الثانوية التأهيلية
المسيرة الخضراء - تيزنيت
ذ : البشير الحجاجي

بسم الله الرحمن الرحيم

Calcul intégral

SERIE 2

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$

1- Déterminer les réels a, b et c tels que :

$\forall x\in]1;+\infty[\ ;\ f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{(x+3)^2}$

2- En déduire la valeur de l'intégrale $I=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

Exercice 2

Linéarisation

Calculer les intégrales suivantes :

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2(x)\,dx$; $I_2=\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx$; $I_3=\int_{-\pi}^{0}\cos^2(x)\,dx$

$I_4=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3(x)\,dx$; $I_5=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^3(x)\cdot\cos^2(x)\,dx$

Méthode

Pour les primitives de fonctions de la forme $x\mapsto\cos^p(x)\sin^q(x)$ avec p et q deux entiers naturels **pairs**, on doit **linéariser** en utilisant les formules d'**Euler** : $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$; $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Exercice 3

On pose : $I=\int_0^{\ln 16}\dfrac{e^x+3}{e^x+4}\,dx$ et $J=\int_0^{\ln 16}\dfrac{1}{e^x+4}\,dx$

1- Calculer $I+J$ et $I-3J$

2- En déduire la valeur de I et J.

Exercice 4

On pose : $I=\int_0^{\pi}\cos^2(x)\,dx$ et $J=\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx$

1- Calculer $I+J$ et $I-J$.

2- En déduire la valeur de I et J.

Exercice 5

Soit (I_n) la suite définie par : $I_n=\int_0^1\dfrac{e^{nx}}{e^x+1}\,dx$; $n\in\mathbb{N}$.

1- Calculer I_1 et I_0+I_1, puis en déduire la valeur de I_0

2- Calculer $I_{n+1}+I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

3- Montrer que (I_n) est une suite croissante.

4- Montrer que : $\forall x\in[0;1]$; $\dfrac{e^{nx}}{e+1}\leqslant\dfrac{e^{nx}}{e^x+1}\leqslant\dfrac{e^{nx}}{2}$

En déduire un encadrement de I_n

5- (I_n) est-elle convergente ?

Exercice 6

Soit (I_n) la suite définie par : $I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\,dx$

1- Calculer I_0 et I_1 (I_1 par parties)

2- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$

3- a- Montrer que (I_n) est décroissante.

b- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $I_n\geqslant 0$

c- En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $I_n\leqslant\frac{e^2}{n+1}$

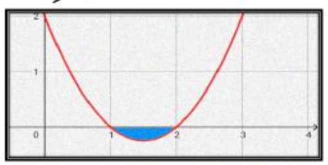
4- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;3]$ par :

$f(x)=x^2-3x+2$

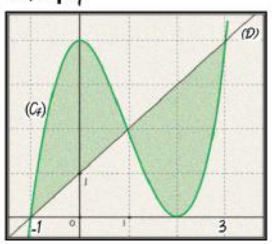
Déterminer la mesure en unités d'aire du domaine $\mathcal{E}$ limité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$



Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-3x^2+4$

Déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine situé entre la courbe (C_f), la droite (D) d'équation $y=x+1$ et les deux droites d'équations $x=-1$ et $x=3$.



Exercice 9

On considère l'intégrale : $I_n=\int_0^1 t^n e^{2t}\,dt$, où $n\in\mathbb{N}^*$.

1- En utilisant l'intégration par parties, calculer I_1

2- En utilisant l'intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.

3- En déduire I_2 et I_3.

4- Etuliser les résultats précédents pour calculer l'intégrale : $I=\int_0^1(t^3+3t^2+2t)e^{2t}\,dt$

Exercice 10

Démontrer les encadrements suivants :

$2\leqslant\int_1^9\frac{dx}{1+\sqrt{x}}\leqslant 4$; $\frac{1}{2}\leqslant\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}\leqslant 1$; $\sqrt{2}\leqslant\int_1^2\sqrt{x^3+1}\,dx\leqslant 3$

$2e^{-4}\leqslant\int_0^2\frac{1}{e^{x^2}}\,dx\leqslant 2$; $2\ln 3\leqslant\int_2^4\ln(x^2-1)\,dx\leqslant 2\ln 3+2\ln 5$

Exercice 11

Soit (u_n) la suite définie par : $u_n=\int_0^1\frac{dx}{x^n+1}$, $n\in\mathbb{N}^*$

1- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $u_n\leqslant 1$

2- Montrer que (u_n) est convergente.

a- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $0\leqslant 1-u_n\leqslant\frac{1}{n+1}$

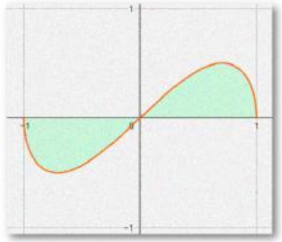
b- Calculer $\lim u_n$

Exercice 12

On donne la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1;1]$ par : $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

