orthonormé, lié à un référentiel, est un système d'axes orthogonaux et normés, muni d'une origine O. Dans ce repère, on peut exprimer les coordonnées du mobile ponctuel étudié.

La trajectoire d'un mobile ponctuel est constituée par l'ensemble des positions successives occupées par le mobile au cours du temps.

vitesse moyenne (m/s) = distance parcourue (m) / durée du parcours (s)

vecteur vitesse instantanée = dérivée du vecteur position par rapport au temps.

ce vecteur est porté par la tangente à la trajectoire à la date considérée et a toujours le sens du mouvement.

La vitesse s'exprime en m / s dans le système international d'unités 1 m / s = 3,6 km / h.

Dans un référentiel donné le vecteur vitesse d'un mobile ponctuel peut changer de valeur et (ou) de direction. Ce changement éventuel peut se faire plus ou moins rapidement. On appelle vecteur accélération instantanée du mobile ponctuel la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse.

Le vecteur accélération est dirigée vers l'intérieur de la trajectoire ; l'accélération s'exprime en m / s² dans le système international d'unités.

$1^{ère}$ loi de Newton

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe de l’inertie est vérifié.

Dans un référentiel galiléen, si la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est nulle (solide pseudo-isolé) alors le centre d’inertie G de ce solide est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme et réciproquement.

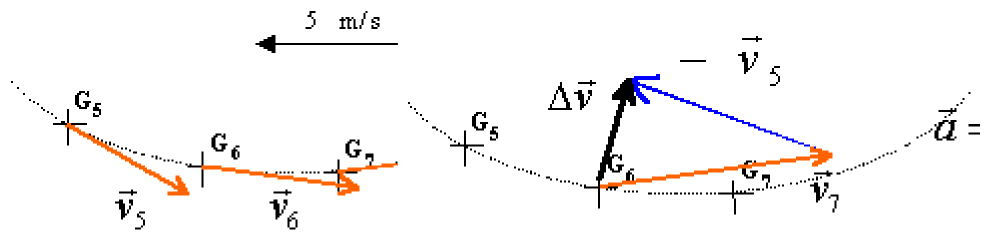
Un solide peut donc se déplacer même si la somme des forces appliquées à ce solide soit nulle. La véritable opposition n'est pas entre mouvement et repos mais entre mouvement rectiligne uniforme (le repos n'est qu'un simple cas particulier) et les autres types de mouvement.

2ème loi de Newton

Dans un référentiel galiléen, si le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un solide varie, alors la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à ce solide n'est pas nulle et réciproquement. La direction et le sens de cette somme sont ceux de la variation du vecteur vitesse entre deux instants proches.

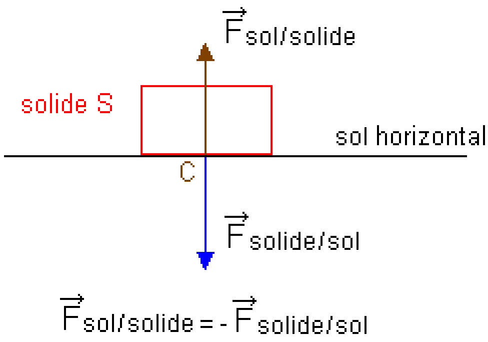
Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de la masse M du solide par l'accélération de son centre d'inertie.

vitesse variation du vecteur vitesse

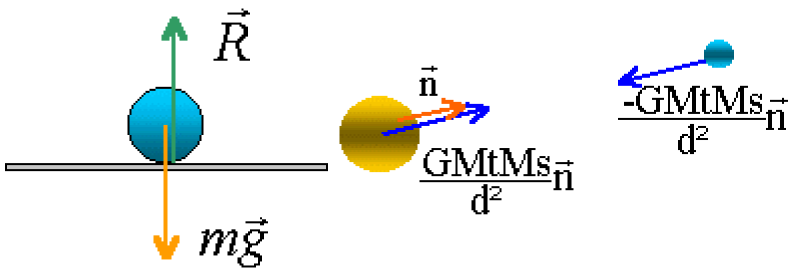


3ème loi de Newton

Interaction entre un objet A et un objet B : si un solide noté A exerce sur un solide noté B une force notée $F_{A/B}$, alors B exerce sur A une force notée $F_{B/A}$. Les deux forces associées à une même interaction sont toujours égales et opposées.



action du support force gravitation entre terre et lune



chute verticale :

un vecteur est écrit en gras et en bleu.

En un point donné M, au voisinage de la Terre, le poids d'un objet de masse m peut s'écrire : **P** = m**g**

g : vecteur champ de pesanteur terrestre au point M considéré, direction la verticale passant par M, sens :de haut en bas.

La valeur de l'intensité g de la pesanteur dépend de la latitude du point M où l'on se trouve (9,78 N / kg à l'équateur,

g = 9,83 N / kg au pôle Nord, au niveau de la mer) et de son altitude (diminution d'environ 1 % à l'altitude de 30 km).

Dans un domaine au voisinage de la Terre (dimensions de l'ordre de quelques kilomètres), on peut considérer que le champ de pesanteur est uniforme : le vecteur champ de pesanteur a même direction, même sens et même valeur en tout point de ce domaine restreint .

La poussée d'Archimède :

est une force de contact répartie sur la surface de contact solide-fluide. On la représente par un vecteur :

origine : le centre d'inertie C du volume de fluide déplacé.

direction : la verticale passant par C

sens : du bas vers le haut

valeur : $\Pi = \rho_{fluide} V g$ égale au poids du fluide déplacé.

ρ_{fluide} : masse volumique du fluide (kg/m^3) ; V volume fluide déplacé (m^3)

force de frottement fluide :

Si un solide se déplace dans un fluide, il apparaît des forces de "frottement fluide" sur toute la surface du solide.

Ces forces de frottement fluide peuvent être résistantes (chute d'une bille ralentie par la présence d'air ou d'eau) ou motrices (feuille emportée par le vent). On les modélise par un vecteur **f** de sens opposé au mouvement si les frottements sont résistants.

La valeur de la force de frottement sera modélisée par une expression de la forme :

$f = k.V$ pour les vitesses faibles ou $f = k.V^2$ pour des vitesses plus importantes.

chute libre verticale :

Un solide est en chute libre s'il n'est soumis qu'à son poids.

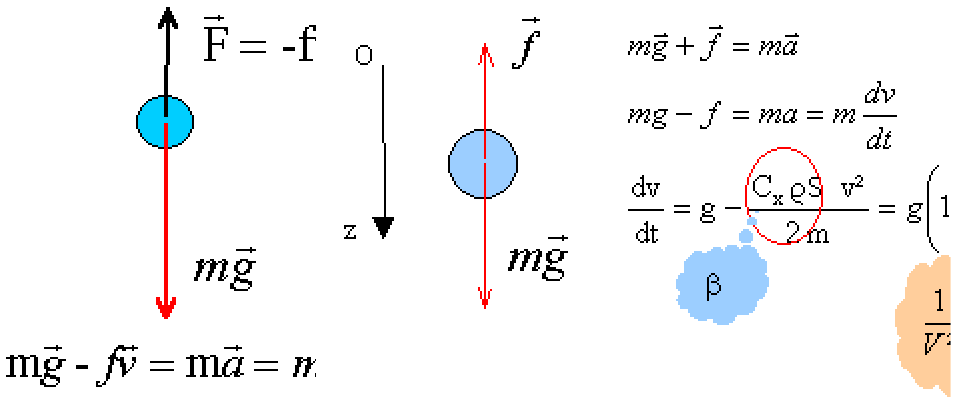
On considère un axe vertical orienté vers le haut dont l'origine est le sol.

vitesse : $v = -g\,t + v_0$ (v_0 : vitesse initiale m/s)

distance parcourue : $d = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + d_0$ avec d_0 altitude initiale(m)

chute verticale avec frottement fluide :

f proportionnelle à la vitesse	**f** proportionnelle à la vitesse au carré

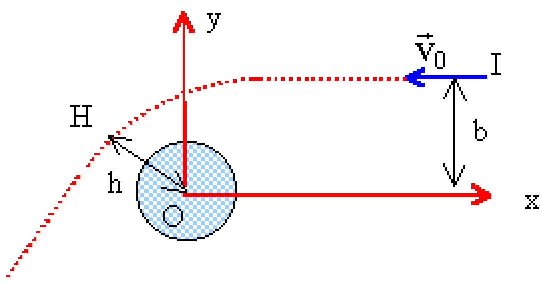


navette spatiale en détresse autour de Jupiter

1

théorèmes de la mécanique du solide

Une navette spatiale de masse m s'approche de la planète Jupiter (centre 0, rayon R = 70000 km, masse M = 1,9 10^{27} kg). Par rapport au référentiel du centre de masse de Jupiter, supposé galiléen, la trajectoire initiale de la navette, loin de la planète, est pratiquement rectiligne, soit x = -Vot, y = b, z= 0 dans un repère (O x y z) convenablement choisi.



En I survient une panne d'alimentation, qui ne pourra être réparée avant deux jours. Cette panne empêche toute manouvre des moteurs-fusées et toute communication radio. Un appareil de bord indique alors aux trois astronautes leur position I (x = 100 R, y = b = 1, 57 R), et leur vitesse V_0 = 50 km/s. Les astronautes rassemblent leurs souvenirs du DEUG et font un petit calcul pour connaître leur trajectoire. Effrayés du résultat, ils décident de lancer un message de détresse dans une "bouteille" qu'ils lanceront dans l'espace. Le problème du mouvement de la navette (inerte) est un problème à deux corps tout à fait analogue à celui de l'expérience de Rutherford. La trajectoire est une branche d'hyperbole de foyer 0, dans le plan xOy, et b s'appelle le paramètre d'impact. La seule différence est qu'il s'agit ici d'une interaction attractive. Si la navette ne percute pas Jupiter, soit H sa position la plus proche du centre OH = h > R.

1. Il y a deux constantes du mouvement : l'énergie mécanique E du système (planète + navette) et la quantité C = produit vectoriel des vecteurs r et v où le vecteur r égal au vecteur OM et le vecteur v le rayon vecteur et la vitesse de la navette dans une position M quelconque.
   - Après avoir montré que la vitesse V en H est normale au rayon vecteur OH, exprimer E et C aux points I et H. En déduire deux équations qui permettent de déterminer V et r en fonction de b et Vo.
   -Calculer h en fonction de b et de vo; on pourra introduire la longueur $r_0 = GM/(V_0^2)$.
   -Application numérique : justifier l'inquiétude des astronautes.
2. Comme les astronautes ne sont pas d'accord sur la démarche à suivre pour lancer un S.O.S, chacun d'eux écrit un message et largue une bouteille dans l'espace. Le premier place simplement une bouteille B_1, à l'extérieur de la cabine sans lui communiquer de vitesse. Le second lance sa bouteille B_2 dans la direction Oy normalement à la trajectoire, avec une vitesse (par rapport à la navette) V_2 = 10 m/s. Le troisième préfère lancer une bouteille B_3 vers l'arrière (direction Ox) en lui communicant une vitesse V_3 = 10 m/s. Près de deux jours plus tard, la navette frôle tout juste l'atmosphère de Jupiter.
   - Que sont devenues les trois bouteilles ? Donner d'abord une réponse qualitative. Pour une discussion plus quantitative, on admettra que les variations de h résultant d'une petite variation Δ Vo de la vitesse en I ou d'une petite variation Δ b du paramètre d'impact sont données par les expressions : $\Delta h = (2*r_0*h / (V_0*(h+r_0)))*\Delta Vo$ et $\Delta h = (b/(V_0*(h+r_0)))*\Delta b$.

corrigé

conservation de l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique et de

l'énergie potentielle de pesanteur (origine choisie à l'infini)

En I : $½ mv_0^2 + GMm/H$ avec $H^2 = (1,57\ R)^2 + (100\ R)^2$

Au regard des valeurs numériques, le terme énergie potentielle est négligeable au point I

$6{,}67\ 10^{-11}*1{,}9\ 10^{27}$ m / 7 10^{9} = voisin $1{,}8\ 10^{7}$ m

alors que le terme d'énergie cinétique vaut : $1{,}25\ 10^{9}$ m

En H : ½ mv² + GMm / h (G constante de gravitation et h = OH)

d'où : $v^2_0 = v^2 + 2GM / h$ (1)

produit vectoriel rayon vecteur avec la vitesse ou conservation du moment cinétique

En I : bv_0

en H : hv donc $hv = bv_0$ (2)

éliminer la vitesse de ces deux relations (2) donne : $v^2 = b^2 v^2_0 / h^2$

repport dans (1) : $v^2_0 = b^2 v^2_0 / h^2 + 2GM / h$

multiplier par h² et diviser par v^2_0 :

$h^2 = b^2 + 2r_0 h$ ou $h^2 - 2r_0 h - b^2 = 0$

résoudre l'équation du second degré en h :

$\Delta = 4 (r_0^2 + b^2)$

h = r_0+ racine carrée ($r_0^2 + b^2$)

l'autre valeur n'est pas à retenir car h doit être supérieur à R, rayon de la planète

application numérique :

$r_0 = 6{,}67\ 10^{-11}*1{,}9\ 10^{27} / 25\ 10^{8} = 5{,}07\ 10^{7}$ m.

b= $1{,}57 *7\ 10^{7} = 1{,}1\ 10^{8}$ m

racine carrée ($r_0^2 + b^2$) voisin de :$1{,}21\ 10^{8}$.

h voisin de : $1{,}7\ 10^{8}$ m (environ 2,4 fois le rayon R soit une altitude voisine de 1,4 R)

La bouteille B_1 suit la même trajectoire que la navette .

Quant aux bouteilles B_2 et B_3 ,10 m/s est une valeur très faible devant 50 km/s : en

conséquence les bouteilles vont suivre à peu près la même trajectoire que la navette.

bouteille B_2 :

en I le produit vectoriel entre le rayon vecteur et le vecteur vitesse s'écrit : $10\ x_0+bv_0$

conservation du moment cinétique : $10\ x_0+bv_0 = h_1v_1$.

v_1 : vitesse de passage en H

l'équation du second degré en h_1 s'écrit :

$$h_1^2 - 2r_0\ h_1 -(10\ x_0/\ v_0+ b)^2=0$$

bouteille B_3 :

en I le produit vectoriel entre le rayon vecteur et le vecteur vitesse s'écrit : $b(v_0-10)$

conservation du moment cinétique : $b(v_0-10) = h_2v_2$.

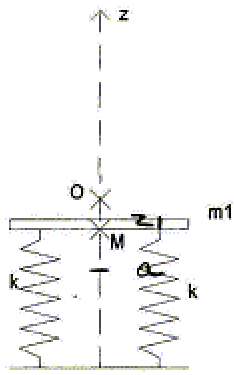
v_2 : vitesse de passage en H

l'équation du second degré en h_2 s'écrit :

$$h_2^2 - 2r_0\ h_2 -b(1-10\ /\ v_0\ )^2= 0$$

Oscillation d'une masse posée sur un plateau concours Orthoptie Nantes 07

Un plateau de masse m_1 est relié à deux ressorts verticaux identiques de constante de raideur k et de longueur à vide L_0. L'origine O de l'axe z correspond à la position du plateau lorsque les deux ressorts ne sont ni tendus ni comprimés.



Exprimer la valeur de z_M à l'équilibre en foncfion de m_1 et k. Elle sera notée z_1.

A l'équilibre du plateau, le poids de celui-ci neutralise la tension des ressorts.

L_1 : longueur du ressort à l'équilibre.

$m_1g = 2\,k(L_0\text{-}L_1)$ avec $L_0\text{-}L_1 = z_1$.

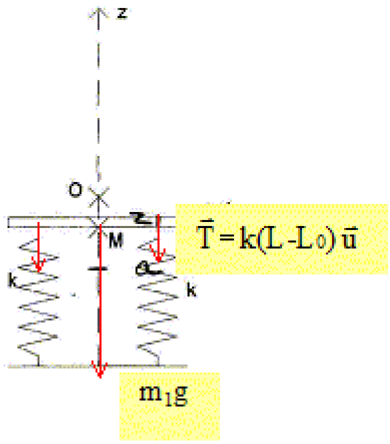
$\mathbf{z_1 = m_1g/(2k)}$.

On abaisse le plateau de sa position d'équilibre d'une distance a ($z_M = z_1\text{-}a$) et on lâche le plateau sans vitesse initiale.

Déterminer l'équation différentielle que doit satisfaire z_M.

<u>Système</u> : le plateau ; référentiel terrestre galiléen.

Sur le schéma ci-dessous, le plateau est au dessus de la position d'équilibre :



$$\boxed{2\vec{T} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}}$$

Ecrire la deuxième loi de Newton suivant Oz :

$-2k(L-L_0)-m_1g = m_1\, z''$.

