INTRODUCTION AUX TRANSFERTS THERMIQUES

Cours et exercices corrigés

Jean-Luc Battaglia
Professeur à l'université Bordeaux 1

Andrzej Kusiak
Maître de conférences à l'université Bordeaux 1

Jean-Rodolphe Puiggali
Professeur à l'université Bordeaux 1
et vice-président de l'université Bordeaux 1

DUNOD

Illustration de couverture : *DeVIce-Fotolia.com*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.
Le Code de la propriété intellectuelle du 1er juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.
Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

DANGER
LE PHOTOCOPILLAGE TUE LE LIVRE

© Dunod, Paris, 2010

ISBN 978-2-10-054828-6

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).
Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.biblio-scientifique.net

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1 • **INTRODUCTION À L'ÉNERGÉTIQUE ET AUX TRANSFERTS** 1

1.1 Quelques définitions nécessaires 1
- 1.1.1 Le système étudié 1
- 1.1.2 L'énergie 3
- 1.1.3 La nécessaire complémentarité entre thermodynamique et thermique 6

1.2 La notion de température et la température d'un corps 7
- 1.2.1 L'équilibre thermique 7
- 1.2.2 L'étalonnage 8

1.3 Les chaleurs spécifiques 8

1.4 Le premier principe de la thermodynamique 10
- 1.4.1 Le système et les variables thermodynamiques associées 10
- 1.4.2 L'énergie interne 11
- 1.4.3 Énoncé du premier principe 11
- 1.4.4 Référence aux énergies mécaniques 12

1.5 Le changement de phase et le diagramme de phase 14
- 1.5.1 Diagramme d'équilibre 15
- 1.5.2 Chaleur latente de changement de phase 15

1.6 Quelques bases sur les différents modes de transfert thermique 16
- 1.6.1 Conduction 16
- 1.6.2 Convection 17
- 1.6.3 Rayonnement 17
- 1.6.4 Les principales notations et grandeurs du transfert thermique 17
- 1.6.5 Les problèmes les plus courants 18
- 1.6.6 La densité de flux 18

1.7 Quelques éléments sur le régime transitoire 19
- 1.7.1 Conduction en régime transitoire : méthode de la capacité thermique 19

Exercices 21

Solutions des exercices 24

www.biblio-scientifique.net

CHAPITRE 2 • **CONDUCTION DE LA CHALEUR** 31

2.1 La conduction à l'échelle atomique 31
2.1.1 Structure des matériaux solides 31
2.1.2 Équilibre thermique et température dans les solides 33
2.1.3 Diffusion de la chaleur dans les structures solides 35

2.2 Modélisation de la diffusion 37
2.2.1 Loi de Fourier 37
2.2.2 Conductivité thermique 39
2.2.3 Lien entre chaleur spécifique et conductivité thermique 41
2.2.4 Expression de la loi de Fourier dans diverses configurations géométriques . . 42

2.3 La diffusivité thermique 43
2.3.1 Rappel sur la capacité thermique 43
2.3.2 La diffusivité thermique 44

2.4 Équation de diffusion de la chaleur 45

2.5 Notion de régime permanent et transitoire 47

2.6 Conditions initiales et conditions aux limites 49
2.6.1 Conditions initiales 49
2.6.2 Conditions aux limites en thermique 50

2.7 L'accommodation thermique 51
2.7.1 Nombre de Biot 51
2.7.2 Accommodation thermique partielle en géométrie variable. 53

2.8 Transfert de chaleur aux interfaces solide - solide 54

2.9 Analogie électrique 56

2.10 Références 60

Exercices 61

Solutions des exercices 72

CHAPITRE 3 • **TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION** 91

3.1 Introduction 91
3.1.1 Modélisation du transfert de chaleur par convection 92

3.2 Couches limites en transfert par convection 94
3.2.1 Couche limite hydrodynamique 95
3.2.2 Couche limite thermique 96

www.biblio-scientifique.net

3.2.3 Écoulement laminaire et turbulent 97

3.3 Bilans de masse, de quantité de mouvement et de chaleur dans la couche limite 99

3.3.1 Bilan de masse 100

3.3.2 Bilan de quantité mouvement 101

3.3.3 Bilan thermique 102

3.4 Analyse Dimensionnelle — Principe de la méthode 103

3.5 Convection Forcée 105

3.5.1 Application de l'analyse dimensionnelle en convection forcée avec écoulement interne 105

3.5.2 Expressions du coefficient de convection h en convection forcée 109

3.6 Convection naturelle 114

3.6.1 Application de l'analyse dimensionnelle en convection naturelle 114

3.6.2 Régime turbulent en convection naturelle 116

3.6.3 Expressions du coefficient de convection h en convection naturelle 117

3.7 Méthodologie pour le calcul de transferts par convection en utilisant les corrélations expérimentales 121

3.8 Convection avec changement de phase 121

3.8.1 Convection lors de la condensation 121

3.8.2 Convection lors de l'ébullition 125

3.9 Références 129

Exercices 129

Solutions des exercices 135

CHAPITRE 4 • **RAYONNEMENT THERMIQUE** **149**

4.1 Le processus physique de rayonnement thermique 149

4.1.1 Démonstration de son existence à partir d'une expérience 149

4.1.2 Le spectre électromagnétique 151

4.1.3 Explication physique simple de l'interaction photon–atome 152

4.1.4 Les corps noirs 159

4.1.5 Loi de Planck 160

4.1.6 Les notions géométriques essentielles 162

4.2 Grandeurs physiques 164

4.2.1 Grandeurs liées à l'émission 164

4.2.2 Grandeurs liées au récepteur 165

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

4.3 Rayonnement des corps noirs 167
4.3.1 Luminance des corps noirs 167
4.3.2 Lois de Wien 170
4.3.3 Loi de Stefan–Boltzmann 171
4.3.4 Émission spectrale du corps noir 171
4.4 Rayonnement des corps réels 173
4.4.1 Émissivité des corps réels 173
4.4.2 Absorption, réflexion et transmission des corps réels 175
4.4.3 La loi de Kirchhoff 178
4.4.4 Les corps gris 179
4.5 Références 180
Exercices 181
Solutions des exercices 185

CHAPITRE 5 • **TRANSFERT PAR RAYONNEMENT ENTRE CORPS** **195**
5.1 Définitions des outils géométriques 195
5.1.1 Facteur de forme 195
5.1.2 Relation de réciprocité 198
5.1.3 Cas particulier de la cavité 199
5.1.4 Quelques valeurs du facteur de forme 201
5.2 Échanges radiatifs entre corps noirs 204
5.2.1 Échanges entre 2 corps noirs 204
5.2.2 Échanges entre corps noirs dans une cavité 205
5.3 Échanges entre corps gris dans une cavité 206
5.3.1 Expression du flux net échangé 206
5.3.2 Influence d'un milieu participatif 209
5.3.3 Utilisation de l'analogie électrique 210
5.3.4 Résolution numérique 213
5.3.5 Boucliers radiatifs 214
5.4 Références 215
Exercices 216
Solutions des exercices 220

www.biblio-scientifique.net

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage met en avant les bases fondamentales nécessaires à l'acquisition de compétences dans le domaine des transferts de la chaleur et propose des liens et des ouvertures vers les disciplines fondamentales qui soutiennent leur compréhension. Il s'adresse à des étudiants à Bac + 2, Bac + 3.

Le chapitre 1 rappelle les notions élémentaires de thermodynamique des systèmes. Il y est en particulier précisé la notion de transfert sous forme de chaleur. Les différents types de transfert sont alors abordés dans les chapitres suivants. Le transfert par conduction dans les matériaux solides ou les fluides au repos fait l'objet du chapitre 2. Le transfert de chaleur par convection, obligatoirement associé à du transfert de masse est détaillé dans le chapitre 3. Enfin, le transfert de chaleur par rayonnement fait l'objet des deux derniers chapitres. Le choix de cette organisation tient finalement bien plus d'un contexte historique que d'une formulation mathématique des modèles ou bien de pré requis à la lecture et à la compréhension d'un chapitre. En effet, chaque chapitre peut être pratiquement lu indépendamment des autres. Cependant, nous conseillons fortement au lecteur de lire en premier lieu le chapitre 1 afin de se familiariser avec les notations utilisées en thermique ainsi qu'avec la notion de bilan thermique très utile pour la suite. Nous avons donc choisi de présenter chaque type de transfert en fonction de l'ordre chronologique de sa formulation mathématique.

Le contenu de chaque chapitre constitue des connaissances de base en thermique telle qu'elle est enseignée dans les filières Universitaires. Il n'y a donc pas de surprise ici. Toutefois, afin d'apporter des éclairages supplémentaires et de contextualiser les démarches, nous avons tenté de préciser à chaque fois que cela était possible la nature physique des phénomènes aux différentes échelles d'observation : du microscopique au macroscopique. Ceci apporte une certaine originalité à l'ouvrage, l'exposé tenant compte du fait que les lecteurs ne sont pas tous familiers des nombreux domaines de la physique (mécanique quantique, mécanique statistique, thermodynamique). Nous avons donc essayé de nous restreindre à un exposé pédagogique, basé sur l'observation et le sens logique.

Chaque chapitre est accompagné de quelques exercices corrigés. Ces exercices sont censés couvrir l'ensemble des connaissances théoriques développées dans le cours. Bien entendu, le lecteur pourra trouver dans d'autres livres un nombre plus important d'exercices qui lui permettront de s'assurer de la bonne compréhension du présent cours.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

www.biblio-scientifique.net

1

INTRODUCTION À L'ÉNERGÉTIQUE ET AUX TRANSFERTS

PLAN

1.1 Quelques définitions nécessaires
1.2 La notion de température et la température d'un corps
1.3 Les chaleurs spécifiques
1.4 Le premier principe de la thermodynamique
1.5 Le changement de phase et le diagramme de phase
1.6 Quelques bases sur les différents modes de transfert thermique
1.7 Quelques éléments sur le régime transitoire
Exercices
Solutions des exercices

OBJECTIFS

- Poser quelques définitions et des liens entre thermodynamique et thermique au travers des phénomènes de transfert de chaleur.
- Avoir quelques pistes pour construire une analyse énergétique.

1.1 QUELQUES DÉFINITIONS NÉCESSAIRES

1.1.1 Le système étudié

La thermodynamique, comme toute autre branche de la physique, met en cause dans ses principes des propriétés attachées à la matière et leur évolution au cours du temps. Ceci s'appliquant à n'importe quel système matériel il convient alors de le situer. La description thermodynamique d'un système a donc comme premier impératif de préciser deux régions : le système étudié et ce qui lui est extérieur (son environnement). On définit alors la frontière surface fermée de l'espace et la nature des échanges entre le système et son environnement au travers de cette frontière. Ainsi, les systèmes thermodynamiques sont classés en trois catégories que distinguent les échanges avec l'extérieur :

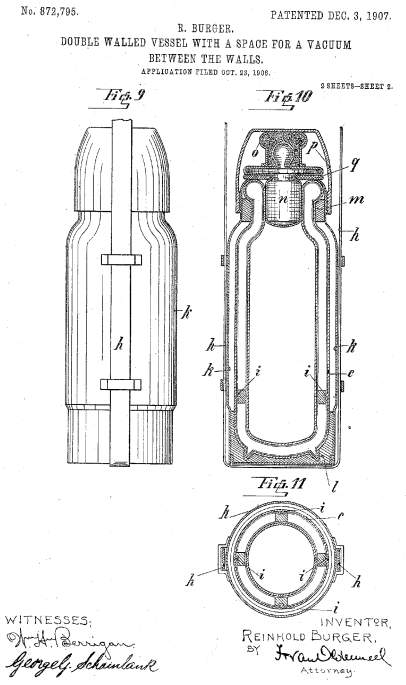
- les systèmes isolés n'échangent ni matière ni aucune forme d'énergie ;

www.biblio-scientifique.net

- les systèmes fermés échangent de l'énergie, mais pas de matière ;
- les systèmes ouverts échangent matière et énergie.

Exemple de système isolé : le vase Dewar

Le vase de Dewar est un verre conçu pour fournir une très bonne isolation thermique. Ce vase doit son nom au physicien écossais James Dewar. Ce vase se présente sous la forme d'une bouteille en verre ou en métal, en double couche. Il peut être vu comme deux bouteilles à paroi mince imbriquées l'une dans l'autre. L'espace étroit entre ces deux bouteilles est presque entièrement dépourvu d'air, le quasi-vide empêche les échanges de chaleur. La surface intérieure de la bouteille externe et la surface externe de la bouteille intérieure, ont un enduit réfléchissant métallique (de l'argent par exemple) pour empêcher la chaleur d'être transmise par rayonnement.



Exemple de système fermé : la bouilloire

Les bouilloires traditionnelles sont des récipients métalliques destinées à être posées sur une gazinière ou sur une plaque électrique afin de réchauffer le liquide contenu. Les bouilloires électriques sont munies d'une résistance chauffante, généralement immergée, qui se présente sous la forme d'un tube en anneau Dans les deux cas, le liquide reste confiné au récipient, il n'y a pas de transfert de masse mais seulement un apport de chaleur par transfert de la chaleur.

Exemple de système ouvert : l'échangeur

Un échangeur tubulaire peut être considéré comme l'échangeur de chaleur le plus simple : il consiste en 2 tubes concentriques. Un fluide circule dans le tube interne alors que le second passe dans l'espace entre les 2 tubes.

Un échangeur à ailettes consiste en un conduit cylindrique ou rectangulaire sur

www.biblio-scientifique.net

lequel est fixé des lames métalliques de différentes formes. Le fluide de refroidissement est en général l'air ambiant. La chaleur est transférée du fluide chaud circulant dans le conduit principal aux lames métalliques par conduction thermique, qui se refroidissent au contact de l'air. On utilise par exemple ce type d'installation pour refroidir les moteurs de voiture.

Un système complexe pourra être décomposé en sous-systèmes plus simples et il conviendra de préciser la nature des flux échangés entre les sous-systèmes élémentaires. On définit le flux comme la quantité de chaleur transportée par unité de temps. L'énergie s'exprimant en Joules, le flux s'exprime donc en Watts.

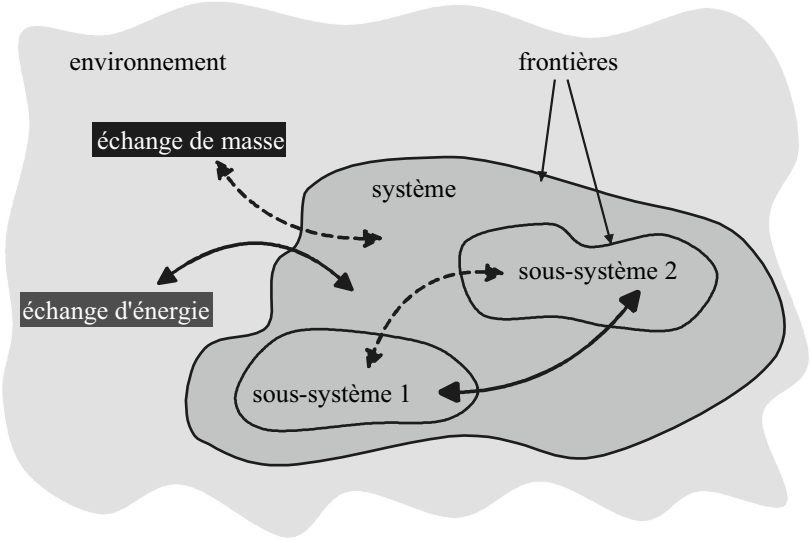


Figure 1.1 **Le système thermodynamique et son environnement**

1.1.2 L'énergie

L'énergie, force en action que l'on fournit à un système matériel pour le transformer, se rencontre sous différentes formes : énergie mécanique (potentielle : celle que possède un corps en fonction de sa position ou cinétique : celle que possède un corps en fonction de sa vitesse), énergie chimique (moléculaire par liaisons entre atomes, de mélange par interaction entre molécules, d'interphases), énergie électrique (par séparation de particules chargées de signe opposé), énergie magnétique (par mouvement de particules chargées), énergie rayonnante (accélération de particules chargées), énergie nucléaire (interaction entre nucléons au sein d'un noyau), énergie thermique (agitation désordonnée des molécules, c'est une forme dégradée de l'énergie). Il existe de nombreuses possibilités de transformations ou de conversions avec des rendements associés entre les diverses formes d'énergie. Par exemple, dans un moteur à combustion interne la combustion du carburant avec l'oxygène de l'air (énergie chimique)

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

va produire une augmentation de la température des gaz de combustion (énergie thermique) qui vont subir une augmentation de pression et une expansion volumique (énergie mécanique).

ENCART 1.1 James Prescott Joule

James Prescott Joule (24 décembre 1818, Salford, près de Manchester, Angleterre – 11 octobre 1889, Sale) est un physicien (et brasseur) britannique.
Son étude sur la nature de la chaleur et sa découverte de la relation avec le travail mécanique l'ont conduit à la théorie de la conservation de l'énergie (la première loi de la thermodynamique). Il a également énoncé une relation entre le courant électrique traversant une résistance et la chaleur dissipée par celle-ci, appelée au XXIe siècle la loi de Joule. Enfin il a travaillé avec Lord Kelvin pour développer l'échelle absolue de température et a étudié la magnétostriction. En 1850, il devient membre de la Royal Society. En 1852, il est lauréat de la Royal Medal et, en 1870, il reçoit la médaille Copley. Dans le système international, l'unité du travail porte son nom : le joule.

L'énergie thermique, ou chaleur, est notée Q, les autres formes seront notées W, en particulier l'énergie mécanique.

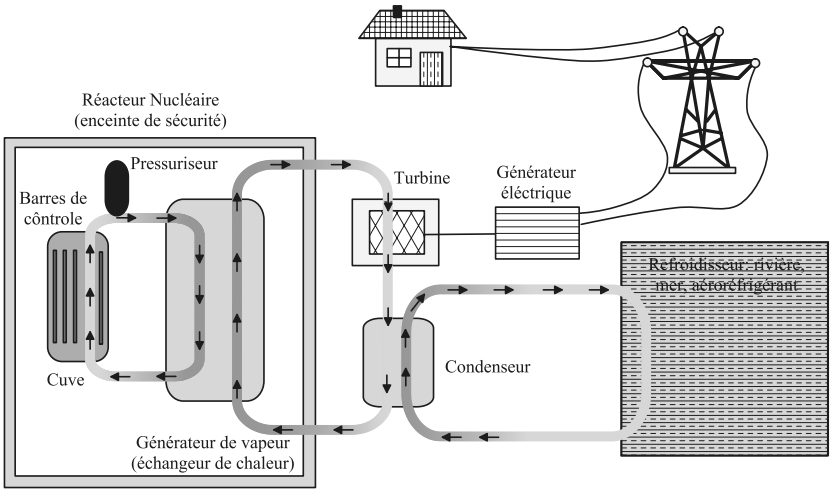
En s'intéressant plus particulièrement à l'énergie thermique des actions volontaires ou involontaires sont exercées sur cette énergie :

- transport : c'est le déplacement dans l'espace d'une quantité d'énergie. Par exemple, on dispose d'une quantité d'eau chaude en un lieu que l'on déplace à travers un réseau de conduites pour l'amener dans un autre lieu afin d'assurer un moyen de chauffe.
- stockage : c'est le déplacement dans le temps d'une quantité d'énergie. Par exemple, la quantité d'eau chaude précédente est obtenue par chauffage de nuit au moyen d'un thermoplongeur électrique et elle est utilisée de jour.
- transfert : c'est le passage d'une quantité d'énergie d'un milieu matériel (solide, liquide ou gazeux) à un autre milieu matériel. Notre eau chaude, par l'intermédiaire du radiateur (échangeur de chaleur), transfère son énergie à l'air environnant.
- conversion : c'est le passage d'une forme d'énergie à une autre. Par exemple la transformation de l'énergie électrique en énergie thermique par l'intermédiaire de l'effet Joule dans la résistance du thermoplongeur.

Exemple de conversion Nucléaire → Thermique → Électrique : la centrale Nucléaire.

La différence essentielle entre une centrale nucléaire et une centrale thermique classique est matérialisée par le remplacement d'un ensemble de chaudières consommant des combustibles fossiles par un réacteur nucléaire. Pour récupérer de l'énergie mécanique à partir de chaleur, il est nécessaire de disposer d'une source chaude et d'une source froide. Pour un réacteur de type REP (Réacteur à Eau sous Pression), la source chaude est fournie par l'eau du circuit primaire, à la température moyenne de

www.biblio-scientifique.net



306 °C (286 °C en entrée et 323 °C en sortie, température de sortie variant selon la puissance de la tranche). La source froide est fournie par l'eau d'un fleuve ou de la mer, ou bien de l'air ambiant par évaporation dans des tours aéroréfrigérantes. Ainsi, une tranche nucléaire de type REP comporte trois circuits d'eau importants indépendants :

- Le circuit primaire qui se situe dans une enceinte de confinement. Il est constitué, suivant le type de tranche, de 3 ou 4 générateurs de vapeur associés respectivement à une pompe (par Génération de Vapeur), un pressuriseur assurant le maintien de la pression du circuit (155 bar) puis d'un réacteur intégrant des grappes de contrôle et le combustible. Il véhicule, en circuit fermé, de l'eau liquide qui extrait les calories du combustible pour les transporter aux générateurs de vapeur (rôle de caloporteur). L'eau du circuit primaire a aussi comme utilité la modération des neutrons (rôle de modérateur) issus de la fission nucléaire. La thermalisation des neutrons les ralentit pour interagir avec les atomes d'uranium 235 et déclencher la fission de leur noyau. Par ailleurs, l'eau procure un effet stabilisateur au réacteur: si la réaction s'emballait, la température du combustible et de l'eau augmenterait. Cela provoquerait d'une part, une absorption des neutrons par le combustible (effet combustible) et d'autre par une modération moindre de l'eau (effet modérateur). Le cumul de ces deux effets est dit "effet puissance" : l'augmentation de ce terme provoque l'étouffement de la réaction d'elle-même, c'est un effet auto - stabilisant.
- Le circuit d'eau secondaire est un circuit fermé, qui se décompose en deux parties. Entre le condenseur et les générateurs de vapeur, l'eau reste sous forme liquide : c'est l'alimentation des générateurs de vapeur ; des pompes permettent d'élever la pression de cette eau, et des échangeurs de chaleur en élèvent la température (60 bar et 220 °C). Cette eau se vaporise dans 3 ou 4 générateurs de vapeur (suivant le type de tranche ; 900 ou 1 300 / 1 450 MW) et les tuyauteries de vapeur alimentent successivement les étages de la turbine disposés sur une même ligne d'arbre. La vapeur acquiert une grande vitesse lors de sa détente permettant ainsi d'entraîner les roues à aubages de la turbine. Celle-ci est composée de plusieurs

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

étages séparés et comportant chacun de nombreuses roues de diamètre différent. D'abord, la vapeur subit une première détente dans un corps haute pression (HP ; de 55 à 11 bar) puis, elle est récupérée, séchée et surchauffée pour subir une seconde détente dans les corps basse pression, (BP ; de 11 à 0,05 bar). On utilise les corps BP dans le but d'augmenter le rendement du cycle thermo - hydraulique. La sortie du dernier étage de la turbine donne directement sur le condenseur, un échangeur de chaleur dont la pression est maintenue aux environs de 50 mbar absolu (vide) par la température de l'eau du circuit de refroidissement (selon la courbe de saturation de l'eau). Des pompes à vide extraient les gaz incondensables en phase gaz du mélange (principalement l'oxygène et l'azote). L'eau condensée dans cet appareil est réutilisée pour réalimenter des générateurs de vapeur. Le circuit de refroidissement assure le refroidissement du condenseur. L'eau est refroidie par un courant d'air dans une tour aéroréfrigérante d'où une petite partie (1,5 %) de l'eau s'échappe en vapeur en forme de panache blanc. L'eau de refroidissement peut aussi être échangée directement avec un fleuve ou la mer. L'énergie mécanique produite par la turbine sert à entraîner l'alternateur qui la convertit en énergie électrique, celle-ci étant évacuée par le réseau électrique.

1.1.3 La nécessaire complémentarité entre thermodynamique et thermique

La thermodynamique classique étudie l'évolution énergétique des systèmes passant d'un état d'équilibre donné à un autre. Ce qui compte en premier lieu c'est ce qu'un système peut absorber ou restituer, donc les variations de son énergie. Ces variations sont directement liées aux flux surfaciques qui opèrent sur la frontière ou au travers. C'est ce que la thermodynamique définie par les échanges entre le système et l'extérieur. Elle permet en outre d'établir des relations entre les phénomènes calorifiques et mécaniques. Si elle quantifie les quantités d'énergie mises en jeu dans l'évolution d'un système, elle ne donne aucune indication sur les mécanismes et la dynamique de ces échanges.

ENCART 1.2 James Watt

James Watt est né le 19 janvier 1736 à Greenock en Écosse. En 1764, un professeur de l'université lui donne à réparer une machine à vapeur de modèle réduit de type atmosphérique. En effectuant la réparation, il s'interroge sur la possibilité de réduire les pertes d'énergie afin de multiplier les utilisations de la machine. Il pense à ajouter un condenseur et une pompe à eau afin d'augmenter la puissance tout en limitant le gaspillage de vapeur et de combustible. Il poursuit ses travaux sur la vaporisation de l'eau et, en 1769, il fait breveter les premiers perfectionnements qu'il apporte à la machine à vapeur. Il meurt en 1819. Son nom est désormais associé à l'unité de mesure de la puissance nécessaire à une machine pour effectuer un travail donné en une seconde.

www.biblio-scientifique.net

Prenons le cas d'une machine frigorifique. L'approche thermodynamique consiste à déterminer le rendement de la machine et à définir les valeurs des grandeurs thermodynamiques (pression, température ...) pour que ce rendement soit optimal. L'approche thermique s'intéresse aux mécanismes de transfert de la chaleur afin d'améliorer la structure des éléments pour obtenir les conditions de fonctionnement optimales définies par la thermodynamique.

Convention de signe

Les formes d'énergie apparaissent lorsqu'il y a interaction entre un système thermodynamique et son environnement dans une évolution vers un état d'équilibre. Lorsqu'une force extérieure agit sur un système thermodynamique, si la projection du « déplacement » sur la direction de la force est dans la même direction que la force, le travail de la force est positif ; le travail est reçu par le système thermodynamique faisant ainsi augmenter son énergie.

On notera que de tout temps l'homme a cherché à pallier aux faiblesses de son énergie musculaire et à ses besoins en chaleur. La nature ne met pas à notre disposition, sous une forme prête à l'emploi, toutes les variétés d'énergies que nous utilisons au quotidien. Les énergies que nous utilisons, et qui sont qualifiées de "finales", sont obtenues à partir des sources disponibles dans la nature, qui sont qualifiées de "primaires". Ces sources primaires peuvent avoir un caractère renouvelable ou non.

1.2 La notion de température et la température d'un corps

La notion de température dérive des sensations de froid et de chaud que donne le toucher, il s'agit donc d'une notion très subjective. Il faut donc définir une grandeur (la température) dont l'évolution produit différents phénomènes tels que des variations de longueur ou de volume. La température est une grandeur repérable et non mesurable (l'égalité et la comparaison entre deux températures ont un sens ; on ne peut définir d'opération à partir de la température du type additivité). On repère alors la température en mesurant l'effet produit par sa variation sur le corps étudié. C'est le principe du thermomètre : la variation de la hauteur de mercure est reliée à la variation de température correspondante. Le thermomètre ainsi formé doit permettre de définir la température d'autres corps. Ceci est possible grâce à la notion fondamentale d'équilibre thermique.

1.2.1 L'équilibre thermique

Lorsque l'on place deux objets, l'un chaud, l'autre froid, dans une enceinte qui n'échange pas avec le milieu extérieur (on a donc affaire à un système isolé), le corps chaud se refroidit tandis que le corps froid se réchauffe et ce jusqu'à un état

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

d'équilibre pour lequel les températures des deux corps s'égalisent. Si l'un est un thermomètre, on a ainsi déterminé la température de l'autre corps. Les températures des deux corps n'étant pas égales, un flux de chaleur apparaît qui persiste jusqu'au moment où le système atteint l'équilibre thermique.

1.2.2 L'étalonnage

Si l'on veut que la température mesurée soit indépendante du thermomètre utilisé, il faut alors définir des points de référence, dits points fixes. On gradue le thermomètre en fonction de ces points, la loi construite sur les points fixes constitue alors l'échelle de température de ce thermomètre.

Ces points fixes sont définis par des conditions thermodynamiques connues correspondant à des changements de phase. Un changement de phase se produit, dans des conditions de pression données à une température bien définie (par exemple, le point d'ébullition de l'eau à pression atmosphérique T = 100 °C, et le point de fusion à T = 0 °C). Suivant les points fixes choisis, on définit différentes échelles de température. La température se mesure :

- en degrés Celsius (°C), échelle datant de 1742,
- en degrés Fahrenheit (°F),
- en degrés Kelvin (K), qui elle date de 1852.

Les échelles Celsius et Fahrenheit sont empiriques alors que l'échelle Kelvin est absolue. Cette dernière se déduit du deuxième principe de la thermodynamique. La température la plus basse possible correspond donc au zéro absolu 0 K. Les relations liant ces différentes échelles sont :

$$T_K = T_{\circ C} + 273{,}15$$

$$T_{\circ C} = \frac{5}{9}(T_F - 32)$$

Relation entre la structure d'un corps et sa température

Au niveau microscopique, l'ensemble des molécules est animé d'un mouvement incessant et désordonné, mouvement qui entraîne des chocs entre les molécules. C'est ce qu'on appelle le mouvement Brownien ou agitation moléculaire. La température d'un corps est liée à ce phénomène et elle est d'autant plus élevée que l'agitation moléculaire est importante.

1.3 Les chaleurs spécifiques

L'équilibre thermique qui se réalise entre deux corps de températures différentes est dû à un échange de chaleur entre ces deux corps. Le sens commun permet de constater que la température finale dépend non seulement des températures initiales mais aussi de la masse des deux corps en contact ainsi que de leur nature.

www.biblio-scientifique.net

L'étude expérimentale de la mise en équilibre thermique de deux corps de masse m_1 et m_2 et de natures différentes, montre que la température d'équilibre de l'ensemble n'est pas la moyenne de leurs températures initiales T_1 et T_2, même s'ils ont la même masse. On constate que tout se passe comme si chaque corps disposait au départ d'un capital thermique qui, rapporté à sa masse, était proportionnel à sa température. Les coefficients de proportionnalités C_1 et C_2 dépendent de la nature du corps. Comme la chaleur perdue par le corps chaud est gagnée par le corps froid on obtient la température d'équilibre :

$$T = \frac{m_1 C_1 T_1 + m_2 C_2 T_2}{m_1 C_1 + m_2 C_2} \tag{1.1}$$

Ainsi, de façon plus générale, on exprimera la quantité de chaleur Q absorbée ou cédée par un corps de masse m dont la température évolue de T_{ini} (température initiale) à T_{fin} (température finale) par :

$$Q = m\,C\ (T_{\text{fin}} - T_{\text{ini}}) \tag{1.2}$$

La chaleur spécifique C, caractérise la nature du corps. C'est la quantité de chaleur qu'il faut fournir à l'unité de masse pour élever sa température de 1 K. La chaleur spécifique s'exprime donc en J kg^{-1} K^{-1}. Le produit $m\,C$ est la capacité calorifique et s'exprime en J K^{-1}.

Ainsi la capacité calorifique d'un corps est le rapport de la chaleur absorbée ΔQ à l'accroissement de température résultant ΔT. La notion de chaleur spécifique se généralise à toute évolution thermique pourvu qu'elle ait lieu dans des conditions parfaitement définies et reproductibles. On peut modifier la température en maintenant le corps à volume constant ou à pression constante. Les chaleurs spécifiques correspondantes sont notées C_{v} (évolution isochore) et C_{p} (évolution isobare). On retiendra que pour les solides et les liquides $C_{\text{v}} \approx C_{\text{p}}$.

Rappelons qu'en thermodynamique, la convention de signe consiste à définir comme positive toute quantité d'énergie « gagnée » par le système étudié.

- Si $T_{\text{ini}} > T_{\text{fin}}$, $Q < 0$, il y a perte de chaleur pour le système étudié.
- Si $T_{\text{ini}} < T_{\text{fin}}$, $Q > 0$, il y a gain de chaleur pour le système étudié.

Dans le cas d'une variation infinitésimale, en tenant compte du fait que la chaleur massique peut varier avec la température, on écrit l'accroissement de chaleur sous la forme :

$$\delta Q = m\,C_{\text{p}}\,\delta T \qquad \text{soit} \qquad Q = m \int_{T_{\text{ini}}}^{T_{\text{fin}}} C_p\,\mathrm{d}T \tag{1.3}$$

Si on ne raisonne plus en termes de masse mais de débit massique $\dot{m}$ (exprimé en kg s^{-1}), la quantité de chaleur sera exprimée par unité de temps. C'est alors la disponibilité instantanée de l'énergie qui est précisée et on sera donc amené dans ce cas à exprimer le flux (en Watts) liée à la variation de température sous la forme :

$$\delta\phi = \dot{m}\,C_{\text{p}}\,\delta T \qquad \text{soit} \qquad \phi = \dot{m} \int_{T_{\text{ini}}}^{T_{\text{fin}}} C_{\text{p}}\,\mathrm{d}T \tag{1.4}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Si l'on considère un système isolé c'est-à-dire ne pouvant pas échanger d'énergie avec le milieu extérieur, on a :

$$\sum Q = 0 \quad \text{ou} \quad \sum \phi = 0 \tag{1.5}$$

La quantité totale de chaleur est conservée lorsqu'il s'agit d'un phénomène purement calorifique.

1.4 Le premier principe de la thermodynamique

Dans les phénomènes purement mécaniques, on a conservation de l'énergie mécanique. De même, dans les phénomènes purement calorifiques, il y a conservation de la chaleur. Dans des phénomènes plus généraux où sont mis en jeu travail mécanique W et chaleur Q, il y a conservation de l'énergie totale mais chaque forme d'énergie n'est pas conservative à elle seule. Dès le début du XIXe siècle il était bien acquis qu'en fournissant du travail à un système, par exemple en comprimant un gaz, on pouvait en retirer la chaleur. De façon réciproque, en chauffant ce gaz on peut en retirer du travail. Cette conversion réciproque posait alors le problème de l'équivalence entre chaleur et travail. Des expériences on conduit à retenir une valeur pour le rapport W/Q = 426,8 kg m kcal^{-1} et ce rapport fixe l'équivalence entre la calorie et le Joule.

À titre d'exemple, considérons un patin de frein sur une jante de bicyclette. C'est un système mécanique dans lequel il existe des forces de frottement. Lors du freinage, il y a dissipation d'énergie sous forme calorifique liée au travail des forces de frottement. On dit qu'il y a dégradation d'énergie mécanique et création de chaleur. Il convient de noter que dans la réalité cette conversion se fait avec une certaine efficacité. Cette efficacité est égale à 100 % si l'on considère que le phénomène est réversible.

La chaleur est une forme d'énergie

La quantité de chaleur (Q) est mesurée dans le Système International en Joules (J). La calorie est la quantité de chaleur qui fait passer de 14,5 °C à 15,5 °C la température d'un gramme d'eau (sous une pression de 1 015 hPa) ; 1 calorie = 4,184 Joules.

1.4.1 Le système et les variables thermodynamiques associées

Considérons un système thermodynamique qui évolue suffisamment lentement d'un état initial (ini) vers un état final (fin). Alors tous les états intermédiaires peuvent être considérés comme des états d'équilibre. Par conséquent, on connaît à chaque instant les variables thermodynamiques du système à partir d'équations d'état. Ce sont les relations mathématiques liant les variables d'état du système. Dans le cadre de l'hypothèse de départ, la transformation subie par le système est réversible et le chemin inverse, c'est-à-dire l'évolution qui consisterait à retourner à l'état initial, est

www.biblio-scientifique.net

réalisable. Dans le cas contraire, on dira que la transformation est irréversible. En pratique, les processus thermodynamiques réels sont irréversibles et l'hypothèse de réversibilité constitue donc une approximation.

Les formes d'énergie s'expriment à partir des variables extensives et intensives. Il convient de noter que toute variation d'énergie s'exprime comme le produit d'une variable intensive par la variation d'une variable extensive.

Les variables d'état

Ce sont les grandeurs physiques qui ont une influence significative sur le comportement du système comme par exemple la température (T), la pression (P), le potentiel chimique (μ_i) etc....

Ces variables d'état peuvent être des variables :

- **extensives** : fonctions de l'extension du système (masse, volume, entropie, quantité de chaleur...) ;
- **intensives** : indépendantes de la taille (extension) de ce système (pression, température, potentiel chimique...).

Dans un système thermodynamique décomposé en sous-systèmes, la valeur prise par une variable d'état extensive est la somme des valeurs prises par cette variable dans chacun des sous-systèmes.

On dira d'un système qu'il est dans un état d'équilibre thermodynamique lorsque les valeurs des variables d'état qui le caractérise sont indépendantes du temps.

1.4.2 L'énergie interne

L'énergie interne d'un système, qui traduit l'agitation des particules et l'énergie liée aux forces d'interactions entre elles, ne dépend que de l'état du système. C'est donc une fonction d'état, elle retrouve la même valeur au bout d'un cycle thermodynamique. La variation d'énergie du système, qui évolue de l'état (ini) à l'état (fin) s'écrit : $\Delta U = U_2 - U_1$ et ce quel que soit le chemin suivi pour passer de (ini) à (fin).

L'énergie interne est une grandeur extensive. Ainsi, l'énergie interne d'un système constitué de n sous-systèmes d'énergie interne $\Delta U = U_2 - U_1$ est donnée par : $dU = \delta Q + \delta W$.

1.4.3 Énoncé du premier principe

On considère un système fermé et au repos. Il est en contact avec le milieu extérieur et effectue une transformation au cours de laquelle il est soumis à des forces extérieures (par exemple des forces de pression) agissant sur sa frontière. Par action mécanique ces forces donnent lieu à un travail élémentaire δW. Le système échange avec le milieu extérieur, au travers de cette même frontière, une quantité de chaleur δQ. Le premier principe de la thermodynamique traduit le principe de conservation de l'énergie. La variation d'énergie interne dU, différentielle totale de la fonction d'état U pour une

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

transformation infinitésimale du système, s'exprime par :

$$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W \tag{1.6}$$

Au cours d'une évolution du système entre deux états parfaitement définis (1) et (2), la variation totale d'énergie interne vaut alors :

$$\Delta U = \int_1^2 \mathrm{d}U = \int_1^2 \mathrm{d}Q + \int_1^2 \mathrm{d}W \tag{1.7}$$

Soit en développant :

$$U_2 - U_1 = Q_{1\to 2} + W_{1\to 2} \tag{1.8}$$

Il s'agit d'une somme algébrique. La quantité de chaleur $Q_{1\to 2}$ est positive s'il s'agit d'un gain d'énergie pour le système. Dans le cas contraire, elle est négative. Il en est de même pour le travail $W_{1\to 2}$. $Q_{1\to 2}$ et $W_{1\to 2}$ ne sont pas des fonctions d'état et leur valeur respective dépend des états intermédiaires atteints au cours du cycle de la transformation de (1) à (2) ; elles dépendent du parcours suivi.

On peut noter quelques situations remarquables :

- le système, après une succession de transformations, revient à l'état initial et donc $U_2 - U_1 = 0$ puisque $U_2 = U_1$;
- le système est isolé alors : $Q_{1\to 2} = 0$ et $W_{1\to 2} = 0$ d'où $\Delta U = 0$;
- le système est adiabatique c'est à dire imperméable à la chaleur :

$$Q_{1\to 2} = 0 \quad \text{soit} \quad \Delta U = W_{1\to 2}.$$

1.4.4 Référence aux énergies mécaniques

Calculons le travail des forces extérieures agissant sur un système dans le cas où il s'agit de forces de pression. Ces forces agissent à l'interface frontière du système avec le milieu extérieur. Le milieu extérieur exerce en tout point de la frontière du système une force pressante dirigée de l'extérieur vers l'intérieur du volume sur lequel elle s'exerce.

Si P_{ext} est la pression extérieure s'exerçant au point M, la force pressante $\mathrm{d}\overrightarrow{f}$ exercée par le milieu extérieur sur l'élément d'aire $\mathrm{d}\overrightarrow{a}$ du système s'écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{f} = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}\overrightarrow{a} = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}a\,\overrightarrow{n} \tag{1.9}$$

Où $\overrightarrow{n}$ est la normale extérieure à $\mathrm{d}\overrightarrow{a}$ au point M. À la suite d'une dilatation ou d'une compression, l'élément $\mathrm{d}\overrightarrow{a}$ se déplace de $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$. Le travail élémentaire des forces pressantes extérieures dans ce déplacement sera $\delta W = d\overrightarrow{f}.d\overrightarrow{l}$ ou encore :

$$\delta W = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}a\,\overrightarrow{n}.\mathrm{d}l\,\overrightarrow{n} \tag{1.10}$$

www.biblio-scientifique.net

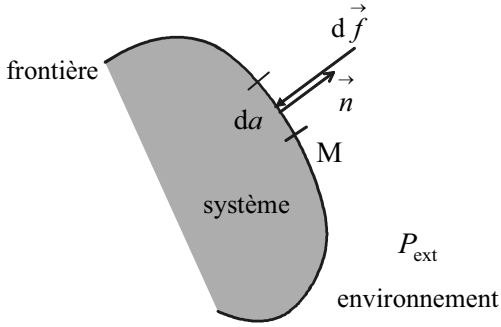


Figure 1.2 **Efforts de pression sur la frontière du système**

Le déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$ produit une variation de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}a\,\overrightarrow{n}.\mathrm{d}l\,\overrightarrow{n}$. L'expression du travail est donnée par :

$$\delta W = -P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V \quad \text{soit} \quad W_{1\to 2} = -\int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V \tag{1.11}$$

La représentation graphique de $P_{\text{ext}}(V)$ montre que $W_{1\to 2}$ représente, au signe près, l'aire hachurée sur la figure 1.3. Cette illustration confirme que la valeur de W dépend des états intermédiaires (P,V) pour passer de l'état (1) à l'état (2).

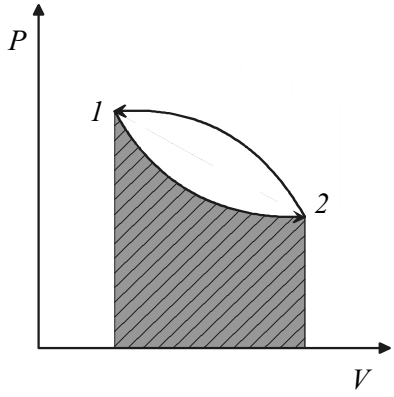


Figure 1.3 **Processus thermodynamique réversible entre les états 1 et 2**

Il convient de noter que pour :

- une transformation isobare (P = cte): $W_{1\to 2} = -P_{\text{ext}}(V_2 - V_1)$
- une transformation isochore (V = cte): $W_{1\to 2} = 0$

On s'intéresse tout d'abord à l'évolution de la quantité de chaleur Q lors d'une transformation isochore :

$$\delta Q_{\text{v}} = m\,C_{\text{v}}\mathrm{d}T \tag{1.12}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

La variation d'énergie interne est alors : $dU = \delta Q_v - P_e\, dV = \delta Q_v$, puisque d$V$=*0*. Ainsi $dU = mC_v dT$.

On suit maintenant l'évolution de la quantité de chaleur Q lors d'une transformation isobare : $\delta Q_p = mC_p dT$.

L'énergie interne s'écrit alors sous la forme :

$$dU = \delta Q_p - P_e dV \quad \Rightarrow \quad \delta Q_v = dU + P_e dV,$$

or d(PV) = PdV + VdP = PdV puisque dP = 0 lorsque l'évolution s'effectue à pression constante. Alors : $\delta Q_v = dU + d(P_{\text{ext}}V) = d(U + P_{\text{ext}}V) = dH$.

La fonction $H = U + P_{\text{ext}}\, V$ est une fonction d'état appelée enthalpie. L'enthalpie correspond à la quantité de chaleur échangée au cours d'une évolution à pression constante et ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

1.5 Le changement de phase et le diagramme de phase

Un corps peut se présenter sous différents états ou phases en fonction des conditions de pression et de température auxquelles il est soumis : l'état solide, l'état liquide et l'état gazeux. Il y a changement de phase lorsque le système passe d'une phase à l'autre c'est à dire change d'état physique. La figure 1.4 présente les principaux changements de phase.

À titre d'illustration si $P = P_{\text{atm}}$, l'eau est liquide entre 0 °C et 100 °C, au delà 100 °C il y a vaporisation et l'eau existe sous forme de vapeur d'eau. En dessous de 0 °C il y a solidification et l'eau existe sous forme de glace.

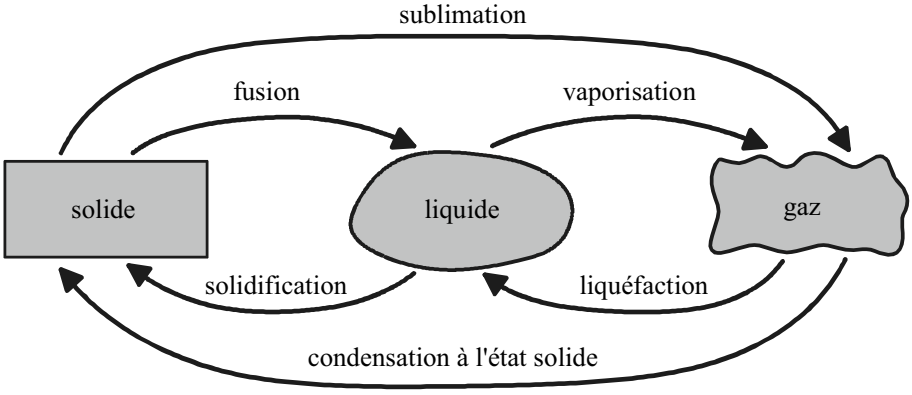


Figure 1.4 **Dénomination des principaux changements de phase**

www.biblio-scientifique.net

1.5.1 Diagramme d'équilibre

Un changement de phase pour un corps pur ne peut se produire, pour une pression donnée, qu'à une seule et unique température. Ceci peut être représenté dans l'espace $P(T)$ en fonction des changements de phase étudiés. L'état d'un système est définit par un couple de valeur (P, T). En fonction de la position du point représentatif de cet état dans le diagramme d'équilibre, il est possible de connaître la phase dans laquelle se trouve le système.

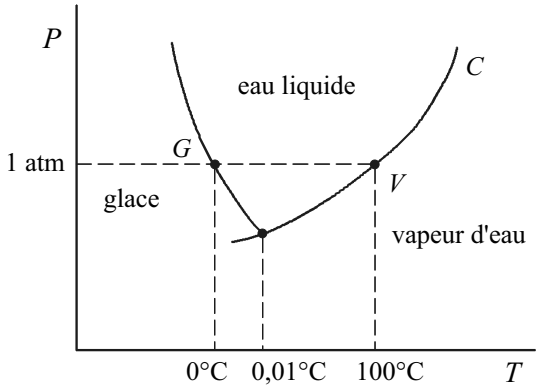


Figure 1.5 **Représentation des courbes d'équilibre pour l'eau**

L'origine arbitraire choisie pour l'eau liquide correspond à une enthalpie nulle au point G. L'enthalpie H_g de la vapeur d'eau représentée sur le diagramme par le point V est la variation d'enthalpie entre G et V. Pendant le changement de phase, la pression et la température restent constantes tant que le changement de phase n'est pas totalement terminé c'est à dire tant qu'il y a coexistence de deux phases. Les points représentatifs d'un changement de phase sont ceux qui se trouvent sur les courbes d'équilibre.

1.5.2 Chaleur latente de changement de phase

Tout changement de phase s'accompagne d'une absorption d'énergie ou au contraire d'une restitution d'énergie. Par exemple, la vaporisation de l'eau à pression atmosphérique nécessite un apport d'énergie par chauffage.

Au cours du changement de phase, la quantité de chaleur fournie (ou cédée) ne se traduit pas par une variation de température puisque cette énergie sert à rompre (ou à rétablir) les liaisons intermoléculaires. Ceci explique que la température reste constante et que la quantité de chaleur mise en jeu soit appelée chaleur latente (« invisible ») par opposition à la quantité de chaleur sensible (c'est à dire « visible ») qui est accompagnée d'une variation de température.

Un changement de phase s'effectuant toujours à pression constante, la quantité d'énergie associée à ce changement de phase est caractérisée par une variation d'enthalpie.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Soit Δh la chaleur latente de changement de phase, il s'agit de l'énergie spécifique, donc en J kg^{-1}, associée au changement de phase. C'est une caractéristique du système étudié et du changement de phase subi, d'où : $\Delta H = Q_p = mL$. Dans cette relation m est la masse qui change effectivement d'état. Par exemple, la chaleur latente d'évaporation de l'eau (passage de l'eau liquide à l'eau vapeur) vaut : $2{,}46 \times 10^6$ J kg^{-1}, et la chaleur de latente de fusion (passage de la glace à l'eau liquide) vaut : $0{,}33 \times 10^6$ J kg^{-1}.

Au cours d'une évolution plus générale, un système initialement dans la phase (1) à la température T_{ini} est chauffé pour atteindre la température T_{fin} dans une autre phase (2). La quantité de chaleur fournie au cours de cette transformation est :

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta Q = & \Delta Q_1 & + & \Delta H & + & \Delta Q_2 & \\ & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & \\ \Delta Q = & m\,C_1(T_{\text{sat}} - T_{\text{ini}}) & + & m\,\Delta h_{T_{\text{sat}}} & + & m\,C_2(T_{\text{fin}} - T_{\text{sat}}) & \end{array} \tag{1.13}$$

T_{sat} est la température de saturation c'est-à-dire la température à laquelle à lieu le changement de phase pour la pression imposée.

Si l'on s'intéresse à l'eau titrable imbibant un matériau, il peut exister un état de l'eau dit « eau liée » qui est adsorbée sur et dans les parois de la structure grâce aux propriétés hydrophiles de leurs constituants et qui confère au matériau un caractère hygroscopique. Il faut alors ajouter l'énergie dite de désorption (h_b), énergie nécessaire pour libérer les molécules d'eau liée du squelette solide avant de les rendre libres et aptes à s'évaporer. Cette énergie n'apparaît que dans le domaine hygroscopique et ne devient significative au regard de l'énergie d'évaporation (h_{vap}) que pour de très faibles teneurs en eau.

1.6 Quelques bases sur les différents modes de transfert thermique

Ici on va s'intéresser à la cinétique qui fait que les deux corps mis en présence dans l'enceinte isolée, et qui nous ont permis d'illustrer la notion d'équilibre thermique, échangent de la chaleur jusqu'à la disparition de la différence de température initiale.

Les échanges thermiques sont de trois types et sont décrits par des lois phénoménologiques, c'est à dire déduites de constatations expérimentales.

1.6.1 Conduction

La conduction résulte de « chocs » à l'échelle moléculaire et atomique. Elle va donc être très liée à la structure et à l'organisation du matériau. Elle peut avoir lieu dans les solides et dans une moindre mesure dans les fluides, plus dans les liquides que dans les gaz. C'est un phénomène très analogue à la conduction de l'électricité. Il s'agit d'un transfert d'énergie à petite échelle, dans un corps localement au repos. On parlera de conducteur ou d'isolant de la chaleur. Elle est décrite par la loi de Fourier (1807).

www.biblio-scientifique.net

1.6.2 Convection

C'est un transfert qui résulte d'un mouvement d'ensemble du matériau le supportant. La convection a donc lieu dans les fluides (gaz ou liquides). Elle est souvent caractéristique de l'échange à la frontière entre un solide et un fluide et est donc très liée à l'écoulement fluide mais aussi aux géométries d'échange et aux états de surface si un solide intervient. Il convient de distinguer la convection forcée dans laquelle le fluide est mis en mouvement par un apport d'énergie mécanique extérieur (pompe, ventilateur, ...) de la convection naturelle dans laquelle le fluide prend, en son sein, l'énergie nécessaire au mouvement (variation de masse volumique associée à une variation de température par exemple). De façon macroscopique elle est décrite par la loi de Newton (1701).

1.6.3 Rayonnement

La matière émet des ondes électromagnétiques (émission qui se produit en surface pour les solides et les liquides opaques, dans tout le volume pour les gaz ou liquides transparents). Ces ondes dépendent de la température. Il s'agit d'une onde électromagnétique et qui donc ne nécessite aucun support matériel pour se propager. Outre le rayonnement thermique dont la bande de longueur d'onde va de l'ultra violet à l'infrarouge long, le thermicien peut s'intéresser à des ondes comme les micro-ondes et leur génération dans le volume. Ce mode de transfert est décrit par la loi de Stefan (1879).

1.6.4 Les principales notations et grandeurs du transfert thermique

Les principales notations du transfert thermique sont proposées dans le tableau ci-après. Certaines de ces grandeurs ont déjà été rencontrées dans les paragraphes précédents, d'autres apparaissent. Toutes seront reprises dans les chapitres suivants.

Tableau 1.1 **Principales grandeurs de thermique**

T	température	unité d'usage °C, mais unité SI K
t	temps	seconde
Q	chaleur (énergie)	unité SI J, mais aussi kcal, th (thermie), kWh, Btu
$\phi = Q/t$	puissance thermique, flux	W, (J s^{-1})
$\varphi = \phi/A$	densité de flux	
	Il convient de noter ici que A est l'aire de la surface d'échange en convection et désigne la section de passage du flux en conduction	W m^{-2}

Il faut ajouter quelques grandeurs qui apparaîtront au fur et à mesure de l'analyse et de la mise en place des phénomènes thermiques :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

• La conductivité thermique, qui indique l'aptitude du matériau à conduire la chaleur (à rapprocher de la conductivité électrique) :

$$\lambda \propto \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}A}\frac{L}{\Delta T} \tag{1.14}$$

Dans cette relation L est la dimension caractéristique de l'échange par conduction pour laquelle l'écart de température est ΔT. L'unité de la conductivité thermique est alors W m^{-1} K^{-1}. La diffusivité thermique caractérise l'aptitude au déplacement dans l'espace mais surtout dans le temps de la chaleur. Cette grandeur est à rapprocher des deux autres diffusivités que l'on rencontre lorsque sur un problème de thermique vient se greffer un problème massique, diffusivité matérielle, ou un problème d'écoulement, diffusivité mécanique ou viscosité dynamique. La diffusivité thermique est définie par :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho\, C_\mathrm{p}} \tag{1.15}$$

ρ est la masse volumique du matériau. L'unité des diffusivités est m^2 s^{-1}. Même si dans cet ouvrage le régime transitoire n'est pas pleinement abordé il est important de pouvoir évaluer les temps d'établissement de tel ou tel phénomène physique. De plus à ce stade, notons que pour caractériser les échanges thermiques à des temps courts il est fait usage de l'effusivité thermique $E = \sqrt{\lambda\, \rho\, C_\mathrm{p}}$.

Le coefficient d'échange thermique est caractéristique du transfert aux frontières entre un solide et un fluide. On parle de coefficient d'échange convectif, mais aussi de coefficient global prenant en compte le transfert radiatif. Il est défini par :

$$h \propto \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}A}\frac{1}{\Delta T} \tag{1.16}$$

ΔT est l'écart de température sous lequel l'échange a lieu. L'unité dans le système SI de h est W m^{-2} K^{-1}.

1.6.5 Les problèmes les plus courants

Le thermicien cherchera à résoudre deux types de problèmes :

1) Pour un flux ϕ donné, quel est le champ de température dans le système étudié (par exemple la température d'une pièce dans un four) ?
2) À température connue T, quel est le flux nécessaire à injecter dans le système (par exemple le chauffage d'un local) ?

1.6.6 La densité de flux

Soit un élément de surface dΩ, orienté par la normale $\overrightarrow{n}$, dϕ est le flux d'un vecteur $\overrightarrow{\varphi}$ au travers de la surface élémentaire dΩ :

$$\mathrm{d}\phi = \overrightarrow{\varphi}\ \overrightarrow{n}\ \mathrm{d}\Omega = \varphi\ \cos\alpha\ \mathrm{d}\Omega \tag{1.17}$$

www.biblio-scientifique.net

où $\cos\alpha \, d\Omega$ représente la surface utile.

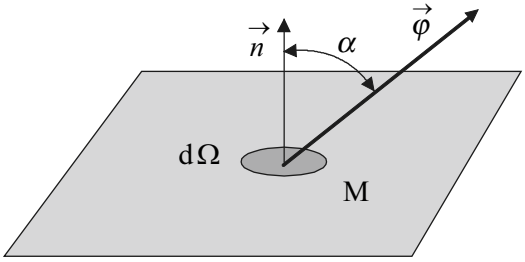


Figure 1.6 **La densité de flux de chaleur $\vec{\varphi}$**

$\vec{\varphi}$ est la densité locale de flux de chaleur au point M. Ce vecteur caractérise, en chaque point du milieu, la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur.

1.7 Quelques éléments sur le régime transitoire

Le contenu de cet ouvrage est centré sur les études en régime permanent, ce paragraphe permet quelques ouvertures vers les problèmes qui apparaissent lorsque le paramètre « temps » est introduit.

1.7.1 Conduction en régime transitoire : méthode de la capacité thermique

Soit à considérer un solide de petite dimension que l'on va immerger dans un grand volume d'eau. On note V le volume du solide tel que $V = L^3$. Le solide est à l'instant initial à la température T_i. On fait l'hypothèse que, compte tenu des diverses caractéristiques du solide sa température est et demeurera uniforme tout au long du processus. Il n'y a pas de gradient thermique dans le matériau solide. À l'instant initial ($t = 0$), le solide est trempé et au cours du temps sa température T décroît. Cette décroissance est due au transfert par convection à l'interface solide-liquide.

Le bilan thermique sur le solide conduit à :

$$\frac{dQ}{dt} = d\phi_s = \rho \, V \, C_p \frac{dT}{dt} \tag{1.18}$$

Cette relation décrit la perte de chaleur du solide dans l'intervalle de temps dt. Dans cette relation ρ et C_p sont respectivement la masse volumique et la chaleur spécifique du solide. Du coté fluide, le flux acquis s'écrit :

$$d\phi_f = h \, A \, (T - T_\infty) \tag{1.19}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Cette relation indique que l'on a retenu une description linéaire des échanges et surtout que l'on est capable de définir une température de référence T_∞ qui demeure constante (il faudra analyser à posteriori cette hypothèse). Dans cette relation A est l'aire de la surface d'échange qu'offre le solide au fluide et h le coefficient global d'échange.

On a alors pour le système isolé solide-fluide :

$$\mathrm{d}\phi_s + \mathrm{d}\phi_f = 0 \tag{1.20}$$

En effectuant le changement de variable $\theta(t) = T - T_\infty$, cette relation devient :

$$\frac{\mathrm{d}\theta\,(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{h\,A}{\rho\,V\,C_\mathrm{p}}\,\theta\,(t) \tag{1.21}$$

Avec $\theta(0) = T_i - T_\infty = \theta_i$ on a alors :

$$\frac{\theta}{\theta_\mathrm{i}} = \frac{T - T_\infty}{T_\mathrm{i} - T_\infty} = \exp\left(-\frac{h\,A}{\rho\,V\,C_\mathrm{p}}t\right) \tag{1.22}$$

Ceci permet de définir la constante de temps caractérisant la transition entre régime transitoire et permanent :

$$\tau = \frac{\rho\,V\,C_\mathrm{p}}{h\,A} \tag{1.23}$$

Quel est le domaine de validité de notre résultat ?

- Pour que T_∞ soit considérée constante, il faut que le fluide ait une capacité thermique beaucoup plus grande que celle du solide.
- Pour que la température soit uniforme dans le solide, il faut que le volume de solide soit petit et que sa conductivité soit grande.

On définit (cela sera précisé plus rigoureusement au chapitre 2) le nombre de Biot comme $\mathrm{Bi} = h\,L/\lambda$. De même, la quantité $\mathrm{Fo} = \dfrac{\alpha t}{L^2}$ représente l'échelle de temps adimensionnelle et est dénommée nombre de Fourier (rappelons que α est la diffusivité thermique définie plus haut). Ainsi l'évolution de la température du solide, donnée par la relation 1.22, s'écrit de manière équivalente :

$$\frac{\theta}{\theta_\mathrm{i}} = \exp\left(-\mathrm{Bi}\ \mathrm{Fo}\right) \tag{1.24}$$

www.biblio-scientifique.net

Exercices

1.1 Mesures calorimétriques

Dans un calorimètre contenant de l'eau à une température initiale T_{ei}, est immergé un serpentin parcouru par un fluide. Ce fluide entre à une température constante T_3 et sort à la température T_4. Le serpentin est suffisamment long pour que cette température T_4 devienne égale à la température T_e de l'eau du calorimètre supposée homogène

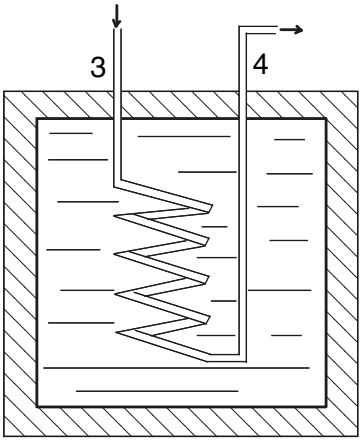


Figure 1.7 **Calorimètre avec serpentin**

Les mesures comportent les deux phases suivantes :

Phase I : L'eau du calorimètre étant initialement à T_{ei}, le serpentin est parcouru par de l'huile de chaleur massique C_1 connue, de façon à déterminer les caractéristiques de fonctionnement du calorimètre.

Phase II : L'eau du calorimètre étant initialement à T_{ei} le serpentin est parcouru par de l'hydrogène dont la chaleur massique C_h est à déterminer. Au bout du temps t_h on note la température T_{h4} de l'hydrogène à la sortie du serpentin.

Hypothèses

Les pressions de l'huile et de l'hydrogène dans le serpentin sont constantes.

Le calorimètre est parfaitement calorifugé.

Les variations d'énergies cinétique et potentielle sont négligeables.

Les capacités calorifiques de l'enceinte du calorimètre et du serpentin sont négligées.

Les chaleurs spécifiques de l'eau et de l'huile sont constantes.

L'hydrogène est assimilable à un gaz parfait.

Données

Température initiale de l'eau T_{ei} = 15 °C

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Chaleur spécifique de l'eau $C_e = 4{,}18$ kJ K^{-1} kg^{-1}
Masse de l'eau $m_e = 0{,}4$ kg
Phase I
Température de l'huile à l'entrée du serpentin $T_{13} = 80$ °C
Chaleur spécifique de l'huile : $C_1 = 1{,}65$ kJ K^{-1} kg^{-1}
Masse de l'huile qui passe dans le serpentin $m_1 = 0{,}1$ kg
Débit-masse de l'huile $\dot{m}_1 = 10^{-3}$ kg s^{-1}
Phase II
Température de l'hydrogène à l'entrée du serpentin $T_{h3} = 80$ °C
Température de l'hydrogène à la sortie du serpentin : $T_{h4} = 52$ °C
Temps d'immersion du serpentin rempli d'hydrogène : $t_h = 50$ s
Débit-masse de l'hydrogène : $\dot{m}_h = 2 \times 10^{-3}$ kg s^{-1}

a) Étudier l'évolution de la température T_e de l'eau du calorimètre en fonction du temps t.
b) Pour la phase I, calculer la température finale T_{ef} de l'eau du calorimètre après le passage d'une masse m_1 d'huile.
c) Aurait-on obtenu la même température finale de l'eau si, au lieu d'utiliser le serpentin, on avait versé la masse m_1 d'huile directement dans l'eau du calorimètre.
d) Pour la phase II, calculer la chaleur spécifique isobare C_h de l'hydrogène.

1.2 Évaporation

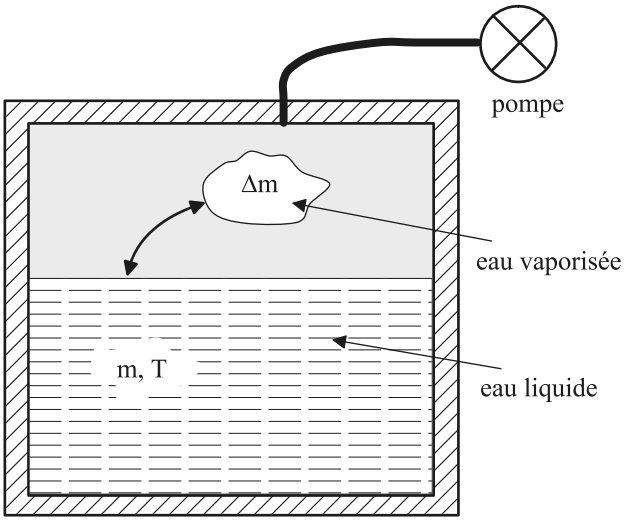


Figure 1.8 **Récipient contenant de l'eau**

Un récipient dont les parois sont imperméables à la chaleur contient initialement une masse $m_0 = 20$ g d'eau liquide de capacité thermique $C_p = 4\,185$ J kg^{-1} K^{-1} à la

www.biblio-scientifique.net

température $T_0 = 345$ K. La vapeur formée au cours de l'évaporation est évacuée grâce à une pompe. La chaleur de vaporisation de l'eau dans l'intervalle de température considéré dans ce problème est :
$L = A - B\,T$ avec $B = 2{,}9\ 10^3$ J kg^{-1} K^{-1}.

a) Quelle est la quantité de chaleur nécessaire pour vaporiser une masse Δm d'eau liquide ?
b) Le système étant thermiquement isolé, cette quantité de chaleur est puisée dans la masse m d'eau liquide restante. Qu'observe-t-on ?
c) En considérant maintenant l'évaporation d'une quantité infinitésimale dm d'eau, écrivez le bilan énergétique de l'évaporation.
d) Lorsque la fraction d'eau vaporisée est 10 %, on mesure que la température de l'eau liquide est 284 K. En déduire le coefficient A.
e) Le processus continue jusqu'à ce que l'eau liquide atteigne la température de 0 °C. Quelle masse d'eau s'est alors vaporisé ?
f) L'eau liquide se met alors à geler. Quelle est la masse de glace obtenue lorsque toute l'eau liquide a disparu ? On négligera la sublimation de la glace et on donne la chaleur de fusion de la glace $L_f = 335$ kJ kg^{-1}.

Dans une autre expérience, la masse $m_0 = 20$ g d'eau liquide de capacité thermique $C_p = 4\ 185$ J kg^{-1} K^{-1} à la température $T_0 = 345$ K est placée dans une ampoule elle-même située dans un calorimètre de valeur en eau totale $m_e = 1$ kg. L'ampoule est mise en communication avec un récipient vide. La vaporisation de l'eau de l'ampoule provoque un refroidissement.

g) Déterminer la température finale T_1 à l'intérieur du calorimètre.

1.3 Étude comparative d'échangeurs

On considère un échangeur simple constitué de deux tubes rectilignes et concentriques de longueur L. Le tube intérieur (1) à un rayon R_1. Le tube extérieur (2), de rayon R_2, est constitué d'un matériau supposé isolant thermique parfait. Le tube (1) est parcouru par un fluide caloporteur qui transmet, par unité de temps, une quantité totale Q de chaleur à un second fluide circulant dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes.

a) Analyser qualitativement le problème en envisageant successivement le cas d'un échangeur à écoulement à co-courant (écoulement des deux fluides dans le même sens) puis d'un échangeur à écoulement à contre-courant (écoulement des fluides en sens opposés) et représenter l'allure des profils de température $T_1(x)$ et $T_2(x)$ sur une même figure.
Le flux de chaleur échangé entre deux fluides de températures respectives T_1 et T_2, circulant de part et d'autre d'une paroi, peut s'exprimer par:

$$\phi = h\ S(T_1 - T_2)$$

où h est le coefficient global d'échange entre les deux fluides (par l'intermédiaire de la paroi) et S la surface d'échange de la paroi.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

b) Montrer, en effectuant le bilan thermique sur une longueur dx de l'échangeur, et en supposant constantes toutes les propriétés physiques des corps en présence ainsi que le coefficient d'échange global, que l'écart de température $\Delta T(x) = T_1(x) - T_2(x)$ entre les températures moyennes de mélange à l'abscisse x varie selon la loi exponentielle:

$$\Delta T(x) = \Delta T(0)\exp(-Kx)$$

avec K, constante à définir.

c) En déduire que le flux total échangé entre les deux fluides est de la forme:

$$\phi = h\,S\,\Delta\overline{T} \quad \text{où} \quad \Delta\overline{T} = \frac{\Delta T(L) - \Delta T(0)}{\ln\left[\Delta T\,(L)\,/\Delta T\,(0)\right]}$$

d) Application numérique: calculer la surface d'échange nécessaire à un échangeur de chaleur constitué de tubes minces de 25 mm de diamètre et destiné à refroidir 25 000 kg h^{-1} d'une solution d'alcool éthylique (C_p = 0,91 kcal kg^{-1} °C^{-1}) de 66 °C à 40 °C avec un débit d'eau de 22 500 kg h^{-1} dont la température à l'entrée de l'échangeur est 10 °C. On prendra un coefficient d'échange global de 500 kcal h^{-1} m^{-2} °C^{-1} et on considérera les deux cas d'écoulements, à co-courant et à contre-courant.

L'efficacité d'un échangeur est définie comme le rapport du flux réel échangé entre les deux fluides au flux maximum échangeable.

e) Discuter la notion de « flux maximum échangeable » puis définir son expression. En déduire l'efficacité de l'échangeur étudié.

Solutions des exercices

1.1 **a)** Variation de la quantité de chaleur de l'eau pendant le temps dt :

$$\mathrm{d}q_e = m_e C_e\,(T_e\,(t + \mathrm{d}t) - T_e\,(t)) = m_e C_e \mathrm{d}T_e\,(t)$$

Variation de la quantité de chaleur du fluide pendant le temps dt :

$$\mathrm{d}q_1 = m_1 C_1\,(T_e\,(t) - T_{13}) = \dot{m}_1 C_1\,(T_e\,(t) - T_{13})\,\mathrm{d}t$$

Le système étant isolé, on a : $\sum \mathrm{d}q_i = 0$

$$\dot{m}_1\,\mathrm{d}t\;C_1\,(T_e\,(t) - T_{13}) = -m_e C_e \mathrm{d}T_e\,(t)$$

$$\dot{m}_1\,\mathrm{d}t\;C_1\,(T_e\,(t) - T_{13}) = -m_e C_e \mathrm{d}\,(T_e\,(t) - T_{13})$$

www.biblio-scientifique.net

$$\frac{\mathrm{d}\left(T_{\mathrm{e}}(t)-T_{\mathrm{l3}}\right)}{T_{\mathrm{e}}(t)-T_{\mathrm{l3}}}=-\frac{\dot{m}_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}}{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}\mathrm{d}t$$

On intègre entre 0 et t :

$$\ln\left(\frac{T_{\mathrm{e}}(t)-T_{\mathrm{l3}}}{T_{\mathrm{ei}}-T_{\mathrm{l3}}}\right)=-\frac{\dot{m}_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}}{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}t$$

$$T_{\mathrm{e}}(t)=\exp\left(-\frac{\dot{m}_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}}{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}t\right)(T_{\mathrm{ei}}-T_{\mathrm{l3}})+T_{\mathrm{l3}}$$

b) $m_{\mathrm{l}}=0{,}1$ kg d'huile avec le débit massique $\dot{m}_{\mathrm{l}}=10^{-3}$ kg s^{-1}, donc le temps est : $t=m_{\mathrm{l}}/\dot{m}_{\mathrm{l}}$, et la température :

$$T_{\mathrm{e}}(t)=\exp\left(-\frac{\dot{m}_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}}{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}\frac{m_{\mathrm{l}}}{\dot{m}_{\mathrm{l}}}\right)(T_{\mathrm{ei}}-T_{\mathrm{l3}})+T_{\mathrm{l3}}$$

Application numérique :

$$T_{\mathrm{ef}}=\exp\left(-\frac{1{,}65\times 0{,}1}{0{,}4\times 4{,}18}\right)(15-80)+80=21{,}11\ ^{\circ}\mathrm{C}$$

c) $-m_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}\,(T_{\mathrm{ef}}-T_{\mathrm{l3}})=m_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{e}}\ (T_{\mathrm{ef}}-T_{\mathrm{ei}})$

$$T_{\mathrm{ef}}=\frac{m_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}\,T_{\mathrm{l3}}+m_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{e}}\,T_{\mathrm{ei}}}{m_{\mathrm{l}}\,C_{\mathrm{l}}+m_{\mathrm{e}}C_{\mathrm{e}}}$$

Application numérique : $T_{\mathrm{ef}}=20{,}84\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

d) $T_{\mathrm{h4}}=\exp\left(-\frac{\dot{m}_{\mathrm{h}}\,C_{\mathrm{h}}}{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}t_{\mathrm{h}}\right)(T_{\mathrm{ei}}-T_{\mathrm{h3}})+T_{\mathrm{h3}}$

$$\ln\left(\frac{T_{\mathrm{h4}}-T_{\mathrm{h3}}}{T_{\mathrm{ei}}-T_{\mathrm{h3}}}\right)=-\frac{\dot{m}_{\mathrm{h}}\,C_{\mathrm{h}}}{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}t_{\mathrm{h}}$$

$$C_{\mathrm{h}}=\ln\left(\frac{T_{\mathrm{h4}}-T_{\mathrm{h3}}}{T_{\mathrm{ei}}-T_{\mathrm{h3}}}\right)\left(-\frac{m_{\mathrm{e}}\,C_{\mathrm{e}}}{\dot{m}_{\mathrm{h}}\,t_{\mathrm{h}}}\right)$$

Application numérique : $C_{\mathrm{h}}=14{,}08$ kJ kg^{-1} K^{-1}

1.2 **a)** $Q=\Delta m\,L$.

b) La quantité de chaleur nécessaire est fournit par la masse m d'eau liquide qui refroidit de ΔT, tel que : $Q=m\,C_{\mathrm{p}}\,\Delta T$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

c) En considérant une évaporation d'une quantité infinitésimale d'eau dm, on a, d'après a) et b) : dq = dm $L = mC_p$ dT.

