

# TABLE DES MATIÈRES

## TOME 2

<b>1</b>	<b>DENSIFICATION DE CANEVAS</b> .....	1
<b>1</b>	<b>ÉTABLISSEMENT DES CANEVAS PLANIMÉTRIQUES</b> .....	1
1.1	Définition .....	1
1.2	Principe de densification .....	1
1.3	Canevas d'ensemble .....	2
1.4	Canevas polygonal .....	23
1.5	Charpente planimétrique .....	26
1.6	Contenu d'un dossier de canevas .....	27
<b>2</b>	<b>ÉTABLISSEMENT DES CANEVAS ALTIMÉTRIQUES</b> .....	27
2.1	Principe de densification .....	28
2.2	Densité des points préconisée .....	28
2.3	Méthodes opératoires pour l'établissement du canevas .....	29
2.4	Méthodes de calcul .....	31
<b>3</b>	<b>LES MÉTHODES GRAPHIQUES</b> .....	31
<b>4</b>	<b>LA MULTILATÉRATION</b> .....	33
4.1	Coordonnées approchées par bilatération .....	33
4.2	Conventions et définitions .....	34
4.3	Exemple de calcul .....	39
<b>5</b>	<b>L'INTERSECTION</b> .....	47
5.1	Détermination d'un point approché à partir de deux visées .....	47
5.2	Conventions et définitions .....	47

<b>6</b>	<b>LE RELÈVEMENT</b> .....	57
6.1	Coordonnées approchées a partir de trois visées .....	57
6.2	Conventions et définitions .....	57
6.3	Exemple de calcul .....	63
<b>7</b>	<b>CAS PARTICULIERS DE RELÈVEMENT</b> .....	68
7.1	Relèvement double avec trois points d'appui par station .....	68
7.2	Relèvement double avec deux points d'appui visés par station .....	71
7.3	Relèvement double sur deux points d'appui .....	75
7.4	Relèvement triple .....	81
7.5	Relèvement quadruple en forme de cheminement .....	83
7.6	Relèvement quadruple en étoile .....	84
7.7	Relèvements multiples formant une boucle .....	85
7.8	Relèvement en trois dimensions sur deux points .....	85
<b>8</b>	<b>RECOUPEMENT</b> .....	88
8.1	Principe .....	88
8.2	Application .....	90
<b>9</b>	<b>INSERTION</b> .....	93
9.1	Principe .....	93
9.2	Application .....	94
9.3	Insertion excentrée .....	98
9.4	Application au calcul d'une station libre .....	98
9.5	Résolution informatique .....	100
<b>10</b>	<b>OPÉRATIONS ANNEXES DU CANEVAS D'ENSEMBLE</b> .....	106
10.1	Station excentrée .....	106
10.2	Rabattement au sol d'un point connu .....	113
10.3	Adaptation d'un canevas local à un canevas existant .....	117
<b>11</b>	<b>REMARQUES CONCERNANT LES TOLÉRANCES LÉGALES</b> .....	124
<b>2</b>	<b>CHEMINEMENTS</b> .....	125
<b>1</b>	<b>CHEMINEMENTS PLANIMÉTRIQUES</b> .....	125
1.1	Terminologie .....	126
1.2	Méthodologie des mesures .....	127
1.3	Les angles horizontaux : calculs et compensations .....	128
1.4	Coordonnées rectangulaires des sommets .....	134
1.5	Exemples de calcul .....	143

1.6	Calcul en retour .....	150
1.7	Chemins particuliers .....	151
1.8	Fautes en cheminement .....	157
<b>2</b>	<b>POINT NODAL EN PLANIMÉTRIE</b> .....	158
2.1	Définition .....	158
2.2	Méthode de calcul .....	159
2.3	Exemple de calcul de point nodal .....	162
<b>3</b>	<b>DIVISION DE SURFACES</b> .....	173
<b>1</b>	<b>SURFACES DE POLYGOUES QUELCONQUES</b> .....	173
1.1	Mesures sur le terrain .....	173
1.2	Mesures sur plan .....	174
1.3	Détermination graphique .....	176
<b>2</b>	<b>DIVISION DE SURFACES</b> .....	176
2.1	Limites divisoires passant par un sommet du polygone .....	177
2.2	Limites divisoires passant par un point quelconque .....	179
2.3	Limites partageant un triangle en trois surfaces .....	179
2.4	Division d'un quadrilatère en quatre surfaces égales .....	183
2.5	Limites divisoires parallèles à un côté .....	184
2.6	Limites divisoires parallèles à une direction donnée .....	188
2.7	Limites divisoires perpendiculaires à un côté .....	189
2.8	Limites divisoires dans un îlot .....	189
2.9	Limites avec cotes partielles proportionnelles aux côtés .....	190
<b>3</b>	<b>REDRESSEMENT DE LIMITES</b> .....	194
3.1	Résolution de triangles .....	195
3.2	Formule de Sarron .....	196
3.3	Résolution graphique .....	198
<b>4</b>	<b>DROITES ET CERCLES</b> .....	201
<b>1</b>	<b>INTERSECTION DE DEUX DROITES</b> .....	201
1.1	Intersection par résolution de triangle .....	201
1.2	Formules de Delambre .....	202
1.3	Droites parallèles .....	203
1.4	Résolution graphique .....	205
<b>2</b>	<b>INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE</b> .....	206
2.1	À partir des équations .....	206

	2.2	Méthode usuelle en topographie .....	206
<b>3</b>		<b>DROITES DÉFINIES PAR DES POINTS DE TANGENCE .....</b>	<b>208</b>
	3.1	Droite tangente à un cercle .....	208
	3.2	Droites tangentes à deux cercles .....	210
<b>4</b>		<b>INTERSECTION DE DEUX CERCLES .....</b>	<b>213</b>
<b>5</b>		<b>DÉTERMINATION D'UN CERCLE .....</b>	<b>214</b>
	5.1	Cercle défini par trois points .....	214
	5.2	Cercle défini par deux points et la tangente en un des points .....	215
	5.3	Cercle passant par deux points et tangent à une droite .....	216
	5.4	Cercle donné par un rayon, un point et une tangente .....	218
	5.5	Cercle défini par son rayon et deux tangentes .....	220
	5.6	Cercle défini par un point et deux tangentes .....	222
	5.7	Cercle défini par trois tangentes .....	223
	5.8	Cercle défini par son rayon et deux points .....	224
	5.9	Cercle défini par deux points et une flèche .....	225
<b>6</b>		<b>POINT DÉTERMINÉ PAR RELÈVEMENT .....</b>	<b>227</b>
	6.1	Définition .....	227
	6.2	Détermination d'un point relevé M .....	227
	6.3	Exemple .....	230
	6.4	Construction graphique d'un point relevé .....	230
<b>7</b>		<b>PROGRAMMATION EN BASIC STANDARD .....</b>	<b>232</b>
<b>5</b>		<b>OUTILS MATHÉMATIQUES .....</b>	<b>233</b>
<b>1</b>		<b>PRÉLIMINAIRES .....</b>	<b>233</b>
	1.1	Les croquis .....	233
	1.2	Le schéma général de calcul .....	233
	1.3	La présentation des calculs .....	233
	1.4	La présentation des résultats .....	234
	1.5	La précision des résultats .....	234
	1.6	Les arrondis .....	235
	1.7	Les contrôles .....	235
	1.8	Les constructions géométriques .....	236
	1.9	Les conventions littérales .....	237
	1.10	L'informatique .....	237
<b>2</b>		<b>TRIGONOMÉTRIE .....</b>	<b>238</b>
	2.1	Cercle trigonométrique .....	238



2.2	Relations trigonométriques de base .....	239
2.3	Identités remarquables .....	240
2.4	Relations diverses .....	241
<b>3</b>	<b>PROPRIÉTÉS DU CERCLE</b> .....	242
3.1	Équation .....	242
3.2	Arc, flèche, corde .....	242
3.3	Théorie des arcs capables .....	243
3.4	Puissance d'un point par rapport a un cercle .....	245
3.5	Cercles homothétiques .....	245
<b>4</b>	<b>RELATIONS DANS LES TRIANGLES</b> .....	246
4.1	Relations de base .....	246
4.2	Surface d'un triangle .....	249
4.3	Résolution de triangles .....	252
4.4	Trigonométrie sphérique .....	258
<b>5</b>	<b>EXTENSION DE CERTAINES FORMULES AUX POLYGONES</b> .....	259
5.1	Surface d'un quadrilatère .....	259
5.2	Somme des angles internes d'un polygone .....	260
<b>6</b>	<b>SURFACE D'UN POLYGONE QUELCONQUE</b> .....	261
6.1	Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes X,Y .....	261
6.2	Les sommets sont connus en coordonnées polaires .....	262
6.3	Formule de sarron .....	264
6.4	Formule de simpson .....	266
6.5	Formules complémentaires .....	267
6.6	Résolution informatique .....	267
<b>7</b>	<b>CALCULS DE VOLUMES</b> .....	270
7.1	Volumes quelconques .....	270
7.2	Formule des trois niveaux .....	271
7.3	Formule de la moyenne des bases .....	272
7.4	Calcul exact par décomposition en volumes élémentaires .....	272
7.5	Application .....	274
7.6	Formules complémentaires .....	276
<b>8</b>	<b>SYSTÈMES DE COORDONNÉES RECTANGULAIRES ET POLAIRES</b> .....	277
8.1	Transformation de coordonnées d'un système a l'autre .....	277
8.2	Changement de repère .....	279
8.3	Rappels sur les matrices .....	286
<b>9</b>	<b>ÉQUATIONS DE DROITES</b> .....	288
9.1	Droite donnée par deux points et interpolation linéaire .....	288

9.2	Droite de pente connue, passant par un point .....	290
9.3	Droite perpendiculaire à une autre droite .....	290
9.4	Droite parallèle à une autre droite .....	291
9.5	Construction graphique .....	291
<b>10</b>	<b>LES ANGLES : UNITÉS ET CONVERSIONS</b> .....	293
10.1	Définitions .....	293
10.2	Conversions .....	294
10.3	Ordres de grandeur .....	295
10.4	Caractéristiques d'une visée .....	295
<b>11</b>	<b>CALCULS PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES</b> .....	296
11.1	Utilité de ce mode de calcul .....	296
11.2	Exemple de Résolution par approximations successives .....	297
11.3	Application .....	300
<b>12</b>	<b>THÉORIE DES ERREURS</b> .....	302
12.1	Mesures topométriques : terminologie .....	302
12.2	Les erreurs en topométrie .....	303
12.3	Modèle mathématique .....	306
12.4	Applications .....	316
<b>ANNEXES</b>	.....	321
<b>1</b>	<b>OUTIL INFORMATIQUE</b> .....	321
<b>2</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	329
<b>3</b>	<b>NOTATIONS USUELLES DE L'OUVRAGE</b> .....	330

# 1

## DENSIFICATION DE CANEVAS

### 1 ÉTABLISSEMENT DES CANEVAS PLANIMÉTRIQUES

La densité du canevas géodésique (environ un point pour 10 km<sup>2</sup>) est insuffisante pour rattacher les travaux topographiques nécessaires à la réalisation d'autoroutes, de tunnels, du TGV, au cadastre, au remembrement etc. d'une part ; d'autre part il se peut que pour certains travaux, la précision du canevas géodésique soit insuffisante.

Le topomètre est alors amené à asseoir le réseau polygonal qu'il réalise sur des points d'appui judicieusement répartis qui forment le canevas d'ensemble, canevas réduit mais de précision homogène.

Selon la précision désirée, le réseau créé est donc rattaché au canevas géodésique ou indépendant.

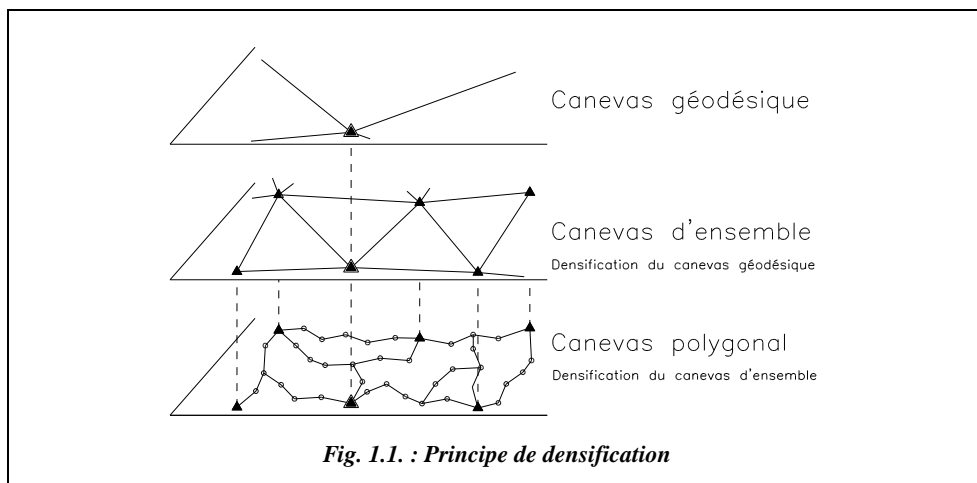
#### 1.1 Définition

Un canevas est un ensemble discret de points judicieusement répartis sur la surface à lever, dont les positions relatives sont déterminées avec une précision au moins égale à celle que l'opérateur attend du levé. Ces points servent d'appui au lever des détails, implantations, etc.

Le canevas s'exprime par les coordonnées de ces points dans un même système.

#### 1.2 Principe de densification

En topométrie, le principe fondamental consiste à « aller de l'ensemble aux détails ».



## 1.3 Canevas d'ensemble

Le canevas d'ensemble est un canevas planimétrique déterminé par des opérations de mesures sur le terrain, matérialisé de façon durable par des bornes ou des repères et suffisamment dense pour étayer le réseau sur lequel s'appuie le lever de détails.

Le canevas d'ensemble est en général appuyé sur le réseau géodésique ; on distingue :

- le **canevas d'ensemble ordinaire**, dont la tolérance sur l'erreur en distance entre deux points est égale à 20 cm. Il est parfaitement adapté aux travaux en zones rurales. Pour les travaux cadastraux, le canevas d'ensemble est un canevas ordinaire. Il est donc rare, dans la pratique, de considérer un canevas de précision si ce n'est pour des travaux autres que cadastraux car un maître d'ouvrage peut avoir mis dans le cahier des charges un canevas de précision ;
- le **canevas d'ensemble de précision**, dont la tolérance sur l'erreur en distance entre deux points est égale à 4 cm. Il est plutôt adapté aux travaux en zones urbaines et périurbaines.

Le canevas est indépendant si la précision du canevas géodésique d'appui est insuffisante, mais son orientation et son origine moyenne doivent être ramenées dans le système Lambert.

Ils doivent satisfaire à la gamme de tolérances fixées par l'arrêté du 21 janvier 1980 .

### 1.3.1 Canevas ordinaire

Le **canevas ordinaire** est caractérisé par sa possibilité de densification par **points isolés**. Un tel point est déterminé par les mesures suivantes :

- angulaires : intersection, relèvement, recoupement (procédés dits de triangulation) ;

- de distances : multilatération (procédé de trilatération) ;
- mixtes : insertion.

Il peut également être :

- un point nodal de cheminements à longs côtés (voir chap. 2, § 2.) ;
- déterminé par localisation satellitaire (GPS, voir tome 1, chap 7.).

### 1.3.1.1 La triangulation

La triangulation est une technique permettant de déterminer les éléments d'une figure en la décomposant en triangles adjacents dont l'opérateur mesure les angles au théodolite, dont il assure les fermetures angulaires et dont un côté au moins est connu ou déterminé. Elle peut avoir deux finalités, à savoir :

- servir à densifier un réseau de triangulation déjà existant, par exemple le réseau géodésique : c'est le cas de canevas d'ensemble. Les mesures angulaires suffisent, mais il est possible d'améliorer la mise à l'échelle du réseau de triangulation en mesurant quelques **bases** ;
- être locale : outre la mesure des angles, il faut alors effectuer impérativement la mesure de la longueur d'au moins une base du réseau de triangulation.

Par extension du premier type, on appelle triangulation complémentaire une densification du canevas par les procédés de l'intersection, du relèvement ou du recouplement, où l'opérateur mesure des angles sans assurer la fermeture des triangles.

#### ◆ intersection

Un point intersecté M est un point non stationné que l'opérateur vise depuis des points anciens connus en coordonnées A, B, C, D, encore appelés points d'appui, de manière à déterminer les gisements des visées d'intersection (fig. 1.2-a.). On ne pourra connaître précisément ces gisements que si on détermine les  $G_o$  des points d'appui.

La figure 1.2-a. représente la réalisation d'une intersection.

Toutes les lectures angulaires  $L_A$ ,  $L_B$ ,  $L_C$ , et  $L_D$  doivent être corrigées de la correction de réduction à la projection,  $d\alpha$  (voir tome 1, chap. 2).

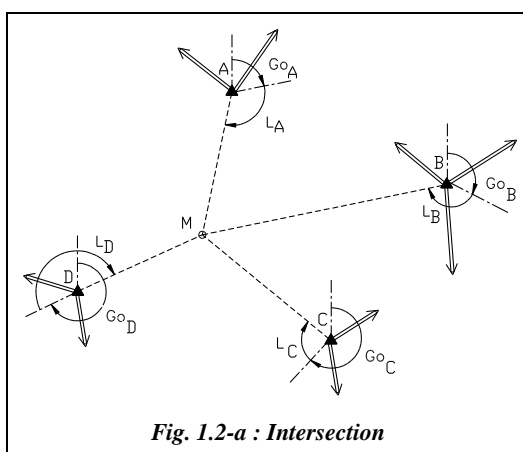
Les gisements observés sont :

$$G_{AM\text{ obs}} = G_{o_A} + L_A$$

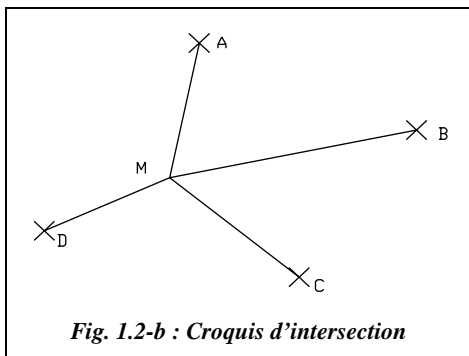
$$G_{BM\text{ obs}} = G_{o_B} + L_B$$

$$G_{CM\text{ obs}} = G_{o_C} + L_C$$

$$G_{DM\text{ obs}} = G_{o_D} + L_D$$



Les croquis sont représentés sur les « cartes d'observation » à très petite échelle (1/100 000 ou 1/200 000) par les désignations conventionnelles suivantes :



- visée d'intersection désignée par une croix ;
- points indiqués par leur numéro.

Le point M se situe sur chaque demi-droite matérialisant chaque visée : ces demi-droites sont les lieux géométrique de M ; il se situe donc à leur intersection.

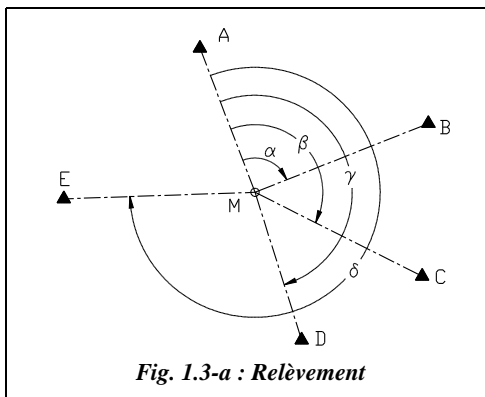
Dans ce procédé de l'intersection, on appelle lieux-droites du point M les demi-droites matérialisant les visées.

Deux lieux sont donc nécessaires et suffisants pour déterminer le point M ; en topographie, pour le contrôle, une visée supplémentaire est nécessaire et pour que le point M soit déterminé avec sécurité, il est conseillé d'effectuer une quatrième visée :

**M est donc déterminé par quatre lieux, quel que soit le procédé utilisé.** Dans notre cas, quatre lieux-droites seront nécessaires.

Les calculs d'une intersection sont détaillés au paragraphe 5.

#### ◆ Relèvement



Un point relevé est un point stationné depuis lequel l'opérateur effectue un tour d'horizon sur des points anciens connus (fig. 1.3-a.). L'opérateur lit les angles suivants :

$$AMB = \alpha = L_B - L_A$$

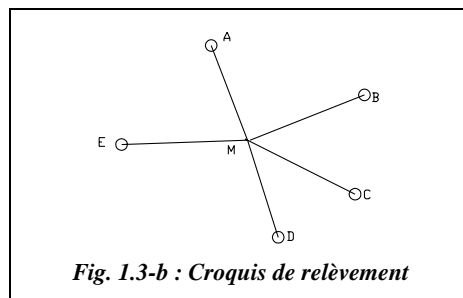
$$AMC = \beta = L_C - L_A$$

$$AMD = \gamma = L_D - L_A$$

$$AME = \delta = L_E - L_A$$

Sur les cartes d'observation, une visée de relèvement est représentée par un cercle (fig. 1.3-b.).

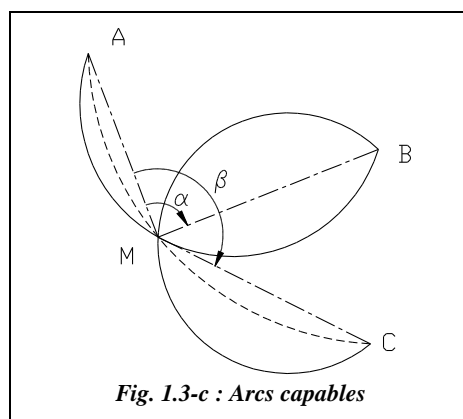
L'opérateur voit l'arc AB sous un angle  $\alpha$  ; le point M se situe donc sur un arc de cercle passant par A, M et B : il est appelé **arc capable AMB** ; c'est un lieu géométrique du point M. Deux arcs capables sont donc nécessaires et suffisants pour déterminer par leur intersection le point M. Mais on sait qu'en topographie quatre lieux sont nécessaires pour le contrôle et la sécurité. Il faut donc quatre arcs capables.



**Fig. 1.3-b : Croquis de relèvement**

Deux points donnent un arc capable d'angle associé  $\alpha$ .

Trois points donnent trois arcs capables d'angles associés  $\beta$  et  $(\beta - \alpha)$ . Mais l'arc AMC, par exemple, passe forcément par l'intersection de AMB et BMC : on dit qu'il est dépendant. Donc trois points donnent seulement deux arcs capables indépendants. On dit que M est un point triple.



**Fig. 1.3-c : Arcs capables**

Il faut donc cinq points pour obtenir quatre arcs capables indépendants c'est-à-dire les quatre lieux indépendants nécessaires.

Le tableau suivant donne le nombre de lieux indépendants possibles et le nombre de points triples en fonction du nombre de points d'appui.

Nombre de points	Nombre d'arcs	Lieux indépendants	Lieux dépendants	Nbre de points triples
2 : A et B	1 : AB	1 : AB		
3 : A, B et C	3 : AB, AC et BC	2 : AB et AC par exemple	1 : BC	1
4 : A, B, C et D	6 : AB, AC, AD, BC, BD et CD	3 : AB, AC et AD par exemple	3 : BC, BD et CD	4
5 : A, B, C, D et E	10 : AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE et DE	4 : AB, AC, AD, AE par exemple	6 : BC, BD, BE, CD, CE, DE	10
6	15	5	10	20

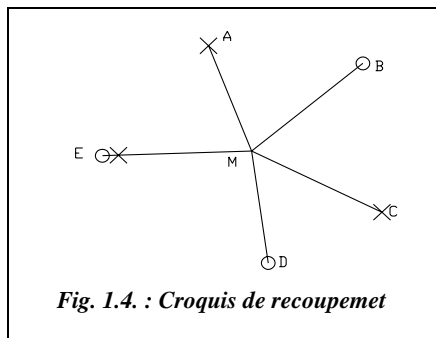
Le nombre d'arcs est une combinaison de  $n$  éléments pris deux à deux soit :

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Le nombre de points triples, intersections de trois arcs capables, est une combinaison de  $n$  points pris trois à trois, c'est à dire :  $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ .

La construction d'un arc capable est détaillée au chapitre 4, paragraphe 6.4. Le calcul d'un relèvement est détaillé au paragraphe 6.

◆ **Recoupement**



Le recoupement est le procédé qui utilise simultanément l'intersection et le relèvement pour la détermination d'un point.

Le point M de la figure 1.4. est déterminé par recoupement à partir de trois visées d'intersection et trois visées de relèvement.

- Pour obtenir les quatre lieux nécessaires, il faut au minimum soit :
- une visée d'intersection et quatre de relèvement soit  $1 + 3 = 4$  lieux indépendants ;
- deux visées d'intersection et trois de relèvement soit  $2 + 2 = 4$  lieux indépendants ;
- trois visées d'intersection et deux de relèvement soit  $3 + 1 = 4$  lieux indépendants.

Le recoupement est pratique quand les points d'appui sont peu nombreux et stationnaires.

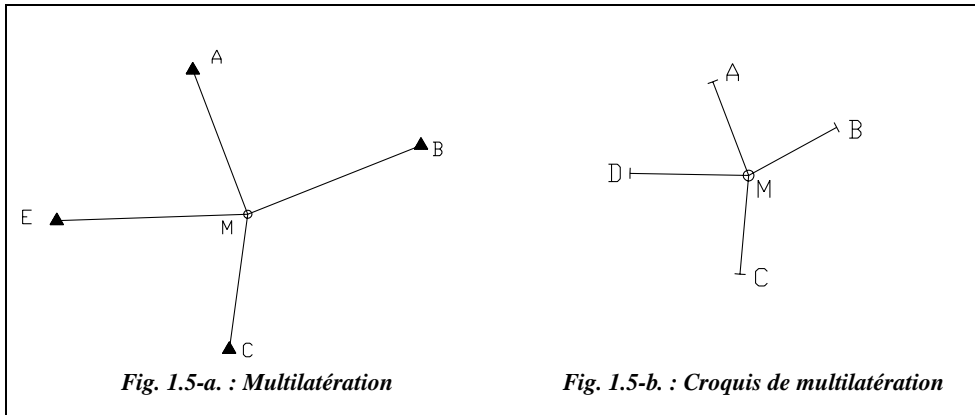
Le calcul d'un recoupement est détaillé au paragraphe 8.

**1.3.1.2 Trilatération**

Le procédé utilisé est la multilatération. On observe les distances sur au moins quatre points éloignés correctement répartis ; les distances doivent être homogènes et les points situés dans les quatre quadrants, si possible autour du point nouveau à déterminer (point M, fig. 1.5-a.).

Le point M de la figure 1.5-b. est déterminé à partir de quatre mesures de distance  $D_{AMobs}$ ,  $D_{BMobs}$ ,  $D_{CMobs}$ ,  $D_{DMobs}$  sur quatre points anciens connus.





Les distances doivent être réduites au plan de projection (voir tome 1, chap. 4., § 7.).

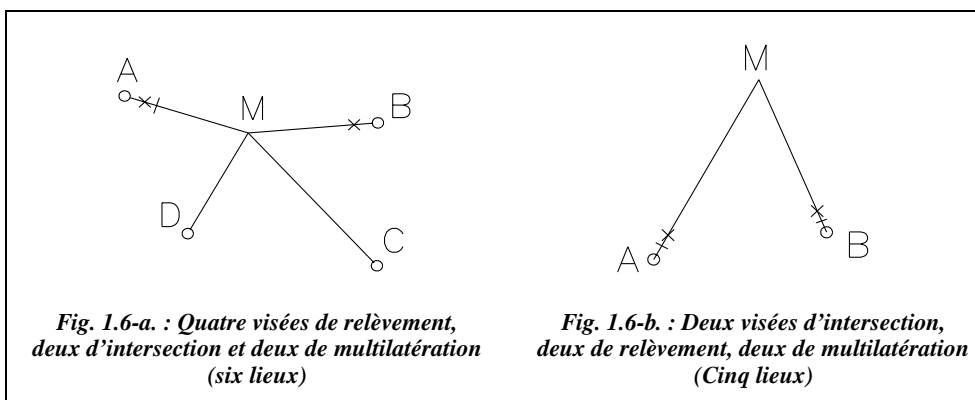
Les lieux sont ici des cercles centrés sur les points connus et dont les rayons sont les distances mesurées réduites. Deux cercles sont nécessaires et suffisants pour déterminer le point M, mais il faut quatre lieux, donc quatre cercles, c'est-à-dire quatre points anciens connus.

Les distances mesurées sont indiquées par un trait perpendiculaire à la visée.

Le calcul d'une multilatération est détaillé au paragraphe 4.

### 1.3.1.3 Insertion

L'insertion est un procédé qui utilise l'intersection, le relèvement et la multilatération pour la détermination d'un point.



On note :

- I une visée d'intersection ;
- R une visée de relèvement ;
- M une visée de multilatération.

Les combinaisons suivantes permettent d'obtenir les quatres lieux nécessaires :

- $1 \times I + 3 \times R + 1 \times M = 1 + 2 + 1 = 4$  lieux
- $1 \times I + 2 \times R + 2 \times M = 1 + 1 + 2 = 4$  lieux
- $2 \times I + 2 \times R + 1 \times M = 2 + 1 + 1 = 4$  lieux

Ces combinaisons ne sont données qu'à titre d'exemples, car il paraît évident que si une mesure de distance est possible sur un nouveau point, une visée d'intersection l'est aussi ; donc il y a autant de visées d'intersection que de multilatérations.

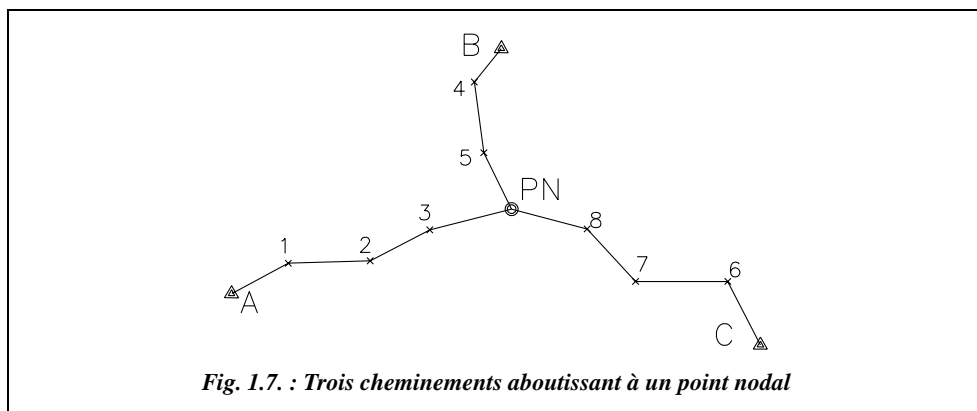
L'insertion présente l'intérêt d'être opérationnelle avec un petit nombre de points d'appui stationnables.

Le calcul d'une insertion est détaillé au paragraphe 9.

#### 1.3.1.4 **Point nodal, intersection d'au moins trois cheminements à longs côtés**

Cette méthode permet de remplacer les méthodes précédentes quand la nature du terrain interdit la réalisation d'un réseau de triangles.

Seuls les points nodaux, définis comme les points de rencontre d'au moins trois cheminements à longs côtés, remplacent les points du canevas que l'on aurait déterminés par triangulation ou trilatération.



Les points A, B et C de (fig. 1.7.) sont connus et stationnables.

PN est le point nodal.

1, 2, 3, etc. sont des points intermédiaires.

Les côtés des cheminements ont une longueur de 500 m sans être inférieurs à 200 m.

Le calcul d'un point nodal est détaillé dans le chapitre 2 au paragraphe 2.

### 1.3.1.5 Canevas établi par localisation satellitaire (réseau GPS)

La densification du canevas géodésique s'effectue de plus en plus par GPS (voir tome 1, chap. 7., § 1.), surtout depuis que le nouveau Réseau Géodésique Français (RGF, voir tome 1, chap. 2., § 5.) commence à être diffusé par l'IGN.

## 1.3.2 Opérations annexes de « rattachement »

Les procédés classiques de détermination de points de canevas sont subordonnés à l'intervisibilité, contrairement au GPS, et il est rare que l'opérateur puisse tout observer d'un ou sur un point à cause de la présence de masques : arbres, immeubles, relief, etc. d'où la nécessité de s'excentrer par rapport au point de station.

D'une manière générale, en dehors des procédés étudiés précédemment, la détermination d'un point nouveau du canevas d'ensemble par rapport à un ou plusieurs autres s'appelle rattachement.

### 1.3.2.1 Rattachement simple

Le rattachement simple est une opération annexe du canevas d'ensemble qui consiste à déterminer, au voisinage d'un repère A connu en coordonnées rectangulaires, les coordonnées d'un point M qui présente de plus grandes facilités d'utilisation ou de meilleures chances de conservation. Cette opération s'effectue généralement par rayonnement planimétrique.

Par exemple, B et C (fig. 1.8.) sont des points éloignés connus. L'opérateur stationne le point A connu où l'on détermine un  $G_0$  de station.

Si  $L_M$  est la lecture sur le point M, on peut écrire :  $G_{AM} = G_0 + L_M$ .

La lecture de  $L_M$  au mgon suffit puisque la distance  $L_M$  ne dépasse pas 100 m ; or 1 mgon correspond à un déplacement de 1,57 mm à l'extrémité d'une visée de 100 m.

Puis on mesure la distance AM :  $Dh_{AM}$ .

On en déduit :  $E_M = E_A + Dh_{AM} \cdot \sin G_{AM}$

$$N_M = N_A + Dh_{AM} \cdot \cos G_{AM}$$

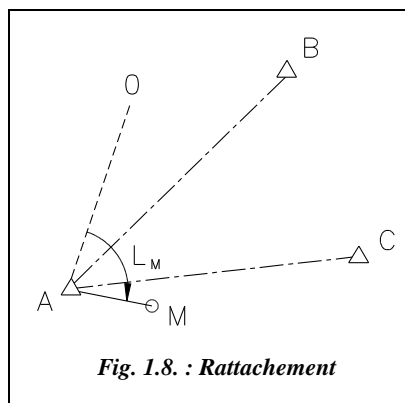


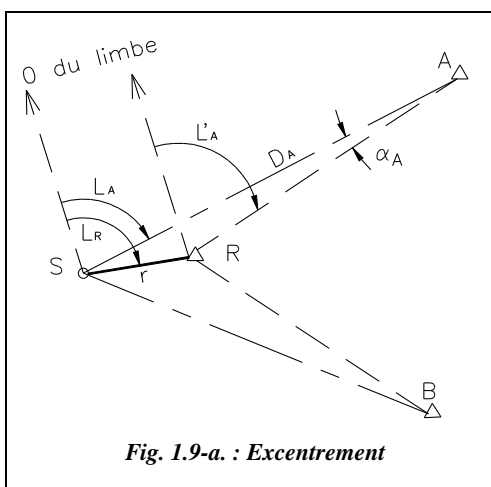
Fig. 1.8. : Rattachement

En général, pour plus de sûreté, on double la mesure des observations (angle et distance). Par exemple, dans le cas d'un tour d'horizon au point A, on effectue la lecture sur le point M à la fin de deux séquences.

On peut rencontrer ce cas lors du relèvement d'un point nouveau P ; le point connu A n'est pas visible mais un point M à proximité muni d'une balise est visible de P.

### 1.3.2.2 Station excentrée

En travaux de canevas, il arrive souvent que les observations angulaires ne puissent être effectuées directement du point connu ou à déterminer appelé repère ou signal R.

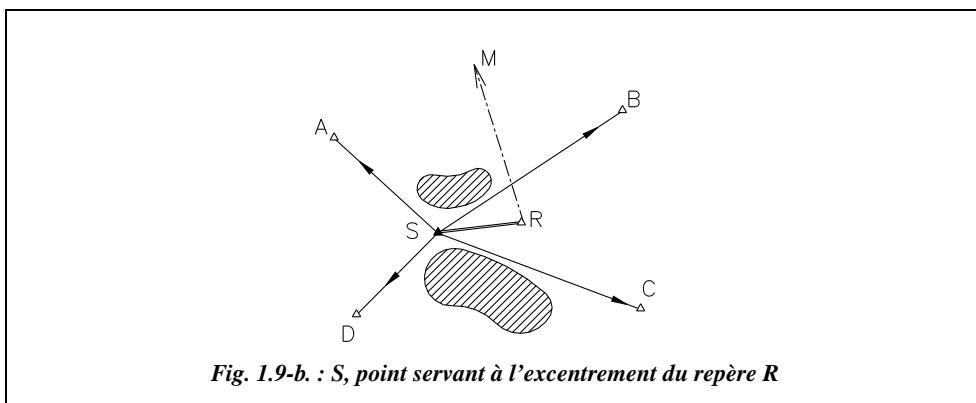


L'opérateur effectue donc les observations à partir d'une station S située à proximité du repère R, généralement à une courte distance de celui-ci.

Le calcul du paragraphe 10.1. permet de déterminer les corrections à apporter aux éléments observés à la station excentrée S pour ramener les observations à ce qu'elles auraient été si l'on avait stationné le repère R.

#### Remarque

- On peut rencontrer ce cas lors de visées d'intersection sur un point M inconnu (fig. 1.9-b.) si tous les points connus autour du repère R et nécessaires au calcul du  $Go_R$  ne sont visibles que du signal S situé à quelques mètres de R.



- D'un point R à relever, seules deux ou trois visées sur points connus sont possibles ; en revanche, d'autres visées sont réalisables d'un point voisin S : B, C, D. Il est souhaitable (voir calculs au paragraphe 10.1.) qu'un point commun E soit visible (fig. 1.9-c.). On utilise une station excentrée S visible depuis le repère R.

Depuis le point S on voit les points manquants (A, B, C, D dans le premier cas, B, C, D dans le second). La connaissance de la distance d'excentrement RS et des distances entre le point R et les points connus J permettra de résoudre les triangles JSR et d'en déduire les visées que l'on aurait dû faire de R sur les points J : c'est la **réduction au repère R**.

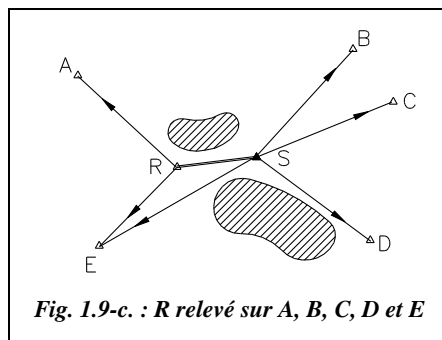


Fig. 1.9-c. : R relevé sur A, B, C, D et E

#### ◆ Application : recouplement excentré

La station de relèvement  $M_R$  (en général une borne) est placée dans le voisinage immédiat du signal intersecté  $M_I$ , une balise en général, lequel par exemple n'est pas stationnable. On revient au calcul précédent (station excentrée) c'est-à-dire qu'on l'on réduit les observations de la station  $M_R$  au signal  $M_I$  intersecté après avoir déterminé les éléments de l'excentrement : le rayon  $r$  et la lecture azimutale  $L_R$ . Pour que le calcul soit réalisable il faut que  $M_I$  soit connu pour calculer les distances  $M_{IJ}$  : on détermine les coordonnées du point approché  $M_{0I}$  à partir de deux visées d'intersection. On démontre dans le calcul de la station excentrée au paragraphe 10.1.3. qu'il est suffisant de connaître les distances au mètre près ; la connaissance des coordonnées approchées suffit donc.

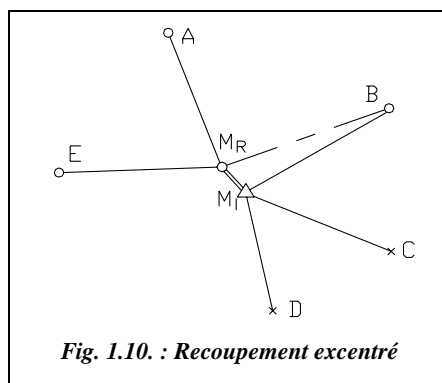


Fig. 1.10. : Recouplement excentré

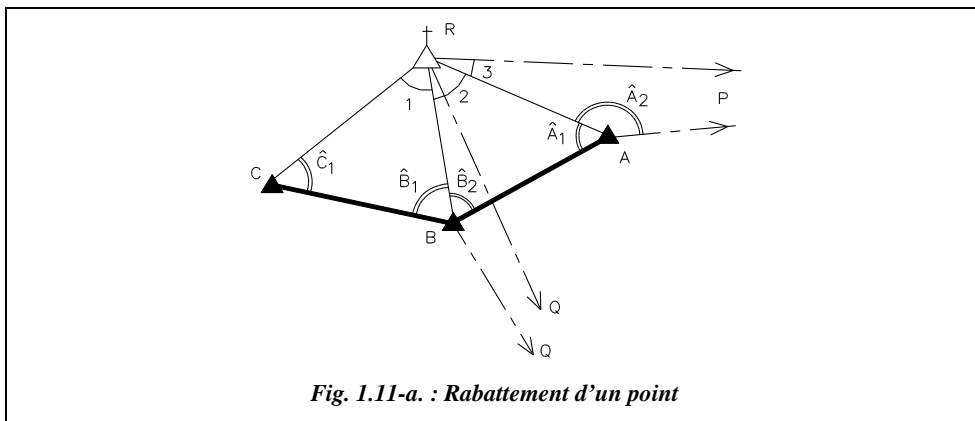
#### 1.3.2.3 Rabattement d'un point au sol

Ce cas se présente lors d'un rabattement d'un point élevé : pylône, antenne, clocher, château d'eau, etc. souvent non stationnable. Le point rabattu peut servir ensuite de point de départ à l'élaboration d'un canevas.

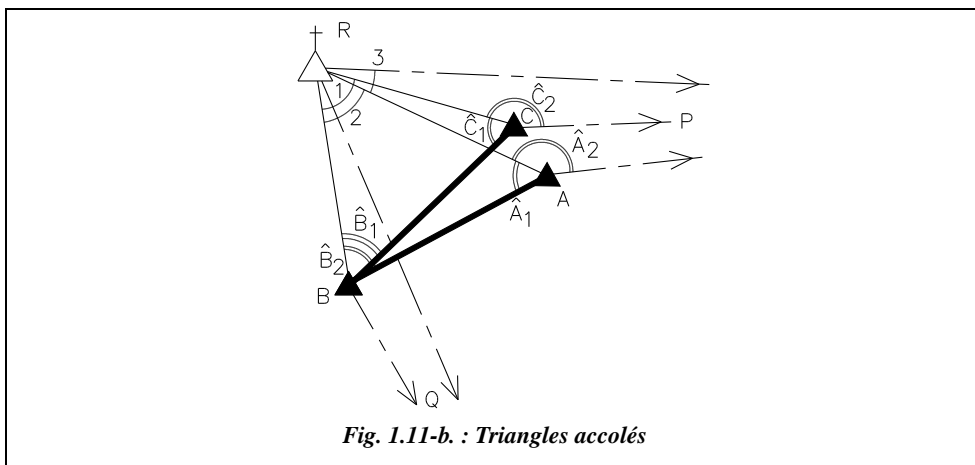
1 - S'il est stationnable, cas d'une terrasse par exemple, l'opérateur procède comme pour un rattachement, la distance inclinée étant mesurable.

2 - S'il est inaccessible (fig. 1.11-a.), l'opérateur construit deux bases (AB et BC) au sol sensiblement égales formant avec le point inaccessible visible R deux triangles à peu près

équilatéraux. De l'un des trois points au sol, il faut nécessairement viser un point connu éloigné P. De ce même point ou de l'un des deux autres, il est intéressant de pouvoir viser un deuxième point connu éloigné Q, de manière à apporter une vérification au calcul et à déterminer le gisement moyen de l'un des côtés RA, RB ou RC (voir paragraphe 10.2. pour le calcul).



Si l'emplacement est réduit, on peut construire les deux triangles accolés du même côté de RA (fig. 1.11-b.).



### 1.3.3 Canevas de précision

Ce canevas étant plus précis que le canevas ordinaire, il est soumis à des tolérances plus strictes. Les méthodes relatives au canevas ordinaire décrites aux paragraphes précédents (1.3.1. et 1.3.2.) sont applicables en canevas de précision.

Si le réseau géodésique local est d'une précision insuffisante, le topomètre crée son propre réseau indépendant, constitué de figures simples composées de triangles juxtaposés les plus équilatéraux possibles et tels qu'aucun angle ne soit inférieur à 40 gon.

Nous supposons les triangles suffisamment petits pour que l'on puisse négliger leur excès sphérique et la zone triangulée suffisamment restreinte pour qu'il ne soit pas nécessaire d'utiliser un système de projection. En effet, le problème de la triangulation d'une vaste zone fait partie de la géodésie.

Le réseau se compose généralement de figures simples ou de réseaux de figures simples ; les coordonnées des sommets de ces figures sont déterminées après avoir mesuré avec une grande précision, la totalité des angles ainsi que la longueur et l'orientation d'un ou de deux côtés appelés bases.

La « fermeture de la somme des angles des triangles » et « l'accord des bases » sont soumis à des tolérances indiquées sur l'arrêté interministériel de 1980.

Examinons quatre cas classiques de triangulation, à savoir :

- une chaîne de triangles accolés ;
- un polygone à point central ;
- un quadrilatère ;
- la mesure et l'orientation d'une base.

### 1.3.3.1 Chaîne de triangles

Deux bases sont nécessaires (fig. 1.12.) s'il y a plus de cinq triangles, ce qui permet « l'accord des bases », soumis à tolérance. Les angles de tous les triangles sont observés et la fermeture de chaque triangle est soumise à tolérance.

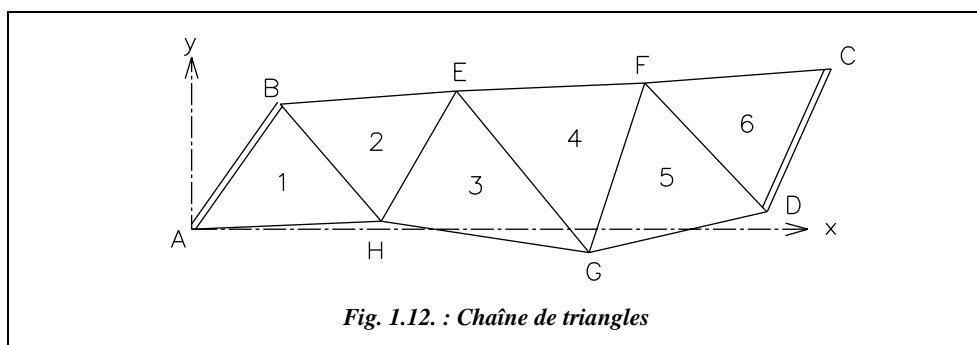


Fig. 1.12. : Chaîne de triangles

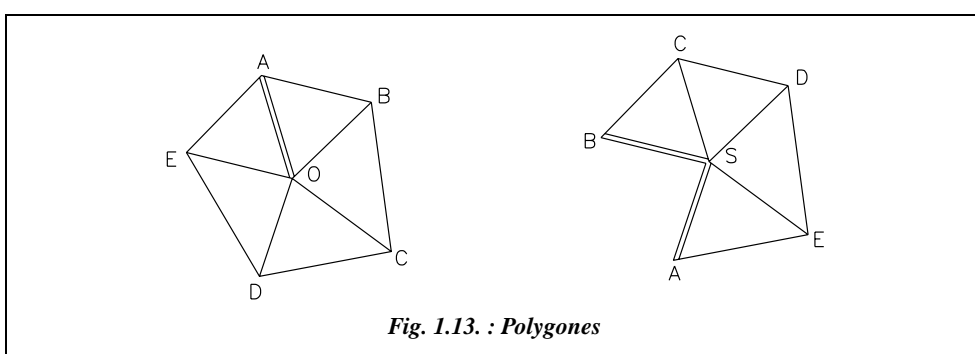
Ces chaînes sont parfaitement adaptées pour des travaux en longueur (réseaux de communication).

### 1.3.3.2 Polygone à point central

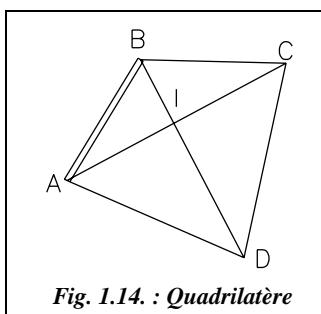
Si le polygone est complet, n'importe quel côté peut servir de base, (par exemple le côté OA, fig. 1.13.). Les angles des triangles sont observés et la fermeture soumise à tolérance.

Si le point central n'est pas stationnable, un clocher par exemple, les angles en ce point sont dit conclus c'est-à-dire calculés par différence à 200 gon de la somme des deux angles mesurés dans chaque triangle.

Si le polygone est incomplet (fig. 1.13. à droite), il faut mesurer deux bases et l'angle qu'elles forment au point central. Ces figures sont mieux adaptées à un lever « en surface ».



### 1.3.3.3 Quadrilatère à deux diagonales



Il est assimilé à un polygone à point central complet dont les angles en I sont conclus.

La base AB est mesurée ; en chaque sommet A, B, C, D, les deux angles que forment respectivement la diagonale avec les deux côtés du quadrilatère sont observés. Huit angles sont donc mesurés.

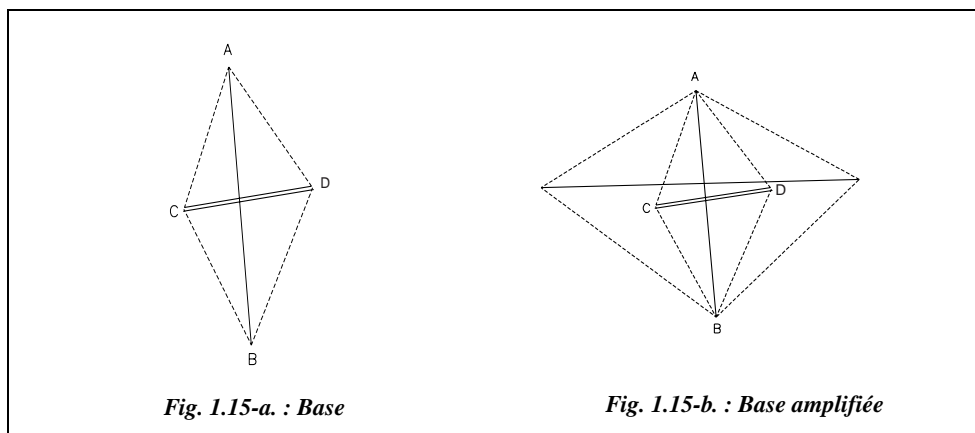
### 1.3.3.4 Mesure et orientation d'une base

Le côté AB choisi pour base est mesuré directement à l'aide d'un distancemètre au minimum par deux mesures indépendantes, à intervalle de temps de six heures ; l'écart entre les deux valeurs doit être inférieur à la tolérance, égale à :

$$T_{\text{cm}} = 3 + L_{\text{km}}.$$

Si la portée du distancemètre est insuffisante, il faut mesurer une base CD plus courte formant, avec le côté cherché AB, les diagonales d'un quadrilatère dont les angles sont déterminés avec précision (fig. 1.15-a.).





Si nécessaire une seconde amplification peut être effectuée (fig. 1.15-b.). De simples résolutions de triangles fournissent alors le côté cherché.

L'orientation d'une base (nécessaire dans le cas d'une triangulation locale) est réalisée en stationnant l'extrémité de la base avec un théodolite : on détermine son azimut par une visée astronomique sur le soleil ou de préférence sur la polaire.

### 1.3.4 Méthodes de calcul

Les résultats devant être obligatoirement compatibles avec les tolérances, des méthodes de calcul s'imposent en fonction de la précision du canevas.

#### Remarque

Les calculs de détermination des coordonnées de points observés par GPS sont détaillés au chapitre 7 du tome 1.

#### 1.3.4.1 En canevas d'ensemble de précision

Tous les points sont calculés en « bloc » et compensés par la méthode des moindres carrés à l'aide de logiciels : le calcul matriciel fait intervenir l'ensemble des mesures.

Lorsque le réseau géodésique n'est pas assez précis, on fait cohabiter deux systèmes de coordonnées, à savoir :

- **un système indépendant** qui, ramené en système Lambert moyen, garde sa précision ;
- **un système adapté** : on « adapte » le canevas existant au canevas géodésique national. La méthode la plus employée est la transformation de Helmert (voir § 10.3.), le nombre de points géodésiques devant être supérieur à deux.

### 1.3.4.2 *En canevas d'ensemble ordinaire*

Le canevas ordinaire est caractérisé par sa possibilité de densification par points isolés ou point par point ; le calcul point par point est un calcul enchaîné c'est-à-dire que les coordonnées d'un point ne pourront être calculées que si les observations sont effectuées sur ou depuis des points connus : ainsi le premier ne peut s'appuyer que sur des points anciens (points géodésiques par exemple) ; ce premier point devient donc un point ancien pour les suivants et ainsi de suite.

Rien n'empêche de calculer plusieurs points isolés en bloc ; mais si l'on considère le point pris séparément, ses coordonnées sont déterminées par la méthode graphique ou méthode de Hatt (étudiée en détail dans la suite de ce chapitre).

#### **Remarque**

Les moyens informatiques actuels permettent le calcul en bloc et la compensation par la méthode des moindres carrés ; le calcul tient compte de toutes les observations simultanément donc l'opérateur ne se préoccupe pas d'un ordre quelconque de calcul. Il en découle que le mode de calcul envisagé influe au préalable sur la mappe des observations (voir § 1.3.5.1.).

### 1.3.4.3 *Cheminement à longs côtés*

Les méthodes de calcul sont exposées au paragraphe 1 du chapitre 2.

## 1.3.5 **Méthodes opératoires pour l'établissement du canevas**

Les méthodes opératoires pour l'établissement d'un canevas observé par GPS sont détaillées au chapitre 7 du tome 1.

### 1.3.5.1 *Techniques préparatoires*

#### ◆ *Étude d'un projet à l'aide de cartes et de photographies aériennes*

Pour l'exécution de la mission qui lui est confiée, le géomètre dispose des éléments suivants :

- une copie de l'arrêté d'ouverture des travaux ;
- une carte au 1/50 000 ;
- une carte au 1/25 000 ;
- une liste des coordonnées des points géodésiques et des sommets des triangulations cadastrales susceptibles d'être utilisés comme points d'appui, accompagnée de leur fiche signalétique.

Sur cartes, après avoir défini le périmètre des opérations, le géomètre trace les lignes caractéristiques du terrain : lignes de crêtes en rouge, lignes de talwegs en bleu ; puis il

choisit sur la carte l'emplacement des points du CEO (canevas d'ensemble ordinaire) en respectant la densité imposée :

- le CEO étant plutôt adapté aux zones rurales, la densité est généralement d'environ un point par  $\text{km}^2$  ou un point pour 100 ha ;
- le CEP étant plutôt adapté aux zones urbaines ou périurbaines, il est préconisé deux à quatre points par  $\text{km}^2$  en zone urbaine et environ deux points par  $\text{km}^2$  en zone périurbaine.

Le choix est effectué aussi en fonction des différentes techniques possibles que sont les procédés de triangulation et de trilatération, l'insertion et les cheminements à longs côtés : dans une zone de plaine, on adopte plutôt les cheminements à longs côtés pour déterminer les points nodaux qui sont les points du canevas ; en revanche, dans une zone plus vallonnée, la triangulation et la trilatération sont des méthodes plus efficaces.

Puis le géomètre établit la mappe des observations :

- en traçant les cheminements dans le premier cas ;
- en schématisant les visées avec leur symbole dans le second cas.

Dans le second cas, il faut songer aux calculs futurs. En effet, s'il choisit d'effectuer un calcul point par point, il faut choisir un premier point appuyé uniquement sur des repères géodésiques ; le deuxième peut s'appuyer sur le premier et d'autres points géodésiques, etc. : on dit que le calcul est enchaîné. L'ordre est très important et les visées doivent être suffisantes et correctement réparties pour une détermination satisfaisante des points.

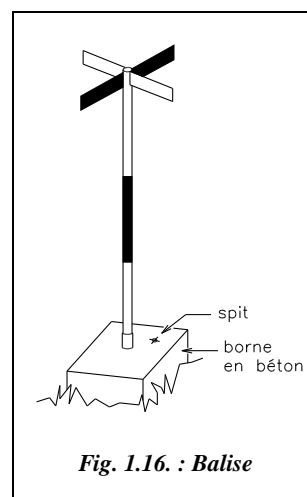
En revanche, si le géomètre prévoit un calcul en bloc, l'ordre n'a pas d'importance.

#### ◆ **Reconnaissance et établissement du projet**

La reconnaissance sur le terrain a pour objet de fixer l'emplacement des sommets et de choisir les visées qu'il y a lieu d'effectuer pour obtenir une détermination satisfaisante de ces sommets ; l'implantation des points se traduit par l'établissement du projet.

L'opérateur vérifie l'existence des points anciens et il s'assure qu'ils n'ont pas bougé.

Les points sont matérialisés de façon durable à l'aide de bornes gravées sur leur sommet, par exemple. Ils peuvent être également des massifs en béton dans lesquels est prévue une réservation permettant la mise en place d'une balise (fig. 1.16.) ; ces points peuvent ainsi être stationnés et relevés. La balise est un tube métallique ou en PVC d'une hauteur de 1,50 à 2,00 m environ (fig. 1.16.).



Ils peuvent être aussi des repères fixés sur des terrasses de bâtiment, des antennes, des clochers, des sommets de pylônes, etc.

Ils sont numérotés et repérés par trois ou quatre repères auxiliaires à l'aide de croquis cotés permettant le rétablissement des points détruits sans observations nouvelles.

#### ◆ **Numérotation des points du canevas**

Chaque géomètre a sa propre façon de numéroté les stations de canevas ; le cahier des charges peut néanmoins imposer la numérotation.

Pour un chantier donné, aucun numéro identique ne doit apparaître pour plusieurs sommets. Ils doivent tous être distincts selon la nature du canevas à laquelle ils appartiennent ; le tableau ci-après donne un exemple de numérotation :

	<b>Précision</b>	<b>Ordinaire</b>	<b>N° des cheminements</b>
<b>Triangulation et Trilatération (de 5 en 5)</b>	1 à 495	5000 à 5495	
<b>Excentremets, rabattements, etc.</b>	une unité de plus que le point connu, 256 par exemple	idem 5316 par exemple	
<b>Cheminements principaux *</b>	500 à 999	5500 à 5999	1 à 199
<b>Points nodaux principaux *</b>	NP 1000 à NP 1099	NP 6000 à NP 6099	
<b>Cheminements secondaires *</b>	1100 à 1599	6100 à 6599	200 à 399
<b>Points nodaux secondaires *</b>	NS 1600 à NS 1699	NS 6600 à NS 6699	

\* Voir les définitions au paragraphe 1.4.1.1.

#### ◆ **Fiches signalétiques des sommets**

L'opérateur établit pour tous les sommets une fiche signalétique, qui comprend :

- d'une part des renseignements concernant la nature du point, le propriétaire de l'îlot de propriété où est implantée la borne et les références cadastrales ;
- les coordonnées du point et la zone Lambert de rattachement ;
- d'autre part, trois croquis :
  - le croquis de situation, qui a pour objet de permettre à toute personne n'ayant pas participé aux travaux de retrouver rapidement l'emplacement approximatif de la borne à partir d'un détail caractéristique du terrain ou de la carte : donnez au moins trois cotes par rapport à des points durs facilement repérables ;
  - le croquis visuel est une vue perspective schématique du point ;
  - le croquis de repérage, qui permet de retrouver le repère souterrain d'une borne disparue et de la réimplanter à sa position exacte. Ce croquis n'est établi que s'il existe dans un rayon d'une cinquantaine de mètres des détails fixes et durables. Les

cotes figurant sur ce croquis doivent être relevées avec précision et pouvoir être appliquées sur le terrain malgré la disparition éventuelle de la borne.

La fiche signalétique suivante est issue de la triangulation complémentaire de Biot (06).

Département des Alpes-Maritimes Mairie de BIOT (Service de l'urbanisme)		<b>FICHE SIGNALÉTIQUE</b> Établie en juillet 1990
<p><b>Références cadastrales</b></p> <p>Commune : BIOT Lieu-dit : Pin Montard Section : AA Numéro : 2 Propriétaire : Commune de BIOT</p>	<p><b>Visées de référence</b></p> <p>Matricule Gisement (gon) Centre Hélio Marin (ou IGN 35a).....221,5500 1034.....232,0822</p>	<p><b>Caractéristiques du point</b></p> <p>N° : 1035 Nature : borne en béton E = 981 495,39 m N = 159 086,11 m H = 119,6 (sur béton) + 26 cm sur la tige Réseau de rattachement : – Planimétrie : Lambert III – Altimétrie : NGF</p>
<p><b>Croquis de repérage</b></p>	<p><b>Plan de situation (carte IGN)</b></p>	<p><b>Visuel (croquis ou photo)</b></p>

### 1.3.5.2 Mesures sur le terrain

Il convient de choisir le matériel et la méthodologie adéquats pour respecter les tolérances légales imposées. En canevas ordinaire, on préconise les recommandations du tableau suivant :

Triangulation	Trilatération	Cheminevements à longs cotés
<b>Types d'appareils</b>		
La tolérance angulaire $\varepsilon$ sur une direction a été déterminée à partir de travaux réel ; elle vaut 1,5 mgon pour une paire de séquences soit un écart type de $15 \times \sqrt{2}/(2,66) = 8$ <b>dmgon pour une visée.</b> Un théodolite au dmgon (type T2) est nécessaire.	Théodolites au dmgon et distancemètre. (Type T 2002 + DI 1000).  Tachéomètre électronique au dmgon (Type TC 2002).	Théodolites au dmgon et distancemètre.  Tachéomètre électronique au dmgon (Type TC 2002).
<b>Mesures sur le terrain</b>		
Angles horizontaux.	Angles zénithaux. Distances inclinées.	Angles horizontaux. Angles zénithaux. Distances inclinées.
<b>Modes opératoires</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 visées d'intersection ou 5 de relèvement ou 2 d'intersection + 3 de relèvement (recoupement) ;</li> <li>• visées bien réparties de 3 km de moyenne ;</li> <li>• 2 paires de séquences (0-100,50-150) ;</li> <li>• 1 pointé.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• au minimum 4 visées bien réparties ;</li> <li>• visée moyenne de 3 km si possible ;</li> <li>• mesurage indépendant de chaque distance<sup>(1)</sup>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• seuls les points nodaux sont des points du canevas d'ensemble ;</li> <li>• côtés supérieurs à 500 m en moyenne ;</li> <li>• aucun coté ne doit être inférieur à 200 m</li> <li>• centrage forcé<sup>(2)</sup> ;</li> <li>• 2 paires de séquences ;</li> <li>• 1 pointé.</li> </ul>
<b>Contrôle sur le terrain</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• fermeture de chaque séquence : <math>T_{mgon} = 2,8</math> mgon</li> <li>• écart des lectures : <math>T_{mgon} = 1,3</math> mgon</li> <li>• écart sur référence : <math>T_{mgon} = 0,8</math> mgon</li> </ul>	tolérance de mesurage sur chaque distance : $T_{cm} = (3 + L_{km})$	Comme la triangulation et la trilatération ; si le nombre de côtés est supérieur à 6, un contrôle de l'orientation sur points connus éloignés dont $T(x) = 20$ cm est nécessaire.

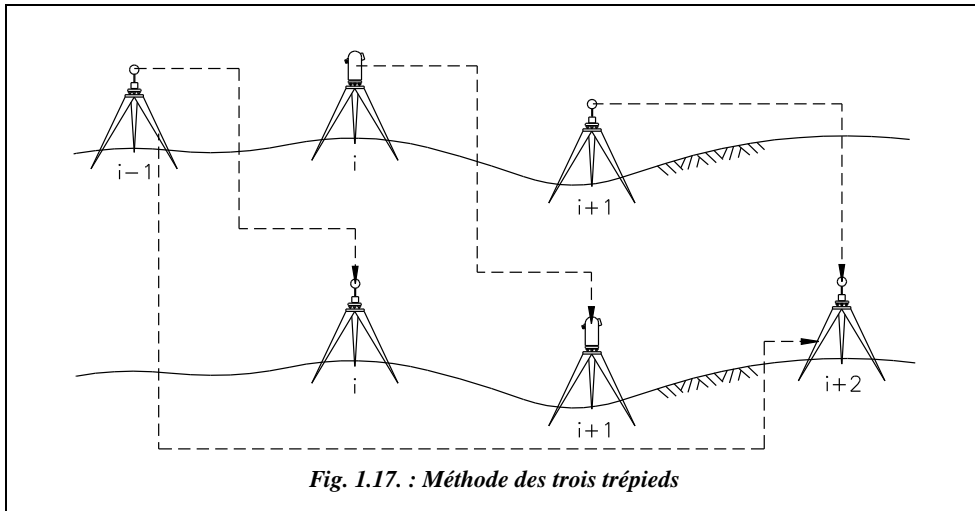
<sup>(1)</sup> Mesurages indépendants : remise en station de l'appareil entre deux mesures de la distance.

<sup>(2)</sup> Le centrage forcé est utilisé dans la méthode dite « des trois trépieds » (fig. 1.17.).

**La méthode des trois trépieds** citée dans le tableau précédent, est mise en œuvre comme suit :

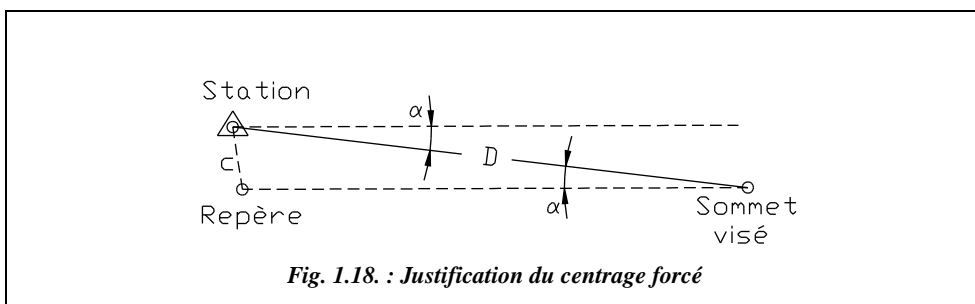
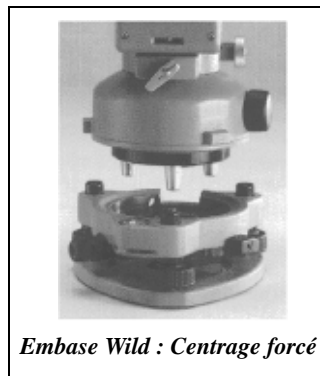
- le théodolite est en station i (fig. 1.17.), les voyants aux sommets i-1 et i+1 sont placés dans des **embases à centrage forcé** ; on mesure l'angle au sommet i ;
- le voyant i-1 vient dans l'embase du théodolite en i, le trépied et son embase en i-1 sont mis en station au sommet i+2 et le voyant i+1 y est placé ;
- le théodolite va dans l'embase i+1, on mesure l'angle au sommet i+1, etc.

Les erreurs de centrage sont ainsi réduites au minimum.



**L'utilisation du centrage forcé se justifie ainsi :**

L'arrêté ministériel du 20 Janvier 1980 impose une tolérance sur un angle du cheminement de 1,4 mgon, soit 1 mgon sur une direction aussi bien en canevas ordinaire que de précision ; l'écart type correspondant est  $1 \text{ mgon} / 2,66 \approx 0,4 \text{ mgon}$ . Pour une visée de l'ordre de 500 m, la précision de centrage  $c$  (fig. 1.18.) doit être de :  $c = 1,57 \times 0,500 \times 0,4 \approx 3 \text{ mm}$  (en utilisant la sensibilité, voir § 5.2.5.). Le centrage doit être réalisé avec une précision de  $3 / \sqrt{2} \text{ mm}$ , soit 2 mm environ en considérant que les écarts de centrage de l'appareil  $c_1$  et du réflecteur  $c_2$  sont égaux à  $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ . Cette précision est difficile à obtenir sans centrage forcé.



En canevas de précision, il est préconisé :

Triangulation	Trilatération	Cheminevements à longs cotés.
<b>Types d'appareils</b>		
La tolérance angulaire $\varepsilon$ sur une direction a été déterminée à partir de travaux réel et vaut 1,16 mgon pour une paire de séquences, soit un écart type de $1,16 \times \sqrt{2} / (2,66) = 6 \text{ dmgon}$ pour une visée. Un théodolite au dmgon (type T2) est nécessaire.	Théodolites au dmgon et distancemètre. (Type T 2002 + DI 1000)  Tachéomètre électronique au dmgon (type TC 2002).	Théodolites au dmgon et distancemètre.  Tachéomètre électronique au dmgon (type TC 2002).
<b>Mesures sur le terrain</b>		
Angles horizontaux	Angles zénithaux. Distances inclinées.	Angles horizontaux. Angles zénithaux. Distances inclinées.
<b>Modes opératoires</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 visées d'intersection ou 5 de relèvement ou 2 d'intersection + 3 de relèvement (recoupement) ;</li> <li>• visées bien réparties de 1,5 km de moyenne ;</li> <li>• 4 paires de séquences : (0-100, 50-150, 25-125, 75-175) ;</li> <li>• 2 pointés.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 4 visées au minimum bien réparties ;</li> <li>• visée moyenne de 3 km si possible ;</li> <li>• double mesurage indépendant de chaque distance.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Seuls les points nodaux sont des points du canevas d'ensemble ;</li> <li>• 6 côtés au maximum et supérieurs à 500 m en moyenne ;</li> <li>• aucun côté ne doit être inférieur à 200 m ;</li> <li>• centrage forcé ;</li> <li>• 4 paires de séquences.</li> <li>• 2 pointés.</li> </ul>
<b>Contrôle sur le terrain</b>		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• fermeture de chaque séquence : <math>T_{\text{mgon}} = 1,5 \text{ mgon}</math></li> <li>• écart des lectures : <math>T_{\text{mgon}} = 1,2 \text{ mgon}</math></li> <li>• écart sur référence : <math>T_{\text{mgon}} = 0,7 \text{ mgon}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• tolérance de mesurage sur chaque distance : <math>T_{\text{cm}} = (3 + L_{\text{km}})</math>.</li> </ul>	Comme la triangulation et la trilatération.

### Tenue des carnets d'observations

La saisie des données est la phase la plus importante ; les carnets d'observation doivent être facilement exploitables.

À cet effet, ils doivent présenter :

- la date et l'heure,
- le nom de l'opérateur,
- le numéro du carnet,



- le type et le numéro de l'appareil,
- la visibilité,
- la température et la pression,
- la hauteur de l'axe des tourillons dans certains cas.

Et l'opérateur doit faire apparaître :

- la fermeture angulaire de chaque séquence,
- les écarts des lectures,
- les écarts sur la référence,
- l'écart entre deux mesurages indépendants des distances.

## 1.4 Canevas polygonal

Le canevas polygonal est une suite de cheminements en général encadrés appuyés sur le canevas d'ensemble ; ils constituent un trait d'union entre le canevas d'ensemble et le lever de détails. Les calculs sont détaillés dans le chapitre 2.

Comme en canevas d'ensemble, on distingue :

- les canevas polygonaux ordinaires plutôt adaptés aux zones rurales dont la densité des points à déterminer est environ d'une trentaine au km<sup>2</sup> dans les conditions les plus défavorables ;
- les canevas polygonaux de précision plutôt adaptés aux besoins des villes et dont la densité des points est environ d'une quarantaine au km<sup>2</sup> en zone périurbaine, et est d'une soixantaine au km<sup>2</sup> en zone urbaine, dans les conditions les plus défavorables <sup>1</sup>.

### 1.4.1 Méthodes opératoires d'établissement du canevas polygonal

#### 1.4.1.1 Établissement d'un avant-projet

Un avant-projet est réalisé sur carte ou sur plan ; le canevas est constitué de cheminements encadrés et de points nodaux. On a l'habitude :

- d'éviter les antennes ;
- de les rendre le plus tendus possible, c'est-à-dire se rapprochant de la droite qui joint l'origine à l'extrémité et qui représente la direction générale du cheminement ; toutefois un cheminement infléchi présente moins d'inconvénients qu'un cheminement à côtés courts ;

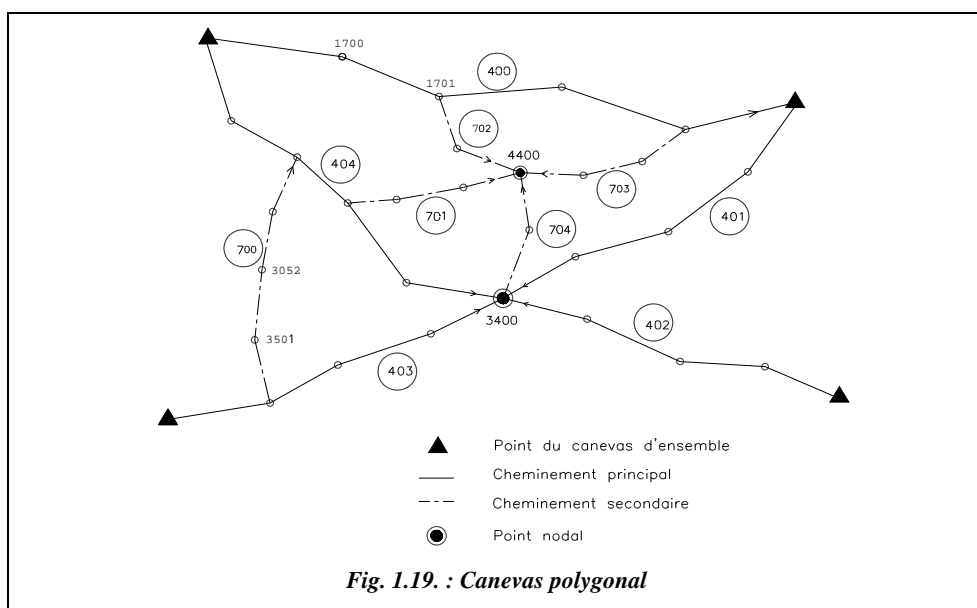
---

<sup>1</sup> Les instruments modernes (tachéomètres électroniques et *talkie-walkies*) favorisent la limitation des stations par l'augmentation des portées, donc une diminution de la densité préconisée ci-dessus.

- d'avoir des côtés homogènes, les distances des côtés devant être sensiblement les mêmes ; limiter le nombre de côtés à une dizaine environ.

### Remarque

Du fait qu'on vérifie la fermeture planimétrique  $fp = \sqrt{fx^2 + fy^2} = \sqrt{ft^2 + fd^2}$  et non chaque composante (longitudinale et transversale), et du fait de la généralisation des calculs en blocs, le respect du caractère tendu du cheminement n'est plus impératif. Dans ces conditions, un cheminement parfaitement tendu n'a aucune raison d'être plus précis qu'un cheminement infléchi.



Les cheminements doivent être proches des détails à lever ; les sommets successifs sont implantés de manière à être visibles l'un de l'autre et permettre d'apercevoir le maximum de points de détails ; il faut donc éviter de placer un sommet près d'un obstacle créant un angle mort.

Pour respecter au mieux les caractéristiques du terrain (emplacement des points de canevas d'ensemble, voies de communications, etc.), et pour fixer l'ordre chronologique des calculs, il est préférable que le topomètre distingue (fig. 1.19.) :

- **les cheminements principaux** qui relient les points du canevas d'ensemble ou encore un de ces points avec un point nodal principal ;
- **les cheminements secondaires**, c'est-à-dire tous les autres, qui s'appuient sur les premiers et sont donc calculés dans une seconde phase ;
- les points nodaux principaux ou secondaires.

La distinction entre cheminements principaux et secondaires permet de définir clairement l'ordre chronologique des calculs des cheminements mais il est sans objet au regard des tolérances puisque tous les points doivent avoir une même précision.

Sur le projet de canevas, doivent figurer les cheminements avec leur sens de calcul et les points nodaux ; les cheminements principaux sont tracés en rouge, les secondaires en bleu.

#### 1.4.1.2 *Numérotation des points du canevas*

Exemple de numérotation des points d'un canevas	Précision	Ordinaire	N° des cheminements
<b>Cheminements principaux</b>	1700 à 3399	6700 à 8399	400 à 699
<b>Points nodaux principaux</b>	3400 à 3499	8400 à 8499	
<b>Cheminements secondaires</b>	3500 à 4399	8500 à 9399	700 à 899
<b>Points nodaux secondaires</b>	4400 à 4499	9400 à 9499	
<b>Antennes (points lancés)</b>	4500 à 4599	9500 à 9599	900 à 999
<b>Points de détails (lever)</b>	à partir de 10000		

Lorsque les calculs de compensation sont effectués en bloc par les moindres carrés, la hiérarchie des observations et des calculs exposée ci-dessus n'a plus lieu d'être.

#### 1.4.1.3 *Repérage et matérialisation*

Un croquis de repérage doit être effectué de sorte que le point puisse être réimplanté sans ambiguïté en cas de disparition. Le sommet doit être coté par rapport à trois éléments stables, précis et durables : angle de bâtiment, lampadaire ou pylône, angle d'une plaque d'eau, EDF, etc. Il faut éviter les cotes sur les routes, et les cotes supérieures à la longueur du ruban, bien que celles-ci puissent être prises au distancemètre lors des observations.

Le croquis doit comporter en plus :

- la nature du point ;
- sa situation sans équivoque (lieu-dit, nom de la rue et numéro de l'habitation la plus proche par exemple) ;
- les directions des sommets voisins.

Toute une gamme de matériel est à la disposition du géomètre ; suivant le type de sol, on peut citer :

- des piquets en bois ou en acier (40 cm de long environ) enfoncés à refus ;
- des bornes à ancrage ;
- une borne en béton coulé en place (cube de 40 cm d'arête environ) ; des tirefonds, spits et rondelles, etc.

## 1.4.2 Établissement d'un avant-projet de canevas polygonal

Pour l'établissement d'un avant-projet de canevas polygonal, sont préconisés :

Canevas ordinaire	Canevas de précision
<b>Types d'appareils</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>théodolite d'écart-type 1 mgon<sup>(1)</sup>;</li> <li>ruban possible ;</li> <li>théodolite au mgon et distancemètre ou tachéomètre électronique.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>théodolite d'écart-type 0,5 mgon et distancemètre<sup>(1)</sup>;</li> <li>ou tachéomètre électronique au dmgon. (Type TC 2002)</li> </ul>
<b>Mesures sur le terrain</b>	
Angles horizontaux, angles zénithaux et distances inclinées.	Angles horizontaux, angles zénithaux et distances inclinées.
<b>Modes opératoires</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>centrage ordinaire<sup>(2)</sup>;</li> <li>1 paire de séquences : 0,100 ;</li> <li>1 pointé ;</li> <li>1 mesure directe et 1 mesure inverse des distances.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>centrage forcé ;</li> <li>1 ou 2 paires de séquences ;</li> <li>2 pointés ;</li> <li>2 mesures directes et 2 mesures inverses des distances.</li> </ul>
<b>Contrôle sur le terrain</b>	
Mise en évidence de l'erreur d'index.	<ul style="list-style-type: none"> <li>mise en évidence de l'erreur d'index ;</li> <li>en présence de 2 paires, les vérifications de la fermeture des séquences, de l'écart des lectures et de l'écart sur la référence sont nécessaires ;</li> <li>si le nombre de côtés du cheminement est supérieur à 6, le contrôle de l'orientation sur des points éloignés dont <math>T(x) = 4</math> cm est souhaitable.</li> </ul>

<sup>(1)</sup> Les tolérances légales sur les angles du cheminement sont de 6 mgon et 10 mgon respectivement en canevas polygonal de précision et ordinaire soit des écarts types sur une direction de  $6 / 2,66 / \sqrt{2} \approx 1,6$  mgon et  $10 / 2,66 / \sqrt{2} \approx 2,7$  mgon.

<sup>(2)</sup> En canevas ordinaire, le centrage forcé est recommandé pour des côtés du cheminement inférieurs à 80 m environ. En effet, si on suppose des écarts de centrage ordinaire de l'appareil et du réflecteur de 3 mm (ce qui est déjà correct), on obtient une imprécision angulaire sur la direction de  $\sqrt{0,3^2 + 0,3^2} / (1,57 \times 0,08) \approx 3,4$  mgon supérieure à 2,7 mgon (voir fig. 1.18.).

## 1.5 Charpente planimétrique

La charpente planimétrique est un canevas particulier établi essentiellement en zone urbaine et périurbaine dont les points sont implantés sur des façades permettant aux utilisateurs d'y appuyer, à l'aide d'opérations topographiques simples, tous les leviers ponctuels qu'ils ont à effectuer. Ils sont situés sur les façades si possible à une hauteur constante et permettant d'effectuer pratiquement à l'horizontale des visées de nivellement. La densité est de l'ordre de 40 à 70 points par kilomètre de corps de rue.

Les points sont matérialisés par des plaques de repérage, par des clous plantés dans les façades, par des gravures ou simplement identifiés par la fiche signalétique.

Ils sont déterminés par rayonnement (cas le plus fréquent) ou intersection (angles et distances) en une paire de séquence avec deux pointés sur chaque visée et un double mesurage indépendant des distances.

Les coordonnées sont obtenues par calcul simple selon le mode de mesure (rayonnement ou intersection) à partir du canevas de base.

## 1.6 Contenu d'un dossier de canevas

Les éléments composant le dossier de canevas d'ensemble et polygonal sont listés ci-après :

- un schéma définitif du canevas dressé sur fond de plan ;
- un tableau récapitulatif des coordonnées des points nouveaux ;
- un croquis de repérage ;
- un carnet d'observation ;
- une liste après traitement des saisies ;
- un état des calculs des coordonnées de chaque point.

# 2 ÉTABLISSEMENT DES CANEVAS ALTIMÉTRIQUES

Le canevas altimétrique est un ensemble de repères déterminés en altitudes normales par nivellement direct ou indirect. Si la densité des repères du réseau national IGN 69 est insuffisante, de nouveaux points sont créés.

En effet, reprenons l'exemple du quart sud-est de la feuille au 1/50 000 de Grasse (voir tome 1, chap. 2, § 6.5., fig. 2.52.). On remarque qu'il n'existe des points IGN 69 que le long de la ligne de chemin de fer Marseille - Vintimille, points du premier ordre  $I'.M$  le long de la D.35 Antibes - Grasse, points du troisième ordre  $I'.c.a_3.s_3$  tous les 400 à 800 m environ, et quelques points du quatrième ordre  $Ma.k_3$  dans le cœur d'Antibes. On remarque que de nouvelles zones très urbanisées, en particulier autour de Vallauris, de Sophia-Antipolis sur les communes de Valbonne et Biot, ne possèdent aucun repère. On est donc amené dans de telles zones à densifier le réseau altimétrique national IGN 69.

Le nombre d'opérations enchaînées étant considérable, il est indispensable d'opérer de manière à éviter une trop grande accumulation des erreurs. Il faut donc, comme en planimétrie, décomposer le canevas altimétrique en différents ordres de précisions dégressives.

## 2.1 Principe de densification

Nous exposons ci-après les méthodes et les techniques de réalisation des canevas utilisées par les Services techniques des grandes villes de France.

Il existe trois sortes de canevas décrits ci-après.

### 2.1.1 Canevas altimétrique d'ensemble

Les repères sont définis par l'Institut Géographique National et appartiennent au réseau IGN 69. Ils sont en général implantés sur des édifices publics : mairies, gares, églises, sur des ponts, rarement sur des immeubles privés.

Dans le cas d'une densité insuffisante, c'est-à-dire inférieure à quatre points au km<sup>2</sup>, de nouveaux points sont créés pour atteindre une densité de quatre à huit points au km<sup>2</sup>.

Les points sont établis par un nivellement de haute précision avec des niveaux de très haute précision comme le Wild N3.

### 2.1.2 Canevas altimétrique

Il densifie le canevas précédent par des repères scellés tous les 200 à 500 m environ suivant les zones. Les points sont établis par un nivellement de haute précision avec des niveaux de précision comme le NA2 avec micromètre.

### 2.1.3 Charpente altimétrique

Il s'agit en général des points de la charpente planimétrique dont on a déterminé l'altitude à partir des repères du canevas altimétrique ; ces points ont une densité de 40 à 70 points par km de voie. Ils sont établis par un nivellement direct ou indirect.

## 2.2 Densité de points préconisée

Le tableau suivant donne des valeurs indicatives de densité de points à respecter.

↓ Zone	Canevas altimétrique d'ensemble	Canevas altimétrique	Charpente altimétrique
	points par km <sup>2</sup>	points par km de voie	points par km de voie
urbaine	4 à 8	5 (tous les 200 m)	60 à 70 (tous les 15 m)
périurbaine	4	3 (tous les 350 m)	40 à 50 (tous les 20 à 25 m)
rurale	2	2 (tous les 500 m)	15 à 20 (tous les 50 à 60 m)

## 2.3 Méthodes opératoires pour l'établissement du canevas

### 2.3.1 Techniques préparatoires

#### 2.3.1.1 Documentation à rassembler

Les documents à rassembler sont les suivants :

- un tableau des mailles de nivellement ;
- un fond de carte (quart de feuille en général) et un calque de repérage ;
- un répertoire des points de nivellement ;

#### 2.3.1.2 Choix de l'implantation des points

Ce choix consiste à définir dans un avant-projet l'emplacement des points en respectant les densités et les conditions topographiques.

Les repères de nivellement sont généralement situés le long des voies de communication (lignes de chemin de fer, routes, chemins, le long des rivières et canaux éventuellement etc.) puisque, leur altitude étant déterminée par nivellement direct de haute précision, il est nécessaire que les pentes des cheminements soient relativement faibles.

#### 2.3.1.3 Reconnaissance sur le terrain

La reconnaissance sur le terrain permet de :

- vérifier l'existence des points anciens connus et s'assurer qu'ils n'ont pas bougé de façon importante ;
- vérifier la faisabilité des observations à effectuer ;
- vérifier et la stabilité du terrain sur lequel les points seront implantés.

#### 2.3.1.4 Matérialisation

La photographie ci-contre est celle d'un repère du cadastre scellé dans un mur.

#### 2.3.1.5 Repérage et identification

Le repérage et l'identification permettent d'établir des fiches signalétiques qui doivent comprendre :

- le nom de la commune ;
- le numéro du point ;
- la nature du point ;
- la date d'établissement ;
- son altitude (inscrite après calcul) ;



*Repère de cadastre*

- sa situation topographique ;
- ses références cadastrales ;
- son adresse postale ;
- un croquis visuel de sa matérialisation (une photographie) ;
- un croquis de repérage ;
- sa servitude.

## 2.3.2 Mesures sur le terrain

### 2.3.2.1 Carnets des observations effectuées sur le terrain

La saisie peut être réalisée manuellement sur des carnets d'observation, mais peut aussi se faire par l'intermédiaire de carnets électroniques.

Les carnets doivent être facilement exploitables et doivent présenter :

- la date et l'heure ;
- le nom de l'opérateur ;
- le numéro du carnet ;
- le type et le numéro de l'appareil ;
- les observations proprement dites.

### 2.3.2.2 Différentes techniques

Le tableau suivant détaille les différentes techniques à appliquer en canevas altimétrique.

	<b>Canevas altimétrique d'ensemble</b>	<b>Canevas altimétrique</b>
<b>Objectifs</b>	Densification du réseau IGN 69.	Densification du CAE ; rattachement au CAE.
<b>Mesures</b>	Dénivelées (nivellement direct).	Dénivelées (nivellement direct).
<b>Type d'appareils</b>	Niveaux de haute précision (ex : N3) 2 mires invar.	Niveaux de précision (ex : NA2 et micromètre). 2 mires invar.
<b>Modes opératoires</b>	Cheminement double par la méthode de Choleski adaptée.	Cheminement double par la méthode de Choleski adaptée.
<b>Conditions sur les opérations</b>	Distance appareil-mires $\leq 35$ m. Égalité des portées à $\pm 1$ m.	Distance appareil-mires $\leq 50$ m. Égalité des portées à $\pm 1$ m.
<b>Contrôles sur terrain</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• vérifier que la lecture sur le fil niveleur est égale à la moyenne des lectures sur les fils stadimétriques ;</li> <li>• vérifier l'écart d'échelle ;</li> <li>• effectuer le contrôle de marche.</li> </ul>	Mêmes contrôles qu'en canevas d'ensemble.



Le tableau suivant détaille les différentes techniques à appliquer pour la création de la charpente altimétrique.

	Charpente altimétrique	
	Nivellement direct ordinaire	Nivellement indirect trigonométrique de précision
<b>Objectif</b>	Créations de nouveaux points rattachés au canevas altimétrique.	Même objectif qu'en nivellement direct.
<b>Mesures</b>	Dénivelées.	Angles zénithaux Distances inclinées
<b>Type d'appareils</b>	Niveaux de précision (ex : NA2). Mire ordinaire.	Théodolite au mgon + distancemètre Tachéomètre électronique au mgon
<b>Modes opératoires</b>	Nivellement direct ordinaire (utilisation de crapauds). 2 pointés sur chaque visée.	1 paire de séquences
<b>Conditions sur les opérations</b>	Distances appareil-mire $\leq 50$ m. Égalité des portées à $\pm 1$ m.	Distance appareil-réflexeur $\leq 200$ m. Réflexeur à trépied ou accroché au point visé.
<b>Contrôles sur le terrain</b>	Vérification de l'égalité entre la lecture sur fil niveleur et la demi-somme des lectures sur les fils stadimétriques.	Constance de l'erreur de collimation verticale.

## 2.4 Méthodes de calcul

Le canevas peut être conçu afin de pouvoir être observé, calculé et compensé en suivant la hiérarchie conventionnelle (voir canevas polygonal au paragraphe 1.4.), à savoir :

- les cheminements principaux : encadrés ou à point nodal ;
- les cheminements secondaires : encadrés entre les points de cheminement principaux ou constitués de points nodaux secondaires.

Les compensations peuvent être effectuées en bloc ; alors l'ordre des calculs et des observations n'a plus d'importance.

## 3 LES MÉTHODES GRAPHIQUES

La suite de ce chapitre détaille les méthodes de calcul qui permettent de déterminer les coordonnées planimétriques de points nouveaux par les différentes techniques de densification détaillées au paragraphe 1. On distingue deux approches de ces calculs.



**En canevas de précision**, le calcul fait appel à la **théorie des moindres carrés** dont le principe n'est pas développé dans cet ouvrage (seuls les résultats en seront utilisés). En revanche, pour chaque méthode, un tableau faisant appel à

ce type de calcul est fourni sur cédérom. Chaque tableau présente la résolution sur format A4 vertical et donne toutes les formules utilisées (voir les exemples de résolution dans les paragraphes suivants).

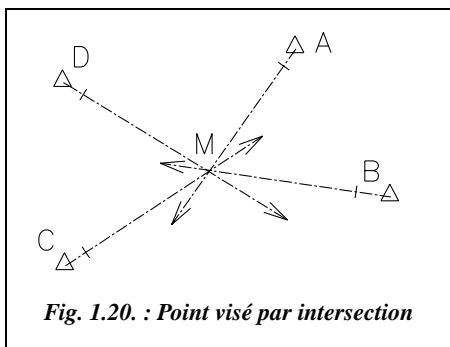


Fig. 1.20. : Point visé par intersection

En canevas ordinaire, on peut se contenter d'une **construction graphique** dont voici la justification : soit un point M, déterminé par intersection de visées issues de quatre points d'appui connus A, B, C et D (fig. 1.20.). Si ces visées se coupaient toutes en un même point, l'intersection serait directement le point cherché (comme on peut en avoir l'impression sur la figure 1.20.). En fait, si l'on effectue un « zoom » près de la zone d'intersection, on obtient la vue de la figure 1.21

puisque les visées, entachées d'inévitables erreurs de mesures, ne sont pas concourantes en un point. Tout l'intérêt des méthodes graphiques est de permettre la construction à grande échelle de cette zone d'intersection.

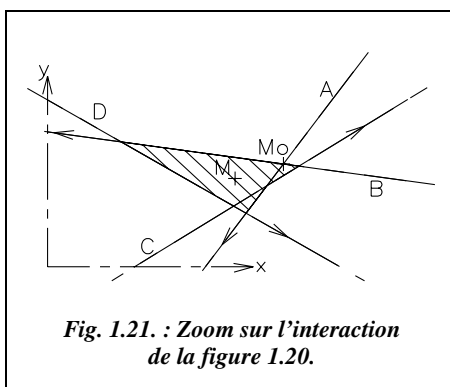


Fig. 1.21. : Zoom sur l'intersection de la figure 1.20.

La nécessité d'une construction particulière apparaît si l'on se fixe un ordre de grandeur des distances représentées : pour des visées de l'ordre de 1,5 km, les points connus sont situés dans une zone délimitée par un cercle d'environ 3 km de diamètre. La zone d'intersection est rarement plus grande qu'un cercle d'environ 1 m de rayon. Si vous représentez l'ensemble sur format A0 ( $1\ 188 \times 840\text{ mm}^2$ ), un tracé à une échelle de l'ordre du  $1/3\ 500$  est nécessaire. La zone d'intersection devient alors un cercle de 0,6 mm de diamètre, donc inutilisable.

D'autant que l'on dessine les angles au rapporteur avec une précision d'au mieux 0,1 gon, ce qui donne une incertitude de 2,3 m (à 1,5 km) sur le terrain ; cette incertitude est supérieure à la taille de la figure à dessiner...

L'astuce proposée par cette méthode est de calculer les coordonnées d'un des points d'intersection (que l'on appelle point approché  $M_0$  ; sur la figure 1.21. c'est le point d'intersection des visées issues de A et de B) et de dessiner tous les autres points d'intersection en fonction de ce dernier en calculant la distance qui sépare chaque visée du point approché  $M_0$ . On peut alors dessiner à une grande échelle (par exemple  $1/10$  ou  $1/5$ ) la zone d'intersection (appelée **chapeau** : zone hachurée de la figure 1.21.) et y choisir le point définitif M. On détermine les coordonnées de M relativement au point  $M_0$  par des mesures sur le graphique, qui doit être orienté et tracé à une échelle conventionnelle.

### Remarque

Par la suite, le terme *zone d'indécision* est préféré au terme chapeau.

Pour les coordonnées planes (en projection), la notation *E, N* est préférable (Est, Nord) mais comme il n'y a pas ici de confusion possible avec des coordonnées rectangulaires géocentriques, la notation *X, Y* est également utilisée.



L'informatique (DAO) court-circuite une grande partie de la méthode graphique puisqu'elle permet d'obtenir directement la zone d'indécision. Il suffit de dessiner les points réels à partir de leurs coordonnées puis les visées réelles, et de faire un « zoom » sur la zone d'indécision qui est ainsi obtenue directement, imprimable à l'échelle souhaitée. Il reste à choisir le point définitif M, soit manuellement soit en utilisant l'outil informatique (voir les exemples traités pour chaque méthode dans les paragraphes 4 à 9 suivants).

L'informatique et le GPS rendent ces méthodes graphiques obsolètes. Toutefois elles restent intéressantes à étudier en formation initiale puisqu'elles permettent de visualiser concrètement la précision des mesures topométriques en fonction de l'appareil utilisé. Elles permettent aussi de comprendre le sens réel d'une opération d'intersection, de relèvement, de multilatération, etc.

## 4 LA MULTILATÉRATION

Nous commençons par cette méthode car elle nous paraît la plus simple en termes de compréhension et de calculs.

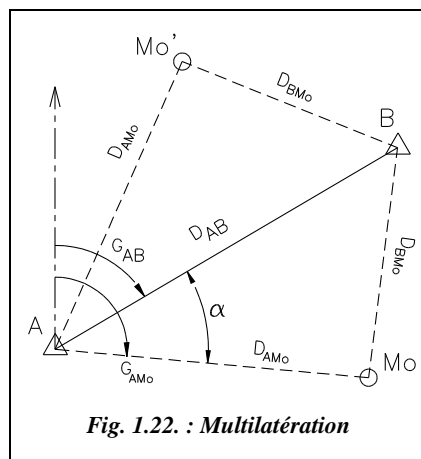
### 4.1 Coordonnées approchées par bilatération

Les distances sur deux points anciens connus sont suffisantes pour calculer un point approché  $M_o$  : on appelle ces deux mesures bilatération.

Considérons un point  $M_o$  dont on veut déterminer les coordonnées à partir de A et B (par convention A, B,  $M_o$  sont pris dans le sens horaire). On mesure les distances  $D_{AM_o}$  et  $D_{BM_o}$  puis on calcule les coordonnées du point  $M_o$  comme suit :

Calcul de l'angle  $\alpha$ ,

$$\cos \alpha = \frac{D_{AM_o}^2 + D_{AB}^2 - D_{BM_o}^2}{2D_{AB} \cdot D_{AM_o}}$$



Calcul du gisement  $G_{AMo}$  :

Si le point Mo est à droite du vecteur AB, on peut écrire :  $G_{AMo} = G_{AB} + \alpha$ .

Si le point Mo est à gauche du vecteur AB, on peut écrire :  $G_{AMo} = G_{AB} - \alpha$ .

Les coordonnées du point Mo sont alors :

$$\begin{cases} E_{Mo} = E_A + D_{AMo} \cdot \sin G_{AMo} \\ N_{Mo} = N_A + D_{AMo} \cdot \cos G_{AMo} \end{cases}$$

Attention : il existe deux points possibles Mo et Mo' ; il faut en choisir un, par exemple à partir d'un schéma à l'échelle. Ces calculs ramènent à une intersection de deux cercles (voir chap. 4., § 4).

**Pour vérifier**, on effectue les mêmes calculs de rayonnement à partir du point B.

## 4.2 Conventions et définitions

### 4.2.1 Points doubles

On appelle points doubles tous les points d'intersection des  $n$  visées effectuées prises deux à deux (combinaison de  $n$  éléments pris deux à deux).

Il y a donc  $C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$  points doubles pour  $n$  points d'appui visés.

Par exemple, pour  $n = 4$ , on obtient six points doubles.

### 4.2.2 Distance observée d'une visée

C'est la distance, notée  $D_{obs}$ , lue au distancemètre sur le terrain entre le point nouveau M et chaque point ancien. Elle est prise en compte après avoir subi les corrections la ramenant au système de représentation plane (voir tome 1, chap. 4, § 7.), à savoir :

- les corrections d'étalonnage et atmosphérique de l'appareil de mesure ;
- la réduction à l'horizontale :  $Dh = Di \cdot \sin V - 7,21 \cdot 10^{-8} \cdot Di^2 \cdot \sin 2V$  ;
- la réduction au niveau 0 (à l'ellipsoïde), la station étant à l'altitude  $h_s$  et le point visé

à l'altitude  $h_p$  :  $Do = \frac{Di^2 - (h_s - h_p)^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{h_s}{R}\right) \cdot \left(1 + \frac{h_p}{R}\right)}}$  si  $(h_s \neq h_p)$  on retrouve  $Do = \frac{R \cdot Dh}{h + R}$ .

$h_s$  et  $h_p$  sont théoriquement les hauteurs au-dessus de l'ellipsoïde.

- la correction due à la projection plane :  $Dr = Do(1 + kr)$ .

Les stations totales modernes permettent d'afficher directement  $Dr$  sur le terrain.

### 4.2.3 Distance approchée d'une visée

C'est la distance, notée  $D_{app}$ , calculée entre le point d'appui J dont la visée est issue et le point approché Mo. Elle est généralement déterminée au millimètre près.

$$D_{j\ app} = D_{JM_o}$$

### 4.2.4 Le segment-distance

Considérons une distance  $D_A$  mesurée depuis le point d'appui A ; le lieu géométrique des positions possibles du point M est le cercle de centre A et de rayon  $D_A$ . Les distances mesurées depuis les autres points d'appui (par exemple fig. 1.23. : B, C et D) forment une zone d'indécision (zone hachurée) dans laquelle doit se situer le point M cherché. Lorsque l'on se situe aux alentours immédiats du point M, étant donné la très petite taille de la zone par rapport aux rayons des cercles représentant les visées, on assimile une portion de cercle à un segment de droite tangent au cercle : ces segments sont appelés segments-distances et deviennent les lieux géométriques du point M à proximité immédiate de ce dernier.