Or $L-L_0 = L-L_1+L_1-L_0 = z - z_1$. (z : abscisse par rapport à la position d'équilibre)

par suite $-2k\, z + 2k\, z_1-m_1g = m_1\, z''$ d'où $z'' + 2k/m_1\, z$. (1)

$z = z_M + z_1$: l'équation différentielle (1) est vérifiée par z_M.

Montrer que l'équation horaire du mouvement du plateau s'écrit : $z_M=a_1 \cos(\omega_1 t+\varphi)+b_1$.

(1) est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. La solution générale est du type :

$z = a_1 \cos(\omega_1 t+\varphi)$ avec $\omega_1 = [2k/m_1]^{1/2}$.

$z = z_M + z_1$; $z_M = z-z_1$; $z_M = a_1 \cos(\omega_1 t+\varphi) - z_1$.

Exprimer la pulsation ω_1 et la période T_1 en fonction de k et m_1.

$T_1 = 2\pi/\omega_1$; $\mathbf{T_1 = 2\pi/ [m_1/(2k)]^{½}}$.

A quoi correspond b_1.

A l'instant initial $z_M(t=0) = -z_1-a$; $z_M(t=0) = a_1 \cos \varphi + b_1$.

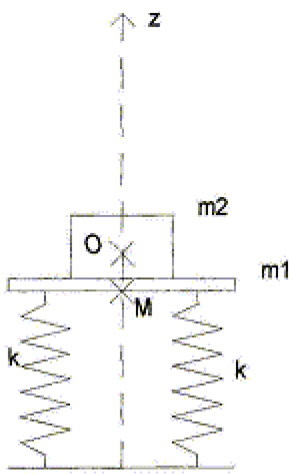
On identifie : $\mathbf{a = a_1 \cos \varphi}$ et $\mathbf{b_1 = -z_1}$.

Déterminer a_1 et φ à partir des conditions initiales.

$\mathbf{a = a_1 \cos \varphi}$ avec a_1 amplitude positive d'où $\cos \varphi = -1$ soit $\varphi = \pi$.

$\mathbf{z_M = a \cos (\omega_1 t+\pi) - z_1}$.

Oscillations d'un objet de masse m_2 posé sur le plateau.



Exprimer la nouvelle valeur de z_M à l'équilibre. Elle sera notée z_2.

A l'équilibre du plateau et de la charge, le poids total neutralise la tension des ressorts.

L_2 : longueur du ressort à l'équilibre.

$(m_1+m_2)g = 2k(L_0-L_2)$ avec $L_0-L_2= z_2$.

$z_2=$

$(m_1+m_2)g/(2k)$.

On abaisse le plateau de sa position d'équilibre d'une distance a et on le lâche sans vitesse initiale.

Exprimer l'équation horaire du mouvement du plateau dans l'hypothèse d'un contact continu entre l'objet et le plateau.

ω_2 : pulsation d'oscillation ; T_2 : période d'oscillation.

Même calcul que ci-dessus le système étant le plateau + la charge : on remplace m_1 par m_1+m_2 et z_1 par z_2.

$z_M = a \cos(\omega_2 t+\pi) - z_2$.

Exprimer la pulsation ω_2 et la période T_2.

$\omega_2 = [2k/(m_1+m_2)]^{1/2}$; $T_2 = 2\pi/\omega_2$; **$T_2 = 2\pi/ [(m_1+m_2)/(2k)]^{1/2}$**.

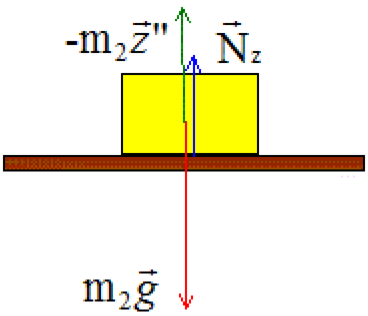
Condition de décollage.

Dans l'hypothèse d'un contact entre l'objet et le plateau, **exprimer la réaction $N_z(t)$** (composante de la réaction suivant l'axe z) qu'exerce le plateau sur l'objet.

Système : la charge de masse m_2 ; référentiel non galiléen : le plateau

Sur le schéma ci-dessous, le plateau se trouve au dessus de la position d'équilibre.

Avant décollage, dans ce référentiel, la charge m_2 est immobile : elle est soumise à son poids, à l'action du support et à une force d'inertie.



$$m_2\vec{g}+\vec{N}_z-m_2\vec{z}''=\vec{0}$$

Projection sur l'axe Oz : $-m_2g + N_z + (-m_2z'')=0$; $N_z = m_2(g+z'')$

Or $z'' = -\omega_2^2 z$ (dériver deux fois par rapport au temps z(t)).

Par suite : $N_z = m_2 (g - \omega_2^2 z)$ avec $\mathbf{z = a \cos (\omega_2 t+\pi)}$

$\mathbf{N_z = m_2 g - a m_2 \omega_2^2 \cos (\omega_2 t+\pi)} = \mathbf{m_2 g + a m_2 \omega_2^2 \cos (\omega_2 t)}$

Montrer que cette réaction est la somme d'une constante et d'une fonction sinusoïdale à expliciter.

$\mathbf{N_z = m_2 g - a m_2 \omega_2^2 \cos (\omega_2 t+\pi)}$.

Montrer qu si a est supérieure à une valeur notér a_{min}, l'objet posé sur le plateau décollera lors du mouvement.

Dès que N_z s'annule, le solide de masse m_2 décolle : $m_2 g - a_{mini} m_2 \omega_2^2 \cos (\omega_2 t+\pi)$.

$a_{mini}\omega_2^2 \cos (\omega_2 t+\pi) = g$.

Exprimer a_{mini} en fonction de g et ω_2.

La valeur maximale de $\cos (\omega_2 t+\pi)$ est 1 d'où $\mathbf{a_{mini} = g/\omega_2^2}$.

Etude du cas : a >> a_{min}.

A quel instant t' (exprimé en fonction de T_2) et à quelle position l'objet décolle t-il du plateau ?

$\omega_2^2 = g/a_{min}$; $N_z = m_2 g [1 - a/a_{min} \cos (\omega_2 t+\pi)]$.

Au moment du décollage $N_z=0$ soit : $1 = a/a_{min} \cos (\omega_2 t'+\pi)]$

$a_{min} /a = \cos (\omega_2 t'+\pi)$; or $a >> a_{mini}$ d'où $0 = \cos (\omega_2 t'+\pi)$

$\cos (3\pi/2) = \cos (\omega_2 t'+\pi)$; $3\pi/2 = \omega_2 t'+\pi$

$t' = \pi / (2\omega_2)$; avec $\omega_2 = 2\pi /T_2$ d'où $\mathbf{t' = 0,25 T_2}$.

Le décollage a pratiquement lieu au passage à la position d'équilibre z_2.

Quelle est l'altitude h atteinte par l'objet h sera exprimé en fonction de a, k, g, m_1 et m_2) ?

On considère le système { plateau + charge + ressorts }

L'origine des énergies potentielles est prise à la position d'équilibre z_2.

L'énergie mécanique initiale du système est sous forme potentielle élastique : $\mathbf{E_M = 2 * ½ k a^2} = \mathbf{k a^2}$.

Au passage à la position d'équilibre, l'énergie mécanique est sous forme cinétique : $\mathbf{E_M = ½(m_1+m_2)v^2}$.

La conservation de l'énergie mécanique conduit à : $\mathbf{v^2 = 2ka^2/(m_1+m_2)}$.

Au point le plus haut, l'énergie mécanique de la charge m_2 est sous forme potentielle de pesanteur : $E_{M2}= m_2gh$.

L'énergie mécanique de cette charge, au moment du décollage était : $E_{M2}=½m_2\mathbf{v}^2$.

Conservation de l'énergie mécanique : $h = \mathbf{v}^2/(2g)$; $\mathbf{h = ka^2/((m_1+m_2)g)}$.

h est comptée à partir de la position d'équilibre z_2. Par rapport à O, l'altitude atteinte est $h-z_2$.

Donner l'équation horaire du mouvement du plateau après décollage de l'objet.

Le mouvement du plateau est un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_1.

L'abscisse initiale est $-z_2$; la vitesse initiale est $v = a[2k/(m_1+m_2)]^{½}$.

On choisit comme origine de l'axe vertical la position d'équilibre z_1 et comme origine des dates, l'instant du décollage.

$z(t) = A \sin(\omega_1 t+B)$; $z(t=0) = z_2-z_1$ d'où $A \sin B=z_2-z_1$; l'amplitude A n'est pas nulle, donc $B=\arcsin((z_2-z_1)/A)$.

Déterminer notamment l'amplitude d'oscillation du plateau en fonction de a, z_1, z_2, m_1 et m_2.

On choisit l'origine des énergies potentielles à la position d'équilibre z_1.

Energie mécanique du plateau au moment du décollage : $E_{M1}=½m_1\mathbf{v}^2+k(z_2-z_1)^2$.

Au point le plus haut, l'énergie mécanique est sous forme potentielle élastique : $E_{M1}=kA^2$.

La conservation de l'énergie mécanique conduit à : $kA^2 = ½m_1\mathbf{v}^2+k(z_2-z_1)^2$.

$\mathbf{A = [\, m_1/(2k)v^2+(z_2-z_1)^2]^{½}}$. Or $v^2 = 2ka^2/(m_1+m_2)$.

$\mathbf{A = [\, m_1a^2/(m_1+m_2)+(z_2-z_1)^2]^{½}}$.

Déterminer l'équation qui permet de déterminer le temps t'' au bout

duquel l'objet retombe sur le plateau (la résolution n'est pas demandée).

Pour le plateau : $z(t) = A \sin(\omega_1 t+B)$.

Pour la charge m_2 : chute libre avec vitesse initiale $v_0 = a[2k/(m_1+m_2]^{½}$, vers le haut, et position initiale z_2-z_1.

On choisit comme origine de l'axe vertical la position d'équilibre z_1 et comme origine des dates, l'instant du décollage.

$z'' = -g$; $z'=v = -gt+v_0$; $z(t) = -½gt^2 + v_0t + (z_2-z_1)$.

Lorsque la charge retombe sur le plateau :

$A \sin(\omega_1 t''+B) = -½g\, t''^2 + v_0 t'' + (z_2-z_1)$.

travail et puissance

Une particule se déplace dans un champ de forces

$$F = \frac{25}{6} y\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (2z^2 - x)\vec{k}$$

1

Suivant la trajectoire définie par les équations paramétriques, dans le système des unités SI:

$x=3t$; $y=2t^2$; $z=t-2$

puissance

$$\boxed{\vec{F}.\vec{v}}$$

travail

$$\boxed{\int \vec{F}.\vec{v}dt}$$

1. Calculer la puissance reçue par la particule à l'instant t.
2. Quelle est la position de la particule lorsque cette puissance est minimale?
3. Calculer le travail fourni par le champ de forces entre les instants t_1=0s et t_2= 2s?
4. Quel est ce travail si la particule est astreinte à se déplacer en ligne droite de sa position à l'instant t_1=0 à sa position à l'instant t_2=2s? Conclusions?

corrigé

puissance :

$z-x = t-2 -3t = -2-2t$;

$2z^2-x = 2(t-2)^2-3t = 2t^2-11t + 8$

vecteur force ($25t^2/3$; $-2-2t$; $2t^2-11t + 8$)

vecteur vitesse : dérivée du vecteur position par rapport au temps

(3 ; 4t ; 1)

puissance : produit scalaire entre vecteur force et vecteur vitesse

$P= 12,5 *2t^2 + (-2-2t)*4t + 2t^2-11t + 8$

$P= 19t^2 -19t +8$

la puissance passe par une valeur extrème (mini ou maxi) lorsque sa dérivée par rapport au temps est nulle ; soit 38t-19 =0 ou t= 0,5 s

à t < 0,5 s, la dérivée est négative donc la puissance diminue, passe par un minimum à t=0,5 s puis croît pour t>0,5 s.

position de la particule à t=0,5 s :

$x= 3*0,5 = 1,5$; $y= 2*0,5^2 = 0,5$; $z= 0,5-2 = -1,5$.

travail entre t = 0 et t = 2s :

$$\boxed{\int_0^2 (19t^2-19t+8)dt=[\frac{19t^3}{3}-\frac{19t^2}{2}+8t]_0^2=28,66J}$$

si le déplacement s'effectue suivant un segment de droite AB, le travail est égal à :

$$\boxed{\vec{F}.\overrightarrow{AB}}$$

coordonnées de A (position initiale à t=0) : (0 ; 0 ; -2)

coordonnées de B (position finale à t=2) : (6 ; 8 ; 0)

vecteur déplacement : (6 ; 8 ; 2)

vecteur force ($25t^2/3$; $-2-2t$; $2t^2-11t + 8$)

travail = produit scalaire vecteur force par vecteur déplacement :

$50\,t^2+8(-2-2t)+2*(2t^2-11t+8) = 50\,t^2-38\,t$

à t= 2 s, ce travail est égal à : 140 J

le travail dépend du chemin suivi, les deux valeurs du travail étant différentes entre t=0 et t=2 s.

La force n'est pas conservative.

énergie potentielle

travail, puissance, énergie potentielle

1

potentiel de Morse

potentiel de Yukawa

L'énergie potentielle d'interaction entre les atomes d'une molécule diatomique est donnée par l'expression du potentiel de Morse : $E(r) = A(1-\exp-a(r-r_0))^2$.

r : distance variable entre les atomes, a : constante positive, r_0 et A : paramètres positifs dont il faudra déterminer la signification physique.

1. Quelle est l'expression des forces d'interaction moléculaires. Déterminer r, pour qu'il y ait équilibre ? Cet équilibre est-il stable ?
2. Retrouver ces résultats en utilisant l'énergie potentielle.
3. Calculer l'énergie de dissociation de la molécule.
4. L'énergie potentielle d'interaction entre 2 nucléons est donnée par le potentiel de Yukawa soit : $E(r) = -B\, r_0/r \exp-r/r_0$. En déduire les forces d'interaction nucléaires.
5. Représenter les forces précédentes et les comparer.

corrigé

référentiel du laboratoire supposé galiléen

La force d'interaction moléculaire est conservative et dérive du potentiel E(r)

$F_m(r) = -dE / dr = -2Aa \exp(-a(r-r_0)) (1-\exp(-a(r-r_0)))$.

il y a un équilibre lorsque cette force est nulle, c'est à dire lorsque $r = r_0$.

r_0 représente la distance moyenne entre les deux atomes constituants la molécule.

l'équilibre est-il stable ?

$-2Aa \exp(-a(r-r_0))$ est négatif.

si $r>r_0$, $-a(r-r_0)<0$ et $(1-\exp(-a(r-r_0)))$ est posittif : F_m attractive.

si $r<r_0$, $-a(r-r_0)>0$ et $(1-\exp(-a(r-r_0)))$ est négatif : F_m répulsive.

F_m est donc une force de rappel vers la position d'équilibre : celui ci est stable.

---

l'énergie potentielle passe t-elle par un extrémum ?

on dérive l'énergie potentielle :

$dE / dr = 2Aa \exp(-a(r-r_0)) (1-\exp(-a(r-r_0)))$

cette dérivée s'annule pour :$1-\exp(-a(r-r_0))=0$ soit $r = r_0$

r	0		r_0		$+\infty$
dérivée		-		+	
Energie potentielle	$A(1-e^{ar_0})^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	A

L'énergie potentielle passe par unminimum pour $r= r_0$, ce qui correspond à un équilibre stable.

énergie de dissociation

travail fourni par un opérateur extérieur pour séparer les deux atomes constituant cette molécule

$\delta W_{op} = -F_m\, dr$

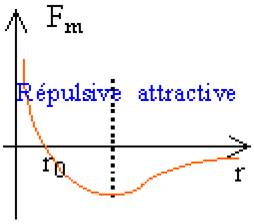
$$W=\int_{r_0}^{\infty}\underbrace{2Ae^{-a(r-r_0)}(1-e^{-a(r-r_0)})dr}_{dE}=A\left[(1-e^{-a(r-r_0)})^2\right]_{r_0}^{\infty}=A$$

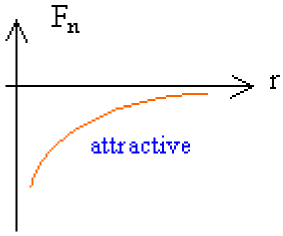
A représente l'énergie de dissociation de la molécule.

Les forces d'interaction nucléaires sont conservatives et dérivent d'une énergie potentielle.