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{C_p \mathrm{d}T}{L}$$

Or $L = A - BT$ donc :

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{C_p \mathrm{d}T}{A - BT}$$

d) On intègre l'équation différentielle précédente entre m_0 et m :

$$\int_{m_0}^{m} \frac{\mathrm{d}m}{m} = C_p \int_{T_0}^{T} \frac{\mathrm{d}T}{A - BT}$$

$$\int_{m_0}^{m} \frac{\mathrm{d}m}{m} = -\frac{C_p}{B} \int_{T_0}^{T} \frac{-B\mathrm{d}T}{A - BT}$$

$$\ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{C_p}{B} \ln\left(\frac{A - BT}{A - BT_0}\right)$$

La fraction d'eau vaporisée se définie comme :

$$x = \frac{m_0 - m}{m_0}$$

Donc :

$$\frac{m}{m_0} = 1 - x$$

$$\ln(1 - x) = -\frac{C_p}{B} \ln\left(\frac{A - BT}{A - BT_0}\right)$$

$$(1 - x)^{\frac{-B}{C_p}} = \left(\frac{A - BT}{A - BT_0}\right)$$

$$A\left[(1 - x)^{\frac{-B}{C_p}} - 1\right] = B\left[T_0 (1 - x)^{\frac{-B}{C_p}} - T\right]$$

$$A = B\left[T_0 (1 - x)^{\frac{-B}{C_p}} - T\right]\left[(1 - x)^{\frac{-B}{C_p}} - 1\right]^{-1}$$

Application numérique : pour $x = 1/10$ et $T = 284$ K, $A = 3{,}33 \times 10^6$ J kg^{-1}.

e) $T = 273$ K, $x = 1 - \left(\dfrac{A - B\ T}{A - B\ T_0}\right)^{-\frac{C_p}{B}}$

Application numérique : $x = 0{,}119$, on a la masse m_1 d'eau liquide $m_1 = (1 - 0{,}119)m_0$ et la masse d'eau vaporisée $m_0 - m_1 = 2{,}38$ g.

www.biblio-scientifique.net

f) Soit m_2 la masse finale de glace, et m_3 la masse finale d'eau évaporée : $m_1 = m_2 + m_3$.
Quantité de chaleur produite par la solidification à 0 °C : $Q = m_2\ L_f$.
Quantité de chaleur requise pour la vaporisation à 0 °C : $Q = m_3\ L$.
On écrit donc : $m_2\ L_f = m_3\ L$ et $m_3 = m_1 - m_2$, ceci revient à : $m_2\ L_f = (m_1 - m_2)L$.

$$m_2 = \frac{m_1 L}{L_f + L} = 15{,}5 \text{ g}$$

g) La vaporisation d'une masse dm de liquide s'accompagne de l'absorption d'une quantité de chaleur Ldm, ce qui provoque un abaissement de la température du calorimètre. Le bilan calorifique s'écrit :
$L\ \mathrm{d}m = m_e\ C_p\ \mathrm{d}T$ ou encore : $\mathrm{d}m = m_e\ C_p\ \mathrm{d}T\ /(A\text{-}BT)$
On intègre entre m_0 et 0 :

$$\int_{m_0}^{0} \mathrm{d}m = m_e C_p \int_{T_0}^{T_1} \frac{\mathrm{d}T}{A - B\ T}$$

$$m_0 = \frac{m_e C_p}{B} \ln\left(\frac{A - B\ T_1}{A - B\ T_0}\right)$$

Cette relation permet de déterminer la température finale T_1 à la fin de l'évaporation totale de la masse m d'eau :

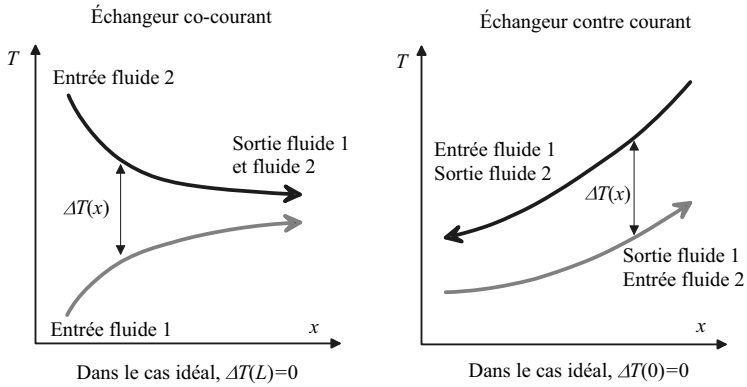
$$\exp\left(\frac{m_0 B}{m_e C_p}\right) = \frac{A - B\ T_1}{A - B\ T_o}$$

$$A - B\ T_1 = (A - BT_0)\exp\left(\frac{m_0 B}{m_e C_p}\right)$$

$$T_1 = \frac{A}{B} - \frac{(A - BT_0)}{B}\exp\left(\frac{m_0 B}{m_e C_p}\right)$$

Application numérique : T_1 = 334 K = 61 °C

1.3 **a)**



© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

b) Échangeur à co-courant :
dq_1 = quantité de chaleur cédée par le fluide 1 entre x et $x + dx$

$$dq_1 = m_1\ C_{p1}\ dT_1,\ dq_1 < 0$$

dq_2 = quantité de chaleur reçue par le fluide 2 entre x et $x + dx$

$$dq_2 = m_2\ C_{p2}\ dT_2,\ dq_2 > 0$$

On a $dq_1 = -\ dq_2 = -dq$ (dq : chaleur échangée entre x et $x + dx$)

$$dT_1 = \frac{-dq}{m_1 C_{p1}} \quad \text{et} \quad dT_2 = \frac{dq}{m_2 C_{p2}}$$
$$dT_1 - dT_2 = -dq\left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} + \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right)$$

Donc : $$d(\Delta T(x)) = d(T_1 - T_2) = -dq\left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} + \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right)$$

On sait aussi que le flux de chaleur échangé par les deux fluides s'exprime ainsi :

$$\phi = h\ S(T_1 - T_2)$$

On considère donc : $dq = d\phi = h\ dS\ (T_1 - T_2)$

D'où : $$d(T_1 - T_2) = -h\ dS\ (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} + \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right)$$

et $S = 2\ \pi\ R_1\ dx$, on a ainsi :

$$d(T_1 - T_2) = -h\ 2\pi R_1 dx\ (T_1 - T_2)\left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} + \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right)$$

Donc : $$\frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2} = -h\ 2\pi R_1\left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} + \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right) dx$$

On intègre l'expression précédente entre 0 et x et il vient :

$$\left[\ln(\Delta T(x))\right]_0^x = -K\ x,\ \text{avec}\ K = h\ 2\pi R_1\left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} + \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right)$$

D'où : $$\ln(\Delta T(x)) - \ln(\Delta T(0)) = -K\ x$$
$$\Delta T(x) = \Delta T(0)\exp(-K\ x)$$

www.biblio-scientifique.net

Échangeur à contre-courant :
La démonstration est la même mis à part que : $dq_1 = dq_2 = -dq$
On a toujours : $\Delta T\,(x) = \Delta T\,(0) \exp\left(-K_c\, x\right)$ avec :

$$K_c = h\; 2\pi R_1 \left(\frac{1}{m_1 C_{p1}} - \frac{1}{m_2 C_{p2}}\right)$$

c) Le flux élémentaire échangé est : $dq(x) = h\, dS\, \Delta T(x)$
On intègre entre 0 et L, en développant $dS = 2\,\pi\, R_1\, dx$

$$\phi = \int_o^L dq(x) = 2\pi R_1 h \int_o^L \Delta T(x) dx$$

$$\phi = 2\pi R_1\, h \left[-\frac{1}{K}\, \exp\left(-K x\right)\right]_0^L \Delta T\,(0)$$

$$\phi = \frac{2\pi R_1\, h}{K} \Delta T\,(0)\,(1 - \exp\left(-K L\right))$$

$$\phi = \frac{S\, h}{K\, L}\, \Delta T\,(0)\,(1 - \exp\left(-K L\right))$$

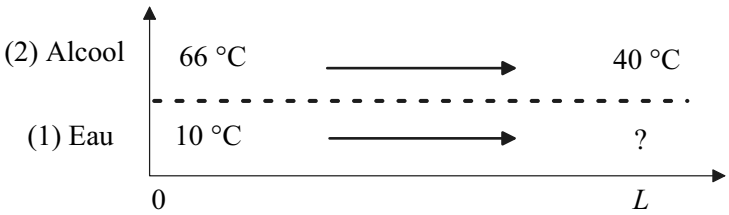
Et comme : $$\frac{\Delta T\,(L)}{\Delta T\,(0)} = \exp\left(-K L\right)$$

Soit : $$\ln \frac{\Delta T\,(L)}{\Delta T\,(0)} = -\,K\;L$$

On obtient finalement :

$$\phi = hS \frac{\Delta T(L) - \Delta T(0)}{\ln\left(\Delta T(L)/\Delta T(0)\right)}$$

d) Échangeur co-courant :



$dT = T(x + dx) - T(x)$
$\phi_1 = \dot{m}_1 C_{p1} dT_1 = \dot{m}_1 C_{p1}\,(T_{s1} - T_{e1})$ $\quad \Delta T(L) = 40 - ?$
$\phi_2 = \dot{m}_2 C_{p2} dT_2 = \dot{m}_2 C_{p2}\,(T_{s2} - T_{e2})$ $\quad \Delta T(0) = 56$ °C
et $\phi_1 = -\phi_2$
$\dot{m}_1 C_{p1}\,(T_{s1} - 10) = -\,\dot{m}_2 C_{p2}\,(40 - 66)$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

D'où : $$T_{s1} = -\frac{\dot{m}_2 C_{p2}\,(40-66)}{\dot{m}_1 C_{p1}} + 10$$

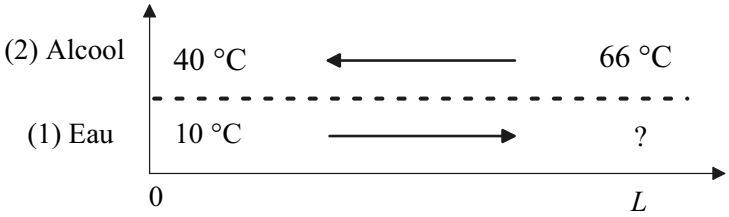
Application numérique : T_{s1} = 36,3 °C et $\Delta T(L)$ = 3,7 °C

On sait que : $$\phi = hS\frac{\Delta T(L) - \Delta T(0)}{\ln(\Delta T(L)/\Delta T(0))}$$

$$\frac{\Delta T\,(L) - \Delta T\,(0)}{\ln\left[\Delta T\,(0)\,/\Delta T\,(0)\right]} = \frac{3{,}7-56}{\ln\left(3{,}7/56\right)} = 19{,}25\ °\mathrm{C}$$

Et donc : $$S = \frac{-\dot{m}_2\,C_{p2}\,(40-66)}{500\times 19{,}25} = 61{,}5\ \mathrm{m}^2$$

Échangeur contre-courant :



$\phi_1 = \dot{m}_1\,C_{p1}\,\mathrm{d}T_1 = \dot{m}_1\,C_{p1}\,(T_{s1} - T_{e1})$ $\Delta T(L)$ = 66 - ?
$\phi_2 = \dot{m}_2\,C_{p2}\,\mathrm{d}T_2 = \dot{m}_2\,C_{p2}\,(T_{e2} - T_{s2})$ $\Delta T(0)$ = 30 °C
Et $\phi_1 = \phi_2$

D'où : $$T_{s1} = -\frac{\dot{m}_2\,C_{p2}\,(40-66)}{\dot{m}_1\,C_{p1}} + 10$$

Application numérique : T_{s1} = 36,3 °C et $\Delta T(L)$ = 29,7 °C

Et donc : $$S = \frac{-\,\dot{m}_2\,C_{p2}\,(40-66)}{500\times 29{,}85} = 39{,}63\ \mathrm{m}^2$$

L'échangeur à contre-courant est donc plus « efficace » puisque la surface nécessaire pour réaliser le transfert de chaleur est inférieure à celle nécessaire dans le cas d'un échangeur co-courant.

e) Flux maximal échangeable : On considère qu'un des fluides subit la variation maximale de température autorisée, soit $T_{e1} - T_{e2}$. Cette variation est nécessairement subie par le fluide de plus petite capacité calorifique $(mC_p)_{min}$. Le flux théorique maximal échangeable est donc :

$$\phi_{th} = \left(\dot{m}\,C_p\right)_{min}(T_{e1} - T_{e2})$$

Efficacité :

$$E = \frac{\phi}{\phi_{th}} = \frac{\dot{m}_1\,C_{p1}\,(T_{e1} - T_{s1})}{\left(\dot{m}\,C_p\right)_{min}(T_{e1} - T_{e2})} = \frac{\dot{m}_2\,C_{p2}\,(T_{s2} - T_{e2})}{\left(\dot{m}\,C_p\right)_{min}(T_{e1} - T_{e2})}$$

Application numérique : E = 47 %

www.biblio-scientifique.net

2 CONDUCTION DE LA CHALEUR

PLAN

2.1 La conduction à l'échelle atomique
2.2 Modélisation de la diffusion
2.3 La diffusivité thermique
2.4 Équation de diffusion de la chaleur
2.5 Notion de régime permanent et transitoire
2.6 Conditions initiales et conditions aux limites
2.7 L'accommodation thermique
2.8 Transfert de chaleur aux interfaces solide - solide
2.9 Analogie électrique
2.10 Références
Exercices
Solutions des exercices

OBJECTIFS

- Définir le flux de chaleur par conduction dans les solides
- Préciser les propriétés macroscopiques caractéristiques de la conduction
- Établir l'équation de diffusion de la chaleur
- Définir les conditions aux limites
- Modéliser le transfert de chaleur aux interfaces solides
- Utiliser la méthode d'analogie électrique pour résoudre des problèmes 1D

2.1 LA CONDUCTION À L'ÉCHELLE ATOMIQUE

2.1.1 Structure des matériaux solides

Comme chacun le sait la matière est constituée d'atomes (ions) et de molécules. Lorsque le matériau est conducteur de l'électricité, comme pour les métaux et dans une moindre mesure les semi-conducteurs, il y a en plus des électrons libres. Dans le cas contraire le matériau est isolant électriquement. Dans les matériaux solides les ions s'organisent sous la forme de réseaux de configurations géométriques très diverses. Lorsque cette organisation est ordonnée sur plusieurs centaines ou milliers de

www.biblio-scientifique.net

distances inter - atomiques le réseau est dit cristallin. Lorsque, au contraire, cet ordre n'apparaît que sur de très petites distances (une ou deux distances inter – atomiques) alors le matériau est qualifié d'amorphe. Ces deux types de structures sont représentés sur la figure 2.1.

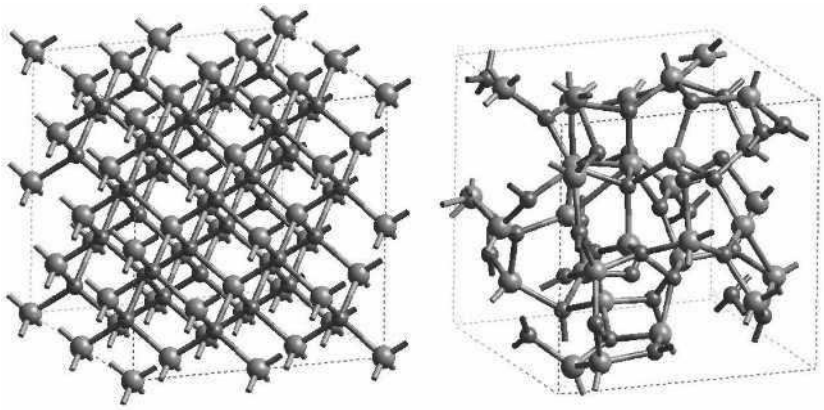


Figure 2.1 **Exemple de matériau cristallin (image de gauche) et amorphe (image de droite)**

Des appareils très perfectionnés d'observation de la cristallographie des matériaux permettent de visualiser la structure à l'échelle atomique comme nous pouvons le voir sur deux exemples présentés sur la figure 2.2.

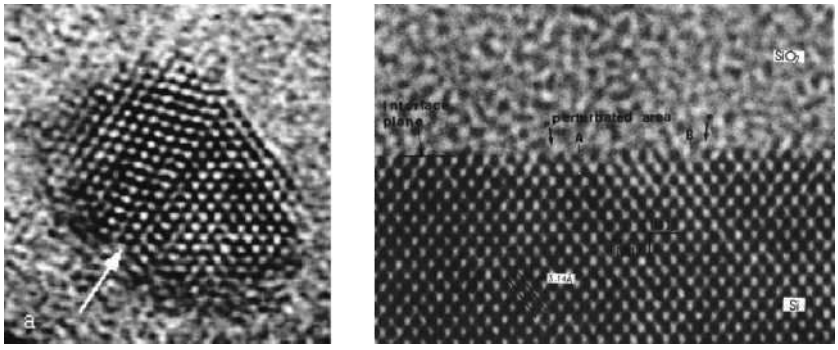


Figure 2.2 **Particule de plomb de structure cristalline enrobée dans de l'oxyde de silicium amorphe (gauche) et dépôt d'oxyde de silicium amorphe déposé sur substrat de silicium cristallin (droite).**
Dans les deux cas on devine bien les ions et leur arrangement pour la structure cristalline. Ces deux images ont été obtenues par HRTEM (Microscopie Électronique à Transmission Haute Résolution).

www.biblio-scientifique.net

2.1.2 Équilibre thermique et température dans les solides

On considère qu'un matériau est à l'équilibre thermique si l'état d'excitation des particules qui le compose est uniforme. Cet état d'excitation est mesuré par l'énergie cinétique des particules. En considérant un nombre suffisant de particules, on définit une grandeur mesurable qui est la température. Il serait possible de dédier un ouvrage entier à la définition de la température dans les solides. En effet, cette définition a bien évolué notamment au cours des XIXe et XXe siècles, au travers de la découverte de la thermodynamique tout d'abord, puis de la physique statistique dont Boltzmann est certainement un des personnages central (voir encart plus loin) et quantique (Planck, Bohr pour ne citer qu'eux). À l'échelle microscopique les physiciens de la thermodynamique statistique ont montré que la notion de température est liée à des grandeurs caractéristiques telles que le libre parcours moyen ou bien encore le temps de relaxation que ce soit pour un gaz d'électrons libres ou bien pour un réseau cristallin. Pour un électron libre présent dans le matériau, le libre parcours moyen est la distance qu'il va parcourir avant de rentrer en contact avec un ion du réseau cristallin ou bien avec un autre électron. Le temps de relaxation est alors le temps que met l'électron pour parcourir le libre parcours moyen. La notion de libre parcours moyen n'a absolument pas le même sens pour les ions du réseau cristallin. En effet, la mobilité de l'ion reste limitée à la distance avec ses voisins immédiats, du moins tant que le matériau reste solide. On définit donc le libre parcours moyen associé à la vibration générée par la mobilité des ions. Ce libre parcours moyen va alors correspondre à une dimension caractéristique où 2 ou plusieurs ondes de vibrations vont se combiner pour en former de nouvelles. Ceci conduit à définir le phonon comme le quantum d'énergie correspondant à l'onde de vibration. Ce quantum a exactement la même signification que le photon pour les ondes électromagnétiques.

ENCART 2.1 Ludwig Boltzmann

Ludwig Boltzmann obtient son doctorat à l'Université de Vienne en 1866, avec une thèse sur la théorie cinétique des gaz. En 1869, il obtient une chaire de physique théorique à Graz, où il reste pendant quatre ans. En 1873, il accepte une chaire de mathématiques à Vienne, mais revient à Graz trois ans plus tard, cette fois pour enseigner la physique expérimentale. Il devient membre étranger de la Royal Society en 1899. Il entretient des échanges, parfois vifs, avec les physiciens contemporains à propos de ses travaux, cela l'affecte particulièrement et entraîne des crises de dépression qui le conduisent à une première tentative de suicide à Leipzig, puis à une seconde à Duino, près de Trieste, qui lui sera fatale. Boltzmann meurt avant même d'avoir vu ses idées s'imposer.

Donc, retenons qu'à température uniforme toutes les particules constituant le solide (électrons, ions, molécules) sont en mouvement autour d'une position d'équilibre que l'on définit par la température idéale du 0 Kelvin. À cette température, les ions du réseau seraient immobiles à l'emplacement exact des nœuds du réseau cristallin.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Cette température n'est pas accessible, elle représente un comportement asymptotique. De nos jours il est possible d'atteindre expérimentalement des températures cryogéniques de l'ordre du 1/1 000 de Kelvin. Si le matériau baigne dans un fluide dont la température est supérieure à 0 K alors les particules solides commenceront à avoir un mouvement d'oscillation autour de leurs positions d'équilibre. Lorsque cette température reste très faible (< 10 K) on constate que les vibrations engendrées par la mobilité des particules se propagent dans tout le réseau cristallin sans jamais interférer entre elles. Par contre, lorsque la température augmente, on commence à observer des phénomènes de « collisions » entre particules comme cela est représenté sur la figure 2.3. Le terme de collision est parlant d'un point de vue de sa représentation mécanique mais il ne reflète pas les phénomènes réels. En effet, il serait plus rigoureux de parler, comme nous l'avons d'ailleurs fait précédemment, de recombinaison des vibrations engendrées par le mouvement oscillant des particules.

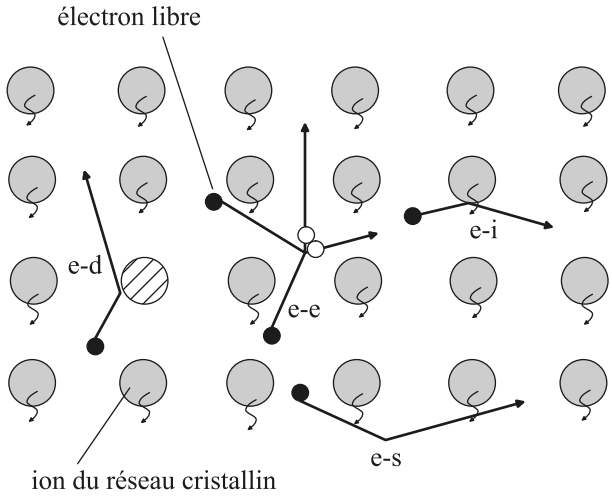


Figure 2.3 **La montée en température dans un matériau à l'échelle microscopique se traduit par des phénomènes de « collisions » de nature diverse.**
Plus la température est élevée et plus ces collisions sont nombreuses. Les collisions entre ions du réseau cristallin contribuent à « diffuser » la chaleur au sein du matériau. Si des électrons libres sont présents dans le matériau, les collisions peuvent avoir lieu entre 2 électrons « e-e » (la probabilité d'avoir plus de deux électrons mis en jeu dans une même collision étant quasi nulle). Elles peuvent aussi avoir lieu entre électrons et ions du réseau cristallin « e-i ». Enfin on peut avoir des collisions entre les électrons et les défauts du réseau cristallin « e-d » ou bien encore avec les frontières du système (interfaces) « e-s ».

ENCART 2.2 William Thomson

William Thomson, connu aussi sous le nom de lord Kelvin, est l'un des plus célèbres physiciens britanniques du XIXe siècle. Parce que ses intérêts scientifiques

www.biblio-scientifique.net

étaient très divers, il participa activement au progrès des diverses branches de la physique théorique et appliquée qui marqua si profondément son époque. Ses interventions répétées et efficaces au sujet des définitions des unités électriques et des échelles thermométriques sont caractéristiques du second, dont l'importance est capitale.

2.1.3 Diffusion de la chaleur dans les structures solides

Lorsque l'on chauffe un matériau solide, les ions les plus proches de la source de chaleur se mettent à vibrer de façon intense et communiquent ces vibrations aux ions voisins par le biais du réseau, que celui-ci soit cristallin ou amorphe. Ces vibrations ont pour conséquence la production de chaleur et sa diffusion dans le matériau. Cet état d'excitation est fonction de l'intensité de la source de chaleur. Le phénomène de propagation des ondes à l'échelle microscopique est observable sous la forme d'un phénomène de diffusion de chaleur à l'échelle macroscopique. Ce phénomène de diffusion de la chaleur est souvent appelé conduction de la chaleur et on verra plus loin que l'analogie électrique donne une légitimité évidente à cette terminologie. On associe à cette diffusion un flux de chaleur $\overrightarrow{\phi}$, qui représente la quantité d'énergie thermique transportée par unité de temps. Le flux de chaleur est donc comparable à une puissance et il s'exprime en Watts. Le phénomène dont nous venons de parler est représenté sur la figure 2.4 de manière schématique. Cette représentation simplifiée en deux dimensions met bien en évidence le lien entre le phénomène de diffusion à l'échelle macroscopique et le phénomène de vibration des atomes à l'échelle microscopique.

On voit donc que la notion de conduction thermique est obligatoirement associée à l'existence d'un gradient de température. Cela veut donc dire que la chaleur ne diffuse entre deux points de l'espace, à l'intérieur du matériau, que si la température de ces deux points est différente. Et bien entendu, afin de respecter les principes fondamentaux de la thermodynamique et plus particulièrement du second (entropie), la chaleur diffuse dans la direction de la température la plus haute vers la température la plus basse.

Existence de la conduction

Le transfert de la chaleur par conduction dans un matériau solide (ou un fluide au repos) n'apparaît que si l'on génère une perturbation thermique en un point du matériau.

Il en ressort que la diffusion est inexistante dans un matériau à température uniforme et ceci quel que soit le niveau de température.

À l'échelle atomique, la conduction provient de la recombinaison des ondes de vibrations générées par l'oscillation des ions du réseau cristallin autour de leur position d'équilibre.

Lorsque le matériau contient des électrons libres en grande quantité (métaux), la conduction est essentiellement liée aux collisions entre électrons.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

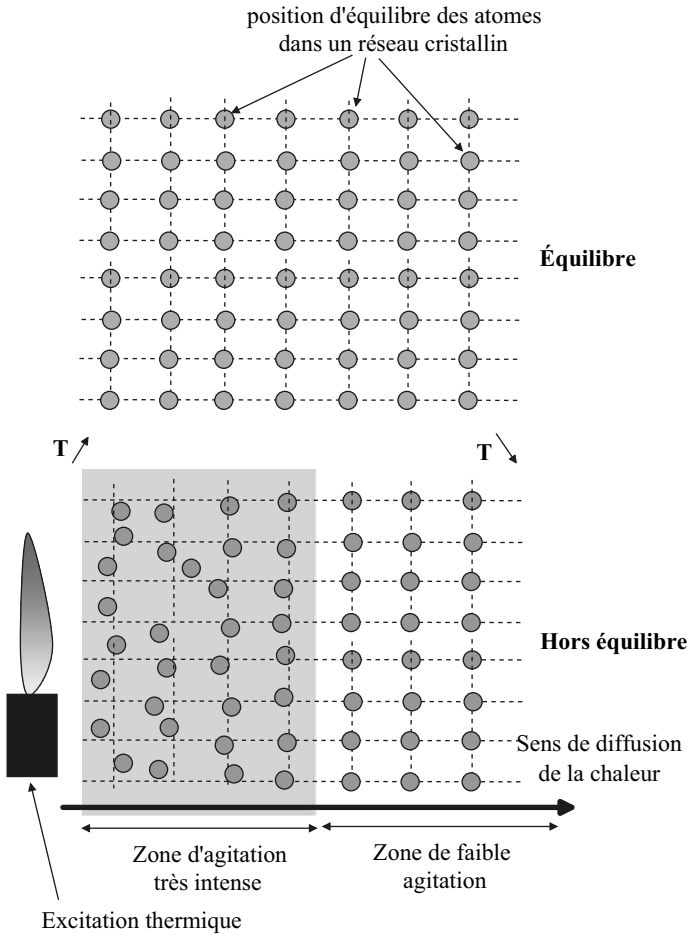


Figure 2.4 **Description schématique du phénomène de diffusion en 2D.** L'image du haut représente le réseau cristallin solide à l'équilibre à une température uniforme. Les atomes oscillent autour des positions des nœuds du réseau correspondant à la température 0 K. À l'équilibre, il n'existe pas de phénomène de diffusion. Sur l'image du bas on approche une source de chaleur d'une frontière du réseau. Les atomes situés au plus proche de la source voient leur énergie s'accroître fortement et donc la mobilité autour de la position d'équilibre est forte. Cette vibration se propage aux atomes voisins et définie le sens de diffusion de la chaleur.

Les physiciens aiment souvent représenter la propagation des ondes de vibrations des particules dans le matériau en les liant par des raideurs. Nous donnons un exemple de cette représentation pour une chaîne unidirectionnelle sur la figure 2.5**.** Cette représentation permet d'imager le transfert d'énergie cinétique, et donc de chaleur, d'une particule à une autre à l'échelle microscopique. Notons néanmoins que cette représentation exclut la participation des électrons libres dans les métaux.

www.biblio-scientifique.net

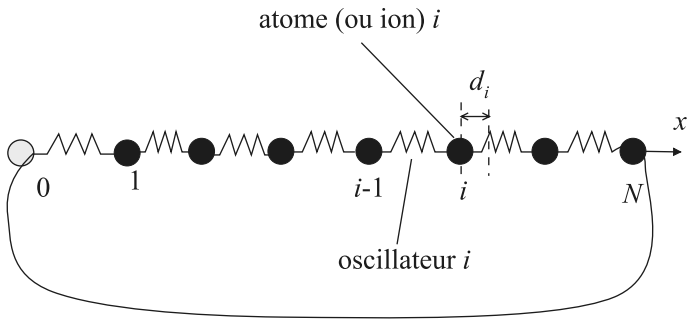


Figure 2.5 **Le transfert unidirectionnel de la chaleur dans un matériau isolant à l'échelle microscopique peut être représenté sous la forme de raideurs liant chaque atome.**

Ce schéma est surtout utile pour calculer la chaleur spécifique des solides. En effet, cette quantité ne dépend que du réseau cristallin que ce soit pour les matériaux isolants, semi-conducteurs ou bien les métaux. Ceci revient à dire que les électrons libres dans les métaux n'ont pas d'influence significative sur la valeur de la chaleur spécifique. Par contre, la conductivité thermique des métaux est essentiellement liée à la présence de ces électrons libres.

2.2 Modélisation de la diffusion

2.2.1 Loi de Fourier

Le transfert de chaleur par diffusion a été pour la première fois abordée par J. Fourier, dans son *Traité analytique de la chaleur* où il introduit aussi ses fameuses décompositions en série.

Encart 2.3 Joseph Fourier

Né en 1768, Joseph Fourier se révèle très tôt doué pour les lettres et les sciences. Mais c'est l'étude des mathématiques qui provoque chez lui enthousiasme et passion. En 1789, il viendra à Paris, devant l'académie, lire son premier mémoire sur les équations algébriques. Joseph Fourier va ensuite enseigner à Auxerre puis à l'école polytechnique de Paris. Il participera à l'expédition d'Égypte et sera chargé à son retour en France, d'écrire la préface historique de l'ouvrage, qui regroupe l'ensemble des observations faites au cours de l'expédition. C'est en 1802 que Fourier est nommé Préfet de l'Isère. En 1826, il entre à l'Académie Française et, malgré sa maladie, travaillera inlassablement jusqu'à la fin de sa vie, le 17 Mai 1830.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

La relation de Fourier est phénoménologique, c'est-à-dire issue de résultats expérimentaux. En effet, le lien entre les phénomènes microscopiques et macroscopiques, que nous avons vu précédemment, n'a pu être modélisé que grâce aux outils de la mécanique statistique et quantique. Or, si ces outils n'existaient pas encore à l'époque de Fourier, il est bien évident que le phénomène de diffusion à l'échelle macroscopique était observable et que comme il était alors possible de mesurer une température, rien n'empêchait de proposer une relation issue de ces mesures. Pour bien comprendre la signification de cette relation, reportons-nous à la figure 2.6. Sur cette figure est représenté un matériau homogène et isotrope sous la forme d'un tube supposé parfaitement isolé à sa périphérie. On note S la section du tube et l sa longueur. Les températures aux deux extrémités du tube, notées T_1 etT_2, sont imposées et constantes au cours du temps. Un flux de chaleur apparaît dans la direction des hautes températures vers les basses températures. Les lignes de flux sont définies comme les lignes perpendiculaires aux isothermes dans le tube. On note $\vec{x}$ le vecteur tangent aux lignes de flux. Comme le tube est parfaitement isolé sur sa périphérie, aucune ligne de flux ne sort du tube et donc le flux est constant tout le long du tube. J. Fourier obtient expérimentalement que lorsque les températures sont stabilisées dans le temps (régime stationnaire), il existe une relation liant le flux à l'écart de température entre l'entrée et la sortie sous la forme :

$$\vec{\phi} = \lambda\, S\, \frac{T_1 - T_2}{l}\, \vec{x} \tag{2.1}$$

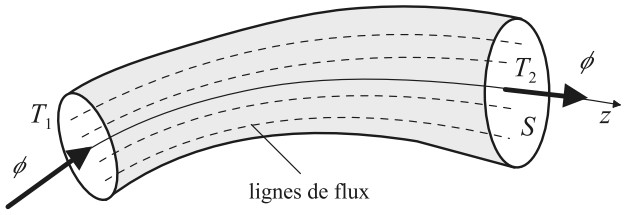


Figure 2.6 **Tube de flux de chaleur.**

Lorsque l'on fait tendre la longueur l vers 0, on trouve l'expression du flux de conduction sous la forme différentielle :

$$\vec{\phi} = -\lambda\, S \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\, \vec{x} \tag{2.2}$$

En généralisant la relation à une configuration tridimensionnelle, on obtient :

$$\vec{\phi} = -\lambda\, S\, \vec{\nabla} T \tag{2.3}$$

L'opérateur $\vec{\nabla} = \left(\partial/\partial x,\, \partial/\partial y,\, \partial/\partial z\right)$ désigne le vecteur gradient. On définit la densité de flux comme le rapport du flux à la section de passage :

$$\vec{\varphi} = \frac{\vec{\phi}}{S} = -\lambda\, \vec{\nabla} T \tag{2.4}$$

www.biblio-scientifique.net

La relation 2.4 montre bien que les lignes de flux sont perpendiculaires aux isothermes.

2.2.2 Conductivité thermique

La relation 2.4 montre qu'à l'échelle macroscopique λ est le paramètre intrinsèque au matériau qui lie le gradient de température au flux de chaleur. Il caractérise la propension d'un matériau à conduire la chaleur il s'exprime en W m^{-1} K^{-1}. Lorsqu'un matériau laisse facilement diffuser la chaleur on dit qu'il est conducteur. C'est le cas notamment des métaux dont la conductivité thermique est élevée. À l'inverse, un matériau tel que l'air au repos s'oppose au transfert de chaleur et est donc appelé isolant. Dans ce cas la conductivité thermique est faible.

Afin de fixer un ordre d'idée, nous avons reporté dans le tableau 2.1 quelques valeurs de la conductivité thermique de matériaux à température ambiante (20 °C).

Tableau 2.1 **Quelques valeurs de conductivité de métaux à température ambiante (20 °C).**

Matière	λ / W $m^{-1}K^{-1}$	Matière	λ / W $m^{-1}K^{-1}$
Air	0,025104	Glace (H_2O) (solide)	2,092
Aluminium	225,94	Fer	71,965
Aluminium (liquide)	92,048	Plomb	34,309
Antimoine	18,41	Plomb (liquide)	16,318
Argon (gaz)	0,017991	Magnésium	150,62
Arsenic	4,184	Magnésium (liquide)	83,68
Beryllium	184,1	Mercury (liquid)	8,368
Bismuth	8,368	Molybdène	133,89
Bismuth (liquide)	10,878	Nickel	87,864
Bronze	117,15	Platine	69,036
Carbone, diamand	543,92	Plutonium	82,006
Carbone, graphite (type k)	167,36	Polyéthylène, haute densité	0,50208
Cuivre	397,48	Polystyrène mouse (d = 0.038) (1 atm)	0,032844
Gallium	33,472	Silicium	125,52
Germanium (intrinsèque, p-type)	58,576	Titane	20,92
Germanium (n-type)	58,576	Tungstène	196,65
Verre	1,046	Eau (H_2O) (liquide)	0,6025
Or	317,98	Zinc	111,71
Or (liquide)	167,36	Zinc (liquide)	59,413

La conductivité thermique des matériaux peut varier très significativement en fonction de la température comme on peut le voir sur le graphe de la figure 2.7. On voit qu'aux très basses températures (de 1 à 10 K) la conductivité est très grande, elle varie sur 3 ordres de grandeurs. La conductivité diminue lorsque la température augmente (de 10 à 100 K) et devient à peu près constante pour les hautes températures (> 100 K). Néanmoins, ce comportement est propre aux structures cristallines ; pour les matériaux amorphes la conductivité reste faible mais à très basse température.

La conductivité thermique suit globalement la conductivité électrique. Pour simplifier, un matériau qui est isolant du point de vue électrique l'est aussi généralement du

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

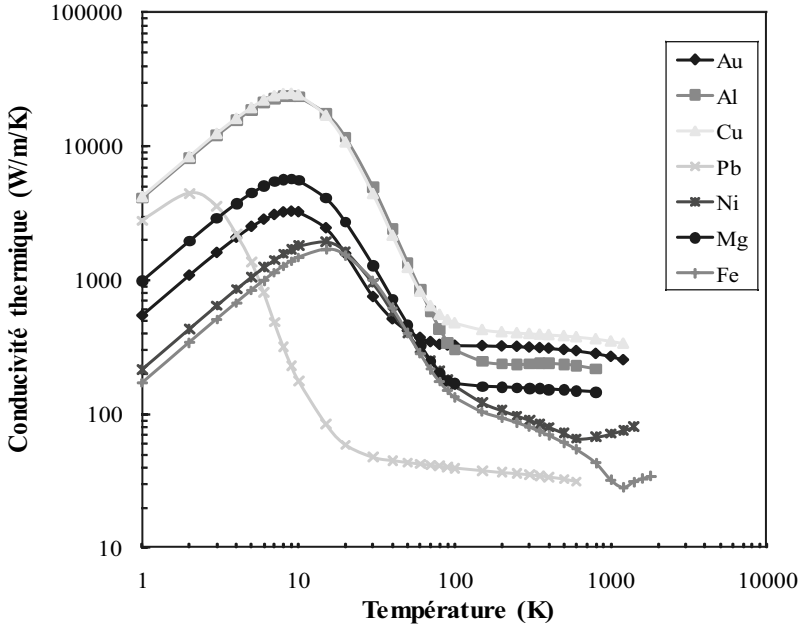


Figure 2.7 **Variation de la conductivité thermique de certains métaux en fonction de la température**

Tableau 2.2 **Valeurs calculées du rapport λ / σ T pour plusieurs matériaux métalliques.**

Métal	λ [W m^{-1} K^{-1}]	σ [Ω^{-1}]	L$_0$ [V^2 K^{-2}]	Métal	λ [W m^{-1} K^{-1}]	σ [Ω^{-1}]	L$_0$ [V^2 K^{-2}]
Ag	436	1,47	2,34	Pr	12,8	65	3,1
Al	237	2,43	2,10	Pt	71,9 (280 K)	9,82	2,59
Au	318	2,03	2,39	Pu	5,2 (298 K)	130	2,48
Ba	23,3	29,8	2,55	Rb	55,8	11,3	2,3
Be	230	2,8	2,36	Re	49	16,9	3,05
Cr	95,7 (280 K)	11,8	4,11	Rh	153 (280 K)	4,35	2,46
Fe	80,2 (280 K)	8,64	2,57	Ru	110 (280 K)	6,7	2,72
Ir	149 (277 K)	4,7	2,57	Sb	18,2	43	2,87
K	98,5	6,2	2,24	Sc	21,8	44	4,3
La	14 (291 K)	59	2,9	Sm	13,4 (291 K)	90	4,3
Li	65	8,5	2,05	Sn	64	10,6	2,48
Lu	16,2 (291 K)	50	3,3	Sr	51,9	11	2,18
Mg	153 (301 K)	4,5	2,29	Ta	57,7 (280 K)	12,1	2,56
Mn (\alpha)	7,8 (291 K)	137	4	Tb	10,4 (291 K)	110	4,25
Mo	143	4,88	2,56	Tc	51 (300 K)	16,7	3,4
Na	142	4,29	2,23	Th	49,3	13,9	2,56
Nb	51,8 (280 K)	13,3	2,53	Ti	22,3	40	3,25
Nd	16,5 (291 K)	58	3,7	Tl	50,6	15	2,8
Ni	93 (280 K)	6,24	2,19	W	183 (280 K)	4,85	3,27
Os	87 (323 K)	8,3	2,7	Y	15,9 (291 K)	52	2,9
Pb	35,5	19,2	2,5	Zn	114,5 (283 K)	5,5	2,31
Pd	71,7	9,74	2,57	Zr	20,5 (323 K)	39	3,4

www.biblio-scientifique.net

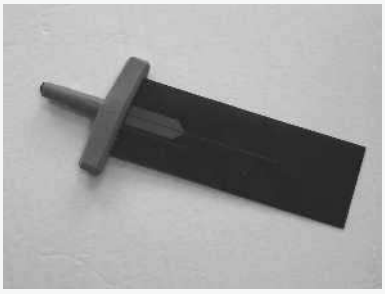
point de vue thermique et inversement. Ainsi pour les métaux une relation utile et très fiable lie la conductivité électrique σ (en 1/ohm) à la conductivité thermique λ, c'est la loi de Wiedmann–Franz qui s'énonce sous la forme :

$$\frac{\lambda}{\sigma T} = L_0 = 2{,}44 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,\Omega\,K^{-2}} \tag{2.5}$$

Dans cette relation L_0 désigne le nombre de Lorentz. Nous reportons dans le tableau 2.2 les valeurs du rapport $\lambda/\sigma T$ pour une grande quantité des métaux. On constate une assez bonne adéquation dans l'ensemble avec la relation 2.5.

La conductivité thermique est un paramètre mesurable par de nombreuses méthodes. Les méthodes les plus connues sont celles de la plaque chaude gardée (régime permanent), du plan chaud, du fil chaud et du disque chaud (régime transitoire). Il n'existe malheureusement pas de relation aussi simple pour les matériaux isolants ou les semi-conducteurs.

Méthode du fil chaud



Le principe de la méthode du fil chaud est le suivant : on dispose un fil résistif sur l'axe d'un échantillon cylindrique de grande longueur et d'extension radiale supposée infinie. L'échantillon, initialement isotherme, est soumis à un échelon de flux, délivré sous forme d'effet Joule par le fil résistif. Si le fil est supposé infiniment long et de rayon négligeable, le transfert est radial et la conductivité thermique peut être identifiée à partir de l'évolution de la température du fil aux temps longs : $T_0(t) = \dfrac{\phi}{4\pi\lambda L}\ln t + C$ où L est la longueur du fil, ϕ est le flux de chaleur égal à la puissance électrique fournie au fil résistif et C est une constante. En traçant l'évolution de la température mesurée en fonction du logarithme du temps on a le coefficient de proportionnalité et donc la conductivité thermique du matériau. La conductivité des matériaux caractérisés avec ce dispositif doit être comprise entre 0,1 et 10 W m^{-1} K^{-1} pour espérer une précision meilleure que 5 %.

2.2.3 Lien entre chaleur spécifique et conductivité thermique

La chaleur spécifique des solides et leur conductivité thermique sont liées. Rien dans ce cours ne permet d'en donner une démonstration complète car il faudrait alors introduire les outils mathématiques de mécanique statistique et quantique. Nous nous contenterons donc d'en donner la définition :

$$\lambda = \frac{1}{3}\, l\, v\, C_v \tag{2.6}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Nous retrouvons dans cette définition la quantité l qui désigne le libre parcours moyen des particules et que nous avions introduite précédemment. Dans cette relation v désigne la vitesse du son dans le matériau. Cette définition a bien un sens au regard de ce que nous avons dit vis-à-vis la modélisation des liaisons entre particules avec des raideurs sur la figure 2.5. Nous pouvons aussi exprimer la relation entre λ et C_v en utilisant le temps de relaxation qui est lié au libre parcours moyen par : $\tau = l/v$. Ainsi la relation 2.6 s'écrit aussi :

$$\lambda = \frac{1}{3}\,\tau\, v^2\, C_v \tag{2.7}$$

On voit néanmoins que ces deux relations apportent peu d'aide vis-à-vis de la détermination de la conductivité d'un solide à partir de sa chaleur spécifique étant donné qu'elles font intervenir deux quantités inconnues, à savoir l et τ.

2.2.4 Expression de la loi de Fourier dans diverses configurations géométriques

Dans le système de coordonnées cartésiennes, la relation de Fourier s'écrit :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\,\vec{x} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\vec{y} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\vec{z} \right) \tag{2.8}$$

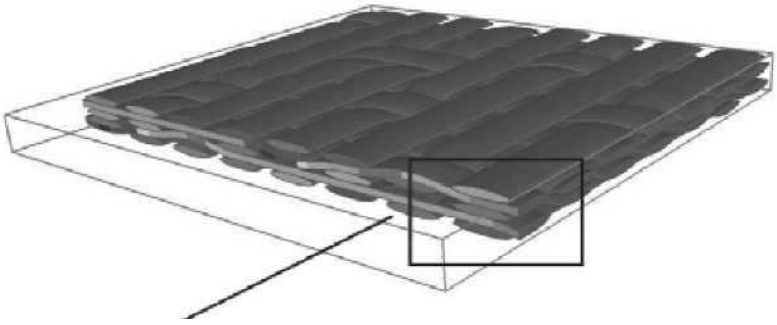


Figure 2.8 **Conductivité orthotrope d'un matériau composite tissé**

Dans de nombreux cas rencontrés dans la nature ou bien parmi les objets fabriqués par l'homme, la conductivité n'est plus isotrope mais orthotrope, voire anisotrope. Dans le cas orthotrope (matériaux composites par exemple tel que celui représenté sur la figure 2.8 ou bien encore le matériau fibré représenté sur la figure 2.9), la relation 2.3 devient :

$$\vec{\varphi} = -\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\,\vec{x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\,\vec{y} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\,\vec{z} \right) \tag{2.9}$$

www.biblio-scientifique.net

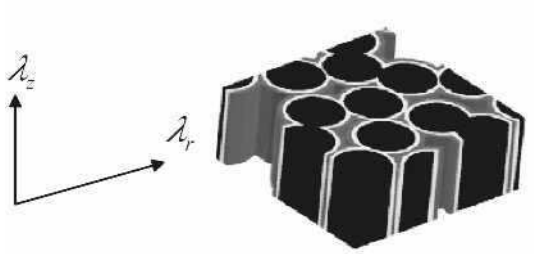


Figure 2.9 **Conductivité orthotrope d'un matériau fibré**
On définit deux directions privilégiées pour la conductivité (longitudinale et radiale).

Cette relation définit donc trois composantes du flux, chacune étant dépendante d'une valeur particulière de la conductivité. Dans le cas de matériaux anisotropes, on définit le tenseur symétrique de conductivité :

$$\overline{\overline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \text{sym} & & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Les 3 composantes de la densité de flux sont alors :

$$\begin{aligned} \varphi_x &= -\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial y} - \lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial z} \\ \varphi_y &= -\lambda_{xy}\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} - \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial z} \\ \varphi_z &= -\lambda_{xz}\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_{yz}\frac{\partial T}{\partial y} - \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3 La diffusivité thermique

2.3.1 Rappel sur la capacité thermique

On considère une très petite masse m de matériau donc la chaleur spécifique à pression constante est C_p. Cette capacité représente la quantité d'énergie (en joule) qu'il faudrait fournir à 1 kg de matériau pour augmenter sa température de 1 K. Dès lors, comme cela est représenté sur la figure 2.10, le flux de chaleur à fournir pour augmenter sa température de la valeur ΔT durant l'intervalle de temps Δt est :

$$\phi = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{m\,C_p\,\Delta T}{\Delta t} \tag{2.12}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

La chaleur spécifique d'un matériau est une grandeur mesurable avec un calorimètre. Il existe de nombreux types de calorimètres, du plus simple (calorimètre à mélange) au plus complexe (calorimètre différentiel) en passant par les calorimètres adiabatiques tel que le calorimètre de Berthelot.

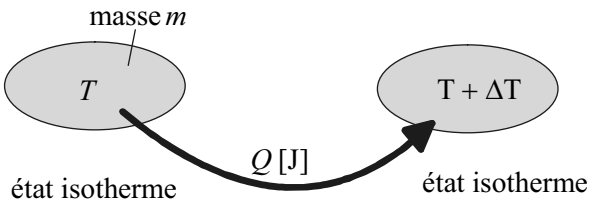


Figure 2.10 **Quantité d'énergie fournie Q pour passer d'un état isotherme à un autre**

2.3.2 La diffusivité thermique

La diffusivité thermique du matériau est définie comme le rapport de la conductivité thermique [W m^{-1} K^{-1}] à la capacité thermique volumique [J m^{-3} K^{-1}] :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho\, C_p} \quad \left[\mathrm{m^2\, s^{-1}}\right] \tag{2.13}$$

Ce paramètre thermique caractérise donc la vitesse de diffusion de la chaleur dans le matériau. La diffusivité peut bien sûr être calculée au travers de la relation 2.13 connaissant les valeurs de λ, ρ et C_p, mais elle peut aussi être mesurée directement. On dispose pour cela de différents moyens expérimentaux dont le plus connu est la méthode flash.

On voit donc que la chaleur peut diffuser aussi vite dans un matériau isolant tel qu'un plastique (λ et ρ petites) que dans un matériau conducteur tel qu'un acier (λ et ρ grandes). On peut donc avoir des diffusivités proches avec pourtant des conductivités éloignées.

Mesure de diffusivité thermique par méthode flash

Le principe de base de la méthode flash est le suivant : un échantillon, de forme cylindrique à faces parallèles, initialement isotherme, est soumis sur l'une de ses faces (dite face avant) à une impulsion thermique de courte durée et uniforme sur la surface irradiée. La mesure de la réponse en température de l'échantillon sur la face opposée au flash (dite face arrière) permet d'identifier la diffusivité thermique du matériau.

www.biblio-scientifique.net

La face de l'échantillon recevant l'impulsion est peinte en noir pour une absorption plus importante et plus uniforme de l'énergie incidente. L'évolution de température sur la face arrière est mesurée par l'intermédiaire d'un couple thermoélectrique formé de deux détecteurs semi-conducteurs dopés positivement et négativement (Bi_2Te_3) à contacts séparés. Le contact électrique du couple est réalisé en recouvrant la face arrière de l'échantillon d'un film métallique (laque d'argent) suffisamment fin pour que son influence sur la mesure soit négligeable.

2.4 ÉQUATION DE DIFFUSION DE LA CHALEUR

Il est maintenant possible d'établir l'équation de la chaleur, c'est-à-dire l'équation traduisant mathématiquement l'évolution de la température en tout point du système étudié et à chaque instant. Nous l'établissons en effectuant un bilan sur un volume élémentaire du matériau.

Considérons pour simplifier le transfert de chaleur unidirectionnel par conduction selon x dans un matériau comme cela est représenté sur la figure 2.11. Nous supposons que les propriétés thermiques du matériau ne dépendent pas de la température. Isolons un élément de largeur δx et effectuons un bilan des flux entrants et sortant de cet élément. On désigne par S la section de passage du flux et par V le volume compris entre x et $x + \delta x$. D'après la relation 2.3 le flux entrant s'écrit :

$$\phi_e = -\lambda\, S\, \frac{\partial T\,(x,t)}{\partial x} \tag{2.14}$$

De la même façon le flux sortant s'écrit :

$$\phi_e = -\lambda\, S\, \frac{\partial T\,(x+\delta x,t)}{\partial x} \tag{2.15}$$

Le bilan thermique consiste donc à écrire que la somme des flux, comptés positivement dans le sens de la normale intérieure au volume élémentaire, est égale au terme d'accumulation de chaleur dont l'expression a été donnée à la relation 2.12. Si on considère la présence éventuelle d'une source volumique Q (en W) de chaleur dans l'élément, ce bilan s'écrit :

$$\phi_e - \phi_s + Q = \rho\, C_p\, V\, \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.16}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

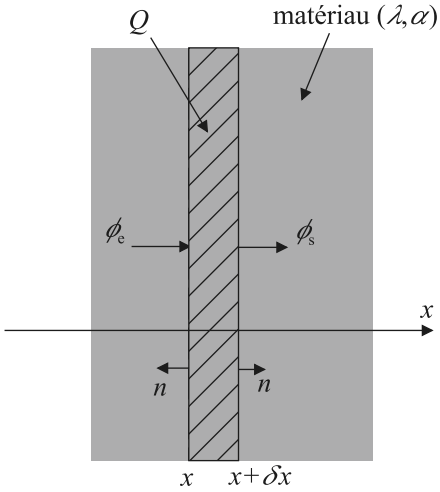


Figure 2.11 **Bilan thermique sur un transfert 1D par conduction et convection**

En remplaçant les flux par leur expression (relations 2.14 et 2.15) on trouve alors :

$$-\lambda\, S\, \frac{\partial T\,(x,t)}{\partial x} + \lambda\, S\, \frac{\partial T\,(x+\delta x,t)}{\partial x} + Q = \rho\, V\, C_p \frac{\partial T\,(x,t)}{\partial t} \tag{2.17}$$

Sachant que, par définition, la dérivée de la fonction f est :

$$\frac{\mathrm{d}f\,(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{f\,(x+\delta x) - f\,(x)}{\Delta x}, \quad \text{quand } \delta x \to 0, \tag{2.18}$$

La relation 2.17 s'écrit :

$$\lambda\, S\, \delta x\, \frac{\partial^2 T\,(x,t)}{\partial x^2} + Q = \rho\, V\, C_p \frac{\partial T\,(x,t)}{\partial t} \tag{2.19}$$

Et comme $V = S\,\delta x$, on trouve finalement :

$$\lambda\, \frac{\partial^2 T\,(x,t)}{\partial x^2} + \frac{Q}{V} = \rho\, C_p \frac{\partial T\,(x,t)}{\partial t} \tag{2.20}$$

Cette relation aux dérivées partielles, en temps et en espace, se généralise dans l'espace à trois dimensions sous la forme ($\dot{Q}$ en W m^{-3} est la source de chaleur volumique) :

$$\lambda\, \Delta T + \dot{Q} \to = \rho\, C_p \frac{\partial T\,(M,t)}{\partial t} \tag{2.21}$$

www.biblio-scientifique.net

Cette relation traduit le transfert linéaire de chaleur par diffusion dans le matériau. Dans le système de coordonnées cylindriques(r, θ, z), cette relation s'écrit :

$$\lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{Q} = \rho \, C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.22}$$

Enfin, dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), cette relation prend la forme :

$$\lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right) + \dot{Q} = \rho \, C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.23}$$

2.5 Notion de régime permanent et transitoire

Une notion très importante en transfert thermique est celle de régime permanent et transitoire. Imaginons un barreau cylindrique tel que celui représenté sur la figure 2.12. Supposons, à un instant initial, que l'on dispose une source de chaleur à proximité d'une extrémité du barreau. La température du barreau proche de la source de chaleur va alors augmenter et la chaleur va diffuser de cette zone chaude vers la zone plus froide située à l'autre extrémité. Supposons d'autre part que nous ayons disposé deux thermocouples (voir encart plus loin) en deux points de l'axe du barreau afin de mesurer l'évolution de la température en ces points au cours du temps.

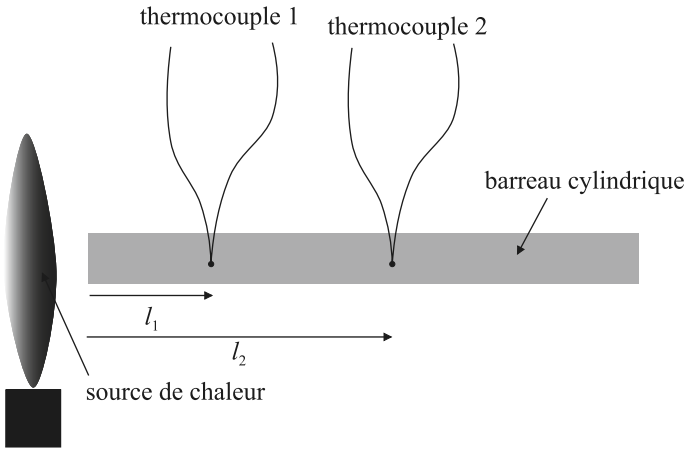


Figure 2.12 **Un barreau cylindrique est chauffé à une de ses extrémités. Deux thermocouples permettent de mesurer l'évolution de la température en deux points de l'axe du barreau au cours du temps.**

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

L'acquisition de ces températures au cours d'une durée assez longue va conduire à la représentation de la figure 2.13. On devine alors trois domaines temporels bien distincts. Sur le domaine 1, la température n'évolue pas et reste identique à la température initiale du barreau. Cela correspond au temps que met la chaleur pour diffuser de la source chaude jusqu'au thermocouple. Ce temps est plus important pour le thermocouple 2, qui est situé plus loin de la source de chaleur, que pour le thermocouple 1. On peut estimer les temps de retard τ_1 et τ_2 si on connaît la diffusivité thermique α du matériau. En effet nous savons, d'après l'équation aux dimensions de la diffusivité, qu'elle correspond au rapport entre le carré d'une distance et d'un temps. On aura donc en première approximation :

$$\tau_1 \sim \frac{l_1^2}{\alpha} \text{ et } \tau_2 \sim \frac{l_2^2}{\alpha} \tag{2.24}$$

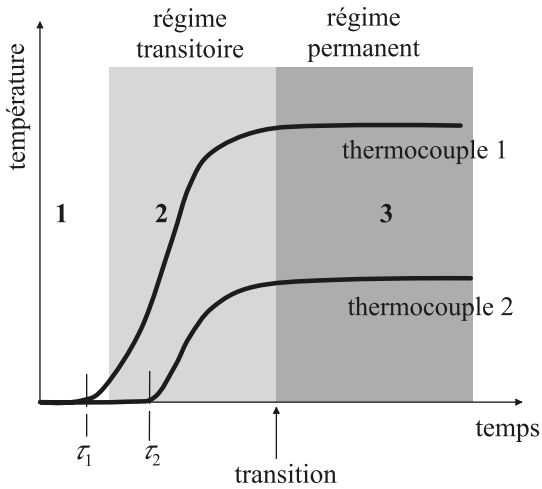
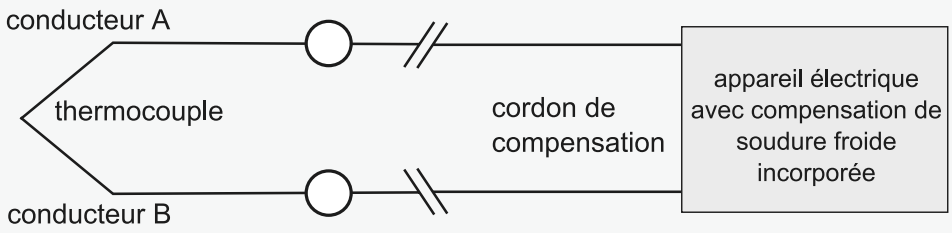


Figure 2.13 **Évolution de la température aux deux thermocouples au cours du temps**

Le domaine temporel 2 correspond à une élévation de la température au cours du temps. Il définit donc le régime transitoire car les températures dépendent du temps. Enfin, on observe sur le domaine 3 une valeur constante de la température mesurée par les deux thermocouples. Cette valeur n'est pas la même étant donné que le thermocouple 2 est localisé plus loin de la source de chaleur que le thermocouple 1 et donc que la température sera plus faible. Ce domaine correspond au régime permanent car les températures ne dépendent plus du temps mais seulement de l'espace. On doit absolument noter que la transition entre régime transitoire et régime permanent est la même pour tous les points du matériau. Le temps à partir duquel apparaît cette transition ne dépend que de des dimensions caractéristiques du barreau et de ses propriétés thermiques (capacité thermique ρC_p et conductivité thermique λ).

www.biblio-scientifique.net

Mesure de température par thermocouple



Le schéma ci-dessus présente le principe de la mesure de température par thermocouple. Les deux métaux A et B, de natures différentes, sont reliés par une jonction. Par effet Seebeck, le thermocouple génère une différence de potentiel entre les deux conducteurs qui dépend de la température de la jonction. Rigoureusement, les thermocouples ne mesurent pas une température, mais une différence de température entre une jonction dite « chaude » et une jonction froide dont la température est connue. Pour mesurer une température inconnue, l'une des deux jonctions doit donc être maintenue à une température connue, par exemple celle de la glace fondante (0 °C). Notons que l'effet Peltier est le contraire de l'effet Seebeck. Peltier a démontré que lorsqu'un courant traverse un circuit composé de deux conducteurs métalliques initialement à la même température, la température d'une jonction augmente tandis que celle de l'autre jonction diminue.

2.6 Conditions initiales et conditions aux limites

La relation 2.21 est une équation aux dérivées partielles. Elle possède en théorie une infinité de solutions si on ne fixe pas de condition initiale en temps et de conditions aux limites aux frontières du domaine étudié.

2.6.1 Conditions initiales

Lorsque l'on s'intéresse à la modélisation thermique du transfert de chaleur en régime transitoire on doit connaître l'état thermique initial en tout point du domaine. Il faut néanmoins bien garder à l'esprit que l'état initial peut être différent selon la localisation dans le domaine. Si on considère le domaine représenté sur la figure 2.14, on écrira cette condition initiale sous la forme :

$$T(M,t) = T_0(M), \text{ à } t = 0 \text{ pour } M \in (\Omega \cup \Gamma) \tag{2.25}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

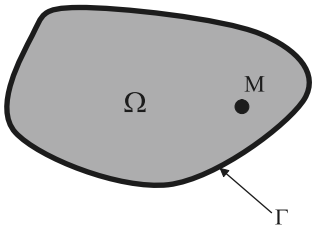


Figure 2.14 **Définition de la température initiale d'un domaine constitué par son volume intérieur ? et sa frontière ?**

2.6.2 Conditions aux limites en thermique

On distingue trois types de conditions aux limites thermiques.

Condition de température imposée :

$$T(M,t) = T_i(M,t), \quad \text{à} \quad t > 0 \quad \text{pour} \quad M \in \Gamma \tag{2.26}$$

Cette condition peut être utilisée lorsque l'on fait circuler un fluide dont la température est maintenue constante et égale à T_i à la surface Γ du domaine solide, ou bien lorsque l'on met la surface en contact parfait avec un matériau massif et capacitif à température homogène T_i. Cette deuxième configuration ne peut bien sûr avoir un sens que pour des durées d'application limitées. Comme le montre la relation 2.26, cette température peut dépendre du temps.

Condition de flux imposé :

$$\phi(M,t) = \phi_0(M,t), \text{ à } t > 0 \text{ pour } M \in \Gamma \tag{2.27}$$

C'est une condition que l'on retrouve lorsque l'on chauffe la surface du matériau avec une source résistive ou radiative. La relation 2.27 montre que ce flux peut éventuellement dépendre du temps.

Condition mixte :

Cette dernière condition est plus complexe. Elle s'applique généralement à l'interface entre une paroi solide et un fluide mais ce dernier n'impose pas sa température sur la surface solide. Comme cela est représenté sur la figure 2.15, cette condition est en fait une conséquence du bilan thermique au niveau de l'interface. En l'absence de terme source, le flux de chaleur par conduction dans le matériau solide est égal au flux par diffusion et convection dans le fluide auquel peut s'ajouter du flux rayonné si le fluide est transparent (nous reviendrons plus en détail sur le transfert radiatif aux chapitres suivants). Cela revient donc à écrire pour les densités de flux :

$$\varphi_c = \varphi_{cv} + \varphi_r \tag{2.28}$$

Soit :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h\left(T_p - T_{amb}\right) + \varphi_r \tag{2.29}$$

www.biblio-scientifique.net

Dans cette relation λ est la conductivité thermique de la paroi solide à la température T_p, φ_{cv} désigne la densité de flux évacué par convection à la surface avec le fluide et φ_r désigne la densité de flux rayonné. Nous introduisons dans cette relation le coefficient d'échange par convection h. Sa définition est généralement assez compliquée car elle prend en compte des phénomènes complexes au niveau de l'interface entre la paroi solide et le fluide en écoulement. Nous y reviendrons dans le détail au chapitre suivant.

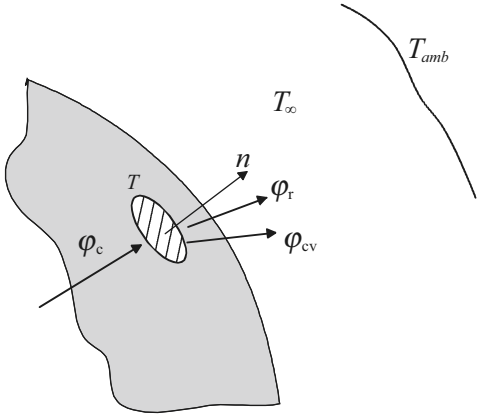


Figure 2.15 **Bilan thermique à l'interface entre un matériau solide et un fluide en mouvement.**

2.7 L'ACCOMMODATION THERMIQUE

2.7.1 Nombre de Biot

L'hypothèse d'accommodation thermique est très employée car elle permet de ramener la résolution d'un problème 3D à celui d'un problème 2D ou 1D. Cette hypothèse est établie en fonction de la nature des échanges à l'interface fluide - solide. Elle se justifie à partir du calcul du nombre adimensionnel de Biot :

$$\mathrm{Bi}_x = \frac{h\,L_x}{\lambda} \tag{2.30}$$

ENCART 2.4 Jean-Baptiste Biot

Après des études au collège Louis-le-Grand, à Paris, Jean-Baptiste Biot, en conflit avec son père, s'engage comme artilleur. Deux ans plus tard, il entre à l'École des ponts et chaussées puis à l'École polytechnique fraîchement créée. Les travaux de Jean-Baptiste Biot sont marqués par une très grande diversité. L'un des tout premiers concerne des météorites tombées à Laigle en 1803 dont il détermine l'origine extraterrestre. Vient ensuite une expédition scientifique en ballon - la

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

première du genre - en compagnie de Gay-Lussac, qui vise à étudier la variation de l'intensité du magnétisme terrestre avec l'altitude. Il rédige également des ouvrages sur l'astronomie indienne et chinoise de grande qualité. Repéré très tôt par Monge, grandement influencé par Laplace, Jean-Baptiste Biot décède en 1862, laissant une œuvre riche et diversifiée.

Comme on le voit ce nombre compare le transfert de chaleur par convection à la paroi (caractérisé par le coefficient d'échange h) devant le transfert par conduction dans la paroi (de conductivité λ) dans la direction x où la dimension caractéristique du domaine est L_x. On admet généralement que l'hypothèse d'accommodation est vérifiée si $\mathrm{Bi}_x \ll 0{,}1$. Dans ce cas on pourra considérer que la température est uniforme selon x. En imaginant que cette hypothèse est satisfaite dans toutes les directions (x, y, z), alors le matériau pourra être considéré à température uniforme dans tout le volume.

On rencontre l'hypothèse d'accommodation thermique dans les problèmes d'ailettes notamment (un exemple d'application des ailettes est représenté sur la figure 2.16). Pour que l'hypothèse d'accommodation thermique soit applicable dans une direction donnée on voit qu'il faut que la conductivité thermique du matériau soit grande, que la dimension du matériau soit petite dans la direction étudiée et que le coefficient d'échange ne soit pas trop grand.

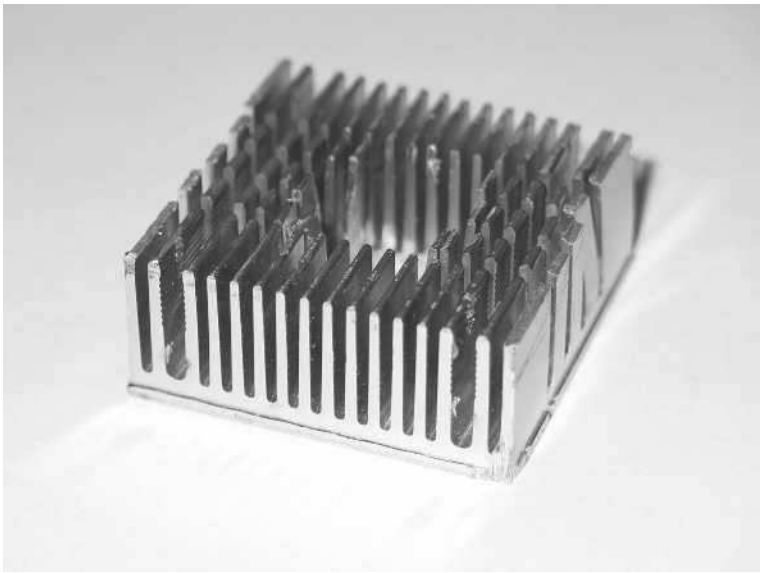


Figure 2.16 **Radiateur de microprocesseur en cuivre muni d'ailettes**
Un ventilateur est généralement disposé sur le radiateur pour accélérer la vitesse de l'air et donc augmenter le coefficient d'échange.

www.biblio-scientifique.net

2.7.2 Accommodation thermique partielle en géométrie variable.

Imaginons le problème de conduction dans une ailette à section variable (on note $D(x)$ le diamètre de l'ailette en fonction de x) comme celle représentée sur la figure 2.17.

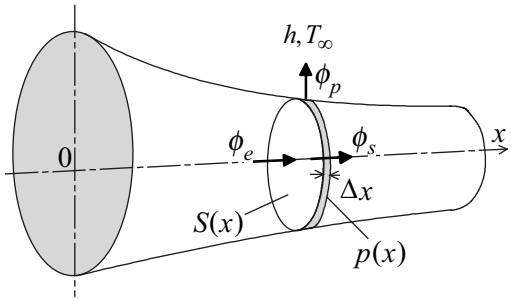


Figure 2.17 **Transfert de chaleur dans une ailette à section variable**

Nous supposons que quelle que soit la valeur de x, l'hypothèse d'accommodation thermique ($\mathrm{Bi}_r = h\,D(x)/\lambda \ll 0{,}1$) est vérifiée dans la direction radiale. Donc la température est uniforme sur la section$S(x)$ de l'ailette et elle ne dépend que de x. On note $p(x)$ le périmètre de l'ailette. En effectuant un bilan thermique sur le tronçon d'ailette de largeurΔx, on trouve (comme cela a été fait lors de l'établissement de l'équation de la chaleur) que le bilan thermique en régime permanent est : $\phi_e - \phi_s - \phi_p = 0$. Avec :

$$\phi_e = -\lambda\, S(x)\, \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\phi_s = -\lambda\, S\, \frac{\mathrm{d}T(x+\Delta x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\phi_p = h\, p(x)\, \Delta x\, (T(x) - T_\infty)$$

En remplaçant l'expression des flux dans le bilan on trouve alors :

$$-\lambda\, S(x)\, \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} + \lambda\, S(x)\, \frac{\mathrm{d}T(x+\Delta x)}{\mathrm{d}x} - h\, p(x)\, \Delta x\, (T(x) - T_\infty) = 0$$

En posant $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ et à partir de la définition de la dérivée ($\Delta x \to 0$), on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(S(x)\, \frac{\mathrm{d}\theta(x)}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{h\, p(x)}{\lambda}\theta(x) = 0$$

Pour des variations simples (linéaires, parabolique...) de la section, on obtient une solution analytique de la température à partir de l'équation différentielle précédente.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

2.8 Transfert de chaleur aux interfaces solide - solide

De nombreux problèmes nécessitent une modélisation précise des transferts de chaleur aux interfaces entre matériaux solides. Comme cela est représenté sur la figure 2.18, la chaleur diffuse d'un milieu à l'autre au travers des zones de contact. L'importance de ces zones de contact est fonction de la rugosité des surfaces en présence. Plus la force de pression d'un domaine contre l'autre est importante, plus les zones de contact sont nombreuses. Dans le cas où les deux matériaux en contact sont solides l'augmentation de la pression de contact contribue à écraser les aspérités. On définit le rapport entre l'aire de contact et l'aire totale comme :

$$\beta = \frac{A_c}{A} \leq 1 \tag{2.31}$$

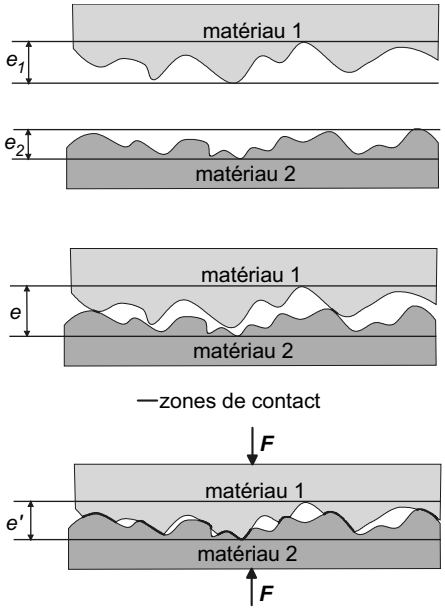


Figure 2.18 **Différentes zones de contact entre deux matériaux solides immobiles avec et sans force de contact**

Dans le cas de l'assemblage de deux matériaux solides, le fluide interstitiel est généralement de l'air mais on pourra aussi avoir présence d'un liquide. Lorsque le fluide interstitiel est moins conducteur que les matériaux en contact, les lignes de flux vont se resserrer au voisinage des zones de contact : c'est le phénomène de constriction représenté sur la figure 2.19. La température moyenne à l'interface sera différente de la température de part et d'autre dans chaque matériau. Ceci conduit à définir la

www.biblio-scientifique.net

résistance thermique de contact R_T :

$$R_T\,\varphi = T_1 - T_2 \tag{2.32}$$

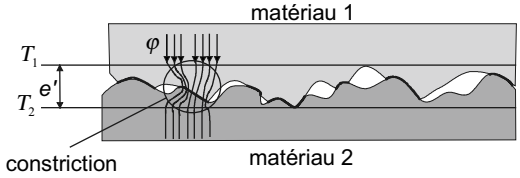


Figure 2.19 **Constriction des lignes de flux au niveau de la zone de contact**

Dans cette relation T_1 et T_2 désignent respectivement la température des solides 1 et 2 de part et d'autre de l'interface. Il y a continuité du flux de chaleur à l'interface mais il n'y a pas continuité de la température. La détermination de la résistance thermique de contact n'est jamais simple. On peut toutefois la déterminer en adoptant une géométrie idéalisée du contact tel que cela est représenté sur la figure 2.20. On considère ici que chaque aspérité est représentée sous la forme d'un pion cylindrique ou carré. La plupart du temps, l'interface ayant une épaisseur e' très petite et le fluide interstitiel étant généralement peut capacitif on pourra calculer la résistance thermique en régime permanent. De manière générale, même en régime transitoire, on assimilera l'interface à une résistance thermique pure.