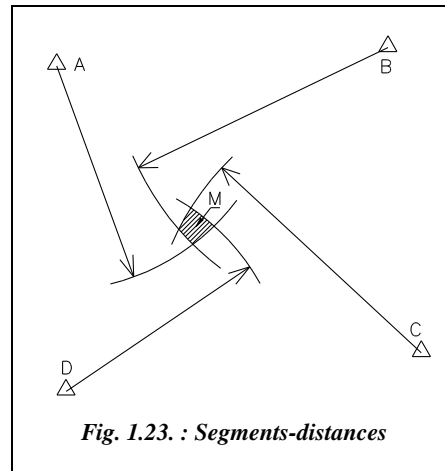


Fig. 1.23. : Segments-distances

### 4.2.5 Orientation du segment-distance

Considérons le segment-distance, noté  $\Gamma_J$ , issu de la visée sur le point J.

Le gisement de la visée de J sur M peut être calculé avec une approximation correcte par le gisement  $G_{JM_o}$ , étant donné la précision de la construction graphique exécutée au dgon près.

Le gisement du segment-distance est donc égal à :

$$G_{\Gamma_J} = G_{JM_o} - 100 \text{ gon}$$

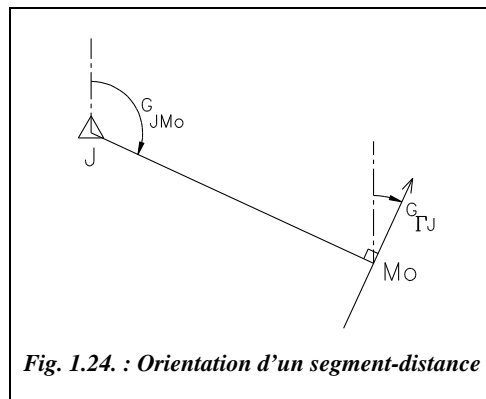
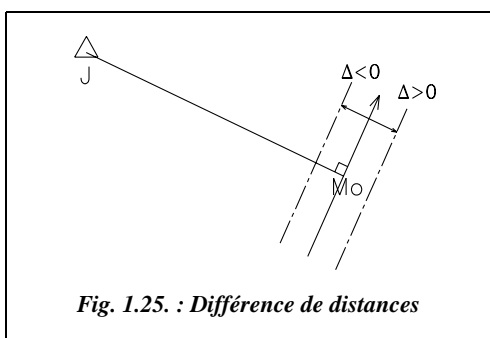


Fig. 1.24. : Orientation d'un segment-distance

Désormais, on sait placer les segments-distances autour du point Mo ; ils sont dessinés et orientés grâce à leur gisement.

Cette orientation est conventionnelle et permet l'harmonisation des résultats avec les autres méthodes comme l'intersection et le relèvement (§ 5. et 6.).

#### 4.2.6 Différence de distances



C'est la différence, notée  $\Delta$ , entre les distances observées et approchées de chaque visée.

$$\Delta_J = D_{J_{\text{obs}}} - D_{J_{\text{app}}}$$

C'est grâce au calcul de cette valeur qu'il est possible de dessiner la zone d'indécision à partir du point  $M_o$  calculé auparavant. En effet, les segments-distances sont actuellement dessinés et orientés mais passent tous par  $M_o$ .  $\Delta$  donne la valeur dont on doit éloigner les

segments-distances de  $M_o$  pour obtenir leur position réelle. Le signe de  $\Delta$  indique s'ils se rapprochent du point origine de la visée ou s'ils s'en éloignent.

$\Delta$  est calculée au millimètre près avec son signe qui est pris conventionnellement tel que :

- $\Delta$  est positif si la distance observée est plus longue que la distance approchée ; donc le segment-distance s'éloigne du point origine de la visée (le point J sur la figure 1.25.). En tenant compte de son orientation, il est décalé vers sa droite.
- $\Delta$  est négatif si la distance observée est plus courte que la distance approchée ; donc le segment-distance se rapproche du point origine de la visée. En tenant compte de son orientation, il est décalé vers sa gauche.

#### 4.2.7 Détermination du point définitif M

On sait maintenant construire la zone d'indécision contenant le point M. Deux cas traités ci-après sont à envisager.

##### 4.2.7.1 Zone d'indécision de petite taille

Cette zone est de taille suffisamment petite par rapport à la précision demandée sur la connaissance de M (son amplitude maximale est par exemple de 5 cm alors que la précision recherchée est de l'ordre de 3 à 4 cm) : dans ce cas, on peut directement placer le point M et calculer ses coordonnées par rapport au point  $M_o$  (voir fig. 1.26.).

Sur cette figure, les segments-distances issus de A, B, C et D ont été placés en un point Mo, origine du repère associé à notre graphique (représentation à grande échelle : 1/10, 1/5...).

Le point Mo ayant été calculé à partir des points A et B, on décale le segment-distance issu du point C de la valeur  $\Delta_C$ , le sens étant donné par le signe de  $\Delta_C$ . Il en est de même pour le segment-distance issu de D.

On en déduit la forme de la zone d'indécision, hachurée sur la figure 1.26. Sa taille étant suffisamment petite, on y place le point M à vue.

Les coordonnées de M sont :

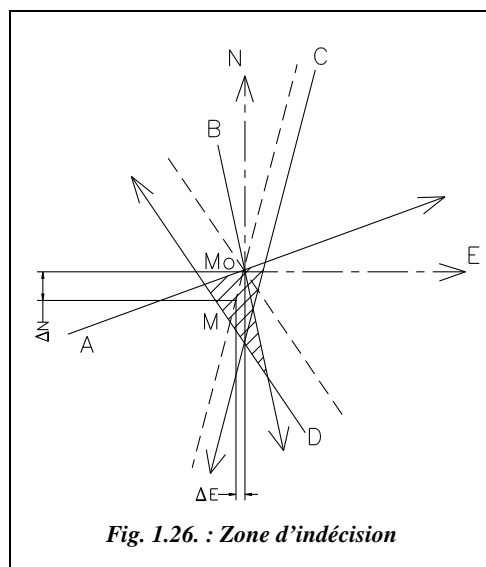


Fig. 1.26. : Zone d'indécision

$$\begin{aligned} E_M &= E_{Mo} + \Delta E \\ N_M &= N_{Mo} + \Delta N \end{aligned}$$

#### 4.2.7.2 Zone d'indécision de taille importante

La zone d'indécision est de taille trop importante par rapport à la précision demandée sur M, ou bien sa forme est telle qu'il est difficile de placer M directement ; il faut alors trouver une méthode pour placer le point M le plus précisément possible (par exemple en réduisant la zone d'indécision).

Étant donné la présence d'inévitables erreurs de mesure, il est logique de considérer que les segments-distances sont situés à l'intérieur d'une plage d'incertitude (fig. 1.27.) que l'on pourrait tracer de part et d'autre de chaque segment. C'est le calcul et le tracé de cette plage qui vont permettre de réduire la zone d'indécision.

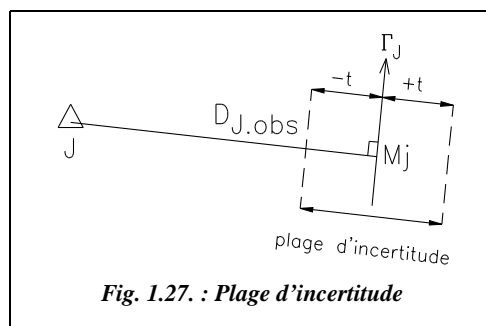


Fig. 1.27. : Plage d'incertitude

La manipulation ayant été faite chaque fois, sans fautes, par le même opérateur et dans les mêmes conditions, il est possible d'admettre que la plage d'incertitude est liée à la précision de l'appareil, le même pour toutes les visées.

Chaque distance est observée avec des imprécisions dépendant de l'écart type  $\sigma_V$  de lecture de l'angle zénithal V et de l'écart type  $\sigma_{Di}$  de lecture de la distance inclinée Di au

distancemètre. Ces valeurs dépendent des appareils utilisés et sont données par les constructeurs, par exemple :

- pour un distancemètre courant :  $\sigma_{Di}$  (cm) =  $\pm(A + B \cdot Di_{km})$   
(exemple :  $A = 0,5$  cm et  $B = 0,5$  pour un DI4, et  $A = 0,3$  cm et  $B = 0,2$  pour un DI 1000)
- pour un théodolite T2 :  $\sigma_Z = \pm 6$  dmgon (valeur usuelle, la valeur donnée par le constructeur étant de 2,5 dmgon)

La relation de base utilisée est :  $Dh = Di \cdot \sin V$ .

On arrive par dérivation à :  $dDh = dDi \cdot \sin V + Di \cdot \cos V \cdot dV_{rad}$ .

Ce qui donne pour l'écart type sur une mesure :  $\sigma_{Dh}^2 = (\sigma_{Di} \cdot \sin V)^2 + (Di \cdot \cos V \cdot \sigma_V)^2$ .

On en déduit une tolérance (loi de Gauss) :  $T_{Dh} = \pm 2,7 \cdot \sigma_{Dh}$ .

Si les visées sont proches de l'horizontale  $V \approx 100$ gon donc  $\sin V \approx 1$  et  $\cos V \approx 0$ , et donc  $\sigma_{Dh} \approx \sigma_{Di}$  ; donc on arrive à la forme simplifiée suivante :  $T_{Dh}$  (cm) =  $\pm 2,7 \cdot (A + B \cdot Di_{km})$ .

Les demi-plages d'incertitude ont donc pour largeur la valeur  $T_{Dh}$  qui est une fonction linéaire de la distance mesurée. En pratique, les demi-plages doivent être adaptées à l'échelle choisie et à la forme de la zone à réduire, leur valeur, généralement notée  $t$ , est donc multipliée par un coefficient  $K$  choisi arbitrairement par la personne qui effectue la résolution graphique.  $K$  englobe le coefficient 2,7 donc :  $t_{cm} = K \cdot (A + B \cdot Di_{km})$

En général, on utilise la formule de tolérance légale :  $T_{cm} = (3 + Di_{km})$

d'où  $t_{cm} = K \cdot (3 + Di_{km})$

$t$  est la demi-plage exprimée en centimètre,  
 $Di$  est la distance inclinée exprimée en kilomètre,  
 $K$  est un coefficient arbitraire.

#### 4.2.8 Distance définitive

C'est la distance, notée  $D_{def}$ , déterminée à partir des coordonnées du point dont la visée est issue et des coordonnées du point définitif M déterminé graphiquement. Elle est déterminée au centimètre près.

#### 4.2.9 Écart linéaire

C'est l'écart entre la distance observée et la distance définitive :

$$r_j = D_{j\text{ obs}} - D_{j\text{ déf}}$$

Il est calculé en centimètre avec une décimale et est soumis aux mêmes tolérances que les points de triangulation (20 cm en canevas ordinaire et 4 cm en canevas de précision). Son calcul permet de vérifier la validité de la manipulation.



#### 4.2.10 Rayon moyen quadratique d'indécision $Rmq$

$$Rmq = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=n} (r_j)^2}{n-1}}$$

Le rayon moyen quadratique est donné par la formule ci-contre :

C'est une valeur statistique calculée à partir des  $n$  écarts linéaires sur les  $n$  points anciens.  $Rmq$  est soumis à tolérance : 12 cm pour le canevas ordinaire et 2,5 cm (valeur usuelle) pour le canevas de précision.

### 4.3 Exemple de calcul

Station	Points visés	E (m)	N (m)	Dr (m)
301 (M)	51 (A)	982 193,00	3 156 193,14	2 921,54
	52 (B)	985 527,04	3 154 445,19	3 452,66
	53 (C)	985 359,53	3 150 108,08	4 416,09
	54 (D)	979 591,92	3 153 219,90	2 688,06

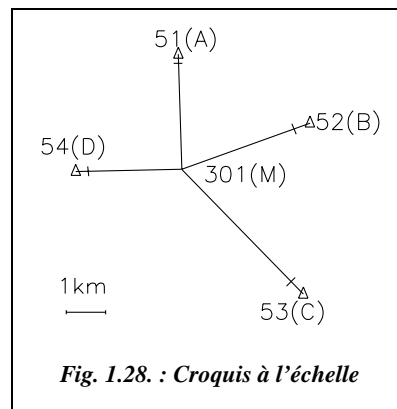
Soit à calculer le point n° 301 dans le cadre d'une multilatération cadastrale (canevas ordinaire, distances de l'ordre de 3 km). Une seule station a été faite au point 301 et les distances données  $Dr$  sont déjà réduites au plan de projection.

Le distancemètre utilisé est tel que :

$$A = B = 5 \text{ mm d'où } t_{cm} = K.(1 + D_{km}).$$

La démarche de résolution est la suivante :

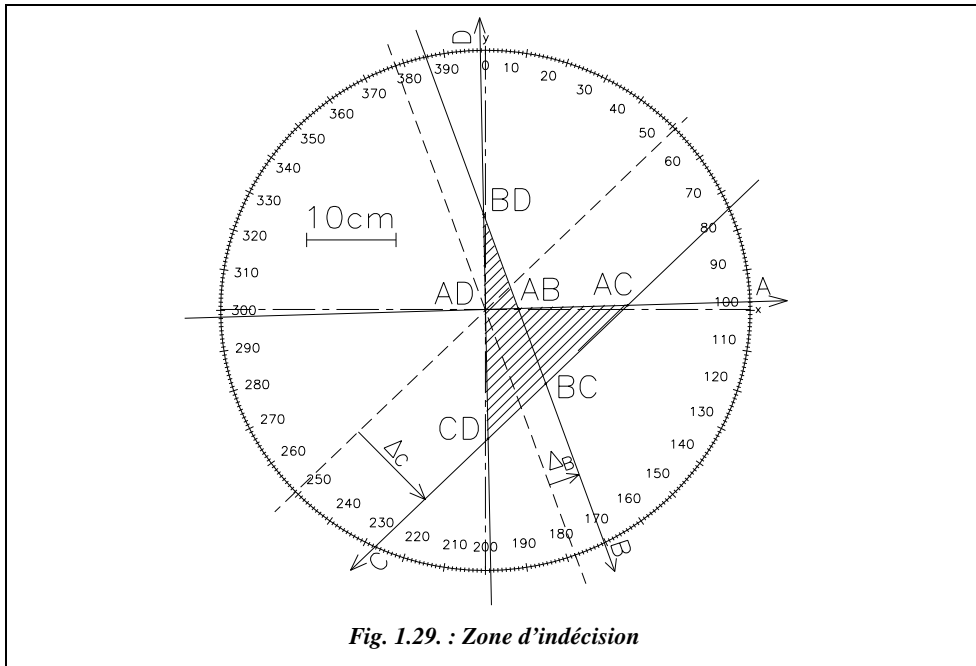
**1** - Effectuez un croquis des points, à l'échelle comme sur la figure 1.28.



**Fig. 1.28. : Croquis à l'échelle**

**2** - Choisissez les visées qui détermineront le point  $M_0$  (deux visées homogènes et se coupant sous un angle proche de 100 gon), par exemple, les visées issues de A et D. Calculez les coordonnées du point  $M_0$ . Vous devez trouver :  $E_{M_0} = 982 279,46 \text{ m}$  ;  $N_{M_0} = 3 153 272,88 \text{ m}$ .

**3** - Calculez les distances approchées puis les différences de distances. Calculez les gisements des segments-distances (voir plus loin dans ce paragraphe, les calculs présentés dans le tableau FICHLAT.XLS).



**4** - Dessinez sur format A4 un repère dont l'origine est le point  $M_0$ , puis dessinez avec un rapporteur les segments-distances (à partir de leurs gisements) en les faisant passer, dans un premier temps, par le point approché  $M_0$  (voir fig. 1.29.).

**5** - Déplacez les segments-distances de la valeur  $\Delta$  à l'échelle choisie, le sens du déplacement dépendant du signe de  $\Delta$ . Repérez la zone d'indécision (ensemble des points doubles, ici au nombre de 6, voir fig. 1.29). Notez que le point  $M_0$  est repéré AD sur la figure 1.29. puisqu'il est l'intersection des segments-distances issus de A et de D. Les lignes discontinues sont des constructions intermédiaires qui peuvent être effacées.

**6** - Si l'on considère, pour l'exemple, que la zone d'indécision est trop grande pour placer M directement, il faut choisir un coefficient  $K$  pour le calcul des demi-plages  $t$  dont on décale chaque segment-distance : il convient de réaliser plusieurs essais jusqu'à obtenir une zone commune à toutes les zones d'indécision, et qui soit suffisamment petite pour pouvoir placer le point définitif M. Notez sur la figure 1.30. que seules les demi-plages utiles ont été dessinées afin de ne pas encombrer le dessin. En effet, il est inutile de dessiner par exemple toutes les demi-plages extérieures à la zone.

#### Remarque

On peut préciser l'emplacement du point M de deux manières différentes :

- soit en réduisant la zone d'indécision : on choisit une valeur de  $K$  pour que cette zone soit simplement plus petite de manière à placer M plus précisément ;

- soit en choisissant une valeur de  $K$  plus grande de manière à créer un **recouvrement des zones d'indécision**, cette zone commune devenant le lieu le plus probable du point définitif  $M$ . Cette seconde méthode, plus logique, est appelée « recherche de zone commune aux demi-plages d'indécision ».

Sur la figure 1.30., le dessin des demi-plages  $t$  est réalisé avec un coefficient  $K = 1,2$  pour un dessin à l'échelle 1.

Seules les demi-plages utiles sont dessinées afin de ne pas surcharger la construction.

Après décalage, il reste une zone commune à toutes les zones d'indécision (zone hachurée de la figure 1.30.). On place  $M$  « à vue » dans cette zone et on mesure depuis  $M_0$  :

$\Delta E = + 3\text{cm}$
$\Delta N = - 4\text{cm}$

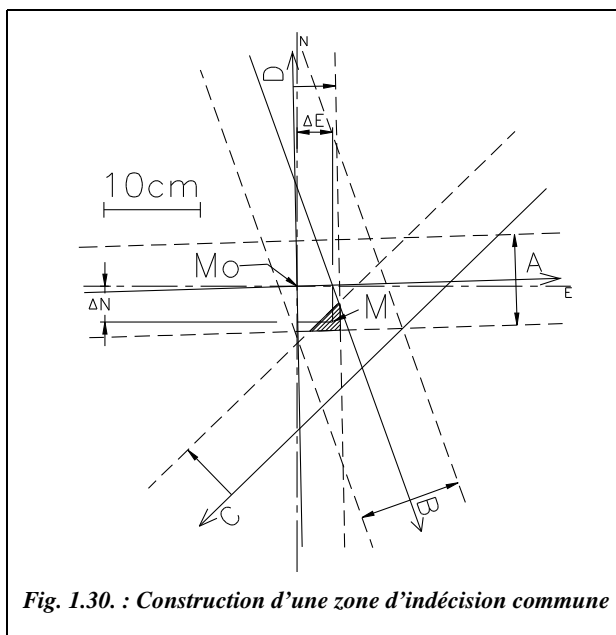


Fig. 1.30. : Construction d'une zone d'indécision commune

7 - Calculez les coordonnées du point définitif  $M$  à partir de celles du point  $M_0$  et vérifiez par le calcul des écarts linéaires et du rayon moyen quadratique d'indécision que la manipulation respecte les tolérances.

#### Remarque

Le graphique peut être construit en utilisant une feuille A4 sur laquelle figure déjà un repère et un rapporteur associé à ce repère. Ce document existe sur le cédérom du livre sous forme de fichier AutoCAD (RAPPORT.DWG).

#### ◆ Extraits du tableau FICHLAT.XLS



Les calculs suivants ont été effectués sur Excel à partir des tableaux :

- FICHLAT.XLS associé à la méthode graphique. Il peut être utilisé vide pour présenter les calculs ;
- TRIANGU.XLS associé à un calcul aux moindres carrés.

Les tableaux qui suivent en sont extraits.

### 1 - Calcul de Mo dans le triangle D-A-Mo (sens horaire)

Calcul depuis D	
$D_{DA} =$	3 950,41 m
$G_{DA} =$	45,7560 gon
$\alpha =$	52,9892 gon
$G_{DMo} =$	98,7452 gon
$E_{Mo} =$	982 279,46 m
$N_{Mo} =$	3 153 272,88 m

Vérification depuis A	
$\beta =$	47,6403 gon
$G_{Amo} = G_{AD} - \beta$	198,1158 gon
$E_{Mo} =$	982 279,46 m
$N_{Mo} =$	3 153 272,88 m

### 2 - Calcul des paramètres des segments-distances

Points	$G_{PiMo}$ (gon)	G seg-dist (gon) $G_{IPI} = G_{PiMo} - 100$	$Dapp$ (m) $Pi - Mo$	Diff. de dist. (cm) $\Delta_{cm} = Dobs - Dapp$	1/2 plage $t$ (cm) $K(1 + D_{km}), K=1,2$
54 (D)	98,7452	398,7452	2 688,06	0,0	4,4
51 (A)	198,1158	98,1158	2 921,54	0,0	4,7
53 (C)	350,8637	250,8637	4 416,20	-10,8	6,5
52 (B)	277,9461	177,9461	3 452,69	-3,5	5,3

3 - Mesures sur graphique  $\Delta E = 0,03$  m donc :  $E_M = 982\,279,49$  m  
 $\Delta N = -0,04$  m  $N_M = 3\,153\,272,84$  m

### 4 - Vérifications

$Rmq = 4,5$  cm.

Tolérance sur  $Rmq$  :

12 cm

(canevas ordinaire)

Points $Pi$	Dist définitive $Dd\acute{e}f$ (m)	Écarts linéaires $ri_{cm} =  Dobs - Dd\acute{e}f $	Tolérance sur $ri$ (cm)
54 (D)	2688,10	3,5	20
51 (A)	2921,58	4,1	20
53 (C)	4416,14	5,4	20
52 (B)	3452,67	1,5	20

#### ◆ résolution graphique



L'outil informatique permet de construire la zone d'indécision en économisant les calculs précédents. L'environnement de travail est défini dans le menu FORMAT / CONTRÔLE DES UNITÉS : angles en grades, quatre chiffres

significatifs, longueurs en unités décimales et avec deux chiffres après la virgule, zéro des angles au nord, sens de rotation horaire.

### 1 - Dessin des cercles représentant les visées

Définissez quatre Calques nommés A, B, C et D avec des couleurs différentes (bouton CALQUES à gauche de la barre d'outils standard).

Calque A courant. **CERCLE** de centre 982193, 156193.14 et de rayon 2921.54

Calque B courant. **CERCLE** de centre 985527.04, 154445.19 et de rayon 3452.66

Calque C courant. **CERCLE** de centre 985359.53, 150108.08 et de rayon 4416.09

Calque D courant. **CERCLE** de centre 979591.92, 153219.9 et de rayon 2688.09

**Zoom Etendu** pour voir l'ensemble du dessin.

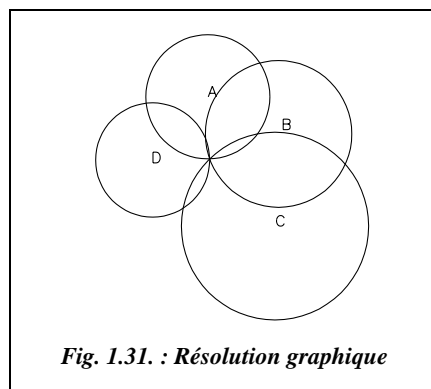


Fig. 1.31. : Résolution graphique

Repérez éventuellement chaque point avec du texte : **TXTDYN** (ou menu **DESSIN / TEXTE**), point de départ **CEN**tre de chaque cercle, hauteur du texte 250, angle 100. Vous devez obtenir le résultat de la figure 1.31.

Sauvegardez cette vue : commande **VUES**, option **SAuvegarder** (ou menu **VUE / VUES EXISTANTES / NOUVELLE**), appelez-la par exemple **G** (pour général).

### 2 - Repérage des points doubles

**ZOOM Fenêtre** (plusieurs fois jusqu'à voir la zone à l'échelle maximale). Attention, entre chaque zoom, appliquez la commande **REGEN** pour recalculer le dessin (sinon la représentation des cercles n'est pas assez précise).

Sauvegardez cette vue : commande **VUES** **SAuvegarder**, appelez-la par exemple **C**.

Créez un nouveau calque **ZONE INDECISION** dans une nouvelle couleur, rendez-le courant.

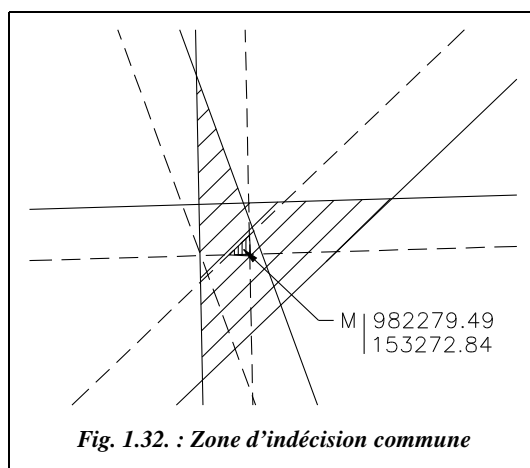


Fig. 1.32. : Zone d'indécision commune

Dessinez son contour au moyen d'une *POLYLIGNE* allant d'*INT*ersection en *INT*ersection.

Vous pouvez la hachurer : menu DESSIN / HACHURAGE, choisissez le motif ANSI31, échelle 0.005 et cliquez sur la polyligne contour de la zone (ou répondez *D* pour Dernier objet dessiné, à la question portant sur le choix des objets).

### 3 - Réduction de la zone d'indécision

Calculez, pour chaque visée, le terme  $t_{cm} = K.(1 + D_{km})$  en prenant un coefficient *K* arbitraire, ici  $K = 1,1$  (vous pouvez faire appel à la calculatrice de Windows si le calcul ne peut être fait de tête).

*DECALER* chaque cercle par la valeur calculée pour *t*, donner le sens de décalage en cliquant avec la souris.

Placez le point M au « centre » de la zone réduite et lisez ses coordonnées par *ID*. Vous pouvez de la même manière obtenir les coordonnées des six points doubles pour vérifier les calculs par exemple.

### 4 - Impression sur format A4

Avant d'imprimer (ou de tracer), vérifiez dans le « panneau de configuration » de Windows que l'imprimante système est en mode portrait.

Calculez l'échelle de sortie : format A4, (210 mm × 297 mm) moins une marge de 2 × 5 mm soit (200 mm × 287 mm). Les dimensions de la zone à tracer sont obtenues avec la commande *DISTANCE* : cliquez deux points donnant la diagonale du rectangle entourant la zone à tracer et lisez les dimensions en X et Y (par exemple ici pour la figure 1.31. : 13 500 m × 14 000 m). Donc on choisit par exemple à l'échelle 1/100 000 (ou 1/75000).

Pour retourner à la vue générale, *VUES* *Rappel* *G*.

Sélectionnez le menu FICHIER / IMPRIMER... puis :

- indiquez le périphérique choisi (votre imprimante) : sélectionnez-la éventuellement avec le bouton MODIFIER LES PARAMETRES (choix du traceur dans la liste déroulante et choix de l'orientation) ;
- réglez l'unité (mm) et le format (A4 ou MAX) ;
- saisissez la fenêtre de tracé avec la souris (bouton FENETRE suivi du bouton SAISIR) ;
- réglez l'orientation (rotation à 0) et l'origine (à zéro en X et en Y) du tracé ;
- donnez l'échelle 1/100 000 (1 mm papier = 100 000 mm réel = 100 unité dessin car 1 unité dessin vaut 1 m soit 1 000 mm) : donc entrez (**1 mm tracé = 100 unités dessin**) ;
- demandez un aperçu Total avant impression ; s'il est satisfaisant, validez par OK puis ENTRÉE.

Pour imprimer la zone réduite : rappelez la vue C, régénérez le dessin (*REGEN*) puis dans la case de dialogue IMPRIMER... redéfinissez la fenêtre de tracé. La zone à tracer représente 34 cm × 29 cm, on passe donc à l'échelle 1/2, ce qui donne (1 mm tracé = 2 mm réels = 0,002 unité dessin), soit (1000 = 2) ou (**500 = 1**).

Pour les sorties à une échelle donnée, voir aussi le chapitre 10 du tome 1, paragraphe 2.4. où sont détaillées les notions d'espace-objet et d'espace-papier.

#### ◆ extraits du tableau TRIANGU.XLS



Excel 7

Le tableau suivant utilise la méthode des moindres carrés pour arriver au résultat. Toutes les formules utilisées sont indiquées.

Le point Mo y est différent car il est calculé à partir de A et B : le résultat final ne change pas si on modifie ce choix.

Le résultat final est comparable à la résolution graphique, l'écart sur le point définitif ne dépassant pas 2 cm.

Remarquez que le tableau effectue les calculs de réduction : ce sont donc les valeurs lues sur le terrain qui y figurent. Les paramètres de réduction sont les suivants : altitudes des points, rayon terrestre et coefficient d'altération linéaire.

Les paramètres de calcul de la résolution aux moindres carrés sont :

- $D_j$  et  $G_j$  : distances et gisements de chaque point  $P_j$  vers le point approché Mo ( $D_{P_j-Mo}$  et  $G_{P_j-Mo}$ ) ;
- $\Delta_j$  (en mm) sont les écarts linéaires pour chaque point  $P_j$  :  $D_{obs} - D_{app}$ .

Les termes dx et dy sont fournis par la résolution du système de deux équations à deux inconnues donné en (6). Ils sont obtenus directement en mètre.

**Station** : 301    **Altitude** : 130,00 m    Rayon terre :  $R = 6\,372$  km  
 Coeff. d'altération linéaire :  $kr = -9$  cm/km

#### 1 - Points d'appui

Pt	X Est m	Y Nord m	H Altitude m	Distances $D_{i\,obs}$ m	$D_o$ ellipsoïde m	$D_r$ projection m	$G_{app}$ Pi sur Mo gon	$D_{app}$ Pi à Mo m	$\Delta_i$ mm
51	982 193,00	3 156 193,14	129,95	2921,863	2921,803	2921,540	198,1158	2921,540	0
52	985 527,04	3 154 445,19	128,65	3453,041	3452,971	3452,660	277,9461	3452,695	-35
53	985 359,53	3 150 108,08	131,21	4416,578	4416,487	4416,090	350,8637	4416,197	-107
54	979 591,92	3 153 219,90	132,13	2688,358	2688,302	2688,060	98,7452	2688,060	0

$n = 4$  points d'appui

**2 - Calcul de  $D_{AB}$ ,  $G_{AB}$ ,  $\alpha$  :** Mo est calculé à partir des points 51 et 54.

$$D_{AB} = 3950,414 \text{ m} \quad \cos \alpha = (D_{AB}^2 + D_A^2 - D_B^2) / (2 \cdot D_{AB} \cdot D_A)$$

$$G_{AB} = 245,7560 \text{ gon} \quad \alpha = 47,6402 \text{ gon} \quad G_{AB} + \alpha = 293,3963 \text{ gon}$$

$$G_{AB} - \alpha = 198,1158 \text{ gon}$$

**3 - Point approché :** Mo à gauche du vecteur AB (Mo' à droite) :

$$G_{AMo} = 198,1158 \text{ gon} \quad G_{AMo'} = 293,3963 \text{ gon}$$

$$X_{Mo} = X_A + D_A \cdot \sin(G_{AMo}) = 982\,279,46 \text{ m} \quad X_{Mo'} = 979\,287,16 \text{ m}$$

$$Y_{Mo} = Y_A + D_A \cdot \cos(G_{AMo}) = 3\,153\,272,88 \text{ m} \quad Y_{Mo'} = 3\,155\,890,63 \text{ m}$$

**4 - Coordonnées du point définitif M (moindres carrés)**

$$X_M = X + dx = 982\,279,49 \text{ m} \quad dx = 0,028 \text{ m} (b \cdot e - c \cdot d) / (a \cdot d - b^2)$$

$$Y_M = Y + dy = 3\,153\,272,86 \text{ m} \quad dy = -0,019 \text{ m} (b \cdot c - a \cdot e) / (a \cdot d - b^2)$$

**5 - Vérification des tolérances**

Point	Ddéf Pi à M m	ri Dobs-Ddéf cm	Tolérances sur ri		Bilan
			Précision cm	Ordinaire cm	
51	2921,561	2,0	4	20	T.Bon
52	3452,675	1,5	4	20	T.Bon
53	4416,164	7,4	4	20	Bon
54	2688,087	2,7	4	20	T.Bon

Nombre de visées de multilatération :  $n = 4$

Tolérances sur Rmq :

Rayon quadratique moyen d'indécision :

– précision : 2,5 cm :

$$Rmq = \sqrt{((\sum Ri^2) / (n - 1))} = 4,8 \text{ cm Bon}$$

– ordinaire : 12 cm

**6 - Système d'équations résolu (résolution matricielle)**

$$a \cdot dx + b \cdot dy + c = 0$$

$$a = 23,7603 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(\sin(Gj) / Dj)^2$$

$$b \cdot dx + d \cdot dy + e = 0$$

$$b = 0,0423 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(\sin(Gj) \cdot \cos(Gj) / Dj^2)$$

$$c = -0,6617 - 10^5 \cdot \Sigma(\sin(Gi) \cdot \Delta j / Dj^2)$$

$$d = 15,3115 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(\cos(Gj) / Dj)^2$$

Dj en m, Gj en gon, Δj en mm

$$e = 0,2947 - 10^5 \cdot \Sigma(\cos(Gj) \cdot \Delta j / Dj^2)$$



## 5 L'INTERSECTION

Comme la multilatération, cette deuxième méthode est relativement simple à comprendre. Mais en termes de manipulation sur le terrain, elle nécessite plus de travail car chaque point d'appui est stationné et à chaque station un *Gomoyen* de station est calculé.

Les principes déjà développés dans la multilatération ne seront pas repris dans le détail.

### 5.1 Détermination d'un point approché à partir de deux visées

On détermine les coordonnées d'un point approché  $M_o$  à partir de deux visées d'intersection correctement choisies (lectures précises, visées longues, se coupant sous un angle favorable, c'est-à-dire proche de 100 gon). Les deux points choisis sont nommés A et B (fig. 1.33.).

Les formules de Delambre donnent :

$$Y_{M_o} = Y_A + \frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) \cdot \tan G_B}{\tan G_B - \tan G_A}$$

$$X_{M_o} = X_A + (Y_{M_o} - Y_A) \cdot \tan G_A$$

La démonstration et les cas particuliers sont traités au paragraphe 1.2. du chapitre 4.

Les gisements  $G_A$  et  $G_B$  sont connus à 200 gon près.

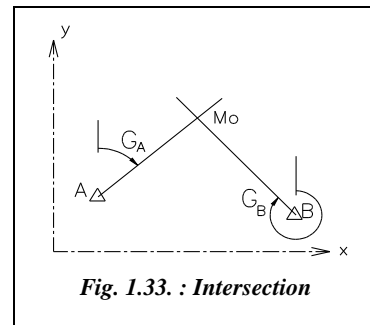


Fig. 1.33. : Intersection

### 5.2 Conventions et définitions

#### 5.2.1 Lieux-droites

On appelle « lieux-droites », sur le schéma de construction graphique du point M, les lieux géométriques possibles du point M, c'est-à-dire l'ensemble des  $n$  visées issues des  $n$  points d'appui stationnés.

Le nombre de points doubles est une combinaison de  $n$  visées prises deux à deux, soit :

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)} = \frac{n(n-1)}{2}$$

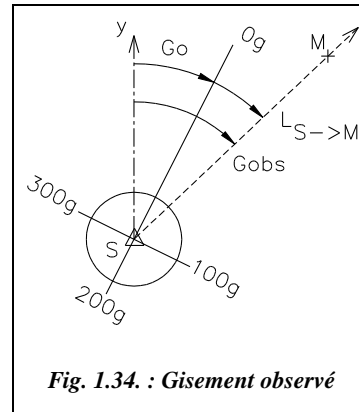
Pour  $n = 4$  visées, on trouve six points  $M_o$  possibles.

## 5.2.2 Gisement observé d'une visée

Un *G0moyen* de station est calculé pour chaque point d'appui stationné.

Le gisement observé  $G_{obs}$  d'une visée sur le point cherché M est donc la somme du *G0moyen* de station et de la lecture angulaire sur le point M (fig. 1.34.). Il est donc calculé uniquement à partir des données par la formule :

$$G_{obs} = G0_S + L_{S \rightarrow M}$$



## 5.2.3 Gisement approché

Le gisement approché est le gisement  $G_{app}$  calculé à partir des coordonnées du point approché Mo. Pour l'obtenir, il faut donc avoir calculé les coordonnées du point Mo.

Pour chaque station S, on a :  $G_{app} = G_{SMo}$

C'est grâce au gisement  $G_{app}$  qu'il est possible de dessiner et d'orienter les visées dessinées dans un premier temps autour du point Mo sur le graphique (à grande échelle) de construction des lieux-droites.

## 5.2.4 Différence de gisement

C'est la différence entre le gisement observé et le gisement approché :  $\Delta = G_{obs} - G_{app}$

La différence de gisement  $\Delta$  permet de calculer le déplacement et d'en donner le signe.

Le signe de  $\Delta$  est choisi par convention tel que (voir fig. 1.35.) :

- si  $\Delta < 0$  alors  $G_{app} > G_{obs}$  donc le lieu-droite issu de la station considérée est situé à gauche de la visée.
- si  $\Delta > 0$  alors  $G_{app} < G_{obs}$  donc le lieu-droite issu de la station considérée est situé à droite de la visée.

Remarquez que l'on retrouve ainsi la même convention qu'en multilatération.

## 5.2.5 Sensibilité et déplacement d'une visée

Ces termes sont définis au paragraphe 9.4. du chapitre 5.

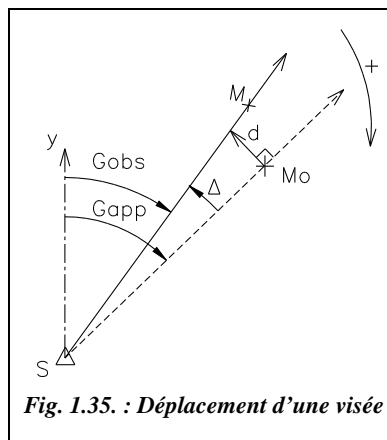
Rappelons que la sensibilité d'une visée est le déplacement de son extrémité pour un angle de 0,1 mgon (1 dmgon) ; elle est définie par la formule :

$$s_{\text{cm/mgon}} \approx 1,57 \cdot D_{\text{km}}$$

Le déplacement correspond à une variation angulaire de  $\Delta$  en mgon, c'est-à-dire :

$$d_{\text{cm}} = s_{\text{cm/mgon}} \cdot \Delta_{\text{mgon}}$$

Le déplacement est donné avec son signe qui est le même que celui de l'angle orienté  $\Delta$ .



Sur la figure 1.35. on peut voir le sens du vecteur déplacement  $d$  en fonction de son signe :

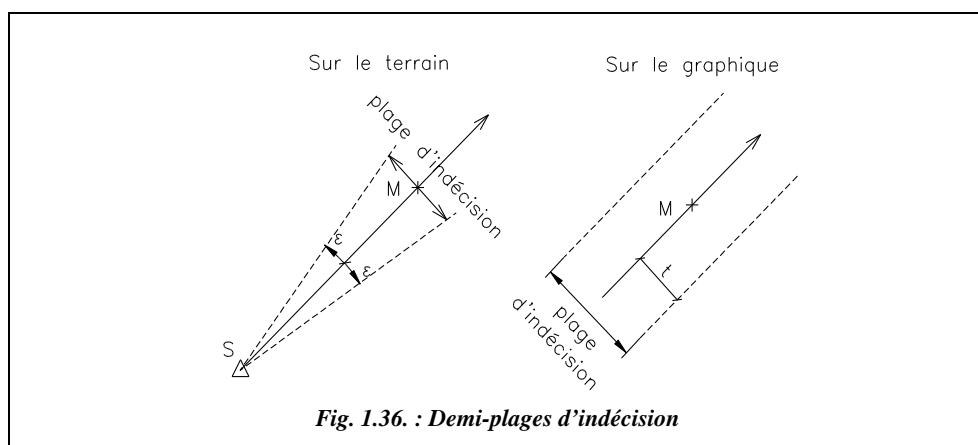
- si  $\Delta < 0$ , le déplacement s'effectue vers la gauche ;
- si  $\Delta > 0$ , le déplacement s'effectue vers la droite.

Cette valeur  $d$  donne le déplacement à effectuer pour chaque lieu-droite : c'est la distance séparant la position réelle de chaque lieu-droite du point approché Mo.

Le déplacement de chaque lieu-droite est fait parallèlement à lui-même, ce qui est une très bonne approximation compte tenu de la taille du schéma réalisé (zone comprise dans un cercle d'environ 1 m de diamètre) par rapport aux distances de visées (plusieurs kilomètres), l'angle  $\Delta$  étant très petit (de l'ordre de quelques mgon).

### 5.2.6 Demi-plages d'indécision

À ce stade, nous pouvons dessiner la zone d'indécision sur un graphique à grande échelle.



Si elle est trop grande et qu'il faut la réduire, on procède comme suit :

Considérant qu'au moment des mesures tous les points anciens sont connus avec une précision homogène et que toutes les observations sont effectuées dans les mêmes conditions (opérateur, appareils, vent, etc.), on affecte à chaque observation la même erreur angulaire  $\pm \varepsilon$ . Cette erreur angulaire  $\pm \varepsilon$  donne un déplacement en bout de visée qui représente la plage d'indécision dans laquelle peut se situer le point M (fig. 1.36.), soit :

$$t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km} \cdot \varepsilon_{mgon}$$

L'erreur angulaire  $\varepsilon$  étant la même pour toutes les visées, on lui affecte la valeur de 1 mgon ; les plages deviennent alors directement proportionnelles à la distance de visée  $D$ ,  $t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km}$ . Pour des raisons pratiques, on multiplie ensuite la valeur de la largeur de la plage par un coefficient  $K$  arbitraire choisi de manière à rendre possible la construction graphique.  $K$  est donc fonction de l'échelle choisie pour le graphique. En fait, la constante  $K$  englobe le coefficient de conversion 1,57 et l'erreur angulaire  $\varepsilon$ .

La largeur de chaque demi-plage est finalement :  $t_{cm} = K \cdot D_{km}$

Seules les demi-plages « utiles » sont construites sur le graphique.

### 5.2.7 Gisement définitif

Le point M ayant été déterminé graphiquement par rapport au point Mo, il est possible de calculer les gisements dits définitifs  $G_{def}$  de chaque station vers le point M à l'aide de la formule suivante :

$$G_{def} = G_{SM}$$

### 5.2.8 Écarts d'orientation

L'écart d'orientation est la différence entre le gisement observé et le gisement définitif ; il est usuellement exprimé en mgon par la formule :

$$e_{mgon} = (G_{obs} - G_{def}) \cdot 1\,000$$

Cet écart est soumis à la même tolérance que les écarts d'orientation du calcul des  $G_{moyen}$  de chaque station :

$$T_{mgon} = \sqrt{\frac{n-1}{n} \left( 1 + \frac{162}{Dm^2} \right)}$$

- $n$  est le nombre de visées d'orientation pour chaque station.
- $Dm$  (en km) est la longueur moyenne des visées sur une station.

Pour  $Dm \approx 3$  km, distance moyenne entre sommets du réseau d'appui en canevas ordinaire dans l'arrêté du 20 janvier 1980, la formule devient :

$$T_{mgon} = 4,3 \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

### 5.2.9 Écart moyen quadratique d'orientation

L'écart moyen quadratique est une valeur statistique caractérisant l'ensemble de la manipulation. Il est donné par la formule suivante :

$$Emq = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} e_i^2}{N-1}}$$

- La somme des  $e_i$  englobe les mesures de  $G0$  moyen.
- $N$  est le nombre total d'écarts  $e_i$  :  $G0$  moyen plus intersection .
- $Emq$  est exprimé en mgon, comme  $e$ .

Cet écart est soumis à tolérance, à savoir : .

$$T_{mgon} = 1,7 \frac{\sqrt{2N-3} + 2,58}{\sqrt{2N}}$$

### 5.2.10 Écarts linéaires

L'écart linéaire est la valeur du déplacement d'une visée correspondant à un écart angulaire  $e$  ; il est exprimé par la formule :

$$r_{cm} = 1,57 \cdot D_{km} \cdot e_{mgon}$$

Il y a autant d'écarts linéaires que de visées d'intersection. La tolérance sur cet écart linéaire est de 20 cm en canevas ordinaire.

### 5.2.11 Rayon moyen quadratique d'indécision

Défini seulement autour du point définitif  $M$ , le rayon moyen quadratique d'indécision est donné par la formule ci-contre :

$N_i$  est le nombre de visées d'intersection (quatre en général).

La tolérance en canevas ordinaire est de 12 cm (en canevas de précision, on prend 2,5 cm comme valeur usuelle).

$$Rmq = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} r_i^2}{N_i - 1}}$$

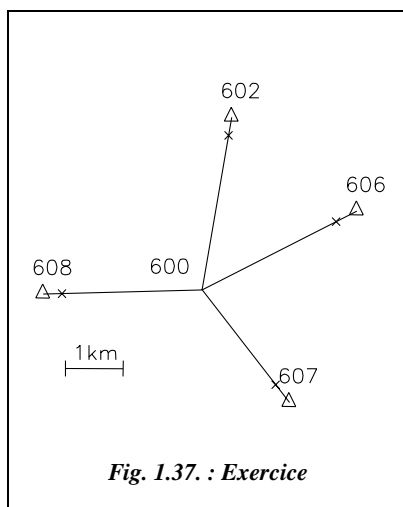
## 5.2.12 Exemple de calcul

Soit à vérifier les coordonnées du point 600 du canevas de base ordinaire. La détermination s'effectue par intersection à partir de quatre points anciens. Les données et les mesures sont indiquées sur le tableau ci-après.

Points P	E (m)	N (m)	$L_{P \rightarrow M}$ (gon)	G0moyen (gon)	Écarts au G0 (mgon)	Dm (km)
602	982 133,65	3 155 623,87	340,7968	270,0414	1,2 - 1,6 - 1,3	3,1
606	984 301,79	3 154 001,38	200,0013	70,0424	0,5 - 0,9 - 1,1	2,9
607	983 131,67	3 150 688,88	232,9394	125,0621	0,5 - 0,6 - 0,4 - 0,8	3,2
608	978 865,60	3 152 564,34	239,9597	258,3501	1,1 - 0,9 - 1,3	2,9

La démarche suivante est conseillée :

**1 -** Réalisez un croquis des points d'appui et des visées (à petite échelle, de l'ordre de 1/50 000 ou 1/100 000, voir fig. 1.37.).



**2 -** Choisissez les visées pour le calcul du point approché Mo ; les visées choisies doivent être longues, homogènes et se coupant sous un angle favorable (proche de 100 gon) : par exemple (fig. 1.37.), les visées issues des points d'appui 606 et 607 que nous appelons respectivement A et B.

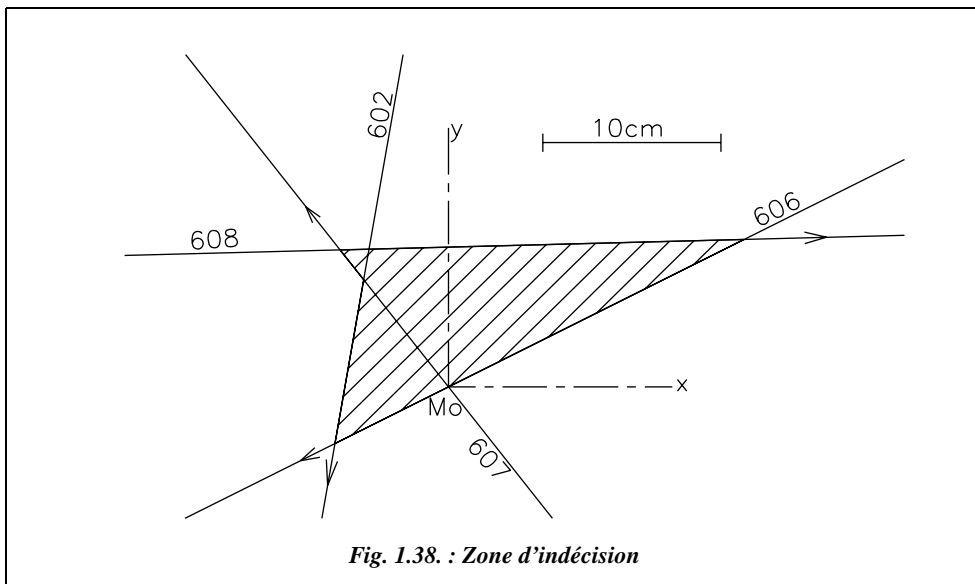
Notez que le choix des points d'appui est particulièrement important dans cette méthode : en effet, des visées pratiquement parallèles peuvent donner une zone d'indécision trop grande ou disproportionnée.

**3 -** Calculez les coordonnées du point Mo, les gisements approchés et les différences de gisement avec leur signe (voir les tableaux de calcul plus loin dans ce paragraphe).

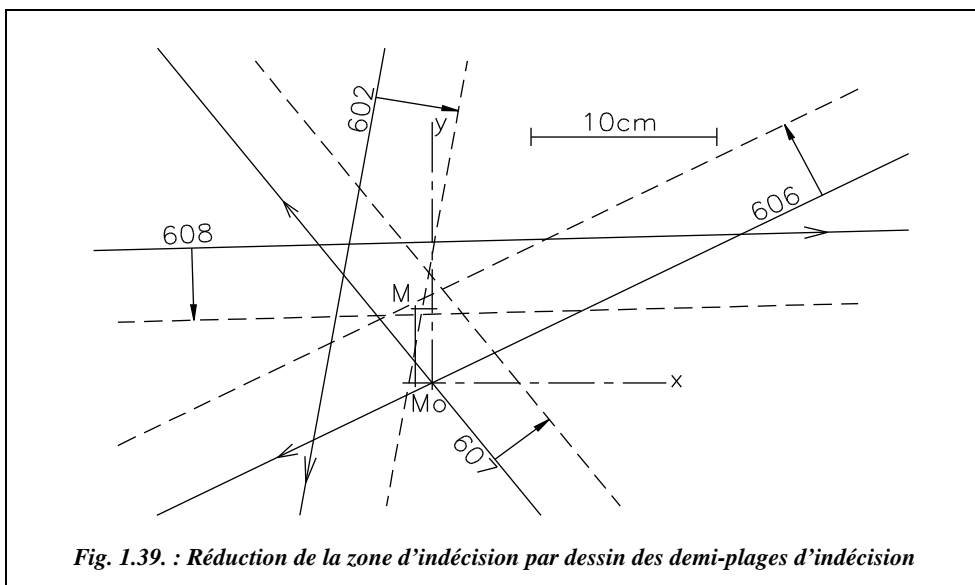
**4 -** Dessinez sur un graphique à grande échelle (voir fig. 1.38.) un repère centré en Mo. À partir des gisements approchés, reportez les lieux-droites passant tous par Mo. Décalez les lieux-droites n'ayant pas servi au calcul du point Mo (ici 608 et 602) de la valeur du déplacement et dans le sens donné par le signe de la différence de gisements. Vous devez obtenir la zone d'indécision de la figure 1.38. Effacez ensuite les lieux-droites qui ont été déplacés pour rendre le dessin plus lisible.



Graphique autour du point approché  $M_0$  : notez que seules les visées issues de 602 et 608 ne passent pas par  $M_0$ .



Le dessin des demi-plages utiles est représenté sur la figure 1.39. ci-dessous.



Positionnement du point définitif  $M$  : on mesure  $\Delta x = -0,01$  m et  $\Delta y = +0,04$  m.

On en déduit les coordonnées de  $M$  : ( $E_M = 981\ 620,30$  m ;  $N_M = 3\ 152\ 637,45$  m)



### Vérification des tolérances

Points Pi	G <sub>déf</sub> (gon) G <sub>PiM</sub>	ei (mgon) G <sub>obs</sub> - G <sub>déf</sub>	Tolérance sur ei (mgon)	ri (cm) 1,57.D <sub>km</sub> .ei <sub>mgon</sub>	Tolérance sur ri (cm)
602	210,8373	0,9	3,7	4,1	20
606	270,0446	-0,9	3,9	-4,0	20
607	358,0019	-0,4	3,8	-1,7	20
608	98,3107	-0,9	3,9	-4,0	20

$$Emq = 1,0 \text{ mgon } (N = 17)$$

$$\text{Tolérance sur } Emq : 2,4 \text{ mgon}$$

$$Rmq = 4,2 \text{ cm } (Ni = 4)$$

$$\text{Tolérance sur } Rmq : 12 \text{ cm.}$$

La manipulation et les calculs semblent donc valides.

**Détermination d'un point par intersection :** calcul aux moindres carrés.

(1) Coordonnées des points d'appui Station : 600

N°	Points Pi	Xi (m)	Yi (m)	Lect. Li de Pi sur M (gon)	G <sub>0i</sub> moyen de station (gon)	Gi obs G <sub>0i</sub> + Li (gon)	nb de visées nj	D moy. visées (km)
1	602	982 133,65	3 155 623,87	340.7968	270.0414	210,8382	3	3,1
2	606	984 301,79	3 154 001,38	200.0013	70.0424	270,0437	3	2,9
3	607	983 131,67	3 150 688,88	232.9394	125.0621	358,0015	4	3,2
4	608	978 865,60	3 152 564,34	239.9597	258.3501	98,3098	3	2,9

Nombre de visées  $Ni = 4$

Total : 13

(2) Point approché Mo : à partir des points 606 et 607

$$X_{Mo} = 981\ 620,31 \text{ m}$$

$$Y_{Mo} = 3\ 152\ 637,41 \text{ m}$$

(3) Calcul du point définitif M

$$X_M = X_{Mo} + dx = 981\ 620,28 \text{ m}$$

$$dx = -0,031 \text{ m}$$

$$Y_M = Y_{Mo} + dy = 3\ 152\ 637,46 \text{ m}$$

$$dy = 0,042 \text{ m}$$

(4) Vérification des tolérances

Pi	Gi app	Dist. Dr <sub>i</sub>	Δi	Gi déf	ei	Écart linéaire ri (cm)	Résidu v''i (dmgon)	Tolér. sur ei (mgon)			
	Pi → Mo (gon)	Pi → Mo (m)	G <sub>obs</sub> - G <sub>app</sub> (dmgon)	Pi → M (gon)	G <sub>obs</sub> - G <sub>def</sub> (mgon)			ordi	Pre	n	Bilan
602	210,8370	3030	12	210,8377	0,5	2,4	4	3,5	0,8	3	T.bon
606	270,0437	3008	0	270,0448	-1,1	5,3	-11	3,6	0,8	3	bon
607	358,0015	2466	0	358,0017	0,2	0,8	0	3,7	0,9	4	T.bon
608	98,3116	2756	-18	98,3106	-0,8	3,3	-9	3,8	0,9	3	T.bon

$N = 17$  Tolérance sur  $ri$  : 20 cm (ordinaire), 4 cm (précision)

Écart quadratique moyen sur toutes les visées (orientation + intersection) : 0,9 mgon

Tolérance sur  $Emq$  :  
– précision  $0,7(\sqrt{2N-3} + 2,58) / \sqrt{2N} = 1,0$  mgon  
– ordinaire  $1,7(\sqrt{2N-3} + 2,58) / \sqrt{2N} = 2,4$  mgon

Écart linéaire : rayon quadratique moyen d'indécision  $Rmq$  : 3,9 cm

Tolérance sur  $Rmq$   
– précision 2,5 cm (pris usuellement)  
– ordinaire 12 cm

### (5) Système à résoudre

$$A dx + B dy + C = 0 \quad dx = -0,031 \text{ m } (B \cdot E - C \cdot D) / (A \cdot D - B^2)$$

$$B dx + D dy + E = 0 \quad dy = 0,042 \text{ m } (B \cdot C - A \cdot E) / (A \cdot D - B^2)$$

$$A = 79,6446 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(nj \cdot (\cos Gj / Dj)^2)$$

$$B = 11,9591 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(nj \cdot \sin Gj \cdot \cos Gj / Dj)$$

$$C = 1,9312 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(nj \cdot \Delta j \cdot \cos Gj / Dj)$$

$$D = 91,4577 \cdot 10^8 \cdot \Sigma(nj \cdot (\sin Gj / Dj)^2)$$

$$E = -3,4799 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(nj \cdot \Delta j \cdot \sin Gj / Dj)$$

#### ◆ résolution graphique



AutoCAD LT

L'environnement de travail identique à celui du paragraphe 4.3.

**1 - Dessin des lignes de visée** : calculez au préalable les gisements observés.

Créez les calques 602, 606, 607 et 608 de couleurs différentes et rendez les successivement courants : les lignes tracées font 3 500 m de long (valeur quelconque, suffisamment grande pour que ces lignes se croisent).

Calque 602 : *LIGNE* du point 982133.65,155623.87 au point @3500 < 210.8382

Calque 606 : *LIGNE* du point 984301.79,154001.38 au point @3500 < 270.0437

Calque 607 : *LIGNE* du point 983131.67,150688.88 au point @3500 < 358.0015

Calque 608 : *LIGNE* du point 978865.6,152564.34 au point @3500 < 98.3098

#### **2 - Visualisation des points doubles :**

*ZOOM* Fenêtre (plusieurs fois) jusqu'à voir la zone d'indécision (voir fig. 1.38.).

La commande *ID* permet d'obtenir les coordonnées de tous les points doubles (*INTersection* de...).

#### **3 - Réduction de la zone d'indécision :** calculez-les demi-plages.

*DECALER* par < valeur de la demi-plage > choix de l'objet <cliquez sur une visée> vers <choisir le côté vers lequel s'effectue le décalage en cliquant avec la souris>.

Répétez cette opération pour toutes les visées.

Placez le point M en dessinant un point (voir fig. 1.39.) et lire ses coordonnées par *ID* *NODal* de...

## 6 LE RELÈVEMENT

Plus complexe que les deux méthodes précédentes, le relèvement reste plus simple à réaliser sur le terrain puisqu'il ne nécessite qu'une seule station. La précision des visées angulaires étant meilleure pour des visées lointaines, c'est la méthode idéale pour de longues visées sans possibilité de mesure de distance.

### 6.1 Coordonnées approchées à partir de trois visées

On détermine les coordonnées d'un point approché  $M_0$  à partir de trois visées de relèvement correctement choisies : elles doivent être longues et bien réparties autour du point cherché  $M$  et doivent se couper sous un angle favorable (proche de 100 gon) mais en évitant les couples de visées parallèles.

Les coordonnées du point approché  $M_0$  sont calculées à partir des formules de Delambre pour le relèvement, c'est-à-dire :

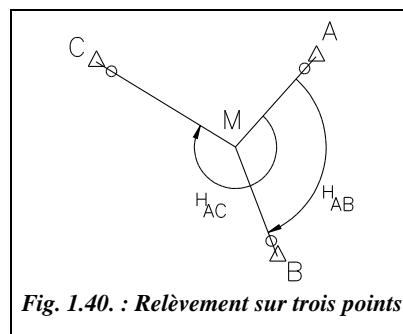


Fig. 1.40. : Relèvement sur trois points

$$\tan G_{AM} = \frac{(X_B - X_A) \cdot \cotan H_{AB} - (X_C - X_A) \cdot \cotan H_{AC} + (Y_C - Y_B)}{(Y_B - Y_A) \cdot \cotan H_{AB} - (Y_C - Y_A) \cdot \cotan H_{AC} - (X_C - X_B)}$$

$$\tan G_{BM} = \tan(G_{AM} + H_{AB}) = \frac{\tan G_{AM} + \tan H_{AB}}{1 - \tan G_{AM} \cdot \tan H_{AB}}$$

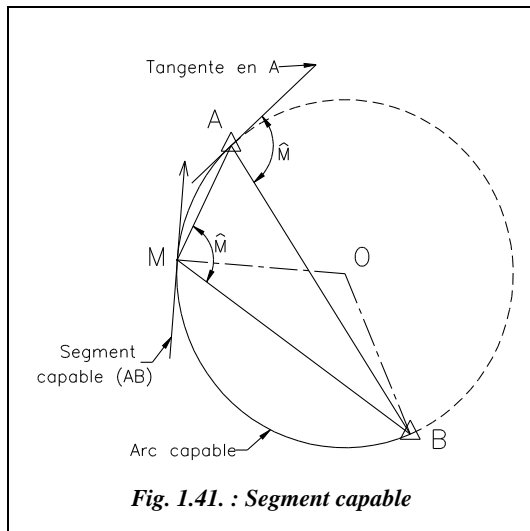
On reporte ensuite ces résultats dans les formules de Delambre utilisées pour l'intersection (voir démonstration et cas particuliers au chapitre 4, paragraphe 6).

### 6.2 Conventions et définitions

Les notions suivantes ont déjà été détaillées.

- **Arc capable** : voir le relèvement simple sur trois points (chapitre 4, § 6.).
- **Gisement approché d'une visée** : voir l'intersection (§ 5.2.3.).
- **Sensibilité et déplacement d'une visée** : voir l'intersection (§ 5.2.5.).
- **Écarts d'orientation et écart moyen quadratique d'orientation** : voir l'intersection (§ 5.2.8. et 5.2.9.).
- **Écarts linéaires et rayon moyen quadratique d'indécision** : voir l'intersection (§ 5.2.10. et 5.2.11.).

## 6.2.1 Segment capable



L'arc capable  $\widehat{AB}$  est l'ensemble des points M tels que l'angle  $\widehat{AMB}$  ait une valeur donnée  $\widehat{M}$ . Aux alentours immédiats d'un point M quelconque de l'arc capable, on peut confondre une petite portion de l'arc avec un segment de sa tangente.

Ce segment noté (AB) est appelé segment capable (fig. 1.41.).

Le dessin et l'orientation des segments capables sont déterminés par leurs gisements (voir § 6.2.3). Ceci permet donc de les dessiner tous dans un repère centré en  $M_0$  calculé précédemment.

Le nombre de segments capables à tracer est une combinaison des  $n$  visées de relèvement effectuées depuis M prises deux à deux, soit  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  segments capables.

## 6.2.2 Points triples

Chaque point approché  $M_0$  étant déterminé à partir de trois des  $n$  points d'appui, le nombre de points approchés possibles est une combinaison des  $n$  visées prises trois à trois, soit  $C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  « points triples » possibles.

Sur le graphique final, on vérifie que les segments capables placés se coupent trois à trois, d'où le nom de « points triples » pour les différents points approchés. Par exemple, pour  $n = 4$ , on obtient six segments capables et quatre points triples.

## 6.2.3 Gisement d'un segment capable

Le gisement du segment capable associé aux points I et J est noté  $G_{(IJ)}$ .

Sa valeur permet d'orienter le segment capable dessiné sur le graphique (de manière à déterminer le sens de son décalage ultérieur ; voir § 6.2.6). Étant donnée la précision de la construction graphique, on peut arrondir leur valeur au décigrade.

L'expression de  $G_{(IJ)}$  est déterminée comme suit : on retrouve l'angle  $IJM_o$  noté  $\hat{A}$ , entre le segment capable tangent en  $M_o$  et la corde  $IM_o$ .

Autour de  $M_o$ , on peut écrire :

$$G_{(IJ)} = G_{M_oI} - \hat{A}$$

Autour de  $J$ , on peut écrire :

$$G_{J M_o} + \hat{A} = G_{IJ} + 200$$

On obtient donc pour le gisement du segment capable  $IJ$  :

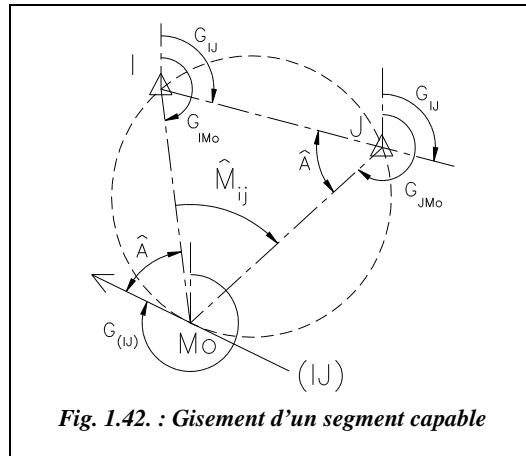


Fig. 1.42. : Gisement d'un segment capable

$$G_{(IJ)} = G_{I M_o} + G_{J M_o} - G_{IJ}$$

### 6.2.4 Angle de relèvement observé

C'est l'angle  $\widehat{IMJ}$  déduit des observations du tour d'horizon effectué en  $M$ , soit deux lectures sur deux points  $I$  et  $J$  pris dans le sens direct des graduations.

$M_{IJ}$  est un angle orienté. Il s'exprime ainsi :

$$M_{IJ \text{ obs}} = L_j - L_i$$

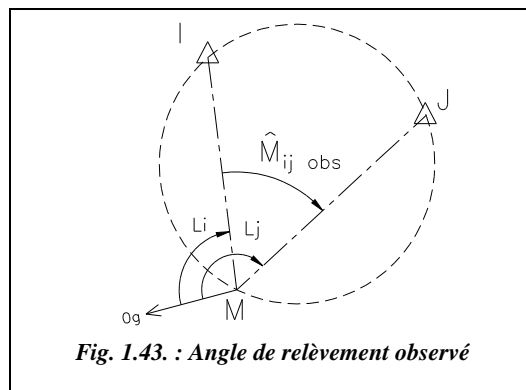
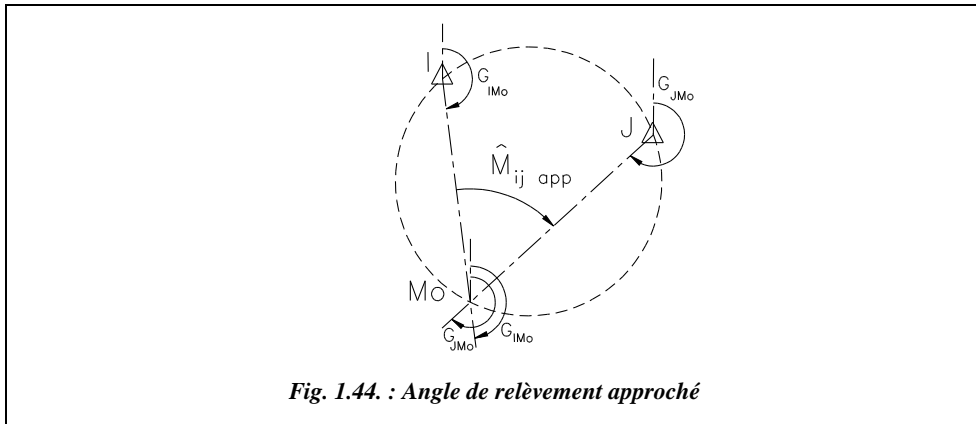


Fig. 1.43. : Angle de relèvement observé

### 6.2.5 Angle de relèvement approché

C'est l'angle de relèvement calculé à partir des gisements approchés des visées. Pour le calculer, il faut donc tout d'abord calculer les gisements approchés  $G_{app}$  de chaque point sur  $M_o$ . Il vient ensuite (fig. 1.44.) :

$$M_{IJ \text{ app}} = G_{J M_o} - G_{I M_o}$$



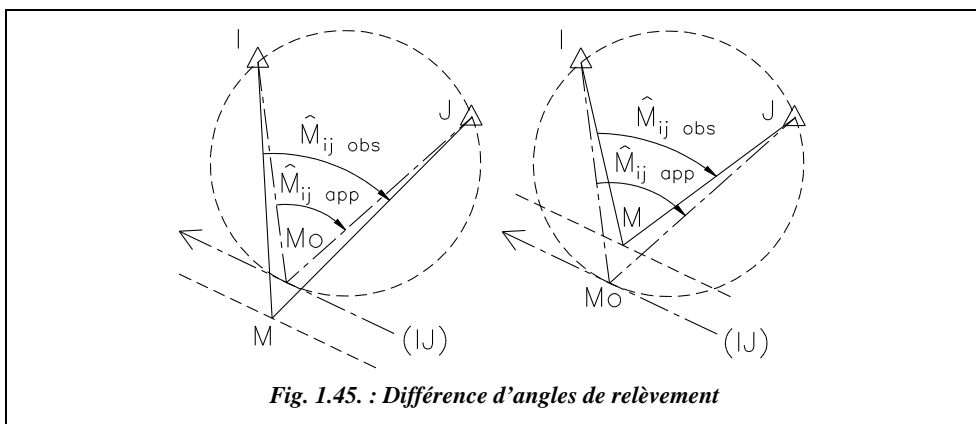
### 6.2.6 Différence d'angles de relèvement

C'est l'écart entre l'angle de relèvement observé et l'angle de relèvement approché, c'est-à-dire :

$$\Delta = M_{IJ \text{ obs}} - M_{IJ \text{ app}}$$

$\Delta$  est nul pour les segments passant par le point Mo, c'est-à-dire les trois segments capables issus des trois points utilisés pour le calcul du point approché Mo.

La valeur de  $\Delta$  permet de calculer le déplacement à faire subir aux segments capables ne passant pas par Mo. Le signe de  $\Delta$  donne la direction du déplacement (fig. 1.45.).



Si  $M_{IJ \text{ obs}} < M_{IJ \text{ app}}$  alors  $\Delta < 0$  : le segment capable doit être décalé vers sa gauche.

Si  $M_{IJ \text{ obs}} > M_{IJ \text{ app}}$  alors  $\Delta > 0$  : le segment capable doit être décalé vers sa droite.

La convention choisie pour l'orientation du segment capable permet de retrouver les mêmes conventions que dans l'intersection ou la multilatération.

### 6.2.7 Sensibilité et déplacement d'un segment capable

Il reste à déterminer la valeur exacte du déplacement  $d$  à faire subir à chaque segment capable.

Une très petite variation  $\Delta$  de l'angle de relèvement  $\widehat{M}$  (angle  $IMoJ$  sur la figure 1.46.) donnerait un nouveau point  $M$  tel que l'angle  $\widehat{IMJ}$  soit égal à  $\widehat{M} + \Delta$ .

Le point  $M$  est le point définitif cherché, puisque :

$$\widehat{IMJ} = M_{Iapp} + \Delta = M_{Iobs}$$

Définissons le point  $M'$  à l'intersection entre l'arc capable  $IMoJ$  et le prolongement de la droite  $IM$  : on retrouve l'angle  $\Delta$  en  $MoJM'$  puisqu'il intercepte le même arc que  $MoIM$ .

Si l'on considère qu'aux alentours immédiats du point  $Mo$  le segment capable  $(IJ)$  est parallèle à la droite  $MoM'$ , on peut facilement calculer le déplacement du segment capable  $(IJ)$  alors représenté par la longueur  $MH$  (voir fig. 1.47.).

#### ◆ Calcul du déplacement $d$

La distance  $HM$  (voir fig. 1.47.) séparant le point  $M$  du segment capable  $(IJ)$  passant par le point  $Mo$  est donc le déplacement  $d$  de ce segment capable pour une variation  $\Delta$  de l'angle de relèvement. Dans les triangles  $MHM'$  et  $M'PMo$  on peut écrire :

$$\sin C = \frac{MoP}{MoM'} = \frac{MH}{MM'} \text{ d'où } MH = MM' \cdot \frac{MoP}{MoM'}$$

L'angle  $C$  intercepte l'arc  $MoI$ . Les triangles  $IJM$  et  $MMoM'$  étant semblables, on obtient :  $\frac{MM'}{MoM'} = \frac{D_{JM}}{D_{IJ}}$  d'où  $d = MH = MoP \cdot \frac{D_{JM}}{D_{IJ}}$ .

Or, en assimilant la corde  $MoP$  à l'arc, on obtient :  $MoP \approx D_{IMo} \cdot \Delta_{rad}$

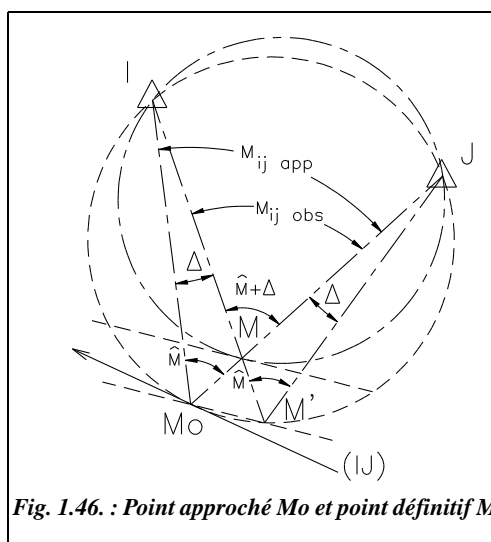


Fig. 1.46. : Point approché  $Mo$  et point définitif  $M$

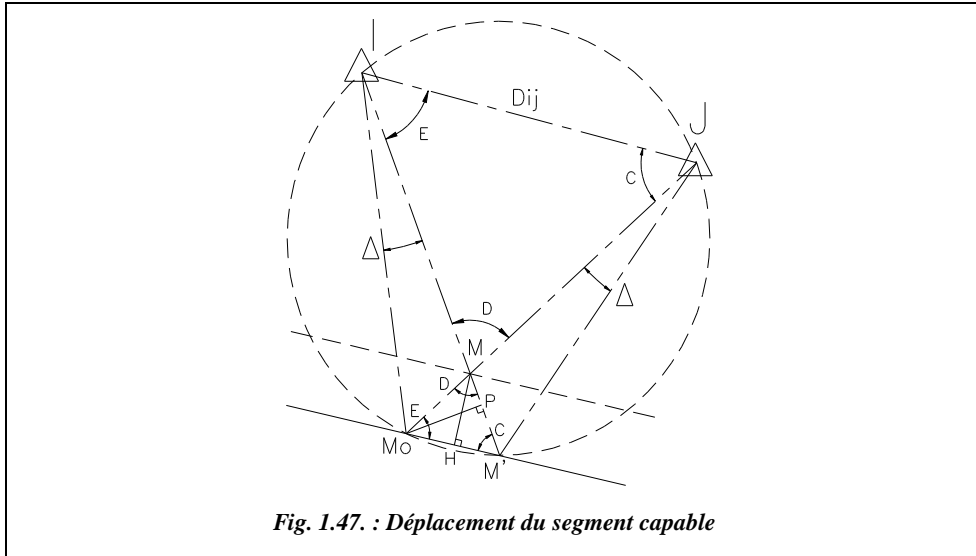


Fig. 1.47. : Déplacement du segment capable

Finalement, si l'on considère que  $IMo$  est proche de  $IM$ , on obtient l'expression suivante du déplacement  $d$  du segment capable (IJ) pour une variation  $\Delta$  de l'angle de relèvement :

$$d = \frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}} \Delta_{rad} \quad \text{donc} \quad d_{cm} = 1,57 \cdot \Delta_{mgon} \left( \frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}} \right)_{km}$$

Le terme  $\frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}}$  exprimé en kilomètre, est appelé distance fictive, notée  $Df$ , du segment capable (IJ) puisqu'il est homogène à une distance à laquelle le déplacement du segment capable est directement proportionnel.

La sensibilité du segment capable devient alors :

$$s_{cm/mgon} = 1,57 \left( \frac{D_{IM} \cdot D_{JM}}{D_{IJ}} \right)_{km}$$

### 6.2.8 Construction du point définitif

Si les points triples définissent une zone trop grande, il convient de la réduire en construisant une zone d'indécision commune (pour la méthode et les calculs, voir intersection, § 5.2.6.).

Attention : la demi-plage de sensibilité est proportionnelle à la distance fictive associée au segment capable, donc :

$$t_{cm} = 1,57 \left[ \frac{D_I \cdot D_J}{D_{IJ}} \right]_{km} \cdot \epsilon_{mgon}$$



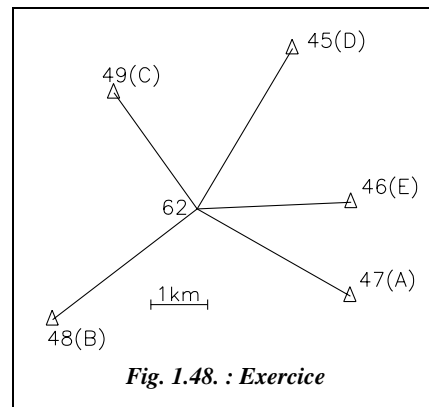
En pratique, les demi-plages sont affectées d'un coefficient  $K$  qui englobe le coefficient 1,57 et l'angle  $\varepsilon$ , donc :

$$t_{cm} = K \left[ \frac{D_I \cdot D_J}{D_{IJ}} \right]_{km} = K \cdot Df_{km}$$

### 6.3 Exemple de calcul

Le point 62 du canevas d'ensemble ordinaire a été déterminé par relèvement à partir de cinq points d'appui (45, 46, 47, 48 et 49) situés à des distances homogènes de l'ordre de 3 km. Les données et les mesures sont reprises dans le tableau suivant :

Pts	X(m)	Y(m)	L (gon)
45	983 695,71	3 158 247,39	0,0000
46	984 729,43	3 155 546,12	62,9998
47	984 713,53	3 153 893,58	98,6920
48	979 465,39	3 153 480,45	224,2876
49	980 546,82	3 157 468,79	326,0987



Déterminez les coordonnées du point 62 (M).

La démarche de résolution conseillée est la suivante.

**1 -** Réalisez un croquis du tour d'horizon à petite échelle comme sur la figure 1.48. ; pour placer approximativement le point 62, il suffit de calculer les coordonnées d'un point  $M_0$  quelconque.

**2 -** Choisissez trois visées longues et homogènes, bien réparties autour de M (62) et se coupant sous des angles favorables, par exemple : 47 - 48 - 49.

Calculez les coordonnées du point  $M_0$  avec les formules de Delambre :

$$\begin{array}{l} \tan G_{AM} = -1,7597 \\ \tan G_{BM} = 1,3101 \end{array} \quad M_0 \quad \left| \begin{array}{l} X_{M_0} = 982\,015,41 \text{ m} \\ Y_{M_0} = 3\,155\,426,90 \text{ m} \end{array} \right.$$

**3 -** Calculez les angles de relèvement observés et approchés pour tous les couples de points (ici  $N = 5$  points d'appui, donc dix segments capables et dix points triples). Calculez les différences d'angles de relèvement  $\Delta$  ; calculez des gisements  $G_{IJ}$  et les longueurs  $D_{IJ}$  des droites joignant tous les points d'appui entre eux ; puis calculez les gisements des segments capables  $G_{(IJ)}$ . Calculez enfin les distances fictives ( $D_I \cdot D_J / D_{IJ}$ ) et les déplacements  $d$ . Vérifiez dans les calculs que :

$$\begin{array}{l} \Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \Delta_{AC} = 0 \\ \Delta_{DE} = \Delta_{DA} + \Delta_{AE} = \Delta_{AE} - \Delta_{AD} \end{array} \quad \Delta_{AD} = \Delta_{BD} = \Delta_{CD} \quad \Delta_{AE} = \Delta_{BE} = \Delta_{CE}$$

4 - Dessinez la zone d'indécision sur un format A4 vertical au milieu duquel figure un repère centré en Mo : reportez les segments-distances passant tous par Mo et décalez de la valeur  $d$  de tout ceux qui sont issus des points n'intervenant pas dans le calcul de Mo (fig. 1.49-a.). Repérez les points triples et construisez une zone commune aux demi-plages d'indécision de largeur  $t$  (fig. 1.49-b.).

5 - Placez le point M puis calculez un  $G_{moyen}$  de station pour vérifier la validité de la manipulation.

◆ **calculs**



Les calculs ont été réalisés sur Excel à partir des tableaux suivants :

- FICHREL.XLS associé à la méthode graphique, peut aussi être utilisé vide pour présenter des calculs manuels.
- TRIANGU.XLS associé à un calcul aux moindres carrés.

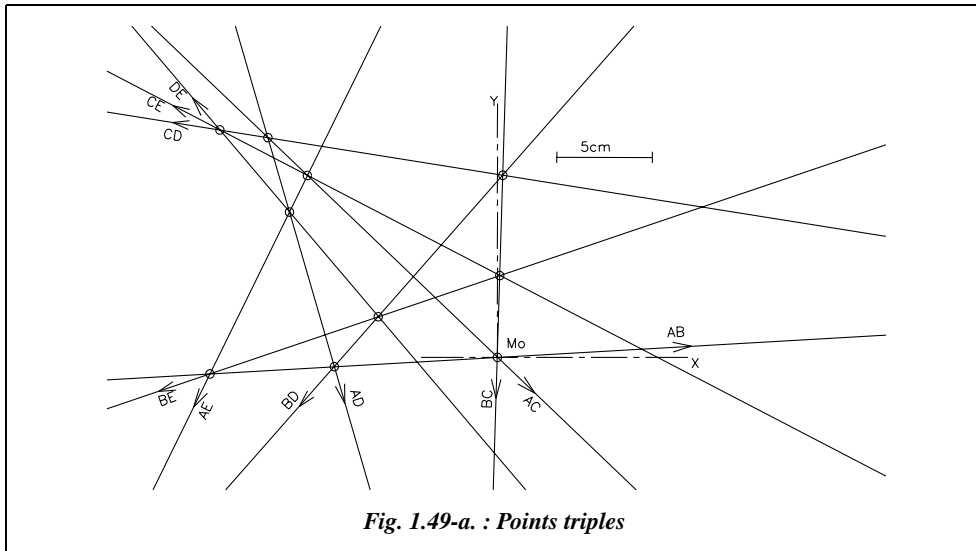
◆ **Distances et gisements approchés**

Points Pi	Gapp (gon) G <sub>PiMo</sub>	Di (km) Pi→Mo
47 (A)	332,8991	3,1
48 (B)	58,4947	3,2
49 (C)	160,3058	2,5
45 (D)	234,2048	3,3
46 (E)	297,2053	2,7

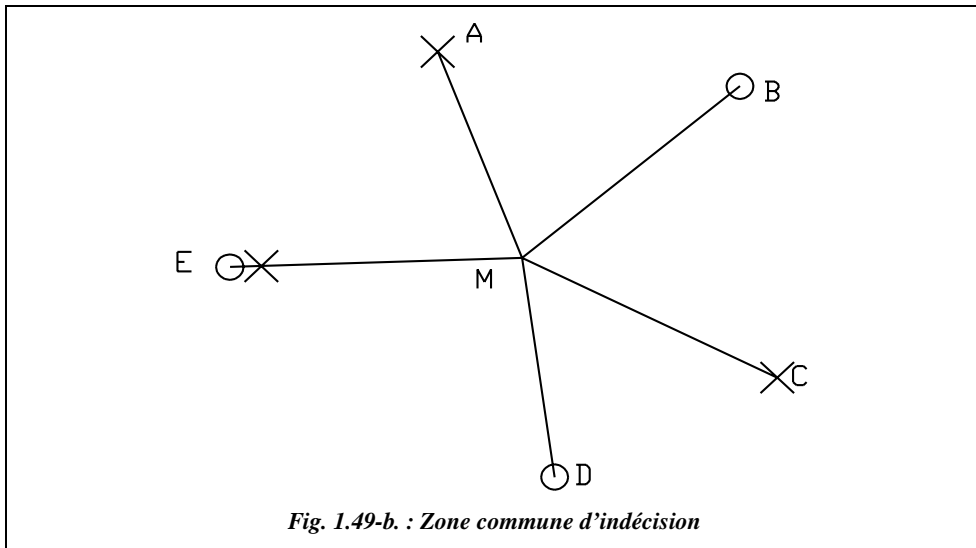
6.3.0.1 **Calculs des paramètres des dix segments capables**

Couple Pi-Pj	Mijobs H(j) - H(i)	Mijapp G <sub>JMo</sub> - G <sub>IMo</sub>	$\Delta_{mgon}$	G <sub>IJ</sub> gon	G(IJ) gon	Dij km	Dist. fict. Df <sub>km</sub>	Déplacem. d <sub>cm</sub> 1,57.Df <sub>km</sub> · $\Delta_{mgon}$
AB	125,5956	125,5956	0,0	294,9989	96,3949	5,3	1,9	0,0
AC	227,4067	227,4067	0,0	345,1455	148,0594	5,5	1,4	0,0
AD	301,3080	301,3057	2,3	385,3799	181,7240	4,5	2,3	8,3
AE	364,3078	364,3062	1,6	0,6125	229,4918	1,7	5,1	13,1
BC	101,8111	101,8111	0,0	16,8565	201,9440	4,1	2,0	0,0
BD	175,7124	175,7101	2,3	46,2075	246,4919	6,4	1,7	6,0
BE	238,7122	238,7106	1,6	76,1938	279,5062	5,7	1,5	3,9
CD	73,9013	73,8990	2,3	84,5683	309,9422	3,2	2,5	9,3
CE	136,9011	136,8995	1,6	127,4304	330,0806	4,6	1,5	3,8
DE	62,9998	63,0005	-0,7	176,7324	354,6776	2,9	3,1	-3,4

◆ *Dessin de la zone d'indécision à grande échelle*



◆ *zone commune d'indécision*



Pour l'exemple, construisons les demi-plages avec  $K = 3$  : pour ne pas surcharger encore le graphique, seules les demi-plages « utiles » sont représentées ; les autres ne réduisent pas plus la zone commune d'intersection.

On mesure entre Mo et M :  $\Delta x = -0,04$  m et  $\Delta y = 0,04$  m.

Donc le point 62 (M) définitif a pour coordonnées : 62 ( 982 015,37 ; 3 155 426,94 ).

◆ **calcul de  $G0_{moyen}$  de station en 62 (M)**

Points Pi	Gdéf. (gon) $G_{PiM}$	$G0i$ (gon) $G_{MPi} - Li$	$ei$ (mgon) $= G0i - G0$	Tolérance $ei$ (mgon)	$ri$ (cm) $1,57 \cdot D_{km} \cdot  e_{mgon} $
47 (A)	332,8994	34,2074	0,8	3,9	3,9
48 (B)	58,4936	34,2060	-0,6	3,9	2,8
49 (C)	160,3060	34,2073	0,7	3,9	2,9
45 (D)	234,2058	34,2058	-0,8	3,9	4,1
46 (E)	297,2063	34,2065	-0,2	3,9	0,8

$G0_{moyen} = 34,2066$  gon

$Emq = 0,7$  mgon

$Rmq = 3,5$  cm

Tolérance sur  $ri$  : 20 cm

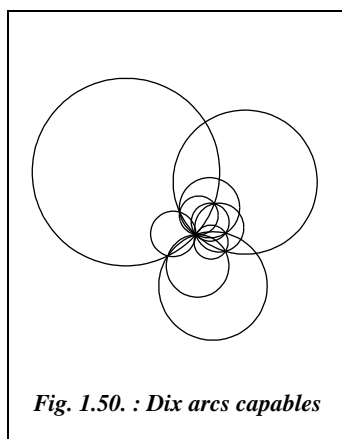
Tolérance : 2,8 mgon

Tolérance : 12 cm

◆ **résolution graphique**



Voir chapitre 4, paragraphe 6.4 la construction d'un point Mo relevé à partir de trois points d'appui (construction des deux arcs capables).



Répétez cette opération pour tous les couples de points d'appui (dix segments capables à tracer) en prenant soin de placer chacun d'entre eux dans un calque différent et dans une couleur différente (fig. 1.50.).

Faites plusieurs *Zoom* dans la zone du point M (avec régénération à chaque fois de façon qu'AutoCAD recalcule les cercles, commande *REGEN*↵).

*DECALER* ensuite les cercles de la valeur de la demi-plage pour réduire cette zone d'indécision.

Revoyez l'exemple de la multilatération (§ 4.3.) pour l'utilisation de la commande *VUES*↵ et pour la sortie papier.

◆ **résolution numérique par les moindres carrés**



Les calculs ci-après sont extraits du tableau TRIANGU.XLS (calcul aux moindres carrés).

### 1 - Points d'appui (mini 3, maxi 6)

Station : 62

Pi	Pt	X	Y	Lectures	Réduc.	Gobs	Gapp	Dr <sub>i</sub>	Δi
		m	m	Li	Hi=Li - L <sub>A</sub>	G <sub>0</sub> +Li	Mo sur Pi	Pi à Mo	
				gon	gon	gon	gon	m	dmgon
a	45	983 695,71	3 158 247,39	0,0000	0,0000	34,2071	34,2048	3283,08	23
b	46	984 729,43	3 155 546,12	62,9998	62,9998	97,2069	97,2053	2716,64	16
c	47	984 713,53	3 153 893,58	98,6920	98,6920	132,8991	132,8991	3103,37	0
d	48	979 465,39	3 153 480,45	224,2876	224,2876	258,4947	258,4947	3208,00	0
e	49	980 546,82	3 157 468,79	326,0987	326,0987	360,3058	360,3058	2515,17	0

$n = 5$  Points d'appui

$D$  moyenne : 2965,25 m

### 2 - Calcul des tangentes : points choisis pour le calcul de Mo (47, 48 et 49)

$$H_{AB} = 125,5956 \text{ gon}$$

$$H_{AC} = 227,4067 \text{ gon}$$

$$\tan H_B = -2,3517$$

$$\tan G_{AM} = -1,7597$$

$$\tan G_{BM} = 1,3101$$

### 3 - Coordonnées du point approché Mo (Delambre)

$$G_{0o} = 34,2071 \text{ gon.}$$

Le point 47 est choisi comme point A.

$$X_{Mo} = 982 015,41 \text{ m}$$

$$G_{AMo} = 332,8991 \text{ gon}$$

$$Y_{Mo} = 3 155 426,90 \text{ m}$$

$$G_{0o} = 34,2071 \text{ gon } (G_{MoA} - L_A)$$

### 4 - Coordonnées du point définitif M

$$G_0 = G_o + dG_o = 34,2066 \text{ gon}$$

$$dG_o = -5 \text{ dmgon } (-DG_o / Dt)$$

$$X_M = X + dx = 982 015,37 \text{ m}$$

$$dx = -0,038 \text{ m } (-Dx / Dt)$$

$$Y_M = Y + dy = 3 155 426,94 \text{ m}$$

$$dy = 0,038 \text{ m } (-Dy / Dt)$$

### 5 - Vérifications des tolérances

Pt	G <sub>déf</sub>	H <sub>i</sub>	G <sub>0i</sub>	Écart <sub>e</sub> ei	Toléranc. sur ei		Écart <sub>r</sub> ri	Toléranc. sur ri		Bilan
	M sur Pi gon	réduits gon	G <sub>déf</sub> - H <sub>i</sub> gon	G <sub>0i</sub> - G <sub>0</sub> mgon	Préc. mgon	Ordi. mgon	cm	Préc. cm	Ordin. cm	
45	34,2058	0,0000	34,2058	0,8	0,9	3,9	4,1	4	20	Bon
46	97,2062	62,9998	34,2064	0,2	0,9	3,9	0,8	4	20	T.Bon
47	132,8994	98,6920	34,2074	0,8	0,9	3,9	3,9	4	20	T.Bon
48	258,4936	224,2876	34,2060	0,6	0,9	3,9	2,8	4	20	T.Bon
49	360,3060	326,0987	34,2073	0,7	0,9	3,9	2,9	4	20	T.Bon

Écart quad. moy. d'orientation :

$$Emq \ 0,7 \text{ mgon}$$

Tolérance : 1,2 mgon

Rayon quad. moy. d'indécision :

$$Rmq \ 3,5 \text{ cm}$$

Tolérance : 12 cm

## 6 - Système d'équations résolu (résolution matricielle)

$a.dx + b.dy + c.dGo + d = 0$	Matrice globale	23,404	2,593	0,040	Dét. Dt
$b.dx + e.dy + f.dGo + g = 0$		2,593	35,332	0,051	0,885342
$c.dx + f.dy + h.dGo + i = 0$		0,040	-0,051	0,001	
$a = 23,404 \cdot 10^8 \cdot \Sigma[(\cos G_j / D_j)^2]$	Matrice dx	0,997	2,593	0,040	Dét. Dx
$b = 2,593 - 10^8 \cdot \Sigma(\sin G_j \cdot \cos G_j / D_j^2)$		-1,511	35,332	-0,051	0,0338
$c = 0,040 - 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\cos G_j / D_j)$		0,010	-0,051	0,001	
$d = 0,997 - 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\cos G_j / D_j \cdot \Delta_j)$	Matrice dy	23,404	0,997	0,040	Dét. Dy
$e = 35,332 \cdot 10^8 \cdot \Sigma[(\sin G_j / D_j)^2]$		2,593	-1,511	-0,051	-0,0338
$f = -0,051 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\sin G_j / D_j)$		0,040	0,010	0,001	
$g = -1,511 \cdot 50 \cdot \pi \cdot \Sigma(\sin G_j / D_j \cdot \Delta_j)$	Matr. dGo	23,404	2,593	0,997	Dét. DGo
$h = 0,001 \cdot n \cdot (\pi / 200)^2$		2,593	35,332	-1,511	4,5227
$i = 0,010 \cdot (\pi / 200)^2 \cdot \Sigma(\Delta_j)$		0,040	-0,051	0,010	

# 7 CAS PARTICULIERS DE RELÈVEMENT

Les difficultés dues au relief et autres obstacles sont parfois telles qu'il est nécessaire d'effectuer le relèvement à partir de plusieurs stations (deux, trois stations ou plus). On parle alors de relèvements multiples (ou combinés). Ce procédé peut s'avérer moins précis que le relèvement simple et ne doit donc être utilisé que s'il n'y a pas d'autre solution. En fait, avec les appareils modernes, les mesures de distances sont souvent possibles, on peut alors se contenter de deux points (voir § 9.4.).

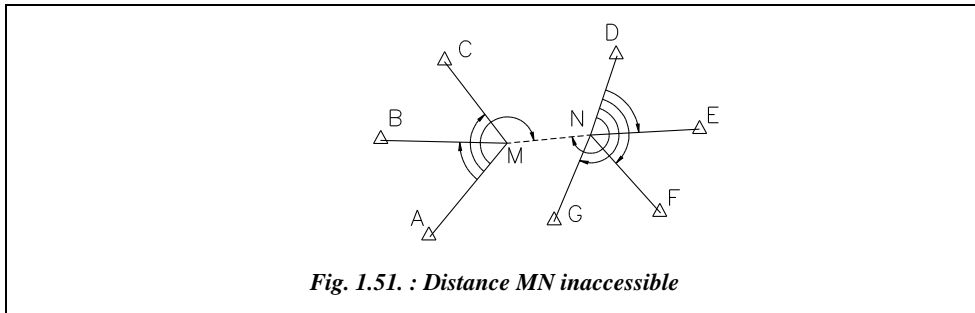
## 7.1 Relèvement double avec trois points d'appui par station

C'est le cas le plus simple de relèvement combiné puisqu'il ramène au cas général traité au paragraphe 6.

On choisit la station la plus fournie en visées (fig. 1.51. : station N calculée à partir des visées de relèvement sur D, E, F et G) et on la calcule en relèvement simple. Ensuite les deux cas suivants sont à distinguer.

### 7.1.1 La distance MN ne peut pas être mesurée

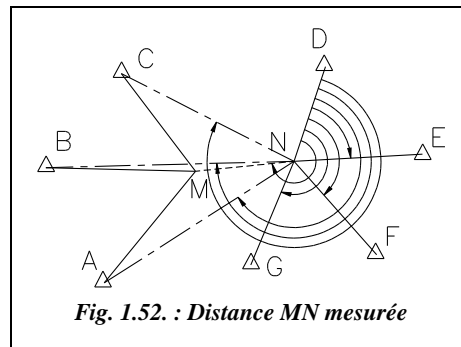
On calcule M par relèvement simple sur N, A, B et C : ceci ne peut être acceptable en termes de calculs que si la distance MN est homogène avec les autres visées issues de M. Si ce n'est pas le cas, cette méthode ne peut s'appliquer.



## 7.1.2 La distance MN peut être mesurée

La distance MN doit être connue au centimètre près (voir § 10.1.3).

Par un calcul d'excentrement, l'opérateur peut ramener les lectures de la station M à la station N (pivot) qu'il calcule ensuite en relèvement classique. Les coordonnées de M sont déduites de N par rayonnement à partir du *G0moyen* de station et de la distance MN. Cette méthode s'applique donc plutôt au cas où la distance d'excentrement MN est courte vis-à-vis des autres visées.



Notez que les calculs précédents s'appliquent de la même manière au cas où l'on vise trois points d'appui depuis N et deux depuis M. Attention : dans ce cas aucun contrôle n'est possible.

## 7.1.3 Applications

### 7.1.3.1 MN n'est pas connue

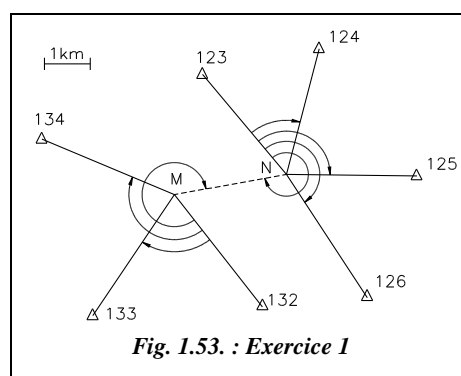
Mais MN est homogène aux autres visées.



Calcul de N par relèvement à partir des quatre points d'appui 123, 124, 125 et 126 : ce calcul a été effectué à partir du tableau TRIANGU.XLS dont les résultats sont listés ci-après.

Coordonnées du point N :

N    1 001 486,13 m  
      3 206 897,02 m



$G_{\text{moyen}_N} : 355,8439 \text{ gon}$

$Emq = 0,6 \text{ mgon}$

Tolérances :

2,9 mgon canevas ordinaire

1,2 mgon canevas précision

$Rmq = 2,7 \text{ cm}$

Tolérances :

12 cm en canevas ordinaire

2,5 cm en canevas de précision  
(valeur usuelle)

Station	Points	X (m)	Y (m)	Lect. (gon)
N	123	999 654,20	3 209 100,40	0,0000
	124	1 002 201,15	3 209 667,82	60,2329
	125	1 004 335,09	3 206 865,13	144,8692
	126	1 003 250,91	3 204 182,80	207,4537
	M			332,7148
M	132	1 000 962,09	3 203 976,47	0,000
	133	997 257,77	3 203 784,15	79,5149
	134	996 145,06	3 207 675,27	167,5169
	N			330,6142

Il en est de même pour le calcul de M par relèvement sur N, 132, 133 et 134 :

**M (999 038,15 m ; 3 206 452,29 m).**

$G_{\text{moyen}_M} : 157,9443 \text{ gon}$  ;  $Emq = 0,6 \text{ mgon}$  ;  $Rmq = 3,1 \text{ cm}$ .

La distance MN est de l'ordre de 2,5 km ; elle est donc homogène aux autres visées.

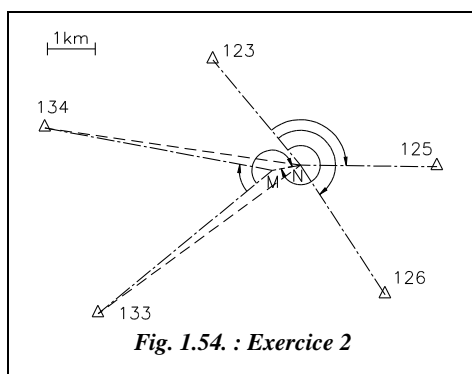
### 7.1.3.2 MN est courte et peut être mesurée

La distance MN est mesurée ;  
elle vaut  $MN = 602,57\text{m}$ .

Stat.	Pts	X (m)	Y (m)	Lect. (gon)
N	123	999 654,20	3 209 100,40	0,0000
	125	1 004 335,09	3 206 865,13	144,8692
	126	1 003 250,91	3 204 182,80	207,4537
	M			332,7148
M	133	997 257,77	3 203 784,15	0,0000
	134	996 145,06	3 207 675,27	55,7197
	N			232,5361



La résolution sur tableur est effectuée à partir du tableau RELDOU.XLS dont les résultats sont listés ci-après.