$F_n(r) = -dE / dr$

$$F_n=-\frac{B}{r}\left(1+\frac{r_0}{r}\right)e^{-\frac{r}{r_0}}$$





les distances au niveau des molécules sont de l'ordre de 10^{-10}m ; les distances au niveau du noyau sont de l'ordre de 10^{-15}m. A court et moyen rayon d'action les forces nucléaires sont attractives, intenses lorsque les nucléons sont proches.

Les forces moléculaires sont attractives ou répulsives

2

force attractive

en $1/r^2$

Soit une particule ponctuelle M de masse m gravitant à la distance r =OM du centre d'un corps sphérique; elle est soumise à une force attractive : $\vec{f}=-\frac{K}{r^2}\vec{u}$ Le poids de la particule est négligeable.

1. Exprimer son énergie potentielle en fonction de K et de r.
2. La trajectoire de la particule étant circulaire de centre O, montrer que le mouvement est uniforme ; calculer l'énergie cinétique de la particule.
3. Calculer son énergie mécanique.
4. On provoque une diminution relative de 10^{-4} de l'énergie mécanique. Que deviennent la vitesse et le rayon de la trajectoire?
5. La distance initiale est OM=r_0. Quelles sont l'énergie minimale et la vitesse qu'il faut lui communiquer pour

l'arracher de l'attraction du corps sphérique.

corrigé

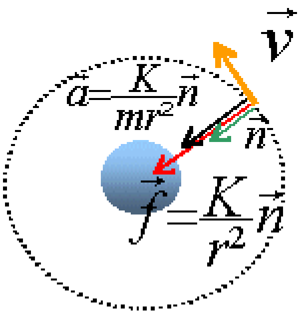
on choisit un référentiel lié au coprs sphérique.

La force ne dépend que de la variable r. Cette force dérive d'une énergie potentielle s'il existe une fonction E telle que f(r) = -dE/dr.

ou bien dE = -f(r) dr : il suffit de rechercher une primitive de f(r)

E=-K/r + Cte

Lorsque la distance r devient très grande cette force et l'énergie potentielle n'existent plus, la constante est prise égale à zéro lorsque r tend vers l'infini.



accélération

$$\frac{v^2}{r}\vec{n}=\frac{K}{mr^2}\vec{n}$$

vitesse

$$v^2=\frac{K}{mr}$$

la vitesse a une norme constante: le mouvement est uniforme

l'énergie cinétique vaut : Ec =½mv²=K/(2r).

l'énergie mécanique est la somme des énergie potentielle et cinétique:

E= -K/r+K/(2r) =-½ K/r

dérivée logarithmique de l'expression de l'énergie

dE/E = dr /r = -10^{-4}.

dérivée logaritmique de ll'expression de la vitesse : 2 dv/v = -dr/r

dv/v = -½ dr/r = + 0,5 10^{-4} *la vitesse augmente*.

arracher la particule de l'attraction du corps sphérique revient à lui fournir de l'énergie afin que son énergie totale devienne nulle.

énergie apportée par l'opérateur : Eop = $\frac{1}{2}K/r_0$

énergie cinétique qu'il faut lui fournir

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K/r_0$

d'où $v^2 = K/(mr_0)$

Aurélie 05/06

d'après concours interne du ministère de la défense : spétialité Télécommunication.

Transformateur monophasé

Les indices 1 indiquent le primaire et les indices 2 indiquent le secondaire.

La plaque signalétique d'un transformateur monophasé indique : 36 kVA ; 5000 / 240 V ; 50 Hz.

1. Rappeler la signification de ces indications et en déduire les valeurs du rapport de transformation et des courants nominaux.
2. Au cours d'un essai à vide on mesure U_1= 5000 V, I_{1V}=0,7 A, P_{1V}=500 W, U_{2V}=240 V.
   - Dessiner le schéma du montage à réaliser et préciser, si nécessaire les caractéristiques de certains appareils de mesures.

   La résistance de l'enroulement primaire vaut R_1=1,3 Ω, calculer la valeur des pertes fer nominales.
3. Au cours d'un essai en court-circuit, on mesure U_{1cc}= 400 V, I_{1cc}=6,0 A, P_{1cc}=700 W.
   - Pourquoi faut-il éviter d'utiliser un ampèremètre au secondaire pour mesurer I_{2cc} ?
   - Les pertes fer étant proportionnelles au carré de la tension primaire, montrer qu'elles sont négligeables en court-circuit. Que représente alors la puissance P_{1cc}?
   - Calculer I_{2cc}.

- Calculer l'impédance, la résistance et la réactance du modèle équivalent du transformateur "vu" du secondaire.

corrigé

signification de ces indications :

36 kVA puissance apparente ; 5000 V : tension au primaire ; 240 V tension à vide au secondaire ; 50 Hz : fréquence du courant.

valeurs du rapport de transformation m :

$m = U_2/U_1 = 240/5000 = 0{,}048$ (abaisseur de tension)

courants nominaux : $I_1 = S/U_1 = 36000/5000 = 7{,}2$ A ; $I_1/I_2 = m$ soit $I_2 = I_1/m = 7{,}2/0{,}048 = 150$ A.

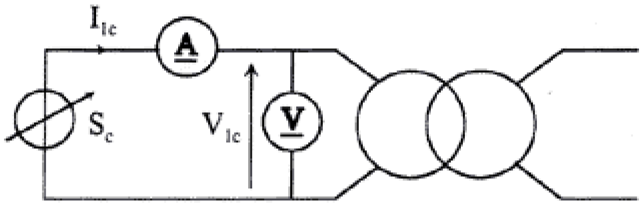


Figure 3

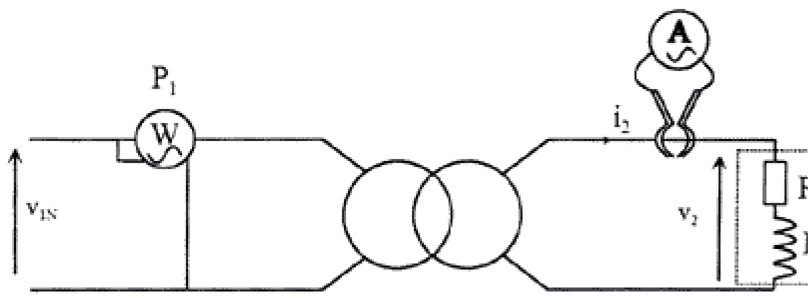


Figure 4

wattmètre électrodynamique ; ampèremètre ferromagnétique

valeur des pertes fer nominales :

la puissance absorbée à vide correspond aux pertes dans le fer

p_F et aux pertes par effet Joule $p_J=R_1I^2_{1V}$ dans le primaire.

$p_J=R_1I^2_{1V} = 1,3*0,7^2 = 0,64$ W

l'essai à vide permet de déterminer les pertes dans le fer lorsque la tension primaire est égale à sa valeur nominale, les pertes joule étant très faibles, voir négligeables. $p_F = P_{1V} - p_J= 500-0,64 = 499,4$ W.

Les pertes fer sont dues : - à l'hystérésis du matériau ferromagnétique ; - aux courants de Foucault.

éviter d'utiliser un ampèremètre au secondaire pour mesurer I_{2cc} car l'intensité du courant débité par le secondaire n'est limitée que par l'impédance du secondaire ; Or celle-ci étant très faifle, l'intensité sera très élevée.

Les pertes fer étant proportionnelles au carré de la tension primaire, elles sont négligeables en court-circuit :

lors du fonctionnement à vide (U_{1V}= 5000 V) les pertes fer valaient environ 500 W ; sous une tension U_1=400 V soit 5000/400 =12,5 fois plus faible, les pertes fer seront 12,5²=156 fois plus faibles ; donc voisines de 500/156 = 3,2 W, valeur très inférieure à 700 W.

la puissance P_{1cc} représente les pertes par effet joule dans les fils de cuivre.

Calcul de $I_{2cc} =I_{1cc}/m =6/0,048 =125$ A.

impédance, la résistance et la réactance du modèle équivalent du transformateur "vu" du secondaire :

impédance $Z= mU_{1cc}/I_{2cc}=0,048 *400/125 =0,154\ \Omega$.

résistance : $P_{1cc}= RI^2_{2cc}$ soit $R =P_{1cc}/ I^2_{2cc} = 700/125^2 =0,045\ \Omega$.

réactance $L\omega$: $Z^2 = R^2 + (L\omega)^2$ soit $(L\omega)^2 = z^2-R^2 = 0,154^2-0,045^2 =0,0217$; $X=L\omega =0,0217^{½} =0,147\ \Omega$.

Mouvement d'un train : accélération, freinage, relevement d'un

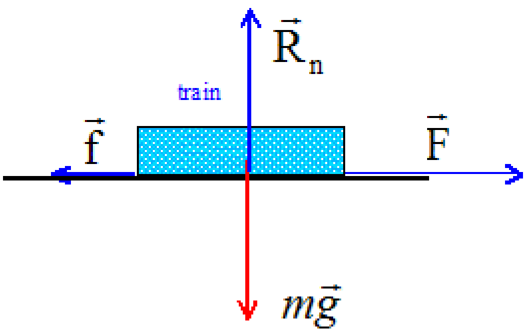
virage concours kiné EFOM 1999

Un train comprend une motrice de masse M=50 t et 5 wagons ; chacun a une masse de 10 t. Au cours du démarrage il atteint la vitesse de 40 $m.s^{-1}$ en 40 s.

Les forces de frottements représentent 100 N par tonne en mouvement. La voie est rectiligne et horizontale.

Déterminer la force de traction, d'intensite constante, développée par le moteur de la locomotive.

Système : le train ; référentiel terrestre supposé galiléen.



$$\vec{F} + \vec{f} + \vec{R}_n + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\boxed{F - f = ma}$$

accélération = variation de la vitesse / durée de cette variation

a = 40/40 = **1 m s^{-2}**.

Force motrice :

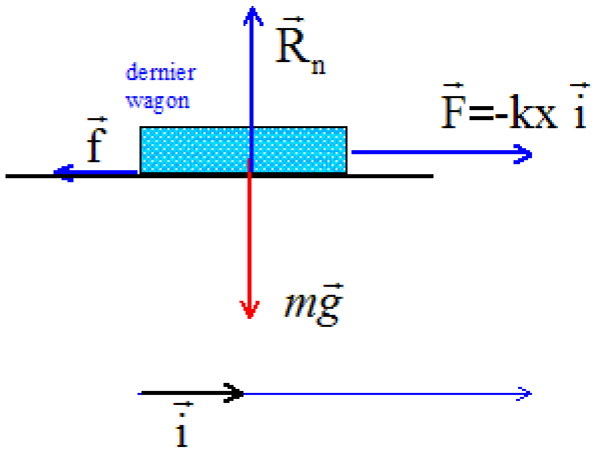
F= f+ma avec m = 100 t = 10^5 kg et f = 100*100 = 10^4 N

F= 10^4 + 10^5*1 = **$1,1\ 10^5$ N**.

Un ressort de constante k=10^5 N m^{-1} est placé entre le dernier et l'avant dernier wagon.

Déterminer l'alongement x de ce ressort au cours de la phase de démarrage étudiée précédemment.

Système : le dernier wagon ; référentiel terrestre supposé galiléen.



$$\vec{F} + \vec{f} + \vec{R}_n + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\boxed{F - f = ma}$$

m = masse du dernier wagon : m = 10 t = 10^4 kg

f = 100*10 = 10^3 N ; a = 1 m s^{-2}.

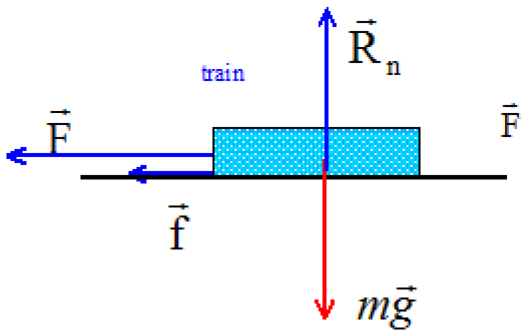
F= f+ma = $10^3 + 10^4 = 1{,}1\ 10^4$ N

allongement : x = F/k = $1{,}1\ 10^4 / 10^5$ = 0,11 m = **11 cm**.

Le train ralentit : le freinage s'exerce sur tous les essieux du convoi à raison de 1900 N par tonne du mouvement. La voie est rectiligne, horizontale.

Déterminer la valeur algébrique de l'accélération au cours de cette nouvelle étape.

Système : le dernier wagon ; référentiel terrestre supposé galiléen.



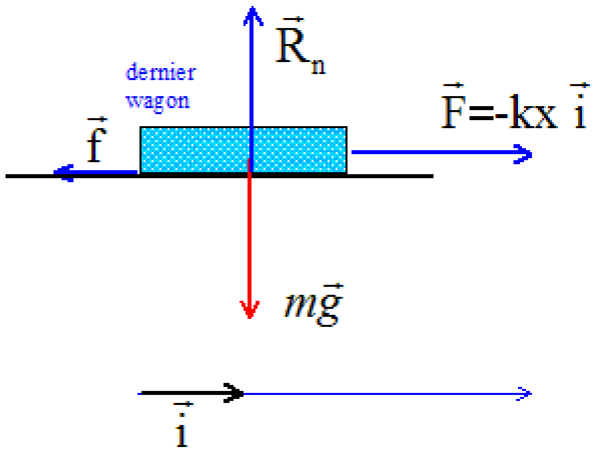
$$\vec{F} + \vec{f} + \vec{R}_n + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\boxed{-F - f = ma}$$

m = 100 t = 10^5 kg ; f = 100*100 = 10^4 N ; F= 100*1900 = 1,9 10^5 N

a = $-(1{,}9\ 10^5 + 10^4) / 10^5$ = **- 2 m s^{-2}**.

Déterminer l'allongement du ressort placé entre le dernier et l'avant dernier wagon du train.



$\vec{F}+\vec{f}+\vec{R}_n+m\vec{g}=m\vec{a}$

$\boxed{F-f=ma}$

m = masse du dernier wagon : m = 10 t = 10^4 kg

f = 100*10 = 10^3 N ; a = -2 m s^{-2}.

F= f + ma = 10^3 -2 10^4 = -1,9 10^4 N

<u>allongement</u> : x = F/k = -1,9 10^4 / 10^5 = -0,19 m = **-19 cm**.

Le signe moins traduit le fait que le ressort est comprimé.

En négligeant les forces de frottement par rapport aux forces de freinage et en supposant que le travail des forces de freinage se transforme intégralement en chaleur, **<u>déterminer la quantité de chaleur qui apparaît dans les freins d'un wagon sur une distance de freinage de 100 m</u>**.

Force de freinage (supposée constante) sur un wagon de masse 10 t : F= 1900*10 = 1,9 10^4 N.

Travail résistant de cette force au cours d'un déplacement d =100 m :

W= -F d = -1,9 10^4 *10 = **-1,9 10^6 J**.

Les freins comportent sur chaque roue un dique d'acier de masse m=10 kg. La chaleur massique de l'acier est c= 500 J.kg^{-1}.°C^{-1}. Si les disques n'étaient pas refroidis, **<u>quelle serait l'élévation de la température de chacun de ces quatre disques d'un wagon au cours du freinage sur la distance de 100 m</u>**.

Q= m c Δθ.

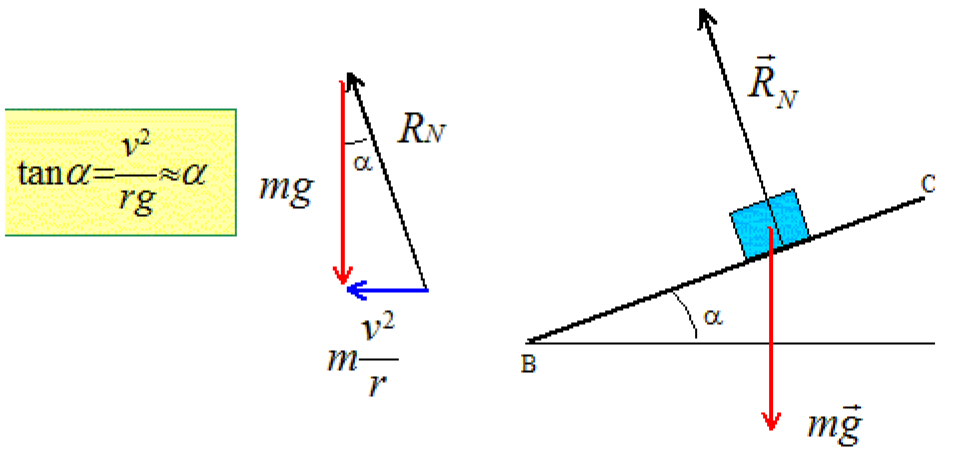
m = 40 kg : masse des 4 disques d'acier ; Δθ : élévation de la température

$Q = 1{,}9\ 10^6$ J

$\Delta\theta = Q/(mc) = 1{,}9\ 10^6 / (40*500) =$ **95 °C**.