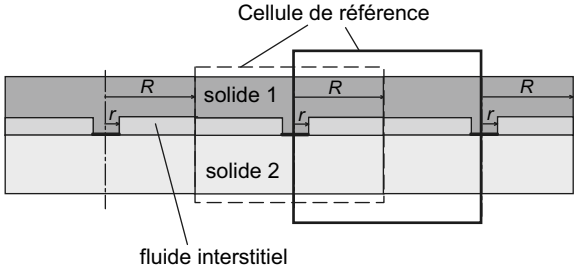


Figure 2.20 **Modélisation idéalisée du contact entre deux matériaux solides (seul le solide 1 est muni d'aspérités, le solide 2 est totalement lisse)**

On aboutit de ce fait à la modélisation du transfert de chaleur dans une cellule de référence d'un réseau périodique tel que celui de la figure 2.21.

Remarque

Si le fluide interstitiel est de l'air, on considère généralement que le flux ne transite qu'au travers des aspérités. Néanmoins, pour les températures élevées, le rayonnement thermique joue un rôle très important dans le volume rempli par l'air. Dans ce cas, la valeur de la résistance thermique est considérablement diminuée.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

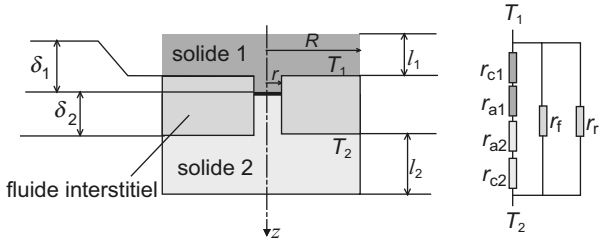


Figure 2.21 **Schématisation de l'aspérité entre les deux solides**

La modélisation de la résistance thermique doit donc intégrer la conduction en régime permanent dans l'aspérité mais aussi la résistance de constriction des lignes de flux. Nous considérons donc la schématisation représentée sur la figure 2.21. En régime permanent, on peut modéliser le transfert de chaleur sous la forme du réseau résistif représenté sur la même figure. Les résistances thermiques des aspérités pour les milieux 1 et 2 sont respectivement :

$$r_{a1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1 s} \qquad r_{a2} = \frac{\delta_2}{\lambda_2 s} \tag{2.33}$$

Dans ces relations, s désigne l'aire de contact et S est la surface totale. La résistance thermique pour le fluide est :

$$r_f = \frac{\delta_1 + \delta_2}{\lambda_f \ (S - s)} \tag{2.34}$$

2.9 Analogie électrique

La résolution de problème de conduction de la chaleur en régime permanent utilise très souvent la méthode d'analogie électrique lorsque le transfert est unidirectionnel. Rappelons que la loi d'ohm pour la conduction électrique est :

$$U_1 - U_2 = R_e \, i \tag{2.35}$$

Dans cette relation, la différence $U_1 - U_2$ définit la différence de potentiel aux bornes de la résistance électrique R_e parcourue par le courant i. Rappelons que d'après la relation 2.2, la relation de Fourier en transfert unidirectionnel est :

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda} \varphi \tag{2.36}$$

En comparant cette relation avec la relation 2.35, on voit alors une analogie directe entre la loi d'ohm et la loi de Fourier. La différence de température s'apparente à la

www.biblio-scientifique.net

différence de potentiel et la densité de flux s'apparente au courant. Ceci nous conduit à définir la résistance thermique :

$$R = \frac{e}{\lambda} \tag{2.37}$$

On exprime alors la loi de Fourier en régime permanent 1D sous la forme :

$$T_1 - T_2 = R\,\varphi \tag{2.38}$$

Si on exprime la loi de Fourier à partir du flux et non plus de la densité de flux, on aura alors $T_1 - T_2 = R\,\phi$ avec : $R = e/\lambda\,S$. Une représentation électrique équivalente du transfert de chaleur 1D dans une paroi est représentée sur la figure 2.22.

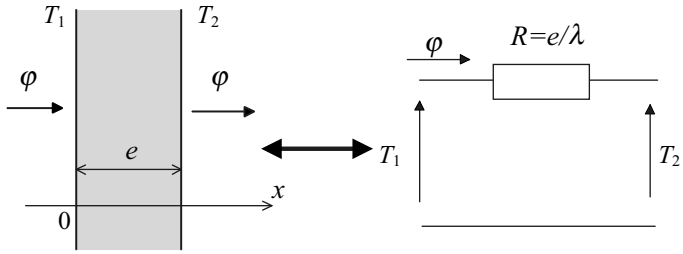


Figure 2.22 **Réseau électrique équivalent du transfert de chaleur 1D par conduction dans une paroi en régime permanent**

L'intérêt de cette représentation est qu'elle permet d'utiliser les outils propres aux réseaux électriques, tels que la loi des mailles et la loi des nœuds, pour résoudre des problèmes thermiques 1D assez complexes.

On voit de surcroît que la condition d'échange par convection (modélisée par la relation 2.29 en l'absence de rayonnement) peut aussi bénéficier de cette analogie. Dans ce cas, si h est le coefficient d'échange par convection, on définit la résistance thermique équivalente :

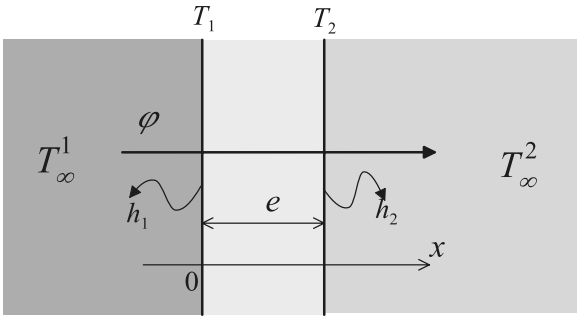
$$R_{cv} = \frac{1}{h} \tag{2.39}$$

Exercice d'application 2.1 Transfert de chaleur dans une paroi

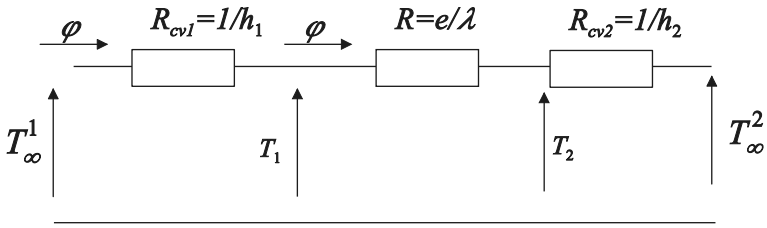
On considère une paroi d'épaisseur e et de conductivité thermique λ séparant deux fluides dont les températures sont T_∞^1 et T_∞^2. On note h_1 et h_2 les coefficients d'échange par convection entre les surfaces de la paroi et les fluides.
Déterminer la relation entre la densité de flux et les températures des deux fluides.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

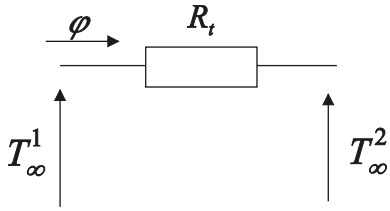
www.biblio-scientifique.net



SOLUTION. On note T_1 et T_2 les températures de la paroi. En utilisant les outils de l'analogie électrique le transfert de chaleur dans la configuration étudiée peut être schématisé de la façon suivante :



Les trois résistances thermiques sont en série et peuvent donc se combiner en une seule :



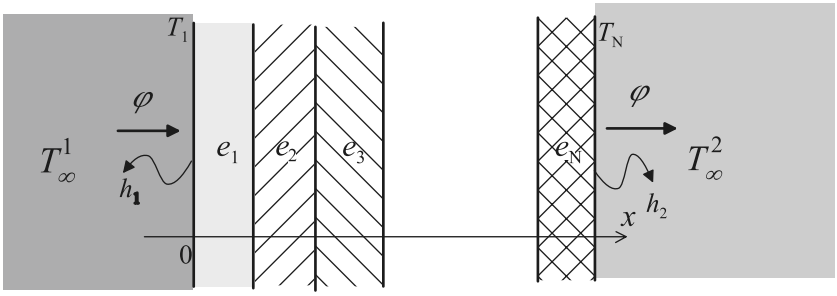
La résistance équivalente est : $R_t = R_{cv1} + R + R_{cv2} = \dfrac{1}{h_1} + \dfrac{e}{\lambda} + \dfrac{1}{h_2}$. On obtient donc l'expression de la densité de flux en fonction de l'écart de température des deux fluides :

$$T_\infty^1 - T_\infty^2 = R_t\,\varphi$$

Exercice d'application 2.2 Transfert de chaleur dans une paroi composite

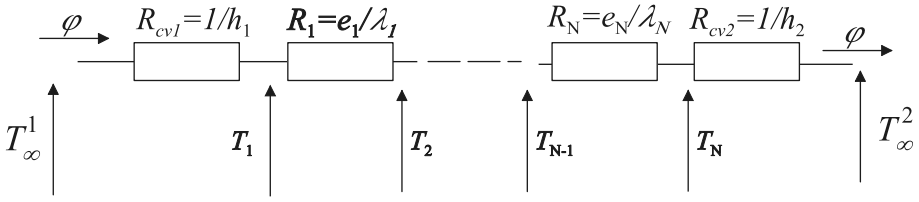
On considère une configuration assez proche de la précédente mais cette fois-ci la paroi est constituée par la juxtaposition de N couches de matériaux. On rencontre une telle configuration dans les parois de bâtiment par exemple.

www.biblio-scientifique.net

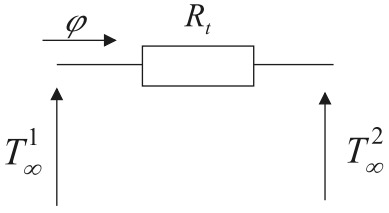


Chaque couche i est d'épaisseur e_i et de conductivité thermique λ_i. La paroi sépare deux fluides dont les températures sont T^1_∞ et T^2_∞. On note h_1 et h_2 les coefficients d'échange par convection entre les surfaces de la paroi et les fluides.
a) *Déterminer la relation entre la densité de flux et les températures des deux fluides.*
b) *Que devient cette relation si on introduit une résistance thermique de contact à chaque interface entre couches de la paroi.*

SOLUTION. **a)** On note T_1 à T_N les températures aux interfaces entre les fluides et la paroi ainsi qu'aux interfaces entre chaque couche. En utilisant les outils de l'analogie électrique le transfert de chaleur dans la configuration étudiée peut être schématisé de la façon suivante :



Les résistances thermiques sont toutes en série et peuvent donc se combiner en une seule :



La résistance équivalente est : $R_t = R_{cv1} + R + R_{cv2} = \dfrac{1}{h_1} + \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{e_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{h_2}$.

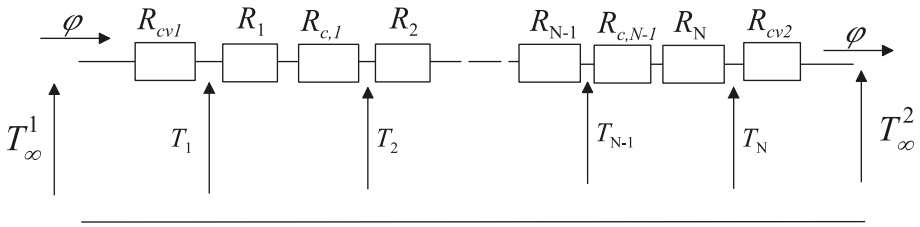
On obtient donc l'expression de la densité de flux en fonction de l'écart de température des deux fluides :

$$T^1_\infty - T^2_\infty = R_t\,\varphi$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

b) Si on suppose maintenant que le contact thermique est imparfait entre les couches de la paroi, cela se traduit par l'ajout de résistance de contact R_{ci} $(i = 1,\ N - 1)$ sur le schéma équivalent :



La résistance équivalente est : $R'_t = R_{cv1} + R + R_{cv2}$ et cette fois-ci la résistance R prend en compte les résistances de contact :

$$R = \frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^{N} \frac{e_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{N-1} R_{c,i} + \frac{1}{h_2}$$

On obtient donc l'expression de la densité de flux en fonction de l'écart de température des deux fluides :

$$T_\infty^1 - T_\infty^2 = R'_t\,\varphi$$

2.10 Références

CARLSLAW H.S. et JAEGER J.C., *Conduction of Heat in Solid*, 2e édition, Clarendon Press (1959)

CHAPMAN A., *Heat Transfer*, 3e édition, Collier Mc Millan Int. Édition (1974)

CRABOL J., *Transfert de chaleur*, Masson (1989)

DE VRIENDT A.B., *La Transmission de la chaleur*, Gaetan Morin Éditeur (1984)

GOSSE J., *Guide de Thermique*, Dunod (1981)

GRIGULL U. et Sandner H., *Heat Conduction*, Springer Verlag (1984)

INCROPERA F.P., DEWITT D.P., BERGMAN T.L., LAVINE A., *Introduction to Heat Transfer*, 5e édition révisée John Wiley & Sons Inc (2006).

LUIKOV, *Analytical Heat Diffusion Theory*, Academic Press (1968)

MARTINET J., *Éléments de thermocinétique*, Lavoisier (1989)

MORAN M.J., SHAPIRO H.N., MUNSON B.R., DEWITT D.P., *Introduction to Thermal Systems Engineering: Thermodynamics, Fluid Mechanics, and Heat Transfer*, John Wiley & Sons Inc (2003)

www.biblio-scientifique.net

OUIN J., *Transferts thermiques*, Éducalivre Éditions Casteilla (1998)

OZISICK N., *Heat Conduction*, Wiley Interscience (1980)

TAINE J., IACONA E. et PETIT J.-P., *Transferts thermiques : introduction aux transferts d'énergie*, Dunod (2008)

Exercices

2.1 Échange entre l'air du local et le plancher chauffant

Comme le montre la figure ci-dessous, on considère un local de superficie au sol S, à une température ambiante T_a où la dalle (de conductivité λ_d et d'épaisseur e_d) repose sur une couche de béton. La couche de béton (conductivité λ_b et épaisseur e_b) est posée sur une conduite d'eau. Bien évidemment ceci est une simplification d'un plancher chauffant dans lequel la conduite d'eau est noyée dans le béton. L'eau qui circule dans la conduite avec un débit massique $\dot{m}$ entre à la température T_e et sort à la température T_s. On note C_p sa capacité calorifique.

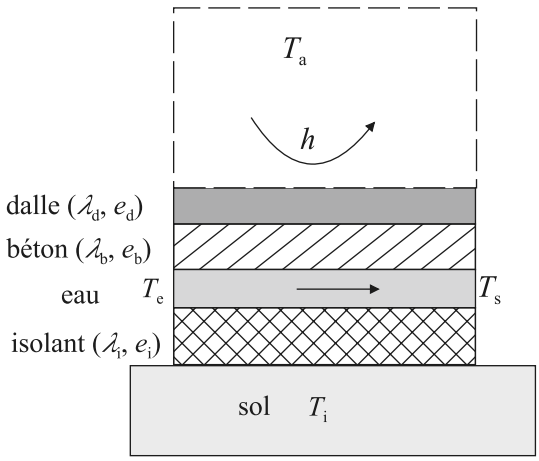
On considère des échanges convectifs entre la dalle et le milieu ambiant T_a ; le coefficient de convection est noté h. L'isolant, d'épaisseur e_i et de conductivitéλ_i, est au contact d'une part avec la conduite d'eau et d'autre part avec la terre à la température T_i.

Hypothèses :

Les contacts thermiques entre les différentes couches sont supposés parfaits.

Dans cette partie on néglige l'existence des murs et plafond fermant le local.

On néglige la résistance de convection qui permet le transfert de la chaleur de l'eau vers le tube ainsi que la résistance de conduction qui permet la propagation de la chaleur au travers du tube.



© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

a) Exprimez et calculez la densité de flux φ perdue par l'eau entre l'entrée et la sortie de la conduite. Puis exprimez la puissance ϕ cédée par l'eau si la surface au sol est de 20 m^2.

Données numériques : T_e=44,5 °C, C_p=4,18 kJ °C^{-1} kg^{-1}, $\dot{m}$= 0,1 kg s^{-1}, T_s= 40,5 °C.

b) Dans la suite du problème on travaillera à la température moyenne de l'eau, notée $\overline{T}$. On montre qu'il y peut y avoir trois expressions pour définir cette quantité :

$$\overline{T} = \frac{3T_e + T_s}{4} \quad \overline{T} = \frac{T_e + 3T_s}{4} \quad \overline{T} = \frac{T_e + 3T_s}{4}$$

Commentez ces trois expressions. Dans la suite du problème on adoptera la moyenne arithmétique comme valeur de $\overline{T}$.

c) Donnez le schéma électrique équivalent relatif au problème d'échange entre l'eau et les parties supérieure et inférieure en faisant apparaître T_i, T_a, $\overline{T}$. On notera sur le schéma ϕ_1 le flux qui part dans la partie inférieure et ϕ_2 le flux qui part dans la partie supérieure.

d) Donnez l'expression littérale de l'épaisseur e_i de l'isolant pour que seulement 5 % du flux fourni par la conduite d'eau passe par la partie inférieure. Calculez e_i. Calculez la température T_a dans cette configuration.

Données numériques : T_i=12 °C, λ_i = 0,02 W m^{-1} °C^{-1}

2.2 Échanges entre le local et le milieu extérieur (suite de l'exercice 2.1)

Nous reprenons la configuration de l'exercice 2.1 en prenant maintenant en compte les échanges thermiques entre le local à la température T_a et l'extérieur à la température T_{ext}. On considère que l'échange avec l'extérieur se fait à travers une paroi (qui englobe plafond et murs) de conductivité λ_p, d'épaisseur e_p, de surface globale S_p et qu'il existe un échange convectif avec l'extérieur caractérisé par le coefficient de convection noté h_{ext} ainsi qu'à l'intérieur du local où le coefficient de convection est noté h_{int}. L'échange convectif entre le sol et l'air est toujours caractérisé par le coefficient de convection h.

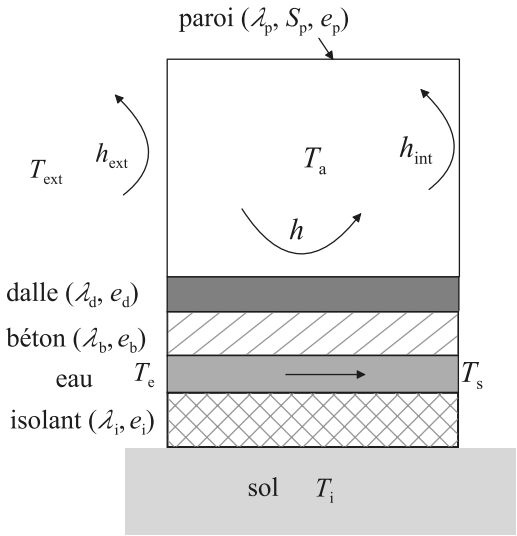
a) Donner le schéma électrique équivalent relatif à la nouvelle configuration d'échange.

b) Calculer le flux ϕ_2 ainsi que le nouveau débit à faire circuler dans la conduite d'eau pour que $\overline{T}$ = 42,5 °C avec une température extérieure T_{ext} = 2 °C.

A.N. : e_b = 10 cm, e_d = 2 cm, e_p = 10 cm, S = 20 m^2, S_p = 80 m^2, λ_b = 2,1 W · m^{-1}·°C^{-1}, λ_i = 0,2 W·m^{-1}·°C^{-1}, λ_p = 0,8 W·m^{-1}·°C^{-1}, λ_d= 1,8 W·m^{-1}·°C^{-1}, h = 4 W·m^{-2}·°C^{-1}, h_{ext} = 10 W·m^{-2}·°C^{-1}, h_{int} = 5 W·m^{-2}·°C^{-1}, T_∞ = 12 °C.

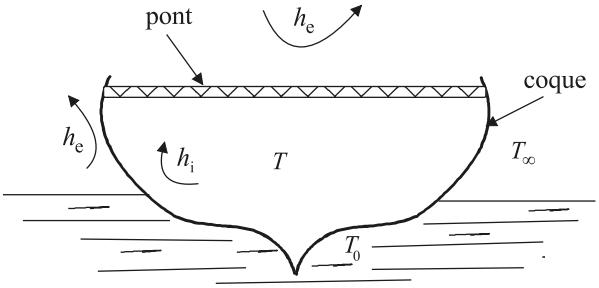
c) Calculer la température du local T_a.

www.biblio-scientifique.net



2.3 Transfert de chaleur au travers d'une coque de bateau

La coque d'un bateau en acier est posée sur un plan d'eau à la température T_0. Seul le pont est isolé par une épaisseur e de polyuréthanne de conductivité thermique λ. On appellera h_i le coefficient d'échange entre la paroi intérieure et l'air, h_e le coefficient d'échange entre la paroi extérieure et le milieu ambiant à la température T_∞ au dessus de l'eau. Les surfaces de la partie immergée, du pont et de la partie émergée sont sensiblement identiques et égales à A.



a) Le bateau n'est pas chauffé. À quelle température doit descendre T_∞ pour que la valeur de T soit égale à 0 °C ?

Hypothèse : la résistance thermique entre l'eau et la coque est supposée négligeable ainsi que celle de la paroi en acier.

A.N. : $T_0 = 2$ °C, $e = 50$ mm, $h_e = 10$ W m^{-2} K^{-1}, $h_i = 5$ W m^{-2} K^{-1}, $\lambda = 0{,}04$ W m^{-1} K^{-1}

b) Le bateau est chauffé. Quel flux faut-il fournir pour que la température intérieure du bateau atteigne 18 °C ?

A.N. : $T_\infty = -5$ °C, $A = 24$ m^2

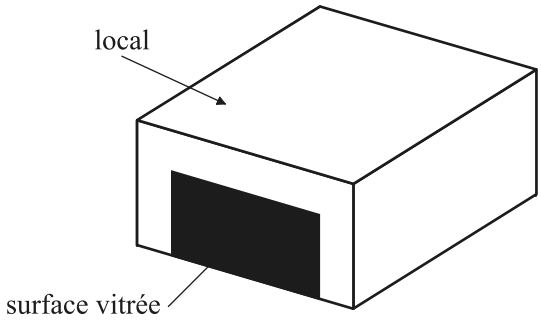
On s'aidera pour chacune des deux questions d'un schéma électrique équivalent.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

2.4 Façade d'un appartement

La façade d'un appartement, faisant partie d'un immeuble, est constituée, par moitié, par un mur et par une partie vitrée. Toutes les autres faces de cet appartement sont contiguës avec des appartements voisins. L'ensemble forme un local parallélépipédique (12 m × 8 m × 2,8 m) On supposera que tous ces appartements sont chauffés à la même température T pour une température extérieure T_∞. Les coefficients globaux d'échange sont : k_m pour le mur de façade, k_v pour le vitrage, k_s pour le plafond et le sol, k_f pour les autres façades. Ces coefficients globaux intègrent la conductivité des matériaux de paroi ainsi que les conditions d'échange convectif de part et d'autre de la paroi.



À partir d'un schéma électrique équivalent, on demande :

a) L'expression littérale du flux de chaleur à fournir à l'appartement pour maintenir sa température T constante.

b) La température d'équilibre de cet appartement lorsqu'il n'est pas chauffé contrairement à ceux qui l'entourent.
A.N. : $T_\infty = -5$ °C, $k_v = 3{,}25\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, $k_m = 0{,}5\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, $k_s = 0{,}6\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, $k_f = 1{,}2\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, $T = 20$ °C.

2.5 Épaisseur optimale d'une gaine cylindrique

On considère un câble cylindrique constitué par un conducteur électrique en cuivre entouré d'une gaine de caoutchouc (rayon extérieur R_1 et rayon intérieur R_2). On se fixe les conditions de service suivantes :

- la température du cuivre, supposée uniforme, ne doit pas dépasser $T_2 = 100$ °C,
- la surface extérieure de la gaine est, en régime permanent, à la température $T_1 = 20$ °C,
- l'air ambiant est à la température $T_0 = 15$ °C.

a) Montrer que la puissance linéique maximale dissipée par effet Joule et transmis dans la gaine de caoutchouc peut se mettre sous la forme :

$$\phi_L = \frac{2\,\pi\,\lambda\,(T_2 - T_1)}{\ln\left(R_1/R_2\right)}$$

www.biblio-scientifique.net

b) Déterminer l'intensité maximale du courant pouvant traverser le conducteur.
A.N. : $R_2 = 5$ mm, $R_1 = 10$ mm, $\lambda_{caoutchouc} = 1{,}3\ 10^3$ W cm^{-1} °C^{-1}, résistivité électrique du cuivre $\rho = 1{,}6\ 10^{-6}\ \Omega$ cm

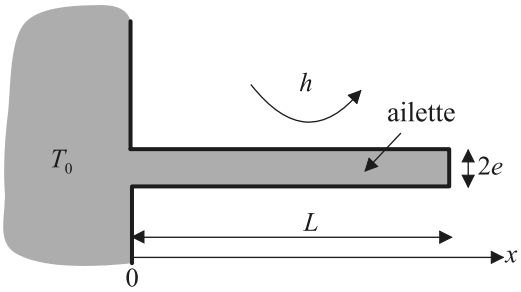
c) Les échanges entre la surface de la gaine et l'air ambiant peuvent être décrits à l'aide d'un coefficient global h défini par unité de surface, qui tient compte tout à la fois des effets de convection et de rayonnement. La résistance thermique globale est définie par la relation :

$$R = (T_2 - T_0)/\phi_L$$

Donner l'expression de R en fonction des caractéristiques thermiques et géométriques du problème et montrer que ϕ_L , λ, R_2 et h restant constants, la fonction $R(R_1)$ passe par un minimum. Commenter les conséquences de cette évolution. Valeur du minimum pour $h = 10$ W m^{-2}.

2.6 Étude d'une ailette

On considère une ailette telle que celle représentée sur la figure ci-dessous. La conductivité thermique du matériau constitutif de l'ailette est λ. Le périmètre de l'ailette est p, sa section S, sa longueur L. Le coefficient d'échange entre l'ailette et le milieu ambiant à la température T_∞ est noté h. Enfin la température à la base de l'ailette est notée T_0. On admet que le flux à l'extrémité de l'ailette est nul.



a) À quelle condition la température de l'ailette peut-elle être considérée comme uniforme sur la section ?

b) Donner la loi d'évolution de la température le long de l'ailette suivant x.

c) Que devient cette expression si l'ailette est considérée comme semi infinie ?

d) Donner l'expression du flux dissipé par l'ailette semi infinie.

e) Comparer ce flux à celui qui serait "évacué" en l'absence d'ailette d'une part et à celui que l'on obtiendrait avec une ailette de conductivité infinie (soit isotherme) d'autre part. Évaluer alors efficacité et rendement de l'ailette.

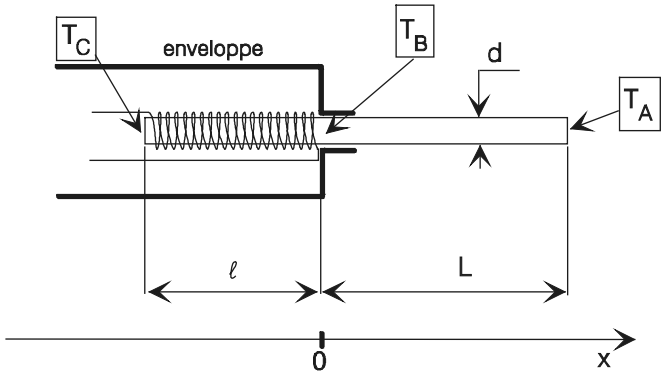
f) Quelle est la représentation électrique équivalente de l'ailette semi infinie ?

2.7 Fonctionnement d'un fer à souder

La panne d'un fer à souder électrique, de forme cylindrique comprend deux parties :

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net



• Une partie « libre » AB en cuivre (λ =350 W m^{-1} K^{-1}), de longueur L = 50 mm, de diamètre d = 6 mm, qui est soumise à des échanges convectifs avec l'air ambiant caractérisés par un coefficient d'échange h = 17 W m^{-2} K^{-1}. La température de l'air ambiant est égale à T_∞=20 °C.

• Une partie BC de longueur l = 30 mm, située à l'intérieur de l'enveloppe et chauffée par une résistance électrique.

On supposera que le fonctionnement du fer est tel que :

le flux à l'extrémité libre A de la panne est nul en dehors des périodes de soudure,

le fer est régulé et la température à cette même extrémité doit être maintenue à une température compatible avec le travail éventuel de soudure, soit T_A = 210 °C,

l'enveloppe est adiabatique c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte thermique vers l'extérieur,

le flux à l'extrémité C de la partie chauffée est négligeable,

la puissance ϕ fournie par la résistance est uniformément répartie sur la longueur l.

Étude de la partie libre AB

a) Montrer que l'on peut supposer, compte tenu des dimensions, de la conductivité thermique de la partie libre et des échanges avec l'air ambiant, que la température dans chaque section de AB peut être considérée comme uniforme et par conséquent la température ne dépend que de x.

b) En tenant compte de l'hypothèse démontrée à la question précédente, effectuer un bilan thermique sur un élément de volume d'extension longitudinale δx et déduire que l'équation de transfert dans la partie libre en régime permanent s'exprime sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - k^2\theta = 0$$

où $k^2 = 4h/\lambda d$ et $\theta = T(x) - T_\infty$. On justifiera clairement et sans ambiguïté la forme de tous les termes intervenant dans le bilan thermique.

c) Préciser les conditions aux limites en A en dehors des périodes de soudure.

www.biblio-scientifique.net

d) En tenant compte de ces conditions aux limites, résoudre l'équation de transfert obtenue à la question 2 et montrer que la loi d'évolution de la température $T(x)$ en régime permanent le long de AB vérifie :

$$T(x) - T_\infty = (T_A - T_\infty)\cosh(k(x - L))$$

e) En déduire la température T_B à la base de la partie libre.

f) Déterminer et calculer la puissance nécessaire P dissipée par la résistance dans les conditions de fonctionnement étudiées.

Étude de la partie chauffée BC

g) Calculer la puissance ϕ_l produite dans la partie chauffée par unité de longueur.

h) Effectuer un bilan thermique sur un élément de volume d'extension longitudinale δx de la partie chauffée BC et montrer que l'équation de transfert dans BC en régime permanent s'exprime sous la forme :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{4\,\phi_\ell}{\lambda\,\pi\,d^2} = 0$$

i) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions aux limites que l'on précisera.

j) Calculer alors la température T_C à l'extrémité C de la partie chauffée.

Étude du régime transitoire : chauffage de la partie libre par la résistance

On cherche à évaluer le temps de montée en température nécessaire pour atteindre le régime permanent qui a fait l'objet des deux parties précédentes.

L'écart de température entre les deux extrémités de la partie libre étant faible, l'évaluation se fera en supposant que la partie AB, pendant le régime transitoire, a une température homogène $T(t)$ à chaque instant. On cherche donc le temps nécessaire pour que la partie AB passe de sa température initiale égale à celle de l'air ambiant jusqu'à une température moyenne de $T_m = 215$ °C.

k) Écrire le bilan thermique en régime transitoire, bilan qui doit traduire le fait que toute la puissance dissipée par la résistance $R = 2\,500\ \Omega$ du fer, soumise à une tension $U = 220$ V sert d'une part à chauffer la partie AB et d'autre part à compenser à chaque instant les échanges convectifs entre la partie libre et l'air ambiant. Le coefficient d'échange par convection est le même que celui défini précédemment et on donne la masse volumique du cuivre $\rho = 9\,000$ kg m^{-3} et sa chaleur spécifique $C_p = 380$ J kg^{-1} °C^{-1}.

l) Montrer que ce bilan conduit à une équation différentielle du premier ordre avec second membre à laquelle obéit la température $T(t)$ et montrer que la solution d'une telle équation est (on pourra poser $\theta = T - T_\infty$) :

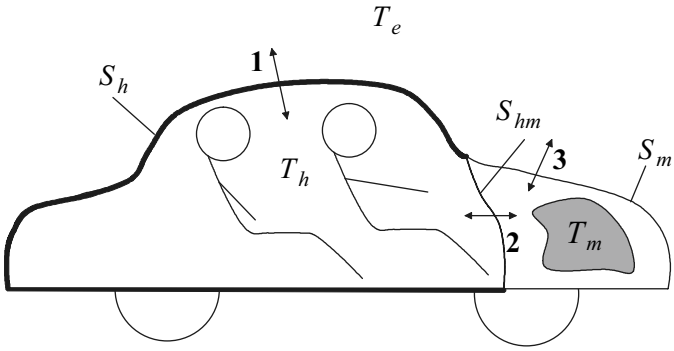
$$T - T_\infty = \frac{U^2}{R\,h\,\pi\,d\,L}\left(1 - \exp\left(-\frac{4\,h\,t}{\rho\,C_p\,d}\right)\right)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

m) Calculer le temps mis pour atteindre le régime permanent.

2.8 Transferts thermiques dans un véhicule automobile



Un véhicule peut être globalement schématisé comme sur la figure ci-dessus. On met en évidence 3 zones : l'habitacle comprenant les passagers, le compartiment moteur et l'environnement extérieur. On va alors distinguer les transferts de chaleurs représentés par les doubles flèches sur la figure :

1 : transfert de chaleur entre l'habitacle et l'environnement extérieur

2 : transfert de chaleur entre l'habitacle et le compartiment moteur

3 : transfert de chaleur entre le compartiment moteur et l'environnement extérieur

La température à l'intérieur de l'habitacle est uniforme et est notée T_h. La température à l'intérieur du compartiment moteur est uniforme et est notée T_m. Enfin la température de l'air extérieur est notée T_e.

La surface de l'habitacle est S_h et elle est représentée en trait gras sur la figure. Cette surface est composée par moitié par une paroi composite et pour l'autre moitié par des vitres. La paroi composite est formée par 1 cm d'isolant thermique et 0,3 mm de tôle en acier. Les vitres sont formées par un matériau de type polycarbonate dont l'épaisseur est 3 mm.

La surface du compartiment moteur est S_m et elle est représentée en trait fin sur la figure. Elle est composée pour moitié de la même paroi composite que l'habitacle et pour l'autre moitié d'une tôle en plastique de 2 mm d'épaisseur.

Enfin, la surface séparant le compartiment moteur de l'habitacle est notée S_{hm} et elle est représentée en traits pointillés sur la figure. Cette paroi est composite, elle est constituée par 1 cm d'isolant thermique, 3 mm d'isolant phonique et 0,3 mm de tôle.

Le moteur à l'intérieur du compartiment moteur dissipe une puissance thermique $P_m = 2\,500\,\mathrm{W}$ et sa température est $T_m = 80\,°\mathrm{C}$. Chaque passager à l'intérieur de l'habitacle dissipe une puissance thermique $P_p = 100\,\mathrm{W}$ et il y a 4 passagers.

Le coefficient d'échange entre la surface S_h et l'intérieur de l'habitacle à la température T_h est noté h_i. Le coefficient d'échange entre la surface S_m et l'intérieur du compartiment moteur à la température T_m est noté h_m. Le coefficient d'échange entre

www.biblio-scientifique.net

la surface S_h et l'extérieur à la température T_e est noté h_e. Le coefficient d'échange entre la surface S_m et l'extérieur est aussi h_e.

A.N. :

$h_i = 10\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$, $h_e = 60\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$, $h_m = 35\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}$.

isolant thermique : $e_i = 1\,\mathrm{cm}$, $\lambda_i = 0{,}2\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$

isolant phonique : $e_{ph} = 3\,\mathrm{mm}$, $\lambda_{ph} = 25\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$

tôle en acier : $e_a = 0{,}3\,\mathrm{mm}$, $\lambda_a = 45\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$

tôle en plastique : $e_p = 2\,\mathrm{mm}$, $\lambda_p = 0{,}2\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$

vitre en polycarbonate : $e_v = 3\,\mathrm{mm}$, $\lambda_v = 0{,}6\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$.

$S_h = 10\,\mathrm{m^2}$, $S_m = 3\,\mathrm{m^2}$, $S_{hm} = 1\,\mathrm{m^2}$.

On se place dans la configuration de régime permanent. Les températures ne varient donc pas au cours du temps.

a) Justifier que les transferts de chaleurs **1**, **2** et **3** peuvent être considérés comme unidirectionnels.

b) Pour les parois composites, justifier que l'on peut négliger la contribution de la tôle en acier devant celles des isolants dans le calcul des résistances thermiques.

c) Exprimer puis calculer la résistance équivalente R_h liant la température T_h à T_e.

d) Exprimer puis calculer la résistance équivalente R_m liant la température T_m à T_e.

e) Exprimer puis calculer la résistance équivalente R_{hm} liant la température T_h à T_m.

f) Donner alors la représentation globale des transferts sur un même schéma puis calculer les températures T_h et T_m à partir de T_e, R_h, R_m, R_{hm} et des puissances P_m et P_p.

g) Calculer la puissance de climatisation P_c qu'il serait nécessaire de fournir si l'on voulait que la température $T_h = 18\ ^\circ\mathrm{C}$.

2.9 Comportement d'un igloo en régime permanent

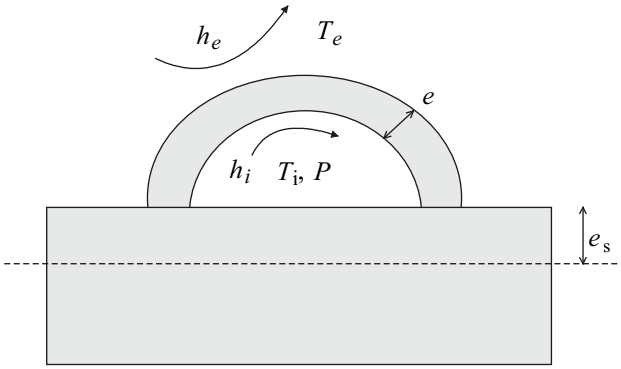
On considère un igloo dont les dimensions géométriques sont portées sur la figure. Deux personnes occupent en permanence cet igloo et dégagent une puissance P. Le coefficient d'échange entre la surface externe de l'igloo et le milieu ambiant extérieur à la température T_e est noté h_e. Le coefficient d'échange entre la surface interne de l'igloo et le milieu ambiant intérieur à la température T_i est noté h_i. On admet que la température de la banquise est constante et égale à 0 °C à une profondeur e_s. La conductivité thermique de la glace est notée λ. On appelle S_g la surface de l'enveloppe de l'igloo (surface intérieure = surface extérieure si e petite) et S la surface de l'igloo au sol.

a) Donner une représentation électrique équivalente des transferts de chaleur dans ce système.

b) En déduire l'expression de la température à l'intérieur de l'igloo en fonction de P.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

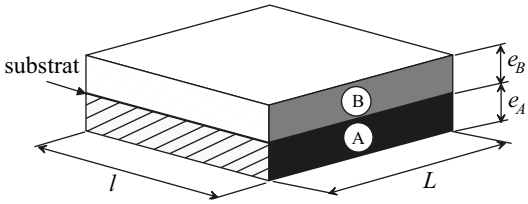
www.biblio-scientifique.net



2.10 Refroidissement d'un composant électronique

On se propose d'étudier le refroidissement d'un composant électronique fonctionnant en régime permanent, une surchauffe trop importante liée à l'effet Joule pouvant entraîner une détérioration du composant.

En général, un composant électronique est constitué d'un support en résine (A), d'épaisseur e_A et de conductivité thermique λ_A, sur lequel est déposé un substrat d'épaisseur négligeable dans lequel est noyé le conducteur. Le substrat est recouvert d'une plaquette métallique, d'épaisseur e_B et de conductivité λ_B.



Lorsque le composant est actif, le conducteur noyé dans le substrat dissipe une puissance uniforme ϕ_S sur toute sa surface et sa température sera notée T_S. Dans des conditions de fonctionnement continu, cette température ne devrait pas excéder 80 °C.

Les échanges convectifs des faces supérieure et inférieure avec le milieu ambiant sont caractérisés par un coefficient d'échange surfacique h. La température ambiante est T_0. Étant donné les dimensions du composant, le transfert pourra être assimilé à un transfert unidirectionnel, les échanges surfaciques latéraux étant négligeables.

a) Donner l'expression du flux ϕ_A traversant le support en résine en fonction de $T_S - T_0$.

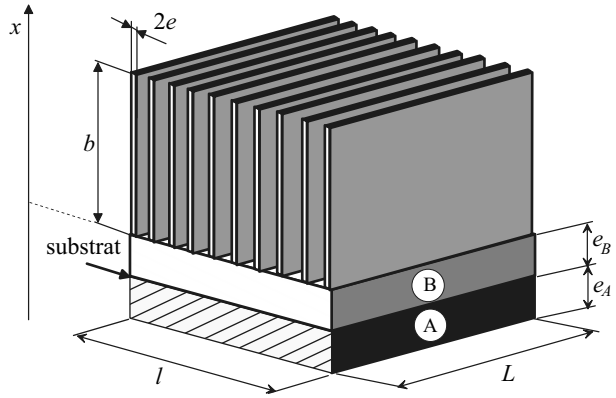
b) Par symétrie, montrer que le flux ϕ_B traversant la plaquette métallique peut s'écrire, en fonction de $T_S - T_0$, de la façon suivante :

$$\phi_B = \left[\frac{1}{\dfrac{e_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{h}} \right] S \ (T_S - T_0)$$

www.biblio-scientifique.net

c) En s'aidant du schéma électrique équivalent, écrire le bilan thermique du composant en régime permanent et déduire l'expression de T_S. Application numérique et conclusion.

Pour remédier à l'échauffement décrit dans les questions précédentes, on rajoute sur la plaquette métallique n ailettes. Il s'agit de fines feuilles métalliques verticales, de même nature que la plaquette, destinées à accroître le refroidissement.



On notera T_{pB} la température de surface externe de la plaquette soit, par conséquent, la température à la base des ailettes de hauteur b, de longueur L et d'épaisseur $2e$.

d) Montrer en effectuant le bilan thermique sur une tranche d'ailette δx (la température est uniforme dans chaque section) que la température dans l'ailette, $T(x)$, obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{h}{\lambda_B\, e}(T - T_0) = 0$$

NB : cette équation est obtenue en prenant en compte le fait que l'épaisseur e est très faible vis-à-vis de la longueur L et en supposant que l'échange convectif sur les faces des ailettes est caractérisé par le même coefficient surfacique h définit précédemment. Les échanges sur les faces non principales sont négligées.

e) En posant $\theta(x) = T(x) - T_0$ et $k^2 = \dfrac{h}{\lambda_B\, e}$, montrer que l'équation précédente est équivalente à : $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - k^2\,\theta = 0$

f) La solution générale d'une telle équation est de la forme : $\theta(x) = A\,e^{-k\,x} + B\,e^{k\,x}$. Préciser les conditions aux limites et donner l'expression de $T(x)$ si l'ailette a une longueur b suffisante pour être supposée infinie.

g) Donner l'expression du flux ϕ_a dissipé par une ailette.

h) Donner l'expression du flux total dissipé à la surface externe de la plaquette métallique, ce flux étant la somme du flux dissipé par les n ailettes et du flux dissipé par la surface restante (non muni d'ailettes), en fonction de $(T_{pB} - T_0)$. En déduire la nouvelle expression de ϕ_B en fonction de $(T_S - T_0)$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

i) Reprendre le bilan thermique du composant (résine + plaquette métallique) muni de n ailettes et déduire la nouvelle expression de T_S.

j) Calculer T_S et vérifier que le résultat correspond maintenant à de bonnes conditions de fonctionnement.

Données numériques : $e_A = 3$ mm, $\lambda_A = 2$ W m^{-1} K^{-1}, $e_B = 5$ mm, $\lambda_B = 20$ W m^{-1} K^{-1}, $L = 10$ cm, $l = 3$ cm, $2e = 2$ mm, $h = 10$ W m^{-2} K^{-1}, $T_0 = 20$ °C, $\phi_S = 10$ W, $n = 10$.

Solutions des exercices

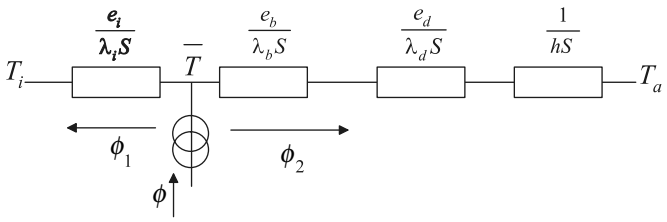
2.1 a) La densité de flux est donnée par : $\varphi = \dot{m}\, C_p\, (T_e - T_s)\,/S$.

A.N. : $\varphi = 83{,}6$ W m^{-2}, soit $\phi = \phi\, S = 1672$ W.

b) La première moyenne privilégie la température d'entrée, la seconde celle de sortie enfin la troisième est la moyenne arithmétique des 2 températures :

$$\overline{T} = \frac{3T_e + T_s}{4} = 43{,}5\ °\mathrm{C}$$
$$\overline{T} = \frac{T_e + 3T_s}{4} = 41{,}5\ °\mathrm{C}$$
$$\overline{T} = \frac{T_e + T_s}{2} = 42{,}5\ °\mathrm{C}$$

c) En utilisant les outils de l'analogie électrique, on trouve le schéma équivalent suivant :



Nous introduisons dans cette représentation la source de chaleur par un générateur de courant.

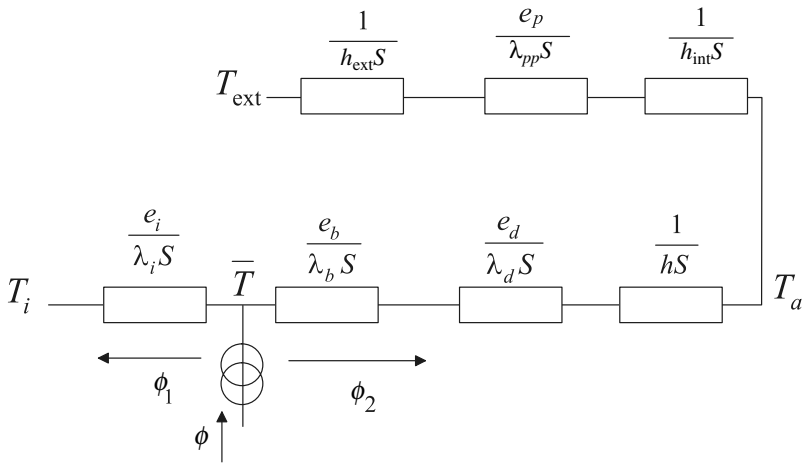
d) Par définition : $\phi_1 = 0{,}05\,\phi$. On a d'autre part :

$$\phi_1 = \frac{\overline{T} - T_i}{\dfrac{e_i}{\lambda_i S}}, \quad \text{soit} \quad e_i = \lambda_i \frac{\overline{T} - T_i}{\phi_1} S.$$

A. N. : $e_i = 0{,}146$ m, $T_a = 18°C$

www.biblio-scientifique.net

2.2 **a)** En intégrant le transfert unidirectionnel de chaleur au travers de la paroi du local on obtient dans le schéma équivalent obtenu à l'exercice 1, on obtient le nouveau schéma suivant :



b) À partir de ce schéma on voit facilement que :

$$\phi_2 = \frac{\overline{T} - T_a}{\dfrac{e_b}{\lambda_b\, S} + \dfrac{e_d}{\lambda_d\, S} + \dfrac{1}{h\, S}} = \frac{T_a - T_{ext}}{\dfrac{1}{h_{\text{int}}\, S_p} + \dfrac{e_p}{\lambda_p\, S_p} + \dfrac{1}{h_{ext}\, S_p}}$$

Soit :

$$\phi_2 = \frac{\overline{T} - T_{ext}}{\dfrac{e_b}{\lambda_b\, S} + \dfrac{e_d}{\lambda_d\, S} + \dfrac{1}{h\, S} + \dfrac{1}{h_{\text{int}}\, S_p} + \dfrac{e_p}{\lambda_p\, S_p} + \dfrac{1}{h_{ext}\, S_p}}$$

A.N. : $\phi_2 = 1951{,}9\,\text{W}$

Ceci nous conduit à la valeur du flux total : $\phi = \phi_1 + \phi_2 = 2\,035{,}5\,\text{W}$

En gardant les valeurs précédentes pour la température de l'eau en entrée et en sortie de la conduite (T_e= 44,5 °C et T_s= 40,5 °C), on obtient la nouvelle valeur du débit :

$$\dot{m} = \frac{\phi}{C_p\,(T_e - T_s)}$$

A.N. : $\dot{m} = 0{,}123\ \text{kg s}^{-1}$

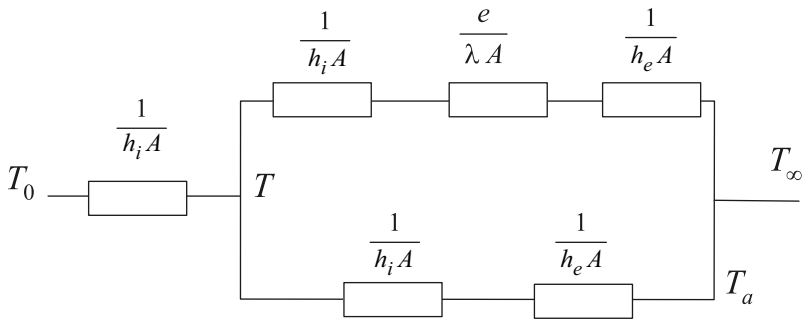
c) Le schéma équivalent donne directement :

$$T_a = \phi_2 \left(\frac{1}{h_{\text{int}} S_p} + \frac{e_p}{\lambda_p\, S_p} + \frac{1}{h_{ext}\, S_p} \right) + T_{\text{ext}} = 12{,}4\ °\text{C}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

2.3 **a)** Schéma électrique équivalent :



À partir du schéma on trouve : $\dfrac{T_0 - T}{1/h_i\, A} = \dfrac{T - T_\infty}{R}$

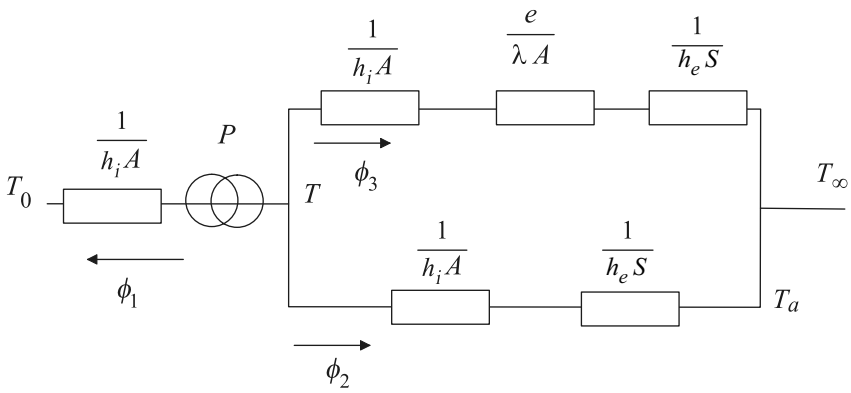
Avec : $$\frac{1}{R} = \frac{A}{1/h_i + 1/h_e} + \frac{A}{1/h_i + e/\lambda + 1/h_e}$$

Ce qui conduit finalement à :

$$T_\infty = T - \frac{(T_0 - T)}{\dfrac{1}{h_i}\left(\dfrac{1}{1/h_i + 1/h_e} + \dfrac{1}{1/h_i + e/\lambda + 1/h_e}\right)}$$

A.N. : $T_\infty = -2{,}5$ °C.

b) Le nouveau schéma équivalent est le suivant :



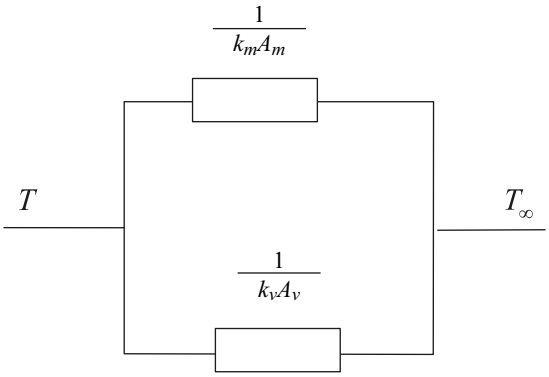
À partir du schéma on a la relation suivante :

$$P = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \frac{T - T_0}{1/h_i A} + \frac{T - T_\infty}{1/h_i A + 1/h_e A} + \frac{T - T_\infty}{1/h_i A + e/\lambda A + 1/h_e A}$$

A.N. : $P = 4\ 116$ W

www.biblio-scientifique.net

2.4 **a)** Le schéma électrique équivalent est le suivant :



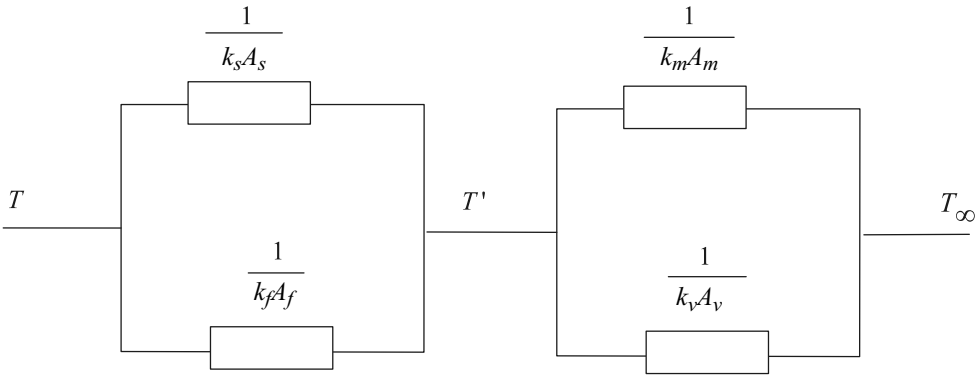
La résistance thermique équivalente est donc : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{1/k_m\ A_m} + \dfrac{1}{1/k_v\ A_v}$.

Ce qui conduit à l'expression du flux :

$$\phi = \frac{T - T_\infty}{R} = (T - T_\infty)\,[k_m\ A_m\ +\ k_v\ A_v]$$

A.N. : $A_m = A_v$ = 11,2 m^2, ce qui donne ϕ = 1 050 W

b) Dans cette configuration, le schéma équivalent est cette fois-ci le suivant :



On en déduit la relation suivante :

$$\phi = \frac{T - T_\infty}{R + R'} = \frac{T - T'}{R'}$$

Avec : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{1/k_m\ A_m} + \dfrac{1}{1/k_v\ A_v}$ et $\dfrac{1}{R'} = \dfrac{1}{1/k_f\ A_f} + \dfrac{1}{1/k_s\ A_s}$

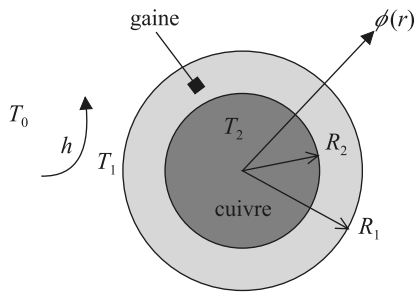
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Donc : $T' = T - \dfrac{R'}{R + R'}(T - T_\infty)$

A.N. : R = 0,024 K W^{-1}, A_s = 192 m^2, A_f = 89,6 m^2, R' = 4,5 10^{-3} K W^{-1} et T' =16 °C.

2.5 **a)** Loi de Fourier : $\vec{\varphi} = -\lambda\,\vec{\nabla}\mathrm{T}$



En coordonnées radiales, $\phi = S(r)\,\varphi = -\lambda\,S(r)\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ et $S\,(r) = 2\,\pi\,r\,L$

Donc :

$$\frac{\phi}{2\,\pi\,\lambda\,L}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \mathrm{d}T$$

Soit en intégrant :

$$\frac{\phi}{2\,\pi\,\lambda\,L}\,[\ln\,r]_{R_2}^{R_1} = [T]_{T_2}^{T_1}$$

Pour un cylindre de longueur unitaire L = 1, on obtient finalement :

$$\phi_L = \frac{2\,\pi\,\lambda\,(T_2 - T_1)}{\ln\left(R_1/R_2\right)}$$

b) Puissance thermique dissipée par effet joule :$P = U\,i = R\,i^2$. Soit ici : $\phi_{\max} = R\,i_{\max}^2$. La résistance électrique du câble de cuivre vaut $R_{elec} = \dfrac{L}{\gamma\,S}$, où γ est la conductivité électrique du cuivre. Cette expression est à rapprocher de celle de la résistance thermique : $R_{th} = \dfrac{L}{\lambda\,S}$, où λ est la conductivité thermique.

Résistivité du cuivre :$\rho = \dfrac{1}{\gamma}$ On a donc : $R_{elec} = \dfrac{\rho\,L}{S}$

$i_{\max}^2 = \dfrac{\phi_{\max}\,S}{\rho\,L}$, soit avec L = 1 et $S = \pi\,R_2{}^2$, $i_{\max} = \sqrt{\dfrac{\phi_{\max}\,\pi\,R_2^2}{\rho}}$

A.N. : $\phi_{\max}$ = 94,3 W (calculé pour un $\Delta T_{\max}$, c'est-à-dire avec T_2 = 100 °C) et $i_{\max}$ = 680 A.

www.biblio-scientifique.net

c) Le flux échangé par convection est : $\phi_L = 2R_1\, L\, h\,(T_1 - T_0)$.

Soit : $(T_2 - T_1) = \dfrac{\phi_L \ln(R_1/R_2)}{2\,\pi\,\lambda}$.

Et donc : $T_1 - T_0 = \dfrac{\phi_L}{2\,\pi\,R_1\,h}$, avec $L = 1$.

Par sommation on obtient : $T_2 - T_0 = \phi_L \left(\dfrac{\ln(R_1/R_2)}{2\,\pi\,\lambda} + \dfrac{1}{2\pi\,R_1\,h} \right)$.

On a donc finalement : $R = \dfrac{\ln\left(R_1/R_2\right)}{2\,\pi\,\lambda} + \dfrac{1}{2\,\pi\,R_1\,h}$.

Pour trouver le minimum de la fonction, on cherche à annuler sa dérivée :

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{1}{2\,\pi\,\lambda\,R_1} - \frac{1}{2\,\pi\,R_1^2\,h}$$

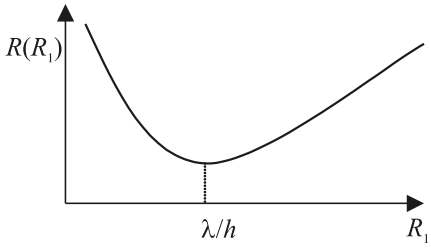
Donc :

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\,\pi\,\lambda\,R_1} = \frac{1}{2\,\pi\,R_1^2\,h}$$

Soit : $R_1 = \dfrac{\lambda}{h}$

Les comportements asymptotiques sont : $\lim\limits_{R_1 \to \infty} R\,(R_1) = \infty$ et $\lim\limits_{R_1 \to 0} R\,(R_1) = \infty$

On obtient le graphe de la fonction représenté ci-dessous :



Lorsque la gaine de caoutchouc a un rayon trop petit ($< R_1$), la résistance thermique augmente et T_2 risque de dépasser la valeur limite. Ce même phénomène se produit pour une grande épaisseur de gaine.

A.N. : R_1 = 1,3 cm et $R(R_1)$ = 2,4 K m W^{-1}

2.6 a) Pour que la température soit uniforme sur la section de l'ailette, il faut que les échanges par convection à la surface de l'ailette soit petits devant les échanges par conduction au sein de l'ailette dans l'épaisseur :

$$\mathrm{Bi} = \frac{h\,2\,e}{\lambda}$$

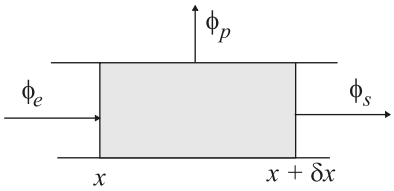
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Bi est le nombre de Biot. En pratique la condition est toujours vérifiée pour les ailettes fines à haute conductivité thermique (cuivre ou aluminium).

b) Si donc la température ne dépend que de la direction longitudinale, en effectuant un bilan thermique sur un tronçon de largeur δx d'ailette on a :

$$\phi_e - \phi_s - \phi_p = 0$$



Avec :

$$\phi_e = -\lambda\, S\, \frac{\mathrm{d}T\,(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\phi_s = -\lambda\, S\, \frac{\mathrm{d}T\,(x+\delta x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\phi_p = h\, p\, \delta x\, \left(T\,(x) - T_\infty\right)$$

En injectant ces relations dans la relation de bilan on obtient :

$$\lambda\, S\, \left(\frac{\mathrm{d}T\,(x+\delta x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}T\,(x)}{\mathrm{d}x}\right) - h\, p\, \delta x\, (T\,(x) - T_\infty) = 0$$

Soit :

$$\lambda\, S \frac{\mathrm{d}^2 T\,(x)}{\mathrm{d}x^2}\, \delta x - h\, p\, \delta x\, (T\,(x) - T_\infty) = 0$$

Et encore :

$$\frac{\mathrm{d}^2 T\,(x)}{\mathrm{d}x^2} - k^2\, (T\,(x) - T_\infty) = 0$$

Avec :

$$k^2 = \frac{h\, p}{\lambda\, S}$$

En posant $\theta\,(x) = T\,(x) - T_\infty$, la relation devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 \theta\,(x)}{\mathrm{d}x^2} - k^2 \theta\,(x) = 0$$

Dont la solution est :

$$\theta\,(x) = A \cosh\,(k\, x) + B\, \sinh\,(k\, x)$$

www.biblio-scientifique.net

Les conditions limites sont :

$$\theta(0) = T_0 - T_\infty = \theta_\infty$$

et :

$$\phi(L) = -\lambda S \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0, \quad \text{soit} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = 0$$

La première condition donne :

$$\theta_\infty = A$$

La deuxième condition donne :

$$0 = A\,k\,\sinh(k\,L) + B\,k\,\cosh(k\,L)$$

soit :

$$B = -\frac{\theta_\infty\,\sinh(k\,L)}{\cosh(k\,L)}$$

La solution générale est donc :

$$\theta(x) = \theta_\infty \cosh(k\,x) - \frac{\theta_\infty\,\sinh(k\,L)}{\cosh(k\,L)}\sinh(k\,x)$$

c) Si l'ailette est semi infinie alors $L \to \infty$ et la relation précédente devient :

$$\theta(x) = \theta_\infty(\cosh(k\,x) - \sinh(k\,x)) = \theta_\infty \exp(-k\,x)$$

d) le flux dissipé par l'ailette semi infinie est :

$$\phi = -\lambda S \left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$$

soit :

$$\phi = \lambda\,S\,k\,\theta_\infty = \lambda\,S\,k\,(T_0 - T_\infty)$$

e) En l'absence d'ailette le flux évacué serait :

$$\phi' = h\,S\,(T_0 - T_\infty)$$

On définit l'efficacité de l'ailette par le rapport entre le flux dissipé avec ailette et celui dissipé sans ailette :

$$\varepsilon = \frac{\phi}{\phi'} = \frac{\lambda\,S\,k\,(T_0 - T_\infty)}{h\,S\,(T_0 - T_\infty)} = \frac{\lambda\,k}{h}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Si l'ailette était de conductivité infinie elle serait donc à température uniforme. À ce moment le flux évacué serait :

$$\phi'' = h\,s\,(T_0 - T_\infty) = h\,p\,L\,(T_0 - T_\infty)$$

On définit alors le rendement de l'ailette par :

$$\eta = \frac{\phi}{\phi''} = \frac{\lambda\,S\,k\,(T_0 - T_\infty)}{h\,p\,L\,(T_0 - T_\infty)} = \frac{\lambda\,k\,S}{h\,p\,L}$$

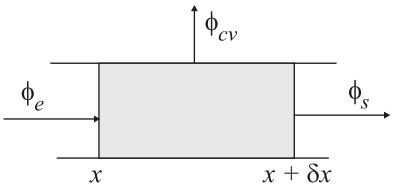
On note ici que nous avons utilisé la configuration de l'ailette semi infinie et que nous avons considéré une longueur finie L dans la relation précédente. Ceci suggère donc que cette expression du rendement est vraie pour L grand. Dans le cas contraire il sera nécessaire de rentrer une expression correcte du flux évacué pour L finie.

f) La relation précédente montre que l'ailette peut être considérée comme une résistance thermique de valeur :

$$R_t = \frac{1}{\lambda\,S\,k}$$

2.7 **a)** On calcule le nombre de Biot : $\mathrm{Bi} = \dfrac{h\,d}{\lambda} = 3 \times 10^{-4} \ll 0{,}1$. Donc on peut supposer la température uniforme dans chaque section d'abscisse x.

b)



Le bilan thermique s'écrit :

$$\phi_e = \phi_s + \phi_{cv}$$

$$-\lambda\,S\frac{\mathrm{d}T\,(x)}{\mathrm{d}x} = -\lambda\,S\frac{\mathrm{d}T\,(x+\delta x)}{\mathrm{d}x} + h\,A\,(T - T_\infty)$$

$$\lambda\,S\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\delta x = h\,A\,(T - T_\infty)$$

$$\lambda\,\frac{\pi\,d^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}\delta x = h\,\pi\,d\,\delta x\,(T - T_\infty)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{4\,h}{d\,\lambda}\,(T - T_\infty) = 0$$

www.biblio-scientifique.net

On pose $\theta = T - T_\infty$:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}x^2} - \frac{4\,h}{d\,\lambda}\,\theta = 0$$

c) les conditions limites en A sont :
C.L.1 : $T\,(x = L) = T_A$, soit : $\theta_A = T_A - T_\infty$
C.L.2 : condition de flux nul en bout d'ailette

$$\frac{\mathrm{d}T\,(x = L)}{\mathrm{d}x} = \frac{d\theta\,(x = L)}{dx} = 0$$

d) La solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$\theta\,(x) = C_1 \exp\,(-k\,x) + C_2 \exp\,(k\,x)$$

On détermine C_1 et C_2 avec les conditions aux limites.
C.L.2 conduit à $C_1 = C_2 \exp\,(2\,k\,L)$, que l'on reporte dans C.L.1. On obtient finalement : $C_1 = (T_\mathrm{A} - T_\infty)\,\exp\left(k\,L/2\right)$, et $C_2 = (T_\mathrm{A} - T_\infty)\,\exp\left(-k\,L/2\right)$. La loi d'évolution de la température $T(x)$ en régime permanent le long de AB vérifie donc :

$$T\,(x) - T_\infty = \frac{(T_A - T_\infty)}{2}\left[\exp\,(-k\,(x - L)) + \exp\,(k\,(x - L))\right]$$

Soit encore :

$$T\,(x) - T_\infty = \frac{(T_A - T_\infty)}{2}\,\cos\mathrm{h}\,(k\,(x - L))$$

e) $T_\mathrm{B} = T(x = 0) = 217{,}7\ °\mathrm{C}$

f) Flux dissipé en $x = 0$:

$$\phi = -\lambda\,S\,\frac{\mathrm{d}T\,(x = 0)}{\mathrm{d}x} = -\lambda\frac{\pi\,d^2}{4}k\,(T_A - T_\infty)\,\sin\mathrm{h}\,(-kL) = 3\ \mathrm{W}$$

Étude de la partie chauffée BC

g) $\phi_l = \dfrac{\phi}{l} = 100\ \mathrm{W\ m^{-1}}$

h) Le bilan thermique sur un tronçon de largeur δx de la partie BC s'écrit :

$$\phi_e + \phi_\mathrm{source} = \phi_s$$

Soit :

$$-\lambda\,S\,\frac{\mathrm{d}T\,(x)}{\mathrm{d}x} + \phi_l\,\delta x = -\lambda\,S\,\frac{\mathrm{d}T\,(x + \delta x)}{\mathrm{d}x}$$

Ce qui conduit à :

$$\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2} + \frac{4\,\phi_l}{\lambda\,\pi\,d^2} = 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

i) Les conditions limites sont :

C.L.1 $$T(x = 0) = T_B$$

C.L.2 $$\text{En } x = -l, \ \frac{\mathrm{d}T\,(x = -l)}{\mathrm{d}x} = 0$$

On intègre deux fois l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{4\,\phi_l}{\lambda\,\pi\,d^2}x + C_1$$

$$T\,(x) = -\frac{4\,\phi_l}{\lambda\,\pi\,d^2}\frac{x^2}{2} + C_1\,x + C_2$$

De C.L. 1 on déduit $C_2 = T_B$

De C.L. 2 on déduit $C_1 = -\dfrac{4\,\phi_l}{\lambda\,\pi\,d^2}l$

d'où : $T\,(x) = -\dfrac{4\,\phi_l}{\lambda\,\pi\,d^2}\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{4\,\phi_l\,l}{\lambda\,\pi\,d^2}x + T_B$

j) $T_C = T(x = -l) = 222{,}5$ °C

k) Bilan thermique : $P = P_1 + P_2$, avec P puissance dissipée par la résistance, P_1 puissance servant à chauffer la partie AB, et P_2 puissance dissipée par convection. Or P est aussi la puissance générée par effet joule dans la résistance chauffante :

$$P = R\,i^2 = U^2/R$$

Si on admet qu'il n'y a pas de phénomène de conduction (les parties AB et BC ont à température uniforme à chaque instant), on a alors :

$$P_1 = m\,C_\mathrm{p}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \rho\,V\,C_\mathrm{p}\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec :} \quad V = \pi\,d^2\,L/4$$

La puissance dissipée par convection avec l'air ambiant est :

$$P_2 = h\,A\,(T\,(t) - T_\infty) \quad \text{avec} \quad A = \pi\,d\,L$$

l) On obtient donc, en posant $\theta = T - T_\infty$, l'équation différentielle suivante :

$$\frac{U^2}{R} = \rho\,C_\mathrm{p}\frac{\pi\,d^2 L}{4}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + h\,\pi\,d\,L\,\theta$$

La solution de cette équation est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière. On recherche tout d'abord la solution de l'équation sans second membre :

$$\rho\,C_\mathrm{p}\,\frac{\pi\,d^2\,L}{4}\,\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\mathrm{d}t} = -h\,\pi\,d\,L\,\theta_h$$

www.biblio-scientifique.net

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}\theta_h}{\theta_h} = -\frac{4\,h}{\rho\,C_\mathrm{p}\,d}\mathrm{d}t$$

Donc :

$$\theta_h = C_3 \exp\left(-\frac{4\,h}{\rho\,C_\mathrm{p}\,d}t\right)$$

La solution particulière correspond à $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$:

$$\theta_p = \frac{U^2}{R\,h\,\pi\,d\,L}$$

On détermine la constante C_3 avec la condition à la limite : $T\,(t = 0) = T_\infty$, soit $\theta\,(t = 0) = 0$. Donc $C_3 = -U^2/R\,h\,d\,L$ et finalement :

$$\theta = \frac{U^2}{R\,h\,\pi\,d\,L}\left[1 - \exp\left(-\frac{4\,h}{\rho\,C_\mathrm{p}\,d}t\right)\right]$$

m) En exprimant le temps à partir de l'expression précédente, on obtient :

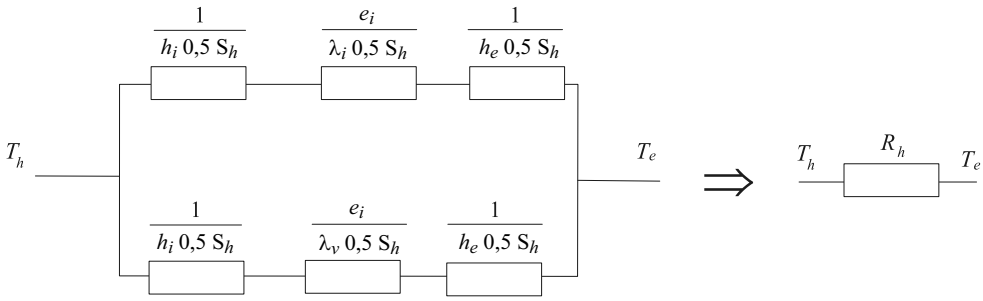
$$t_m = -\frac{\rho\,C_\mathrm{p}\,d}{4\,h}\,\ln\left(1 - \frac{(T_m - T_\infty)\,R\,h\,\pi\,d\,L}{U^2}\right)$$

A.N. : t_m = 53 secondes.

