بسم الله الرحمن الرحيم

الثانوية التأهيلية
المسيرة الخضراء - تيزنيت
ذ : البشير الحجاجي

Calcul intégral

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_2^3 2\,dx$; $I_2=\int_1^2 x\,dx$; $I_3=\int_{-3}^1 (x^3-2x+1)\,dx$; $I_4=\int_0^{\pi}(\cos(x)-\sin(2x))\,dx$

$I_5=\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$; $I_6=\int_0^1 x^2\sqrt[3]{x}\,dx$; $I_7=\int_1^4 \frac{x^2-x+\sqrt{x}+1}{x}\,dx$; $I_8=\int_0^1 (e^x-e^{-x}+e^{2x})\,dx$

$I_9=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2(x)}$; $I_{10}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\,dx$; $I_{11}=\int_1^4 \frac{\sqrt{x}-3x}{x^2}\,dx$; $I_{12}=\int_1^9 \frac{(x+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}}\,dx$

$I_{13}=\int_0^{\ln 2}\left(e^{2x}+\frac{1}{e^{3x}}+\sqrt{e^x}\right)dx$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^1 (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x+1)^{2020}\,dx$; $I_2=\int_0^{\pi} \sin x\cdot\cos^3(x)\,dx$; $I_3=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

$I_4=\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; $I_5=\int_1^e \frac{\ln^3(x)}{x}\,dx$; $I_6=\int_0^1 (e^x-1)\sqrt{e^x-x+1}\,dx$; $I_7=\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$

$I_8=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan x}{\cos^2(x)}\,dx$; $I_9=\int_0^1 (e^x-1)\sqrt[3]{e^x-x+1}\,dx$; $I_{10}=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos(x)+2}}\,dx$

$I_{11}=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos(x)+2}}\,dx$; $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^3(x)}\,dx$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^2 |x-1|\,dx$; $I_2=\int_0^3 |x^2-3x+2|\,dx$; $I_3=\int_{-1}^1 |e^x-1|\,dx$; $I_4=\int_0^2 \frac{1}{|x-1|+1}\,dx$

$I_5=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin(2x)|\,dx$; $I_6=\int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|\frac{\ln x}{x}\right|dx$

Exercice 4

En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_1^e \ln x\,dx$; $I_2=\int_1^e (x+1)\ln x\,dx$; $I_3=\int_0^1 \ln(3+x)\,dx$

$I_4=\int_0^{\pi}(x-1)\cos x\,dx$; $I_5=\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx$; $I_6=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$; $I_7=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$I_8=\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$; $I_9=\int_1^e \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$; $I_{10}=\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$; $I_{11}=\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

$I_{12}=\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$; $I_{13}=\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$; $I_{14}=\int_0^1 (3x+2).2^x\,dx$

Exercice 5 Intégration par parties deux fois

En utilisant l'intégration par parties deux fois, calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^1 x^2e^x\,dx$; $I_2=\int_1^e (\ln x)^2\,dx$; $I_3=\int_0^{\pi} e^x\cos(x)\,dx$; $I_4=\int_0^{\pi} x^2\cos(x)\,dx$

Exercice 6

On considère les deux intégales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$$

1- Calculer $I + J$ et $I - J$

2- En déduire la valeur de I et de J.

Exercice 7

On considère les deux intégales suivantes :

$$I = \int_0^{1} \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{1} \frac{x^5}{1+x^3}\,dx$$

1- Calculer I et $I + J$

2- En déduire la valeur de J

Exercice 8

La valeur moyenne

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

1- Montrer que la fonction : $F : x \mapsto -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

2- Calculer l'intégrale $I = \int f(x)\,dx$

3- Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;2]$

4- Calculer, en cm^2, l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$

Montrer que $\frac{\ln 2}{e} \leqslant \int_0^{\ln 2} f(x)\,dx \leqslant \ln 2$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que : $\forall x \in [1;+\infty[\,;\ \frac{1}{2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x^2}$