Le train parcourt une courbe horizontale, circulaire, à la vitesse constante v=30 m.s^{-1}. Le rail extérieur est à un niveau supérieur par rapport au rail intérieur ; la dénivellation est h=12 cm. De ce fait la réaction des rails est perpendiculaire aux axes des roues. Ces dernières ne subissent pas d'efforts latéraux. On donne g=10m.s^{-2} ; écartement des rails : d=1,44 m. Soit α l'inclinaison du plan des rails par rapport à l'horizontale ; cet angle étant faible on peut utiliser l'approximation suivante tan α =sin α.

Faire un schéma et représenter les forces exercées sur le train au cours de cette nouvelle étape.



avec r : rayon de la courbe.

Donner l'expression du rayon r de la courbe décrite en fonction de g, h, d et v.

sin α = h/d voisin de tan α, voisin de α (radian)

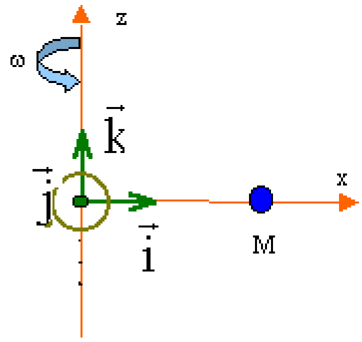
d'où : $h/d = v^2/(rg)$ soit $\mathbf{r = v^2 d/ (hg)}$.

$r = 30^2 *1{,}44 / (0{,}12*10) = 900*1{,}44 / 1{,}2 = 900*1{,}2 = 1080$ m = **1,08 km**.

tige en rotation

travail, puissance, énergie

Un solide ponctuel M de masse m glisse sur une tige horizontale ; cette tige tourne à la vitesse ω constante autour d'un axe vertical Oz fixe. Les frottements sont négligés.



On choisit un référentiel $\mathcal{R}$ lié à la tige :

1. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du solide.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de M. Peut-on observer des oscillations ?
3. Le solide M est alors relié à un ressort (raideur k et de longueur à vide l_0). Etablir l'équation différentielle du mouvement. Peut-on observer des oscillations ?

corrigé

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la tige, la vitesse du point matériel s'exprime suivant : $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{i}$

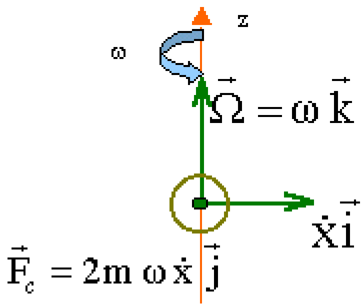
l'énergie cinétique de M s'écrit : $E_c = \frac{1}{2} m x'^2$.

La tige est horizontale, alors l'énergie potentielle de pesanteur ne varie pas et on peut la choisir arbitrairement nulle (en prenant l'origine des altitudes en O, origine du repère)

le référentiel $\mathcal{R}$ n'est pas galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie :

force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_c = -m\,(\underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R}}_{\text{Accélération Coriolis}})$$



La puissance de la force de Coriolis est nulle (la force de Coriolis est perpendiculaire au vecteur vitesse).

force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_e = -m\,\vec{a}_e = -m\,\underbrace{(-\omega^2\,x\,\vec{i})}_{\text{Accélération d'entraînement}}$$

La puissance de cette force, colinéaire au vecteur vitesse n'est pas nulle : cette force dérive d'une énergie potentielle.

travail de la force d'entraînement :

$$\partial W = \vec{F}_e . d\vec{l} = m\,\omega^2\,x\,\vec{i}.dx\,\vec{i} = m\,\omega^2\,x\,dx$$

l'énergie potentielle est l'opposé du travail :

$dE_p = -m\omega^2 x\,dx$

$E_p = -\frac{1}{2}m\omega^2x^2 + Cte$

On choisit l'origine de cette énergie potentielle à l'abscisse x=0, dans ce cas la constante d'intégration est nulle.

Energie mécanique de M : $\frac{1}{2}\,m\,x'^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

équation différentielle du mouvement de M :

en absence de frottement l'énergie mécanique est constante (la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est nulle)

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement de M, dériver l'expression de l'énergie par rapport au temps.

dérivée de x'^2 : $2\,x''\,x'$

dérivée de x^2 : $2\,x\,x'$

ω est une constante.

d'où : ½ m 2 x" x' - ½ mω² 2 x x' =0

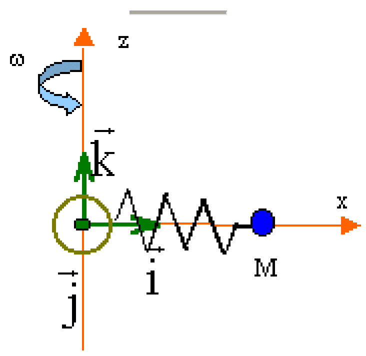
diviser par m x' chaque terme : x" -ω² x =0.

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

x = A ch(ωt) + B sh(ωt)

A et B sont des constantes qui dépendent des conditions initiales, non indiquées dans ce problème.

Le mouvement ne peut pas être oscillatoire.



A l'énergie mécanique précédente il faut ajouter l'énergie potentielle élastique :

$E_{pé} = ½ k(x-l_0)^2 + Cte$

l'origine de cette énergie potentielle est prise à l'abscisse $x = l_0$. Dans ce cas la constante est nulle.

L'énergie mécanique s'écrit alors : $½ m x'^2 - ½ m\omega^2 x^2 + ½ k(x-l_0)^2$.

celle ci est constante en l'absence de frottement

équation différentielle du mouvement de M :

la dérivée de l'énergie mécanique par rapport au temps est nulle

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement de M, dériver l'expression de l'énergie par rapport au temps.

d'où : $½ m 2 x'' x' - ½ m\omega^2 2 x x' + ½ k 2 (x-l_0) x' = 0$

diviser par m x' , supposée non nulle, chaque terme : $x'' - \omega^2 x + k/m\,(x-l_0) = 0$.

On pose $\omega_0^2 = k / m$

$$x'' - \omega^2 x + \omega_0^2 x = kl_0/m$$

$$x'' + (\omega_0^2 - \omega^2)\,x = \omega^2 l_0 \quad (1)$$

solution particulière de l'équation avec second membre :

$$x_e = \omega^2 l_0 / (\omega_0^2 - \omega^2).$$

On observe des oscillations autour de cette position d'équilibre si $\omega_0^2 > \omega^2$

Dans ce cas, solution générale de l'équation sans second membre :

$$x_1 = A_1 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\,t + A_2 \sin\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\,t$$

La solution générale de l'équation différentielle (1) est : $x_e + x_1$.

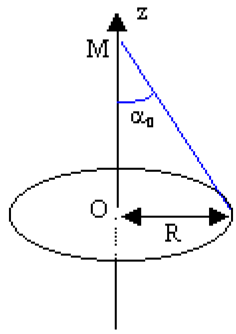
A_1 et A_2 sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales.

La période des petites oscillations de M dans le référentiel lié à la tige est :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Une planète bien particulière

1. On considère un disque de rayon R d'épaisseur négligeable, de masse surfacique σ. Calculer le champ de gravitation r en un point M d'abscisse z_0 de l'axe Oz du disque d'où l'on voit le disque sous l'angle α_0.

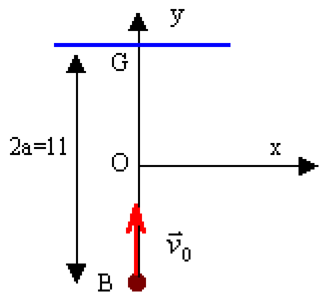


2. Le disque a maintenant une épaisseur h; on note ρ sa masse volumique. Montrer que le champ de gravitation g0 au voisinage de O, sur l'axe Oz est égal à :

$$g_0 = G2\pi\rho R\left(\frac{h}{R} + \left(1 - \sqrt{\frac{h^2}{R^2} + 1}\right)\right)$$

   - si h / R = 10^{-3} calculer g_0 à 1% près.
   - une planète de masse M= 6 10^{24} kg, est supposée avoir la forme d'un disque de rayon R, d'épaisseur h telle que h/R= 10^{-3}, de masse volumique r= 5500 kg/m^3. Le point O est au centre de la face nord. Calculer h, R et g_0. Comparer g_0 à la valeur 9,8 m/s^2.
   - Comment évolue le champ de gravitation quant on s'éloigne de O , en se dirigeant vers le bord du disque. En déduire la position de repos des habitants de cette planète.

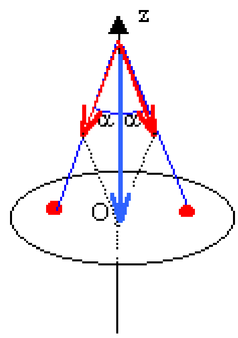
3. On suppose que cette planète tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω, de période T=24h.
   - Comparer le champ de gravitation et l'accélération d'entraînement dans la zone équatoriale (bord du disque)
   - Dans quelle zone la position de repos vertical est-elle possible?
4. tir au but : Dans le repère ci dessous, le gardien G a pour coordonnées (0; a); le ballon est au point B (0 ;-a). Le tireur communique au ballon une vitesse initiale v_0 = 20m/s, dirigée vers O. On néglige les frottements de l'air et sur le sol. 2a=11 m.



- Montrer que le mouvement du ballon est décrit par les équations : $x'' = \omega^2 + 2\omega y'$ et $y'' = \omega^2 - 2\omega x'$
- Déterminer les équations paramètriques du mouvement en posant $w = x + i\,y$.
- Simplifier les équations sachant que le temps de vol T du ballon jusqu'au but est tel que $\omega T \ll 1$.
- Calculer le temps de transit T et l'abscisse X du point où la trajectoire du ballon coupe la ligne de but. Conclure.

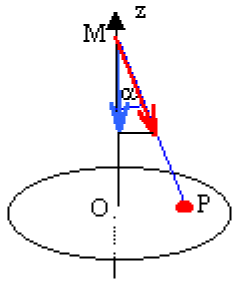
corrigé

Le champ de gravitation est porté par l'axe Oz.



Tous les plans contenant un diamètre du disque et l'axe Oz sont des plans de symétrie pour la distribution de masse. Ils contiennent donc le vecteur champ de gravitation qui est par conséquent colinéaire à leur intersection c'est à dire Oz.

La contribution au champ crée en M par un petit élément de surface dS, de masse σdm, situé en P est :



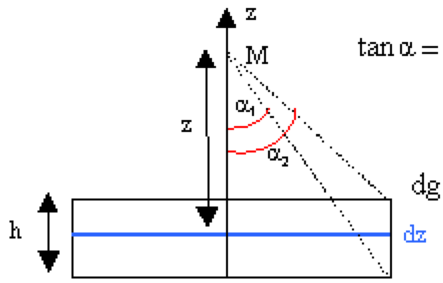
$$d\vec{g} = G\sigma\, dS\,\frac{\vec{PM}}{PM^3} = -G\sigma\,\frac{dS\cos\alpha}{PM^2}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{g} = G\sigma\int d\Omega\,\vec{u}_z = -G\sigma\, 2\pi\,(1-\cos\alpha)\,\vec{u}_z$$

Au voisinage de O, $\alpha = 90°$ et g voisin de $g_0 = G\sigma 2\pi$, avec G constante de gravitation.

Ce calcul est identique au calcul du champ crée par un disque uniformément chargé en surface, en remplaçant $1 / 4\pi\varepsilon_0$ par G

La contribution de l'épaisseur dz de masse ρdS dz au champ crée en M est :



$$\tan\alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = R\tan\alpha \Rightarrow dz = -\frac{R\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$dg = G\rho\, dz\, 2\pi\,(1-\cos\alpha)$$

$$dg = G\rho\, 2\pi\,\left(dz + R\,\frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$$

intégrer dz entre 0 et h

intégrer $\cos\alpha d\alpha / \sin^2\alpha = - d(1/\sin\alpha)$ entre α_1 et α_2

$g = G\rho\, 2\pi\, h - G\rho\, 2\pi\, R\,(1/\sin\alpha_2 - 1/\sin\alpha_1)$.

avec $\sin\alpha_1 = R\,(R^2 + z_0^2)^{-½}$ et $\sin\alpha_2 = R\,(R^2 + (h+z_0)^2)^{-½}$

au voisinage de O, $z_0 = 0$ et $g_0 = G\rho\, 2\pi\, h - G\rho\, 2\pi\, R\,(1 + h^2/R^2)^{½} - 1)$.

mettre $G\rho\, 2\pi\, R$ en facteur commun :

$g_0 = G\rho\, 2\pi\, R[\, h/R + 1 - (1 + h^2/R^2)^{½}]$

on peut négliger le terme h^2/R^2 du second ordre devant 1 si h/R vaut 10^{-3}.

g_0 voisin de $G\rho\, 2\pi\, h$.

la masse de la planète est celle d'un cylindre de rayon R et de hauteur h

$M = \pi R^2 \rho h$ avec $R = 10^3$ h, d'où $M = \pi\, 10^6 \rho h^3$

$M = 10^6 * 3.14 * 5500\, h^3 = 6\, 10^{24}$ kg

d'où $h^3 = 0,347\, 10^{15}$ et h = 70 km et R = 70000 km.

alors $g_0 = 6,67\, 10^{-11} * 5500 * 2 * 3,14 * 70\,000 = 0,16$ m/s².

valeur très inférieure à 9,8 m/s².

Quand on s'éloigne du centre O, le champ acquiert une composante radiale; il devient radial sur les bords du disque.

rotation de la planète :

Le champ de gravitation diminue lorsque l'on s'approche du bord du disque
.

L'accélération d'entraînement est égale à $\omega^2 R$.

T= 24 *3600 = 86400 s; fréquence : 1/86400 = 1,157 10^{-5} Hz

$\omega = 2\pi f$ = 6,28 * 1,157 10^{-5} = 7,26 10^{-5} rad/s.

R= 70 000 km = 7 10^{7} m

$\omega^2 R$ = (7,26 10^{-5})² * 7 10^{7} = 0,37 m/s².

cette valeur est 2 fois plus grande que g_0; les habitants sont satellisés.

La direction de repos est celle de la pesanteur, somme vectorielle de la force de gravitation et de la dorce d'entrainement.

La force de gravitation possède une composante axiale et une composante radiale centripète; la force d'entrainement est radiale centrifuge.

lorsque la force centrifuge compense la composante radiale de la force de gravitation, un habitant occupe une position de repos immobile.

tir au but :

Au voisinage de O le champ de gravitation est axial et uniforme. La force de gravitation et l'action du sol se neutralisent.

Il reste la force d'entrainement de composantes ($m\omega^2 x$; $m\omega^2 y$)

et la force de Coriolis :

$$\vec{F}_{coriolis} = -2m(\vec{\omega} \wedge \vec{v})$$

de composantes : $2m\omega y'$ et $-2m\omega x'$.

en projection sur le plan (O,x,y) le principe fondamental s'écrit :

$x'' = \omega^2 x + 2\omega y'$ et $y'' = \omega^2 y - 2\omega x'$.

poser w = x + iy ; w'=x'+iy' et w"=x"+iy"

faire la somme x"+iy" en partant des deux équations ci dessus :

$x''+iy'' = \omega^2(x+iy) + 2\omega(y'-ix')$

$y'-ix' = -i^2(y'-ix') = -i(iy' = x') = -iw$

$w'' = \omega^2 w - 2 i \omega w'$

$w'' + 2 i \omega w' - \omega^2 w = 0$.

équation caractéristique associée : $r^2 + 2 i \omega r - \omega^2 = 0$

$r = - i \omega$

solution de l'équation différentielle du second ordre

$w = (A + B t) \exp(- i \omega t)$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales.

$-ia = A$ (position initiale du ballon)

$w' = [- i \omega(A + B t) + B]\exp(- i \omega t)$

$i v_0 = - i \omega A + B = \omega a + B$ (vitesse initiale du ballon) --> $B = i v_0 - \omega a$

$A + Bt = -i a + i v_0 t - \omega a t$

$w = (-i a + i v_0 t - \omega a t) \exp(- i \omega t) = (-i a + i v_0 t - \omega a t) [\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)]$

$x = -\omega a t \cos(\omega t) + (a - v_0 t) \sin(\omega t)$

$y = (-a + v_0 t) \cos(\omega t) + \omega a t \sin(\omega t)$

si $\omega t \ll 1$ alors $\cos(\omega t)$ voisin de 1 et $\sin(\omega t)$ voisin de ωt

x voisin de : $-\omega a t + (a - v_0 t)\omega t = -v_0 \omega t^2$.

y voisin de : $-a + v_0 t + \omega^2 a t^2$.

le temps de vol est $T = 2a/v_0 = 11 / 20 = 0,55$ s

l'abscisse du ballon au niveau du but est : $X = -20 * 7,26\ 10^{-5} * 0,55^2 = -4\ 10^{-4}$ m

X est négligeable et le gardien ne doit pas bouger .