2.8 **a)** l'épaisseur de chaque paroi est très petite devant leurs surfaces. On pourra donc considérer le transfert de chaleur unidirectionnel dans chaque paroi.

b) La couche d'acier est de petite épaisseur et d'autre part sa conductivité est grande devant celle de l'isolant. On pourra donc négliger sa résistance thermique dans le calcul de la résistance des parois composites.

c) Le schéma équivalent pour le transfert entre habitacle et extérieur est la suivant :



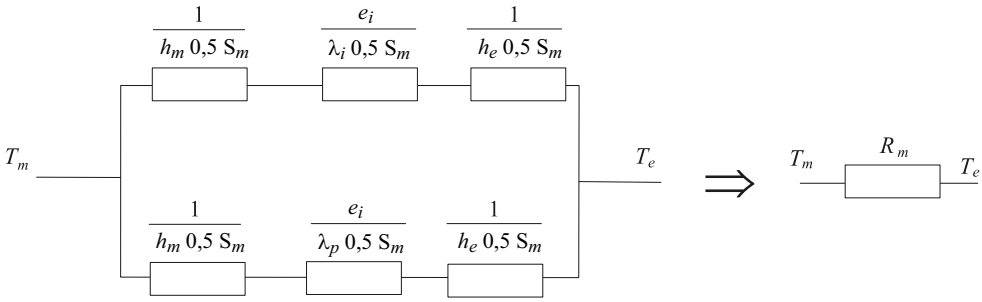
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

La résistance équivalente est :

$$R_h = \left[\frac{1}{\dfrac{1}{h_i\, 0{,}5\, S_h} + \dfrac{e_i}{\lambda_i\, 0{,}5\, S_h} + \dfrac{1}{h_e\, 0{,}5\, S_h}} + \frac{1}{\dfrac{1}{h_i\, 0{,}5\, S_h} + \dfrac{e_v}{\lambda_v\, 0{,}5\, S_h} + \dfrac{1}{h_e\, 0{,}5\, S_h}} \right]^{-1}$$

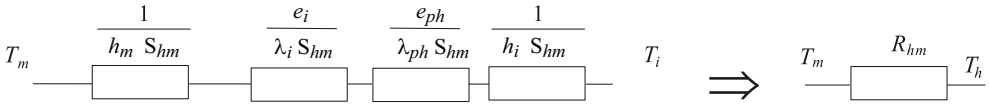
d) Le schéma équivalent pour le transfert entre compartiment moteur et extérieur est le suivant :



La résistance équivalente est :

$$R_m = \left[\frac{1}{\dfrac{1}{h_m\, 0{,}5\, S_m} + \dfrac{e_i}{\lambda_i\, 0{,}5\, S_m} + \dfrac{1}{h_e\, 0{,}5\, S_m}} + \frac{1}{\dfrac{1}{h_m\, 0{,}5\, S_m} + \dfrac{e_p}{\lambda_p\, 0{,}5\, S_m} + \dfrac{1}{h_e\, 0{,}5\, S_m}} \right]^{-1}$$

e) Le schéma équivalent pour le transfert entre compartiment moteur et extérieur est la suivant :



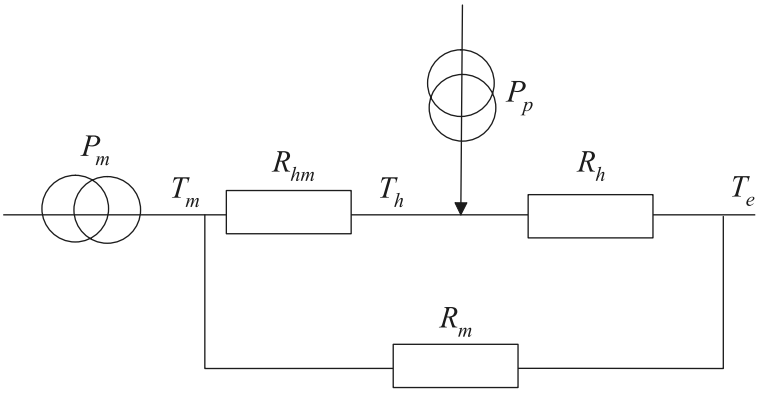
La résistance équivalente est :

$$R_{hm} = \frac{1}{h_m\, S_{hm}} + \frac{e_i}{\lambda_i\, S_{hm}} + \frac{e_{ph}}{\lambda_{ph}\, S_{hm}} + \frac{1}{h_i\, S_{hm}}$$

f) En compilant l'ensemble des précédents résultats et en prenant en compte les termes sources de chaleur dans l'habitacle et le compartiment moteur on obtient

www.biblio-scientifique.net

le schéma équivalent pour le véhicule dans son ensemble :



g) À partir du schéma précédent on déduit les relations suivantes :

$$T_h - T_e = R_h\,\phi_1$$

$$T_h - T_m = R_{hm}\,\phi_2$$

$$T_m - T_e = R_m\,\phi_3$$

$$P_P = \phi_1 + \phi_2$$

$$P_m = \phi_3 - \phi_2$$

On en déduit :

$$\begin{cases} A_1\,T_h - B\,T_m = P_p + \dfrac{T_e}{R_h} \\ -B\,T_h + A_2\,T_m = P_m + \dfrac{T_e}{R_m} \end{cases}$$

Avec :

$$A_1 = \frac{1}{R_{hm}} + \frac{1}{R_h}$$

$$A_2 = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_{hm}}$$

$$B = \frac{1}{R_{hm}}$$

On obtient ainsi l'expression de la température de l'habitacle sous la forme :

$$T_h = \frac{1}{A_1\,A_2 - B^2}\left(P_p\,A_2 + \frac{T_e\,A_2}{R_h} + P_m\,B + \frac{T_e\,B}{R_m}\right)$$

A.N. : R_h = 0,016 K W^{-1}, R_m = 0,023 K W^{-1}, R_{hm} = 0,18 K W^{-1}, T_h = 40,1 °C

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

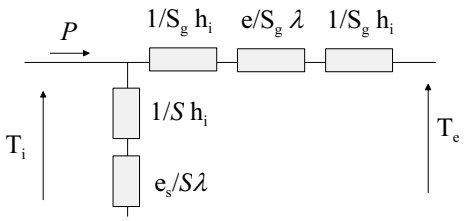
www.biblio-scientifique.net

h) On en déduit donc la puissance nécessaire pour la climatisation :

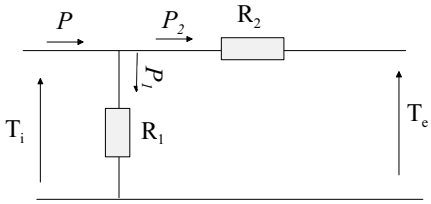
$$P_c + P_h = \phi_1 + \phi_2$$

A.N. : P_c = 1 004 W.

2.9 **a)** Si on admet que le transfert de chaleur dans la paroi de l'igloo est unidirectionnel et qu'il en est de même pour le transfert de chaleur dans le sol alors le schéma équivalent est le suivant :



Soit encore :



Avec :

$$R_1 = \frac{1}{h_i\, S} + \frac{e_s}{\lambda\, S}$$

et,

$$R_2 = \frac{1}{h_i\, S_g} + \frac{e}{\lambda\, S_g} + \frac{1}{h_e\, S_g}$$

b) On en déduit que :

$$T_i = T_e + R_2\, P_2 = T_e + R_2\, (P - P_1)$$

Comme :

$$P_1 = \frac{T_i}{R_1}$$

On a :

$$T_i = \frac{T_e + R_2\, P}{1 + \dfrac{R_2}{R_1}}$$

www.biblio-scientifique.net

2.10 **a)** On a :

$$\phi_A = \phi_{convA} = \phi_{condA},$$

avec $\phi_{convA} = h\,S\,(T_{PA} - T_0)$ et $\phi_{condA} = \lambda_A S \dfrac{(T_S - T_{PA})}{e_A}$, avec $S = L\,l$ et T_{PA} est la température externe de substrat. On obtient alors :

$$\phi_A = \left[\frac{1}{\dfrac{e_A}{\lambda_A} + \dfrac{1}{h}}\right] S\,(T_S - T_0)$$

b) De la même façon $\phi_B = \phi_{convB} = \phi_{condB}$, avec : $\phi_{convB} = hS\,(T_{PB} - T_0)$, et $\phi_{condB} = \lambda_B S \dfrac{(T_S - T_{PB})}{e_B}$. Donc :

$$\phi_B = \left[\frac{1}{\dfrac{e_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{h}}\right] S\,(T_S - T_0)$$

c) Le flux dégagé du composant est égal à la somme des deux flux (A et B)

$$\phi_s = \phi_A + \phi_B$$

$$\phi_s = L\,l\,(T_S - T_0) \underbrace{\left[\frac{1}{\dfrac{e_B}{\lambda_B} + \dfrac{1}{h}} + \frac{1}{\dfrac{e_A}{\lambda_A} + \dfrac{1}{h}}\right]}_{K} \quad \text{donc :} \quad T_S = \frac{\phi_s}{K\,L\,l} + T_0$$

AN : T_S = 188 °C, la température est supérieure à la température conseillée dans des conditions de fonctionnement continu. Le composant risque d'être détruit.

d) Le bilan thermique sur un tronçon d'ailette est : $\sum \phi = 0$

On a donc :

$$-\lambda_B\,s\,\frac{\mathrm{d}T\,(x)}{\mathrm{d}x} - \lambda_B\,s\,\frac{\mathrm{d}T\,(x + \delta x)}{\mathrm{d}x} + 2\,\delta x\,L\,h\,(T - T_0) = 0$$

$-\lambda_B \dfrac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2}\delta x\,2\,e\,L + 2\,\delta x\,L\,h\,(T - T_0) = 0$, on obtient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} - \frac{h}{\lambda_B\,e}\,(T - T_0) = 0.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

e) On écrit l'équation précédente avec :

$$\theta = T(x) - T_0, \text{ et } k^2 = \frac{h}{\lambda_B e}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - k^2\,\theta = 0$$

f) La solution générale de cette équation est :

$$\theta(x) = A\exp(-k\,x) + B\exp(k\,x)$$

Conditions aux limites sont les suivantes :

$$x = 0 \qquad T(0) = T_{PB} \qquad \theta_0 = T_{PB} - T_0$$

$$x = b \qquad \frac{dT(x=b)}{dx} = 0 \qquad \frac{d\theta(x=b)}{dx} = 0$$

On a donc :

$$\theta(0) = A\exp(0) + B\exp(0) = T_{PB} - T_0$$

$$\frac{d\theta(x=b)}{dx} = -k\,A\exp(-kb) + k\,B\exp(kb) = 0$$

donc : $A = B\exp(2k\,b)$, et $B\exp(2k\,b) + B\exp(0) = T_{PB} - T_0$

$$B = \frac{T_{PB} - T_0}{(\exp(2k\,b) + 1)} \qquad A = \frac{T_{PB} - T_0}{(\exp(-2k\,b) + 1)}$$

$$\theta(x) = (T_{PB} - T_0)\left(\frac{\exp(-k\,x)}{1 + \exp(-2k\,b)} + \frac{\exp(k\,x)}{1 + \exp(2\,k\,b)}\right) \qquad T(x) = \theta(x) + T_0$$

Si l'ailette est supposée infinie on a une nouvelle CL : $T(x) = T_0$ pour $x \to \infty$
Donc :

$$T(x) = A\exp(-k\,x) + B\exp(k\,x) + T_0$$

Quand $x \to \infty$: $\exp(-k\,x) \to 0$ et $\exp(k\,x) \to \infty$ donc $B = 0$ pour que la solution soit convergente.

$$T(x) = A\exp(-k\,x) + T_0$$

$$x = 0 \qquad T(0) = T_{PB} \qquad \text{donc} \qquad A = T_{PB} - T_0$$

d'où la solution est :

$$T(x) = (T_{PB} - T_0)\exp(-k\,x) + T_0$$

www.biblio-scientifique.net

g) On calcule le flux dissipé par l'ailette en $x = 0$:

$$\phi_{ailette} = -\lambda_B\, s \frac{dT\,(x=0)}{dx} = -\lambda_B 2\, e\, L \left[-\left(T_{PB} - T_0\right) k \exp\left(-k\, x\right)\right]\Big|_{x=0}$$

$$\phi_{ailette} = \lambda_B 2\, e\, L\, (T_{PB} - T_0)\, k$$

h) ϕ_B est égal au flux dissipé par la surface externe de la plaquette métallique :

$$\phi_B = n\, k\, \lambda_B\, 2\, e\, L\, (T_{PB} - T_0) + h\, L\, (l - n\, 2\, e)\, (T_{PB} - T_0)$$

$$\phi_B = [n\, k\, \lambda_B\, 2\, e\, L + h\, L\, (l - n\, 2\, e)]\, (T_{PB} - T_0) = \phi_{convB'}$$

En reprenant le calcul de la question b), on remplace ϕ_{convB} par la nouvelle expression $\phi_{convB'}$.

$$\phi_B = \frac{L\, l\, (T_S - T_0)}{\dfrac{e_B}{\lambda_B} + \left(n\, k\, \lambda_B \dfrac{2\, e}{l} + h\left(1 - \dfrac{2\, n\, e}{l}\right)\right)^{-1}}$$

i) On a toujours $\phi_s = \phi_A + \phi_B$ donc :

$$\phi_s = L\, l\, (T_S - T_0) \underbrace{\left[\left(\left(n\, k\, \lambda_B \frac{2\, e}{l} + h\left(1 - \frac{2\, n\, e}{l}\right)\right)^{-1} + \frac{e_B}{\lambda_B}\right)^{-1} + \left(\frac{e_A}{\lambda_A} + \frac{1}{h}\right)^{-1}\right]}_{C}$$

donc :

$$T_S = \frac{\phi_s}{C\, L\, l} + T_0$$

j) A.N. : $T_S = 31{,}5\ ^\circ\mathrm{C}$.

www.biblio-scientifique.net

www.biblio-scientifique.net

TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION

3

PLAN

3.1 Introduction
3.2 Couches limites en transfert par convection
3.3 Bilans de masse, de quantité de mouvement et de chaleur dans la couche limite
3.4 Analyse Dimensionnelle — Principe de la méthode
3.5 Convection Forcée
3.6 Convection naturelle
3.7 Méthodologie pour le calcul de transferts par convection en utilisant les corrélations expérimentales
3.8 Convection avec changement de phase
3.9 Références
Exercices
Solutions des exercices

OBJECTIFS

- Acquérir les notions fondamentales pour le phénomène de convection thermique
- Pouvoir repérer le mode de transfert de chaleur par convection
- Savoir effectuer une analyse dimensionnelle
- Déterminer le coefficient d'échange par convection à partir de corrélations expérimentales

3.1 INTRODUCTION

Jusqu'à maintenant nous avons considéré les échanges convectifs seulement comme une condition aux limites pour traiter les problèmes de conduction de la chaleur. Le terme « convection » est utilisé pour décrire le transfert d'énergie entre une surface solide et un fluide en mouvement par rapport à cette surface. Pour ce transfert, le transport d'énergie par conduction a toujours lieu, néanmoins le mode dominant est celui dû aux **mouvements de particules fluides.**

L'objectif de cette partie du cours est double. Le premier est de présenter au lecteur le mécanisme physique à la base duquel repose le transfert par convection, le second

www.biblio-scientifique.net

est d'apporter une méthodologie pour traiter des problèmes de convection rencontrés en pratique.

Parmi les problèmes de convection on distingue :

- la convection forcée, quand le mouvement du fluide est créé par une différence de pression (pompe, soufflerie).

> ***Exemple de convection forcée :*** un sèche-cheveux dans lequel l'air ambiant est soufflé par un ventilateur au travers d'une résistance chauffante électrique.

- la convection naturelle (ou libre), provoquée par les forces massiques dans le fluide dues aux différences de température et donc de masse volumique du fluide.

> ***Exemple de convection naturelle :*** le chauffage d'une pièce par un convecteur électrique se fait par une ascension d'air chaud le long du mur, tandis que l'air plus frais descend et est « aspiré » vers le convecteur pour remplacer l'air chaud le quittant.

- la convection accompagnée d'un changement de phase (évaporation ou condensation).

> ***Exemple de convection avec changement de phase :*** au début du chauffage d'une quantité d'eau dans une bouilloire, la convection naturelle gouverne le processus d'échange entre la paroi et l'eau. Quand l'eau boue, l'évaporation intensifie le transfert.

3.1.1 Modélisation du transfert de chaleur par convection

Considérons l'écoulement présenté à la figure 3.1 a). Un fluide possédant une vitesse u_{inf} et une température T_{inf} passe sur la surface d'un milieu solide de forme arbitraire et de surface A_s. La surface du milieu est à une température uniforme T_s et les deux températures T_{inf} et T_s sont différentes. Cette différence provoque le transfert de la chaleur entre le solide et le fluide. **La densité de flux local échangé** s'exprime sous la forme :

$$\varphi' = h\,(T_s - T_{\text{inf}}) \tag{3.1}$$

Dans cette expression h représente **le coefficient local d'échange convectif**. Parce que les conditions d'écoulement peuvent varier d'un point à l'autre, le coefficient et le flux échangés peuvent aussi varier. La densité de flux total échangé sera alors obtenu par intégration du flux local sur toute la surface entre le fluide et le solide :

$$\varphi = \int_{A_s} \varphi' \mathrm{d}A_s = (T_s - T_{\text{inf}}) \int_{A_s} h \mathrm{d}A_s \tag{3.2}$$

Nous définissons **le coefficient d'échange convectif moyen** pour toute la surface qui permet d'exprimer le flux total échangé sous la forme :

$$\phi = \overline{h}\, A_s\,(T_s - T_{\text{inf}}) \tag{3.3}$$

www.biblio-scientifique.net

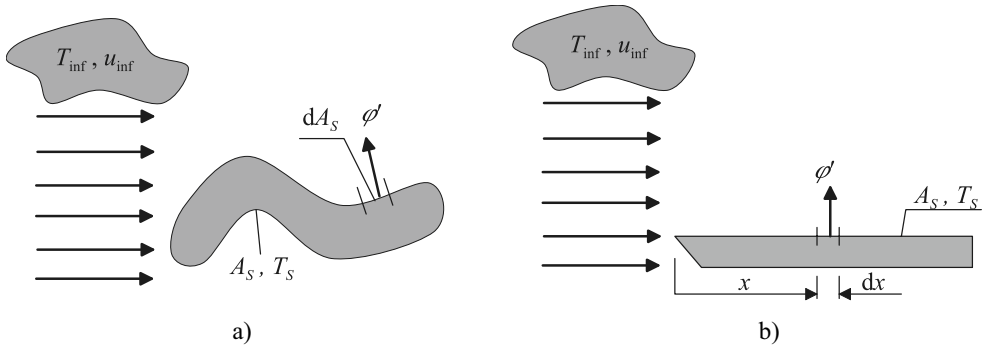


Figure 3.1 **Transfert de chaleur par convection ; a) sur une surface quelconque, b) sur une surface plane**

Cette expression est appelée la loi de Newton. Ce dernier ne l'a pas formulé explicitement mais il considérait dès le début que l'échange par convection était proportionnel à l'écart de température :

$$\frac{dT_s}{dt} \propto (T_s - T_{inf}) \tag{3.4}$$

Nous définissons le coefficient d'échange moyen :

$$\overline{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h \, dA_s \tag{3.5}$$

Ainsi, si nous considérons par exemple une plaque plane (voir figure 3.1 b)), le coefficient local varie avec la distance et le coefficient moyen est alors :

$$\overline{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h \, dx \tag{3.6}$$

Les ordres de grandeur du coefficient de convection moyen (en $Wm^{-2}K^{-1}$) pour différentes configurations sont présentés dans le tableau 3.1 :

Tableau 3.1 **Exemple de valeurs de coefficient d'échange convectif**

Fluide	Convection naturelle	Convection forcée
Gaz	5-30	30-500
Eau	30-300	300-2 × 10^4
Huile	5-100	30-3 × 10^3
Métal liquide	50-500	500-2 × 10^4
Eau bouillante	2 × 10^3-2 × 10^4	3 × 10^3-10^5
Condensation de vapeur d'eau	3 × 10^3-3 × 10^4	3 × 10^3-2 × 10^5

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Les flux local et total sont fondamentaux pour le problème de convection. Ils peuvent être déterminés à partir des relations données précédemment. Néanmoins, la simplicité de ces relations n'est qu'apparente. En effet, on ne peut calculer le flux que si l'on connaît le coefficient d'échange, local ou moyen. Or, ces coefficients dépendent de nombreuses variables telles que : les propriétés thermophysiques du fluide en écoulement (masse volumique, chaleur spécifique, viscosité, conductivité thermique), la géométrie de l'écoulement et la dynamique de l'écoulement. De plus, les propriétés du fluide dépendent de la température et de la pression au sein de l'écoulement. Pour cela, la détermination des coefficients d'échange est considérée comme un problème de convection thermique directement lié à la formulation d'un problème de mécanique des fluides. En d'autres termes la convection de la chaleur est totalement couplée au transfert de masse dans un écoulement. L'influence de nombreuses variables sur le coefficient d'échange vient du fait que le phénomène de convection thermique se développe à la surface solide dans une couche fluide d'épaisseur très petite, appelée **la couche limite.**

Exemple : Calcul du coefficient d'échange moyen à partir du flux

La densité de flux de chaleur φ s'élève à 5 000 W · m^{-2}, à la surface d'un élément chauffant électrique. La température de ce même élément est de 110 °C lorsqu'il est refroidi par convection forcée dans l'air dont la température s'élève à 60 °C. Quel est le coefficient d'échange moyen $\overline{h}$? Quelle sera la température de l'élément chauffant si la densité de flux est réduite à 2 000 W · m^{-2} ?

Solution : en utilisant l'expression de la densité du flux total échangé on peut déterminer le coefficient d'échange moyen :

$$\overline{h} = \frac{\varphi}{\Delta T} = \frac{5\,000}{110 - 60} = 100 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$$

Si le flux est réduit, le coefficient en convection forcée reste le même, la différence de température sera donc :

$$\Delta T = T_{élément} - 60 = \frac{\varphi}{\overline{h}} = \frac{2\,000}{100} = 20 \text{ °C}$$

donc la température $T_{élément} = \Delta T + 60 = 20 + 60 = 80$ °C.

3.2 Couches limites en transfert par convection

Les solutions théoriques des problèmes d'échange de chaleur par convection sont basées sur la théorie de couche limite. Le terme « couche limite » a été introduit en 1904 par Ludwig Prandtl.

www.biblio-scientifique.net

ENCART 3.1 Ludwig Prandtl

Né en 1875 à Freising, décédé en 1953 à Göttingen, Allemagne. Après ses études de doctorat à l'Université de Munich il a intégré l'Institut de Mécanique des Fluides à l'Université de Göttingen. Il travaille essentiellement sur le phénomène de couche limite. Ses travaux en mécanique des fluides et aérodynamique ont donné les bases pour les analyses de convection de la chaleur.

3.2.1 Couche limite hydrodynamique

Pour introduire le concept de couche limite hydrodynamique on considère l'écoulement sur une plaque plane comme représenté à la figure 3.2. Les particules fluides en contact avec la surface ont une vitesse nulle. Ces particules freinent les particules voisines dans les couches supérieures et cela sur une épaisseur δ, jusqu'à ce que cet effet de freinage devienne négligeable. Ce retard est accompagné de contraintes de cisaillement τ intervenant dans les plans parallèles à la vitesse du fluide. En augmentant la distance à la surface, la vitesse u du fluide tend vers la vitesse u_{inf}.

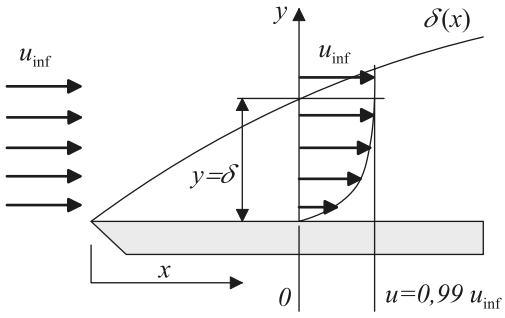


Figure 3.2 **Développement de couche limite hydrodynamique sur une surface plane**

La quantité δ est appelée l'épaisseur de **la couche limite hydrodynamique.** Elle est définie comme la distance à la surface correspondante à la vitesse $u = 0{,}99\, u_{\text{inf}}$. De cette manière, la couche limite sépare deux domaines distincts. Dans le premier, le gradient de vitesses et les contraintes de cisaillement sont importants alors qu'ils sont négligeables dans le second. La couche limite hydrodynamique se développe quel que soit l'écoulement et a une importance fondamentale pour le transfert par convection.

Elle est directement liée aux contraintes de cisaillement à la surface τ_s et donc aux effets de frottement. L'épaisseur de la couche limite augmente avec la distance x.

Pour un écoulement externe, elle fournit une base à l'évaluation du coefficient de frottement local :

$$C_f \equiv \frac{2\,\tau_s}{\rho\, u_{\text{inf}}^2} \tag{3.7}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Ce paramètre clé permet de déterminer la force de traînée. Pour un fluide Newtonien (visqueux), le cisaillement à la surface peut être évalué à partir du gradient de vitesse à cette même surface :

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{3.8}$$

Où μ est la propriété du fluide appelée viscosité dynamique.

3.2.2 Couche limite thermique

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la couche limite hydrodynamique se développe pour tout l'écoulement. Cependant, la couche limite thermique ne se développera que si la température du fluide et celle de la surface sont différentes.

Considérons l'écoulement représenté sur la figure 3.3. Le fluide arrive à une température T_{inf} sur une plaque horizontale. Les particules fluides en contact avec la surface de la plaque sont à la température de cette surface. Ces particules échangent de l'énergie avec les particules voisines, ce qui donne naissance à un gradient de température dans le fluide. Le domaine où ce gradient se développe est appelé la couche limite thermique et son épaisseur δ_t est définie comme la distance pour laquelle le rapport $(T - T_{\text{inf}}) / (T_s - T_{\text{inf}}) = 0{,}99$. Comme pour la couche limite hydrodynamique, l'épaisseur de la couche limite thermique augmente avec la distance x.

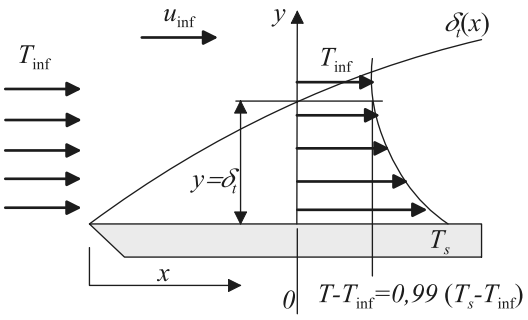


Figure 3.3 **Développement de la couche limite thermique sur une surface plane**

La densité de flux dans le fluide à la surface ($y = 0$) s'exprime à partir de la loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda_f \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0} \tag{3.9}$$

Cette chaleur est ensuite transportée par convection dans le fluide et la densité de flux s'exprime donc aussi selon la loi générale de Newton :

$$\varphi = h\,(T_s - T_{\text{inf}}) \tag{3.10}$$

www.biblio-scientifique.net

Ceci permet de mettre en évidence la relation entre le coefficient d'échange thermique par convection h et le gradient de température dans le fluide à la paroi :

$$h = \frac{-\lambda_f \left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0}}{(T_s - T_{\text{inf}})} \tag{3.11}$$

Le gradient de température à la surface conditionne donc le transfert au travers de la couche limite.

Signification des couches limites

La couche limite hydrodynamique est caractérisée par la présence de gradients de vitesses et de contraintes de cisaillement.

La couche limite thermique est caractérisée par la présence de gradients de température.

Le paramètre clé pour la couche hydrodynamique est le coefficient de frottement.

Le paramètre clé pour la couche limite thermique est le coefficient d'échange thermique par convection.

3.2.3 Écoulement laminaire et turbulent

Pour traiter un problème de convection il est important de déterminer le régime d'écoulement du fluide : est-il laminaire ou turbulent ? Le coefficient d'échange convectif dépend fortement du régime d'écoulement. La transition entre les régimes d'écoulement a été démontrée par Osborne Reynolds. Son expérience avec de l'ancre, jouant le rôle de traceur (les particules d'encre suivent l'écoulement du fluide sans trop le perturber), injectée dans un écoulement stationnaire d'eau est représentée schématiquement à la figure 3.4. On peut voir qu'au départ toutes les lignes de courant (lignes tangentes au vecteur vitesse) dans l'écoulement restent équidistantes. À partir d'une certaine distance, appelée critique, les lignes de courant se croisent et le traceur commence à se mélanger avec l'eau. C'est la région de transition qui évolue ensuite vers le régime turbulent.

ENCART 3.2 Osborne REYNOLDS

Osborne Reynolds (né en Irlande à Belfast en 1842, décédé en 1912 à Watchet en Angleterre) était un ingénieur irlandais qui apporta une grande contribution dans le domaine de l'hydrodynamique et de la dynamique des fluides à la fin du XIXe siècle. Il enseignait à l'Université de Manchester. Son expérience originale sur la transition d'écoulement entre laminaire et turbulent était utilisée comme Travaux Pratiques jusque dans les années soixante-dix dans cette même université. On lui doit la définition du nombre de Reynolds.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

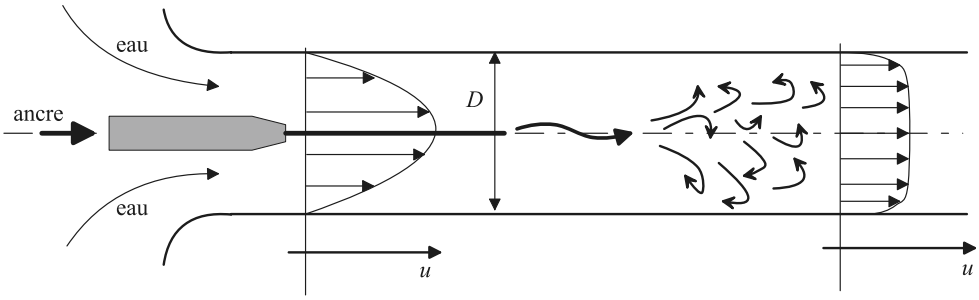


Figure 3.4 **Expérience de Osborne Reynolds sur la transition entre le régime laminaire et turbulent d'écoulement dans un tube de diamètre *D***

Un exemple de développement de la couche limite sur une plaque plane est donné à la figure 3.5.

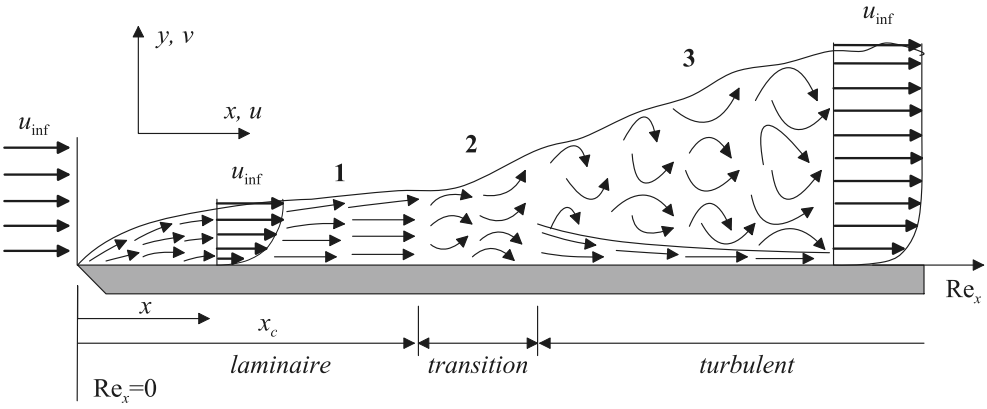


Figure 3.5 **Développement de couche limite sur une longue surface plane**
Trois régimes d'écoulement sont visibles : laminaire (1), transition (2) et turbulent (3). Une sous-couche laminaire se forme en dessous de couche turbulente.

La couche limite est initialement laminaire mais, à partir d'une certaine distance, de petites fluctuations commencent à apparaître et sont amplifiées. C'est la région de transition qui est suivie du régime complètement turbulent, caractérisé par les mouvements du fluide dans les trois dimensions d'espace. Dans la couche laminaire l'écoulement est ordonné et il est possible d'identifier des lignes de courant suivant lesquelles les particules fluides se déplacent. Les composantes de vitesse suivant x et y peuvent être définies. La composante selon y va contribuer au transfert de la quantité de mouvement et de l'énergie au travers de la couche limite. Le mouvement de fluide dans la couche limite turbulente est très irrégulier et se caractérise par des fluctuations locales de vitesse. Ces fluctuations augmentent le transfert de la quantité de mouvement et de l'énergie, ce qui conduit à l'augmentation du coefficient d'échange. Le profil de vitesse et de température est continu dans la couche laminaire.

www.biblio-scientifique.net

La couche limite turbulente est plus épaisse que la couche laminaire à cause des fluctuations de vitesse.

Dans la couche limite turbulente, des sous-couches peuvent être distinguées. La première est assimilée à une sous-couche laminaire, la seconde à une sous-couche de transition et finalement la dernière à une sous-couche de turbulence.

Pour prédire le régime d'écoulement il est tout d'abord utile de déterminer la distance critique pour laquelle le régime de transition intervient. Pour cela un nombre sans dimension, appelé nombre de Reynolds local, est défini :

$$\mathrm{Re}_x = \frac{\rho\, u_{\mathrm{inf}}\, x}{\mu} \tag{3.12}$$

Dans ce nombre, x représente la distance au bord d'attaque.

Pour un écoulement le long d'une plaque plane la valeur critique de Re_x varie entre 10^5et 3×10^6 en fonction de la rugosité de la surface et la turbulence, néanmoins en général la valeur 5×10^5 est utilisée.

Pour un écoulement dans un tube cylindrique (expérience de Reynolds), le régime laminaire existe pour $\mathrm{Re}_x < 2\,100$. Le régime turbulent est établi pour $\mathrm{Re}_x > 10^4$. Entre les deux valeurs critiques on a le régime de transition.

3.3 Bilans de masse, de quantité de mouvement et de chaleur dans la couche limite

Pour mieux comprendre la physique sous-jacente au phénomène de convection, nous allons maintenant introduire d'une manière simple les trois bilans qui sont à la base de la modélisation des phénomènes dans la couche limite. Le lecteur désireux de rentrer dans les détails mathématiques plus poussés pourra se référer à un manuel complet de mécanique des fluides. L'objectif est ici d'établir l'équation pour la température et donc nous supposons implicitement que le champ de vitesse est connu. C'est pour cette raison que nous ne développerons pas les équations pour la mécanique des fluides, soit donc les deux premières lois de conservation (masse et quantité de mouvement). Nous insisterons par contre sur le bilan thermique prenant en compte les phénomènes de conduction et de convection dans le fluide.

On considère la couche limite (hydrodynamique et thermique) comme représenté à la figure 3.6. C'est un cas simplifié, car l'écoulement présenté ici est seulement bi-dimensionnel. Les équations susmentionnées sont développées à partir des bilans sur un élément A de taille infinitésimale ($\delta x \times \delta y$).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

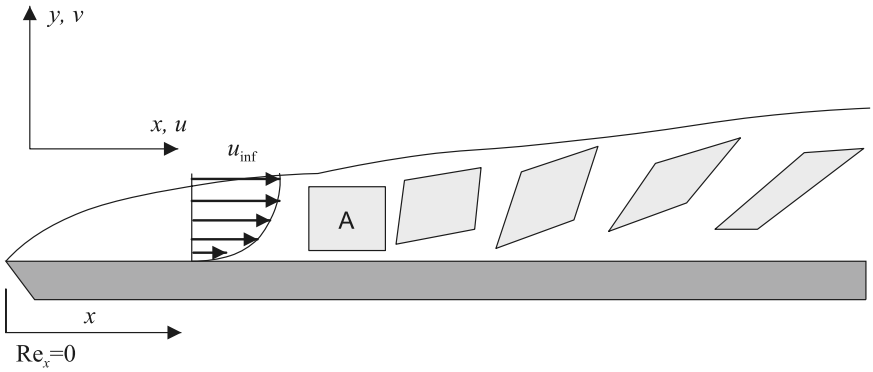


Figure 3.6 **Couche limite et élément infinitésimal pour l'écriture des bilans de masse, de quantités de mouvement et de l'énergie. Cet élément se déforme dans l'écoulement mais sa masse reste constante.**

3.3.1 Bilan de masse

La figure 3.7 représente à nouveau l'élément infinitésimal A sur lequel nous avons reporté les débits de matière entrant et sortant de l'élément. Le mouvement du fluide est caractérisé par la vitesse u suivant la direction x et la vitesse v suivant la direction y. La conservation de la masse consiste à écrire que de la matière ne peut être ni crée ni détruite dans l'élément A au cours du temps. Ainsi, nous devons avoir égalité entre le débit masse entrant et le débit masse sortant pour les deux directions de l'écoulement, soit :

$$\dot{m}_x(x) = \dot{m}_x(x + \delta x) \tag{3.13}$$

Et :

$$\dot{m}_y(y) = \dot{m}_y(y + \delta y) \tag{3.14}$$

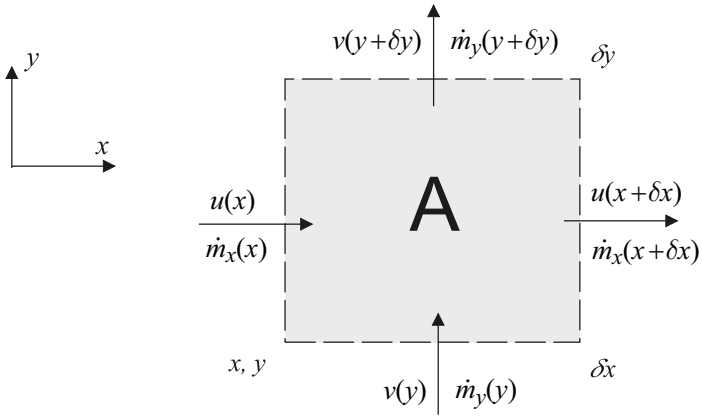


Figure 3.7 **Bilan de masse pour l'élément A**

www.biblio-scientifique.net

Sachant que le débit masse s'exprime en fonction de la vitesse du fluide, on obtient alors une première relation vectorielle pour la vitesse.

3.3.2 Bilan de quantité mouvement

L'équation de bilan de quantité de mouvement consiste à appliquer le principe fondamental de la dynamique sur l'élément A. On écrit donc que la variation de quantité de mouvement est égale à la somme des efforts exercés sur A.

On distingue deux types de forces agissant sur l'élément étudié :

- Forces de gravité agissant au centre de masse de A ;
- Forces exercées par le fluide environnant A sur la surface de A. On distingue les forces de pression $-p\,\delta S\,\vec{n}$ (p est la pression, δS l'élément de surface et $\vec{n}$ la normale sortant à δS) et les forces visqueuses $\vec{T}\,\delta S$ qui ne dépendent que de la nature du fluide.

Une représentation schématique du bilan est donnée à la figure 3.8 (on appelle δS_x et δS_x les surfaces de A dans chacune des directions x et y).

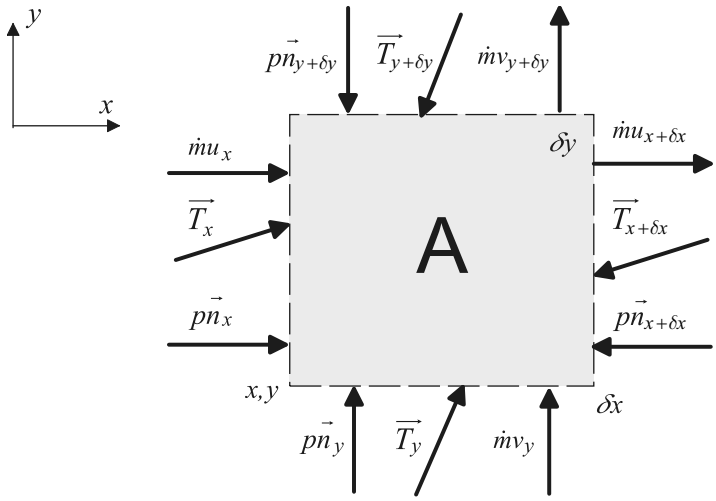


Figure 3.8 **Représentation des contraintes sur A pour l'établissement du bilan de quantité de mouvement**

On a donc pour chaque direction les relations suivantes :

$$(\dot{m}\,u)_{x+\delta x} - (\dot{m}\,u)_x = \left(-p\,\vec{n} + \vec{T}\right)_{x+\delta x} \cdot \vec{x}\,\delta S_x - \left(-p\,\vec{n} + \vec{T}\right)_x \cdot \vec{x}\,\delta S_x \tag{3.15}$$

Et :

$$(\dot{m}\,v)_{y+\delta y} - (\dot{m}\,v)_y = \left(-p\,\vec{n} + \vec{T}\right)_{y+\delta y} \cdot \vec{y}\,\delta S_y - \left(-p\,\vec{n} + \vec{T}\right)_y \cdot \vec{y}\,\delta S_y \tag{3.16}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Ces deux relations associées à celle obtenue pour le bilan de masse donnent les valeurs de la vitesse dans chaque direction de l'écoulement.

3.3.3 Bilan thermique

Le bilan thermique que nous allons écrire ici est comparable à celui que nous avions développé au chapitre précédent pour la conduction. La méthode consiste donc à écrire que la variation d'énergie interne de A par rapport au temps est égale à la somme des flux entrant dans A par conduction (indice « cond ») et convection (indice « conv »), ces flux étant comptés positivement, et les mêmes flux sortant de A comptés négativement. On peut aussi prendre en compte un éventuel terme source de chaleur φ (en W) dans A. En nous basant sur la représentation de la figure 3.9, nous avons alors :

$$\begin{aligned}\rho\, C_p\, \delta V\, \frac{\partial T}{\partial t} &= \phi_{cond,x} - \phi_{cond,x+\delta x} + \phi_{cond,y} - \phi_{cond,y+\delta y} \\ &+\phi_{conv,x} - \phi_{conv,x+\delta x} + \phi_{conv,y} - \phi_{conv,y+\delta y} + Q\end{aligned} \tag{3.17}$$

Les différents flux sont :

$$\phi_{cond,x} = -\lambda_f\, \delta S_x\, \frac{\partial T\,(x)}{\partial x} \tag{3.18}$$

$$\phi_{cond,x+\delta x} = -\lambda_f\, \delta S_x\, \frac{\partial T\,(x+\delta x)}{\partial x} \tag{3.19}$$

$$\phi_{conv,x} = \dot{m}\, C_p\, (T\,(x) - T_0) \tag{3.20}$$

$$\phi_{conv,x+\delta x} = \dot{m}\, C_p\, (T\,(x+\delta x) - T_0) \tag{3.21}$$

Pour les flux convectifs T_0 désigne une température de référence (en $x = 0$ par exemple) et $\dot{m}_x = \rho\, u_x\, \delta S_x$ est le débit masse entrant dans A selon la direction x. Les relations pour la direction y sont du même type. En remplaçant les expressions des flux dans la relation 3.17 de bilan, on obtient :

$$\begin{aligned}&\rho\, C_p\, \delta V\, \frac{\partial T}{\partial t} = \\ &-\lambda_f\, \delta S_x \left[\frac{\partial T\,(x)}{\partial x} - \frac{\partial T\,(x+\delta x)}{\partial x}\right] - \lambda_f\, \delta S_y \left[\frac{\partial T\,(y)}{\partial y} - \frac{\partial T\,(y+\delta y)}{\partial y}\right] \\ &-\rho\, C_p\, \delta S_x\, (u_{x+\delta x}\, T\,(x+\delta x) - u_x\, T\,(x)) + Q\end{aligned} \tag{3.22}$$

En utilisant la définition de la dérivée ceci conduit à l'expression équivalente :

$$\rho\, C_p\, \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_f \left(\frac{\partial^2 T\,(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T\,(y)}{\partial y^2}\right) - \rho\, C_p\, u\, \frac{\partial T\,(x)}{\partial x} - \rho\, C_p\, v\, \frac{\partial T\,(y)}{\partial y} + \dot{Q} \quad \left[\mathrm{W\,m^{-3}}\right] \tag{3.23}$$

www.biblio-scientifique.net

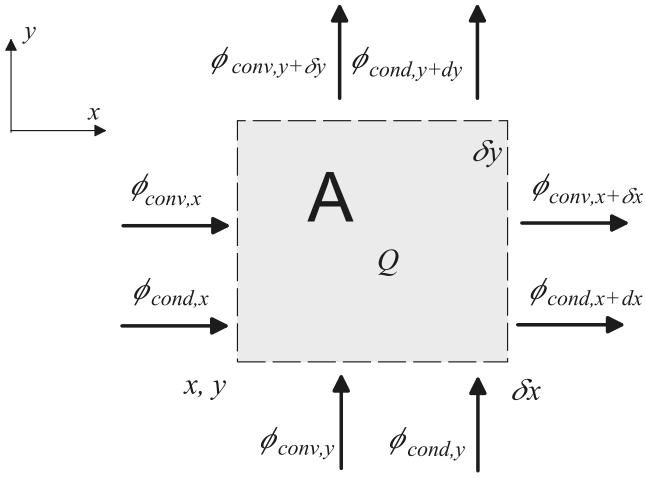


Figure 3.9 **Bilan thermique sur l'élément fluide A faisant explicitement apparaître les flux par conduction et convection entrant et sortant de A**

Cette relation se généralise dans l'espace à 3 dimensions :

$$\rho\, C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u}.\vec{\nabla} T \right) = \lambda_f\, \Delta T + \dot{Q} \tag{3.24}$$

Nous venons de présenter les trois bilans (masse, quantité de mouvement et chaleur) à la base de la modélisation des phénomènes thermiques dans la couche limite. Contrairement au phénomène de conduction, la modélisation du phénomène de convection nécessite la résolution d'un problème mécanique pour la détermination du champ de vitesses.

Les solutions de ces relations aux dérivées partielles sont basées sur les conditions aux limites associées tant sur le champ de vitesse que sur la température aux frontières du domaine étudié.

Connaissant les vitesses, il est possible de déterminer le paramètre relatif à la couche limite hydrodynamique : le coefficient de frottement et la traînée à l'interface solide - fluide. Le champ de températures permet lui de déterminer le coefficient d'échange thermique convectif (relation 3.11)

3.4 Analyse Dimensionnelle — Principe de la méthode

Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques nous n'allons bien sûr pas chercher à résoudre le système de relations précédentes étant donné la complexité d'un tel problème. Néanmoins ces relations sont utiles pour comprendre les contributions respectives de chaque mode de transfert dans les équations de bilan. En effet, pour le transfert de masse (modélisé par les bilans de masse et de quantité de mouvement) il apparaît une compétition entre les termes d'inertie et les termes de viscosité.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

De la même manière, l'équation de bilan thermique fait apparaître une compétition entre les termes de conduction et de convection dans le fluide et à l'interface entre le fluide et la paroi solide sur laquelle il s'écoule. Une méthode permet d'estimer les rapports entre ces différentes contributions : l'analyse dimensionnelle. Cette analyse permettra de déterminer de manière simple le coefficient d'échange convectif pour la plupart des problèmes rencontrés dans la pratique.

La méthode d'analyse dimensionnelle repose sur le principe de l'homogénéité dimensionnelle des termes d'une équation. Ce principe est connu sous le nom de théorème de Vaschy–Buckingham ou théorème de groupements π.

De façon tout à fait générale, les lois qui gouvernent un phénomène physique sont représentées par une relation dans laquelle interviennent des grandeurs dénommées : $G_1,\ G_2,\ \ldots, G_n$. Cette relation prend la forme générale :

$$f\left(G_1,\ G_2,\ \ldots, G_n\right) = 0 \tag{3.25}$$

Les dimensions de ces grandeurs s'expriment en fonction de k unités fondamentales, comme par exemple : masse, longueur, temps, température...

Le théorème de Vaschy–Buckingham affirme que l'équation précédente est équivalente à une relation de la forme :

$$\psi\left(\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots, \pi_{n-k}\right) = 0 \tag{3.26}$$

où chaque π est de la forme :

$$\pi_i = G_1^{a_i}\, G_2^{b_i}\, G_3^{c_i}\ \cdots G_{k+i} \tag{3.27}$$

Donc ψ est une fonction de $n-k$ produits π indépendants, sans dimension, formés par combinaison de k grandeurs choisies parmi les n initiales avec les $n-k$ restantes. Chacune des grandeurs est affectée des exposants convenables.

Le choix des k grandeurs qui déterminent les produits π est arbitraire et il y a autant de solutions que de combinaisons à k éléments. Cependant parmi les produits π susceptibles d'être obtenus, seuls certains ont un intérêt pratique : ce sont ceux qui interviennent dans les lois physiques fondamentales. Par exemple dans les problèmes d'écoulement de fluide, l'expérience a mis en évidence le rôle important joué par le nombre de Reynolds. On s'attache donc à n'obtenir que des quantités de ce genre.

Ainsi en réduisant le nombre de paramètres, le théorème de Vaschy–Buckingham permet de regrouper les variables en un nombre minimal de produits sans dimension particulièrement significatifs du point de vue de la physique. Toutefois, l'analyse dimensionnelle présente des limites qu'il faut connaître :

Elle ne conduit à des résultats cohérents que si le décompte des grandeurs $G_1,\ G_2, \ldots,\ G_n$ est complet et exact.

Elle fournit les grandeurs réduites $\pi_1,\ \pi_2,\ \ldots,\ \pi_{n-k}$, mais elle ne donne pas les relations entre elles. Ces relations sont obtenues par une étude expérimentale, dans les conditions du laboratoire par exemple.

www.biblio-scientifique.net

3.5 Convection Forcée

Le cas de la convection forcée est rencontré très souvent en pratique dans les échangeurs de chaleur de tous genres. Ainsi, par exemple pour le refroidissement de centrales nucléaires, la récupération de chaleur dans les collecteurs solaires, la circulation des liquides cryogéniques dans les systèmes de refroidissement de machines thermiques. Ces systèmes impliquent deux types d'écoulements :

- Externe : l'écoulement du fluide n'est pas confiné dans un domaine ;
- Interne : le fluide s'écoule dans un domaine confiné (tube, conduite, etc.).

3.5.1 Application de l'analyse dimensionnelle en convection forcée avec écoulement interne

Prenons le cas d'un fluide en écoulement dans un tube cylindrique de diamètre D à la vitesse moyenne u (figure 3.10).

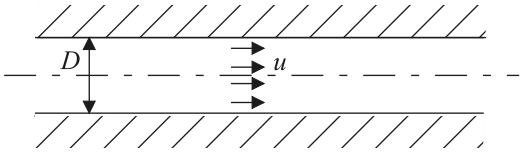


Figure 3.10 **Écoulement d'un fluide à la vitesse *u* dans un tube de diamètre *D***

Les propriétés thermophysiques du fluide sont :

- ρ : sa masse volumique,
- μ : sa viscosité dynamique,
- λ_f : sa conductivité thermique,
- C_p : sa chaleur spécifique à pression constante.

On admet a priori que le coefficient de convection dépendra de toutes ces grandeurs et on suppose par conséquent que la loi qui régit le phénomène d'échange de chaleur est de la forme de la relation 3.25 :

$$f\left(h,\ D,\ \mu,\ \rho,\ C_p,\ \lambda_f,\ u\right) = 0 \tag{3.28}$$

De sorte que $n = 7$. Ces 7 grandeurs physiques peuvent s'exprimer en fonction de 4 unités fondamentales :

- masse, soit M
- longueur, soit L
- temps, soit T
- température, soit θ.

Il en découle que la loi ci-dessus est équivalente à :

$$\psi\left(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3\right) = 0 \tag{3.29}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

En effet, on a : $n - k = 7 - 4 = 3$. Pour déterminer les trois groupements $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ il faut commencer par choisir arbitrairement $k = 4$ grandeurs en tant que grandeurs de base. Prenons par exemple les grandeurs $D,\ \mu,\ \rho,\ \lambda_f$. Les trois groupements $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$ se construisent alors comme suit :

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= D^{a_1}\ \mu^{b_1}\ \rho^{c_1}\ \lambda_f^{d_1}\ h \\
\pi_2 &= D^{a_2}\ \mu^{b_2}\ \rho^{c_2}\ \lambda_f^{d_2}\ C_p \\
\pi_3 &= D^{a_3}\ \mu^{b_3}\ \rho^{c_3}\ \lambda_f^{d_3}\ u
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Il reste à déterminer les valeurs numériques des exposants a_1, b_1,... compatibles avec l'adimensionnement des groupements $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$. Avant d'accomplir cette opération, on doit d'abord écrire les équations avec dimensions des 7 grandeurs concernées. Pour certaines on obtient immédiatement :

$$[D] = L,$$

$$[u] = L\ T^{-1},$$

$$\left[\rho\right] = M\ L^{-3},$$

Nous détaillons ensuite les unités des autres grandeurs :

$$\left[\mu\right] = \text{Pa s} = M\ L^{-1}T^{-1},$$

$$\left[\lambda_f\right] = \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1} = M\ L\ T^{-3}\theta^{-1},$$

$$\left[C_p\right] = \text{J kg}^{-1}\ \text{K}^{-1} = L^2\ T^{-2}\ \theta^{-1},$$

$$[h] = \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-1} = M\ T^{-3}\ \theta^{-1}.$$

Disposant des équations aux dimensions des 7 grandeurs on peut exprimer l'adimensionnement de $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$, soit :

$$[\pi_1] = [1]\ ,\ [\pi_2] = [1]\ ,\ [\pi_3] = [1]$$

Pour $\pi_1 = D^{a_1}\ \mu^{b_1}\ \rho^{c_1}\ \lambda_f^{d_1}\ h$ ceci revient à :

$$[\pi_1] = \left[L^{a_1}\ \left(M\ L^{-1}T^{-1}\right)^{b_1}\ \left(M\ L^{-3}\right)^{c_1}\ \left(M\ L\ T^{-3}\theta^{-1}\right)^{d_1}\ \left(M\ T^{-3}\ \theta^{-1}\right)\right] = [1]$$
$$[\pi_1] = \left[L^{a_1-b_1-3c_1+d_1}\ M^{b_1+c_1+d_1+1}\ T^{-b_1-3d_1-3}\ \theta^{-d_1-1}\right] = [1]$$

www.biblio-scientifique.net

Autrement dit les exposants des 4 unités fondamentales ($M,\ L,\ T,\ \theta$) sont tous nuls. On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{aligned}
&a_1 - b_1 - 3c_1 + d_1 = 0\\
&b_1 + c_1 + d_1 + 1 = 0\\
&-b_1 - 3d_1 - 3 = 0\\
&-d_1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

La solution est : $a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ c_1 = 0,\ d_1 = 0.$
Le produit π_1 correspond donc à : $\pi_1 = D^1\ \lambda_f^{-1}\ h = h\ D/\lambda_f.$
Ceci est le nombre de Nusselt, que l'on écrit habituellement :

$$\mathrm{Nu} = \frac{h\ D}{\lambda_f} \tag{3.31}$$

ENCART 3.3 Wilhelm Nusselt

Ingénieur allemand, né le 25 novembre 1882 à Nuremberg. Il fait ses études à Berlin et à Munich. Il obtient son doctorat en 1907. En 1915 il publie ses travaux dans lesquels il utilise des groupements sans dimensions, actuellement bien connus dans les théories de similitude. D'autres travaux concernent le transfert de chaleur lors de la condensation et la combustion. Nusselt fut professeur à l'Université de Karlsruhe de 1920 à 1925, ensuite à Munich jusqu'à 1957. Il décède la même année à Munich.

De la même manière en écrivant l'équation aux dimensions du second groupement π_2 on obtient :

$$[\pi_2] = \left[L^{a_2}\ \left(M\ L^{-1}T^{-1}\right)^{b_2}\ \left(M\ L^{-3}\right)^{c_2}\ \left(M\ L\ T^{-3}\theta^{-1}\right)^{d_2}\ \left(L^2\ T^{-2}\ \theta^{-1}\right)\right] = [1]$$

$$[\pi_2] = \left[L^{a_2-b_2-3c_2+d_2+2}\ M^{b_2+c_2+d_2}\ T^{-b_2-3d_2-2}\ \theta^{-d_2-1}\right] = [1]$$

Soit le système :

$$\begin{aligned}
&a_2 - b_2 - 3c_2 + d_2 + 2 = 0\\
&b_2 + c_2 + d_2 = 0\\
&-b_2 - 3d_2 - 2 = 0\\
&-d_2 - 1 = 0
\end{aligned}$$

La solution est : $a_2 = 0,\ b_2 = 1,\ c_2 = 0,\ d_2 = -1$, ce qui donne comme résultat pour π_2 :

$$\pi_2 = D^0\ \mu^1\ \rho^0\ \lambda_f^{-1}\ C_p = \frac{\mu\ C_p}{\lambda_f}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Ce groupement est appelé nombre de Prandtl :

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu\, C_p}{\lambda_f} \tag{3.32}$$

Enfin pour le produit π_3 on aboutit à :

$$[\pi_3] = \left[L^{a_3}\ \left(M\ L^{-1}T^{-1}\right)^{b_3}\ \left(M\ L^{-3}\right)^{c_3}\ \left(M\ L\ T^{-3}\theta^{-1}\right)^{d_3}\ \left(L\ T^{-1}\right)\right] = [1]$$
$$[\pi_3] = \left[L^{a_3-b_3-3c_3+d_3+1}\ M^{b_3+c_3+d_3}\ T^{-b_3-3d_3-1}\ \theta^{-d_3}\right] = [1]$$

Soit le système :

$$\begin{aligned}
&a_3 - b_3 - 3c_3 + d_3 + 1 = 0\\
&b_3 + c_3 + d_3 = 0\\
&-b_3 - 3d_3 - 1 = 0\\
&-d_3 = 0
\end{aligned}$$

La solution est : $a_3 = 1,\ b_3 = -1,\ c_3 = 1,\ d_3 = 0$. Le dernier groupement est donc :

$$\pi_3 = D^1\ \mu^{-1}\ \rho^1\ \lambda_f^0\ u = \frac{\rho\ u\ D}{\mu}$$

Nous voyons que ce groupement correspond au nombre de Reynolds, qui caractérise le régime d'écoulement (laminaire, turbulent) :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\ u\ D}{\mu} \tag{3.33}$$

En définitive, la loi physique représentative des échanges convectifs forcés entre le fluide en circulation dans un domaine confiné et la paroi interne du domaine est de la forme : $\psi\,(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3) = 0$, soit $\psi\,(\mathrm{Nu}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Re}) = 0$. On l'explicite généralement par rapport au nombre de Nusselt :

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Pr}, \mathrm{Re}) \tag{3.34}$$

L'analyse dimensionnelle qui vient d'être effectuée indique entre quels produits (ou groupements) il convient de rechercher une relation et c'est la recherche expérimentale qui fournira la forme des relations mathématiques entre ces nombres sans dimensions. Cette recherche est considérablement simplifiée car les groupements adimensionnels sont limités en nombre.

Les relations, souvent désignées par corrélations, que propose la littérature scientifique résultent d'expériences menées dans des conditions particulières. Par conséquent

www.biblio-scientifique.net

il est impossible d'affirmer qu'elles s'appliquent rigoureusement au cas précis qu'on doit traiter. Toutefois, elles fournissent des ordres de grandeur du coefficient d'échange convectif, ce qui est en pratique généralement suffisant.

Signification physique des nombres sans dimensions

- Le nombre de Reynolds, $\mathrm{Re} = \dfrac{\rho\, u\, D}{\mu}$, compare les forces d'inertie et les forces visqueuses.
- Le nombre de Prandtl, $\mathrm{Pr} = \dfrac{\mu\, C_p}{\lambda_f}$, compare la diffusion de masse devant la diffusion thermique.
- Le nombre de Nusselt, $\mathrm{Nu} = \dfrac{h\, D}{\lambda_f}$, compare le transfert par convection devant le transfert par conduction dans le fluide. Il est proportionnel au coefficient d'échange et il est d'autant plus élevé que le transfert par convection est important.
- Le nombre de Péclet, $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}_L \mathrm{Pr}_L = \dfrac{u\, L}{\alpha_f}$, compare le transfert par diffusion et par convection dans le fluide (L – la distance, α_f - diffusivité thermique du fluide)

3.5.2 Expressions du coefficient de convection h en convection forcée

Nous avons vu que les relations décrivant un problème de convection forcée peuvent s'écrire sous la forme : $\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Pr},\ \mathrm{Re})$. La relation entre ces trois nombres adimensionnels ne peut pas être établie théoriquement mais doit être déterminée expérimentalement. De nombreux résultats obtenus par des scientifiques ont été rassemblés dans la littérature. Ils sont appelés « corrélations expérimentales ». Dans cette partie nous présenterons les corrélations expérimentales les plus usuelles en convection forcée.

Concernant le nombre de Prandtl, qui intervient dans l'expression du nombre de Nusselt, et qui caractérise le fluide en écoulement il doit être déterminé pour une température donnée du fluide. Or, pour qu'il y ait échange de chaleur, la température à la surface et la température du fluide doivent être différentes, les propriétés du fluide seront tout simplement prises pour la température moyenne T_f :

$$T_f = \frac{T_{\mathrm{inf}} + T_s}{2} \tag{3.35}$$

Écoulement externe

Par écoulement externe nous considérons un écoulement se développant librement à une surface solide. Cette surface pourra être plane (plaque) ou bien courbée (cylindre, sphère...).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

• *Écoulement sur une plaque plane*

La plaque peut être horizontale ou verticale. Le fluide en écoulement a une vitesse moyenne u_m et x désigne la longueur considérée. Si pour une longueur donnée x, le nombre de Reynolds ne dépasse pas 5×10^5 le régime d'écoulement est laminaire.

Régime laminaire

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332\ \mathrm{Re}_x^{0{,}5}\ \mathrm{Pr}^{0{,}33},\ \text{pour Pr} \geq 0{,}6. \tag{3.36}$$

Le coefficient moyen pour cette configuration est :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_L = 0{,}664\ \mathrm{Re}_L^{0{,}5}\ \mathrm{Pr}^{0{,}33},\ \text{pour Pr} \geq 0{,}6 \text{ et } L \text{ la longueur considérée.} \tag{3.37}$$

Pour les valeurs de nombres de Reynolds supérieures à 5×10^5, le régime d'écoulement est turbulent :

Régime turbulent

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}0296\ \mathrm{Re}_x^{0{,}8}\ \mathrm{Pr}^{0{,}33},\ \text{pour } 0{,}6 < \mathrm{Pr} < 60 \tag{3.38}$$

• *Écoulement autour d'un cylindre*

Le fluide est en écoulement perpendiculaire par rapport à l'axe du cylindre. Sa vitesse à l'infini amont est u_{inf} et sa température T_{inf} (voir la figure 3.11). Un sillage se forme en aval de l'écoulement qui conduit à une répartition non homogène du coefficient variable sur la périphérie du cylindre. On définit un coefficient de convection moyen pour toute la périphérie à température T_s :

Dans le cas d'un gaz

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = C\ \mathrm{Re}_D^m\ \mathrm{Pr}^{0{,}33} \tag{3.39}$$

Dans le cas d'un liquide

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 1{,}11\ C\ \mathrm{Re}_D^m\ \mathrm{Pr}^{0{,}33} \tag{3.40}$$

Les valeurs des constantes C et m sont reportées dans le tableau 3.2 :

Tableau 3.2 **Constantes dans l'expression du nombre de Nusselt pour l'écoulement autour d'un cylindre**

Re	C	m
0,4-4	0,989	0,330
4-40	0,911	0,385
40-4 000	0,683	0,466
4 000-40 000	0,193	0,618
40 000-400 000	0,027	0,805

www.biblio-scientifique.net

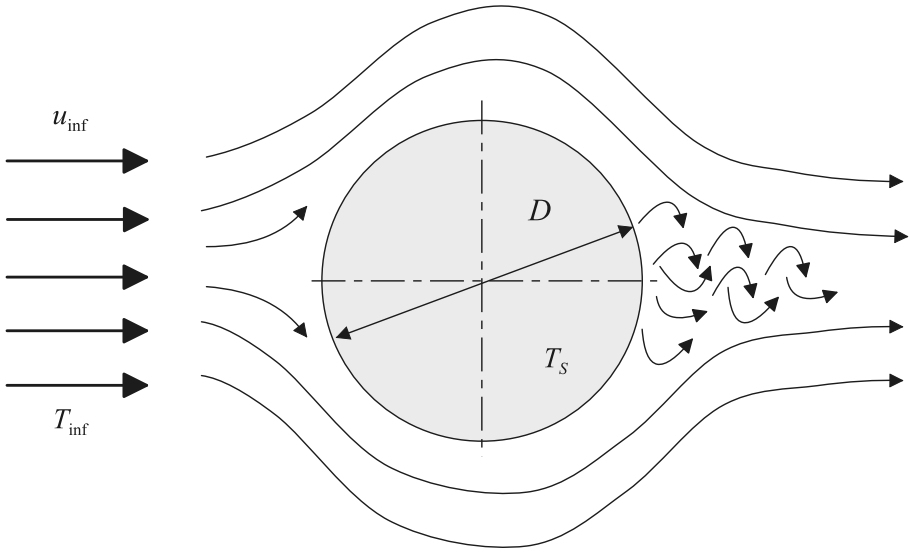


Figure 3.11 **Écoulement autour d'un cylindre**

- *Écoulement autour d'une sphère*

Pour une sphère, les effets de sillage sont similaires à ceux rencontrés dans le cas du cylindre, néanmoins la corrélation préconisée par la littérature est la suivante :

$$\overline{\text{Nu}}_D = 2 + \left(0{,}4\ \text{Re}_D^{0{,}5} + 0{,}06\ \text{Re}^{0{,}66}\right) \text{Pr}^{0{,}4} \left(\frac{\mu_{\text{inf}}}{\mu_s}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}71 < \text{Pr} < 380 \\ 3{,}5 < \text{Re}_D < 7{,}6 \times 10^4 \\ 1{,}0 < \left(\dfrac{\mu_{\text{inf}}}{\mu_s}\right) < 3{,}2 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Toutes les propriétés sont déterminées à la température T_{inf} sauf la viscosité dynamique μ_s du fluide qui l'est à la température T_s.

- *Écoulement autour d'un faisceau de tubes*

Beaucoup d'installations industrielles sont constituées de rangées de tubes parallèles immergées dans un écoulement perpendiculaire à leur axe. Les tubes peuvent être alignés ou disposés en quinconce, comme représenté à la figure 3.12.

La disposition en quinconce conduit à de plus fortes turbulences et donc un coefficient d'échange plus important que pour un faisceau aligné. La corrélation utilisée est la suivante :

$$\overline{\text{Nu}}_D = 1{,}13\ C_1\ \text{Re}_{D,\max}^{m}\ \text{Pr}^{0{,}33} \tag{3.42}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

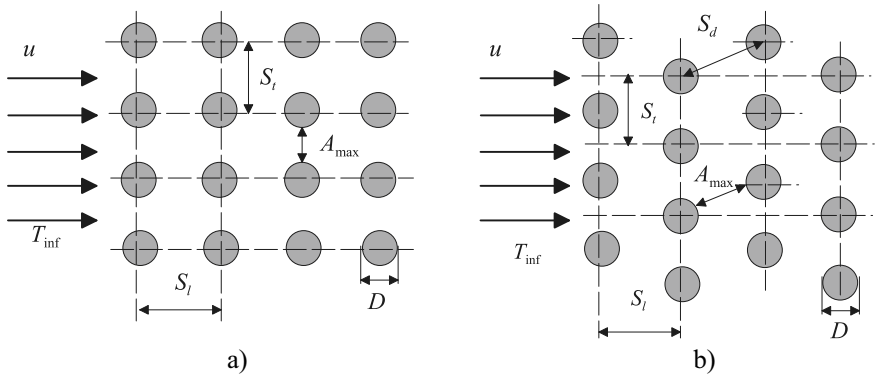


Figure 3.12 **Écoulement autour d'un faisceau de tubes : a) disposition alignée ; b) disposition en quinconce**

Les valeurs des constantes sont : $C_1 = 0{,}26$ et $m = 0{,}65$ pour la disposition alignée, et : $C_1 = 0{,}41$ et $m = 0{,}60$ pour la disposition en quinconce.

Le nombre de Reynolds est calculé dans ces configurations en utilisant la vitesse maximale dans l'écoulement. On l'observe pour les plans désignés par A_{max} pour les deux cas (figure 3.12). Elle se calcule en utilisant les espacements entre les tubes, la vitesse d'arrivée du fluide et le diamètre des tubes : $u_{max} = S_t / (S_t - D)\, u$, pour un arrangement aligné et : $u_{max} = 2\, S_t\, (S_d - D)\, u$, pour un arrangement en quinconce.

Écoulement interne

Par écoulement interne nous considérons un écoulement se développant dans un espace confiné. Cet espace peut être un tube (cylindrique ou rectangulaire), l'espace entre deux tubes concentriques etc. La corrélation utilisée pour les calculs de convection dans ces conditions est appelée corrélation de Colburn.

ENCART 3.4 Allan Philip Colburn

Né à Madison, Wisconsin, États-Unis en 1904. Il a fait des études de chimie à l'Université de Wisconsin. En 1929 il obtient son doctorat. Ses travaux concernent le transfert lors de la condensation de la vapeur d'eau. Pour traiter ce type de problèmes il utilise simultanément les lois fondamentales de transfert de chaleur et de masse, de quantité de mouvement et les principes thermodynamiques. Il travaille à l'Université de Delaware à partir de 1938 jusqu'à son décès en 1955.

- *Écoulement dans un tube cylindrique*

Régime turbulent Pour le nombre de Reynolds supérieur à 10^4 le régime d'écoulement est turbulent. On applique alors la corrélation suivante :

$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}023\, \mathrm{Re}_D^{0{,}8}\, \mathrm{Pr}^{0{,}33} \tag{3.43}$$

www.biblio-scientifique.net

Cette corrélation est valable pour $0{,}7 < \mathrm{Pr} < 100$ et seulement quand le régime turbulent est établi, ce qui n'est garanti que si $x/D > 60$.

Régime laminaire Pour le nombre de Reynolds Re < 2 100 la littérature recommande la relation :

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 1{,}86 \left(\frac{\mathrm{Re}_D \mathrm{Pr}\, D}{L}\right)^{0{,}33} \left(\frac{\mu}{\mu_s}\right)^{0{,}14}$$
$$\begin{bmatrix} T_s = \text{constant} \\ 0{,}48 < \mathrm{Pr} < 16\,700 \\ 0{,}0044 < \left(\dfrac{\mu}{\mu_s}\right) < 9{,}75 \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

μ et Pr sont évalués à la moyenne des températures du fluide entre l'entrée et la sortie du tube. Cependant μ_s est viscosité du fluide déterminée pour la température de paroi du tube T_s.

- *Écoulement dans des tubes de forme polygonale*

Beaucoup d'applications industrielles utilisent des tubes dont la section n'est pas circulaire. Pour l'écoulement et l'échange thermique dans ce type de tubes on peut utiliser un diamètre effectif (ou diamètre hydraulique) défini par :

$$D_h \equiv \frac{4A_c}{P} \tag{3.45}$$

A_c est l'aire de section du tube et P est le périmètre de contact entre la paroi solide et le fluide en écoulement. Ce diamètre D_h est utilisé pour le calcul des nombres Nu_D et Re_D. Ainsi, les corrélations pour le tube circulaire peuvent être appliquées. Les résultats sont fiables pour l'écoulement turbulent. En régime laminaire le calcul est moins précis. Bien évidemment, pour une forme non circulaire le coefficient peut varier sur le périmètre du tube et plus particulièrement il tend vers zéro dans les angles. La démarche que nous proposons ici conduit à un coefficient d'échange convectif moyen sur le périmètre du tube.

- *Écoulement entre deux tubes concentriques*

Pour un écoulement entre deux tubes concentriques (voir la figure 3.13), le diamètre hydraulique est défini par :

$$D_h = \frac{4\left(\pi/4\right)\left(D_o^2 - D_i^2\right)}{\pi D_o - \pi D_i} = D_o - D_i \tag{3.46}$$

Le calcul basé sur le diamètre hydraulique conduit à des résultats avec $\pm 10\%$ de précision pour la surface interne (tube de diamètre D_o). Le coefficient d'échange peut

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

être différent à la surface externe (tube de diamètre D_i), surtout lorsque $D_i \ll D_o$. Des méthodes plus précises sont proposées dans la littérature [3].

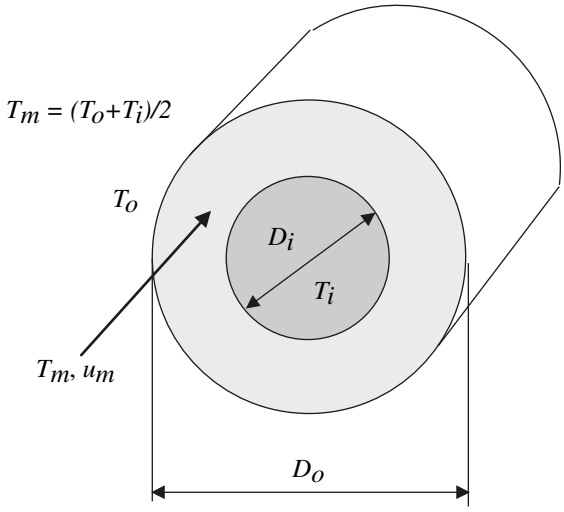


Figure 3.13 **Écoulement entre deux tubes concentriques**

3.6 Convection naturelle

La convection naturelle est la forme d'échange convectif la plus souvent observée. Les transferts par convection naturelle résultent simplement du mouvement du fluide provoqué par les différences de densité dues aux variations spatiales de température. La convection naturelle peut être observée à la surface d'un solide immergé dans un fluide d'extension infinie ou dans un espace confiné. Comme pour la convection forcée, il existe en convection naturelle une couche limite. En convection naturelle les échanges sont nettement moins intenses qu'en convection forcée. La convection naturelle explique les mouvements des grandes masses d'air autour de la Terre, actions de vents, formations des nuages et formations de courants océaniques.

3.6.1 Application de l'analyse dimensionnelle en convection naturelle

Un coefficient thermophysique supplémentaire intervient dans le cas de convection naturelle : le coefficient de dilatation thermique à pression constante défini par :

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta T}\right) \tag{3.47}$$

www.biblio-scientifique.net

$\Delta\rho$ est la variation de masse volumique ρ provoquée par la variation de température ΔT. L'application de l'analyse dimensionnelle à la convection naturelle met en évidence un groupement adimensionnel nouveau appelé nombre de Grashof (Gr). Envisageons le cas du fluide en contact avec une paroi plane horizontale (figure 3.14).

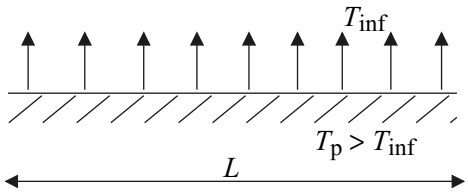


Figure 3.14 **Développement de courants de convection naturelle sur une surface plane de longueur *L***

Le fluide est initialement au repos et en équilibre thermique avec la paroi à la température T_{inf}. La masse volumique du fluide est ρ_0. Quand on augmente la température de la paroi, le fluide s'échauffe de $\Delta T = T_p - T_{inf}$. Il se dilate et donc sa masse volumique varie aussi comme : $\Delta\rho = \rho - \rho_0 < 0$. Il sera alors soumis à une force ascensionnelle (poussée d'Archimède) d'intensité $\Delta\rho\ \vec{g}$ (par unité de volume) correspondant à l'accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{\Delta\rho}{\rho}\ \vec{g} = -\beta\ \vec{g}\ \Delta T \tag{3.48}$$

L'écoulement spontané résultant va conduire aux courants de convection naturelle. On peut admettre a priori que le coefficient d'échange convectif h entre la paroi et le fluide en question dépend :

- Des caractéristiques du fluide : $\lambda_f,\ \rho,\ \mu,\ C_p,\ \beta\ g\ \Delta T$
- Du gradient de température dans la couche limite ΔT
- Des caractéristiques géométriques de la paroi : longueur L

Suivant la démarche présentée en convection forcée, nous obtenons le nombre sans dimension de Grashof :

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta\ \rho^2\ g\ \Delta T\ L^3}{\mu^2} \tag{3.49}$$

En introduisant la viscosité cinématique du fluide $\nu = \mu/\rho$, le nombre de Grashof devient :

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta\ g\ \Delta T\ L^3}{\nu^2} \tag{3.50}$$

ENCART 3.5 Franz Grashof

Ingénieur allemand. Né en 1826 à Düsseldorf, Allemagne. Il quitte l'école à 15 ans pour travailler comme mécanicien et suivre des cours de commerce. De 1844

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

à 1847 il étudie les mathématiques, la physique et la conception de machines à l'Institut Technique de Berlin. Entre 1849 et 1852 il voyage (Australie) pour retourner à Berlin et continuer ses études. Il fonde la Société Allemande des Ingénieurs (Verein Deutscher Ingenieure, VDI). Il fut professeur à l'Université Technique de Karlsruhe et décède en 1893.