**1** - Les coordonnées du point approché No sont déterminés par relèvement sur 123, 125 et 126 ; on obtient :

No (1 001 486,09 m ; 3 206 897,04 m)

et  $G_{\text{moyen}} = 355,8439 \text{ gon}$ .

**2** - Le tableau suivant détaille le calcul d'excentrement à partir des distances au point No (§ 10.1.) : on réduit les lectures de M en N.



Station	Points visés Pi	Distances $D_{NPi}$ (m)	$L_{MP}$ (gon)	$L_{MP} - L_{MN}$ (gon)	Alpha (gon)	$L'_{NP}$ $L_{MP} + Alpha$	Réduction à zéro sur 123 $L_{NP}$ (gon)
M	133	5250,60	0,0000	-232,5361	3,5754	3,5754	303,7541
M	134	5397,43	55,7197	-176,8164	-2,5321	53,1876	353,3663

$D_{NP}$  est obtenue à partir des coordonnées de No (la précision du mètre est suffisante).

La réduction à zéro sur 123 donne le décalage d'origine suivant :

$$L_{NM} - (L_{MN} - 200) = 332,7148 - 32,5361 = 300,1787 \text{ gon}$$

Les angles réduits à zéro sur 123 sont donc :  $L_{NP} = L'_{NP} + 300,1787 \text{ gon}$

3 - Le point N est calculé par relèvement sur les points 123, 125, 126, 133 et 134 :

N (1 001 486,06 m ; 3 206 897,08 m),  $G_{\text{moyen}} = 355,8443 \text{ gon}$

$Emq = 0,4 \text{ mgon}$  (tolérance précision et ordinaire : 1,2 mgon et 2,8 mgon)

$Rmq = 2,7 \text{ cm}$  (tolérances précision et ordinaire : 2,5 cm et 12 cm).

4 - Le point M est calculé par rayonnement depuis N :

$G_{NM} = G_{\text{moyen}} + 332,7148 = 288,5590 \text{ gon}$ ,  $D_{MN} = 602,57 \text{ m}$

M ( 1 000 893,19 m ; 3 206 789,37 m)

## 7.2 Relèvement double avec deux points d'appui visés par station

Comme précédemment, deux cas sont à distinguer : la distance MN est connue ou non.

### 7.2.1 Distance mn inconnue

On peut déterminer graphiquement ou par calcul les points M et N en construisant les points de Collins Q et P (fig. 1.55.).

Cette méthode ne permet toutefois aucun contrôle. Les solutions pour M et N sont uniques et la moindre erreur de manipulation donne des points faux.

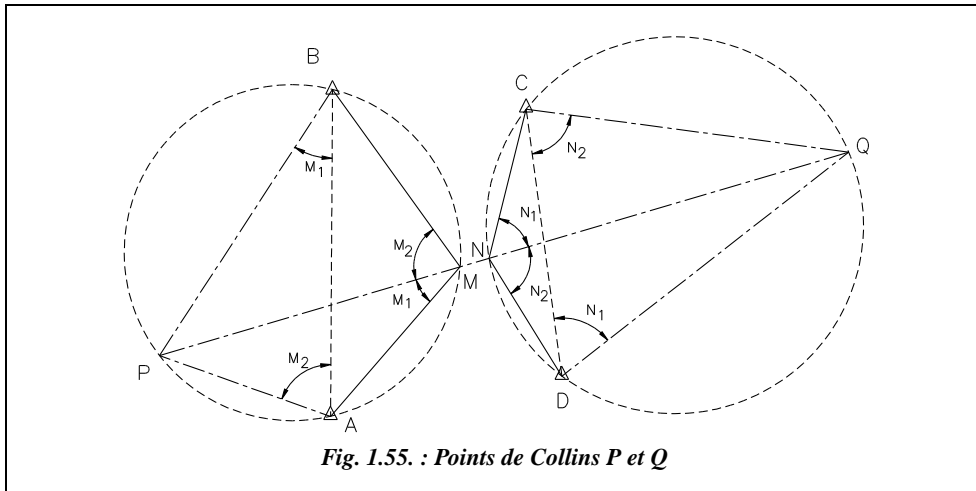


Fig. 1.55. : Points de Collins P et Q

◆ **résolution graphique**

A partir des tours d'horizon en M et N, on calcule les angles  $M_1, M_2, N_1$  et  $N_2$  (fig. 1.55.).

Le point M est situé sur l'arc capable tel que l'angle BMA soit égal à  $M_1 + M_2$ .

Le point N est situé sur l'arc capable tel que l'angle CND soit égal à  $N_1 + N_2$ .

On peut donc tracer ces deux arcs capables (voir construction au chapitre 4 § 6.4.).

La droite MN prolongée coupe ces deux arcs en P et Q tels que :

- l'angle PBA est égal à l'angle PMA car ils interceptent le même arc. Donc l'angle PBA est égal à  $M_1$  ;
- l'angle CDQ est égal à l'angle CNQ car ils interceptent le même arc. Donc l'angle CNQ est égal à  $N_1$  ;
- de même on voit que l'angle BMP est égal à  $M_2$  et que l'angle QND est égal à  $N_2$ . Cela permet de construire P et Q et d'en déduire M et N à l'intersection de la droite QP et des deux arcs capables.

◆ **résolution analytique**

Elle suit la démarche graphique précédente, à savoir la détermination des points Q et P desquels on déduit les points M et N. Attention : les relations suivantes sont établies pour la figure 1.55. et ne sont pas valables dans tous les cas.

- Calcul des coordonnées de P par intersection à partir de A et B :  $G_{AP} = G_{AB} - M_2$   
 $G_{BP} = G_{BA} + M_1$
- Calcul des coordonnées de Q par intersection à partir de C et D :  $G_{CQ} = G_{CD} - N_2$   
 $G_{DQ} = G_{DC} + N_1$

- Calcul du gisement de la droite MN :  $G_{MN} = G_{PQ}$
- Calcul de M par intersection à partir de A et B :  $G_{MA} = G_{NM} - M_1$   
 $G_{MB} = G_{NM} + M_2$
- Calcul de N par intersection à partir de C et D :  $G_{NC} = G_{MN} - N_1$   
 $G_{ND} = G_{MN} + N_2$
- Enfin, vérification à partir des points M et N définitifs que :  $G_{MN} = G_{PQ}$

## 7.2.2 Distance MN connue

On retrouve exactement le cas de figure du paragraphe précédent mais avec une donnée supplémentaire qui est la longueur MN (dont on suppose la mesure sur le terrain exacte) et qui permettra une vérification.

Déterminez par la méthode précédente (§ 7.2.1.) un des deux points, par exemple M. Réduisez les lectures faites en N au point M (calcul d'excentrement schématisé à la figure 1.56.). Calculez enfin M par relèvement sur quatre points puis calculez N par rayonnement à partir de M.

## 7.2.3 Applications

### 7.2.3.1 MN inconnue

Reprenez les données du paragraphe 7.1.3.2. en retirant la lecture de N sur le point 123 (fig. 1.56.).

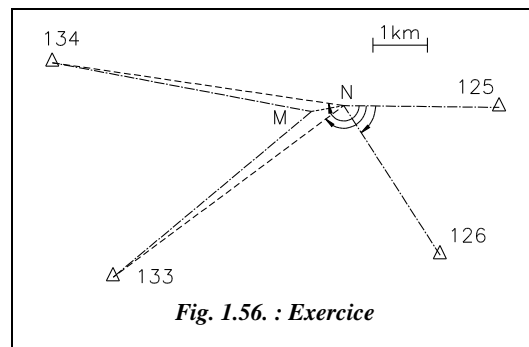


Fig. 1.56. : Exercice

### 7.2.3.2 MN connue

La distance MN est connue et vaut  $MN = 602,60$  m.

Utilisez les résultats du calcul précédent pour réduire les lectures au repère M et calculez M par relèvement sur 125, 126, 133 et 134.

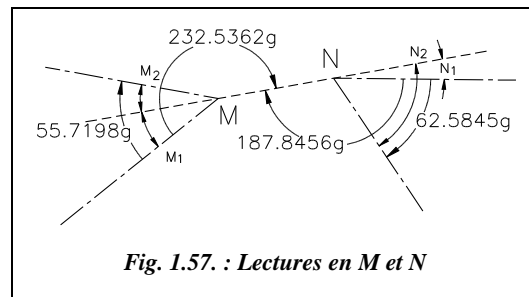


Fig. 1.57. : Lectures en M et N

#### ◆ résolution graphique et analytique

1 - Calculez les angles  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $N_1$  et  $N_2$  (fig. 1.57.)

$$M_1 = 232,5361 - 200 = 32,5361 \text{ gon}$$

$$M_2 = 55,7197 - M_1 = 23,1836 \text{ gon}$$

$$M_1 + M_2 = 55,7197 \text{ gon}$$

$$N_1 = 200 - 187,8456 = 12,1544 \text{ gon}$$

$$N_2 = 62,5845 + N_1 = 74,7389 \text{ gon}$$

$$N_2 - N_1 = 62,5845 \text{ gon}$$

## 2 - Résolution graphique sur AutoCAD LT du cas où $D_{MN}$ est inconnue.

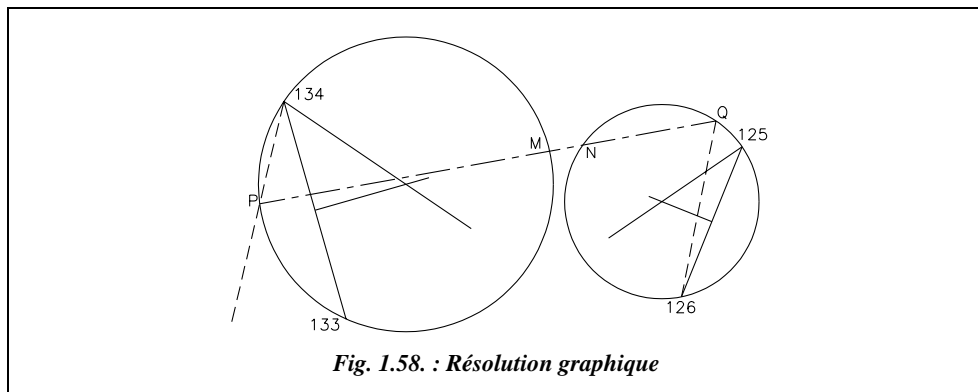


L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 4.3.

AutoCAD LT – Placez les points d'appui :

LIGNE↵ du point 1004335.09,206865.13↵ au point 1003250.91,204182.80↵

LIGNE↵ du point 997257.77,203784.15↵ au point 996145.06,207675.27↵



**Fig. 1.58. : Résolution graphique**

– Dessinez les arcs capables passant par M et N (voir méthode chapitre 4, § 6.4.).

Le premier cercle 133-134-M est déterminé par l'angle :

$$M_1 + M_2 = 55.7197 \text{ gon.}$$

Le deuxième cercle 125-126-N est déterminé par l'angle :

$$N_2 - N_1 = 62.5845 \text{ gon.}$$

– Construisez les points de Collins P et Q :

COPIER↵ la droite 133-134 vers un endroit quelconque de l'écran. ROTATION↵ de cette droite d'un angle de 32.5361 gon autour du point 134 (EXTrémité de...). DEPLACER↵ cette droite depuis son EXTrémité jusqu'au point 134 (EXTrémité de...).

Le point P est à l'intersection de la dernière droite construite et du cercle 133-134-M.

Les coordonnées de P sont : P (995 712.35 m ; 205 848.18 m).

COPIER↵ la droite 125-126 vers un endroit quelconque de l'écran puis ROTATION↵ d'un angle de -12.1534 gon autour du point 126 (EXTrémité de...). DEPLACER↵ cette droite depuis son EXTrémité jusqu'au point 126 (EXTrémité de...). PROLONGER↵ la dernière droite construite jusqu'au cercle 125-126-N pour obtenir le point Q.

Les coordonnées de Q sont : Q (1 003 866.52 m ; 207 329.52 m).

– Réalisez la construction des points M et N.

LIGNE↵ de INTersection (point P) à INTersection (point Q). Lisez les coordonnées de M et N avec ID↵ INTersection de..., la distance MN DISTANCE↵ et le gisement MN sont donnés par la commande LISTE↵ (qui donne aussi les coordonnées de P et Q).

Les résultats sont les suivants :

M (1 000 893,17 m ; 206 789, 36 m)  $D_{MN} = 602,66$  m  $D_{M-125} = 3442,75$  m  
 N (1 001 486,12 m ; 206 897, 08 m)  $G_{MN} = 88,5594$  gon  $D_{M-126} = 3514,70$  m

### 3 - Résolution analytique dans le cas où $D_{MN}$ est connue



On utilise les données de la résolution précédente pour réduire les lectures en M.

On choisit de réduire en M de manière à obtenir des distances de visée les plus homogènes possibles. On considère les coordonnées obtenues précédemment pour M comme approchées (Mo).

Station	Points visés	Distances $D_{MPi}$	$L_{NP}$	$L_{NP} - L_{NM}$	Alpha	$L'_{MP}$	Réduction à zéro sur 125
S	Pi	(m)	(gon)	(gon)	(gon)	$L_{NP} + Alpha$	$L_{NP}$ (gon)
N	125	3442,75	144,8692	-187,8456	-2,1149	142,7543	242,5756
N	126	3514,70	207,4537	-125,2611	-10,1093	197,3444	297,1657

- Effectuez un calcul d'excentrement pour ramener les lectures de N en M.

Les formules utilisées sont les mêmes qu'au paragraphe 7.1.3.2. Le décalage d'origine est complémentaire de celui du paragraphe 7.1.3.2. :  
 (400 – 300,1787 = 99,8213 gon).

- Calculez les coordonnées du point M par relèvement sur 125, 126, 133 et 134.  
 M (1 000 893,20 m ; 3 206 789,38 m)  $G_{Moyen} = 256,0233$  gon  
 $Emq = 0,2$  mgon (tolérances de 1,2 mgon en précision et 2,9 mgon en ordinaire)  
 $Rmq = 1,5$  cm (tolérances de 2,5 cm en précision et 12 cm en ordinaire)
- Calculez les coordonnées du point N par rayonnement depuis M :  $G_{MN} = 88,5594$  gon,  $D_{MN} = 602,60$  m. Le résultat est N (1 001 486,10 m ; 3 206 897,09 m).

## 7.3 Relèvement double sur deux points d'appui

Comme dans les paragraphes précédents, on distingue deux cas : MN est connue ou non.

### 7.3.1 Distance MN inconnue

Ce cas ramène à celui du paragraphe 7.2. en construisant les arcs capables ANB et AMB, puis les points de Collins Q et P (fig. 1.59.). Calculez les coordonnées de M et N à partir des données de la figure 1.59.

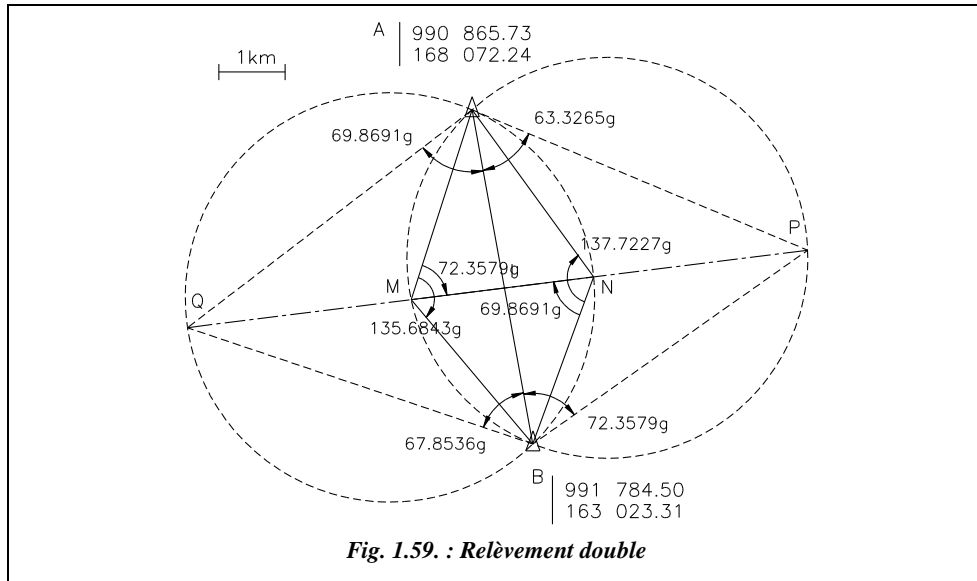


Fig. 1.59. : Relèvement double

On note :  $M_1 = 72,3579$  gon,  $M_2 = 63,3265$  gon,  $N_1 = 67,8536$  gon et  $N_2 = 69,8691$  gon.

**Résultats** : les coordonnées des points P, Q, M et N sont :

P ( 995 937,00 m ; 165 951,64 m )                      Q ( 986 566,23 m ; 164 781,30 m )  
M ( 989 946,95 m ; 165 203,53 m )                      N ( 992 703,28 m ; 165 547,77 m )

Le numéro de zone Lambert est volontairement omis

### 7.3.2 Distance MN connue

Les mesures de terrain donnent une distance MN qui ne sera pas égale à la valeur issue des calculs s'appuyant sur les coordonnées de A et B. Les coordonnées de A et B sont considérées comme « exactes », même si actuellement on sait mesurer la distance MN au moins au centimètre près alors que l'incertitude sur AB est souvent plus grande...

Si on calcule les coordonnées de M et N en partant des coordonnées de A et B « exactes », quelle que soit la méthode employée, on retrouve les résultats du paragraphe 7.3.1. : le résultat est indépendant de la distance mesurée MN. Cette distance sert de contrôle.

Les deux méthodes suivantes sont données à titre d'exemple de calcul car la résolution peut s'effectuer avec la méthode traitée au paragraphe précédent (points de Collins).

### 7.3.2.1 Repère local puis rotation de repère

1 - On connaît A et B. On peut donc calculer  $D_{AB}$  et  $G_{AB}$ .

2 - On définit un repère local  $M'x'y'$  (fig. 1.60.). Cela donne un gisement local pour le côté MN :  $G_{M'N'} = 100$  gon. On fixe arbitrairement les coordonnées de M' (par exemple : M' (1000 ; 1000)).

On fixe une distance  $D_{M'N'}$  qui peut être quelconque. Cela donne des coordonnées fictives pour N', par exemple :  $D_{M'N'} = 500$  m.

Donc :  $x'_{N'} = y'_{M'} + 500$  ;  $y'_{N'} = 0$ .

3 - Connaissant les angles  $M_1, M_2, N_1$  et  $N_2$  issus des lectures aux stations M et N, on calcule les coordonnées locales A' et B' par intersection depuis M' et N', en utilisant les gisements :

$$\begin{aligned} G_{M'A'} &= 100 - M_1 ; G_{M'B'} = 100 + M_2 \\ G_{N'A'} &= 300 + N_1 ; G_{N'B'} = 300 - N_2 \end{aligned}$$

4 - On calcule le gisement  $G_{A'B'}$  ce qui donne la rotation de repère à effectuer pour passer du repère local au repère général. On en déduit donc les gisements définitifs  $G_{AM'}$ ,  $G_{AN'}$ ,  $G_{BM}$  et  $G_{BN}$  par rotation d'angle ( $\alpha = G_{AB} - G_{A'B'}$ ). Par exemple :  $G_{MA} = G_{M'A'} + \alpha$ .

5 - On calcule enfin les coordonnées définitives de M et N par intersection à partir de A et B (fig. 1.61.).

Remarquez que les droites MN et M'N' sont parallèles mais M', N', M et N ne sont pas alignés. La distance MN finale est très différente de celle ( $D_{M'N'}$ ) choisie arbitrairement au départ mais sa valeur est indépendante de  $D_{M'N'}$ . Ceci confirme que la distance MN mesurée sur le terrain ne sert que de contrôle.

6 - On vérifie enfin que la différence entre la longueur MN calculée et la longueur MN mesurée ne dépasse pas la tolérance de mesure d'une distance (tolérance sur l'écart entre deux mesurages indépendants :

$$T_{cm} = 3 + D_{km} ) .$$

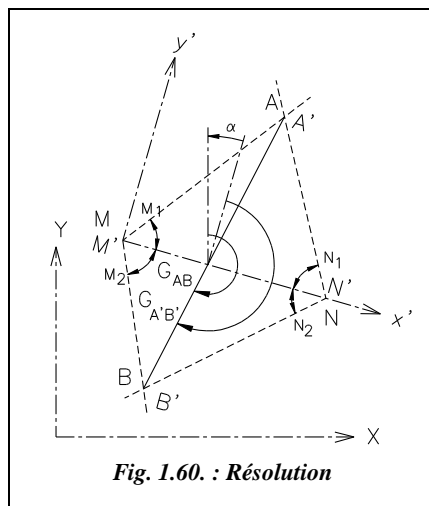


Fig. 1.60. : Résolution

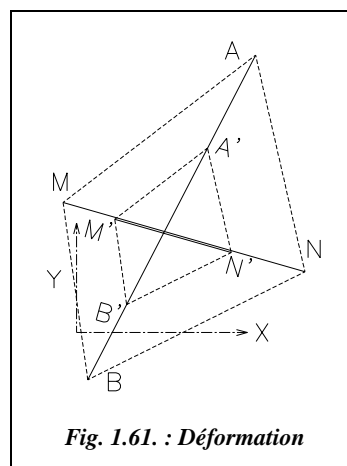


Fig. 1.61. : Déformation

### 7.3.2.2 Formule des cotangentes

Les quatre angles  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  et  $b_2$  sont connus (fig. 1.62.). Ils sont comptés depuis la droite MN vers les directions MA, MB, NA et NB positifs dans le sens des gisements.

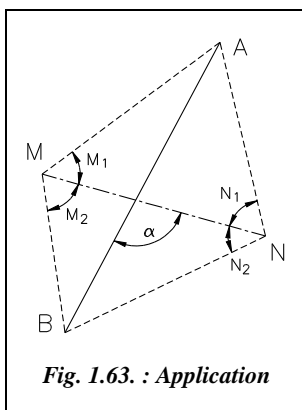
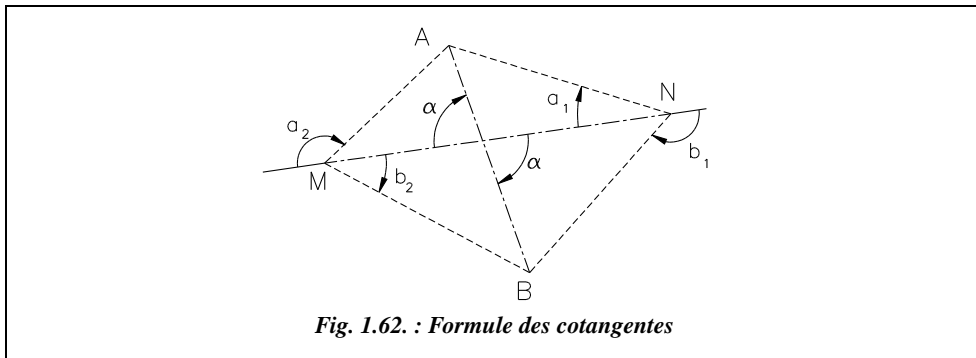
La formule suivante donne directement l'angle  $\alpha$  :

$$\cotan \alpha = \frac{\cotan a_1 \cdot \cotan b_2 - \cotan b_1 \cdot \cotan a_2}{\cotan a_1 + \cotan b_2 - \cotan b_1 - \cotan a_2}$$

L'angle  $\alpha$  permet de calculer  $G_{MN}$  :  $G_{MN} = G_{AB} - \alpha$

Le quadrilatère AMBN, solution du problème, n'est pas unique. Tous les quadrilatères homothétiques de AMBN sont solutions.

Si on fixe la distance AB (ou MN), la solution est alors unique.



En adaptant cette formule à la notation adoptée au paragraphe 7.2.1. (fig. 1.63.), il vient :

$$\cotan \alpha = \frac{\cotan N_1 \cdot \cotan M_2 - \cotan M_1 \cdot \cotan N_2}{\cotan N_1 + \cotan M_2 + \cotan M_1 + \cotan N_2}$$

On utilise le fait que :  $\cotan(200 - \alpha) = -\cot \alpha$

### 7.3.3 Application

Calculer les coordonnées des points M et N à partir des données du paragraphe 7.3.1. de manière à comparer toutes les méthodes détaillées dans le cas où la distance MN est connue :  $MN = 2\,777,69$  m.

a) Dans le repère local  $M'x'y'$  : la distance  $M'N'$  est fixée arbitrairement à 500 m. Les calculs sont détaillés dans le tableau ci-après.



Points	X (m)	Y (m)	D (m)	G (gon)	
<b>A</b>	990 865,73	168 072,24	5 131,84	188,5406	
<b>B</b>	991 784,50	163 023,31			
<b>M'</b>	1 000,00	1 000,00	500,00	100,0000	
<b>N'</b>	1 500,00	1 000,00			
	Points	X (m)	Y (m)	D <sub>A'B'</sub> (m)	G <sub>A'B'</sub> (gon)
G <sub>M'A'</sub> =100-M <sub>1</sub>	27,6421	<b>A'</b>	1228,10	923,75	196,4505
G <sub>N'A'</sub> =300+N <sub>1</sub>	367,8536				
G <sub>M'B'</sub> =100+M <sub>2</sub>	163,3265	<b>B'</b>	1279,58	569,59	
G <sub>N'B'</sub> =300-N <sub>2</sub>	230,1309				

G <sub>AB</sub> - G <sub>A'B'</sub> =	-7,9099	gon			
	Points	X (m)	Y (m)	D <sub>MN</sub> (m)	G <sub>MN</sub> (gon)
G <sub>MA</sub> =	19,7322	<b>M</b>	989 946,95	165 203,53	2 777,74
G <sub>MB</sub> =	155,4166				
G <sub>NA</sub> =	359,9437	<b>N</b>	992 703,28	165 547,77	92,0901
G <sub>NB</sub> =	222,2210				

On retrouve les résultats du paragraphe 7.3.1. L'écart entre la distance MN calculée et celle mesurée est de 5 cm, ce qui est inférieur à la tolérance ( $T = 3 + 2,7 = 5,7$  cm).

### b) Calcul par mise à l'échelle

Le tableau suivant détaille le calcul par changement d'échelle.

$$D_{AB} = 5\,131,84 \text{ m} \qquad m = D_{AB} / D_{A'B'} = 5,555471$$

$$D_{A'B'} = 923,75 \text{ m}$$

		Point	X (m)	Y (m)	D (m)	G (gon)
D <sub>A'M'</sub> = 542,21	D <sub>AM</sub> = 3012,25	<b>M</b>	989 946,95	165 203,53	2 777,74	92,0901
D <sub>A'N'</sub> = 562,04	D <sub>AN</sub> = 3122,42	<b>N</b>	992 703,28	165 547,77		
D <sub>B'M'</sub> = 513,24	D <sub>BM'</sub> = 2851,31	<b>M</b>	989 946,95	165 203,53	2 777,74	92,0901
D <sub>B'N'</sub> = 483,57	D <sub>BN</sub> = 2686,46	<b>N</b>	992 703,28	165 547,77		

Les coordonnées de M et N sont ici calculées par rayonnement (deux fois pour contrôle).

### c) Calcul direct par la formule des cotangentes

L'application de la formule (§ 7.3.2.2.) donne directement l'orientation de la droite MN par rapport à celle de la droite AB :

$$G_{AB} = 188,5406 \text{ gon}$$

$$\cotan \alpha = 0,055813 \text{ d'où } \alpha = 96,4505 \text{ gon}$$

$$G_{MN} = G_{AB} - \alpha = 92,0901 \text{ gon}$$

Connaissant l'orientation de la droite MN, il reste à calculer les coordonnées de M et N par intersection à partir de A et B. Les résultats sont identiques à ceux des deux méthodes précédentes.



Tout ces calculs peuvent être réalisés sur le tableau RELDOU.XLS (pour Excel) fourni sur le cédérom de l'ouvrage.

Excel 7

#### ◆ résolution graphique



L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 4.3.

– **Dessin de la droite M'N'** : *LIGNE* du point *1000,1000* au point *@2000,0* (on fixe ici une distance arbitraire de départ entre M' et N' de 2 000 m).

*Zoom* *Etendu* suivi de *Zoom* *0.8X* pour obtenir l'ensemble du dessin à l'écran.

– **Direction M'A', M'B', N'A' et N'B'** : *COPIER* la droite M'N' vers un point quelconque de l'écran et la faire tourner autour d'une de ses *EXTrémités* d'un angle de  $-72.3579$  puis *DEPLACER* la copie de son *EXTrémité* vers le point M (*EXTrémité de...*). Cela donne la direction M'A'.

Procédez de même pour construire M'B' à partir de M'A' (rotation de  $+135.6843$ ).

Procédez de même pour obtenir N'B' (*COPIER* puis *ROTATION* de M'N' d'un angle de  $-9.8691$ ) puis N'A' (*COPIER* puis *ROTATION* de N'B' de  $137.7227$ ).

– **Construction de A' et B'** : *CHNFREIN* *Ecart* *0* entre les direction M'A' et N'A' puis entre M'B' et N'B'. Vérifiez les coordonnées de A' et B' avec la commande *ID* *INTersection de...*

– **Dessin de la droite AB et mise en place de M' et N'** : *DEPLACER* l'ensemble du dessin (sélection *TOUT*) du point A' vers le point *990865.73,168072.24*. *LIGNE* du point *@0,0* (A étant le dernier point entré) au point *991784.5,163023.31*.

*Zoom* *Etendu* suivi de *Zoom* *0.8X* pour voir l'ensemble de la figure 1.64.

– **Rotation de A'B' vers AB** : *ROTATION* des droites M'A', M'B', N'A' et N'B' autour du point A (*EXTrémité de...*) option *Référence* : donnez comme référence la droite A'B'

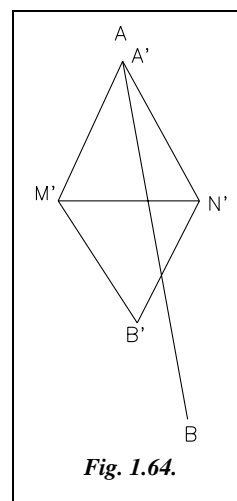


Fig. 1.64.

par *EXTrémité* de...(point A') puis *EXTrémité* de... (point B') puis donnez comme nouvel angle la droite AB par *EXTrémité* de... (point B).

– **Mise à l'échelle de A'B' vers AB** : *ECHELLE*⌵ des droites M'A', M'B', N'A' et N'B' (dont on peut rappeler la sélection en répondant *p*⌵ pour précédent à la question <choix des objets>) par rapport au point A', option *Référence*⌵, longueur de référence : A'B' (*EXTrémité* de..), nouvelle longueur : donnez le point B (*EXTrémité* de..).

– **Résultats** : lire les coordonnées de M et N avec *ID*⌵ *EXTrémité* de...

On vérifie à nouveau ici que le résultat est indépendant de la distance MN mesurée et de la distance M'N' arbitraire fixée au départ (ici 2 000 m).

## 7.4 Relèvement triple

On stationne dans ce cas trois points M, N et O depuis lesquels il faut au minimum viser cinq points d'appui A, B, C, D et E (fig. 1.65.). On note M', N' et O' les points de Collins associés à M, N et O. La détermination unique et donc sans contrôle des points stationnés M, N et O se fait ainsi :

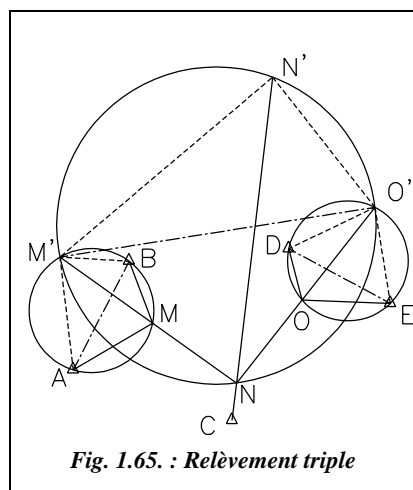
- M' calculé par intersection depuis A et B ;
- O' calculé par intersection depuis D et E ;
- N' calculé par intersection depuis M' et O'.

Le point N est alors sur la droite CN' à l'intersection avec le cercle M'N'O'. On le calcule par intersection à partir de C et M' (ou bien de C et O'), le gisement de la droite CN' étant maintenant connu.

De la même manière, on calcule M sur la droite M'N à l'intersection avec le cercle AM'B et O sur la droite NO' à l'intersection avec le cercle DO'E.

La résolution analytique fait donc appel aux mêmes principes que le relèvement double traité au paragraphe 7.3.1. Les calculs sont bien sûr plus longs.

La résolution graphique convient mieux à ce type de problème (voir l'exercice suivant).



**Application**

Calculez les coordonnées des trois stations M, N et O d'un relèvement triple en fonction des données suivantes. Le numéro de zone Lambert (3) n'est pas ajouté aux ordonnées.

Points	X (m)	Y (m)
<b>A</b>	995 567,85	184 601,18
<b>B</b>	996 804,38	187 016,81
<b>C</b>	999 075,85	183 476,02
<b>D</b>	1 000 325,20	187 294,66
<b>E</b>	1 002 570,84	186 079,64

Station	Point visé	Lecture (gon)	Station	Point visé	Lecture (gon)	Station	Point visé	Lecture (gon)
<b>M</b>	<b>A</b>	0,0000	<b>N</b>	<b>C</b>	0,0000	<b>O</b>	<b>D</b>	0,0000
	<b>B</b>	111,2889		<b>M</b>	132,1685		<b>E</b>	118,5958
	<b>N</b>	273,7079		<b>O</b>	234,8508		<b>N</b>	258,3628

◆ **résolution graphique**



L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 4.3.

Nous allons utiliser ici une méthode ne faisant pas intervenir le tracé des arcs capables. Cela nécessite en contrepartie les calculs suivants pour obtenir les angles nécessaires :

$$M_1 = 73,7079 \text{ gon}, M_2 = 37,5810 \text{ gon}$$

$$N_2 = 34,8508 \text{ gon}, N_1 = 67,8315 \text{ gon}$$

$$O_2 = 58,3628 \text{ gon}, O_1 = 60,2330 \text{ gon}$$

– **Dessin des points d'appui**

**POINT** ↵

995567.85,184601.18 ↵ ↵

996804.38,187016.8 ↵ ↵

999075.85,183476.02 ↵ ↵

1000325.2,187294.65 ↵ ↵

1002571.29,186080.08 ↵

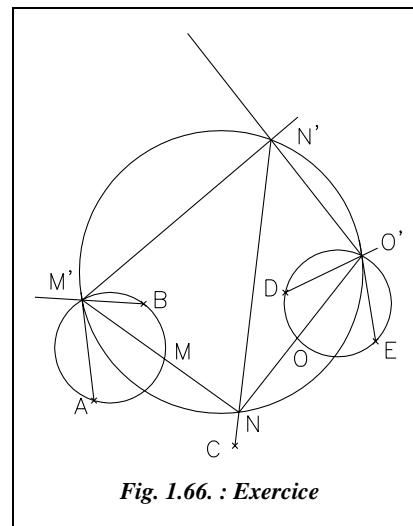
– **Construction des points de Collins : M', N' et O'.**

**LIGNE** ↵ du point A (NODal de...) au point B (NODal de...)

**ROTATION** ↵ de cette ligne autour de A d'un angle – 37.581 ↵

Redessinez la droite AB (**LIGNE** ↵ du point A au point B).

**ROTATION** ↵ de AB autour de B d'un angle 73.7079 ↵



**Fig. 1.66. : Exercice**

On obtient  $M'$  à l'intersection des 2 droites précédentes :  $M'$  (995 272.56 , 187 109.01).

On peut tracer le cercle  $AM'B$  : *CERCLE* par 3Points.

Même principe pour la construction de  $O'$  puis de  $N'$

– dessinez la droite  $DE$  puis effectuez une rotation autour de  $D$  d'un angle de  $-58.3628$ .

– dessinez la droite  $DE$  puis effectuez une rotation autour de  $E$  d'un angle de  $60.2330$ .

Résultat :  $O'$  (1 002 230.37 , 188 215.40). Dessinez cercle  $DO'E$ .

Dessin de la droite  $M'O'$  puis rotation autour de  $M'$  d'un angle de  $-34.8508$ . Dessin de

$M'O'$  puis rotation autour de  $O'$  d'un angle de  $67.8315$ . Résultat :  $N'$  (999 971.37 ,

191 108.15). Dessin du cercle  $M'N'O'$ .

– **Construction des stations N, M et O :**

*LIGNE* du point  $N'$  (*INTER*section de...) au point  $C$  (*NODal* de...) : cela donne  $N$  (999 173.87 , 184 311.41)

*LIGNE* du point  $M'$  (*INTER*section de...) au point  $N$  (*INTER*section de...) : cela donne  $M$  (997 319.66 , 185 641.05)

*LIGNE* du point  $O'$  (*INTER*section de...) au point  $N$  (*INTER*section de...) : cela donne  $O$  (1 000 618.77 , 186 156.94)

## 7.5 Relèvement quadruple en forme de cheminement

On peut étendre le cas de figure précédent (voir fig. 1.65.) à un **cheminement** sur quatre stations  $M, N, O$  et  $P$  depuis lesquelles on vise six points connus  $A, B, C, D, E$  et  $F$  (fig. 1.67.).

On peut procéder de deux manières différentes.

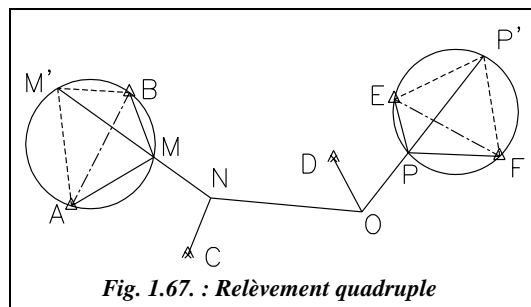


Fig. 1.67. : Relèvement quadruple

### 1 - On ramène le problème à un relèvement double.

$M'$  est calculé par intersection à partir de  $A$  et  $B$ .  $P'$  est calculé par intersection à partir de  $E$  et  $F$ .  $N$  et  $O$  sont ensuite calculés par relèvement double (§ 7.2.) à partir des visées sur  $M', C, D$  et  $P'$ .

### 2 - On procède de proche en proche (fig. 1.68.).

$M'$  est calculé par intersection à partir de  $A$  et  $B$ .

$N'$  est calculé par intersection à partir de  $M'$  et  $C$ .

$O'$  est calculé par intersection à partir de  $N'$  et  $D$ .

$P$  est alors calculé par **relèvement sur trois points** :  $O', E, F$ .

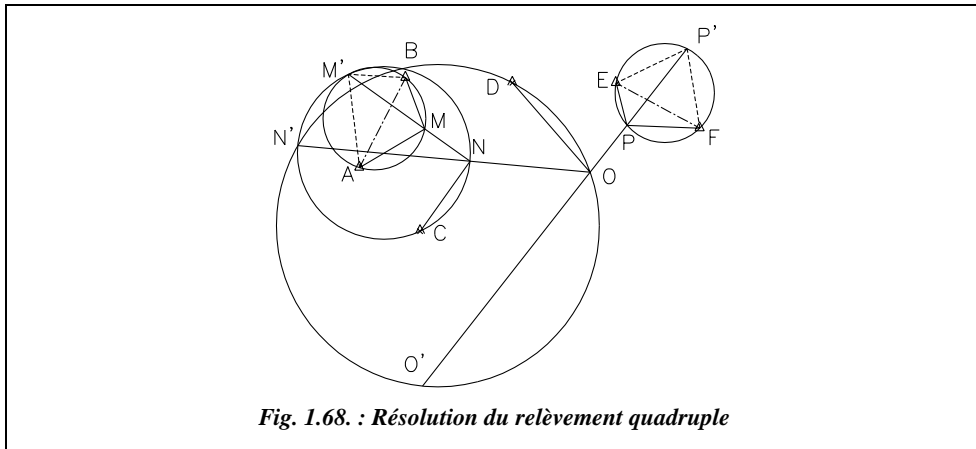


Fig. 1.68. : Résolution du relèvement quadruple

Cette dernière résolution laisse entrevoir un cas général de résolution pour tous les relèvements de ce type en forme de cheminement : il suffit de viser deux points d'appui au départ, un point d'appui par station intermédiaire et deux points d'appui à l'arrivée pour obtenir une solution unique quel que soit le nombre de stations... On peut en déduire que, pour un nombre  $n$  de stations, il faut au moins  $(n + 2)$  points d'appui.

## 7.6 Relèvement quadruple en étoile

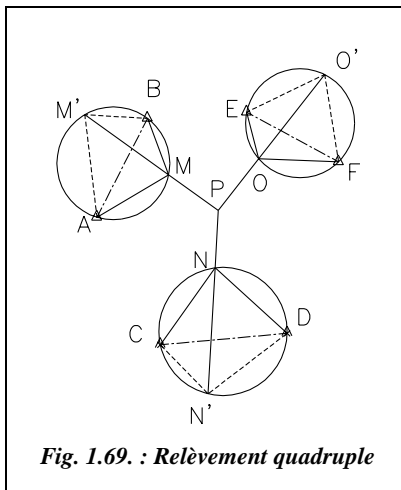


Fig. 1.69. : Relèvement quadruple

Les quatre stations M, N, O et P de ce relèvement (fig. 1.69.) sont disposées en forme d'étoile. Si de chaque station M, N et O, on vise deux points d'appui, la solution est unique :

- M' est calculé par intersection depuis A et B ;
- N' est calculé par intersection depuis C et D ;
- O' est calculé par intersection depuis E et F.

Enfin P est calculé par relèvement sur trois points : M', N' et O'.

On peut étendre ce raisonnement à tous les relèvements multiples en forme de cheminement comportant des embranchements. Par réduction successive (méthode de proche en proche traitée au paragraphe 7.5.), on ramène le problème au cas ci-dessus.

De même que précédemment (§ 7.5.), pour un nombre  $n$  de stations, il faut au minimum  $(n + 2)$  points d'appui.

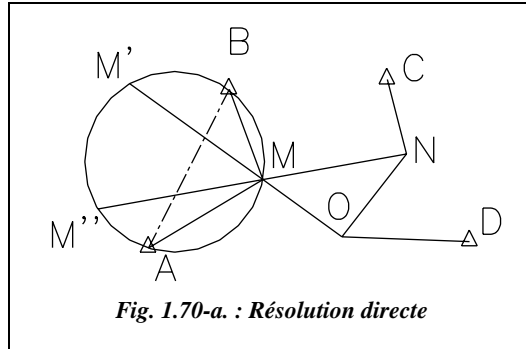
## 7.7 Relèvements multiples formant une boucle

On ramène le problème au cas du paragraphe 7.5., le cheminement envisagé étant fermé (par exemple le triangle MNO, fig. 1.70-a.).

**1 - Solution directe** (fig. 1.70-a.).

$M'$  et  $M''$  sont calculés par intersection depuis A et B.

O et N sont calculés en relèvement double à partir de  $M'$  et D (pour O) et à partir de  $M''$  et C (pour N).



**2 - Solution de proche en proche** (fig. 1.70-b.).

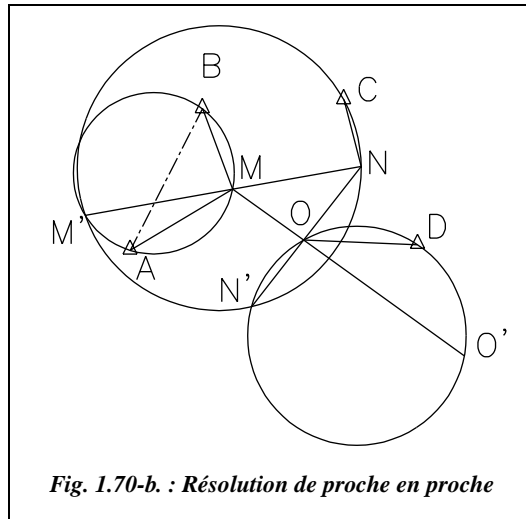
$M'$  est calculé par intersection depuis A et B.

$N'$  est calculé par intersection depuis C et  $M'$ .

$O'$  est calculé par intersection depuis D et  $N'$ .

Finalement, M est relevé sur A, B et  $O'$ .

En conclusion, tous les cas de figure ne peuvent être envisagés, mais leur résolution fait appel aux principes de base traités dans ce chapitre.



## 7.8 Relèvement en trois dimensions sur deux points

Cette méthode permet de déterminer les coordonnées d'un point par relèvement sur seulement deux points anciens, à condition que ces derniers soient connus avec une précision homogène dans les trois dimensions ( $E$ ,  $N$  et  $H$ , ce qui devient de plus en plus courant du fait du développement des mesures GPS).

L'opérateur stationne en A et effectue des lectures angulaires horizontales sur deux points anciens B et C dont il déduit  $H_{BC}$  (voir fig. 1.71-a.).

De plus, l'opérateur effectue les lectures d'angle zénithal  $V_{AC}$  et  $V_{AB}$ . Ces lectures d'angle zénithal permettront, par résolution de triangles, de déterminer l'angle  $\alpha$ . Connaissant  $\alpha$ , on peut calculer les coordonnées du point A à partir des points B ou C.

La solution est unique, sa précision est correcte si l'angle  $H_{BC}$  est supérieur à 30 gon et si au moins une des visées d'angle zénithal est inclinée à plus de 10 gon sur l'horizontale.

### Exemple de détermination

Soient deux points anciens (fig. 1.71-a.) :

B (153,541 m ; 335,110 m ; 121,888 m)

C (275,441 m ; 198,992 m ; 120,002 m)

Les lectures faites en A sont :

$H_{z_{BC}} = 73,2850$  gon ;  $V_{AB} = 90,0112$  gon ;  $V_{AC} = 87,4661$  gon ; ces lectures d'angles zénithaux sont effectuées sur un miroir réglé à la hauteur des tourillons de la station de manière à obtenir l'angle V réel de la station A vers les points B ou C.

### 1 - Calcul de $\alpha$

On voit sur la figure 1.71-a. que  $AB = BB' \cdot \cos \alpha$  et  $AC = CC' \cdot \cos(\alpha - H_{z_{BC}})$ . On peut aussi remarquer que :  $BB' = CC' = BC / \sin H_{z_{BC}}$ .

On exprime l'altitude de A de deux manières :

$$H_A = H_B - AB \cdot \cotan V_{AB} \text{ et } H_A = H_C - AC \cdot \cotan V_{AC}.$$

En égalisant les deux dernières équations, on obtient l'équation suivante pour déterminer  $\alpha$  :

$$\frac{H_B - H_C}{BC} \cdot \sin H_{z_{BC}} = \cos \alpha \cdot \cotan V_{AB} - \cos(\alpha - H_{z_{BC}}) \cdot \cotan(V_{AC}).$$

On peut résoudre cette équation par approximations successives, mais il existe une résolution directe. On développe le second membre comme suit :

$$\cos \alpha \cdot [\cotan V_{AB} - \cos H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}] - \sin \alpha \cdot \sin H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}$$

$$\text{On pose : } R = \frac{H_B - H_C}{BC} \cdot \sin H_{z_{BC}}, P = \cotan V_{AB} - \cos H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}$$

$$\text{et } Q = \sin H_{z_{BC}} \cdot \cotan V_{AC}$$

Il reste à résoudre une équation du type :  $R = P \cdot \cos \alpha - Q \cdot \sin \alpha$ .

On pose  $P = k \cdot \cos \varphi$  et  $Q = k \cdot \sin \varphi$  ; ainsi, on obtient :

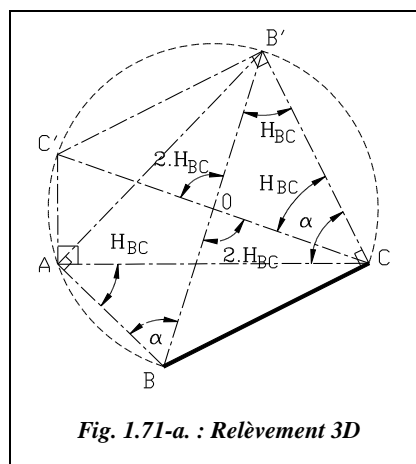


Fig. 1.71-a. : Relèvement 3D



$$\frac{R}{k} = \cos(\alpha + \varphi) \text{ avec } \tan\varphi = \frac{Q}{P} \text{ et } k = \sqrt{Q^2 + P^2}$$

L'application numérique donne les résultats suivants :

$R = 0,0094256$  ;  $P = 0,0769357$  ;  $Q = 0,1821596$  ;  $k = 0,1977403$  ;  $\varphi = 74,5590$  gon.

Finalement, on obtient  $\alpha = 22,4053$  gon.

## 2 - Calcul des coordonnées du point A

On calcule le gisement  $G_{BC} = 153,5045$  gon.

Par rayonnement à partir du point B ( $BA = 187,819$  m et  $G_{BA} = 104,3843$  gon), on calcule le point A : **A (340,915 m ; 322,186 m ; 92,174 m)**.

Par rayonnement à partir du point C ( $CA = 139,512$  m et  $G_{CA} = 31,0992$  gon), on calcule à nouveau le point A, pour contrôle.

**Pour la réduction au point de station** des angles zénithaux lus dans l'appareil, on voit, figure 1.71-b., que si l'on vise le point connu (ici B) directement au sol, l'angle  $V_{AB}$  lu n'est pas celui qui interviendra dans les calculs. Il faudra le réduire en  $V'_{AB}$  par :  $V'_{AB} = V_{AB} - \varepsilon$ .

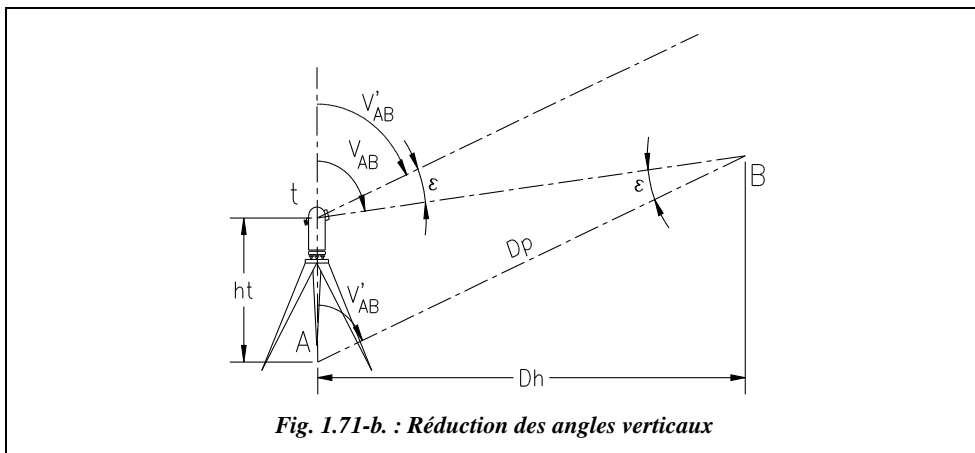


Fig. 1.71-b. : Réduction des angles verticaux

Pour calculer l'angle  $\varepsilon$ , on doit résoudre le triangle  $tAB$ . Il faut donc connaître  $Dp$ . Or, le but d'un relèvement est d'éviter cette mesure de distance.

Le calcul complet devra donc être effectué de manière itérative : à partir des valeurs de départ  $V_{AB}$  et  $V_{AC}$ , on effectue un premier calcul des coordonnées de A (qui seront approchées).

On en déduit une valeur approchée des distances  $Dh_{AB}$  et  $Dh_{AC}$ . On calcule alors l'écart  $\varepsilon$  puis on reprend le calcul de relèvement en trois dimensions pour obtenir les coordonnées définitives du point A.

#### Application

Les données sont les suivantes :

$ht_A = 1,655$  m,  $V_{AB} = 90,5592$  gon,  $ht_B = 1,720$  m et  $V_{AC} = 88,2226$  gon.

On en déduit les résultats ci-après :

$\varepsilon_A = 0,5480$  gon,  $V'_{AB} = 90,0112$  gon,  $\varepsilon_B = 0,7565$  gon et  $V'_{AC} = 87,4661$  gon.

## 8 RECOUPEMENT

### 8.1 Principe

La détermination du point cherché M est effectuée à partir de visées d'intersection et de relèvement. Pour calculer un point par recouplement, on effectue séparément les calculs d'intersection et de relèvement ; les lieux droites et les segments capables sont représentés sur le même graphique.

Deux procédés différents étant utilisés pour déterminer M, il est nécessaire de calculer les demi-plages avec la même incertitude angulaire pour les visées d'intersection et de relèvement. Ces demi-plages ont été définies (voir § 4.2.6. et § 5.2.8.) :

- en intersection :  $t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km} \cdot \varepsilon_{mgon}$  d'une part ;
- en relèvement :  $t_{cm} = 1,57 \cdot D_{km}^f \cdot \varepsilon_{mgon}$  d'autre part.

On peut rendre homogènes entre elles les valeurs des demi-plages d'intersection et de relèvement en s'appuyant, par exemple, sur les tolérances réglementaires utilisées au cadastre. Elles donnent pour une paire de séquences et pour une visée sur une seule direction les tolérances suivantes :

- tolérance angulaire sur une direction en canevas ordinaire :  $\varepsilon = 1,5$  mgon ;
- tolérance angulaire sur une direction en canevas de précision :  $\varepsilon = 1,16$  mgon.

En canevas ordinaire, il faut deux paires de séquences donc :  $\varepsilon_o = 1,5 / \sqrt{2} \approx 1,06$  mgon.

Il faudra de plus tenir compte du fait qu'une visée de relèvement fait intervenir deux lectures angulaires alors qu'une visée d'intersection n'en fait intervenir qu'une seule.

L'écart angulaire en relèvement est donc :  $\varepsilon\sqrt{2}$  mgon.

Finalement, en canevas ordinaire (la méthode graphique n'étant pas employée en canevas de précision), on prend comme valeur des demi-plages d'indécision :

- demi-plage d'intersection pour  $\varepsilon = 1$  mgon :

$$t_{cm} = 1,57 \cdot 1,06 D_{km} \approx 1,67 D_{km} \quad \text{soit} \quad t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$$

- demi-plage de relèvement pour  $\varepsilon = 1$  mgon :

$$t_{cm} = 1,57 \cdot 1,06 \cdot \sqrt{2} Df_{km} \approx 2,36 Df_{km} \quad \text{soit} \quad t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$$

Le coefficient  $K$  est le même dans les deux calculs.

### Remarques

- On peut, pour simplifier les calculs, considérer que le coefficient multiplicateur  $K$  doit être  $\sqrt{2}$  fois plus grand pour les visées de relèvement que pour les visées d'intersection.
- Bien que ce soit l'idéal, les zones d'indécision d'intersection et de relèvement n'ont pas forcément de zone commune. Le point définitif  $M$  n'est pas obligatoirement situé dans l'intersection des deux zones d'indécision, si elle existe. Il doit tout de même se situer dans la zone qui constitue la réunion de ces deux zones.

Dans la pratique, les deux cas de figure suivants peuvent se présenter.

#### 8.1.1 Recouplement centré

On parle de recouplement centré lorsque le point d'intersection est identique au point de relèvement. Sur la figure 1.72., le point cherché  $M$  est stationnable ; il est visé par intersection depuis  $C$  et  $D$ , un *Gomoyen* de station étant calculé en  $C$  et en  $D$ . Depuis la station en  $M$ , trois visées de relèvement sont effectuées sur les points  $A$ ,  $B$  et  $D$ . La visée  $MD$  est donc réciproque.

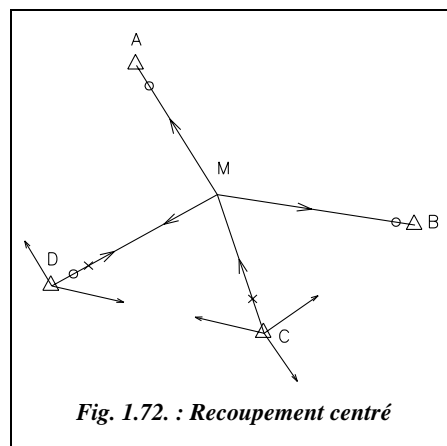
Dans le cas de la figure 1.72., la construction graphique ne fait apparaître que deux points approchés, à savoir :

- $Mo_i$  pour les deux visées d'intersection.
- $Mo_r$  pour les trois visées de relèvement.

Il faut utiliser les demi-plages pour construire le point  $M$  définitif (voir § 7.1.).

#### 8.1.2 Recouplement excentré

On parle de recouplement excentré lorsque le point d'intersection est différent du point de relèvement (voir § 1.3.7.2.).



## 8.2 Application

Soit à calculer un point nouveau M du canevas d'ensemble ordinaire à partir des données suivantes :

- relèvement sur 65, 67, 73 et 86.
- intersection à partir de 67, 76 et 86.

Station : M	X (m)	Y (m)	L (gon)
<b>65</b>	980 546,82	1 157 468,79	0,0000
<b>67</b>	983 695,71	1 158 247,39	85,5349
<b>73</b>	984 729,43	1 155 546,12	156,7302
<b>86</b>	979 465,39	1 153 480,45	304,1589

Stations	X (m)	Y (m)	L (gon)	G0 (gon)	Écart au G0 (mgon)	Dmoy. visée (km)
<b>67</b>	983 695,71	1 158 247,39	171,6918	64,1521	1,6 - 2,3 - 0,9	2,8
<b>76</b>	984 713,53	1 153 893,58	86,5488	254,8788	1,5 - 2,1 - 2,0	3,1
<b>86</b>	979 465,39	1 153 480,45	326,7314	127,7331	2,2 - 1,8 - 1,9	2,5

### ◆ Calculs

1 - Réalisez un schéma des points à l'échelle (fig. 1.74.).

2 - Calculez les gisements des segments capables et dessinez à grande échelle ces segments et les points triples ; le point approché  $Mo_r$  est déterminé à partir des points d'appui 65, 67 et 73. Les coordonnées de  $Mo_r$  sont alors :

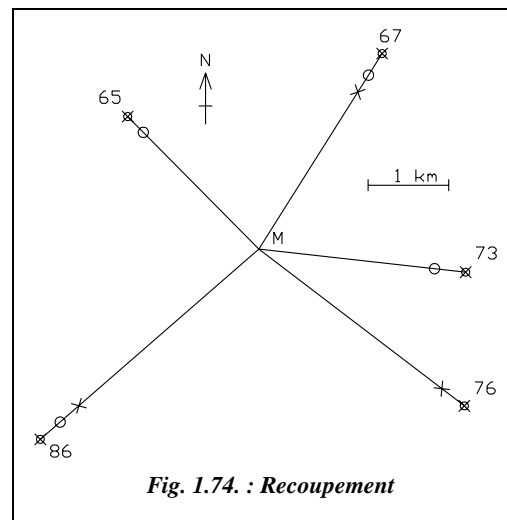
(982 170,27 m ; 1 155 829,92 m)

3 - Calculez les gisements des visées et dessinez les lieux-droites à grande échelle : le point approché  $Mo_i$  est calculé à partir des points 67 et 76. Ses coordonnées sont alors :

(982 170,00 m ; 1 155 830,17 m)

Vous devez obtenir les deux zones limitées par les trois lieux droites pour l'intersection et les quatre points triples pour le relèvement de la figure 1.75.

4 - La réduction de la zone d'indécision est effectuée avec  $K = 2,6$  (fig. 1.76.).

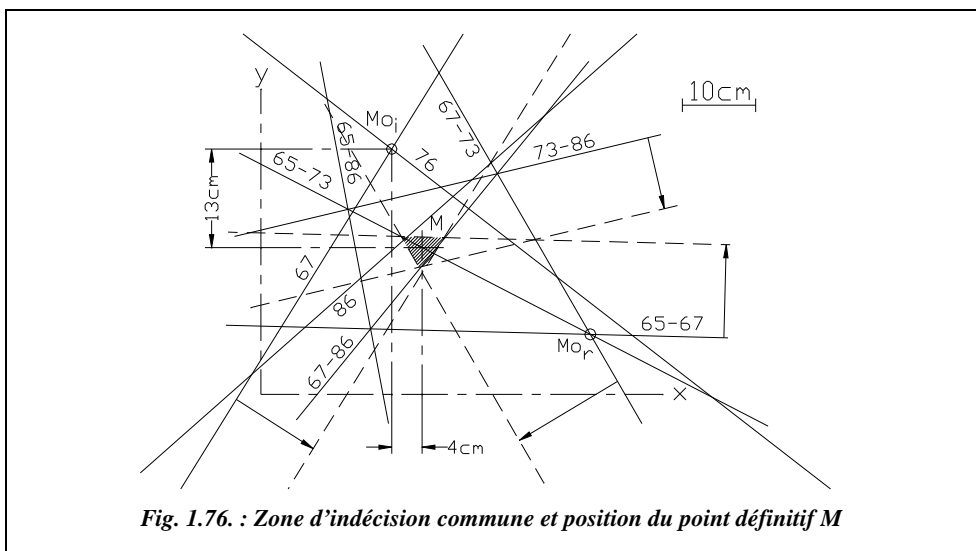
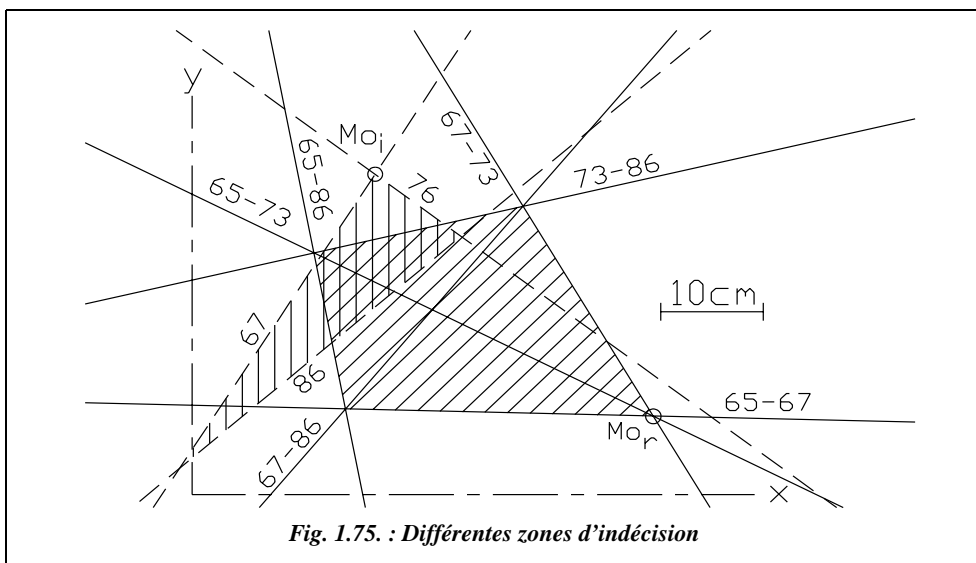


Intersection :  $t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$

Relèvement :  $t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$

Points	$D_{km}$	$t_{cm}$
67	2,9	12,4
76	3,2	13,8
86	3,6	15,5

Couples	$Df_{km}$	$t_{cm}$
65-67	2,0	12,5
65-73	1,3	7,9
65-86	2,0	12,3
67-73	2,5	15,6
67-86	1,6	9,8
73-86	1,6	10,0



Sur la figure 1.76., on peut voir la construction de la zone d'intersection commune des demi-plages et la détermination de M par rapport à  $Mo_i$  ou  $Mo_r$ . Seules les demi-plages utiles sont dessinées. On mesure par rapport à  $Mo_i$  :  $\Delta x = +0,04$  m et  $\Delta y = -0,13$  m.

Les coordonnées du point définitif M sont alors : M (982 170,04 m ; 1 155 830,04 m).



Les calculs suivants sont extraits du tableau TRIANGU.XLS ; ce dernier regroupe les tableaux de calcul de relèvement et d'intersection qui sont combinés en recouplement (ou insertion) dans un troisième tableau.

Le contrôle de la validité des calculs et de la manipulation est donné ci-après.

### 1 - Intersection

Points Pi	Gdéf (gon) $G_{PiM}$	ei (mgon) $G_{obs} - G_{déf}$	Dmoy km	Tolérance sur ei (mgon)	$r_{i_{cm}}$ (Tol. 20cm) $1,57 \cdot D_{km} \cdot e_{i_{mgon}}$
67	235,8416	2,3	2,8	3,8	10,3
76	341,4260	1,6	3,1	3,4	7,9
86	54,4649	-0,4	2,8	3,8	-2,1

### 2 - Relèvement

Points Pi	Dh km	Gdéf. (gon) $G_{PiM}$	G0i (gon) $G_{MPi} - Li$	ei (mgon) $= G0i - G0$	Tolérance ei (mgon)	$r_{i_{cm}}$ (Tol. 20cm) $1,57 \cdot D_{km} \cdot  e_{i_{mgon}} $
65	2,30	150,3031	350,3031	-1,8	4,0	6,7
67	2,86	235,8416	350,3067	1,7	4,0	7,8
73	2,57	307,0335	350,3033	-1,7	4,0	6,9
86	3,58	54,4649	350,3060	1,0	4,0	5,8

$$D_{moy} = 2,83 \text{ km } G0_{moyen} = 350,3049 \text{ gon}$$

**3 - Recouplement**  $Emq = 1,8$  mgon      Tolérance ( $N=16$ ) : 2,4 mgon

$$Rmq = 7,7 \text{ cm} \quad \text{Tolérance : 12 cm}$$

**Conclusion** : toutes les tolérances sont vérifiées pour un calcul en canevas ordinaire.



La construction graphique des lieux sur Autocad LT est réalisée de la même manière que pour les méthodes d'intersection et de relèvement prises séparément. Il faut correctement gérer les calques et les couleurs pour s'y retrouver (fig. 1.76.)...

## 9 INSERTION

### 9.1 Principe

La détermination du point cherché M est effectuée à partir de visées de multilatération combinées à des visées d'intersection et/ou de relèvement. Cette méthode donne de très bons résultats mais nécessite beaucoup de mesures et de longs calculs lors d'une résolution par la méthode graphique du point approché (voir § 1.3.2.3.).

Cette méthode est idéale pour les appareils modernes qui permettent de faire des mesures de distance très précises et des lectures angulaires sans changer d'appareil : on combine alors en station sur le point cherché M des mesures de relèvement et de multilatération sur les points d'appui qui doivent être accessibles. Le nombre de points anciens et le nombre de stations à effectuer sont ainsi limités.

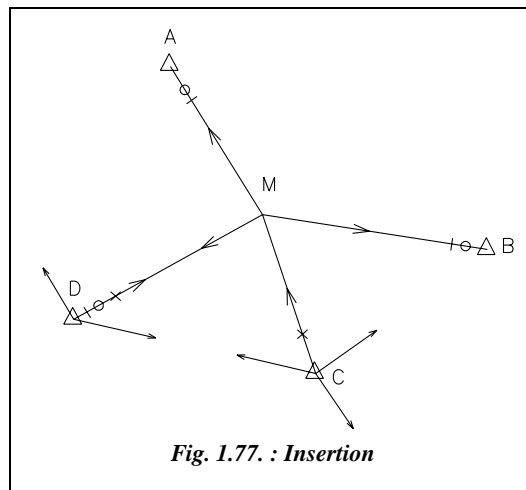
Par exemple, sur la figure 1.77., le point cherché M est calculé par intersection depuis les points C et D, par relèvement et par multilatération depuis les points A, B et D (ce qui fait sept lieux du point M). Pour avoir les quatre lieux nécessaires, il suffisait par exemple de seulement 2 points anciens C et D desquels on ferait 2 mesures de distances et 2 visées d'intersection.

Pour calculer un point par insertion, on effectue séparément les calculs de multilatération, d'intersection et de relèvement ; on représente sur le même graphique les lieux-droites d'intersections, les segments capables et les segments-distances.

Comme pour le recouplement, les demi-plages d'incertitude sont rendues homogènes avant d'être reportées sur le graphique de recherche du point définitif M. En effet, cette méthode associe des mesures de distances et des lectures angulaires dont les précisions sont différentes. Pour le recouplement, on prend les valeurs suivantes (voir § 8.1.) :

- en intersection :  $t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$
- en relèvement :  $t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$

En ce qui concerne la multilatération, les demi-plages sont proportionnelles à la quantité  $(A + BDi_{km})$  si on les calcule à partir des caractéristiques des appareils utilisés (voir § 4.2.7.2.). Mais cette valeur n'est pas homogène à celles de l'intersection et du relèvement. Pour obtenir cette homogénéité, on part à nouveau des tolérances réglementaires.



La tolérance sur l'écart entre deux mesurages indépendants de la distance inclinée  $Di$  est de  $T_{cm} = 3 + Di_{km}$ . Si l'on considère que la mesure de distance est réalisée par quatre mesurages indépendants (ce qui permet d'approcher la précision donnée par les IMEL actuels, voir tome 1, chap. 4), on obtient :  $T_{cm} = (3 + Di_{km}) / \sqrt{2}$ .

Cela donne une tolérance de 2,8 cm pour 1 km ; un IMEL courant donne un écart type de 1 cm pour 1 km ce qui correspond à une tolérance de 2,7 cm pour 1 km.

La tolérance sur une mesure unilatérale de l'angle zénithal est de 5,6 mgon. Comme  $Dh = Di \cdot \sin V$ , on en déduit (voir § 4.2.7.2.) que la tolérance sur la mesure de  $Dh$  est de :

$$T_{Dh(cm)} = \sqrt{\left(\sin V \frac{3 + Di_{km}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(Di_{km} \cdot 10^5 \cdot \cos V \frac{\pi \cdot 5,6 \cdot 10^{-3}}{200}\right)^2}$$

Si l'on se place dans le cas où les visées sont proches de l'horizontale ( $Di \approx Dh$ , ce qui est suffisant au regard de la précision de la construction graphique), on obtient :

$$T_{Dh(cm)} \approx (3 + Dh_{km}) / \sqrt{2}.$$

Les demi-plages de multilatération sont proportionnelles à cette valeur, c'est-à-dire :

$$t_{cm} = K \frac{(3 + Dh_{km})}{\sqrt{2}}$$

Les remarques faites au paragraphe 7.1. pour la construction des zones d'indécision de recouvrement s'appliquent également à l'insertion.

Ci-contre est donné un **tableau récapitulatif** pour la construction des demi-plages en insertion (canevas ordinaire). Ce tableau donne les valeurs des demi-plages pouvant être utilisées pour tous les calculs.

Méthode	demi-plage (cm)
Intersection	$t_{cm} = 1,67 \cdot K \cdot D_{km}$
Relèvement	$t_{cm} = 2,36 \cdot K \cdot Df_{km}$
Multilatération	$t_{cm} = K \frac{(3 + Dh_{km})}{\sqrt{2}}$

#### Remarque

| Dans ce calcul de  $t$  on peut considérer que  $Dh$  et  $Dr$  sont égales.

## 9.2 Application

Reprenez les données de l'exercice précédent de recouvrement et ajoutez-y les lectures ci-contre :

Points	X (m)	Y (m)	Dr (m)
64	980 708,43	1 154 887,78	1739,109
73	984 729,43	1 155 546,12	2575,160
48	982 102,14	1 154 080,69	1750,690

$Dr$  est la distance réduite à la projection.



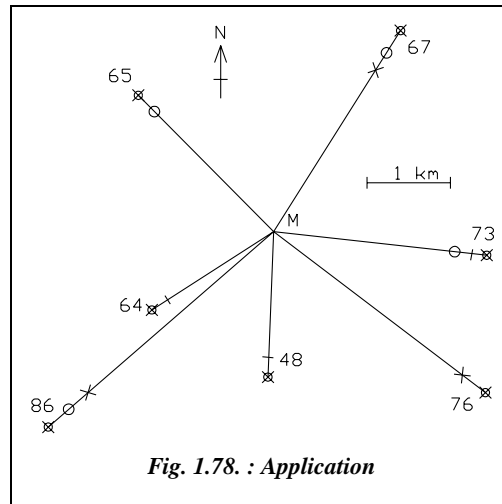
◆ **Calculs**

**1** - Réalisez un schéma des points à l'échelle (fig. 1.78.) en ajoutant les points 64 et 48 au schéma du paragraphe 8.1.1.

**2** - Calculez les segments-distances et dessinez de la zone d'indécision de multilatération ; le point approché  $Mo_m$  est déterminé à partir de 48 et 73 :

$Mo_m$  (982 169,97 m ; 1 155 830,07 m).

Reprenez le graphique de recoupement précédent et ajoutez-y la multilatération.



Vous devez obtenir les zones d'indécision de la figure 1.79.

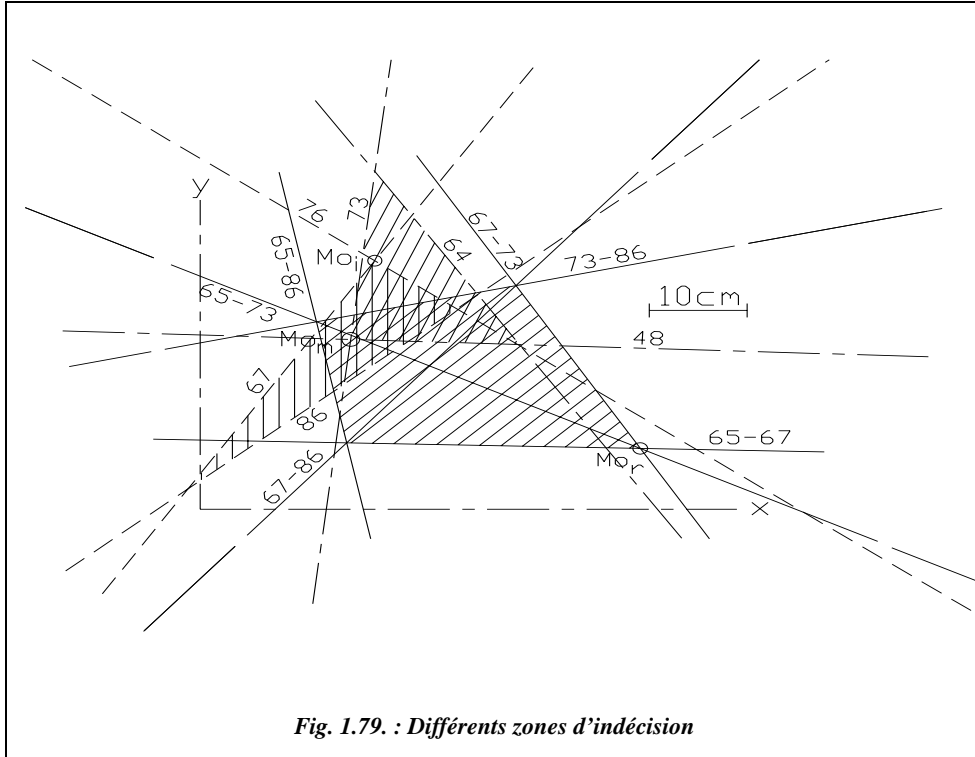
**3** - La réduction des zones d'indécision est effectuée avec  $K = 2,6$ .

Reprenez les valeurs de l'exemple précédent pour l'intersection et le relèvement.

Pour les demi-plages de multilatération, on obtient :  $t_{cm} = K(3 + D_{km}) / \sqrt{2}$

On peut constater que, à distance équivalente, les amplitudes des demi-plages sont comparables pour les trois méthodes.

Points	$D_{km}$	$t_{cm}$
64	1,74	8,7
73	2,58	10,2
48	1,75	8,7



**Fig. 1.79. : Différents zones d'indécision**

On retrouve sur la figure 1.79. :

- les dessin des différentes zones d'indécision ;
- Le repérage des trois points approchés :  $Mo_m$ ,  $Mo_i$  et  $Mo_r$ .

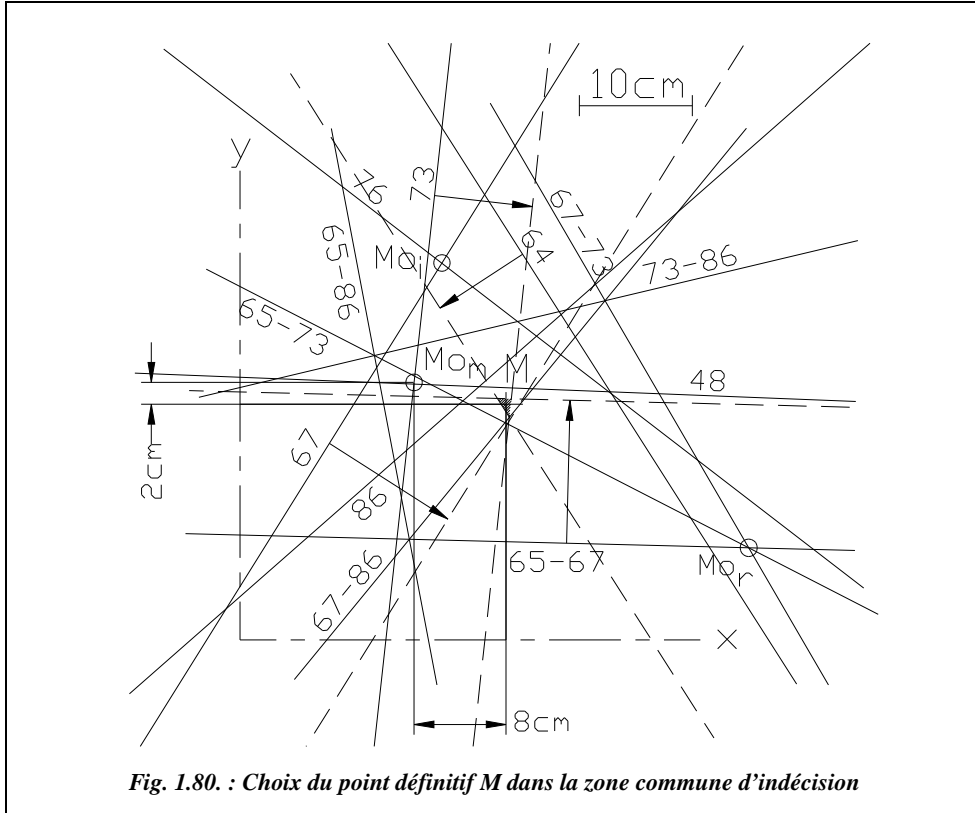
Lors d'un calcul manuel, on peut réaliser la construction à partir d'un seul point approché (le plus simple à calculer).

Sur la figure 1.80. suivante, on effectue la réduction des zones d'indécision en cherchant l'intersection des demi-plages ; seules les demi-plages utiles sont représentées. On remarque que :

- les trois types de visées participent à la réduction.
- le point final n'est pas dans la zone commune aux 3 zones considérées séparément.

On mesure  $\Delta x$  et  $\Delta y$  par rapport au point approché le plus proche (ici  $Mo_m$  issu des visées de multilatération) et on lit :  $\Delta x = + 0,08$  m et  $\Delta y = - 0,02$  m.

Les coordonnées du point définitif sont donc :  $M ( 982\ 170,05$  m ;  $1\ 155\ 830,05$  m).



Le contrôle de la validité des calculs et de la manipulation est effectué comme suit.

**– Multilatération :**

$Rmq = 8,4 \text{ cm}$  ; Tolérance : 12 cm.

Points $P_i$	Dist. définitive $D_{d\acute{e}f} \text{ (m)}$	Écarts $r_{i_{cm}}$ $D_{obs} - D_{d\acute{e}f}$
<b>73</b>	2575,08	8,2
<b>48</b>	1750,67	1,7
<b>64</b>	1739,02	8,5

**– Intersection :**

$Emq = 1,9 \text{ mgon}$   
Tolérance : 2,5 mgon

$Rmq = 8,9 \text{ cm}$   
Tolérance : 12 cm

Points $P_i$	$G_{d\acute{e}f} \text{ (gon)}$ $G_{P_iM}$	$e_i \text{ (mgon)}$ $G_{obs} - G_{d\acute{e}f}$	Tol. sur $e_i$ $\text{(mgon)}$	$r_{i_{cm}} \text{ (Tol. 20cm)}$ $1,57 \cdot D_{km} \cdot e_i \text{ mgon}$
<b>67</b>	235,8415	2,4	3,8	10,6
<b>76</b>	341,4263	1,3	3,4	6,5
<b>86</b>	54,4649	-0,4	3,8	-2,0

– Relèvement :

$G_{0\text{moyen}}$  :

350,3049 gon

$Emq = 1,9$  mgon

Tolérance : 2,9 mgon

$Rmq = 7,9$  cm

Tolérance : 12 cm

Pts	G <sub>déf.</sub> (gon)	G <sub>0i</sub> (gon)	ei (mgon)	Tolérance	ri <sub>cm</sub>
Pi	G <sub>MPI</sub>	G <sub>MPI</sub> - Li	= G <sub>0i</sub> - G <sub>0</sub>	ei (mgon)	Tol. 20cm
65	350,3027	350,3027	-2,2	4,0	7,9
67	35,8415	350,3066	1,7	4,0	7,7
73	107,0337	350,3035	-1,4	4,0	5,6
86	254,4649	350,3060	1,0	4,0	5,9

– Insertion complète :  $Emq = 1,7$  mgon

$Rmq = 7,3$  cm

Tolérance ( $N=16$ ) : 2,4 mgon

Tolérance : 12 cm

**En conclusion**, toutes les tolérances étant vérifiées, on considère la manipulation valide en canevas ordinaire.

**Remarque**

Cet exercice est purement scolaire ; dans la réalité, on ne calculera pas un point avec 9 lieux géométriques !

### 9.3 Insertion excentrée

De même que pour le recoupement, on parle d'insertion centrée lorsque le point cherché fait l'objet de toutes les visées et d'insertion excentrée lorsque l'on est obligé d'excentrer le point cherché pour effectuer toutes les visées.

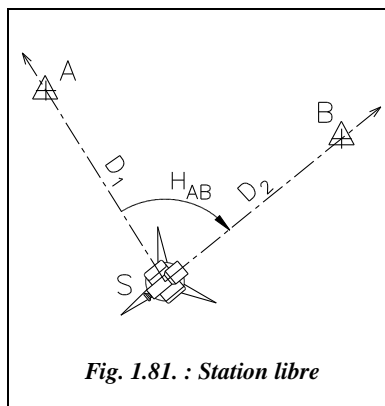
### 9.4 Application au calcul d'une station libre

La station libre est une mise en station qui n'est pas effectué sur un point donné : en d'autres termes, on stationne « n'importe où » et on calcule *a posteriori* les coordonnées de la station en s'appuyant sur des visées faites sur au moins deux points anciens (points A et B, fig. 1.81.). On connaît ainsi les coordonnées de la station, qui ne sera pas forcément implantée au sol ; cette méthode peut être très pratique pour des opérations uniques de lever ou d'implantation en coordonnées Lambert.

Cette méthode de mise en station est de plus en plus utilisée puisque, d'une part, le nombre de points connus est actuellement suffisant pour que l'on puisse toujours trouver au moins deux points d'appuis, et d'autre part, grâce aux distancemètres, il est devenu simple et précis de mesurer une distance à un point connu. Certains appareils intègrent directement ce calcul sous forme de programme.

Si on dispose de plus de deux points anciens, en mesurant les distances et les angles sur ces points, on ramène le problème à un calcul d'insertion classique (relèvement et multilatération).

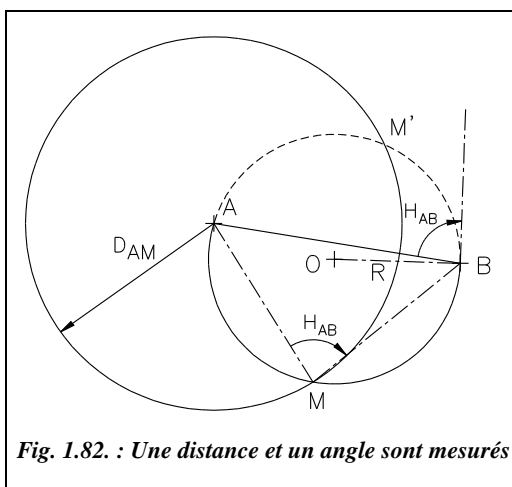
Si on ne dispose que de deux points anciens (ou si pour gagner du temps et lorsque la précision de connaissance de la station autorise seulement deux visées), les deux cas suivants peuvent se présenter.



**Fig. 1.81. : Station libre**

### 9.4.1 Une mesure de distance et deux lectures angulaires

C'est le cas lorsque l'un des deux points anciens est inaccessible. La solution est unique et il n'y a pas de contrôle possible.



**Fig. 1.82. : Une distance et un angle sont mesurés**

Le point M est à l'intersection du segment capable AMB (construit à partir des deux lectures angulaires donnant  $H_{AB}$ ) et du cercle de centre A et de rayon  $D_{AM}$  (fig. 1.82.).

Pour le calcul du point M, deux solutions sont possibles :

**1 - Résoudre le triangle AMB :** on connaît deux côtés et un angle. À partir de l'angle BAM, on calcule  $G_{AM}$  et on en déduit M.

**2 - Déterminer les caractéristiques du cercle contenant l'arc capable :** centre O et rayon R. Cela revient à déterminer

un cercle donné par deux points (A et B) et la tangente en un de ces points (voir chapitre 4, § 5.2.), le gisement de la tangente est :

- au point B :  $G_T = G_{BA} + H_{AB}$  ;
- au point A :  $G_T = G_{AB} - H_{AB}$ .

On calcule ensuite l'intersection avec le cercle de centre A et de rayon  $D_{AM}$  (voir chapitre 4, § 4.). Cette intersection fournit deux solutions M et M' : seul M est correct car M' correspond à un angle  $AM'B = 200 - H_{AB}$ . Il y n'a ambiguïté (deux solutions correctes) que lorsque  $H_{AB} = 100$  gon, ce qui est peu probable dans la réalité.

#### Exemple

Calculez les coordonnées de la station M (éventuellement M') pour A (983 530,174 ; 155 393,148), B (983 824,771 ; 155 345,037),  $H_{AB} = 91,8472$  gon,  $D_{AM} = 225,084$  m.

#### Résultats

$G_T = 2,1528$  gon ; O (983 674,375 ; 155 350,125) ;  $R = 150,482$  m.

D'où les points M (983 648,763 ; 155 201,838) et M' (983 734,201 ; 155 488,204).

### 9.4.2 Deux mesures de distances et deux lectures angulaires

On se trouve dans le cas d'une insertion avec un nombre de visées minimal pour permettre un contrôle des calculs et de la précision de connaissance des coordonnées de la station.

Deux mesures de distances donnent deux points approchés M et M', les calculs sont détaillés au paragraphe 4.1. ; il faut choisir l'un des deux, par exemple à partir d'un schéma à l'échelle ou de la carte d'étude.

On calcule les paramètres du segment capable provenant de la visée de relèvement à partir de ce point Mo. On obtient autour du point Mo deux segments-distances provenant des mesures de distances sur A et B. On obtient donc trois lieux possibles (un arc capable et deux cercles) pour le point définitif M. Pour placer M, il reste à construire les demi-plages comme pour une insertion classique.

#### Remarque

Le but de la station libre étant d'obtenir rapidement les coordonnées planimétriques du point de station du théodolite, la méthode employée dans la réalité est un calcul aux moindres carrés (programme utilisé sur le terrain).

#### Application

Si vous reprenez les données de l'exemple précédent avec une mesure de distance supplémentaire ( $D_{BM} = 226,875$  m), vous obtenez par résolution informatique M (983 648,794 ; 155 201,844) avec  $Emq = 1,1$  mgon (tolérance 1,3 mgon en canevas de précision) et  $Rmq = 0,7$  cm.

## 9.5 Résolution informatique



Le calcul aux moindres carrés se prêtant à une informatisation, le fichier TRIANGU.XLS (fourni sur le cédérom du livre) vous propose cinq tableaux

pour toutes les résolutions d'intersection, de relèvement, de multilatération, de recouplement ou d'insertion. Ce tableau traite toutes les combinaisons possibles de visées de relèvement, d'intersection ou de multilatération (y compris le cas de la station libre). Ci-après est donné un exemple de calcul extrait du dernier exemple traité (§ 9.2.).



On peut aussi programmer cette résolution aux moindres carrés en BASIC : le listing en basic standard est donné sur le cédérom (fichiers TRIANGU.TXT et STATLIB.TXT). Le programme TRIANGU.BAS est aussi fourni sur le cédérom ainsi qu'un programme plus court STATLIB.BAS adapté à la station libre.

◆ **Détermination d'un point par Recouplement ou Insertion**

**1 - Point cherché :** M Canevas Ordinaire  
 Intersection :  $I = 3$  visées Relèvement :  $R = 4$  visées Multilatération  $M = 3$  visées

**Point approché No :**  $X_0 = 982\,170,27$  m  
 $Y_0 = 1\,155\,829,92$  m

*G*0moyen approché de relèvement :  $G_0 = 350,3009$  gon

**Point définitif**

$dx = -Dt_x / Dt = -0,22$  m       $X = X_0 + dx = 982\,170,05$  m  
 $dy = -Dt_y / Dt = 0,17$  m       $Y = Y_0 + dy = 1\,155\,830,09$  m  
 $dG_0 = -DtG_0 / Dt = 38$  dmgon       $G_0 = G_0 + dG_0 = 350,3047$  gon

**2 - Résolution matricielle**

	Matrice globale	$Dt = 8,3323$
$a\,dx + b\,dy + c\,dG_0 + d = 0$	88,5441      16,5669	0,0594
$b\,dx + e\,dy + f\,dG_0 + g = 0$	16,5669      102,8788	-0,0089
$c\,dx + f\,dy + h\,dG_0 + i = 0$	0,0594      -0,0089	0,0010
$a = 10^8 \Sigma(P_j \cdot (\cos G_j / Dj)^2)$	Matrice $dx$	$Dt_x = 1,8463$
$b = -10^8 \Sigma P_j \cdot (\sin G_j \cdot \cos G_j / Dj^2)$	14,6062      16,5669	0,0594
$c = -50 \pi \Sigma(\cos G_j / Dj)$	-13,0459      102,8788	-0,0089
$d = -50 \pi \Sigma P_j \cdot (\cos G_j / Dj \cdot \Delta_j)$	-0,0230      -0,0089	0,0010
$e = 10^8 \Sigma(P_j \cdot (\sin G_j / Dj)^2)$	Matrice $dy$	$Dt_y = -1,3816$
$f = 50 \pi \Sigma(\sin G_j / Dj)$	88,5441      14,6062	0,0594
$g = 50 \pi \Sigma P_j \cdot (\sin G_j / Dj \cdot \Delta_j)$	16,5669      -13,0459	-0,0089
$h = R (\pi / 200)^2$	0,0594      -0,0230	0,0010
$i = (\pi / 200)^2 \cdot \Sigma(\Delta_j)$	Matrice $dG_0$	$DtG_0 = -318,0824$
	88,5441      16,5669	14,6062
	16,5669      102,8788	-13,0459
	0,0594      -0,0089	-0,0230

### 3 - Intersection

Pts Pi	$X_i$ m	$Y_i$ m	Gobs Pi - M gon	Gapp G(Pi - Mo) gon	Delta Gobs - Gapp dmgon	Distance $Dr_i$ m	Poids $P_i$ $n_j / (R - 1)$ ou $n_j$
67	983 695,71	1 158 247,39	235,8439	235,8358	81	2858,52	1,00
76	984 713,53	1 153 893,58	341,4276	341,4269	7	3196,50	1,00
86	979 465,39	1 153 480,45	54,4645	54,4692	-47	3582,79	1,00

### 4 - Relèvement

Pts Pi	$X_i$ m	$Y_i$ m	Gobs M - Pi gon	Gapp G(Pi - Mo) gon	Delta Gobs - Gapp dmgon	Distance $Dr_i$ m	Poids $P_i$ 1
65	980 546,82	1 157 468,79	350,3009	350,3009	0	2306,83	1,00
67	983 695,71	1 158 247,39	35,8358	35,8358	0	2858,52	1,00
73	984 729,43	1 155 546,12	107,0311	107,0311	0	2574,85	1,00
86	979 465,39	1 153 480,45	254,4598	254,4692	-93	3582,79	1,00

### 5 - Multilatération

Pts Pi	$X_i$ m	$Y_i$ m	Dobs $Dr$ m	Dapp m	Delta Dobs - Dapp mm	Gapp Pi - Mo gon	Poids $P_i$ $O : 4 / (R - 1)$ $P : 1 / (R - 1)$
64	980708,43	1 154887,78	1739,109	1739,138	-29	63,5540	1,33
73	984729,43	1 155546,12	2575,160	2574,850	310	307,0311	1,33
48	982102,14	1 154080,69	1750,690	1750,557	133	2,4782	1,33

### 6 - Vérification des tolérances $G_0$ moyen de station : 350,3047 gon

Pt	$G_{d\acute{e}f}$ M - Pi gon	$G_{0i}$ $G_{d\acute{e}f} - H_i$ gon	Écart $e_i$ $G_{0i} - G_0$ mgon	Tolérances sur $e_i$		Écart $r_i$ $1.57 D_{km} \cdot e_i$ mgon cm
	Précision mgon	Ordinaire mgon				
65	350,3019	350,3019	-2,8	0,9	4,0	-10,1
67	35,8419	350,3070	2,3	0,9	4,0	10,5
73	107,0347	350,3045	-0,2	0,9	4,0	-0,8
86	254,4644	350,3055	0,8	0,9	4,0	4,3

Tolérances sur  $r_i$  : 4 cm (précision) et 20 cm (ordinaire)



### Écarts d'orientation en intersection

Point Pi	Gdéf Pi - M gon	Écarts ei Gobs - Gdéf mgon	Tolérances sur ei		Écarts ri $1,57 \cdot D_{\text{km}} \cdot e_{\text{mgon}}$ cm
			Précision mgon	Ordinaire mgon	
67	235,8419	2,0	0,9	4,0	8,8
76	341,4270	0,6	0,9	3,6	3,1
86	54,4644	0,1	0,9	4,1	0,8

Écarts moyens quadratiques :

$Emq = 1,9$  mgon ( $N = 16$ ) Tolérances : 1,0 mgon en canevas de précision

2,4 mgon en canevas ordinaire

$Rmq = 6,9$  cm ( $N = 10$ ) Tolérances : 2,5 cm en canevas de précision  
(valeur usuelle)

12 cm en canevas ordinaire

### Écarts linéaires en multilatération

Point Pi-M	Ddéf Dobs - Ddéf m	Écarts ri cm
64	1739,046	6,3
73	2575,085	7,5
48	1750,718	-2,8

### Remarque

Les tolérances en intersection sont différentes d'un point à l'autre car à chaque station on ajoute la visée sur le point définitif M. Le nombre et la distance moyenne des visées changent.

#### ◆ résolution au moyen du solveur d'Excel



Excel 7

Nous proposons une résolution faisant appel au solveur d'Excel et dont la mise en place est très simple et accessible à tous.

#### Le principe du calcul est le suivant.

Dans le tableau donné en fin de paragraphe, on entre les données suivantes :

- les coordonnées des points d'appui (cases B7 à C9, B12 à C15 et B18 à C20) ;
- les lectures terrain (cases D7 à D9, D12 à D15 et D18 à D20).

On calcule ensuite :

- les gisements observés de relèvement (cases E12 à E15) ;
- les gisements et distances approchés (cases E7 à E9, F12 à F15 et E18 à E20) ;
- les écarts entre valeurs observées et valeurs approchées (cases F7 à F9, G12 à G15 et F18 à F20).

On effectue la somme des carrés des écarts (G4) et on fait tendre cette valeur vers 0 en jouant sur les données du point approché (B2 à B4) ; le solveur effectue ce calcul par itérations. Lorsque la somme des carrés est minimale, le point approché de départ est devenu le point définitif. Le principe de cette méthode est donc proche des moindres carrés (leurs résultats sont très proches).

#### ◆ *Écriture du tableau*

Entrez les textes de mise en page générale. Entrez ensuite les données (B7 à D9, B12 à D15 et B18 à D20), point approché et G0 approché en B2 à B4.

1- Calcul des gisements approchés d'intersection :

- Si le tableau MENUPOPO.XLS est chargé, entrez la formule suivante en case E7  

$$= \text{Gisement}(B7,C7,\$B\$2,\$B\$3) \downarrow$$
- Sinon utilisez la fonction ATAN2 d'Excel (voir tome 1, chap. 3, § 5.2.4.).

Recopiez ensuite la case E7 vers E8 et E9

2- Calcul des gisements observés de relèvement :

En case E12, entrez la formule :  $= \$B\$4 + D12 \downarrow$  puis recopiez cette case vers D13 à D15.

3- Calcul des gisements approchés de relèvement :

En case F12, entrez la formule :  $= \text{GISEMENT}(B12,C12,\$B\$2,\$B\$3)$  puis recopiez vers F13 à F15.

4- Calcul des écarts en dmgon (intersection et relèvement) :

En case F7, entrez :  $= (D7 - E7) * 10000 \downarrow$  puis recopiez en F8, F9 et G12 à G15.

5- Calcul des distances approchées de multilatération :

En case E18, entrez la formule ;  $= \text{RACINE}((B18-\$B\$2)^2+(C18-\$B\$3)^2) \downarrow$  puis recopiez en E19 et E20

6- Calcul des écarts de multilatération (en mm puis en dmgon de manière à les rendre homogènes aux autres écarts) :

En case F18, entrez :  $= (D18-E18) * 1000 \downarrow$  puis recopiez en F19 et F20.

En case G18, entrez :  $= F18 / E18 / \text{PI}() * 200 * 10 \downarrow$  puis recopiez en G19 et G20.

7- Calcul de la somme des carrés des écarts, en case G4, entrez :

$= \text{SOMMEPROD}( F18 :F20 , F18 :F20 ) + \text{SOMMEPROD}( G12 :G15 , G12 :G15 ) + \text{SOMMEPROD}( G7 :G9 , G7 :G9 ) \downarrow$

#### ◆ *Utilisation du solveur*

Dans le menu OUTILS, cliquez sur la rubrique Solveur pour provoquer le chargement de la macro-fonction SOLVEUR.XLA. Si le solveur n'est pas présent, provoquez son

chargement à partir de la rubrique MACROS COMPLÉMENTAIRES du même menu OUTILS.

Définissez la case G4 comme cellule à rendre minimale (cocher l'option Min).

Définissez les cases B2 à B4 comme cellules variables.

Adoptez les paramètres suivants de réglages (bouton OPTIONS) : précision  $10^{-10}$ , pourcentage d'erreur 0%, estimation quadratique, dérivée centrée et recherche par Newton.

Lancez le solveur et, après quelques itérations, vous obtenez les résultats suivants comparables à la solution donnée par la méthode des moindres carrés ; le solveur donne directement le point définitif M à la place du point approché de départ en cases B2 à B4.

	A	B	C	D	E	F	G
1	<b>Point approché</b>						
2	X=	982 170,04	m				
3	Y=	1 155 830,09	m				
4	G0=	350,3048	gon	Somme des carrés des écarts :			2753
5	<b>Données d'intersection</b>						
6	Points	X (m)	Y (m)	Gobs (gon)	Gapp (gon)	Écarts (dmgon)	
7	67	983 695,71	1 158 247,39	235,8439	235,8420	19	
8	76	984 713,53	1 153 893,58	341,4276	341,4268	8	
9	86	979 465,39	1 153 480,45	54,4645	54,4643	2	
10	<b>Données de relèvement</b>						
11	Points	X (m)	Y (m)	Li	Gobs (gon)	Gapp (gon)	Écarts (dmgon)
12	65	980 546,82	1 157 468,79	0,0000	350,3048	350,3022	26
13	67	983 695,71	1 158 247,39	85,5349	35,8397	35,8420	24
14	73	984 729,43	1 155 546,12	156,7302	107,0350	107,0346	4
15	86	979 465,39	1 153 480,45	304,1589	254,4637	254,4643	7
16	<b>Données de multilatération</b>						
17	Points	X (m)	Y (m)	Dobs (m)	Dapp (m)	Écarts (mm)	Écarts (dmgon)
18	64	980 708,43	1 154 887,78	1739,109	1739,038	71	26
19	73	984 729,43	1 155 546,12	2575,160	2575,092	68	17
20	48	982 102,14	1 154 080,69	1750,690	1750,712	22	8

#### Remarque

Les cases G18 à G20 servent à rendre homogènes à des angles les écarts dont on effectue la somme en case G4.

