Mécanique des Fluides

Chapitre I

Statique des Fluides

La Loi Fondamentale de la Statique des Fluides

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}p = \rho\overrightarrow{F}$. ($\overrightarrow{F}$ *est la force par unité de masse*)

Fluides Incompressibles dans le Champ de Pesanteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}p = \rho\overrightarrow{g} \Longrightarrow p_1 - p_2 = \rho g(z_2 - z_1).$$

*Appelée **É**quation **F**ondamentale de l'**H**ydrostatique*

Écrite aussi sous la forme $p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$ *ou encore* $p + \rho g z = \mathrm{C}^{te}$.

Théorème d'Archimède (Poussée d'Archimède)

$$\overrightarrow{F}_A = -\overrightarrow{P}.$$

La poussée d'Archimède est égale et opposée au poids des fluides déplacés par le volume immergé du corps. Elle s'applique au centre de gravité des fluides déplacés.

Force de Pression Hydrostatique sur des Surfaces

Calcul de la Force

$$F = \int_s \rho g z dS = \rho g z_G S.$$

(z_G *est la **profondeur** du centre de gravité de la surface*)

Détermination du Centre de Poussée

$$z_{Cp}F = \int_s \rho g z^2 dS \Longrightarrow z_{Cp} = \frac{\rho g \int_s z^2 dS}{F} = \frac{\int_s z^2 dS}{\int_s z dS} = \frac{\int_s z^2 dS}{z_G . S}.$$

(z_{Cp} *est la **profondeur** du centre de poussée*)

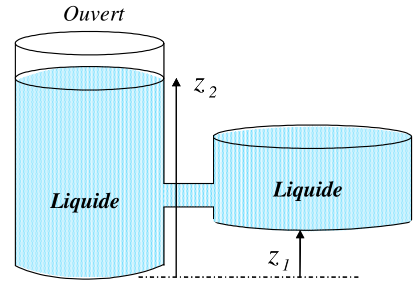
Fluides Incompressibles en Rotation Stationnaire

$$p_1 + \rho g z_1 - \rho\frac{\omega^2 r_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 - \rho\frac{\omega^2 r_2^2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow p + \rho g z - \rho\frac{\omega^2 r^2}{2} = \mathrm{C}^{te}.$$

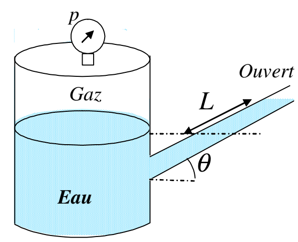
N.B: *La lettre **z** dans l'équation fondamentale de l'hydrostatique désigne une **hauteur** mesurée par rapport à un point situé en bas. La lettre **z** dans le calcul de la force et de son centre de poussée désigne une **profondeur** mesurée par rapport à la surface libre du liquide.*

1) ÉQUATION FONDAMENTALE DE L'HYDROSTATIQUE



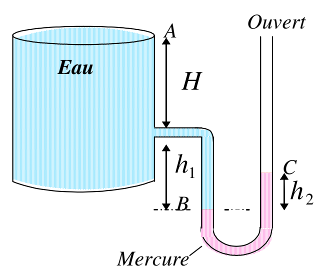
1.1. Trouver en appliquant l'ÉFH la pression p au fond du petit réservoir, sachant que la surface libre du liquide dans le grand réservoir est en contact de l'air et que la densité du liquide est δ_l.
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $z_2 = 2m$. $z_1 = 50cm$. $\delta_l = 7$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.
(ρ représentera la masse volumique normale de l'eau.)

Solution : Appliquons l'ÉFH entre la surface libre du liquide et le fond du petit réservoir.
$p_{fond} - p_{atm} = \rho_{liquide} g(z_2 - z_1) \Rightarrow p_{fond} = p_{atm} + \delta_l \rho g(z_2 - z_1)$
A.N: $p_{fond} = 1{,}01.10^5 + 7 \times 10^3 \times 9{,}81 \times (2 - 0{,}5) \approx \mathbf{2{,}04.10^5 Pa}$.



1.2. Trouver en appliquant l'ÉFH la pression p du gaz qui ne doit pas être dépassée pour que l'eau présent dans le tube incliné ne se déverse pas à travers l'ouverture.
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $L = 2m$. $\theta = 30°$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.
$g = 9,81 m/s^2$.

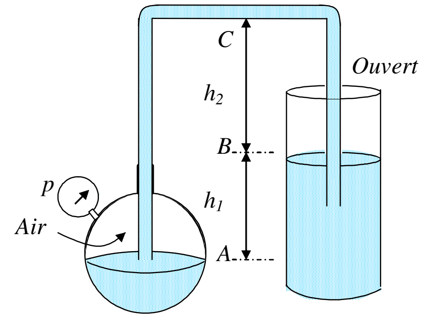
Solution : Appliquons l'ÉFH entre la surface libre de l'eau dans le réservoir et la surface libre de l'eau dans le tube incliné.
$p_{\max gaz} - p_{atm} = \rho g(z_2 - z_1) \Rightarrow p_{\max gaz} = p_{atm} + \rho g h = p_{atm} + \rho g L \sin\theta$.
A.N: $p_{\max gaz} = 1{,}01.10^5 + 10^3 \times 9{,}81 \times 2 \times \sin 30° \approx \mathbf{1{,}10.10^5 Pa}$.



1.3. Trouver en appliquant l'ÉFH la hauteur h_2 de la colonne de mercure (de densité δ) dans le tube en forme de U.
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $h_1 = 5m$. $H = 10m$. $\delta = 13,6$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.

Solution : Appliquons l'ÉFH entre les points A et B puis entre les points B et C.
$p_B - 0 = \rho g(H + h_1)$. (1) ($p_A = 0$ Car le réservoir est fermé et ne contient aucun gaz)
$p_B - p_{atm} = \delta \rho g h_2$. (2) ($p_C = p_{atm}$ Car le mercure est en contact avec l'atmosphère)
$(1) - (2) \Longrightarrow p_{atm} = \rho g(H + h_1) - \delta \rho g h_2 \Longrightarrow h_2 = \dfrac{H + h_1}{\delta} - \dfrac{p_{atm}}{\delta \rho g}$.
A.N: $h_2 = \frac{10+5}{13{,}6} - \frac{1{,}01.10^5}{13{,}6 \times 10^3 \times 9{,}81} \approx \mathbf{0{,}346m = 34{,}6cm}$.

1.4. Trouver en appliquant l'ÉFH la pression p mesurée par le manomètre, ainsi que la pression p_C au point C dans le tube horizontal.
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $h_1 = 1m$. $h_2 = 1,5m$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.



Solution : Appliquons l'ÉFH entre les points A et B puis entre les points B et C.

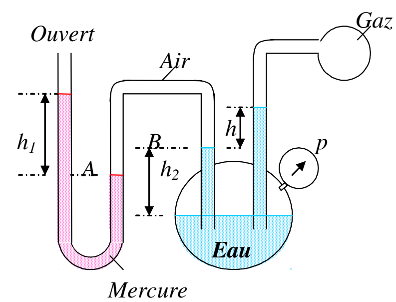
$p - p_{atm} = \rho g h_1$. (1)

$p_{atm} - p_C = \rho g h_2$. (2)

(1) $\Longrightarrow p = p_{atm} + \rho g h_1$. **A.N:** $p = 1{,}01.10^5 + 10^3 \times 9{,}81 \times 1 \approx \mathbf{1{,}10.10^5 Pa}$.

(2) $\Longrightarrow p_C = p_{atm} - \rho g h_2$. **A.N:** $p_C = 1{,}01.10^5 - 10^3 \times 9{,}81 \times 1{,}5 \approx \mathbf{0{,}86.10^5 Pa}$.

1.5. Sachant que la pression mesurée par le manomètre est p et étant données la hauteur h_1 de la colonne de de mercure et la hauteur h de la colonne d'eau dans le tube droit, trouver en appliquant l'ÉFH:
a) La hauteur h_2 de la colonne d'eau dans le tube gauche.
b) La pression du gaz dans la boule sphérique.
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $p = 2.10^5 Pa$. $h_1 = 70cm$. $h = 50cm$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\delta = 13,6$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.
(Les masses volumiques de l'air et du gaz sont négligeables)



Solution : **a**) Appliquons l'ÉFH au mercure, puis à la colonne d'eau dans le tube de gauche.

$p_A - p_{atm} = \delta \rho g h_1$. (1)

$p_A - p_B = 0$. (2) (Car la masse volumique de l'air est négligeable)

$p - p_B = \rho g h_2$. (3)

$$(1) - (2) + (3) \Longrightarrow -p_{atm} + p = \delta \rho g h_1 + \rho g h_2 \Longrightarrow h_2 = \frac{p - p_{atm}}{\rho g} - \delta h_1.$$

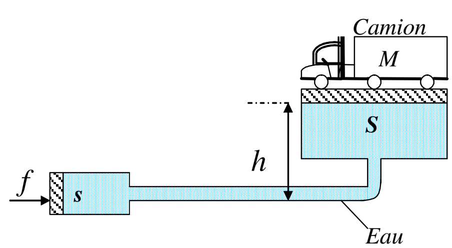
A.N: $h_2 = \frac{2.10^5 - 1{,}01.10^5}{10^3 \times 9{,}81} - 13{,}6 \times 0{,}7 \approx \mathbf{0{,}571m = 57{,}1cm}$.

b) Appliquons l'ÉFH à la colonne d'eau dans le tube de droite.

$p - p_{gaz} = \rho g (h_2 + h) \Longrightarrow p_{gaz} = p - \rho g (h_2 + h)$.

A.N: $p_{gaz} = 2.10^5 - 10^3 \times 9{,}81 \times (0{,}571 + 0{,}5) \approx \mathbf{1{,}89.10^5 Pa}$.

1.6. Trouver en appliquant l'ÉFH la force f qui doit être appliquée pour maintenir le camion de masse M en équilibre. Le diamètre des sections s et S sont d et D respectivement.
A.N: $M = 4400kg$. $d = 1cm$. $D = 1m$. $h = 1m$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.