Signification physique du nombre de Grashof

$\mathrm{Gr} = \dfrac{\beta\, g\, \Delta T\, L^3}{\nu^2}$, le nombre de Grashof compare les forces visqueuses devant les forces de gravité. Il caractérise les mouvements occasionnés dans le fluide par les gradients thermiques. Ce nombre joue en conséquence un rôle comparable à celui tenu par le nombre de Reynolds en convection forcée.

L'analyse dimensionnelle montre que les échanges en convection naturelle peuvent être décrits par des corrélations du type : $\psi\,(\mathrm{Nu},\ \mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}) = 0$, ou encore par rapport au nombre Nu :

$$\mathrm{Nu} = f\,(\mathrm{Pr},\ \mathrm{Gr}) \tag{3.51}$$

Dans les corrélations expérimentales pour la convection naturelle nous allons souvent rencontrer le produit des nombres de Grashof et de Prandtl. Ce produit est appelé le nombre de Rayleigh :

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Pr}\ \mathrm{Gr} \tag{3.52}$$

ENCART 3.6 Lord Rayleigh

Physicien britannique, né à Maldon, Essex en 1842. Il fait ses études au Trinity College et à Cambridge. Il dirige le laboratoire Cavendish en tant que successeur à James Clerk Maxwell de 1879 à 1884. Il devient professeur au Royal Institute de Grande Bretagne. Il préside la Royal Society de 1905 à 1908. Il est Prix de Nobel en 1904 pour la découverte du gaz inerte Argon. Ses travaux couvrent presque tous les domaines de la physique : acoustique, théorie des ondes, optique, électrodynamique, électromagnétisme, lumière, hydrodynamique, écoulement des fluides, capillarité, viscosité. Il publie de nombreux articles scientifiques et ses recherches sur le son dans *Theory of Sound*. Il décède en 1919 à Witham, Essex.

3.6.2 Régime turbulent en convection naturelle

Comme pour la convection forcée, le régime turbulent est lié aux instabilités dans l'écoulement. Ces instabilités sont liées à la dimension caractéristique de l'écoulement. En pratique, on utilise le nombre de Rayleigh : $\mathrm{Ra}_x = \mathrm{Gr}_x\mathrm{Pr}$ pour déterminer le régime d'écoulement en convection naturelle.

Pour une plaque verticale (voir figure 3.15) la valeur critique utilisée est $\mathrm{Ra}_x = \mathrm{Gr}_x\mathrm{Pr} \approx 10^9$. L'écoulement est d'abord laminaire, puis devient turbulent à cette valeur critique de Ra_x.

www.biblio-scientifique.net

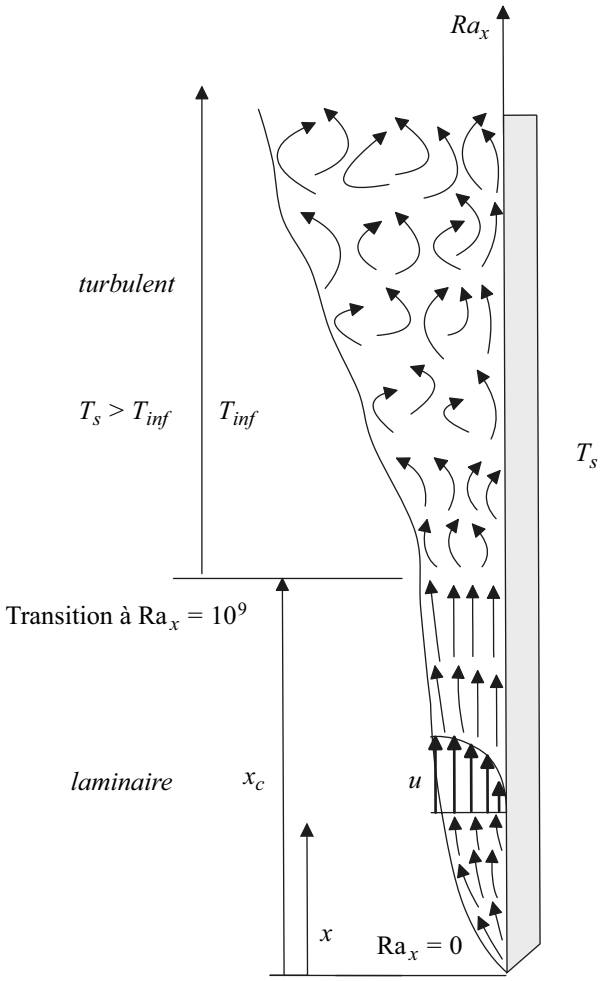


Figure 3.15 **Développement de couche limite en convection naturelle sur une surface plane verticale**

La transition entre le régime laminaire et turbulent peut être facilement observée avec la fumée d'une cigarette.

3.6.3 Expressions du coefficient de convection *h* en convection naturelle

Les corrélations expérimentales les plus usuelles en convection naturelle sont généralement de la forme :

$$\mathrm{Nu}_L = C\ \mathrm{Ra}_L^n \tag{3.53}$$

www.biblio-scientifique.net

Avec :

$$\mathrm{Ra}_L = \mathrm{Gr}_L \mathrm{Pr} = \frac{\beta\, g\, \Delta T\, L^3}{\nu\, \alpha} \tag{3.54}$$

L'exposant n prend les valeurs :

- $n = 1/4$ en convection laminaire
- $n = 1/3$ en convection turbulente

Les propriétés du fluide en écoulement pour le nombre de Rayleigh sont déterminées pour la valeur moyenne de température $T_f = (T_{\inf} + T_s)/2$. Quelques valeurs de la constante C en différentes configurations sont reportées dans le tableau 3.3 :

Tableau 3.3 Constantes C de l'expression de nombre de Nusselt en convection naturelle

Géométrie, orientation	Dimension caractéristique L	C en convection laminaire	C en convection turbulente
Plaque verticale	Hauteur	0,59 $\mathrm{Ra}_L \leq 10^9$	0,10 $\mathrm{Ra}_L > 10^9$
Plaque horizontale chauffant ver le bas	Largeur	0,27 $10^5 \leq \mathrm{Ra}_L \leq 10^{10}$	0,54 $10^{10} < \mathrm{Ra}_L \leq 10^{13}$
Plaque horizontale chauffant vers le haut	Largeur	0,54 $10^4 \leq \mathrm{Ra}_L \leq 10^7$	0,15 $10^7 < \mathrm{Ra}_L \leq 10^{11}$
Cylindre horizontal	Diamètre extérieur	$C = 1{,}02$ et $n = 0{,}148$ pour $10^{-2} \leq \mathrm{Ra}_L \leq 10^2$; 0,54 pour $5 \times 10^2 \leq \mathrm{Ra}_L \leq 2 \times 10^7$	0,135 $2 \times 10^7 < \mathrm{Ra}_L \leq 10^{13}$

Plaque plane inclinée

La littérature montre que pour les surfaces planes inclinées, le coefficient d'échange peut être déterminé à partir de corrélations pour la plaque verticale. Ces corrélations doivent être modifiées en remplaçant la gravité g dans le nombre de Rayleigh par $g \cos \vartheta$, où ϑ est l'angle d'inclinaison mesuré par rapport à la verticale.

Canalisations

- *Plaques verticales*

Pour le transfert entre deux surfaces parallèles verticales (voir figure 3.16 a)) la littérature propose le calcul direct de la densité de flux échangé entre ces surfaces selon la loi de Fourier :

$$\varphi = \frac{\lambda_{eq}}{\delta}\,(T_1 - T_2) \tag{3.55}$$

www.biblio-scientifique.net

Dans cette expression λ_{eq} représente la conductivité équivalente qui est déterminée comme suit :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 0{,}18\ \mathrm{Gr}_\delta^{1/4} \left(\frac{\delta}{L}\right)^{1/9} \text{ pour } 2 \times 10^4 \leq \mathrm{Gr}_\delta \leq 2 \times 10^5$$

Et :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 0{,}065\ \mathrm{Gr}_\delta^{1/3} \left(\frac{\delta}{L}\right)^{1/9} \text{ pour } 2 \times 10^5 < \mathrm{Gr}_\delta \leq 1{,}1 \times 10^7$$

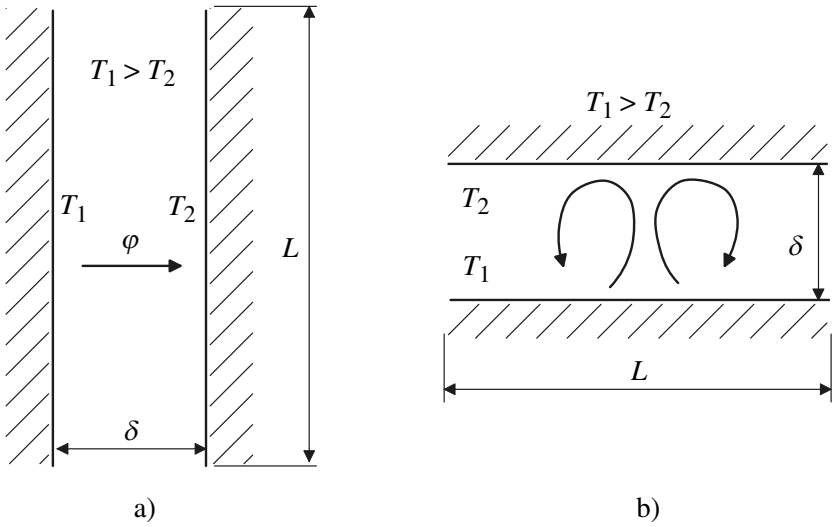


Figure 3.16 **Échange par convection naturelle entre deux surfaces a) verticales ; b) horizontales, avec formation de cellules de Benard**

- *Plaques horizontales*

Le transfert entre deux surfaces parallèles horizontales (voir figure 3.16 b)) est assuré seulement par la conduction (loi de Fourier) si la surface chaude est située au dessus de la surface froide ($T_1 < T_2$). L'écoulement de fluide par convection n'est pas observé.

Dans le cas inverse, la convection a lieu. À partir d'une valeur critique de nombre de Rayleigh $\mathrm{Ra}_\delta = 1\ 700$. Pour $1\ 700 < \mathrm{Ra}_\delta < 45\ 000$ on observe les cellules de Benard, dans lesquelles le fluide circule vers le haut au centre et descend sur les côtés. À partir de $\mathrm{Ra}_\delta > 45\ 000$, l'écoulement du fluide est turbulent.

La densité de flux échangé peut être calculée comme précédemment en utilisant les conductivités équivalentes :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 0{,}21\ \mathrm{Ra}_\delta^{1/4} \text{ pour } 10^4 \leq \mathrm{Gr}_\delta \leq 4 \times 10^5$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

et :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 0{,}075\ \mathrm{Ra}_\delta^{1/3} \text{ pour } 4 \times 10^5 < \mathrm{Gr}_\delta \leq 10^7$$

Cylindres concentriques

Pour un espace annulaire entre les deux cylindres (voir figure 3.17) la densité de flux échangé est calculée comme pour les plaques en utilisant la loi de Fourier :

$$\varphi = \frac{2\ \pi\ \lambda_{eq}}{\ln\left(D_o/D_i\right)}\left(T_i - T_o\right) \tag{3.56}$$

Avec :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 0{,}11\ \mathrm{Ra}_\delta^{0{,}29} \text{ pour } 6\ 000 \leq \mathrm{Ra}_\delta \leq 10^6$$

Et :

$$\frac{\lambda_{eq}}{\lambda_f} = 0{,}4\ \mathrm{Ra}_\delta^{0{,}2} \text{ pour } 10^6 < \mathrm{Ra}_\delta \leq 10^8$$

La dimension caractéristique utilisée pour les calculs de nombre de Rayleigh est :

$$\delta = \frac{(D_o - D_i)}{2}$$

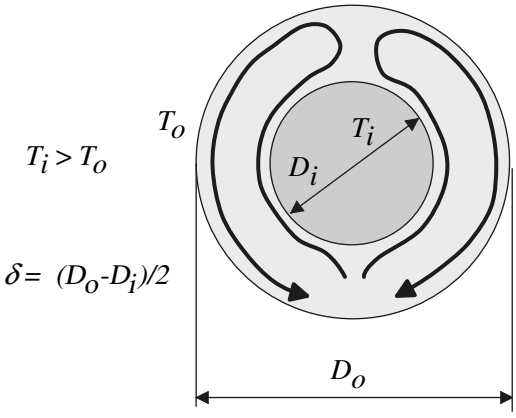


Figure 3.17 **Échange par convection naturelle dans un espace entre deux cylindres**

www.biblio-scientifique.net

3.7 Méthodologie pour le calcul de transferts par convection en utilisant les corrélations expérimentales

La démarche à suivre lorsque l'on veut déterminer le flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide est la suivante :

1) Spécifier les conditions géométriques du problème d'échange par convection (écoulement le long d'une surface plane, sphère, cylindre, interne, externe, diamètre, longueur).
2) Spécifier une température de référence et déterminer les propriétés thermophysiques du fluide à cette température.
3) Calculer le nombre de Reynolds (en convection forcée) ou le nombre de Rayleigh (en convection naturelle). Par comparaison avec une valeur critique, déterminer le régime d'écoulement (laminaire, turbulent).
4) Choisir une corrélation expérimentale correspondante à la configuration étudiée pour calculer le nombre de Nusselt.
5) Calculer le coefficient d'échange à partir du nombre de Nusselt.
6) Calculer le flux chaleur échangé à partir de la relation de Newton.

3.8 Convection avec changement de phase

Le transfert de chaleur associé à un changement de phase (ébullition d'un liquide ou condensation d'une vapeur) conduit en général à des coefficients d'échange très élevés. Pour cette raison, les applications industrielles de systèmes thermiques exploitant ces phénomènes sont nombreuses : condenseurs, chaudières, réchauffeurs...

3.8.1 Convection lors de la condensation

La condensation intervient quand une vapeur à température et pression données rentre en contact avec une paroi dont la température est inférieure à la température de saturation de vapeur T_{sat} pour cette pression. Il en résulte qu'une certaine quantité de masse de liquide se dépose sur la surface froide. Pendant ce phénomène, la chaleur latente de vaporisation est dégagée et transférée vers la paroi.

Les interactions liquides – paroi solide sont à la base du type de condensation. Comme cela est représenté sur la figure 3.18, nous pouvons distinguer :

- la condensation en film continu, quand le liquide mouille la surface et sépare la vapeur de la paroi solide. Du fait de la faible conductivité thermique des liquides, cette séparation diminue en général les échanges thermiques.
- la condensation en gouttelettes, que l'on observe sur des surfaces propres, sans contaminations, souvent recouvertes de substances lipophiles (téflon, or). La formation de gouttes intervient quand la tension superficielle du liquide est suffisam-

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

ment élevée pour que celui-ci ne mouille pas la surface. La taille des gouttelettes augmente durant le processus. Quand elle atteint une dimension critique elles se détachent libérant ainsi la surface solide de la barrière thermique.

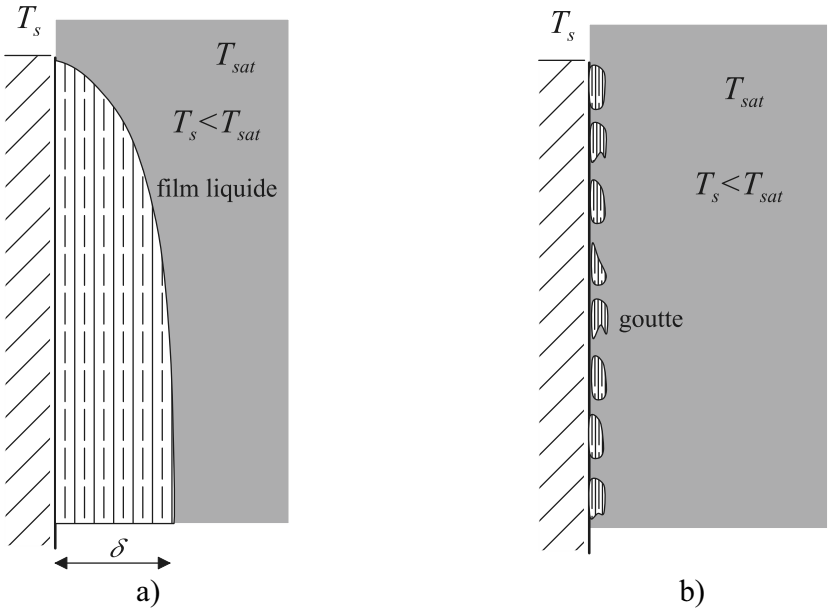


Figure 3.18 **Deux types de condensation : a) en film ; b) en gouttelettes**

La condensation en gouttelettes favorise donc l'échange de chaleur et est recherchée dans les applications industrielles. Cependant, il est très difficile de maintenir les conditions de condensation en gouttes en pratique. En effet, les surfaces se dégradent, la rugosité augmente et en général cela conduit à la condensation en film. Pour cela la plupart des travaux concernant l'échange convectif de chaleur en condensation sont consacrés à la condensation en film.

Coefficient d'échange convectif pour la condensation en film sur une paroi verticale

- *Film laminaire*

Le coefficient d'échange h a été relié à divers paramètres physiques intervenant dans la condensation en film sur une paroi par Nusselt en 1916. Ses analyses théoriques sont basées sur les hypothèses suivantes :

- écoulement laminaire du film et propriétés constantes du fluide
- la vapeur est pure à sa température de saturation et il n'y a pas de gradient de température au sein du gaz ; le transfert se fait seulement par condensation sur la paroi

www.biblio-scientifique.net

- le gradient de température dans le film est constant, le transfert de chaleur se fait par conduction seule

  Nusselt a établi l'expression du coefficient d'échange moyen :

$$\overline{h}_L = 0{,}943 \left[\frac{g\rho_l \left(\rho_l - \rho_v\right) \lambda_l^3 \Delta H}{\mu_l \left(T_{sat} - T_s\right) L} \right]^{1/4} \tag{3.57}$$

Avec :

- g : accélération de la pesanteur
- ρ_l : masse volumique de la phase liquide
- ρ_v : masse volumique de la phase vapeur
- λ_l : conductivité thermique de la phase liquide
- μ_l : viscosité dynamique de la phase liquide
- $\Delta H = H_g + 0{,}68\, C_{p,l} \left(T_{sat} - T_s\right)$ où H_g est la chaleur latente de vaporisation et $C_{p,l}$ est la chaleur spécifique du condensat.
- L : longueur
- T_{sat} : température de saturation de la vapeur
- T_s : température de la paroi

Les propriétés du liquide sont déterminées à la température moyenne $T_f = \left(T_{sat} + T_s\right)/2$ et ΔH est calculé à la température T_{sat}.

Cette expression peut être aussi appliquée pour les surfaces inclinées. La valeur g doit être remplacée dans ce cas par $g \cos \vartheta$, où ϑ est l'angle entre la surface et la verticale. Cependant il faut l'utiliser avec précaution pour de grandes valeurs de ϑ.

Le régime d'écoulement du film est considéré comme laminaire jusqu'à la valeur critique du nombre de Reynolds $\mathrm{Re}_\delta = 1\,800$. Ce nombre est calculé à partir de la vitesse moyenne d'écoulement du film $\overline{u}_l$, de son épaisseur δ et de la viscosité cinématique ν_l :

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{\overline{u}_l\, \delta}{\nu_l} \tag{3.58}$$

- *Film turbulent*

L'écoulement dans le film devient turbulent quand $\mathrm{Re}_\delta > 1\,800$. Ce régime augmente les échanges au sein du film. Le coefficient d'échange est calculé à partir de la corrélation :

$$\frac{\overline{h}_L \left(\nu_l^2/g\right)^{1/3}}{\lambda_l} = \frac{\mathrm{Re}_\delta}{8\,750 + 58\mathrm{Pr}^{-0{,}5} \left(\mathrm{Re}_\delta^{0{,}75} - 253\right)} \tag{3.59}$$

Film sur un tube horizontal

En pratique on rencontre souvent la condensation sur la surface extérieure des tubes (échangeurs de chaleur). Pour le calcul de ce type de système, les analyses de Nusselt

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

conduisent à un coefficient moyen :

$$\overline{h}_D = 0{,}729 \left[\frac{g\rho_l\,(\rho_l - \rho_v)\,\lambda_l^3 \Delta H}{\mu_l\,(T_{sat} - T_s)\,D\,n} \right]^{1/4} \tag{3.60}$$

D est le diamètre du tube et n le nombre de tubes (figure 3.19).

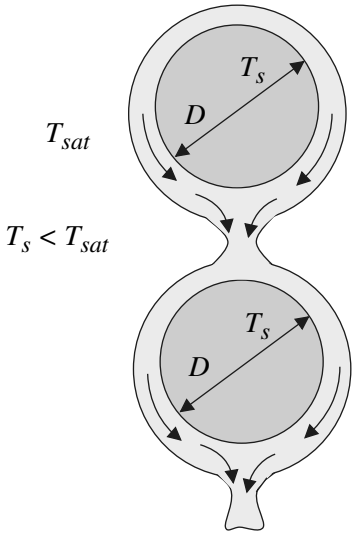


Figure 3.19 **Condensation sur une rangée de tubes**

Film à l'intérieur d'un tube horizontal

Les conditions d'écoulement du film à l'intérieur sont complexes et dépendent beaucoup de la vitesse d'écoulement de la vapeur. Pour de faibles vitesses de vapeur :

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\overline{u}_l\,D}{\nu_l} < 35\,000$$

Le coefficient d'échange moyen est :

$$\overline{h}_D = 0{,}555 \left[\frac{g\rho_l\,(\rho_l - \rho_v)\,\lambda_l^3 \Delta H}{\mu_l\,(T_{sat} - T_s)\,D\,n} \right]^{1/4} \tag{3.61}$$

D désigne le diamètre interne du tube (figure 3.20).

La condensation en gouttes conduit à des coefficients d'échange d'un ordre de grandeur plus important que pour la convection en film. Pour ce type de condensation

www.biblio-scientifique.net

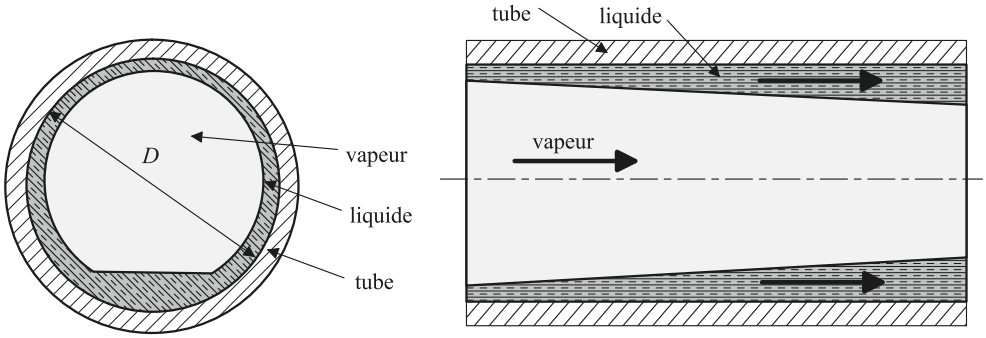


Figure 3.20 **Condensation dans le tube**
a) faible vitesse d'écoulement de la vapeur : le film s'écoule sur les parois du tube perpendiculairement à l'axe du tube et forme un ruisseau qui évacue le condensat ;
b) grande vitesse d'écoulement de la vapeur : une couche circulaire de liquide se forme sur tout le périmètre du tube et son épaisseur augmente avec la distance d'écoulement.

on trouve dans la littérature les expressions le coefficient d'échange moyen $\overline{h}_g$ en $\left[\mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}\right]$ égal à :

$$\overline{h}_g = 255\ 510, \text{ pour } T_{sat} > 100\ ^\circ\mathrm{C}$$

Et :

$$\overline{h}_g = 51\ 104 + 2\ 044\ T_{sat}, \text{ pour } 25^\circ\mathrm{C} < T_{sat} < 100\ ^\circ\mathrm{C}$$

3.8.2 Convection lors de l'ébullition

L'ébullition est le processus de formation de vapeur d'un liquide à sa température de saturation pour une pression donnée. Elle se caractérise par la chaleur de vaporisation. Le plus souvent, la chaleur de vaporisation est apportée au liquide par une surface solide, néanmoins on peut rencontrer les cas où le liquide est chauffé par des sources volumiques de chaleur telles que le rayonnement, l'induction ou les micro-ondes.

L'échange thermique associé à l'ébullition est caractérisé par des coefficients d'échange importants et de hauts flux de chaleur pour une différence de température entre la température de saturation du liquide T_{sat} et la température de la paroi solide T_s. L'échange de chaleur en ébullition est utilisé pour la production de vapeur dans les centrales électriques ou le chauffage. Il est aussi largement exploité dans des systèmes nécessitant un refroidissement intense, comme par exemple : les réacteurs nucléaires, les turboréacteurs de fusées etc.

On distingue deux types d'ébullition :

- ébullition surfacique, où la vapeur se forme à la surface chauffée
- ébullition en volume, où la vapeur peut se former dans l'ensemble de volume de liquide à la température de saturation

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

En fonction du type d'écoulement du fluide, on peut aussi avoir l'ébullition en convection naturelle pour un fluide immobile ou l'ébullition en convection forcée pour un fluide en écoulement dans un conduit.

La manière dont la vapeur se forme à la surface chauffée dépend de la différence de température $T_s - T_{sat}$. La figure 3.21 représente la densité de flux de chaleur échangé en fonction de la différence susmentionnée pour l'eau à la pression normale.

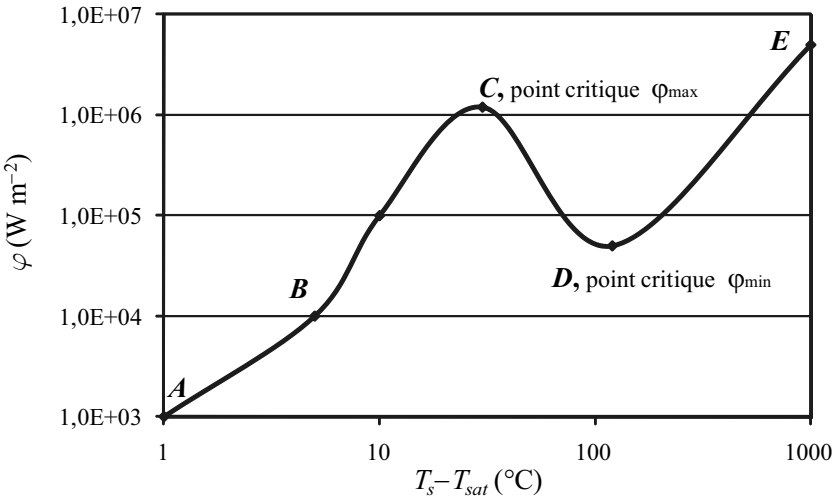


Figure 3.21 **Densité de flux échangé pour l'eau en fonction de la différence** $T_s - T_{sat}$

- **Ébullition en convection libre (zone *AB*).** Dans la plage *AB*, $T_s - T_{sat} = 0 \div 3$ K, la chaleur est transportée uniquement par convection naturelle dans le liquide. La vapeur se forme seulement à la surface libre du liquide en contact avec l'air. Le coefficient d'échange est proportionnel à $(T_s - T_{sat})^{0,25}$ et le flux échangé est proportionnel à $(T_s - T_{sat})^{1,25}$.
- **Ébullition nucléée (zone *BC*).** Dans la plage $T_s - T_{sat} = 3 \div 30$ K les bulles de vapeur se forment à la surface chauffée. Elles deviennent de plus en plus grandes et s'évacuent vers la surface du liquide. Le coefficient d'échange est proportionnel à $(T_s - T_{sat})^2$ et donc le flux transmis à $(T_s - T_{sat})^3$. À $T_s - T_{sat} = 30$ K la densité de flux $\left(\varphi = \overline{h}\,(T_s - T_{sat})\right)$ atteint son maximum, appelé point critique d'ébullition (*C*).
- **Ébullition instable (zone *CD*).** C'est la zone instable. Le coefficient et le flux diminuent brusquement. La densité de flux atteint le minimum au point critique (*D*).
- **Ébullition pelliculaire (zone *DE*).** Toute la surface chauffée est recouverte de mince film de vapeur. Le transfert de chaleur se fait au départ essentiellement

www.biblio-scientifique.net

par conduction. Avec l'augmentation de température le phénomène de rayonnement s'ajoute à la conduction ce qui conduit à l'élévation du flux transmis. L'augmentation de température dans cette zone peut provoquer la fusion de la paroi chauffée.

Coefficient d'échange en ébullition

L'évolution de la courbe d'ébullition indique qu'il existe une multitude de corrélations pour caractériser l'échange de chaleur en ébullition. Pour l'ébullition en convection naturelle les corrélations présentées précédemment pour ce mode de convection peuvent être utilisées.

• *Ébullition nucléée*

L'expression suivante pour la densité de flux est proposée dans la littérature pour les calculs en ébullition nucléée :

$$\varphi = \mu_l \Delta H \left[\frac{g\,(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}\right]^{1/2} \left(\frac{c_{p,l}\,(T_s - T_{sat})}{C_{s,f}\,\Delta H \mathrm{Pr}_l^n}\right)^3 \tag{3.62}$$

Dans cette expression, les index l, v, correspondent respectivement au liquide et à la vapeur saturée. σ est la tension superficielle entre la vapeur et le liquide. Les coefficients $C_{s,f}$ et n dépendent de l'interface liquide-solide. Quelques valeurs de ces coefficients sont données dans le tableau 3.4.

Tableau 3.4 **Quelques constantes de l'expression de flux échangé en ébullition nucléée**

Interface liquide - solide	$C_{s,f}$	n
eau – cuivre poli	0,010 3	1
eau – acier poli	0,006 0	1
eau – nickel	0,006 0	1
benzène – chrome	0,101	1,7
éthanol – chrome	0,002 7	1,7

Densité de flux maximum La densité de flux au point critique C est :

$$\varphi_{\max} = 0{,}149 \Delta H \rho_v \left[\frac{\sigma g\,(\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2}\right]^{1/4} \tag{3.63}$$

Densité de flux minimum La densité de flux au point critique D est :

$$\varphi_{\min} = 0{,}09 \rho_v \Delta H \left[\frac{\sigma g\,(\rho_l - \rho_v)}{(\rho_l + \rho_v)^2}\right]^{1/4} \tag{3.64}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

- *Ébullition en film*

L'ébullition en film stable est semblable à la condensation laminaire. Le coefficient d'échange moyen est :

$$\overline{h}_D = \beta_1 \left[\frac{g\rho_v (\rho_l - \rho_v) \lambda_v^3 \Delta H}{\mu_v (T_s - T_{sat}) D} \right]^{1/4} \tag{3.65}$$

Le nombre de Nusselt est défini par :

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\overline{h}_D D}{\lambda_v} = \beta_1 \left[\frac{g\rho_v (\rho_l - \rho_v)^3 \Delta H D^3}{\mu_v \lambda_v (T_s - T_{sat})} \right]^{1/4}$$

Avec $0{,}729 < \beta_1 < 1{,}029$ selon la forme de la surface chauffée (cylindre, sphère, plaque) et D est la dimension caractéristique (diamètre, longueur).

- *Ébullition en convection forcée*

Deux relations sont proposées pour ce type d'échange :

- faible vitesse d'écoulement :

$$\frac{\varphi_{\max}}{\rho_v \Delta H\, u} = \frac{1}{\pi} \left[1 + \left(\frac{4}{\mathrm{We}_D} \right)^{1/3} \right] \tag{3.66}$$

- grande vitesse d'écoulement

$$\frac{\varphi_{\max}}{\rho_v \Delta H\, u} = \frac{(\rho_l/\rho_v)^{3/4}}{169\, \pi} + \frac{(\rho_l/\rho_v)^{1/2}}{19{,}2\, \pi\, \mathrm{We}_D} \tag{3.67}$$

Dans ces relations, le nombre We_D est appelé le nombre de Weber :

$$\mathrm{We}_D \equiv \frac{\rho_v\, u^2 D}{\sigma} \tag{3.68}$$

Il représente le rapport des forces d'inertie et des forces de tension superficielle.

Le régime de faible et grande vitesse est déterminé par :

$\dfrac{\varphi_{\max}}{\rho_v\, \Delta H\, u} < \left[\left(\dfrac{0{,}275}{\pi} \right) \left(\dfrac{\rho_l}{\rho_v} \right)^{1/2} + 1 \right]$, pour les faibles vitesses d'écoulement.

$\dfrac{\varphi_{\max}}{\rho_v\, \Delta H\, u} > \left[\left(\dfrac{0{,}275}{\pi} \right) \left(\dfrac{\rho_l}{\rho_v} \right)^{1/2} + 1 \right]$, pour les grandes vitesses d'écoulement.

www.biblio-scientifique.net

3.9 Références

FURMANSKI P., DOMANSKI R., *Wymiana ciepla, przyklady obliczen i zadania*, Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2004. (en polonais)

INCROPERA F. P., DEWITT D., *Introduction to heat transfer*, 3rd ed., Wiley, New York, 1996.

KAYS W. M., CRAWFORD M. E., *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Company, New York, 3rd edition, 1993.

KOSTOWSKI E., *Zbior zadan z przeplywu ciepla*, Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice, 2006. (en polonais)

LAGOURETTE B., *Notes de cours de transferts de chaleur*, IUP UPPA.

LIENHARD J. H. IV, LIENHARD J. H. V, *A heat transfer textbook*, Phlogiston Press, Massachusetts, 2008.

WISNIEWSKI S., WISNIEWSKI T., *Wymiana ciepla*, Wydawnictwa Naukowo Techniczne, Warszawa, 2000 (en polonais)

Exercices

3.1 Analyse dimensionnelle – nombre de Grashof

En reprenant la démarche suivie en convection forcée, effectuer l'analyse dimensionnelle pour retrouver l'expression du nombre de Grashof en convection naturelle.

3.2 Coefficient d'échange moyen

Une relation exprimant le coefficient d'échange local par convection a été établie à partir de résultats expérimentaux pour un écoulement sur une plaque plane rugueuse. Il a été trouvé :

$$h_x(x) = a\, x^{-0,2}$$

a est un coefficient en $\left[\mathrm{W\ m^{-1,8}\ K}\right]$ et x est la distance [m] au bord d'attaque de la plaque.

a) Développer le rapport entre le coefficient d'échange moyen $\overline{h}_x$ et le coefficient local h_x à la distance x.

b) Décrire qualitativement les variations de h_x et de $\overline{h}_x$ en fonction de x.

3.3 Écoulement le long d'une surface plane

De l'huile à température $T_h = 80\ ^\circ\mathrm{C}$ circule le long d'une surface plane à la vitesse $u = 1\ \mathrm{m\ s^{-1}}$. La température de surface est : $T_s = 120\ ^\circ\mathrm{C}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Les propriétés de l'huile, à la température 100 °C sont :
- Conductivité thermique : $\lambda_h = 0{,}126$ W m^{-1} K^{-1},
- Viscosité cinématique : $\nu_h = 20{,}30 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1},
- Nombre de Prandtl : $\mathrm{Pr}_h = 315$.

a) En supposant que la valeur critique du nombre de Reynolds pour cet écoulement est 5×10^5, déterminer sur quelle distance l'écoulement de la couche limite est laminaire.

b) Quelle est la valeur du coefficient d'échange pour cette distance critique ?

3.4 Température d'un barreau chauffé par induction

Dans une expérience thermique, on recuit par induction un barreau de cuivre de diamètre $d = 1$ cm et de longueur $L = 10$ cm. On refroidit ce barreau dans un courant d'hélium dont la température est 77 K. L'écoulement d'hélium est dans la direction perpendiculaire à l'axe du barreau avec une vitesse moyenne d'écoulement $u = 54$ m · s^{-1}. La température de surface du barreau de cuivre s'établit à 80 K.

Les caractéristiques de l'hélium, à la température 78,5 K sont :
- Masse volumique : $\rho_{He} = 0{,}65$ kg m^{-3}
- Viscosité dynamique : $\mu_{He} = 8{,}5 \times 10^{-6}$ Pa s
- Conductivité thermique : $\lambda_{He} = 0{,}06$ W m^{-1} K^{-1}
- Capacité thermique massique : $C_{p,He} = 5\,300$ J kg^{-1} K^{-1}
- Le cuivre a une masse volumique $\rho_{Cu} = 8\,940$ kg m^{-3}

Calculer le flux de chaleur par unité de masse (en W kg^{-1}) emmagasiné par induction dans le barreau.

3.5 Fil parcouru par un courant dans un jet d'air en convention forcée

Un fil électrique en aluminium à section circulaire (diamètre $d = 1{,}5$ mm) et de résistivité électrique $\rho_e = 0{,}035\ \Omega$ mm^2 m^{-1} est refroidi dans un jet d'air sec perpendiculaire à son axe de révolution. La vitesse d'air loin de la surface de fil est égale $u = 1{,}2$ m s^{-1}. La température de l'air est $T_{air} = 25$ °C.

Les paramètres thermophysiques de l'air à 50 °C sont :
- Conductivité thermique de l'air : $\lambda_{air} = 0{,}0283$ W m^{-1} K^{-1}
- Viscosité cinématique de l'air : $\nu_{air} = 17{,}95 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1}
- Nombre de Prandtl : $\mathrm{Pr}_{air} = 0{,}698$

a) Déterminer le coefficient d'échange convectif à la surface du fil.

b) Déterminer l'intensité du courant maximale autorisée si la température du fil ne doit pas dépasser $T_{fil} = 75$ °C.

3.6 Température du toit d'une voiture

On s'intéresse au coefficient d'échange convectif sur le toit d'une voiture roulant à la vitesse $u = 100$ km h^{-1}, dans la direction x. La géométrie de ce toit est assimilable à une plaque plane de dimensions $L \times l$, ($L = 2$ m, $l = 1{,}5$ m), comme représenté

www.biblio-scientifique.net

sur la figure ci-dessous. Les échanges convectifs sont caractérisés par le coefficient local $h(x)$, dépendant de la variable d'espace x, sur la face supérieure. La température extérieure est $T_{air} = 25\ °C$.

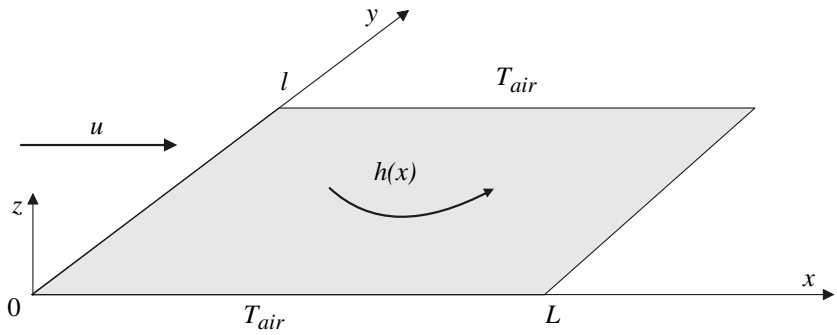


Figure 3.22 **Toit de voiture considéré comme une plaque plane**

La vitesse à laquelle se déplace la voiture provoque deux régimes d'écoulement de l'air à la surface du toit. En utilisant les corrélations appropriées, déterminer la distance critique x_{cr} pour laquelle l'écoulement est laminaire.

a) Donner l'expression du coefficient d'échange convectif en régime laminaire, que l'on notera $h_l(x)$, sur la surface supérieure du toit. De même, donner l'expression du coefficient d'échange, que l'on notera $h_t(x)$, pour la zone où l'écoulement devient turbulent.

b) Déterminer les coefficients d'échange moyens $\overline{h}_l$ et $\overline{h}_t$ dans les deux zones.

c) Calculer le coefficient d'échange moyen global $\overline{h} = \left(x_{cr}\overline{h}_l\right)/L + \left((L - x_{cr})\overline{h}_t\right)/L$ (moyenne des coefficients d'échange dans les zones laminaire et turbulente pondérée par la distance de transition) pour toute la surface supérieure du toit.

Caractéristiques thermophysiques de l'air pour la température $T_{air} = 25\ °C$:

$$\mathrm{Pr}_{air} = 0{,}70,\ \nu_{air} = 16 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2\ \mathrm{s}^{-1},\ \lambda_{air} = 0{,}0267\ \mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}},$$

$$\mu_{air} = 18{,}6 \times 10^{-6}\ \mathrm{Pa\ s},\ C_{p,air} = 1{,}005\ \mathrm{kJ\ kg^{-1}\ K^{-1}},$$

$$\rho_{air} = 1{,}165\ \mathrm{kg\ m^{-3}}.$$

3.7 Flux échangé entre un mur et de l'air en convection naturelle

Le mur d'un bâtiment a 6 m de haut et 10 m de long. Sous l'échauffement dû au soleil, sa température extérieure atteint $T_m = 40\ °C$. La température ambiante extérieure est $T_{air} = 20\ °C$.

On donne les propriétés physiques suivantes de l'air, à la température de 30 °C:

- Masse volumique : $\rho_{air} = 1{,}149\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
- Conductivité thermique : $\lambda_{air} = 0{,}0258\ \mathrm{W\ m^{-1}\ K^{-1}}$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

- Viscosité dynamique : $\mu_{air} = 18{,}4 \times 10^{-6}$ Pa s
- Capacité thermique massique : $C_{p,air} = 1\,006$ J kg^{-1} K^{-1}

Calculer le flux de chaleur échangé par convection entre le mur et l'air.

3.8 Refroidissement d'un réservoir sphérique par convention naturelle

Un réservoir sphérique de diamètre interne $d = 0{,}5$ m est rempli, à l'instant initial, d'huile à la température $T_0 = 120$ °C (voir la figure 3.23). L'enveloppe du réservoir est en acier et son épaisseur est 1 mm. La masse volumique de l'huile est $\rho_h = 819{,}6$ kg m^{-3} et sa chaleur spécifique $C_{ph} = 2{,}262$ kJ kg^{-1} K^{-1}. L'air ambiant environnant le réservoir est à la température $T_{air} = 20$ °C. On suppose que la température de l'huile est homogène dans tout le volume du réservoir à chaque instant et que la température interne de l'enveloppe est égale à la température de l'huile.

a) Montrer que l'enveloppe du réservoir peut être omise dans l'écriture du flux échangé entre l'huile et l'air.

   On suppose que les propriétés physiques de l'air ne varient pas avec la température. Les propriétés de l'air à 70 °C sont : $\lambda_{air} = 0{,}0297$ W m^{-1} K^{-1}, $\nu_{air} = 20{,}02 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1}, $\mathrm{Pr}_{air} = 0{,}694$.

b) Déterminer la température de l'huile dans le réservoir après un temps $t = 2$ h, si l'échange de chaleur avec l'extérieur se fait uniquement par convection naturelle.

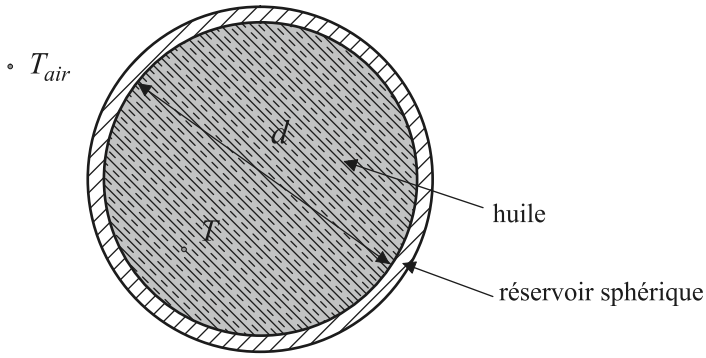


Figure 3.23 **Réservoir sphérique rempli d'huile**

3.9 Fil parcouru par un courant dans l'air en convection naturelle

Un fil résistif de diamètre $d = 0{,}5$ mm, dont la résistivité électrique est $\rho_e = 3{,}3 \times 10^{-6}\ \Omega$ m, est disposé horizontalement dans l'air. Il est parcouru par un courant d'intensité I. La température maximale de fil ne doit pas dépasser $T_{fil} = 300$ °C. La température de l'air est égale $T_{air} = 20$ °C.

Les propriétés thermophysique de l'air à 160 °C sont : $\lambda_{air} = 0{,}0364$ W m^{-1} K^{-1}, $\nu_{air} = 30{,}09 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1}, $\mathrm{Pr}_{air} = 0{,}682$.

Déterminer l'intensité du courant maximale admissible dans le fil en régime stationnaire.

www.biblio-scientifique.net

3.10 Température d'un convecteur

Un convecteur électrique de puissance $\phi = 1\,500$ W a la forme d'une plaque plane verticale dont la largeur est $l = 1{,}5$ m (voir figure 3.24). L'air ambiant autour du convecteur est à la température $T_{air} = 20$ °C.

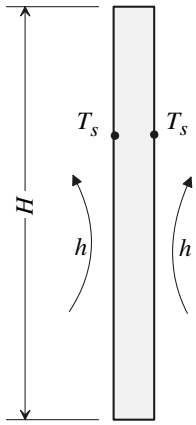


Figure 3.24 **Convecteur électrique échangeant la chaleur avec l'air ambiant par les deux surfaces principales** $(H\ l)$**. Le transfert sur les autres surfaces est négligé.**

Les propriétés thermophysiques de l'air à 50 °C sont : $\nu_{air} = 17{,}95 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1}, $\lambda_{air} = 0{,}0283$ W m^{-1} K^{-1}, $\mathrm{Pr}_{air} = 0{,}698$, $\beta_{air} = 1/T = 1/323 = 0{,}0031$ K^{-1}.

Quelle doit être la hauteur H du convecteur pour que sa température de surface T_s ne dépasse pas 80°C ? Vérifier la hauteur H pour les deux régimes de convection.

3.11 Condensation de vapeur d'eau

Dans un condenseur, on condense la vapeur d'eau à pression $p = 0{,}004$ MPa et avec le débit $\dot{m} = 5$ kg s^{-1}. La température de saturation de la vapeur est $T_{sat} = 28{,}98$ °C. Le refroidissement est assuré par l'eau liquide, dont la température est $T_{eau1} = 10$ °C à l'arrivée et $T_{eau2} = 20$ °C en sortie. L'eau circule dans des tubes en laiton avec une vitesse $u = 1{,}5$ m s^{-1}. Le diamètre externe du tube est $d_e = 18$ mm et son diamètre interne est $d_i = 15$ mm. La conductivité thermique du laiton est $\lambda = 110$ W m^{-1} K^{-1}. Les tubes sont alignés verticalement par rangées de 20 tubes (figure 3.25). On note T_s la température de la surface extérieure de chaque tube.

À la température de 15 °C, les propriétés de l'eau sont : $\nu_{eau} = 1{,}15 \times 10^{-6}$ m^2 s^{-1}, $\lambda_{eau} = 0{,}587$ W m^{-1} K^{-1} et $\mathrm{Pr}_{eau} = 8{,}3$.

Les propriétés du condensat et de la vapeur sont déterminées pour la température de saturation : $\nu_l = 0{,}825 \times 10^{-6}$ m^{2}s^{-1}, $\lambda_l = 0{,}616$ W m^{-1} K^{-1}, $\rho_l = 996$ kg m^{-3}, $\rho_v = 0{,}0287$ kg m^{-3}, $\Delta H = 2\,433$ kJ kg^{-1}.

Quelle doit être la longueur totale l de tubes ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

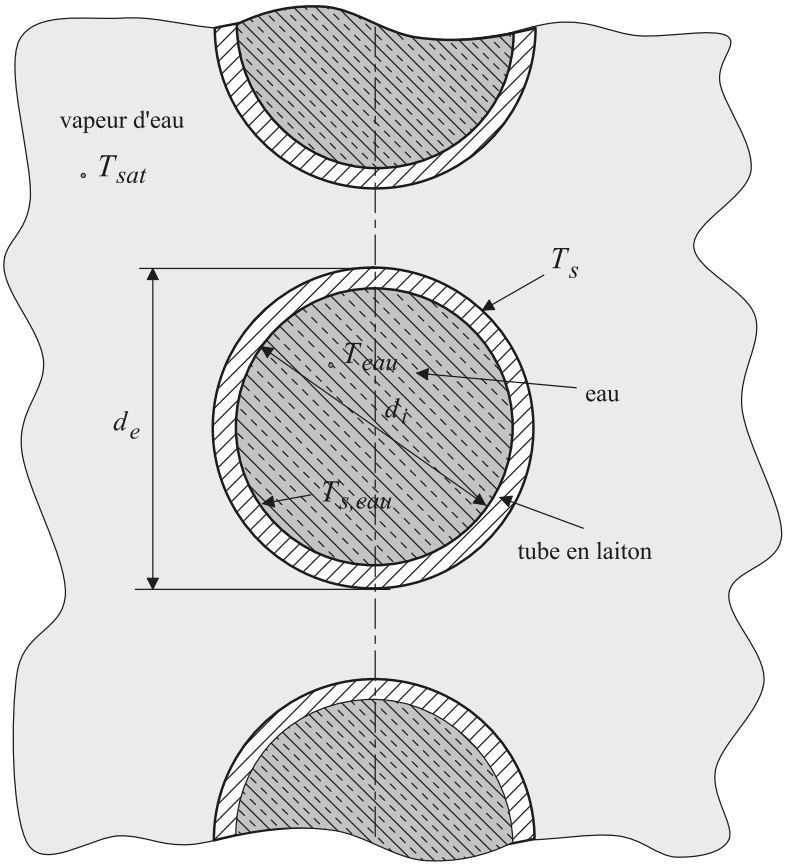


Figure 3.25 **Schéma du système de condensation de la vapeur d'eau sur les 20 tubes alignés verticalement refroidis par de l'eau**

3.12 Ébullition d'une quantité d'eau

Une casserole en acier inoxydable est chauffée électriquement par son fond de diamètre $d = 200$ mm. La casserole est remplie d'eau. La température du fond de la casserole est constante et égale $T_s = 110°$C. Pour la pression de fonctionnement $p = 0{,}1013$ MPa, la température de saturation est $T_{sat} = 100$ °C.

Les propriétés thermophysiques de l'eau à la température 100 °C sont :

$$\mu_l = 282{,}5 \times 10^{-6} \text{ Pa s}, \rho_l = 958{,}4 \text{ kg m}^{-3}, C_{p,l} = 4{,}22 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1},$$

$\Delta H = 2\,258{,}8$ kJ kg^{-1}, $\text{Pr}_l = 1{,}75$, $\sigma = 588{,}6 \times 10^{-4}$ N m^{-1}, $\rho_v = 0{,}598$ kg m^{-3}.

a) Déterminer la densité de flux de chaleur à la surface chauffée.
b) Déterminer la quantité de vapeur créée.
c) Déterminer la valeur du flux critique.

www.biblio-scientifique.net

Solutions des exercices

3.1 Les grandeurs relatives à la convection naturelle sont :
- Caractéristiques du fluide : $\lambda_f,\ \rho,\ \mu,\ C_p,\ \beta\ g\ \Delta T$
- Écart de température dans la couche limite ΔT
- Caractéristique géométrique de la paroi : longueur L

On a donc $n = 7$ grandeurs physiques, qui s'expriment à l'aide de $k = 4$ unités fondamentales : $M,\ L,\ T,\ \theta$ (masse, longueur, temps et température).
En appliquant le théorème de Vaschy–Busckingham, avec $n - k = 3$ on écrit la relation avec les groupements adimensionnels $\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3$:

$$\psi(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3) = 0$$

En choisissant 4 grandeurs de base $\lambda_f, \rho,\ \mu,\ L$ on exprime ces trois groupements :

$$\pi_1 = \lambda_f^{a_1}\ \rho^{b_1}\ \mu^{c_1}\ L^{d_1}\ h$$
$$\pi_2 = \lambda_f^{a_2}\ \rho^{b_2}\ \mu^{c_2}\ L^{d_2}\ \beta g \Delta T$$
$$\pi_3 = \lambda_f^{a_3}\ \rho^{b_3}\ \mu^{c_3}\ L^{d_3}\ C_p$$

a) Les équations aux dimensions des différents paramètres sont :

$$[L] = L,\quad [\mu] = \text{Pa s} = M\ L^{-1}T^{-1},\quad [\lambda_f] = \text{W m}^{-1}\ \text{K}^{-1} = M\ L\ T^{-3}\theta^{-1},$$

$$[C_p] = \text{J kg}^{-1}\ \text{K}^{-1} = L^2\ T^{-2}\ \theta^{-1},\quad [h] = \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-1} = M\ T^{-3}\ \theta^{-1},$$

$$[\rho] = M\ L^{-3},\quad [\beta g \Delta T] = L\ T^{-2}.$$

En écrivant l'équation aux dimensions du groupement π_2 (celui qui fait intervenir $\beta g \Delta T$) on obtient :

$$[\pi_2] = \left[\left(M\ L\ T^{-3}\theta^{-1}\right)^{a_2}\ \left(M\ L^{-3}\right)^{b_2}\ \left(M\ L^{-1}T^{-1}\right)^{c_2}\ (L)^{d_2}\ \left(L\ T^{-2}\right)\right]$$
$$= \left[M^{a_2+b_2+c_2}\ L^{a_2-3b_2-c_2+d_2+1}\ T^{-3a_2-c_2-2}\ \theta^{-a_2}\right] = [1]$$

Les exposants sont solution du système :

$$a_2 + b_2 + c_2 = 0$$
$$a_2 - 3b_2 - c_2 + d_2 + 1 = 0$$
$$-3a_2 - c_2 - 2 = 0$$
$$a_2 = 0$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

On trouve : $a_2 = 0,\ b_2 = 2,\ c_2 = -2,\ d_2 = 3.$
Ceci conduit donc à :

$$\pi_2 = \lambda_f^0\ \rho^2\ \mu^{-2}\ L^3\ \beta g \Delta\theta = \frac{\beta g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2}$$

Avec la viscosité cinématique du fluide $\nu = \mu/\rho$:

$$\pi_2 = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2}.$$

Le groupement π_2 est appelé le nombre de Grashof :

$$\mathrm{Gr} = \frac{\beta g \Delta T L^3}{\nu^2}.$$

3.2 **a)** On obtient le coefficient moyen en intégrant son expression locale entre 0 et x :

$$\overline{h}_x(x) = \frac{1}{x}\int_0^x h_x(x)\,dx = \frac{a}{x}\int_0^x x^{-0,2}dx = \frac{a}{x}\left(\frac{x^{0,8}}{0,8}\right) = 1,25\ a\ x^{-0,2}$$

Soit :

$$\overline{h}_x(x) = 1,25\ h_x(x)$$

On voit que le coefficient moyen est supérieur au coefficient local à x donné.

b) Les deux coefficients diminuent avec la distance au bord d'attaque.

3.3 **a)** La température moyenne est :

$$T_m = (T_h + T_s)/2 = (80 + 120)/2 = 100\ °\mathrm{C}.$$

On utilise donc les propriétés données dans l'énoncé.
L'écoulement de la couche limite est laminaire sur la distance :

$$x_{x_{cr}} = \frac{\nu_h \mathrm{Re}_{x_{cr}}}{u} = \frac{0,203 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^5}{1} = 10,15\ \mathrm{m}$$

b) Le coefficient d'échange pour cette distance est déduit de la corrélation [3.37] :

$$\mathrm{Nu}_{x_{cr}} = 0,664\ \mathrm{Re}_{x_{cr}}^{0,5}\mathrm{Pr}_h^{0,33} = 0,664\ \left(5 \times 10^5\right)^{0,5}\ 315^{0,33} = 3\ 134$$

Soit :

$$h_{x_{cr}} = 3\ 134\frac{\lambda_h}{x_{cr}} = 3\ 134\frac{0,126}{10,15} = 38,91\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

www.biblio-scientifique.net

3.4 On utilise la corrélation pour l'écoulement externe autour d'un cylindre afin de calculer le coefficient de transfert convectif h. On calcule d'abord le nombre de Reynolds pour l'écoulement d'hélium :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{He}\, u\, d}{\mu_{He}} = \frac{0{,}65 \times 54 \times 0{,}01}{8{,}5 \times 10^{-6}} = 41\,294$$

Dans le tableau 3.2 (ligne 4 et 5) on trouve les valeurs de C et m indiquées pour Re <40 000 et pour Re >40 000. La valeur de Re calculée précédemment est proche de cette valeur limite. On calcule donc le nombre de Nusselt pour les deux corrélations (Re <40 000 et Re >40 000), et on détermine la moyenne des deux. Nous avons donc $\mathrm{Nu} = 126{,}4 = (h\, d)/\lambda_{He}$, d'où on déduit le coefficient h caractérisant la convection de chaleur entre le barreau et l'hélium :

$$h = \frac{\lambda_{He}\,\mathrm{Nu}}{d} = \frac{0{,}06 \times 126{,}4}{0{,}01} = 758{,}4\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

Le flux de chaleur transféré par convection à l'hélium est donc :

$$\phi_{conv} = h\ S\ (T_{Cu} - T_{He}) = 758{,}4 \times 3{,}14 \times 0{,}01 \times 0{,}10\,(80 - 77) = 7{,}14\ \mathrm{W}$$

La masse M de cuivre est :

$$M = \rho_{\mathrm{cu}}\,\frac{\pi\, d^2}{4}\,L = 8\,940\,\frac{3{,}14 \times 0{,}0001}{4}\,0{,}10 = 0{,}070\ \mathrm{kg} = 70\ \mathrm{g}$$

En régime permanent, le flux de chaleur emmagasiné dans le barreau par induction est égal à celui évacué entre le barreau et l'hélium par convection. Ainsi, on trouve le flux thermique emmagasiné par unité de masse du barreau de cuivre :

$$Q = \frac{\phi_{gen}}{M} = \frac{\phi_{conv}}{M} = \frac{7{,}14\ \mathrm{W}}{70\ \mathrm{g}} = 0{,}102\ \mathrm{W\ g^{-1}}$$

3.5 **a)** On suppose que le fil est infiniment long et donc on détermine le coefficient d'échange à partir des corrélations correspondant aux conditions d'écoulement forcé autour d'un cylindre infini.

La température moyenne de l'air est :

$$T_m = \frac{T_{air} + T_{fil}}{2} = \frac{25 + 75}{2} = 50\ °\mathrm{C}$$

On calcule le nombre de Reynolds :

$$\mathrm{Re}_{air} = \frac{u\, d}{\nu_{air}} = \frac{1{,}2 \times 1{,}5 \times 10^{-3}}{17{,}95 \times 10^{-6}} = 100{,}3$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

On utilise la corrélation (tableau 3.2, ligne 3) pour déterminer le nombre de Nusselt :

$$\mathrm{Nu}_{air} = 0{,}683\ \mathrm{Re}_{air}^{0{,}466}\mathrm{Pr}_{air}^{0{,}33} = 0{,}683 \times 100{,}3^{0{,}466} \times 0{,}698^{0{,}33} = 5{,}19$$

Le coefficient d'échange est alors :

$$h = \mathrm{Nu}_{air}\frac{\lambda_{air}}{d} = 5{,}19\frac{0{,}0283}{0{,}0015} = 97{,}92\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

Le flux de chaleur, par unité de longueur du fil, échangé avec l'air est donc :

$$\varphi = \pi\ d\ h\left(T_{fil} - T_{air}\right) = \pi\ 0{,}0015 \times 97{,}92\,(75 - 25) = 23{,}06\ \mathrm{W\ m^{-1}}$$

b) Le flux échangé correspond à la chaleur générée par effet Joule dans 1 m de longueur de fil pendant 1 s quand il est parcouru par un courant I :

$$\phi = I^2\ R_e = I^2\frac{4\ \rho_e\ 1}{\pi\ d^2}$$

Donc l'intensité maximale est :

$$I = \sqrt{\frac{\pi\ d^2}{4\ \rho_e}q} = \sqrt{\frac{\pi \times 0{,}0015^2}{4 \times 0{,}035 \times 10^{-6}}23{,}06} = 34{,}11\ \mathrm{A}$$

3.6 **a)** On utilise la valeur critique du nombre de Reynolds pour déterminer la longueur critique :

$$x_{cr} = \frac{\mathrm{Re}_{cr}\ \nu}{u} = \frac{5 \times 10^5 \times 1{,}6 \times 10^{-5} \times 3\,600}{10^5} = 0{,}288\ \mathrm{m}$$

À partir de $x_{cr} = 0{,}288$ m on a le régime turbulent. Pour x variant du bord d'attaque jusqu'à $x_{cr} = 0{,}288$ m, on utilise la corrélation [3.36] :

$$\mathrm{Nu}_x\,(x) = 0{,}332\mathrm{Re}_x^{0{,}5}\mathrm{Pr}^{0{,}33} \text{ avec } \mathrm{Nu}_x = h\,(x)\,x/\lambda_{air}$$

On obtient :

$$h_l\,(x) = 0{,}332\mathrm{Pr}^{0{,}33}\frac{\lambda_{air}}{x}\sqrt{\frac{v\ x}{\nu_{air}}} = \underbrace{0{,}332\mathrm{Pr}^{0{,}33}\lambda_{air}\sqrt{\frac{v}{\nu}}}_{M}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{M}{\sqrt{x}}$$

Pour x plus grand que $x_{cr} = 0{,}288$ m, on utilise la corrélation [3.38] :

$$\mathrm{Nu}_x\,(x) = 0{,}0296\mathrm{Re}_x^{0{,}8}\mathrm{Pr}^{0{,}33}$$

www.biblio-scientifique.net

Ceci nous permet de déterminer le coefficient $h_t(x)$:

$$h_t(x) = 0{,}0296\mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}^{0,33} = 0{,}0296\mathrm{Pr}^{0,33}\frac{\lambda_{air}}{x}\left(\frac{v\,x}{\nu_{air}}\right)^{0,8}$$

$$= \underbrace{0{,}0296\mathrm{Pr}^{0,33}\lambda_{air}\left(\frac{v}{\nu}\right)^{0,8}}_{K} x^{-0,2} = K x^{-0,2}$$

b) Pour obtenir les coefficients moyens on intègre le $h_l(x)$ de 0 à x_{cr} :

$$\overline{h}_l = \frac{1}{x_{cr}}\int_0^{x_{cr}} h_l(x) = \frac{M}{x_{cr}}\int_0^{x_{cr}} x^{-1/2} = \frac{2M}{\sqrt{x_{cr}}}$$

Pour $\overline{h}_t$ on intègre entre x_{cr} et L:

$$\overline{h}_t = \frac{1}{L - x_{cr}}\int_{x_{cr}}^{L} h_t(x) = \frac{K}{L - x_{cr}}\int_{x_{cr}}^{L} x^{-1/5} = K\frac{5\left(L^{4/5} - x_{cr}^{4/5}\right)}{4(L - x_{cr})}$$

Application numérique : $M = 10{,}38 \quad K = 68{,}92$

$$\overline{h}_l = 38{,}68\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}} \quad \overline{h}_t = 69{,}02\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

c) Le calcul est évident :

$$\overline{h} = \frac{0{,}288}{2}\overline{h}_l + \frac{2 - 0{,}288}{2}\overline{h}_t = 64{,}65\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

3.7 En convection naturelle un tel échange se calcule par une corrélation expérimentale de type [3.53] :

$$\mathrm{Nu} = C\,(\mathrm{Gr\ Pr})^n$$

Le nombre de Grashof est :

$$\mathrm{Gr}_L = \frac{\beta\ g\ \Delta T\ \rho_{air}^2 L^3}{\mu_{air}^2}$$

Avec : $\beta_{air} = 1/(273 + 30) = 0{,}0029\ \mathrm{K^{-1}}$, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\ s^{-2}}$, $\Delta T = 20\ \mathrm{K}$, $\rho_{air} = 1{,}149\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$, $\mu_{air} = 18{,}4 \times 10^{-6}$ Pa s, $L = 6$ m, on obtient :

$$\mathrm{Gr}_L = \frac{0{,}0033 \times 9{,}81 \times 20\,(1{,}149)^2\,(6)^3}{\left(18{,}4 \times 10^{-6}\right)^2} = 5{,}45 \times 10^{11}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Le nombre de Prandtl est :

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu_{air}\ C_{p,air}}{\lambda_{air}} = \frac{18{,}4 \times 10^6 \times 1\ 006}{0{,}0258} = 0{,}718$$

On calcule alors le produit $\mathrm{Gr}_L\ \mathrm{Pr} = \mathrm{Ra}_L$ qui détermine le régime de convection naturelle (laminaire ou turbulente), la valeur critique étant de 10^9 :

$$\mathrm{Gr}_L\ \mathrm{Pr} = \mathrm{Ra}_L = 5{,}45 \times 10^{11} \times 0{,}718 = 3{,}91 \times 10^{11}$$

On est donc en régime de convection naturelle turbulente et on utilise les coefficients $C = 0{,}10$ et $n = 1/3$ (tableau 3.3, ligne 1) dans la corrélation précédente. On en déduit la valeur du nombre de Nusselt :

$$\mathrm{Nu}_L = \frac{h\ L}{\lambda_{air}} = C\ (\mathrm{Gr}_L\ \mathrm{Pr})^n = 0{,}10\ \left(3{,}91 \times 10^{11}\right)^{1/3} = 731$$

Ainsi, le coefficient d'échange convectif h est :

$$h = \frac{\lambda_{air}\ \mathrm{Nu}}{L} = \frac{0{,}0258\ \times\ 731}{6} = 3{,}14\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

Donc le flux de chaleur échangé sur toute la surface S est :

$$\phi = h\ S\ (T_m\ -\ T_{air})$$

Soit :

$$\phi = 3{,}14 \times 6 \times 10\,(40 - 20) = 3\ 768\ \mathrm{W}$$

3.8 **a)** La résistance thermique de l'enveloppe est très petite devant celle de la sphère remplie d'huile (conductivité de l'acier élevée et épaisseur de l'enveloppe très petite devant le diamètre de la sphère). On peut donc ne pas tenir compte de la présence de l'enveloppe pour écrire le flux échangé entre l'huile et l'air à chaque instant.

b) Si on suppose que l'huile est à une température homogène à chaque instant, il n'y a donc pas de conduction de la chaleur dans l'huile. Ainsi, le bilan thermique pour huile dans le réservoir s'écrit :

$$-m_h C_{ph} \frac{dT}{dt} = h\ A\,(T - T_{air})$$

Où : m_h est la masse d'huile et A est la surface extérieure de réservoir : $A = \pi\ d^2$. En remplaçant la masse et la surface dans le bilan on obtient :

$$-\frac{\pi\ d^3}{6} \rho_h C_{ph} \frac{dT}{dt} = h\ \pi\ d^2\,(T - T_\infty)$$

www.biblio-scientifique.net

Soit :

$$-\frac{dT}{dt} = \frac{6\,h}{\rho_h C_{ph} d}\,(T - T_{air})$$

Le coefficient d'échange en convection naturelle est obtenu à partir de la corrélation [3.53] :

$$\mathrm{Nu}_{air} = C\,(\mathrm{GrPr})_{air}^{n}$$

Soit :

$$\frac{h\,d}{\lambda_{air}} = C\left(\frac{g\,\beta_{air} d^3\,(T - T_{air})}{\nu_{air}^2}\mathrm{Pr}_{air}\right)^n$$

Ou encore :

$$h = C\left(\frac{g\,\beta_{air} d^{((3-1)/n)} k_{air}^{1/n}}{\nu_{air}^2}\mathrm{Pr}_{air}\right)^n (T - T_{air})^n$$

Ce coefficient est dépendant de la différence entre la température de l'huile et de l'air. Le coefficient de dilatation thermique est :

$$\beta_{air} = 1/\,(273 + 70) = 0{,}0029\ \mathrm{K}^{-1}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ra}_{air} = (\mathrm{GrPr})_{air} &= \frac{g\,\beta_{air} d^3\,(T_0 - T_{air})}{\nu_{air}^2}\mathrm{Pr}_{air}\\ &= \frac{9{,}81 \times 0{,}0029 \times 0{,}5^3\,(120 - 20)}{\left(20{,}02 \times 10^{-6}\right)^2}0{,}694 = 6{,}16 \times 10^8\end{aligned}$$

On adoptera ici la corrélation pour un écoulement autour d'un cylindre en régime turbulent (tableau 3.3, ligne 4) avec : $C = 0{,}135$ et $n = 1/3$. En introduisant les constantes C et n ainsi que les propriétés physiques dans l'expression du coefficient d'échange convectif on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}h &= 0{,}135\left(\frac{9{,}81 \times 0{,}0297^3}{\left(20{,}02 \times 10^{-6}\right)^2}0{,}694\right)^{1/3}\left(\frac{T - T_{air}}{(T + T_{air})/2}\right)^{1/3}\\ &= 12{,}99\left(\frac{T - T_{air}}{T + T_{air}}\right)^{1/3}\end{aligned}$$

On introduit la relation précédente dans l'expression d'évolution de la température :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-6 \times 12{,}99}{819{,}6 \times 2{,}261 \times 10^3 \times 0{,}5}\frac{(T - T_{air})^{4/3}}{(T + T_{air})^{1/3}} = -8{,}41 \times 10^{-5}\frac{(T - T_{air})^{4/3}}{(T + T_{air})^{1/3}}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

On utilise le changement de variable : $u = T - T_{air}$, ce qui conduit à :

$$\frac{du}{dt} = -\,8{,}41 \times 10^{-5} \frac{u^{4/3}}{(2\,T + u)^{1/3}} = -8{,}41 \times 10^{-5} \frac{u^{4/3}}{(586 + u)^{1/3}}$$

Où : $u = u_0 = T_0 - T_{air}$ pour $t = 0$.
Pour résoudre l'équation différentielle précédente il faut l'intégrer numériquement. Néanmoins, lorsque $u/586 \ll 1$, il est possible d'obtenir une solution analytique. Si on suppose que cette condition est remplie :

$$u^{-4/3} du = \frac{-8{,}41 \times 10^{-5}}{586^{1/3}} dt = -1{,}0 \times 10^{-5} dt$$

On intègre cette expression :

$$\int_{u_0}^{u} u^{-4/3} du = -3\,u^{-1/3}\Big|_{u_0}^{u} = -1{,}0 \times 10^{-5} t$$

On obtient alors une expression de la température :

$$T = T_{air} + \frac{1}{\left[(T_0 - T_{air})^{-1/3} + \left(1{,}0 \times 10^{-5}/3\right) t\right]^3}$$

À $t = 2$ h $= 7\,200$ s la température de l'huile est :

$$T = 20 + \frac{1}{\left[(120 - 20)^{-1/3} + \left(1{,}0 \times 10^{-5}/3\right) 7\,200\right]^3} = 92{,}8\ ^\circ\mathrm{C}$$

On vérifie que $\dfrac{u_0}{586} = \dfrac{120 - 20}{586} \approx 0{,}17 < 1$ et donc l'hypothèse de départ pour la résolution est vérifiée.
La température moyenne de la couche limite d'air après deux heures de refroidissement est égale à :

$$T_m = \frac{T + T_{air}}{2} = \frac{98{,}2 + 20}{2} = 56{,}4\ ^\circ\mathrm{C}$$

Elle est seulement de 13.6 °C plus faible que la température pour laquelle on a déterminé les propriétés physiques de l'air. La variation des propriétés physiques de l'air est donc faible et n'influence pas considérablement sur le résultat du calcul.

www.biblio-scientifique.net

3.9 La température moyenne de l'air est :

$$T_m = \frac{T_{fil} + T_{air}}{2} = \frac{300 + 20}{2} = 160\ °\text{C}$$

Le coefficient de dilatation thermique est : $\beta_{air} = 1/(273 + 160) = 0{,}0023\ \text{K}^{-1}$
On calcule donc la valeur du nombre de Grashof :

$$\text{Gr}_{air} = \frac{g\ \beta_{air} d^3 (T_0 - T_{air})}{\nu_{air}^2} = \frac{9{,}81 \times 0{,}0023\,(0{,}5 \times 10)^3\,(300 - 20)}{\left(30{,}09 \times 10^{-6}\right)^2} = 0{,}872$$

Le nombre de Rayleigh est alors :

$$\text{Ra}_{air} = (\text{Gr Pr})_{air} = 0{,}872 \times 0{,}682 = 0{,}595$$

D'après le tableau 3.3, ligne 4, on adoptera donc les valeurs des constantes $C = 1{,}02$ et $n = 0{,}148$. Le nombre de Nusselt est :

$$\text{Nu}_{air} = C\,(\text{Gr Pr})_{air}^n = 1{,}02\,(0{,}595)^{0{,}148} = 0{,}945$$

Le coefficient d'échange est donc :

$$h = \text{Nu}_{air} \frac{\lambda_{air}}{d} = 0{,}945 \frac{0{,}0364}{0{,}0005} = 68{,}80\ \text{W m}^{-2}\ \text{K}^{-1}.$$

En régime stationnaire, le flux de chaleur dissipé par effet Joule dans le fil est égal au flux évacué dans l'air par convection :

$$R_e I^2 = h\ \pi\ d\ L\left(T_{fil} - T_{air}\right)$$

En prenant en compte l'expression de la résistance électrique du fil $R_e = 4\rho_e L/\left(\pi d^2\right)$, on obtient donc l'intensité maximale :

$$I = \sqrt{\frac{h\ \left(T_{fil} - T_{air}\right)\pi^2\ d^3}{4\rho_e}} = \sqrt{\frac{68{,}80\,(300 - 20)\,\pi^2\left(0{,}5 \times 10^{-3}\right)^3}{4 \times 3{,}3 \times 10^{-6}}} = 1{,}34\ \text{A}$$

3.10 La température moyenne maximale est :

$$T_m = (T_{air} + T_s)/2 = (20 + 80)/2 = 50\ °\text{C}.$$

On calcule le nombre de Grashof :

$$\text{Gr}_{air} = \frac{g\ \beta_{air}\,(T_s - T_{air})\,H^3}{\nu_{air}^2} = \frac{9{,}81 \times 0{,}0031\,(80 - 20)\,H^3}{\left(17{,}95 \times 10^{-6}\right)^2} = 5{,}656 \times 10^9 H^3$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

En supposant tout d'abord que la convection est turbulente à la surface du convecteur, on prendra la corrélation (tableau 3.3, ligne 1) :

$$\mathrm{Nu}_{air} = 0{,}1\,(\mathrm{GrPr})_{air}^{1/3} = 0{,}1\left(5{,}656 \times 10^9 H^3 \times 0{,}698\right)^{1/3} = 158H$$

On en déduit le coefficient d'échange :

$$h = \mathrm{Nu}_{air}\frac{\lambda_{air}}{H} = 158 \times 0{,}0283 = 4{,}47\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

En régime stationnaire la puissance source du convecteur est évacuée par convection dans l'air ambiant :

$$h = \frac{\phi}{2\,l\,H\,(T_s - T_{air})}$$

Donc, à partir des deux dernières relations, on trouve la hauteur H :

$$H = \frac{\phi}{2\,l\,h\,(T_s - T_{air})} = \frac{1\,500}{2 \times 1{,}5 \times 4{,}47\,(80 - 20)} = 1{,}86\ \mathrm{m}$$

En suivant la même démarche pour le régime laminaire (tableau 3.3, ligne 1) on obtient les 3 relations équivalentes :

$$\mathrm{Nu}_{air} = 0{,}59\,(\mathrm{Gr\ Pr})_{air}^{1/4} = 0{,}59\left(5{,}656 \times 10^9 H^3 \times 0{,}698\right)^{1/4} = 147{,}89H^{3/4}$$

$$h = \mathrm{Nu}_{air}\frac{\lambda_{air}}{H} = 147{,}89\ H^{3/4} \times 0{,}0283 = 4{,}18H^{-1/4}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

$$h = \frac{\phi}{2\,l\,H\,(T_s - T_{air})}$$

Donc la hauteur H est :

$$H = \frac{\phi}{2\,l\,h\,(T_s - T_{air})} = \left[\frac{1\,500}{2 \times 1{,}5 \times 4{,}18\,(80 - 20)}\right]^{4/3} = 2{,}51\ \mathrm{m}$$

3.11 La température moyenne de l'eau est :

$$T_{eau} = (T_{eau1} + T_{eau2})\,/2 = (20 + 10)\,/2 = 15\ °\mathrm{C}$$

Le nombre de Reynolds est :

$$\mathrm{Re}_{eau} = \frac{u\,d}{\nu_{eau}} = \frac{1{,}5 \times 0{,}015}{1{,}15 \times 10^{-6}} = 19\,565$$

www.biblio-scientifique.net

L'écoulement est donc turbulent, on adoptera donc la corrélation [3.43] qui conduit à :

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023\ \mathrm{Re}^{0,8}\mathrm{Pr}_h^{0,33} = 0{,}023 \times 19\ 565^{0,8} \times 8{,}3^{0,33} = 125{,}37$$

Le coefficient d'échange à la surface interne du tube est alors :

$$h_{eau} = \frac{\mathrm{Nu}_{eau}\lambda_{eau}}{d} = \frac{125{,}37 \times 0{,}587}{0{,}015} = 4\ 906{,}1\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

Le coefficient d'échange à la surface externe du tube, pour 20 tubes, est d'après [3.60] :

$$\overline{h}_{20d} = 0{,}729 \left[\frac{g\,(\rho_l - \rho_v)\,k_l^3 \Delta H}{\nu_l\,(T_{sat} - T_s)\,d\ 20}\right]^{1/4}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\overline{h}_{20d} &= 0{,}729 \left[\frac{9{,}81\,(996 - 0{,}0287)\,0{,}616^3 \times 2\ 433 \times 10^3}{0{,}825 \times 10^{-6} \times 0{,}018 \times\ 20}\right]^{1/4} (T_{sat} - T_s)^{-1/4} \\ &= 8\ 526\,(T_{sat} - T_s)^{-1/4}\end{aligned}$$

En régime stationnaire le flux traversant le tube côte vapeur est égal au flux évacué vers l'eau au travers de la paroi du tube :

$$\phi = \frac{\left(T_{s,eau} - T_{eau}\right)}{\dfrac{1}{\pi\ d_i\ h_{eau}}} = \frac{\left(T_s - T_{s,eau}\right)}{\dfrac{\ln\left(d_e/d_i\right)}{2\ \pi\ k}} = \frac{(T_{sat} - T_s)}{\dfrac{1}{\pi\ d_e\ h_{20d}}},\ \left[\mathrm{W\ m^{-1}}\right]$$

$T_{s,eau}$ est la température de la paroi du tube côté eau. La dernière relation est équivalente à :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{(T_s - T_{eau})}{\dfrac{1}{\pi\ d_i\ h_{eau}} + \dfrac{\ln\left(d_e/d_i\right)}{2\ \pi\ k}} \\ &= \frac{(T_s - T_{eau})}{\dfrac{1}{\pi \times 0{,}015 \times 4\ 906{,}1} + \dfrac{\ln\left(0{,}018/0{,}015\right)}{2 \times \pi \times 110}} \\ &= 217{,}80\,(T_s - T_{eau})\end{aligned}$$

Le flux échangé par convection entre la vapeur et la surface du tube est :

$$\begin{aligned}\phi &= \pi\ d_e\ h_{20d}\,(T_{sat} - T_s) = \pi\ d_e\ 8\ 526\,(T_{sat} - T_s)^{-1/4}\,(T_{sat} - T_s) \\ &= 482{,}1\,(T_{sat} - T_s)^{3/4}\end{aligned}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

L'égalité entre les deux expressions du flux conduit à :

$$482{,}1\,(T_{sat} - T_s)^{3/4} = 217{,}80\,(T_s - T_{eau})$$

Ceci permet de déterminer la température T_s solution de :

$$482{,}1\,(28{,}98 - T_s)^{3/4} = 217{,}80\,(T_s - 15)$$

Soit :

$$T_s = 23{,}225\ ^\circ\mathrm{C}$$

On peut donc maintenant calculer le coefficient d'échange côte vapeur :

$$\overline{h}_{20d} = 8\,526\,(T_{sat} - T_s)^{-1/4} = 8\,526(28{,}98 - 23{,}225)^{-1/4} = 5\,504{,}7\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-1}}$$

Le flux de chaleur est alors :

$$\phi = \pi\, d_e\, h_{20d}\,(T_{sat} - T_s) = \pi \times 0{,}018 \times 5\,504{,}7\,(28{,}98 - 23{,}225) = 1\,790{,}5\ \mathrm{W\ m^{-1}}$$

La longueur des tubes résultera donc du rapport de la chaleur dégagée par la condensation et la chaleur évacuée par l'eau du circuit de refroidissement :

$$l = \frac{\dot{m}\Delta H}{\phi} = \frac{5 \times 2\,433 \times 10^3}{1\,790{,}5} = 6\,794{,}2\ \mathrm{m}$$

3.12 **a)** $T_s - T_{sat} = 10\ ^\circ\mathrm{C}$, on détermine donc à partir de la figure 3.21 que l'on est en régime d'ébullition nucléé.