# 10 OPÉRATIONS ANNEXES DU CANEVAS D'ENSEMBLE

## 10.1 Station excentrée

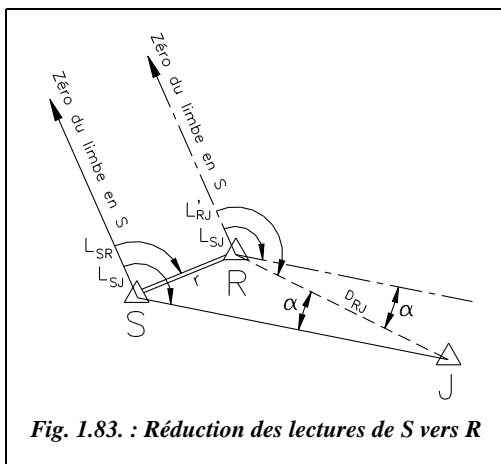
### 10.1.1 Principe

La définition et le principe sont donnés au paragraphe 1.3.2.2.

### 10.1.2 Calcul des lectures corrigées

Soit le point R depuis lequel on ne peut viser le point J (fig. 1.83.). On utilise la station excentrée S pour obtenir la lecture  $L_{SJ}$ . On veut obtenir la lecture  $L'_{RJ}$  qui est la lecture que l'on aurait faite depuis R sur J (avec la même direction du zéro du limbe qu'en S). On note  $L'_{RJ}$  cette lecture pour la différencier de  $L_{RJ}$ , la lecture réduite à la référence utilisée en station en R généralement différente de celle utilisée en S.

#### 10.1.2.1 Corrections angulaires



Si l'on mène depuis le point R une parallèle à la direction du zéro du limbe de la station excentrée S (fig. 1.83.), la lecture que l'on aurait dû faire depuis R sur le point J, notée  $L'_{RJ}$ , est obtenue en corrigeant de l'angle  $\alpha$  la lecture de S sur J ( $L_{SJ}$ ).

La distance d'excentrement  $r$  doit être connue au centimètre près (voir § 10.1.3.). On calcule  $\alpha$  par :

$$\sin \alpha = \frac{r}{D_{RJ}} \cdot \sin(L_{SJ} - L_{SR})$$

On en déduit la lecture corrigée :

$$L'_{RJ} = L_{SJ} + \alpha$$

$\alpha$  est donné avec son signe.

Ces calculs sont à effectuer pour chaque point J visé depuis S.

Cette formule est vraie quel que soit le cas de figure ; en effet, dans un autre cas de figure, on aurait eu  $\sin \alpha = \frac{r}{D_{RJ}} \cdot \sin(L_{SJ} - L_{SR})$  avec  $L'_{RJ} = L_{SJ} - \alpha$ , formules identiques aux précédentes.

Deux cas peuvent se présenter :

**1 - Le repère R est connu**, la distance  $D_{RJ}$  est alors calculée à partir des coordonnées :

$$D_{RJ} = \sqrt{(X_R - X_J)^2 + (Y_R - Y_J)^2}$$

**2 - Le repère R est inconnu** (cas du recoupement excentré) ; on détermine les coordonnées approchées de R ou de S suivant le nombre de visées (ici celles de S) et on en déduit les distances  $D_{SJ}$ . On en déduit :

$$D_{RJ} = \sqrt{r^2 + D_{SJ}^2 - 2r \cdot D_{SJ} \cdot \cos(L_{SJ} - L_{SR})}$$

On démontre au paragraphe 10.1.3. que connaître  $D_{RJ}$  au mètre près est suffisant ; donc déduire  $D_{RJ}$  des coordonnées approchées de R ou de S est correct.

### 10.1.2.2 Réduction des lectures à la référence R

Deux cas doivent être envisagés :

**1 -** La référence au point R est choisie identique à celle en S (c'est en général le cas si on ne peut pas stationner R) ; les lectures corrigées sont alors déjà réduites à la référence en R.

**2 -** La référence choisie en R est différente de celle en S : il faut alors réduire les lectures corrigées à la même référence en utilisant les visées réciproques de R sur S et de S sur R, ou bien en utilisant une visée commune aux stations R et S. Par exemple, sur les figures 1.84-a. et 1.84-b., la référence en R est le point O, différente de la référence en S.

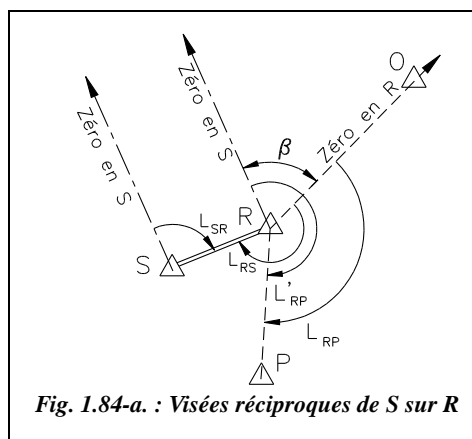
**2.a)** Si l'on dispose de visées réciproques du signal S sur R (fig. 1.84-a.) :

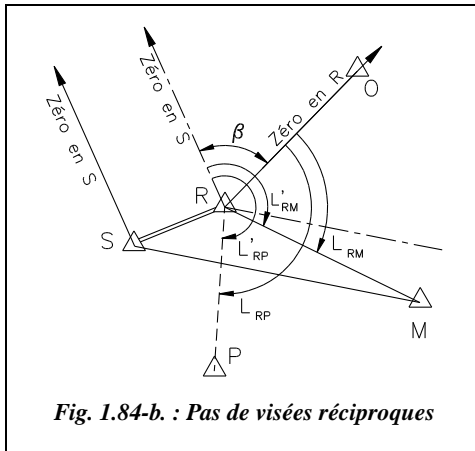
Pour obtenir la lecture  $L_{RP}$  (lecture sur P depuis R réduite à la référence en R qui est ici le point O), il faut retirer à la lecture corrigée  $L'_{RP}$  l'angle  $\beta$  qui a pour valeur :

$$\beta = L_{SR} - (L_{RS} \pm 200)$$

Finalemnt :

$$L_{RP} = L'_{RP} - \beta$$





2.b) Si l'on ne dispose pas de visées réciproques (fig. 1.84-b.) :

Il faut au moins un point commun visé depuis S et depuis R (ou bien un point connu en coordonnées visé depuis S, par exemple le point M de la figure 1.84-b.).

Pour obtenir la lecture  $L_{RP}$ , il faut retrancher à la lecture  $L'_{RP}$  l'angle  $\beta$  qui prend la valeur :

$$\beta = L'_{RM} - L_{RM}$$

donc :

$$L_{RP} = L'_{RP} - \beta$$

### 10.1.3 Précision requise sur les mesures de distance

Le cas le plus défavorable se produit lorsque  $L_{SJ} - L_{SR} = 100$  gon, ce qui implique que

$$\sin \alpha = \frac{r}{D_{RJ}}$$

$\alpha$  étant faible, on peut le confondre avec son sinus :  $\alpha_{rad} \approx \frac{r}{D_{RJ}}$ .

Donc, en dérivant  $\alpha$  par rapport à  $r$  et  $D_{RJ}$  notée  $D$ , on obtient :  $d\alpha = \frac{dr}{D} - \frac{r \cdot dD}{D^2}$ .

1 - Si l'on considère  $D$  exact ( $dD = 0$ ), alors l'écart type sur  $r$  est  $\sigma(r) = \sigma(\alpha_{rad}) \cdot D$ .

Fixons la précision angulaire à 6 dmgon (valeur usuelle pour le T2 au dmgon). Pour une distance  $D$  d'environ 3 000 m (canevas ordinaire), on calcule que  $r$  doit être connu à 2,8 cm près. Pour une distance  $D$  d'environ 1 500 m (canevas de précision), on calcule que  $r$  doit être connu à 1,4 cm près.

2 - Si l'on considère  $r$  exact ( $dr = 0$ ), alors l'écart type sur  $D$  est  $\sigma(D) = \frac{\sigma(\alpha_{rad}) \cdot D^2}{r}$ .

La précision angulaire reste égale à 6 dmgon. La distance d'excentrement est fixée à une valeur faible  $r = 5$  m. Pour une distance  $D$  de 3 000 m en canevas ordinaire, on calcule que la distance  $D$  doit être connue à 8,5 m près. Pour une distance  $D$  de 1 500 m en canevas de précision, on calcule que la distance  $D$  doit être connue à 2,1 m près.

**En conclusion** : la précision du centimètre est nécessaire sur la mesure de la distance d'excentrement  $r$ , les distances de visée  $D_{RP}$  devant être connues au mètre près.

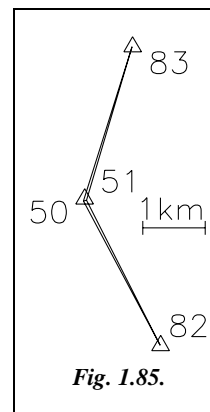
### 10.1.4 Premier exemple

On désire calculer les coordonnées d'une station excentrée 51 (S) qui servira de départ à une polygonale par un calcul de *G0moyen* de station s'appuyant sur les points 82 et 83 (fig. 1.85.).

Les coordonnées de 51 seront déduites du point connu 50 (R), non stationnable mais sur lequel on peut poser un miroir pour mesurer la distance d'excentrement SR, à savoir  $D_{SR} = 49,25$  m.

Les lectures effectuées en station au point 51 sont données ci-après.

Points	X (m)	Y (m)	L (gon)
83	462 780,07	3 181 355,89	0,0000
82	463 227,77	3 176 574,11	151,8280
50	462 003,65	3 178 885,95	267,3791



Les distances  $D_{RJ}$  sont déduites des coordonnées. Les lectures fictives  $L_{RJ}$  ne sont pas réduites à la référence 83 afin de conserver au point S et au point R le même *G0moyen* de station. Le tableau suivant détaille le calcul des lectures réduites  $L_{RP}$ .

Points J	$L_{SJ}$ (gon)	$D_{RJ}$ (m)	$L_{SJ} - L_{SR}$ (gon)	Alpha (gon)	$L_{RP}$ (gon)
83	0,0000	2589,10	-267,3791	1,0555	1,0555
82	151,8280	2615,93	-115,5511	-1,1630	150,6650
50 (R)	267,3791	49,25			

Le calcul du *G0moyen* de station en R à partir des visées sur 82 et 83 est détaillé ci-après :

Points J	$D_{RJ}$ (km)	$G_{RJ}$ (gon)	$L_{RJ}$ (gon)	$G0j$ (gon)	Écarts $e_j$ (mgon)	Tolérance (mgon)	
						ordinaire	précision
83	2,60	19,3894	1,0555	18,3339	0,1	3,5	0,4
82	2,60	168,9986	150,6650	18,3337	-0,1	3,5	0,4
<i>G0moyen</i> :				18,3338	gon		

Le calcul des coordonnées de S par rayonnement depuis R est :

$$G_{RS} = 18,3338 + 67,3791 = 85,7129 \text{ gon}$$

$$D_{RS} = 49,25 \text{ m}$$

Les coordonnées du signal S sont donc : S (462 051,67 m ; 3 178 896,91 m).

Pour vérifier, on calcule le  $G_0$  moyen de station en S :

Points J	$D_{SJ}$ km	$G_{SJ}$ gon	$L_{SJ}$ gon	$G_0j$ gon	Écart $e_j$ (mgon)	Tolérance (mgon)	
						ordinaire	précision
83	2,60	18,3337	0,0000	18,3337	0,0	3,5	0,4
82	2,60	170,1618	151,8280	18,3338	0,0	3,5	0,4
			$G_0$ moyen :	18,3338	gon		

### 10.1.5 Deuxième exemple

Les points 312 et 310 n'étant pas visibles depuis R, on les vise depuis une station excentrée S (fig. 1.86-a.).

Calculer le tour d'horizon que l'on aurait fait en R.

Remarquez que l'on est dans le cas où la visée SR n'est pas réciproque.

Station	Point visé	Lectures (gon)	Distances (m)
500 (R)	315 (P)	112,0239	–
	318	357,1148	3617
	316 (réf.)	0,2336	2997
501 (S)	310 (réf.)	0,1871	2986
	312	138,2196	1012
	315 (P)	214,3871	2797
	500 (R)	278,1719	24,35

#### ◆ création d'un tableau sur EXCEL



Programmons la résolution précédente sur EXCEL : menu FICHIER / NOUVEAU. Entrer les textes de présentation et les données (A1-I10).

Entrer en case I4 la formule : = D4 – D\$6

Recopier la case I4 en I5 et I6 (EDITION / RECOPIER VERS LE BAS).

Entrer en E7 la formule suivante : = D7 – D\$10

Entrer en F7 : = RACINE(C7^2 + C\$10^2 – 2 \* C7 \* C\$10 \* COS(E7 \* PI() / 200))

Entrer en G7 la formule : = ASIN(C\$10 / F7 \* SIN(E7 \* PI() / 200)) \* 200 / PI()

Entrer en H7 la formule : = D7 + G7

Entrer en I7 : = SI (H7 – H\$9 + I\$4 < 0 , H7 - H\$9 + I\$4 + 400 , H7 - H\$9 + I\$4 )

Sélectionner la zone E7 à I10 puis menu EDITION / RECOPIER VERS LE BAS.

Vous devez obtenir le tableau suivant dans lequel la colonne I donne le tour d'horizon fictif en 500 réduit à zéro sur le point de référence 316 ; l'angle  $\beta$  vaut ici : 213,9180 – 111,7903 = 102,1277 gon.



Le tableau EXCENT.XLS fourni sur le cédérom permet de réaliser ces calculs.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Station excentrée 501								
2	Station	Points P	Distance	Lectures	$L_{SJ} - L_{SR}$	$D_{RJ}$	Alpha	$L'_{RJ}$ corr.	$H_{RJ}$ réduites
3		visés	$D_J$ (m)	$L_J$ (gon)	(gon)	(m)	(gon)	$L_{RJ}$ (gon)	$H_J$ (gon)
4	500 (R)	(P) 315		112,0239					111,7903
5		318	3617,00	357,1148					356,8812
6		(réf) 316	2997,00	0,2336					0,0000
7	501 (S)	(réf) 310	2986,00	0,1871	-277,9848	2994,34	0,4871	0,6742	298,5465
8		312	1012,00	138,2196	-139,9523	1026,49	-1,2225	136,9971	34,8694
9		(P) 315	2797,00	214,3871	-63,7848	2783,96	-0,4691	213,9180	111,7903
10		500	24,35	278,1719					

#### ◆ résolution graphique



L'environnement de travail est réglé dans le menu FORMAT / CONTROLE DES UNITES : angles en grades, quatre chiffres significatifs, longueurs en unités décimales et avec une précision de deux chiffres, zéro au nord, sens de rotation horaire.

#### 1 - Report des lectures effectuées en 501 (S).

Ce sont les points 310, 312, 315 et 500 (fig. 1.86-b.).

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point @2986<0.1871↵↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point @1012<138.2196↵↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point @2797<214.3871↵↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point @24.35<278.1719↵

Zoom↵ Etendu↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point EXTrémité de... (point 315)

#### 2 - Report des lectures effectuées en 500 (R).

Ce sont les points 316 et 318 (voir fig. 1.86-b.)

Changement de repère : SCU↵ 3points↵ origine au point 500

(EXTrémité de... en Zoom transparent obtenu par 'Z↵ ou bien

menu VUE / ZOOM / FENETRE), axe des X sur le point 315 (EXTrémité de... après

retour au zoom précédent par 'Z↵P↵ ou bien menu VUE / ZOOM / PRECEDENT), axe

des Y vers le point 312. SCU↵ Z↵ angle de rotation autour de Z : - 312.0239↵ (cela

positionne l'angle 112.0239 sur le point 315).

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point @3617<357.1148↵↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point @2997<0.2336↵↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point EXT de... (point 310)↵

LIGNE↵ du point 0,0↵ au point EXT de... (point 312)↵

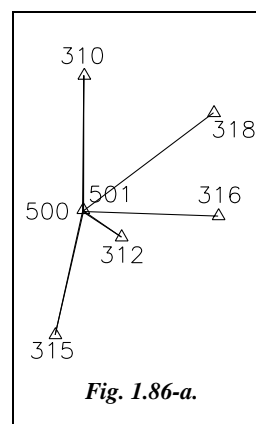
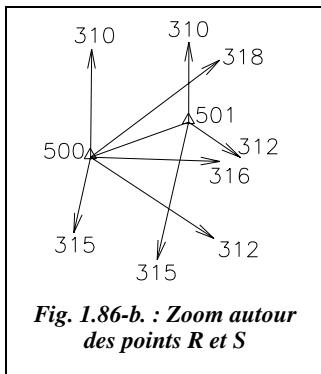


Fig. 1.86-a.

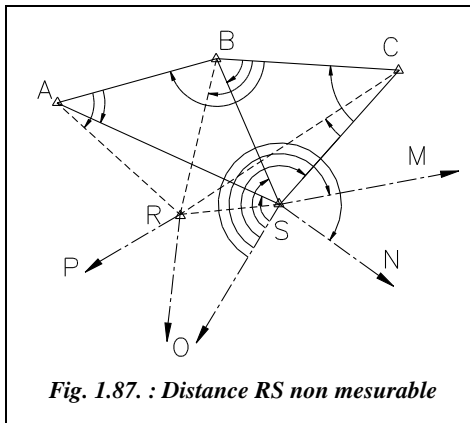


**3** - Ramenez le zéro des angles sur le point 316.

SCU ↵ Z ↵ angle de rotation 100.2336 ↵.

Lecture des angles réduits du tour d'horizon : en *Zoom* près du point 500 (fig. 1.86-b.), commande *LISTE* puis cliquez sur toutes les lignes partant de 500 vers les points et validez. Notez dans les renseignements fournis la valeur « angle dans le plan XY » qui correspond au gisement de la droite dans le repère local que l'on s'est fixé.

### 10.1.6 Cas particulier d'une distance d'excentrement non mesurable



C'est le cas le plus défavorable : par exemple, R est un clocher sur lequel il est impossible de poser un miroir.

On utilise des points intermédiaires (A, B et C, fig. 1.87.) répartis de manière homogène autour des points R et S et depuis lesquels on voit R et S ; puis on résout tous les triangles.

Le déroulement de la manipulation et des calculs est le suivant :

**1** - effectuez les lectures en S en y incluant les points A, B et C ;

**2** - stationnez A, B et C en y relevant les angles sur S, R, A, B et C ;

**3** - calculez les longueurs SA, SB et SC (résolution des triangles, avec vérification sur SB) ;

**4** - calculez en repère local fictif le cheminement fermé S-A-B-C-S, la fermeture ne devant pas excéder 2 cm (la compensation s'effectue uniquement sur SA et SC). On en déduit la distance d'excentrement  $r$  et le gisement fictif des côtés SA, SB, SC ;

**5** - calculez le gisement fictif du côté SR (avec vérification) puis calcul des angles CSR, BSR, ASR et déduction (avec vérification) de la lecture que l'on aurait dû faire de S sur R ;

**6** - enfin, réduisez les observations en R comme étudié précédemment.

### Remarque

Cette méthode est très proche de celle du rabattement (§ 10.2.) mais s'en différencie par son objectif. Le rabattement vise à donner les coordonnées d'un point, alors que l'excentrement ne vise que la réduction des lectures angulaires de S vers R.

## 10.2 Rabattement au sol d'un point connu

Cette opération consiste à matérialiser au sol un (ou plusieurs) points nouveaux construits à partir d'un point connu. Ce point nouveau est accessible ou plus durable que le point connu (le cas de figure classique du rabattement est un point non stationnable comme un clocher, un château d'eau, un pylône, etc.) et permet par exemple le départ d'un cheminement. Le but de la manipulation est donc le calcul des coordonnées du point rabattu.

### 10.2.1 Le point connu est stationnable

On revient à une opération de rattachement (voir § 1.3.2.).

### 10.2.2 Le point connu est inaccessible

C'est le cas typique d'un clocher (point M, fig. 1.88-a.). Les deux méthodes suivantes sont généralement utilisées.

#### 10.2.2.1 Méthode du cadastre

La méthode est la suivante :

**1** - Construire deux bases AB et BC homogènes et formant avec le point M connu deux triangles sensiblement équilatéraux.

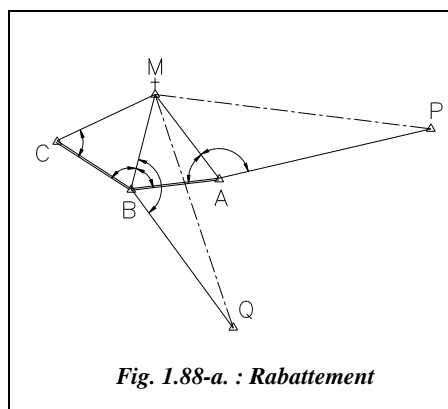
**2** - Viser un point connu éloigné P depuis l'un des trois points au sol (ici depuis A). De ce même point A ou depuis un autre point (B ou C), viser un autre point connu éloigné Q.

**3** - Résoudre les triangles BCM et ABM (vérification sur la distance BM calculée deux fois).

**4** - Résolution des triangles APM et BQM.

**5** - Calcul du gisement  $G_{MA}$  (vérification par double calcul : à partir de  $G_{MP}$  puis de  $G_{MQ}$ ).

**6** - Vérification par calcul du cheminement fermé M-A-B-C-M dont la fermeture planimétrique ne doit pas excéder 2 cm. La compensation se fait uniquement sur les côtés MA et MC (pour ne pas modifier les longueurs mesurées AB et BC supposées exactes).



On obtient finalement trois points rabattus : A, B et C. A et B sont ici les plus précisément connus.

Si le point Q est visé depuis A, la démarche reste la même. Le point rabattu est plutôt le point A sur lequel on peut ajouter un contrôle final en calculant un *G0moyen* de station.

### 10.2.2 Méthode de l'Institut Géographique National

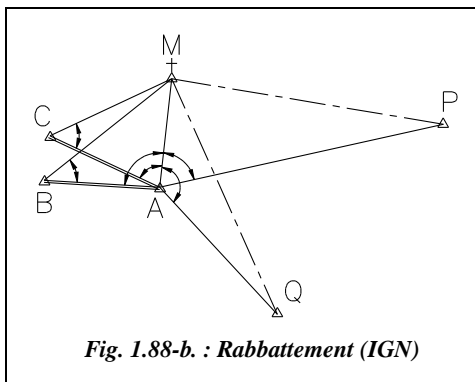


Fig. 1.88-b. : Rabattement (IGN)

Cette méthode est une variante de la précédente. Elle est intéressante en cas de manque de place pour la construction des bases AB et BC.

Les bases AB et AC sont construites du même côté ; les triangles ne sont pas accolés comme précédemment. Les points P et Q sont visés depuis le même point A qui sera le point rabattu de M.

La vérification finale est un calcul de *G0moyen* de station au point A qui est obtenu par rayonnement depuis M.

### 10.2.3 Exemple

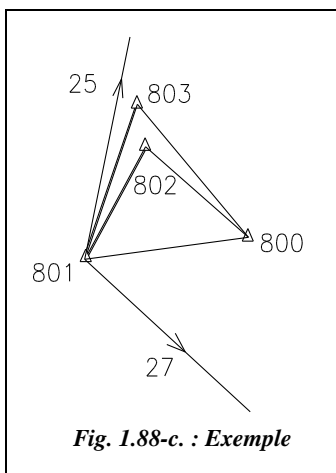


Fig. 1.88-c. : Exemple

Le point 800 est inaccessible. Il faut le rabattre au sol pour obtenir le départ d'un cheminement qui sera le point 801 depuis lequel deux autres points connus sont visibles (25 et 27). Deux bases sont construites pour cette manipulation : 801-802 et 801-803 (fig. 1.88-c.).

Les données sont :

Points	X (m)	Y (m)
<b>25</b>	793 403,28	3 314 851,82
<b>27</b>	794 591,35	3 311 524,47
<b>800</b>	793 061,66	3 312 886,49

Les observations ci-contre sont déjà réduites à la projection :

Station	Point visé	$H_z$ (gon)	Dh (m)
801	25	8,4500	
	803	17,3286	98,30
	802	28,7574	78,02
	800	86,5591	
	27	138,0674	
802	800	0,1232	
	801	92,1532	78,03
803	800	0,0987	
	801	70,9983	98,30

◆ *La résolution numérique est détaillée dans les tableaux suivants.*

1 - Résolution des triangles 800-801-802 et 800-801-803 :

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
801-802	78,025	50,1683
800-801	109,19	92,0300
800-802	86,75	57,8017

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
801-803	98,30	59,8699
800-801	109,19	70,8996
800-803	107,75	69,2305

2 - Résolution des triangles 800-801-27 et 800-801-25 :

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
800-27	2048,18	51,5083
800-801	109,19	2,4566
801-27	2122,02	146,0350

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
800-25	1994,80	78,1091
800-801	109,19	3,2821
801-25	2028,96	118,6088

3 - Calcul du gisement 800-801 :

$$G_{800-25} = 10,9565 \text{ gon} \quad G_{800-801} = 10,9565 - 118,6088 (+ 400) = 292,3477 \text{ gon.}$$

$$G_{800-27} = 146,3128 \text{ gon} \quad G_{800-801} = 146,3128 + 146,0350 = 292,3478 \text{ gon.}$$

Les calculs précédents sont donnés avec vérification par double calcul la distance 800-801 (109,19 m) et le gisement 800-801 (292,3477 gon).

4 - Résolution du triangle 801-802-803 :

La somme des angles est correcte à 27 dmgon près.

Côté	Longueur (m)	Angle opposé (gon)
801-803	98,30	151,9976
801-802	78,025	36,5709
802-803	25,64	11,4288
Contrôle :		199,9973

5 - Le tableau suivant détaille le calcul du cheminement fermé 800-801-802-803-800

Point	Dh (m)	Angle Hg (gon)	G (gon)	$\Delta X$ (m)	$\Delta Y$ (m)	X (m)	Y(m)
800						793 061,66	3 312 886,49
	109,19		292,3478	-108,40	-13,09		
801						792 953,25	3 312 873,40
	98,30	400 - 69,2305	23,1173	34,92	91,89		
803						792 988,17	3 312 965,29
	25,64	400 - 36,5709	186,5464	5,38	-25,07		
802						792 993,55	3 312 940,22
	86,75	400 - 151,9976-92,0300	142,5188	68,11	-53,73		
800						793 061,66	3 312 886,49
		400 - 50,1683	292,3505				
802							
Fermetures			0,0027	0,01	0,00		

La fermeture planimétrique est inférieure à 1 cm donc la manipulation semble correcte. On a choisi de compenser ce centimètre (en abscisse) sur le côté calculé le plus long, c'est-à-dire le côté 800-801.

6 - Calcul du  $G0_{moyen}$  de station en 801 de coordonnées (792 953,25 m ; 3 312 873,40 m)

Pts	Distances m	Gisement gon	$G0i$ gon	Écarts $e_i$ mgon	Tolérance en mgon		Écarts $r_i$ cm
					ordinaire	précision	
25	2028,96	14,2389	5,7889	0,0	7,4	1,5	0,0
800	109,20	92,3501	5,7910	2,1	7,4	1,5	0,4
27	2122,02	143,8561	5,7887	-0,2	7,4	1,5	0,7
$D_m =$	1420,06	$G0_{moyen} =$	5,7889	$Emq = 1,5$	3,0	1,2	$Rmq = 0,6$

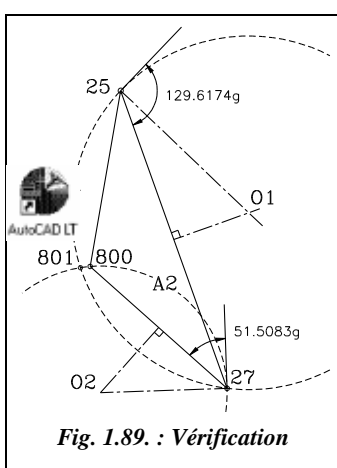


Fig. 1.89. : Vérification

Le résultat final place la manipulation « à la limite » des tolérances du canevas de précision.

#### ◆ vérification graphique

La vérification graphique qui suit montre que le point 801 peut être calculé seul comme point relevé à partir des seules visées sur 800, 25 et 27. Comme il n'y a dans ce cas aucun contrôle des mesures, ce n'est pas une résolution graphique mais une vérification graphique.

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 10.1.4.

Placez les points d'appui comme suit : *LIGNE* du point 793403.28,314851.82 au point 793061.66,312886.49 au point 794591.35,311524.47

Pour la construction des arcs capables, consultez le chapitre 4, paragraphe 6.4. la construction graphique d'un point relevé. Deux arcs suffisent pour obtenir le point 801 (par exemple sur la figure 1.89., l'arc A1 issu de 25 et 27 et l'arc A2 issu de 27 et 800) car le troisième, issu de 25 et 800, passe aussi exactement par 801.

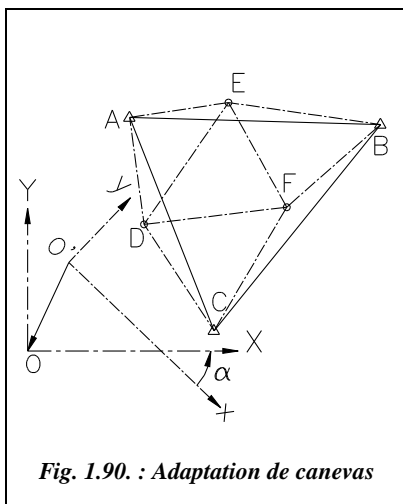
La commande *ID* *INTersection* des deux arcs donne les coordonnées du point 801.

Le résultat est : 801 (792 953.254 , 312 873.396).

### 10.3 Adaptation d'un canevas local à un canevas existant

Pour un chantier donné, on peut travailler dans un repère local. Tous les points calculés dans le repère local peuvent ensuite être recalculés dans le repère général (en système de coordonnées Lambert) à condition de **connaître au moins deux points dans les deux systèmes** (local et général). Le système général est conservé : c'est le système local qui est déformé.

Plus généralement, on peut ainsi adapter un canevas existant à un autre canevas existant par exemple lorsque l'on se situe en zone frontalière ou encore lorsque l'on est confronté à un système de coordonnées ancien. Ce type de transformation est aussi utilisé pour adapter au canevas existant un canevas de points levé par GPS.



Par exemple, sur la figure 1.90., est représenté un canevas existant dont les points A, B, C, D, E et F sont connus dans un repère local ( $O', x, y$ ) ; Ces points doivent être exprimés dans le repère général ( $O, X, Y$ ). Les points A, B et C (points de calage) connus dans les deux systèmes permettront d'adapter le canevas local au canevas général.

La transformation des coordonnées doit comprendre :

- une translation de vecteur  $O'O$  pour que les deux systèmes aient la même origine.
- une rotation d'angle  $\alpha$  pour aligner les axes de coordonnées des deux repères.
- une adaptation d'échelle pour faire coïncider au mieux les deux canevas.

Cela signifie que si l'on désire travailler en repère local et pouvoir se rattacher plus tard au repère général, il faut établir un canevas partant d'au moins deux points du canevas d'ensemble. On retrouve le principe « aller de l'ensemble au détail ».

### 10.3.1 Transformation de Helmert à trois paramètres

C'est une des méthodes de calcul qui permet d'effectuer l'adaptation.

#### 10.3.1.1 Adaptation sur deux points A et B

Les points A et B sont connus dans les deux repères. Leurs coordonnées sont notées  $(X_A, Y_A)$ ,  $(x_A, y_A)$ ,  $(X_B, Y_B)$  et  $(x_B, y_B)$ .

Les coordonnées en repère général  $(X_P, Y_P)$  d'un point quelconque P connu en repère local  $(x_P, y_P)$  sont :

$$\begin{aligned} X_P &= X_A + a.(y_P - y_A) + b.(x_P - x_A) & p &= (y_B - y_A).(X_B - X_A) - (x_B - x_A).(Y_B - Y_A) \\ \text{avec } (a &= \frac{p}{r} \text{ et } b = \frac{q}{r}) & q &= (y_B - y_A).(Y_B - Y_A) + (x_B - x_A).(X_B - X_A) \\ Y_P &= Y_A - a.(x_P - x_A) + b.(y_P - y_A) & r &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \end{aligned}$$

#### 10.3.1.2 Adaptation effectuée sur n points

On fait intervenir l'isobarycentre G du polygone délimité par les  $n$  points de base connus dans les deux systèmes (points A, B et C de la fig. 1.90.). Les coordonnées d'un point P deviennent :

$$\begin{aligned} X_P &= X_G + a.(y_P - y_G) + b.(x_P - x_G) \\ \text{avec : } x_G &= \frac{\sum x_i}{n}, y_G = \frac{\sum y_i}{n}, X_G = \frac{\sum X_i}{n}, Y_G = \frac{\sum Y_i}{n} \\ Y_P &= Y_G - a.(x_P - x_G) + b.(y_P - y_G) \text{ et } a = \frac{p}{r} \text{ et } b = \frac{q}{r} \end{aligned}$$

Les coefficients  $p$ ,  $q$  et  $r$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} p &= \sum(\Delta y_i \cdot \Delta X_i) - \sum(\Delta x_i \cdot \Delta Y_i) \text{ avec } \Delta x_i = x_i - x_G \text{ et } \Delta X_i = X_i - X_G \\ q &= \sum(\Delta y_i \cdot \Delta Y_i) + \sum(\Delta x_i \cdot \Delta X_i) \text{ avec } \Delta y_i = y_i - y_G \text{ et } \Delta Y_i = Y_i - Y_G \\ r &= \sum(\Delta x_i)^2 + \sum(\Delta y_i)^2 \end{aligned}$$

On vérifie que  $\sum(\Delta x_i) = \sum(\Delta y_i) = \sum(\Delta X_i) = \sum(\Delta Y_i) = 0$ , G étant le centre de gravité des  $n$  sommets.

Pour vérifier, on calcule à nouveau les coordonnées des points de base dans le système général à partir de leurs coordonnées dans le système local. Une moyenne quadratique des écarts de coordonnées d'un système à l'autre donne un ordre de grandeur de la précision de la transformation réalisée.



Si la transformation ne fait pas intervenir de mise à l'échelle, on peut calculer la distance de chaque point P au centre de gravité en système local et en système général : on doit retrouver la même valeur à quelques centimètres près. Si la transformation fait intervenir une mise à l'échelle, les calculs supposent une homothétie de centre G.

## 10.3.2 Exercices

### 10.3.2.1 Calage sur quatre points

Les points A, B, C et D sont connus en système Lambert et dans un système local.

Calculez les coordonnées en système général (Est, Nord ou X, Y) des points E et F.

Points	Coordonnées locales		Coordonnées Lambert	
	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)
<b>A</b>	2 751,75	2 729,08	981 844,58	3 155 171,74
<b>B</b>	3 115,61	2 552,80	982 208,31	3 155 161,55
<b>C</b>	2 734,81	2 360,07	981 966,96	3 154 862,66
<b>D</b>	3 037,41	2 326,88	982 227,64	3 154 947,12
<b>E</b>	2 906,78	2 685,77		
<b>F</b>	2 923,13	2 493,54		

#### ◆ résolution numérique sur tableur



Excel 7

Le tableau HELMERT.XLS fourni sur le cédérom permet d'effectuer ces calculs. Il calcule aussi un changement de repère par rotation et/ou translation. Les tableaux ci-dessous en sont extraits.

Centre de gravité				Calcul de a et b :		
x = 2909,89	y = 2492,21	X = 982 061,87	Y = 3 155 035,77	a =	-0,3694377	
				b =	0,8207901	
Points	$\Delta x_i$ (m)	$\Delta y_i$ (m)	$\Delta X_i$ (m)	$\Delta Y_i$ (m)	Écarts en cm	
A	-158,14	236,87	-217,29	135,97	3,3	
B	205,72	60,59	146,44	125,78	5,5	
C	-175,09	-132,14	-94,92	-173,11	3,9	
D	127,52	-165,33	165,77	-88,65	6,1	
					Emq : 5,6	

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont calculés au moyen des formules du paragraphe 10.3.1.

On en déduit les écarts (en cm) entre les coordonnées des quatre points de calage recalculées par les formules et les coordonnées initiales données en Lambert. L'écart moyen quadratique de 5,6 cm indique une corrélation correcte. On peut déduire de ces calculs les valeurs de paramètres plus significatives de cette transformation, à savoir :

- la longueur du vecteur de translation en G :  $\sqrt{(X_G - x_G)^2 + (Y_G - y_G)^2} = 990 963,24$  m.
- l'angle de rotation :  $G_{GA}(\text{Lambert}) - G_{GA}(\text{local}) = -26,9281$  gon.

- le facteur de mise à l'échelle (rapport de distances) :  $\frac{D_{GA}(\text{Lambert})}{D_{GA}(\text{Local})} = 0,900$ .

Le tableau suivant détaille le calcul de points nouveaux quelconques du canevas en système local à partir des paramètres déterminés auparavant.

Points du canevas local			Coord. Lambert		Distances GPI (m)		Facteur d'échelle	Écarts (cm)
Pts	x (m)	y (m)	X (m)	Y (m)	en local	Lambert		
E	2 906,78	2 685,77	981 987,80	3 155 193,49	193,58	174,25	0,900	1934
F	2 923,13	2 493,54	982 072,24	3 155 041,75	13,30	11,97	0,900	133

On constate que lorsqu'il y a mise à l'échelle, les distances en système local en en système général sont très différentes (dans un rapport de 0,9) et ceci d'autant plus que le point étudié est éloigné du point G. Cela s'explique dans certains cas par la différence d'ellipsoïde de référence entre les deux systèmes de projection utilisés.

### 10.3.2.2 Calage sur deux points

Reprenez les données de l'exemple précédent en enlevant les points C et D.

Que l'on utilise les formules simplifiées sur deux points A et B, ou les formules complètes faisant intervenir le barycentre G, on obtient dans les deux cas :

$$a = -0,3695599 \text{ et } b = 0,8206095.$$

$$Emq = 0 \text{ cm (ce qui est logique puisqu'il n'y a qu'une seule solution).}$$

$$X_E = 981\,987,80 \text{ m} \quad Y_E = 3\,155\,193,49 \text{ m}$$

$$X_F = 982\,072,26 \text{ m} \quad Y_F = 3\,155\,041,79 \text{ m}$$

On note un écart de 4 cm sur le point F qui est plus éloigné des points A et B que E.

#### Remarques

Ce type de transformation est aussi utilisé pour l'opération de calibrage d'une tablette à digitaliser.

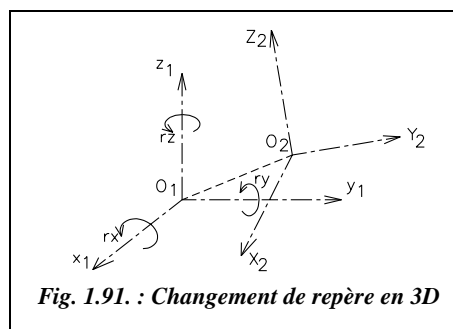
Il existe également des transformations à sept paramètres utilisées pour un travail dans l'espace à trois dimensions<sup>1</sup> (par exemple pour le passage d'un ellipsoïde à l'autre en coordonnées géocentriques, voir tome 1, chap. 2 § 3.4.6.).

### 10.3.3 Transformation à sept paramètres

Dans l'espace à trois dimensions, on utilise une transformation à sept paramètres (ou similitude euclidienne) : trois rotations, trois translations et une homothétie.

<sup>1</sup> Voir aussi l'article *Transformation de coordonnées* du numéro 8 de la revue XYZ.

On utilise souvent ce type de transformation dans le cadre d'un changement de système géocentrique (fig. 1.91.), en particulier lors de calculs GPS pour le passage des coordonnées WGS 84 de l'ellipsoïde IAGRS80 à Clarke 80. Dans ce cas précis, on utilise aussi ces transformation pour des adaptations de réseaux, par exemple, les formules de transformation de Molodensky permettent de passer en coordonnées géodésiques d'un système à un autre (voir tome 1, chap. 7, § 1.4.).



**Fig. 1.91. : Changement de repère en 3D**

### 10.3.3.1 Équations de transformation

L'étude d'un changement de repère dans l'espace à trois dimensions est détaillée au paragraphe 7.2.8. du chapitre 5. À partir des résultats de cette étude et pour des angles de rotation petits, ce qui est toujours le cas dans le cadre d'une adaptation de réseaux, on obtient une matrice de rotation qui est de la forme :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & rz & -rx \\ -rz & 1 & ry \\ ry & -rx & 1 \end{bmatrix} \text{ car } \sin(rx) \approx rx, \cos(rx) \approx 1, \text{ etc.}$$

Les angles  $rx$ ,  $ry$ ,  $rz$  sont exprimés en radians et en sens positif trigonométrique.

Si l'on rajoute une homothétie de facteur  $k$  et une translation de vecteur  $(tx, ty, tz)$  connu dans le système d'arrivée  $S_2$ , on obtient la formule générale de passage d'un système géocentrique  $S_1$  vers un système  $S_2$  donnée ci-après.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{S_2} = \begin{pmatrix} k & rz & -ry \\ -rz & k & rx \\ ry & -rx & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{S_1} - \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$$

Connaissant les sept paramètres, on peut ainsi déterminer les coordonnées dans le système 2 de tout point du système 1. Le problème est souvent de déterminer ces paramètres en fonction de points communs aux deux systèmes.

### 10.3.3.2 Recherche des paramètres

Les inconnues du calcul sont les **paramètres de la transformation** : trois rotations, trois translations et un facteur d'homothétie (sept inconnues). Si l'on connaît les coordonnées d'un point dans les deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , on peut déduire trois équations de la formule précédente. Donc trois points suffisent à déterminer les sept inconnues (à la rigueur un

point connu en X, Y et Z et deux points connus en X et Y). On est donc amené à résoudre un système de  $3.n$  équations,  $n$  étant le nombre de points connus en X, Y et Z dans les deux systèmes. Cette résolution s'effectue habituellement par les moindres carrés.

**1** - On exprime la différence entre les coordonnées dans les deux systèmes ; en posant  $k = 1 + d$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \text{etc.} \\ X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}_{S_2} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \text{etc.} \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}_{S_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & -z_1 & y_1 \\ 0 & -1 & 0 & y_1 & z_1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & -1 & z_1 & -y_1 & x_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & x_n & 0 & -z_n & y_n \\ 0 & -1 & 0 & y_n & z_n & 0 & -x_n \\ 0 & 0 & -1 & z_n & -y_n & x_n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ d \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

La grande matrice centrale à sept colonnes et  $3.n$  lignes, est notée M.

**2** - On fait tendre la somme des carrés de ces différences vers 0. Si l'on note P le vecteur des paramètres inconnus, P vérifie l'équation  $(P + M^T \cdot M)^{-1} \cdot M^T \cdot K = 0$ .  $M^T$  est la transposée de M et  $M^{-1}$  l'inverse de M. On en déduit les paramètres de transformation.



Nous proposons une méthode de résolution plus originale faisant appel au solveur d'Excel. Elle consiste à calculer directement les carrés des écarts ( $X_i - x_i$  ;  $Y_i - y_i$  ;  $Z_i - z_i$ ) en fonction de paramètres de transformation approchés et à minimiser la somme des carrés des écarts en jouant sur les paramètres. Le solveur calcule les paramètres exacts par itérations (voir un exercice similaire au paragraphe 9.5.).

**Ci-dessous est donné le détail des calculs du tableau de la page suivante**

On se place dans le cas d'une transformation par rotation suivie de translation.

Les paramètres sont entrés en lignes 2, 3 et 4. Les points d'appui connus dans les deux systèmes sont entrés dans les cases A9 à D13 et F9 à I13. Dans les cases B18 à D22, les coordonnées dans le système 2 des points du système 1 sont recalculées à partir des paramètres de transformation (formule du paragraphe 10.3.3.1.).

Dans les cases J18 à J22, on calcule la distance entre les points donnés dans le système 2 et les points recalculés.

En case J24, on calcule la somme des carrés des distances et, au moyen du solveur d'Excel, on fait tendre cette somme vers 0 en faisant varier les paramètres (cases C2, C3, C4, G2, G3, G4 et J3). Le résultat de ce calcul itératif est donné dans le tableau ci-après. On peut même obtenir une idée de la précision de cette transformation en calculant un écart moyen quadratique sur les écarts en distance (case J25) ; il est ici de 62 mm.

Attention : les angles de rotation doivent être petits, exprimés en radians et en sens positif trigonométrique dans les calculs.

### Remarque

Les angles de rotation étant importants, on obtient sur cet exemple des écarts allant jusqu'à 30 cm sur certains points si on utilise les formules complètes données au chapitre 5, paragraphe 7.2.8. à la place des formules approchées du paragraphe 10.3.3.1.

Une fois les sept paramètres de transformation calculés, on peut déterminer les coordonnées de n'importe quel point du système  $S_1$  dans le système  $S_2$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>(1) Valeurs approchées des 7 paramètres :</b>									
	Rotation :				Translation :			Homothétie :		
2	$r_x =$	0,9546	gon		$t_x =$	11,381	m			
3	$r_y =$	1,0019	gon		$t_y =$	32,550	m	$k =$	1,025	
4	$r_z =$	-0,4720	gon		$t_z =$	-4,396	m			
5										
6	<b>(2) Coordonnées des points anciens connus dans les 2 systèmes (origine et destination) :</b>									
7	Points anciens connus en système d'origine :					Points anciens connus en système destination :				
8	Points	X (m)	Y (m)	Z (m)		Points	X' (m)	Y' (m)	Z' (m)	
9	A	151,120	455,320	120,720		A'	138,250	437,100	123,650	
10	B	87,150	421,360	124,100		B'	72,870	401,850	126,680	
11	C	335,650	472,310	110,490		C'	327,450	455,740	115,860	
12	D	605,050	12,310	105,410		D'	607,050	-13,860	121,780	
13	E	165,560	374,940	129,870		E'	153,480	354,930	134,500	
14										
15	<b>(3) Points dans le système destination calculées à partir des paramètres de transformation :</b>									
16	Coord. calculées :					Écarts avec points connus en système destination				
17	Points	X' (m)	Y' (m)	Z' (m)		Points	$\Delta X$	$\Delta Y$	$\Delta Z$	Dist.
18	A'	138,244	437,094	123,687		A'	6	6	37	38
19	B'	72,872	401,860	126,654		B'	2	10	26	28
20	C'	327,427	455,724	115,850		C'	23	16	10	30
21	D'	607,058	-13,865	121,781		D'	8	5	1	10
22	E'	153,498	354,947	134,498		E'	18	17	2	25
23	Écarts en mm									
24	Matrice rotation + homothétie :					Somme carrés des écarts :				3817,7
25		1,0250	-0,0074	-0,0157		Emq (mm) :				61,8
26		0,0074	1,0250	0,0150						
27		0,0157	-0,0150	1,0250						

**Attention :** la transformation inverse (du système 2 vers le système 1) ne s'obtient pas en prenant les signes opposés des translations et des rotations et l'inverse de k. En effet,

les angles de rotations et les translation définis dans le système 1 sont différents dans le système 2. À titre d'exercice, vérifiez que la transformation inverse donne les paramètres suivants (avec  $Emq = 6$  cm) :

$$\begin{aligned}rx &= -0,9027 \text{ gon} & tx &= -11,370 \text{ m} & k &= 0,975 \\ry &= -0,9585 \text{ gon} & ty &= -31,825 \text{ m} \\rz &= 0,4481 \text{ gon} & tz &= 4,007 \text{ m}\end{aligned}$$

## 11 REMARQUES CONCERNANT LES TOLÉRANCES LÉGALES

L'arrêté du 21 janvier 1980 complété de l'instruction du 28 janvier fixant les tolérances applicables aux levés à grande échelle entrepris par les services publics peut être considéré comme obsolète aujourd'hui. En effet les travaux préliminaires à l'élaboration de ce texte de loi ont duré environ 10 ans et ont donc débuté il y a près de 30 ans maintenant.

Des progrès technologiques importants sont apparus en topographie depuis cette époque :

- l'apparition des distancemètres faciles d'emploi, fiables et précis ;
- l'informatisation progressive des processus de mesure, induisant une augmentation du rendement et de la précision ;
- l'apparition du GPS qui s'est fortement développé depuis quelques années.

L'écart type sur la distance entre deux points géodésiques est de l'ordre de  $10^{-5} \cdot D$  soit 3 cm entre deux points voisins distants de 3 km. Avec les distancemètres actuels ordinaires, l'écart type « constructeur » est de  $\pm (3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$ , soit 9 mm sur la mesure de distance entre ces deux points.

De même, lorsqu'on utilise des récepteurs GPS pour observer des canevas, on ne peut plus se référer à l'arrêté de 1980 qui ne fait intervenir que des mesures angulaires et/ou de distances. De plus, la réfection de la NTF (Nouvelle Triangulation de la France) et son remplacement par le RGF (Réseau Géodésique Français) conduiront à une homogénéité du réseau qui n'existait pas en 1980 et à une plus grande précision (de  $10^{-5}$  à  $10^{-6}$  en relatif).

# 2

## CHEMINEMENTS

### 1 CHEMINEMENTS PLANIMÉTRIQUES

Pour connaître les coordonnées Lambert ( $E$ ,  $N$ ) d'un point P, il faut s'appuyer sur des points existants : par exemple les points A et B de la figure 2.1. Si ces derniers sont trop loin du point P ou ne peuvent être visés directement en raison d'obstacles, on utilise des points intermédiaires pour arriver jusqu'au point cherché (points 1 et 2 de la figure 2.1.). On parle de parcours polygonal ou de cheminement.

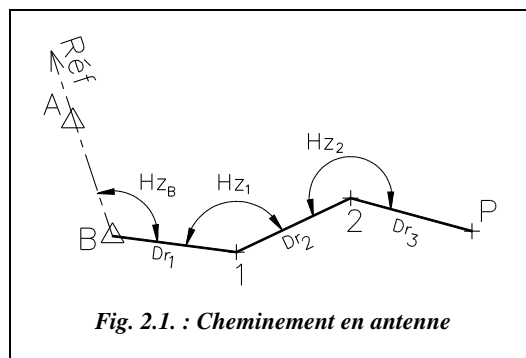


Fig. 2.1. : Cheminement en antenne

Le calcul consiste en une suite de rayonnements : on calcule les coordonnées du point 1 à partir de celles de B, puis celles du point 2 à partir de celles du point 1 et ainsi de suite jusqu'au point P, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} E_1 = E_B + Dr_1 \cdot \sin G_{B1} \\ N_1 = N_B + Dr_1 \cdot \cos G_{B1} \end{cases} \quad \begin{cases} E_2 = E_1 + Dr_2 \cdot \sin G_{12} \\ N_2 = N_1 + Dr_2 \cdot \cos G_{12} \end{cases} \quad \begin{cases} E_P = E_2 + Dr_3 \cdot \sin G_{2P} \\ N_P = N_2 + Dr_3 \cdot \cos G_{2P} \end{cases}$$

Pour faire ces calculs, il faut connaître les distances réduites à la projection  $Dr_j$ , déduites des longueurs horizontales  $D_{hj}$  mesurées sur le terrain, et les gisements  $G_{ij}$  de chaque tronçon.

Les distances  $D_{hj}$  peuvent être facilement mesurées sur le terrain en stationnant chaque sommet du parcours.

Les gisements  $G_{ij}$  peuvent être lus directement ou bien, plus généralement, être déduits de l'observation des angles  $H_{ij}$  entre les côtés (fig. 2.1.). Les lectures d'angles sont réalisées en stationnant tous les sommets du cheminement.

La nécessité d'un contrôle des mesures et des calculs oblige à refermer le parcours sur un couple de points connus pour contrôler l'écart angulaire et l'écart planimétrique dus aux erreurs de lectures (fig. 2.2., 2.3. et 2.4.).

## 1.1 Terminologie

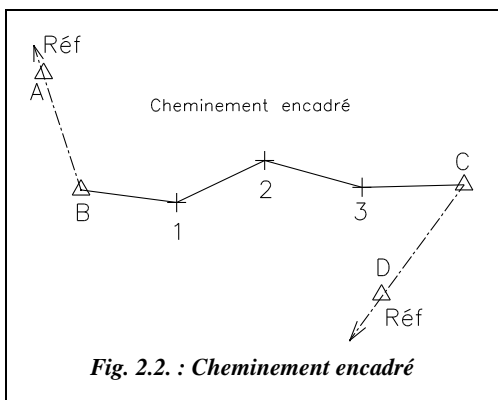


Fig. 2.2. : Cheminement encadré

Si on mesure les angles entre côtés successifs  $H_{zj}$ , le cheminement est dit **goniométrique**.

Si on mesure directement les gisements des côtés, le cheminement est dit **décliné**.

Un cheminement qui arrive sur un point connu différent du point de départ est **encadré** (fig. 2.2.).

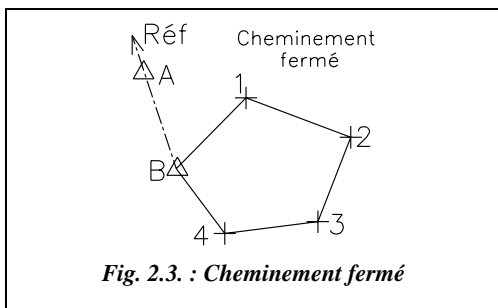


Fig. 2.3. : Cheminement fermé

Un cheminement qui revient sur son point de départ est **fermé** (fig. 2.3.).

Un cheminement ni fermé ni encadré est une **antenne** (fig. 2.1.).

Un **point lancé** (ou **point rayonné**) est un point hors cheminement, visé directement depuis un point connu.

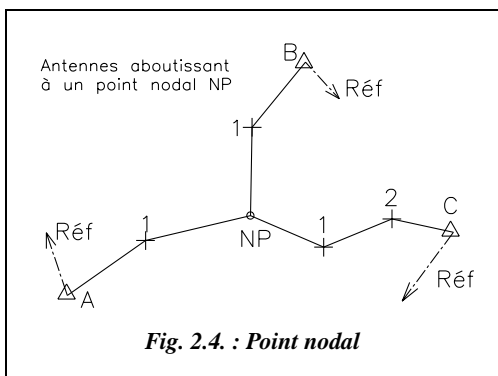


Fig. 2.4. : Point nodal

Un **point nodal** est l'aboutissement d'au moins trois antennes (fig. 2.4.). Ces antennes sont appelées demi-cheminements.

Si les coordonnées des sommets sont calculées dans le système Lambert général, le cheminement est qualifié de **rattaché**.

S'il n'est pas rattaché, un cheminement est **indépendant**.



## 1.2 Méthodologie des mesures

### 1.2.1 Corrections et contrôles au niveau des calculs

Le contrôle des erreurs de lectures angulaires est réalisé en partant d'une direction connue et en refermant les lectures d'angles sur une direction connue (par exemple la direction CD de la figure 2.2.). Le contrôle des erreurs de mesure de longueurs qui est, dans la pratique, indissociable des erreurs de lectures angulaires, est effectué en partant d'un point connu et en refermant sur un point de coordonnées connues.

Dans le cas de cheminements rattachés au système général (système Lambert en France), il est nécessaire de faire plusieurs visées pour orienter les stations de départ et d'arrivée (calcul d'un *G0moyen* de station ; voir le tome 1, chapitre 3, paragraphe 6.) et améliorer ainsi la précision de l'orientation du cheminement. De plus, sur chaque sommet intermédiaire, une référence lointaine est utilisée pour effectuer un tour d'horizon (si c'est un point inconnu) ou pour vérifier l'orientation du cheminement (si c'est un point connu).

#### Remarque

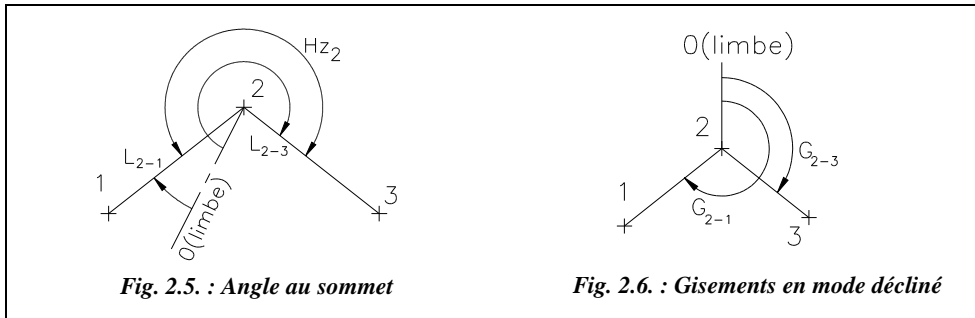
Les observations angulaires et linéaires sont ramenées au système de représentation plane (corrections de réduction à la projection, voir tome 1, chapitre 4, paragraphe 7. et corrections de  $dv$ , tome 1, chapitre 2, paragraphe 3.4.5.2. Ces dernières ne sont faites que pour des côtés supérieurs au kilomètre, donc très rarement en réalité).

### 1.2.2 Mesures sur le terrain

On mesure à chaque station l'angle horizontal  $H_z$  et la distance horizontale entre stations  $Dh$ . Pour obtenir la distance horizontale  $Dh$ , on mesure généralement la distance inclinée  $Di$  et l'angle zénithal  $V$  puis on en déduit :  $Dh = Di \cdot \sin V$ . Certains appareils donnent directement  $Dh$ , mais les valeurs de  $Di$  et  $V$  doivent être conservées puisqu'elles entrent dans le calcul des tolérances et permettent de calculer les dénivelées du parcours.

Les distances doivent ensuite être réduites à la projection par calcul de la distance réduite  $Dr$  à partir de la distance inclinée  $Di$ . Pour des parcours à longs côtés ou très fortes dénivelées, il faut mesurer l'altitude des stations par nivellement indirect ; pour des parcours peu dénivelés, on se contente d'une altitude moyenne des stations pour la réduction de  $Dh$  à  $Dr$  (voir tome 1, chap. 4). Dans un but d'amélioration de la précision, les lectures de distances sont réciproques.

En début et en fin de cheminement, l'orientation peut être effectuée par le calcul d'un *G0moyen* de station. De même, à chaque station intermédiaire, l'opérateur effectue un tour d'horizon (voir tome 1, chap. 3, § 4.3.4.) : en plus des visées arrière et avant permettant de calculer l'angle au sommet, il vise un point fixe lointain qui sert de référence au tour d'horizon, ceci permet de contrôler les lectures à chaque sommet.



Si l'on veut lire directement l'angle  $H_{z_j}$  (angle horizontal lu au sommet  $j$ ), l'opérateur peut positionner le zéro du limbe sur le côté précédant la station. En pratique, il ne bouge pas le zéro du limbe après la mise en station (sa position est quelconque : voir fig. 2.5.) : il effectue les lectures angulaires sur le côté précédent puis sur le côté suivant et l'angle  $H_{z_j}$  en est déduit par différence.

Si l'on désire lire directement le gisement du côté suivant la station (en mode décliné), il faut afficher la valeur de son gisement sur le côté précédent (voir fig. 2.6. : on vise le point 1 depuis la station 2 et on affiche  $G_{2-1}$ ).

### 1.3 Les angles horizontaux : calculs et compensations

Stationnons un sommet de la polygonale (fig. 2.7. : station au point  $j$ , le point précédent étant le point  $i$  et le point suivant le point  $k$ ). On considère que le sens de graduation de l'appareil utilisé est le sens horaire qui est le plus courant en Europe.

#### 1.3.1 Angles de gauche ou de droite

C'est l'angle que l'on trouve à sa gauche (ou à sa droite) dans le sens de calcul, ce sens de calcul étant celui dans lequel on parcourt les sommets lors du calcul : il peut être différent du sens de parcours sur le terrain bien qu'il soit préférable de conserver le même.

Sur la figure 2.7., c'est le sens  $(i-j-k)$ .

En station au sommet  $j$ , on note :

- $L_{r_j}$  la lecture arrière au sommet  $j$  sur le sommet précédent ;
- $L_{v_j}$  la lecture avant au sommet  $j$  sur le sommet suivant ;
- $H_{g_j}$  l'angle topographique de gauche (ou angle à gauche) dans le sens de calcul,  $H_{d_j}$  étant l'angle à droite.

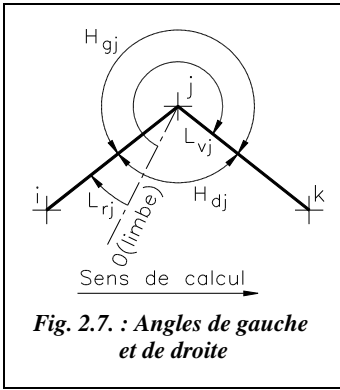


Fig. 2.7. : Angles de gauche et de droite

On peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Hg_j &= Lv_j - Lr_j \\ Hd_j &= Lr_j - Lv_j \end{aligned}$$

Si le résultat est négatif, ajouter 400 gon. On remarque que :  $Hd_j = 400 - Hg_j$ .

### 1.3.2 Transmission des gisements

Ce calcul consiste à déterminer les gisements de tous les côtés du parcours à partir du gisement de la direction de référence et des angles mesurés aux sommets. Au sommet  $j$  (fig. 2.8.) et à partir de l'angle de gauche, on peut écrire :

$$G_{jk} = G_{ij} + H_{gj} + 200$$

Si l'on considère la figure 2.9., la formule devient :

$$G_{jk} = G_{ij} + H_{gj} - 200$$

Dans la pratique, on utilise l'une ou l'autre des formules et on ajoute 400 gon à tout résultat négatif, ou on retranche 400 gon à tout résultat supérieur à 400 gon.

La formule générale est donc :

$$G_{jk} = G_{ij} + H_{gj} \pm 200$$

Les gisements  $G$  et les angles  $H$  sont exprimés en gon.

Notez qu'ajouter ou retrancher 200 gon à un gisement revient à faire « demi-tour » donc le résultat est le même.

### 1.3.3 Transmission du $G_0$ de station

La transmission du  $G_0$  de station est un autre mode de transmission des gisements basé sur le  $G_0$  moyen de la station de départ.

Si on calcule un  $G_0$  moyen de station au départ du cheminement, on peut calculer le  $G_0$  de station en chaque sommet  $j$  par transmission du  $G_0$ .

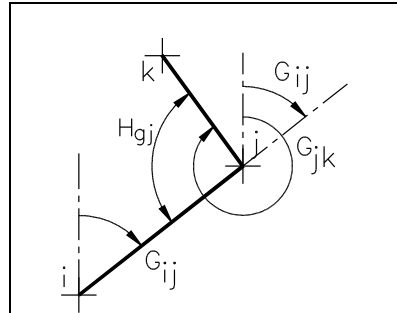


Fig. 2.8. : Transmission de gisement

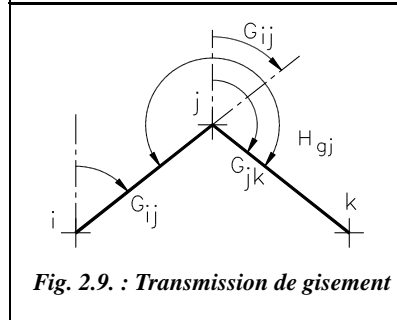


Fig. 2.9. : Transmission de gisement

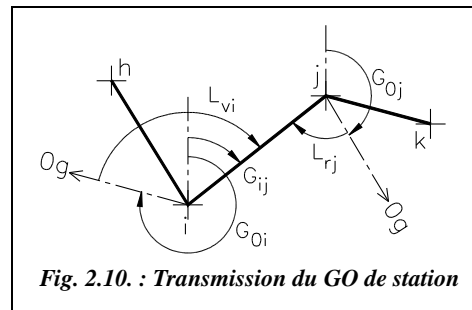


Fig. 2.10. : Transmission du  $G_0$  de station

En station au sommet  $j$  (voir fig. 2.10.), on peut écrire :  $GO_j = G_{ij} + (200 - Lr_j)$

Au sommet  $i$ , on peut écrire :  $G_{ij} = GO_i + Lv_i - 400$

Donc :  $G_{ij} = GO_i + Lv_i - Lr_j - 200$  Si le résultat est négatif, ajouter 400 gon.

S'il est supérieur à 400 gon, retrancher 400.

### 1.3.4 Fermeture angulaire d'un cheminement encadré

Les données sont : A, B, C et D, donc aussi  $G_{AB}$  noté  $G_d$ , et  $G_{CD}$  noté  $G_f$ .

On calcule de proche en proche tous les gisements de tous les côtés pour arriver au gisement d'arrivée  $G_{CD}$  connu qui sert de contrôle des erreurs de lecture d'angles (voir fig. 2.11.).

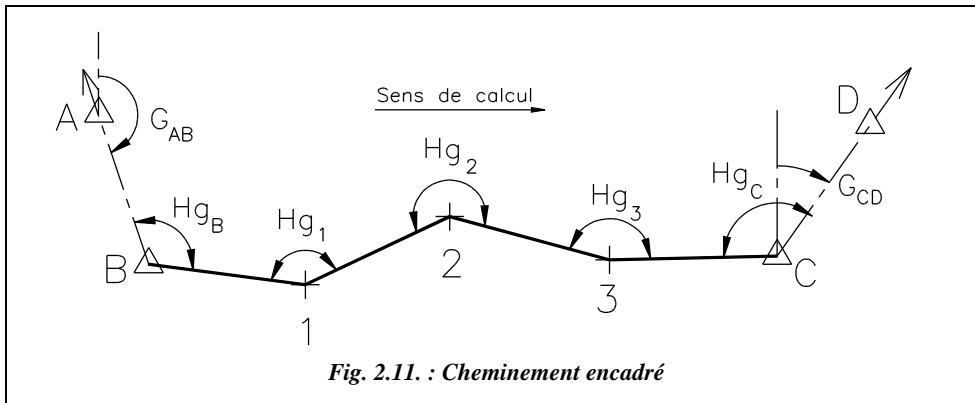


Fig. 2.11. : Cheminement encadré

On peut écrire :  $G_{B1} = G_{AB} + Hg_B - 200$

$$G_{1-2} = G_{B1} + Hg_1 - 200$$

etc.

$$G'_f = G_{3C} + Hg_C - 200$$

$G'_f$  est le gisement d'arrivée observé ( $G'_{CD}$ )

Si l'on fait la somme de ces équations membre à membre, on obtient :

$$G'_f = G_d + \sum(Hg_j) - (n + 1) \cdot 200 \quad n \text{ étant le nombre de côtés de la polygonale.}$$

$\sum(Hg_j)$  représente la somme de tous les angles de gauche.

Si le résultat  $G'_f$  est négatif, ajoutez 400 gon autant de fois nécessaires.

L'erreur de fermeture angulaire  $fa$  est alors la différence entre ce gisement de fermeture observé et le gisement de fermeture théorique  $G_{CD}$ , noté  $G_f$ , issu des coordonnées des points connus C et D.

$$fa = G'_f - G_f$$

### 1.3.5 Fermeture angulaire d'un cheminement avec transmission de $G0$

Pour simplifier le raisonnement et faciliter les calculs, on procède par transmission de gisement, cela permettra de ne mémoriser qu'une seule formule.

Sur le cheminement de la figure 2.12., la position du zéro du limbe à chaque station a été dessinée, de même que toutes les lectures angulaires. Pour se ramener à une transmission de gisement, il suffit de considérer que :

- le  $G0$  de départ au point B est une visée sur un point B' fictif qui se trouverait dans l'alignement du zéro du limbe. La lecture arrière  $Lr_B$  de B sur B' est égale à 0. Donc l'angle de gauche en B a pour valeur  $Hg_B = Lv_B - Lr_B = Lv_B$ ;
- le  $G0$  d'arrivée au point C est une visée sur un point fictif C'. La lecture avant sur le point C' est égale à zéro, l'angle de gauche au point C vaut  $Hg_C = Lv_C - Lr_C = -Lr_C$ .

Le gisement de départ est alors :  
 Le gisement d'arrivée observé est :  
 Le gisement d'arrivée « exact » est :  
 La fermeture angulaire est toujours :

$$G_d = G0_B - 200$$

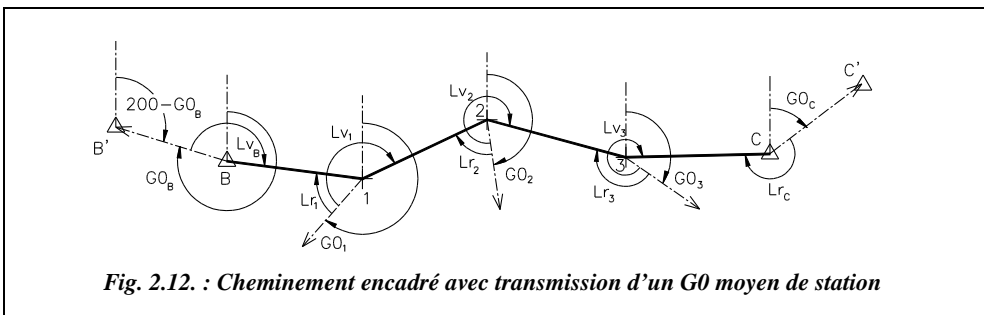
$$G'_f = (G0_B - 200) + \Sigma(Hg_i) - (n+1) \cdot 200$$

avec  $(Hg_B = Lv_B)$  et  $(Hg_C = -Lr_C)$

$$G_f = G0_C$$

$$fa = G'_f - G_f$$

Le schéma de la figure 2.12. ramène à un schéma classique. Comparez-le avec la figure 2.11.



## 1.3.6 Tolérance sur la fermeture angulaire

### 1.3.6.1 Tolérances théoriques

Soit  $\sigma_a$  l'écart type angulaire par station dépendant du théodolite utilisé ; on obtient comme tolérance angulaire  $Ta$  pour un cheminement de  $n$  côtés :

- pour un cheminement fermé :  $Ta = 2,7 \cdot \sigma_a \cdot \sqrt{n}$
- pour un cheminement encadré :  $Ta = 2,7 \cdot \sigma_a \cdot \sqrt{n+1}$

Par exemple, pour un parcours fermé de six stations mesuré au moyen d'un T16 (valeur usuelle de l'écart type angulaire :  $\sigma = \pm 2,5$  mgon), on a :  $\sigma_a = \pm 2,5 \cdot \sqrt{2}$  (deux lectures angulaires pour un angle) donc  $Ta = \pm 9,5 \cdot \sqrt{6} = \pm 23$  mgon.

### 1.3.6.2 Tolérances applicables aux levés à grande échelle

L'arrêté interministériel du 21 janvier 1980 donne les tolérances suivantes :

Tolérances en mgon		Canevas de précision	Canevas ordinaire
Cheminement à longs côtés du canevas d'ensemble	Fermé	$1,4\sqrt{n}$	$1,4\sqrt{n}$
	Encadré	$\sqrt{2 + 2(n+1)}$	$\sqrt{50 + 2(n+1)}$
Canevas polygonal	Fermé	$6\sqrt{n}$	$10\sqrt{n}$
	Encadré	$\sqrt{12,96 + 36(n+1)}$	$\sqrt{330 + 100(n+1)}$

$n$  : nombre de côtés du cheminement.

L'exemple précédent conduit à une tolérance  $Ta = 10 \cdot \sqrt{6} = 24,5$  mgon ; on peut donc considérer que le T16 convient aux mesures en canevas ordinaire.

**Attention** : les formules de ce tableau ne figurent pas toutes dans l'arrêté de janvier 1980 ; celles concernant les cheminements fermés ont été déduites des considérations du paragraphe 2.3.6.3. suivant ; ces tolérances sont le plus souvent indicatives car il reste rare d'avoir à effectuer des cheminements fermés pour des levés à grande échelle pour les services publics.

### 1.3.6.3 Justification de ces tolérances

Les erreurs de mesures angulaires dans un cheminement complet peuvent être décomposées en deux parties :

- une erreur sur chaque lecture à chaque station ;
- une erreur d'orientation au départ et à l'arrivée qui sera fonction de la précision sur la connaissance des points d'appui du cheminement.

On appelle  $t_1$  la tolérance sur les orientations de départ et d'arrivée et  $t_2$ , la tolérance sur la lecture des angles du cheminement.

Les tolérances sont de la forme suivante (voir tableau) :  $T^2 = 2.(t_1)^2 + (n+1).(t_2)^2$

$n$  est le nombre de côtés du cheminement ; il y a donc  $(n+1)$  angles à mesurer.

Les lignes 2 et 4 du tableau sont consacrées aux cheminements fermés qui ne seraient pas orientés au départ ni à l'arrivée. Dans ce cas, le terme en  $t_1$  est nul : on retrouve les formules des cheminements encadrés avec  $t_1 = 0$  et il y a autant d'angles que de côtés :  $n$ .

	$t_1$ (orientation)	$t_2$ (angles du cheminement)
<b>Canevas d'ensemble</b>		
<b>Précision</b>	$\sqrt{2}/2 = 1$ mgon car $T(x) = 4$ cm sur points d'appui et visées d'orientation de l'ordre de 2,5 km	1,4 mgon (1 mgon sur une direction) <sup>(2)</sup>
<b>Ordinaire</b>	$\sqrt{50}/2 = 5$ mgon car $T(x) = 20$ cm et visées d'orientation de 2,5 km <sup>(1)</sup>	1,4 mgon (1 mgon sur une direction) <sup>(2)</sup>
<b>Canevas polygonal</b>		
<b>Précision</b>	$\sqrt{12,96}/2 \approx 2,54$ mgon car $T(x) = 4$ cm sur les points d'appui et visées d'orientation de l'ordre de 1 km	6 mgon (4,2 mgon sur une direction)
<b>Ordinaire</b>	$\sqrt{330}/2 \approx 12,8$ mgon car $T(x) = 20$ cm sur les points d'appui et visées d'orientation de l'ordre de 1 km	10 mgon (7 mgon sur une direction) <sup>(3)</sup>

(1) On remarque que si l'on applique la formule donnant la tolérance sur l'écart d'orientation en une station (§ 5.2.8.), on doit effectivement prendre  $Dm = 2,5$  km (et non 3) et  $n = 2$ .

(2) L'erreur admise sur un des angles du cheminement est 1,4 mgon ; cette valeur exige pratiquement le recours au centrage forcé (voir chap 1, § 1.3.5.2.).

(3) Les observations doivent être faites avec un appareil lisant le mgon (voir chap 1, § 1.4.2.).

### 1.3.7 Compensation angulaire

C'est l'opération qui consiste à répartir l'écart de fermeture angulaire sur tous les angles observés. On ne peut compenser angulairement un cheminement que si l'écart de fermeture angulaire est inférieur à la tolérance réglementaire. Si ce n'est pas le cas, la manipulation doit être reprise en entier car il s'agit d'une faute.

La compensation angulaire est la quantité à répartir sur les différentes mesures ; c'est donc l'opposé de la fermeture angulaire :

$$Ca = -fa$$

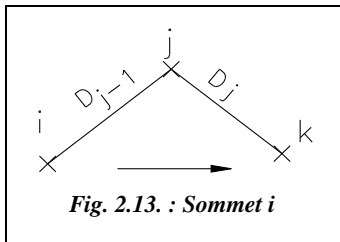
Suivant le type de cheminement effectué et suivant la valeur de la fermeture angulaire, on compense de deux manières différentes.

### 1.3.7.1 Compensation proportionnelle au nombre de stations

Si les distances de visées sont homogènes, on répartit l'écart de fermeture  $fa$  de manière égale sur chaque station. Donc, pour un cheminement de  $n$  côtés, la compensation angulaire  $C_j$  sur chaque lecture est :

$$C_j = \frac{Ca}{n + 1}$$

### 1.3.7.2 Compensation proportionnelle à l'inverse des distances de visées



Si les distances de visée ne sont pas homogènes, on répartit l'écart de fermeture  $fa$  en considérant que l'on commet plus d'erreur en angle sur une visée courte que sur une visée longue. Comme à chaque station intervient la distance de la visée arrière et celle de la visée avant (voir fig. 2.13.), on fait intervenir des poids  $p_j$  tels que, au sommet  $j$  :

$$p_j = \frac{1}{D_{j-1}} + \frac{1}{D_j}$$

$D_j$  et  $D_{j-1}$  sont exprimées en kilomètre.

La compensation angulaire  $C_j$  sur chaque lecture est alors :

$$C_j = \frac{Ca}{\sum p_j} \cdot p_j$$

Dans le cas d'une orientation par *G0moyen* de station, la distance de cette visée d'orientation est considérée comme infinie.

#### Remarque

La compensation est effectuée avec les mêmes décimales que les lectures sur le terrain (cgon, mgon, dmgon). L'écart  $fa$  est généralement réparti sur les angles  $H_{z_j}$ , le cumul est alors automatique. Si cet écart est réparti sur les gisements observés, il ne faut pas oublier de cumuler les répartitions intermédiaires.

Une vérification des calculs est de retrouver comme gisement d'arrivée le gisement de fermeture théorique (voir exemples de calcul complet au paragraphe 1.5.).

## 1.4 Coordonnées rectangulaires des sommets

Connaissant le gisement et la longueur de chaque côté du cheminement, on calcule à partir des coordonnées du point de départ les coordonnées des autres sommets par rayonnements successifs.



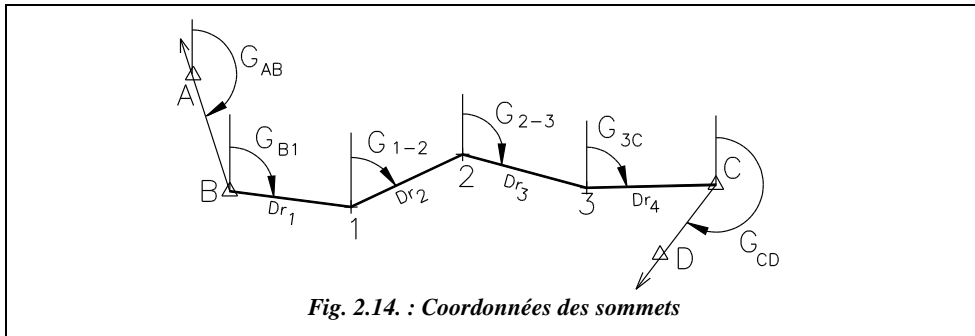


Fig. 2.14. : Coordonnées des sommets

$$E_1 = E_B + Dr_1 \cdot \sin G_{B1}$$

$$E_2 = E_1 + Dr_2 \cdot \sin G_{1-2}$$

etc.

$$E'_C = E_3 + Dr_4 \cdot \sin G_{3C}$$

Si l'on fait la somme de toutes ces équations membre à membre, on obtient en abscisses :

$$E'_C = E_B + \sum(Dr_j \cdot \sin G_{ij})$$

De même en ordonnées :  $N'_C = N_B + \sum(Dr_j \cdot \cos G_{ij})$

On note  $\Delta E_{ij} = Dr_j \cdot \sin G_{ij}$  et  $\Delta N_{ij} = Dr_j \cdot \cos G_{ij}$ . Ces termes correspondent en effet à la différence de coordonnées en  $E$  et en  $N$  entre le point  $i$  et le point  $j$ .

On obtient ainsi les coordonnées observées du point d'arrivée  $C'$  :

$$\begin{cases} E'_C = E_B + \sum(\Delta E_{ij}) \\ N'_C = N_B + \sum(\Delta N_{ij}) \end{cases}$$

### 1.4.1 Fermeture planimétrique

Les coordonnées du point d'arrivée du cheminement (point  $C$ , fig. 2.14.) étant connues, on peut en déduire une erreur de fermeture planimétrique du cheminement due au cumul des erreurs de lectures angulaires et des erreurs de mesures de distances.

L'erreur de fermeture en  $X$  (repère local) est :

$$f_X = X'_C - X_C = X_B + \sum(\Delta X) - X_C$$

L'erreur de fermeture en  $Y$  (repère local) est :

$$f_Y = Y'_C - Y_C = Y_B + \sum(\Delta Y) - Y_C$$

Ces fermetures en  $X$  et en  $Y$  permettent de calculer une fermeture planimétrique  $f_p$  qui est la distance séparant le point  $C'$  issu des

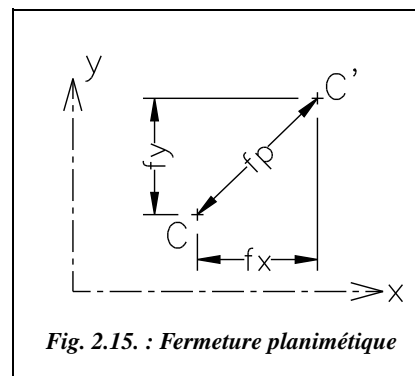


Fig. 2.15. : Fermeture planimétrique

mesures de terrain du point C réel ; on parle de vecteur de fermeture (voir fig. 2.15.). La longueur de ce vecteur s'exprime par :

$$f_p = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

Si le cheminement BC est « tendu » (angles du cheminement proches de 200 gon), le vecteur de fermeture  $f_p$  peut être décomposé en :

- une fermeture en longueur  $f_L$  suivant la direction BC (due uniquement aux imprécisions sur les côtés).
- Une fermeture en direction  $f_D$  perpendiculairement à BC (due uniquement aux imprécisions sur les angles).

Un cheminement est « tendu » s'il vérifie :

$$\sum D_j < 1,5 \cdot L_T$$

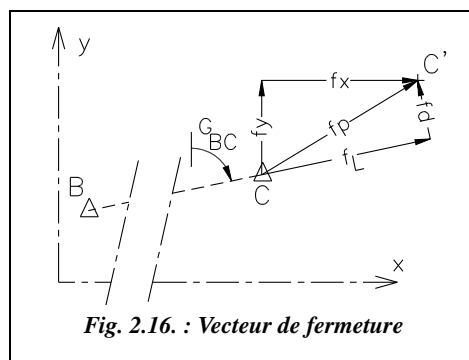


Fig. 2.16. : Vecteur de fermeture

Avec  $L_T$  : distance entre la station de départ et la station d'arrivée.

$D_j$  : longueur de chaque côté  $j$  du cheminement.

Un cheminement non tendu est appelé « infléchi ».

On peut aussi calculer  $f_L$  et  $f_D$  en fonction de  $f_x$  et  $f_y$ . On appelle  $G$  le gisement de la direction générale du cheminement (ici BC) ; on obtient alors les composantes  $f_L$  et  $f_D$  par rotation de repère d'angle  $(100 - G)$ , d'où les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_L &= f_x \cdot \sin G + f_y \cdot \cos G \\ f_D &= f_y \cdot \sin G - f_x \cdot \cos G \end{aligned}$$

Ces deux composantes du vecteur de fermeture n'ont de signification que dans le cas d'un cheminement « tendu » ; dans les autres cas, les deux composantes ne sont pas dissociables l'une de l'autre puisque les erreurs en longueur et en angle influent ensemble sur l'erreur planimétrique finale.

## 1.4.2 Tolérance sur la fermeture planimétrique

### 1.4.2.1 Tolérances théoriques pour un cheminement encadré tendu

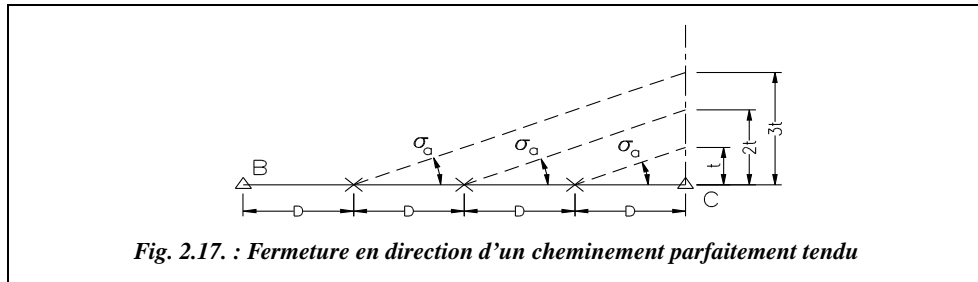
Considérons un cheminement parfaitement tendu de  $n$  côtés égaux (voir fig. 2.17.).

- La tolérance de fermeture en longueur est :  $T_L = 2,7 \sigma_L \sqrt{n}$

$\sigma_L$  est l'écart type sur la mesure de longueur d'un côté.

$T_L$  et  $\sigma_L$  sont donnés en mètre.

On étend cette tolérance aux cheminements imparfaitement tendus.



- La tolérance de fermeture en direction se justifie ainsi : une erreur angulaire  $\sigma_a$  à la dernière station provoque un écart transversal  $t = D \cdot \sigma_{a_{rad}}$  sur le point d'arrivée. Une erreur angulaire  $\sigma_a$  à chaque station provoque donc un écart transversal total  $t_T$  de :

$$t_T = D(\sigma_{a_{rad}})\sqrt{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$$

$$t_T = D(\sigma_{a_{rad}})\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Si l'on appelle  $L_i$  la distance du point d'arrivée à chaque sommet du parcours, on obtient :

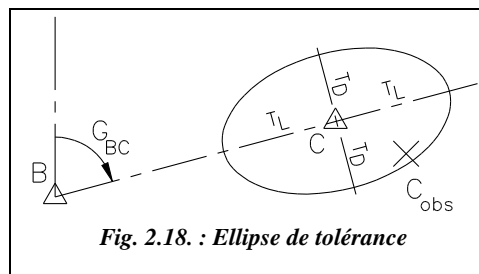
$$\sum_{i=1}^{i=n} L_i^2 = D^2 + (2D)^2 + \dots + (nD)^2 = D^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient donc l'écart maximal théorique (tolérance  $T_D$ ) :

$$T_D = 2,7(\sigma_{a_{rad}})\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} L_i^2}$$

On étend cette tolérance aux cheminements non parfaitement tendus.

Dans le cadre des cheminements tendus, on peut construire l'ellipse de tolérance de la figure 2.18. : son grand axe de longueur  $2.T_L$  est placé sur la direction générale du cheminement et son petit axe a pour valeur  $2.T_D$ . Le point d'arrivée observé ( $C_{obs}$ ) doit se situer à l'intérieur



de cette ellipse pour satisfaire aux tolérances. Dans la pratique, on remplace cette ellipse

par un cercle de rayon  $T_p = \sqrt{T_L^2 + T_D^2}$ .

Il faut aussi tenir compte de l'incertitude  $\sigma_x$  sur la distance entre points d'appui, ce qui donne une tolérance  $T_L = 2,7\sqrt{\sigma_x^2 + n\sigma_L^2}$ .

Finalement, on obtient :

$$T_p = 2,7\sqrt{\sigma_x^2 + n\sigma_L^2 + \sigma a_{rad}^2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Li^2}$$

$T_p$ ,  $L_i$ ,  $\sigma_x$  et  $\sigma_L$  sont exprimés en m et  $\sigma a$  en radian.

En canevas de précision,  $T_x$  a pour valeur  $\pm 4$  cm ; cela donne un écart type  $\sigma_x = \pm 4 / 2,7 = \pm 1,5$  cm.

#### Application

Soit un cheminement parfaitement tendu comportant six côtés de 500 m chacun. L'appareil utilisé est un théodolite T2 ( $\sigma = \pm 5$  dmgon, valeur usuelle), chaque angle étant observé avec quatre paires de séquences ( $\sigma a = \pm 5 \cdot \sqrt{2} / \sqrt{4} = \pm 3,5$  dmgon). Chaque côté est mesuré quatre fois avec un écart type de 1 cm à chaque mesure donc  $\sigma_L = \pm 1 / \sqrt{4}$  cm =  $\pm 0,5$  cm. On obtient une tolérance finale sur la fermeture planimétrique de  $T_p = \pm 8,8$  cm.

#### 1.4.2.2 Tolérances théoriques pour un cheminement encadré infléchi

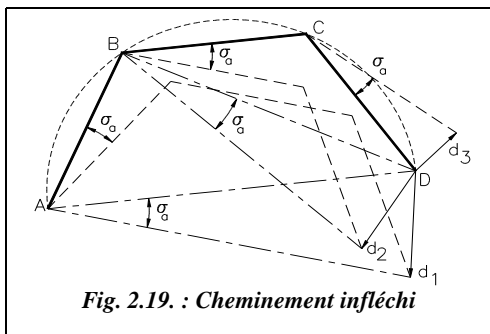
Considérons un cheminement infléchi de  $n$  côtés égaux (voir fig. 2.19.).

- **La tolérance de fermeture en longueur** est égale à celle du cheminement tendu et vaut  $T_L = 2,7\sigma_L\sqrt{n}$ .
- **La tolérance de fermeture en direction** est déterminée en raisonnant sur un cheminement particulier de  $n$  côtés égaux dont les sommets sont répartis sur un demi-cercle (voir fig. 2.19.) ; on aboutit à une formulation équivalente à celle vue précédemment pour les cheminements tendus.

Une erreur  $\sigma a$  au point A donne un déplacement  $d_1$  du point D.

Une erreur  $\sigma a$  au point B donne un déplacement  $d_2$  du point D.

Une erreur  $\sigma a$  au point C donne un déplacement  $d_3$  du point D.



Le déplacement final est :

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$$

On peut écrire :

$$d_1 = AD \cdot \sigma a_{rad}$$

$$d_2 = BD \cdot \sigma a_{rad}$$

$$d_3 = CD \cdot \sigma a_{rad}$$

On obtient donc :

$$d = \sigma a_{\text{rad}} \sqrt{AD^2 + BD^2 + CD^2}.$$

De plus,  $CD = AB$  et comme  $AD$  est le diamètre du cercle, on obtient  $AD^2 = AB^2 + BD^2$ .

Finalement,  $d = \sigma a_{\text{rad}} \sqrt{2AB^2}$  pour un cheminement de trois côtés. De proche en proche, pour un cheminement de  $n$  côtés, on obtient une tolérance  $T_D$  de :

$$T_D = 2,7 \sigma a_{\text{rad}} \cdot AB_m \sqrt{\frac{n+1}{2}} \text{ ou encore : } T_D = 2,7 \sigma a_{\text{rad}} \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} L_i^2}.$$

$L_i$  étant la distance du point d'arrivée à chaque point du cheminement (ici en mètre).

On obtient une expression finale de la tolérance de fermeture planimétrique identique au cas précédent des cheminements tendus (voir § 1.4.2.1.). Ce résultat est étendu à tous les cheminements encadrés.

#### 1.4.2.3 Tolérances théoriques pour un cheminement fermé

Considérons un cheminement fermé de  $n$  côtés égaux (fig. 2.20.).

- **La tolérance de fermeture en longueur** est identique à celle du cheminement tendu et vaut  $T_L = 2,7 \sigma_L \sqrt{n}$ .
- **La tolérance de fermeture en direction** s'obtient en raisonnant sur un cheminement fermé particulier de  $n$  côtés égaux dont les sommets sont répartis sur un cercle ; on retrouve la formule obtenue pour les cheminements encadrés.

Soit le cheminement fermé ABCD qui est un carré de diagonale AC (fig. 2.20.) :

- une erreur  $\sigma a$  au point A ne donne aucun déplacement du point A ;
- une erreur  $\sigma a$  au point B donne un déplacement  $d_1$  du point A ;
- une erreur  $\sigma a$  au point C donne un déplacement  $d_2$  du point A ;
- une erreur  $\sigma a$  au point D donne un déplacement  $d_3$  du point A.

En suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient :

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}$$

$$d = \sigma a_{\text{rad}} \sqrt{AB^2 + CA^2 + DA^2}$$

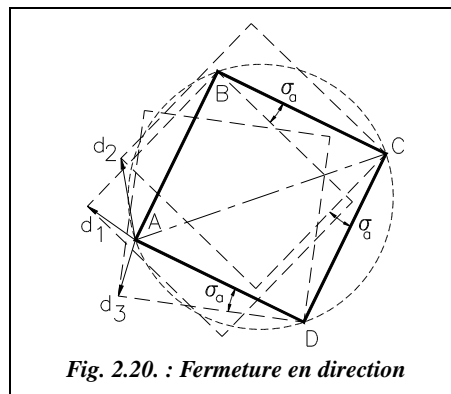


Fig. 2.20. : Fermeture en direction

$$\text{Donc : } T_D = 2,7 \sigma_{a_{rad}} \sqrt{\sum_{i=2}^{i=n} L_i^2}$$

On retrouve la même expression que pour les cheminements encadrés, mis à part l'erreur portant sur la connaissance de la distance entre points d'appui qui n'intervient plus.  $T_p$ ,  $\sigma_x$  et  $\sigma_L$  sont donnés en mètre et  $\sigma_a$  en radian :

$$T_p = 2,7 \sqrt{n\sigma_L^2 + \sigma_{a_{rad}}^2 \cdot \sum_{i=2}^{i=n} L_i^2}$$

#### 1.4.2.4 Tolérances réglementaires applicables aux levés à grande échelle

On applique les valeurs suivantes (arrêté interministériel du 21 janvier 1980) à tout cheminement encadré (tendu ou infléchi) ou fermé.

	Canevas de précision	Canevas ordinaire
<b>Cheminement à longs côtés du canevas d'ensemble</b>		
<b>Fermé</b>	$\sqrt{16n + 5 \sum_{i=2}^{i=n} L_i^2}$	$\sqrt{16n + 40 \sum_{i=2}^{i=n} L_i^2}$
<b>Encadré</b>	$\sqrt{16 + 16n + 5 \sum_{i=1}^{i=n} L_i^2}$	$\sqrt{400 + 16n + 40 \sum_{i=1}^{i=n} L_i^2}$
<b>Canevas polygonal</b>		
<b>Fermé</b>	$\sqrt{16n + 160 \sum_{i=1}^{i=n} L_i^2}$	$\sqrt{160L + 260 \sum_{i=1}^{i=n} L_i^2 + 30L}$
<b>Encadré</b>	$\sqrt{16 + 16n + 160 \sum_{i=1}^{i=n} L_i^2}$	$\sqrt{400 + 160L + 260 \sum_{i=1}^{i=n} L_i^2 + 30L}$

Les tolérances sont données en centimètre.  $n$  est le nombre de côtés du cheminement.

$L_i$  est la distance en kilomètre de chaque sommet au point d'arrivée ;  $L$  est la longueur totale du cheminement en kilomètre.

**Attention :** certaines des tolérances données dans le tableau précédent ne sont pas indiquées sur l'arrêté de janvier 1980 (en particulier le canevas polygonal fermé) ; elles ont été déduites des considérations du paragraphe 1.4.2.3. Si l'on applique ces formules à

l'exemple du paragraphe 1.7.1. (en négligeant le terme systématique  $30.L$ ), on obtient des tolérances plus importantes en précision qu'en ordinaire. Cela vient du fait que les côtés étant petits, le terme prépondérant devient  $16.n$ , ce qui permet de rappeler que ces tolérances de l'arrêté de janvier 1980 ne s'appliquent qu'à certains types de travaux (levés à grande échelle entrepris par les services publics) et que dans tous les autres cas, elles ne sont qu'indicatives : la tolérance de chantier reste fixée par le cahier des charges.

#### 1.4.2.5 *Justification de ces tolérances*

Les tolérances du tableau se présentent presque toutes sous la forme :

$$T_p^2 = T_x^2 + (T_L \sqrt{n})^2 + T_\alpha^2 \sum L_i^2$$

$T_x$  est la tolérance sur l'erreur en distance entre points d'appuis (4 cm en canevas de précision et 20 cm en canevas ordinaire).

$T_L$  est la tolérance sur la mesure de longueur d'un côté du cheminement,  $T_L \cdot \sqrt{n}$  pour  $n$  côtés.

$T_\alpha$  (radian) est la tolérance sur la mesure des angles du cheminement (après compensation angulaire ; voir la démonstration au paragraphe 1.4.2.1.).

$\sum L_i^2$  est la somme des carrés des distances de chaque sommet au point d'arrivée.

- Terme  $T_x$  : pour les cheminements fermés,  $T_x$  n'est pas pris en compte puisque la fermeture d'un tel cheminement est indépendante du point de départ. Pour les cheminements encadrés,  $T_x$  vaut 16 cm ( $4^2$ ) en canevas de précision ou bien 400 cm ( $20^2$ ) en canevas ordinaire.
- Terme  $T_L$  : pour des côtés d'une longueur moyenne de 1 km, la tolérance sur l'écart entre deux mesurages indépendants est de  $(3 + L_{\text{km}})$  quel que soit le canevas. Cela donne 4 cm pour une visée de 1 km, d'où le terme  $16 \cdot n = (4 \sqrt{n})^2$ .

En canevas polygonal ordinaire, la formule diffère de son homologue du canevas d'ensemble et de celle du canevas polygonal de précision :

- par le terme en  $n$  sous le radical, qui est remplacé par un terme en  $L (\sqrt{160L})$  car les mesurages des côtés effectués avec les moyens traditionnels sont susceptibles d'une erreur accidentelle proportionnelle à la racine carrée de la longueur et évaluée à  $\sqrt{160} \approx 12,6$  cm pour 1 km ou  $(12,6 / \sqrt{10}) \approx 4$  cm pour 100 m.
- par le terme  $30.L$  hors radical : on a tenu compte de la possibilité d'une erreur systématique (donc hors radical) sur le mesurage des longueurs due aux erreurs systématiques de mesurage à la chaîne (étalonnage, dilatation, etc.). Ce terme doit être négligé si l'on utilise un distancemètre.
- Terme  $T_\alpha$  : le coefficient devant le terme  $\sum L_i^2$  est égal à  $(2,47 \cdot T_\alpha^2)$  donc  $T_\alpha$  prend les valeurs suivantes :
  - 1,4 mgon pour les cheminements à longs côtés du canevas de précision, 4 mgon pour ceux du canevas ordinaire ;

- 8 mgon pour les cheminements du canevas polygonal de précision et 10 mgon pour ceux du canevas ordinaire.

Le terme 2,47 est un facteur multiplicatif,  $(10^{-3} \cdot 10^5 \cdot \pi / 200)^2 \approx 2,47$ .

La tolérance finale est la composition quadratique des trois tolérances élémentaires. Elle est donnée en centimètre alors que les distances  $L_i$  sont en kilomètre,  $T_\alpha$  est en radian.

### 1.4.3 Ajustement planimétrique

L'ajustement planimétrique est le calcul qui consiste à répartir les fermetures planimétriques sur les mesures du cheminement. On ne peut procéder à cet ajustement que si la longueur du vecteur de fermeture est inférieure à la tolérance réglementaire.

Il existe plusieurs méthodes d'ajustement : nous ne développons que la plus fréquemment employée dans les calculs manuels.

La compensation à effectuer sur les  $\Delta X$  est l'opposée de la fermeture en X

$$C_X = -f_X$$

La compensation à effectuer sur les  $\Delta Y$  est l'opposée de la fermeture en Y

$$C_Y = -f_Y$$

La répartition de ces compensations peut être effectuée de deux manières différentes :

- **Si les côtés sont de longueur homogène**, on répartit  $C_X$  et  $C_Y$  de manière égale sur tous les côtés, donc sur le côté  $j$  :

$$C_{Xj} = \frac{C_X}{n} \text{ et } C_{Yj} = \frac{C_Y}{n}$$

- **Si les côtés ne sont pas homogènes**, on répartit  $C_X$  et  $C_Y$  proportionnellement à la longueur de chaque côté (considérant logiquement que plus le côté est long, moins il est précis), donc sur le côté  $j$  :

$$C_{Xj} = \frac{C_X}{\sum_{i=1}^n D_i} \cdot D_j \text{ et } C_{Yj} = \frac{C_Y}{\sum_{i=1}^n D_i} \cdot D_j$$

Ces compensations sont calculées avec la précision des données. Un contrôle des calculs est de retrouver pour le point d'arrivée observé les coordonnées réelles.