1- Calculer l'aire S de la partie colorée (en u.a)

2- Calculer le volume V (en u.v) du solide engendré par rotation de (C_f) autour de l'axe des abscisses



Exercice 13

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

1-a- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par :

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in [0;1]$

b- Calculer u_1

2-a- Prouver que : $\forall x \in [0;1]\,;\ 1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$

b- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ (1)

c- Déterminer $\lim u_n$

3- Pour tout entier $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx$

a- Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$

b- Par intégration par parties portant sur I_n, montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $n u_n + (n-1) u_{n-2} = \sqrt{2}$

c- En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \quad (2)$$

d- À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite $(n u_n)$ est convergente et calculer sa limite

Exercice 14

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}\,dt$

1- Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0;2]$ par :

$$\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$$

a- Étudier la monotonie de φ sur l'intervalle $[0;2]$, puis en déduire que : $\forall t \in [0;2]\,;\ \frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$

b- Montrer que : $\forall t \in [0;2]\,;\ \frac{3}{2}.e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t).e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}.e^{\frac{t}{n}}$

c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ \frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)$

d- On rappelle que : $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Montrer que, si (u_n) possède une limite ℓ, alors, $3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}$

2-a- Vérifier que, pour tout $t \in [0;2]$; on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$, puis calculer l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}\,dt$.

b- Montrer que $\forall t \in [0;2]\,;\ 1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,;\ I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}}\, I$

d- Calculer $\lim u_n$

قَوَاعِدُ هَامَّة

$\int a = [ax]$	$\int x^r = \frac{1}{r+1}[x^{r+1}]$	$\int \frac{1}{x^2} = -[\frac{1}{x}]$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2[\sqrt{x}]$	$\int \frac{1}{x^r} = \frac{1}{1-r}[x^{1-r}]$
$\int \frac{1}{x} = [\ln\lvert x\rvert]$	$\int e^x = [e^x]$	$\int e^{-x} = -[e^{-x}]$	$\int e^{ax} = \frac{1}{a}[e^{ax}]$	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = [\tan(x)]$
$\int \sin(ax) = -\frac{1}{a}[\cos(ax)]$	$\int \cos(ax) = \frac{1}{a}[\sin(ax)]$	$\int 1+\tan^2(x) = [\tan(x)]$		

$\int u'u^r = \frac{1}{r+1}[u^{r+1}]$	$\int \frac{u'}{u^2} = -[\frac{1}{u}]$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = [2\sqrt{u}]$	$\int \frac{u'}{u^r} = \frac{1}{1-r}[u^{1-r}]$
$\int \frac{u'}{u} = [\ln\lvert u\rvert]$	$\int u'e^u = [e^u]$	$\int u'v+uv' = [uv]$	
$\int \frac{u'v-uv'}{v^2} = [\frac{u}{v}]$	$\int u'\sin(u) = -[\cos(u)]$	$\int u'\cos(u) = [\sin(u)]$	
$\int \frac{u'}{\cos^2(u)} = [\tan(u)]$	$\int u'(1+\tan^2(u)) = [\tan(u)]$		

مُكَامَلَة بالأجزاء — Intégration par parties

$$\int u'v = [uv] - \int uv'$$

الهدف هو حسن اختيار u' و v

وغالبا يتم الاختيار الآتي:

$v \to \ln$ و $u' \to \exp;\ \cos;\ \sin$

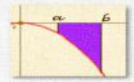
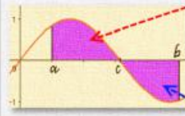
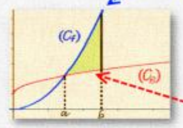
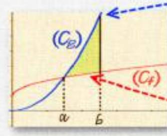
رَبَّنَا اغْفِرْ لِي وَلِوَالِدَيَّ وَلِلْمُؤْمِنِينَ يَوْمَ يَقُومُ الحِسَابُ


نسألكم الدعاء


قَوَاعِدُ أَسَاسِيَّة

☛ L'aire délimitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est : $\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)$ (u.a)
$\left(u.a = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\right)$

☛ L'aire comprise entre la courbe (C_f), la courbe (C_g) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ est : $\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)$ (u.a)

Représentation	Remarques	L'aire (u.a)
	f est positive sur $[a;b]$	$\int_a^b f(x)dx$
	f est négative sur $[a;b]$	$-\int_a^b f(x)dx$
	f est positive sur $[a;c]$ f est négative sur $[c;b]$	$\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$
	$f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$	$\int_a^b (f(x)-g(x))dx$
	$f(x) \leq g(x)$ sur $[a;b]$	$\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

Calcul d'un volume

Le volume du solide engendré par un tour complet, de la courbe (C_f), autour de l'axe des abscisses dans un intervalle $[a;b]$ est : $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$ (u.v)