Pour une interface eau–acier poli on trouve dans le tableau 3.4 les constantes $C_{s,f} = 0{,}006$ et $n = 1$.

D'après la relation [3.62], l'expression de la densité flux en ébullition nucléée permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\varphi &= \mu_l \Delta H \left[\frac{g\,(\rho_l - \rho_v)}{\sigma}\right]^{1/2} \left(\frac{c_{p,l}\,(T_s - T_{sat})}{C_{s,f}\Delta H \mathrm{Pr}_l^n}\right)^3 \\ &= 282{,}5 \times 10^6 \times 2\,256{,}8 \\ &\qquad \times 10^3 \sqrt{\frac{9{,}81\,(958{,}4 - 0{,}598)}{588{,}6 \times 10^{-4}}} \left(\frac{4{,}22 \times 10^3\,(110 - 100)}{2\,256{,}8 \times 10^3 \times 0{,}006 \times 1{,}75}\right)^3 \\ &= 1\,440 \times 10^3\ \mathrm{W\ m^{-2}}\end{aligned}$$

b) On obtient la quantité de vapeur produite à partir du flux fourni et de la chaleur de vaporisation :

$$\dot{m} = \frac{\varphi\,\pi\,d^2}{4\,\Delta H} = \frac{1\,440 \times 10^3 \times \pi \times 0{,}2^2}{4 \times 2\,256{,}8 \times 10^3} = 0{,}02\ \mathrm{kg\ s^{-1}}$$

www.biblio-scientifique.net

c) Le flux critique (point C sur la figure 3.21) est déterminé à partir de la relation [1.63] :

$$\begin{aligned}\varphi_{\max} &= 0{,}149 \Delta H \rho_v \left[\frac{\sigma g\,(\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2}\right]^{1/4} \\ &= 0{,}149 \times 2\,256{,}8 \times 10^3 \times \sqrt{0{,}598}\left[588{,}6 \times 10^{-4} \times 9{,}81\,(958{,}4 - 0{,}598)\right]^{1/4} \\ &= 1\,261 \times 10^3 \text{ W m}^{-2}\end{aligned}$$

www.biblio-scientifique.net

www.biblio-scientifique.net

4 RAYONNEMENT THERMIQUE

PLAN

4.1 Le processus physique de rayonnement thermique
4.2 Grandeurs physiques
4.3 Rayonnement des corps noirs
4.4 Rayonnement des corps réels
4.5 Références
Exercices
Solutions des exercices

OBJECTIFS

- Le rayonnement thermique est un phénomène électromagnétique caractérisé par une fréquence et une longueur d'onde.
- Ce phénomène requiert des outils géométriques : l'angle solide.
- La loi de Planck décrit le rayonnement des corps noirs.
- Le rayonnement des corps réels se modélise à partir de celui des corps noirs.
- L'hypothèse des corps gris permet de simplifier l'étude du rayonnement des corps réels.

4.1 Le processus physique de rayonnement thermique

4.1.1 Démonstration de son existence à partir d'une expérience

Considérons l'expérience représentée sur la figure 4.1. La surface interne d'une enceinte parfaitement isolée du milieu ambiant extérieur est à la température initiale T_{en}. On effectue un vide poussé à l'intérieur de l'enceinte. À un certain moment, on introduit, sans modifier les conditions de vide, un corps à la température $T_{cp} \neq T_{en}$.

Au bout d'un certain temps, on mesure la température de la surface interne de l'enceinte et celle du corps. On trouve que ces deux températures sont égales à la même température T_{eq}. Il y a eu donc transfert d'énergie sous forme de chaleur entre les deux corps. Étant donné qu'il n'y a pas de transfert de chaleur entre l'enceinte et le milieu ambiant et que la chaleur ne peut pas avoir été échangée par conduction et

www.biblio-scientifique.net

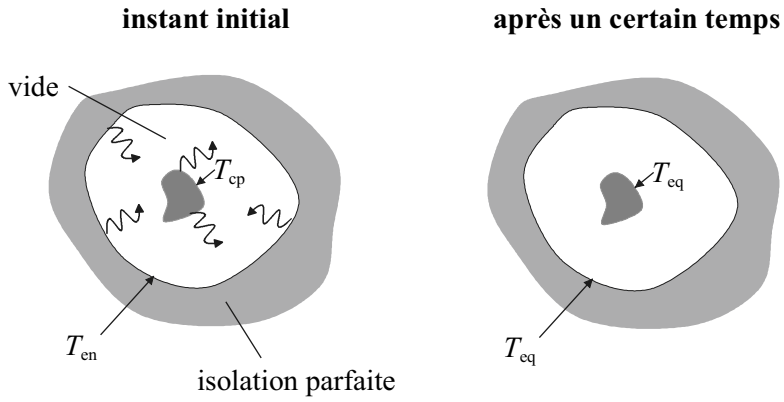


Figure 4.1 **Mise en évidence du processus de transfert de chaleur par rayonnement sur une expérience**

convection entre le corps et la surface de l'enceinte du fait du vide, on en déduit que ce transfert n'a pu s'effectuer que par le biais d'un troisième mode : c'est le rayonnement thermique. Remarquons aussi que lorsque l'équilibre thermique est atteint, il n'y a plus d'échange de chaleur par rayonnement.

Ce transfert thermique repose sur le transport de la chaleur à l'aide d'ondes électromagnétiques. L'exemple le plus évident et le plus important à notre échelle est celui du soleil. Le plasma solaire, dans lequel se produisent les réactions de fusion thermonucléaires, donne naissance à des photons. À l'intérieur du plasma, ces photons sont pour une grande majorité réabsorbés par les atomes constitutifs : Hydrogène et Hélium. Ce n'est qu'à la surface du soleil (cette couche est appelée la photosphère et représente moins de 0,1 % du rayon du soleil, soit environ 400 km) que les photons produits peuvent s'échapper. La température de cette couche d'émission est de 5 781 Kelvins. Chaque photon transporte une quantité d'énergie (ou quanta d'énergie) égale à $h\ f$, où $h = 6{,}6256 \times 10^{-34}$ J s est la constante de Planck et f est la fréquence (en s^{-1}) de l'onde associée au photon. La lumière émise par ces photons se situe principalement dans le domaine spectrale visible (notre œil voit ce rayonnement) ce qui correspond à une longueur d'onde moyenne $\lambda = 0{,}5$ µm. Avec la relation d'équivalence entre longueur d'onde et fréquence : $c_0 = \lambda f$, où $c_0 = 3 \times 10^8$ m s^{-1} est la vitesse de la lumière dans le vide, on trouve donc que la fréquence de l'onde est de l'ordre de 6×10^{14} s^{-1}. Le quanta d'énergie « photon » est donc de l'ordre de $3{,}9753 \times 10^{-19}$ J.

Nature physique duale onde - particule du rayonnement

Le rayonnement thermique est un phénomène ondulatoire, il est donc décrit par les relations de Maxwell pour les ondes électromagnétiques.

Le rayonnement thermique est aussi un phénomène particulaire. La mécanique quantique nous renseigne sur le comportement des photons et sur leurs interactions avec les atomes constituants la matière.

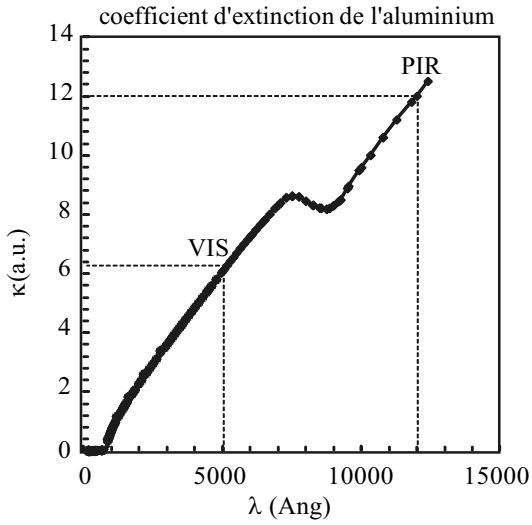
www.biblio-scientifique.net

Les photons émis par le soleil sont susceptibles d'être absorbés par les atomes constitutifs d'un matériau (solide, liquide ou gaz) sur Terre. Cette absorption a pour conséquence d'élever leur énergie interne et donc par voie de conséquence d'accroître la température du matériau dans la région où les photons ont été absorbés. Cette zone d'absorption se situe depuis la surface du matériau jusqu'à une certaine profondeur qui ne dépend que des propriétés optiques du matériau (voir encart concernant le coefficient d'extinction).

Le transfert par rayonnement est donc un phénomène d'émission - absorption de photons par la matière.

Profondeur d'absorption du rayonnement : le coefficient d'extinction

Le coefficient d'extinction optique κ d'un matériau est inversement proportionnel à la profondeur de pénétration z d'une onde électromagnétique dans la matière : $z = \lambda/4\pi\kappa$, où λ est la longueur d'onde du rayonnement. On voit donc que pour une longueur d'onde donnée, plus κ est grand et moins l'onde pénètre profondément dans le matériau. À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure ci-contre la variation de κ pour l'aluminium en fonction de la longueur d'onde. On voit que dans le domaine visible (VIS) à 0,5 µm le coefficient d'extinction est de l'ordre de 6, ce qui conduit à une valeur de $z = 6{,}63 \times 10^{-9}$ m = 6,63 nm alors que dans le proche infrarouge (PIR) à 1,2 µm, le coefficient d'extinction est double, ce qui conduit directement à dire que la profondeur d'absorption sera 2 fois plus petite que dans le visible.



4.1.2 Le spectre électromagnétique

Si le soleil émet préférentiellement dans le domaine visible (VIS) des longueurs d'onde, il n'en reste pas moins qu'il couvre aussi le domaine ultraviolet (UV) et infrarouge (IR). Ceci étant, c'est bien à la longueur d'onde de 0,5 µm que l'on trouve le plus de photons. Nous verrons plus loin que les corps dont la température est petite émettent dans l'IR. Ce que l'on doit garder à l'esprit c'est que le rayonnement thermique couvre un domaine de longueur d'onde s'étalant de 0,1 µm (UV) à 100 µm (IR lointain). Comme on peut le voir sur la figure 4.2, ce domaine reste très petit en regard du domaine de longueur d'onde rencontré dans la nature : de 10^{-5} µm pour les rayons gamma à 10^{4} µm pour les micro-ondes.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

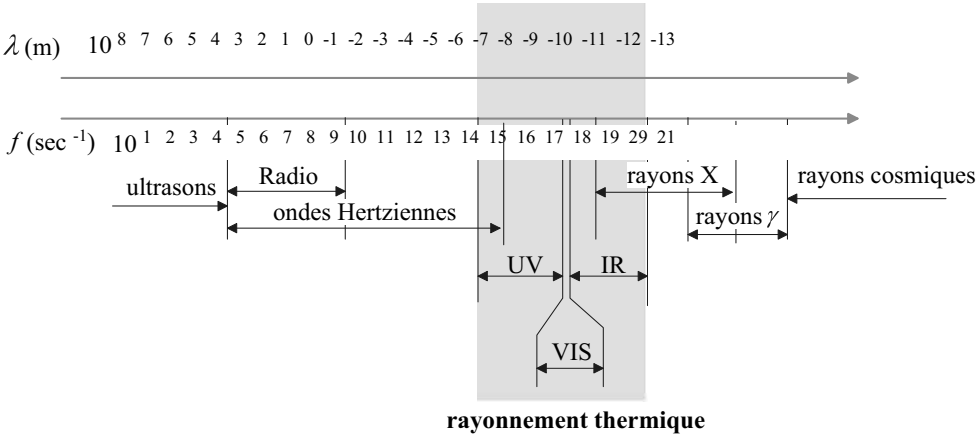


Figure 4.2 **Spectre électromagnétique complet et localisation de la partie contribuant au transfert de chaleur**

Au travers de la relation d'équivalence entre énergie et fréquence, on voit que les photons dans l'UV sont plus énergétiques que ceux dans le VIS qui sont eux-mêmes plus énergétiques que ceux dans l'IR. Mais n'oublions pas qu'il faut multiplier ce quantum par le nombre de photons pour avoir l'énergie totale du rayonnement.

La plupart des sources de rayonnement thermique ont des distributions spectrales plus ou moins étendues à savoir qu'elles recouvrent un certain domaine de longueur d'onde. Pour les lasers, on parle de rayonnements monochromatiques en ce sens qu'une seule longueur d'onde est concernée.

4.1.3 Explication physique simple de l'interaction photon–atome

La physique des ondes électromagnétiques nous renseigne sur la façon dont les ondes interagissent avec la matière et donc comment le matériau va se comporter du point de vue de ses propriétés optiques vis-à-vis du rayonnement. Par contre, cette physique n'est pas capable d'expliquer l'émission ou l'absorption des photons par la matière. Seule la physique quantique nous permet de comprendre comment un atome, un ion ou une molécule peut émettre un photon ou bien comment ce photon peut être absorbé par un atome, un ion ou une molécule.

Ces processus sont très complexes à décrire d'un point de vue mathématique mais nous pouvons en donner une explication physique raisonnable et compréhensible sans avoir à écrire d'équations compliquées. Ces processus d'absorption et d'émission sont liés à la quantification de l'énergie de l'atome, ou de l'ion, constitutif du matériau.

Afin de bien comprendre ces processus, il est utile de rappeler brièvement la structure atomique particulière des gaz et des solides.

Les règles de remplissage des niveaux d'énergie pour les atomes contenant plusieurs électrons (donc tous, excepté l'hydrogène) suivent le principe d'exclusion que Pauli a énoncé en 1925 : deux électrons confinés dans le même piège

www.biblio-scientifique.net

doivent obligatoirement posséder des nombres quantiques différents. Chaque couche, caractérisée par le nombre n, est constituée de $l = n - 1$ sous-couches. Dans chaque sous-couche l il peut y avoir jusqu'à $2l + 1$ valeurs du nombre quantique magnétique m_l et pour chaque valeur de m_l on peut avoir deux valeurs du spin $m_s = \pm 1/2$. Un rapide calcul montre donc qu'une sous-couche peut contenir $2(2l + 1)$ états possédant une énergie différente. On appelle orbitale l'état indicé (n, l, m_l). Seulement deux électrons au plus peuvent occuper une même orbitale. Ces deux électrons ne sont différents que par leur nombre quantique de spin qui vaut 1/2 ou -1/2. Plutôt que d'utiliser des chiffres, il est commun de repérer une sous-couche par une lettre : s pour $l = 0$, p pour $l = 1$, d pour $l = 2$, ... Ainsi la sous-couche $l = 1$ appartenant au niveau $n = 2$ s'écrit aussi $2p$. En utilisant cette notation et le principe d'exclusion de Pauli, il devient alors très facile de décrire la façon dont les électrons vont se répartir dans un atome à l'état fondamental. Considérons par exemple l'atome de néon qui contient 10 électrons. Le niveau d'énergie fondamentale $n = 1$, ne peut contenir qu'une couche et donc 2 électrons. Pour $n = 2$, nous aurons deux sous-couches, la première contenant deux électrons et la deuxième 6. Finalement nous obtenons l'arrangement suivant : $1s^2 2s^2 2p^6$, représenté sur la figure 4.3.

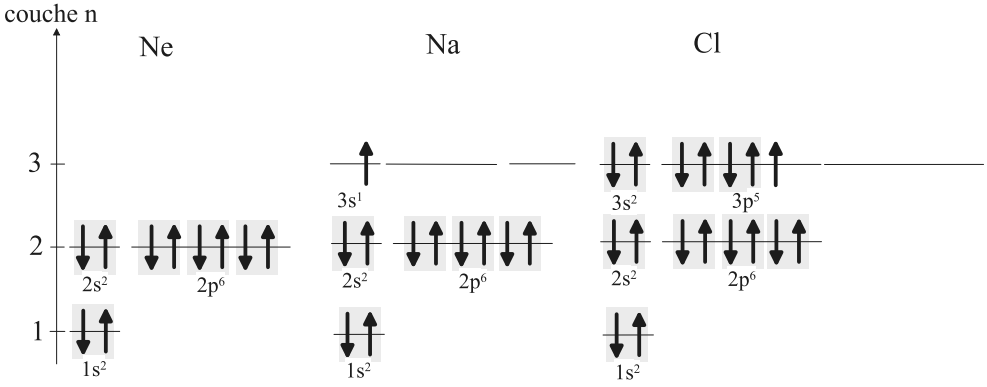


Figure 4.3 **Organisation des électrons dans 3 atomes différents**

Dans cette formule, l'exposant donne le nombre d'électrons associés à chaque sous-couche. Toutes les sous-couches sont intégralement remplies, le néon est donc chimiquement neutre. En adoptant la même démarche pour l'atome de sodium qui contient 11 électrons, on trouve l'arrangement suivant : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. On voit dans ce cas que l'atome de sodium peut offrir un électron, dit de valence, pour réaliser une liaison avec un atome possédant un trou. C'est par exemple le cas de l'atome de chlore qui possède 17 électrons et dont la formule est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$. On voit qu'il ne manque qu'un seul électron pour compléter la dernière sous-couche et on désigne cet emplacement comme un trou.

La nature et le nombre des électrons situés sur la couche externe d'un atome sont déterminants vis-à-vis de ses propriétés optiques.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

L'absorption d'un photon par un atome ne peut se produire que si l'énergie du photon permet de faire passer un électron à un état d'énergie supérieur qui soit libre. Or la description de l'arrangement atomique montre que seuls les électrons de la dernière couche ont des états libres au-dessus d'eux. Ainsi pour que l'électron de l'atome de sodium, initialement à l'état fondamental ($T = 0$ K), passe de la couche $n = 3$ à celle correspondant à $n = 4$ il faut que l'énergie du photon soit :

$$h\,f = E_4 - E_3 \tag{4.1}$$

Ce processus est réversible. En effet, tout état excité n'est pas stable, la particule désirant revenir en permanence dans une configuration d'équilibre avec le milieu extérieur. Si la particule passe de l'état excité i à l'état $i - 1$ moins énergétique, il y a alors possibilité d'émission d'un photon dont l'énergie sera : $h\,f = E_i - E_{i-1}$ (voir l'exemple pour le sodium sur la figure 4.4).

Pour appréhender ce phénomène il suffit juste de comprendre qu'un atome est un dipôle électrique : le noyau constitue la charge positive et le cortège électronique constitue la charge négative. À l'équilibre, les centres de gravité des charges positives et négatives sont confondus. Par contre, lorsque cet atome est mis en présence d'un champ électromagnétique, tel que celui associé à un photon, alors le dipôle est mis en mouvement d'oscillation. Lors de cette oscillation, les centres de gravité peuvent alors ne plus être confondus et le dipôle électrique prend une valeur non nulle. Ce faisant, l'atome peut alors échanger de l'énergie avec le photon en générant soit un phénomène d'absorption, soit un phénomène d'émission.

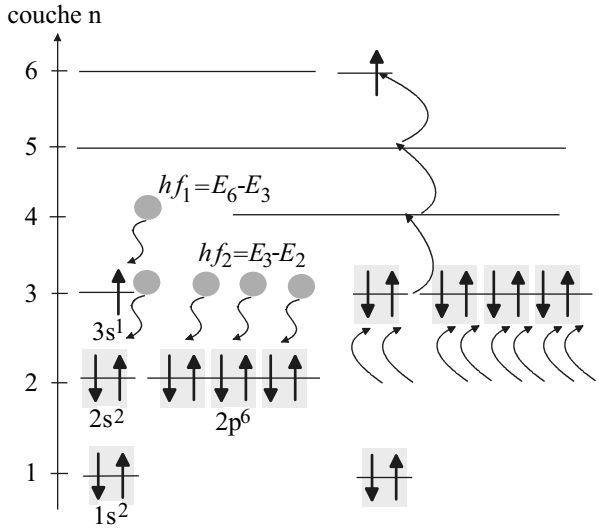
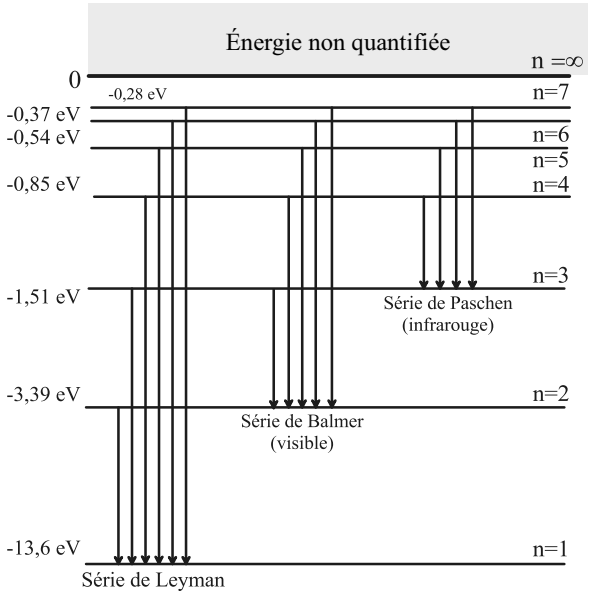


Figure 4.4 **Configuration probable de l'absorption de rayonnement par l'atome de sodium.**
Ici on imagine que l'atome reçoit des photons à deux longueurs d'onde correspondant aux fréquences f_1 et f_2 et coïncidant avec des différences de niveaux d'énergie quantifiés pour cet atome.

www.biblio-scientifique.net

L'absorption et émission de l'hydrogène

On place de l'hydrogène gazeux dans un tube en verre et on envoie une décharge électrique afin d'exciter les atomes. Supposons qu'à l'issue de la décharge, la température du gaz d'atomes soit T. L'atome d'hydrogène ne possédant qu'un seul électron, son étude est simple et en particulier on constate que ses niveaux d'énergie possible sont tels que : $E_n = -13{,}6/n^2$ eV (ces énergies sont négatives car nous considérons arbitrairement que l'énergie devient nulle quand on s'éloigne infiniment du noyau). La probabilité pour que l'électron occupe le niveau d'énergie n est donné par : $p(E_n) = C \exp(E_n / k_B T)$, où $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J K^{-1} = 8,617 $\times$ 10^{-5} eV K^{-1} est la constante de Boltzmann et C est une constante proche de 1. On voit donc que si la température est élevée, l'électron va occuper des niveaux énergétiques eux aussi élevés. Le gaz d'atomes va vouloir revenir à une configuration d'équilibre avec le milieu environnant et pour cela il va donc émettre du rayonnement thermique. On constate en effet que le tube émet un rayonnement qui comporte des longueurs d'onde très précises. Ces longueurs d'onde sont définies par la relation de Balmer : $1/\lambda = 1/ R_H (1/n_1^2 - 1/n_2^2)$ où $R_H = 1{,}0973 \times 10^{-7}$ m^{-1} est la constante de Rydberg et n_1 et n_2 sont des entiers correspondant aux niveaux énergétiques de l'atome d'hydrogène. Ainsi, par exemple, lorsque l'électron de l'atome d'hydrogène va passer du niveau 4 au niveau 1 la longueur d'onde du rayonnement émis se site à 97,2 nm, c'est-à-dire dans les UV. Cependant, cette transition électronique peut se faire en plusieurs étapes : du niveau 4 au niveau 3, on aura une longueur d'onde située à 1 874,5 nm, donc dans l'IR, puis du niveau 3 au niveau 2, la longueur d'onde sera de 656 nm donc dans le VIS et enfin du niveau 2 au niveau 1 où la longueur d'onde sera de 121,5 nm donc dans l'UV. Cette expérience marche aussi pour l'absorption. Il suffit pour cela d'éclairer le gaz d'hydrogène avec une lumière contenant tout le spectre des UV et des IR et de vérifier que le rayonnement transmis est dépourvu de certaines longueurs d'onde qui correspondent à celles données par la relation de Balmer.



Pour les molécules (ensembles formés par plusieurs atomes liés entre eux), les états énergétiques possibles sont du type électronique (comme pour les atomes) mais ils peuvent être aussi de type rotationnel et vibrationnel. En effet, les distances entre les noyaux des atomes formant la molécule varient et la molécule peut aussi avoir des

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

mouvements de rotation sur elle-même. Ces mouvements sont associés à des niveaux énergétiques qui sont eux aussi quantifiés. Les états énergétiques liés aux transitions rotationnelles sont associés aux grandes longueurs d'onde : 8–1 000 μm. Pour les transitions vibration–rotation les états énergétiques correspondent aux longueurs d'onde dans l'IR (1,5–20 μm). On voit qu'elles se distinguent des transitions électroniques qui correspondent à des longueurs d'onde allant de la fin des UV jusqu'au proche IR (0,4–0,7 μm).

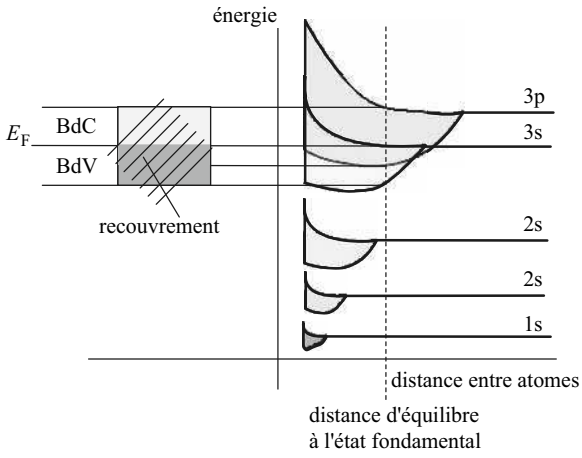
La molécule de CO_2

On peut distinguer 4 types d'absorption pour la molécule de CO_2 suivant l'énergie du photon incident. Pour un rayonnement dans l'ultraviolet on dépasse l'énergie d'ionisation de la molécule, les atomes sont alors dissociés. Dans ce cas l'absorption n'est plus quantifiée. Dans le domaine du visible ce sont les niveaux électroniques qui vont être affectés. L'absorption est quantifiée. Dans l'infrarouge, les molécules se mettent à vibrer. L'absorption est quantifiée. Enfin sous l'effet d'un rayonnement micro-ondes les molécules se mettent à tourner. L'absorption est toujours quantifiée.

Les matériaux solides sont structurés autour d'un réseau cristallin d'ions ou d'atomes. Lorsque différents atomes s'assemblent pour former un solide, les niveaux d'énergie des électrons de valence participant activement à la création des liaisons entre atomes, vont se modifier de façon à toujours respecter le principe de Pauli. À titre d'illustration, considérons la sous-couche de valence d'un atome. Lorsque l'on assemble 2 atomes identiques, les énergies des deux orbitales de valence obtenues seront relativement distantes l'une de l'autre. Au fur et à mesure que l'on va rajouter des atomes, l'espace entre les niveaux d'énergie des orbitales va décroître. Pour un nombre élevé d'atomes, cette répartition discrète pourra alors être assimilée à une répartition continue appelée bande d'énergie. Les propriétés optiques des matériaux solides ne dépendent que de la structure de ces bandes d'énergie comme nous allons l'illustrer sur les deux exemples ci-dessous.

Le magnésium (Mg, 12 électrons, 1s 2s 2p 3s 3p).

Chaque atome de magnésium possède une orbitale 3s et 3 orbitales 3p pour la couche de valence. Lorsque l'on assemble *n* atomes de Mg, on a alors *n* orbitales 3s et 3*n* orbitales 3p qui donnent naissance aux deux bandes d'énergie représentées sur la figure ci-contre. À l'état fondamental, mis en évidence par la droite verticale sur la figure, les électrons de valence pour tous ces atomes vont se répartir sur les états d'énergie les plus bas jusqu'à

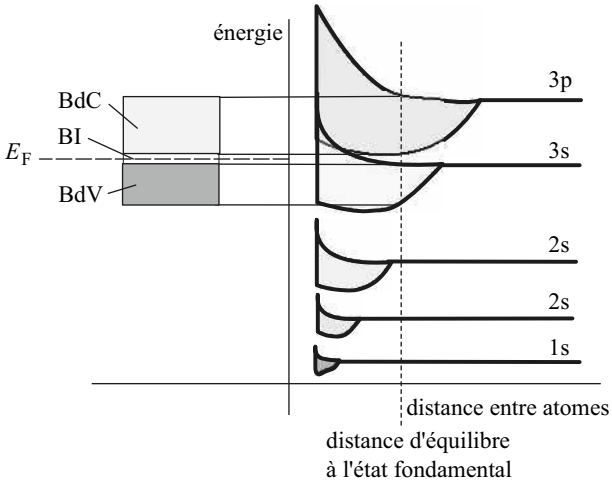


www.biblio-scientifique.net

atteindre l'énergie E_F appelée énergie de Fermi. Comme nous le voyons sur la figure, les deux bandes se chevauchent. Nous appellerons bande de valence (BV), la dernière couche saturée d'électrons. Au dessus se trouve la bande de conduction (BC), qui peut être vide ou partiellement occupée. Donc, sous l'effet d'une quelconque sollicitation thermique ou électromagnétique, les électrons pourront passer sur des orbitales 3p de la bande de conduction puisque ces orbitales sont libres. Le magnésium est donc un composé métallique contenant de nombreux électrons libres. L'énergie de ces électrons n'étant plus quantifiée comme dans le cas de l'atome, ils pourront alors absorber ou émettre du rayonnement thermique sur pratiquement tout le domaine spectral.

Le silicium

Une représentation de la configuration des bandes pour le silicium est donnée figure ci-contre. Il n'y a pas de recouvrement des deux bandes de valence et de conduction. La bande interdite est la bande située entre la bande de valence et la bande de conduction. Lorsque la bande interdite est très petite (en pratique lorsque sa hauteur E_g est inférieure à k_BT), il est possible de faire passer un électron de la bande de valence à la bande de conduction. Ce type de matériau est appelé semi-conducteur. Dans le cas où la bande interdite est d'amplitude supérieure à 4 eV, le transfert d'un électron de la BV à la BC est impossible et donc le matériau est un isolant. Les isolants et les semi-conducteurs sont transparents pour les photons dont l'énergie est inférieure à la largeur de la bande interdite ; ils peuvent en revanche absorber ceux dont l'énergie est assez grande pour faire franchir la bande interdite à un électron. Inversement, lorsqu'un électron de la bande de conduction retombe dans la bande de valence et se recombine avec un trou, il y a émission d'un photon.



Ces deux exemples montrent que si le réseau cristallin du solide est parfait alors il ne participe pas au transfert par rayonnement. Cependant, l'accroissement (absorption) ou la diminution (émission) de l'énergie des électrons va être transmise au réseau cristallin par le phénomène de conduction cela va contribuer à augmenter ou diminuer la température du solide. Dans les solides, la structure de bandes des électrons conduit à des spectres d'absorption très large contrairement à ce que l'on observe sur des atomes ou des molécules dans les gaz. D'autre part, les réseaux cristallins des solides ne sont jamais parfaits mais ils comportent différents types de défauts (ions manquants,

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

ions étrangers, défauts de structures...) qui vont induire des niveaux électroniques entre la bande de conduction et de valence. Les électrons vont pouvoir se déplacer sur ces états intermédiaires en générant de l'absorption ou de l'émission de photons sur les longueurs d'ondes liées à ces niveaux énergétiques.

Nous retiendrons que

- Le rayonnement thermique peut être émis ou absorbé par les électrons de manière quantifiée dans l'atome, les molécules ou les matériaux semiconducteurs.
- Le rayonnement thermique peut être émis ou absorbé par les électrons de manière continue lorsqu'ils sont libres dans les métaux.
- Les mouvements de translation–rotation des molécules dans les gaz ou les liquides permettent d'émettre ou d'absorber du rayonnement thermique de manière quantifiée.

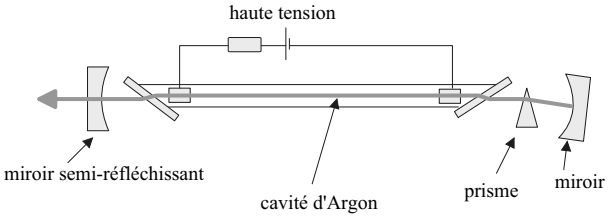
Nous verrons plus loin que la nature seule du matériau ne suffit pas à expliquer complètement ses propriétés en termes d'absorption. En effet, l'état de surface du matériau (rugosité) joue aussi un rôle prépondérant.

La luminescence

Chacun a entendu parler des phénomènes de fluorescence (de la luminescence à courte durée) et de phosphorescence (de la luminescence à longue durée). La photoluminescence consiste à éclairer un matériau avec une source lumineuse et à mesurer le rayonnement émis. Ce procédé est à la base de procédés de spectroscopie (effet Raman) ou bien pour mesurer l'absorption de matériaux peu absorbants. L'électroluminescence est basée sur une excitation à partir d'un champ électrique. Dans le cas des gaz, une décharge électrique génère des ions et des électrons qui vont s'entrechoquer et générer du rayonnement de photons (on a vu plus haut l'exemple de la lampe à hydrogène et on retrouve ce phénomène dans les tubes à néon). Dans le cas des solides semiconducteurs, lorsque les électrons de la bande de conduction se recombinent avec les trous de la bande de valence, il y a émission de photons dont la longueur d'onde sera proportionnelle à l'écart d'énergie entre les deux bandes. C'est ce phénomène qui est à l'origine des diodes électroluminescentes et des diodes lasers.

Les lasers

Les lasers sont une invention somme toute récente (35 à 40 ans) et qui repose sur un principe quantique que nous n'avons pas encore décrit : l'émission stimulée (ou induite). Illustrons ce processus sur un gaz. Pour réaliser de l'émission stimulée, il suffit de porter les atomes du gaz à un état énergétique haut ou excité. Pour cela on peut par exemple soumettre le



www.biblio-scientifique.net

gaz à une décharge électrique qui va générer des collisions, ces collisions vont ioniser le gaz et on soumet alors le gaz à un potentiel électrique très élevé (c'est le cas du laser argon ion). Comme le niveau énergétique des atomes est déjà haut, les photons initialement présents dans le gaz ne pourront pas être absorbés par les atomes. Donc les photons vont rentrer en collisions avec ces atomes ce qui va avoir pour conséquence d'abaisser leur niveau énergétique de la valeur de l'énergie du photon et par là même de générer l'émission d'un autre photon (phénomène d'émission classique). Ce qui est remarquable dans cette réaction en chaîne c'est que les photons émis ont exactement les mêmes caractéristiques que les photons incidents. Afin d'amplifier ce phénomène on fait faire plusieurs allers-retours aux photons dans la cavité contenant le gaz et on recueille une partie du rayonnement généré : c'est le phénomène de résonance. Ce phénomène permet en plus de rendre le faisceau parfaitement directionnel. Un laser Hélium–Néon fonctionne à la longueur d'onde 633 nm (VIS, correspondant à des transitions électroniques) alors qu'un laser CO_2 fonctionne à la longueur d'onde 10,6 μm (IR, correspondant aux transitions de type rotations et vibrations). On ne trouve pas dans la nature de telles sources de rayonnement monochromatique.

4.1.4 Les corps noirs

Un corps noir est une surface idéale (qui n'existe donc pas dans la nature) possédant les propriétés suivantes :

il absorbe tout éclairement indépendamment de la longueur d'onde et de la direction de cet éclairement ;

à une température de surface équivalente, le rayonnement d'un corps noir est plus grand que celui de toute autre surface ;

le rayonnement d'un corps noir est isotrope.

Quelques exemples de corps noirs

Il est possible de fabriquer des surfaces dont le comportement se rapproche au plus près de celui d'un corps noir. Ainsi quelques peintures à base de particule de graphite (carbone) permettent d'absorber jusqu'à 90 % de l'éclairement. Quelques matériaux de synthèse permettent de se rapprocher des 99 % d'absorption. Néanmoins le système qui se rapproche au plus près du corps noir est celui constitué d'une cavité isolée de l'ambiance extérieure, comme représenté sur la figure 4.5. Tout rayonnement pénétrant dans la cavité par le petit orifice est réfléchi un grand nombre de fois. À chaque réflexion, une partie du flux est absorbée. Au bout d'un nombre suffisant de réflexions, le flux est complètement absorbé et la cavité se comporte donc comme un corps noir. De la même façon, le rayonnement émis au travers de l'orifice correspond à celui d'un corps noir dont la température est celle de la cavité. Enfin, du fait des multiples réflexions dans la cavité, tout corps de petite dimension disposé à l'intérieur de la cavité va aussi se comporter comme un corps noir. Ce résultat est tout à fait indépendant de la nature de la surface constitutive de la cavité ou bien du petit corps placé à l'intérieur.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

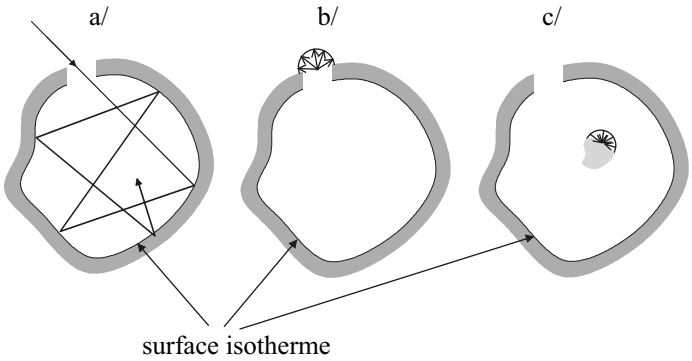


Figure 4.5 **Comportement du corps noir**
Le comportement d'un corps noir peut être reproduit expérimentalement par une enceinte maintenue à température constante et uniforme. Dans la configuration **a**, on montre que l'enceinte est un corps noir vis-à-vis de l'absorption. En effet tout rayonnement entrant par la toute petite ouverture se retrouvera piégé dans l'enceinte et complètement absorbé (cette ouverture doit être la plus petite possible afin de ne pas modifier la température interne de l'enceinte). Il n'est pas nécessaire que la surface interne de l'enceinte soit très absorbante. En effet, il suffit d'un nombre suffisant de réflexions pour que le rayonnement incident finisse par être complètement absorbé. À partir de considérations thermodynamiques, on constate que le rayonnement émis est celui du corps noir à la température de l'enceinte (configuration **b**). Nous y reviendrons lors de la présentation de la loi de Kirchhoff. De la même façon ce raisonnement conduit à dire, en se basant sur la configuration **c**, que le rayonnement incident à une petite surface placée dans la cavité est celui d'un corps noir à la température de l'enceinte.

4.1.5 Loi de Planck

On doit à Planck d'avoir le premier donné une définition mathématique du rayonnement des corps noirs en fonction de leur température. Est-il possible dans ce cours d'en retrouver la démonstration sans rentrer dans des concepts de mécanique quantique et de thermodynamique statistique trop élaborés ? La réponse est oui si nous admettons quelques résultats (par forcément compliqués à se représenter par ailleurs). Il faut tout d'abord imaginer un ensemble très grand de photons qui sont confinés dans une enceinte cubique d'arête L. On suppose que cette enceinte est parfaitement thermostatée à la température T (cette configuration doit vous rappeler celle présentée figure 4.1 en tout début de chapitre). Notre objectif est d'obtenir une expression de l'énergie du gaz de photons par unité de volume d'enceinte et par unité de longueur d'onde. On peut tout d'abord se demander pourquoi y a-t-il des photons dans une enceinte à température uniforme ? En effet, en tout début de chapitre nous avions affirmé que le transfert par rayonnement thermique entre deux corps disparaît lorsque la température de ces corps devient équivalente. La discussion précédente sur l'interaction rayonnement–matière montre que, au-delà de l'état fondamental, les électrons ne cessent d'effectuer des sauts entre deux états énergétiques car les états excités sont par nature instables. Ceci veut dire que des photons sont continûment émis et absorbés

www.biblio-scientifique.net

par la surface de l'enceinte mais que le flux net échangé par tous les éléments de surface est nul : le nombre de photons émis reste toujours égal au nombre de photons absorbés.

Comme nous l'avons dit précédemment, un photon i est lié à une onde de fréquence f_i et donc de longueur d'onde λ_i donnée. Cette onde définit donc un mode que nous notons $(\lambda_i,\ f_i)$. En examinant la totalité des photons, nous constatons que plusieurs présentent exactement le même mode. Nous pourrons alors les regrouper dans des ensembles se distinguant les uns des autres par la valeur de ce mode. Nous avons défini l'énergie du mode i par $e_i = h\ f_i$ où h est la constante de Planck. Comme le nombre de modes dans chaque ensemble est très grand, la mécanique statistique nous apprend que l'énergie moyenne pour le mode i est donnée par la distribution de Bose :

$$\langle e_i \rangle = \frac{e_i}{\exp\left(\dfrac{e_i}{k_B\,T}\right) - 1} = \frac{h\ f_i}{\exp\left(\dfrac{h\ f_i}{k_B\,T}\right) - 1} \tag{4.2}$$

Enfin, on montre que la densité volumique de modes est donnée par :

$$g\,(e_i) = \frac{8\,\pi\,L^3}{h^3\,c^3}\,e_i = \frac{8\,\pi\,L^3}{h^3\,c^3}h\ f_i \tag{4.3}$$

En admettant ces deux résultats, on peut alors donner l'expression de l'énergie totale du gaz de photons :

$$E = \int_0^\infty g\,(e_i)\,\langle e_i \rangle\ \mathrm{d}e_i = \int_0^\infty \frac{8\,\pi\,L^3}{h\,c^3}\,\frac{f_i^2}{\exp\left(\dfrac{h\ f_i}{k_B\,T}\right) - 1}\,\mathrm{d}e_i \tag{4.4}$$

Soit encore avec $e_i = h\ f_i = h\,c/\lambda_i$:

$$\frac{E}{L^3} = \int_0^\infty \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,c}{\lambda\,k_B\,T}\right) - 1}\,\mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty u\,(\lambda,\ T)\ \mathrm{d}\lambda \tag{4.5}$$

Nous obtenons ainsi la loi de Planck qui est l'expression de la densité volumique d'énergie spectrale du gaz de photons à la température T :

$$u\,(\lambda,\ T) = \frac{8\,\pi\,h\,c}{\lambda^5}\,\frac{1}{\exp\left(\dfrac{h\,c}{\lambda\,k_B\,T}\right) - 1} \quad \left[\mathrm{J\,m^{-3}\,m^{-1}}\right] \tag{4.6}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

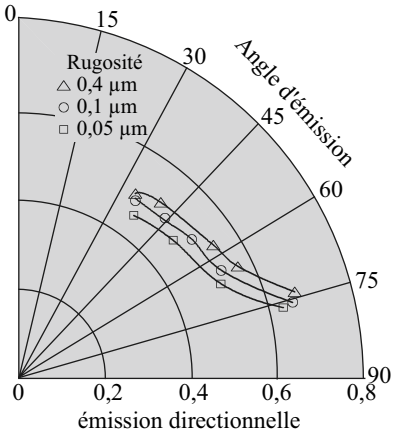
ENCART 4.1 Max Planck

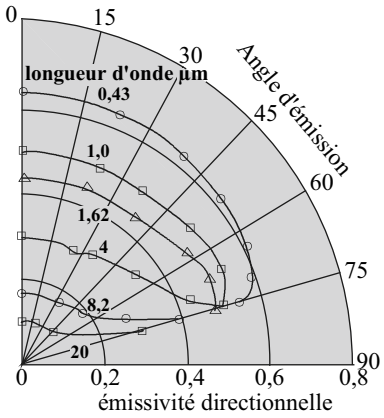
Après avoir obtenu son baccalauréat à 17 ans, Max Planck poursuit ses études de physique à Munich puis à Berlin. Passionné par la thermodynamique, il soutient une thèse de doctorat sur la deuxième loi fondamentale de la théorie de la chaleur en 1879. L'année suivante, il devient maître de conférences à l'université de Munich puis obtient la chaire de physique de l'université de Kiel en 1885. Quatre ans plus tard, il est professeur de physique à l'université de Berlin — poste qu'il occupera pendant près de quarante ans. Considéré comme l'un des plus célèbres physiciens, Planck recevra le prix Nobel en 1918.

4.1.6 Les notions géométriques essentielles

En dehors du cas très particulier des lasers, le rayonnement thermique est généralement hémisphérique dans le sens où les photons émis par une source le sont dans toutes les directions de l'espace entourant la source. D'autre part, en fonction de l'état de surface de la source, on trouve que le rayonnement n'est pas isotrope, c'est-à-dire que le nombre de photons émis n'est pas le même dans toutes les directions.

Nous montrons sur la figure ci-dessous (à gauche) l'influence de la rugosité d'un matériau en titane vis-à-vis de la quantité de photon émise dans la moitié d'hémisphère au-dessus du matériau (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées). Mais l'aspect directionnel est aussi fonction de la nature du matériau. La figure à droite montre que la quantité de photons émise pour un matériau (ici le titane) dépend de la longueur d'onde (mais ça nous le savions déjà) mais que cette longueur d'onde joue aussi sur l'aspect directionnel. On constate en effet que dans l'IR, le rayonnement est plus important pour de grandes valeurs de l'angle d'émission alors que c'est l'inverse dans le VIS.





www.biblio-scientifique.net

Lorsque le rayonnement est le même dans toutes les directions de l'espace on dit qu'il est isotrope. Lorsque la répartition spatiale du rayonnement est indépendante de la longueur d'onde on dit qu'il est homogène.

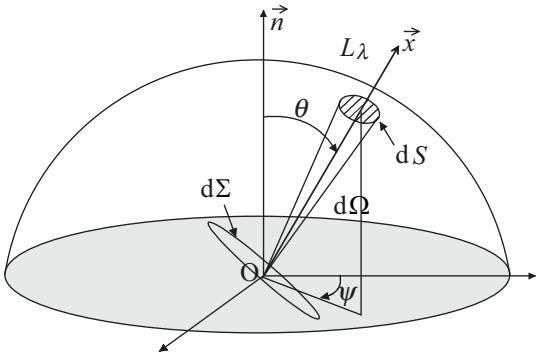


Figure 4.6 **Rayonnement hémisphérique**
La luminance L_λ (θ, ψ) est le flux de chaleur contenu dans l'angle solide dΩ orienté dans la direction $\vec{x}$ et par unité de surface dΣ perpendiculaire à la direction d'émission.

On voit donc que l'étude du rayonnement thermique nécessite l'utilisation d'outils géométriques spécifiques. En particulier, il semble important de définir quelle sera la quantité de chaleur transportée par les photons dans un cône entourant une direction d'émission. Nous appelons ce cône l'angle solide. C'est une généralisation de l'angle plan à la configuration sphérique. L'angle solide s'exprime en stéradians (sr) et la sphère mesure 4 π sr. Considérons un élément de surface dΣ qui émet un rayonnement thermique dans tout l'espace qui l'englobe. Nous appelons $\vec{x}$ la direction d'émission. Nous construisons alors l'angle solide dΩ qui entoure la direction d'émission et qui coupe l'hémisphère de rayon r en formant la surface dS. Nous savons alors que dans le système de coordonnées sphériques (r, θ, ψ) :

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{4.7}$$

Dans le plan à 2 dimensions, nous lions la longueur d'arc à la valeur de l'angle par :

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\mathrm{d}l}{r} \tag{4.8}$$

Par analogie, nous définissons l'angle solide :

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2} \tag{4.9}$$

En utilisant la relation 4.7 dans la relation 4.9 ceci conduit à la définition de l'angle solide :

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{4.10}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

4.2 Grandeurs physiques

On définit différentes grandeurs physiques selon que l'on considère le matériau en tant qu'émetteur ou récepteur. Ceci étant, lorsque l'on s'intéresse aux échanges par rayonnement entre corps, chacun joue le rôle d'émetteur et de récepteur de manière simultanée. Certaines configurations peuvent permettre de ne considérer le corps étudié que comme un récepteur ou comme un récepteur. Ainsi, lorsque l'on étudie le transfert de chaleur par rayonnement entre le soleil et la terre, il est tout à fait justifié de ne considérer le soleil que comme un émetteur et la terre en tant que récepteur.

Nous avons jusqu'à présent présenté les transferts de chaleur par rayonnement en termes d'énergie transportée par les phonons (soit donc en Joules). Dans la suite nous ne parlons plus que de ces échanges en terme de flux de chaleur (soit donc en Watts).

4.2.1 Grandeurs liées à l'émission

Luminance

Nous appelons luminance le flux de chaleur émis par un corps par unité de surface de ce corps perpendiculaire à la direction d'émission et par unité d'angle solide :

$$L(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma \cos\theta \, \mathrm{d}\Omega} \tag{4.11}$$

La luminance est définie à la longueur d'onde λ.

La quantité $\mathrm{d}\Sigma \cos\theta$ représente la projection de la surface émettrice dans la direction perpendiculaire à la direction d'émission $\overrightarrow{x}$.

En introduisant l'expression de l'angle solide 4.10 dans la relation 4.11, on trouve l'expression de la luminance sous la forme :

$$L(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi} \tag{4.12}$$

Émittance

L'émittance est le flux émit par unité de surface émettrice :

$$M(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma} \tag{4.13}$$

L'émittance est définie à la longueur d'onde λ.

En utilisant la relation 4.12, on voit que l'émittance et la luminance sont liées par la relation :

$$M(\lambda, \theta, \psi) = L(\lambda, \theta, \psi) \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{4.14}$$

www.biblio-scientifique.net

Pour toutes les quantités physiques liées au rayonnement, on désigne par hémisphérique l'intégrale sur tout le domaine spatial. La grandeur est dite totale si elle est intégrée sur tout le domaine spectral, c'est-à-dire toutes les longueurs d'onde.

Émittance hémisphérique

L'émittance hémisphérique désigne l'intégrale de l'émittance sur tout l'hémisphère entourant l'émetteur :

$$M_\lambda = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} L\,(\lambda, \theta, \psi)\, \cos\theta\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\psi \tag{4.15}$$

Elle ne dépend que de la longueur d'onde.

Émittance hémisphérique totale

C'est l'intégrale sur tout le domaine de longueur d'onde de l'émittance hémisphérique :

$$M = \int_0^\infty M_\lambda\, \mathrm{d}\lambda \tag{4.16}$$

Si le rayonnement est isotrope, la luminance ne dépend plus des paramètres d'angle θ et ψ. Dans ce cas, l'émittance hémisphérique devient :

$$M_\lambda = L_\lambda \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\psi = \pi\, L_\lambda \tag{4.17}$$

De la même façon pour l'émittance hémisphérique totale, on obtient la relation de Lambert :

$$M = \pi\, L \tag{4.18}$$

4.2.2 Grandeurs liées au récepteur

Éclairement

Il désigne le flux incident reçu par unité de surface de récepteur perpendiculairement à la direction d'incidence :

$$E\,(\lambda, \theta, \psi) = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Sigma\, \cos\theta} \tag{4.19}$$

Le flux incident peut toujours s'exprimer à partir de la luminance au travers de la relation 4.12 et donc l'éclairement peut lui aussi s'exprimer à partir de la luminance :

$$E\,(\lambda, \theta, \psi) = L\,(\lambda, \theta, \psi)\, \cos\theta\, \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\psi \tag{4.20}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Il faut bien noter que dans ce cas c'est la luminance liée au flux incident et non celle liée au flux émit par la surface. Afin de ne pas surcharger la notation, nous n'avons pas voulu indicer différemment la luminance pour chaque configuration.

Éclairement hémisphérique

C'est l'intégrale de l'éclairement sur tout l'hémisphère entourant le récepteur :

$$E_\lambda = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} L(\lambda, \theta, \psi) \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\psi \tag{4.21}$$

Il ne dépend que de la longueur d'onde.

Éclairement hémisphérique total

C'est l'intégrale sur tout le domaine de longueur d'onde de l'éclairement hémisphérique :

$$E = \int_0^\infty E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda \tag{4.22}$$

Si l'éclairement est isotrope, il ne dépend plus des paramètres d'angle θ et ψ. Dans ce cas on obtient les relations suivantes pour l'éclairement hémisphérique :

$$E_\lambda = \pi \, L_\lambda \tag{4.23}$$

De même pour l'éclairement hémisphérique total :

$$E = \pi \, L \tag{4.24}$$

Radiosité

La radiosité désigne la somme du flux émis par un corps et de la fraction de flux incident qui est réfléchi par ce même corps par unité de surface perpendiculaire à la direction d'émission–réflexion. La radiosité est donc la somme de l'émittance et de la fraction d'éclairement réfléchit :

$$J(\lambda, \theta, \psi) = M(\lambda, \theta, \psi) + \rho \, E(\lambda, \theta, \psi) \tag{4.25}$$

Nous avons introduit ici le paramètre ρ, compris entre 0 et 1, et qui désigne le coefficient de réflexion de la surface (nous reviendrons sur ce paramètre un peu plus tard).

Radiosité hémisphérique

C'est la somme de l'émittance hémisphérique et de la fraction d'éclairement hémisphérique réfléchit :

$$J_\lambda = M_\lambda + \rho \, E_\lambda \tag{4.26}$$

www.biblio-scientifique.net

Radiosité hémisphérique totale

C'est la somme de l'émittance hémisphérique totale et de la fraction d'éclairement hémisphérique totale réfléchit :

$$J = M + \rho E \tag{4.27}$$

4.3 Rayonnement des corps noirs

4.3.1 Luminance des corps noirs

Reprenons la configuration de l'enceinte cubique sur laquelle nous avons établi la loi de Planck (relation 4.6). Nous supposons maintenant qu'un petit trou est réalisé dans la boîte et qu'un rayonnement est émis de la boîte vers l'extérieur. Le rayonnement se produit dans tout l'hémisphère entourant le trou, l'angle solide est alors égal à 2π stéradians. Comme le rayonnement à lieu seulement de la boîte vers l'extérieur, on trouve que la luminance est la moitié du produit de la densité volumique d'énergie spectrale par la vitesse (ici c_0) et divisée par l'angle solide (puisque l'on suppose que le rayonnement est isotrope) :

$$L_\lambda^0 = \frac{2\,h\,c_0^2}{\lambda^5\left(e^{\frac{h\,c_0}{\lambda\,k_B\,T}} - 1\right)} \quad \left[\mathrm{W\,m^{-2}\,m^{-1}\,st^{-1}}\right] \tag{4.28}$$

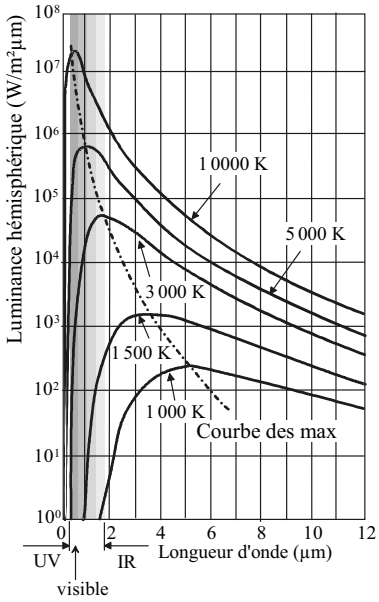


Figure 4.7 **Luminance du corps noir en fonction de la longueur d'onde et de la température du corps en Kelvin**
On notera la courbe des maximums de luminance donnée par la relation de Wien.

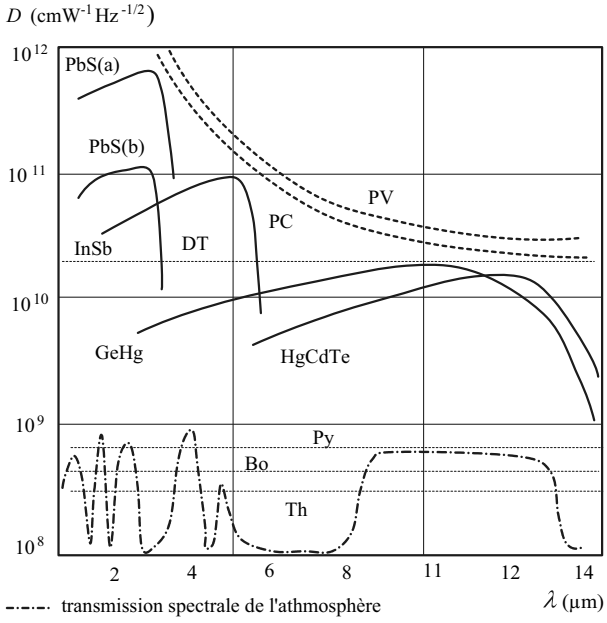
L'indice 0 est souvent utilisé pour les grandeurs physiques associées à un corps noir. Nous avons représenté la fonction de Planck sur la figure 4.7. On constate que plus la température du corps est grande, plus la luminance est grande et plus le maximum de luminance se déplace vers les petites longueurs d'onde.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Voir le rayonnement

Lorsque l'on chauffe un matériau à haute température, on constate que la couleur de surface du matériau change, le flux émis par le matériau devient « visible ». Pour les basses températures, on ne peut « voir » le flux radiatif émis que si l'on dispose d'une caméra infrarouge. L'élément sensible de la caméra est sensible au domaine (2-15) μm. Un exemple de ce phénomène que l'on rencontre dans la nature est par exemple celui de la lave en écoulement. L'œil parvient à clairement identifier le rayonnement thermique des zones très chaudes (en jaune-rouge) des zones qui le sont moins (en gris-noir). Le traitement des métaux pour leur mise en forme nécessite aussi d'élever leur température (cas de la forge par exemple). Lorsque cette température commence à tendre vers la température de fusion, on distingue très clairement à l'œil nu le rayonnement thermique puisque celui-ci a lieu dans le visible.

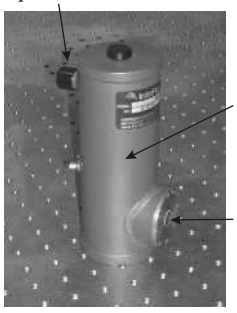


Selon que l'on utilise un élément de type bolomètre ou semi-conducteur on couvrira un domaine de longueur d'onde bien particulier avec une sensibilité (ou détectivité) elle aussi particulière (un bolomètre est un matériau dont la résistance électrique varie en fonction du rayonnement électromagnétique qu'il capte alors qu'un semiconducteur va utiliser l'effet photovoltaïque qui transforme le rayonnement électromagnétique incident en courant électrique). Ainsi comme on le voit sur la figure ci-dessus (les courbes PV et PC indiquent les maximums théoriques de détectivité), l'élément en sulfure de plomb (PbS) à une sensibilité très importante mais il ne permet de visualiser des champs de température que dans le domaine (1-3) μm. Au contraire, un bolomètre permet de couvrir le proche comme le très lointain infrarouge mais on constate bien que sa sensibilité, bien que constante, reste assez faible (3 ordres de grandeur en dessous de l'élément PbS). On trouve dans le commerce différentes dénominations de dispositifs permettant de mesurer un rayonnement thermique : caméra IR, détecteur IR, pyromètre... Au sein même de ces dispositifs on trouve des sous-classes. L'ensemble peut finalement apparaître bien complexe et nous proposons donc une description plus claire dans le tableau ci-dessous.

www.biblio-scientifique.net

Pyromètres			
Détecteurs quantiques L'élément sensible est un semi-conducteur (SC) tel que InSb, HgCdTe, PbS... Si un photon incident à une énergie supérieure ou égale au gap du SC (c'est-à-dire la différence d'énergie entre la bande de conduction et la bande de valence), il y a alors création d'une paire électron–trou. Ce type de détecteurs est refroidi à très basse température pour qu'il n'y ait pas de concurrence avec l'agitation thermique du SC.		**Détecteurs thermiques** L'élément sensible est échauffé par le flux de photons à partir du phénomène de conduction de la chaleur. Ce détecteur est sensible à la puissance rayonnée et ne présente donc que peu de sélectivité spectrale. Leur temps de réponse est élevé (de l'ordre de la ms) par rapport à celui d'un détecteur quantique (de la centaine de ns à la μs).	
Photodiode (PV) La jonction semi-conductrice est polarisée en tension. Le flux de photons influe sur le courant inverse de la jonction.	**Photoconducteur (PC)** La jonction est polarisée par un générateur de courant qui induit une tension reproduisant les variations du flux incident de photons	**Capacitif** La température influence sur la répartition des charges dans un matériau diélectrique et modifie donc sa capacité électrique.	**Résistif (bolomètre)** La température influence sur la résistance électrique du matériau (principe de la thermistance). On utilise assez souvent du silicium amorphe, de l'oxyde de vanadium ou bien encore le PbZrTiO qui est un matériau ferroélectrique.

Mono détecteur infrarouge



La figure ci-contre représente un détecteur IR constitué par un élément sensible situé dans un vase Dewar. Ce vase est rempli d'azote liquide (77 K) pour minimiser l'agitation thermique de l'élément sensible et privilégier l'absorption du rayonnement incident. En effet, comme on peut le voir sur le schéma descriptif, l'élément sensible est disposé sur un bloc métallique qui est lui-même soudé sur l'enceinte contenant l'azote. La température de l'élément est donc du même ordre de grandeur que celle de l'azote liquide. Le vide est fait dans le Dewar afin de diminuer les pertes thermiques entre le réservoir d'azote et le milieu ambiant (on sait en effet que le vide est le meilleur isolant qui soit du point de vue des échanges par

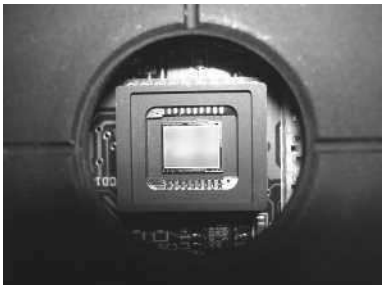
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

conduction et par convection). La fenêtre optique placée devant l'élément sensible doit être judicieusement choisie en fonction du domaine spectral de fonctionnement de l'élément sensible.

Il est néanmoins possible d'observer un champ de température dans le domaine de l'IR en utilisant une caméra dont l'élément sensible est par exemple constitué par une matrice d'éléments sensibles tels que ceux que nous avons vus pour le mono détecteur.

Détecteur matriciel de caméra IR



La figure ci-contre représente un élément matriciel utilisé dans une caméra IR pour visualiser un champ de température à la surface d'un objet. Cette matrice est ici formée de 4 096 x 4 096 éléments sensibles de type InSb (mais qui pourraient être différents de ceux que nous avons regroupés dans le tableau ci-dessus). Le circuit de lecture placé sous la matrice sert à collecter et à traiter les signaux issus des éléments sensibles pour les transformés en signaux électriques exploitables pour former une image. Comme pour le mono - détecteur, il est important de disposer le détecteur matriciel dans un cryostat afin de minimiser l'agitation thermique de l'élément.

4.3.2 Lois de Wien

On dérive la loi de Planck et on cherche λ tel que :

$$\frac{\mathrm{d}\,L_\lambda}{\mathrm{d}\,\lambda} = 0 \tag{4.29}$$

On trouve alors la longueur d'onde $\lambda_{\max}$ correspondant à la luminance maximale $L^0_{\lambda_{\max}}$ en fonction de la température du matériau :

$$\lambda_{\max}\,T = 2897\ \left[\mu\mathrm{m\ K}\right] \tag{4.30}$$

Cette valeur correspond à une luminance maximale :

$$L^0_{\lambda_{\max}} = 4{,}096\ 10^{-12}\,T^5 \tag{4.31}$$

Ces deux relations constituent les lois de Wien.

www.biblio-scientifique.net

4.3.3 Loi de Stefan–Boltzmann

La loi de Lambert (relation 4.18) conduit à exprimer la relation de Planck sous la forme d'une fonction de l'émittance du corps noir en fonction de la température :

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1\right)} \tag{4.32}$$

Avec : $C_1 = 3{,}742 \times 10^8$ W µm^4 m^{-2} et $C_2 = 1{,}439 \times 10^4$ µm K.

En remplaçant la relation 4.32 dans la définition de l'émittance totale, relation 4.16, on obtient la relation de Stefan – Boltzmann.

L'émittance totale d'un corps noir en fonction de la température est :

$$M^0 = \sigma_s T^4 \tag{4.33}$$

$\sigma_s = 5{,}670 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4} est la constante de Stefan– Boltzmann.

Cette relation montre que la relation liant le flux à la température pour le transfert de chaleur par rayonnement est non – linéaire (exposant 4 de la température). Il se différentie donc ici des processus de transfert par conduction et convection qui sont linéaires. Il est donc essentiel ici de se rappeler que la température est exprimée en Kelvin.

4.3.4 Émission spectrale du corps noir

On recherche souvent à calculer le flux émis dans une bande spectrale bien définie et non sur la totalité du spectre. Nous cherchons donc à calculer :

$$\int_0^\lambda M_\lambda^0 \, \mathrm{d}\lambda \tag{4.34}$$

Nous définissons pour cela la fonction :

$$F_{0\to\lambda} = \frac{\int_0^\lambda M_\lambda^0 \, \mathrm{d}\lambda}{\sigma_s T^4} = \int_0^{\lambda T} \frac{M_\lambda^0}{\sigma_s T^4} \, \mathrm{d}(\lambda T) \tag{4.35}$$

Cette quantité représente la fraction de flux émis dans la bande spectrale ($0 \to \lambda$) par rapport à l'émittance totale. Malheureusement, ce calcul ne conduit pas à une expression analytique et on doit recourir à des outils numériques d'intégration. La fonction $F_{0\to\lambda}$ est tabulée dans le tableau ci-dessous et elle est représentée graphiquement sur la figure 4.8.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Tableau 4.1 **Quelques valeurs tabulées de la fonction $F_{0\to\lambda}$**

$\lambda T \times 10^5$ (μm · K)	$F_{0\to\lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ (μm · K)	$F_{0\to\lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ (μm · K)	$F_{0\to\lambda}$	$\lambda T \times 10^5$ (μm · K)	$F_{0\to\lambda}$
0,001	0	0,0339	0,36	0,1389	0,9616	0,569	0,9988
0,0095	0,0002	0,0391	0,4634	0,16	0,9733	0,6551	0,999
0,011	0,0009	0,045	0,5637	0,1842	0,9815	0,7543	0,9992
0,0126	0,0034	0,0518	0,6551	0,2121	0,9872	0,8685	0,9993
0,0146	0,0104	0,0596	0,7342	0,2442	0,9911	1	0,9994
0,0168	0,0263	0,0687	0,7997	0,2812	0,9939		
0,0193	0,0563	0,0791	0,852	0,3237	0,9957		
0,0222	0,1051	0,091	0,8924	0,3728	0,997		
0,0256	0,1741	0,1048	0,9228	0,4292	0,9978		
0,0295	0,261	0,1207	0,9453	0,4942	0,9984		

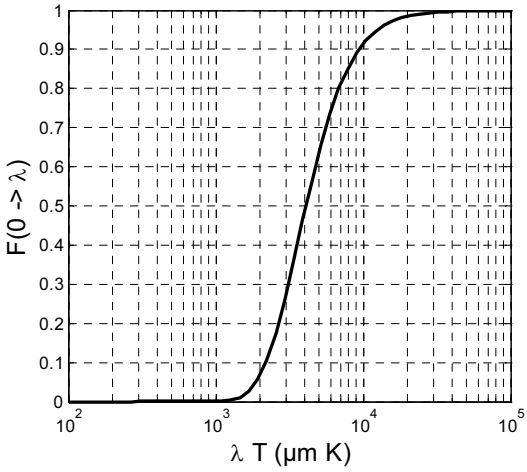


Figure 4.8 **Calcul de la fonction $F_{0\to\lambda}$ en fonction de λT**

Remarquons que si l'on désire calculer le flux émis dans la bande ($\lambda_1 \to \lambda_2$) on utilise la propriété :

$$F_{\lambda_1\to\lambda_2} = F_{0\to\lambda_2} - F_{0\to\lambda_1} \tag{4.36}$$

www.biblio-scientifique.net

4.4 Rayonnement des corps réels

4.4.1 Émissivité des corps réels

L'émissivité des matériaux réels est par définition plus faible que celle des corps noirs qui est maximale pour la même température de surface. Afin de caractériser cette émissivité on définit le coefficient d'émission.