Relèvement d'un virage, RLC triphasé, hydraulique : Venturi (ingénieur territotial 2009)

<u>Mécanique : relèvement d'un virage</u>.

Un train est composé de deux motrices de 34 tonnes chacune et de trois voitures remorquées de 24 tonnes chacune. Chaque motrice développe une puissance de 260 kW chacune.

Le démarrage sur voie horizontale rectiligne utilise 80 % de la puissance totale reçue par le train et s'effectue en 20 secondes

Calculer la vitesse (en km/h) atteinte par le train.

Energie acquise par le train = 0,8 * puissance * durée

$E = 0,8*2*260\ 10^3*20 = 8,32\ 10^6$ J

Cette énergie se retrouve sous forme cinétique : $½mv^2$ avec m = 34*2+3*24 = 140 t = $1,4\ 10^5$ kg.

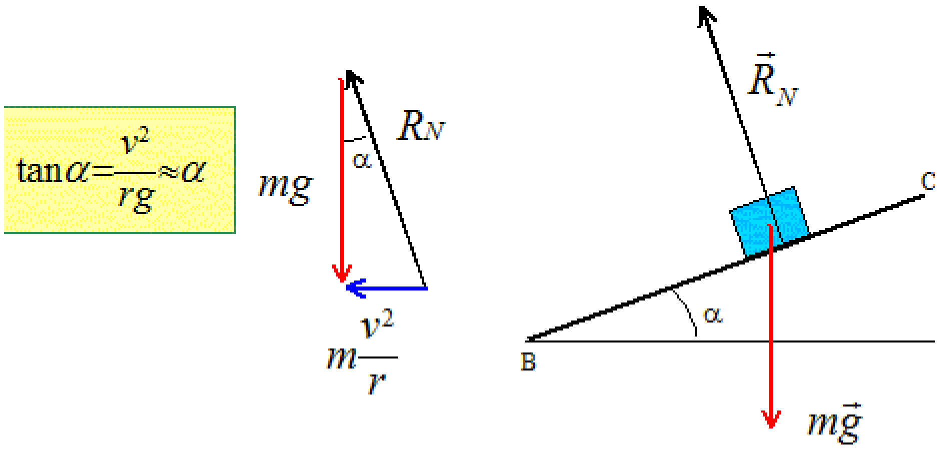
$v^2 = 2*8,32\ 10^6 / 1,4\ 10^5 = 118,9$; v = 10,9 m/s = 10,9*3,6 km/h = **39,2 km/h**.

Calculer l'accélération supposée constante au cours du démarrage.

$a = \Delta v / \Delta t = 10,9/20 = 0,545$ ~**0,55 m s^{-2}**.

La vitesse précédente étant maintenue, le train négocie une courbe de 712 m de rayon.

Déterminer l'angle que fait le plan de la voie ferrée avec le plan horizontal pour que le virage soit entièrement sécurisé. Effectuer le schéma des forces appliquées au centre de gravité dans le plan vertical (g = 9,81 m s^{-2}).



tan α = $10{,}9^2$ / (712*9,81) =0,017 ; **α =0,97 °**.

En déduire la hauteur approximative dont est surélévé l'un des rails par rapport à l'autre, la largeur de la voie étant 1,44 m.

Soit α l'inclinaison du plan des rails par rapport à l'horizontale ; cet angle étant faible on peut utiliser l'approximation suivante tan α =sin α.

sin α = h / 1,44 ; h = 1,44 sin 0,97 = 0,025 m = **2,4 cm**.

Electricité : RLC triphasé.

On soumet une bobine (résistance R, inductance L) à une tension continue de 120 V. Le courant qui la traverse a pour intensité I=3 A. Si on soumet cette bobine a une tension alternative sinusoïdale (230 V- 50 Hz) le courant qui la traverse a pour intensité efficace 2,875 A.

En déduire les valeurs de la résistance R, de l'impédance réelle Z, de l'inductance L et du déphasage de l'intensité par rapport à la tension aux bornes de la bobine.

En courant continu la bobine se comporte comme un conducteur ohmique : R= U/I = 120/3 = **40 Ω**.

En courant alternatif, l'impédance vaut : $Z = (R^2+(L\omega)^2)^{½}$ avec ω = 2*3,14*50 = 314 rad/s.

de plus $Z = U_{eff} / I_{eff}$ = 230 / 2,875 =**80 Ω**.

Inductance : $R^2+(L\omega)^2 = Z^2$; $(L\omega)^2 = Z^2 - R^2 = 80^2-40^2$ =4800 ; Lω = 69,28 ; L = 69,28/314 = **0,22 H**.

Déphasage : l'intensité est en retard sur la tension d'un angle φ tel que tan φ = Lω/R = 69,28/40 =1,732 ; **φ = -60°**.

Un condensateur de capacité C est relié en série avec la bobine précédente. L'ensemble est soumis à une tension alternative sinusoïdale (230 V -50 Hz).

Le courant qui la traverse a toujours pour intensité efficace 2,875 A.

En déduire l'impédance réelle du condensateur et la valeur C de sa capacité.

Impédance Z de l'ensemble : 230 / 2,875 = **80 Ω**.

Impédance complexe de l'ensemble : $\underline{Z} = R + j(L\omega -1/(C\omega))$

module de $\underline{Z}$ = impédance réelle $Z = [R^2 + (L\omega -1/(C\omega))^2]^{½}$ = 80 **Ω**.

Or $[R^2 + (L\omega)^2]^{½}$ = 80 **Ω**.

$R^2 + (L\omega -1/(C\omega))^2 = R^2 + (L\omega)^2$; $(L\omega -1/(C\omega))^2 =(L\omega)^2$;

Lω -1/(Cω) = + Lω et Lω -1/(Cω) = - Lω soit 1/(Cω) = 2 Lω.

Impédance du condensateur : 2 Lω = 2*69,28 = 138,56 ~**139 Ω**.

Capacité : C = 1/(138,56*314) =**2,3 10^{-5} F**.

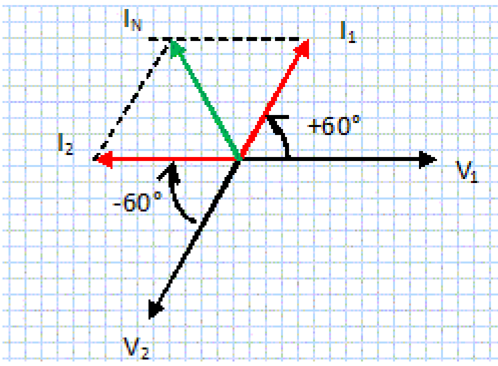
On place maintenant en série une résistance R' = 40 ohms et un condensateur de réactance -69,28 ohms entre la phase 1 et le neutre d'une alimentation triphasée (230 V - 400 V - 50 Hz) tandis que l'on place la bobine de la question ci-dessus entre la phase 2 et le neutre.

A l'aide de la représentation de Fresnel, déterminer la valeur efficace de l'intensité dans le neutre.

Impédance de la branche R' condensateur en série : Z = $(40^2+69{,}28^2)^{½}$= **80,44 Ω**.

Intensité efficace $I_{1\ eff}$ = 230/80,44 =2,86 A

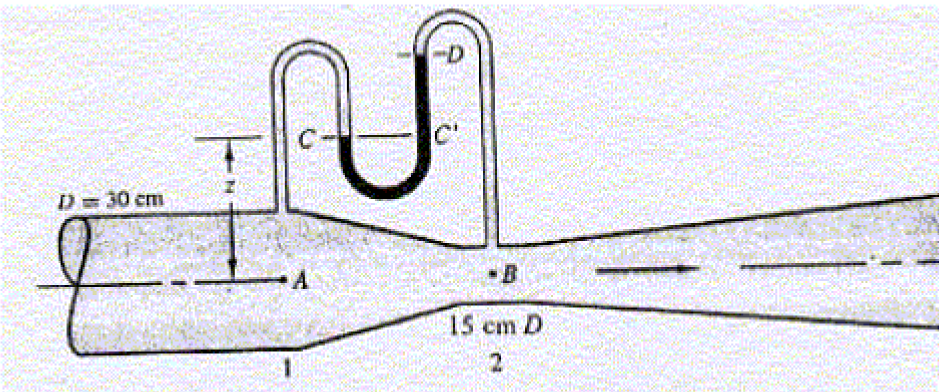
Déphasage : intensité en avance sur la tension tan φ '= 69,28/40 =1,732 ; **φ '=+60°**.



Intensité efficace dans le neutre : **2,86 A**.

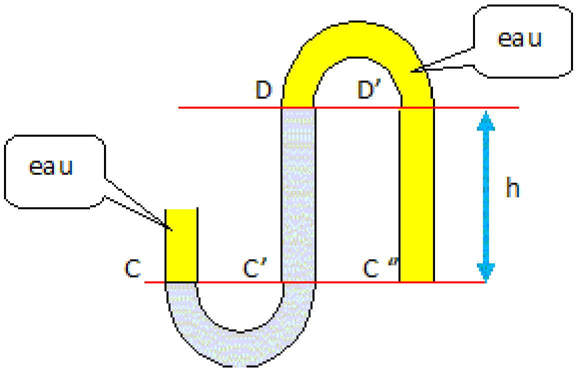
Hydraulique.

De l'eau (en gris sur la figure) circule dans un tuyau de Venturi de diamètres 30 cm et 15 cm. Le manomètre différentiel indique h = 1,0 m, distance C'D sur la figure. La densité du liquide manométrique (en noir) est de 1,25.



Calculer le débit de l'eau.

On prendra g = 9,81 m s^{-2} ; pour un tube de Venturi P_A-P_B >0.



$P_{C'}-P_D = P_C-P_D = \rho_{liquide}\, gh$; $P_{C''}-P_{D'} = P_{C''}-P_D = \rho_{eau}\, gh$;

$P_C-P_{C''}=P_A-P_B = (\rho_{liquide} - \rho_{eau})gh = (1250-1000)*9{,}81*1{,}0 = 2452{,}5$ Pa.

Conservation du débit volumique :

$S_A\, v_A = S_B\, v_B$ avec $S_A = 4\, S_B$ donc $v_A = 0{,}25\, v_B$.

Relation de Bernoulli entre B et A, points dans le même plan horizontal.

$½\rho_{eau}v^2_B + P_B = ½\rho_{eau}v^2_A + P_A$;

$P_A-P_B = ½\rho_{eau}(v^2_B - v^2_A) = ½\rho_{eau}(v^2_B - 0{,}25^2\, v^2_B) = ½\rho_{eau} *0{,}9375v^2_B$

$0{,}5*1000*0{,}9375\, v^2_B = 2452{,}5$

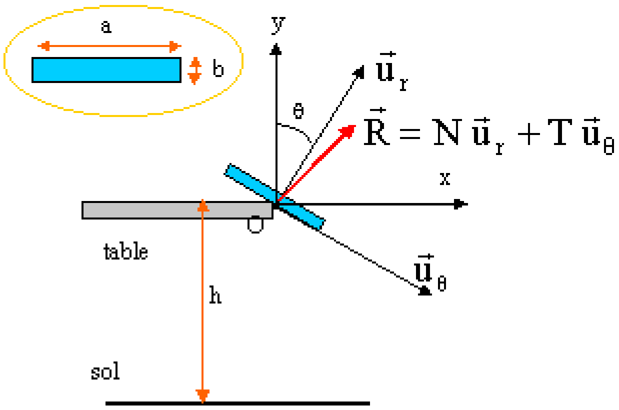
$v^2_B = 5{,}23$; $v_B = 2{,}29$ m/s

Débit volumique : $S_B\, v_B = 3{,}14*0{,}075^2 *2{,}29 = 0{,}040$ m^3/s = **40 L/s**.

position instable - glissement - chute

Un parallélépipède rectangle droit, homogène, noté S, de dimensions a, b, c, de centre d'inertie G ,de masse m est posé sur le bord d'une table. Dans cette position instable, il subit une action très faible qui provoque son basculement autour de O ,sans lui communiquer de vitesse initiale. Au début du mouvement il n'y a pas de glissement en O, l'action de la table est modélisée par une force **R**. L'axe parallèle au bord de la table passant par O est noté Δ. Le moment d'inertie du solide S par rapport à Δ est : $J_{\Delta} = m/3\, [a^2/4 + b^2]$.

Les grandeurs écrites en **bleu** et **gras** sont des vecteurs.



1. Le solide est-il un système conservatif ?
2. Déterminer θ' et θ '' en fonction de θ.
3. Exprimer T et N en fonction de θ .
4. Représenter T / (mg) et N / (mg) en fonction de θ .(a = 10 cm et b= 1cm).
5. Le solide S commence à glisser pour θ = π/4. Quel est le coefficient de frottement noté f.
6. Chute du solide S :
   A partir du moment où le solide S commence à glisser, il quitte rapidement la table et son mouvement est une chute libre.
   Déterminer la valeur de θ' pour θ = π/4.
   - Les frottements sont négligeables ; montrer que le mouvement de G, centre d'inertie du solide, s'effectue dans un plan vertical.
   - La vitesse de rotation reste-t-elle constante ?
   - Déterminer les équations horaires du mouvement de G. En déduire le temps de chute si h= 0,8 m.
   - De quel angle a tourné le solide S lorsqu'il touche le sol ?

corrigé

relation entre θ et θ ' :

système étudié : le solide S ; référentiel galiléen lié à la table.

Tant que le solide S ne glisse pas, la puissance de l'action de contact avec la table est nulle ; le système est conservatif et l'énergie mécanique de ce dernier est constante.

énergie mécanique à la date t = 0, solide à plat sur la table (θ =0°) :

la surface de la table est choisie comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur ; l'altitude du centre de gravité du solide est ½ b et l'énergie mécanique vaut : E_M = ½ m g b.

à une date t (rotation d'un angle θ):

altitude de G :½ b sinθ : énergie potentielle de pesanteur : ½ m g b cosθ

vitesse angulaire θ' ; énergie cinétique : $\frac{1}{2} J_\Delta \theta'^2$

énergie mécanique : $E_M = \frac{1}{2} m g b \cos\theta + \frac{1}{2} J_\Delta \theta'^2$

conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2} m g b = \frac{1}{2} m g b \cos\theta + \frac{1}{2} J_\Delta \theta'^2$

$\theta'^2 = mg / J_\Delta\, b(1-\cos\theta)$.

relation entre θ et θ '' :

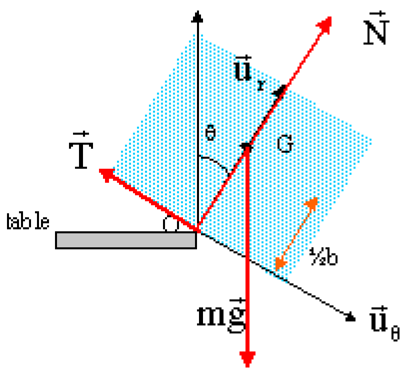
$\theta' = [mg / J_\Delta\, b(1-\cos\theta)]^{1/2}$.

dériver θ' par rapport au temps : la dérivée de 1-cos θ vaut : sin θ θ '.

$\theta'' = \frac{1}{2}[mg / J_\Delta\, b \sin\theta\, \theta'] [mg / J_\Delta\, b(1-\cos\theta)]^{-1/2}$

$\theta'' = \frac{1}{2} mgb / J_\Delta \sin\theta$.

théorème de la résultante dynamique :



sur l'axe $\mathbf{u_r}$: $N - mg\cos\theta = - m\, \frac{1}{2} b\, \theta'^2$

le signe moins vient du fait que l'accélération normale est dirigée vers O, en sens contraire de l'axe $\mathbf{u_r}$.

avec $\theta'^2 = mg / J_\Delta\, b(1-\cos\theta)$.

$N = mg \cos\theta - \frac{1}{2} m^2b^2g / J_\Delta (1-\cos\theta)$.

sur l'axe $\mathbf{u_\theta}$: $-T + mg \sin \theta = m \frac{1}{2} b \theta''$

avec $\theta'' = \frac{1}{2}mgb / J_\Delta \sin \theta$.