2- En déduire un encadrement de l'integrale $I = \int_1^2 f(x)\,dx$

Exercice 11

1- a- Déterminer les deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\,;\ \frac{2x+1}{x+3} = a + \frac{b}{x+3}$$

b- En déduire la valeur de l'integrale $I = \int_1^2 \frac{2x+1}{x+3}\,dx$

2- En utilisant la même methode que la première question, calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_2^3 \frac{2x+3}{x-1}\,dx \qquad I = \int_1^2 \frac{x-1}{2x-1}\,dx \qquad I = \int_0^1 \frac{-x+1}{x+1}\,dx$$

Exercice 12

1- a- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$(\forall x \neq 1) ; \frac{x^2-4x+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$

b- En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_2^3 \frac{x^2-4x+1}{x-1}$

2- En utilisant la même methode que la première question, calculer les intégrales suivantes :

$I = \int_2^3 \frac{2x^2+x}{x-1} dx \quad I = \int_1^2 \frac{x^2-1}{2x-1} dx \quad I = \int_2^4 \frac{-x^2+2}{x-1} dx$

Exercice 13

1- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1;2\} ; \frac{2x^2+3x-1}{x^2-3x+2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$

2- Calculer l'intégrale : $I = \int_3^4 \frac{2x^2+3x-1}{x^2-3x+2} dx$

Exercice 14

1- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

2- En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

Exercice 15

1- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

2- Calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$

Exercice 16

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2;2[$ par :

$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

1- Déterminer les deux reels a et b tels que :

$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$

2- En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0;1]$

Exercice 17

1- Déterminer les nombres réels a, b et c tels que :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} ; \frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

2- Calculer l'intégrale : $I = \int_2^3 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$

Exercice 18

On considère les trois integrales :

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} \; ; \; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$

1- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;1]$

2- Calculer I

3- Montrer que : $J+2I=K$

(On ne demande pas de calculer J et K)

4- En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $K=\sqrt{3}-J$, puis en déduire les valeurs de J et K.

حظ موفق إن شاء الله

نسألكم الدعاء

قواعد هامة

$\int a=[ax]$	$\int x^r=\frac{1}{r+1}[x^{r+1}]$	$\int \frac{1}{x^2}=-[\frac{1}{x}]$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}=2[\sqrt{x}]$	$\int \frac{1}{x^r}=\frac{1}{1-r}[x^{1-r}]$
$\int \frac{1}{x}=[\ln\lvert x\rvert]$	$\int e^x=[e^x]$	$\int e^{-x}=-[e^{-x}]$	$\int e^{ax}=\frac{1}{a}[e^{ax}]$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)}=[\tan(x)]$
$\int \sin(ax)=-\frac{1}{a}[\cos(ax)]$	$\int \cos(ax)=\frac{1}{a}[\sin(ax)]$	$\int 1+\tan^2(x)=[\tan(x)]$		

$\int u'u^r=\frac{1}{r+1}[u^{r+1}]$	$\int \frac{u'}{u^2}=-[\frac{1}{u}]$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}}=[2\sqrt{u}]$	$\int \frac{u'}{u^r}=\frac{1}{1-r}[u^{1-r}]$
$\int \frac{u'}{u}=[\ln\lvert u\rvert]$	$\int u'e^u=[e^u]$	$\int u'v+uv'=[uv]$	
$\int \frac{u'v-uv'}{v^2}=[\frac{u}{v}]$	$\int u'\sin(u)=-[\cos(u)]$	$\int u'\cos(u)=[\sin(u)]$	
$\int \frac{u'}{\cos^2(u)}=[\tan(u)]$	$\int u'(1+\tan^2(u))=[\tan(u)]$		

مكاملة بالأجزاء

Intégration par parties

$$\int u'v=[uv]-\int uv'$$

الهدف هو حسن اختيار u و v

وغالبا يتم الاختيار الآتي:

$v \dashrightarrow \ln$ و $u' \dashrightarrow \exp;\ \cos;\ \sin$

ربنا اغفر لي ولوالدي وللمؤمنين يوم يقوم الحساب