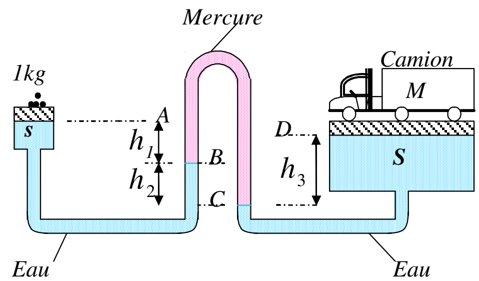
Solution : Appliquons l'ÉFH entre le bas et le haut.

$$p_{bas} - p_{haut} = \rho gh \Longrightarrow \frac{f}{s} - \frac{Mg}{S} = \rho gh$$
$$\Longrightarrow f = \frac{sMg}{S} + s\rho gh$$
$$\Longrightarrow f = \frac{d^2Mg}{D^2} + \frac{\pi d^2}{4}\rho gh$$

A.N: $f = \frac{(0,01)^2\times 4400\times 9,81}{1^2} + \frac{\pi\times(0,01)^2}{4} \times 10^3 \times 9,81 \times 1 \approx \mathbf{5,08N.}$

(La force nécessaire pour maintenir le camion en équilibre est donc très faible $\sim 0,51$ kgf)

1.7. On pose sur la section s de gauche $1kg$ de pommes de terre et sur la section S de diamètre D on pose un camion de masse $M = 4400kg$.
Trouver en appliquant l'ÉFH, le diamètre d que doit avoir la section s pour avoir l'équilibre.
Données: $h_1 = 0,5m$. $h_2 = 0,5m$. $h_3 = 1m$. $D = 50cm$.
$g = 9,81m/s^2$. $\delta = 13,6$. $\rho = 10^3kg/m^3$.



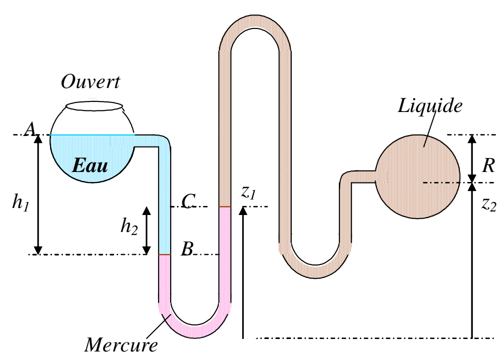
Solution : Appliquons l'ÉFH entre A et B, puis au mercure entre B et C, puis à l'eau entre C et D.

$$p_B - \frac{mg}{s} = \rho gh_1. \qquad (1)$$
$$p_C - p_B = \delta\rho gh_2. \qquad (2)$$
$$p_C - \frac{Mg}{S} = \rho gh_3. \qquad (3)$$
$$-(1) - (2) + (3) \Longrightarrow \frac{mg}{s} - \frac{Mg}{S} = \rho g(h_1 - \delta h_2 + h_3) \Longrightarrow s = \frac{Sm}{M + S\rho(h_1 - \delta h_2 + h_3)}$$
$$\Longrightarrow s = \frac{\pi D^2 m}{4M + \pi D^2\rho(h_1 - \delta h_2 + h_3)}$$

A.N: $s = \frac{\pi\times(0,5)^2\times 1}{4\times 4400+\pi\times(0,5)^2\times 10^3\times(0,5-13,6\times 0,5+1)} \approx \mathbf{5,84.10^{-5}m^2}$.

Le diamètre de la section s est donc $d = \sqrt{\frac{4s}{\pi}} \approx \mathbf{8.10^{-3}m = 8mm.}$ (Diamètre très faible.)

1.8. Trouver en appliquant l'ÉFH la densité δ_l du liquide dans la boule de droite. z_1 et z_2 représentent des hauteurs par rapport à un point fixe. La densité du mercure est δ.
A.N: $h_1 = 2m$. $h_2 = 80cm$. $z_1 = 3m$. $z_2 = 4m$.
$R = 50cm$. $\delta = 13,6$. $g = 9,81m/s^2$.
$\rho = 10^3kg/m^3$. $p_{atm} \approx 1,01.10^5Pa$.

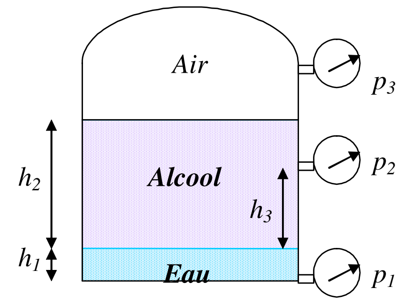


Solution : Appliquons l'ÉFH à l'eau entre A et B, puis au mercure entre B et C, puis au liquide entre z_1 et le sommet de la boule.

$$p_B - p_{atm} = \rho gh_1. \qquad (1)$$
$$p_B - p_C = \delta\rho gh_2. \qquad (2)$$
$$p_C - 0 = \delta_l\rho g(z_2 + R - z_1). \qquad (3)$$
(p_{sommet}= 0 Car la boule est pleine et fermée.)
$$-(1) + (2) + (3) \Longrightarrow p_{atm} = -\rho gh_1 + \delta\rho gh_2 + \delta_l\rho g(z_2 + R - z_1)$$
$$\Longrightarrow p_{atm} = \rho g(\delta h_2 - h_1) + \delta_l\rho g(z_2 + R - z_1)$$
$$\Longrightarrow \delta_l = \frac{p_{atm} - \rho g(\delta h_2 - h_1)}{\rho g(z_2 + R - z_1)}.$$

A.N: $\delta_l = \frac{1,01.10^5-10^3\times 9,81\times(13,6\times 0,8-2)}{10^3\times 9,81\times(4+0,5-3)} \approx \mathbf{0,943}$.

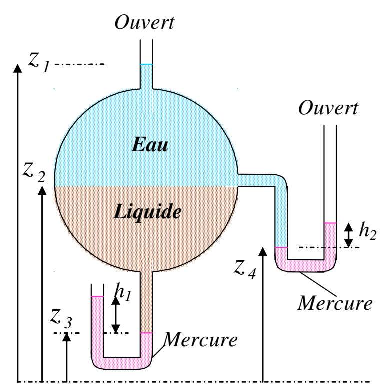
1.9. Connaissant les hauteurs h_1 et h_2, ainsi que les pressions p_2 et p_3 indiquées respectivement par les manomètres *2* et *3*, trouver en appliquant l'ÉFH:
a) La pression p_1 indiquée par manomètre *1*.
b) Le hauteur h_3.
(*On désigne la densité de l'alcool par* δ_0).
A.N: $h_1 = 1m$. $h_2 = 2m$. $\delta_0 = 0,79$. $g = 9,81m/s^2$.
$p_2 = 0,12kgf/cm^2$. $p_3 = 7,49cmHg$. $\rho = 10^3kg/m^3$.



Solution : **a**) Appliquons l'ÉFH entre le fond du réservoir et la surface libre de l'alcool.
$p_1 - p_3 = \rho g h_1 + \delta_0 \rho g h_2 \Longrightarrow p_1 = p_3 + \rho g(h_1 + \delta_0 h_2)$.
La pression p_3 est donnée en cmHg, c'est-à-dire en hauteur d'une colonne de mercure.
Pour l'avoir en Pascal, il suffit d'écrire 7,49cmHg $= \delta\rho g \times 0{,}0749 = 13{,}6 \times 10^3 \times 9{,}81 \times 0{,}0749 \approx 10^4$Pa.
A.N: $p_1 = 10^4 + 10^3 \times 9{,}81 \times (1 + 0{,}79 \times 2) \approx \mathbf{3{,}53.10^4Pa}$.

b) Appliquons l'ÉFH entre le fond du réservoir et le niveau du manomètre *2*.
$$p_1 - p_2 = \rho g h_1 + \delta_0 \rho g h_3 \Longrightarrow h_3 = \frac{p_1 - p_2}{\delta_0 \rho g} - \frac{h_1}{\delta_0}.$$
La pression p_2 est donnée en kgf/cm^2, pour l'avoir en Pascal il suffit d'écrire
0,12kgf/cm^2 $= 0{,}12 \times g \times 10^4$ N/m^2 $= 0{,}12 \times 9{,}81 \times 10^4 \approx 1{,}2 \times 10^4$ Pa.
A.N: $h_3 = \frac{3{,}53.10^4 - 1{,}2.10^4}{0{,}79 \times 10^3 \times 9{,}81} - \frac{1}{0{,}79} \approx \mathbf{1{,}74m}$.

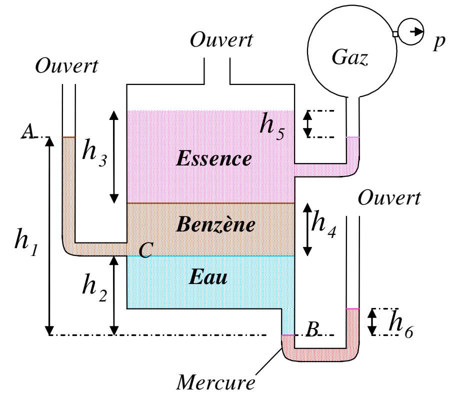
1.10. Connaissant les hauteurs z_1, z_2, z_3, z_4, et h_1, trouver en appliquant l'ÉFH:
a) La hauteur h_2 du mercure dans le tube de droite.
b) La densité δ_l du liquide.
(*On prendra pour le mercure la densité* $\delta = 13,6$).
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5Pa$. $z_1 = 2m$. $z_2 = 1,5m$. $z_3 = 50cm$.
$z_4 = 1m$. $h_1 = 90cm$. $g = 9,81m/s^2$. $\rho = 10^3kg/m^3$.



Solution : **a**) Appliquons l'ÉFH à l'eau entre z_4 et z_1 et à la colonne de mercure de hauteur h_2.
$p_4 - p_{atm} = \rho g(z_1 - z_4)$. (1)
$p_4 - p_{atm} = \delta \rho g h_2$. (2)
$$(1) - (2) \Longrightarrow 0 = \rho g(z_1 - z_4) - \delta \rho g h_2 = 0 \Longrightarrow h_2 = \frac{z_1 - z_4}{\delta}.$$
A.N: $h_4 = \frac{2-1}{13{,}6} \approx \mathbf{7{,}35cm}$.

b) Appliquons l'ÉFH entre z_3 et z_1 puis à la colonne de mercure de hauteur h_1.
$p_3 - p_{atm} = \delta_l \rho g(z_1 - z_3)$. (3)
$p_3 - p_{atm} = \delta \rho g h_1$. (4)
$$(3) - (4) \Longrightarrow 0 = \delta_l \rho g(z_1 - z_3) - \delta \rho g h_1 = 0 \Longrightarrow \delta_l = \frac{\delta h_1}{z_1 - z_3}.$$
A.N: $\delta_l = \frac{13{,}6 \times 0{,}9}{2 - 0{,}5} = \mathbf{8{,}16}$.