$T = mg \sin \theta - m^2gb^2 / (4J_\Delta) \sin \theta = mg \sin \theta[1 - mb^2 / (4J_\Delta)]$.

or $J_\Delta = m/3 [a^2/4 + b^2]$ avec $a = 10$ b alors le terme $mb^2 / (4J_\Delta)$ est négligeable devant 1.

T voisin de $mg \sin \theta$ et N voisin de $mg \cos\theta$.

$T / (mg)$ voisin de $\sin \theta$ et $N / (mg)$ voisin de $\cos \theta$.

glissement :

le glissement apparaît quand la norme de T devient égale au coefficient de frottement f fois la norme de N

$T = f N$ soit $f = T / N$ voisin de $\tan \theta$ voisin de 1.

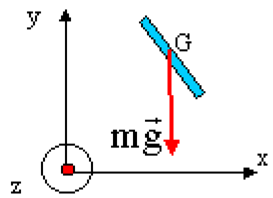
chute :

Dès que le solide S commence à glisser, il perd contact avec la table et S est en chute libre.

$\theta'(\theta=\pi/4) = \theta'_0 = [mg / J_\Delta b(1-\cos(\pi/4))]^{1/2} = [0,293 \, mbg / J_\Delta]^{1/2}$

$J_\Delta = 8,66 \, 10^{-4}$ m ; $\theta'_0 = [0,293 * 0,01 * 9,8 / 8,66 \, 10^{-4}]^{1/2} = 5,75$ rad/s

plan de chute : considérons l'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure



la relation fondamentale de la dynamique s'écrit sue cet axe Oz : $z'' = 0$; par intégration $z' =$ Cte or la composante de la vitesse initiale est nulle sur Oz : par suite $z' = 0$ et par intégration $z =$ Cte.

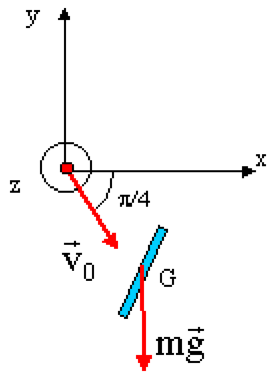
le mouvement s'effectue dans le plan Oxy.

vitesse de rotation :

dans le référentiel barycentrique lié au solide, le théorème du moment cinétique s'écrit :

Le moment du poids est nul dans ce référentiel donc : $J\theta'' = 0$ soit $\theta' = Cte = \theta'_0$.

équations horaires du mouvement de G :



accélération : **a** (0;-g ; 0)

vitesse initiale : **v_0** ($\frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4)$; $-\frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4)$; 0)

position initiale : **OM_0** (0,5 b cos (π/4) ; 0,5 b sin (π/4))

le vecteur vitesse est une primitive du vecteur accélération **:**

v ($\frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4)$; $-gt - \frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4)$; 0)

le vecteur position est une primitive du vecteur vitesse :

OM ($x = \frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4)t + 0{,}5\, b\cos(\pi/4)$; $y = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4)\, t + 0{,}5\, b\sin(\pi/4)$; 0)

or $\frac{1}{2}b\theta'_0\cos(\pi/4) = 0{,}5 * 0{,}01 * 5{,}75 * 0{,}707 = 0{,}02$

or $0{,}5\, b\sin(\pi/4) = 0{,}5*0{,}01*0{,}707 = 0{,}0035$

durée de la chute :

le second terme et le troisième terme dans l'expression de y sont rapidement négligeables devant $\frac{1}{2}gt^2$ et la durée de la chute est voisine de :

$-h = -\frac{1}{2}gt^2$ soit $t^2 = 2h/g = 2*0{,}8 / 9{,}8 = 0{,}163$ d'où t = 0,4s.

de quel angle a tourné le solide ? :

$\theta = \theta_0 + \theta'_0 t = \pi/4 + 5{,}75*0{,}4 =$ 3,08 rad.

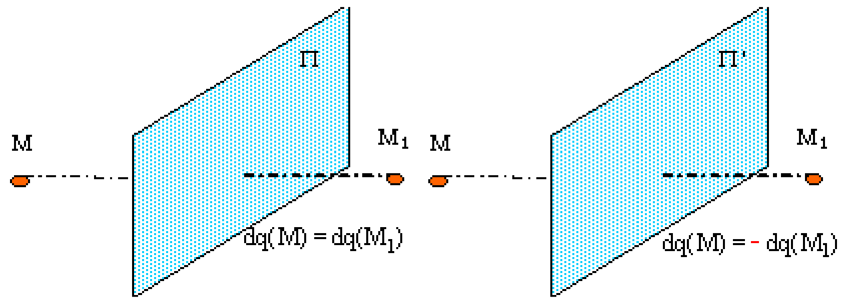
champs : utiliser les symétries des distributions

champ électrostatique :

une distribution de charges possède :

un plan de symétrie Π si pour tout élément symétrique on a des charges identiques.

un plan d'antisymétrie Π' si pour tout élément symétrique on a des charges opposées.



symétrie antisymétrie

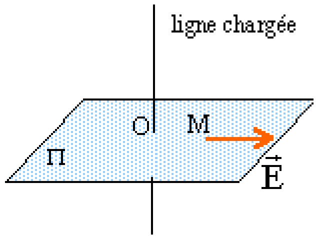
Une distribution est invariante par translation si elle reste inchangée par translation : le champ ne dépend pas de la variable z.

Une distribution est invariante par rotation si elle reste inchangée par rotation autour d'un axe : le champ ne dépend pas de l'angle θ.

le champ électrostatique est contenu dans un plan de symétrie,

perpendiculaire à un plan d'antisymétrie

fil infini uniformément chargé :



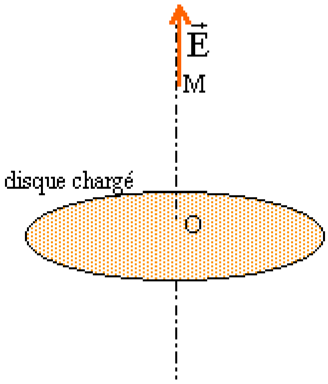
tout plan perpendiculaire au fil est plan de symétrie

tout plan contenant le fil est plan de symétrie

invariant par translation le long du fil et invariant par translation le long du fil :

donc le champ dépend de la distance OM

disque uniformément chargé :



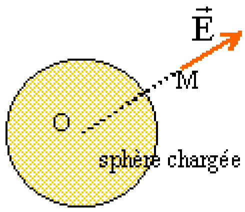
tout plan contenant Δ est plan de symétrie

le plan du disque est plan de symétrie.

invariant par rotation autour de l'axe Δ :

donc le champ dépend de la distance OM

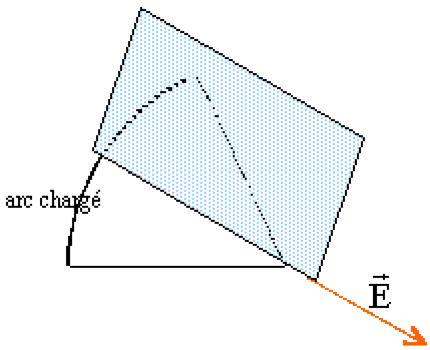
sphère uniformément chargée en surface ou en volume :



tout plan passant par le centre est plan de symétrie : champ radial

invariant par rotation autour de tout axe passant par le centre O : donc le champ dépend de la distance OM

arc de cercle uniformément chargé

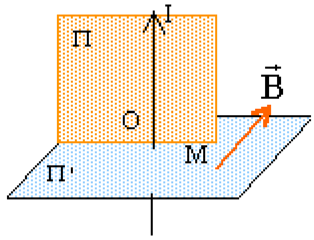


le plan perpendiculaire à l'arc et contenant la bissectrice est plan de symétrie

champ magnétique :

le champ magnétique est contenu dans un plan d'antisymétrie,

perpendiculaire à un plan de symétrie de la distribution de courant fil ou cylindre infini parcouru par un courant uniforme :



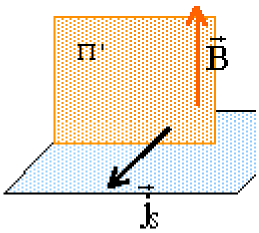
tout plan perpendiculaire au fil est plan d'antisymétrie

tout plan contenant le fil est plan de symétrie

invariant par translation le long de l'axe et invariant par translation le long de laxe :

donc le champ dépend de la distance OM

plan infini parcouru par j_S uniforme :



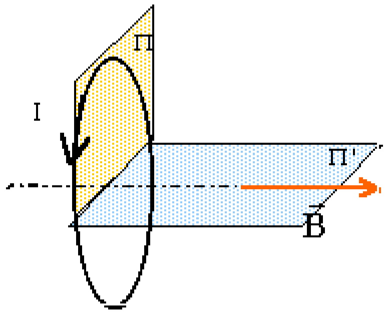
tout plan parallèle à j_S est plan de symétrie

tout plan perpendiculaire à j_S est plan d'antisymétrie

le plan lui même est plan de symétrie

invariant par toute translation suivant j_S et pour toute translation perpendiculaire à j_S.

spire ou anneau parcouru par un courant uniforme :



l'axe du système est axe de symétrie

le plan de la spire est plan de symétrie

tout plan contenant l'axe de la spire est plan d'antisymétrie

système invariant par rotation autour de l'axe.

tout plan contenant l'axe est plan d'antisymétrie donc le champ magnétique est porté par l'axe.

solénoïde infini :

invariance par rotation autour de l'axe

invariance par translation

suspension d'un véhicule

1

oscillations

amortissement

1. La suspension d'une voiture automobile, de masse M=600kg est schématisé par un ressort de raideur k. On constate que les roues, dont on négligera la masse, quittent le sol lorsque la voiture est soulevée d'une hauteur h=30cm. Déterminer:
2. La raideur k du ressort.
3. L'équation du mouvement verticale, ainsi que la période des oscillations verticales de la voiture à vide.
4. Que devient la période avec 4 passagers de masse totale m=300kg.
5. On ajoute à la suspension précédente un amortisseur qui crée une force de frottement proportionnelle à la vitesse verticale f = -bv. A vide, le régime d'amortissement est critique. Ecrire l'équation du mouvement vertical. Déterminer b.
6. Lorsque la voiture contient 4 passagers, quelles sont

   - l'équation du mouvement vertical.

   - La pseudo-période T', la comparer à la période propre de l'oscillation non amortie.

   On donne $g=10m.s^{-2}$.

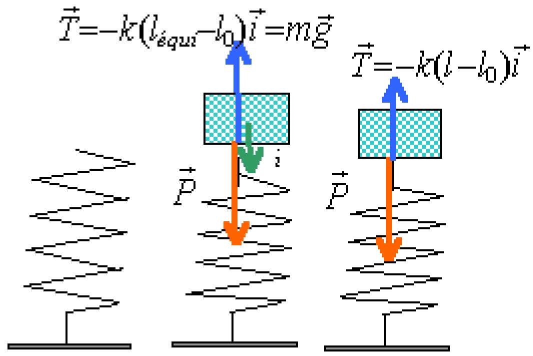
corrigé

raideur du ressort :

poids du véhicule : 600*10 = 6000 N

hauteur : h=0,3 m

raideur k= 6000 / 0,3 = $2\ 10^4$ N/m.



période :

l'extrémité supérieure du ressort est soumise au poids du véhicule et à la tension du ressort.

la relation fondamentale de la dynamique s'écrit : mz"= mg -k(l-l_0)

l'origine est choisie à la position d'équilibre : l = $l_{équi}$+ z

k(l-l_0)= k($l_{équi}$-l_0 + z) = mg + kz

par suite : mz"= -kz ou z" + k/m z =0.

les solutions de cette équation différentielle sont de la forme z = A cos (ω_0t+φ) et le mouvement est sinusoidal de pulsation ω_0= racine carrée (k/m) = (2 10^4 / 600) ^{0,5} = 5,77 rad /s.

la période vaut : T_0= 2π / ω_0 =6,28 /5,77 = 1,088 s.

avec 4 passagers la pulsation devient : (2 10^4 / 900) ^{0,5} = 4,714 rad /s. et la période : 1,33 s.

amortissement régime critique:

l'équation différentielle ci dessus s'écrit : z" -b/m z' + k/m z =0

équation caractéristique : r² -b/m r + ω_0 ² =0

discriminant : Δ =(b/m)²-4ω_0 ² ;

régime critique Δ=0 d'où b²= 4km et b=2 racine carrée(20000*600)= 6928 kg /s.

amortissement régime pseudopériodique :

$\Delta = (b/m)^2 - 4\omega_0{}^2 = 4[(b/(2m))^2 - 4\omega_0{}^2]$

le discriminant de l'équation caractéristique est négatif si m est égal à 900kg au lieu de 600kg

le mouvement est sinusoïdal amorti de pseudo pulsation ω telle que :

$\omega^2 = \omega_0{}^2 - (b/(2m))^2 = 4{,}714^2 - (6928/1800)^2 = 22{,}22 - 14{,}81 = 7{,}41$

ω = 2,72 rad/s et la pseudo période T ' vaut 6,28/2,72 = 2,3 s

1

théorèmes de la mécanique du solide

roulement ou glissement sur un plan incliné

Une roue pleine et homogène de masse M, rayon R, centre G, roule sans glisser sur un plan incliné d'angle α. Nous prenons pour axe OX orienté vers le bas la droite formée par les projetés de G sur le plan incliné. La roue reste verticale. Soit X(t) l'abcisse de A et de G sur OX, avec X=0 à t=0. On se propose de > trouver l'accélération Ax de son centre de masse en appliquant à la roue les principes de la dynamique des solides.

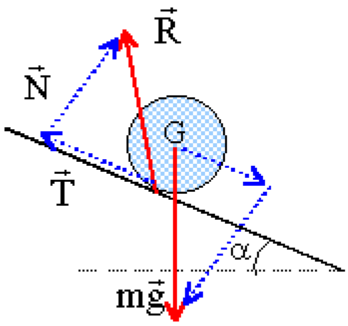
1. Ecrire le théorème de la quantité de mouvement et en déduire deux relations reliant les composants T et N de la réaction R du plan, au poids mg de la roue et à l'angle α.
2. On a le droit d'écrire le théorème du moment cinétique par rapport au point G.

a) En déduire une troisième relation reliant Tà l'accélération angulaire dω/dt. Retrouver la valeur de Ax en fonction de g et de α à partir du théorème de l'énergie cinétique.
b) Donner la valeur de T et N en fonction de mg et α. A partir de quelle valeur de α la roue ne peut elle plus rouler sans glisser si le coefficient dynamique est 0,5?

corrigé

La roue est soumise à son poids, à l'action du plan décomposée en une action

normale au plan N et une action parallèle au plan T , de sens contraire à la vitesse.



somme vectorielle des forces = masse fois vecteur accélération de G

sur un axe perpendiculaire au plan l'accélération est nulle (pas de décollage)

N = mg cos α **(1)**

sur un axe parallèle au plan orienté vers le bas:

$-T + mg \sin \alpha = m\, Ax$ **(2)**

le signe moins traduit une force de freinage

théorème du moment cinétique en G, centre d'inertie de la roue:

T* rayon= I dω/dt avec $I = ½m\, r^2$ roue cylindrique pleine.

T= ½ mr dω/dt avec Ax = r dω/dt soit T = ½ mAx **(3)**

les moments des autres forces , poids et N sont nuls car leur direction

rencontrent l'axe de rotation

repport ci-dessus en **(2)**

$-½mAx + mg \sin \alpha = m\, Ax$ d'où $Ax = 2/3\, g \sin \alpha$ et $T = 1/3\, mg \sin \alpha$.

il n'y a pas de glissement tant que T inférieure ou égale à f N

$1/3\, mg \sin \alpha <= 0,5\, mg \cos \alpha$

$\tan \alpha <= 1,5$ soit $\alpha <= 56,3°$.

retrouver l'accélération de G à partir du th de l'énergie cinétique :

au départ , pas d'énergie cinétique, la vitesse étant nulle à une date t : $Ec_{fin} = ½ mv^2 + ½ I\omega^2$.

avec $I = ½ mr^2$ et $\omega = v/r$ d'où : $Ec_{fin} = ½ mv^2 + ½ (½mr^2 v^2 / r^2) = 0{,}75 mv^2$

variation d'énergie cinétique : $0{,}75 mv^2$

seul le poids travail tant qu'il n'y a pas glissement

$W_{poids} = mg AB \sin\alpha$.

par suite $0{,}75 mv^2 = mg AB \sin\alpha$.