## 1.5 Exemples de calcul

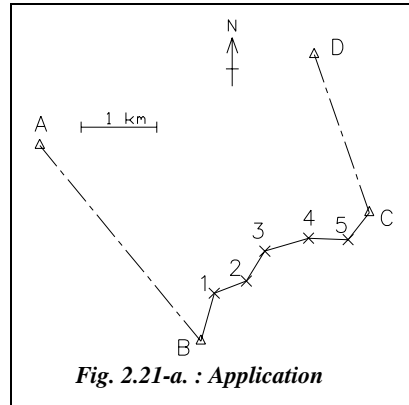
### 1.5.1 Polygone classique

Considérons la polygone représentée sur la figure 2.21-a. ; il est demandé de la calculer à partir des données des tableaux suivants.

Les indications de lignes et de colonnes en tête de ces deux tableaux serviront à la création du tableau de calcul sur Excel.

Les côtés du parcours étant inférieurs au kilomètre, les corrections de  $d\alpha$  sur les lectures angulaires ne sont pas nécessaires.

Les coordonnées des points d'appui sont les suivantes :



	A	B	C	D	E
1		E (m)	N (m)		
2	A	981 030,06	156 888,22	$G_{AB}(\text{gon}) =$	155,9074
3	B	983 156,00	154 326,00	$D_{AB}(\text{m}) =$	3329,35
4	C	985 380,62	156 009,89	$G_{CD}(\text{gon}) =$	378,4731
5	D	984 652,96	158 079,17	$D_{CD}(\text{m}) =$	2193,49

Les mesures effectuées sur le terrain sont résumées dans le tableau ci-après :

	A	B	C	D
7	Sta	Dr	Lr	Lv
8		(m)	(gon)	(gon)
9				
10	B	653,113	65,4578	127,0384
11	1	453,524	87,6986	347,1859
12	2	460,558	214,5669	372,9000
13	3	602,247	147,5411	394,2554
14	4	522,817	0,9868	221,2260
15	5	451,441	12,3367	152,6369
16	C		317,9984	53,8993

#### Remarque

Cet exercice est uniquement un exemple de calcul et non un cas réel, parce que les fermetures (angulaires et planimétriques) ont été vérifiées avec les tolérances d'un

canevras polygonal, alors que la longueur des côtés correspondant à un cheminement à longs côtés du canevas d'ensemble.

◆ **Écriture d'un tableau**



Un tableau plus complet que celui proposé ci-dessous se trouve sur le cédérom sous le nom POLYGO.XLS. Il permet, dans sa version complète, de calculer une polygonale ainsi qu'un rayonnement à partir d'une des stations de la polygonale.

	A	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
7	St.	Lv - Lr	Poids	Ca	Gisem.	Delta E	C <sub>E</sub>	Delta N	C <sub>N</sub>	Coordonnées (m)		Li <sup>2</sup>
8		gon	km <sup>-1</sup>	dmgon	gon	m	mm	m	mm	E	N	km <sup>2</sup>
9				Gd = 155,9074								
10	B	61,5806	1,8	8	17,4887	177,170	-17	628,623	-8	983 156,00	154 326,00	7,8
11	1	259,4873	3,7	16	76,9776	424,190	-12	160,458	-6	983 333,15	154 954,62	5,3
12	2	158,3331	4,4	18	35,3126	242,566	-12	391,504	-6	983 757,33	155 115,07	3,4
13	3	246,7143	3,8	16	82,0285	578,409	-15	167,763	-7	983 999,89	155 506,57	2,2
14	4	220,2392	3,6	15	102,2692	522,485	-13	-18,632	-6	984 578,28	155 674,32	0,8
15	5	140,3002	4,1	17	42,5711	279,880	-12	354,212	-6	985 100,75	155 655,68	0,2
16	C	135,9009	2,7	11	378,4731					985 380,62	156 009,89	0,0
17												
18	S		24,1	102		2224,700	-80	1683,929	-39			19,6
19	L=	3143,700	fa =	-10,2	mgon		f <sub>E</sub> :	8,0	cm	Tolérances :		
20		Tol.	préc.	16,3	mgon		f <sub>N</sub> :	3,9	cm	précision	57,1	cm
21			ordi.	32,1	mgon		f <sub>p</sub> :	8,9	cm	ordinaire	77,5	cm

Ouvrez une nouvelle feuille puis inscrivez les données dans les cases A1 à C5 et A7 à D16 (voir tableaux des données à la page précédente).

Inscrivez les textes de présentation du tableau en lignes 7 et 8 et dans toutes les autres cases contenant du texte.

**Pour le calcul des gisements et des distances de départ et d'arrivée**, inscrivez les formules suivantes :

En case E2, calcul du gisement de départ : reprenez la formule vue au tome 1, chapitre 3, § 5.2.4. (adaptez les références : A1 devient B2, A2 devient C2, B1 devient B3, B2 devient C3).

En case E3, calcul de la distance AB : =RACINE((B2-B3)^2+(C2-C3)^2).

Sélectionnez les cases E2 et E3 puis menu EDITION / COPIER. Déplacez le curseur en E4 puis COLLER.

Vous devez obtenir les gisements et distances donnés à la page précédente.

### Remarque

Une autre manière de calculer un gisement est d'utiliser la programmation d'Excel en Visual Basic ou d'écrire une macrofonction. Par exemple, la fonction GISEMENT() est ajoutée au jeu de fonctions d'Excel par le tableau MENUPO.XLS du cédérom.

#### – Longueur $L$ du cheminement :

Inscrivez en case E19 (ou B18) : = SOMME(B10:B15).

#### – Pour le calcul de la fermeture et de la tolérance de fermeture angulaire, inscrivez les formules suivantes :

En case E10 : = si(D10 – C10 < 0 , D10 – C10 + 400 , D10 – C10) , recopiez ensuite vers le bas jusqu'à E16.

Poids des première et dernière visées, en case F10 : =1000\*(1/E3+1/B10), en case F16 : =1000\*(1/E5+1/B15).

Poids des autres visées, en case F11 : = 1000\*(1/B10 + 1/B11) , recopiez ensuite vers le bas jusqu'à F15.

Somme des poids, entrez en case F18 : = SOMME(F10:F16).

Fermeture angulaire, en case G19 : = (E2 + SOMME(E10:E16) – 5\*200 – E4 ) \*1000 (le coefficient 5 a été déterminé après quelques essais).

Pour le calcul des tolérances, entrez en case G20 : = RACINE(12.96+36\*7) , et en case G21 : = RACINE(330+100\*7).

#### – Calcul des gisements définitifs

En case H9, entrez : = E2 ;

En case H10, entrez : = SI ( H9 + E10 – G\$19 / F\$18 \* F10 < 200 , H9 + E10 – G\$19 / F\$18 \* F10 + 200 , H9 + E10 – G\$19 / F\$18 \* F10 – 200 ).

Recopiez vers le bas jusqu'à H16 (s'il n'y a pas eu d'erreur, on doit retrouver le gisement d'arrivée  $G_{CD}$ ).

#### – Calcul de la fermeture planimétrique

Delta E, en case I10 : = B10 \* sin(H10 \* PI() / 200) , recopiez vers le bas jusqu'à I15 ;  
Delta N, en case K10 : = B10 \* cos(H10 \* PI() / 200) , recopiez vers le bas jusqu'à K15 ;

Fermeture en Est en cm, en case K19 : = ( B3 + SOMME(I10:I15) – B4 ) \*100.

Fermeture en Nord en cm, en case K20 : = ( C3 + SOMME(K10:K15) – C4 ) \*100.

Fermeture planimétrique en cm, en case K21 : = RACINE(K19^2+K20^2).

#### – Compensations en Est et Nord puis coordonnées définitives des points

Compensation en Est en mm, entrez en case J10 : = – K\$19 / E\$19 \* B10 \* 10 , recopiez vers le bas jusqu'à J15.

Compensation en Nord en mm, entrez en case L10 : = – K\$20 / E\$19 \* B10 \* 10 , recopiez vers le bas jusqu'à L15.

Coordonnée Est et Nord, entrez en case M10 : = B3 , et en case N10 : = C3.

De même, entrez en case M11 : = M10 + I10 + J10/1000 , et en case N11 : = N10 + K10 + L10/1000. Recopiez ensuite M11 et N11 vers le bas jusqu'à la ligne 16. si il n'y a pas eu d'erreur, on doit retrouver exactement les coordonnées du point d'arrivée C en ligne 16.

– **Tolérance de fermeture planimétrique**

$Li^2$ , en case O10 : = (M10–M\$16)^2+(N10–N\$16)^2 , recopiez vers le bas jusqu'à O16 .

Somme des  $Li^2$ , entrez en case O18 : = SOMME(O10:O16).

Entrez en case N20 : = RACINE(16+16\*6+160\*O18).

Entrez en case N21 : = RACINE(400+160\*E19+260\*O18).

Pour terminer, réglez les chiffres après la virgule au moyen de l'option NOMBRE du menu local FORMAT DE CELLULE (accessible en cliquant sur une sélection avec le bouton droit de la souris). Pour sélectionner en même temps des zones non contiguës, maintenez le bouton CONTROL enfoncé pendant la sélection.

**Remarque**

Une présentation plus rigoureuse devrait aligner les distances mesurées avec les gisements et intercaler les angles lus (une ligne sur deux). Cela ne facilite pas la recopie des formules : c'est pourquoi le tableau que nous venons de faire ne suit pas ce principe (voir le tableau de polygonation du paragraphe 1.5.2. pour illustrer ce type de présentation).

◆ **Construction graphique au moyen d'AutoCAD LT**



La compensation en X et Y d'une polygonale peut être faite graphiquement, cela ne donnera pas exactement le même résultat qu'une compensation analytique mais en restera très proche. Il faut dans un premier temps calculer les gisements des côtés, l'erreur de fermeture angulaire et la compenser de manière à obtenir les gisements définitifs.

Environnement de travail : angles en grades avec quatre chiffres significatifs, longueurs en unités décimales avec deux chiffres significatifs, zéro des angles au nord et sens de rotation horaire.

– **Dessin des points d'appui** (en négligeant les dizaines de milliers de km)

POINT ↵ 1030.06,6888.22 ↵ ↵ 3156,4326 ↵ ↵ 5380.62,6009.89 ↵ ↵ 4652.96,8079.17 ↵

LIGNE ↵ du point A (NODal de...) vers B et LIGNE ↵ de C vers D.

On peut contrôler avec la commande LISTE ↵ appliquée aux droites AB et CD les valeurs calculées des gisements  $G_{AB}$ ,  $G_{CD}$  et des distance  $D_{AB}$  et  $D_{CD}$ .

- **Dessin du cheminement** : on peut, dans un premier temps, dessiner le cheminement à partir des données brutes de terrain ( $D_r$  et  $H_g = L_v - L_r$ ) : cela permet de contrôler l'erreur de fermeture angulaire (voir au paragraphe 2.3.3. comment « automatiser » la procédure d'entrée du cheminement). On dessine ensuite le cheminement après compensation angulaire :

*LIGNE* du point B (NODal de...) au point @653.113<17.4887 au point @453.524<76.9776 au point @460.558<35.3126 au point @602.247<82.0285 au point @522.817<102.2692 au point @451.441<42.5711.

Vous devez obtenir la polygonale de la figure 2.21-a..

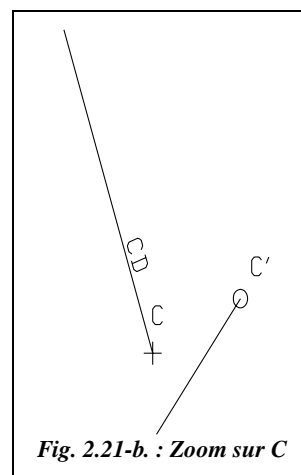


Fig. 2.21-b. : Zoom sur C

- **Contrôle des écarts de fermeture**

En zoom très près du point C, vous devez obtenir l'équivalent de la figure 2.21-b.

On peut contrôler que l'on retrouve les écarts de fermeture en X et en Y en mesurant la distance  $CC'$  : *DISTANCE* de NODal de.. à EXTrémité de.. ( 80 mm en X , 39 mm en Y ).

- **Compensation des fermetures planimétriques**

Sur la figure 2.21-c l'erreur de fermeture est considérablement exagérée pour la compréhension du raisonnement. Le cheminement B-1-2-3-4-5-C' est développé sur la droite B-C''. On obtient ainsi les points 1', 2', ..., 5', C'''. Le vecteur de fermeture C'C est reporté en C''-C'''.

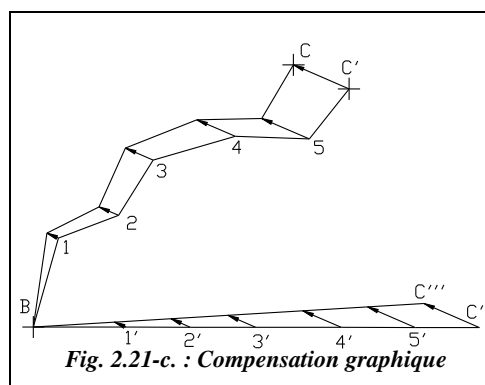


Fig. 2.21-c. : Compensation graphique

On en déduit une répartition **parallèle proportionnelle** de la fermeture : on trace la droite B-C''' puis on reporte des parallèles au vecteur de fermeture par chaque point 1', 2', ..., 5'. La longueur de vecteur ajustée à la droite B-C''' est la part de compensation de chaque point. Il reste à reporter chaque vecteur ajusté aux sommets 1, 2, ..., 5.

Remarquez que les gisements des côtés seront légèrement modifiés après cette transformation...

- **Sur le cheminement réel**

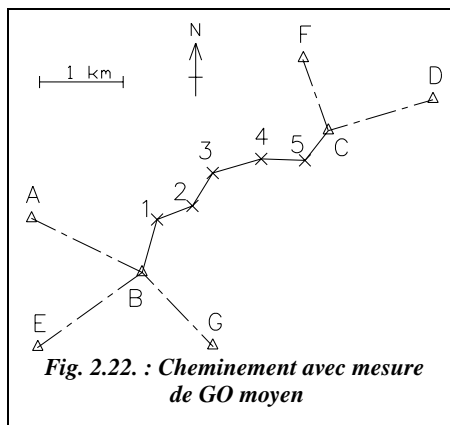
*LIGNE* du point B au point @653.113<100 au point @453.524<100 au point ... au point @451.441<100.

En zoom très près de C, dessinez le vecteur de fermeture C-C' : LIGNE de NODal de.. à EXTrémité de..

COPIER ce vecteur depuis C' jusqu'en C'' (utilisez la commande 'z : apostrophe suivi de z qui rend la commande ZOOM transparente c'est-à-dire pouvant être utilisée pendant une autre commande, ici pendant la commande COPIER). Tracez la droite B-C''' : LIGNE de NODal de.. à EXTrémité de.. puis copier le vecteur C''-C''' de C'' vers chaque point 1', 2', ..., 5'. AJUSTER ensuite (en zoom) tous ces vecteurs à la droite B-C'''. COPIER enfin chacun d'eux vers les sommets 1, 2, ..., 5.

**Résultats :** il reste à lire les coordonnées des points après « compensation graphique ». Commande ID de EXTrémité de... (en zoom). On obtient au centimètre près les mêmes coordonnées que par le calcul numérique du tableau précédent. La rentabilité de cette méthode n'est pas évidente, mais elle constitue un excellent exercice de manipulation des objets AutoCAD et la concrétisation visuelle d'une compensation.

## 1.5.2 Cheminement avec mesure de GO de station



Afin d'améliorer la précision de l'orientation de départ d'une polygonale en canevas de précision, il est intéressant de calculer un *G0moyen* de station au départ et à l'arrivée.

Par exemple, sur le parcours schématisé ci-contre (fig. 2.22.), un *G0moyen* de station a été calculé au départ (au point B sur trois points d'appui) et à l'arrivée (au point C sur deux points d'appui). On travaille en canevas de précision. En reprenant les données de l'exemple précédent, calculez à nouveau les coordonnées des sommets 1, 2, 3, 4 et 5.

Attention : les coordonnées des points A et D ont changées, de même que les lectures *Lv* du point B vers le point 1 et *Lr* du point C vers 5 (voir les tableaux de données ci-dessous).

Points d'appui :

	E (m)	N (m)
A	981 831,06	154 968,69
B	983 156,00	154 326,00
C	985 380,62	156 009,89
D	986 631,00	156 378,27
E	981 903,01	153 431,50
F	985 075,81	156 856,89
G	984 006,01	153 442,56

Tours d'horizon en B et en C :

Stat B	Hz	Stat C	Hz
Pts visés	(gon)	Pts visés	(gon)
G	72,7543	F	40,2338
E	182,0577	D	143,9861
A	250,2808	5	304,7976
1	339,0179		

### G0moyen de station en B

Canevas de précision :

$Emq = 1,1$  mgon

Tolérance 1,2 mgon

$Rmq = 2,5$  cm

Tolérance 2,5 cm

Stat B Pts visés	H <sub>z</sub> (gon)	G <sub>B-Pi</sub> (gon)	G0 <sub>i</sub> (gon)	Dr <sub>i</sub> (km)	e <sub>i</sub> (mgon)	r <sub>i</sub> (cm)
<b>G</b>	72,7543	151,2276	78,4733	1,2	-1,0	2,0
<b>E</b>	182,0577	260,5303	78,4726	1,5	-0,3	0,8
<b>A</b>	250,2808	328,7519	78,4711	1,5	1,2	2,8
		G0moyen :	78,4723	Tol :	1,5	4,0

### G0moyen de station en C

Canevas de précision :

$Emq = 0,4$  mgon

Tolérance 1,3 mgon

$Rmq = 0,7$  cm

Tolérance 2,5 cm

Stat C Pts visés	H <sub>z</sub> (gon)	G <sub>C-Pi</sub> (gon)	G0 <sub>i</sub> (gon)	Dr <sub>i</sub> (km)	e <sub>i</sub> (mgon)	r <sub>i</sub> (cm)
<b>F</b>	40,2338	378,0086	337,7748	0,9	0,3	0,5
<b>D</b>	143,9861	81,7603	337,7742	1,3	-0,2	0,5
		G0moyen	337,7744	Tol :	1,7	4,0

### Tableau des calculs de polygonation

St	Hg gon	Gisement brut	Poids km <sup>-1</sup>	Ca dmg	Gisement compensé	Delta E m	C <sub>E</sub> mm	Delta N m	C <sub>N</sub> mm	Coordonnées en m	
										E	N
		278,4723			278,4723						
<b>B</b>	339,0179	17,4902	1,5	5	17,4907	177,189	-23	628,618	-3	983 156,00	154 326,00
<b>1</b>	259,4873	76,9775	3,7	12	76,9791	424,194	-16	160,448	-2	983 333,17	154 954,62
<b>2</b>	158,3331	35,3106	4,4	14	35,3136	242,572	-16	391,500	-2	983 757,34	155 115,06
<b>3</b>	246,7143	82,0249	3,8	12	82,0291	578,411	-21	167,757	-2	983 999,90	155 506,56
<b>4</b>	220,2392	102,2641	3,6	11	102,2694	522,485	-18	-18,633	-2	984 578,29	155 674,31
<b>5</b>	140,3002	42,5643	4,1	13	42,5709	279,879	-16	354,213	-2	985 100,76	155 655,68
<b>C</b>	-304,7972	337,7671	2,2	7	337,7744					985 380,62	156 009,89
<b>Σ</b>			23,4	73		2224,730	-110	1683,903	-13		
<b>L</b>	3143,700		f <sub>a</sub> =	-7,3	mgon		f <sub>E</sub>	11,0	cm	Tolérances	cm
	Tolérance	précision		16,3	mgon		f <sub>N</sub>	1,3	cm	précision	57,1
		ordinaire		32,1	mgon		f <sub>p</sub>	11,1	cm	ordinaire	77,5

### Commentaires du tableau des calculs de polygonation

Le gisement de départ est  $GO_B - 200$  ; le gisement d'arrivée est  $GO_C$ .

$Hg_B$  est égal à  $Lv_B$  ;  $Hg_C$  est négatif :  $Hg_C = -Lr_C$ .

La fermeture angulaire est calculée à partir du  $GO$  observé d'arrivée :

$$fa = GO_{C\text{ obs}} - GO_C = 337,7671 - 337,7744 = -0,0073\text{gon}$$

Les visées du point B sur le  $GO$  de départ et du point C sur le  $GO$  d'arrivée sont considérées de longueurs infinies et n'entrent donc pas en compte dans le calcul des poids.

La compensation est réalisée directement sur les gisements bruts avec cumul à chaque ligne des compensations précédentes. Lorsque la compensation se fait sur les angles  $H_z$ , ce cumul est automatique dans le calcul.

La colonne  $Li^2$  n'est pas reproduite puisqu'elle est identique à celle du tableau de l'exemple précédent.

## 1.6 Calcul en retour

Ce calcul est une dernière étape intervenant après que le cheminement ait été complètement calculé, c'est-à-dire après avoir effectué les ajustements angulaires et planimétriques : on dit que le cheminement est rendu **réversible** angulairement et planimétriquement puisque le résultat est identique quel que soit le sens de parcours choisi.

Le « calcul en retour » est donc un nouveau calcul des gisements et des distances entre sommets après ajustements angulaires et planimétriques. On recalcule gisements et distances à partir des coordonnées définitives arrondies au même nombre de décimales que les points d'appui. Ce calcul fournit les gisements et distances correspondant exactement aux coordonnées déterminées pour les sommets du cheminement. On peut contrôler les écarts entre distances et gisements mesurés et leurs valeurs issues du calcul en retour. C'est sur ces derniers résultats que l'on s'appuie pour d'éventuels calculs ultérieurs (cheminements secondaires, stations alignées, antennes, etc.). Par exemple, à partir des résultats du dernier calcul, on obtiendrait le calcul en retour détaillé dans le tableau suivant :



Point	E (m)	N (m)	Gisement (gon)	$\varepsilon$ (mgon)	Distance Dr (m)	$\Delta$ (mm)
B	983 156,00	154 326,00				
1	983 333,17	154 954,62	17,4888	2	653,110	3
2	983 757,34	155 115,06	76,9791	0	453,499	25
3	983 999,90	155 506,56	35,3122	1	460,551	7
4	984 578,29	155 674,31	82,0292	0	602,225	22
5	985 100,76	155 655,68	102,2691	0	522,802	15
			42,5690	2	451,427	14
C	985 380,62	156 009,89				

$\varepsilon$  est l'écart entre le gisement compensé du tableau précédent et le gisement définitif.

$\Delta$  est l'écart entre la distance observée du tableau précédent et la distance définitive.

## 1.7 Cheminements particuliers

### 1.7.1 Cheminement fermé en lever local

Dans le cadre d'un lever local (propriété, lever de détail non rattaché, etc.), on peut effectuer un cheminement fermé en se fixant des coordonnées fictives de départ qui seront choisies entières et de manière à éviter des coordonnées négatives (par exemple,  $X_d = 100,00$  ;  $Y_d = 100,00$ ).

Si l'on désire orienter le cheminement par rapport au nord géographique, on peut mesurer le gisement approximatif du premier côté avec une **boussole** (ou le lire sur l'éventuel **déclinatoire** de l'appareil), et prendre cette valeur comme gisement de départ. Si l'orientation n'est pas nécessaire, on se fixe un gisement fictif de départ, par exemple 100 gon, et on ne compense le premier côté qu'en X de manière à conserver ce gisement.

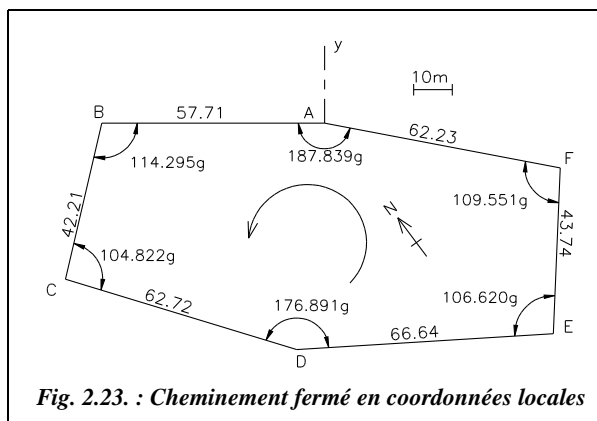


Fig. 2.23. : Cheminement fermé en coordonnées locales

### Application

Calculez par exemple le cheminement fermé représenté sur la figure 2.23. Les données du lever sont indiquées sur le schéma.

Sur le terrain, on vérifie que  $\Sigma Hg = 800,018$  gon. Cette valeur est à comparer avec la valeur théorique  $(n - 2) \cdot 200 = 800$ . On trouve un écart de 18 mgon.

On se fixe des coordonnées fictives pour A (1 000,00 m ; 1 000,00 m) et un gisement de départ fictif  $G_{AB} = 300$  gon. Les angles lus sont les angles de gauche dans le sens du parcours.

Étant donnée la relative homogénéité des côtés, les fermetures angulaires sont réparties également sur chaque sommet. Pour la compensation en ordonnées ( $C_Y$ ), le premier côté n'est pas modifié de manière à conserver le gisement fictif de départ égal à 300 gon.

Les tolérances sont calculées en canevas polygonal ordinaire en négligeant le terme  $30.L$  (erreurs systématiques). Pour des côtés de petite longueur, on peut négliger le terme  $(\Sigma Li^2)$  dans le calcul de la tolérance de fermeture planimétrique. Si l'on n'en tient pas compte, on trouve  $T = 7,3$  cm (en canevas ordinaire).

De même, les côtés étant petits, on peut confondre les distances  $Dh$  et  $Dr$ .

Le tableau suivant résume le calcul de la polygonale de la figure 2.23.

Pts Pi	Dr m	Hg gon	Ca mg	Gij gon	Delta E m	Delta N m	C <sub>E</sub> mm	C <sub>N</sub> mm	Est m	Nord m	L <sup>2</sup> km <sup>2</sup>
A									1000,00	1000,00	0,000
B	57,71			300,000	-57,71	0,00	-3	0			
		114,295	-3						942,29	1000,00	0,004
C	42,21			214,292	-9,40	-41,15	-2	-1			
		104,822	-3						932,89	958,85	0,006
D	62,72			119,111	59,92	-18,55	-3	-2			
		176,891	-3						992,80	940,30	0,004
E	66,64			95,999	66,51	4,19	-3	-3			
		106,620	-3						1059,31	944,48	0,006
F	43,74			2,616	1,80	43,70	-2	-1			
		109,551	-3						1061,10	988,18	0,004
A	62,23			312,164	-61,10	11,82	-3	-2			
		187,839	-3						1000,00	1000,00	0,000
				300,000							
L	335,25	800,018	-18		0,016	0,009	-16	-9			$\Sigma Li^2$ 0,024
n	6				$f_E$	1,6	cm				
		$f_a =$	18	mgon	$f_N$	0,9	cm				
		Tolérance	24	mgon	$f_p$	1,9	cm		Tolérance	7,7	cm

## 1.7.2 Cheminement non orienté au départ ni à l'arrivée

Si l'on désire effectuer un cheminement rattaché au système Lambert entre deux points connus A et B et si aucun point d'appui n'est visible depuis les stations A et B, on ne peut orienter le cheminement. Il n'y a donc aucun contrôle direct des lectures angulaires ; c'est pourquoi il est préférable d'éviter ce type de manipulation.

Toutefois, on peut calculer ce cheminement et le rattacher au système Lambert en calculant le cheminement AB dans un repère local fictif puis en faisant subir à l'ensemble des sommets calculés une rotation pour les ramener en système de coordonnées général.

### Exemple

Calculez et rattachez le cheminement de la figure 2.24. en canevas polygonal de précision. Les coordonnées des points A et B sont données dans le tableau ci-contre.

Points	E (m)	N (m)
A	988 666,73	151 929,10
B	990 244,13	153 039,50

On calcule le gisement de départ  $G_{AB} = 60,952$  gon.

On effectue un premier calcul fictif d'un cheminement A, 1', 2', 3', B' en fixant un gisement fictif pour le premier côté :  $G_{A1'} = 100$  gon.

Ce premier calcul donne les coordonnées fictives B' du point B. On en déduit le gisement  $G_{AB'} = 121,124$  gon.

La rotation à faire subir à l'ensemble du cheminement pour recaler la direction fictive AB' sur la direction réelle AB est :  $121,1244 - 60,9518 = 60,1726$  gon.

On soustrait ensuite cette valeur à chaque gisement fictif pour obtenir le gisement définitif (sans contrôle !).

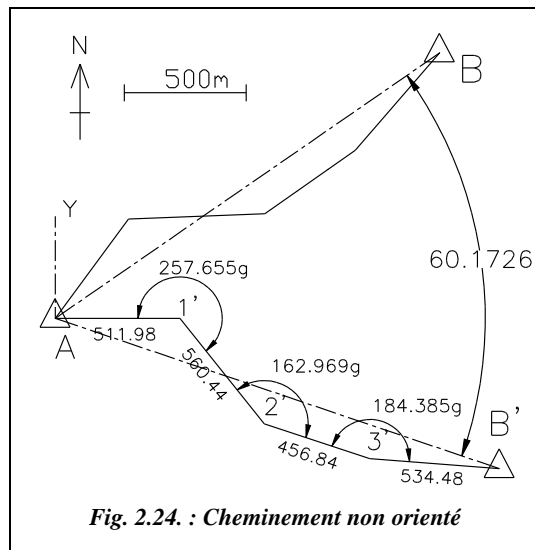


Fig. 2.24. : Cheminement non orienté

Le tableau ci-après résume le calcul des coordonnées fictives.

Points Pi	Distances Dr m	Angles Hg gon	Gisement Gij gon	Delta E $\Delta E$ m	Delta N $\Delta N$ m	E m	N m
A						988 666,73	151 929,10
1'	511,98		100,000	511,98	0,00		
2'	560,44	257,655	157,655	345,89	-440,97	989 178,71	151 929,10
3'	456,84	162,969	120,624	433,08	-145,42	989 524,60	151 488,13
B'	534,48	184,385	105,009	532,83	-42,01	989 957,68	151 342,71
B'						990 490,50	151 300,70

Le tableau suivant résume le calcul des coordonnées définitives. Ce calcul ne permet qu'un contrôle de la fermeture planimétrique. Notons qu'elle englobe la fermeture angulaire puisque l'écart de fermeture planimétrique final est aussi dû aux erreurs de lectures angulaires.

Pts Pi	Dr m	Hg gon	Gisem. gon	Delta E m	Delta N m	C <sub>E</sub> mm	C <sub>N</sub> mm	E m	N m	Li <sup>2</sup> km <sup>2</sup>
A								988 666,73	151 929,10	3,72
1	511,98		39,827	299,81	415,01	7	5			
2	560,44	257,655	97,482	560,00	22,16	8	5	988 966,55	152 344,12	2,10
3	456,84	162,969	60,451	371,49	265,90	7	4	989 526,56	152 366,28	0,96
B	534,48	184,385	44,836	346,07	407,31	8	5	989 898,05	152 632,18	0,28
B								990 244,13	153 039,50	0,00
$\Sigma$	2063,74			1577,37	1110,38	30	19			$\Sigma Li^2 = 7,06$
				$f_E =$	-3,0 cm			$f_p =$	3,6 cm	
				$f_N =$	-1,9 cm			Tolérance	35 cm	

#### ◆ Résolution graphique au moyen d'AutoCAD LT



L'environnement de travail est préalablement défini comme suit dans le menu **FORMAT / CONTROLE DES UNITES** : angles en grades à quatre chiffres après la virgule, direction du zéro au nord (100 gon) et sens de rotation horaire, longueurs décimales à trois chiffres. Dans le menu **FORMAT / STYLE DES POINTS**, choisissez la croix et réglez sa taille en unités absolues à 50 m.

### – Dessin des points A et B

*POINT* ↵ 988666.73,151929.1 ↵ puis *POINT* ↵ 990244.13,153039.5 ↵

*Zoom* ↵ *Etendu* ↵ suivi de *Zoom* ↵ 0.8X ↵

### – Dessin du cheminement

*LIGNE* ↵ du point *NODal* de... (point A) au point @511.98<100 ↵ au point @560.44<157.655 ↵

*SCU* ↵ option *OBjet* ↵, cliquez sur le dernier côté tracé vers son origine (l'axe X du repère est placé sur ce côté, l'azimut du prochain côté sera alors dans ce repère l'angle au sommet diminué de 100 gon). Si vous cliquez vers l'autre extrémité du côté précédent, l'azimut sera égal à l'angle au sommet augmenté de 100 gon.

Plus simplement, on peut faire : *SCU* ↵ option *OBjet* ↵ option de choix *Dernier* ↵ (dernier objet dessiné) ; le SCU se positionne alors directement sur le dernier objet dessiné (ici sur le côté précédent, origine au départ du côté).

*LIGNE* ↵ du point *EXTrémité* du côté précédent au point @456.84<62.969 ↵

*SCU* ↵ option *OBjet* ↵, choix de l'objet : *Dernier* ↵

*LIGNE* ↵ du point *EXTrémité* du côté précédent au point @534.48<84.385 ↵

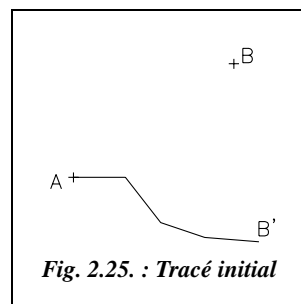
*SCU* ↵ ↵ pour retourner au SCU général.

Vous devez obtenir l'équivalent de la figure 2.25.

### – Alignement de AB' sur AB

*ROTATION* ↵ des quatre côtés précédents autour du point A (*NODal* de...), option *Référence* ↵ : donnez la référence par *NODal* de... (point A) puis *EXTrémité* du dernier côté (point B') ; donnez ensuite le nouvel angle par *NODal* de... (point B).

On peut mesurer la fermeture planimétrique par *DIS-TANCE* ↵ de *EXTrémité* de... (point B' après rotation) à *NODal* de... (point B) : on lit une distance de 0.036 m.



### – Modification d'échelle pour adapter la longueur AB' à la longueur AB

*ECHELLE* ↵ des 4 côtés précédents par rapport au point A (*NODal* de...), option *Référence* ↵ : donnez la longueur de référence par *NODal* de... (point A) et *EXTrémité* du dernier côté (point B' après rotation), donnez la nouvelle longueur par *NODal* de.. point B.

### – Lecture des résultats

*ID* ↵ *INTersection* de... donne seulement les coordonnées des sommets. *LISTE* ↵ donne toutes les caractéristiques de tous les côtés (point de départ, point d'arrivée, longueur, gisement appelé angle dans le plan XY). On retrouve les résultats précédents, bien que la compensation planimétrique soit faite ici par une autre méthode que dans le calcul manuel ; pour des fermetures plus importantes, les résultats peuvent être différents.

### 1.7.3 Stations intermédiaires alignées

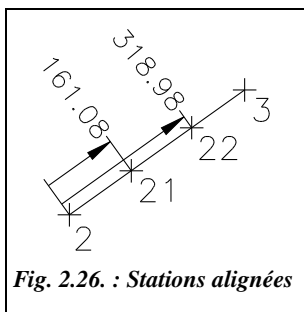


Fig. 2.26. : Stations alignées

Lorsqu'il est nécessaire d'ajouter des stations intermédiaires, elles sont alignées au théodolite en commençant par la plus éloignée et en même temps que s'effectue la polygonalement : ceci permet d'obtenir le nombre de stations nécessaires en conservant de longs côtés.

Sur la figure 2.26., les points 21 et 22 sont alignés sur le côté 2-3 du cheminement calculé au paragraphe 1.7.2.

On calcule d'abord le cheminement sans tenir compte des stations alignées (voir § 1.7.2.). Le calcul en retour détaillé dans le tableau suivant fournit le gisement définitif et la distance définitive du côté sur lequel les stations sont alignées.

Pts	E	N	Gisem.	$\varepsilon$	Distance	$\Delta$
Pi	(m)	(m)	(gon)	(mgon)	Dr (m)	(mm)
A	988 666,73	151 929,10				
			39,828	0,6	511,99	9,9
1	988 966,55	152 344,12				
			97,482	-0,3	560,45	8,3
2	989 526,56	152 366,28				
			60,451	-0,1	456,85	5,3
3	989 898,05	152 632,18				
			44,837	0,2	534,49	11,3
B	990 244,13	153 039,50				

Pour tenir compte du fait que les distances observées ont été modifiées par l'ajustement planimétrique (et angulaire), on utilise un coefficient modificateur d'échelle  $m$  calculé avec six décimales :

$$m = \frac{\text{Distance (2-3) définitive}}{\text{Distance (2-3) observée}} \quad (\text{ici } m = 1,000\ 012)$$

Pts	Gisem.	Dr obs.	Dr déf. (m)	E	N
Pi	(gon)	(m)	x 1,000 012	(m)	(m)
2				989 526,56	152 366,28
	60,451	161,080	161,082		
21				989 657,55	152 460,04
2				989 526,56	152 366,28
	60,451	318,980	318,984		
22				989 785,95	152 551,94

Les distances observées du sommet 2 aux nouveaux sommets 21 et 22 sont multipliées par le coefficient  $m$  pour obtenir les distances définitives qui serviront au calcul de leurs coordonnées.

Le tableau précédent donne les coordonnées des points 21 et 22.

#### ◆ Résolution graphique



Traitez cet exemple à la suite du précédent et dans le même dessin.

Zoom ↵ autour du côté 2-3

#### – Dessin des points 21, 22 et de la longueur observée du côté 2-3

SCU ↵ option *Objet* ↵, cliquez sur le côté 2-3 vers le point 2.

POINT ↵ 161.08,0 ↵ puis POINT ↵ 318.98,0 ↵

#### – Mise à l'échelle des distances 2-21 et 2-22

ECHELLE ↵ sélectionnez les points 21 et 22 par une fenêtre, option *Référence* ↵, la longueur de référence est 456.84 ↵, la nouvelle longueur va jusqu'à *INTersection* de... (point 3).

Retour au SCU général par SCU ↵ ↵

Lisez les coordonnées des points 21 et 22 avec ID ↵ *NODal* de...

## 1.8 Fautes en cheminement

Les cheminements fermés ont l'avantage de donner un résultat en fermeture planimétrique qui ne dépend que de la manipulation effectuée. En effet, un cheminement encadré est tributaire de la précision planimétrique des points d'appui. En revanche, dans le cas d'un cheminement fermé, il est impossible de se rendre compte, d'après les calculs, de la présence des deux types de fautes suivants.

- **Erreur d'étalonnage des appareils de mesure des distances** : dans un cheminement encadré, cette faute apparaît dans la fermeture planimétrique et est résorbée par la compensation finale. Dans un cheminement fermé, au contraire, elle n'apparaît pas puisqu'on obtient un polygone homothétique du polygone réel (fig. 2.27.) et qui reste dans les tolérances angulaires et planimétriques. Il faut étalonner l'appareil de mesure ou effectuer un cheminement encadré de contrôle entre deux points du cheminement fermé.

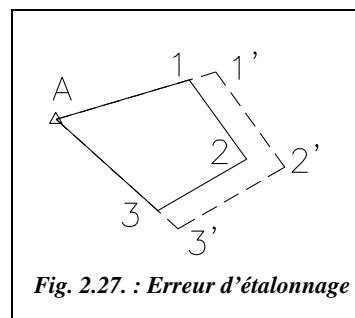


Fig. 2.27. : Erreur d'étalonnage

- **Faute sur l'orientation de départ d'un cheminement fermé :** faute de calcul du gisement de départ ou faute en lecture d'angle. Ces fautes ne peuvent être décelées car le polygone calculé se déduit du polygone réel par une rotation d'ensemble de l'angle correspondant à la faute commise (fig. 2.28.). Le retour au point de départ ne permet pas de se rendre compte d'une faute de calcul du gisement de départ.

On contourne cet inconvénient en faisant une nouvelle orientation à l'arrivée sur un point différent de celui ayant servi à l'orientation de départ.

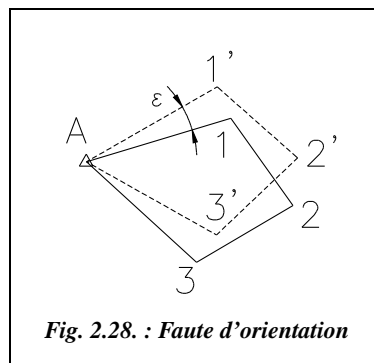


Fig. 2.28. : Faute d'orientation

En conclusion, la meilleure manipulation est un cheminement encadré suivi d'un retour au point de départ (le cheminement global est fermé, mais il est constitué de deux cheminements encadrés). L'intérêt est de combiner l'avantage de l'indépendance des points d'appui du cheminement fermé avec la sûreté du cheminement encadré.

## 2 POINT NODAL EN PLANIMÉTRIE

### 2.1 Définition

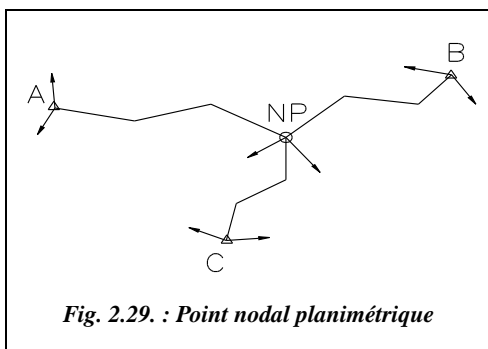


Fig. 2.29. : Point nodal planimétrique

C'est la rencontre d'au moins trois demi-cheminements (ou antennes) issus chacun d'un point connu en coordonnées et d'où, éventuellement, une ou plusieurs directions sont observées sur des points anciens pour le calcul du *G0moyen* de station (voir la représentation correspondante sur la figure 2.29).

**NP** représente les points nodaux principaux (nœuds de cheminements principaux).

**NS** représente les points nodaux secondaires (nœuds de cheminements secondaires).

Nous noterons par la suite P le point nodal pour éviter la confusion avec les ordonnées *N*.



## 2.2 Méthode de calcul

Le principe est de calculer chaque « antenne » arrivant au point nodal comme un cheminement encadré entre le point d'appui de départ et le point nodal. Ce dernier est ainsi déterminé au moins trois fois et, par moyenne pondérée, on obtient ses coordonnées définitives. Les antennes deviennent alors des cheminements encadrés.

En station sur le point nodal, un tour d'horizon est effectué, incluant tous les derniers points des cheminements aboutissant au point nodal, avec, si possible, des visées supplémentaires sur quelques points lointains.

### 2.2.1 Fermeture angulaire et tolérance

La fermeture angulaire de chaque cheminement est réalisée sur la direction ayant servi de référence au tour d'horizon effectué en station sur le point nodal. On obtient autant de gisements d'arrivée observés (ou de  $G0$  d'arrivée) qu'il y a de demi-cheminements. On en fait la moyenne pondérée pour obtenir le gisement (ou le  $G0$ ) d'arrivée.

$G_p = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} G_{Pj} \cdot p_j}{\sum_{j=1}^{j=n} p_j} \quad \text{ou bien} \quad G0_p = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} G0_j \cdot p_j}{\sum_{j=1}^{j=n} p_j}$	<p><math>G_p</math> est le gisement d'arrivée en P.  <math>G0_p</math> est le <math>G0</math> d'arrivée en P.  <math>n</math> est le nombre de cheminements.  <math>p_j</math> est le poids du cheminement n° j.</p>
	$p_j = \frac{K}{Ta_j^2}$

- Dans cette expression de  $p_j$  :  
 $K$  est une constante arbitraire ; on prend généralement  $K = 1\ 000$  ce qui permet de limiter le nombre de chiffres après la virgule à écrire pour  $p_j$ , qui est alors calculé avec quatre décimales si le calcul est fait avec une calculatrice.
- $Ta$ , exprimée en mgon, est la tolérance de fermeture angulaire de chaque cheminement considéré encadré entre le point de départ et le point nodal (voir § 1.3.6.2.). Logiquement, plus cette tolérance est grande et moins on donne de poids à un demi-cheminement arrivant au point nodal.

Après avoir calculé le gisement d'arrivée moyen pondéré  $G_p$  (ou bien le  $G0$  en P), on détermine les  $n$  écarts à la moyenne entre chaque gisement d'arrivée et le gisement d'arrivée moyen pondéré. Ces écarts  $f_{aj}$  sont la fermeture angulaire de chaque cheminement :

$f_{aj} = G_{Pj} - G_p$	ou encore : $f_{aj} = G0_{Pj} - G0_p$ .
-------------------------	---

Ces fermetures doivent être comparées à la tolérance de fermeture angulaire de chaque demi-cheminement qui est :

$$Tam_j = \sqrt{Ta_j^2 - \frac{K}{\sum_{j=1}^{j=n} p_j}}$$

$Tam_j$ , en mgon, est la tolérance de fermeture angulaire moyenne de chaque demi-cheminement aboutissant au point nodal P ;  
 $Ta_j$ , en mgon, est la tolérance de fermeture angulaire du cheminement encadré entre son point de départ et le point nodal.

### 2.2.2 Fermeture planimétrique et tolérance

À présent, on calcule les coordonnées du point nodal à partir de chaque cheminement compensé angulairement (on dit aussi « rendu réversible angulairement »). On obtient donc autant de coordonnées d'arrivée  $E_{Pj}$ ,  $N_{Pj}$  qu'il y a de demi-cheminements aboutissant au point nodal P. Les coordonnées du point P sont déterminées par moyenne pondérée :

$$E_P = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} p_j \cdot E_{Pj}}{\sum_{j=1}^{j=n} p_j} \text{ et } N_P = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} p_j \cdot N_{Pj}}{\sum_{j=1}^{j=n} p_j \cdot E_{Pj}}$$

$n$  est le nombre de cheminements aboutissant au point nodal N.

$p_j = \frac{K}{T p_j^2}$  est le poids de chaque cheminement.

$K$  est une constante arbitraire (on prend généralement  $K = 1\ 000$ ).

$T_p$ , exprimée en centimètre, est la tolérance de fermeture planimétrique de chaque cheminement considéré encadré entre le point de départ et le point nodal (voir § 1.4.2.4.). Logiquement, plus cette tolérance est grande et moins on donne de poids à un cheminement dans la détermination de  $E_P$  et  $N_P$ .

Après avoir calculé les coordonnées moyennes pondérées ( $E_P ; N_P$ ), on détermine les  $2.n$  écarts à la moyenne  $f_{Ej}$  et  $f_{Nj}$  entre chaque coordonnée d'arrivée observée et les coordonnées moyennes pondérées. Ces écarts sont les fermetures en Est et en Nord de chaque demi-cheminement :

$$f_{Ej} = E_{Pj} - E_P, f_{Nj} = N_{Pj} - N_P$$

La **fermeture planimétrique** de chaque demi-cheminement est donc :

$$fpj = \sqrt{f_{Ej}^2 + f_{Nj}^2}$$

On compare ensuite chaque fermeture à la tolérance correspondante :

$T_{pmj} = \sqrt{T_{pj}^2 - \frac{K}{\sum_{j=1}^n p_j}}$	<p><math>T_{pmj}</math> en centimètre, est la tolérance de fermeture planimétrique moyenne d'un demi-cheminement aboutissant au point nodal P.</p> <p><math>T_{pj}</math> en centimètre, est la tolérance du cheminement encadré entre son point de départ et le point nodal P.</p>
--	---

Le procédé de calcul est aussi donné dans l'arrêté de janvier 1980 au paragraphe 3.2.3.

### 2.2.3 Calcul final

Le point nodal étant déterminé par ses coordonnées, on calcule chaque demi-cheminement aboutissant au point nodal comme un cheminement encadré entre point de départ et point nodal, de manière à harmoniser les coordonnées des sommets avec les coordonnées définitives du point nodal.

### 2.2.4 Ellipses de tolérance

On peut utiliser les ellipses de tolérance traitées au paragraphe 1.4.2.1. pour construire graphiquement le point P.

Sur un graphique à grande échelle (1/5, 1/10...), on reporte chaque point d'arrivée observé : on choisit, par exemple, comme origine du repère de la construction graphique le point d'arrivée observé du premier cheminement. Ensuite, on reporte les autres par leurs différences de coordonnées. Enfin, on reporte les directions générales des demi-cheminements et les ellipses de tolérance de chaque demi-cheminement (fig. 2.30.).

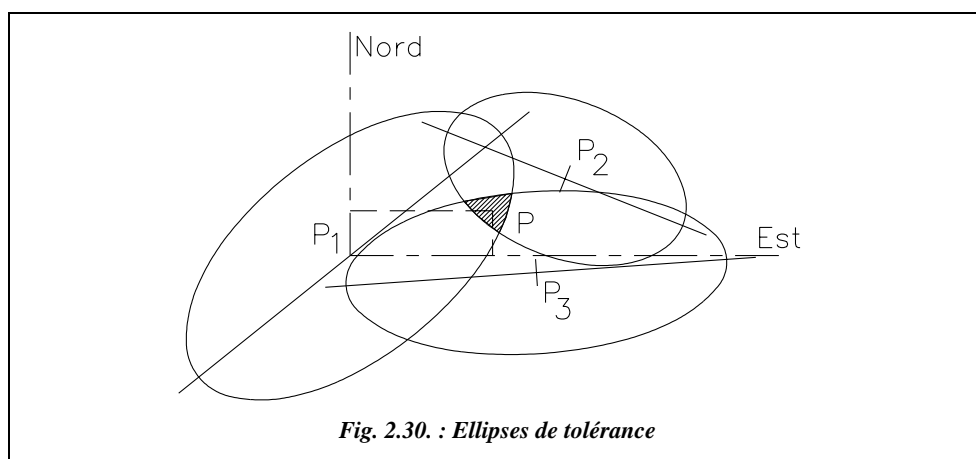
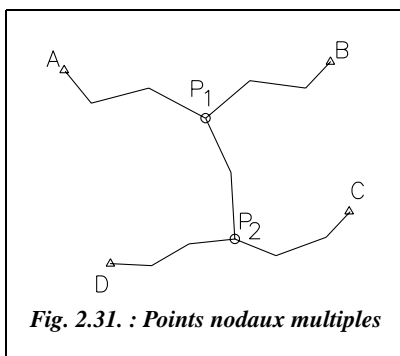


Fig. 2.30. : Ellipses de tolérance

Si ces ellipses n'ont pas de zone commune, la manipulation est hors tolérance.

Si ces ellipses ont une zone commune, on place le point P à vue et on lit ses coordonnées par rapport au point choisi comme centre du repère.

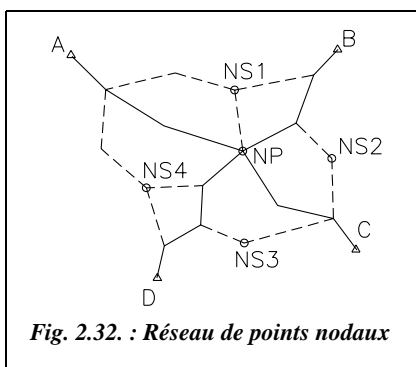
## 2.2.5 Points nodaux multiples



Dans le cas de points nodaux multiples (fig. 2.31.), on calcule les cheminements, par exemple, dans l'ordre suivant :

Cheminements	Point calculé
A → P <sub>1</sub>	P <sub>1</sub>
B → P <sub>1</sub>	
C → P <sub>1</sub>	
D → P <sub>1</sub>	
A → P <sub>2</sub>	P <sub>2</sub>
B → P <sub>2</sub>	
C → P <sub>2</sub>	
D → P <sub>2</sub>	

On calcule finalement chaque demi-cheminement comme un cheminement encadré entre les points d'appui A, B, C et D et les points nodaux P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>.



Si le nombre de points nodaux est plus important (fig. 2.32.), on calcule d'abord le point nodal le plus central qui devient un point nodal principal (NP) et ensuite les points nodaux périphériques qui deviennent des points nodaux secondaires (NS).

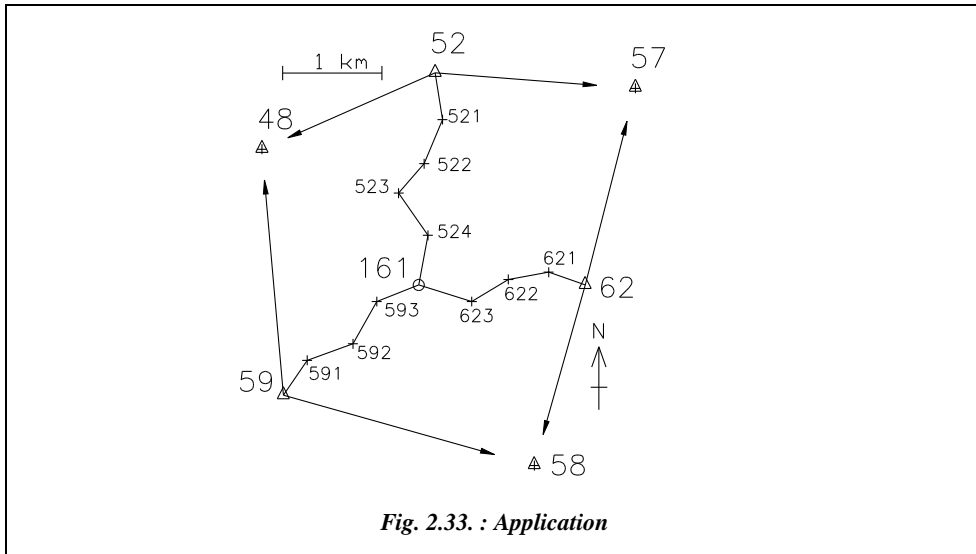
Dans le cadre de petits travaux, le poids  $p_j$  d'un cheminement de  $n$  côtés peut être simplifié comme suit :

$$p_j = \frac{1}{n}$$

## 2.3 Exemple de calcul de point nodal

### 2.3.1 Calcul numérique

On cherche à calculer les coordonnées du point 161 du canevas d'ensemble ordinaire auquel aboutissent trois demi-cheminements partant des points 52, 62 et 59 connus en coordonnées et sur lesquels un *G0moyen* de station a été calculé (voir fig. 2.33.). Le point 593 est choisi comme référence du tour d'horizon effectué au point nodal 161.



Les coordonnées des points d'appui sont données dans le tableau suivant :

Points	E (m)	N (m)
<b>48</b>	982 525,78	175 152,49
<b>52</b>	984 274,11	175 919,31
<b>57</b>	986 294,80	175 763,86
<b>58</b>	985 274,72	171 977,45
<b>59</b>	982 743,18	172 683,97
<b>62</b>	985 788,83	173 790,53

Le tableau suivant détaille les tours d'horizon effectués en station sur les points de départ des cheminements et sur le point nodal.

Station	52	Station	62	Station	59	Station	161
Points	Lect. (gon)	Points	Lect. (gon)	Points	Lect. (gon)	Points	Lect. (gon)
<b>57</b>	7,8170	<b>57</b>	17,7948	<b>48</b>	13,2461	<b>593</b>	125,4967
<b>521</b>	92,8409	<b>58</b>	219,4023	<b>591</b>	57,0602	<b>524</b>	260,8902
<b>48</b>	176,6185	<b>621</b>	323,2331	<b>58</b>	136,1641	<b>623</b>	368,3620

◆ **Calculs des *G0moyen* de station au départ des cheminements**

Le tableau suivant détaille les calculs de *G0moyen* de station aux points 52, 62 et 59.

Station 52	Lectures (gon)	Distance (km)	Gisement (gon)	G0i (gon)	ei (mgon)	ri (cm)
Pt 57	7,817	2,03	104,8878	97,0708	1,5	4,7
Pt 48	176,6185	1,91	273,6863	97,0678	-1,6	-4,7
		1,97	G0m =	97,0694	Tol 4,6 mgon	Tol : 20 cm
<b>Station 62</b>						
57	17,7948	2,04	15,9790	398,1842	-1,7	-5,5
58	219,4023	1,88	217,5900	398,1877	1,8	5,5
		1,96	G0m =	398,1859	Tol 4,6 mgon	Tol : 20 cm
<b>Station 59</b>						
48	13,2461	2,48	394,4078	381,1617	-0,3	-1,2
58	136,1641	2,63	117,3264	381,1623	0,3	1,2
		2,55	G0m =	381,1620	Tol 3,6 mgon	Tol : 20 cm

$Emq = 1,5$  mgon (Tolérance : 2,7 mgon)

$Rmq = 4,6$  cm (Tolérance : 20 cm)

#### ◆ Cheminement : mesures de terrain

Les tableaux suivants donnent les mesures effectuées sur chaque cheminement.

Cheminement (1)		
Sta.	Dr m	Hg gon
52		92,8409
	474,89	
521		235,2414
	479,57	
522		220,6389
	392,24	
523		115,4927
	516,87	
524		250,3862
	506,43	
161		264,6065
Σ	2370	

Cheminement (2)		
Sta.	Dr m	Hg gon
62		323,2331
	391,09	
621		167,1418
	412,73	
622		177,0585
	430,42	
623		253,5204
	560,34	
161		157,1347
Σ	1795	

Cheminement (3)		
Sta.	Dr m	Hg gon
59		57,0602
	424,60	
591		239,7942
	490,40	
592		154,7581
	487,35	
593		243,4975
	455,84	
161		0,0000
Σ	1858	

Les lectures angulaires au point 161 sont réduites à une même référence d'arrivée (point 593), donc :

- pour le cheminement n° 1 :  $Hg_{161} = 125,4967 - 260,8902 + 400 = 264,6065$  gon.
- pour le cheminement n° 2 :  $Hg_{161} = 125,4967 - 368,3620 + 400 = 157,1347$  gon.
- pour le cheminement n° 3 :  $Hg_{161} = 0,0000$  gon.

◆ **Calcul des cheminements**

Les trois tableaux suivants détaillent les calculs de chaque cheminement.

(1)	Gisem. brut	Poids $p_j$	Ca mgon	Gisement compensé	Delta E m	$C_E$ cm	Delta N m	$C_N$ cm	$Li^2$ km <sup>2</sup>	E m	N m
52	189,9103	2,11	-0,2	189,9101	74,95	0,4	-468,94	-0,7	4,58	984 274,11	175 919,31
521	225,1517	4,19	-0,4	225,1511	-184,57	0,4	-442,63	-0,7	2,82	984 349,07	175 450,37
522	245,7906	4,63	-0,4	245,7896	-258,42	0,3	-295,08	-0,6	1,49	984 164,49	175 007,73
523	161,2833	4,48	-0,4	161,2819	295,33	0,4	-424,19	-0,7	0,88	983 906,08	174 712,65
524	211,6695	3,91	-0,3	211,6678	-92,30	0,4	-497,95	-0,7	0,26	984 201,41	174 288,45
161	276,2760	1,97	-0,2	276,2741						984 109,12	173 790,49
Σ		21,30	-1,9		-165,01	2,1	-2128,78	-3,4	10,0		

(2)	Gisem. brut	Poids $p_j$	Ca mgon	Gisement compensé	Delta E m	$C_E$ cm	Delta N m	$C_N$ cm	$Li^2$ km <sup>2</sup>	E m	N m
62	321,4190	2,56	0,0	321,4190	-369,16	-2,1	129,11	-0,1	2,82	985 788,83	173 790,53
621	288,5608	4,98	-0,1	288,5607	-406,08	-2,2	-73,76	-0,1	1,74	985 419,65	173 919,64
622	265,6193	4,75	-0,1	265,6191	-369,16	-2,3	-221,31	-0,1	0,83	985 013,54	173 845,88
623	319,1397	4,11	-0,1	319,1394	-535,21	-3,0	165,94	-0,2	0,31	984 644,35	173 624,56
161	276,2744	1,78	0,0	276,2741						984 109,12	173 790,49
Σ		18,18	-0,3		-1679,62	-9,6	-0,03	-0,6	5,7		

(3)	Gisement brut	Poids $p_j$	Ca mgon	Gisement compensé	Delta E m	$C_E$ cm	Delta N m	$C_N$ cm	$Li^2$ km <sup>2</sup>	E m	N m
59	38,2222	2,36	0,3	38,2225	239,89	1,8	350,34	0,8	3,10	982 743,18	172 683,97
591	78,0164	4,39	0,5	78,0172	461,45	2,1	165,99	0,9	1,85	982 983,08	173 034,32
592	32,7745	4,09	0,5	32,7758	239,97	2,1	424,18	0,9	0,79	983 444,56	173 200,32
593	76,2720	4,25	0,5	76,2738	424,55	2,0	165,98	0,8	0,21	983 684,55	173 624,50
161	276,2720	2,19	0,3	276,2741						984 109,12	173 790,49
$\Sigma$		17,28	2,1		1365,86	8,1	1106,49	3,3	5,9		

Pour chaque cheminement le gisement de départ est  $G_d = G0 +$  lecture sur le premier point.

La compensation angulaire est effectuée sur les gisements bruts (avec cumul des compensations).

#### ◆ Fermetures angulaire et planimétrique des trois cheminements

Les tableaux suivants détaillent les calculs des fermetures angulaires et planimétriques de chaque cheminement.

N°	Garrivée gon	$Ta_i$ mgon	Poids $p_j$	$fa$ mgon	$Tam_i$ mgon
1	276,2760	7,9	16,1	1,9	6,5
2	276,2744	7,7	16,7	0,3	6,3
3	276,2720	7,7	16,7	-2,1	6,3
	276,2741		49,5		

Le gisement d'arrivée est déduit de la transmission des gisements.

N°	$E_{p_j}$ m	$N_{p_j}$ m	$Tp_i$ cm	Poids $p_j$	$f_E$ cm	$f_N$ cm	$Fp$ cm	$Tpm_i$ cm
1	984 109,10	173 790,53	29,7	1,14	-2,1	3,4	4,0	25,1
2	984 109,21	173 790,50	26,3	1,45	9,6	0,6	9,6	21,0
3	984 109,04	173 790,46	26,5	1,43	-8,1	-3,3	8,7	21,3
	984 109,12	173 790,49		4,01				



Les coordonnées des points d'arrivée de chaque cheminement sont calculées avec :

$$E_{P_j} = E_{\text{départ}} + \Sigma(\Delta E)$$

$$N_{P_j} = N_{\text{départ}} + \Sigma(\Delta N)$$

Les longueurs  $L_i$  intervenant dans le calcul de la tolérance sont calculées au moyen des  $\Delta E$  et  $\Delta N$ . Si l'on ne dispose pas d'un tableur, on peut aussi mesurer leur valeur sur un schéma à l'échelle des cheminements.

On peut vérifier que pour les trois cheminements le nombre  $n$  de sommets est inférieur à six et la longueur moyenne de l'ordre de 500 m. Les fermetures sont dans les tolérances donc la manipulation est correcte.

### 2.3.2 Calcul faisant intervenir un *GO* de station au point nodal

Si l'on ajoute au moins deux lectures faites au point nodal 161 sur deux points lointains connus, on peut alors y calculer un *G0moyen* de station. Le calcul doit être alors complété par l'utilisation de ces nouvelles données. À partir des lectures ci-contre, refaites les calculs pour tenir compte de ces nouvelles données.

Points	Lectures gon	Lect. réduites gon
58	12,8461	0,0000
593	125,4967	112,6506
524	260,8902	248,0441
57	302,4708	289,6247
623	368,3620	355,5159

Le tour d'horizon en 161 est réduit à la nouvelle référence qui est le point 58.

#### ◆ *G0moyen* de station en 161

Le tableau suivant détaille le calcul du *G0moyen* de station au point 161.

Station 161	Lectures gon	Distance km	Gisement gon	<i>G0i</i> gon	<i>ei</i> mgon	<i>ri</i> cm
58	0,0000	2,16	163,6257	163,6257	2,0	6,6
57	289,6247	2,94	53,2470	163,6223	-1,4	-6,6
		2,55	<i>G0m</i> =	163,6237	Tol 3,6 mgon	Tol : 20 cm

#### ◆ Nouveau calcul des trois cheminements

Le *G0moyen* d'arrivée au point 161 est maintenant le gisement d'arrivée des trois demi-cheminements. Notez qu'un premier calcul du point nodal est nécessaire pour pouvoir déterminer ce *G0moyen* en 161.

Les gisements de départ sont déduits des *G0moyen* :  $G_d = 200 - G0$ , à chaque cheminement. Le dernier angle de gauche est négatif car la lecture avant est égale à zéro :

$$H_g = L_v - L_r = -L_r$$

Les poids  $p_j$  et les distances  $L_i$  ne sont pas recalculés car ils restent identiques (aux arrondis près pour  $L_i$ ).

Dans notre exemple, les résultats sont identiques à ceux de la méthode précédente : cela vient du fait que les fermetures angulaires sont faibles.

Les trois tableaux suivants détaillent les calculs de chaque demi-cheminement avec transmission de  $GO$  de station.

Sta,	Hg gon	Gisement gon	Ca mgon	Gisement compensé	Delta E m	C <sub>E</sub> cm	Delta N m	C <sub>N</sub> cm	E m	N m
(1)		297,0694								
52	92,8409		-0,2						984 274,11	175 919,31
		189,9103		189,9101	74,95	0,5	-468,94	-0,7		
521	235,2414		-0,3						984 349,07	175 450,37
		225,1517		225,1512	-184,58	0,5	-442,63	-0,7		
522	220,6389		-0,4						984 164,50	175 007,73
		245,7906		245,7897	-258,42	0,4	-295,08	-0,6		
523	115,4927		-0,4						983 906,08	174 712,65
		161,2833		161,2821	295,33	0,5	-424,19	-0,7		
524	250,3862		-0,3						984 201,41	174 288,45
		211,6695		211,6680	-92,30	0,5	-497,95	-0,7		
161	-248,0441		-0,2						984 109,12	173 790,49
		163,6254		163,6237						
Σ			-1,7		-165,02	2,4	-2128,78	-3,4		
		fa =	1,7	Tol : 7,9	fx =	-2,4	fy =	3,4	fp = 4,17	Tol. : 29,7

Sta,	Hg gon	Gisement gon	Ca mgon	Gisement compensé	Delta E m	C <sub>E</sub> cm	Delta N m	C <sub>N</sub> cm	E m	N m
(2)		198,1859								
62	323,2331		0,0						985 788,83	173 790,53
		321,4190		321,4190	-369,16	-2,1	129,11	-0,2		
621	167,1418		0,0						985 419,65	173 919,64
		288,5608		288,5608	-406,08	-2,2	-73,76	-0,2		
622	177,0585		0,0						985 013,54	173 845,88
		265,6193		265,6192	-369,16	-2,3	-221,31	-0,2		
623	253,5204		0,0						984 644,35	173 624,56
		319,1397		319,1396	-535,21	-3,0	165,94	-0,3		
161	-355,5159		0,0						984 109,12	173 790,49
		163,6238		163,6237						
Σ			-0,1		-1679,62	-9,6	-0,03	-0,9		
		fa =	0,1	Tol. : 7,7	fx =	9,6	fy =	0,9	fp = 9,60	Tol. : 26,3

Sta,	Hg gon	Gisement gon	Ca mgon	Gisement compensé	Delta E m	C <sub>E</sub> cm	Delta N m	C <sub>N</sub> cm	E m	N m
(3)		181,1620								
59	57,0602		0,3						982 743,18	172 683,97
		38,2222		38,2225	239,89	1,8	350,34	0,8		
591	239,7942		0,6						982 983,08	173 034,32
		78,0164		78,0173	461,45	2,1	165,99	0,9		
592	154,7581		0,5						983 444,56	173 200,32
		32,7745		32,7760	239,97	2,1	424,17	0,9		
593	243,4975		0,6						983 684,55	173 624,51
		76,2720		76,2740	424,55	1,9	165,98	0,9		
161	-112,6506		0,3						984 109,12	173 790,49
		163,6214		163,6237						
Σ			2,3		1365,86	7,9	1106,49	3,5		
		fa = -2,3		Tol. : 7,7	fx = -7,9		fy = -3,5		fp = 8,65	Tol. : 26,5



Les résolutions précédentes, qui demandent des calculs fastidieux, peuvent être effectuées sur le tableau NODALXY.XLS fourni sur le cédérom de l'ouvrage.

### 2.3.3 Calcul graphique

Le calcul du point nodal peut être réalisé graphiquement en utilisant les ellipses de tolérance vues au paragraphe 2.2.4. Les calculs du *G0moyen* ne pouvant être réalisés simplement de manière graphique, il faut les déterminer numériquement au préalable. Nous prendrons les résultats du paragraphe 2.3.1.

L'environnement de travail est identique à celui de l'exercice du paragraphe 1.7.2.

#### ◆ Préparation

Nous allons détailler ici un moyen de « personnaliser » AutoCAD LT pour dessiner plus rapidement les trois polygonales aboutissant au point nodal : nous avons vu à l'exercice du paragraphe 1.7.2. qu'un changement de SCU est nécessaire et qu'il se fait par *SCU* ↵ *Objet* ↵ *Dernier* ↵. Cela étant répétitif, nous allons placer cette combinaison de touches sur un bouton de la barre d'outils (ou de la boîte à outils).

Sélectionnez le menu *OUTILS / PERSONNALISATION DES BOITES A OUTILS / NOUVELLE* ; nommez votre barre personnelle puis validez. Modifiez-la ensuite (bouton *MODIFIER*) en y faisant glisser un bouton vide de la catégorie « personnalisé ». Cliquez sur ce nouveau bouton avec le bouton de droite de la souris pour modifier son icône et entrez la commande associée. Choisissez par exemple l'icône ci-contre :



Entrer dans le cadre *MACRO* la macrocommande suivante : **SCU**  **OB**  **D**

Le caractère  représente la touche espace, ce qui est équivalent sur AutoCAD à un appui sur *ENTER* (↵). Validez avec *OK*. Chaque fois que vous cliquerez sur cette case,

AutoCAD alignera le SCU sur la dernière entité dessinée, ce qui permettra de construire facilement une polygonale.

On peut pousser plus loin le raisonnement en ajoutant à la macro les instructions qui permettront de commencer le côté suivant à l'extrémité du précédent :

**SCU** **OB** **D** **LIGNE** **EXT** **@0,0**

#### ◆ Dessin des cheminements

Placez les trois points de départ 52, 59 et 62 (voir fig. 2.33. et 2.34.).

*POINT* ↵ 984274.11,175919.31 ↵ puis *POINT* ↵ 982743.18,172683.97 ↵ puis *POINT* ↵ 985788.83,173790.53 ↵

*Zoom* ↵ *Etendu* ↵ suivi de *Zoom* ↵ 0.8X ↵ (vous pouvez aussi placer cette macrocommande sur un bouton).

**Dessin des trois G0 de station** calculés en 52, 59 et 62

*LIGNE* ↵ du point *NODal* de .. (point 52) au point @500<97.0694 ↵

*LIGNE* ↵ du point *NODal* de .. (point 62) au point @500<398.1859 ↵

*LIGNE* ↵ du point *NODal* de .. (point 59) au point @500<381.1620 ↵

**Dessin du premier cheminement (issu du point 52)**

*SCU* ↵ option *OB*jet ↵ cliquez sur la droite partant de 52 et représentant le *G0moyen* : cliquez vers l'extrémité opposée au point 52 de manière à positionner l'axe des X du SCU dans le sens de parcours de la polygonale.

*LIGNE* ↵ du point *NODal* de... (point 52) au point @474.89<385.0239 ↵ (385.0239 = 85.0239 -100 + 400)

*SCU* ↵ *OB*jet ↵ *Dernier* ↵ *LIGNE* ↵ du point *EXTrémité* de.. (côté précédent) au point @479.57<135.2414 ↵

Utilisez la macrocommande vue précédemment pour automatiser les entrées des côtés.

(*macro*) au point @392.24<120.6389 ↵

(*macro*) au point @516.87<115.4927 ↵

(*macro*) au point @506.43<250.3862 ↵

**Dessin du deuxième cheminement (issu du point 62)**

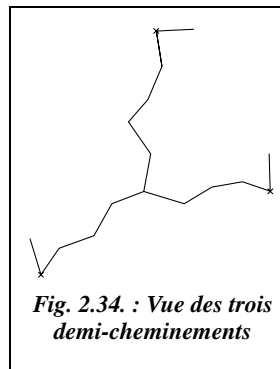
*SCU* ↵ option *OB*jet ↵ cliquer sur la droite partant de 62..

*LIGNE* ↵ du point *NODal* de .. (point 58) au point @391.09<205.4383 ↵

(*macro*) au point @412.73<67.1418 ↵

(*macro*) au point @430.42<77.0585 ↵

(*macro*) au point @560.34<153.5204 ↵



### Dessin du troisième cheminement (issu du point 59)

SCU ↵ option *Objet* ↵ cliquer sur la droite partant du point 59...

LIGNE ↵ du point *NODal* de... (point 59) au point @455.84<343.8141 ↵

(*macro*) au point @487.35<139.7942 ↵

(*macro*) au point @490.4<54.7581 ↵

(*macro*) au point @424.6<143.4975 ↵

Rappel : (*macro*) remplace (SCU ↵ *Ob* ↵ *D* ↵ *L* ↵ *EXT* ↵ @0,0 ↵).

Vous devez obtenir une représentation semblable à la figure 2.34.

#### ◆ Calcul des dimensions des ellipses de tolérance : voir § 1.4.2.1.

- La tolérance de fermeture en longueur est  $T_L = 2,7\sqrt{n\sigma_L^2 + \sigma_X^2}$ .

L'écart type sur la position d'un point est  $\sigma_X = \pm 20 / 2,7$  cm en canevas ordinaire.

L'écart type sur la mesure d'un côté est  $\sigma_L \approx \pm 0,4$  cm pour des côtés d'environ 500 m mesurés avec un distancemètre d'écart type  $\pm (3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm})$ .

- La tolérance de fermeture en direction est  $T_D = 2,7\sigma_a \sqrt{\sum_1^n Li^2}$

L'écart type sur une lecture d'angle est  $\sigma_a \approx \pm 5$  dmgon (avec un théodolite T2).

Chem.	n	$T_L$ (cm)	$\sum Li^2$ (km <sup>2</sup> )	$T_D$ (cm)
1	5	20,1	10,03	6,7
2	4	20,1	5,71	5,1
3	4	20,1	5,95	5,2

Le tableau ci-contre donne le détail des calculs des tolérances de fermeture.

#### ◆ Dessin des ellipses de tolérance : Zoom sur la zone du point nodal.

**Première ellipse** : SCU ↵ option *Objet* ↵, cliquez sur le dernier côté du premier cheminement. *ELLIPSE* ↵ de *Centre* ↵ l'*EXTrémité* du dernier côté du cheminement, extrémité de l'axe @0.220,0 ↵ demi-longueur du deuxième axe : 0.067 ↵

**Dessinez** de même les deux autres ellipses :

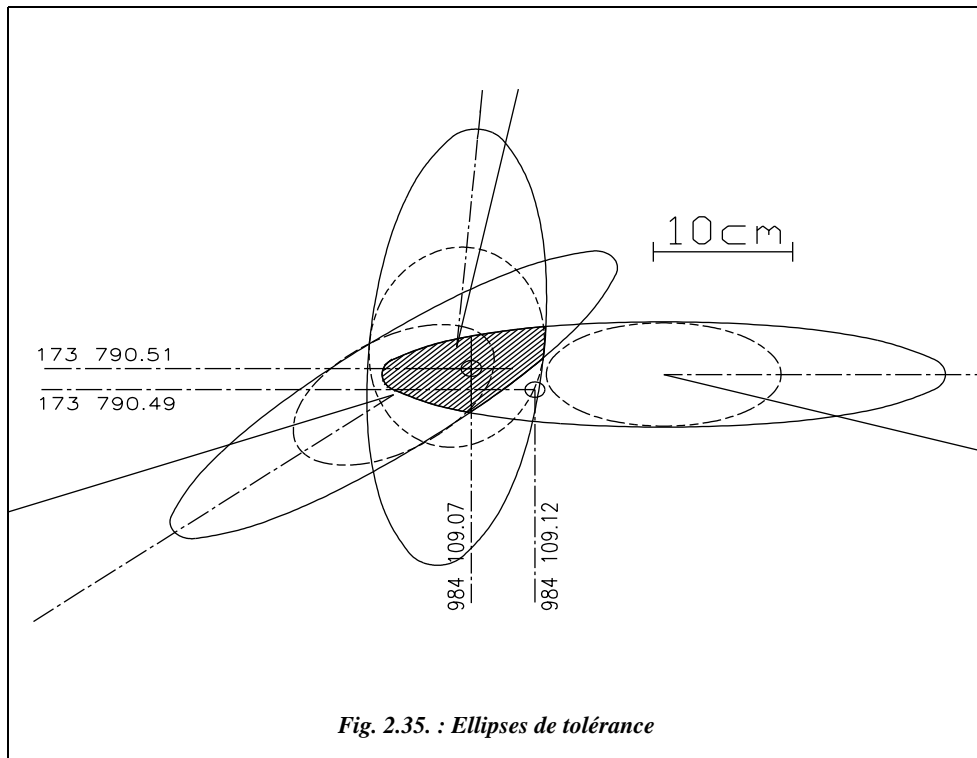
SCU ↵ *E* ↵ cliquer sur le dernier côté.

*ELLIPSE* ↵ *C* ↵ *EXT* ↵ @0.216,0 ↵ 0.051 ↵

SCU ↵ *E* ↵ cliquer sur le dernier côté.

*ELLIPSE* ↵ *C* ↵ *EXT* ↵ @0.216,0 ↵ 0.052 ↵

Les trois ellipses ont une zone commune (fig. 2.35.)



*Fig. 2.35. : Ellipses de tolérance*

Les ellipses en trait continu correspondent aux tolérances du canevas ordinaire ( $T_x = 20$  cm).

Les ellipses en trait discontinu correspondent aux tolérances du canevas de précision (tolérance  $T_x = 4$  cm) : on constate qu'elles n'ont pas de zone commune, donc qu'elles sont hors tolérance pour le canevas de précision.

### Placement du point nodal

*POINT* ↴ puis cliquez avec la souris dans la zone commune à l'endroit qui vous semble le plus central. Les coordonnées du point nodal sont : (984 109,07 , 173 790,51) qu'il faut comparer avec le résultat de la détermination numérique (984 109,12 ; 173 790,49), soit environ 5 cm d'écart en planimétrie.

D'après l'allure des ellipses construites pour le canevas ordinaire, on constate que les précisions ne sont pas du tout homogènes en longueur ni en direction : cela vient de l'imprécision sur la connaissance des points d'appui du canevas ordinaire (20 cm). Les ellipses du canevas de précision sont plus homogènes.

# 3

## DIVISION DE SURFACES

Les opérations de bornage de terrain entraînant des modificatifs du parcellaire cadastral, les projets d'aménagements fonciers, de lotissements, les opérations de délimitation, de mitoyenneté et cadastrales demandent au géomètre de calculer des surfaces, de les diviser ou d'en redresser les limites.

### 1 SURFACES DE POLYONES QUELCONQUES

#### 1.1 Mesures sur le terrain

Les formules de calcul de la surface d'un triangle sont détaillées dans le chapitre 5, paragraphe 3. Le cas du quadrilatère inscriptible est étudié au chapitre 5, paragraphe 4.

Plusieurs autres exemples sont traités au chapitre 5, paragraphe 5. : surfaces calculées à partir des coordonnées cartésiennes ou polaires, par la formule de Sarron, etc. et au chapitre 3 du tome 1, paragraphe 4.4. : exemple de mesure de surface horizontale.

Pour un polygone quelconque de  $n$  côtés ( $n = 4$  sur la figure 3.1.), la surface peut se calculer par une décomposition en triangles.

La décomposition sera fonction des données dont on dispose, par exemple (fig. 3.1.) :

- Si l'on connaît les côtés  $a, b, c, d$  et  $e$  :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-e)(p-d)} + \sqrt{p'(p'-b)(p'-c)(p'-e)}$$

avec  $p = (a + d + e)/2$  et  $p' = (b + c + e)/2$

- Si l'on mesure la diagonale  $a$  et les hauteurs  $h$  et  $h'$  :  $S = a(h + h')/2$ .

- Si l'on mesure les longueurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et les hauteurs  $h$  et  $h'$  :

$$S = (a \cdot h/2) + (h + h') \cdot b/2 + (c \cdot h'/2) = [(a + b)h + (b + c)h']/2$$

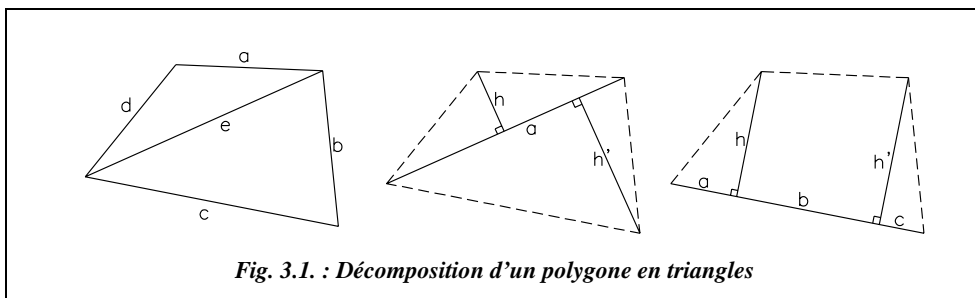


Fig. 3.1. : Décomposition d'un polygone en triangles

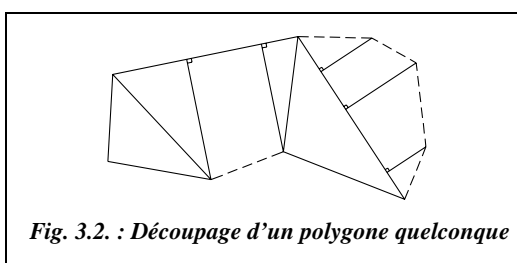


Fig. 3.2. : Découpage d'un polygone quelconque

À partir de ces considérations, tout polygone peut être décomposé en figures élémentaires, comme sur la figure 3.2. par exemple. Il revient à l'opérateur de choisir le meilleur découpage en fonction des cotes les plus accessibles sur le terrain, (en traits continus sur la figure 3.2.).

## 1.2 Mesures sur plan

### 1.2.1 Mesures sur support papier

Pour des estimations, des avant-projets, des documents cadastraux, etc., la mesure d'une surface sur un plan existant peut être suffisante. Il faut garder à l'esprit qu'en raison du jeu dimensionnel du papier et des imprécisions de retranscription sur calque, la valeur obtenue n'est qu'indicative.

Un appareil tel que le planimètre polaire permet de mesurer une surface directement sur un plan en parcourant son contour. La précision obtenue peut être de 1/3 000, soit 3 m<sup>2</sup> pour une surface de 10 000 m<sup>2</sup>.

Une autre solution est de digitaliser le plan et d'utiliser les fonctions de calcul comme la commande *AIRE* d'AutoCAD. Un exemple complet de digitalisation a été traité au chapitre 10 du tome 1, paragraphe 1.6.

### 1.2.2 Mesures sur support informatique

L'avantage du support informatique est de conserver intactes les données d'un plan ; ainsi, la précision de la surface obtenue n'est tributaire que de la précision du lever de détails. Sur AutoCAD, la commande *AIRE* permet d'obtenir rapidement une surface délimitée par des arcs de cercle et des droites (voir l'exemple ci-après) :



La zone hachurée (fig.3.3.) représente une surface à exproprier du fait du passage d'une route d'une emprise de 30 m. La route est constituée de deux alignements raccordés par un arc de cercle de rayon 150 m ; le point S est connu. Les coordonnées des points sont les suivantes :

Pts	E (m)	N (m)
<b>A</b>	1756,042	3056,046
<b>B</b>	1918,345	3056,046
<b>C</b>	1918,345	2957,903
<b>D</b>	1788,018	2923,480
<b>E</b>	1756,042	2944,488
<b>S</b>	1859,692	2984,002

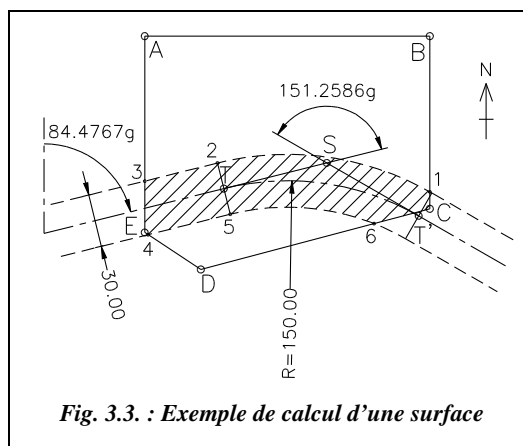


Fig. 3.3. : Exemple de calcul d'une surface

#### ◆ Calcul graphique de la surface à exproprier



L'environnement de travail est défini dans le menu FORMAT / CONTROLE DES UNITES) : angles en grades, zéro au nord, sens horaire, quatre chiffres après la virgule, longueurs à trois décimales.

**Dessin de la parcelle ABCDE :** LIGNE↵ du point 1756.042,30560.046↵ au point 1918.345,3056.046↵ au point 1918.345,2957.903↵ au point 1788.018,2923.48↵ au point 1756.042,2944.488↵ au point Clore↵

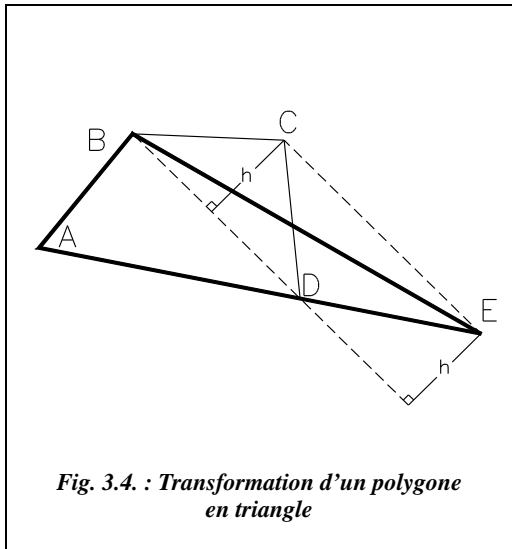
**Dessin de l'emprise de la route :** LIGNE↵ du point 1859.692,2984,002↵ au point @150<284.4767↵ LIGNE↵ du point S (EXTrémité de ...) au point @150<133.2181↵ CERCLE↵ option TTR↵, 1<sup>re</sup> zone de tangence : cliquez vers le point T, 2<sup>e</sup> zone de tangence : cliquez vers le point T', rayon : 150↵. Construction de la largeur de la route par décalage de 15 m de part et d'autre : commande DECALER↵ par 15↵

**Mesure de la surface hachurée :** POLYLIGNE↵ du point 1 (INTersection de ...) au point, mode Arc↵ Rayon↵ 165↵, point final : point 2 (EXTrémité de ...) au point, mode LIgne↵, point 3 (INTersection de ...) au point (passer ici en zoom transparent 'Z↵ autour du point E), point E (EXTrémité de ...) au point 4 (INTersection de ...) au point (revenir au zoom précédent par 'Z↵ P↵), point 5 (EXTrémité de...) au point, mode Arc↵, Second point↵ : donner un point sur l'arc 5-6 avec l'accrochage PROche de ..., point final : point 6 (INTersection de ...) au point, mode LIgne↵, point C (EXTrémité de ...) au point Clore↵

AIRE↵, option Objet↵, Dernier↵ : le logiciel affiche la surface :  $S = 4\,674,6853 \text{ m}^2$  et le périmètre :  $P = 373,18 \text{ m}$ .

### 1.3 Détermination graphique

L'objectif est de transformer graphiquement un polygone quelconque en un triangle de même superficie.

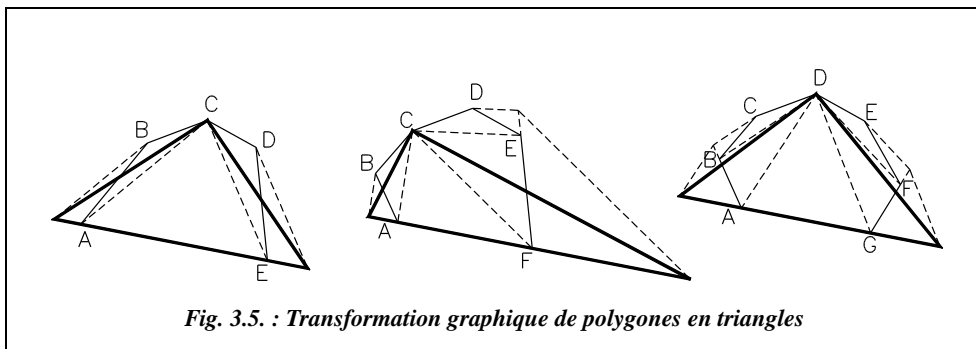


Cela permet par exemple d'obtenir une valeur approchée d'une surface délimitée par un polygone quelconque donnée sur un support papier, par la simple construction et la mesure de la base et de la hauteur du triangle. C'est également très utile pour le redressement de limites, traité au paragraphe 3.

Par exemple, le polygone ABCD donné sur la figure 3.4. est de même surface que le triangle ABE construit ainsi : on mène une parallèle à BD passant par C ; cela donne le point E ; le triangle BDE est de même surface que le triangle BCD car ils ont la même base BD et la même hauteur puisque CE est parallèle à BD.

La surface du polygone est donc :  $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDE} = S_{ABE}$ .

On peut remarquer, sur la figure 3.5., des constructions équivalentes pour des polygones à cinq, six ou sept côtés.



## 2 DIVISION DE SURFACES

Tous les cas de figure ne pouvant être envisagés, nous n'étudierons que certains d'entre eux, les plus fréquents.

## 2.1 Limites divisaires passant par un sommet du polygone

### 2.1.1 Cas du triangle

L'objectif est de diviser en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  le triangle ABC de surface totale  $S$  (fig. 3.6-a.) par une ligne passant par B ; on peut calculer la hauteur  $h$  commune aux deux triangles à partir de la connaissance des points A, B et C :

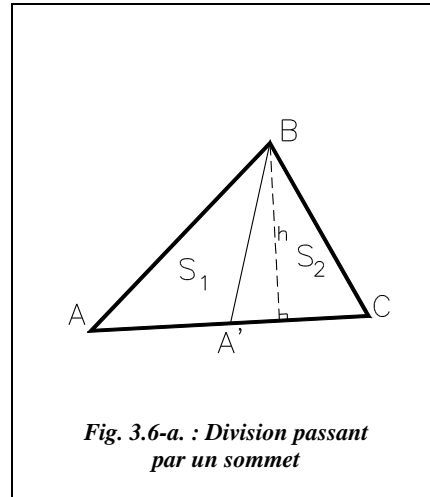
$$h = 2 \cdot \frac{S_1 + S_2}{AC}$$

On positionne ensuite le point A' ainsi :

$$AA' = 2S_1 / h$$

Une autre solution est de remarquer que les surfaces des triangles sont proportionnelles à leur base ; on arrive directement à la même expression :

$$AA' = AC \frac{S_1}{S_1 + S_2}$$



#### Application

Considérons les points A(341,65 ; 54,77), B(687,96 ; 199,03) et C(658,28 ; 80,86). Divisez le triangle ABC en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2 = S_1 / 3$ , la ligne de partage passant par B et la surface la plus grande touchant le point A.

#### ◆ Construction graphique



#### Construction du triangle

POLYLIGNE ↵ du point 658.28,80.86 ↵ au point 687.96,199.03 ↵ au point 341.65,54.77 ↵ au point Clore ↵

#### Mesure de sa surface et calcul de $S_1$ et $S_2$ :

AIRE ↵ option Objet ↵, cliquez sur le contour du triangle...

Résultat :  $S_{totale} = 18\,320,907950 \text{ m}^2$ .

Donc  $S_1 = 13\,740,680963 \text{ m}^2$  et  $S_2 = 4\,580,226988 \text{ m}^2$ .

**Construction graphique de A' :** on place sur une droite quelconque deux segments proportionnels à  $S_1$  et  $S_2$  : le segment Aa' est proportionnel à  $S_1$  et le segment a'c est proportionnel à  $S_2$ , ce qui revient à dire que Ac est proportionnel à  $S_{totale}$  (fig. 3.6-b.).

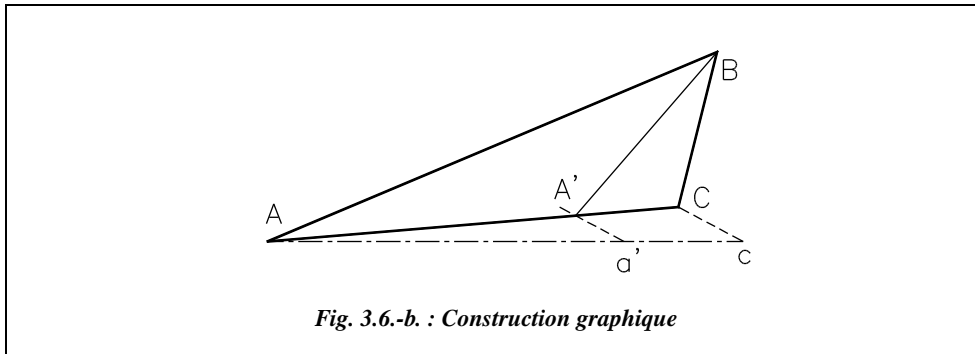


Fig. 3.6.-b : Construction graphique

LIGNE↵ du point A (EXTrémité de...) au point @270<100↵ au point @90<100↵.

LIGNE↵ du point C (EXTrémité de...) au point c (EXTrémité de...).

COPIER↵ le segment Cc du point c (EXTrémité de ...) au point a' (EXTrémité de ...).

LIGNE↵ du point B (EXTrémité de ...) au point A' (INTERsection de ...).

Contrôlez avec la commande AIRE↵ que les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont correctes et mesurez la cote  $AA'$  avec la commande DISTANCE↵. Résultat :  $AA' = 238,277$  m.

## 2.1.2 Polygone quelconque

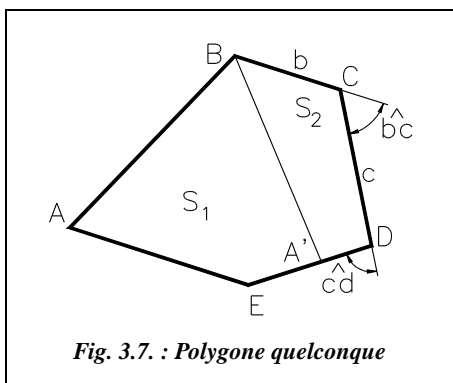


Fig. 3.7. : Polygone quelconque

On cherche à diviser en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  le polygone ABCDE de surface totale  $S$  (fig. 3.7.). La limite passe par B.

On revient au cas du triangle (§ 2.1.1.) en calculant les surfaces des triangles BCD, BDE et BAE. Ces calculs permettent de positionner le point divisoire  $A'$  : par exemple, si  $S_{BCD} < S_2$  et  $S_{BCD} + S_{BDE} > S_2$  alors  $A'$  est sur DE.

On divise ensuite le triangle BED en deux surfaces  $S_1' = S_1 - S_{ABE}$  et  $S_2' = S_2 - S_{BCD}$ .

On peut aussi utiliser la formule de Sarron (voir chap. 5, § 5.3.). Il faut alors mesurer ou calculer à partir des coordonnées les angles dirigés  $\widehat{bc}$  et  $\widehat{cd}$ , ainsi que les côtés  $b$  et  $c$ . On en déduit  $DA'$  en résolvant l'équation suivante :

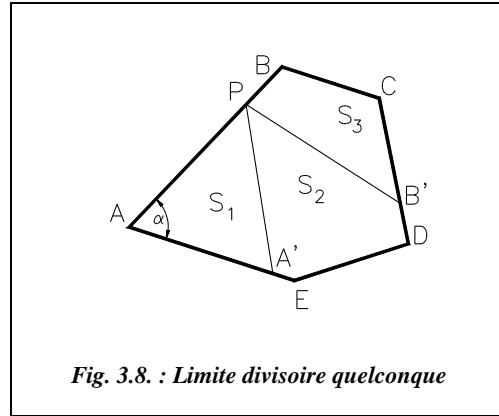
$$2S_2 = bc \cdot \sin \widehat{bc} + b \cdot DA' \cdot \sin(\widehat{bc} + \widehat{cd}) + c \cdot DA' \cdot \sin \widehat{cd}$$

## 2.2 Limites divisoires passant par un point quelconque

On cherche à diviser en trois surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  le polygone ABCDE de surface  $S$  (fig. 3.8.) ; la limite devant passer par un point P situé sur AB.

La longueur AP étant donnée, on peut calculer AA' en fonction de  $S_1$ , de l'angle  $\alpha$  (à calculer ou mesurer) et de la longueur AP.

On est ensuite ramené à la division du polygone PBCDEA' en deux surfaces  $S_2$  et  $S_3$  par une limite passant par un sommet (§ 2.1.2.).



Si  $S_1$  est telle que A' se trouve sur DE, on calcule la surface du triangle PAE puis on positionne A' sur DE à partir de la connaissance de PE, de l'angle PED et de la surface  $S_1' = S_1 - S_{APE}$ .

## 2.3 Limites partageant un triangle en trois surfaces

### 2.3.1 Les limites passent par chacun des sommets

On cherche à déterminer la position du point I tel que les limites IA, IB et IC partagent le triangle ABC en trois surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  (fig. 3.9.).

La construction peut être purement graphique : on détermine les coefficients de proportionnalité  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  tels que :

$$k_1 = S_1 / (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$k_2 = S_2 / (S_1 + S_2 + S_3)$$

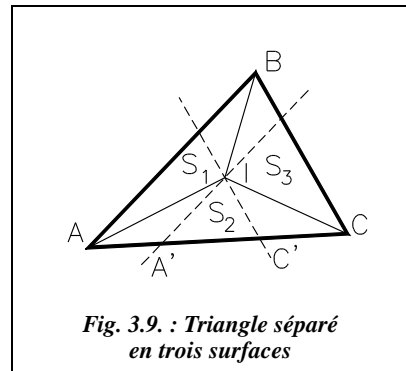
$$k_3 = S_3 / (S_1 + S_2 + S_3)$$

On en déduit les points A' et C' :

$$AA' = k_1 \cdot AC \text{ et } CC' = k_3 \cdot AC$$

Les droites parallèles à AB et BC passant par A' et C' se coupent en I puisque les surfaces  $S_{BAA'}$  et  $S_{BCC'}$  sont respectivement égales aux surfaces  $S_{AIB}$  et  $S_{BIC}$ .

Analytiquement, en s'inspirant de la construction précédente, on calcule la position des points A' et C' puis on détermine l'intersection des droites A'I et C'I, dont on connaît le gisement, à partir des coordonnées de A, B et C.



### Exercice

Soit le triangle défini par les points suivants : A (601,190 ; 711,961), B (723,757 ; 840,549), C (791,169 ; 722,166). Trouvez le point I divisant ce triangle en trois surfaces  $S_1 = 3\,270\text{ m}^2$ ,  $S_2 = 4\,388\text{ m}^2$  et  $S_3 = S - S_1 - S_2$ . Le triangle étudié est celui de la figure 3.9. ; sa surface totale est  $S = 11\,589,111709\text{ m}^2$ .

### Réponse

On obtient  $k_1 = 0,2821614$  et  $k_3 = 0,3392073$ . Donc  $AA' = 0,2821614 \times 190,252 = 53,682\text{ m}$  et  $CC' = 0,3392073 \times 190,252 = 64,535\text{ m}$ . On déduit les coordonnées des points  $A' (654,795 ; 714,840)$  et  $C' (726,727 ; 718,704)$ , connaissant le gisement  $G_{AC} = 96,5836\text{ gon}$ . On trouve les coordonnées de I par intersection des droites  $AI'$  et  $CI'$  (par les formules de Delambre) dont on connaît les coordonnées d'un point et le gisement : celles de A et de C et les gisements  $G_{AI'} = G_{AB} = 48,4741\text{ gon}$  et  $G_{CI'} = G_{CB} = 367,0457\text{ gon}$ . Les coordonnées du point I sont (701,202 ; 763,528).

#### ◆ Construction graphique



L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.2.2.

**Construction du triangle :** LIGNE↵ du point 601.190,711.961↵ au point 723.757,840.549↵ au point 791.169,722.166↵ au point Clore↵ (voir fig. 3.9.).

**Positionnement graphique de A' et C' :** la construction suivante permet d'éviter le calcul des coefficients  $k_i$  en utilisant des cercles de rayons proportionnels aux surfaces  $S_1$ ,  $S_1 + S_2$  et  $S_1 + S_2 + S_3$ .