1.11. Connaissant les hauteurs h_2, h_3, h_5, et h_6 ainsi que la densité δ_e de l'essence et δ_b du benzène, trouver en appliquant l'ÉFH:
a) La pression p du gaz indiquée par le manomètre.
b) La hauteur h_4 du benzène dans le réservoir.
c) La hauteur h_1 du benzène dans le tube.
A.N: $p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $h_2 = 1m$. $h_3 = 1,5m$. $h_5 = 2cm$.
$h_6 = 20cm$. $g = 9,81m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.
$\delta_e \approx 0,75$. $\delta_b \approx 0,88$. $\delta = 13,6.(Mercure)$



Solution : **a**) Appliquons l'ÉFH à l'essence en utilisant la hauteur h_5.
$p - p_{atm} = \delta_e \rho g h_5 \Longrightarrow p = p_{atm} + \delta_e \rho g h_5$.
A.N: $p = 1{,}01.10^5 + 0{,}75 \times 10^3 \times 9{,}81 \times 0{,}02 \approx \mathbf{1{,}01.10^5 Pa}$.

b) Appliquons l'ÉFH entre le point B et la surface libre de l'essence, puis au mercure de hauteur h_6.
$p_B - p_{atm} = \rho g h_2 + \delta_b \rho g h_4 + \delta_e \rho g h_3$ (1)
$p_B - p_{atm} = \delta \rho g h_6$. (2)

$$(1) - (2) \Longrightarrow 0 = \rho g h_2 + \delta_b \rho g h_4 + \delta_e \rho g h_3 - \delta \rho g h_6 \Longrightarrow h_4 = \frac{\delta h_6 - \delta_e h_3 - h_2}{\delta_b}.$$

A.N: $h_4 = \frac{13{,}6 \times 0{,}2 - 0{,}75 \times 1{,}5 - 1}{0{,}88} \approx \mathbf{67{,}6cm}$.

c) Appliquons l'ÉFH entre A et C, puis entre C et la surface libre de l'essence.
$p_C - p_{atm} = \delta_b \rho g (h_1 - h_2)$. (3)
$p_C - p_{atm} = \delta_b \rho g h_4 + \delta_e \rho g h_3$. (4)

$$(3) - (4) \Longrightarrow 0 = \delta_b \rho g (h_1 - h_2) - \delta_b \rho g h_4 - \delta_e \rho g h_3 \Longrightarrow h_1 = h_2 + h_4 + \frac{\delta_e h_3}{\delta_b}.$$

A.N: $h_1 = 1 + 0{,}676 + \frac{0{,}75 \times 1{,}5}{0{,}88} \approx \mathbf{2{,}95m}$.

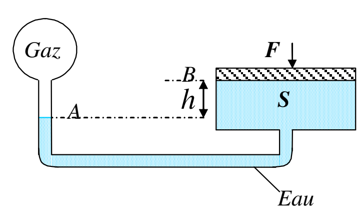
Méthode 2: Ce résultat peut être aussi trouvé en appliquant l'ÉFH entre A et B, puis entre B et la surface libre du mercure:

$p_B - p_{atm} = \delta_b \rho g (h_1 - h_2) + \rho g h_2$. (3)'
$p_B - p_{atm} = \delta \rho g h_6$. (4)'

$$(3)' - (4)' \Longrightarrow 0 = \delta_b \rho g (h_1 - h_2) + \rho g h_2 - \delta \rho g h_6 \Longrightarrow h_1 = h_2 - \frac{h_2}{\delta_b} + \frac{\delta h_6}{\delta_b}.$$

A.N: $h_1 = 1 - \frac{1}{0{,}88} + \frac{13{,}6 \times 0{,}2}{0{,}88} \approx \mathbf{2{,}95m}$.

1.12. Connaissant h, F, S, et p_{atm}, trouver la pression du gaz à l'interieur de la boule sphèrique.
A.N: $h = 10m$. $F = 10^5 N$. $S = 2m^2$.
$p_{atm} \approx 1,01.10^5 Pa$. $g = 9,81m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.

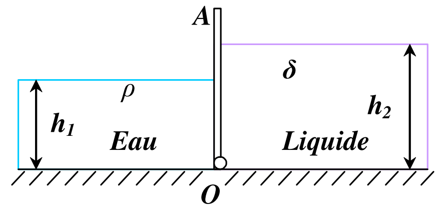


Solution : Appliquons l'ÉFH à l'eau entre les points A et B. $p_A - p_B = \rho g h$.
Attention: contrairement aux exercices **1.6** et **1.7,** dans lesquels la pression atmosphèrique n'a pas été prise en compte (car elle contribuait des deux cotés du liquide), dans cet exercice la pression atmosphérique contribue uniquement à droite et non à gauche. Elle doit donc être incluse ici.

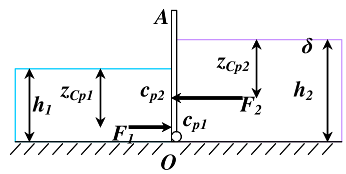
$$p_{gaz} - (\frac{F}{S} + p_{atm}) = \rho g h \Longrightarrow p_{gaz} = (\frac{F}{S} + p_{atm}) + \rho g h.$$ **A.N:** $p_{gaz} \approx \mathbf{2{,}49.10^5 Pa}$.

2.A) FORCE HYDROSTATIQUE SUR DES SURFACES PLANES

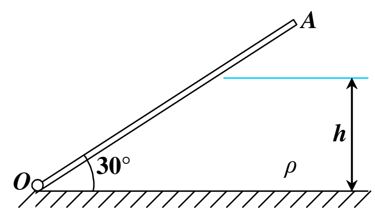
2.A.1 Trouver les forces de pression hydrostatiques F_1 et F_2 auxquelles est soumise la paroi rectangulaire plane OA de largeur l.
Trouver le niveau h_2 du liquide pour avoir l'équilibre.
A.N: $h_1 = 2m$. $\delta = 0,7$.



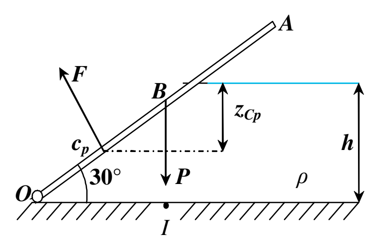
Solution : Calcul des forces.
$F_1 = \rho g z_{G_1}.S_1 = \rho g \frac{h_1}{2}.h_1 l = \frac{1}{2}\rho g h_1^2$.
$F_2 = \delta\rho g z_{G_2}.S_2 = \delta\rho g \frac{h_2}{2}.h_2 l = \frac{1}{2}\delta\rho g h_2^2$.
Pour trouver la condition d'équilibre nous devons trouver les moments.
$z_{Cp_1} = \frac{2}{3}h_1 \Longrightarrow OC_{p_1} = h_1 - \frac{2}{3}h_1 = \frac{1}{3}h_1 \Longrightarrow \mathcal{M}_{F_1/O} = \frac{1}{6}\rho g h_1^3$.
$z_{Cp_2} = \frac{2}{3}h_2 \Longrightarrow OC_{p_2} = h_2 - \frac{2}{3}h_2 = \frac{1}{3}h_2 \Longrightarrow \mathcal{M}_{F_2/O} = \frac{1}{6}\delta\rho g h_2^3$.
Pour qu'il y ait équilibre il faut que $\mathcal{M}_{F_1/O} = \mathcal{M}_{F_2/O}$
$\Longrightarrow \frac{1}{6}\rho g h_1^3 = \frac{1}{6}\delta\rho g h_2^3 \Longrightarrow h_2 = \frac{h_1}{\delta^{1/3}}$. **A.N:** $h_2 \approx$ **2,25m**.



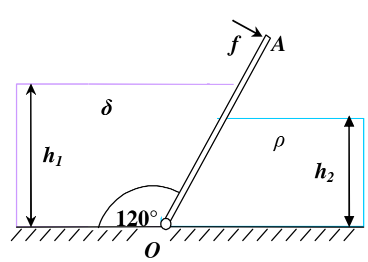
2.A.2 Trouver la hauteur h du niveau de l'eau pour qu'il y ait équilibre, sachant que la plaque OA est rectangulaire, homogène, de largeur l, et de masse m.
A.N: $OA = 2m$. $l = 1m$. $m = 5000kg$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.



Solution : Pour qu'il ait équilibre il faut que le moment du poids soit égale au moment de la force hydrostatique. Calculons d'abord la force hydrostatique F et la profondeur z_{C_p} de son centre de poussée.
$F = \rho g z_G.S = \rho g \frac{h}{2}.\frac{h}{\sin 30°}l = \rho g \frac{h^2 l}{2\sin 30°}$.
$z_{C_p} = \frac{2h}{3}$. Le bras de levier de cette force est donc $OC_p = \frac{h}{3\sin 30°}$.
Le moment de la force est, $\mathcal{M}_{F/O} = F \times OC_p = \rho g \frac{h^3 l}{6\sin^2 30°}$.
Le moment du poids est, $\mathcal{M}_{P/O} = P \times OI = P \times OB\cos 30° = mg\frac{OA}{2}\cos 30°$.
À l'équilibre nous aurons $\mathcal{M}_{F/O} = \mathcal{M}_{P/O} \Longrightarrow \rho g \frac{h^3 l}{6\sin^2 30°} = mg\frac{OA}{2}\cos 30°$
$\Longrightarrow \rho\frac{h^3 l}{3\sin^2 30°} = m.OA\cos 30° \Longrightarrow h = \left(\frac{3mOA\sin^2 30°\cos 30°}{\rho l}\right)^{1/3} \approx$ **1,87 m.**



2.A.3 Trouver la force f sur la paroi rectangulaire OA pour qu'il y ait équilibre à $120°$. La paroi est de largeur l et de masse négligeable. Le liquide dans la partie de droite est de l'eau alors que le liquide de gauche a une densité δ.
A.N: $h_1 = 1m$. $h_2 = 90cm$. $OA = 2m$. $l = 1m$.
$\rho = 10^3 kg/m^3$. $\delta = 0,7$. $g = 9,81 m/s^2$.