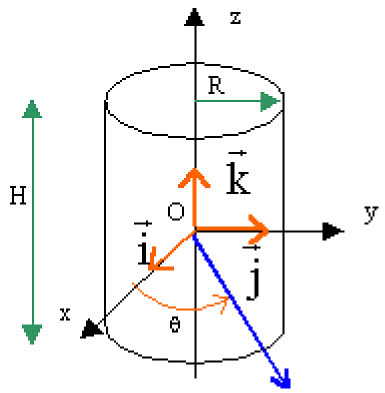
$v^2 = 2(2/3 g \sin \alpha) AB$

relation du type : $v^2 = 2Ax AB$ alors $Ax = 2/3 g\sin \alpha$.

solide en rotation autour d'un axe fixe

Capes physique appliquée 92

On considère un solide ayant la forme d'un cylindre droit, homogène (de masse volumique ρ constante), de rayon R, de hauteur H, de masse m. Il est supposé constituer le rotor d'une machine tournante. On appelle J son moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie Δ. Ce solide est mobile autour de son axe de symétrie D qui coïncide avec l'axe vertical fixe Oz d'un référentiel supposé galiléen.



S'il est soumis à un couple de moment $\vec{T} = T\,\vec{k}$, celui ci sera supposé moteur lorsque T est positif, résistant dans le cas contraire. La rotation de ce cylindre par rapport à une position d'origine est repérée par l'angle θ (t) . Elle est positive pour une rotation effectuée dans le sens direct. La vitesse de rotation du solide est donc donnée par la relation ω (t) = dθ(t) / dt = θ'

1. Etablir l'expression du moment d'inertie J de ce solide par rapport à son axe de symétrie Δ en fonction de m et R. Application numérique : R= 5 cm, H= 15,5 cm, J= 0,012 kgm². En déduire la masse volumique du matériau utilisé.
2. Ce solide est soumis à un couple moteur constant de moment T_m et à un couple résistant, de type frottement fluide, ayant un moment de la forme $T_r = -\lambda\omega$.
   - Etablir l'équation différentielle dont ω (t) est solution.
   - Intégrer cette équation sachant qu'à l'intant t=0, la vitesse du rotor est nulle. On introduira la constante de temps τ caractéristique de ce système et la vitesse angulaire limite ω_0 (le nombre de tours/ minute correspondant est noté n_0) théoriquement obtenue au bout d'un temps infini.
   - Tracer la courbe représentative des variation de ω(t).
   - Vérifier que la tangente à l'origine coupe l'asymptote au point d'abscisse t = τ.
   - application numérique : T_m = 3 N m ; n_0= 1500 tr/min ; en déduire la valeur de la grandeur λ, de la constante de temps τ et de la puissance mécanique P_m exercée par le couple moteur en régime permanent.
3. On suppose maintenant que ce rotor soumis au couple moteur constant de moment T_m et au couple de frottement fluide de moment T_r, tourne depuis très longtemps à la vitesse angulaire limite ω_0. A l'insatnt t=0 on annule brusquement le couple moteur précédent. Le solide n'est alors soumis qu'au couple résistant. Donner la nouvelle expression de ω(t) . En déduire l'expression du nombre total N_1 de tours effectués avant arrêt. Calculer N_1.
4. On suppose à nouveau que ce rotor soumis au couple moteur constant de moment T_m et au couple résistant de moment T_r tourne depuis très longtemps à vitesse angulaire constante ω_0. A l'instant t = 0 on annule brusquement le couple moteur et on applique un frein qui exerce un

couple de moment T_f que l'on supposera constant (et négatif).
- Donner la nouvelle expression de ω (t) .
- En déduire le temps t_2 que dure le mouvement ainsi que le nombre de tours N_2 effectués avant arrêt.
- application numérique T_f = -1 N m; calculer t_2 et N_2.

corrigé

Expression du moment d'inertie par rapport à un axe :

en coordonnées cylindriques, le volume élémentaire est dv = rdrdφdz

$$J = \iiint_{cylindre} r^2 dm = \iiint_{cylindre} r^2 \rho\, dv$$

$$J = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = ½\pi H \rho R^4$$

Exprimons la masse volumique en fonction de la masse et des dimensions du cylindre :

volume : $\pi R^2 H$; masse m ; masse volumique $\rho = m / (\pi R^2 H)$

repport dans l'expression de J : $J = ½ \pi H m R^4 / (\pi R^2 H) = ½ mR^2$.

application numérique :

$m = 2J / R^2 = 2*0,012 / 0,05^2 = 9,6$ kg

volume : $3,14 * 0,05^2 *0,155 = 1,216\ 10^{-3}$ m^3.

masse volumique : $9,6 / 1,216\ 10^{-3}$ = 7889 kg /m^3

c'est la masse volumique du fer.

Le théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit :

$J\, d\omega /dt = T_m - \lambda\omega$ soit $J\omega' + \lambda\omega = T_m$.(**1**)

solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$\omega = A \exp (- \lambda t / J)$

solution particulière de (1) : la vitesse limite est $\omega_0 = T_m / \lambda$.

solution générale de (1) : $\chi = A \exp (- \lambda t / J) + T_m / \lambda$.

déterminer la constante sachant qu'à t=0 la vitesse angulaire est nulle

$0 = A+T_m/ \lambda$ d'où $A = -T_m/ \lambda$

par suite : $\omega(t)=T_m/ \lambda[1- \exp(- \lambda t / J)]$; constante de temps $\tau = J/ \lambda$.

la tangente à l'origine a pour coefficient directeur : $(d\omega/dt)_{t=0} = \omega_0 /\tau$.

cette tangente coupe l'asymptote $\omega =\omega_0$ à l'abscisse $t = \tau$.

application numérique :

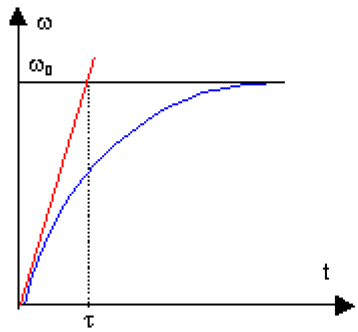
$\omega_0 = 1500 /60 *2\pi = 157$ rad/s.

$\lambda = 3 / 157 = 0,019$ N m rad^{-1}.

$\tau = 0,012 / 0,019 = 0,631$ s.

puissance mécanique (en régime permanent) du couple moteur : $P_m = T_m \omega_0 = 3*157 = 471$ W.

courbe représentative des variations de ω :



Le théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit :

$J\, d\omega /dt = -\lambda\omega$ soit $J\omega' + \lambda\omega = 0$

solution générale de l'équation différentielle :

$\omega =A \exp(- \lambda t / J)$

déterminer la constante sachant qu'à t = 0, la vitesse angulaire est $\omega_0 =T_m/ \lambda$

$A= T_m/ \lambda$. d'où $\omega(t)=T_m/ \lambda \exp(- \lambda t / J)$

avant arrêt le moteur effectue une rotation d'angle θ_1 tel que:

$$\theta_1 = \int_0^\infty \omega\, dt = \int_0^\infty \omega_0 e^{\frac{-t}{\tau}}\, dt = \left[-\omega_0 \tau e^{\frac{-t}{\tau}} \right]_0^\infty = \omega_0 \tau$$

nombre de tours avant arrêt : $N_1 = \theta_1 / (2\pi) = \omega_0 \tau / (2\pi)$

$N_1 = 157 * 0{,}631 / 6{,}28 =$ 15,7 tours.

Le théorème du moment cinétique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe s'écrit :

$J\, d\omega /dt = T_f - \lambda\omega$ soit $J\omega' + \lambda\omega = T_f$.(2)

solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$\omega = A \exp (- \lambda t / J)$

solution particulière de (2) : $\omega = T_f /\lambda$.

solution générale de (2) : $\omega = A \exp (- \lambda t / J) + T_f /\lambda$. .

déterminer la constante sachant qu'à t = 0, la vitesse angulaire est $\omega_0 = T_m/ \lambda$

$\omega_0 = A + T_f/ \lambda$. d'où $A = \omega_0 - T_f/ \lambda$.

$\omega (t) = (\omega_0 - T_f/ \lambda) \exp (- \lambda t / J) + T_f /\lambda$.

à l'arrêt $\omega = 0$

$0 = (\omega_0 - T_f/ \lambda) \exp (- t_2 /\tau) + T_f /\lambda$.

remplacer ω_0 par T_m/λ et multiplier par λ :

$-T_f / (T_m - T_f) = \exp (- t_2 /\tau)$

$\ln [T_f / (T_f - T_m)] = - t_2 /\tau$

$t_2 = \tau \ln [(T_f - T_m) / T_f]$.

application numérique : $t_2 = 0{,}631 \ln [(-1-3) / (-1)] = 0{,}631 \ln 4 =$ 0,874 s.

nombre de tours effectués avant l'arrêt :

$$\theta_2 = \int_0^{t_2} \omega\, dt = \int_0^{t_2} \left[\frac{T_f}{\lambda} + \left(\omega_0 - \frac{T_f}{\lambda}\right) e^{-\frac{t}{\tau}}\right] dt = \left[\frac{T_f}{\lambda} t - \left(\omega_0 - \frac{T_f}{\lambda}\right) \tau\, e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t_2} = \frac{T_f}{\lambda} t_2$$

$\theta_2 = (T_f t_2 + \tau T_m) / \lambda$.

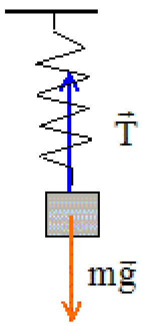
$N_2 = \theta_2 / (2\pi) = (-1 \times 0{,}874 + 0{,}628 \times 3) / (0{,}019 \times 6{,}28) =$ 8,46 tours.

Oscillateur mécanique vertical

Le sismographe se compose d'une masse M relié a un ressort de raideur K de longueur au repos l_0. L'extremité du ressort est attaché en un point fixe du référentiel R_l du laboratoire que l'on suppose galiléen. On repère le mouvement du centre de masse M du bloc par son élongation x(t) mesurée a partir de la position d'équilibre de l'ensemble ressort + masse.

1. Schéma les forces en présence :

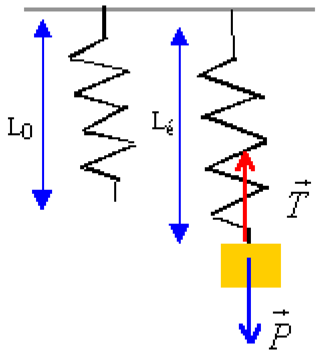
$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$



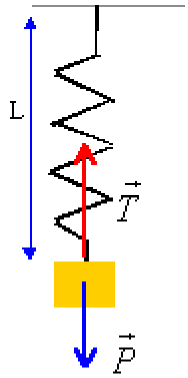
poids : vertical, vers le bas, appliqué au centre d'inertie, valeur : mg

tension du ressort : verticale, dirigée vers la position d'équilibre, appliquée au point de fixation masse ressort, valeur proportionnelle à la déformation du ressort.

2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique (2ème loi de Newton) pour établir l'équation du mouvement :
   écrire cette loi sur un axe vertical dirigé vers le bas ; l'origine de l'axe est la position d'équilibre stable du système masse ressort :



à l'équilibre : $mg = k(L_{éq}-L_0)$



écarté de sa position d'équilibre le ressort oscille : $L= L_{éq} +x$

$mg-k(L-l_0)= m\, d^2x/dt^2$

$mg-k(L_{éq} +x-l_0)= m\, d^2x/dt^2$

$mg-k(L_{éq} -l_0) - kx =m\, d^2x/dt^2$; or $mg = k(L_{éq}-L_0)$

$m\, d^2x/dt^2 + k\, x=0$ (1)

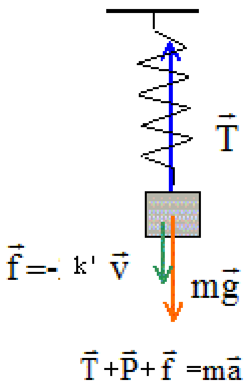
3. Pulsation ω_0 (rad s^{-1}) :
$\omega_0 = [k/m]^{½}$ d'où l'écriture de (1) : $d^2x/dt^2 + \omega^2_0\, x = 0$ ou $x'' +\omega^2_0\, x =0$. (1)
4. La solution de cette équation peut se mettre sous la forme $x(t)=A \cos(Bt)$ ou A et B sont des constantes positives non nulles :
Calcul de B pour que $x(t)=A\cos Bt$ soit solution de l'équation différentielle.
dériver deux fois par rapport au temps :
$x' = AB (-\sin (Bt)$; $x'' = -AB^2\cos(Bt)$
repport dans (2) : $-AB^2\cos(Bt) + \omega^2_0 A \cos(Bt) =0$; $B=\omega_0$

On éloigne la masse de sa position d'equilibre d'une quantité d, on a donc à t=0, x(0)=d ;
à partir de cette condition initiale,on détermine la constante A en

fonction des données du problème.
$x(t=0)=A\cos(0) = d$ soit $A=d$.

Le mouvement de la masse est un mouvement rectiligne sinusoïdal, sans amortissement.

5. On considere que le mouvement est amorti par un frottement visqueux de coefficient f. On précise alors que la force de frottement visqueux est proportionelle à la vitesse.



écrire cette loi sur un axe vertical dirigé vers le bas ; l'origine de l'axe est la position d'équilibre stable du système masse ressort :

$L = L_{éq} + x$

$mg - k(L - l_0) - 2\lambda v = m\, d^2x/dt^2$

$mg - k(L_{éq} + x - l_0) - k'v = m\, d^2x/dt^2$

$mg - k(L_{éq} - l_0) - kx - k'v = m\, d^2x/dt^2$; or $mg = k(L_{éq} - L_0)$

$m\, d^2x/dt^2 + k'v + k\, x = 0$ avec

v = dx/dt
= x'

m d²x/dt² +k'x' + k x=0 (3)

6. (3) peut s'écrire : $d^2x/dt^2 + k'/m\, x' + k/m\, x=0$

or $\omega^2_0 = k/m$; on pose $2\lambda = k'/m$;

d'où : $d^2x/dt^2 + 2\lambda\, x' + \omega^2_0\, x=0$ (4)

Dimension de λ :

d^2x/dt^2 a la dimension d'une accélération (m/s²) ou bien : $[d^2x/dt^2] = L\, T^{-2}$.

chaque terme de la somme de l'équation (4) a donc la dimension d'une accélération

de plus x' ou dx/dt a la diension d'une vitesse (m/s) soit $[x']=L\, T^{-1}$.

$[2\lambda x'] = L\, T^{-2}$; $[x']=L\, T^{-1}$; d'où $[\lambda] = T^{-1}$ (inverse d'un temps)

7.

8. En fonction du signe du discriminant Δ les solutions de cette équation sont :

$x'' + 2\lambda\, x' + \omega^2_0\, x=0$

équation caractéristique associée : $r^2+2\lambda r+ \omega^2_0 =0$

$\Delta=4(\lambda^2- \omega^2_0)$

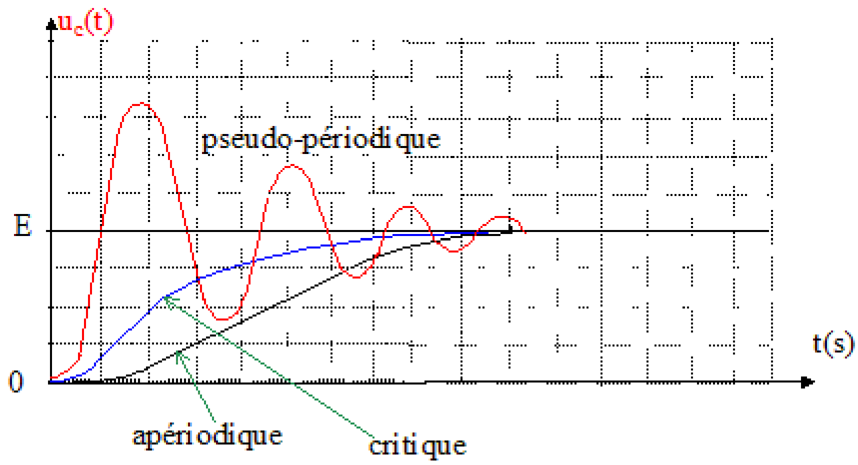
si $\Delta <0$: pulsation $\omega^2 = \omega_0^2 -\lambda^2$

solution : $x = B \exp(-\lambda t) \sin (\omega t+\varphi)$, régime pseudopériodique (amortissement faible)

si $\Delta =0$: $r = -\lambda$; solution : $x = (At+B)\exp(-\lambda t)$; régime critique.

si $\Delta >0$: $r_1 = -\lambda+ \omega$; $r_2 = -\lambda- \omega$;

solution : $x = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t)$; régime apériodique.