CERCLE↵ de centre A (EXTrémité de...) de rayon 32.70↵

CERCLE↵ de centre A de rayon 76.58↵

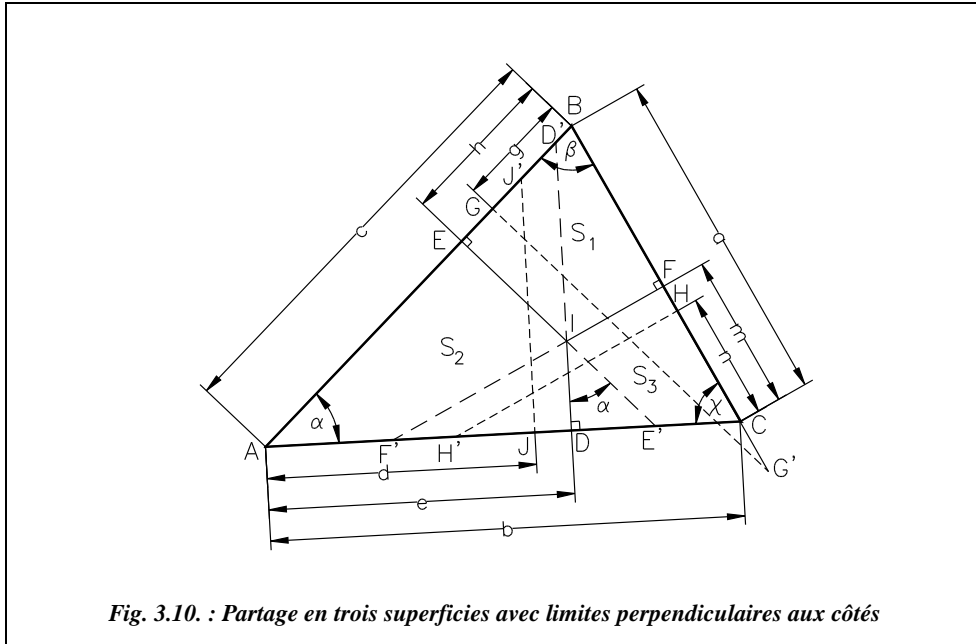
CERCLE↵ de centre A de rayon 115.89111709↵

ECHELLE↵, choix des objets : les trois cercles précédents, point de base : A, option Référence↵, longueur de référence de A au point d'intersection du dernier cercle tracé et de la ligne AC, nouvelle longueur : donnez le point C (EXTrémité de ...). Les points A' et C' sont situés à l'intersection des premier et deuxième cercles tracés avec la droite AC.

**Positionnement des droites A'I et C'I :** SCU↵ option Objet↵, cliquez sur la ligne AC vers le point A. COPIER↵ la droite AB du point A (EXTrémité de...) au point @53.686,0↵. COPIER↵ la droite BC du point B (EXTrémité de...) au point @125.705,0↵. Le point I est à l'intersection des droites ; lire ses coordonnées par ID↵. Lire les surfaces IAB, IAC et IBC par la commande AIRE↵ : donnez les trois sommets de chaque surface, l'une après l'autre, puis validez.

## 2.3.2 Les limites sont perpendiculaires aux côtés

On cherche à diviser le triangle ABC d'une surface totale  $S$  en trois surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$ , les limites divisoires étant perpendiculaires aux côtés (fig. 3.10.).



Le procédé de résolution est le suivant : on calcule la position des points G, H et J proches des points définitifs cherchés E, F et D que l'on déterminera par approximations successives.

Soit la droite JJ' parallèle à DD' et positionnée telle que  $S_{AJJ'} = S_{AEID} = S_2$ .

On peut écrire dans le triangle AJJ' :  $S_{AJJ'} = \frac{1}{2} AJ \cdot \frac{AJ}{\cos \alpha} \sin \alpha = S_2$ .

Donc  $AJ = d = \sqrt{\frac{2S_2}{\tan \alpha}}$ , de même  $BG = g = \sqrt{\frac{2S_1}{\tan \beta}}$  et  $CH = n = \sqrt{\frac{2S_3}{\tan \gamma}}$ .

Dans le triangle ADD', on a :

$$2 \cdot S_{AEID} = 2 \cdot (S_{ADD'} - S_{ID'E'}) = e^2 \cdot \tan \alpha - IE^2 \cdot \tan \alpha = d^2 \cdot \tan \alpha \text{ donc } IE = \sqrt{e^2 - d^2}.$$

$$\text{De même } ID = \sqrt{m^2 - n^2} \text{ et } IF = \sqrt{h^2 - g^2}.$$

On peut aussi écrire que :

$$2 \cdot S_{AEID} = 2 \cdot (S_{AEE'} - S_{ID'E'}) = (c - h)^2 \cdot \tan \alpha - ID^2 \cdot \tan \alpha = d^2 \cdot \tan \alpha.$$

$$\text{Donc } ID = \sqrt{(c - h)^2 - d^2}, \text{ de même } IE = \sqrt{(a - m)^2 - g^2} \text{ et } IF = \sqrt{(b - e)^2 - n^2}.$$

Finalement, on obtient le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \text{ID} &= \sqrt{(c-h)^2 - d^2} = \sqrt{m^2 - n^2} \quad \text{avec } n = \sqrt{\frac{2S_3}{\tan \chi}} \\ \text{IE} &= \sqrt{(a-m)^2 - g^2} = \sqrt{e^2 - d^2} \quad \text{avec } d = \sqrt{\frac{2S_2}{\tan \alpha}} \\ \text{IF} &= \sqrt{(b-e)^2 - n^2} = \sqrt{h^2 - g^2} \quad \text{avec } g = \sqrt{\frac{2S_1}{\tan \beta}} \end{aligned}$$

La résolution est donc effectuée par approximations successives : on se fixe une valeur  $h_0$  pour  $h$  ; on en déduit  $m$  dans la formule donnant ID. On en déduit ensuite  $e$  dans la formule donnant IE puis on retrouve une nouvelle valeur  $h_1$  de  $h$  dans la formule donnant IF. On recommence le calcul avec une nouvelle valeur de  $h$  qui est la moyenne entre  $h_0$  et  $h_1$  jusqu'à ce que la valeur obtenue en fin de calcul soit identique à celle prise en début de calcul.

#### Application

Soit le triangle défini par les points A (627,170 ; 2230,490), B (749,737 ; 2359,078) et C (817,148 ; 2240,695). La surface du triangle est  $S = 11\,589,047415 \text{ m}^2$ .

La surface  $S_1$  doit être de  $3\,500 \text{ m}^2$ ,  $S_2$  de  $5\,500 \text{ m}^2$  et  $S_3$  de  $2\,589,047415 \text{ m}^2$ .

#### Réponses

On calcule  $a = 136,2306 \text{ m}$ ,  $b = 190,2519 \text{ m}$  et  $c = 177,6444 \text{ m}$ .

On calcule  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\chi$  par différences de gisements :  $\alpha = 48,1095 \text{ gon}$ ,  $\beta = 81,4280 \text{ gon}$  et  $\chi = 70,4625 \text{ gon}$ . On en déduit que  $n = 50,9034 \text{ m}$ ,  $d = 108,0440 \text{ m}$  et  $g = 45,8484 \text{ m}$ .

On fixe une valeur  $h_0$  de départ pour  $h$ , on en déduit  $m$  puis  $e$  puis  $h_1$ . on recommence le calcul avec  $h_2$  qui est la demi-somme de  $h_0$  et  $h_1$  :

$h_0 = 60 \text{ m}$	$\rightarrow$	$m = 68,9772 \text{ m}$	$\rightarrow$	$e = 118,7201 \text{ m}$	$\rightarrow$	$h_1 = 68,0273 \text{ m}$
$h_2 = (h_0 + h_1)/2 = 64,01 \text{ m}$		$m = 61,8905 \text{ m}$		$e = 122,8735 \text{ m}$		$h_3 = 63,6456 \text{ m}$
$h_4 = (h_2 + h_3)/2 = 63,828 \text{ m}$		$m = 62,2240 \text{ m}$		$e = 122,6720 \text{ m}$		$h_5 = 63,8589 \text{ m}$
$h_6 = (h_4 + h_5)/2 = 63,844 \text{ m}$		$m = 62,1947 \text{ m}$		$e = 122,6896 \text{ m}$		$h_7 = 63,8402 \text{ m}$

En utilisant un tableur, on arrive à  $h = 63,842244 \text{ m}$ .

On peut donc considérer que  $h \approx 63,842 \text{ m}$ . On en déduit  $m = 62,198 \text{ m}$  et  $e = 122,688 \text{ m}$ . Donc ID =  $35,741 \text{ m}$ , IE =  $58,127 \text{ m}$  et IF =  $44,427 \text{ m}$ .



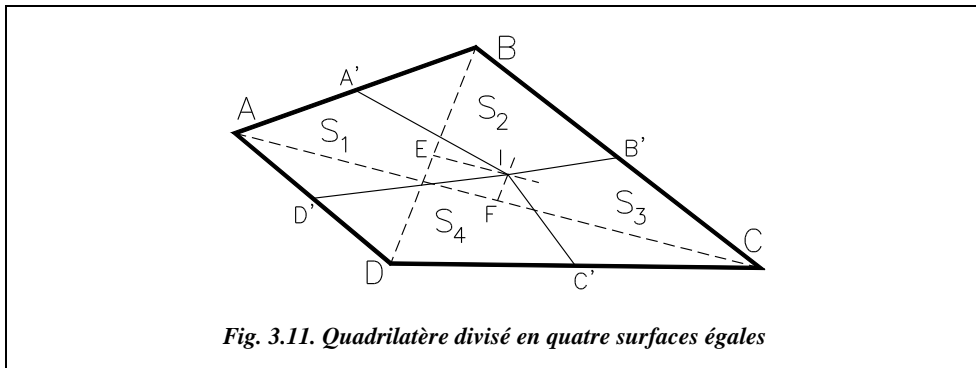
D'où les coordonnées de I à partir de D, E ou F : I (747,764 m ; 2272,761 m), la figure 3.10. donne la position finale du point I.

**Vérification** : le calcul des surfaces donne  $S_1 = 3\,499,97 \text{ m}^2$ ,  $S_2 = 5\,500,02 \text{ m}^2$  et  $S_3 = 2\,589,06 \text{ m}^2$ .

**Autre calcul** : partage de  $S_{ABC}$  en trois parties égales ; vérifiez que l'on trouve I (725,682 m ; 2 270,578 m).

## 2.4 Division d'un quadrilatère en quatre surfaces égales

On cherche à partager le quadrilatère ABCD (fig. 3.11.) en quatre parties égales, les limites divisaires coupant chaque côté en son milieu.



**La construction graphique** consiste à tracer  $A'$  milieu de  $AB$ ,  $B'$  milieu de  $BC$ ,  $C'$  milieu de  $CD$  et  $D'$  milieu de  $DA$  ; puis à tracer la parallèle à  $BD$  passant par  $F$ , milieu de  $AC$  et la parallèle à  $AC$  passant par  $E$ , milieu de  $BD$ .

Les droites issues du point d'intersection  $I$  de ces deux parallèles reliant les points  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  partagent la surface en quatre parties égales.

**La justification** de cette construction est la suivante : la surface du triangle  $AEB$  est égale à la moitié de celle de  $ABD$  puisque  $E$  est milieu de  $BD$  :  $S_{AEB} = S_{ABD} / 2$ .

De même,  $S_{A'EB} = S_{AEB} / 2 = S_{ABD} / 4$ . On peut aussi montrer que  $S_{BEB'} = S_{BEC} / 2 = S_{BDC} / 4$ .

Donc  $S_{A'EB} + S_{BEB'} = S_{A'BB'E} = (S_{ABD} + S_{BDC}) / 4 = S / 4$  ( $S$  étant la surface totale délimitée par le quadrilatère).

La surface  $S_{A'BB'E}$  peut se transformer en  $S_{A'BB} + S_{A'B'E}$  et  $S_{A'B'E} = S_{A'B'I}$  (ces deux triangles ayant la même base et la même hauteur). Donc, finalement,  $S_{A'BB'I} = S / 4$ .

On peut mener le même raisonnement pour les surfaces  $S_{AA'ID'}$ ,  $S_{D'IC'D}$  et  $S_{IB'CC'}$ .

**Analytiquement**, en s'inspirant de la résolution graphique précédente, on calcule les coordonnées de E et F puis les gisements des droites BD et AC. On en déduit les coordonnées de I par intersection (formules de Delambre).

### Exemple

Découpez le quadrilatère ABCD en quatre parties égales. Les coordonnées des sommets sont : A (249,590 ; 320,833), B (402,682 ; 375,463), C (583,491 ; 235,104), D (348,567 ; 237,984). Ce quadrilatère est celui de la figure 3.11.

#### ◆ Résolution graphique



**Dessin du quadrilatère** : *LIGNE* du point 249.590,320.833 au point 402.682,375.463 au point 583.491,235.104 au point 348.567,237.984 au point Clore

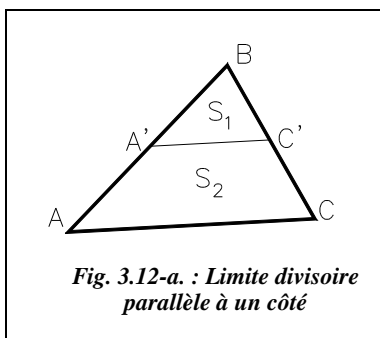
**Construction du point I** : *LIGNE* du point A au point C (*EXTrémité de...*) puis *LIGNE* du point B au point D. *COPIER* la ligne AC du point A au point *MILieu* de BD. *COPIER* la ligne BD du point B au point *MILieu* de AC. Lire les coordonnées de I par *ID* *INTersection de...*

**Résultat** : I (423.065 , 294.543).

Pour contrôler les surfaces, passez en mode d'accrochage permanent intersection (menu *OPTIONS / ACCROCHAGE AUX OBJETS* ou touche F3 ) et utilisez la commande *AIRE*. Résultat :  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 6317,95 \text{ m}^2$ .

## 2.5 Limites divisoires parallèles à un côté

### 2.5.1 Cas du triangle



On cherche à diviser le triangle ABC (fig. 3.12-a.) en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , la ligne de division étant parallèle au côté AC.

Les triangles  $BA'C'$  et  $BAC$  étant semblables, on peut écrire que :

$$k_1 = \frac{S_1}{S_{ABC}} = \frac{BC'^2}{BC^2} = \frac{BA'^2}{BA^2} = \frac{A'C'^2}{AC^2}$$

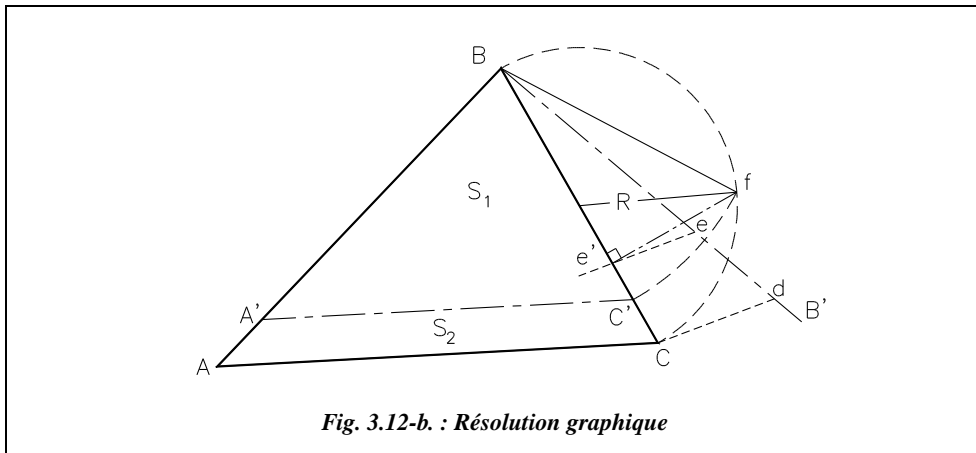
On en déduit la position de  $A'$  et de  $C'$  :

$$BA' = BA\sqrt{k_1} \text{ et } BC' = BC\sqrt{k_1}$$

◆ **construction graphique**

On note  $S$  la surface totale  $S = S_1 + S_2$ . Sur une droite quelconque  $BB'$ , on reporte deux longueurs proportionnelles à  $S_1$  et  $S$  :  $Bd = k \cdot S$  et  $Be = k \cdot S_1$  (fig. 3.12-b).

La parallèle à  $Cd$  passant par le point  $e$  coupe  $BC$  en  $e'$ . On élève la perpendiculaire à  $BC$  passant par  $e'$ , elle coupe en  $f$  le cercle de diamètre  $BC$ . La distance  $Bf$  est rabattue sur  $BC$  pour donner le point  $C'$  de passage de la limite cherchée,  $A'C'$  étant parallèle à  $AC$ .



La construction précédente se justifie comme suit :

$BC' = Bf$  puisque  $C'$  et  $f$  sont sur le même cercle de centre  $B$  ; dans le triangle rectangle  $Be'f$  on peut écrire :  $Bf^2 = BC'^2 = Be'^2 + e'f^2$ .

Le théorème de Thalès permet d'écrire que  $\frac{Be}{Bd} = \frac{Be'}{BC} = \frac{S_1}{S}$  d'où  $Be' = BC \cdot \frac{S_1}{S}$ .

On note  $R = BC/2$ .

$$e'f^2 = R^2 - (Be' - R)^2 = -Be'^2 + BC^2 \cdot \frac{S_1}{S} \quad \text{d'où} \quad BC'^2 = BC^2 \cdot \frac{S_1}{S}.$$

Le point  $C'$  est donc bien un point de la droite de partage cherchée.

◆ **Application**



Considérons le triangle donné à l'exercice du paragraphe 2.3.2. On demande de le partager de telle manière que  $S_1 = 8\,244 \text{ m}^2$ , la limite étant parallèle au côté  $AC$ .

**L'environnement de travail** est identique à celui du paragraphe 1.2.2.

**Dessin du triangle** : voir le paragraphe 2.3.2.

**Droite BB'**: un coefficient de 1/75 donne une construction proche de la figure 3.12-b.  
**LIGNE** du point B (EXTrémité de ...) au point @109.92<145 au point @44.60063213<150 au point C (EXTrémité de ...).

**Construction de C'** : **COPIER** le segment dC du point d vers le point e (EXT de ...).  
**CERCLE** de centre MILieu de BC et de rayon point C (EXTrémité de ...).  
**LIGNE** du point (point quelconque extérieur au cercle) au point PERpendiculaire à BC.  
**DEPLACER** cette dernière ligne de son EXTrémité vers le point e' (INTersection de ...).  
**CERCLE** de centre B et de rayon Bf (donnez le point f par INTersection de ...).

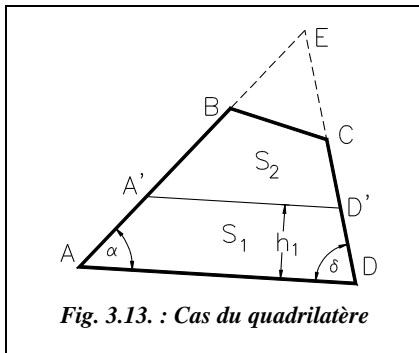
On obtient le point C'. Pour obtenir la droite A'C', **COPIER** la droite AC depuis le point C (EXTrémité de...) vers le point C' (EXTrémité de...). Les cotes CC' et AA' s'obtiennent avec la commande **DISTANCE**.

**Résultats** : AA' = 27,815 m et CC' = 21,331 m. BA' = 149,829 m et BC' = 114,900 m.  
 Contrôlez ensuite la surface S<sub>1</sub>.

## 2.5.2 Cas du quadrilatère

Considérons un quadrilatère ABCD à diviser en deux surfaces S<sub>1</sub> et S<sub>2</sub>, la limite divisoire étant parallèle au côté AD (fig. 3.13.). On peut revenir au cas du triangle (§ 2.5.1.) en prolongeant les côtés AB et CD jusqu'à obtenir le point E et le triangle ADE. On calcule alors la surface S'<sub>2</sub> = S<sub>2</sub> + S<sub>EBC</sub> et on positionne A' et B' avec :

$$AA' = AE \sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S'_2}} \quad \text{et} \quad DD' = DE \sqrt{\frac{S_1}{S_1 + S'_2}}$$



Si l'on ne désire pas calculer le point E, on peut calculer ainsi la longueur du côté A'D' :

$$2.S_{AED} = \frac{AD^2}{\cotan \alpha + \cotan \delta}$$

$$2.S_{A'ED'} = 2.(S_{AED} - S_1) = \frac{A'D'^2}{\cotan \alpha + \cotan \delta}$$

Finalement, on obtient :

On en déduit la hauteur h<sub>1</sub> par :

D'où les cotes d'implantation AA' et DD' :

$$A'D' = \sqrt{AD^2 - 2S_1(\cotan \alpha + \cotan \delta)}$$

$$2.S_1 = h_1.(A'D' + AD)$$

$$AA' = h_1/\sin \alpha \quad DD' = h_1/\sin \delta$$

### 2.5.3 Polygone quelconque

On revient au cas du quadrilatère traité au paragraphe précédent.

Par exemple, pour le polygone de la figure 3.14., on calcule la surface  $S_{BCD}$  que l'on retranche à  $S_2$  pour obtenir  $S'_2 = S_{A'BDE'}$  et l'on revient au cas d'un quadrilatère ABDE à partager en  $S_1$  et  $S'_2$ .

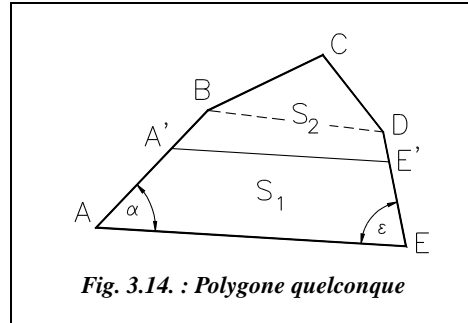


Fig. 3.14. : Polygone quelconque

Si la limite divisoire est telle que l'on ne peut pas définir directement le triangle AED (comme au paragraphe 2.5.2.), on retranche et/ou on ajoute des superficies partielles de manière à revenir au cas du quadrilatère.

Par exemple, pour le polygone ABCDEF de la figure 3.15., on retranche  $S_{BC'C}$  à  $S_2$  et on ajoute  $S_{EE'F}$  à  $S_1$  pour travailler dans le quadrilatère AC'DE'.

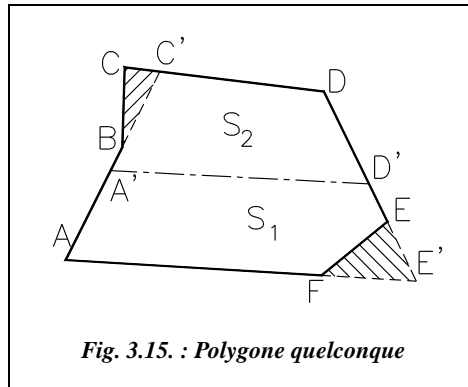


Fig. 3.15. : Polygone quelconque

### 2.5.4 Application

Parfois le partage n'est pas réalisé sur les surfaces mais sur la valeur du terrain (en Francs par mètre carré).

Par exemple, considérons le trapèze ABCD (fig. 3.16.) partagé par la droite ( $\Delta$ ) en deux zones de valeurs différentes :  $ABB'D'$  de valeur  $v_1$  en F/m<sup>2</sup> et  $B'CDD'$  de valeur  $v_2$  en F/m<sup>2</sup>. On cherche à diviser la parcelle ABCD en deux parcelles de valeur  $V$  et  $V'$  en F ( $V$  correspond à une surface inconnue  $S_1$  et  $V'$  à  $S_2$ ) ; la division est parallèle à AD (ou BC).

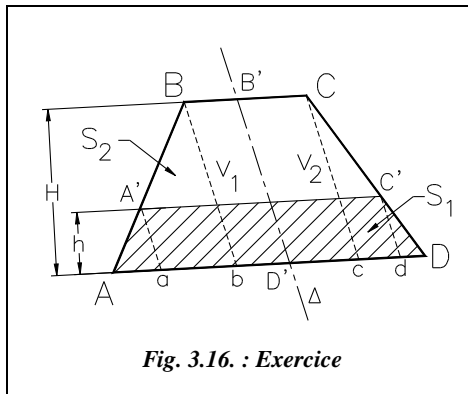


Fig. 3.16. : Exercice

La valeur en Francs d'une bande de terrain d'un mètre de largeur centrée sur le côté AD est la suivante :  $V_{AD} = v_1 \cdot 1 \cdot AD' + v_2 \cdot 1 \cdot D'D = v_1 \cdot AD' + v_2 \cdot D'D$ .

De même pour le côté BC :  $V_{BC} = v_1 \cdot 1 \cdot BB' + v_2 \cdot 1 \cdot B'C = v_1 \cdot BB' + v_2 \cdot B'C$ .

La valeur de la parcelle AA'C'D est  $V = (V_{AD} + V_{A'C'})h/2$  d'où  $h = 2V/(V_{AD} + V_{A'C'})$  (1).

De même, la valeur de la parcelle A'BCC' est :  $V' = (V_{BC} + V_{A'C'}) \cdot (H - h)/2$ .

La valeur totale de la parcelle ABCD de hauteur  $H$  est donc :

$$V_T = (V_{AD} + V_{BC}) \cdot H/2 = V + V'$$

Soit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  les projections de  $A'$ ,  $B$ ,  $C$  et  $C'$  sur la base  $AD$  parallèlement à la direction  $(\Delta)$ . Dans les triangles semblables  $(AA'a$  et  $ABb)$  ou  $(CcD$  et  $C'dD)$ , on peut écrire :

$$\frac{h}{H} = \frac{Aa}{Ab} = \frac{Dd}{Dc} \quad \text{d'où} \quad \frac{h}{H} = \frac{v_1 Aa}{v_1 Ab} = \frac{v_2 Dd}{v_2 Dc} = \frac{v_1 Aa + v_2 Dd}{v_1 Ab + v_2 Dc} = \frac{V_{AD} - V_{A'C'}}{V_{AD} - V_{BC}}$$

$$\text{Donc } h = H \frac{V_{AD} - V_{A'C'}}{V_{AD} - V_{BC}} \quad (2)$$

Des équations (1) et (2), on déduit :

$$V_{A'C'} = \sqrt{V_{AD}^2 - \frac{2V(V_{AD} - V_{BC})}{H}}$$

#### Application

$v_1 = 50 \text{ F/m}^2$  et  $v_2 = 15 \text{ F/m}^2$ .

$AD' = 107,66 \text{ m}$ ,  $D'D = 82,59 \text{ m}$ ,  $BB' = 32,38 \text{ m}$ ,  $B'C = 42,17 \text{ m}$  et  $H = 101,76 \text{ m}$ .

#### Réponse

$V_{AD} = 6\,621,85 \text{ F}$  et  $V_{BC} = 2\,251,55 \text{ F}$ ; la valeur totale de la parcelle est de  $451\,478,59 \text{ F}$ .

On cherche à la partager en une parcelle valant  $350\,000 \text{ F}$  et une parcelle valant le complément, soit  $101\,478,59 \text{ F}$ . Donc  $V_{A'C'} = 3\,712,94 \text{ FF}$  et  $h = 67,73 \text{ m}$ .

Les surfaces après division sont respectivement :

$S_1 = 10\,277,75 \text{ m}^2$  ( $5\,595,00 \text{ m}^2$  à  $50 \text{ F/m}^2$  et  $4\,682,75 \text{ m}^2$  à  $15 \text{ F/m}^2$ ).

$S_2 = 3\,195,28 \text{ m}^2$  ( $1\,530,24 \text{ m}^2$  à  $50 \text{ F/m}^2$  et  $1\,665,04 \text{ m}^2$  à  $15 \text{ F/m}^2$ ).

## 2.6 Limites divisaires parallèles à une direction donnée

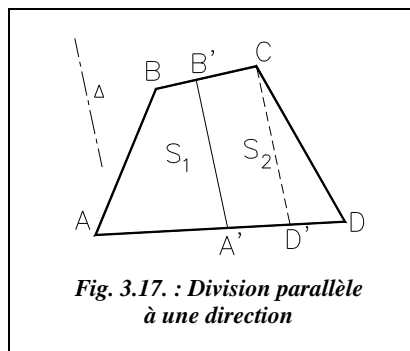
On désire partager le quadrilatère ABCD (fig. 3.17.) en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , la séparation étant parallèle à la direction  $(\Delta)$ . Cela revient à positionner les points  $A'$  et  $B'$ .

En menant une parallèle à  $(\Delta)$  passant par le point C, on peut revenir au cas du paragraphe 2.5. c'est-à-dire une limite parallèle à un côté :

On calcule la surface  $S_{CDD'}$  et on en déduit que  $S'_2 = S_2 - S_{CDD'}$ .

On procède ensuite comme indiqué au paragraphe 2.5.2. pour le quadrilatère  $ABCD'$  à partager en  $S_1$  et  $S'_2$ , la limite étant parallèle au côté  $CD'$ .

Ce raisonnement est valable dans le cas d'un triangle et d'un polygone quelconque.



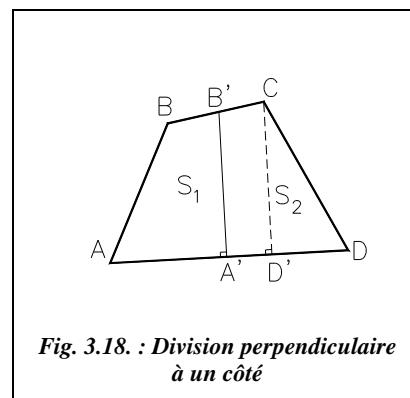
**Fig. 3.17. : Division parallèle à une direction**

## 2.7 Limites divisaires perpendiculaires à un côté

On cherche à séparer le quadrilatère  $ABCD$  (fig. 3.18.) en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , la séparation  $A'B'$  étant perpendiculaire au côté  $AD$ . On cherche donc à positionner les points  $A'$  et  $B'$ .

En menant une perpendiculaire à  $AD$  passant par  $C$ , on revient à nouveau au cas du paragraphe 2.5. (limite parallèle à un côté) : on calcule la surface  $S_{CDD'}$  et on en déduit une surface  $S'_2 = S_2 - S_{CDD'}$ .

On procède ensuite comme indiqué au paragraphe 2.5.2. pour le quadrilatère  $ABCD'$  à partager en  $S_1$  et  $S'_2$ , la limite étant parallèle au côté  $CD'$ .



**Fig. 3.18. : Division perpendiculaire à un côté**

## 2.8 Limites divisaires dans un îlot

Soit l'îlot (fig. 3.19.) limité par les droites  $AE$  et  $AE'$  formant entre elles l'angle  $\alpha$ . On cherche à le diviser en lots successifs de surfaces données  $S, S_0, S_1, S_2$ , etc., les limites étant parallèles entre elles et perpendiculaires aux alignements  $AE$  et  $AE'$ .

- **Premier lot** : le pan coupé  $ABB'$

Sa surface est  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AB' \cdot \sin \alpha$ .

On impose :

$$AB = AB' = \sqrt{\frac{2S}{\sin \alpha}}$$

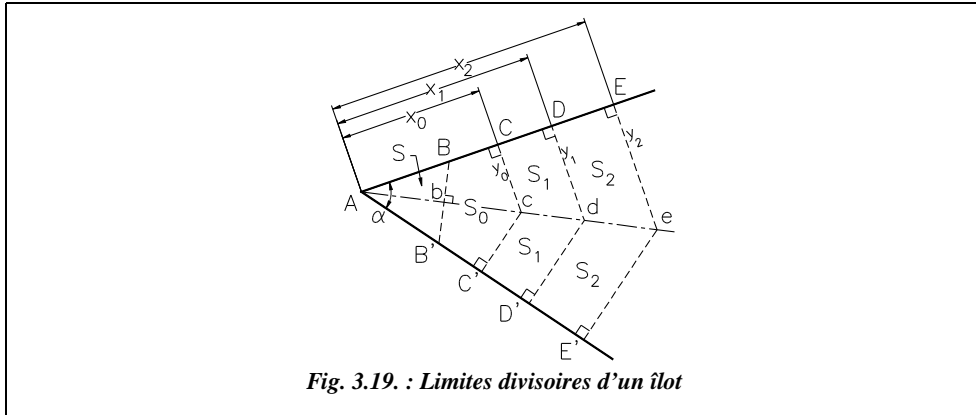


Fig. 3.19. : Limites divisaires d'un îlot

- **Deuxième lot** : le lot d'angle BCc'B'

On note  $AC = AC' = x_0$  et  $Cc = C'c = y_0$ .

Sa surface est  $S_0 = S_{ACcC'} - S$ .

Or  $S_{ACcC'} = x_0 \cdot y_0 = x_0^2 \cdot \tan(\alpha/2)$ .

Donc 
$$x_0 = \sqrt{\frac{S + S_0}{\tan(\alpha/2)}} \text{ et } y_0 = x_0 \cdot \tan(\alpha/2)$$

- **Lots suivants** : les lots cDDd, dDEe, etc.

On montre de même que pour  $x_1, x_2$ , etc. :

$$x_i = \sqrt{\frac{S + S_0 + 2 \sum_{j=1}^{j=i} S_j}{\tan(\alpha/2)}} \text{ et } y_i = x_i \cdot \tan(\alpha/2)$$

## 2.9 Limites avec cotes partielles proportionnelles aux côtés

### 2.9.1 Cas du quadrilatère

On cherche à partager le quadrilatère ABCD (fig. 3.20.) en deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  telles que  $\frac{AA'}{AB} = \frac{DD'}{DC}$  ou  $\frac{BA'}{BA} = \frac{CD'}{CD}$ . Cela présente l'avantage de conserver la forme de la parcelle.

Les cotes partielles sont  $AA'$ ,  $A'B$ ,  $CD'$  et  $DD'$ . On cherche donc à positionner le point  $A'$  sur  $AB$  et le point  $D'$  sur  $CD$ . Cela revient par exemple à calculer les distances  $BA' = a$  et  $CD' = b$ .



Pour résoudre ce problème, on prolonge les côtés AB et CD jusqu'à obtenir le triangle AED dans lequel on calcule la surface  $S_{BEC}$ , l'angle  $\alpha$  et les côtés EB et EC.

Pour obtenir les cotes  $a$  et  $b$ , on écrit  $\frac{a}{BA} = \frac{b}{CD}$  donc  $a = \frac{BA}{CD} b$ .

On en déduit  $2.(S_1 + S_{BEC}) = (EB + a).(EC + b).\sin\alpha = \left(EB + b \frac{BA}{CD}\right).(EC + b).\sin\alpha$ .

On résout l'équation du second degré en  $b$  :

$$\frac{BA}{CD} b^2 + \left(EB + \frac{BA \cdot EC}{CD}\right)b + EB \cdot EC - 2 \frac{S_{BEC} + S_1}{\sin\alpha} = 0$$

On peut généraliser ces équations à un découpage en  $n$  surfaces en remplaçant le numérateur  $(S_{BEC} + S_1)$  par  $(S_{BEC} + \Sigma S_i)$ . On obtient alors  $a$  et  $b$  toujours par rapport aux points B et C.

Si les côtés AB et CD sont parallèles distants d'une distance  $h$ , on a  $S_1 = h.(a + b)/2$  et toujours  $a = b.BA/CD$ .

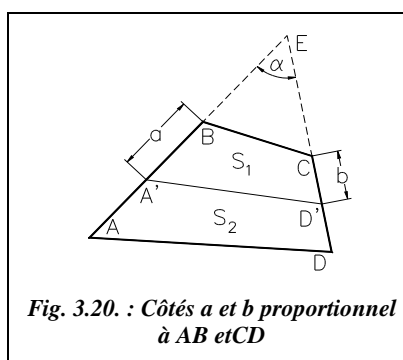


Fig. 3.20. : Côtés  $a$  et  $b$  proportionnel à AB et CD

#### Exercice

Partagez le triangle du paragraphe 2.4. en deux surfaces telles que  $S_1 = S_2/3$  ; la limite divisoire coupe les côtés AD et BC et la surface  $S_1$  est du côté du point A.

#### Résultats

Les cotes cherchées sont  $b = CD' = 58,178$  m et  $a = AA' = 32,807$  m. Avec ces cotes, on obtient :  $S_1 = 6320,25$  m<sup>2</sup> et  $S_2 = 18951,55$  m<sup>2</sup>.

### 2.9.2 Polygone quelconque

Dans ce problème, on ne peut pas facilement adapter la solution du paragraphe 2.9.1., valable pour un quadrilatère. Elle mènerait à un système d'équations long et difficile à résoudre. C'est pourquoi nous détaillons une autre méthode qui mène plus rapidement au résultat.

Soit à partager la surface ABCDEF (fig. 3.21.) en deux surfaces de valeur  $S_1$  et  $S_2$ , les limites

étant telles que  $\frac{AM}{AF} = \frac{BN}{BE} = \frac{CO}{CD}$ .

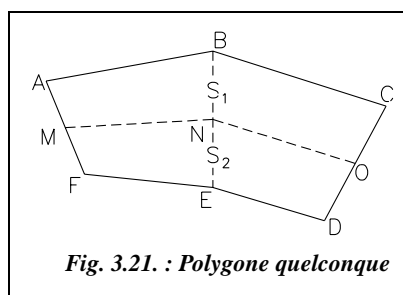


Fig. 3.21. : Polygone quelconque

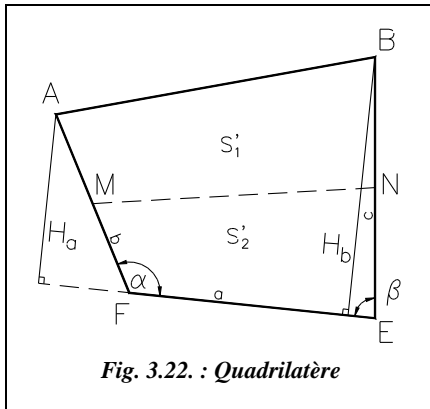


Fig. 3.22. : Quadrilatère

Considérons tout d'abord le quadrilatère ABEF (fig. 3.22.) à séparer en deux surfaces  $S'_1$  et  $S'_2$ . On note  $EF = a$ ,  $AF = b$ , et  $BE = c$ .

On peut calculer les hauteurs  $H_a$  et  $H_b$  par :

$$H_a = b \cdot \sin \alpha$$

$$H_b = c \cdot \sin \beta$$

On utilise ensuite un trapèze rectangle (fig. 3.23.) de même surface que le quadrilatère ABEF et partagé également en  $S'_1$  et  $S'_2$ .

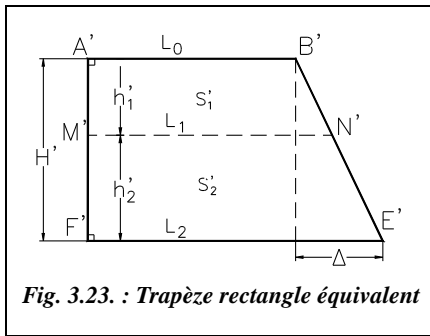


Fig. 3.23. : Trapèze rectangle équivalent

On fixe la hauteur du trapèze à  $H' = 100$  m. Ses bases sont  $L_0$  et  $L_n$ ; on note  $\Delta = L_n - L_0$  leur différence dont on conserve le signe. On fixe arbitrairement l'une des bases du trapèze, par exemple :

$$L_n = a \cdot (H_a + H_b) / (2 \cdot H')$$

On en déduit l'autre base :

$$2 \cdot S = H' \cdot (L_0 + L_n) \text{ d'où } L_0 = \frac{S}{H'} - L_n$$

$$\text{et } \Delta = L_n - L_0.$$

On calcule ensuite la hauteur  $h'_i$  et la base  $L_i$  correspondant à chaque surface  $S'_i$ ; ici  $n = 2$  surfaces : cela revient à faire le partage cherché sur le quadrilatère rectangle. En appliquant le théorème de Thalès et la surface du trapèze  $A'B'N'M'$ , on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{h'_1}{H'} &= \frac{L_1 - L_0}{\Delta} \\ 2S'_1 &= h'_1(L_1 + L_0) \end{aligned} \right\} \text{ d'où } L_1 = \sqrt{L_0^2 + 2S'_1 \frac{\Delta}{H'}}$$

On peut généraliser cette formule comme suit :

$$L_i = \sqrt{L_{i-1}^2 + 2S'_i \frac{\Delta}{H'}}$$

On contrôle en fin de calcul que l'on retrouve la valeur connue de  $L_n$  (énième côté).

On en déduit les hauteurs  $h'_i$  :

$$h'_i = \frac{2S'_i}{L_i + L_{i-1}}$$

On contrôle que  $\sum h'_i = H'$ .

On calcule enfin les cotes réelles d'implantation (ici AM noté  $b_j$ , BN noté  $c_j$ ) :

On utilise les proportions  $\frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{h'_1}{H'}$ , de manière générale :  $\frac{b_i}{b} = \frac{c_i}{c} = \frac{h'_i}{H'}$ .

On contrôle finalement que :  $\sum b_i = b$  et  $\sum c_i = c$ .

Cette méthode de calcul présente l'avantage de pouvoir être programmée.

### 2.9.3 Application

Soit le polygone ABCDEFG (fig. 3.24.) dont les sommets sont donnés ci-après :

Point	x (m)	y (m)
A	454,864	269,110
B	516,266	280,153
C	556,651	274,339
D	580,122	259,908
E	557,404	217,577
F	516,266	229,847
G	468,987	234,755

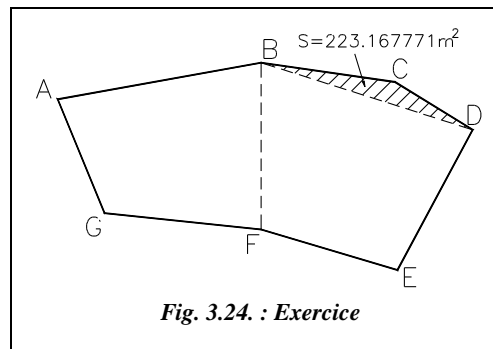


Fig. 3.24. : Exercice

La surface totale est  $S = 5\,161,343800\text{ m}^2$ .

On cherche à partager cette surface en trois surfaces  $S_1 = 2\,500\text{ m}^2$ ,  $S_2 = 1\,500\text{ m}^2$  et  $S_3 = 1\,161,3438\text{ m}^2$ . Les cotes partielles seront proportionnelles aux côtés AG, BF et DE ; la surface  $S_1$  est située vers le point B.

#### Calculs

On commence par revenir au cas de deux quadrilatères adjacents (ABFG et BDEF) en retranchant la surface BCD à  $S_1$ . La nouvelle valeur de  $S_1$  est  $S'_1 = 2\,276,832229\text{ m}^2$ .  
On travaille ensuite dans le polygone ABDEFG de surface totale  $S' = 4\,938,176029\text{ m}^2$ .

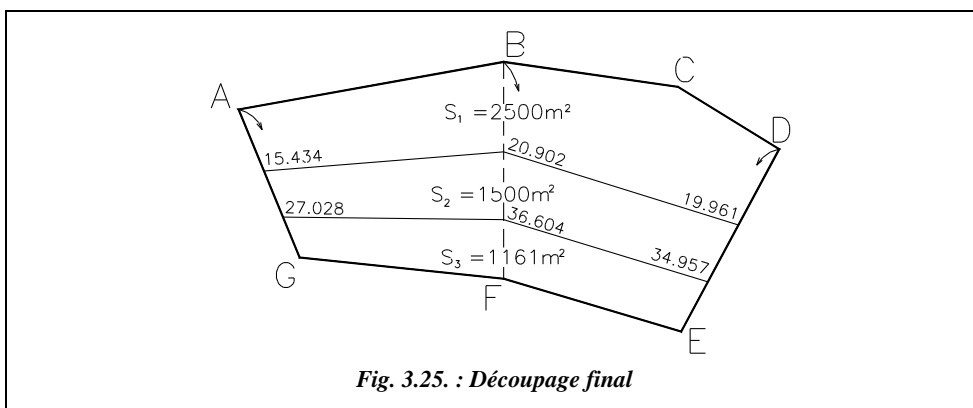
Quad.	S (m <sup>2</sup> )	a (m)	b (m)	c (m)	$\alpha$ (gon) $\beta$ (gon)	$H_a$ (m) $H_b$ (m)	$L_n$ (m)	$L_o$ (m)	$\Delta$ (m)
ABFG	2321,924792	47,533	37,145	50,306	131,415 93,415	32,714 50,037	19,667	26,772	-7,105
BDEF	2616,251237	42,929	50,306	48,042	118,453 112,904	48,207 47,058	20,448	31,877	-11,428
Total :	4938,176029						40,115	58,648	-18,533

La dernière ligne du tableau précédent donne donc les cotes  $L_n$ ,  $L_0$  et  $\Delta$  du quadrilatère rectangle de hauteur  $H' = 100$  m et de même surface que ABDEFG. On contrôle que :  $(40,115 + 58.648) \cdot 100/2 = 4\,938,15 \text{ m}^2 \approx S'$  (aux arrondis près).

$S_i$ (m <sup>2</sup> )	$L_i$ (m)	$h'_i$ (m)	ABFG	$b_i$ (m)	$c_i$ (m)	BDEF	$b_i$ (m)	$c_i$ (m)
2276,832229	50,948	41,550	$S_1$	15,434	20,902	$S_1$	20,902	19,961
1500,000000	45,163	31,214	$S_2$	11,594	15,702	$S_2$	15,702	14,996
1161,343800	40,115	27,237	$S_3$	10,117	13,702	$S_3$	13,702	13,085
<b>Vérif.</b>		100,000	<b>Vérif.</b>	37,145	50,306	<b>Vérif.</b>	50,306	48,042



Les calculs ayant été effectués sur tableau, le recours à la compensation n'est pas nécessaire puisqu'il n'y a pas d'arrondis intermédiaires.



### 3 REDRESSEMENT DE LIMITES

Cette opération consiste à substituer à une limite existante généralement complexe (par exemple EFGH, figure 3.26.) une nouvelle limite rectiligne E'H' avec conservation des surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

Les données sont soit une distance imposée (par exemple la cote  $d$ , figure 3.26.), soit une direction imposée pour la nouvelle limite (par exemple parallèle à une façade).

Le redressement peut être fait graphiquement ou analytiquement, en appliquant par exemple la formule de Sarron, ou par résolution de triangles.

### 3.1 Résolution de triangles

#### 3.1.1 La cote $d$ est imposée

On cherche à redresser EFHG en E'H' (fig. 3.26.), la cote  $d = H'H$  étant imposée. On cherche à positionner E' donc à déterminer la cote E'E. La surface  $S_2$  est conservée :  $S_{CDH'E'} = S_2$

On peut calculer la surface du triangle CDH' et en déduire celle du triangle CE'H' :

$$S_{CE'H'} = S_2 - S_{CDH'}$$

On en déduit que

$$CE' = \frac{2S_{CH'E'}}{CH' \cdot \sin(\gamma - \gamma_0)}$$

$\gamma$  est l'angle BCD calculé ou mesuré,  $\gamma_0$  est calculé.

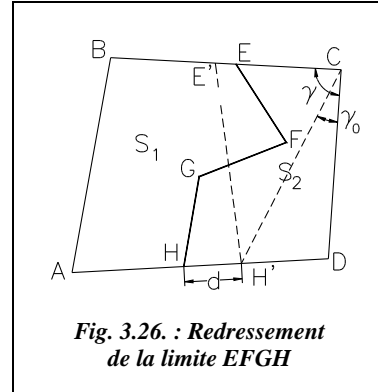


Fig. 3.26. : Redressement de la limite EFHG

#### 3.1.2 Limite parallèle à une façade

La limite redressée doit être parallèle à AB (fig. 3.27.). On cherche donc la distance  $d$  entre la façade de référence et la nouvelle limite E'H'.

Le calcul est identique à celui étudié au paragraphe 2.5.2., à savoir :

$$E'H' = \sqrt{AB^2 - 2S_1(\cotan \alpha + \cotan \beta)}$$

$$d = \frac{2S_1}{AB + E'H'} \text{ et } AH' = \frac{d}{\sin \alpha}$$

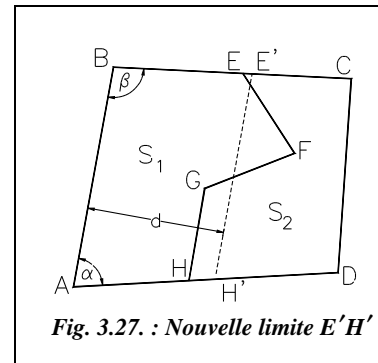


Fig. 3.27. : Nouvelle limite E'H'

#### 3.1.3 Exemple

Les données ci-contre correspondent à la figure 3.27. Calculer  $d$  pour redresser la limite EFHG en E'H' parallèle à AB.

##### Réponse

$S_1 = 19\,595,4779 \text{ m}^2$ .  
 $\alpha = 85,1903 \text{ gon}$  et  $\beta = 108,2471 \text{ gon}$ .

Points	x (m)	y (m)
A	524,814	1423,533
B	557,044	1602,230
C	749,436	1592,815
D	738,805	1435,140
E	661,845	1597,101
F	703,639	1532,090
G	630,861	1503,523
H	618,127	1428,594

AB = 181,580 m. E'H' = 169,682 m donc  $d = 111.572$  m et AH' = 114,660 m.  
 La surface  $S_1$  effective, c'est-à-dire implantée à partir de AH' est 19 595,50 m<sup>2</sup>.

### 3.2 Formule de Sarron

La démonstration de la formule de Sarron est donnée au chapitre 5, paragraphe 5.3.

#### 3.2.1 Cote imposée

On cherche à redresser la limite EFGH en E'H', la cote  $e = HH'$  ou  $a = EE'$  étant imposée (fig. 3.28.). Les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont conservées. On note :

EF =  $b$ , FG =  $c$ , GH =  $d$ .

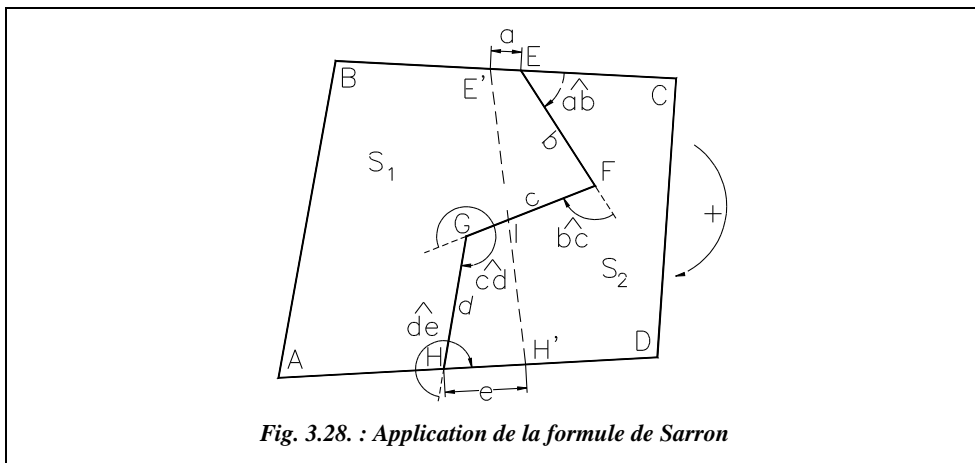


Fig. 3.28. : Application de la formule de Sarron

On choisit un sens de calcul qui donne les angles orientés  $\widehat{ab}$ ,  $\widehat{bc}$ ,  $\widehat{cd}$  et  $\widehat{de}$  à calculer, ou à déduire des observations.

On applique la formule de Sarron en remarquant que :

$$S_{E'EFI} + S_{IGHH'} = 0$$

Notons que la surface IGHH' est négative puisqu'elle est parcourue dans le sens trigonométrique.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } 0 = & ab.\sin(\widehat{ab}) + ac.\sin(\widehat{ab} + \widehat{bc}) + ad.\sin(\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd}) + ae.\sin(\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de}) \\ & + bc.\sin(\widehat{bc}) + bd.\sin(\widehat{bc} + \widehat{cd}) + be.\sin(\widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de}) \\ & + cd.\sin(\widehat{cd}) + ce.\sin(\widehat{cd} + \widehat{de}) \\ & + de.\sin(\widehat{de}) \end{aligned}$$

On obtient finalement une équation dans laquelle on peut isoler  $a$  ou  $e$ .

### Remarque

Cette méthode qui nécessite des calculs plus longs que la précédente (§ 3.1.), est à réserver aux cas où les données sont les angles orientés et les côtés du polygone ; c'est le cas dans un lever par polygonation.

### Exemple

On impose  $a = 17,331$  m ; on cherche donc  $e$ . Les données sont les suivantes :  
 $\widehat{ab} = 60,5143$  gon ;  $\widehat{bc} = 112,5605$  gon ;  $\widehat{cd} = 334,5291$  gon ;  $\widehat{de} = 285,8336$  gon  
 $b = 77,286$  m ;  $c = 78,184$  m ;  $d = 76,003$  m.

### Réponse

$e = 46,216$  m ce qui donne, aux arrondis près,  $S_I = 19\,595,50$  m<sup>2</sup>.

Autre exemple :  $a = 50$  m donne  $e = 77,863$  m.

## 3.2.2 Limite parallèle à une façade

Dans ce cas, on exprime  $a$  et  $e$  en fonction de la distance  $h$  (figure 3.29.). Le paramètre à calculer devient  $h$ .

$$\text{On écrit : } a = \frac{h}{\sin \beta} - BE$$

$$\text{et : } e = \frac{h}{\sin \alpha} - AH$$

On écrit enfin la formule de Sarron dans laquelle la seule inconnue est  $h$ .

### Remarque

Le calcul des coordonnées des sommets puis la résolution par calcul des surfaces des triangles (comme au paragraphe 3.1.) est au moins aussi rapide que l'application de Sarron.

### Application

Les données sont celles du paragraphe 3.2.1 et résultats sont identiques à ceux du paragraphe 3.1.3.

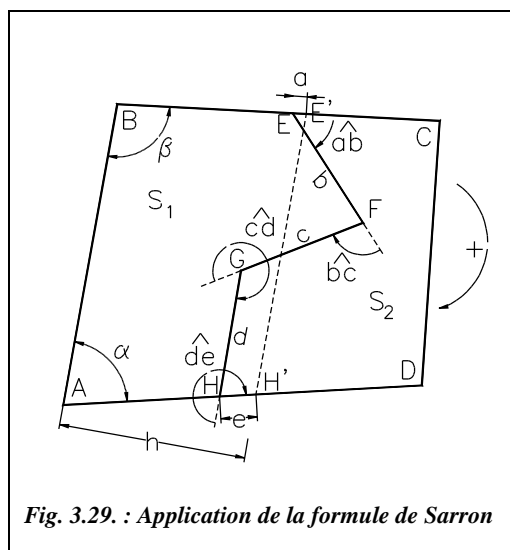


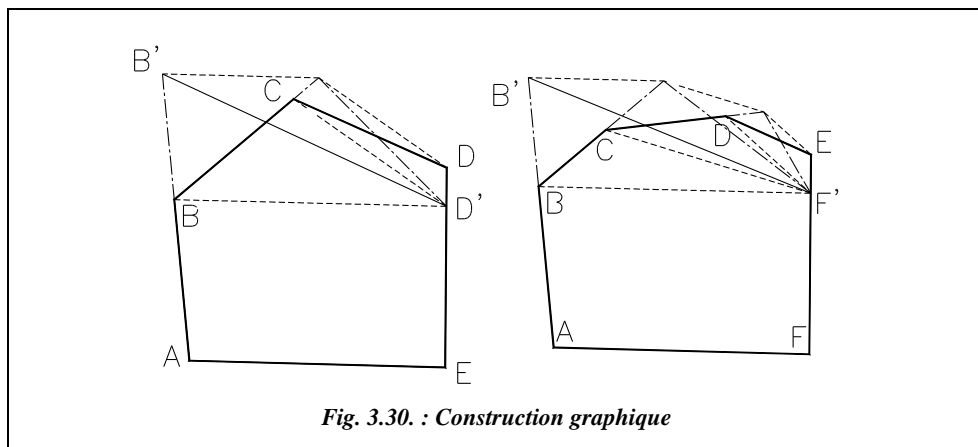
Fig. 3.29. : Application de la formule de Sarron

### 3.3 Résolution graphique

Le principe de ces constructions est traité au paragraphe 1.3.

#### 3.3.1 Cote imposée

Dans le cas où la cote  $a$  ou  $e$  est imposée, la solution graphique est simple, rapide et précise. La figure 3.30. montre deux exemples de construction pour des limites simples à redresser.



Dans le premier cas, il s'agit de redresser la limite BCD en D'B', le point D' étant imposé. Dans le second cas, il s'agit de redresser la limite BCDE en F'B', le point F' étant imposé.

#### Application

Retrouvez graphiquement la solution du deuxième exemple du paragraphe 3.2.1. ( $a$  imposé,  $a = 50$  m).

#### ◆ Construction graphique



#### ● Construction du polygone ABCD et de la limite EFGH

LIGNE↵ du point 524.814,1423.533↵ au point 557.044,1602.23↵ au point 749.436,1592.815↵ au point 738.805,1435.14↵ au point Clore↵

LIGNE↵ du point 661.845,1597.101↵ au point 703.639,1532.09↵ au point 630.861,1503.523↵ au point 618.127,1428.594↵



- **Positionnement de E' à 50 m de E**

*CERCLE* de centre E (*EXTrémité* de...) et de rayon 50.

- **Rayons E'F, E'G et E'H**

*LIGNE* de *INTersection* à *EXTrémité* de...  
On peut alors effacer le cercle centré en E'.

- **Points F', G' et H'**

*COPIER* le segment E'F de E' vers E puis *CHNFREIN* avec le segment GF, on obtient le point F' (fig. 3.31.).

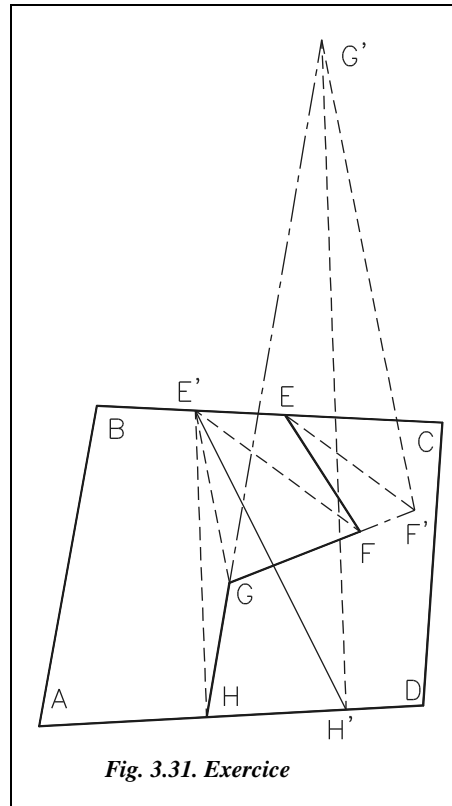
*COPIER* le segment E'G de E' vers F' puis *CHNFREIN* avec le segment GH, on obtient le point G'.

*COPIER* le segment E'H de E' vers G' puis *PROLONGE* jusqu'à la droite AD pour obtenir le point H'.

**Résultats** : lire la cote HH' (ou AH') avec la commande *DISTANCE* et vérifier avec la commande *AIRE* que la surface ABE'H' est bien égale à la surface ABEFGH (passez en accrochage permanent *EXTrémité*).

$HH' = 77,863 \text{ m.}$

$S = 19\,595,4779 \text{ m}^2.$



### 3.3.2 Limite parallèle à une direction donnée

Dans ce cas, pour une solution graphique, on peut procéder par approximations successives : positionnez à vue une droite parallèle à la direction imposée puis déplacez cette droite jusqu'à obtenir la surface cherchée.



# 4

## DROITES ET CERCLES

Les calculs d'intersection en topographie sont généralement appelés des techniques nouvelles par rapport aux méthodes classiques apprises en mathématiques. En fait, les topographes ont adapté les calculs aux données dont ils disposent sur le terrain pour arriver rapidement et précisément au résultat. Il faut donc se familiariser avec ces méthodes de calcul faisant intervenir gisements et distances plutôt qu'équations de droites ou de cercles...

### 1 INTERSECTION DE DEUX DROITES

#### 1.1 Intersection par résolution de triangle

Les droites sont le plus souvent connues par un point et un gisement (voir sur la figure 4.1. les deux droites AM et BN).

Connaissant les coordonnées des deux points A et B, on calcule le gisement  $G_{AB}$  et la distance horizontale  $D_{AB}$ .

On en déduit les angles :

$$IAB = G_{AB} - G_{AM}$$

$$IBA = G_{BN} - G_{BA}$$

Il reste à résoudre le triangle IAB dont un côté et deux angles adjacents sont connus ; on calcule par exemple la longueur du côté AI et on déduit les coordonnées de I de celles de A.

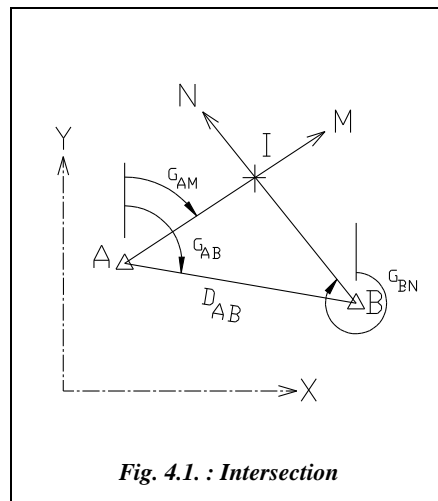


Fig. 4.1. : Intersection

On peut ainsi vérifier les calculs à partir de B.

### Exemple

Calculez les coordonnées du point d'intersection I des droites  $D_1$  et  $D_2$  :

- $D_1$  passant par A (12,36 ; 15,62) a un gisement de 48,364 gon.
- $D_2$  passant par B (98,74 ; 6,56) a un gisement de 145,647 gon.

Il est nécessaire de faire un schéma avant de commencer les calculs. La réponse est donnée au paragraphe 1.4.

## 1.2 Formules de Delambre

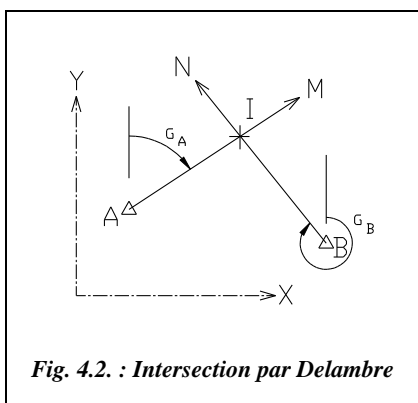


Fig. 4.2. : Intersection par Delambre

C'est la méthode la plus couramment employée par les topographes ; elle utilise deux formules donnant directement les coordonnées du point d'intersection à partir des données suivantes :

- coordonnées du point A ( $X_A ; Y_A$ ) et du point B ( $X_B ; Y_B$ ) ;
- gisements  $G_{AM}$  et  $G_{BN}$  notés  $G_A$  et  $G_B$ .

Les coordonnées du point d'intersection I sont :

$$Y = Y_A + \frac{(X_A - X_B) - (Y_A - Y_B) \tan G_B}{\tan G_B - \tan G_A}$$

$$X = X_A + (Y - Y_A) \tan G_A$$

**Attention** : on calcule d'abord l'ordonnée  $Y$  que l'on reporte dans l'abscisse  $X$ .

On peut aussi trouver pour l'ordonnée  $Y$  les formulations suivantes :

- par inversion de A et B :  $Y = Y_B + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan G_A}{\tan G_A - \tan G_B}$
- par changement de signe :  $Y = Y_A + \frac{(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \tan G_B}{\tan G_A - \tan G_B}$

### Remarques

Puisque  $\tan G = \tan(200 + G)$ , on peut donner les gisements des droites à 200 gon près.

La formule ne donne pas de résultat dans les cas suivants :

- Si  $G_A$  ou  $G_B$  sont égaux à 100 gon ou 300 gon ; la fonction tangente est alors non définie (voir application).

- Évidemment, si les deux droites sont parallèles,  $\tan G_A = \tan G_B$  donc le dénominateur de  $Y$  ne peut être calculé.
- Le calcul de  $G_A$  ou  $G_B$  est inutile, seul celui de  $\tan G_A$  et  $\tan G_B$  est nécessaire.

La **démonstration** de la formule de Delambre pour l'intersection est détaillée ci-après.

$$\tan G_A = \frac{X - X_A}{Y - Y_A} \quad \text{et} \quad \tan G_B = \frac{X - X_B}{Y - Y_B}; \quad \text{on en déduit que :}$$

$$\left. \begin{array}{l} X - X_A = (Y - Y_A) \tan G_A \quad (1) \\ X - X_B = (Y - Y_B) \tan G_B \quad (2) \end{array} \right\} X_A - X_B = (Y - Y_B) \tan G_B - (Y - Y_A) \tan G_A$$

$$X_A - X_B = Y(\tan G_B - \tan G_A) - Y_B \tan G_B + Y_A \tan G_A$$

$$X_A - X_B = (Y - Y_A)(\tan G_B - \tan G_A) + (Y_A - Y_B) \tan G_B \quad (3)$$

L'équation (3) donne la valeur  $Y$  et l'équation (1) la valeur  $X$ .

### Applications

- 1- Reprenez les données de l'exemple précédent (§ 1.1.) et vérifiez que vous retrouvez le même point d'intersection.
- 2- Trouvez la formule à appliquer dans le cas où  $G_A = 100$  ou  $300$  gon.
- 3- Donnez une expression de l'abscisse  $X$  indépendante de l'ordonnée  $Y$ .

### Réponses

2-  $Y = Y_A$  et  $X = X_B + (Y - Y_B) \tan G_B$ .

3- À partir des équations (1) et (2) ci-dessus, on peut écrire :

$$Y_B - Y_A = (X - X_A) \cotan G_A - (X - X_B) \cotan G_B.$$

On en tire l'expression suivante :  $X = X_A + \frac{Y_A - Y_B - (X_A - X_B) \cotan G_B}{\cotan G_B - \cotan G_A}$

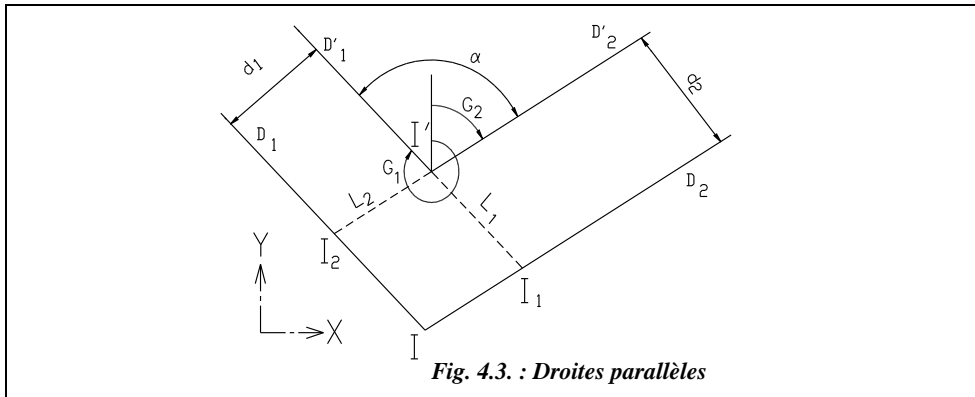
Une résolution graphique est effectuée au paragraphe 1.4.

## 1.3 Droites parallèles

Il est fréquent d'avoir besoin de calculer à partir du point  $I$  d'intersection de deux droites ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) (fig. 4.3.) les coordonnées du point d'intersection  $I'$  de deux droites ( $D'_1$ ) et ( $D'_2$ ) parallèles ; on rencontre ce cas dans les calculs d'alignements, par exemple.

On peut calculer les coordonnées des points  $I_1$  et  $I_2$  par rayonnement à partir de celles de  $I$  :

$$\begin{array}{ll} X_{I_1} = X_I + L_2 \cdot \sin G_2 & X_{I_2} = X_I + L_1 \cdot \sin G_1 \\ Y_{I_1} = Y_I + L_2 \cdot \cos G_2 & Y_{I_2} = Y_I + L_1 \cdot \cos G_1 \end{array}$$



On peut jouer sur les signes de  $L_1$  et  $L_2$  pour obtenir différentes solutions possibles pour le point  $I'$  : si  $L_1$  et  $L_2$  sont négatifs, le point  $I'$  est « extérieur » à l'angle  $\alpha$  et si  $L_1$  et  $L_2$  sont positifs,  $I'$  est « intérieur », comme dans le cas de la figure 4.3.

On en déduit ensuite les coordonnées du point  $I'$  par intersection des droites  $(D'_1)$  et  $(D'_2)$  à l'aide des formules de Delambre ; ces droites passent par les points  $I_1$  et  $I_2$  et ont pour gisement respectif  $G_1$  et  $G_2$ . On obtient :

$$X_{I'} = X_I + L_2 \cdot \sin G_2 + L_1 \cdot \sin G_1 \text{ avec } L_1 = d_2 / \sin(200 - \alpha) = d_2 / \sin \alpha ;$$

$$Y_{I'} = Y_I + L_2 \cdot \cos G_2 + L_1 \cdot \cos G_1 \text{ avec } L_2 = d_1 / \sin(200 - \alpha) = d_1 / \sin \alpha.$$

Enfinement :

$$\begin{aligned} X_{I'} &= X_I + \frac{d_1 \sin G_2}{\sin \alpha} + \frac{d_2 \sin G_1}{\sin \alpha} \\ Y_{I'} &= Y_I + \frac{d_1 \cos G_2}{\sin \alpha} + \frac{d_2 \cos G_1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

### Remarques

- | L'angle  $\alpha$  est toujours choisi inférieur à 200 gon afin que son sinus reste positif.
- | Les considérations de signes faites pour les distances  $L_1$  et  $L_2$  s'appliquent à  $d_1$  et  $d_2$ .

### Application

Soit le point  $I$  de coordonnées  $I(2\,819,794 ; 2\,691,548)$ . Soit les droites  $(D_1)$  de gisement  $G_1 = 153,4427$  gon et  $(D_2)$  de gisement  $G_2 = 260,5387$  gon. Calculez les coordonnées du point  $I'$ , point de rencontre des parallèles aux droites  $(D_1)$  et  $(D_2)$  décalées vers l'extérieur, respectivement à  $d_1 = 35$  m et  $d_2 = 45$  m.

## Réponse

En appliquant la formule démontrée précédemment :  $\alpha = 107,0960$  gon ;  $I'$  se trouvant à « l'extérieur », on prend  $d_1$  et  $d_2$  négatifs. Donc les coordonnées de  $I'$  sont :  
 $X = 2\,818,219$  m et  $Y = 2\,745,709$  m.

Si on prend  $d_1$  et  $d_2$  positifs, on trouve le symétrique de  $I'$  par rapport à  $I$  :  
 $I''$  (  $2\,821,368$  m ;  $2\,637,386$  m ).

Si on prend  $d_1$  négatif et  $d_2$  positif, on trouve :  $I'''$  (  $2\,878,701$  m ;  $2\,678,304$  m ).

Si on prend  $d_2$  négatif et  $d_1$  positif, on trouve :  $I''''$  (  $2\,760,886$  m ;  $2\,704,791$  m ).

Une résolution graphique est proposée au paragraphe suivant.

## 1.4 Résolution graphique



Résolution des applications précédentes sur AutoCAD LT.

Environnement de travail : menu *FORMAT* / *CONTROLE DES UNITES*, angles en grades, sens horaire, zéro au nord.

### 1- Intersection de deux droites

Tracé du segment AM : *LIGNE* du point  $12.36,15.62$  au point  $@100<48.364$

Tracé du segment BN : *LIGNE* du point  $98.74,6.56$  au point  $@100<345.647$

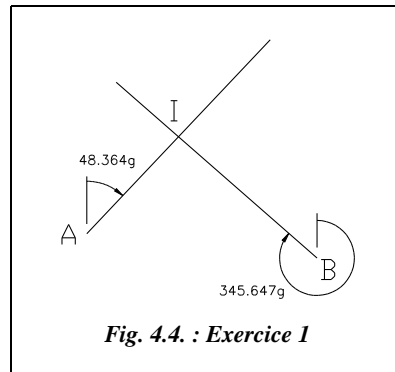


Fig. 4.4. : Exercice 1

Coordonnées du point d'intersection : commande *IDentité* *INTersection de...*

Résultat : I (46.78, 51.86).

### 2- Parallèles à deux droites

Construction des droites ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) : *LIGNE* du point  $2819.794,2691.548$  au point  $@100<153.4427$   
*LIGNE* du point *EXTRémité de...* (point I) au point  $@100<260.5387$

Construction de  $I'$  : *DECALER* par  $35$  la droite  $D_1$  vers le haut. *DECALER* par  $45$  la droite  $D_2$  vers le haut. *CHNFREIN* entre les deux droites décalées. *ID* *INTersection de...* pour obtenir les coordonnées de  $I'$ .

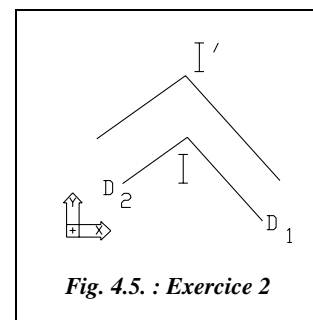


Fig. 4.5. : Exercice 2

En changeant les sens de décalage, on trouve très rapidement les autres solutions possibles.

## 2 INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN CERCLE

### 2.1 À partir des équations

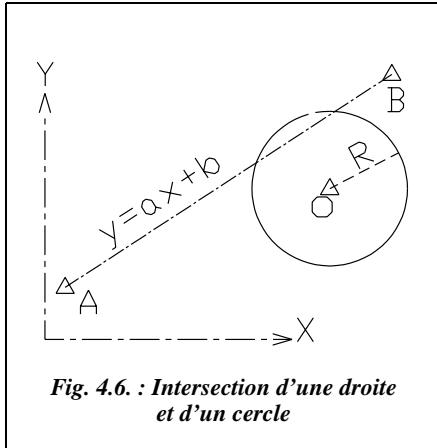


Fig. 4.6. : Intersection d'une droite et d'un cercle

Cette méthode est rarement utilisée par les topographes.

L'équation d'un cercle de centre O ( $X_o ; Y_o$ ) et de rayon R est :

$$(X - X_o)^2 + (Y - Y_o)^2 = R^2$$

L'équation d'une droite est du type :

$$Y = a.X + b$$

Il suffit dès lors de remplacer la valeur Y dans l'équation du cercle par ( $a.X + b$ ) et de résoudre l'équation du second degré qui en résulte. Suivant le cas, on obtient :

- si le discriminant est positif, il y a deux solutions : la droite coupe le cercle ;
- si le discriminant est nul, il y a une seule solution : la droite est tangente au cercle ;
- si le discriminant est négatif, il n'y a aucune solution : la droite ne coupe pas le cercle.

Cette méthode peut être étendue aux intersections faisant intervenir :

- des paraboles d'équation  $Y = a.X^2 + b.X + c$  ;
- des ellipses d'équation  $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$  ;
- des hyperboles d'équation  $Y = a/X$ .

### 2.2 Méthode usuelle en topographie

Une droite est généralement donnée par un point A ( $X_A ; Y_A$ ) et un gisement  $G_A$  (fig. 4.7.). Un cercle est donné par son centre O ( $X_o ; Y_o$ ) et son rayon R.  $M_1$  et  $M_2$  sont calculés à partir de A ; pour cela, il faut déterminer les distances  $AM_1$  et  $AM_2$  ( $G_A$  étant donné).

On calcule  $G_{AO}$  et  $D_{AO}$  à partir des coordonnées pour en déduire l'angle au sommet en A :  $\alpha = G_{AO} - G_A$ .

On en déduit :  $AH = AO \cos \alpha$   
 $OH = AO \sin \alpha$



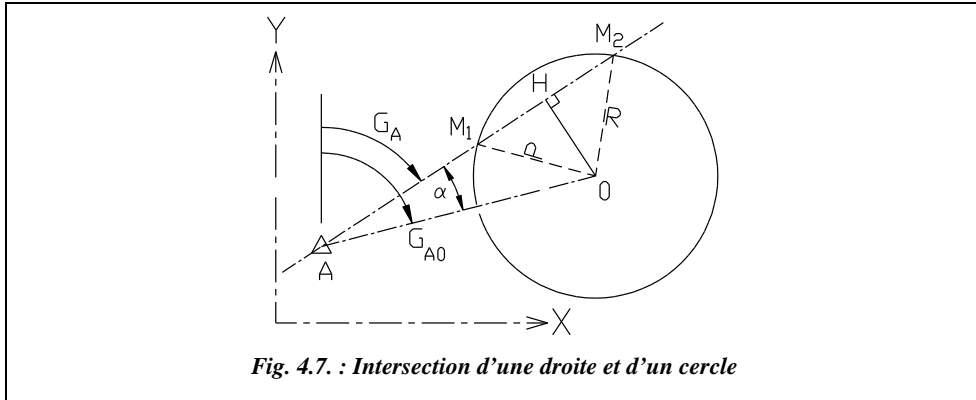


Fig. 4.7. : Intersection d'une droite et d'un cercle

Si  $R > OH$ , alors :

$$HM_2 = HM_1 = \sqrt{R^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - (AO \cdot \sin \alpha)^2}$$

Comme  $AM_1 = AH - HM_1$

et  $AM_2 = AH + HM_2$

On obtient :

$$\begin{cases} AM_1 = AO \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (AO \cdot \sin \alpha)^2} \\ AM_2 = AO \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (AO \cdot \sin \alpha)^2} \end{cases}$$

Les coordonnées de  $M_1$  et  $M_2$  sont ensuite déduites de A :

$M_1$	$\begin{cases} X_{M1} = X_A + AM_1 \cdot \sin G_A \\ Y_{M1} = Y_A + AM_1 \cdot \cos G_A \end{cases}$	$M_2$	$\begin{cases} X_{M2} = X_A + AM_2 \cdot \sin G_A \\ Y_{M2} = Y_A + AM_2 \cdot \cos G_A \end{cases}$
-------	--	-------	--

#### Remarque

Pour le contrôle des calculs, on vérifie que  $OM_1 = OM_2 = R$  ;

- si  $OH = R$ , alors le cercle est tangent à la droite  $M_1 = M_2$  ;
- si  $OH > R$ , alors la droite ne coupe pas le cercle ;
- si  $OH < R$ , alors on obtient deux points d'intersection  $M_1$  et  $M_2$ .

#### Application

Le premier exercice du paragraphe 3.1. constitue une application du précédent calcul.

# 3 DROITES DÉFINIES PAR DES POINTS DE TANGENCE

## 3.1 Droite tangente à un cercle

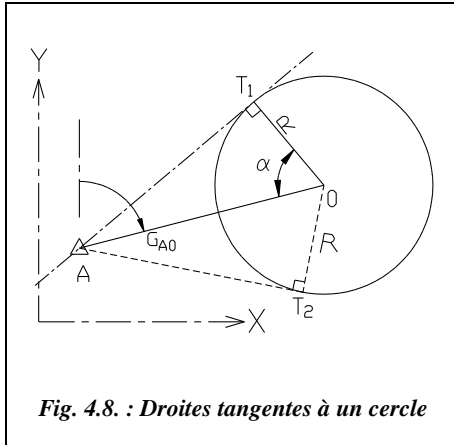


Fig. 4.8. : Droites tangentes à un cercle

On cherche les droites passant par A et tangentes à un cercle donné (fig. 4.8.). Les données sont A, O et R.

On détermine les coordonnées des deux points de tangence possibles, T<sub>1</sub> et T<sub>2</sub>. Le point A est extérieur au cercle ( $D_{AO} > R$ ). Le plus simple est de calculer ces deux points à partir de O.

A et O connus, on calcule  $D_{OA}$  et  $G_{OA}$ .

On calcule l'angle  $\alpha$  comme suit :

$$\cos \alpha = \frac{R}{D_{OA}}$$

Alors :  $G_{OT_1} = G_{OA} + \alpha$  et  $G_{OT_2} = G_{OA} - \alpha$ .

La distance  $AT_1$  est calculée par  $AT_1 = R \cdot \tan \alpha$ .

Enfinement :

$T_1 \begin{cases} X_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \sin(G_{OA} + \alpha) \\ Y_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \cos(G_{OA} + \alpha) \end{cases}$	$T_2 \begin{cases} X_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \sin(G_{OA} - \alpha) \\ Y_O + R \cdot \tan \alpha \cdot \cos(G_{OA} - \alpha) \end{cases}$
--	--

On contrôle les calculs en vérifiant que  $OT_1 = OT_2 = R$ .

### Application 1

On projette d'implanter une rue circulaire (fig. 4.9.) d'une largeur de 12 m et dont les coordonnées du centre sont C (423,25 ; 502,40).

L'axe de la nouvelle rue est tangent en T à l'axe de la ruelle existante de 5 m de largeur, rectiligne et définie par A (290,00 ; 510,22) et  $G_{AB} = 25,330$  gon.

Calculez les coordonnées des points P1, P2, P3, P4, P5 et P6 qui permettront d'implanter la rue circulaire. Vous déterminerez également le rayon R du cercle constituant l'axe de la rue circulaire.

## Résolution graphique



L'environnement de travail est celui du paragraphe 1.4.

- Tracé de la ruelle existante : **LIGNE** ↵ du point 290,510.22 ↵ au point @100<25.33 ↵ puis **DECALER** ↵ par 2.5 ↵ la droite précédente de part et d'autre.
- Construction du cercle de centre C et tangent à l'axe de la ruelle existante : **CERCLE** ↵ de centre 423.25,502.4 ↵ de rayon *Tangent* à l'axe de la ruelle.
- Construction de la nouvelle rue circulaire : **DECALER** ↵ par 6 ↵ le cercle précédent de part et d'autre. Pour obtenir le point P5, prolongez la droite jusqu'au cercle avec la commande **PROLONGE** ↵, seuil : le cercle, objet à prolonger : la droite.
- Lisez les coordonnées des points P1 à P6 ; placez vous en mode d'accrochage permanent : menu **OPTIONS / ACCROCHAGE AUX OBJETS...** puis cliquez sur l'option **INTERSECTION**, puis commande **ID** ↵

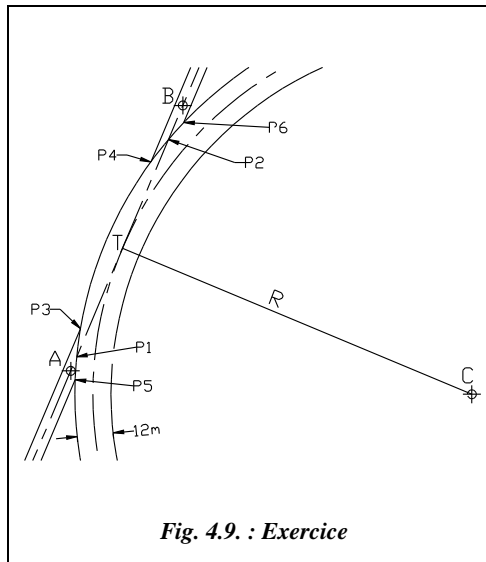


Fig. 4.9 : Exercice

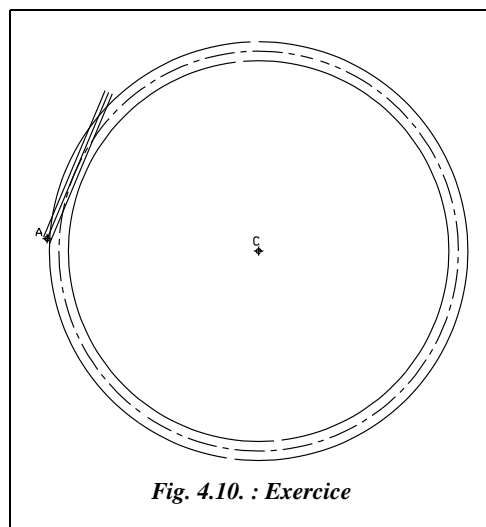


Fig. 4.10 : Exercice

### Résultats

P1 (291.97 , 514.92) m  
 P2 (322.45 , 587.42) m  
 P3 (293.21 , 524.32) m  
 P4 (316.60 , 579.96) m  
 P5 (291.47 , 507.26) m  
 P6 (327.56 , 593.14) m  
 R = 125.87 m

### Application 2

Trouvez les points de tangence  $T_1$  et  $T_2$  pour les données suivantes : A (125,32 ; 142,33), O (110,13 ; 95,64),  $R = 15,00$  m.



### Résolution graphique

Tracé du cercle : **CERCLE** de centre  $110.13, 95.64$  et de rayon  $15$

Tracé des tangentes : **LIGNE** du point  $125.32, 142.33$  au point **TANGent** au cercle vers la gauche du cercle. **LIGNE** du point **EXTrémité** de... (point A) au point **TANGent** au cercle vers la droite.

Coordonnées des points avec la commande **ID** **INTersection** de... ou **EXTrémité** de...

#### Résultats

$T_1 (97.97, 104.42)$  et  $T_2 (125.13, 95.58)$

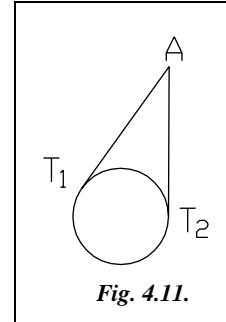


Fig. 4.11.

## 3.2 Droites tangentes à deux cercles

Nous allons distinguer deux cas suivant que les tangentes soient intérieures ou extérieures.

### 3.2.1 Tangentes intérieures

On cherche les deux tangentes intérieures communes à deux cercles donnés (fig. 4.12.).

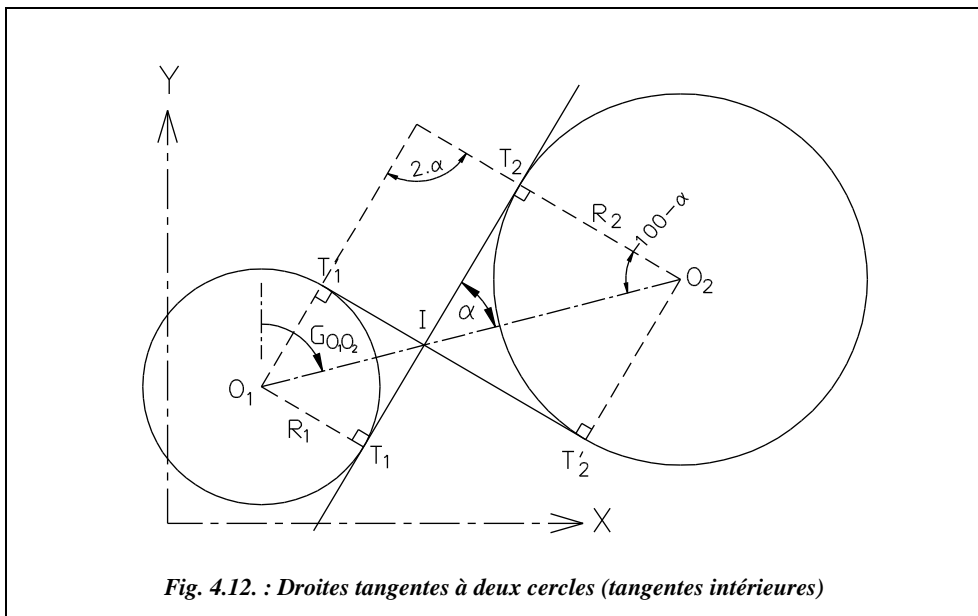


Fig. 4.12. : Droites tangentes à deux cercles (tangentes intérieures)

Les données sont  $O_1, O_2, R_1$  et  $R_2$ .

**Pour que les tangentes existent**, il faut que  $(O_1 O_2 > R_1 + R_2)$ .

$T_1$  et  $T'_1$  sont calculés depuis  $O_1$ .  $T_2$  et  $T'_2$  seront calculés depuis  $O_2$ .

$O_1$  et  $O_2$  étant connus, on calcule  $D_{O_1O_2}$  et  $G_{O_1O_2}$  puis  $\alpha$  par

$$\sin \alpha = \frac{R_2}{IO_2} = \frac{R_1}{IO_1} = \frac{R_1 + R_2}{O_1 O_2}.$$

Les coordonnées de  $O_1, O_2, T_1$  et  $T_2$  permettent de calculer les gisements suivants :

$$G_{O_1T_1} = G_{O_1O_2} + (100 - \alpha);$$

$$G_{O_1T'_1} = G_{O_1O_2} - (100 - \alpha);$$

$$G_{O_2T_2} = G_{O_1T_1} + 200 = G_{O_1O_2} + 300 - \alpha = G_{O_1O_2} - (100 + \alpha);$$

$$G_{O_2T'_2} = G_{O_1T'_1} + 200 = G_{O_1O_2} + 100 + \alpha.$$

Donc, en simplifiant, on obtient :

$T_1$	$\begin{cases} X_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1O_2} - \alpha) \\ Y_{O_1} - R_1 \cdot \sin(G_{O_1O_2} - \alpha) \end{cases}$	$T_2$	$\begin{cases} X_{O_2} - R_2 \cdot \cos(G_{O_1O_2} - \alpha) \\ Y_{O_2} + R_2 \cdot \sin(G_{O_1O_2} - \alpha) \end{cases}$
$T'_1$	$\begin{cases} X_{O_1} - R_1 \cdot \cos(G_{O_1O_2} + \alpha) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \sin(G_{O_1O_2} + \alpha) \end{cases}$	$T'_2$	$\begin{cases} X_{O_2} + R_2 \cdot \cos(G_{O_1O_2} + \alpha) \\ Y_{O_2} - R_2 \cdot \sin(G_{O_1O_2} + \alpha) \end{cases}$

On contrôle les résultats par  $G_{T_1T_2} = G_{O_1O_2} - \alpha$  et  $G_{T'_1T'_2} = G_{O_1O_2} + \alpha$ .

### 3.2.2 Tangentes extérieures

On cherche les deux tangentes extérieures communes à deux cercles donnés (fig. 4.13.).

Les données sont  $O_1, O_2, R_1$  et  $R_2$ .

**Pour que les tangentes existent**, il faut que  $O_1 O_2 > |R_1 - R_2|$ , c'est-à-dire qu'un des deux cercles ne doit pas se trouver à l'intérieur de l'autre.

Le cas limite est que les deux cercles soient tangents ; alors  $O_1 O_2 = |R_1 - R_2|$ .

$T_1$  et  $T'_1$  sont calculés depuis  $O_1$ .  $T_2$  et  $T'_2$  seront calculés depuis  $O_2$ .

$O_1$  et  $O_2$  étant connus, on calcule  $D_{O_1O_2}$  et  $G_{O_1O_2}$ . On trace la parallèle à  $O_1O_2$  passant par  $T_1$  et faisant un angle  $\alpha$  avec  $T_1T_2$ .

On calcule  $\alpha$  comme suit :  $\sin \alpha = \frac{|R_2 - R_1|}{O_1 O_2}$ .

On remarque sur la figure 4.13. que  $G_{T_1T_2} = G_{O_1O_2} + \alpha$  et que  $G_{T'_1T'_2} = G_{O_1O_2} - \alpha$ .

D'où :  $G_{O_1T_1} = G_{O_2T_2} = (G_{O_1O_2} + \alpha) + 100$  et  $G_{O_1T'_1} = G_{O_2T'_2} = (G_{O_1O_2} - \alpha) - 100$

Donc, en simplifiant, on obtient :

$T_1$	$\begin{cases} X_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1O_2} + \alpha) \\ Y_{O_1} - R_1 \cdot \sin(G_{O_1O_2} + \alpha) \end{cases}$	$T_2$	$\begin{cases} X_{O_2} + R_2 \cdot \cos(G_{O_1O_2} + \alpha) \\ Y_{O_2} - R_2 \cdot \sin(G_{O_1O_2} + \alpha) \end{cases}$
$T'_1$	$\begin{cases} X_{O_1} - R_1 \cdot \cos(G_{O_1O_2} - \alpha) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \sin(G_{O_1O_2} - \alpha) \end{cases}$	$T'_2$	$\begin{cases} X_{O_2} - R_2 \cdot \cos(G_{O_1O_2} - \alpha) \\ Y_{O_2} + R_2 \cdot \sin(G_{O_1O_2} - \alpha) \end{cases}$

On contrôle les résultats par  $G_{T_1T_2} = G_{O_1O_2} + \alpha$  et  $G_{T'_1T'_2} = G_{O_1O_2} - \alpha$ .

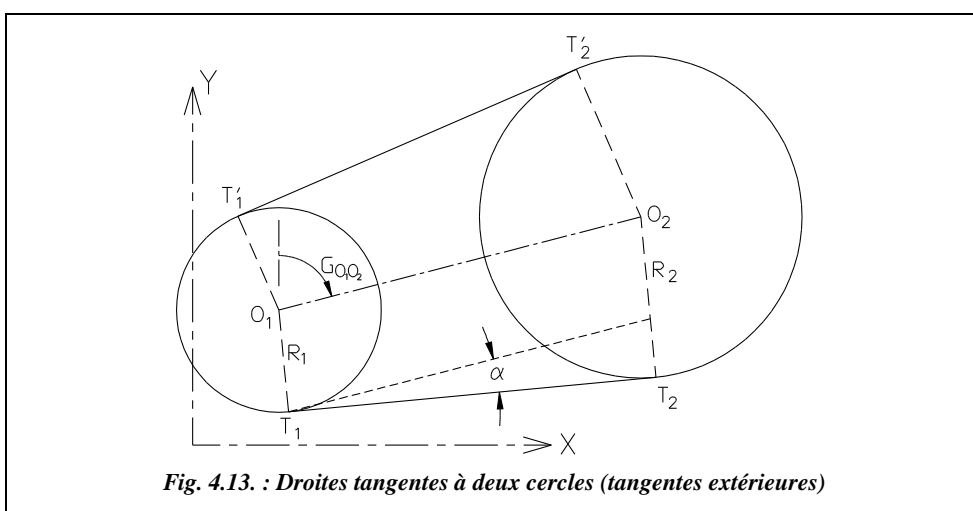


Fig. 4.13. : Droites tangentes à deux cercles (tangentes extérieures)

### 3.2.3 Application

Trouvez les deux tangentes intérieures et les deux tangentes extérieures communes aux deux cercles suivants :

- cercle de centre  $O_1(45,64 ; 55,12)$  et de rayon  $R_1 = 10,00$  m.
- cercle de centre  $O_2(68,78 ; 44,31)$  et de rayon  $R_2 = 12,30$  m.

#### ◆ Résolution graphique



Tracé des deux cercles : commande **CERCLE** de centre  $45.64,55.12$  et de rayon  $15$ , puis **CERCLE** de centre  $68.78,44.31$  et de rayon  $12.3$

Tracé des tangentes communes : commande **LIGNE** du point **TANgent** au premier cercle (cliquez vers la zone de tangence choisie) au point **TANgent** au deuxième cercle (cliquez vers la deuxième zone de tangence choisie). Opérez de même pour obtenir les trois autres tangentes.

Lire les résultats : passez en accrochage permanent *INTersection* (menu *OPTIONS / ACCROCHAGE AUX OBJETS...*), puis commande *ID* pour obtenir les coordonnées des huit points cherchés.

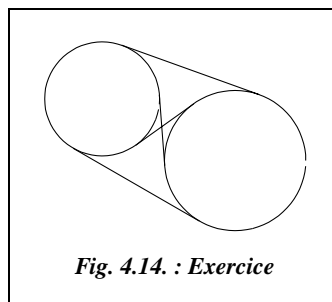


Fig. 4.14. : Exercice

### Résultats

- Pour les tangentes intérieures :  
 $T_1 (51.49, 47.01)$  et  $T_2 (61.59, 54.29)$  ;  
 $T'_1 (55.61, 55.84)$  et  $T'_2 (56.51, 43.42)$ .
- Pour les tangentes extérieures :  
 $T_1 (40.61, 46.48)$  et  $T_2 (62.59, 33.68)$  ;  $T'_1 (49.04, 64.52)$  et  $T'_2 (72.96, 55.88)$ .

## 4 INTERSECTION DE DEUX CERCLES

On cherche les points d'intersection de deux cercles (fig. 4.15.). Les données sont  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

Pour qu'il y ait intersection, il faut que (condition d'existence) :

$$O_1 O_2 < R_1 + R_2$$

$$O_1 O_2 > |R_1 - R_2|$$

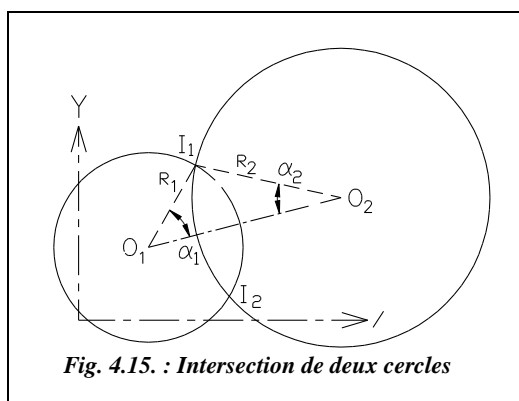


Fig. 4.15. : Intersection de deux cercles

### Cas particuliers

- Si  $O_1 O_2 = R_1 + R_2$ , les cercles sont tangents extérieurement.
- Si  $O_1 O_2 = |R_1 - R_2|$ , les cercles sont tangents intérieurement.

Le **déroulement des calculs** est le suivant :  $O_1$  et  $O_2$  étant connus, on calcule  $G_{O_1 O_2}$  et  $D_{O_1 O_2}$ . On calcule ensuite les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  comme suit :

$$\cos \alpha_1 = \frac{R_1^2 + (O_1 O_2)^2 - R_2^2}{2R_1 \cdot O_1 O_2} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_2 = \frac{R_2^2 + (O_1 O_2)^2 - R_1^2}{2R_2 \cdot O_1 O_2}$$

- Si on effectue les calculs à partir de  $O_1$ , on obtient :

$$G_{O_1 I_1} = G_{O_1 O_2} - \alpha_1 \quad \text{et} \quad G_{O_1 I_2} = G_{O_1 O_2} + \alpha_1.$$

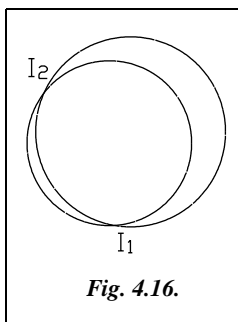
Enfinement :

$$I_1 \begin{cases} X_{O_1} + R_1 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} - \alpha_1) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} - \alpha_1) \end{cases} \quad I_2 \begin{cases} X_{O_1} - R_1 \cdot \sin(G_{O_1 O_2} + \alpha_1) \\ Y_{O_1} + R_1 \cdot \cos(G_{O_1 O_2} + \alpha_1) \end{cases}$$

Pour vérifier, on peut effectuer les mêmes calculs depuis  $O_2$  ou bien contrôler que  $G_{I_1 I_2} = G_{O_1 O_2} + 100$

### Application

Trouvez les coordonnées des deux points d'intersection des deux cercles suivants : cercle de centre  $O_1 (45,62 ; 33,24)$  et de rayon  $R_1 = 17,45$  m, cercle de centre  $O_2 (50,13 ; 35,64)$  et de rayon  $R_2 = 20,12$  m.



### Résolution graphique



Résolution extrêmement simple dans ce cas puisqu'il suffit de dessiner les deux cercles.

Commande **CERCLE** de centre  $45.62,33.24$  et de rayon  $17.45$ .

Commande **CERCLE** de centre  $50.13,35.64$  et de rayon  $20.12$ .