Solution : Pour qu'il ait équilibre il faut que la somme des moments des forces soit nulle. Calculons d'abord les forces hydrostatiques F_1 et F_2.

$F_1 = \delta\rho g z_{G_1}.S_1 = \delta\rho g\frac{h_1}{2}.\frac{h_1}{\cos 30°}l = \delta\rho g\frac{h_1^2}{2\cos 30°}l.$

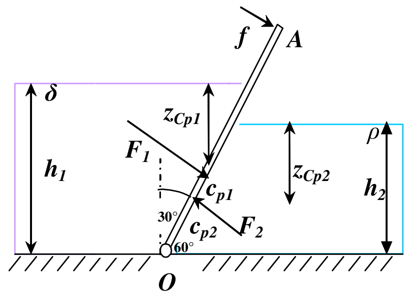
$F_2 = \rho g z_{G_2}.S_2 = \rho g\frac{h_2}{2}.\frac{h_2}{\sin 60°}l = \rho g\frac{h_1^2 l}{2\sin 60°}l.$

Pour trouver les moments nous avons besoin de OC_{p1} et OC_{p2} .

$z_{Cp_1} = \frac{2}{3}h_1 \Longrightarrow OC_{p_1} = \frac{h_1}{3\cos 30°} \Longrightarrow \mathcal{M}_{F_1/O} = \delta\rho g\frac{h_1^3}{6\cos^2 30°}l.$

$z_{Cp_2} = \frac{2}{3}h_2 \Longrightarrow OC_{p_2} = \frac{h_2}{3\sin 60°} \Longrightarrow \mathcal{M}_{F_2/O} = \rho g\frac{h_2^3}{6\sin^2 60°}l.$

Pour qu'il y ait équilibre il faut que $\sum\overrightarrow{\mathcal{M}}_{/O} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \mathcal{M}_{F_1} + \mathcal{M}_f = \mathcal{M}_{F_2}$



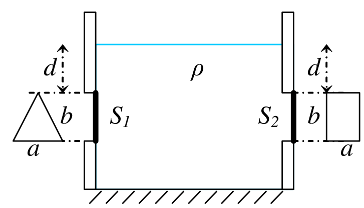
$\Longrightarrow \delta\rho g\frac{h_1^3}{6\cos^2 30°}l + f.OA = \rho g\frac{h_2^3}{6\sin^2 60°}.l \Longrightarrow f = \frac{\rho g l}{6.OA}\left[\frac{h_2^3}{\sin^2 60°} - \frac{\delta h_1^3}{\cos^2 30°}\right].$ **A.N:** $f \approx$ **120,2N**.

2.A.4 a) Trouver les forces hydrostatiques F_1 et F_2 agissant sur les surfaces noyées S_1 et S_2 respectivement. (S_1 est triangulaire, S_2 est rectangulaire.)

b) Trouver les profondeurs z_{Cp_1} et z_{Cp_2}.

A.N: $a = 1m$. $b = d = 1,5m$.
$\rho = 10^3 kg/m^3$. $g = 9,81 m/s^2$.

Rappels: $R^2_{G(Triangle)} = \frac{b^2}{18}$. $R^2_{G(Rectangle)} = \frac{b^2}{12}$.



Solution : **a**) Calcul des forces F_1 et F_2.

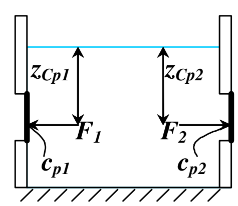
$F_1 = \rho g z_{G_1}.S_1 = \rho g(d + \frac{2b}{3}).\frac{1}{2}ba.$ **A.N:** $F_1 \approx$ **18393,8N.**

$F_2 = \rho g z_{G_2}.S_2 = \rho g(d + \frac{b}{2}).ab.$ **A.N:** $F_2 \approx$ **33108,8N.**

b) Calcul de z_{Cp_1} et z_{Cp_2}. Comme les surfaces sont noyées, nous avons

$z_{Cp_1} = z_{G_1} + \frac{R^2_{G1}}{z_{G_1}} = d + \frac{2b}{3} + \frac{b^2/18}{d+\frac{2b}{3}}.$ **A.N:** $z_{Cp_1} =$ **2,55m**.

$z_{Cp_2} = z_{G_2} + \frac{R^2_{G2}}{z_{G_2}} = d + \frac{b}{2} + \frac{b^2/12}{d+\frac{b}{2}}.$ **A.N:** $z_{Cp_2} \approx$ **2,33m**.



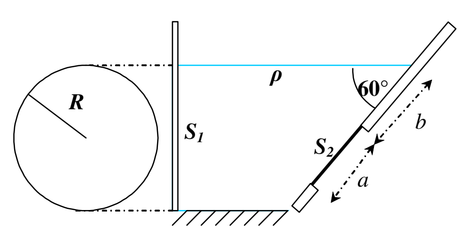
2.A.5 a) Trouver les forces hydrostatiques F_1 et F_2 auxquelles sont soumises les surfaces S_1 et S_2. (S_1 est circulaire de rayon R, et S_2 est noyée et rectangulaire de largeur l.)

b) Trouver les profondeurs z_{Cp_1} et z_{Cp_2}.

c) Préciser les composantes F_{2x} et F_{2z} de F_2.

A.N: $a = b = R = 1m$. $l = 0,5m$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.

Rappels: $R^2_{G(Disque)} = \frac{R^2}{4}$. $R^2_{G(Rectangle)} = \frac{a^2}{12}$.



Solution : **a**) Calcul de F_1 et F_2.

$F_1 = \rho g z_{G_1}.S_1 = \rho g R.\pi R^2 = \pi\rho g R^3$. **A.N:** $F_1 \approx$ **30819 N.**

$F_2 = \rho g z_{G_2}.S_2 = \rho g(b+\frac{a}{2})\sin 60°.al$. **A.N:** $F_2 \approx$ **6371,8 N.**

b) Comme la section S_1 n'est pas rectangulaire mais circulaire, nous avons

$z_{C_{p1}} = z_{G_1} + \frac{R^2_{G_1}}{z_{G_1}} = R + \frac{R^2/4}{R} = \frac{5R}{4}$. **A.N:** $z_{C_{p1}} \approx$ **1,25m.**

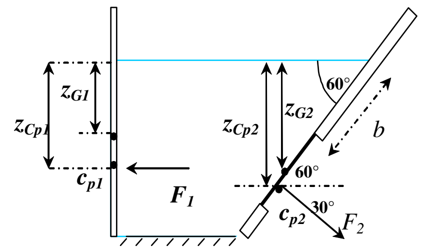
Comme la section S_2 est rectangulaire mais noyée et inclinée, nous avons

$z_{C_{p2}} = z_{G_2} + \frac{R^2_{G_2}\sin^2 60°}{z_{G_2}} = (b+\frac{a}{2})\sin 60° + \frac{\frac{a^2}{12}\sin^2 60°}{(b+\frac{a}{2})\sin 60°}$.

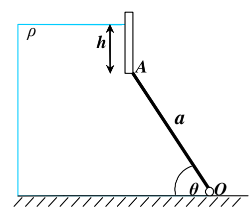
$= \left[b + \frac{a}{2} + \frac{\frac{a^2}{12}}{b+\frac{a}{2}}\right]\sin 60°$. **A.N:** $z_{C_{p2}} \approx$ **1,35m.**

c) Puisque la force F_2 est perpendiculaire à S_2 nous avons

$F_{2x} = F_2\cos 30° \approx$ **8704 N.** $F_{2z} = F_2 \sin 30° \approx$ **3185,9 N.**

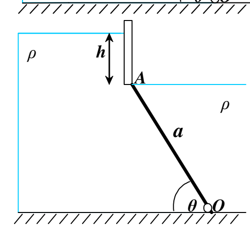


2.A.6 a) Trouver la masse minimale que doit avoir la plaque OA pour avoir équilibre. La plaque peut tourner autour de l'axe en O. La plaque est rectangulaire de largeur l.



b) En remplissant la partie de droite avec de l'eau jusqu'au point A, trouver la nouvelle masse minimale en équilibre.

A.N: $h = 1m$. $a = 3m$. $l = 1m$. $\theta = 30°$.
$g = 9,81 m/s^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.



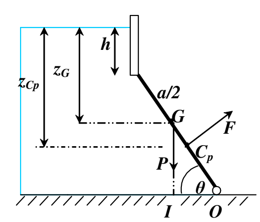
Solution : Pour qu'il y ait équilibre, il faut que le moment de stabilité dépasse le moment de renversement.

a) Calculons d'abord la force hydrostatique et la profondeur de son centre de poussée.

$F = \rho g z_G.S = \rho g(h + \frac{a}{2}\sin\theta).al$. **A.N:** $F \approx$ **51502,5 N**.

$z_{C_p} = z_G + \frac{R^2_G \sin^2\theta}{z_G} = h + \frac{a}{2}\sin\theta + \frac{\frac{a^2}{12}\sin^2\theta}{h+\frac{a}{2}\sin\theta}$. **A.N:** $z_{Cp} \approx$ **1,86m**

Calculons maintenant le moment par rapport à l'axe en O du poids et de F.



$\mathcal{M}_{F/O} = F \times OC_p = F \times \left(a - \frac{z_{C_p}-h}{\sin\theta}\right) \approx 65923,2$ **(N.m)**

$\mathcal{M}_{P/O} = P \times OI = P \times OG\cos\theta = mg \times \frac{a}{2}\cos\theta \approx 12,75.m$ **(N.m)**.

Pour qu'il y ait équilibre il faut que $\mathcal{M}_{P/O} \geqslant \mathcal{M}_{F/O} \Longrightarrow$

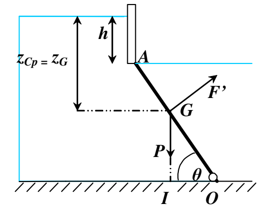
$12,75\ m \geqslant 65923,2 \Longrightarrow m \geqslant$ **5170,4kg.**

b) Calculons la nouvelle force hydrostatique F'. Puisque nous avons le même liquide à gauche et à droite de la plaque, la force de pression vient uniquement du surplus en liquide de hauteur h dans la partie gauche.