Le coefficient d'émission d'un matériau est défini comme le rapport entre la luminance du corps réel avec la luminance du corps noir équivalent :

$$\varepsilon(\lambda, \theta, \psi, T) = \frac{L(\lambda, \theta, \psi, T)}{L_\lambda^0(T)} \tag{4.37}$$

Il est fonction de la direction d'émission, de la longueur d'onde du rayonnement émit ainsi que de la température.

Nous représentons sur la figure 4.9, la variation du coefficient d'émission spectral $\varepsilon_\lambda^n = \varepsilon(\lambda, \theta = 0, T)$ de quelques matériaux métalliques dans la direction normale d'émission ($\theta = 0$) en fonction de la température. On voit que la longueur d'onde joue un rôle prépondérant vis-à-vis de la valeur de l'émissivité.

Comme pour les grandeurs physiques associées au rayonnement on définit le coefficient d'émission hémisphérique et total.

Le coefficient d'émission hémisphérique d'une surface réelle est le rapport entre la luminance hémisphérique de cette surface et celle de la surface du corps noir équivalent :

$$\varepsilon_\lambda(T) = \frac{L_\lambda(T)}{L_\lambda^0(T)} \tag{4.38}$$

Le coefficient d'émission total est le rapport entre la luminance totale et celle du corps noir équivalent :

$$\overline{\varepsilon}(\theta, \psi, T) = \frac{\overline{L}(\theta, \psi, T)}{L_\lambda^0(T)} \tag{4.39}$$

Enfin, le coefficient d'émission total hémisphérique est le rapport entre la luminance totale hémisphérique et celle du corps noir équivalent :

$$\varepsilon(T) = \frac{L(T)}{L^0(T)} \tag{4.40}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

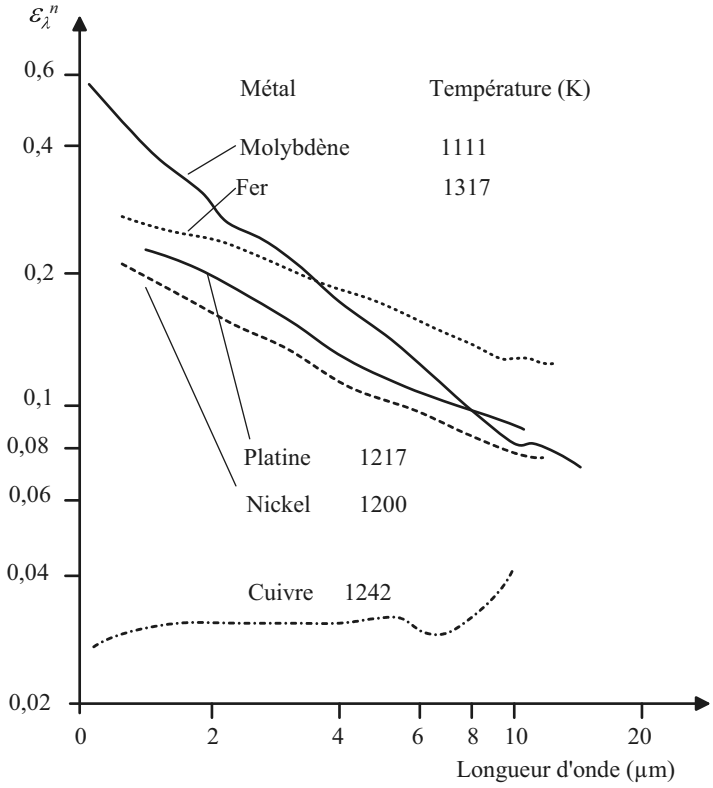


Figure 4.9 **Variation de l'émissivité spectrale dans la direction normale de quelques métaux en fonction de la température**

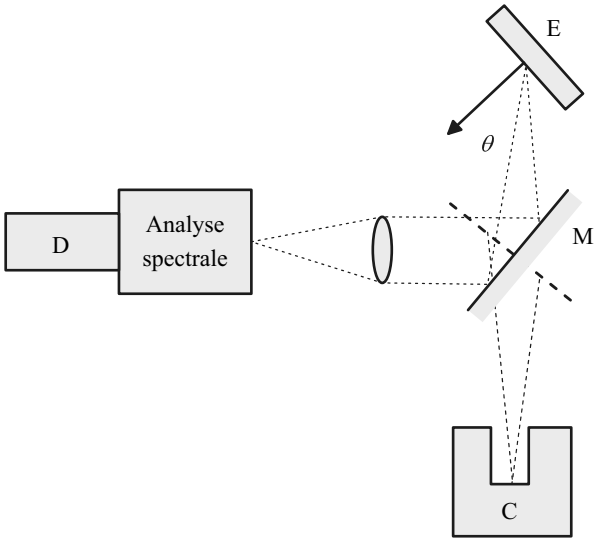
Quelques ordres de grandeur concernant l'émissivité

L'émissivité des surfaces métalliques dans le visible est généralement faible. Elle peut être de l'ordre de 0,02 pour les surfaces polies. Il faut néanmoins se méfier car elle peut évoluer très significativement dans le domaine de l'infrarouge. L'émissivité de ces surfaces augmente avec la température.

L'émissivité des matériaux diélectriques et semiconducteurs est relativement élevée. Elle peut atteindre 0,7 pour certains semiconducteurs dans le visible. Selon le type de matériau, l'émissivité peut diminuer ou augmenter quand la température augmente. L'émissivité d'une surface est fortement liée à ses propriétés optiques. Il n'est pas possible d'aborder ces aspects dans ce cours mais le lecteur pourra trouver des informations dans différents ouvrages spécialisés. Néanmoins, pour fixer les idées nous répertorions dans le tableau 4.2 les valeurs de l'émissivité totale dans la direction normale pour une large variété de matériaux.

www.biblio-scientifique.net

Comment mesure-t-on l'émissivité ?



La mesure d'émissivité n'est pas très compliquée dans son principe. Comme nous l'avons représenté sur la figure ci-contre, l'échantillon (E) est orienté selon différentes valeurs de la direction d'émission (angle θ). Cet échantillon est à une température donnée T. On mesure le flux émis dans cette direction à l'aide d'une photodiode par exemple. On mesure aussi le rayonnement du corps noir censé être à la même température T. En faisant le rapport des deux flux on obtient alors la valeur de l'émissivité pour la direction θ. Mais on voit bien ici que c'est l'émissivité totale qui est mesurée, c'est-à-dire sur tout le domaine de longueur d'onde. Comment fait-on alors pour accéder à l'émissivité à une longueur d'onde donnée ? On peut bien sûr équiper le détecteur de fenêtres optiques ne laissant passer que quelques longueurs d'ondes bien particulières. Cependant des solutions plus judicieuses consistent à mettre en œuvre des « prismes » élaborés permettant de scinder le flux total sous la forme d'un flux étalé du point de vue spectral.

4.4.2 Absorption, réflexion et transmission des corps réels

Lorsqu'un rayonnement est incident à un corps noir nous savons qu'il est complètement absorbé. S'il s'agit d'un corps réel, ce rayonnement incident sera en partie absorbé, réfléchit et transmis. Ceci conduit à définir les 3 grandeurs : coefficient d'absorption α (ou absorptivité), coefficient de réflexion ρ (ou réflectivité) et coefficient de transmission τ (ou transmissivité). Comme précédemment chacune de ces grandeurs peut être spectrale, hémisphérique, totale ou bien encore totale hémisphérique.

L'éclairement est noté $E(\lambda, \theta, \psi)$ et nous notons $E_a(\lambda, \theta, \psi)$, $E_r(\lambda, \theta, \psi)$ et $E_t(\lambda, \theta, \psi)$ les flux absorbé, réfléchi et transmis respectivement. Le bilan thermique à la surface du matériau conduit alors au fait que la somme de ces 3 flux doit conduire au flux incident :

$$E(\lambda, \theta, \psi) = E_a(\lambda, \theta, \psi) + E_r(\lambda, \theta, \psi) + E_t(\lambda, \theta, \psi) \tag{4.41}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Tableau 4.2 **Quelques valeurs de l'émissivité totale dans la direction normale à la surface.**

Matériaux	Température (°C)	Émissivité
Ciment	0 à 200	0,96
Papier	38 à 371	0,93
Ardoise	20	0,72
Asphalte	38	0,93
Basalte	20	0,72
Brique rouge rugueuse	21	0,93
Brique réfractaire	1 000	0,38
Porcelaine	22	0,92
Coton (vestimentaire)	20	0,77
Verre poli	0 à 93	0,92 à 0,94
Granit	21	0,45
Glace lisse	0	0,97
Glace rugueuse	0	0,98
Peinture bleue à base de Cu_2O_3	24	0,94
Peinture blanche à base ZrO_2	24	0,95
Peinture jaune à base de PbO	24	0,90
Peinture à l'aluminium 10 % Al	38	0,52
Peinture à l'aluminium 26 % Al	38	0,30
Peinture à huile (toutes couleurs)	93	0,92 à 0,96
Verre, 1,98 mm	282	0,90
Verre, 1,98 mm	838	0,41
Caoutchouc dur	23	0,94
Caoutchouc tendre, gris	24	0,86
Sable	20	0,76
Grès rouge	38	0,60 à 0,83
Sciure de bois	20	0,75
Argile	20	0,69
Neige en fines particules	– 7	0,82
Neige granuleuse	– 8	0,89

Absorptivité

L'absorptivité est le rapport entre le flux absorbé et l'éclairement :

$$\alpha(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_a(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)} \tag{4.42}$$

L'absorptivité hémisphérique est le même rapport mais en considérant cette fois les grandeurs hémisphériques :

$$\alpha_\lambda = \frac{E_{a,\lambda}}{E_\lambda} \tag{4.43}$$

L'absorptivité totale hémisphérique est enfin :

$$\alpha = \frac{E_a}{E} \tag{4.44}$$

www.biblio-scientifique.net

Réflectivité

La réflectivité est le rapport entre le flux réfléchit et l'éclairement :

$$\rho(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_r(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)} \tag{4.45}$$

La réflectivité hémisphérique est le même rapport mais en considérant cette fois les grandeurs hémisphériques :

$$\rho_\lambda = \frac{E_{r,\lambda}}{E_\lambda} \tag{4.46}$$

La réflectivité totale hémisphérique est enfin :

$$\rho = \frac{E_r}{E} \tag{4.47}$$

Transmissivité

La transmissivité est le rapport entre le flux transmis et l'éclairement :

$$\tau(\lambda, \theta, \psi) = \frac{E_t(\lambda, \theta, \psi)}{E(\lambda, \theta, \psi)} \tag{4.48}$$

La transmissivité hémisphérique est le même rapport mais en considérant cette fois les grandeurs hémisphériques :

$$\tau_\lambda = \frac{E_{t,\lambda}}{E_\lambda} \tag{4.49}$$

La transmissivité totale hémisphérique est enfin :

$$\tau = \frac{E_t}{E} \tag{4.50}$$

La relation 4.41 montre que quelque soit la quantité étudiée (spectrale, hémisphérique ou totale hémisphérique, on doit toujours avoir :

$$\alpha(\lambda, \theta, \psi) + \rho(\lambda, \theta, \psi) + \tau(\lambda, \theta, \psi) = 1 \tag{4.51}$$

$$\alpha_\lambda + \rho_\lambda + \tau_\lambda = 1 \tag{4.52}$$

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \tag{4.53}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

4.4.3 La loi de Kirchhoff

Nous avons jusqu'à présent considéré distinctement le phénomène d'émission de celui relatif à l'absorption. Or nous allons voir que ces deux phénomènes sont complètement interdépendants. Considérons une cavité isolée du milieu extérieur et dont la température de surface est T_{en} (figure 4.10). Un petit corps est disposé à l'intérieur de cette cavité, on note son aire A_1. Ce corps est suffisamment petit pour ne pas modifier le rayonnement à l'intérieur de la cavité. En d'autres termes le champ de rayonnement dans la cavité est supposé inchangé que l'on dispose ou non le petit corps à l'intérieur. À l'équilibre thermique, la température du petit corps est égale à la température de la cavité T_{en}. Nous avons vu que la cavité se comporte comme un corps noir et donc l'éclairement total hémisphérique du petit corps est égal à l'émittance totale du corps noir :

$$E = M^0 (T_{en}) \tag{4.54}$$

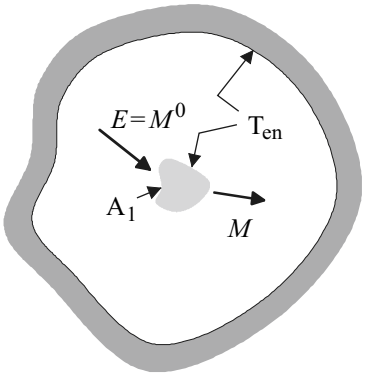


Figure 4.10 **Pour démontrer la loi de Kirchhoff on imagine un petit corps disposé à l'intérieur d'une cavité qui se comporte comme un corps noir**

À l'équilibre thermique, le flux qui est émis par le petit corps doit être égal à ce qui est absorbé :

$$\underbrace{\alpha\, E\, A_1}_{\text{flux absorbé}} = \underbrace{M\,(T_{en})\; A_1}_{\text{flux émis}} \tag{4.55}$$

En remplaçant l'expression de l'éclairement de la relation 4.54 dans la relation 4.55, on trouve l'expression :

$$\alpha = \frac{M\,(T_{en})}{M^0\,(T_{en})} \tag{4.56}$$

Or nous savons que ce rapport est aussi la définition de l'émissivité hémisphérique totale par la relation 4.40 (il suffit d'utiliser la loi de Lambert liant luminance et émittance pour retrouver l'exacte égalité).

www.biblio-scientifique.net

Pour tout corps, l'émissivité totale hémisphérique est égale à l'absorptivité totale hémisphérique :

$$\alpha = \varepsilon \tag{4.57}$$

Si on considère l'aspect spectral, la relation précédente reste vraie et il suffit pour cela que le rayonnement du corps soit isotrope. On a alors :

$$\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda \tag{4.58}$$

Si on considère en plus l'aspect directionnel, l'égalité est vraie et ne nécessite même plus la condition de rayonnement corps noir :

$$\alpha(\lambda, \theta, \psi) = \varepsilon(\lambda, \theta, \psi) \tag{4.59}$$

ENCART 4.2 Gustav Robert Kirchhoff

Physicien allemand, né à Königsberg et mort à Berlin, Gustav Kirchhoff a développé avec Robert Wilhelm Bunsen l'analyse spectrale et découvert la loi du rayonnement qui associe son nom à l'avènement d'une période nouvelle et brillante de la physique moderne. En étudiant le phénomène d'absorption, il a fait de la spectrographie un moyen d'analyse chimique systématique d'application universelle. Par ailleurs, il a déterminé les règles des réseaux électriques et apporté d'importantes contributions à l'électricité et à l'élasticité, ainsi qu'à l'hydrodynamique, la thermodynamique et l'optique.

4.4.4 Les corps gris

Il est intéressant de rechercher les conditions pour lesquelles on pourrait conserver l'égalité entre émissivité et absorptivité décrite par la relation 4.57 mais sans avoir à considérer un rayonnement de corps noir. En d'autres mots, peut-on trouver des conditions pour que cette relation soit vraie sans que le corps soit enfermé dans une cavité ?

Reprenons la définition de l'émissivité et de l'absorptivité hémisphériques et examinons les conditions requises pour avoir l'égalité 4.58 :

$$\begin{aligned}
\alpha_\lambda &= \frac{\displaystyle\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \alpha(\lambda,\theta,\psi)\, L_\lambda \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi}{\displaystyle\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} L_\lambda \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi} \\
&\overbrace{=}^{?} \frac{\displaystyle\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \varepsilon(\lambda,\theta,\psi) \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi}{\displaystyle\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\psi} \\
&= \varepsilon_\lambda
\end{aligned} \tag{4.60}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Cette relation est vraie si :

- Le rayonnement est isotrope (L_λ indépendant de la direction d'émission)
- La surface est diffuse (ε et α indépendants de la direction)

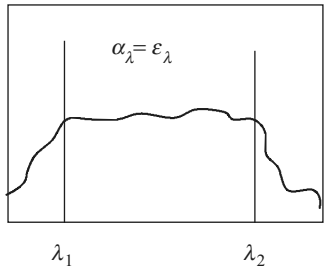
C'est donc bien ce que nous avions dit dans la définition. Examinons maintenant la définition de l'absorptivité et de l'émissivité totale hémisphérique :

$$\alpha = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda \, E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda}{E} \overbrace{=}^{?} \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda \, M_\lambda^0(T) \, \mathrm{d}\lambda}{M} = \varepsilon \tag{4.61}$$

Comme $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$, il ressort que pour que la relation 4.61 soit vérifiée il faut qu'une des conditions suivantes le soit :

- L'éclairement correspond à une émittance de corps noir à la température T, auquel cas : $M_\lambda^0(T) = E_\lambda$ et donc $M^0(T) = E$.
- Les grandeurs α_λ et ε_λ sont indépendantes de λ, auquel cas la surface est dite grise.

La figure ci-contre donne un exemple de variation spectrale de l'émissivité et donc de l'absorptivité. On voit que cette quantité est constante sur une bande spectrale $[\lambda_1, \lambda_2]$. On peut alors considérer que dans cette bande la surface est grise de valeur d'émissivité : $\varepsilon = \varepsilon_c \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0(T) \, \mathrm{d}\lambda / \mathrm{M}^0(T)$.



4.5 Références

HERVÉ P., *Mesure de l'émissivité thermique*, Techniques de l'Ingénieur, R 2 737 (1989).

INCROPERA F.P., DE WITT D.P., BERGMAN T.L., LAVINE A., *Introduction to Heat Transfer*, 5e édition révisée, John Wiley & Sons Inc (2006).

ÖZISIK M.N., *Radiative Transfer and Interaction with Conduction and Convection*, John Wiley & Sons, New York (1973).

PALIK E.D., *Handbook of Optical Constants of Solids*, Washington Academic Press, (1985).

SACADURA J.F., *Initiation aux transferts thermiques*, Tec & Doc (2000).

SIEGEL R. et HOWELL J.R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, 2e édition, Taylor and Francis Hemisphere (1981).

www.biblio-scientifique.net

Exercices

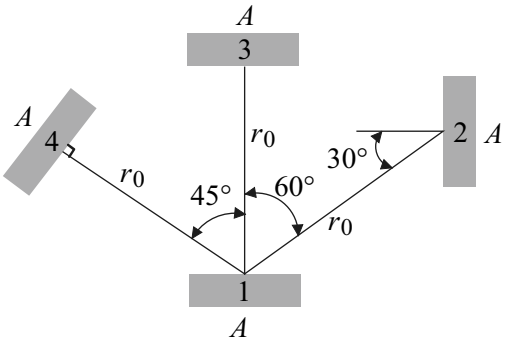
4.1 Une petite surface d'aire $A = 10^{-3}$ m^2 émet de façon isotrope (voir figure ci-dessous). On mesure la luminance totale dans la direction normale à la surface : $L_n = 4\,500$ W m^{-2} sr^{-1}. Le flux rayonné est intercepté par 4 autres surfaces de même aire A. Les surfaces sont orientées comme représenté sur la figure ci-dessous ($r_0 = 0{,}7$ m).

a) Quelle est la luminance totale dans les 4 directions d'émission associées aux 4 récepteurs ?

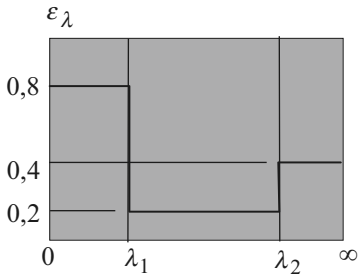
b) Quelles sont les valeurs des angles solides sous lesquels les 4 surfaces réceptrices sont vues depuis l'émetteur ?

c) Quelles sont les valeurs des flux interceptés par les 4 surfaces ?

Hypothèses : ***(H1)*** *Les surfaces émettent de manière homogène et isotrope.* ***(H2)*** *Les surfaces sont suffisamment petites pour que l'on puisse considérer :* $A_i/r_i^2 \ll 1$.



4.2 Une surface dont la température est de 1 300 K émet avec l'émissivité hémisphérique spectrale représentée sur la figure ci-dessous.



Les deux longueurs d'ondes caractéristiques sont : $\lambda_1 = 1{,}5$ µm et $\lambda_2 = 6$ µm.

a) Déterminer l'émissivité hémisphérique totale ainsi que l'émittance totale.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

b) À quelle longueur d'onde se situe le maximum d'émission ?

Hypothèse : la surface émet de manière isotrope.

4.3 On considère une cavité maintenue à la température de 1 500 K, comme représenté sur la figure ci-dessous. Cette cavité est dotée d'un petit orifice à travers lequel le rayonnement de type corps noir de la cavité est possible.

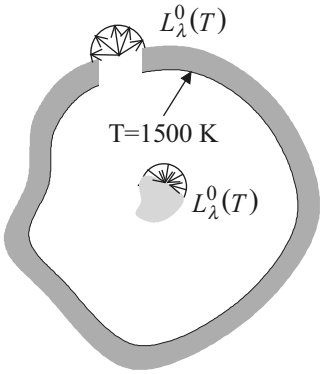
a) Calculer l'émittance totale hémisphérique au travers de la cavité.

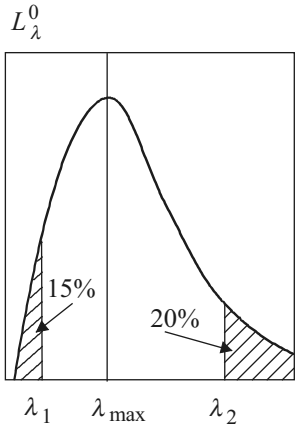
b) Quelle est la longueur d'onde en deçà de laquelle 15 % de ce rayonnement est émis ?

c) Quelle est la longueur d'onde au-delà de laquelle 20 % du rayonnement est émis ?

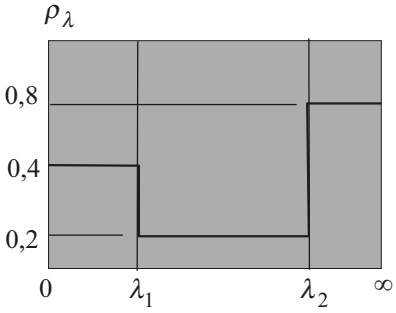
d) Déterminer la valeur du maximum d'émittance et la longueur d'onde à laquelle il apparaît.

e) Calculer l'éclairement total hémisphérique d'un petit objet placé à l'intérieur de la cavité.





4.4 Les propriétés radiatives des surfaces réelles opaques sont souvent obtenues par réflectivité. Un exemple de mesure de réflectivité hémisphérique spectrale à la température de 1 000 K est représenté sur le graphe de la figure ci-dessous. Les deux longueurs d'onde caractéristiques sont $\lambda_1 = 1{,}5$ µm et $\lambda_2 = 6$ µm. Calculer l'émittance totale hémisphérique à cette température.



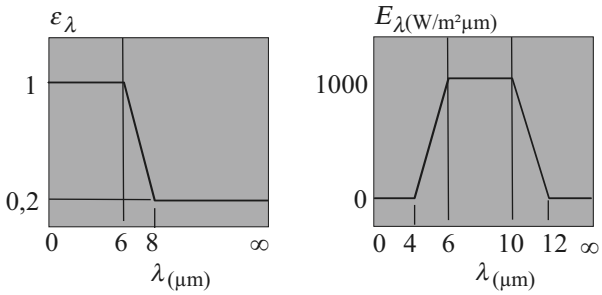
www.biblio-scientifique.net

4.5 Une surface opaque est caractérisée par son émissivité spectrale hémisphérique et son éclairement hémisphérique représentés tous deux sur la figure ci-dessous.

a) Représenter la variation spectrale de la réflectivité hémisphérique.

b) Calculer l'absorptivité totale hémisphérique de la surface.

c) La température initiale de la surface étant de 450 K et son émissivité totale hémisphérique étant égale à 0,65, la température va-t-elle croître ou décroître ?

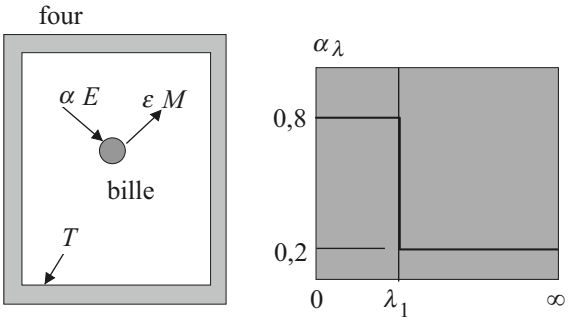


4.6 Une petite bille métallique opaque est placée dans un four dont la température des parois internes est maintenue à T = 1 300 K. Le vide est réalisé à l'intérieur du four. La température initiale de la bille est $T_b(0)$ = 450 K. L'absorptivité spectrale de la bille est représentée sur la figure ci dessous. La longueur d'onde caractéristique est λ_1 = 6 µm. Le rayonnement pour le four et la bille est isotrope.

a) Déterminer l'absorptivité et l'émissivité totales hémisphériques de la bille à l'instant initial.

b) Déterminer ces mêmes grandeurs lorsque la bille a atteint sa température constante dans le four.

c) Si on suppose que le diamètre de la bille est 1 cm, que sa masse m est 100 g, et que sa chaleur spécifique par unité de volume est C_p = 400 J m^{-3} K^{-1}, déterminer la vitesse de montée en température de la bille dans le four.



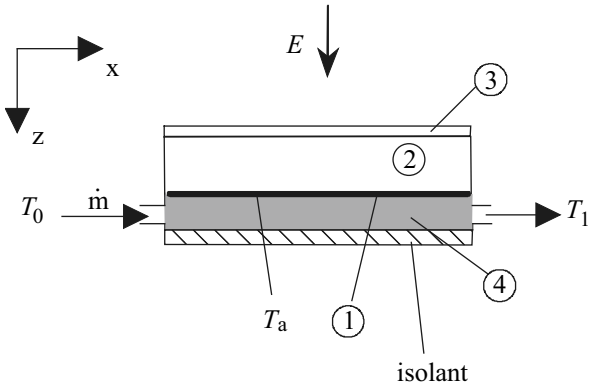
4.7 Le capteur solaire à air que l'on étudie ici est composé, comme le montre la coupe ci-dessous par un absorbeur (1) au-dessus duquel se trouve une plaque de

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

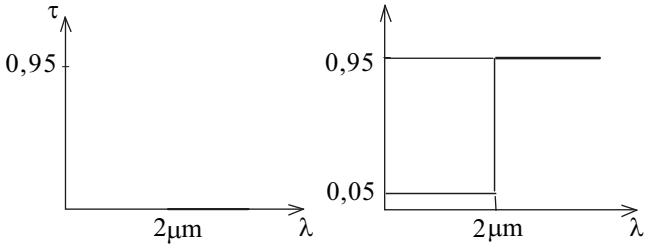
www.biblio-scientifique.net

verre (3). Dans l'espace (2), entre l'absorbeur et la plaque de verre, le vide a été réalisé.

L'absorbeur est en fait un échangeur qui restitue une partie de son énergie à une masse d'air (4) (de chaleur massique C_a = 1 000 J kg^{-1} K^{-1} et initialement à la température T_0 = 10 °C) qui circule sous l'absorbeur avec un débit m = 0,25 kg s^{-1}. Cet échange se produit grâce aux échanges convectifs (h = 25 W m^{-2} K^{-1}) entre l'air et la paroi inférieure de l'absorbeur. La face arrière du capteur est parfaitement isolée donc adiabatique.



La face supérieure de l'absorbeur se comporte comme un corps noir et sa face inférieure se comporte comme une surface parfaitement réfléchissante (ρ_{inf} = 1). Les caractéristiques radiatives du verre sont données sur la figure ci-dessous :



On suppose que la température de l'absorbeur et celle de la vitre sont uniformes et pour un bon fonctionnement du système c'est-à-dire une récupération d'énergie suffisante, la température de l'absorbeur doit atteindre T_a = 80 °C. Les échanges convectifs entre la vitre et l'air ambiant sont négligeables.

Les dimensions du capteur seront notées L suivant x et l = 3 m suivant y. Dans l'air qui circule sous l'absorbeur, la température est supposée uniforme dans chaque section (y, z), autrement dit la température de l'air en circulation ne dépend que de x.

a) Effectuer, sur une même figure, une représentation qualitative de l'évolution de la température de l'absorbeur et de l'air en circulation suivant x.

www.biblio-scientifique.net

b) Effectuer un bilan thermique sur un élément de volume d'air compris entre x et $x + \Delta x$ et déduire la loi d'évolution de la température de l'air, soit $T(x)$.

c) Donner l'expression du flux total ϕ_{air} récupéré par l'air lors de son passage sous l'absorbeur. Pour que l'intensité de ce flux soit ϕ_{air} = 7 500 W, quelle doit être la longueur L de l'absorbeur et par conséquent sa surface S ?

d) Pour pouvoir atteindre le niveau de température voulu pour l'absorbeur, on cherche à déterminer quel devrait être l'éclairement solaire E du capteur. Effectuer un schéma de tous les échanges radiatifs se produisant au niveau du vitrage, et de l'absorbeur.

e) Compte tenu des courbes fournies, préciser les valeurs des coefficients d'absorption, de transmission et de réflexion de la vitre dans le visible et l'ultraviolet pour $\lambda < 2$ µm (soit α_1, τ_1 et ρ_1) et dans l'infrarouge pour $\lambda > 2$ µm (soit α_2, τ_2 et ρ_2).

f) Donner les émissivités de la face supérieure ε_{sup} et de la face inférieure ε_{inf} de l'absorbeur.

g) Exprimer les flux radiatifs émis par l'absorbeur (face supérieure) (ϕ_{ae}) et par la vitre (ϕ_{ve}).

h) Exprimer les flux radiatifs absorbés par l'absorbeur (ϕ_{aa}) et par la vitre (ϕ_{va}).

i) Effectuer un bilan thermique global de la vitre et de l'absorbeur et montrer que l'on obtient un système de deux équations à deux inconnues T_v et E, système que l'on résoudra en prenant pour ϕ_{air} la valeur fixée à la question c.

Solutions des exercices

4.1 a) Si le rayonnement est isotrope, alors son intensité ne dépend pas de la direction d'émission. La luminance est donc :

$$L = L_n = 4\,500 \text{ W m}^{-2} \text{ sr}^{-1}.$$

b) L'angle solide entre la surface i (2, 3 et 4) et la surface 1 est donné par la relation $d\Omega_{i\to 1} = dA \cos\theta_i / r^2$. Dans cette relation, θ_i désigne l'angle que fait la surface i avec la direction du rayonnement incident provenant de 1. Cependant, à partir de l'hypothèse (***H2***) on peut dire que r ne varie pas beaucoup vis-à-vis de r_0 lorsque l'on balaye la surface i. On peut donc donner une valeur approchée des angles solides par :

$$\Omega_{2\to 1} = \frac{A \cos\theta_2}{r_0^2} = \frac{10^{-3} \times \cos 30}{0{,}7^2} = 1{,}767 \times 10^{-3} \text{ sr}$$

$$\Omega_{3\to 1} = \frac{A \cos\theta_3}{r_0^2} = \frac{10^{-3} \times \cos 0}{0{,}7^2} = 2{,}041 \times 10^{-3} \text{ sr}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

$$\Omega_{4\to 1} = \frac{A\ \cos\theta_2}{r_0^2} = \frac{10^{-3} \times \cos 45}{0{,}7^2} = 1{,}443 \times 10^{-3}\ \text{sr}$$

c) Pour calculer le flux intercepté par la surface i (2, 3 et 4) en venant de 1 on utilise la relation : $\phi_{1\to j} = L\ A\ \cos\theta_1\ \Omega_{j\to 1}$. Dans cette relation, θ_1 désigne l'angle que fait la direction du rayonnement issu de 1 et incident aux surfaces i avec la surface 1. On trouve alors :

$$\begin{aligned}
\phi_{1\to 2} &= L A \cos\theta_1\ \Omega_{2\to 1} = 4500 \times 10^{-3} \times \cos 60 \times 1{,}767 \times 10^{-3} \\
&= 3{,}98 \times 10^{-3}\ \text{W} \\
\phi_{1\to 3} &= L A \cos\theta_1\ \Omega_{3\to 1} = 4500 \times 10^{-3} \times \cos 0 \times 2{,}041 \times 10^{-3} \\
&= 9{,}19 \times 10^{-3}\ \text{W} \\
\phi_{1\to 4} &= L A \cos\theta_1\ \Omega_{4\to 1} = 4500 \times 10^{-3} \times \cos 45 \times 1{,}443 \times 10^{-3} \\
&= 4{,}59 \times 10^{-3}\ \text{W}
\end{aligned}$$

4.2 a) D'après la définition de l'émissivité totale hémisphérique, nous avons :

$$\varepsilon = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \varepsilon_\lambda\, L_\lambda^0}{L^0} = \frac{\varepsilon_1 \displaystyle\int_0^{\lambda_1} L_\lambda^0}{L^0} + \frac{\varepsilon_2 \displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L_\lambda^0}{L^0} + \frac{\varepsilon_3 \displaystyle\int_{\lambda_2}^{\infty} L_\lambda^0}{L^0}$$

En utilisant la notation du cours cette relation est équivalente à :

$$\varepsilon = \varepsilon_1\ F_{0\to\lambda_1} + \varepsilon_2\ F_{\lambda_1\to\lambda_2} + \varepsilon_3\ F_{\lambda_2\to\infty}$$

Soit :

$$\varepsilon = \varepsilon_1\ F_{0\to\lambda_1} + \varepsilon_2\ \left(F_{0\to\lambda_2} - F_{0\to\lambda_1}\right) + \varepsilon_3\ \left(F_{0\to\infty} - F_{0\to\lambda_2}\right)$$

En utilisant les valeurs tabulées du tableau 4.1, on trouve :

$$\lambda_1\, T = 1{,}5 \times 1300 = 1\ 950\ \ \mu\text{m K, d'où } F_{0\to\lambda_1} \sim 0{,}064.$$

$$\lambda_2\, T = 6 \times 1300 = 7\ 800\ \ \mu\text{m K, d'où } F_{0\to\lambda_2} \sim 0{,}848.$$

On trouve donc en finalité :

$$\varepsilon = 0{,}8 \times 0{,}064 + 0{,}2\ (0{,}848 - 0{,}064) + 0{,}3\ (1 - 0{,}848) = 0{,}254.$$

On en déduit l'émittance totale :

$$M = \varepsilon\, M^0 = \varepsilon\, \sigma_s\, T^4 = 0{,}254 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1300^4 = 41{,}133\ \ \text{kW m}^{-2}$$

www.biblio-scientifique.net

b) Si l'on suppose que la surface se comportait comme un corps noir, nous aurions accès à la longueur d'onde correspondant au pic d'émission par la relation de Wien :

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{1300} = 2{,}23\ \mu\text{m}$$

Si on adopte cette valeur pour notre surface, cela veut dire que l'émittance maximale est :

$$M_\lambda(\lambda_{\max}) = 0{,}2\, M_\lambda^0(\lambda_{\max})$$

La loi de Planck nous donne :

$$M_\lambda^0(\lambda_{\max}) = \frac{3{,}742 \times 10^8}{2{,}23^5\left(\mathrm{e}^{\frac{1{,}439\times 10^4}{2{,}23\times 1300}} - 1\right)} = 47{,}74\ \text{kW m}^{-2}$$

Soit : $M_\lambda(\lambda_{\max}) = 9{,}55\ \text{kW m}^{-2}$.
Néanmoins, nous avons une variation de l'émissivité à 1,5 µm et il faut donc vérifier que ce n'est pas à cette longueur d'onde, pour la valeur de l'émissivité de 0,8, que nous avons le maximum. Calculons alors l'émittance spectrale à partir de la relation :

$$M_\lambda(1{,}5) = 0{,}8\, M_\lambda^0(1{,}5)$$

La loi de Planck nous donne :

$$M_\lambda^0(1{,}5) = \frac{3{,}742 \times 10^8}{1{,}5^5\left(\mathrm{e}^{\frac{1{,}439\times 10^4}{1{,}5\times 1300}} - 1\right)} = 30{,}76\ \text{kW m}^{-2}.$$

Ce qui conduit à :

$$M_\lambda(1{,}5) = 0{,}8 \times 30{,}76 = 24{,}61\ \text{kW m}^{-2} > M_\lambda(\lambda_{\max}).$$

On constate donc que le maximum d'émittance à lieu pour $\lambda = 1{,}5\ \mu\text{m}$.

4.3 **a)** L'émittance totale hémisphérique de la cavité est celle d'un corps noir :

$$M^0(T) = \sigma_s \times T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1\,500^4 = 287{,}04\ \text{kW m}^{-2}$$

b) La longueur d'onde correspondant à l'émittance en deçà de laquelle 15 % du rayonnement est émis est telle que $F_{0\to\lambda_1} = 0{,}15$. En utilisant les données du tableau 4.1, on trouve $\lambda_1 T \sim 2\,450\ \mu\text{m K}$. Cela conduit à $\lambda_1 = 2450/1500 = 1{,}63\ \mu\text{m}$.

c) La longueur d'onde correspondant à l'émittance au-delà de laquelle 20 % du rayonnement est émis est telle que $F_{\lambda_2\to\infty} = 1 - F_{0\to\lambda_2} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. En utilisant les données du tableau 4.1 on trouve $\lambda_2 T \sim 6\,900\ \mu\text{m K}$. Cela conduit à $\lambda_2 = 6\,900/1\,500 = 4{,}6\ \mu\text{m}$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

d) La loi de Wien nous donne : $\lambda_{\max} T = 2\ 898\ \ \mu\text{m K}$, ce qui nous donne la longueur d'onde correspondant au maximum d'émittance :

$$\lambda_{\max} = 2\ 898/1\ 500 = 1{,}93\ \ \mu\text{m}.$$

À cette valeur est associé le maximum de luminance :

$$L^0_{\lambda_{\max}} = 4{,}096 \times 10^{-12}\ T^5 = 4{,}096 \times 10^{-12} \times 1\ 500^5 = 31\ \ 104\ \text{W m}^{-2}\ \text{sr}^{-1}$$

et donc, d'après la loi de Lambert, le maximum d'émittance :

$$M^0_{\lambda_{\max}} = \pi\, L^0_{\lambda_{\max}} = \pi \times 31\ 104 = 97{,}716\ \ \text{kW m}^{-2}$$

e) Comme nous l'avons vu dans le cours l'éclairement total hémisphérique de l'objet placé dans la cavité sera égal à l'émittance du corps noir, soit :

$$E\,(T) = M^0\,(T) = 287{,}04\ \ \text{kW m}^{-2}$$

4.4 L'émittance totale hémisphérique est :

$$M = \int_0^\infty \varepsilon_\lambda\, M^0_\lambda\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty (1 - \rho_\lambda)\ M^0_\lambda\, \mathrm{d}\lambda$$

En utilisant la notation du cours :

$$M = \left[\left(1 - \rho_{0\to\lambda_1}\right)\ F_{0\to\lambda_1} + \left(1 - \rho_{\lambda_1\to\lambda_2}\right)\ F_{\lambda_1\to\lambda_2} + \left(1 - \rho_{\lambda_2\to\infty}\right)\ F_{\lambda_2\to\infty}\right]\ M^0$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} M = \Big[&\left(1 - \rho_{0\to\lambda_1}\right)\ F_{0\to\lambda_1} + \left(1 - \rho_{\lambda_1\to\lambda_2}\right)\ \left(F_{0\to\lambda_2} - F_{0\to\lambda_1}\right) \\ &+ \left(1 - \rho_{\lambda_2\to\infty}\right)\ \left(1 - F_{0\to\lambda_2}\right)\Big]\ M^0 \end{aligned}$$

En se reportant au tableau 4.1, on trouve :

$$\lambda_1\, T = 1{,}5 \times 1\ 000 = 1\ 500\ \mu\text{m K}, \quad \text{d'où } F_{0\to\lambda_1} = 0{,}0095$$

$$\lambda_2\, T = 6 \times 1\ 000 = 6\ 000\ \mu\text{m K}, \quad \text{d'où } F_{0\to\lambda_2} = 0{,}738$$

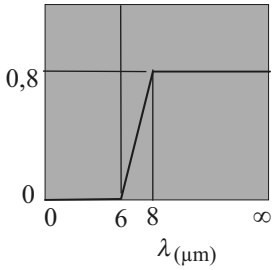
$$\begin{aligned} M &= [0{,}6 \times 0{,}0095 + 0{,}8 \times (0{,}738 - 0{,}0095) + 0{,}6 \times (1 - 0{,}738)]\ M^0 \\ &= 0{,}745\, M^0 \end{aligned}$$

Comme : $M^0 = \sigma_s\, T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1\ 000^4 = 56{,}70\ \ \text{kW m}^{-2}$
On trouve finalement l'émittance totale hémisphérique :

$$M = 0{,}745 \times 56{,}70 = 42{,}24\ \ \text{kW m}^{-2}.$$

www.biblio-scientifique.net

4.5 **a)** La loi de Kirchhoff nous dit que l'absorption hémisphérique est égale à l'émission hémisphérique : $\alpha_\lambda = \varepsilon_\lambda$. D'autre part, la surface étant opaque, on a : $\rho_\lambda = 1 - \alpha_\lambda$. On obtient donc la variation de réflectivité hémisphérique tel que représenté sur la figure ci-dessous.



b) L'absorptivité totale hémisphérique de la surface est le rapport entre l'éclairement total hémisphérique absorbé et l'éclairement total hémisphérique incident :

$$\alpha = \frac{E_a}{E} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \alpha_\lambda \, E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^\infty E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda}$$

En tenant compte des variations de α_λ et de E_λ, cela revient à calculer :

$$\alpha = \frac{E_a}{E} =$$

$$\frac{1 \times \displaystyle\int_4^6 E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda + 1000 \times \int_6^8 \alpha_\lambda \, \mathrm{d}\lambda + 1000 \times 0{,}2 \times \int_8^{10} \mathrm{d}\lambda + 0{,}2 \times \int_{10}^{12} E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_4^6 E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda + 1000 \times \int_6^{10} \mathrm{d}\lambda + \int_{10}^{12} E_\lambda \, \mathrm{d}\lambda}$$

Soit :

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} \times (6-4) + 0{,}8 \times \frac{1}{2} \times (8-6) + 0{,}2 \times (10-8) + 0{,}2 \times \frac{1}{2} \times (12-10)}{\frac{1}{2} \times (6-4) + (10-6) + \frac{1}{2} \times (12-10)}$$

Ce qui donne en finalité :

$$\alpha = \frac{2{,}4}{6} = 0{,}4$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

c) Calculons la densité de flux net à la surface qui est la différence entre le flux absorbé et le flux émis (à ne pas confondre avec la radiosité) :

$$\varphi_{\text{net}} = \alpha\, E - M = \alpha\, E - \varepsilon\, \sigma_s\, T^4$$

Soit :

$$\varphi_{\text{net}} = 0{,}4 \times 1\,000 - 0{,}65 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 450^4 = -1\,111 \text{ W m}^{-2}$$

Comme le flux net est négatif, la température de surface va donc décroître.

4.6 a) Il faut tout d'abord remarquer que la bille étant de dimensions très petites devant celles du four, ce dernier pourra donc être considéré comme un corps noir. Cela veut aussi dire que l'éclairement de la bille est égal à l'émittance du corps noir. On en déduit donc que l'absorptivité totale hémisphérique est :

$$\alpha = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \alpha_\lambda\, E_\lambda\, \mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^\infty E_\lambda\, \mathrm{d}\lambda} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \alpha_\lambda\, M_\lambda^0\, \mathrm{d}\lambda}{M^0}$$

Cette expression s'écrit :

$$\alpha = \alpha_1 \frac{\displaystyle\int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0\, \mathrm{d}\lambda}{M^0} + \alpha_2 \frac{\displaystyle\int_{\lambda_1}^\infty M_\lambda^0\, \mathrm{d}\lambda}{M^0} = \alpha_1\, F_{0\to\lambda_1} + \alpha_2\, \left(1 - F_{0\to\lambda_1}\right)$$

Avec $\lambda_1\, T = 6 \times 1300 = 7\,800$ µm K, le tableau 4.1 donne $F_{0\to\lambda_1} = 0{,}848$. Donc on a finalement :

$$\alpha = 0{,}8 \times 0{,}848 + 0{,}2 \times (1 - 0{,}848) = 0{,}71$$

Le calcul de l'émissivité total hémisphérique est similaire :

$$\varepsilon = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \varepsilon_\lambda\, M_\lambda\, \mathrm{d}\lambda}{M^0}$$

D'après la relation de Kirchhoff on a égalité entre l'émissivité et l'absorptivité spectrales : $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$; et donc :

$$\varepsilon = \alpha_1\, F_{0\to\lambda_1} + \alpha_2\, \left(1 - F_{0\to\lambda_1}\right)$$

Cependant cette fois-ci les fonctions F sont calculées à partir de la température initiale de la bille et non du four. Ainsi pour $\lambda_1\, T_b = 6 \times 450 = 2\,700$ µm K, on a $F_{0\to\lambda_1} = 0{,}21$.
Donc on a finalement :

$$\varepsilon = 0{,}8 \times 0{,}21 + 0{,}2 \times (1 - 0{,}21) = 0{,}33$$

www.biblio-scientifique.net

b) Lorsque l'on atteint l'état d'équilibre, la température de la bille devient égale à la température des parois du four. À ce moment-là, on voit que : $\alpha = \varepsilon$. On se retrouve dans la configuration qui nous a permis de démontrer la loi de Kirchhoff dans le cours.

c) Le vide étant créé dans le four, il n'y a pas d'échanges convectifs avec la bille. D'autre part, le diamètre de la bille étant petit, on peut faire l'hypothèse d'accommodation thermique totale de la bille, c'est-à-dire que la température de la bille est uniforme à chaque instant. Ceci conduit alors à dire que la variation d'énergie interne de la bille ne résulte que du flux de chaleur échangé à la surface de la bille par rayonnement entre la bille et le four (l'exactitude de cette relation ne peut être démontrée qu'à partir des outils que nous développerons au chapitre suivant pour ce qui concerne l'hypothèse sur le facteur de forme), soit :

$$m\,C_p \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t} = \phi_a - \phi_e$$

ϕ_a est le flux absorbé par la bille et ϕ_e est le flux émis par la bille.
On trouve donc :

$$m\,C_p \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t} = \alpha\,A\,E - \varepsilon\,A\,\sigma_s\,T_b^4$$

Cette équation différentielle est complexe car elle est fortement non linéaire mais en plus le coefficient d'émission ε va varier au cours du temps comme nous avons pu le démontrer aux deux premières questions. On peut par contre obtenir la vitesse de montée en température de la bille aux premiers instants en considérant lorsque $T_b = T_b\,(0)$, soit :

$$m\,C_p \frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t} = \alpha\,A\,E - \varepsilon\,A\,\sigma_s\,T_b\,(0)^4$$

On trouve alors :

$$\left.\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{\alpha\,A\,E - \varepsilon\,A\,\sigma_s\,T_b\,(0)^4}{m\,C_p} = \frac{A\,\sigma_s\,T_b\,(0)^4\,(\alpha - \varepsilon)}{m\,C_p}$$

Petit calcul numérique

On peut calculer l'évolution de la température au cours du temps en utilisant une méthode numérique telle que celle que nous avons vu pour tracer l'évolution de la fonction *F*. La méthode consiste tout simplement à écrire la dérivée en temps sous forme discrète :

$$\frac{\mathrm{d}T_b}{\mathrm{d}t} \approx \frac{T_b^i - T_b^{i-1}}{\Delta t} = \frac{A\,\sigma_s\,\left(T_b^{i-1}\right)^4\,\left(\alpha - \varepsilon^{i-1}\right)}{m\,C_p}$$

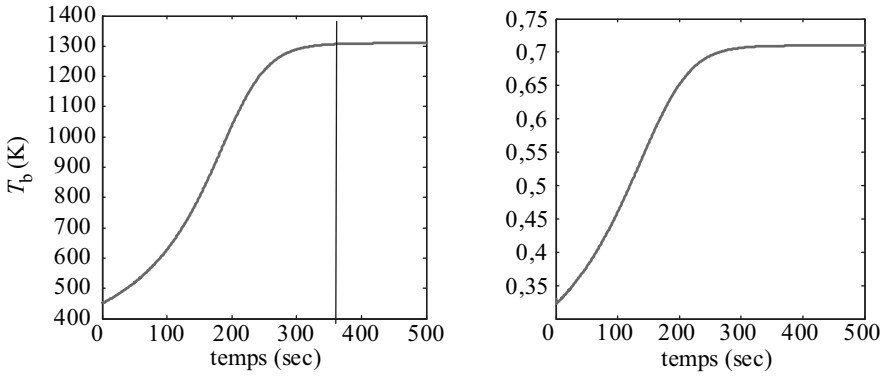
ce qui donne la valeur de la température de la bille à l'instant *i* en fonction de celle à l'instant *i* – 1 :

$$T_b^i = T_b^{i-1} + \Delta t\,\frac{A\,\sigma_s\,\left(T_b^{i-1}\right)^4\,\left(\alpha - \varepsilon^{i-1}\right)}{m\,C_p}$$

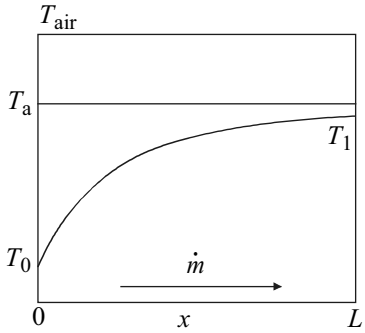
© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

À chaque itération on calcule la valeur de l'émissivité en recalculant la valeur de la fonction F pour la nouvelle valeur de la température de la bille. On constate que l'on atteint le régime d'équilibre à environ 360 secondes aussi bien sur la température que sur l'émissivité.



4.7 **a)** La température de l'air va tendre vers la température de l'absorbeur.



b) On effectue un bilan thermique sur une tranche de longueur Δx de l'absorbeur :

$$\dot{m}\, C_a\, (T(x+\Delta x) - T(x)) = h\, l\, \Delta x\, (T_a - T\,(x))$$

Soit :

$$\dot{m}\, C_a\, \Delta T(x) = h\, l\, \Delta x\, (T_a - T\,(x))$$

Ce qui conduit donc à :

$$\frac{\Delta T(x)}{T\,(x) - T_a} = -\frac{h\, l\, \Delta x}{\dot{m}\, C_a}$$

On intègre cette relation entre 0 et x :

$$\ln \frac{T\,(x) - T_a}{T\,(0) - T_a} = -\frac{h\, l}{\dot{m}\, C_a} x$$

www.biblio-scientifique.net

Soit finalement l'expression de la température en tout point de l'absorbeur :

$$T(x) - T_a = (T(0) - T_a)\exp\left[-\frac{h\,l}{\dot{m}\,C_a}x\right]$$

c) On a :

$$\phi_{air} = \dot{m}\,C_a\,(T_1 - T_0) = \dot{m}\,C_a\,(T(L) - T_0)$$

Ce qui conduit à :

$$T(L) = \frac{\phi_{air}}{\dot{m}\,C_a} + T_0$$

$$T(L) = \frac{7500}{0{,}25 \times 1000} + 10 = 40\ °\mathrm{C}$$

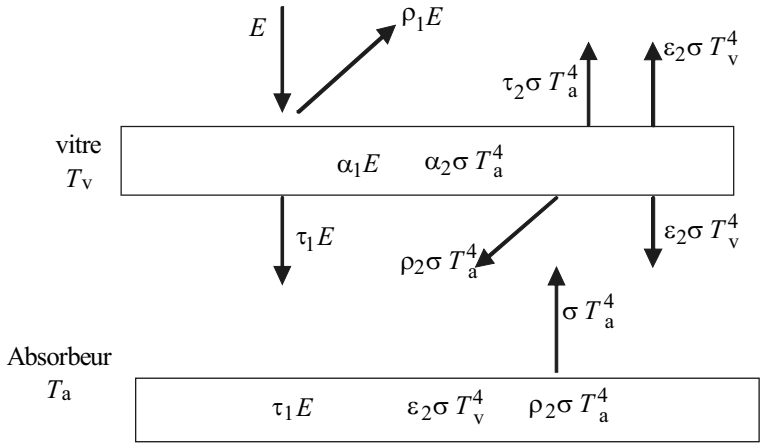
En reportant dans la relation obtenue en b :

$$T(L) - T_a = (T(0) - T_a)\exp\left[-\frac{h\,l}{\dot{m}\,C_a}L\right]$$

$$L = -\frac{\dot{m}\,C_a}{h\,l}\ln\frac{T(L) - T_a}{T(0) - T_a}$$

On trouve : $L = 1{,}86$ m et $S = 1{,}86 \times 3 = 5{,}6\ \mathrm{m}^2$

d) Le flux solaire incident est transmis en grande partie par la vitre et est absorbé par l'absorbeur. La vitre émet un flux, celui dirigé vers l'absorbeur sera absorbé par ce dernier. Le flux émis par l'absorbeur est dans le domaine de l'IR. Il va donc être réfléchi par la vitre en grande partie et va être réabsorbé par l'absorbeur. C'est ce que l'on appelle l'effet de serre. Cet effet est utilisé ici de manière à augmenter la température de l'absorbeur, à un niveau plus haut que celui que l'on atteindrait sans la vitre. On retrouve cet effet au niveau de notre planète et c'est la couche nuage qui joue le rôle de la vitre. On imagine donc que plus cette couche de nuages sera opaque aux IR, plus la température du sol sera importante.



© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

e) Comme : $\alpha + \rho + \tau = 1$, les courbes nous donnent :

$$\alpha_1 = 0\,;\ \tau_1 = 0{,}95\,;\ \rho_1 = 0{,}05\,;$$

$$\alpha_2 = 0{,}05\,;\ \tau_2 = 0\,;\ \rho_2 = 0{,}95\,;$$

f) La face supérieure de l'absorbeur est un corps noir, donc $\varepsilon_{\text{sup}} = 1$
La face inférieure de l'absorbeur est réfléchissante, donc $\rho_{\text{inf}} = 1$
On en déduit $\alpha_{\text{inf}} = 0$ et $\varepsilon_{\text{inf}} = 0$

g) Ces flux sont :

$$\phi_{ae} = \sigma_s\, T_a^4\, S$$

$$\phi_{ve} = 2\,\sigma_s\, T_v^4\, S$$

h)

$$\phi_{aa} = \rho_2\, \sigma_s\, T_a^4\, S + \tau_1\, E\, S + \varepsilon_2 \sigma_s\, T_v^4\, S$$

$$\phi_{va} = \alpha_2\, \sigma_s\, T_a^4\, S + \alpha_1\, E\, S = \alpha_2\, \sigma_s\, T_a^4\, S \text{ car } \alpha_1 = 0$$

i) Bilan sur l'absorbeur :

$$\phi_{aa} = \phi_{ae} + \phi_{air}$$

Bilan sur la vitre :

$$\phi_{ve} = \phi_{va}$$

On en déduit :

$$T_v = \left(\frac{T_a^4}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = 23{,}8\ °\text{C}$$

Puis en utilisant le bilan sur l'absorbeur on trouve : E = 1 361 W m^{-2}.

www.biblio-scientifique.net

5 TRANSFERT PAR RAYONNEMENT ENTRE CORPS

PLAN

5.1 Définitions des outils géométriques
5.2 Échanges radiatifs entre corps noirs
5.3 Échanges entre corps gris dans une cavité
5.4 Références
Exercices
Solutions des exercices

OBJECTIFS

- Définir le flux de chaleur échangé par rayonnement entre plusieurs surfaces
- Utiliser le schéma aux radiosités pour décrire les transferts radiatifs entre surfaces grises

5.1 DÉFINITIONS DES OUTILS GÉOMÉTRIQUES

5.1.1 Facteur de forme

Considérons deux surfaces grises possédant des températures différentes et positionnées dans l'espace à 3 dimensions comme le schématise la figure 5.1. Bien entendu si les températures étaient identiques, il n'y aurait pas de transfert de chaleur par rayonnement entre les deux surfaces.

Le facteur de forme F_{12} est la part de flux rayonné par 1 qui va être intercepté par 2.

Donc, de la même façon, le facteur de forme F_{21} est la part de flux rayonné par 2 qui va être intercepté par 1 et on voit bien sur la figure qu'il est généralement différent de F_{12} en fonction de l'orientation relative des deux surfaces et des surfaces elles-mêmes.

Estimation intuitive des facteurs de forme

Intuitivement, il est assez facile de donner les évolutions de facteur de forme en fonction de grandeurs géométriques caractéristiques du problème étudié. Examinons

www.biblio-scientifique.net

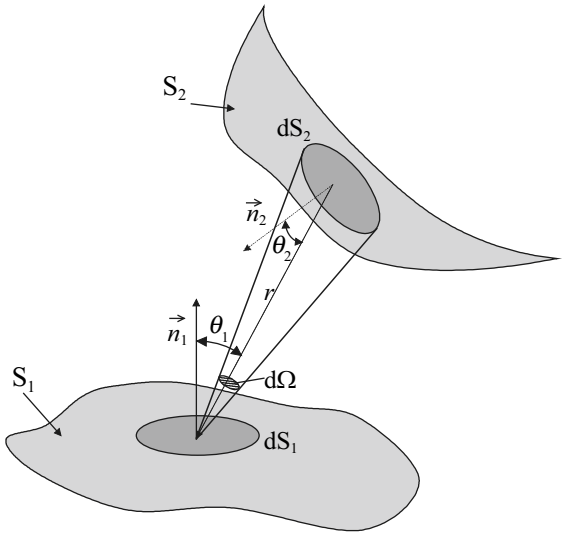


Figure 5.1 **Transfert de chaleur par rayonnement entre deux surfaces**
L'angle solide est défini au sommet du cône de vision d'un élément de surface d'une des surfaces vis-à-vis d'un élément de surface de l'autre.

les 3 configurations représentées sur la figure 5.2. Dans la configuration **A** on peut dire que plus la distance *d* est grande et plus les facteurs de forme F_{12} et F_{21} seront petits. Plus L_1 sera petit devant L_2 et plus F_{21} sera petit devant F_{12}. De même plus L_2 sera petit devant L_1 et plus F_{12} sera petit devant F_{21}. Dans la configuration **B** (une sphère ou un cylindre à l'intérieur d'une sphère ou d'un cylindre respectivement), la surface 1 rayonne sur 2 mais aussi sur elle-même. Dans ce cas $F_{11} \neq 0$ alors que $F_{22} = 0$. D'autre part, plus L_2 sera petit devant L_1 et plus F_{12} sera petit devant F_{21}. Enfin, quelle que soit la valeur de L_2, tout le flux rayonné par 2 arrive sur 1 et donc on a toujours $F_{21} = 1$. La configuration **C** est un peu plus complexe. On devine que plus l'angle α entre les deux plaques sera petit et plus le facteur F_{21} sera grand. Il en sera de même de F_{12} mais pas dans les mêmes proportions. Enfin, pour une valeur de L_1 donnée, plus L_2 sera grande et plus F_{21} sera grand et bien sûr le même raisonnement est valable pour la deuxième surface en considérant une valeur donnée de L_2.

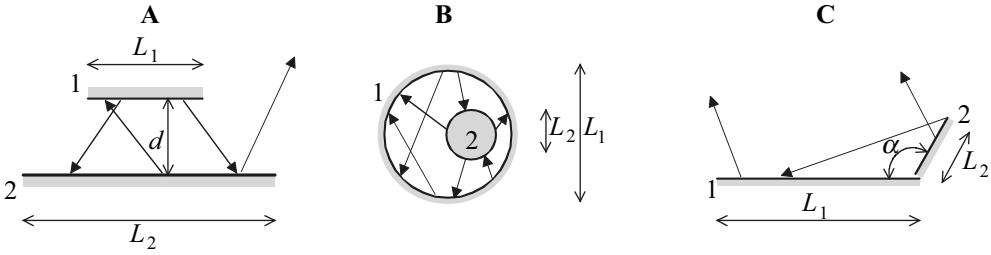


Figure 5.2 **Quelques configurations où on peut évaluer intuitivement les variations des facteurs de forme en fonction des paramètres géométriques**

www.biblio-scientifique.net

Cherchons donc une expression de F_{12} en partant de la relation liant le flux émis à la luminance et que nous avons obtenu au chapitre précédent :

$$\mathrm{d}\phi_{1\to 2} = L_1\,\mathrm{d}S_1\,\cos\theta_1\,\mathrm{d}\Omega_{21} \tag{5.1}$$

L'angle solide est par définition :

$$\mathrm{d}\Omega_{21} = \frac{\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_2}{r^2} \tag{5.2}$$

On voit donc, en remplaçant la relation 5.2 dans la relation 5.1 que :

$$\mathrm{d}\phi_{1\to 2} = L_1\,\frac{\mathrm{d}S_1\,\cos\theta_1\,\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_2}{r^2} \tag{5.3}$$

En intégrant sur les deux surfaces S_1 et S_2, on trouve l'expression du flux émis par 1 et reçu par 2 :

$$\phi_{1\to 2} = L_1\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\,\cos\theta_2}{r^2}\,\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{5.4}$$

Nous avons vu au chapitre précédent que la radiosité associée à la surface 1 correspond à la somme de l'émittance de 1 et de la part réfléchie de l'éclairement de 1 qui est notamment ici le flux émis par 2 :

$$J_1 = M_1 + \rho\,E_1 \tag{5.5}$$

La loi de Lambert lie la radiosité à la luminance :

$$J_1 = \pi\,L_1 \tag{5.6}$$

En remplaçant la luminance de la relation 5.3 par son expression en fonction de la radiosité dans la relation 5.6, on trouve l'expression du flux émis par 1 et reçu par 2 :

$$\phi_{1\to 2} = J_1\,S_1\,F_{12} \tag{5.7}$$

En comparant la relation 5.7 avec la relation 5.4, on trouve que le facteur de forme F_{12} est :

$$F_{12} = \frac{1}{S_1}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\,\cos\theta_2}{\pi\,r^2}\,\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{5.8}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

5.1.2 Relation de réciprocité

On refait la même démarche que précédemment mais en partant de l'expression du flux émis par 2 et reçu par 1 :

$$\mathrm{d}\phi_{2\to 1} = L_2\,\mathrm{d}S_2\,\cos\theta_2\,\mathrm{d}\Omega_{21} \tag{5.9}$$

Le flux total s'exprime en fonction de la radiosité de la surface 2 :

$$\phi_{2\to 1} = J_2\,S_2\,F_{21} \tag{5.10}$$

On trouve alors que le facteur de forme F_{21} est :

$$F_{21} = \frac{1}{S_2}\int_{S_1}\int_{S_2}\frac{\cos\theta_1\,\cos\theta_2}{\pi\,r^2}\,\mathrm{d}S_1\,\mathrm{d}S_2 \tag{5.11}$$

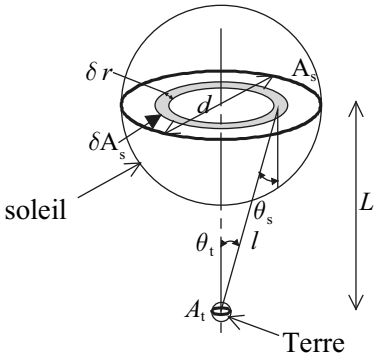
En comparant les relations 5.8 et 5.11 on obtient la relation de réciprocité :

$$F_{12}\,S_1 = F_{21}\,S_2 \tag{5.12}$$

Exercice d'application 5.1 Application au calcul du facteur de forme Terre – Soleil

La Terre est distante du Soleil d'environ 150 000 000 de kilomètres. Le rayon de la Terre est de 6 380 km environ et celui du soleil est de l'ordre de 695 500 km, soit donc 100 fois plus que celui de la Terre. Calculer le facteur de forme Terre – Soleil ?

SOLUTION. Étant donné les ordres de grandeur on peut donc adopter la configuration géométrique de la figure ci-dessous.



La Terre apparaît comme un disque d'aire très petite devant celui représentatif du Soleil. Il est inutile ici de considérer la sphéricité des deux astres étant donné

www.biblio-scientifique.net

que leurs diamètres sont très petits devant la distance les séparant, c'est donc la projection qui nous intéresse. Par définition le facteur de forme est :

$$F_{ts} = \frac{1}{A_t} \int_{A_t} \int_{A_s} \frac{\cos\theta_t \, \cos\theta_s}{\pi \, l^2} \, \mathrm{d}A_t \, \mathrm{d}A_s$$

La surface A_t étant très petite, les valeurs de θ_t, θ_s et l n'en dépendent pas et d'autre part on peut admettre que $\theta_t = \theta_s = \theta$ et donc :

$$F_{ts} = \int_{A_s} \frac{\cos^2\theta}{\pi \, l^2} \, \mathrm{d}A_s$$

On choisit $\mathrm{d}A_s$ sous la forme d'un anneau de largeur $\mathrm{d}r$, ce qui conduit à : $\mathrm{d}A_s = 2\,\pi\, r\, \mathrm{d}r$, $\cos\theta = L/l$ et $l^2 = r^2 + L^2$. Ceci conduit à :

$$F_{ts} = \int_0^{R_s} \frac{2\,L^2\, r}{\left(r^2 + L^2\right)^2} \, \mathrm{d}r = \frac{R_s^2}{R_s^2 + L^2}$$

L'application numérique donne : $F_{ts} = 2{,}15 \times 10^{-5}$. Donc d'après la relation de réciprocité :

$$F_{st} = \frac{F_{ts}\, A_t}{A_s} = \frac{F_{ts}\, R_t^2}{R_s^2} = 1{,}8 \times 10^{-9}$$

Nous ne voyons donc qu'à peu près 2×10^{-7} % du rayonnement émis par le soleil !

5.1.3 Cas particulier de la cavité

Imaginons que N surfaces grises forment une cavité telle que celle représentée sur la figure 5.3.

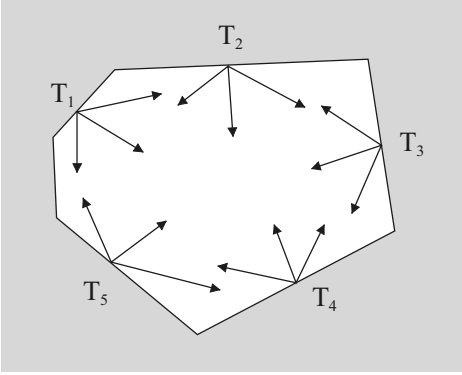


Figure 5.3 **Flux rayonnés par différentes surfaces formant une cavité**
Les surfaces sont toutes à des températures différentes et on suppose que la cavité est isolée de l'extérieur.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Comme pour la configuration à deux surfaces vue précédemment, on ne pourra définir un flux radiatif échangé par deux surfaces de la cavité que si elles sont à des températures différentes. Le flux qui est émis par la surface j est vu en totalité par l'ensemble de toutes les autres surfaces, j compris selon que la courbure de j est nulle ou non.

Dans une cavité on doit obligatoirement obtenir :

$$\sum_{i=1}^{N} F_{ji} = 1, \qquad \forall\, j \in (1, \cdots, N) \tag{5.13}$$

Courbure de surface

Considérons l'exemple de la figure 5.4 où un cylindre 1 (ou une sphère) est placé à l'intérieur d'un autre cylindre 2 (ou d'une autre sphère). La surface 2 étant concave, une partie du flux émis par 2 est aussi incident à 2 et donc $F_{22} \neq 0$. Par contre la convexité de 1 fait que le flux émit par 1 n'est jamais intercepté par 1 ($F_{11} = 0$) mais que tout le flux est intercepté par 2 ($F_{12} = 1$). En utilisant finalement la relation de réciprocité 5.12, on trouve le facteur de forme : $F_{21} = F_{12}\, S_1/S_2$.

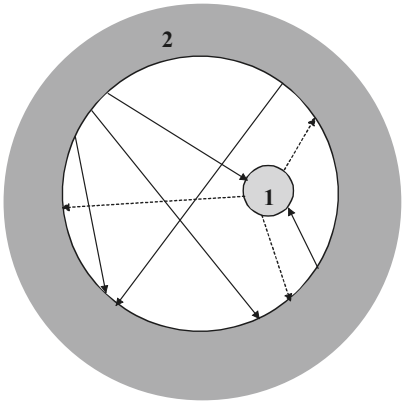


Figure 5.4 **Flux rayonnés entre deux cylindres (ou deux sphères) l'un est placé à l'intérieur de l'autre**
Les lignes d'émission issues de 2 (en trait plein) arrivent sur 1 mais reviennent aussi sur 2. On devine que la part de flux revenant sur 2 sera d'autant plus grande que le diamètre de 1 sera petit. Au contraire les lignes démission issues de 1, en pointillés, sont incidentes à 1 et ne reviennent jamais sur 1. Ceci est d'ailleurs vrai quelle que soit la dimension de 1 et 2.

Milieu non participatif

Dans la représentation de la figure 5.3, le milieu englobé par la cavité est supposé ici être non participatif. Cela signifie que le milieu n'interagit pas avec le transfert radiatif entre surfaces. Le milieu est donc par exemple parfaitement transparent pour tout le domaine de longueur d'onde. Ceci est vérifié lorsque c'est du vide. Par contre, cette hypothèse peut être complètement mise en défaut lorsque le milieu est de la vapeur

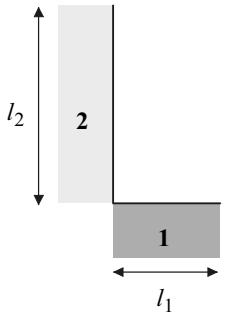
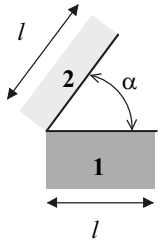
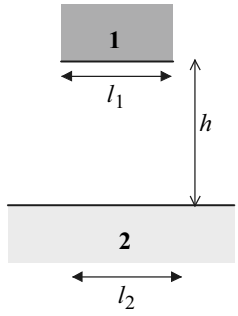
www.biblio-scientifique.net

d'eau par exemple, ou toute autre molécule gazeuse. Dans ce cas le rayonnement sera globalement absorbé par le gaz, ce qui aura pour conséquence d'élever sa température globale. En fonction de la densité particulaire du gaz et des propriétés géométriques et physiques des particules de gaz, l'absorption du rayonnement sera décrite par des théories plus ou moins complexes qui dépassent le cadre de ce cours. Le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de J. Taine *et al.* (*Transferts thermiques*, Coll. Sciences Sup, Dunod) pour plus de détails sur ces théories.

5.1.4 Quelques valeurs du facteur de forme

Il est possible d'obtenir une expression analytique du facteur de forme entre 2 surfaces dans des configurations géométriques particulières que nous représentons dans le tableau 5.1.