9. Vérifions que x(t) est solution de l'équation différentielle : (si $\Delta>0$)

dériver par rapport au temps $x'(t) = C_1 r_1 \exp(r_1 t) + C_2 r_2 \exp(r_2 t)$

dérivée seconde : $x''= C_1 r^2_1 \exp(r_1 t) + C_2 r^2_2 \exp(r_2 t)$

repport dans $x'' +2\lambda x' + \omega^2_0 x=0$

$C_1 r^2_1 \exp(r_1 t) + C_2 r^2_2 \exp(r_2 t)+2\lambda[C_1 r_1 \exp(r_1 t) + C_2 r_2 \exp(r_2 t)]+ \omega^2_0[C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t)]=0$

$[r^2_1+2\lambda r_1 + \omega^2_0]C_1 \exp(r_1 t) + [r^2_2+2\lambda r_2 + \omega^2_0]C_2 \exp(r_2 t) =0$ (5)

Or $[r^2_1+2\lambda r_1 + \omega^2_0] = [r^2_2+2\lambda r_2 + \omega^2_0] =0$

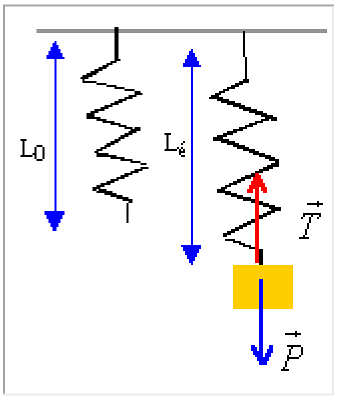
(5) est donc bien vérifiée quel que soit t : $x = C_1 \exp(r_1 t) + C_2 \exp(r_2 t)$ est bien solution de (4)

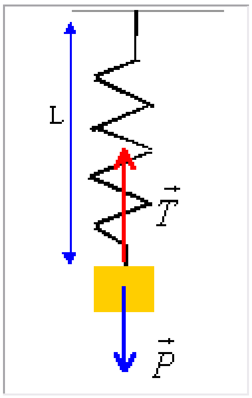
oscillations forcées- résonance

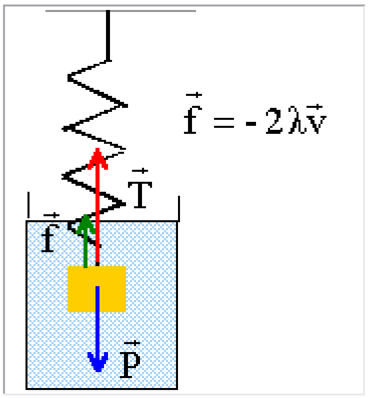
oscillations libres

oscillations forcées

résonance d'amplitude



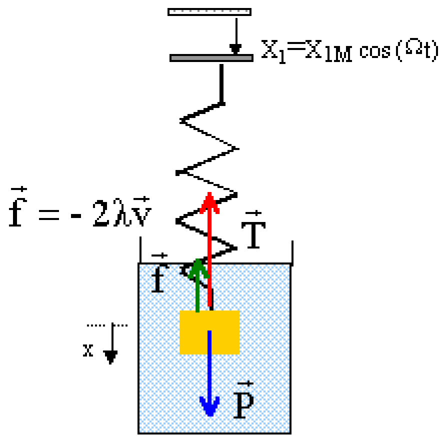




à l'équilibre : $mg = k(L_é-L_0)$	oscillateur harmonique écarté de sa position d'équilibre le ressort oscille	amortissement faible : régime pseudopériodique
	équation différentielle : $x'' +\omega_0^2 x =0$ pulsation propre : $\omega_0^2 = k /m$ solution : x = B	éq. différentielle : $x'' +2\alpha x'+ \omega_0^2 x =0$ pulsation : $\omega^2 = \omega_0^2 -\alpha^2$ avec $\alpha = \lambda / m$ solution : $x = B \exp(-\alpha t) \sin (\omega t+\varphi)$

	sin (ωt+φ)	

oscillations forcées : le support et la masse m sont en mouvement



relation fondamentale de la dynamique projetée sur un axe verticale vers le bas :

$$mx'' = mg - 2\alpha\, x' - k(L_é + x - X_1 - L_0)$$

or $mg = k(L_é - L_0)$; $mx'' = -2\lambda\, x' - kx + kX_1$; $x'' = -2\lambda /m\, x' - k/m\, x + k/mX_1$;

$$x'' + 2\alpha\, x' + \omega_0^2 x = k/mX_{1M}\cos(\Omega t) \quad (1)$$

la solution de l'équation sans second membre est amortie exponentiellement : elle correspond à un régime transitoire.

La solution particulière correspond au régime permanent.

On se place au bout d'un temps suffisamment long pour que le régime permanent soit atteint : la solution de l'équation sans second membre est alors négligeable devant la solution particulière.

l'excitateur force l'oscillateur à osciller à la fréquence de l'excitateur.

$$X = X_m \cos(\Omega\, t + \varphi)$$

ou encore en notation complexe : $\underline{X} = X_m \exp(j\varphi) \exp(j\Omega\, t)$.

dérivées : $\underline{X}' = X_m \exp(j\varphi)\, j\Omega \exp(j\Omega\, t)$; $\underline{X}'' = X_m \exp(j\varphi)\, (-\Omega^2) \exp(j\Omega\, t)$;

repport dans (1) :

$-X_m \exp(j\varphi)\,\Omega^2 \exp(j\Omega t) + 2\alpha X_m \exp(j\varphi)\, j\Omega \exp(j\Omega t) + \omega_0^2 X_m \exp(j\varphi) \exp(j\Omega t) = k/mX_{1M}\exp(j\Omega t)$

simplifcation par exp(jΩ t) :

$X_m \exp(j\varphi)\,(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\alpha j\Omega) = k/mX_{1M}$

$X_m (\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\alpha j\Omega) = k/mX_{1M}\exp(-j\varphi)$

$$\boxed{X_m = \frac{k/mX_{1M}}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\alpha^2\Omega^2\right]^{1/2}}\;;\ \tan\varphi = \frac{2\alpha\Omega}{\Omega^2-\omega_0^2}}$$

résonance d'amplitude (d'élongation , de "tension") :

pour quelles valeurs de la fréquence de l'excitateur, l'amplitude du résonateur est-elle maximum ?

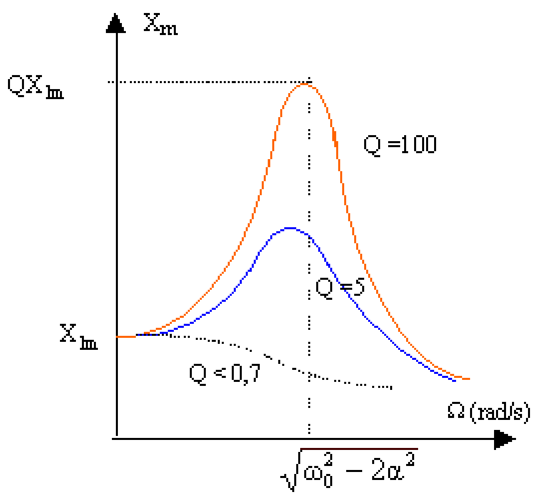
dériver X_m par rappot à Ω en posant $u = [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2]^{-0,5}$ soit $dX_m / d\Omega = k/mX_{1M}\,(-0,5\, u'\, u^{-1,5})$.

$u' = (\omega_0^2 - \Omega^2)4\Omega + 8\alpha^2 \Omega = 4\Omega\,(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\alpha^2)$

s'annule pour $\Omega=0$ et $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2$. ($\omega_0^2 - 2\alpha^2$ doit être positif)

de plus Xm tend vers X_{1M} quand Ω tend vers zéro et Xm tend vers 0 quand Ω tend vers l'infini.

donc l'amplitude X_m passe par une valeur maximale quand $\Omega^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2$.

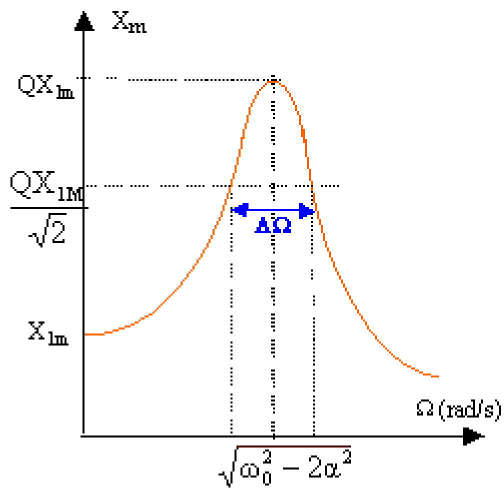


Q : facteur de qualité $Q = \omega_0 / (2\alpha)$

valeur maximale d'autant plus grande (résonance aigüe) que l'amortissement est faible.

bande passante :

ensemble de pulsation telles que la valeur de l'amplitude X_m soit supérieure à 0,707 fois la valeur extremale.



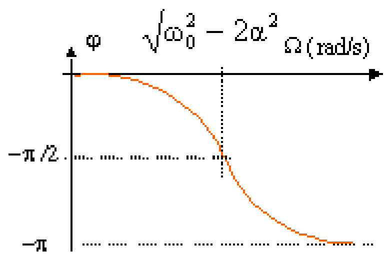
déphasage :

$\tan \varphi = 2\alpha\Omega / (\Omega^2 - \omega_0^2)$

la dérivée par rapport à Ω est négative : $d\varphi / d\Omega = [2\alpha(\Omega^2-\omega_0^2) - 4\alpha\Omega^2]/(\Omega^2-\omega_0^2)^2$

la fonction donnant le déphasage est décroissante de 0 à $-\pi$, en passant par $-\frac{1}{2}\pi$ à la résonance.

l'élongation est en retard sur l'excitateur.

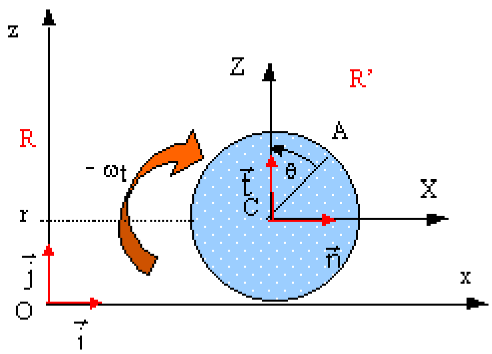


changement de référentiels

le mouvement d'entraînement est une translation

le mouvement d'entraînement est une rotation

Un disque de rayon r tourne uniformément autour de son axe, à vitesse angulaire ω, dans le sens indiqué sur la figure. Son centre C se déplace sur la droite horizontale z = r du plan vertical Ozx du référentiel R=Oxyz. On appelle R' le référentiel Cxyz, en translation par rapport à R, d'origine C, et on note θ l'angle que fait un rayon CA du disque avec Cz. A étant un point de la péripherie.



1. Exprimer, dans la base de R, la vitesse et l'accélération de A par rapport à R'.
2. Quelle vitesse, par rapport à R, doit on donner à C pour que la vitesse $V_{B/R}$(vitesse de B dans R) du point le plus bas B du disque soit nulle ?
3. Trouver les équations x =x(θ) et z=z(θ) du point A, sachant que pour θ =0, x=0 et z =2r.

corrigé

on étudie le point A :

les vecteurs sont écrits en **bleu** et en **gras**.

relation entre les vecteurs vitesses :

OA = **OC** + **CA**

d**OA** /dt = d**OC** /dt + d**CA** /dt

vecteur vitesse de A dans R = vecteur vitesse de C dans R + vecteur vitesse de A dans R'

$\mathbf{V}_{A/R} = \mathbf{V}_{C/R} + \mathbf{V}_{A/R'}$

dans le référentiel R' le disque roule sans glisser : $\theta = \omega t$ avec $\omega = \theta' =$ cte.

on note X l'abscisse et Z l'ordonnée de A

$X = r \sin(\omega t)$ et $Z = r \cos(\omega t)$ (à $t = 0$ $X = 0$ et $Z = r$)

vitesse de A dans R' : dériver X et Z par rapport au temps

$\mathbf{X}' = r\, \omega \cos(\omega t)\, \mathbf{n}$ et $\mathbf{Z}' = -r\, \omega \sin(\omega t)\, \mathbf{t}$.

dans le référentiel R on note x l'abscisse et z l'ordonnée de A

translation suivant $z_C = r$; on suppose la vitesse de translation constante notée v suivant l'horizontale $x_C = v\, t$

vitesse de C dans R : dériver x_C et z_C par rapport au temps

$\mathbf{x}'_C = v\, \mathbf{i}$ et $\mathbf{z}'_C = 0\, \mathbf{j}$.

d'où la vitesse de A dans R :

$\mathbf{x}'_A = (r\, \omega \cos(\omega t) + v)\mathbf{i}$; $\mathbf{z}'_A = -\, r\, \omega \sin \theta\, \mathbf{j}$.

accélération dans R : dériver à nouveau par rapport au temps

$\mathbf{x}'' = -\, r\, \omega^2 \sin(\omega t)\, \mathbf{i}$ et $\mathbf{z}'' = -r\, \omega^2 \cos(\omega t)\, \mathbf{j}$.

le vecteur accélération est centripète, dirigé vers C

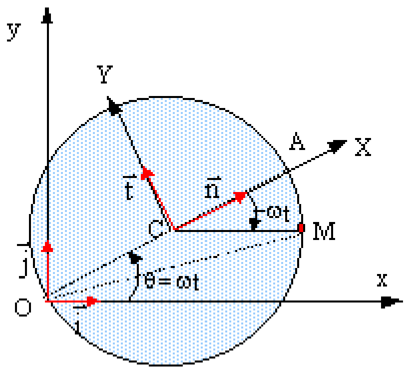
au point le plus bas : $\theta = \pi$

$x'(\omega t = \pi) = -r\, \omega + v$ et $z'(\omega t = \pi) = 0$

la vitesse en B est nulle si $v = r\, \omega$.

Dans un plan Oxy un cercle de diamètre OA tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O. On associe au centre du disque deux axes rectangulaires CX et CY. A t= 0 le point A est sur Ox et un point M initialement en A parcourt la circonférence dans le sens contraire au sens trigonométrique avec la vitesse angulaire ω.

1. Exprimer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère Oxy.
2. Exprimer les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère CXY.
3. Déterminer les expressions de la vitesse d'entraînement et l'accélération complémentaire.



corrigé

dans le repère Oxy :

$\theta = \omega t$; l'abscise de M est notée x, l'ordonnée est noté y.

OM = **OC** + **CM**.

repère Oxy : **OC** [$x_C = R\cos(\omega t)$; $y_C = R\sin(\omega t)$] et **CM** (R ; 0)

OM [$x = R(1+\cos(\omega t)$; $y = R\sin(\omega t)$]

vitesse de M : dériver x et y par rapport au temps.

$\mathbf{V}_{M/\,Oxy}$ [$-R\omega\sin(\omega t)$; $R\omega\cos(\omega t)$]

accélération de M : dériver le vecteur vitesse par rapport au temps.

$\gamma_{M/\,Oxy}$ [$-R\omega^2\cos(\omega t)$; $-R\omega^2\sin(\omega t)$]

dans le repère C XY :

$\theta = -\omega t$; l'abscise de M est notée X, l'ordonnée est noté Y.

CM [X = Rcos (ω t) ; Y= -R sin (ω t)]

vitesse de M : dériver X et Y par rapport au temps.

$\mathbf{V}_{M/C\,XY}$ [-Rω sin (ω t) ; -Rω cos (ω t)]

accélération de M : dériver le vecteur vitesse par rapport au temps.

$\gamma_{M/C\,XY}$ [-Rω^2 cos (ω t) ; Rω^2 sin (ω t)]

vitesse d'entraînement

vitesse absolue par rapport à O xy (R)	vitesse relative par rapport à C XY (référentiel R')	vitesse d'entrainement **V**e
$\mathbf{V}_{M/R}$	$= \mathbf{V}_{M/R'}$	$\boldsymbol{\omega}_{R'/R} \wedge \mathbf{OM}$

calcul de : $\boldsymbol{\omega}_{R'/R} \wedge \mathbf{OM}$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R(1+\cos(\omega t)) \\ R\sin(\omega t) \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -R\omega\sin(\omega t) \\ R\omega(1+\cos(\omega t)) \\ 0 \end{vmatrix}$$

accélération d'entraînement :

la rotation étant uniforme dω /dt =0

l'accélération d'entraînement est : $\gamma_e = -\omega^2 \, \mathbf{OM}$.

γ_e [ω^2R(1 +cos(ω t) ; -ω^2R sin(ωt) ; 0]

accélération complémentaire : $\gamma_c = 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}_{M/R'} = 2\,\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{V}_{M/R} - \mathbf{V}e)$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -R\omega \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$