La pression de ce surplus est $p = \rho g h$ et agit directement au centre de la plaque OA car cette pression est transmise uniformément vers tous les points de la plaque. Donc, $F' = p.S = \rho g h.S = \rho g hal =$ **29430 N**.

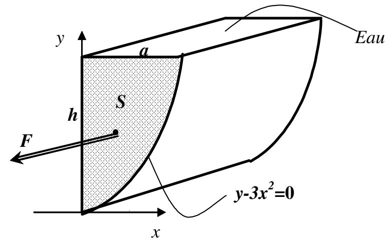
La nouvelle masse minimale est donnée par $\mathcal{M}_{P/O} \geqslant \mathcal{M}_{F'/O} \Longrightarrow$

$P \times OG\cos\theta \geqslant F' \times OG \Longrightarrow mg\cos\theta \geqslant F' \Longrightarrow m \geqslant \frac{F'}{g\cos\theta} \approx$ **3464kg.**

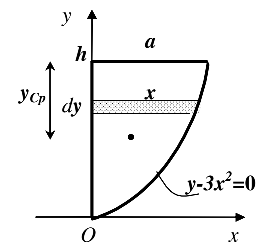


2.A.7 a) Trouver la force de pression hydrostatique à laquelle est soumise la surface plane S.
b) Trouver la hauteur y_{Cp} du centre de poussée.

La frontière du coté droit de la surface est semi-parabolique d'équation $y - 3x^2 = 0$.



Solution :



a) Pour trouver la force hydrostatique nous utilisons le formule intégrale $F = \rho g \int z ds$.
Comme l'axe vertical est noté y, la formule devient $F = \rho g \int y ds$.
Cependant, comme l'axe y est orienté du bas vers le haut, on écrit $F = \rho g \int (h-y) ds$.
Donc, $F = \rho g \int (h-y) ds = \rho g \int (h-y) x.dy$

$$= \rho g \int (h-3x^2) x.6x dx = \rho g \int_0^a (6hx^2 - 18x^4) dx$$
$$= \rho g \left[2hx^3 - \tfrac{18}{5}x^5\right]_0^a = \rho g \left(2ha^3 - \tfrac{18}{5}a^5\right).$$

b) Pour trouver le centre de poussée, nous utilisons la formule intégrale $z_{Cp} = \frac{\int z^2 ds}{z_G S} = \frac{\int z^2 ds}{\int z ds}$.
Comme l'axe vertical est noté y et orienté vers le haut on écrit $y_{Cp} = \frac{\int (h-y)^2 ds}{\int (h-y) ds}$.

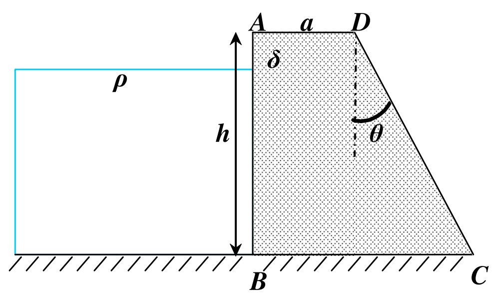
- $\int (h-y)^2 \mathrm{ds} = \int (h-y)^2 x.\mathrm{d}y = \int (h-3x^2)^2 x.6x\mathrm{d}x = \int_0^a (6h^2x^2 - 36hx^4 + 54x^6)\mathrm{d}x = a^3(2h^2 - \frac{36}{5}ha^2 + \frac{54}{7}a^4)$
- $\int (h-y)\mathrm{ds} = \int (h-y) x.\mathrm{d}y = \int (h-3x^2) x.6x\mathrm{d}x = \int_0^a (6hx^2 - 18x^4)\mathrm{d}x = 2ha^3 - \frac{18}{5}a^5$.

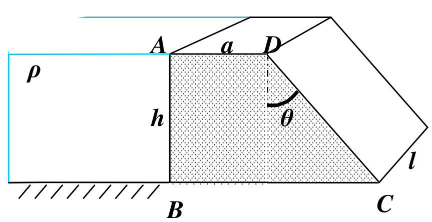
Donc, $y_{Cp} = \frac{\int (h-y)^2 ds}{\int (h-y) ds} = \frac{2h^2 - \frac{36}{5}ha^2 + \frac{54}{7}a^3}{2h - \frac{18}{5}a^2} = \frac{h^2 - \frac{18}{5}ha^2 + \frac{27}{7}a^3}{h - \frac{9}{5}a^2}$.

2.B) Équilibre des Barrages

2.B.1 Trouver la densité minimale δ du béton constituant le barrage ci-contre qui permet la stabilité du barrage en cas de trop plein.

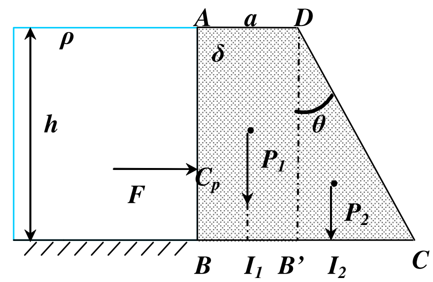
A.N: $h = 100m$. $a = 2m$. $\theta = 30°$.
$\rho = 10^3 kg/m^3$.



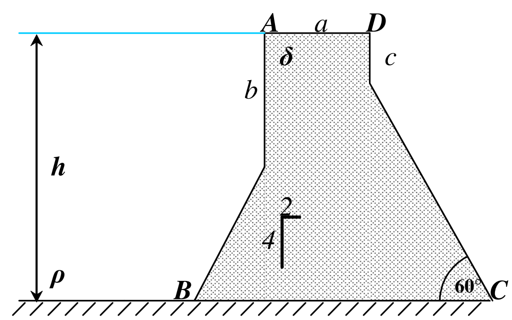


Solution : Pour qu'il y ait stabilité il faut que le moment de stabilité (c'est-à-dire du poids) soit supérieur au moment de renversement (c'est-à-dire de la poussée hydrostatique).

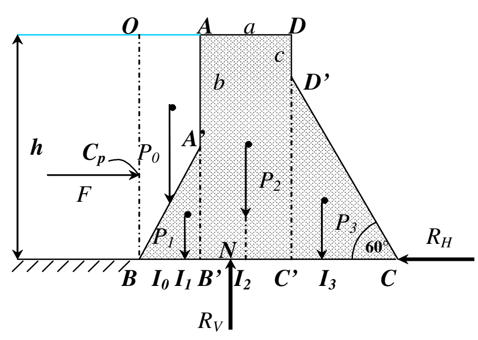
Trouvons d'abord la force hydrostatique F et les poids P_1 et P_2 de la partie rectangulaire du barrage et de sa partie triangulaire.
$F = \rho g z_G.S = \rho g \frac{h}{2}.hl = \rho g \frac{h^2}{2} l.$
$P_1 = \delta\rho g V_{ABB'D} = \delta\rho g h a l.$
$P_2 = \delta\rho g V_{B'CD} = \delta\rho g \frac{B'C}{2} hl = \delta\rho g \frac{h\tan\theta}{2} hl = \delta\rho g \frac{h^2\tan\theta}{2} l.$
Trouvons maintenant le moment de chaque force par rapport à l'axe passant par C.
$\mathcal{M}_F = F \times (h - z_{Cp}) = \rho g \frac{h^2}{2} l \times (h - \frac{2}{3}h) = \rho g l \frac{h^3}{6}.$
$\mathcal{M}_{P_1} = P_1 \times CI_1 = \delta\rho g h a l \times (CB' + B'I_1) = \delta\rho g h a l.(h\tan\theta + \frac{a}{2}).$
$\mathcal{M}_{P_2} = P_2 \times CI_2 = \delta\rho g \frac{h^2\tan\theta}{2} l \times \frac{2h\tan\theta}{3} = \delta\rho g l \frac{h^3\tan^2\theta}{3}.$
Pour qu'il y ait stabilité il faut que $\mathcal{M}_{P_1} + \mathcal{M}_{P_2} > \mathcal{M}_F \Longrightarrow$
$\delta\rho g h a l.(h\tan\theta + \frac{a}{2}) + \delta\rho g l \frac{h^3\tan^2\theta}{3} > \rho g l \frac{h^3}{6} \Longrightarrow$
$\delta\left[a(h\tan\theta + \frac{a}{2}) + \frac{h^2\tan^2\theta}{3}\right] > \frac{h^2}{6} \Longrightarrow 1228{,}6\ \delta > 1666{,}7 \Longrightarrow \delta >$ **1,36**.



2.B.2 a) Trouver la réaction R du sol sur le barrage ci-contre. *Indication*: **Trouver la composante horizontale R_H et la composante verticale R_V.**
b) Trouver la direction de la réaction R.
c) Trouver sur le sol le point d'application de R_V.
A.N: $h = 6m.$ $l = 1m,$ $a = 2m.$ $b = 3m.$ $c = 1m.$
$\delta = 2.$ $g = 9{,}81 m/s^2.$ $\rho = 10^3 kg/m^3.$



Solution : **a**) Pour trouver la réaction R du sol sur le barrage, il suffit de trouver R_H et R_V car $R = \sqrt{R_H^2 + R_V^2}$.
Pour trouver R_H, il faut écrire $\sum F_x = 0$.
Pour trouver R_V, il faut écrire $\sum F_z = 0$.
Pour les forces horizontales, nous en avons deux: F et R_H. Donc,
$\sum F_x = 0 \Longrightarrow F - R_H = 0 \Longrightarrow R_H = F.$ Calculons alors F.
La force F est la force horizontale qui pousse la surface *AA'B*.
Comme la projection horizontale de *AA'B* est *OB,* nous avons
$F = \rho g z_G.S_{OB} = \rho g \frac{OB}{2}.OBl = \rho g l \frac{h^2}{2}.$
Donc, $R_H = F = \rho g l \frac{h^2}{2}.$
Pour les forces verticales, nous avons: $P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3$ et R_V.
P_0 est le poids de l'eau au dessus de $A'B$. Donc,
$P_0 = \rho g V_{OBA'A} = \rho g(V_{OBB'A} - V_{BB'A'})$
$= \rho g(OB.BB'.l - \frac{1}{2}BB'.B'A'.l).$
On a $B'A' = h - b$ et $\frac{B'A'}{BB'} = \frac{4}{2} \Longrightarrow BB' = \frac{4}{2}B'A' = 2(h-b).$
$P_0 = \rho g\left[h.2(h-b).l - \frac{1}{2}2(h-b).(h-b).l\right] = \rho g l(h^2 - b^2).$
$P_1 = \delta\rho g V_{BB'A'} = \delta\rho g \frac{1}{2} BB'.B'A'.l = \rho g l(h-b)^2.$
$P_2 = \delta\rho g V_{AB'C'D} = \delta\rho g AB'.B'C.l = \rho g h a l.$
$P_3 = \delta\rho g V_{D'C'C} = \delta\rho g \frac{1}{2} D'C'.C'C.l = \rho g \frac{1}{2}(h-c)\frac{h-c}{\tan 60°}.l.$
À l'équilibre nous avons, $P_0 + P_1 + P_2 + P_3 - R_V = 0 \Longrightarrow R_V = P_0 + P_1 + P_2 + P_3.$