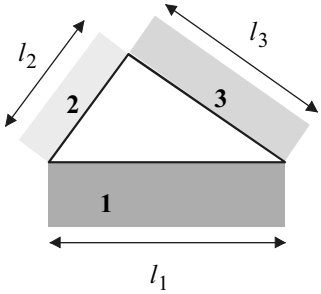
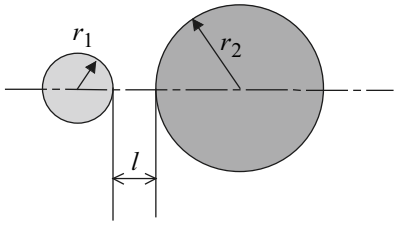
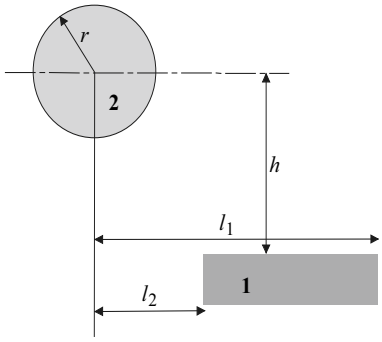
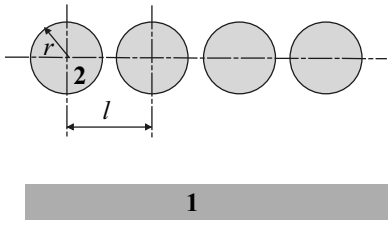
Tableau 5.1 **Valeur du facteur de forme dans quelques configurations géométriques particulières**

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	2 plaques perpendiculaires jointes $F_{12} = \dfrac{1+\gamma-\sqrt{1+\gamma^2}}{2}$ $\gamma = \dfrac{l_2}{l_1}$
	2 plaques de même longueur, inclinées et jointes $F_{12} = 1 - \sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$
	2 plaques parallèles $F_{12} = \dfrac{\sqrt{(L_1+L_2)^2+4} - \sqrt{(L_2-L_1)^2+4}}{2\,L_1}$ $L_1 = \dfrac{l_1}{h},\ L_2 = \dfrac{l_2}{h}$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

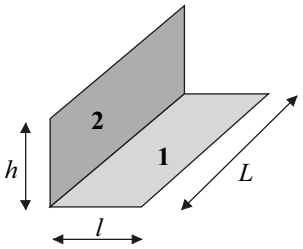
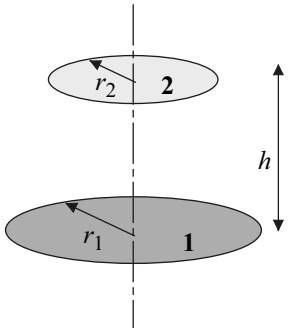
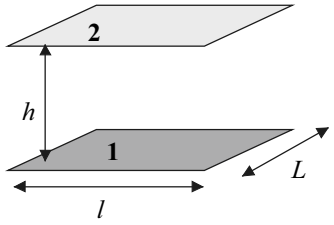
www.biblio-scientifique.net

Tableau 5.1 **(suite)**

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	Cavité à 3 surfaces $F_{12} = \dfrac{l_1 + l_2 - l_3}{2\,l_1}$
	2 cylindres d'axes parallèles $F_{12} = \dfrac{1}{2\,\pi}\left(\begin{array}{l}\pi + \sqrt{\alpha^2 - (\beta+1)^2} \\ -\sqrt{\alpha^2 - (\beta-1)^2} \\ +(\beta-1)\cos^{-1}\left(\dfrac{\beta-1}{\alpha}\right) \\ -(\beta+1)\cos^{-1}\left(\dfrac{\beta+1}{\alpha}\right)\end{array}\right)$ $\beta = \dfrac{r_2}{r_1},\ \alpha = 1 + \beta + \dfrac{l}{r_1}$
	Cylindre et plan, axe du cylindre parallèle au plan $F_{12} = \dfrac{r}{l_1 - l_2}\left(\tan^{-1}\dfrac{l_1}{h} - \tan^{-1}\dfrac{l_2}{h}\right)$
	Rangée infinie de cylindre et plan $F_{12} = 1 - \sqrt{1 - \left(\dfrac{2\,r}{l}\right)^2} + \dfrac{2\,r}{l}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{l^2 - 4\,r^2}{4\,r^2}}$

www.biblio-scientifique.net

Tableau 5.1 **(suite)**

Géométrie	Facteur de forme F_{12}
	2 murs perpendiculaires $\pi\,\alpha\,F_{12} = \alpha\,\tan^{-1}\dfrac{1}{\alpha} + \beta\,\tan^{-1}\dfrac{1}{\alpha}$ $-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ $+\dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2} \times \left[\dfrac{\alpha^2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\right]^{\alpha^2} \times \left[\dfrac{\beta^2(1+\alpha^2+\beta^2)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}\right]^{\beta^2}\right)$ $\alpha = \dfrac{l}{L},\ \beta = \dfrac{h}{L}$
	2 disques coaxiaux $F_{12} = \dfrac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2}\right)$ $\beta = 1 + \dfrac{1+\alpha_2^2}{\alpha_1^2}$ $\alpha_1 = \dfrac{r_1}{h},\ \alpha_2 = \dfrac{r_2}{h}$
	2 murs parallèles $\dfrac{\pi\,\alpha\,\beta}{2}\,F_{12} = \alpha\sqrt{1+\beta^2}\,\tan^{-1}\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}} +$ $\beta\sqrt{1+\alpha^2}\,\tan^{-1}\dfrac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} +$ $\ln\sqrt{\dfrac{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}{1+\alpha^2+\beta^2}} - \alpha\tan^{-1}\alpha - \beta\tan^{-1}\beta$ $\alpha = \dfrac{l}{h},\ \beta = \dfrac{L}{h}$

www.biblio-scientifique.net

5.2 ÉCHANGES RADIATIFS ENTRE CORPS NOIRS

5.2.1 Échanges entre 2 corps noirs

Reprenons la configuration de transfert radiatif entre 2 corps telle que représentée sur la figure 5.5 et supposons que les deux surfaces se comportent comme des corps noirs. Dans ce cas, l'absorptivité de chaque surface est égale à 1 et il n'y a pas de flux réfléchit. En d'autres termes, la radiosité est égale à l'émittance du corps noir : $J = M^0$. Le flux total hémisphérique partant de 1 et arrivant sur 2 est d'après la relation 5.7 :

$$\phi_{1\to 2} = M_1^0\, S_1\, F_{12} \tag{5.14}$$

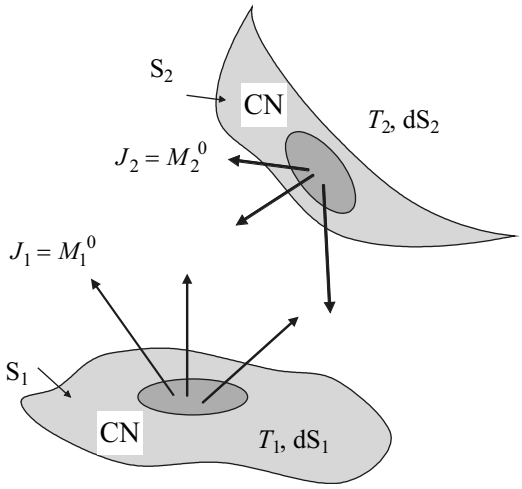


Figure 5.5 **Échange de chaleur par rayonnement entre 2 corps noirs**

De même, le flux total hémisphérique partant de 2 et arrivant sur 1 est :

$$\phi_{2\to 1} = M_2^0\, S_2\, F_{21} \tag{5.15}$$

Le flux net échangé entre les deux corps est donc :

$$\phi_{12} = \phi_{1\to 2} - \phi_{2\to 1} \tag{5.16}$$

Soit donc en utilisant les relations 5.15 et 5.16 :

$$\phi_{12} = M_1^0\, S_1\, F_{12} - M_2^0\, S_2\, F_{21} \tag{5.17}$$

La relation de réciprocité 5.12 nous permet alors d'écrire cette dernière relation sous la forme :

$$\phi_{12} = S_1\, F_{12}\left(M_1^0 - M_2^0\right) \tag{5.18}$$

www.biblio-scientifique.net

Nous avons montré que l'émittance totale hémisphérique d'un corps noir est liée à sa température à partir de la relation de Stefan - Boltzmann :

$$M^0 = \sigma_s \, T^4 \tag{5.19}$$

On en déduit alors l'expression du flux net échangé entre deux corps noirs :

Le flux net échangé entre deux corps noirs 1 et 2 de surface respective S_1 et S_2 et de température respective T_1 et T_2 est :

$$\phi_{12} = S_1 \, F_{12} \, \sigma_s \left(T_1^4 - T_2^4\right) \tag{5.20}$$

Le flux net échangé entre 1 et 2 est par définition la différence entre le flux émis par 1 et absorbé par 2 et celui émis par 2 et absorbé par 1.

Remarque

On doit bien sûr remarquer que si : $\phi_{12} = \phi_{1\to2} - \phi_{2\to1}$ alors $\phi_{21} = \phi_{2\to1} - \phi_{1\to2} = -\phi_{12}$. En d'autres termes, le flux net entre 1 et 2 est l'opposé du flux net entre 2 et 1. Lorsque les deux corps sont à la même température, on voit bien que le flux émis par chaque corps est le même et que c'est bien le flux net échangé qui s'annule.

5.2.2 Échanges entre corps noirs dans une cavité

Considérons une cavité formée de N surfaces corps noirs comme représenté sur la figure 5.6. Comme tout le flux émis par une surface est absorbé par les autres, le flux net total issu de la surface i est la somme des flux nets échangés entre cette surface et toutes les autres (surface i comprise si celle-ci est concave) :

$$\phi_i = \phi_{i1} + \phi_{i2} + \cdots + \phi_{iN} \tag{5.21}$$

En utilisant la relation 5.20, on voit donc que le flux issu de la surface i dans une cavité formée de N surfaces est :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} S_i \, F_{iJ} \, \sigma_s \left(T_i^4 - T_j^4\right) \tag{5.22}$$

Remarque

Encore une fois insistons sur le fait que la relation exprimant le flux est fortement non - linéaire puisqu'elle fait intervenir l'écart des températures à l'exposant 4. Il est donc important de toujours se rappeler d'exprimer les températures en Kelvin.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

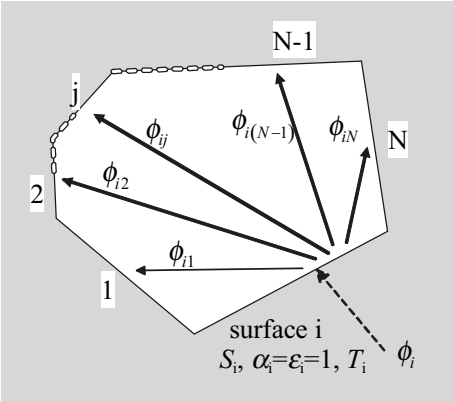


Figure 5.6 **Bilan des flux à la surface d'une cavité formée de *N* corps noirs**

Notations de flux utilisées

- $\phi_{i\to j}$ désigne le flux radiatif émis par la surface i et intercepté par la surface j.
- $\phi_{ij} = \phi_{i\to j} - \phi_{j\to i}$ est le flux net échangé entre les surfaces i et j et est égal à l'opposé du flux net échangé entre j et i.
- ϕ_i est le flux net à la surface i. C'est la somme des flux nets échangés entre la surface i et toutes les autres surfaces, l'ensemble des surfaces formant une cavité. En toute rigueur ce flux net représente la puissance à fournir à la surface pour maintenir sa température à T_i.

5.3 ÉCHANGES ENTRE CORPS GRIS DANS UNE CAVITÉ

5.3.1 Expression du flux net échangé

Au chapitre précédent nous avons défini le corps gris comme étant une surface dont l'émissivité totale hémisphérique est égale à l'absorptivité totale hémisphérique. Il suffit pour cela que l'éclairement corresponde à une émittance de corps noir ou bien que ε_λ et α_λ soient indépendants de la longueur d'onde λ.

Considérons donc une cavité formée de N surfaces diffuses, opaques et grises comme cela est représenté sur la figure 5.7. Intéressons-nous à la surface i et notons E_i l'éclairement total hémisphérique de la surface et M_i son émittance totale hémisphérique. Rappelons que la radiosité[1] de la surface est :

$$J_i = M_i + \rho_i E_i \tag{5.23}$$

1. Nous simplifions pour la suite l'expression des grandeurs physiques en éludant la caractéristique « totale hémisphérique » afin de ne pas alourdir inutilement le texte. Ainsi « émittance » sera comprise ici dans le sens de « émittance totale hémisphérique » et il en sera de même pour toutes les autres grandeurs physiques en rayonnement.

www.biblio-scientifique.net

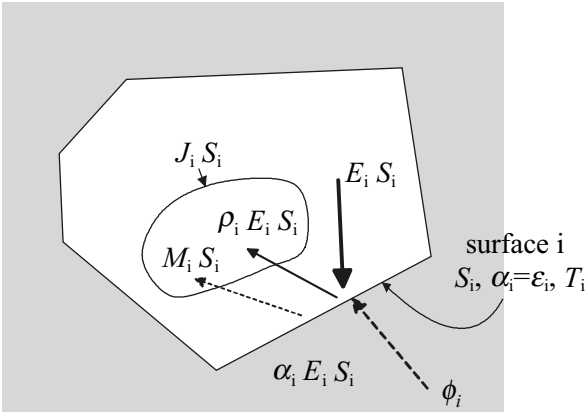


Figure 5.7 **Bilan des flux à la surface grise d'une cavité**

On utilise la définition de l'émittance vis-à-vis de celle du corps noir et le fait que les surfaces sont grises :

$$M_i = \varepsilon_i\ M_i^0 = \alpha_i\ M_i^0 \tag{5.24}$$

D'autre part, les surfaces étant opaques, la transmissivité est nulle et on a donc une relation seulement entre l'absorptivité et la réflectivité :

$$\alpha_i + \rho_i = 1 \tag{5.25}$$

En utilisant les relations 5.24 et 5.25 dans la relation 5.23, on en déduit une expression de l'éclairement sous la forme :

$$E_i = \frac{J_i - \alpha_i\ M_i^0}{1 - \alpha_i} \tag{5.26}$$

Le flux net à la surface *i* est par définition la différence entre ce qui est émis et ce qui est incident :

$$\phi_i = S_i\ (J_i - E_i) \tag{5.27}$$

En remplaçant l'expression de E_i, donnée à la relation 5.26, dans la relation 5.27, on trouve une relation entre le flux net à la surface avec la radiosité et l'émittance du corps noir équivalent :

$$\phi_i = \frac{M_i^0 - J_i}{1 - \alpha_i / \alpha_i\ S_i} \tag{5.28}$$

L'éclairement est bien sûr la somme des radiosités provenant de toutes les autres surfaces (surface *i* éventuellement comprise). On peut donc exprimer le flux de chaleur

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

lié à cet éclairement comme la somme des flux associés aux radiosité des surfaces en utilisant les facteurs de forme entre la surface i et toutes les surfaces de la cavité :

$$S_i\, E_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ji}\, S_j\, J_j \tag{5.29}$$

En utilisant la relation de réciprocité cette dernière relation s'écrit de manière équivalente :

$$S_i\, E_i = \sum_{j=1}^{N} F_{ij}\, S_i\, J_j \tag{5.30}$$

En remplaçant l'expression de l'éclairement fournie par cette dernière relation dans la relation 5.27 donnant le flux net à la surface i on obtient :

$$\phi_i = S_i \left(J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij}\, J_j \right) \tag{5.31}$$

Nous savons que dans une cavité on a une relation sur les facteurs de forme donnée par la relation 5.13. En l'utilisant dans la relation 5.31 celle-ci devient équivalente à :

$$\phi_i = S_i \left(\sum_{j=1}^{N} F_{ij}\, J_i - \sum_{j=1}^{N} F_{ij}\, J_j \right) \tag{5.32}$$

Soit encore :

$$\phi_i = S_i \sum_{j=1}^{N} F_{ij}\, \left(J_i - J_j \right) \tag{5.33}$$

On voit donc que l'on obtient deux expressions du flux net à chaque surface de la cavité. La première est donnée par la relation 5.28 et la seconde par la relation 5.33. Ces deux relations sont donc parfaitement équivalentes.

Le flux net à la surface i d'une cavité formée de N surfaces est :

$$\phi_i = \frac{M_i^0 - J_i}{1 - \alpha_i/\alpha_i\, S_i} = \sum_{j=1}^{N} \frac{J_i - J_j}{\left(F_{ij}\, S_i\right)^{-1}} \tag{5.34}$$

Nous avons d'autre part montré au chapitre précédent que la loi de Kirchhoff pour les corps gris conduit à $\varepsilon_i = \alpha_i$. On pourra donc exprimer le flux net dans la relation 5.34 à partir de l'émissivité.

www.biblio-scientifique.net

5.3.2 Influence d'un milieu participatif

Tous les développements que nous avons conduits jusqu'à présent supposent que le milieu contenu dans la cavité est non participatif. En d'autres mots cela veut dire qu'il est totalement transparent aux flux rayonnés par les surfaces de la cavité et ceci quelle que soit la longueur d'onde ou bien la température des surfaces. Cette condition est parfaitement remplie lorsque l'on fait le vide à l'intérieur de l'enceinte. Mais qu'en est-il lorsque l'enceinte est composée d'air ambiant, c'est-à-dire un mélange de gaz, tel que le gaz carbonique, avec de la vapeur d'eau ?

Cette atmosphère ambiante va jouer un rôle tout d'abord vis-à-vis de l'absorption du rayonnement. C'est une absorption propre aux constituants gazeux d'une part et d'autre part aux particules (atomes et molécules) constituant le gaz. On parle dans ce dernier cas d'absorption diffuse. Cette atmosphère va aussi perturber les échanges radiatifs d'un point de vue géométrique car elle possède des indices optiques (coefficient de diffraction notamment) qui peuvent varier d'un point à l'autre du gaz. Enfin, ce gaz étant à une température donné, il possède une émission radiative propre.

Les bandes d'absorption de la vapeur d'eau sont situées autour de 2,6 μm, entre 5,5 et 7,5 μm et au-delà de 20 μm. L'absorption totale d'un rayonnement dans ces domaines de longueurs d'onde a lieu sur une distance inférieure à 100 m. Entre ces domaines, existent des « fenêtres de transmission » où le rayonnement n'est pas absorbé. On retrouve bien ces fenêtres sur le spectre d'absorption de l'atmosphère représenté sur la figure 5.8.

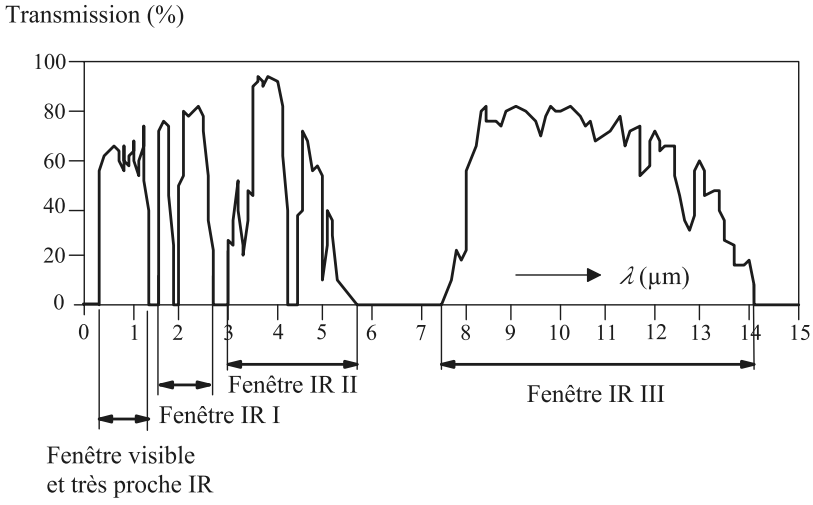


Figure 5.8 **Spectre d'absorption de l'atmosphère**
Le spectre de l'atmosphère est principalement conditionné par la vapeur d'eau. En effet, on observe une grande analogie avec le spectre d'absorption de la molécule d'eau représenté sur la figure 5.9.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

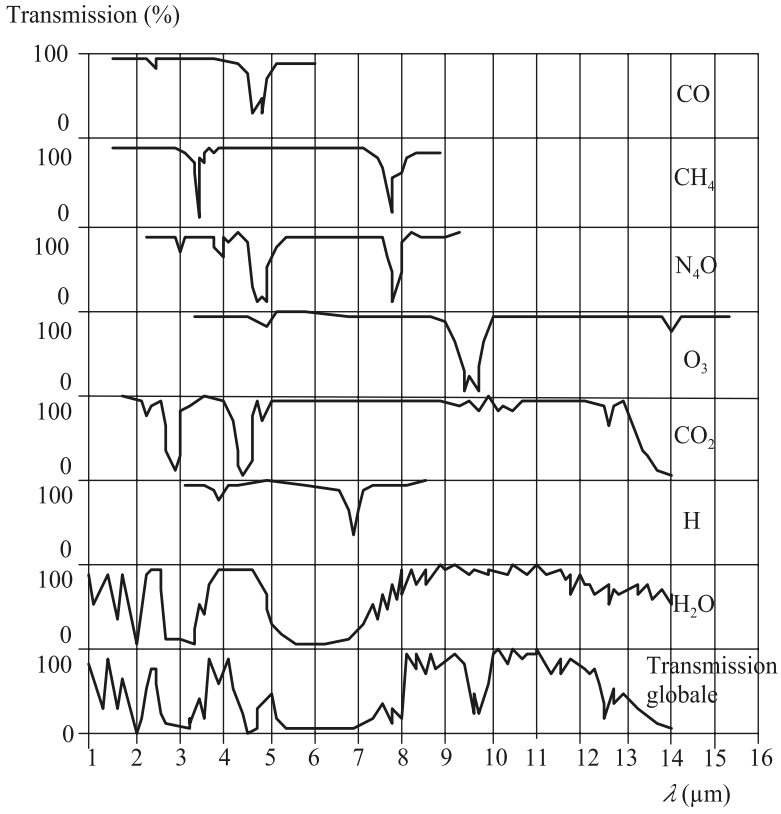


Figure 5.9 **Spectre d'absorption des différentes molécules constituant l'atmosphère**

5.3.3 Utilisation de l'analogie électrique

La résolution d'un problème de transfert radiatif dans une cavité consiste donc à résoudre la relation 5.34 pour chaque surface. Donc en finalité cela revient à résoudre un système de N équations dont chacune est de la forme de la relation 5.34. Cette résolution est compliquée du fait du caractère fortement non-linéaire des équations. Rappelons en effet que l'émittance du corps noir est : $M_i^0 = \sigma_s T_i^4$. Une méthode utilisée pour aider à la résolution de ce type de problème est celle de l'analogie électrique. Nous en avons vu l'utilité pour la résolution de problème de conduction. Néanmoins dans notre cas une résistance ne liera pas un flux à une différence de température.

Nous allons définir une première résistance liant le flux net à la surface i avec la différence entre l'émittance du corps noir équivalent et la radiosité telle qu'exprimée par la relation 5.28. On a donc le schéma électrique équivalent représenté sur la figure 5.10.

www.biblio-scientifique.net

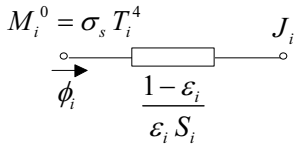


Figure 5.10 **Utilisation de l'analogie électrique pour définir la résistance liant l'émittance à la radiosité d'une surface intégrée dans une cavité**

Nous allons ensuite définir une deuxième résistance liant le même flux net à la surface *i* avec la différence entre la radiosité de *i* et celle de la surface *j*. La valeur de la résistance est donc donnée par la relation 5.34. On obtient ainsi un schéma électrique équivalent tel que celui représenté sur la figure 5.11.

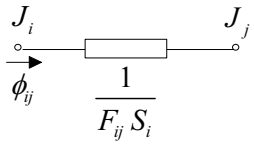


Figure 5.11 **Utilisation de l'analogie électrique pour définir la résistance liant la radiosité d'une surface d'une cavité à la radiosité d'une autre surface de la cavité**

Illustrons cette méthode sur la configuration la plus simple : la cavité formée de deux surfaces. Nous la représentons sur la figure 5.12. En utilisant l'analogie électrique, nous obtenons le schéma équivalent représenté sur la figure 5.13. On retrouve bien sûr le fait que le flux net sur la surface 1 est l'opposé du flux net sur la surface 2 et est égal au flux net échangé entre 1 et 2 : $\phi_1 = -\phi_2 = \phi_{12}$. Par ce schéma équivalent on trouve tout de suite l'expression de ce flux.

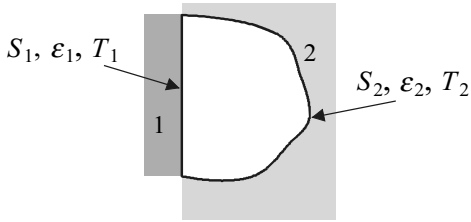


Figure 5.12 **Cavité formée de 2 surfaces**

Le flux net échangé entre deux surfaces formant une cavité est :

$$\phi_1 = -\phi_2 = \phi_{12} = \frac{\sigma_s \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\alpha_1}{\alpha_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{12} S_1} + \dfrac{1-\alpha_2}{\alpha_2 S_2}} \tag{5.35}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

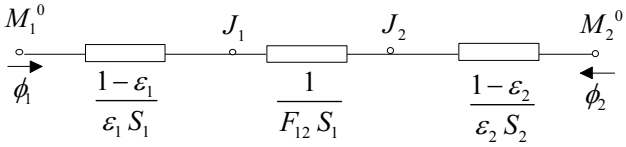
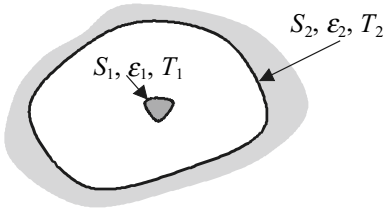
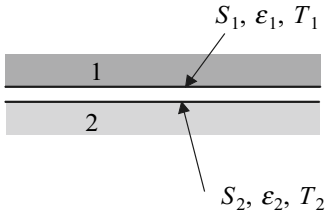
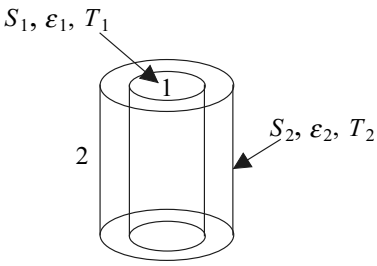
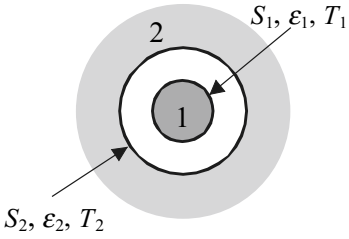


Figure 5.13 **Schéma électrique équivalent pour la cavité formée de 2 surfaces.**

Nous donnons dans le tableau 5.2 quelques expressions du flux net échangé entre deux surfaces formant une cavité dans quelques configurations géométriques particulières.

Tableau 5.2 **Quelques valeurs du flux net échangé entre 2 surfaces d'une cavité dans des configurations géométriques particulières.**

	Petit objet dans une grande cavité $\frac{S_1}{S_2} \approx 0$ $F_{12} = 1$ $\phi_{12} = \sigma_s S_1 \varepsilon_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right)$
	Plans parallèles d'extension infinie $S_1 = S_2 = S$ $F_{12} = 1$ $\phi_{12} = \frac{\sigma_s S \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$
	Cylindres coaxiaux de hauteur infinie $\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1}{r_2}$ $F_{12} = 1$ $\phi_{12} = \frac{\sigma_s S_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)\frac{r_1}{r_2}}$
	Sphères coaxiales $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ $F_{12} = 1$ $\phi_{12} = \frac{\sigma_s S_1 \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$

www.biblio-scientifique.net

Illustrons maintenant la méthode sur la configuration représentée sur la figure 5.14. La cavité est constituée de trois surfaces. Le schéma équivalent sera donc celui représenté sur la figure 5.15.

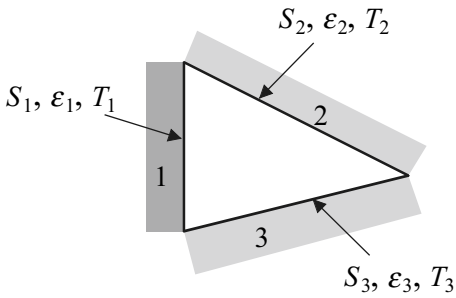


Figure 5.14 **Cavité formée par 3 surfaces**

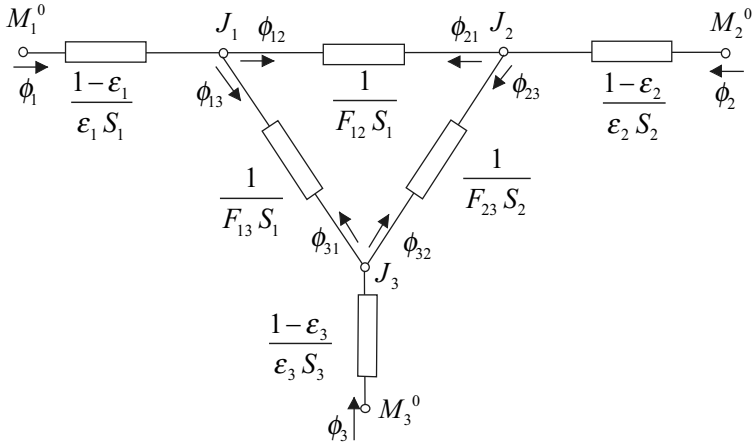


Figure 5.15 **Schéma électrique équivalent pour la cavité formée de trois surfaces**

5.3.4 Résolution numérique

Si la méthode par analogie électrique offre un intérêt du point de vue de la représentation des transferts radiatifs, elle devient relativement lourde lorsque le nombre de surfaces composant la cavité devient grand. Dans ce cas, la méthode de représentation des échanges sous la forme d'un système linéaire est plus adaptée. Il suffit pour cela de reprendre la relation 5.34 et de l'exprimer sous la forme :

$$J_i \left(\frac{1}{1-\alpha_i/\alpha_i\, S_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\left(F_{ij}\, S_i\right)^{-1}} \right) - \sum_{j=1}^{N} \frac{J_j}{\left(F_{ij}\, S_i\right)^{-1}} = \frac{M_i^0}{1-\alpha_i/\alpha_i\, S_i} \qquad (5.36)$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Cette relation peut aussi se mettre sous la forme du système linéaire $\mathbf{A}\,\mathbf{J} = \mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots\cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ J_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

Avec :

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1}{1 - \alpha_i/\alpha_i\, S_i} \\ a_{ij} &= -\frac{1}{\left(F_{ij}\, S_i\right)^{-1}} \\ b_i &= \frac{M_i^0}{1 - \alpha_i/\alpha_i\, S_i} \end{aligned} \tag{5.38}$$

On peut alors déterminer toutes les radiosités en inversant la matrice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B} \tag{5.39}$$

Cas particuliers

Deux cas particuliers apparaissent ici.
Le premier est celui pour lequel une surface se comporte comme un corps noir. Dans ce cas la résistance entre émittance corps noir et radiosité disparaît et on retrouve seulement l'émittance. En particulier la relation 5.35 montre bien que si les deux surfaces sont des corps noirs, on retrouve alors l'expression du flux radiatif échangé entre corps noirs dans une cavité donnée par la relation 5.20.
Lorsqu'une surface est isolée sur sa surface externe alors le flux net sur cette surface est nul (cela suppose aussi que les échanges convectif sur la face éclairée, donc opposée, sont nuls). On ne peut bien le percevoir que si on a parfaitement compris la notion de flux net sur une surface (revoir les points clés cités précédemment si nécessaire). Ceci revient donc à dire que $\phi_i = 0$ sur la surface i de la cavité. Les relations 5.27 et 5.34 nous disent alors que si le flux net sur la surface est nul alors $E_i = J_i = M_i^0$. Donc en finalité cela revient à assimiler la surface à un corps noir.

5.3.5 Boucliers radiatifs

Si l'on veut réduire le flux net échangé par transfert radiatif entre deux surfaces il suffit d'y intercaler une troisième. On nomme cette nouvelle surface : bouclier radiatif. Considérons la configuration des 2 plans parallèles d'extension infinie représentée sur la figure 5.16. On suppose que la paroi 3 est suffisamment fine pour que l'on puisse la considérer comme isotherme. En d'autres termes cela revient à adopter l'hypothèse d'accommodation thermique selon l'épaisseur de la paroi.

www.biblio-scientifique.net

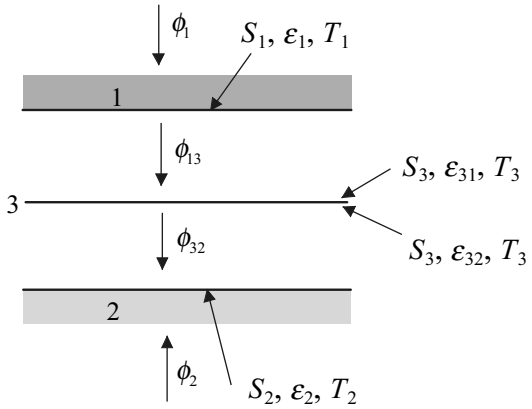


Figure 5.16 **Insertion d'un bouclier thermique entre 2 plans d'extension infinie**

En adoptant la méthode d'analogie électrique, on aboutit au réseau représenté sur la figure 5.17.

$$\phi_1 = -\phi_2 = \frac{\sigma_s \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{13} S_1} + \dfrac{1-\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31} S_3} + \dfrac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32} S_3} + \dfrac{1}{F_{32} S_3} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} \tag{5.40}$$

Dans la configuration spécifique des 2 plans parallèles nous savons que $F_{13} = F_{23} = 1$ et que $S_1 = S_2 = S_3 = S$. Ainsi, la relation 5.40 se simplifie sous la forme :

$$\phi_1 = -\phi_2 = \frac{\sigma_s S \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1-\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31}} + \dfrac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32}} + \dfrac{1}{\varepsilon_2}} \tag{5.41}$$

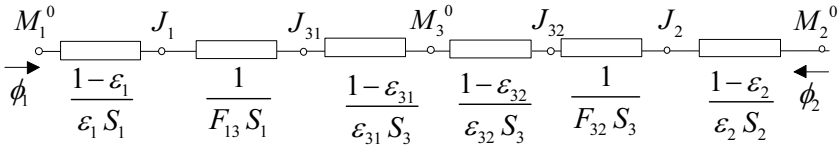


Figure 5.17 **Représentation du réseau équivalent pour la configuration du bouclier radiatif entre 2 surfaces d'extension infinie**

5.4 Références

BOEKE W. et WALL L., *Radiative Exchange Factors in Rectangular Spaces for the Determination of Mean Radiant Temperatures*.Build. Serv. Engng, 43, p. 244-253 (1976).

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

BYRD L.W., *View Factor Algebra for Two Arbitrary Sized no Opposing Parallel Rectangles*. J. Heat Transfer, 115, no 2, p. 517-518 (1993).

EHLHERT J.R. et SMITH T.F., *View Factors for Perpendicular and Parallel, Rectangular Plates*. J. Thermophys. Heat Trans 7, no 1, p. 173-174 (1993).

GROSS U., SPINDLER K. et HAHNE E., *Shape Factor Equations for Radiation Heat Transfer between Plane Rectangular Surfaces of Arbitrary Position and Size with Rectangular Boundaries.* Lett. Heat Mass Transfer, 8, p. 219-227 (1981).

HOTTEL H.C., *Radiant Heat Transmission between Surfaces Separated by Non-Absorbing media*. Trans. ASME, 53, FSP-53-196, p. 265-273 (1931).

INCROPERA F.P., DEWITT D.P., Bergman T.L., Lavine A., *Introduction to Heat Transfer*, 5e édition révisée, John Wiley & Sons Inc (2006).

LEUENBERGER H. et PERSON R.A., *Compilation of Radiation Shape Factors for Cylindrical Assemblies*. Paper no 56-A-144, ASME, nov. 1956.

NARAGHI M.H.N. et WARNA J.P., *Radiation Configuration Factors from Axisymmetric Bodies to Plane Surfaces*. Int. J. Heat Mass Transfer., 31, no 7, p. 1537-1539 (1988).

Techniques de l'Ingénieur, A 1 080.

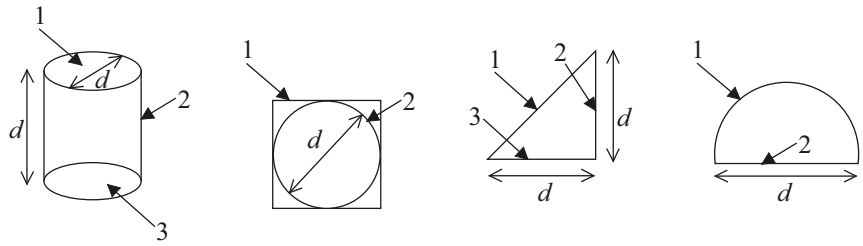
Techniques de l'Ingénieur, BE 8-210.

Techniques de l'Ingénieur, R 2 735.

Techniques de l'Ingénieur, R 2 737v2.

Exercices

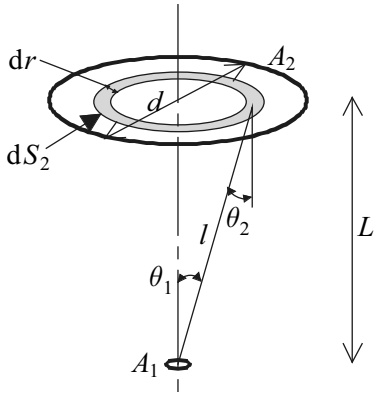
5.1 Déterminer les facteurs de forme entre les différentes surfaces dans les configurations géométriques représentées dans le tableau ci-dessous.



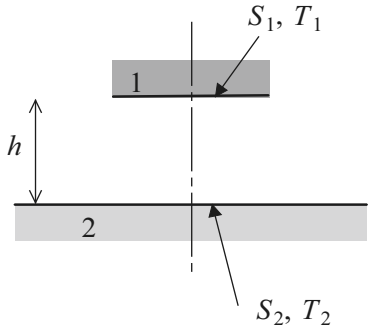
a) b) c) d)

www.biblio-scientifique.net

5.2 On considère deux disques parallèles dont les centres sont distants de L. La surface S_1 du disque 1 est très petite devant la surface S_2 du disque 2 de diamètre d. Déterminer l'expression du facteur de forme F_{12}.



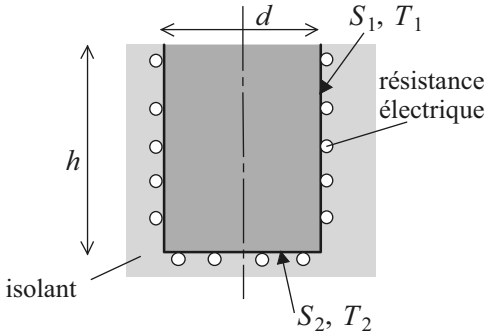
5.3 On considère deux disques coaxiaux séparés par une hauteur de 20 cm. Les deux disques se comportent comme des corps noirs. Le disque inférieur de rayon 20 cm est maintenu à la température de 450 K. Le disque supérieur, de rayon 10 cm est maintenu à une température constante grâce à un apport de puissance électrique (chauffage par effet Joule) égal à 12,5 W. Quelle est la température du disque supérieur ? (On notera que le milieu ambiant est à la température de 300 K).



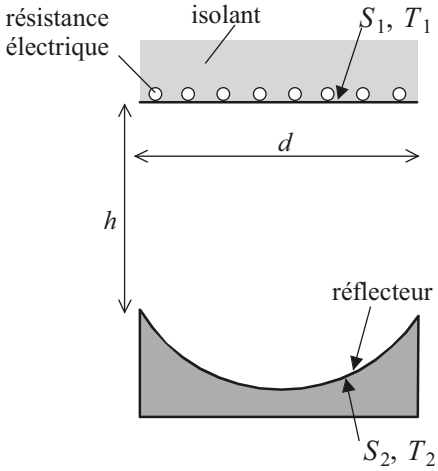
5.4 Un four cylindrique est représenté sur la figure ci-dessous. Les dimensions sont : $d = 0{,}4$ m et $h = 2\,d$. Il est ouvert vers l'extérieur sur sa face supérieure et l'air ambiant est à la température de $T_a = 300$ K. Les parois du four se comportent comme des corps noirs. Les températures de parois sont maintenues à température constante par effet Joule (une résistance électrique est bobinée autour du four). La température de la base est $T_2 = 1900$ K et celle de la paroi latérale est $T_1 = 1500$ K. Calculer la puissance électrique à fournir pour maintenir ces niveaux de température dans le four.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net



5.5 Un four est représenté sur la figure ci-dessous. Il est constitué d'un émetteur chauffant à la température $T_1 = 1000\,\mathrm{K}$ et d'un réflecteur dont la température est $T_2 = 500\,\mathrm{K}$ et dont l'émissivité totale hémisphérique est $\varepsilon_2 = 0{,}7$. Le milieu ambiant est à la température $T_a = 300\,\mathrm{K}$. Quel est le flux net à la surface du réflecteur ?



Les dimensions sont telles que : $L = 10\,\mathrm{m}$, $d = 1\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$ et $S_2 = 15\,\mathrm{m}^2$.

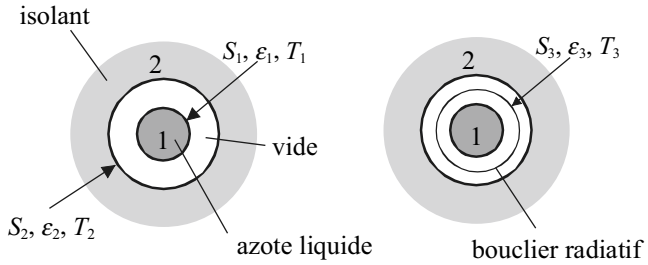
5.6 De l'azote liquide à 77 K est contenu dans un long réservoir cylindrique de rayon 15 cm. L'émissivité de la surface extérieure est égale à 0,04. Un deuxième tube, concentrique au premier, de rayon 35 cm à une émissivité de 0,04 et sa température est constante et égale à 300 K. Le vide est réalisé entre les deux cylindres.

a) Calculer le flux de chaleur reçu par l'azote par unité de longueur de tube.

b) On suppose maintenant qu'un cylindre de rayon 25 mm est disposé entre les deux précédents, son émissivité est égale à 0,03 des deux côtés. Calculer à nouveau le flux de chaleur reçu par l'azote.

c) Que peut-on conclure de l'utilité d'un tel dispositif ?

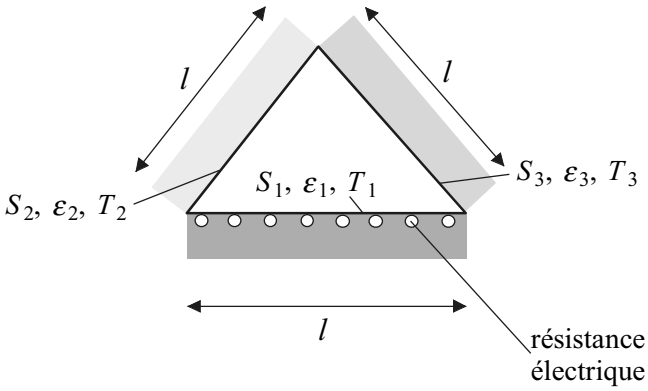
www.biblio-scientifique.net



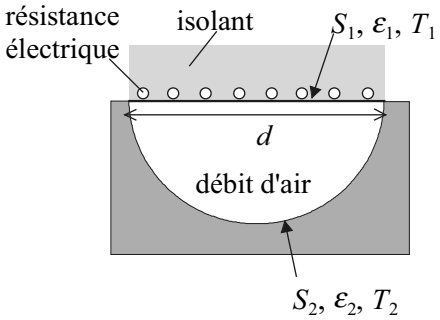
5.7 Un four de recuit de plaques d'acier est du type de celui représenté sur la figure ci-dessous. La surface émettrice est maintenue à la température de 1 100 K et son émissivité est égale à 0,7. La deuxième surface est la plaque d'acier dont la température est maintenue à 700 K et l'émissivité est égale à 0,3. La troisième surface est isolée à l'extérieur et son émissivité est égale à 0,7.

a) Quelle est la puissance à fournir par unité de longueur du four pour maintenir ces températures de fonctionnement ?

b) Quelle est la température de la surface isolée.



5.8 De l'air circule dans un four dont la configuration géométrique est représentée sur la figure ci-dessous.



© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Une résistance électrique chauffe la plaque supérieure à une température de 1 500 K et l'émissivité de cette surface est égale à 0,7. Cette surface est supposée parfaitement isolée sur sa face arrière. La deuxième surface est un demi-cylindre dont l'émissivité est égale à 0,8. Cette surface est elle aussi supposée parfaitement isolée sur sa face opposée. De l'air circule dans la cavité formée par ces deux surfaces avec un débit de $\dot{m}$ = 0,03 kg s^{-1}. La température moyenne de l'air est $T_a = 500\,\mathrm{K}$.

a) Calculer le coefficient d'échange par convection entre les parois internes et l'air.
b) Quelle est la température de surface du demi cylindre ?
c) Quelle doit être la puissance électrique à fournir pour que la température de la surface 1 soit toujours égale à 1 500 K ?

Les propriétés de l'air sont : $\lambda = 0{,}034\,W\,m^{-1}\,K^{-1}$, $C_p = 1013\,J\,kg^{-1}\,K^{-1}$, $\mathrm{Pr} = 0{,}69$ *et* $\mu = 23 \times 10^{-6}\,kg\,s^{-1}\,m^{-1}$.

Solutions des exercices

5.1 a) Il est tout d'abord nécessaire d'utiliser au maximum les symétries du problème :

$$F_{32} = F_{12}$$

$$F_{23} = F_{21}$$

D'autre part les surfaces sont telles que : $F_{11} = F_{33} = 0$
En utilisant la relation 5.13 pour les échanges radiatifs dans une cavité, cela conduit à :

$$\begin{cases} F_{12} + F_{13} = 1 \\ 2\,F_{21} + F_{22} = 1 \\ F_{31} + F_{32} = 1 \end{cases}$$

D'après le tableau 5.1, la relation pour le facteur de forme entre 2 disques coaxiaux est

$$F_{13} = \frac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2}\right) \text{ avec } \beta = 1 + \frac{1+\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \text{ et } \alpha_1 = \frac{r_1}{h},\ \alpha_2 = \frac{r_3}{h}.$$

On trouve donc ici :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2},\ \beta = 1 + \frac{1+1/4}{1/4} = 6,\ F_{13} = \frac{1}{2}\left(6 - \sqrt{36-4}\right) = 0{,}17.$$

www.biblio-scientifique.net

Donc $F_{12} = 1 - F_{13} = 0{,}83$, $F_{32} = F_{12} = 0{,}83$.
Nous pouvons maintenant utiliser la relation de réciprocité : $F_{12}\, S_1 = F_{21}\, S_2$, qui donne :

$$F_{21} = 0{,}83\, \frac{\pi\, d^2/4}{\pi\, d\, d} = \frac{0{,}83}{4} = 0{,}21$$

Et donc on en déduit finalement : $F_{22} = 1 - 2\, F_{21} = 0{,}58$.

b) Tout le flux émis par la sphère est vu par le cube, donc : $F_{21} = 1$. En appliquant la relation de réciprocité : $F_{12}\, S_1 = F_{21}\, S_2$, on trouve :

$$F_{12} = 1\, \frac{\pi\, d^2}{6\, d^2} = 0{,}52.$$

c) En utilisant les symétries :

$$F_{21} = F_{31}$$

$$F_{12} = F_{13}$$

D'autre part les surfaces sont telles que : $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$
En utilisant la relation 5.13 pour les échanges radiatifs dans une cavité, cela conduit à :

$$\begin{cases} F_{12} + F_{13} = 1 \\ F_{21} + F_{23} = 1 \\ F_{31} + F_{32} = 1 \end{cases}$$

On trouve donc : $F_{12} = F_{13} = 0{,}5$. En utilisant la relation de réciprocité : $F_{12}\, S_1 = F_{21}\, S_2$, on trouve :

$$F_{21} = 0{,}5\, \frac{d\sqrt{2}}{d} = 0{,}71 = F_{31}$$

Donc : $F_{23} = 1 - F_{21} = 0{,}29$.

d) On a les relations suivantes :

$$F_{22} = 0$$

$$F_{12} + F_{11} = 1$$

$$F_{22} + F_{21} = 1$$

Ce qui conduit à : $F_{21} = 1$ et comme $F_{12}\, S_1 = F_{21}\, S_2$ on trouve :

$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\pi\, d^2}{4}\, \frac{2}{\pi\, d^2} = \frac{1}{2} \text{ et donc : } F_{11} = 1 - F_{12} = 0{,}5.$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

5.2 $F_{12} = \dfrac{1}{A_1} \displaystyle\int_{A_1} \int_{A_2} \dfrac{\cos\theta_1 \, \cos\theta_2}{\pi \, l^2} \, \mathrm{d}A_1 \, \mathrm{d}A_2$

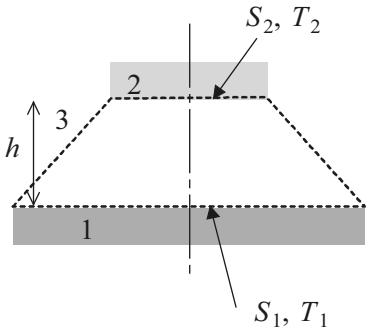
La surface A_1 étant très petite, les valeurs de θ_1, θ_2 et l n'en dépendent pas et d'autre part on peut admettre que $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ et donc :

$$F_{12} = \int_{A_2} \frac{\cos^2\theta}{\pi \, l^2} \, \mathrm{d}A_2$$

On choisit $\mathrm{d}A_2$ sous la forme d'un anneau de largeur $\mathrm{d}r$, ce qui conduit à : $\mathrm{d}A_2 = 2\,\pi\,r\,\mathrm{d}r$, $\cos\theta = L/l$ et $l^2 = r^2 + L^2$. Ceci conduit à :

$$F_{12} = \int_0^{R_2} \frac{2\,L^2\,r}{\left(r^2 + L^2\right)^2} \, \mathrm{d}r = \frac{R_2^2}{R_2^2 + L^2}$$

5.3 Nous indiçons 3, la surface qui réalise la cavité telle que représenté en traits pointillés sur la figure ci-dessous. Cette surface 3 est à la température ambiante de 300 K.



On a alors :

$$F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1$$

On voit des suite que $F_{11} = 0$ et d'après la relation du tableau 5.1, on a :

$$F_{12} = \frac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2}\right)$$

Avec : $\beta = 1 + \dfrac{1 + \alpha_2^2}{\alpha_1^2}$, $\alpha_1 = \dfrac{r_1}{h}$, $\alpha_2 = \dfrac{r_2}{h}$.

Ceci conduit à : $\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $F_{12} = 0{,}47$.

On trouve donc : $F_{13} = 1 - 0{,}47 = 0{,}53$.

www.biblio-scientifique.net

On sait que le flux émis par 1 est :

$$\phi_1 = A_1\, F_{12}\, \sigma_s \left(T_1^4 - T_2^4\right) + A_1\, F_{13}\, \sigma_s \left(T_1^4 - T_3^4\right)$$

Donc :

$$T_1 = \left(\frac{\phi_2 + A_1\, F_{12}\, \sigma_s\, T_2^4 + A_1\, F_{13}\, \sigma_s\, T_3^4}{A_1\, F_{12}\, \sigma_s + A_1\, F_{13}\, \sigma_s}\right)^{1/4}$$

A.N. :

$$T_2 = \left(\frac{12{,}5 + \pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}47 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 450^4}{\pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}47 \times 5{,}67 \times 10^{-8} + \pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}53 \times 5{,}67 \times 10^{-8}}\right.$$
$$\left. + \frac{\pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}53 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 300^4}{\pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}47 \times 5{,}67 \times 10^{-8} + \pi \times 0{,}1^2 \times 0{,}53 \times 5{,}67 \times 10^{-8}}\right)^{1/4}$$

Soit : $T_2 = 418{,}19\,\mathrm{K}$.

5.4 La chaleur est perdue par rayonnement entre le four et milieu ambiant au travers de la surface supérieure que nous indiçons 3. Comme l'environnement extérieur au four est illimité on peut considérer que la surface 3 se comporte comme un corps noir à la température $T_a = 300\,\mathrm{K}$. Le flux perdu est donc la somme des flux nets échangés entre les surfaces 1 et 3 ainsi qu'entre les surfaces 2 et 3, soit :

$$\phi = \phi_{13} + \phi_{23}$$

La relation 5.20 exprimant le flux net échangé entre deux corps noir nous permet alors d'exprimer la relation précédente sous la forme :

$$\phi = F_{13}\, S_1\, \sigma_s \left(T_1^4 - T_3^4\right) + F_{23}\, S_2\, \sigma_s \left(T_2^4 - T_3^4\right)$$

Pour déterminer les facteurs de forme F_{13} et F_{23} nous utilisons la solution de l'exercice 5.1a). D'après le , la relation pour le facteur de forme entre 2 disques coaxiaux est

$$F_{23} = \frac{1}{2}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2}\right) \text{ avec } \beta = 1 + \frac{1 + \alpha_2^2}{\alpha_1^2} \text{ et } \alpha_1 = \frac{d}{2\,h},\ \alpha_2 = \frac{d}{2\,h}.$$

On trouve donc ici :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4},\ \beta = 1 + \frac{1 + 1/16}{1/16} = 18,\ F_{23} = \frac{1}{2}\left(18 - \sqrt{18^2 - 4}\right) = 0{,}055.$$

Donc $F_{21} = 1 - F_{23} = 0{,}95$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Nous pouvons maintenant utiliser la relation de réciprocité : $F_{12}\,S_1 = F_{21}\,S_2$, qui donne :

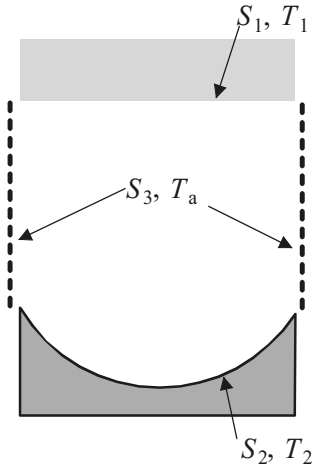
$$F_{12} = 0{,}95\,\frac{\pi\,d^2/4}{\pi\,d\,h} = \frac{0{,}95}{8} = 0{,}119$$

Et donc on en déduit finalement : $F_{13} = F_{12} = 0{,}119$.
Le flux perdu est donc :

$$\phi = 0{,}119 \times \pi \times \left(0{,}2^2/4\right) \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times \left(1\,500^4 - 300^4\right)$$
$$+0{,}055 \times \pi \times \left(0{,}2^2/4\right) \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times \left(1\,900^4 - 300^4\right)$$

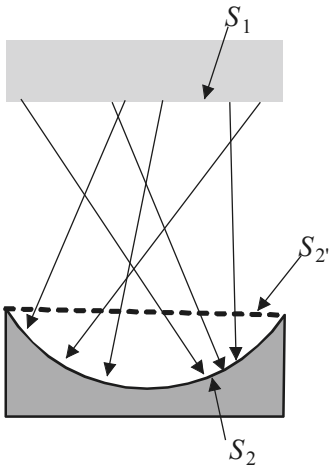
Soit : $\phi = 1071 + 1276 = 2347$ W. C'est la puissance à fournir pour maintenir les températures de paroi du four.

5.5 Il faut tout d'abord remarquer que le milieu environnant peut être simulé par l'ajout de 2 surfaces noires dont la température est égale à la température ambiante $T_a = 300$ K. Le problème proposé se ramène alors à l'étude d'une cavité formée de 3 surfaces.



Nous déterminons dans un premier temps les facteurs de formes entre les 3 surfaces. On remarque tout d'abord que la configuration géométrique implique que $F_{12} = F_{12'}$ où la surface 2' est représentée sur la figure ci-dessous. Ceci traduit le fait que le flux émis par 1 et arrivant sur 2 est le même que celui arrivant sur 2'. Ainsi 2' est vu comme la surface « efficace » de 2 vue de 1.

www.biblio-scientifique.net



En utilisant la relation du tableau 5.1 pour 2 plans parallèles on a :

$$\frac{\pi\,\alpha\,\beta}{2}\,F_{12'} = \alpha\sqrt{1+\beta^2}\tan^{-1}\frac{\alpha}{\sqrt{1+\beta^2}} + \beta\sqrt{1+\alpha^2}\tan^{-1}\frac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$
$$+\ln\sqrt{\frac{\left(1+\alpha^2\right)\left(1+\beta^2\right)}{1+\alpha^2+\beta^2}} - \alpha\tan^{-1}\alpha - \beta\tan^{-1}\beta$$

Avec : $\alpha = \dfrac{d}{h}$, $\beta = \dfrac{L}{h}$.
Les applications numériques donnent : $\alpha = 1$, $\beta = 10$ et :

$$\frac{\pi\,10}{2}\,F_{12'} = \sqrt{101}\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{101}} + 10\sqrt{2}\tan^{-1}\frac{10}{\sqrt{2}}$$
$$+\ln\sqrt{\frac{2\times 101}{102}} - \tan^{-1}1 - 10\tan^{-1}10$$

Soit : $F_{12'} = 0{,}40$.
La relation de réciprocité conduit à $F_{12'}\,S_1 = F_{21}\,S_2$ et donc :

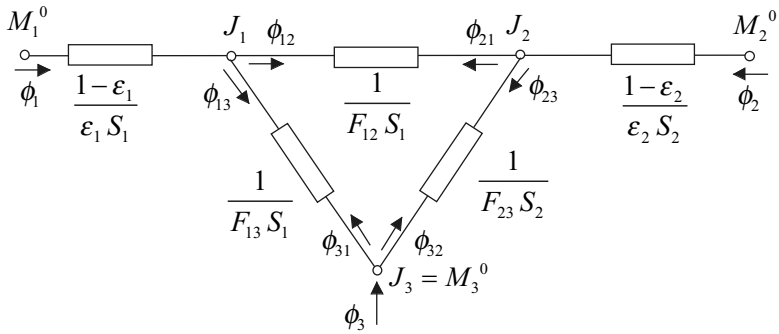
$$F_{21} = 0{,}4 \times 10/15 = 0{,}27.$$

D'autre part la règle de sommation des facteurs de forme dans une cavité donne : $F_{11} + F_{12} + F_{13} = 1$. Comme $F_{11} = 0$, on trouve $F_{13} = 1 - F_{12} = 0{,}6$. La relation de réciprocité entre 3 et 1 donne : $F_{13}\,S_1 = F_{31}\,S_3$, soit : $F_{31} = 0{,}6 \times 10/20 = 0{,}3$. La symétrie conduit à :$F_{31} = F_{32} = F_{32'} = 0{,}3$ et donc en appliquent la réciprocité entre 1 et 3 on obtient finalement : $F_{23}\,S_2 = F_{32'}\,S_3$, soit : $F_{23} = 0{,}3 \times 20/15 = 0{,}4$.

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

On peut maintenant utiliser la méthode des radiosités pour décrire les transferts de flux par rayonnement entre les 3 surfaces. En utilisant la représentation de la figure 5.15 et en prenant en compte le fait que 3 est une surface noire, nous obtenons le schéma représentatif ci-dessous :



On peut alors établir les relations suivantes :

$$\phi_2 = \frac{M_2^0 - J_2}{(1-\varepsilon_2)/\varepsilon_2 S_2} = \frac{J_2 - J_1}{1/F_{21} S_2} + \frac{J_2 - M_3^0}{1/F_{23} S_2}$$

Et :

$$\phi_1 = \frac{M_1^0 - J_1}{(1-\varepsilon_1)/\varepsilon_1 S_1} = \frac{J_1 - J_2}{1/F_{12} S_1} + \frac{J_1 - M_3^0}{1/F_{13} S_1}$$

Les valeurs des émittances « corps noirs » sont :

$$M_2^0 = \sigma_s T_2^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 500^4 = 3\,544\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$
$$M_1^0 = \sigma_s T_1^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1\,000^4 = 56\,700\,\mathrm{W\,m^{-2}},$$
$$M_3^0 = \sigma_s T_3^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 300^4 = 459\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

On se retrouve donc avec un système de 2 équations à 2 inconnues J_1 et J_2 :

$$\frac{3\,544 - J_2}{(1-0{,}7)/0{,}7} = \frac{J_2 - J_1}{1/0{,}27} + \frac{J_2 - 459}{1/0{,}4}$$

$$\frac{57\,600 - J_1}{(1-0{,}8)/0{,}8} = \frac{J_1 - J_2}{1/0{,}4} + \frac{J_1 - 450}{1/0{,}6}$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$8\,441 = (2{,}33 + 0{,}27 + 0{,}4)\,J_2 - 0{,}27\,J_1 = 3\,J_2 - 0{,}27\,J_1$$
$$230\,670 = (4 + 0{,}4 + 0{,}6)\,J_1 - 0{,}4\,J_2 = 5\,J_1 - 0{,}4\,J_2$$

www.biblio-scientifique.net

On trouve alors :

$$\frac{3\,J_2 - 8\,441}{0{,}27} = J_1, \text{ soit : } 230\,670 = 5 \times \frac{3\,J_2 - 8\,441}{0{,}27} - 0{,}4\,J_2 = 55{,}56\,J_2 - 156\,314.$$

Ceci conduit finalement à : $J_2 = 6\,965\ \mathrm{W\,m^{-2}}$ et $J_1 = 46\,128\ \mathrm{W\,m^{-2}}$.
Nous pouvons alors calculer le flux net à la surface du réflecteur :

$$\phi_2 = \frac{M_2^0 - J_2}{(1-\varepsilon_2)/\varepsilon_2 S_2} = \frac{3\,544 - 6\,965}{(1-0{,}7)/0{,}7 \times 15} = -119{,}73\ \mathrm{kW}$$

5.6 **a)** En utilisant les relations obtenues dans le tableau 5.2 pour les deux tubes coaxiaux (sans la présence du bouclier), on trouve :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

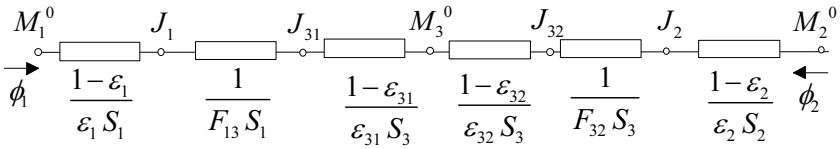
$$F_{12} = 1$$

$$\phi_{12} = \frac{\sigma_s\, S_1\ \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \left(\dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2}\right)\dfrac{r_1}{r_2}}$$

Soit :

$$\phi_{12} = \frac{5{,}67 \times 10^{-8} \times \pi \times 0{,}15 \times \left(77^4 - 300^4\right)}{\dfrac{1}{0{,}04} + \left(\dfrac{1-0{,}04}{0{,}04}\right)\dfrac{0{,}15}{0{,}35}} = -6{,}11\ \mathrm{W\,m^{-1}}$$

b) Comme nous l'avons vu sur la figure 5.17, le réseau équivalent à la configuration avec bouclier est le suivant :



Ainsi, le flux net échangé est cette fois-ci :

$$\phi = \phi_1 = -\phi_2 = \frac{M_1^0 - M_2^0}{R}$$

Avec :

$$R = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1\, S_1} + \frac{1}{F_{13}\, S_1} + \frac{1-\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31}\, S_3} + \frac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32}\, S_3} + \frac{1}{F_{32}\, S_3} + \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2\, S_2}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

Soit :

$$R_L = \frac{R}{L} = \frac{1-0{,}04}{0{,}04\times\pi\times 0{,}15} + \frac{1}{\pi\times 0{,}15} + \frac{1-0{,}03}{0{,}03\times\pi\times 0{,}25}$$
$$+\frac{1-0{,}03}{0{,}03\times\pi\times 0{,}25} + \frac{1}{\pi\times 0{,}25} + \frac{1-0{,}04}{0{,}04\times\pi\times 0{,}35} = 158{,}5\,\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{m}^{-1}$$

On en déduit le flux net échangé par unité de longueur :

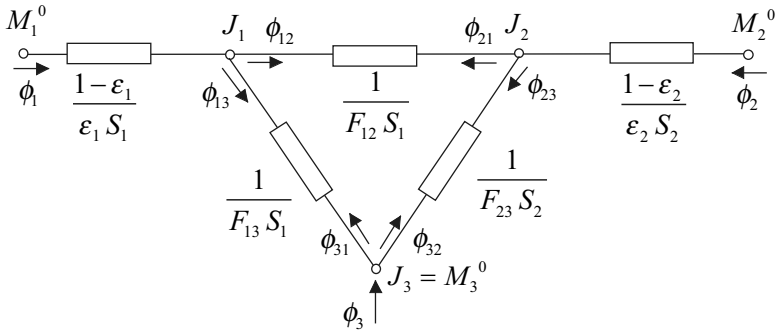
$$\phi_L = \frac{5{,}67\times 10^{-8}\left(77^4 - 300^4\right)}{188} = -2{,}89\ \mathrm{W\ m}^{-1}$$

c) En comparant les flux nets échangés avec et sans bouclier on constate que les pertes ont été réduites de : $(-2{,}89-(-6{,}11))\,/\,-6{,}11 = -53\ \%$.

5.7 **a)** Le four forme une cavité dont la section est un triangle équilatéral. La symétrie est telle que :

$$F_{12} = F_{13} = F_{23} = 0{,}5$$

Le schéma équivalent est représenté sur la figure ci-dessous :



Comme nous l'avions montré dans le cours une surface isolée de la cavité se comporte comme un corps noir et c'est donc la raison pour laquelle on a : $\phi_3 = 0$ et donc : $J_3 = M_3^0$. On doit donc retrouver que :

$$\phi_1 = -\phi_2$$

Le schéma conduit à exprimer ce flux sous la forme (le symbole ++ traduit le fait que les résistances sont en série et // traduit le fait qu'elles sont en parallèles) :

$$\phi_1 = \frac{M_1^0 - M_2^0}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + + \left[\dfrac{1}{F_{12} S_1} \,//\, \left(1/F_{13} S_1 + +1/F_{23} S_2\right)\right] + + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

www.biblio-scientifique.net

Soit :

$$\phi_1 = \frac{\sigma_s \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{12} S_1 + \dfrac{1}{1/F_{13} S_1 + 1/F_{23} S_2}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}}$$

L'application numérique donne (avec l = 1 m) :

$$\phi_{1L} = \frac{\phi_1}{L} = \frac{5{,}67 \times 10^{-8} \times \left(1100^4 - 700^4\right)}{\dfrac{1-0{,}7}{0{,}7} + \dfrac{1}{0{,}5 + \dfrac{1}{1/0{,}5 + 1/0{,}5}} + \dfrac{1-0{,}3}{0{,}3}} = 16{,}946\,\mathrm{kW\,m^{-1}}$$

b) Pour calculer la température de surface du corps 3 il suffit de connaître son émittance. Nous voyons à partir du réseau que :

$$\phi_{31} = \phi_{32}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{J_1 - J_3}{1/F_{13} S_1} = \frac{J_3 - J_2}{1/F_{23} S_2}$$

Nous devons donc calculer J_1 et J_2. Pour cela nous voyons que :

$$J_1 = M_1^0 - \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 l} \phi_{1L}$$

$$J_2 = M_2^0 - \frac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 l} \phi_{2L}$$

Soit :

$$J_1 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 1\,100^4 - \frac{1-0{,}7}{0{,}7} \times 16\,946 = 75\,751\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

$$J_2 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 700^4 - \frac{1-0{,}3}{0{,}3} \times (-16\,946) = 53\,154\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

On en déduit alors :

$$\frac{75\,751 - J_3}{1/0{,}5} = \frac{J_3 - 53\,154}{1/0{,}5} \Rightarrow J_3 = 64\,453\,\mathrm{W\,m^{-2}}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

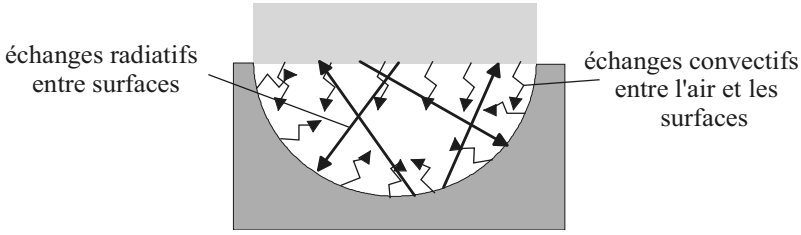
Donc finalement on trouve la température de surface de 3 à partir de :

$$J_3 = M_3^0 = \sigma_s\, T_3^4 \Rightarrow T_3 = \left(\frac{J_3}{\sigma_s}\right)^{1/4}$$

L'application numérique est :

$$T_3 = \left(\frac{64\,453}{5{,}67 \times 10^{-8}}\right)^{0{,}25} = 1\,032{,}6\,\mathrm{K}$$

5.8 Ce problème met en jeu deux types de transferts de la chaleur : par rayonnement et convection. En effet, l'air est ici supposé transparent pour le rayonnement thermique entre les 2 surfaces de la cavité et d'autre part le mouvement de l'air engendre des échanges par convection entre l'air et les surfaces internes de la cavité.



a) Le nombre de Reynolds associé à cet écoulement est :

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho\, U\, D_h}{\mu} = \frac{\dot{m}\, D_h}{A\, \mu}$$

Soit :

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\dot{m}\,\left(4\,A/p\right)}{A\,\mu} = \frac{4\,\dot{m}}{p\,\mu} = \frac{4\,\dot{m}}{\left(d + \pi\, d/2\right)\,\mu}$$

Ceci donne (d = 0,3 m) :

$$\mathrm{Re}_D = \frac{4 \times 0{,}03}{\left(0{,}3 + \pi \times 0{,}3/2\right) \times 23 \times 10^{-6}} = 6\,765.$$

À partir de la relation liant les nombres de Pr, Re et Nu (voir chapitre 3), on a :

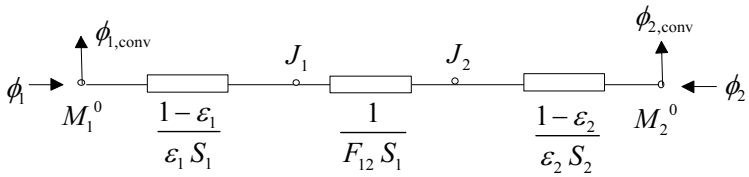
$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}023\,\mathrm{Re}_D^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0{,}023 \times 6\,765^{4/5} \times 0{,}69^{1/3} = 23{,}56$$

Comme : $\mathrm{Nu}_D = h\, D_h/\lambda$, on trouve la valeur du coefficient d'échange sur les parois :

$$h = \frac{\mathrm{Nu}_D\,\lambda}{D_h} = \frac{(\pi + 2) \times 23{,}56 \times 0{,}034}{\pi \times 0{,}3} = 4{,}37\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-1}}.$$

www.biblio-scientifique.net

b) Le réseau équivalent à ce problème est présenté sur la figure ci-dessous :



Comme les surfaces sont isolées sur leur face extérieure, il s'en suit que le flux net échangé par rayonnement sur chaque surface est égal au flux échangé par convection entre cette surface et l'air.

$$\phi_{2,\text{ray}} = \frac{\sigma_s \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1 S_1} + \dfrac{1}{F_{12} S_1} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2 S_2}} = h\, S_2 \left(T_2 - T_a\right) = \phi_{2,\text{conv}}$$

Soit :

$$\frac{5{,}67 \times 10^{-8} \times \left(1500^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-0{,}7}{0{,}7} + 1 + \dfrac{1-0{,}8}{0{,}8}\dfrac{2}{\pi}} = h\,\frac{\pi}{2}\left(T_2 - 300\right)$$

Ce qui permet de trouver la valeur de la température à la surface 2 solution de l'équation algébrique :

$$5{,}67 \times 10^{-8} \times T_2^4 + 10{,}89 \times T_2 - 2{,}84 \times 10^5 = 0$$

On peut trouver la solution par essais successifs et on aboutit à : $T_2 \sim 1474\,\text{K}$

c) Comme on le voit sur le réseau, le bilan thermique sur la surface 1 est :

$$\phi_1 = \phi_{1,\text{conv}} + \phi_{1,\text{ray}}$$

Or nous avons vu que :

$$\phi_{1,\text{ray}} = \phi_{2,\text{ray}} = \phi_{2,\text{conv}}$$

Donc :

$$\phi_1 = \phi_{1,\text{conv}} + \phi_{2,\text{conv}} = h\, S_1 \left(T_1 - T_a\right) + h\, S_2 \left(T_2 - T_a\right)$$

On obtient finalement :

$$\phi_{1L} = \frac{\phi_1}{L} = 4{,}37 \times 0{,}3 \times (1500 - 300) + 4{,}37 \times \frac{\pi \times 0{,}3}{2} \times (1474 - 300)$$
$$= 3{,}99\,\text{kW m}^{-1}$$

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

www.biblio-scientifique.net

INDEX

A

absorption 154, 175
absorptivité 176
accommodation thermique 51
ailettes 52
amorphe 32
analogie électrique 56, 210
analyse dimensionnelle 104
angle solide 163

B

bandes d'absorption 209
bilan
  de masse 100
  de quantité de mouvement 101
  des flux 45
  thermique 102
Biot Jean-Baptiste 51
Boltzmann Ludwig 33
bouclier radiatif 214

C

capacité calorifique 9
cavité 199, 206
Celsius 8
chaleur
  latente 15
  sensible 15
  spécifique 9, 37
changement de phase 14, 121
coefficient
  d'échange 18, 51
  d'échange moyen 93
  d'émission 173
  d'extinction 151
  de frottement local 95
  local d'échange convectif 92
Colburn Allan Philip 112
compression 12
condensation 92, 121
condition(s)
  aux limites 50
  initiale 49
conduction 16
conductivité thermique 18, 39
conservation de l'énergie 10
constante
  de Planck 150
  de Stefan– Boltzmann 171
convection 17
  forcée 92, 105
  naturelle 92, 114
convention de signe 7
conversion 3, 4
corps
  gris 179
  noir 159
  réels 173
corrélation(s) 108
  de Colburn 112
  expérimentales 117
couche limite 94, 95
  thermique 96

D

densité de flux 18, 38
détecteurs
  quantiques 169
  thermiques 169
diagramme d'équilibre 15
diffusion 35
diffusivité thermique 18, 44

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

dilatation 12
thermique 114

E

ébullition 121
instable 126
nucléée 126
pelliculaire 126
échanges convectifs 91
éclairement 165
écoulement
externe 109
interne 112
effusivité thermique 18
électrons libres 37
émission 154
émittance 164
hémisphérique 165
hémisphérique totale 165
énergie 3
chimique 3
cinétique 33
électrique 3
interne 11
magnétique 3
mécanique 3
nucléaire 3
rayonnante 3
thermique 3, 4
enthalpie 14
équation de la chaleur 45
équilibre thermique 8, 33
état d'équilibre 6
évaporation 92

F

facteur de forme 195, 201
Fahrenheit 8
fenêtres de transmission 209
fil chaud 41
flux 3
de chaleur 35
net à la surface 206
net échangé 205, 206
radiatif émis 206
force de traînée 96
Fourier Joseph 37

G

gradient 38
Grashof Franz 115

I

interaction photon–atome 152
interfaces 54
isothermes 38

K

Kelvin 8
Kirchhoff Gustav Robert 179

L

laminaire 98
laser 152, 158
libre parcours moyen 33, 42
lignes
de courant 97
de flux 38
loi(s)
d'ohm 56
de Fourier 37
de Kirchhoff 178
de Lambert 197
de Newton 93
de Planck 161
de Wien 170
luminance 164
des corps noirs 167
luminescence 158

www.biblio-scientifique.net

M

masse volumique 18
matériaux
    amorphes 39
    composites 42
méthode flash 44
milieu
    non participatif 200
    participatif 209

N

nombre
    de Biot 20, 51
    de Fourier 20
    de Grashof 115
    de Lorentz 41
    de Nusselt 107
    de Prandtl 108
    de Rayleigh 116
    de Reynolds 99
Nusselt Wilhelm 107

O

ondes électromagnétiques 150

P

particules fluides 91
phénomène de constriction 54
phonon 33
photon 150
Planck Max 162
plaque plane inclinée 118
Prandtl Ludwig 95
premier principe 11
pression 12

R

radiosité 166
Rayleigh (Lord) 116
rayonnement 17
    monochromatique 159
    thermique 150
réflectivité 177
réflexion 175
régime
    d'écoulement 99
    permanent 19, 47
    transitoire 19, 48
relation
    de Lambert 165
    de réciprocité 198
    de Stefan – Boltzmann 171
réseaux 31
    cristallins 157
    électriques 57
résistance thermique de contact 55
résolution numérique 213
Reynolds Osborne 97

S

source 45
sous-couches 99
spectre électromagnétique 151
stockage 4
système
    adiabatique 12
    fermé 2
    isolé 1, 12
    matériel 1
    ouvert 2

T

température 7
temps de relaxation 33, 42
théorème de groupements π 104
thermocouple 49
thermodynamique 1
thermomètre 7
Thomson William 34
transfert 4

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

www.biblio-scientifique.net

transformation
    isobare 13
    isochore 13
transmission 175
transmissivité 177
transport 4
travail élémentaire 12
turbulent 98

V

variables d'état 11
Vaschy–Buckingham 104
vase de Dewar 2
viscosité 94
    dynamique 96
vitesse du son 42

W

Watt James 6

www.biblio-scientifique.net