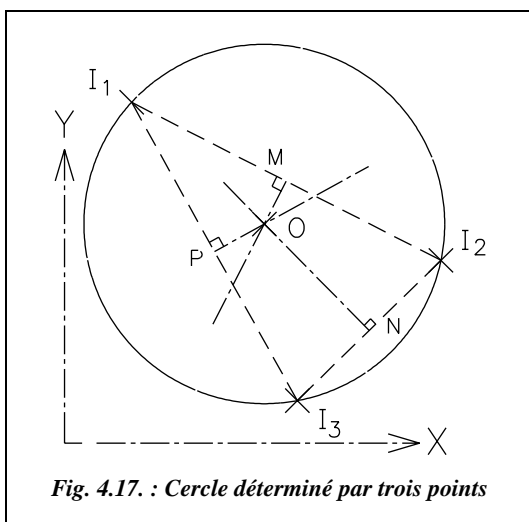
Commande **ID** pour obtenir les coordonnées des intersections.

### Résultats

$I_1 (31.75,43.84)$  et  $I_2 (46.66,15.82)$ .

## 5 DÉTERMINATION D'UN CERCLE

### 5.1 Cercle défini par trois points



On cherche le centre et le rayon du cercle passant par trois points donnés (fig. 4.17.). Les données sont  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

Les trois médiatrices des trois côtés du triangle inscrit ( $I_1$ - $I_2$ - $I_3$ ) se coupent au centre du cercle  $O$ .

On peut, par exemple, calculer l'intersection des médiatrices issues de  $M$  et  $N$  à partir des formules de Delambre.

Les coordonnées de  $M$ , milieu de  $I_1 I_2$  et de  $N$ , milieu de  $I_2 I_3$ , sont les suivantes :



$$M \left( \frac{X_{I1} + X_{I2}}{2} ; \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{2} \right) \text{ et } N \left( \frac{X_{I2} + X_{I3}}{2} ; \frac{Y_{I2} + Y_{I3}}{2} \right)$$

Les gisements nécessaires sont :  $G_{MO} = G_{I1I2} + 100$  et  $G_{NO} = G_{I2I3} + 100$

Les formules de Delambre donnent  $X_O$  et  $Y_O$ .

Le rayon se calcule par  $R = OI_1 = OI_2 = OI_3$ ; ce calcul sert également de contrôle.

### Application

Donnez les caractéristiques du cercle passant par  $I_1(45,34 ; 33,21)$ ,  $I_2(121,54 ; 98,75)$  et  $I_3(73,13 ; 144,54)$ .



**Résolution graphique :** elle se résume à l'utilisation de la commande de tracé d'un cercle, option trois points.

Menu DESSIN / CERCLE / Par 3 points, premier point 45.34,33.21↵, deuxième point 121.54,98.75↵, troisième point 73.13,144.54↵. Commande LISTE↵ pour obtenir les caractéristiques du cercle.

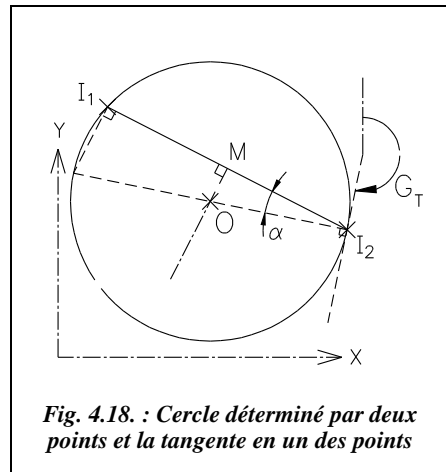
### Résultats

O (64.98,87.44) et  $R = 57.68$  m.

## 5.2 Cercle défini par deux points et la tangente en un des points

On cherche le centre et le rayon du cercle passant par deux points donnés et tangents à une droite donnée passant par un des deux points (fig. 4.18.). Les données sont  $I_1$ ,  $I_2$  et  $G_T$ .

La médiatrice de  $I_1I_2$  et la perpendiculaire à la tangente passant par  $I_2$  se coupent au centre du cercle O. On peut, par exemple, calculer l'intersection de ces deux droites à partir des formules de Delambre.



Les coordonnées de M, milieu de  $I_1I_2$  sont :

$$M \left( \frac{X_{I_1} + X_{I_2}}{2} ; \frac{Y_{I_1} + Y_{I_2}}{2} \right)$$

On a  $G_{MO} = G_{II_2} + 100$  et  $G_{I_2O} = G_T + 100$ .

Les formules de Delambre donnent les coordonnées  $(X_O ; Y_O)$ . Le rayon  $R$  est calculé par  $R = I_1O = I_2O$ .

À titre de **vérification**, ou bien si le rayon  $R$  est la seule valeur cherchée, on peut aussi calculer :

$$\alpha = G_{I_2II} - G_{I_2O} = G_{I_2II} - (G_T + 100) \text{ et en déduire } R = \frac{I_1I_2}{2 \cos \alpha}.$$

#### Application

Trouvez les caractéristiques du cercle passant par  $I_1 (45,34 ; 33,21)$  et  $I_2 (121,54 ; 98,75)$ , le gisement de la tangente en  $I_2$  étant  $G_T = 94,125$  gon.



**Résolution graphique** : l'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.4.

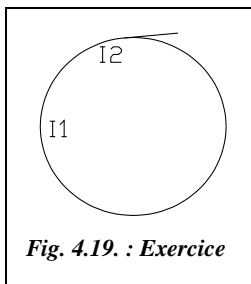


Fig. 4.19. : Exercice

Tracé de la tangente en  $I_2$  : **LIGNE** du point  $121.54,98.75$  au point @ $50 < 94.125$ .

Dessin du cercle : menu **DESSIN / CERCLE / Par 3 points**, 1<sup>er</sup> point  $45.34,33.21$ , 2<sup>e</sup> point **EXTrémité** de la tangente (point  $I_2$ ), 3<sup>e</sup> point **TANgent** à la tangente.

Commande **LISTE** pour obtenir les caractéristiques du cercle.

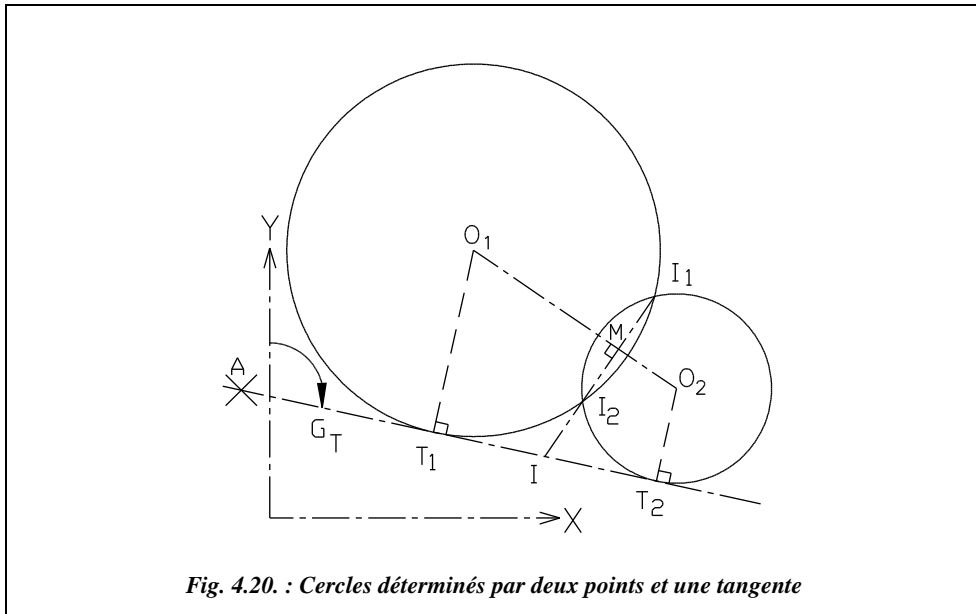
#### Résultats

O (129.53,12.39) et  $R = 86.73$  m.

### 5.3 Cercle passant par deux points et tangent à une droite

On cherche les deux cercles tangents à une droite donnée et passant par deux points connus  $I_1$  et  $I_2$  non situés sur cette droite (fig. 4.20.). Les données sont les points A,  $I_1$ ,  $I_2$  et le gisement  $G_T$ .

Les centres  $O_1$  et  $O_2$  sont calculés par intersection (formules de Delambre) de la médiatrice de  $I_1I_2$  avec les deux perpendiculaires à la tangente issues de  $T_1$  et  $T_2$ .



Les coordonnées de M, milieu de  $I_1I_2$ , sont :

$$M \left( \frac{X_{I1} + X_{I2}}{2} ; \frac{Y_{I1} + Y_{I2}}{2} \right)$$

La droite  $I_1I_2$  étant connue, on peut calculer  $G_{I1I2}$ . Le gisement de la médiatrice  $O_1O_2$  est alors :

$$G_{O1O2} = G_{I1I2} - 100$$

La puissance du point I (voir chap. 5, §3.4.) par rapport aux deux cercles donne  $I I_1 \cdot I I_2 = I T_1^2 = I T_2^2$ .

On calcule les coordonnées du point I par intersection de la tangente définie par A et  $G_T$  et de la droite  $(I_1I_2)$  définie par les deux points  $I_1$  et  $I_2$  (formules de Delambre).

On peut maintenant calculer  $I T_1$  et  $I T_2$  en appliquant  $I T_1 = I T_2 = \sqrt{I I_1 \cdot I I_2}$ . On peut donc calculer les coordonnées de  $T_1$  et  $T_2$  à partir de celles de I.

Comme  $G_{T1O1} = G_{T2O2} = G_T - 100$ , les formules de Delambre donnent  $O_1$  et  $O_2$ .

Les rayons  $R_1$  et  $R_2$  sont calculés à partir de  $R_1 = O_1T_1$  et  $R_2 = O_2T_2$ .

**On vérifie** que  $I_1O_1 = I_2O_1 = R_1$  et  $I_1O_2 = I_2O_2 = R_2$ .

### Application

Calculez les caractéristiques des deux cercles passant par  $I_1$  (612,32 ; 593,48) et  $I_2$  (628,33 ; 547,67) et tangents à la droite passant par A(500 ; 500) et de gisement  $G_T = 113,964$  gon.



### Résolution graphique

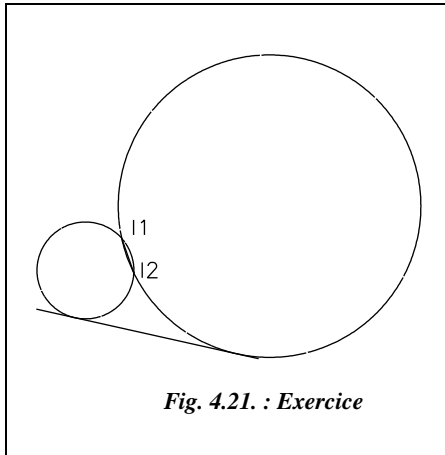


Fig. 4.21. : Exercice

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.4.

Tracez la tangente : *LIGNE* du point 500,500 au point @300<113.964

Tracez la droite  $I_1I_2$  : *LIGNE* du point 612.32,593.48 au point 628.33,547.67.

*CERCLE* option *3Points*, premier point *EXTrémité* de... (point  $I_1$ ), deuxième point *EXTrémité* de... (point  $I_2$ ), troisième point *TANgent* à la tangente (cliquez vers la zone de tangence souhaitée ; suivant l'endroit où vous cliquez, vous obtiendrez un cercle ou l'autre). Même opération pour le deuxième cercle.

La commande *LISTE* permet d'obtenir les caractéristiques des deux cercles.

### Résultats

$T_1$  (550.626 , 488.714) ;  $T_2$  (763.856 , 441.178) ; I (657.241 , 464.946) ;  
 $O_1$  (564.53 , 551.08),  $R_1 = 63.89$  m ;  $O_2$  (807.27 , 635.91),  $R_2 = 199.51$  m.

## 5.4 Cercle donné par un rayon, un point et une tangente

On cherche les deux cercles de même rayon  $R$  connu centrés en  $O_1$  et  $O_2$ , passant par le point I et tangents à une droite donnée ne passant pas par I (fig. 4.22.). Les données sont les points I et A, le gisement  $G_T$  et le rayon  $R$ .

Une solution possible est de remarquer que les centres  $O_1$  et  $O_2$  sont situés à l'intersection du cercle de centre I et de rayon  $R$  avec la parallèle à la tangente située à la distance  $R$  de cette dernière.

On calcule le point  $A'$  par rayonnement depuis le point A, c'est-à-dire :

$$X_{A'} = X_A + R \sin(G_T - 100)$$

$$Y_{A'} = Y_A + R \cos(G_T - 100)$$

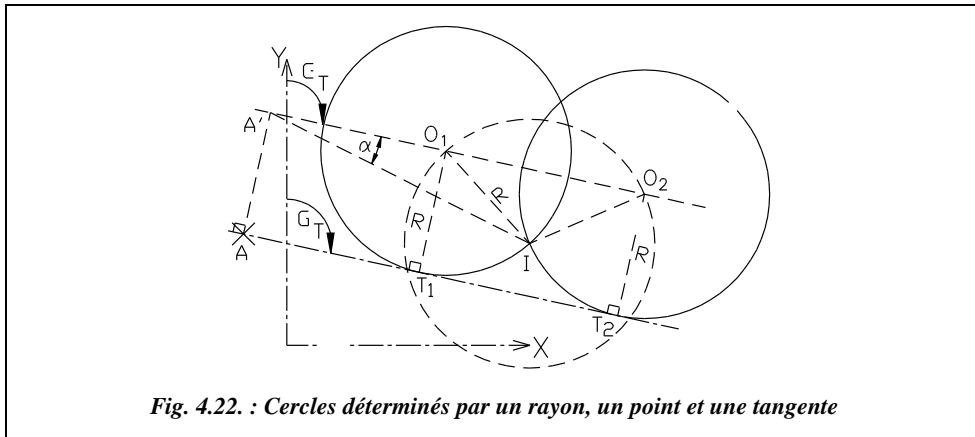


Fig. 4.22. : Cercles déterminés par un rayon, un point et une tangente

Si I est à droite de la tangente, c'est-à-dire  $G_{AI} > G_T$ , remplacez dans ces formules ( $G_T - 100$ ) par ( $G_T + 100$ ).

Les points  $O_1$  et  $O_2$  sont les intersections entre la droite issue de  $A'$  et le cercle de centre I et de rayon  $R$ .

En posant  $\alpha = G_{A'I} - G_T$ , on obtient les coordonnées suivants :

$$\begin{aligned} X_{O1} &= X_{A'} + \left[ A'I \cdot \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \sin G_T \\ Y_{O1} &= Y_{A'} + \left[ A'I \cdot \cos \alpha - \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \cos G_T \\ X_{O2} &= X_{A'} + \left[ A'I \cdot \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \sin G_T \\ Y_{O2} &= Y_{A'} + \left[ A'I \cdot \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (A'I \cdot \sin \alpha)^2} \right] \cdot \cos G_T \end{aligned}$$

On vérifie que  $G_{O1O2} = G_T$  et  $IO_1 = IO_2 = R$ .

#### Application

Déterminez les centres des deux cercles de rayon  $R = 150,00$  m, passant par I (230,46 ; 152,52), tangents à la droite issue de l'origine et de gisement  $G_T = 106,666$  gon.



AutoCAD LT

#### Résolution graphique

L'environnement graphique est identique à celui du paragraphe 1.4.

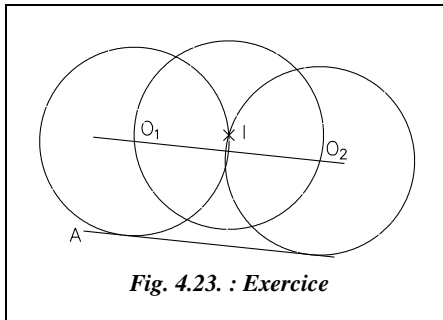


Fig. 4.23. : Exercice

AutoCAD ne possédant pas de fonction de tracé de cercle du type (Point, Tangent, Rayon), il faut avoir recours à une construction intermédiaire.

Tracé de la tangente : *LIGNE* du point  $O_1$  au point  $@400<106.666$

Placez le point I : *POINT* 230.46,152.52

Tracé du cercle de centre I et de rayon R : *CERCLE* centre 230.46,152,52 rayon 150

Parallèle à la tangente décalée de R : *DECALER* la tangente par 150 vers : cliquez du côté du point I.

Construction des deux cercles cherchés : *CERCLE* de centre *INT* de ... et de rayon 150

Commande *Liste* pour obtenir les caractéristiques des deux cercles.

#### Résultats

$O_1$  (80.81,142.33) et  $O_2$  (374.73,111.45).

## 5.5 Cercle défini par son rayon et deux tangentes

C'est le cas de la recherche des cercles permettant de raccorder deux alignements routiers : on connaît le rayon du cercle, choisi en fonction du type de routes à raccorder, et les alignements droits donc leur point d'intersection S ; on cherche la position du centre du raccordement circulaire. Il existe quatre solutions possibles (fig. 4.24.).

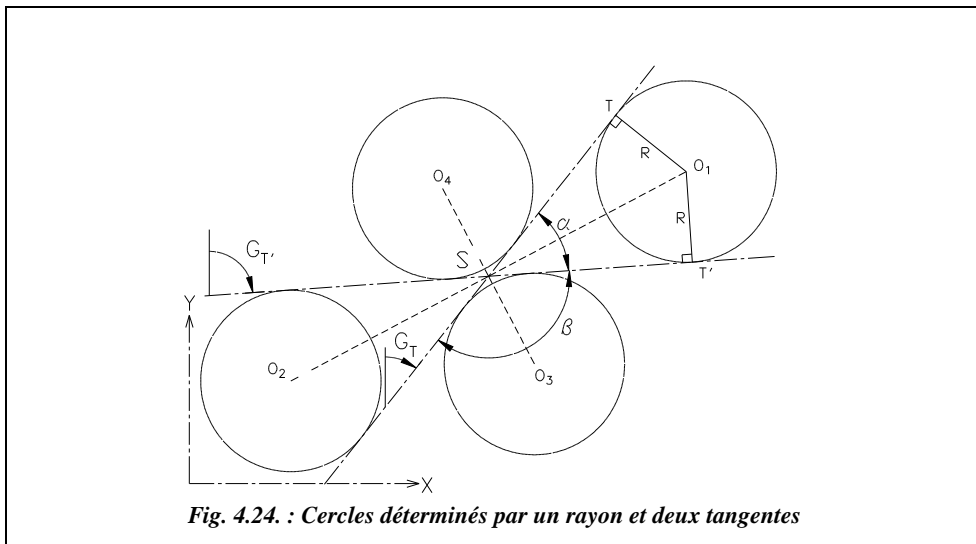


Fig. 4.24. : Cercles déterminés par un rayon et deux tangentes

Les coordonnées de l'intersection S, les gisements  $G_{T'}$  et  $G_T$ , et le rayon  $R$  sont donnés.

La démarche de calcul étant la même pour les quatre cercles, il faut calculer d'abord le cercle centré en  $O_1$ , puis en déduire les coordonnées de  $O_2$ , de  $O_3$  et de  $O_4$ .

Connaissant les coordonnées du point S, on peut calculer les coordonnées du centre  $O_1$  depuis ce point. On voit sur la figure 4.24. que :

$$\alpha = G_{T'} - G_T, \quad G_{SO_1} = G_T + \frac{\alpha}{2} = \frac{G_T + G_{T'}}{2} \quad \text{et} \quad G_{SO_2} = 200 + G_{SO_1}$$

Donc, en simplifiant, on obtient :

$$\begin{array}{l} O_1 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2}\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2}\right) \end{array} \right. \quad O_2 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 200\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\alpha/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 200\right) \end{array} \right. \end{array}$$

De même, le calcul de  $O_3$  et  $O_4$  fait appel à l'angle  $\beta = 200 - \alpha$ , donc :

$$\begin{array}{l} O_3 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 100\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 100\right) \end{array} \right. \quad O_4 \left| \begin{array}{l} X_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \sin\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 300\right) \\ Y_S + \frac{R}{\sin(\beta/2)} \cdot \cos\left(\frac{G_T + G_{T'}}{2} + 300\right) \end{array} \right. \end{array}$$

**Pour vérifier**, on peut calculer les coordonnées de T (ou T'), avec  $ST = R/\tan(\alpha/2)$  et contrôler que  $O_1T = R$ .

#### Application

Trouver les centres des quatre cercles de rayon 150,00 m, tangents aux deux droites suivantes : sommet S (380,22 ; 505,86), gisements 42,724 gon et 95,620 gon.



**Résolution graphique** (fig. 4.24.)

Environnement graphique : voir § 1.4.

Tracé des tangentes : *LIGNE* du point 380.22,505.86↵ au point @400<42.724↵, *LIGNE*↵ du point S (*EXTrémité* de) au point @400<95.620↵, *LIGNE*↵ du point S au point @-400<42.724↵, *LIGNE*↵ du point S au point @-400<95.620↵.

Tracé des cercles : menu *DESSIN / CERCLE / TANGENT, TANGENT, RAYON*. Cliquez ensuite les zones de tangence et donnez le rayon : 150↵.

Les caractéristiques des cercles s'obtiennent avec la commande *LISTE↵* (ou encore *ID↵* *CENTre* du cercle).

### Résultats

$O_1(709.15,678.89)$ ,  $O_2(51.29,332.84)$ ,  $O_3(456.54,360.77)$ ,  $O_4(303.89,650.96)$ .

## 5.6 Cercle défini par un point et deux tangentes

C'est un cas pratiquement identique à celui du paragraphe précédent, sauf que le rayon est inconnu mais on impose un point de passage fixe P appelé « point obligé », un passage à niveau par exemple. Les données sont les coordonnées des points S et P, les gisements  $G_T$  et  $G_{T'}$  (fig. 4.25.).

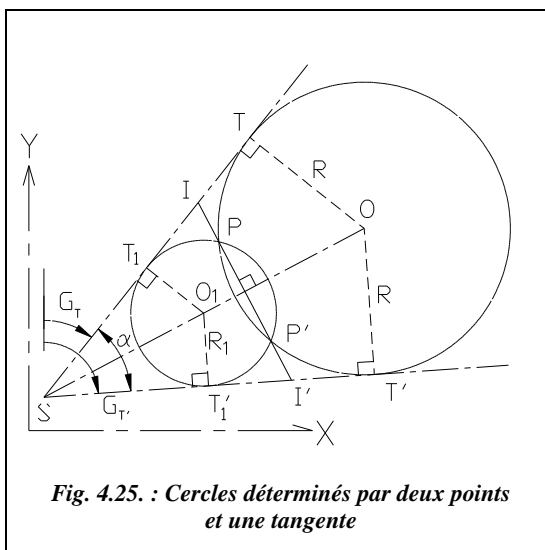


Fig. 4.25. : Cercles déterminés par deux points et une tangente

Il existe deux cercles passant par le point P et tangents à ST et ST' : le cercle centré en  $O_1$  et celui centré en O.

Ils définissent deux points d'intersection P et P' symétriques par rapport à la droite SO. Le calcul des rayons et des centres se fait à partir des points T et  $T_1$ , eux-mêmes déterminés à partir des points I et I'.

Les coordonnées du point I, intersection des droites ST et PP', sont calculées par les formules de Delambre :

- droite ST passant par le point S et de gisement  $G_T$ ;

- droite PP' passant par le point P et de gisement  $(G_T + G_{T'})/2 + 100$ .

On effectue le même calcul des coordonnées du point I', intersection des droites ST' et PP'. La puissance du point I par rapport aux deux cercles est  $IP \cdot IP' = (IT)^2 = (IT_1)^2$ .

Comme  $IP = I'P'$ , on a :  $IP' = I'P$ . On en déduit IT et  $IT_1$  qui permettent de calculer les coordonnées des points T et  $T_1$  à partir du point I.

Alors,  $R = ST \cdot \tan(\alpha/2)$  et  $R_1 = ST_1 \cdot \tan(\alpha/2)$ , avec  $\alpha = G_{T'} - G_T$ .

On est ramené au cas du paragraphe précédent où l'on connaissait le rayon du cercle.



### Application

Trouvez les cercles passant par P (200,00 ; 122,00) et tangents aux droites suivantes :

- droite passant par S (50,00 ; 50,00) et de gisement 20,050 gon ;
- droite passant par S et de gisement 135,130 gon.



### Résolution graphique

AutoCAD LT

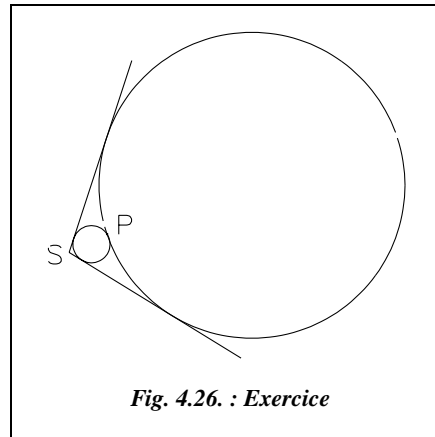
Environnement de travail identique à celui du paragraphe 1.4.

Dessin des droites : **LIGNE** du point 50,50 au point @800<20.050. **LIGNE** du point **EXTrémité** de... (point S) au point @800<135.130.

Placez le point P : **POINT** 200,122.

Dessin du premier cercle : commande **CERCLE**, option **3 Points**, premier point **TANgent** à la première droite, deuxième point **TANgent** à la deuxième droite, troisième point **NODal** de... (point P).

Dessin du deuxième cercle : même chose en cliquant les zones de tangence pour définir le deuxième cercle. Caractéristiques des cercles avec la commande **LISTE**.



### Résultats

O (137.97, 82.31),  $R = 73.64$  m ; O<sub>1</sub> (774.59m, 316.15m),  $R_1 = 606.51$  m.

## 5.7 Cercle défini par trois tangentes

On cherche le cercle tangent à trois droites données (fig. 4.27.). Il faut être attentif à l'orientation des tangentes suivant le quadrant du point de tangence. Les données sont les trois droites définies respectivement par les coordonnées de trois points A, B et C et les gisements des trois directions  $G_A$ ,  $G_B$  et  $G_C$ .

Le centre du cercle se trouve à l'intersection des bissectrices MO, NO et PO. Il sera déterminé à partir des points M, N ou P, eux-mêmes déterminés par l'intersection (formules de Delambre) des droites données.

Par exemple, il sera déterminé à partir des points M et N, eux-mêmes déterminés par l'intersection :

- des droites AM et CM pour le point M ;
- des droites AN et BN pour le point N.

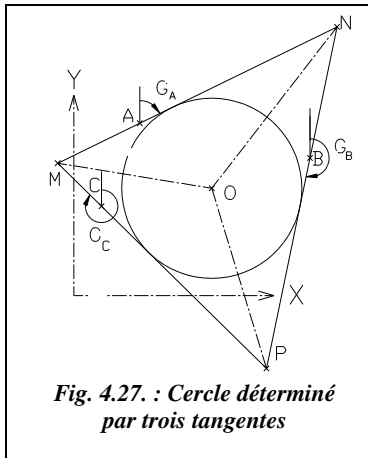


Fig. 4.27. : Cercle déterminé par trois tangentes

Le point O est déterminé par intersection des droites MO et NO définies par :

- les points M et N maintenant connus.
- les gisements de MO et NO :

$$G_{MO} = \frac{G_C - 200 + G_A}{2}$$

$$G_{NO} = \frac{G_A + 200 + G_B}{2}$$

On vérifie en calculant de O à partir de N et P ou bien à partir de M et P.

### Application

Trouvez le cercle tangent aux trois droites suivantes :

A (20 ; 50),  $G_A = 78$  gon ;

B (60 ; 40),  $G_B = 206$  gon ;

C (10 ; 30),  $G_C = 353$  gon.



### Résolution graphique

L'environnement de travail est identique à celui du paragraphe 1.4.

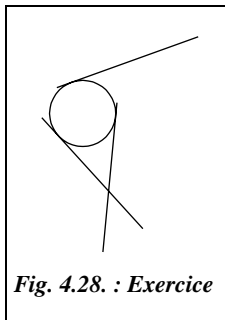


Fig. 4.28. : Exercice

Dessin des droites : *LIGNE* du point 20,50 au point @100<78 du point 60,40 au point @100<206 du point 10,30 au point @100<353.

Dessin du cercle : *CERCLE* option 3 Points, 1<sup>er</sup> point *TANGent* à la 1<sup>re</sup> droite, 2<sup>e</sup> point *TANGent* à la 2<sup>e</sup> droite, 3<sup>e</sup> point *TANGent* à la 3<sup>e</sup> droite.

Les caractéristiques du cercle sont obtenues avec la commande *LISTE*.

### Résultats

O (37.21, 32.80) ;  $R = 22.01$  m.

## 5.8 Cercle défini par son rayon et deux points

On cherche les deux cercles de rayon  $R$  connu passant par deux points A et B donnés (fig. 4.29.). Les données sont les coordonnées des deux points A, B et le rayon  $R$ .

Les coordonnées des points O et O<sub>1</sub> sont déterminées depuis M, milieu de A et B.

A et B étant connus, on calcule G<sub>AB</sub> et D<sub>AB</sub>.

Les coordonnées de M sont :

$$M = \left( \frac{X_A + X_B}{2}, \frac{Y_A + Y_B}{2} \right)$$

Les gisements de MO et MO<sub>1</sub> sont : G<sub>MO</sub> = G<sub>AB</sub> + 100

$$G_{MO_1} = G_{AB} - 100$$

Les distances MO ou MO<sub>1</sub> sont :

$$D_{MO} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{D_{AB}}{2}\right)^2}$$

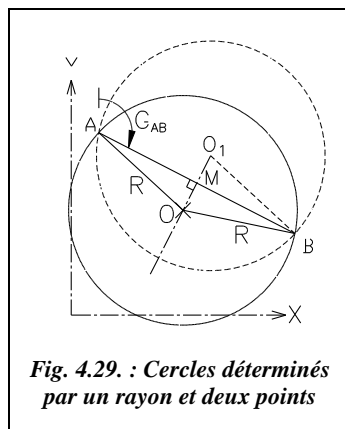


Fig. 4.29. : Cercles déterminés par un rayon et deux points

Finalement :

$O \left  \begin{array}{l} \frac{X_A + X_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \sin(G_{AB} + 100) \\ \frac{Y_A + Y_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \cos(G_{AB} + 100) \end{array} \right.$	$O_1 \left  \begin{array}{l} \frac{X_A + X_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \sin(G_{AB} - 100) \\ \frac{Y_A + Y_B}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{D_{AB}^2}{4}} \cdot \cos(G_{AB} - 100) \end{array} \right.$
--	--

On vérifie que OA = OB = O<sub>1</sub>A = O<sub>1</sub>B = R.

**Application**

Voir l'exercice d'application du paragraphe suivant.

### 5.9 Cercle défini par deux points et une flèche

On cherche les deux cercles passant par deux points A et B donnés et dont on connaît la flèche par rapport à la corde AB (fig. 4.30.).

Les données sont les coordonnées des deux points A, B et la flèche f = MN.

On revient au cas précédent en remarquant que dans le triangle AMO :

$$R^2 = (R - f)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad R = \frac{f^2 + \frac{AB^2}{4}}{2f}$$

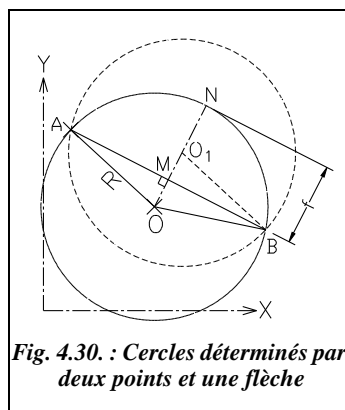


Fig. 4.30. : Cercles déterminés par deux points et une flèche

### Application

Trouvez les cercles passant par B (202,78 ; 136,89) et A (245,56 ; 123,32), dont la flèche (entre cercle et corde AB) a pour valeur 28,87 m.



### Résolution graphique

AutoCAD LT

Nous envisagerons les deux cas de figure suivants :

**1 - On connaît la flèche  $f = 28,87$  m (fig. 4.31.).**

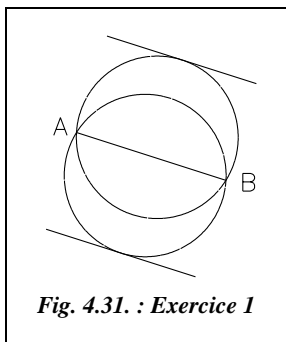


Fig. 4.31. : Exercice 1

Dessin de la droite AB : *LIGNE* du point 245.56,123.32 au point 202.78,136.89.

Construction de la flèche : *DECALER* par 28.87 la droite AB, une fois vers le haut, une fois vers le bas.

Dessin des cercles : *CERCLE* option 3 points, premier point *EXTrémité* de... (point A), deuxième point *EXTrémité* de... (point B), troisième point *TANgent* à la droite inférieure décalée depuis AB. Même opération pour le second cercle.

Les caractéristiques des cercles s'obtiennent avec la commande *LISTE*.

**2 - On connaît le rayon  $R = 23,16$  m (fig. 4.32.)**

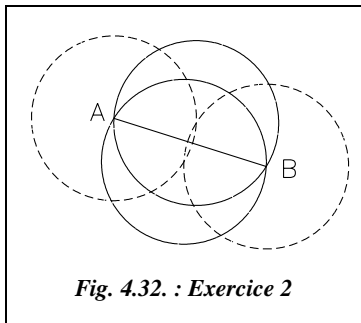


Fig. 4.32. : Exercice 2

Dessin de la droite AB : voir plus haut.

*CERCLE* de centre *EXTrémité* de... (point A) et de rayon 23.16.

*CERCLE* de centre *EXTrémité* de... (point B) et de rayon 23.16.

On obtient les deux centres O et  $O_1$  à l'intersection des deux cercles précédemment tracés.

Dessin des cercles cherchés : *CERCLE* de centre *INTersection* de... et de rayon 23.16.

### Résultats

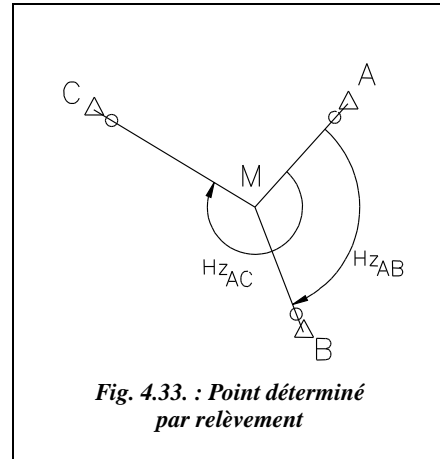
O (222.44, 124.66),  $O_1$  (225.90, 135.55),  $R = 23.16$  m.

## 6 POINT DÉTERMINÉ PAR RELÈVEMENT

### 6.1 Définition

Un point relevé M est un point stationné depuis lequel on vise plusieurs points connus (points d'appui du relèvement, soit A, B et C sur la figure 4.33.). Le but est de déterminer les coordonnées du point M stationné. L'intérêt principal de cette technique est d'obtenir ces coordonnées en effectuant une seule station et uniquement avec des mesures angulaires ; pour être plus précises, les visées doivent être éloignées (voir chap. 1, § 6.).

L'opérateur stationne donc au point M puis effectue un tour d'horizon sur les points A, B et C ; après réduction du tour d'horizon, on connaît les angles  $H_{z_{AB}}$  et  $H_{z_{AC}}$ .



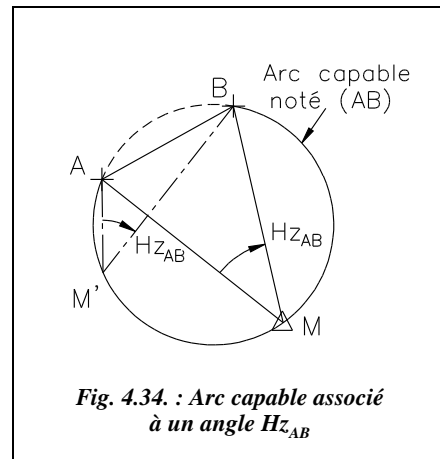
### 6.2 Détermination d'un point relevé M

#### 6.2.1 Arc capable associé à l'angle $H_{z_{AB}}$

À partir d'un triplet de points A, B et M, on peut définir un cercle unique passant par ces trois points. Tout point M de l'arc AB (en trait continu sur la figure 4.34.) est tel que l'angle AMB est constant. Cet arc est appelé arc capable du segment AB associé à l'angle  $H_{z_{AB}}$  ; il correspond aux différents lieux possibles du point M.

La partie du cercle dessinée en pointillé est associée à un angle de  $(200 - H_{z_{AB}})$ .

Donc si l'on veut déterminer complètement les coordonnées du point M, il faut au moins un autre point d'appui C pour construire un deuxième arc capable dont l'intersection avec le premier donne un point M unique.



## 6.2.2 Coordonnées du point M par les formules de Delambre

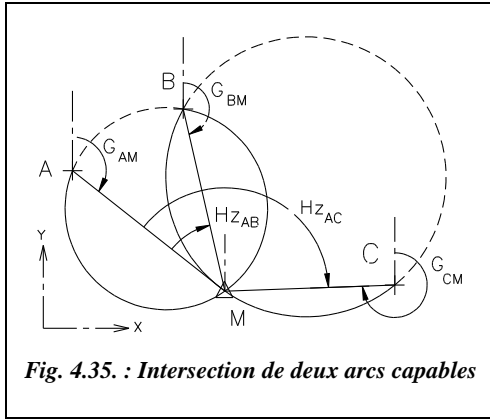


Fig. 4.35. : Intersection de deux arcs capables

Sur la figure 4.35., on constate que l'on peut calculer le point M par intersection à partir de deux des trois visées sur A, B et C.

C'est pourquoi il est possible d'utiliser les formules de Delambre dans lesquelles les gisements des différentes visées seront remplacés par les angles  $H_{z_{AB}}$  et  $H_{z_{AC}}$  du tour d'horizon.

Pour établir les relations entre  $G_{AM}$ ,  $G_{BM}$ ,  $G_{CM}$ ,  $H_{z_{AB}}$  et  $H_{z_{AC}}$ , on peut écrire autour du point M que  $G_{BM} = G_{AM} + H_{z_{AB}}$  et  $G_{CM} = G_{AM} + H_{z_{AC}}$

Les formules de Delambre donnent :

$$(Y_M - Y_A)(\tan G_{BM} - \tan G_{AM}) = (X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \cdot \tan G_{BM} \quad (1)$$

$$(Y_M - Y_A)(\tan G_{CM} - \tan G_{AM}) = (X_C - X_A) - (Y_C - Y_A) \cdot \tan G_{CM} \quad (2)$$

La suite de la démonstration doit permettre de calculer  $\tan G_{AM}$ ,  $\tan G_{BM}$  et  $\tan G_{CM}$  en fonction des données A, B, C,  $H_{z_{AB}}$  et  $H_{z_{AC}}$ .

$$\tan G_{BM} - \tan G_{AM} = \frac{\sin G_{BM}}{\cos G_{BM}} - \frac{\sin G_{AM}}{\cos G_{AM}} = \frac{\sin G_{BM} \cdot \cos G_{AM} - \cos G_{BM} \cdot \sin G_{AM}}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}}$$

$$\text{donc } \tan G_{BM} - \tan G_{AM} = \frac{\sin(G_{BM} - G_{AM})}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}} = \frac{\sin H_{z_{AB}}}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}} \quad (3)$$

$$\text{de même } \tan G_{CM} - \tan G_{AM} = \frac{\sin H_{z_{AC}}}{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{CM}} \quad (4)$$

En éliminant  $(Y_M - Y_A)$  dans les équations (1) et (2) et en y reportant les résultats des équations (3) et (4), on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} [(X_B - X_A) - (Y_B - Y_A) \cdot \tan G_{BM}] \cdot \frac{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{BM}}{\sin H_{z_{AB}}} \\ = [(X_C - X_A) - (Y_C - Y_A) \cdot \tan G_{CM}] \cdot \frac{\cos G_{AM} \cdot \cos G_{CM}}{\sin H_{z_{AC}}} \end{aligned}$$

En distribuant et en simplifiant, on obtient :

$$\frac{(X_B - X_A) \cdot \cos G_{BM} - (Y_B - Y_A) \cdot \sin G_{BM}}{\sin H_{z_{AB}}} = \frac{(X_C - X_A) \cdot \cos G_{CM} - (Y_C - Y_A) \cdot \sin G_{CM}}{\sin H_{z_{AC}}} \quad (5)$$

Les relations trigonométriques  $\sin(a + b)$  et  $\cos(a + b)$  donnent :

$$\cos G_{BM} = \cos(G_{AM} + Hz_{AB}) = \cos G_{AM} \cdot \cos Hz_{AB} - \sin G_{AM} \cdot \sin Hz_{AB}$$

$$\cos G_{CM} = \cos(G_{AM} + Hz_{AC}) = \cos G_{AM} \cdot \cos Hz_{AC} - \sin G_{AM} \cdot \sin Hz_{AC}$$

$$\sin G_{BM} = \sin(G_{AM} + Hz_{AB}) = \sin G_{AM} \cdot \cos Hz_{AB} + \cos G_{AM} \cdot \sin Hz_{AB}$$

$$\sin G_{CM} = \sin(G_{AM} + Hz_{AC}) = \sin G_{AM} \cdot \cos Hz_{AC} + \cos G_{AM} \cdot \sin Hz_{AC}$$

On reporte ceci dans l'équation (5) dont on divise ensuite chaque membre par  $\sin G_{AM}$ . Par suite, il vient :

$$\tan G_{AM} = \frac{(X_B - X_A) \cdot \cotan Hz_{AB} - (X_C - X_A) \cdot \cotan Hz_{AC} + (Y_C - Y_B)}{(Y_B - Y_A) \cdot \cotan Hz_{AB} - (Y_C - Y_A) \cdot \cotan Hz_{AC} - (X_C - X_B)}$$

$$\tan G_{BM} = \tan(G_{AM} + Hz_{AB}) = \frac{\tan G_{AM} + \tan Hz_{AB}}{1 - \tan G_{AM} \cdot \tan Hz_{AB}}$$

Il reste à reporter ces résultats dans les formules de Delambre établie pour l'intersection afin d'obtenir  $Y_M$  puis  $X_M$ .

#### Remarque

- Il n'est pas nécessaire de calculer les gisements  $G_{AM}$  et  $G_{BM}$  puisqu'ils interviennent dans les formules de Delambre par leur tangente  $\tan G_{AM}$  et  $\tan G_{BM}$ . On peut donc se contenter de garder la valeur des tangentes.
- Comme les formules de Delambre pour l'intersection, ces formules présentent des problèmes de définition à cause des tangentes et des cotangentes utilisées.
  - Les problèmes particuliers aux formules de l'intersection ont été traités au paragraphe 1.2. de ce chapitre.
  - Les problèmes particuliers aux formules de relèvement sont les suivants : si  $Hz_{AB}$  ou  $Hz_{AC}$  valent 0 ou 200 gon, c'est-à-dire lorsque deux points anciens se trouvent alignés avec le point M, la formule précédemment démontrée est alors inutilisable. Toutefois ce cas est rare dans la réalité.

#### Application

Trouver la formule donnant  $\tan G_{AM}$  dans le cas où A, C et M sont alignés.

#### Réponse

L'équation (2) donne  $\tan G_{AM} = \tan G_{CM} = (X_C - X_A)/(Y_C - Y_A)$ .

Puis  $\tan G_{BM} = \tan(G_{AM} + Hz_{AB}) = (\tan G_{AM} + \tan Hz_{AB})/(1 - \tan G_{AM} \cdot \tan Hz_{AB})$ .

Il ne reste plus qu'à appliquer les formules d'intersection.

## 6.3 Exemple

Calculez les coordonnées du point relevé M depuis lequel on a visé les points A, B et C donnés ci-contre.

Point	X (m)	Y (m)	Hz (gon)
A	123,45	32,26	0,0000
B	46,34	227,75	109,3821
C	354,14	189,98	260,5907

### Réponse

$\tan G_{AM} = 0,424499$  ;  $\tan G_{BM} = -1,635370$  ;  $X_M = 173,44$  m et  $Y_M = 150,03$  m.

## 6.4 Construction graphique d'un point relevé



On utilise la propriété abordée au paragraphe 6.2.1. : l'angle entre la tangente au cercle en A (ou la tangente au cercle en B) et la corde AB est égal à l'angle  $H_{z_{AB}}$  (soit 109,3821 gon). On en déduit le cercle C1 passant par A, B et M (fig. 4.36.).

De même, l'angle entre la corde BC et la tangente au cercle en B (ou en C) est égal à  $H_{z_{BC}}$  (soit  $260,5907 - 109,3821 = 151,2086$  gon). On en déduit le cercle C2 passant par les points B, C et M. Le point M est à l'intersection des deux cercles.

L'environnement de travail à celui du paragraphe 1.4.

### 1 - Dessin des cordes AB et BC :

**LIGNE** ↓ du point 123.45,32.26 ↓ au point 46.34,227.75 ↓ au point 354.14,189.98 ↓ ↓

### 2 - Médiannes de AB et BC :

**ROTATION** ↓ de chaque segment (AB puis BC) autour de **MILieu** de... et d'un angle de 100 gon.

**3 - Dessin de la perpendiculaire à la tangente en A au 1<sup>er</sup> cercle** passant par A, B et M : Dessinez à nouveau la corde AB puis **ROTATION** ↓ autour du point A d'un angle de  $-9.3821$  ↓ ( $-109.3821 + 100$ ).

**4 - Dessin de la perpendiculaire à la tangente en C au 2<sup>e</sup> cercle** passant par C, B et M : Dessiner à nouveau la corde BC puis **ROTATION** ↓ autour du point C d'un angle de  $51.2086$  ↓ ( $151.2086 - 100$ ).

### 5 - Construction du cercle passant par A, B et M :

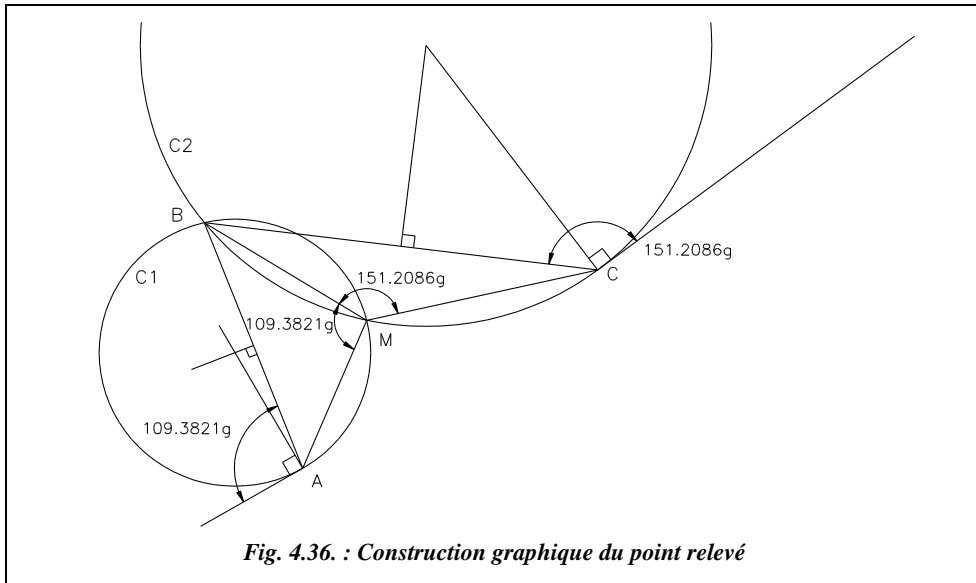
Le centre est à l'intersection de la médiatrice de AB et de la perpendiculaire à la tangente au cercle en A. Si ces deux droites ne se coupent pas, commande **CHNFREIN** ↓ (chanfrein) pour obtenir le centre.

**CERCLE** ↓ de centre **INTersection** de... et de rayon **NODal** de.. (point A ou B).

### 6 - Construction du cercle passant par B, C et M : même méthode.

L'intersection des deux cercles donne le point M dont on lit les coordonnées au moyen de la commande **ID** ↓.





**Résultat**

M (173.44, 150.03).

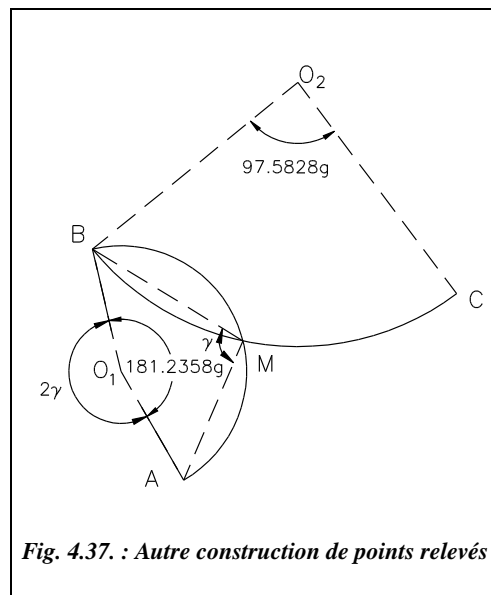
**Autre construction possible :** on peut remarquer que l'angle au centre  $AO_1B$  qui intercepte l'arc AB a pour valeur  $400 - 2\gamma$ ,  $\gamma$  étant l'angle de relèvement (fig. 4.37.).

On peut alors utiliser la commande ARC option Départ, Fin, Angle pour obtenir directement l'arc capable (AB).

ARC ↵ Départ 46.34,227.75 ↵ Fin 123.45,32.26 ↵ Angle 181.2358 ↵

ARC ↵ Départ 354.14,189.98 ↵ Fin EXTRémité de... (point B) Angle 97.5828 ↵.

On obtient ainsi directement le point M.



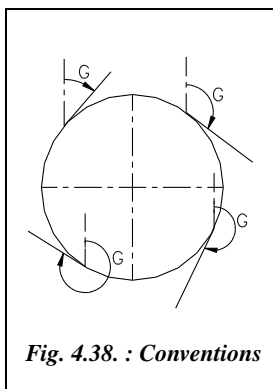
### Remarques

- On peut choisir d'autres couples de points pour construire M (AB et AC ou bien BC et AC) ; le résultat est rigoureusement identique.
- **Attention** : la première construction graphique permet de tracer deux arcs capables symétriques par rapport à la corde AB ; il faut choisir le bon en vérifiant que l'angle AMB est l'angle lu  $H_{z_{AB}}$ . Si l'on fait l'erreur lors de cette construction, on peut rétablir simplement la situation en faisant un *MIROIR* du cercle dessiné par rapport à la corde.
- Cas particulier : si l'angle  $H_{z_{AB}}$  vaut 100 gon, c'est que AB est le diamètre de l'arc capable.

## 7 PROGRAMMATION EN BASIC STANDARD



Le programme INTERS.BAS fourni sur le disque compact constitue un ensemble de plusieurs sous-programmes traitant tous les cas de figure possibles traités dans ce chapitre : les intersections de droites et de cercles, les points de tangence cercle-droite, les définitions d'un cercle ainsi que le calcul d'un point déterminé par relèvement.



Ils ont été regroupés de manière à utiliser les mêmes sous-programmes (entrée des données, distances, gisement, Delambre) et ainsi gagner de la place en mémoire sur la calculatrice.

### Remarques

Pour comprendre les données demandées et suivre les calculs proposés, reportez-vous aux figures de ce chapitre.

Pour ne pas augmenter encore la taille de ce programme, les différents cas de position des tangentes n'ont pas été traités. Il appartient à l'utilisateur d'entrer la « bonne valeur » en tenant compte de la position du point de tangence (fig. 4.38.) :

- point de tangence dans le premier quadrant du cercle : valeur située entre 100 et 200 gon.
- point de tangence dans le deuxième quadrant : valeur située entre 200 et 300 gon.
- point de tangence dans le troisième quadrant : valeur située entre 300 et 400 gon.
- point de tangence dans le quatrième quadrant : valeur inférieure à 100 gon.

# 5

## OUTILS MATHÉMATIQUES

### 1 PRÉLIMINAIRES

Ce paragraphe résume les règles de base que doit observer le géomètre topographe.

#### 1.1 Les croquis

Un lever de terrain doit s'accompagner d'un croquis clair, précis et lisible par une autre personne que le dessinateur l'ayant réalisé. Cela demande habileté et habitude. Notez que certains géomètres arrivent de plus en plus à travailler sans croquis de terrain grâce à l'introduction d'une codification des points levés et enregistrés sur un carnet de terrain. L'effort d'apprentissage d'une codification est rapidement rentabilisé par le gain de temps lors de la phase d'habillage d'un lever de détails (voir tome1, chapitre 8).

#### 1.2 Le schéma général de calcul

Lors de calculs longs et fastidieux, il est très utile pour une éventuelle relecture ou correction de présenter un schéma général de calcul qui représente une sorte de table des matières de la note de calcul. L'ordre de présentation des calculs doit être l'ordre logique des résolutions numériques possibles. Cet ordre logique peut être issu de la construction géométrique. Cela est également valable pour les programmes informatiques (pour lesquels on commence par réaliser un organigramme) et les tableaux de calcul réalisés à l'aide d'un tableur.

#### 1.3 La présentation des calculs

Pour être le plus lisible possible, une note de calcul doit utiliser une présentation en tableaux. Par exemple, le tableau suivant présente un calcul de distance entre des points donnés en coordonnées rectangulaires.

$X_A$ (m)	$Y_A$ (m)	$X_B$ (m)	$Y_B$ (m)	Delta X (m) $\Delta X = X_B - X_A$	Delta Y (m) $\Delta Y = Y_B - Y_A$	Distance AB (m) $D = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}$
13,32	15,46	45,47	46,65	32,15	31,19	44,79
12,32	09,45	54,42	48,63	42,10	39,18	57,51



Excel 7

La présentation des calculs introduit parfaitement le recours aux tableurs (calcul informatisé mis sous forme de tableaux) souvent utilisés dans cet ouvrage.

## 1.4 La présentation des résultats

Une note de calcul dans laquelle les résultats intermédiaires importants sont encadrés et dans laquelle on fait usage de couleurs est plus facile à suivre et à relire. On prendra soin, par exemple, d'utiliser dans les schémas des couleurs correspondant à celles du texte de la note de calcul.

## 1.5 La précision des résultats

Les résultats ne peuvent être plus précis que les données. En effet, si vous connaissez deux points en coordonnées au centimètre près, vous ne pourrez pas donner la distance entre ces points au millimètre près : c'est même une faute de raisonnement. Pour obtenir une précision donnée sur les résultats, deux cas de figure sont possibles :

- si vous effectuez une résolution graphique au moyen d'un logiciel de DAO ou si vous utilisez un logiciel de calcul, il suffit d'arrondir les résultats donnés (voir § 1.6.) ;
- si vous utilisez une calculatrice, pour éviter la perte de précision finale par cumul d'arrondis, il convient de garder au moins une décimale de plus dans les calculs. Certains calculs peuvent même demander de garder beaucoup plus de décimales dans les calculs intermédiaires : par exemple, un calcul faisant intervenir des puissances. La solution à ce problème est de stocker les valeurs intermédiaires dans les mémoires de la calculatrice (toute calculatrice moderne le permet) et de rappeler le contenu de ces mémoires pour des calculs ultérieurs.

**Exemple** : sur une calculatrice FX 850P programmable en BASIC standard,



2\*cos12 [EXE]    Calcul quelconque...  
 1,9646    Résultat affiché si la machine est en mode grades  
 A = [ANS] [EXE]    Le résultat du calcul précédent est stocké dans la variable A  
 A / 3 [EXE]    A est réutilisée, sans arrondi, dans les calculs ultérieurs  
 0,6549    résultat affiché

Si la calculatrice ne possède pas cette possibilité, vous avez toujours la solution de noter au crayon un maximum de décimales derrière les décimales suffisantes et de les effacer une fois le calcul terminé.

## 1.6 Les arrondis

L'arrondi à  $(n - 1)$  décimales de la valeur absolue d'un nombre de  $n$  décimales est réalisé comme suit (fig. 5.1-a.) :

- à la valeur inférieure quand la  $(n + 1)^{\text{e}}$  décimale est 0, 1, 2, 3 ou 4 ;
- à la valeur supérieure quand la  $(n + 1)^{\text{e}}$  décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9.

Par convention, 12,5 s'arrondit à 13 de manière à équilibrer le nombre de décimales s'arrondissant au chiffre inférieur (12,0; 12,1; 12,2; 12,3 et 12,4) avec celui des décimales s'arrondissant au chiffre supérieur (12,5; 12,6; 12,7; 12,8 et 12,9). Cela est représenté sur le schéma de la figure 5.1-a. On constate qu'en fait 12,5 ne devrait pas être arrondi puisqu'il est aussi proche de 12,0 que de 13,0.

Attention à la difficulté suivante :

Si l'on arrondit un nombre une première fois (par exemple 12,48 arrondi à 12,5) puis une deuxième fois (12,5 s'arrondit à 13), on commet une erreur puisque 12,48 est plus proche de 12 que de 13. Il faut donc toujours revenir au nombre exact pour effectuer un arrondi.

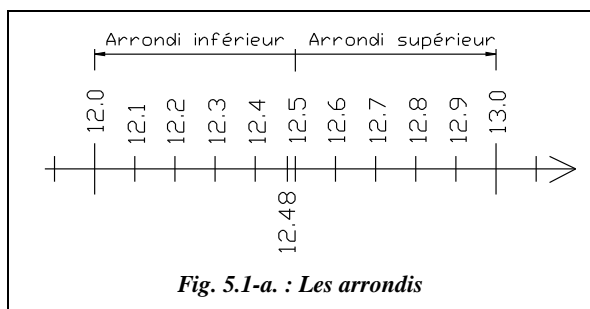


Fig. 5.1-a. : Les arrondis

Vérifiez que la calculatrice utilisée effectue cet arrondi à partir de l'exemple précédent ; la fonction d'arrondi se nomme souvent FIX ou TAB.

## 1.7 Les contrôles

Le contrôle des mesures doit être la philosophie de base du géomètre-topographe ; il consiste par exemple :

- à doubler les mesures sur le terrain pour permettre des recoupements,
- à vérifier les calculs faits par des constatations faisant appel à la logique ou bien par d'autres calculs ; même s'ils sortent d'un listing d'ordinateur, ces calculs peuvent donner des valeurs fausses ayant pour causes essentielles des erreurs humaines ;
- le dessin à l'échelle est aussi un excellent contrôle.

Dans des calculs menant à des résultats littéraux, le contrôle de l'homogénéité des formules est indispensable.

## 1.8 Les constructions géométriques

Autrefois, elles constituaient une vérification approximative des calculs pour éviter les erreurs grossières.

Elles permettaient également de trouver l'ordre logique d'enchaînement des calculs littéraux à partir de la construction graphique, avec cette restriction que la construction graphique fait appel à des notions de géométrie plane (ou dans l'espace) qui ne sont pas toujours simples à maîtriser. Les calculatrices étant rares, voire inexistantes, les problèmes étaient parfois résolus graphiquement.

Puis, l'emploi de calculatrices de plus en plus performantes a eu tendance à dévaloriser les résolutions graphiques.

Aujourd'hui, le rôle des constructions graphiques est essentiel puisque depuis l'avènement du Dessin Assisté par Ordinateur, elles permettent de résoudre les problèmes de manière visuelle avec, au minimum, la même précision que l'on obtiendrait sur une calculatrice. En effet, un ordinateur moyen actuel calcule avec une précision de 16 chiffres après la virgule et ce qu'il dessine à l'écran n'est que la visualisation graphique des calculs internes à la machine.

C'est pourquoi, dans cet ouvrage, il est fait une grande place aux résolutions graphiques qui sont un moyen de calcul de l'avenir, même si tout ne peut être calculé graphiquement.

Il est conseillé d'apprendre l'utilisation d'un logiciel de DAO pour mesurer toute la puissance de ce moyen de calcul qui présente le double avantage de limiter les erreurs possibles en permettant de visualiser directement le problème et, enfin, de fournir directement le report sur papier à toute échelle du problème traité.



Un exemple de résolution purement graphique est représenté sur la figure 5.1-b.

Soit à trouver le point d'intersection I de deux droites : l'une passant par les points A et B, l'autre par les points C et D, tous connus en coordonnées.

### Environnement :

dans le menu **FORMAT / CONTRÔLE DES UNITÉS**, réglez le nombre de chiffres après la virgule à deux pour les longueurs.

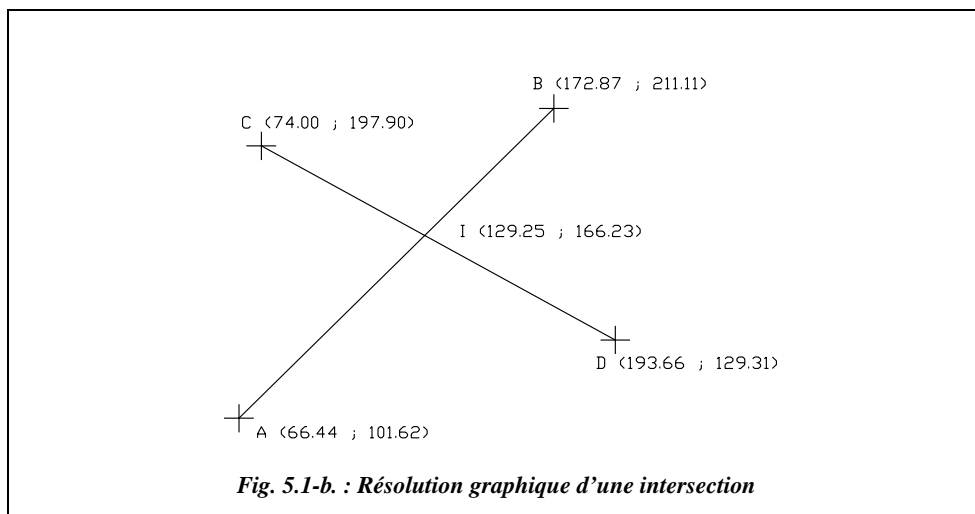
**Dessin des droites AB et CD** : entrez directement les coordonnées en repère général.  
*LIGNE* ↵ du point *66.44,101.62* ↵ au point *172.87,211.11* ↵

Commande *LIGNE* ↵ du point *74.00,197.90* ↵ au point *193.66,129.31* ↵

### Coordonnées du point d'intersection :

Commande *ID* ↵ avec l'accrochage objet *INTersection*.

Résultat : I(129.25,166.23).



## 1.9 Les conventions littérales

Respecter les conventions littérales du métier est un gage de lisibilité accrue, même si ces dernières demandent souvent un nouvel apprentissage.

Dans cet ouvrage, les conventions préconisées par l'AFT<sup>1</sup> ont été respectées, à quelques exceptions près ; par exemple, la confusion fréquente entre  $z$  : angles zénithaux et  $Z$  : coordonnée ou altitude nous a amené à préférer la notation  $V$  pour les angles zénithaux.

## 1.10 L'informatique

L'informatique est un outil exceptionnel pour le topographe moderne : il faut absolument apprendre à le maîtriser. Mais attention : l'ordinateur n'est qu'un outil et ne fait donc que ce qu'on lui demande ; il vous appartient de rester critique devant ses résultats et devant ses possibilités. En effet, certains calculs ou reports peuvent être obtenus plus rapidement à la main ; seules les opérations répétitives ou fastidieuses donnent tout son sens à l'utilisation de l'outil informatique .



Parmi les apprentissages proposés dans cet ouvrage, le langage BASIC est abordé dans le seul but d'écrire de programmes pour les calculatrices programmables. Il n'est pas nécessaire d'en faire plus car il existe déjà des programmes

<sup>1</sup> Voir pour cela l'encart publié par la revue *XYZ*, n° 32-33, de 1988, intitulé *Système de symboles cohérents en topographie* ; il constitue l'introduction du *Lexique topographique* que l'Association Française de Topographie (AFT) a décidé de publier en 1987, et qu'il est conseillé de se procurer (voir la bibliographie).

performants écrits par des professionnels : il est préférable de se contenter d'être de bons utilisateurs. De plus, dans un but réel de programmation, il existe aujourd'hui d'autres langages plus performants et conviviaux comme le langage Visual-Basic, le langage C, etc.

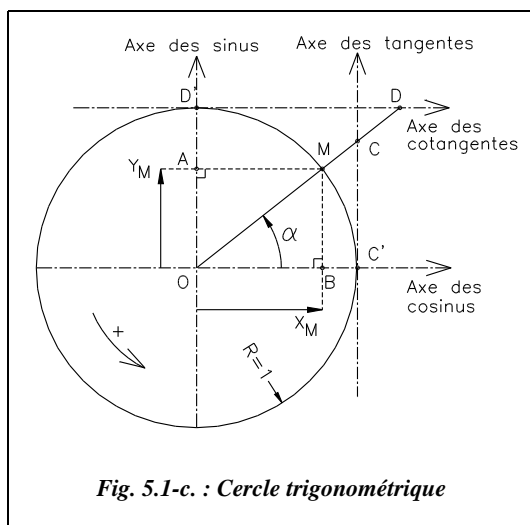
**Remarque**

Il existe des outils informatiques qui permettent à tous de calculer littéralement les plus complexes des intégrales ou dérivées, de résoudre numériquement toutes les équations possibles imaginables, à partir d'une interface graphique simple et conviviale. Le logiciel MATHCAD en est un exemple.

## 2 TRIGONOMÉTRIE

Ce paragraphe rappelle l'essentiel des relations trigonométriques utiles au topographe.

### 2.1 Cercle trigonométrique



Le cercle trigonométrique ci-contre (fig. 5.1-c.) est de rayon 1, c'est-à-dire :  $R = OM = 1$ .

En mathématique, le sens de rotation positif est dit trigonométrique et correspond au sens de rotation inverse horaire. Les angles sont exprimés en radians.

Par définition, le cosinus de l'angle  $\alpha$  est la projection sur l'axe des abscisses  $x$  de l'extrémité du vecteur  $\vec{OM}$ , le sinus étant la projection sur l'axe des ordonnées  $y$  :

$$\cos \alpha = X_M, \text{ et } \sin \alpha = Y_M$$

On définit ensuite :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ et } \cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

◆ **utilisation en topographie**

Ces relations servent à calculer les éléments d'un triangle rectangle, par exemple le triangle OMA ou le triangle OMB de la figure 5.1-c. dont on connaît au moins deux



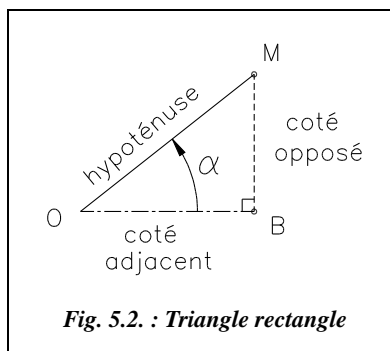
données : une longueur et un angle, ou bien deux longueurs. La connaissance de deux angles est insuffisante car il y a alors une infinité de solutions (voir paragraphe 3.3.4.).

On identifie les sinus, cosinus, tangente et cotangente de la manière suivante (fig. 5.2.) :

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{MB}{OM}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha}{\text{hypoténuse}} = \frac{OB}{OM}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \alpha}{\text{côté adjacent à l'angle } \alpha} = \frac{MB}{OB}$$



#### Remarques

- La cotangente est l'inverse de la tangente  

$$\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$
 Son seul intérêt est la simplification de certaines formules littérales. Pour les calculs, la seule connaissance de la tangente est suffisante.
- Sur la calculatrice, la fonction cotangente n'apparaît généralement pas et s'obtient par **1/tan**, soit la combinaison de la fonction **tangente** suivie de la fonction **1/x** et **surtout pas**  $\tan^{-1}()$  qui est la fonction réciproque de tan.
- **Attention** donc à ne pas confondre sur votre calculatrice la fonction  $\tan^{-1}()$  avec la fonction cotangente (1 / tangente) ;  $\tan^{-1}()$  représente la fonction (arc tangente) réciproque de (tangente) qui permet d'extraire l'angle  $\alpha$  dont la tangente prend une certaine valeur  $X$  :  $\tan^{-1} X = \alpha$  donc  $X = \tan \alpha$ , avec  $X \in ]-100,100[$  gon.

Nous reviendrons au paragraphe 1.3. sur le fait que la solution de  $\tan^{-1} X = \alpha$  ne donne que la racine comprise entre  $-100$  et  $100$  gon. Il en est de même pour  $\sin^{-1} X = \alpha$  (voir paragraphe 3.3.5.).

#### Application

Trouvez graphiquement sur le cercle trigonométrique puis vérifiez sur votre calculatrice que l'angle dont la tangente a pour valeur 1 est 50 gon.

## 2.2 Relations trigonométriques de base

Les relations suivantes sont utiles au déroulement de certains calculs littéraux :

$$\left. \begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \end{array} \right\} \text{ Voir fig. 5.3.}$$

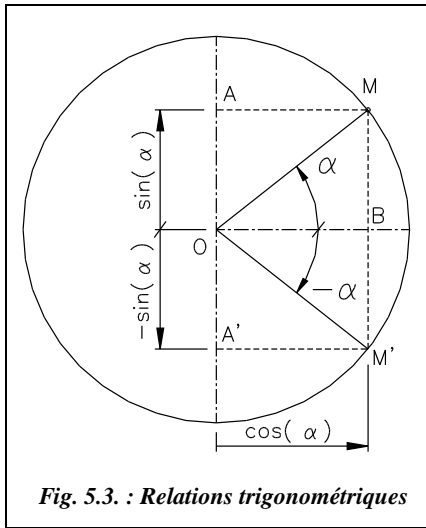


Fig. 5.3. : Relations trigonométriques

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

#### Application

1 - Donnez une expression simplifiée de  $\tan(a + b)$  en fonction de  $\tan a$  et  $\tan b$ .

2 - Exprimez  $\sin(a - b)$  et  $\cos(a - b)$ .

3 - Exprimez  $\sin(2.a)$  et  $\cos(2.a)$ .

#### Réponse

$$1 - \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)}$$

$$2 - \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \text{ et } \sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$3 - \cos(2.a) = 2 \cdot \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 a \text{ et } \sin(2.a) = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$

## 2.3 Identités remarquables

La figure 5.4. permet de retrouver les identités remarquables suivantes : on y représente un point M sur le cercle trigonométrique et sa projection sur les axes des sinus et cosinus, correspondant à l'angle  $\alpha$ .

A partir de là, par symétries horizontales et verticales, on construit les projections correspondantes aux angles  $100 - \alpha$ ,  $100 + \alpha$ ,  $200 - \alpha$ ,  $200 + \alpha$ ,  $300 - \alpha$ ,  $300 + \alpha$ , et  $-\alpha$ .

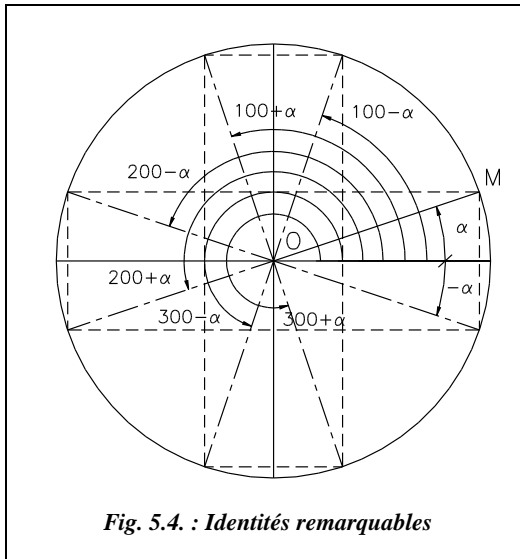


Fig. 5.4. : Identités remarquables

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{Donc : } \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\text{et } \cotan(-\alpha) = -\cotan\alpha$$

$$\sin(100 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(100 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha + 100) = \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + 100) = -\sin\alpha$$

$$\sin(200 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(200 - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + 200) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha + 200) = -\cos\alpha$$

$$\sin(300 - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(300 - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(300 + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(300 + \alpha) = \sin\alpha$$

### Application

Simplifier les expressions suivantes :  $\tan(100 - \alpha)$  ;  $\tan(100 + \alpha)$  ;  $\tan(200 + \alpha)$

### Réponses

$$\tan(100 - \alpha) = \cotan \alpha ; \tan(100 + \alpha) = -\cotan \alpha = \tan(\alpha - 100)$$

$$\tan(200 + \alpha) = \tan \alpha = -\tan(200 - \alpha)$$

### Remarque

Les identités remarquables précédentes permettent de soulever le problème suivant :

calculez sur votre calculatrice l'angle dont le sinus est égal à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  ; elle donne le résultat : 50 gon. Or cette solution n'est pas unique : l'angle  $(200 - 50 = 150 \text{ gon})$  possède le même sinus puisque, comme démontré ci-dessus,  $\sin(200 - \alpha) = \sin \alpha$ . La fonction  $\sin^{-1}()$  (**arc sinus**, notée **asin**) des calculatrices est programmée pour ne donner qu'une seule des deux racines possibles, celle qui est comprise entre  $-100$  et  $100$  gon. Cela peut entraîner des erreurs de résolution car, dans certains cas, c'est l'autre racine qui correspond au problème à résoudre (voir § 3.3.5). Le même problème se pose avec la fonction  $\tan^{-1}()$  puisque  $\tan(200 + \alpha) = \tan \alpha$ .

Donc attention : chaque fois que vous utilisez ces deux fonctions, des vérifications s'imposent, soit sous forme de double calcul, soit sous forme de schéma pour choisir la racine possible.

Notez que ce problème ne se pose pas pour la fonction  $\cos^{-1}()$  puisque si la première racine possible est  $\alpha$  compris entre 0 et 200 gon, la seconde racine possible est  $-\alpha$  qui est négative puisque  $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$ . Il n'y a donc pas d'ambiguïté dans ce cas et il est toujours préférable d'utiliser  $\cos^{-1}()$  plutôt que  $\sin^{-1}()$  ou  $\tan^{-1}()$ .

## 2.4 Relations diverses

### 2.4.1 Développements limités

Pour  $a$  proche de zéro, on a :  $(1 + a)^n \approx 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!} a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^3 + \dots$

Pour  $\alpha$  proche de 0 radians, on peut écrire :  $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

$$\tan \alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\alpha^5}{15} + \dots$$

### 2.4.2 Dérivées

Les relations suivantes ne sont exactes que pour un angle  $\alpha$  exprimé en radians.

$$\sin' \alpha = \cos \alpha ; \cos' \alpha = -\sin \alpha ; \tan' \alpha = 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} .$$

$$\arcsin' \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \text{ et } \arctan' \alpha = \frac{1}{1 + \alpha^2} .$$

Si l'angle  $\alpha$  est exprimé en gon, il faut donc le transformer en radians avant d'utiliser ces formules. Elles deviennent dans le cas d'un angle  $\alpha$  exprimé en gon :

$$\sin' \alpha_{\text{gon}} = \frac{\pi}{200} \cdot \cos \alpha_{\text{gon}} \quad \cos' \alpha_{\text{gon}} = -\frac{\pi}{200} \cdot \sin \alpha_{\text{gon}} \quad \text{etc.}$$

### 2.4.3 Paramétrages

Si l'on pose  $t = \tan(\alpha / 2)$ , on obtient les expressions paramétrées suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} ; \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} ; \tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2} .$$

## 3 PROPRIÉTÉS DU CERCLE

Ce paragraphe contient une liste non exhaustive des principales propriétés du cercle utilisées en topographie.

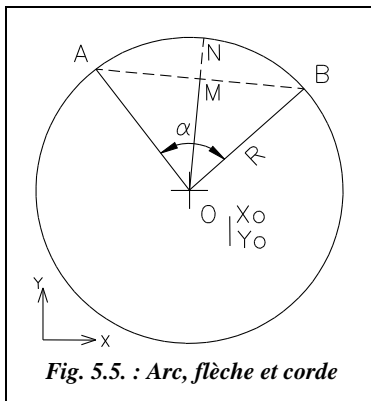


Fig. 5.5. : Arc, flèche et corde

### 3.1 Équation

En topographie, on utilise rarement le cercle en faisant référence à son équation. Rappelons toutefois que l'équation d'un cercle de centre O ( $X_o$ ,  $Y_o$ ) et de rayon  $R$  (fig. 5.5.) est :

$$(X - X_o)^2 + (Y - Y_o)^2 = R^2$$

### 3.2 Arc, flèche, corde

On peut faire l'analogie avec l'arc d'un archer (voir fig. 5.5.)

- On appelle **arc** la partie circulaire AB, notée

$\widehat{AB}$ , d'angle au centre  $\alpha$ .

- On appelle **corde** la longueur du segment [AB].
- On appelle **flèche** la longueur du segment [MN].

$$AB = 2R \cdot \sin(\alpha/2)$$

$$MN = R - R \cdot \cos(\alpha/2)$$

$$\widehat{AB} = R \cdot \alpha_{radian} = R \frac{\pi}{200} \alpha_{gon}$$

Les relations entre ces éléments sont les suivantes :

### Application

Calculez l'arc, la corde et la flèche interceptés par un angle au centre de 50 gon dans un cercle de rayon 15,00 m.

### Réponses

Arc = 11,78 m ; corde = 11,48 m ; flèche = 1,14 m.

## 3.3 Théorie des arcs capables

### 3.3.1 Angle entre corde et tangente

L'angle entre la corde AB et la tangente au cercle en A (ou en B) vaut  $\alpha/2$  (fig. 5.6.).

*Démonstration* : le triangle AOB étant isocèle, on en déduit que  $\widehat{BAO} = \widehat{ABO} = \frac{200 - \alpha}{2} = 100 - \frac{\alpha}{2}$ . La

tangente en A au cercle étant perpendiculaire au rayon AO, il vient que l'angle entre la tangente et la corde est  $\alpha/2$ . Le même raisonnement s'applique en B.

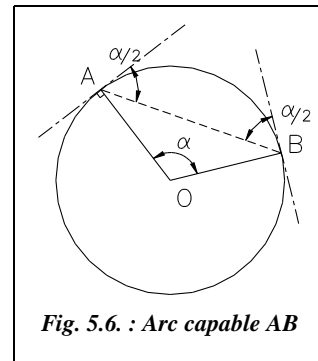


Fig. 5.6. : Arc capable AB

### 3.3.2 Angle vu depuis le cercle et angle au centre

L'angle  $\widehat{ANB}$  est appelé angle du cercle interceptant l'arc AB (fig. 5.7.).

L'angle  $\widehat{AOB}$  est l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Il existe entre ces deux angles la relation

$$\widehat{ANB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$$

*Démonstration* : le rayon ON est perpendiculaire à la tangente  $tt'$ .

Autour de O, on a :  $\widehat{AOB} = \alpha = 400 - (\alpha_1 + \alpha_2)$

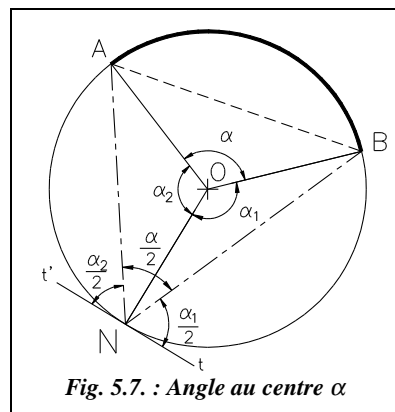


Fig. 5.7. : Angle au centre  $\alpha$

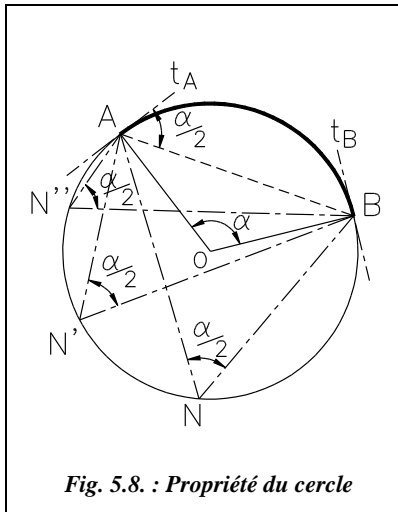


Fig. 5.8. : Propriété du cercle

Autour de N, on a :  $\widehat{ANB} = 200 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\alpha}{2}$

Cette démonstration est indépendante de la position du point N, situé sur l'arc complémentaire de AB. Donc tout point N de l'arc extérieur à l'arc AB intercepté par l'angle au centre  $\alpha$  vérifie la relation précédente (voir fig. 5.8.).

Les angles issus de points situés sur un cercle et interceptant un même arc de ce cercle sont égaux entre eux et égaux à la moitié de l'angle au centre.

On constate aussi sur la figure 5.8., que lorsque N tend vers A (ou B), l'angle en N tend à devenir l'angle entre corde et tangente dont nous avons déjà démontré au paragraphe 2.3.1. qu'il vaut  $\alpha/2$ .

On peut en déduire, pour tout point M de l'arc AB que (fig. 5.9-a.) :

$$\widehat{AMB} = 200 - \frac{\widehat{AOB}}{2} = 200 - \frac{\alpha}{2} = 200 - \widehat{ANB}$$

Démonstration :

L'angle complémentaire à l'angle  $\alpha$  intercepte l'arc complémentaire de l'arc AB intercepté par l'angle  $\alpha$ . Donc l'angle au point M interceptant ce même arc complémentaire a pour valeur :  $(400 - \alpha) / 2 = 200 - \alpha / 2$ .

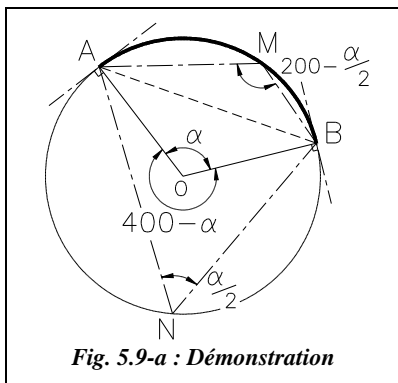


Fig. 5.9-a : Démonstration

### 3.3.3 Arc capable

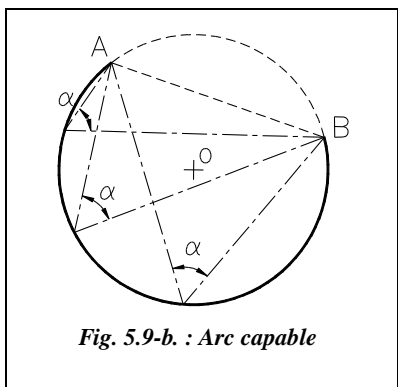


Fig. 5.9-b. : Arc capable

Soient deux points fixés A et B. L'ensemble des points N tels que l'angle  $\widehat{ANB}$  soit égal à une valeur donnée  $\alpha$  est représenté par l'arc AB (en trait continu sur la figure 5.9-b.). Cet arc est appelé arc capable associé à l'angle  $\alpha$ .

### 3.4 Puissance d'un point par rapport à un cercle

La puissance du point A par rapport au cercle (C), de centre O et de rayon R, est par définition le produit (AM.AN). Ce produit est constant et indépendant de la droite (D) issue du point A et sécante au cercle (C) (fig. 5.10.).

La puissance de A par rapport à (C) est :  $AM.AN = (d^2 - R^2)$ .

d représente la distance OA.

Démonstration :

$$AM = AH - HM$$

$$AN = AH + HN$$

$$AM \cdot AN = AH^2 + AH \cdot (HN - HM) - HM \cdot HN$$

$$AH^2 = d^2 - OH^2$$

$$HM = HN$$

$$R^2 = OH^2 + HM^2$$

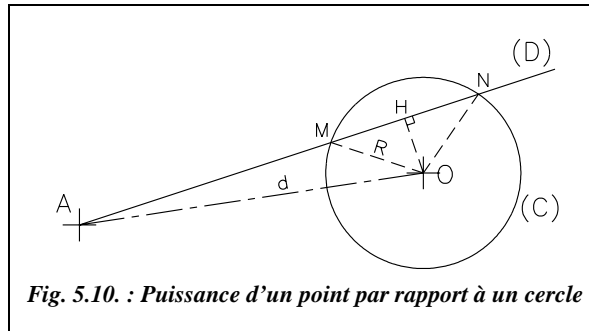


Fig. 5.10. : Puissance d'un point par rapport à un cercle

On obtient donc, après simplifications :  $AM \cdot AN = d^2 - R^2$ . Cela est vrai pour toute droite (D) issue du point A et sécante au cercle (C).

### 3.5 Cercles homothétiques

Soient deux droites (SA) et (SB) concourantes au sommet S (fig. 5.11.). On cherche le cercle (C') tangent intérieurement à ces deux droites et passant par le point P'.

Le point P' est donné par les cotes  $ST_1$  et  $T_1P'$ . On connaît le sommet S et l'angle  $\alpha$ .

On fait intervenir le cercle de rayon R et de centre O tel que le point O soit sur le prolongement de  $T_1P'$  (cercle tangent à SB en  $T_1$ ).

Dans les triangles SPO et  $SP'O'$ , on peut

$$\text{écrire : } \frac{SP}{SP'} = \frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'}$$

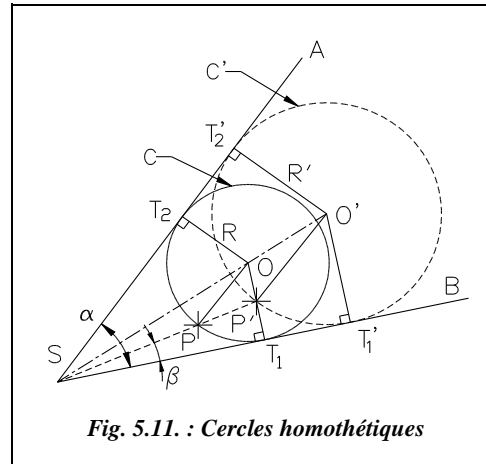


Fig. 5.11. : Cercles homothétiques

Dans les triangles semblables  $ST_1O$  et  $ST_1'O'$ , on peut écrire :  $\frac{SO'}{SO} = \frac{ST_1}{ST_1'} = \frac{R'}{R}$ .

Comme  $\sin(\widehat{SPO}) = \frac{\sin(\widehat{PSO})}{R}$   $SO = \frac{\sin(\widehat{PSO})}{R'} SO' = \sin(\widehat{SP'O'})$ , on peut dire que les segments  $[OP]$  et  $[O'P']$  sont parallèles : on dit que le cercle  $(C)$  est homothétique du cercle  $(C')$ , homothétie de centre  $S$ .

On en déduit  $R = ST_1 \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ,  $SO = ST_1 / \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  et  $\beta$  tel que  $\tan\beta = \frac{T_1P'}{ST_1}$ .

Il reste à résoudre le triangle  $SPO$  dont on connaît un angle et deux côtés (voir § 4.3.5.).

Cet exercice est résolu à l'aide d'une autre méthode au paragraphe 5.6. du chapitre 4.

## 4 RELATIONS DANS LES TRIANGLES

### 4.1 Relations de base

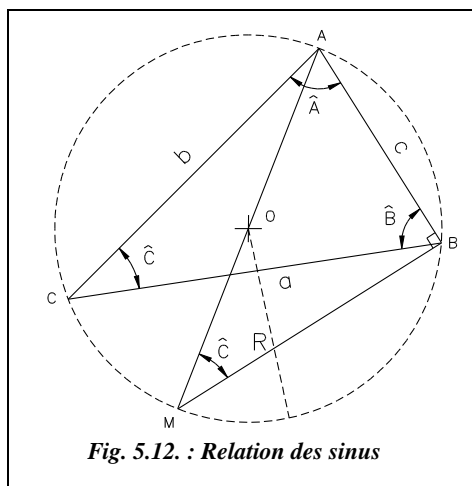


Fig. 5.12. : Relation des sinus

Seules les plus utilisées sont étudiées.

La notation ci-contre (fig. 5.12.) est toujours respectée : le côté de longueur  $a$  est opposé à l'angle  $\widehat{A}$ ,  $b$  opposé à l'angle  $\widehat{B}$  et  $c$  à l'angle  $\widehat{C}$ .

#### 4.1.1 Somme des angles Internes

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 200 \text{ gon}$$

#### 4.1.2 Relation des sinus

Soit le triangle  $ABC$  ci-dessus (fig. 5.12.) inscrit dans le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Si l'on fait intervenir le triangle  $ABM$  tel que la droite  $AM$  passe par le centre  $O$  du cercle, on retrouve en  $M$  l'angle  $\widehat{C}$  puisque les angles  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{ABM}$  interceptent la même corde  $AB$  (voir § 3.3.2.).

De plus, l'angle  $\widehat{ABM}$  est égal à  $100 \text{ gon}$  (c'est le cas particulier du paragraphe 3.3.2. où l'angle  $\gamma$  est égal à  $100 \text{ gon}$ ).



Donc dans le triangle rectangle ABM, on a  $\sin \widehat{C} = \frac{c}{2R}$ .

Cette relation peut se démontrer pour chaque côté du triangle et comme la quantité  $2R$  est une constante, on en déduit la relation des sinus exprimée ci-contre :

$$2R = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Le cercle de rayon  $R$  est appelé cercle circonscrit au triangle ABC.

### 4.1.3 Relation des cosinus

Dans le même triangle ABC (fig. 5.13.), si l'on trace la perpendiculaire à AB passant par C (hauteur), on peut écrire :

$$c = a \cdot \cos \widehat{B} + b \cdot \cos \widehat{A}$$

De même, sur les autres côtés, on obtient :

$$b = c \cdot \cos \widehat{A} + a \cdot \cos \widehat{C}$$

$$a = b \cdot \cos \widehat{C} + c \cdot \cos \widehat{B}$$

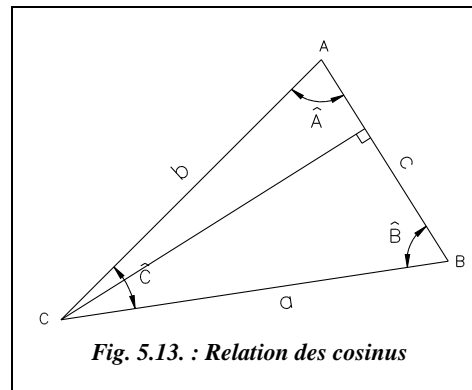


Fig. 5.13. : Relation des cosinus

### 4.1.4 Théorème de Pythagore généralisé

Dans le triangle ABC (fig. 5.14.), on peut écrire la relation vectorielle suivante :  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$ .

Si l'on en fait le produit scalaire membre à membre, on obtient :  $\vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC})$ .

En distribuant, il vient :

$$AC^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + BC^2.$$

En écrivant le produit scalaire, il vient :

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) = AB \cdot BC \cdot \cos(200 - \widehat{B}) = -AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{B}$$

On obtient finalement :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \widehat{B}$$

On démontre de même que :

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos \widehat{C}$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos \widehat{A}$$

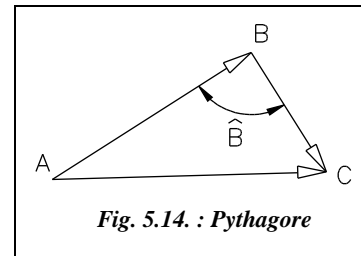


Fig. 5.14. : Pythagore

### 4.1.5 Relation des tangentes

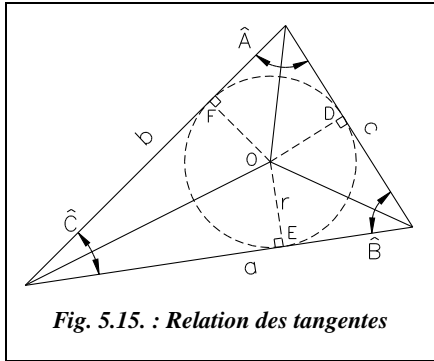


Fig. 5.15. : Relation des tangentes

Considérons le cercle de rayon  $r$  inscrit dans le triangle ABC. Soient D, E et F les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés du triangle (fig. 5.15.). On peut écrire :

$$c = BD + DA$$

$$a = BE + EC$$

$$b = AF + FC$$

Comme  $AD = AF$ ,  $CF = CE$  et  $BE = BD$ , on obtient :

$$a+b+c = 2.(BD + AF + CE).$$

On pose  $p = \frac{a+b+c}{2}$  ;  $p$  est appelé demi-périmètre. On en déduit que :

$$AD = AF = p - BD - CE = p - a$$

$$BD = BE = p - AF - CE = p - b$$

$$CE = CF = p - BD - AF = p - c$$

De plus :  $r = AF \cdot \tan(\hat{A}/2) = BD \cdot \tan(\hat{B}/2) = CE \cdot \tan(\hat{C}/2)$ .

Donc :

$$r = (p - a) \cdot \tan(\hat{A}/2) = (p - b) \cdot \tan(\hat{B}/2) = (p - c) \cdot \tan(\hat{C}/2)$$

$$\text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}$$

### 4.1.6 Relations faisant intervenir le cercle exinscrit

Le cercle centré au point  $O'$  est appelé cercle exinscrit au triangle ABC et associé à l'angle  $\hat{A}$ . On note son rayon  $R_a$ . Ce cercle est tangent à la base  $a$  et aux côtés AC et AB mais sur ces deux derniers, les points de tangence sont à l'extérieur du triangle (fig. 5.16.).

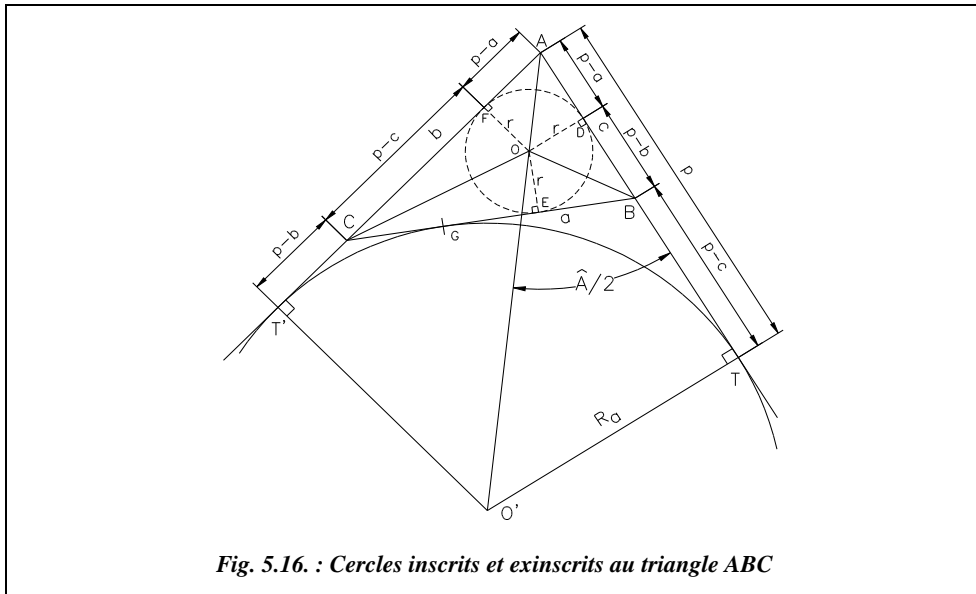
Il existe donc trois cercles exinscrits par triangle. Nous n'étudions qu'un seul cas, les autres relations en sont déduites par permutation d'indice.

On peut écrire que :

$$\tan(\hat{A}/2) = \frac{R_a}{p} = \frac{r}{p-a}$$

*Démonstration* : cela revient à démontrer que :  $AT = AT' = p$ .

$$AT = AT' \text{ donc } 2 \cdot AT = AT + AT' \quad \text{or } 2 \cdot AT = (AB + BT) + (AC + CT')$$



On fait intervenir G, point de tangence entre le segment BC et le cercle exinscrit :

2 . AT = (AB + BG) + (AC + CG) puisque BG = BT et CG = CT'.

Donc 2 . AT = AB + (BG + CG) + AC = AB + AC + BC.

Finalement, 2 . AT = 2 . p d'où AT = AT' = p.

## 4.2 Surface d'un triangle

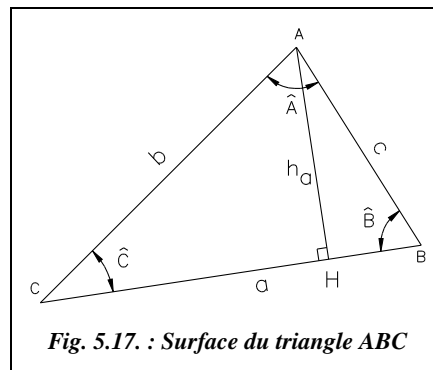
### 4.2.1 Surface d'un triangle à partir de la hauteur du triangle

La surface totale  $S$  du triangle ABC (fig. 5.17.) est la somme des surfaces des triangles AHC et AHB. Soit :

$$S = \frac{h_a \cdot CH}{2} + \frac{h_a \cdot BH}{2}$$

$$S = \frac{h_a}{2} (CH + BH)$$

Donc : 
$$S = \frac{ah_a}{2}$$



La formule peut être écrite de même avec  $h_b$  et  $h_c$ , les hauteurs perpendiculaires aux côtés  $b$  et  $c$ .

## 4.2.2 Surface d'un triangle à partir du produit vectoriel

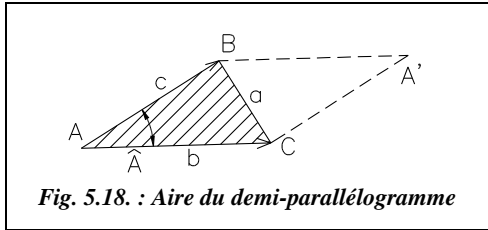


Fig. 5.18. : Aire du demi-parallélogramme

C'est la formule la plus employée (fig. 5.18.). La surface du parallélogramme A-B-A'-C s'exprime comme la norme du produit vectoriel des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$ .

La surface totale du parallélogramme est :  $S_t = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin A$

Donc :  $S_t = b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$ .