A.N: $R_H \approx$ **176,6kN**. $R_V \approx$ **818,5kN**. Soit: $R = \sqrt{R_H^2 + R_V^2} \approx$ **837,3kN**.

b) La direction de la réaction R est donnée par $\tan\alpha = \frac{R_V}{R_H} \Longrightarrow \alpha \approx \mathbf{78°}$.
c) Pour trouver sur le sol le point d'application de R_V il faut écrire $\sum \mathcal{M}_{/C} = 0$.
Nous avons alors, $-\mathcal{M}_F + \mathcal{M}_{P_0} + \mathcal{M}_{P_1} + \mathcal{M}_{P_2} + \mathcal{M}_{P_3} + \mathcal{M}_{R_H} - \mathcal{M}_{R_V} = 0$

$\Rightarrow -F.BC_p + P_0.CI_0 + P_1.CI_1 + P_2.CI_2 + P_3.CI_3 + 0 - R_V.CN = 0 \Longrightarrow CN = \frac{-F.BC_p+P_0.CI_0+P_1.CI_1+P_2.CI_2+P_3.CI_3}{R_V}$.

$CI_3 = \frac{2CC'}{3} = \frac{2(h-c)}{3\tan 60°}$.

$CI_2 = CC' + C'I_2 = \frac{h-c}{\tan 60°} + \frac{a}{2}$.

$CI_1 = CC' + C'B' + B'I_1 = \frac{h-c}{\tan 60°} + a + \frac{B'B}{3} = \frac{h-c}{\tan 60°} + a + \frac{2(h-b)}{3}$.

$CI_0 = CC' + C'B' + B'I_0 = \frac{h-c}{\tan 60°} + a + \frac{\frac{BB'}{2}.b.B'B + \frac{2BB'}{3}(h-b)\frac{BB'}{2}}{b.B'B + (h-b)\frac{BB'}{2}} = \frac{h-c}{\tan 60°} + a + \frac{2(2h+b)(h-b)}{3(h+b)}$.

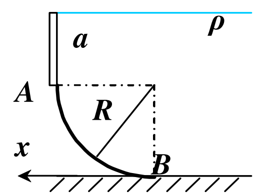
$BC_p = h - \frac{2}{3}h = \frac{h}{3}$.

A.N: $CN = \frac{-F.BC_p+P_0.CI_0+P_1.CI_1+P_2.CI_2+P_3.CI_3}{R_V} \approx \mathbf{6{,}75m}$.

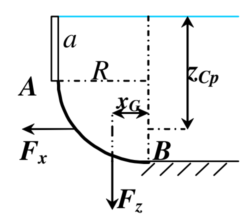
2.C) Force Hydrostatique sur des Surfaces Courbes

2.C.1 a) Trouver la force horizontale F_x et la force verticale F_z auxquelles est soumise la surface AB.
b) Trouver la profondeur z_{Cp} du centre de poussée de F_x.
c) Trouver l'abscisse du centre de poussée de F_z.
La largeur de la surface est l.

Rappels: $x_{G(Rectangle)} = \frac{longueur}{2}$. $x_{G(\frac{1}{4}Disque)} = \frac{4R}{3\pi}$.



Solution : **a**) Pour trouver F_x, il suffit de trouver la force qui s'exerce la surface $B'B$ qui est la projection horizontale de AB.

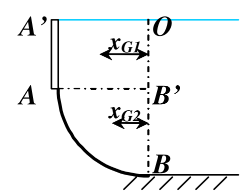


$F_x = \rho g z_G.S_{B'B} = \rho g(a + \frac{R}{2}).Rl$.
Pour trouver F_y, il suffit de trouver le poids de l'eau au dessus AB.
$F_z = \rho g(V_{A'AB'O} + V_{ABB'}) = \rho g(aRl + \frac{\pi R^2}{4}l)$. Dirigée vers le bas.

b) Pour trouver z_{Cp}, il suffit de trouver le z_{Cp} de la projection rectangulaire $B'B$.
Puisque $B'B$ est noyée nous avons $z_{Cp} = z_G + \frac{R_G^2}{z_G} = a + \frac{R}{2} + \frac{R^2/12}{a+\frac{R}{2}}$.

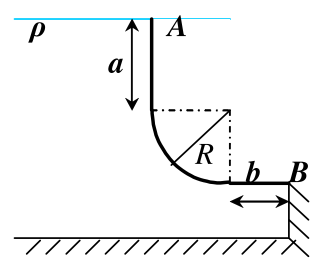
c) Pour trouver l'abscisse, il suffit de trouver l'abscisse x_G du centre de gravité de l'eau au dessus de AB.

$x_G = \frac{x_{G_1}.S_1 + x_{G_2}.S_2}{S_1+S_2} = \frac{\frac{R}{2}.aR + \frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi R^2}{4}}{aR + \frac{\pi R^2}{4}}$.

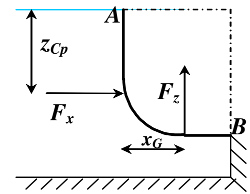


2.C.2 a) Trouver la force horizontale F_x et la force verticale F_z auxquelles est soumise la surface AB.
b) Trouver la profondeur z_{Cp} du centre de poussée de F_x.
c) Trouver l'abscisse du centre de poussée de F_z.
La largeur de la surface est l.

Rappels: $x_{G(Rectangle)} = \frac{longueur}{2}$. $x_{G(\frac{1}{4}Disque)} \approx 0{,}57R$.



Solution : **a**) Pour trouver F_x, il suffit de trouver la force qui s'exerce sur la surface OB qui est la projection horizontale de AB.



$F_x = \rho g z_G.S_{OB} = \rho g \frac{OB}{2}.OB.l = \rho g \frac{a+R}{2}(a+R)l = \rho g l \frac{(a+R)^2}{2}$.

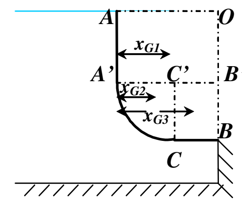
Pour trouver F_z, il suffit de trouver le poids de l'eau *imaginaire* au dessus de AB.

$F_z = \rho g(V_{AA'B'O} + V_{A'CC'} + V_{C'CBB'}) = \rho g(a(R+b)l + \frac{\pi R^2}{4} l + Rbl)$.

F_z est dirigée vers le haut.

b) Pour trouver z_{Cp}, il suffit de trouver le z_{Cp} de la projection OB.

Puisque la projection est rectangulaire: $z_{Cp} = \frac{2h}{3} = \frac{2(a+R)}{3}$.



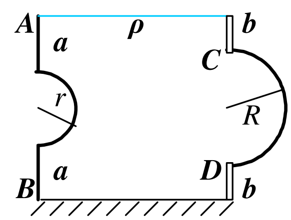
c) Pour trouver l'asbcisse, il suffit de trouver l'abscisse du centre de gravité de l'eau *imaginaire* (appelé aussi *fictif*) au dessus de AB.

$x_G = \frac{x_{G_1}.S_1 + x_{G_2}.S_2 + x_{G_3}.S_3}{S_1+S_2+S_3} = \frac{\frac{R+b}{2}.a(R+b) + 0{,}57.\frac{\pi R^2}{4} + (R+\frac{b}{2}).Rb}{a(R+b) + \frac{\pi R^2}{4} + Rb}$.

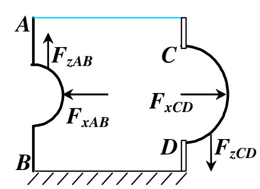
2.C.3 a) Trouver les forces horizontales F_x et les forces verticales F_z sur les surfaces AB et CD.

b) Trouver la profondeur z_{Cp} du centre de poussée des F_x.

La largeur des surfaces est l.



Solution : **a**) Pour trouver $F_{x_{(AB)}}$ sur la surface AB, il suffit de trouver la force sur sa projection horizontale.



$F_{x_{(AB)}} = \rho g z_{G_{(AB)}}.S_{(proj.AB)} = \rho g(a+r)(a+2r+a)l = 2\rho g l(a+r)^2$.

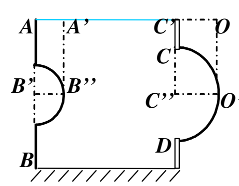
Pour trouver $F_{x_{(CD)}}$ sur la surface CD, il suffit de trouver la force sur sa projection horizontale.

$F_{x_{(CD)}} = \rho g z_{G_{(CD)}}.S_{(proj.CD)} = \rho g(b+R)2Rl$.

Pour trouver $F_{z_{(AB)}}$ sur la surface AB, il suffit de trouver la différence entre le poids de l'eau au dessus du $\frac{1}{2}$-cercle et le poids de l'eau *imaginaire* à l'intérieur du $\frac{1}{2}$-cercle.

$$F_{z_{(AB)}} = \rho g(V_{au\ dessus} - V_{intérieur}) = \rho g \left[\left((a+r)r - \frac{\pi r^2}{4}\right) - \frac{\pi r^2}{2}\right] l$$

$= \rho g l \left[(a+r)r - \frac{3\pi r^2}{4}\right]$. Si $(a+r)r > \frac{3\pi r^2}{4}$: dirigée vers le bas sinon vers le haut.



Pour trouver $F_{z_{(CD)}}$ sur la surface CD, il suffit de trouver la différence du poids de l'eau à l'intérieur du demi-cerle et du poids de l'eau *imaginaire* au dessus du demi-cercle.

$$F_{z_{(CD)}} = \rho g(V_{au\ dessus} - V_{intérieur}) = \rho g \left[\left((b+R)R - \frac{\pi R^2}{4}\right) - \frac{\pi R^2}{2}\right] l$$

$= \rho g l \left[(b+R)R - \frac{3\pi R^2}{4}\right]$. Si $(b+R) > \frac{3\pi R}{4}$: dirigée vers le haut sinon vers le bas.

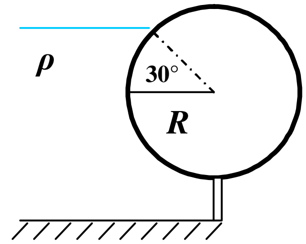
b) Comme la projection de AB est rectangulaire nous avons: $z_{Cp_{(AB)}} = \frac{2h}{3} = \frac{2(a+2r+a)}{3} = \frac{4(a+r)}{3}$.

Comme la projection de CD est rectangulaire et noyée: $z_{Cp_{(CD)}} = z_{G_{(CD)}} + \frac{R_G^2}{z_{G_{(CD)}}} = (b+R) + \frac{(2R)^2/12}{b+R}$.

2.C.4 a) Trouver la force horizontale F_x et la force verticale F_z sur le clapet cylindrique représenté ci-contre.

b) Trouver la profondeur z_{Cp} du centre de poussée de F_x.

Le rayon du cylindre est R et sa longueur est l.



Solution : **a)** Pour trouver F_x sur le cylindre, il suffit de trouver la force sur la projection horizontale de sa partie mouillée.

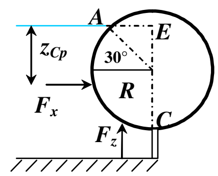
$F_x = \rho g z_G.S_{EC} = \rho g \frac{(R\sin 30° + R)}{2}(R\sin 30° + R)l = \frac{9}{8}\rho g R^2 l.$

Pour trouver F_z, il suffit de trouver le poids de l'eau *imaginaire* (*fictif*) au dessus de AC.

$F_z = \rho g V_{ABCDE} = \rho g(S_{ADE} + S_{ABD} + S_{BCD})l$

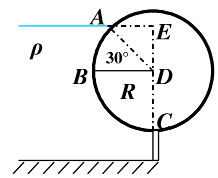
$= \rho g(\frac{(R\cos 30°)(R\sin 30°)}{2} + \frac{\pi R^2}{12} + \frac{\pi R^2}{4})l = \rho g(\frac{R^2\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi R^2}{3})l.$

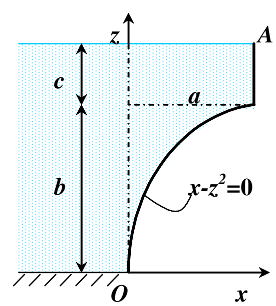
La force est dirigée vers le haut.



b) Pour trouver z_{Cp}, il suffit de trouver le z_{Cp} de la projection horizontale EC.

Puisque la projection EC est rectangulaire, nous avons : $z_{Cp} = \frac{2EC}{3} = \frac{2(R\sin 30° + R)}{3} = R.$





2.C.5 a) Trouver la force horizontale F_x et la force verticale F_z sur la surface composée ci-contre.

b) Trouver la profondeur z_{Cp} du centre de poussée de F_x.

c) Trouver l'abscisse du centre de poussée de F_z.

La largeur de la surface est l.

Solution : **a)** Pour trouver F_x sur la surface composée, il suffit de trouver la force sur sa projection horizontale OB.

$F_x = \rho g z_G.S_{OB} = \rho g \frac{b+c}{2}(b+c)l = \rho g l \frac{(b+c)^2}{2}.$

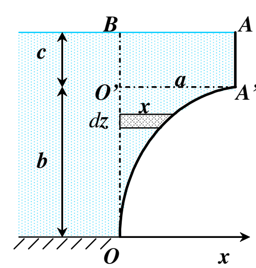
Pour trouver F_z, il suffit de trouver le poids de l'eau au dessus de OA.

$F_z = \rho g V_{BO'A'A} + \rho g V_{O'OA'} = \rho g(S_{BO'A'A} + S_{O'OA'})l$

$S_{BO'A'A} = ca.$

$S_{O'OA'} = \int x dz = \int_0^b z^2 dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{3}.$

Donc, $F_z = \rho g(ca + \frac{b^3}{3})l.$ Dirigée vers le bas.

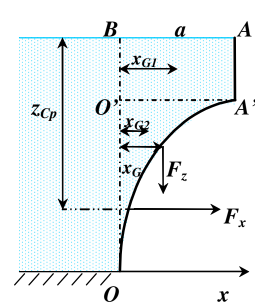


b) Pour trouver z_{Cp}, il suffit de trouver le z_{Cp} de la projection horizontale OB.

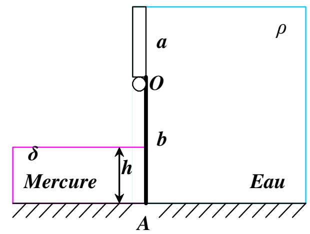
Puisque la projection est rectangulaire, nous avons $z_{Cp} = \frac{2.OB}{3} = \frac{2(b+c)}{3}.$

c) L'abscisse du centre de poussé de F_z est donnée par l'abscisse x_G des deux surfaces

$x_G = \frac{x_{G1}S_1 + x_{G_2}S_2}{S_1+S_2} = \frac{x_{G1}S_1 + \int \frac{x}{2}dS}{S_1 + \int dS} = \frac{\frac{a}{2}.ca + \int \frac{x}{2}.xdz}{ca + S_{O'OA'}} = \frac{\frac{a}{2}.ca + \int_0^b \frac{z^4}{2}dz}{ca + S_{O'OA'}} = \frac{\frac{a^2}{2}c + \frac{b^5}{10}}{ca + \frac{b^3}{3}}.$



2.D) Problèmes Divers

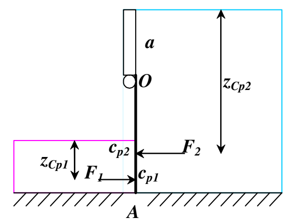


2.D.1 Trouver, à l'équilibre de la paroi rectangulaire OA, une équation entre la hauteur h du mercure, sa densité δ, la profondeur a, et la hauteur $b = 2a$ de la paroi.

La paroi est de largeur l et peut tourner autour d'un axe passant par le point O représenté par un cercle.

Rappel: $R^2_{G(Rectangle)} = \frac{b^2}{12}$.

Solution : Lorsque la paroi est encastrée, l'équilibre est donnée par la condition que la somme des forces soit nulle. Mais lorsque la paroi peut tourner, comme dans cet exercice et les précédents, alors l'équilibre est donné par la condition que la somme des moments par rapport au centre de rotation soit nulle.

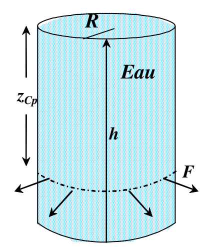


$F_1 = \delta\rho g z_{G_1}.S_1 = \delta\rho g\frac{h}{2}.hl = \delta\rho g\frac{h^2}{2}l.$ $\quad F_2 = \rho g z_{G_2}.S_2 = \rho g(a+\frac{b}{2}).bl = 4\rho g a^2 l.$

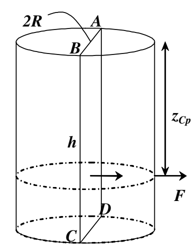
Calculons OC_{p_1} et OC_{p_2}. La paroi est mouillée coté mercure et noyée coté eau, donc:
$z_{Cp_1} = \frac{2h}{3} \Longrightarrow OC_{p_1} = b - \frac{h}{3} = 2a - \frac{h}{3}$.

$z_{Cp_2} = z_{G_2} + \frac{R^2_{G2}}{z_{G_2}} = a + \frac{b}{2} + \frac{b^2/12}{a+\frac{b}{2}} \Longrightarrow OC_{p_2} = z_{Cp_2} - a = \frac{b}{2} + \frac{b^2/12}{a+\frac{b}{2}} = \frac{7a}{6}$.

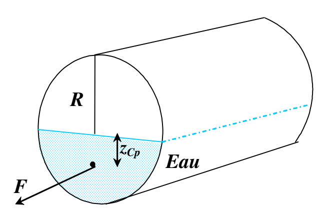
Pour avoir équilibre, il faut que $\mathcal{M}_{F_1/O} = \mathcal{M}_{F_2/O} \Longrightarrow F_1.OC_{p_1} = F_2.OC_{p_2}$
$\Longrightarrow \delta\rho g\frac{h^2}{2}l.(2a - \frac{h}{3}) = 4\rho g a^2 l.\frac{7a}{6} \Longrightarrow \delta h^3 - 6\delta a h^2 + 28a^3 = 0.$



2.D.2 Trouver la force de pression hydrostatique F à laquelle est soumise la paroi latérale du cylindre de hauteur h et de rayon R ci-contre. Trouver la profondeur z_{C_p} de cette force.



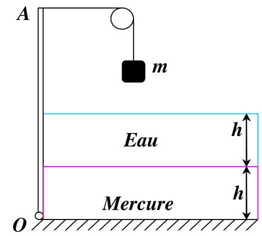
Solution :
Pour trouver la force sur la surface latérale, il suffit de trouver la force sur sa projection rectangulaire $ABCD$:
$F = \rho g z_{G(proj)}.S_{(proj)} = \rho g\frac{h}{2}.h.2R = \rho g R h^2$.
Pour trouver la profondeur z_{Cp}, il suffit de trouver le z_{Cp} de la projection rectangulaire $ABCD$: $z_{Cp} = \frac{2}{3}h$.



2.D.3 Trouver la force de pression hydrostatique F à laquel est soumise la paroi circulaire du cylindre ci-contre à moitié rempli avec de l'eau. Le cylindre est de rayon R. Trouver aussi la profondeur z_{C_p} de cette force.

Rappel: $z_{G(\frac{1}{2}Disque)} = \frac{4R}{3\pi}$. $\quad R^2_{G(\frac{1}{2}Disque)} \approx 0,07R^2$.

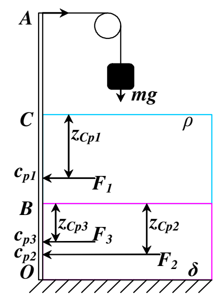
Solution :
$F = \rho g z_G.S = \rho g\frac{4R}{3\pi}.\frac{\pi R^2}{2} = \rho g\frac{2R^3}{3}$.
Puisque la paroi plane est la moitié d'un disque, nous avons $z_{Cp} = z_G + \frac{R^2_G}{z_G} = \frac{4R}{3\pi} + \frac{0{,}07R^2}{\frac{4R}{3\pi}}$.



2.D.4 Trouver la masse m qui donnerait l'équilibre de la paroi OA, sachant que celle-ci peut tourner autour d'un axe passant par O. La paroi est rectangulaire de largeur l. La densité du mercure est δ.

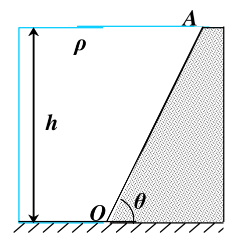
A.N: $h = 2m.$ $OA = 4m.$ $l = 1m.$ $\delta = 13,6.$ $\rho = 10^3 kg/m^3.$

Solution: Puisque la paroi peut tourner, la condition d'équilibre est que la somme des moments par rapport à l'axe de rotation soit nulle.



$F_1 = \rho g z_{G_1}.S_{BC} = \rho g \frac{h}{2}.hl = \rho g l \frac{h^2}{2}.$
$F_2 = \delta \rho g z_{G_2}.S_{OB} = \delta \rho g \frac{h}{2}.hl = \delta \rho g l \frac{h^2}{2}.$
$F_3 = \rho g h.S_{OB} = \rho g h^2 l.$ Cette troisième force vient de la pression de l'eau qui agit uniformément sur la surface OB de la paroi à travers le mercure.

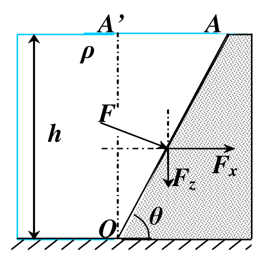
Calculons maintenant les moments:
$\mathcal{M}_{F_1/O} = F_1 \times OC_{p_1} = \rho g l \frac{h^2}{2}(h + \frac{h}{3}) = \rho g l \frac{2h^3}{3}.$
$\mathcal{M}_{F_2/O} = F_2 \times OC_{p_2} = \delta \rho g l \frac{h^2}{2}.\frac{h}{3} = \delta \rho g l \frac{h^3}{6}.$
Puisque la troisième force agit uniformément sur la surface OB de la paroi, son centre de poussée est le centre de gravité de la surface OB, c'est-à-dire au milieu de OB. Donc,
$\mathcal{M}_{F_3/O} = F_3 \times OC_{p_3} = F_3 \times OG = \rho g h^2 l.\frac{h}{2} = \rho g l \frac{h^3}{2}.$
À l'équilibre : $\mathcal{M}_{F_1} + \mathcal{M}_{F_2} + \mathcal{M}_{F_3} = \mathcal{M}_{poids}$
$\Longrightarrow \rho g l \frac{2h^3}{3} + \delta \rho g l \frac{h^3}{6} + \rho g l \frac{h^3}{2} = 4mg \Longrightarrow m = \rho l \frac{h^3}{24}(7 + \delta) \approx$ **6,867kg**.



2.D.5 Trouver par deux méthodes la force hydrostatique agissant sur la face plane rectangulaire OA du barrage ci-contre. La largeur du barrage est l.

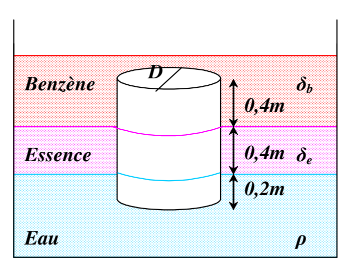
Solution:

Méthode 1: On calcul la force à l'aide de la formule $F = \rho g z_G S$.
$F = \rho g z_G S = \rho g \frac{h}{2}.\frac{hl}{\sin\theta} = \rho g \frac{h^2 l}{2\sin\theta}.$



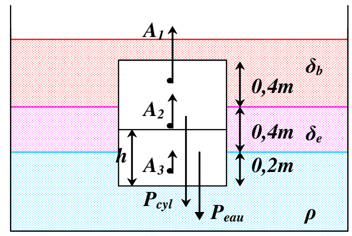
Méthode 2: On calcul la force horizontale F_x puis la force verticale F_z.
F_x est la force sur la projection OA' : $F_x = \rho g z_{G(proj)} S_{(proj)} = \rho g \frac{h}{2}.hl.$
F_z est le poids de l'eau au dessus *de OA:*
$F_z = \rho g V_{A'OA} = \rho g \frac{h}{2}.\frac{h}{\tan\theta} l = \rho g \frac{h^2 l}{2\tan\theta}.$
La force F est perpendiculaire à la face OA, et son module est $F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$
$F = \sqrt{F_x^2+F_z^2} = \sqrt{\rho^2 g^2 \frac{h^4}{4} l^2 + \rho^2 g^2 \frac{h^4 l^2}{4\tan^2\theta}} = \rho g \frac{h^2 l}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\theta}} = \rho g \frac{h^2 l}{2\sin\theta}.$

3) Poussée d'Archimède



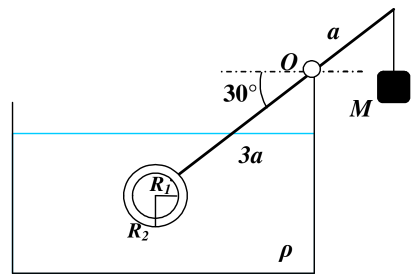
3.1 Le cylindre représenté ci-contre est de diamètre $50cm$, de hauteur $1m$, et est rempli d'eau jusqu'à un niveau h. Sachant que le cylindre vide pèse $50kg$, trouver h qui donnerait l'équilibre lorsque le cylindre est plongé dans les trois liquides non miscibles ci-contre.

Données: $\delta_e \approx 0,75.$ $\delta_b \approx 0,88.$

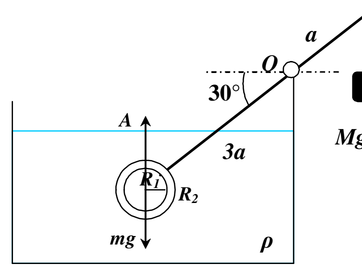


Solution : L'équilibre est réalisé lorsque $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.
Soit, $\overrightarrow{A}_1 + \overrightarrow{A}_2 + \overrightarrow{A}_3 + \overrightarrow{P}_{cyl} + \overrightarrow{P}_{eau} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow A_1 + A_2 + A_3 - P_{cyl} - P_{eau} = 0$
$\Rightarrow \delta_b \rho g \frac{\pi D^2}{4}.0{,}4 + \delta_e \rho g \frac{\pi D^2}{4}.0{,}4 + \rho g \frac{\pi D^2}{4}.0{,}2 - 50g - \rho g \frac{\pi D^2}{4}.h = 0$
$\Rightarrow h = 0{,}4(\delta_b + \delta_e + \frac{1}{2}) - \frac{200}{\rho \pi D^2} \approx$ **60cm**.

3.2 Une tige de longueur $4a$, porte en son extrémité droite une masse M et en son extrémité gauche un flotter sphérique de densité δ_f, de rayon interne R_1 et externe R_2. Le flotter est plongé dans de l'eau et la tige peut tourner autour de *O*.
Trouver la densité δ_f du flotter si la tige est en équilibre.
A.N: $M = 3kg$, $R_1 = 5cm$, $R_2 = 10cm$, $a = 1m$, $\rho = 10^3 kg/m^3$.
La masse de la tige est négligeable.

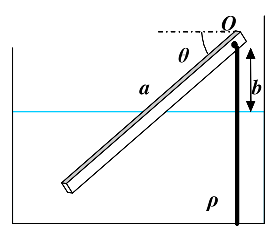


Solution :
L'équilibre est réalisé si la somme des moments par rapport à O est nulle:
En désignant par G le centre de gravité du flotter, nous avons
$mg.OG.\cos 30° - A.OG.\cos 30° - Mg.a.\cos 30° = 0 \Rightarrow (mg - A)OG = Mga$
$\Rightarrow (mg - A)(3a + R_2) = Mga \Rightarrow (\delta_f \rho V_f g - \rho V_f g)(3a + R_2) = Mga \Rightarrow$
$(\delta_f - 1)\rho V_f (3a + R_2) = Ma \Rightarrow \delta_f = \frac{Ma}{\rho V_f (3a + R_2)} + 1.$
Le volume du flotter sphérique est $V_f = \frac{4\pi R_2^3}{3} - \frac{4\pi R_1^3}{3} = \frac{4\pi (R_2^3 - R_1^3)}{3}$.
Donc, $\delta_f = \frac{3Ma}{\rho 4\pi (R_2^3 - R_1^3)(3a + R_2)} + 1 \approx$ **1,26.**



Attention: Dans cet exercice le flotteur est assimilé à une coquille sphérique remplie d'eau. Dans le cas où le flotter est une coquille hermétique, l'eau ne peut plus pénétrer à l'intérieur, et la poussée d'Archimède est $\rho V_{externe} g = \rho \frac{4\pi R_2^3}{3} g$.

3.3 Une poutre homogène de masse m, de longueur a, et de section carrée S, est partiellement immergée dans de l'eau. Son extrémité droite peut tourner autour du point O.
Trouver l'angle d'équilibre θ de la poutre.
A.N: $m = 250kg$. $a = 2m$. $b = 0{,}5m$. $S = 0{,}25m^2$. $\rho = 10^3 kg/m^3$.



Solution :
L'équilibre est réalisé lorsque la somme des moments par rapport à O est nulle:
En désignant par G le centre de gravité de la poutre et G_a le centre de gravité de sa partie immergée dans l'eau, nous avons
$P.OG.\cos\theta - A.OG_a.\cos\theta = 0 \Rightarrow mg.\frac{a}{2} - \rho g x S.(a - \frac{x}{2}) = 0.$
$\Rightarrow \rho S x^2 - 2\rho a S x + ma = 0 \Rightarrow 250\ x^2 - 1000x + 500 = 0$
$\Rightarrow x \approx 3{,}41$m ou $x \approx 0{,}586$m. La première solution est à rejeter car la longueur de la poutre est seulement 2m. (Donc on prend $x \approx 58{,}6$cm)
Nous pouvons maintenant relier θ avec x: $x = a - \frac{b}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{b}{a - x} \approx 0{,}35$.
Soit $\theta \approx 20{,}5°$.