La surface  $S$  du triangle ABC est la moitié de la surface totale :

$$S = \frac{bc \cdot \sin \hat{A}}{2} = \frac{ab \cdot \sin \hat{C}}{2} = \frac{ac \cdot \sin \hat{B}}{2}$$

## 4.2.3 Surface d'un triangle à partir du rayon du cercle inscrit ou du rayon du cercle exinscrit

La surface totale peut être considérée comme la somme des surfaces des triangles ADO, AFO, BDO, BEO, CEO et CFO (fig. 5.15.), donc :

$$S = \frac{rAC}{2} + \frac{rAF}{2} + \frac{rBC}{2} + \frac{rBE}{2} + \frac{rCE}{2} + \frac{rCF}{2} = \frac{r}{2} \cdot (AC + BC + BE + CE + AF + CF) = rp$$

En rapprochant ce résultat de celui du paragraphe 4.1.6., on obtient :

$$S = pr = (p - a) \cdot R_a = (p - b) \cdot R_b = (p - c) \cdot R_c$$

## 4.2.4 Surface d'un triangle à partir du demi-périmètre $p$

Si l'on connaît les trois côtés d'un triangle, sa surface s'exprime par :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

*Démonstration* : le raisonnement est mené à partir de la figure 5.17.

$$S = \frac{bc}{2} \cdot \sin \hat{A} \text{ d'où } \sin \hat{A} = \frac{2S}{bc};$$

$$\text{et } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \text{ d'où } \cos \hat{A} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc};$$

$$\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1 \text{ d'où } 16S^2 + (a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2bc)^2 \text{ et } 16S^2 = (2bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$$

En factorisant, on obtient :  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

### 4.2.5 Surface d'un triangle à partir du rayon du cercle circonscrit

Le cercle circonscrit de rayon  $R$  et de centre  $O$  passe par les trois sommets du triangle  $ABC$  (fig. 5.19.) dont la surface vaut :

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Démonstration :

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC}$$

$$2.S_{OAB} = R^2 \cdot \sin(2.\hat{C})$$

$$2.S_{OAC} = R^2 \cdot \sin(2.\hat{B})$$

$$2.S_{OBC} = R^2 \cdot \sin(2.\hat{A})$$

$$2.S_{ABC} = R^2 \cdot [\sin(2.\hat{A}) + \sin(2.\hat{B}) + \sin(2.\hat{C})]$$

$$\sin(2.\hat{A}) + \sin(2.\hat{B}) = 2.\sin(\hat{A} + \hat{B}).\cos(\hat{A} - \hat{B})$$

$$\sin(2.\hat{C}) = \sin(180 - 2.\hat{A} - 2.\hat{B})$$

$$= -\sin[2.(\hat{A} + \hat{B})]$$

$$= -2.\sin(\hat{A} + \hat{B}).\cos(\hat{A} + \hat{B})$$

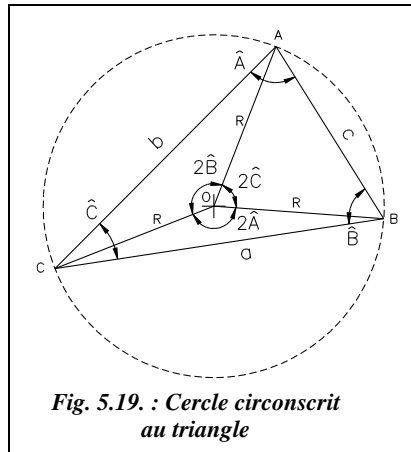


Fig. 5.19. : Cercle circonscrit au triangle

Donc :  $\sin(2.\hat{A}) + \sin(2.\hat{B}) + \sin(2.\hat{C}) = 4.\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C}$  en remarquant que  $\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin\hat{C}$

$$S_{ABC} = 2.R^2.\sin\hat{A}.\sin\hat{B}.\sin\hat{C} = 2R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

### 4.2.6 Surface d'un triangle à partir d'un côté et des deux angles adjacents

La surface  $S$  est décomposée en deux surfaces par la hauteur  $CH$  (fig. 5.20.). On peut alors écrire :

$$S = \frac{hc}{2} \text{ de plus } \cotan\hat{A} = \frac{x}{h} \text{ et } \cotan\hat{B} = \frac{y}{h}$$

$$\cotan\hat{A} + \cotan\hat{B} = \frac{x+y}{h} = \frac{c}{h} = \frac{c^2}{2S}$$

$$\text{Donc : } S = \frac{c^2}{2(\cotan\hat{A} + \cotan\hat{B})}$$

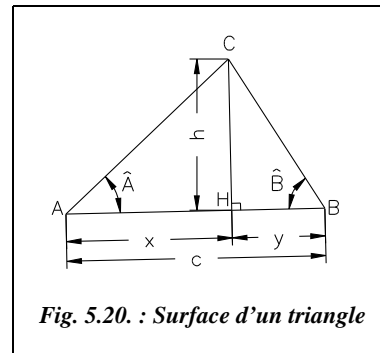
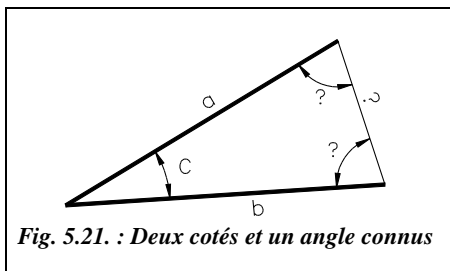


Fig. 5.20. : Surface d'un triangle

## 4.3 Résolution de triangles

Pour alléger les notations, on note  $A$ ,  $B$  et  $C$  les angles opposés aux côtés  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

### 4.3.1 Un angle $C$ et ses deux côtés adjacents $a$ et $b$ sont connus



Calcul de  $c$  :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Calcul de  $A$  :  $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$

ou bien :  $b = a.\cos C + c.\cos A$

Calcul de  $B$  :  $b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.a.\cos B$

ou bien :  $a = b.\cos C + c.\cos B$

Cette solution est unique.

On vérifie que  $A + B + C = 200$  gon.

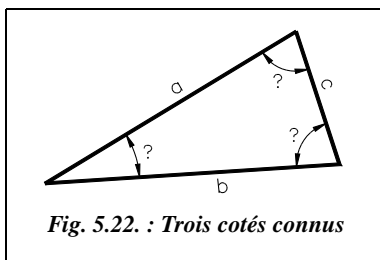
#### Exemple

$C = 28,654$  gon ;  $a = 151,46$  m ;  $b = 212,28$  m.

#### Résultats

$c = 100,52$  m ;  $A = 45,513$  gon ;  $B = 125,833$  gon ;  $S = 6\,993,8798$  m<sup>2</sup>.

### 4.3.2 Les trois côtés $a$ , $b$ et $c$ sont connus



Calcul de  $C$  :  $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos C$

Calcul de  $A$  :  $a^2 = c^2 + b^2 - 2.c.b.\cos A$

ou bien :  $b = a.\cos C + c.\cos A$

Calcul de  $B$  :  $b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.a.\cos B$

ou bien :  $a = b.\cos C + c.\cos B$

Cette solution est unique.

On vérifie que  $A + B + C = 200$  gon.

#### Exemple

$a = 151,46$  m ;  $b = 212,28$  m ;  $c = 98,45$  m.

#### Résultats

$C = 27,704$  gon ;  $A = 44,926$  gon ;  $B = 127,370$  gon ;  $S = 6\,777,1145$  m<sup>2</sup>.

### 4.3.3 Un côté $b$ et les deux angles adjacents $C$ et $A$ sont connus

Calcul de  $B$  :  $A + B + C = 200$  gon

Calcul de  $a$  et  $c$  :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Cette solution est unique.

On vérifie que  $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$ .

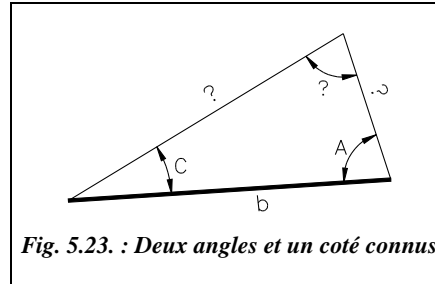


Fig. 5.23. : Deux angles et un côté connus

#### Exemple

$b = 151,46$  m ;  $A = 44,926$  gon ;  $C = 34,343$  gon.

#### Résultats

$B = 120,731$  gon ;  $a = 103,68$  m ;  $c = 82,12$  m ;  $S = 4033,2002$  m<sup>2</sup>.

### 4.3.4 Les trois angles $A$ , $B$ et $C$ sont connus

Ce cas admet une infinité de solutions qui sont des triangles homothétiques. La figure ci-contre représente deux triangles homothétiques (fig. 5.24.).

Pour obtenir une seule solution, il faut connaître l'un des côtés.

Cela revient à la résolution du paragraphe 4.3.3.

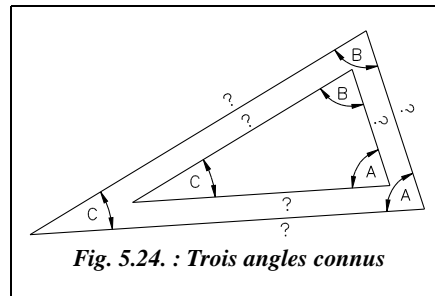


Fig. 5.24. : Trois angles connus

#### Exemple

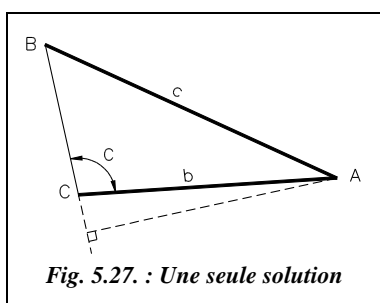
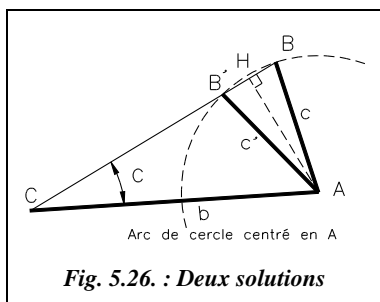
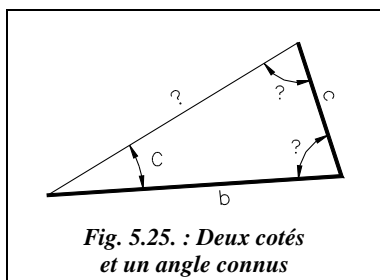
$A = 44,926$  gon ;  $B = 120,731$  m ;  $C = 34,343$  gon ;  $a = 91,46$  m.

#### Résultats

$b = 133,61$  m ;  $c = 72,44$  m.

### 4.3.5 Un angle $C$ , un côté adjacent $b$ et le côté opposé $c$ sont connus

Ce cas est appelé cas douteux car il peut admettre zéro, une ou deux solutions. Nous discuterons graphiquement de l'existence de ces solutions.



◆ **Si  $C < 100$  gon (fig. 5.26.)**

Si  $c < AH$ , il n'y a pas de solution possible car  $c$  est « trop court ».

Si  $c = AH$ , il existe une solution unique qui correspond au triangle  $CAH$  rectangle en  $H$ , car  $AH = b \cdot \sin C$ .

Si  $c > AH$ , il existe deux solutions possibles du point  $B$  puisque le cercle de centre  $A$  et de rayon  $c$  coupe la droite  $(CB)$  issue du point  $C$  en 2 points  $B$  et  $B'$ . Si l'on poursuit l'augmentation de la valeur du côté  $c$  jusqu'à atteindre la valeur  $b$ , on se retrouve dans un cas limite à partir duquel il n'y a plus qu'une seule solution possible puisqu'il n'y a plus qu'une seule intersection possible entre la droite  $(CB)$  et le cercle de centre  $A$  et de rayon  $c$ .

◆ **Si  $C > 100$  gon (fig. 5.27.)**

La seule possibilité pour qu'il y ait une solution au problème est que  $c > b$ .

Si  $b = c$ , le triangle est limité à une seule droite, ce qui est ne correspond pas à un problème réel.

Si  $c < b$ , il n'y a pas de solution possible :  $c$  est « trop court ».

**Tableau récapitulatif**

<b><math>C &lt; 100</math> gon</b>		<b><math>C &gt; 100</math> gon</b>	
$c < b \cdot \sin C$	aucune solution	$c \leq b$	aucune solution
$c = b \cdot \sin C$	une solution	$c > b$	une solution
$b \cdot \sin C < c < b$	<b>deux solutions</b>		
$c > b$	une solution		

**Résolution**

L'angle  $B$  est déterminé dans l'expression  $c / \sin C = b / \sin B$ .

Si  $b \cdot \sin C < c$ , ceci donne deux solutions  $B$  et  $B'$  :

$$\begin{cases} B = \sin^{-1}\left(\frac{b \cdot \sin C}{c}\right) \\ B' = 200 - B \end{cases}$$



On calcule l'angle A par :  $A + B + C = 200$  gon

Le calcul de  $A'$  est identique.

On calcule la côté a par :  $a / \sin A = c / \sin C$

Le calcul de  $a'$  est identique.

On vérifie que  $c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$ .

#### Exemple

$c = 191,46$  m ;  $b = 212,28$  m ;  $C = 71,002$  gon.

#### Résultats

$C < 100$  gon et  $b > c > b \cdot \sin C = 190,64$  m, donc il y a deux solutions.

Première solution :  $B = 94,092$  gon ;  $A = 34,906$  gon ;  $a = 111,13$  m.

Seconde solution :  $B' = 105,908$  gon ;  $A' = 23,090$  gon ;  $a' = 75,64$  m.

### 4.3.6 Résolution graphique



L'environnement de travail est défini dans le menu **FORMAT / CONTROLE DES UNITES** : zéro des angles au nord, sens de rotation horaire, angles en grades avec trois chiffres significatifs, longueurs en unités décimales avec deux chiffres significatifs.

Droite CA : **LIGNE** d'un point quelconque à **@212.28<100**

Droite CB : **LIGNE** depuis le point C (utilisez l'accrochage **EXTrémité**) à **@200<-371.002**

Position de la droite AB : **CERCLE** de centre le point A (utilisez l'accrochage **EXTrémité**) et de rayon **191.46**

Droites AB possibles : tracez deux lignes depuis le centre du cercle jusqu'aux deux points d'intersection du cercle et de la droite CB.

Il reste à mesurer les deux longueurs possibles CB et CB' avec la commande **DISTANCE** et les angles A, A', B et B' par exemple avec des cotations angulaires (menu **COTATION / ANGULAIRE**).

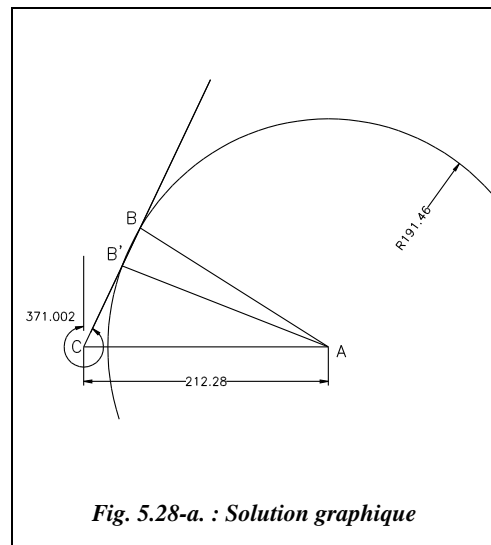


Fig. 5.28-a. : Solution graphique

### 4.3.7 Programmation en basic standard de la résolution de triangles



Le programme suivant regroupe les quatre cas de figure possibles de la résolution d'un triangle. Il est donné en BASIC standard (avec les numéros de ligne) pour être adapté aux calculatrices programmables.

Trois données sont nécessaires. Les variables contenant les angles sont notées AA, AB et AC. Celles qui contiennent les cotés sont notées CA, CB, CC. Par convention, le côté CA est opposé à l'angle AA.

```

1 PRINT "Résolution de triangles"
2 INPUT "(1)ABc (2)abc (3)abC (4)abA"; NU
3 ON NU GOTO 10, 100, 200, 300
4 END
5 REM On connaît un côté et deux angles adjacents
10 INPUT "Côté c (m) "; CC
20 INPUT "Angle A (gon)"; AA
30 INPUT "Angle B (gon) "; AB
40 AC = 200 - AA - AB : REM Calcul direct de l'angle C
50 CB = CC / SIN(AC) * SIN(AB) : REM Calcul direct du côté b
60 CA = CC / SIN(AC) * SIN(AA) : REM Calcul direct du côté a
80 PRINT "Angle C : "; AC ;"gon" : REM Affichage des résultats
90 PRINT "Côté b : ";CB; " m"
95 PRINT "Côté a : ";CA; " m" : END
99 REM Trois cotés connus
100 INPUT "Côté a (m) "; CA
120 INPUT "Côté b (m) "; CB
130 INPUT "Côté c (m) "; CC
140 AA = ARCCOS((CC^2+CB^2-CA^2)/(2*CC*CB))
145 IF AA < 0 THEN AA=AA+200 : REM si A négatif, ajouter 200 gon
150 AB = ARCCOS((CA^2+CC^2-CB^2)/(2*CA*CC))
160 IF AB < 0 THEN AB=AB+200 : REM si B négatif ajouter 200 gon
180 PRINT "Angle A : "; AA ;"gon"
190 PRINT "Angle B : "; AB ;"gon"
195 PRINT "Angle C : "; 200 - AA - AB ;"gon" : END
199 REM un angle et deux côtés adjacents connus
200 INPUT "Longueur du côté a (m) "; CA
220 INPUT "Longueur du côté b (m) "; CB
230 INPUT "Angle C (gon) "; AC
240 CC = SQR(CA^2+CB^2-2*CA*CB*COS(AC))
250 AB = ARCCOS((CA^2+CC^2-CB^2)/(2*CA*CC))
260 IF AB < 0 THEN AB=AB+200 : REM si B négatif, ajouter 200 gon

```

```

280 PRINT "Angle A : "; 200 - AB - AC ;"gon"
290 PRINT "Angle B : "; AB ;"gon"
295 PRINT "Côté c : "; CC ;"m" : END
299 REM On connaît un angle, le côté opposé et un autre côté
300 INPUT "Longueur du côté a (m) "; CA
320 INPUT "Longueur du côté b (m) "; CB
330 INPUT "Angle A (gon) "; AA
340 IF CA<CB*SIN(AA) THEN GOTO 390 : REM Cas sans solution (aller en 390)
345 IF CA=CB*SIN(AA) AND AA>=100 THEN GOTO 390
350 IF CA>CB*SIN(AA) AND AA>100 AND CA<=CB THEN GOTO 390
355 AB = ARCSIN(CB*SIN(AA)/CA) : AC = 200 - AA - AB
360 PRINT "Solution 1" : PRINT "Angle B (gon) ";AB
363 PRINT "Angle C (gon) ";AC
364 PRINT "Côté c (m) ";SIN(AC)*CA/SIN(AA)
365 IF CA>CB*SIN(AA) AND AA<100 AND CA<CB THEN GOTO 375
370 PRINT "Solution unique" : END : REM Fin du cas à une seule solution
375 PRINT "Solution 2" : REM Début du calcul de la 2e solution
380 PRINT "Angle B' (gon) "; 200-AB
381 PRINT "Angle C' (gon) ";AB - AA
385 PRINT "Côté c' (m) ";SIN(AB-AA)*CA/SIN(AA) : END
390 PRINT "Pas de solution" : END

```

Ce programme est donné sur le cédérom du livre sous forme de fichier (TRIANGLE.BAS) lisible par le programme QBASIC.EXE livré avec le DOS (à partir de la version 5.0). Le listing est dans le fichier TRIANGLE.TXT.

### Remarques

- Le listing ci-dessus est donné pour une calculatrice programmable en BASIC standard et réglée en mode grades. Le listing du programme TRIANGLE.BAS (sur le cédérom) fait apparaître des conversions d'angles de radians en grades (et inversement) puisque l'ordinateur travaille en radian.
- Le listing ci-dessus suppose que votre Basic dispose des deux fonctions arccos( ) et arcsin( ). Si ce n'est pas le cas, vous disposez d'au moins l'une d'entre elles, par exemple arcsin( ), et vous obtiendrez l'autre grâce à la transformation suivante :  $\text{ALPHA} = \arcsin(\text{SQR}(1 - \text{COSINUS}^2))$ . Cette expression permet de mettre dans la variable alpha la valeur de l'angle dont le cosinus est stocké dans la variable cosinus. Elle remplace donc la fonction arccos( ). Alpha est donné en grades si la machine est réglée en mode grades lors de l'exécution du programme. Par exemple, la ligne 250 du programme ci-dessus deviendrait :

$$250 \text{ AB} = \text{ARCSIN}(\text{SQR}(1 - ((\text{CA}^2 + \text{CC}^2 - \text{CB}^2) / (2 * \text{CA} * \text{CC}))^2))$$

### 4.3.8 Tableau de calcul pour la résolution de triangles

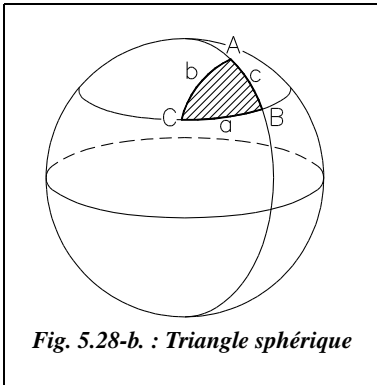


Si vous préférez l'utilisation d'un tableur, la résolution des triangles est proposée sur le fichier TRIANGLE.XLS pour EXCEL.

## 4.4 Trigonométrie sphérique

Quelques relations de trigonométrie sphérique sont nécessaires à certains calculs sur la « sphère » terrestre. Elles sont données ci-après.

### 4.4.1 Excès sphérique



La somme des angles d'un triangle sphérique est supérieure à 200 gon d'une quantité  $\varepsilon$ , appelée excès sphérique. Le calcul de cet excès permet donc de remplacer le triangle sphérique ABC (fig. 5.28-b.) par un triangle plan dans lequel la trigonométrie classique s'applique. On a :

$$A + B + C = 200 + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon_{\text{radians}} = \frac{S}{R^2}$$

$S$  est la surface du triangle sphérique.

$R$  est le rayon de la sphère.

L'excès sphérique  $\varepsilon$  étant toujours très petit, la surface  $S$  est calculé par des formules approchées de trigonométrie plane, par exemple,  $2.S = a.b.\sin C$  ou autre. Les angles du triangle plan équivalent sont diminués de  $\varepsilon/3$ .

#### Application

La surface terrestre est proche d'un ellipsoïde de révolution (tome 1, chap. 2, § 2.) dont le rayon de courbure moyen en un lieu de latitude  $\varphi$  est donné par :

$$R = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \sin \varphi}$$

$a$  et  $e$  sont des paramètres de définition de l'ellipsoïde (demi-grand axe et excentricité). Calculez l'excès sphérique d'un triangle équilatéral de 20 km de côté situé à Antibes.

#### Réponse

À Antibes,  $R \approx 6\,377\,121$  m. Pour un triangle équilatéral de 20 km de côté  $S = 20\,000^2 \cdot \sqrt{3}/4$  m<sup>2</sup>, donc  $\varepsilon = 2,7$  dmgon.

### Remarque

L'assimilation locale de la terre à une sphère de rayon moyen  $R$  et l'approximation de la formule donnant l'excès sphérique conduisent à des erreurs sur les côtés des triangles qui sont de l'ordre du centimètre pour des côtés de 180 km, donc largement négligeables pour des mesures courantes.

#### 4.4.2 Quelques relations dans les triangles sphériques

Si on note  $A, B, C$  les angles aux sommets du triangle sphérique et  $a, b$  et  $c$  les arcs opposés à ces angles, on obtient :

- la relation fondamentale suivante :  $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$  ;
- la formule des cotangentes suivante :  $\cotan A \cdot \sin C = \cotan a \cdot \sin b - \cos b \cdot \cos c$  ;
- la formule des sinus suivante :  $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$ .

Ces relations restent valables après permutations circulaires des paramètres. Ces relations font intervenir les arcs  $a, b$  et  $c$  mesurés sur la sphère de rayon unité. Ces longueurs sont donc équivalentes aux angles au centre de chaque arc intercepté sur la sphère étudiée.

Les angles  $A, B$  et  $C$  sont les angles plans entre les tangentes au triangle à chaque sommet.

## 5 EXTENSION DE CERTAINES FORMULES AUX POLYONES

### 5.1 Surface d'un QUADRILATÈRE

La surface du quadrilatère ABCD ci-contre (fig. 5.29.), inscriptible dans un cercle de rayon  $R$  et circonscriptible à un cercle de rayon  $r$ , s'exprime par :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ S &= pr \\ \text{avec : } p &= \frac{a+b+c+d}{2} \end{aligned}$$

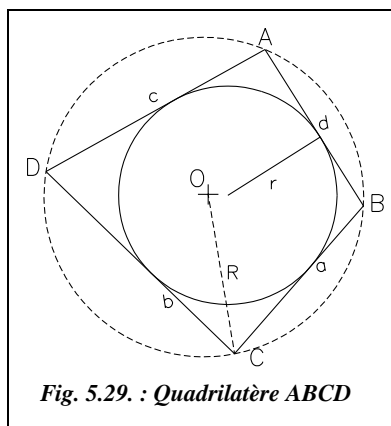


Fig. 5.29. : Quadrilatère ABCD

## 5.2 Somme des angles internes d'un polygone

La somme des angles internes d'un polygone de  $n$  côtés (fig. 5.30.) vérifie la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = (n-2) \cdot 200 \text{ gon}$$

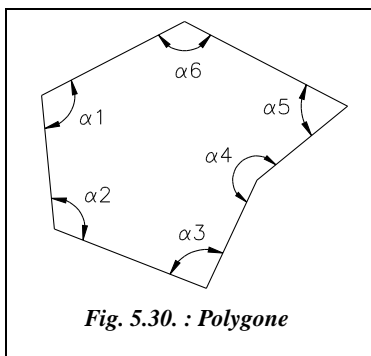


Fig. 5.30. : Polygone

### Application

1 - Vérifiez que cette formule s'applique au cas particulier du triangle.

2 - Démontrez que la somme des angles externes vérifie la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta_i = (n+2) \cdot 200 \text{ gon avec } \beta_i = 400 - \alpha_i$$

### Réponse

1- Pour  $n = 3$ , la somme des angles internes vaut 200 gon.

2- Remplacez les angles internes  $\alpha_i$  par  $400 - \beta_i$  et simplifiez.

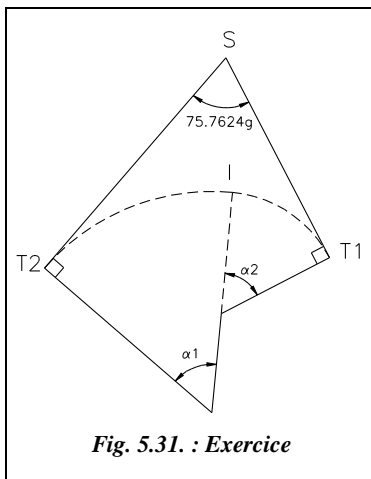


Fig. 5.31. : Exercice

### Application

La figure 5.31. schématise un raccordement circulaire entre deux alignements droits S-T1 et S-T2 : le raccordement est constitué de deux arcs de cercle tangents entre eux au point I et d'angles aux centres respectifs  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Trouvez la relation liant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

### Réponse

$$75,7624 + 100 + 100 + \alpha_1 + (200 + \alpha_2) = 600$$

$$\text{Donc : } \alpha_1 + \alpha_2 = 124,2376 \text{ gon.}$$

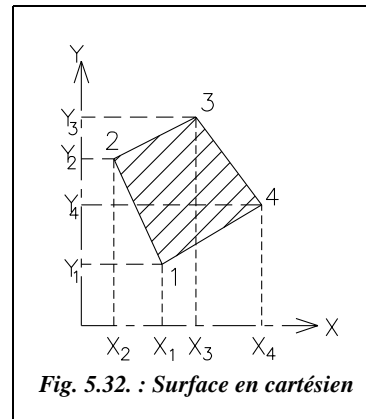
## 6 SURFACE D'UN POLYGONE QUELCONQUE

### 6.1 Les sommets sont connus en coordonnées cartésiennes $x,y$

Soit un polygone de  $n$  sommets dont chacun est connu par ses coordonnées rectangulaires  $(X_i ; Y_i)$ . La figure 5.32. présente un exemple avec  $n = 4$ . La surface de ce polygone s'exprime de deux manières équivalentes :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})$$

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})$$



#### Remarques

- Si la surface  $S$  est positive, alors la surface  $S'$  est négative et inversement. On doit donc toujours vérifier que  $S' + S = 0$ .
- Lors de la rotation des indices  $i$ , on applique la convention suivante :

$$X_0 = X_n ; Y_0 = Y_n ; X_{n+1} = X_1 ; Y_{n+1} = Y_1.$$

Cela revient à considérer les sommets comme étant sur une boucle décrite en tournant autour de la surface ; le sommet 1 est alors le suivant du sommet  $n$  et, par conséquent, le sommet  $n$  est le précédent du sommet 1.

#### Démonstration de ces formules

Le raisonnement est fait sur le triangle 1-2-3 (fig. 5.33.) : sa surface peut être décomposée en trois trapèzes rectangles :

- le trapèze  $(X_1, X_2, 2, 1)$  de surface  $S_1 = (X_1 - X_2) \cdot (Y_1 + Y_2) / 2$
- le trapèze  $(X_3, X_2, 2, 3)$  de surface  $S_2 = (X_3 - X_2) \cdot (Y_3 + Y_2) / 2$
- le trapèze  $(X_3, X_1, 1, 3)$  de surface  $S_3 = (X_3 - X_1) \cdot (Y_3 + Y_1) / 2$

La surface totale du triangle 1-2-3 est  $S_2 - S_3 - S_1$ . Après mise en facteur, on obtient :

$$2 \cdot S' = Y_1 \cdot (X_3 - X_2) + Y_2 \cdot (X_1 - X_3) + Y_3 \cdot (X_2 - X_1).$$

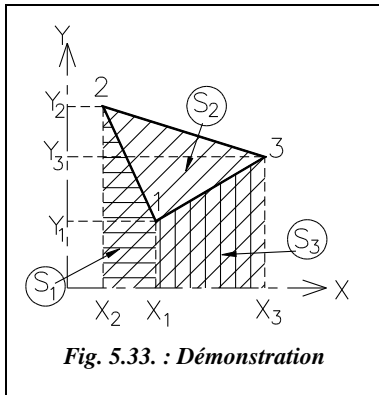


Fig. 5.33. : Démonstration

On arrive donc à la formulation obtenue précédemment pour la surface  $S'$ . La formulation donnant la surface  $S$  serait obtenue en découpant le triangle en trapèzes rectangles « horizontaux ».

La suite de la démonstration est effectuée par récurrence dont nous rappelons le principe : la formule est démontrée pour l'indice  $n = 3$  ; on la considère vraie à l'indice  $n$  et l'on démontre qu'elle reste vraie à l'indice  $n+1$  ; elle est alors vraie pour toute valeur de  $n$ .

### Application

Le polygone suivant est défini par les coordonnées locales de ses sommets exprimées en mètre dans le tableau suivant. Calculez sa superficie au centimètre carré près.

Point	A	B	C	D	E
$X_i$ (m)	120,41	341,16	718,59	821,74	297,61
$Y_i$ (m)	667,46	819,74	665,49	401,60	384,13

### Résultats

Point	$X_{i-1} - X_{i+1}$	$Y_{i-1} - Y_{i+1}$	$X_i(Y_{i-1} - Y_{i+1})$	$Y_i(X_{i-1} - X_{i+1})$
A	-43,55	-435,61	-52451,8001	-29067,8830
B	-598,18	1,97	672,0852	-490352,0732
C	-480,58	418,14	300471,2226	-319821,1842
D	420,98	281,36	231204,7664	169065,5680
E	701,33	-265,86	-79122,5946	269401,8929
<b>Totaux</b>			400773,6795	-400773,6795

Surface totale : 200 386,8398 m<sup>2</sup>. Périmètre : 1 817,85 m.

Le double calcul de  $S$  et  $S'$  est une excellente vérification des calculs.

## 6.2 Les sommets sont connus en coordonnées polaires

La définition des coordonnées polaires est donnée au paragraphe 8.1.

Un appareil du type théodolite stationné au point  $S$  permet d'effectuer les lectures des angles  $\alpha_i$  sur les sommets du polygone. Si on mesure ensuite (par exemple au ruban) la distance horizontale du point  $S$  à chacun des sommets, on connaît ces sommets en coordonnées polaires topographiques ( $Dh$ ,  $\alpha$ ) dans le repère  $(S, X, Y)$ , l'axe des ordonnées  $Y$  étant la position du zéro du cercle horizontal du théodolite (fig. 5.34.).



Attention : ces coordonnées polaires sont particulières à la topographie puisque le zéro des angles est placé sur l'axe des ordonnées  $Y$  et leur sens de rotation est horaire. Les coordonnées polaires mathématiques placent le zéro des angles sur l'axe des abscisses  $X$  avec des angles tournant positivement en sens trigonométrique (ou inverse horaire ; voir paragraphe 8.1).

On découpe la surface totale du polygone de  $n$  côtés en  $n$  triangles partant tous du sommet  $S$ . On peut en déduire la surface en projection horizontale d'un polygone de  $n$  côtés par la formule suivante :

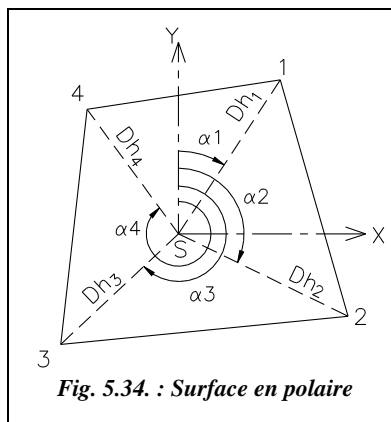


Fig. 5.34. : Surface en polaire

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} Dh_i \cdot Dh_{i+1} \cdot \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$$

**Remarque**

- Par convention  $\alpha_{n+1} = \alpha_1$  et  $Dh_{n+1} = Dh_1$  ; le sommet 1 est le sommet suivant le sommet  $n$ .
- La surface du triangle (1S4) de l'exemple de la figure 5.34. fait intervenir l'angle  $(\alpha_1 - \alpha_4)$  qui est négatif. Pour obtenir sa valeur dans le tableau, il suffit de lui ajouter 400 gon. Ceci n'est pas nécessaire dans le calcul puisque le sinus ne change ni de valeur ni de signe :  $\sin\alpha = \sin(400 + \alpha)$ .
- Si la station  $S$  est située à l'extérieur du polygone, la formule est également applicable. Il apparaît alors dans le calcul des surfaces négatives dont il faut conserver le signe dans la somme de la formule générale.

**Application**

Calculez la surface du polygone (A-B-C-D-E) levé en coordonnées polaires topographiques à partir de la station  $S$  (fig. 5.35.). Ces coordonnées sont données dans le tableau suivant :

Points	Dh (m)	Angles (gon)
<b>A</b>	48,12	53,12
<b>B</b>	51,33	100,03
<b>C</b>	48,71	147,41
<b>D</b>	57,48	261,53
<b>E</b>	47,93	380,37

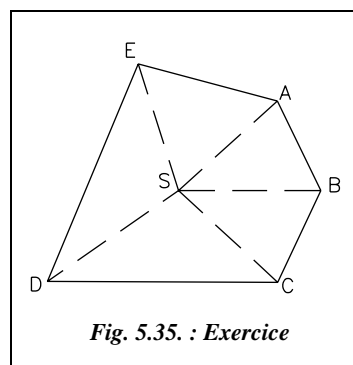


Fig. 5.35. : Exercice

### Résultats

La surface totale est 5 409,1575 m<sup>2</sup> et le périmètre 292,36 m. Le tableau suivant donne le détail des calculs.

Triangles	Angle ( $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ )	Surface (m <sup>2</sup> )	Côté opposé (m)
ASB	46,91	829,8781	35,94
BSC	47,38	846,8655	36,46
CSD	114,12	1365,6326	83,12
DSE	118,84	1317,6265	84,90
ESA	72,75	1049,1548	51,94

## 6.3 Formule de sarron

Soit un polygone de  $n$  côtés. Si l'on connaît la longueur de  $n-1$  côtés et la mesure des  $n-2$  angles entre ces côtés, on peut calculer la surface du polygone par la formule :

$$S = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} ab \cdot \sin \widehat{ab} + ac \cdot \sin \widehat{ac} + ad \cdot \sin \widehat{ad} + \dots \\ + bc \cdot \sin \widehat{bc} + bd \cdot \sin \widehat{bd} + \dots \\ + cd \cdot \sin \widehat{cd} + \dots \end{array} \right]$$

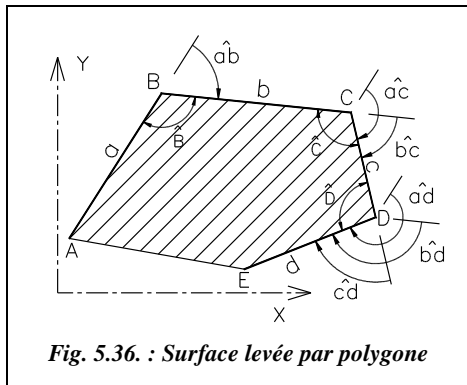


Fig. 5.36. : Surface levée par polygone

- $a, b, c, d, \dots$  représentent les  $n-1$  côtés connus.
- $\widehat{ab}$  est l'angle entre les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$ .  $\widehat{ab}$  est aussi le complémentaire de l'angle interne au sommet B (noté  $\widehat{B}$ ) :  $\widehat{ab} = 200 - \widehat{B}$
- $\widehat{ab}, \widehat{ac}, \widehat{ad}, \widehat{bc}, \widehat{bd}, \dots$  représentent les  $n-2$  angles dirigés entre les  $n-1$  côtés de longueur connue.
- Les angles dirigés s'additionnent :

$$\widehat{ac} = \widehat{ab} + \widehat{bc}, \widehat{ad} = \widehat{ac} + \widehat{cd}, \text{ etc. (fig. 5.36).}$$

La formule s'applique au triangle :  $2 \cdot S = a \cdot b \cdot \sin \widehat{ab} = a \cdot b \cdot \sin(200 - \widehat{ab})$ .

### Démonstration de la formule de Sarron

On découpe le quadrilatère de la figure 5.37. en deux triangles ABD et BCD dont les surfaces se calculent comme suit :

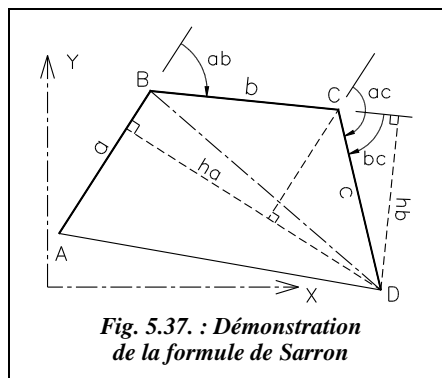
$$2.S_{ABD} = a.h_a = a.[b.\sin \widehat{ab} + c.\sin(200 - \widehat{ac})].$$

$$2.S_{BCD} = b.h_b = b.c.\sin \widehat{bc}.$$

On obtient finalement la formule de Sarron pour un quadrilatère :

$$2.S = a.b.\sin \widehat{ab} + a.c.\sin \widehat{ac} + b.c.\sin \widehat{bc}$$

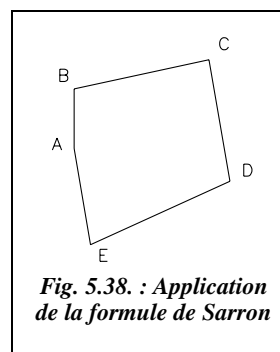
La démonstration pour un polygone à  $n$  côtés peut être faite sur le même principe.



### Application

Calculez la surface du polygone ABCDE (fig. 5.38.) sur lequel les mesures suivantes ont été effectuées :

Côté AB = 12,32 m      Angle ABC = 113,656 gon  
 Côté BC = 28,46 m      Angle BCD = 97,127 gon  
 Côté CD = 25,52 m      Angle CDE = 116,632 gon  
 Côté DE = 31,59 m



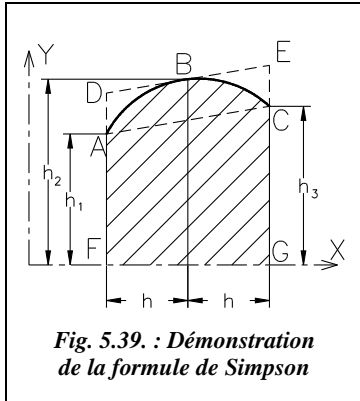
### Réponse

La surface totale est 869,5569 m<sup>2</sup>; le tableau suivant donne le détail de calculs des différents termes de la formule.

Tableau de calcul de la surface du polygone ABCDE (fig. 5.38.) par la formule de sarron.

Côtés (m)	Angles dirigés (gon)			Surfaces en m <sup>2</sup>		
<b>a = 12,32</b>						
	ab = 86,344			a.b.sin(ab) = 342,5913		
<b>b = 28,46</b>						
	bc = 102,873	ac = ab + bc = 189,217		a.c.sin(ac) = 52,9996	b.c.sin(bc) = 725,5597	
<b>c = 25,52</b>						
	cd = 83,368	bd = bc + cd = 186,241	ad = ac + cd = 272,585	a.d.sin(ad) = -353,6564	b.d.sin(bd) = 192,7991	c.d.sin(cd) = 778,8205
<b>d = 31,59</b>						

## 6.4 Formule de Simpson



Cette formule, peu utilisée en topographie, permet d'introduire et donc de comprendre la formule des trois niveaux (§ 7.2.).

Soit à calculer la surface délimitée par l'arc de parabole AC (d'axe vertical) et l'axe des abscisses X (fig. 5.39.). L'arc est découpé en deux parties AB et BC telles que les projections de A, B et C sur l'axe des abscisses X soient équidistantes d'une valeur  $h$ .

On utilise la propriété de la parabole suivante : la surface délimitée par l'arc de parabole ABC et la droite AC est égale au deux tiers de la surface du parallélogramme circonscrit ADEC ; la surface hachurée FABCG a donc pour valeur :

$$S = \left( \frac{h_1 + h_3}{2} 2h \right) + \frac{2}{3} \left( 2hh_2 - 2h \frac{h_1 + h_3}{2} \right) = \frac{h}{3} (h_1 + 4h_2 + h_3).$$

En découpant la surface en quatre tronçons égaux, on obtiendrait :

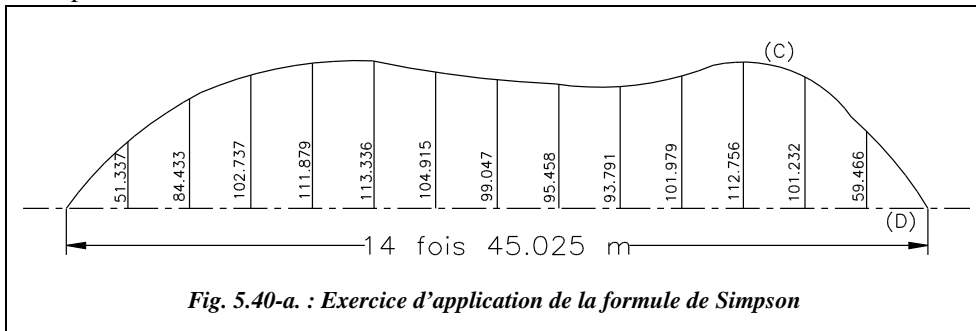
$$S = \frac{h}{3} (h_1 + 4h_2 + h_3) + \frac{h}{3} (h_3 + 4h_4 + h_5) = \frac{h}{3} (h_1 + h_5 + 4h_2 + 2h_3).$$

En généralisant à une suite de  $n$  intervalles équidistants de  $h$  :

$$S = \frac{h}{3} (h_1 + h_{n+1} + 4 \sum h_{pair} + 2 \sum h_{impair})$$

Le nombre  $n$  d'intervalles doit être pair. S'il est imposé impair, le dernier tronçon est calculé à part (par exemple en le divisant en deux).

On peut appliquer cette formule à la détermination de la superficie délimitée par une courbe quelconque découpée en  $n$  tronçons égaux. Plus le découpage est serré, meilleure est la précision.



### Application

Calculez la surface délimitée par la courbe C et la droite D (fig. 5.40-a.). Chacun des 14 tronçons de courbe de largeur  $h = 45,025$  m est assimilé à un arc de parabole.

### Résultat

En appliquant la formule, il vient :  $S = 45,025/3 \cdot [0 + 0 + 4 \cdot (51,337 + 102,737 + 113,336 + 99,047 + 93,791 + 112,756 + 59,466) + 2 \cdot (84,433 + 111,879 + 104,915 + 95,458 + 101,979 + 101,232)] \approx 55\,976$  m<sup>2</sup>. La valeur « exacte » (mesurée grâce à la commande *AIRE* option *Entité* d'AutoCAD) est de 56 011,51 m<sup>2</sup>, soit un écart inférieur à 0,1 %. La courbe a été tracée par la commande *POLYLIGNE* ; elle est donc constituée d'une succession d'arcs de cercles tangents entre eux.

## 6.5 Formules complémentaires

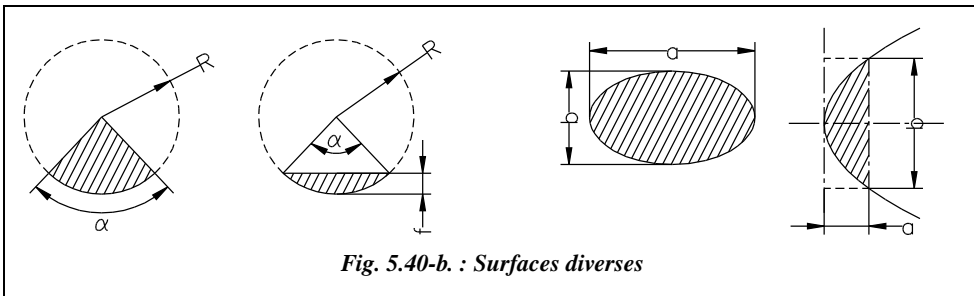


Fig. 5.40-b. : Surfaces diverses

Secteur circulaire	Segment circulaire	Ellipse	Segment parabolique
$S = \pi R^2 \frac{\alpha_{gon}}{400}$	$S = \pi R^2 \frac{\alpha_{gon}}{400} - R^2 \frac{\sin \alpha}{2}$ $f = R \cdot [1 - \cos(\alpha / 2)]$	$S = \frac{\pi ab}{4}$	$S = \frac{2}{3} ab$

## 6.6 Résolution informatique

### 6.6.1 Programmation en basic standard des formules précédentes



Ce programme regroupe les méthodes de calcul abordées précédemment, à l'exception de la formule de Simpson peu utilisée et dont la programmation présente peu d'intérêt. Suivant les données en sa possession, l'utilisateur choisira le sous-programme (1), (2) ou (3).

```
1 PRINT "Calcul de surfaces"  
2 INPUT "(1)Cart. (2)Pol. (3)Sarron"; NU  
3 ON NU GOTO 5, 100, 200  
4 END
```

```

5 PRINT "Sommets donnés en tournant autour de la surface"
10 INPUT "Nombre de sommets"; N : DIM X(N) , Y(N) : REM N = nombre de sommets
20 FOR I=1 TO N : PRINT "Point n° ";I : REM Boucle d'entrée des coordonnées
30 INPUT "X= ";X(I) : INPUT "Y= ";Y(I)
50 NEXT I
60 S = X(1)*(Y(N)-Y(2))+X(N)*(Y(N-1)-Y(1)) : REM Valeur initiale de la surface S
70 FOR I=2 TO N-1 : REM Boucle d'incréméntation de la surface S
80 S = S + X(I)*(Y(I-1)-Y(I+1))
85 NEXT I
90 PRINT "Surface : ";ABS(S)/2;" m2" : END
100 PRINT "Sommets donnés en polaires"
110 INPUT "Nombre de sommets"; N : DIM D(N) , A(N) : REM N = nombre de sommets
120 FOR I=1 TO N : PRINT "Point n° ";I
130 INPUT "Distance m ";D(I)
140 INPUT "Angle gon ";A(I)
150 NEXT I
155 S = D(1)*D(N)*SIN(A(1)-A(N)) : REM Valeur initiale de la surface S
160 FOR I=1 TO N-1 : REM Boucle d'incréméntation de la surface S
170 S = S + D(I)*D(I+1)*SIN(A(I+1)-A(I))
180 NEXT I
190 PRINT "Surface totale : ";S/2;" m2" : END

200 PRINT "Surface par la formule de Sarron"
210 INPUT "nomb. de côtés connus : "; N : DIM C(N), A(N), AC(N)
220 FOR i = 1 TO N
225 PRINT "Côté "; i; "m"; : INPUT C(i)
230 IF i < N THEN PRINT "Angle "; i; "-"; i+1; "gon"; : INPUT A(i)
240 NEXT i
250 FOR i = 1 TO N - 1 : REM Boucle de calcul des angles cumulés AC( )
255 AC(i) = AC(i - 1) + A(i) : NEXT i
260 S = 0 : FOR i = 1 TO N - 1 : FOR j = i TO N - 1 : REM Boucle d'incréméntation de S
270 S = S + C(i) * C(j + 1) * SIN((AC(j) - AC(i - 1)))
280 NEXT j : NEXT i
290 PRINT "Surface "; S / 2;" m2" : END

```

Le listing de ce programme est fourni sur cédérom dans le fichier SURFACES.BAS pour une utilisation avec le programme QBASIC.EXE. Le listing est dans SURFACES.TXT.

## 6.6.2 Calcul de surface automatisé sur tableur



Un tableau de calcul prêt à l'emploi est fourni sur le cédérom de l'ouvrage : il se nomme SURFACES.XLS. Il ne traite que les surfaces levées en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires.

Les coordonnées des sommets de surfaces levées par cheminements au moyen de la formule de Sarron seront calculées (voir chap. 2, § 1.) avant d'être utilisées dans la feuille « Cartésien » du tableau SURFACES.XLS.

## 6.6.3 Exemples de résolution graphique



**1- Polygone dont les sommets sont donnés en coordonnées cartésiennes :** c'est le cas le plus simple pour la résolution graphique sur DAO. De plus, depuis le développement de l'utilisation des stations de travail électroniques qui fournissent directement les coordonnées des points levés, cela devient quasiment le cas général.

Environnement de travail : réglez le nombre de chiffres après la virgule souhaité dans le menu **FORMAT / CONTROLE DES UNITES...** (commande *DDUNITS*), par exemple quatre chiffres après la virgule pour les longueurs de manière à obtenir le centimètre carré dans les surfaces affichées.

Tracé du polygone : *POLYLIGNE* du point  $120.41,667.46$  au point  $341.16,819.74$  au point  $718.59,665.49$  au point  $821.74,401.60$  au point  $297.61,384.13$  au point *Clore*

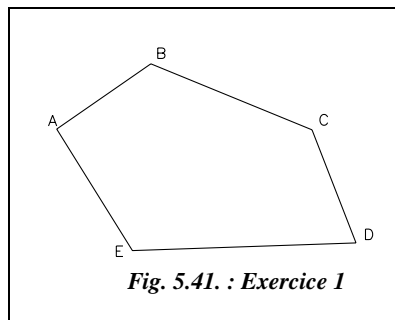


Fig. 5.41. : Exercice 1

Mesure de la surface : commande *AIRE* option *Objet*, cliquez sur la polyligne contour et lisez la surface et le périmètre en bas de l'écran. Résultat au paragraphe 6.1.

**2- Polygone dont les sommets sont donnés en coordonnées polaires :** la construction graphique est aussi simple que précédemment. On utilise les coordonnées polaires absolues. Environnement de travail : mêmes réglages que précédemment avec, de plus, le réglage des unités angulaires en grades, zéro au nord, sens de rotation horaire.

Tracé du polygone : *POLYLIGNE* du point  $48.12 < 53.12$  au point  $51.33 < 100.03$  au point  $48.71 < 147.41$  au point  $57.48 < 261.53$  au point  $47.93 < 380.37$  au point *Clore*. Mesure de la surface : voir 1-. Résultat au paragraphe 6.2.

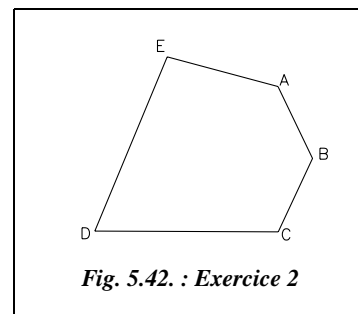
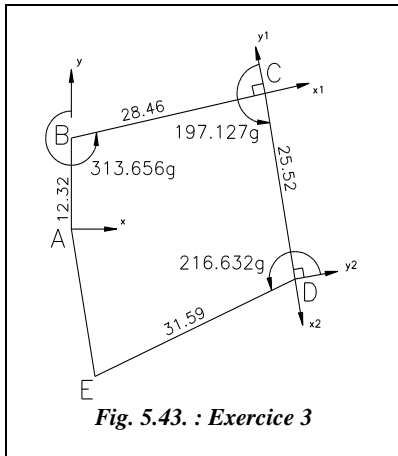


Fig. 5.42. : Exercice 2



### 3- Polygone dont on connaît $n-1$ côtés et $n-2$ angles entre ces côtés : formule de Sarron

La construction graphique est plus complexe. Son intérêt est l'introduction d'une notion très utile en topographie : le changement de repère (SCU pour AutoCAD : Système de Coordonnées Utilisateur).

Environnement : même configuration qu'au 2-.

AB et BC sont tracées dans le repère général (A,x,y) : **LIGNE** du point 0,0 au point 0,12.32 au point @28.46<-313.656.

Pour tracer CD, nous allons passer dans le repère (B,x1,y1) : commande **SCU** option **Objet**

cliquez sur la ligne BC vers le point B. Tracé de CD : **LIGNE** du point C (**EXTrémité** de BC) au point @25.52<-197.127

On effectue les mêmes opérations pour tracer DE : définissez le repère (C,x2,y2) puis **LIGNE** du point D au point @31.59<-216.632

EA n'est pas indispensable. Mesurez la surface du polygone avec la commande **AIRE**, donnez successivement les 5 points A, B, C, D puis E (**EXTrémité** de...) puis validez (↵) après l'entrée de E. Le résultat est donné au paragraphe 6.3.

#### Remarques

- Les options de la commande **SCU** sont accessibles à la souris dans le menu **VUE / DEFINIR LE SCU**.
- Chaque fois que l'on définit un nouveau SCU, on peut le sauvegarder (option **Sauver** de la commande **SCU**) afin de pouvoir le rappeler simplement plus tard (option **Restaurer**). Tout cela peut aussi être géré dans la boîte de dialogue **DEFINIR LE SCU / SCU EXISTANT** du menu **VUE** (commande **DDSCU**).

## 7 CALCULS DE VOLUMES

### 7.1 Volumes quelconques

C'est une application de la formule de Simpson démontrée au paragraphe 6.4. Le volume d'un solide quelconque (fig. 5.44.) peut être évalué à l'aide de la formule suivante :

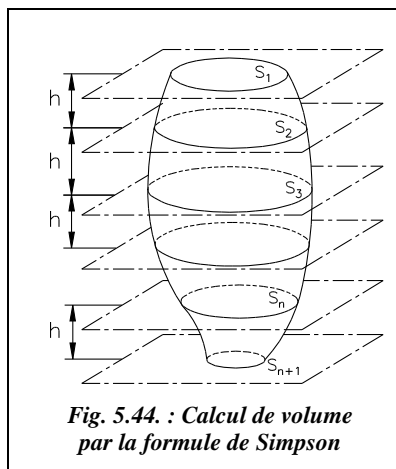
$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_{n+1} + 4 \sum S_{pair} + 2 \sum S_{impair})$$



Le volume est découpé en  $n$  tronçons par  $n+1$  plans parallèles et équidistants d'une hauteur  $h$ . La hauteur totale est donc  $H = n.h$ .

Le nombre de tronçons doit être pair. S'il est imposé impair, le dernier (ou le premier) tronçon doit être traité à part (par exemple en le découpant en deux).

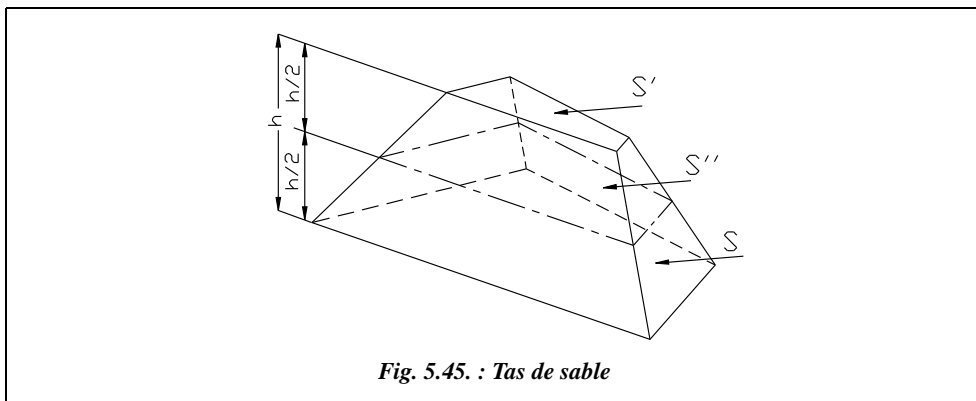
Le calcul de volume au moyen de courbes de niveau effectué au chapitre 10 du tome 1, paragraphe 2.5.3. est une application de cette formule.



## 7.2 Formule des trois niveaux

Cette formule permet de calculer la plupart des volumes complexes (tronc de pyramide, tronc de cônes, segments sphériques, tas de sable, etc.). Soit le volume (fig. 5.45.) tel que :

- les surfaces  $S$ ,  $S'$  et  $S''$  sont parallèles entre elles ;
- les surfaces extrêmes  $S$  et  $S'$  sont distantes de la valeur  $h$  hauteur du volume ;
- la surface  $S''$  est située à la demi-hauteur  $h/2$ .



Le volume total vaut alors : 
$$V = \frac{h}{6}(S + S' + 4S'')$$

En fait, c'est une application de la formule du paragraphe 7.1. pour  $n = 2$ .

À partir de cette formule, on peut retrouver le volume d'une pyramide de hauteur  $h$  et de surface de base  $S$  :  $V_{\text{pyramide}} = h / 6 \cdot (S + 0 + 4 \cdot S / 4) = S \cdot h / 3$ .

## 7.3 Formule de la moyenne des bases

Dans le cadre de calculs de cubatures pour des mouvements de terre (voir tome 1, chap. 10, § 2.5.), il n'est pas utile d'effectuer un calcul exact des volumes de terre, les quantités de terre déplacées et les incertitudes sur les dimensions réelles des excavations et sur la connaissance du terrain naturel sont telles qu'il suffit d'un calcul approché pour rester dans la même marge d'erreur. On emploie alors la méthode de calcul suivante (fig. 5.46.) : on considère que le volume  $V$  est égal au produit de la demi-somme des surfaces qui le limitent  $(S + S')/2$  par la distance  $h$  qui les sépare.

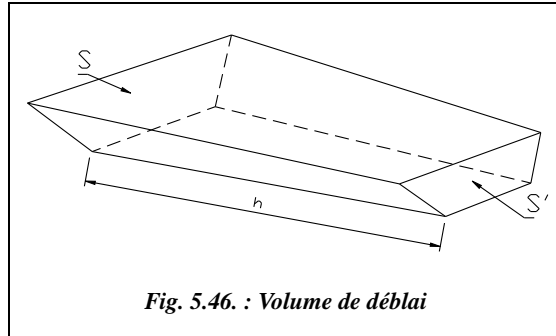


Fig. 5.46. : Volume de déblai

$$V = h \frac{S' + S}{2}$$

Pour démontrer cette formule, on part de la formule des trois niveaux.

$S'$  et  $S$  étant parallèles et distantes de  $h$ , on peut dire que  $S'' = (S + S') / 2$  (si les facettes qui joignent  $S$  et  $S'$  sont des plans. En remplaçant dans la formule des trois niveaux, on obtient l'expression ci-dessus).

## 7.4 Calcul exact par décomposition en volumes élémentaires

Le volume à décomposer doit être délimité par des surfaces planes régulières (surfaces non gauches). Les volumes de base sont (fig. 5.47.) :

- la pyramide de surface de base  $S$  de volume  $V = S \cdot h / 3$
- le tronc de prisme de section droite triangulaire  $S$  de volume  $V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3) / 3$
- le tronc de prisme dont la section droite est un parallélogramme (voir tome 1, chap. 10, § 2.5.2.1.) de volume :

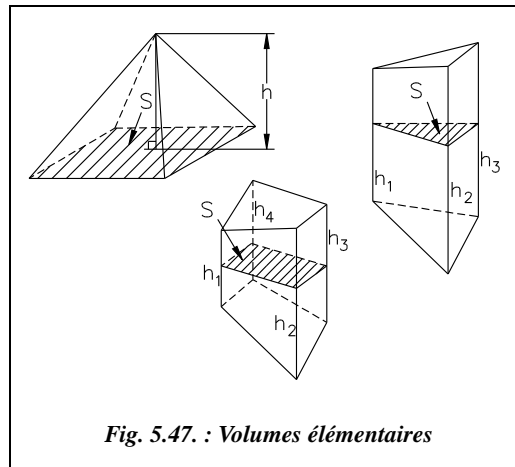


Fig. 5.47. : Volumes élémentaires

$$V = S \cdot (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) / 4$$

D'autres formules sont données au paragraphe 7.6.

### Application

Le volume de la figure 5.48. est délimité par deux sections droites parallèles distantes de 17,48 m ; sa face supérieure est horizontale (remblai). Il peut être décomposé en deux pyramides et quatre troncs de prisme à base triangulaire.

### Calcul du volume total exact

1- Pyramides :  $[(7,02 \cdot 6,25) / 2 \cdot 17,48] / 3$   
 $[(3,71 \cdot 5,02) / 2 \cdot 17,48] / 3$

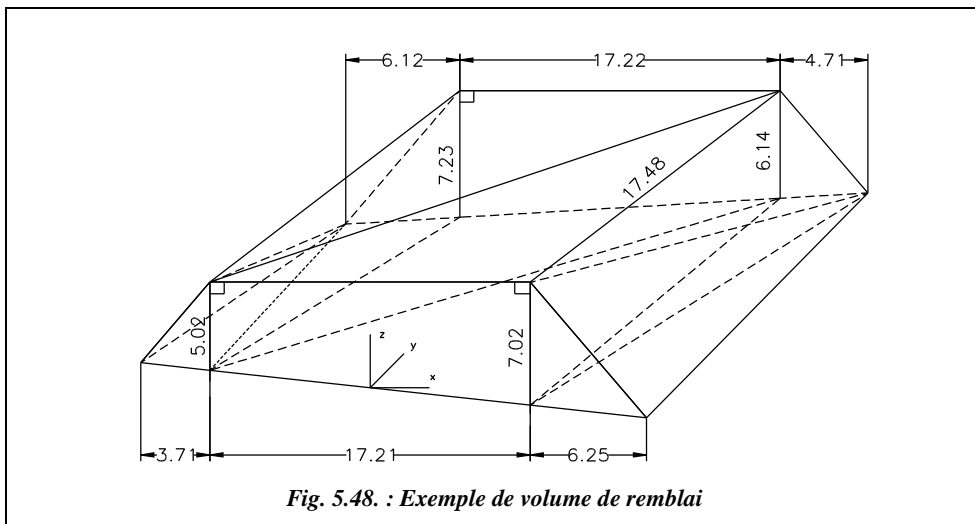
2- Troncs de prisme :  $(4,71 \cdot 17,48) / 2 \cdot (6,14 + 7,02 + 0) / 3$   
 $(6,12 \cdot 17,48) / 2 \cdot (7,23 + 5,02 + 0) / 3$   
 $(17,21 \cdot 17,48) / 2 \cdot (5,02 + 7,02 + 6,14) / 3$   
 $(17,22 \cdot 17,48) / 2 \cdot (7,23 + 6,14 + 5,02) / 3$

Volume total : 2 415,172 m<sup>3</sup>.

Par la formule de la moyenne des bases (§ 7.3.), on obtient :

$$S = 17,48 \cdot [(17,21 \cdot (5,02 + 7,02) / 2 + 3,71 \cdot 5,02 / 2 + 6,25 \cdot 7,02 / 2) + (17,22 \cdot (7,23 + 6,14) / 2 + 6,12 \cdot 7,23 / 2 + 4,71 \cdot 6,14 / 2)] / 2 \text{ soit } S = 2 504 \text{ m}^3.$$

L'erreur relative est de 3,5 % ; elle est acceptable dans un calcul de cubatures.



## 7.5 Application

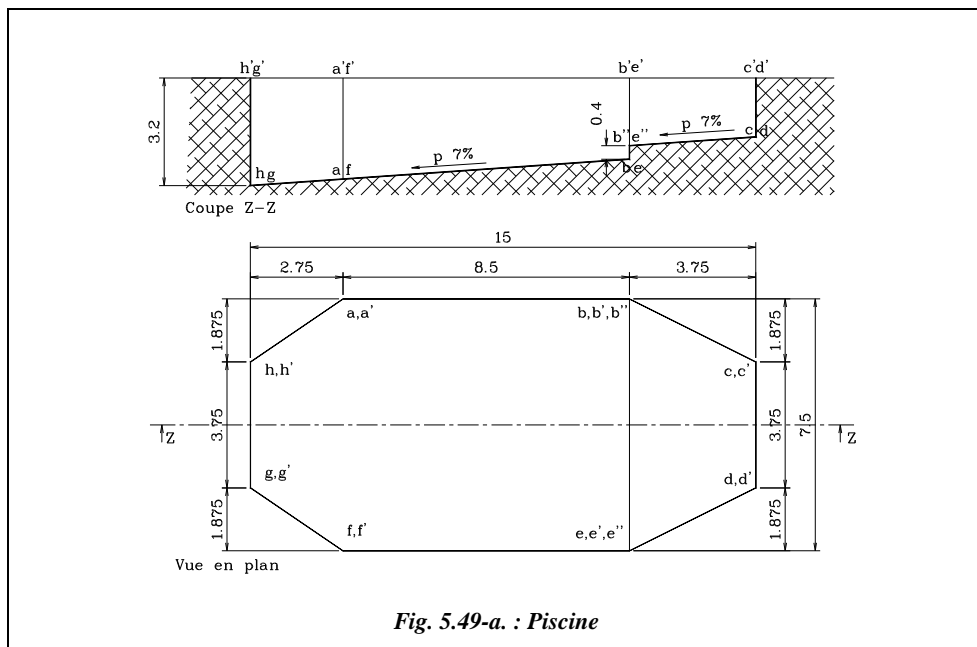
Calculez le volume d'eau maximal que peut contenir la piscine schématisée sur la figure 5.49-a.

**Les notation sont :** les points en fond de piscine sont appelés (a, b, c, d, e, f et g) ; leur projection horizontale en surface est (a', b', c', d', e', f' et g') ; b'' et e'' représentent les points hauts du décroché central du fond de la piscine.

### 7.5.1 Calcul au moyen de la formule des trois niveaux

La piscine est découpée en trois volumes  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  dont les faces extrêmes sont parallèles.

- $V_1$  est limité par les surfaces (g-h-g'-h') et (a-f-a'-f') :  $h = 2,75$  m  
 $S_1 = 3,75 \cdot 3,2$   
 $S'_1 = 7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07)$   
 $S''_1 = (3,75 + 1,875) \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07 / 2)$        $V_1 = 47,846 \text{ m}^3$
- $V_2$  est limité par les surfaces (a-f-a'-f') et (b-e-b'-e') :  $h = 8,5$  m  
 $S_2 = 7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07)$   
 $S'_2 = 7,5 \cdot (3,2 - (2,75 + 8,5) \cdot 0,07)$   
 $S''_2 = 7,5 \cdot (3,2 - (2,75 + 8,5 / 2) \cdot 0,07)$        $V_2 = 172,762 \text{ m}^3$



- $V_3$  est limité par (b''-e''-b'-e') et (c-d-c'-d') :  $h = 3,75$  m  
 $S_3 = 7,5 \cdot (3,2 - 0,4 - (2,75 + 8,5) \cdot 0,07)$   
 $S'_3 = 3,75 \cdot (3,2 - 0,4 - 15 \cdot 0,07)$   
 $S''_3 = (3,75 + 1,875) \cdot (3,2 - 0,4 - (2,75 + 8,5 + 3,75 / 2) \cdot 0,07)$   
 $V_3 = 39,990 \text{ m}^3$

Le volume total est  $V = V_1 + V_2 + V_3 = 260,598 \text{ m}^3$ .

### 7.5.2 Calcul au moyen de la formule simplifiée de la moyenne des bases

Le découpage est le même que précédemment mais le calcul est effectué par la moyenne des bases (§ 7.3.).

$$V_1 = (3,75 \cdot 3,2 + 7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07)) \cdot 2,75 / 2 = 47,5148 \text{ m}^3$$

$$V_2 = (7,5 \cdot (3,2 - 2,75 \cdot 0,07) + 7,5 \cdot (3,2 - (8,5 + 2,75) \cdot 0,07)) \cdot 8,5 / 2 = 172,7625 \text{ m}^3$$

$$V_3 = (7,5 \cdot (3,2 - 0,4 - (2,75 + 8,5) \cdot 0,07) + 3,75 \cdot (3,2 - 0,4 - 15 \cdot 0,07)) \cdot 3,75 / 2 = 40,6055 \text{ m}^3$$

Le volume total est de  $260,883 \text{ m}^3$  soit  $0,1 \%$  d'erreur relative, ce qui est négligeable.

Le volume  $V_2$  ne change pas d'une méthode à l'autre : de par sa forme, il constitue le cas idéal d'application de la formule simplifiée qui devient alors exacte.

### 7.5.3 Calcul exact à l'aide de la décomposition en volumes élémentaires

La décomposition est effectuée sur la figure 5.49-b.

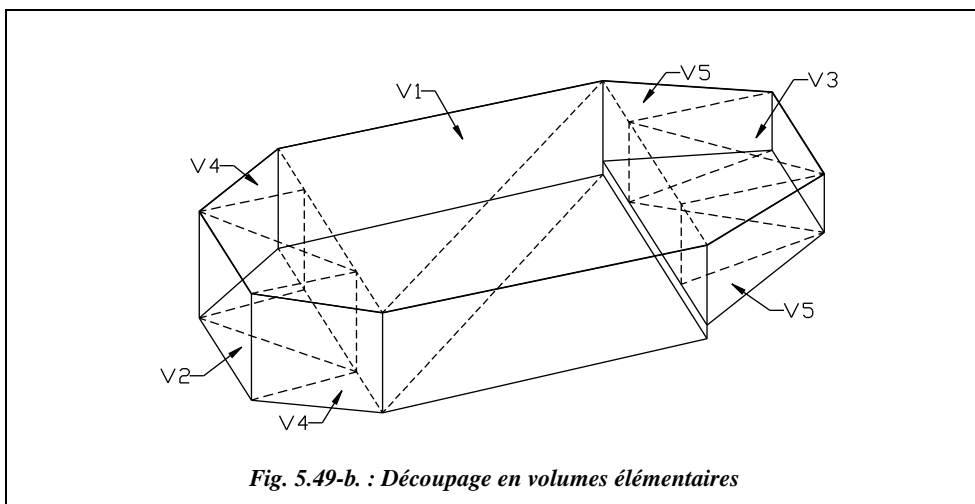


Fig. 5.49-b. : Découpage en volumes élémentaires

- Les volumes  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  peuvent être décomposés chacun en deux prismes de section droite triangulaire dont le volume total est :

$$V_1 = (8,5 \cdot 7,5) \cdot (2 \cdot 3,0075 + 2 \cdot 2,4125) / 4 = 172,7625 \text{ m}^3$$

$$V_2 = (3,75 \cdot 2,75) \cdot (2 \cdot 3,2 + 2 \cdot 3,0075) / 4 = 32,0074 \text{ m}^3$$

$$V_3 = (3,75 \cdot 3,75) \cdot (2 \cdot 2,0125 + 2 \cdot 1,75) / 4 = 26,4551 \text{ m}^3$$

- Les volumes  $V_4$  et  $V_5$  sont aussi des prismes de section droite triangulaire :

$$V_4 = (1,875 \cdot 2,75) / 2 \cdot (3,2 + 2 \cdot 3,0075) / 3 = 7,9191 \text{ m}^3$$

$$V_5 = (3,75 \cdot 1,875) / 2 \cdot (1,75 + 2 \cdot 2,0125) / 3 = 6,7676 \text{ m}^3$$

Le volume total est  $V = V_1 + V_2 + V_3 + 2 \cdot V_4 + 2 \cdot V_5 = 260,598 \text{ m}^3$ .

On constate que la formule des trois niveaux est exacte dans ce cas de figure.

## 7.6 Formules complémentaires

Les formules suivantes donnent les volumes et surfaces de solides réguliers (fig 5.49-c.).

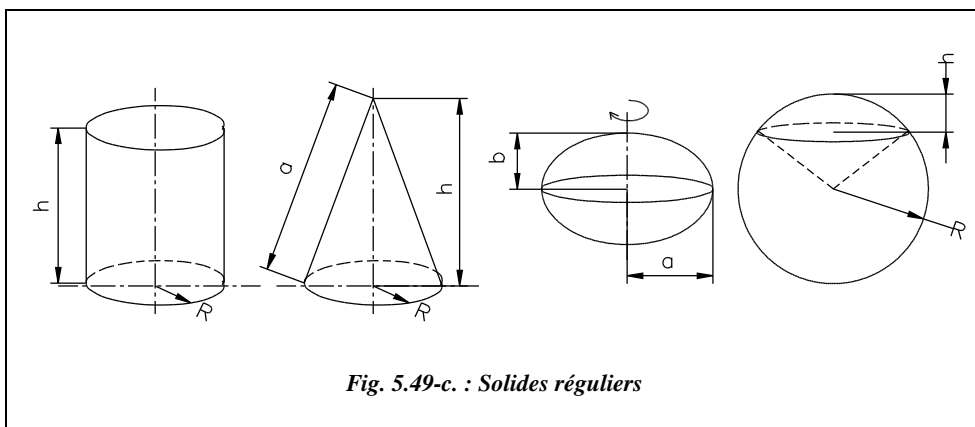


Fig. 5.49-c. : Solides réguliers

Cylindre de section droite circulaire :	$V = \pi \cdot R^2 \cdot h$	$S = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$
Cône de base circulaire :	$V = h \cdot R^2 \cdot \pi / 3$	$S = \pi \cdot a \cdot R$
Ellipsoïde de révolution :	$V = 4 / 3 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot b$	
Sphère, secteur et segment sphérique :	$V_{\text{sphère}} = 4 / 3 \cdot \pi \cdot R^3$	$S_{\text{sphère}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$
	$V_{\text{secteur}} = 2 / 3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$	$S_{\text{calotte}} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h$
	$V_{\text{segment sphérique}} = \pi / 3 \cdot h^2 \cdot (3R - h)$	

# 8 SYSTÈMES DE COORDONNÉES RECTANGULAIRES ET POLAIRES

## 8.1 Transformation de coordonnées d'un système à l'autre

### 8.1.1 Transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires mathématiques

Le point M (fig. 5.50.) est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) :  $M(X_M, Y_M)$ .

Les coordonnées polaires mathématiques sont, dans l'ordre, le rayon polaire  $r$  et l'angle polaire  $\alpha$  :  $M(r, \alpha)$ .

En convention polaire mathématique, les angles tournent positivement en sens trigonométrique (inverse horaire) ; leur zéro est sur l'axe des abscisses et ils sont généralement exprimés en radians, unité du système international.

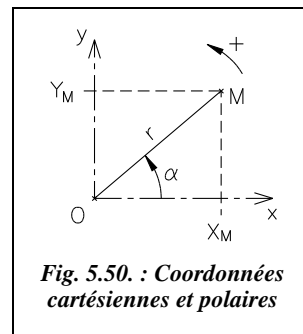


Fig. 5.50. : Coordonnées cartésiennes et polaires

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$r = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y_M}{X_M}$$

on voit sur la figure 5.50. que



La plupart des calculatrices possèdent cette transformation sous forme de fonction préprogrammée. Par exemple, sur FX850, tapez POL( X , Y ) puis [EXE] ; la calculatrice affiche alors  $r$  ; tapez ensuite [Y] [EXE], elle affiche  $\alpha$  dans l'unité dans laquelle elle est réglée au moment du calcul (degré, grade ou radian).

Les formules de transformation inverse sont :

$$X_M = r \cdot \cos \alpha$$

$$Y_M = r \cdot \sin \alpha$$



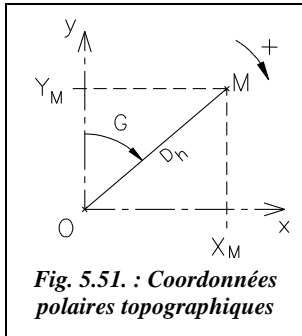
Sur une calculatrice FX850P, tapez REC( r ,  $\alpha$  ) puis [EXE] ; la calculatrice affiche X. Ensuite [Y] [EXE] donne Y.

#### Applications

Transformez M(102,32 m ; 98,55 m) en coordonnées polaires mathématiques avec un angle en degrés : vous devez trouver le point N de l'exercice suivant.

Transformez N(142,06 m ; 0,7666 rad) en coordonnées cartésiennes : on retrouve M.

## 8.1.2 Transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires topographiques



Le point M (fig. 5.51.) est repéré par ses coordonnées cartésiennes (ou rectangulaires) : M ( $X_M$ ,  $Y_M$ ).

Les coordonnées polaires topographiques sont la distance horizontale  $Dh$  et le gisement  $G$  : M ( $Dh$ ,  $G$ ).

En convention polaire topographique, les angles tournent positivement en sens horaire ; leur zéro est sur l'axe des ordonnées et ils sont toujours exprimés en grades (symbole gon) : cela vient des choix technologiques sur les appareils de topométrie.

Les formules de transformation sont les suivantes :

$$Dh = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2}$$

$$\tan G = \frac{X_M}{Y_M}$$

on voit sur la figure 5.51. que



On peut utiliser une fonction de la calculatrice : il suffit d'inverser les données  $X$  et  $Y$  pour obtenir le résultat en convention topographique. Sur CASIO FX 850P, tapez POL(  $Y$ ,  $X$  ) puis [EXE] ; la calculatrice affiche alors  $Dh$  ; tapez ensuite [Y] [EXE], elle affiche  $G$ . Si ce dernier est négatif, ajouter 400 gon pour obtenir le gisement définitif.

Les formules de transformation inverse sont :

$$X_M = Dh \cdot \sin G$$

$$Y_M = Dh \cdot \cos G$$

Sur calculatrice FX850, tapez REC(  $Dh$ ,  $G$  ) puis [EXE] ; attention : la calculatrice affiche d'abord  $Y$  puis tapez [Y] [EXE] pour obtenir  $X$ .

### Applications

Transformez M(102,32 m ; 98,55 m) en coordonnées polaires topographiques : vous devez retrouver le point N de l'exercice suivant.

Transformez N(142,06 m ; 51,195 gon) en coordonnées cartésiennes : on retrouve M.



## 8.2 Changement de repère

### 8.2.1 Translation de repère

Soit un point M dont les coordonnées  $(X_M, Y_M)$  sont connues dans un repère  $R(O, x, y)$  (fig. 5.52.).

On veut connaître les nouvelles coordonnées de M dans le repère  $R'(O', x', y')$  déduit de  $R(O, x, y)$  par translation de vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  de coordonnées  $(X_{O'}, Y_{O'})$ , qui sont les coordonnées de la nouvelle origine  $O'$  dans l'ancien repère  $R(O, x, y)$ . Les nouvelles coordonnées de M dans  $R'(O', x', y')$  sont :

$$M \quad \left| \begin{array}{l} X_M - X_{O'} \\ Y_M - Y_{O'} \end{array} \right.$$

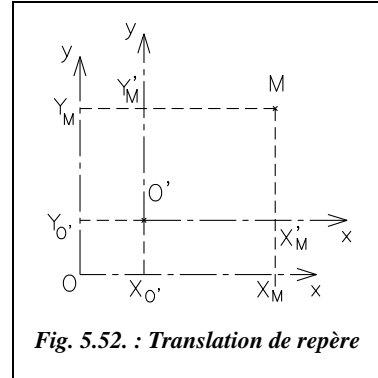


Fig. 5.52. : Translation de repère

#### Démonstration

Les nouvelles coordonnées de M dans  $R'(O', x', y')$  sont représentées par le vecteur  $\overrightarrow{O'M}$  :

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} \quad \text{donc : } \begin{cases} X'_M = X_M - X_{O'} \\ Y'_M = Y_M - Y_{O'} \end{cases}$$

### 8.2.2 Rotation de repère

Soit un point M dont les coordonnées  $(X_M, Y_M)$  sont connues dans un repère  $R(O, x, y)$  (fig. 5.53.)

On veut connaître les nouvelles coordonnées de M  $(X'_M; Y'_M)$  dans le repère  $R'(O, x', y')$  déduit de  $R(O, x, y)$  par rotation d'angle  $\alpha$ . Les nouvelles coordonnées de M dans  $R'(O, x', y')$  sont :

$$M \quad \left| \begin{array}{l} X'_M = X_M \cdot \cos \alpha + Y_M \cdot \sin \alpha \\ Y'_M = -X_M \cdot \sin \alpha + Y_M \cdot \cos \alpha \end{array} \right.$$

#### Remarque

La formule ci-dessus n'est valable qu'en conventions mathématiques, c'est-à-dire sens de rotation trigonométrique et zéro des angles sur l'axe des  $x$ . Il faut conserver le signe de l'angle de rotation.

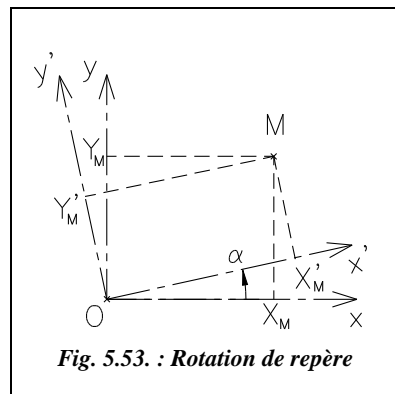
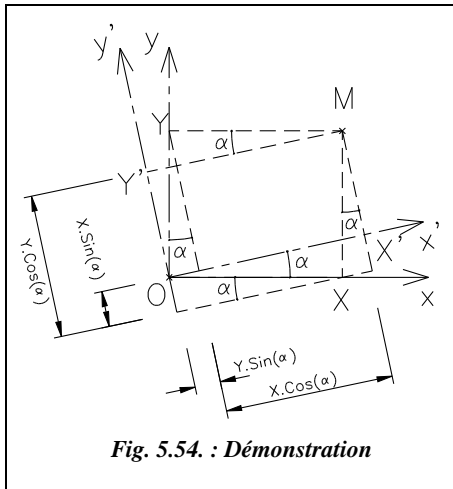


Fig. 5.53. : Rotation de repère



### Démonstration

On obtient directement les équations à démontrer en projetant les coordonnées  $X$  et  $Y$  sur les axes  $x'$  et  $y'$  du nouveau repère (fig. 5.54. ).

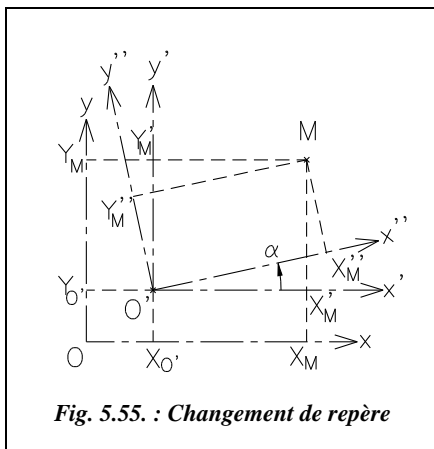
### Application

Soit un point  $M$  de coordonnées (110,12 m ; 78,77 m) dans un repère  $R(O, x, y)$ . Calculez les nouvelles coordonnées du point  $M$  après rotation de repère de  $-18,767$  gon et translation de vecteur  $\vec{V}(-3,14 \text{ m} ; 9,8 \text{ m})$  ;  $\vec{V}$  est donné dans  $R(O, x, y)$ .

### Réponse

Les coordonnées sont  $M(88,36 ; 98,82)$  (voir les explication au paragraphe suivant).

## 8.2.3 Changement de repère : translation puis rotation



Attention : le résultat du calcul dépend de l'ordre dans lequel sont effectuées les transformations. L'ordre correct dépend du repère dans lequel est exprimé le vecteur de translation  $\vec{V}$ . Un mauvais choix peut amener à une erreur (voir l'exercice précédent).

En effet, si l'on commence par la rotation pour passer de  $R(O, x, y)$  à  $R(O, x'', y'')$ , au moment d'effectuer la translation pour passer au repère  $R(O', x'', y'')$ , il faut que le vecteur de translation soit donné dans le repère intermédiaire  $R(O, x'', y'')$  qui a subi une première rotation.

Si l'on commence par la translation, ce problème ne se pose pas puisque le vecteur de translation est exprimé dans le repère de départ dans lequel on effectue cette translation  $R(O, x, y)$ . Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.

En commençant par la rotation d'angle  $(-18,767 \text{ gon})$ , les coordonnées du point  $M$  deviennent (82,48 ; 107,37) dans le repère  $R(O, x'', y'')$ .

Le vecteur de translation devient dans le repère intermédiaire R(O, x'', y'') :

$$x = -3,14 \cdot \cos(-18,767) + 9,88 \cdot \sin(-18,767) = -5,88$$

$$y = 3,14 \cdot \sin(-18,767) + 9,88 \cdot \cos(-18,767) = 8,54$$

On retrouve, aux arrondis de calcul près, le point M (88,36 ; 98,82).

Dans ce cas, la formule générale est :

$$M \quad \begin{cases} X''_M = (X_M - X_{O'}) \cdot \cos \alpha + (Y_M - Y_{O'}) \cdot \sin \alpha \\ Y''_M = -(X_M - X_{O'}) \cdot \sin \alpha + (Y_M - Y_{O'}) \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

La notation matricielle (voir § 8.3.) donne :  $M \begin{pmatrix} X''_M \\ Y''_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_M - X_{O'} \\ Y_M - Y_{O'} \end{pmatrix}$ .

Cette notation, plus facile à mémoriser, fait apparaître la matrice de rotation d'angle  $\alpha$ .

### 8.2.4 Changement de repère : rotation puis translation

En topographie, ce problème se pose généralement lorsque l'on souhaite passer d'un repère local (O', x', y') à un repère général (O, X, Y) (fig. 5.56.) : le point M(x<sub>M</sub>; y<sub>M</sub>) est connu en repère local et on veut obtenir ses coordonnées (X<sub>M</sub>; Y<sub>M</sub>) en repère général.

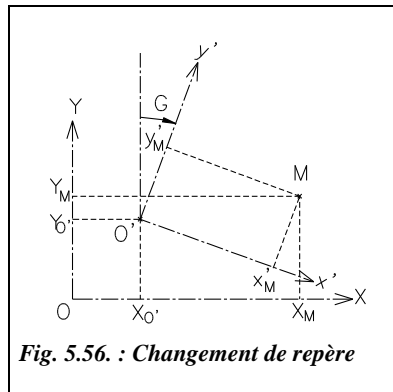


Fig. 5.56. : Changement de repère

On connaît les coordonnées dans le repère général de l'origine O'(X<sub>O'</sub>; Y<sub>O'</sub>) du repère local ainsi que le gisement G de l'axe des ordonnées du repère local dans le repère général.

Dans un premier temps, on effectue une rotation de repère d'angle  $G = -\alpha$ . Puis on effectue une translation de vecteur O'O connu dans le repère (O, X, Y), donc :

$$M \quad \begin{cases} X_M = X_{O'} + x'_M \cdot \cos G - y'_M \cdot \sin G \\ Y_M = Y_{O'} + x'_M \cdot \sin G + y'_M \cdot \cos G \end{cases}$$

La notation matricielle (voir § 8.3.) donne :  $M \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{O'} \\ Y_{O'} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos G & -\sin G \\ \sin G & \cos G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \end{pmatrix}$ .

### 8.2.5 Programmation en basic standard



```
5 PRINT "Translation puis rotation de repère"
10 INPUT "Angle de rotation (sens trigo, gon) : " ; A
20 PRINT "Coordonnées actuelles de la nouvelle origine : "
```

```

30 INPUT "X= ";XO : INPUT "Y= ";YO
50 INPUT "Nombre de points à calculer ";N : REM Nombre de points à calculer
60 FOR I=1 TO N : PRINT "Point N° ";I : REM Début de la boucle de calcul
80 INPUT "X= ";X : INPUT "Y= ";Y
100 PRINT "Nouvelle Abscisse ";
105 PRINT (X-XO)*COS(A)+(Y-YO)*SIN(A)
110 PRINT "Nouvelle Ordonnée ";
115 PRINT (Y-YO)*COS(A)-(X-XO)*SIN(A)
120 NEXT I : END

```

Ce listing est fourni sur le cédérom de l'ouvrage (fichier ROTATRAN.BAS) pour fonctionner avec le programme QBASIC.EXE.

## 8.2.6 Écriture d'un tableau



Avec cet exemple simple, nous allons voir comment bâtir facilement et rapidement un tableau de calcul sous EXCEL. Démarrez le programme EXCEL sous Windows, puis menu FICHIER / NOUVEAU pour commencer une nouvelle feuille vide.

	A	B	C	D	E	F
1	Angle de rotation (sens trigo, grades) :				-18,767	
2						
3	Coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien repère :					
4	(ou vecteur de translation			Xo (m) =	-3,140	
5				Yo (m) =	9,880	
6						
7	Coordonnées		Coord. après translat.		Coord. après rotation	
8	X (m)	Y (m)	X' (m)	Y' (m)	X''(m)	Y'' (m)
9						
10	110,2	78,77	113,26	68,89	88,36	98,82
11	-6,28	19,76	-3,14	9,88	-5,88	8,54
12	-35,23	3,93	-32,09	-5,95	-28,98	-15,02
13	-1,58	57,44	1,56	47,56	-12,32	45,96
14	35,20	40,07	38,34	30,19	27,91	40,02
15	27,34	13,48	30,48	3,60	28,12	12,30

Entrez tous les textes et données comme sur l'exemple ci-dessus : cliquez dans une case, tapez le texte ou la valeur et validez par ENTRÉE. Les textes sont en noir, les données en bleu, les résultats de formules en rouge et en italique.

Entrez en case C10 la formule suivante := A10 – E\$4.↵

Entrez en case D10 la formule suivante := B10 – E\$5.↵

Entrez en case E10 la formule suivante := C10 \* COS(E\$1 \* PI() / 200) + D10 \* SIN(E\$1 \* PI() / 200).↵

Entrez en case F10 la formule suivante := D10 \* COS(E\$1 \* PI() / 200) – C10 \* SIN(E\$1 \* PI() / 200) .↵

Sélectionnez les cases C10 à F15 et cliquez l'option RECOPIER / VERS LE BAS du menu EDITION (ou tapez CONTROL B) ; les formules se recopient en s'adaptant : seules les références précédées d'un \$ ne changent pas.

Voir aussi le tableau HELMERT.XLS dans lequel une feuille effectue ces calculs.

### 8.2.7 Résolution graphique sur Autocad IT



Environnement de travail : angles en grades, sens de rotation trigonométrique, zéro sur l'axe des abscisses (à l'est) ; ces réglages sont effectués dans la case de dialogue CONTROLE DES UNITES du menu FORMAT (commande DDUNITS).

Dessinez le point M dans le repère général : POINT.↵ 110.12 , 78.77.↵

Changez de repère : commande SCU.↵, option Origine.↵ au point -3.14 , 9.88.↵. Répétez la commande SCU.↵ option Z.↵ (angle de rotation autour de l'axe des Z), angle (gon) - 18.767 .↵

Demandez les coordonnées du point M dans le nouveau repère par la commande ID.↵. Ces coordonnées s'affichent en bas de l'écran texte.

Si vous voulez d'autres points, sauvegardez le SCU actuel (SCU / Sauvegarder), dessinez les autres points dans le repère général (retour au SCU général par SCU.↵.↵), rappelez le SCU précédent pour les identifier (SCU / Restaurer).

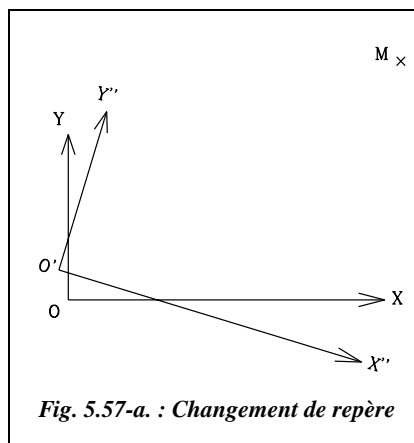


Fig. 5.57-a. : Changement de repère

### 8.2.8 Changement de repère dans l'espace à trois dimensions

Un changement de repère dans l'espace peut se décomposer en trois translations et trois rotations indépendantes. On extrapole les formules valables en plan au cas général d'un changement de repère dans l'espace. Les angles de rotation sont donnés en sens positif trigonométrique (voir aussi la remarque relative à la figure 5.57-b.).

On cherche à exprimer dans un repère (O', x', y', z') les coordonnées d'un point M connu dans le repère (O, x, y, z).

### 8.2.8.1 Rotations puis translations

On applique simultanément trois rotations d'angles indépendants ( $rx$ ,  $ry$  et  $rz$ ) au vecteur  $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M, z_M)$ . On translate ensuite le vecteur obtenu d'un vecteur de translation ( $tx$ ,  $ty$ ,  $tz$ ) qui représente l'opposé des coordonnées de l'ancienne origine dans le nouveau repère.

Le résultat est donné par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \\ z'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos rx & \sin rx \\ 0 & -\sin rx & \cos rx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos ry & 0 & -\sin ry \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin ry & 0 & \cos ry \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos rz & \sin rz & 0 \\ -\sin rz & \cos rz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} tx \\ ty \\ tz \end{pmatrix}$$

En développant et en notant  $\cos rx = cx$ ,  $\sin rx = sx$ , etc., on obtient :

$$\begin{aligned} x'_M &= x_M \cdot (cy \cdot cz) + y_M \cdot (cy \cdot sz) - z_M \cdot (sy) - (tx) \\ y'_M &= x_M \cdot (sx \cdot sy \cdot cz - cx \cdot sz) + y_M \cdot (sx \cdot sy \cdot sz + cx \cdot cz) + z_M \cdot (sx \cdot cy) - (ty) \\ z'_M &= x_M \cdot (cx \cdot sy \cdot cz + sx \cdot sz) + y_M \cdot (cx \cdot sy \cdot sz - sx \cdot cz) + z_M \cdot (cx \cdot cy) - (tz) \end{aligned}$$

### 8.2.8.2 Translations puis rotations

On translate le vecteur  $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M, z_M)$  d'un vecteur de translation ( $tx$ ,  $ty$ ,  $tz$ ) qui représente les coordonnées de la nouvelle origine dans l'ancien repère. On applique ensuite successivement les trois rotations d'angles ( $rx$ ,  $ry$  et  $rz$ ) au vecteur traduit.

Le résultat est donné par l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} x'_M \\ y'_M \\ z'_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos rx & \sin rx \\ 0 & -\sin rx & \cos rx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos ry & 0 & -\sin ry \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin ry & 0 & \cos ry \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos rz & \sin rz & 0 \\ -\sin rz & \cos rz & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_M - tx \\ y_M - ty \\ z_M - tz \end{pmatrix}$$

En développant et en notant  $\cos rx = cx$ ,  $\sin rx = sx$ , etc., on obtient :

$$\begin{aligned} x'_M &= (x_M - tx) \cdot (cy \cdot cz) + (y_M - ty) \cdot (cy \cdot sz) - (z_M - tz) \cdot (sy) \\ y'_M &= (x_M - tx) \cdot (sx \cdot sy \cdot cz - cx \cdot sz) + (y_M - ty) \cdot (sx \cdot sy \cdot sz + cx \cdot cz) + (z_M - tz) \cdot (sx \cdot cy) \\ z'_M &= (x_M - tx) \cdot (cx \cdot sy \cdot cz + sx \cdot sz) + (y_M - ty) \cdot (cx \cdot sy \cdot sz - sx \cdot cz) + (z_M - tz) \cdot (cx \cdot cy) \end{aligned}$$

Attention : les formules précédentes ne sont valables que pour des angles de rotation indépendants ou angles d'Euler. Les angles de rotation sont exprimés dans le repère d'origine ; en effet, si l'on effectue les rotations successivement, le résultat sera différent : il dépend alors de l'ordre dans lequel on effectue ces rotations.



Excel 7

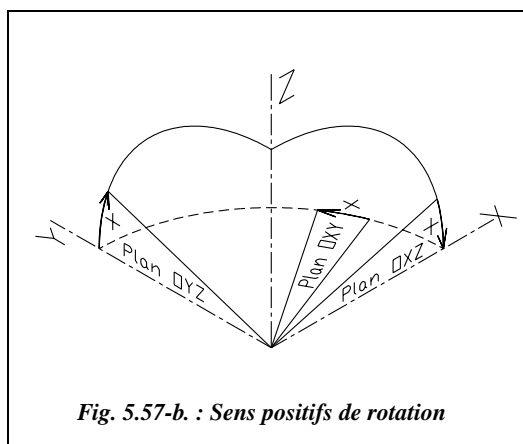
Le tableau HELMERT.XLS permet d'effectuer ce type de transformation (voir aussi au chapitre 1, paragraphe 10.3.3., une application à un changement de système géodésique par transformation à sept paramètres).

Attention au signe des rotations : le sens positif de rotation dans un plan OXY, OXZ ou OYZ est donné par la règle dite du « tire-bouchon » (fig. 5.57-b.).

Dans le plan OXY, si le repère tourne autour de l'axe des Z dans le sens horaire, un tire-bouchon d'axe OZ se déplacerait suivant les Z négatifs. Le sens positif de rotation dans ce plan est donc le sens trigonométrique.

Les mêmes remarques sont applicables au plan OYZ.

Dans le plan OXZ, lors d'une rotation en sens horaire autour de l'axe OY, le tire-bouchon se déplace dans le sens des ordonnées positives. Dans ce cas, le sens positif de rotation est le sens horaire.



### Remarque

Pour des angles de rotation très petits et exprimés en radian, on peut écrire :  $\sin \alpha \approx \alpha$  et  $\cos \alpha \approx 1$  ; on obtient donc, en négligeant les termes du deuxième ordre, la matrice

simplifiée suivante pour la combinaison des trois rotations :

$$\begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix}$$

$rx$ ,  $ry$  et  $rz$  sont donnés en radians et en sens positif trigonométrique.

### 8.2.8.3 Applications

**1** - Calculez les coordonnées du point  $M'$  transformé du point  $M$  de coordonnées (5 m, -7 m, 11 m) par translation de vecteur (5 m, -2 m, 15 m) puis rotations d'angles ( $rx = 12^\circ$ ,  $ry = 35^\circ$ ,  $rz = 44^\circ$ ). Même calculs pour les points  $N$  (0 m ; 12 m ; 26 m) et  $P$  (-2 m ; 8 m ; 7 m).

**2** - En partant des points  $M$ ,  $M'$ ,  $N$ ,  $N'$ ,  $P$  et  $P'$  connus dans les repères avant et après transformation, retrouvez les valeurs des translations et des rotations appliquées aux deux repères.

### Réponse

**1** -  $M'(-0,551 \text{ m} ; -4,614 \text{ m} ; -4,406 \text{ m})$  ;  $N'(-1,289 \text{ m} ; 15,852 \text{ m} ; 9,436 \text{ m})$  ;  $P'(6,154 \text{ m} ; 10,658 \text{ m} ; -7,844 \text{ m})$ .

2 - Il faut résoudre un système de neuf équations à six inconnues. On peut donc *a priori* se contenter de deux points. Une solution rapide et facile à mettre en œuvre est l'utilisation du solveur d'Excel comme au paragraphe 10.3.3. du chapitre 1.

## 8.3 Rappels sur les matrices

Les matrices sont des outils très pratiques dans la manipulation de vecteurs (que ce soit en plan ou dans l'espace). Elles permettent de simplifier les notations et de rendre les calculs systématiques et donc faciles à informatiser.

### 8.3.1 Notation matricielle

Une matrice est caractérisée par son nombre de lignes et de colonnes. Nous utiliserons essentiellement :

- dans le plan, des matrices deux lignes, deux colonnes :  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .

Dans le paragraphe 8.2.3. sont données les matrices de rotation en plan autour de l'axe perpendiculaire à ce plan.

- dans l'espace, des matrices trois lignes, trois colonnes :  $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ .

Dans le paragraphe 8.2.8. sont données les matrices de rotation autour d'un axe dans l'espace à trois dimensions.

Un **vecteur** peut aussi être considéré dans l'espace comme une matrice trois lignes, une colonne ou bien dans le plan, comme une matrice deux lignes, une colonne.

### 8.3.2 Opérations sur les matrices

On peut effectuer, entre-autres, les opérations suivantes sur des matrices :

- **Addition** de matrices :  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix}$

- **Multiplication** d'une matrice par un vecteur :

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+dy+gz \\ bx+ey+hz \\ cx+fy+iz \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$



Remarquez que le produit d'une matrice par un vecteur donne un vecteur.

Des applications de cette opération sont données aux paragraphes 8.2.3., 8.2.4. et 8.2.8.

- **Produit vectoriel** : le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  donne un troisième vecteur perpendiculaire au plan défini par les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ . Ses composantes sont :

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A Z_B - Z_A Y_B \\ Z_A X_B - X_A Z_B \\ X_A Y_B - Y_A X_B \end{pmatrix}$$

Remarquez les permutations circulaires d'indices d'une ligne à l'autre.

### 8.3.3 Déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice est un nombre qui la caractérise. Il est calculé ainsi :

$$\text{Dét} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a.d - b.c \quad ; \quad \text{Dét} \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = a.(e.i - f.h) - d.(b.i - c.h) + g.(b.f - c.e).$$

**Application** : la norme du produit scalaire d'un vecteur  $\vec{A}$  par le vecteur issu du produit vectoriel  $\vec{B} \wedge \vec{C}$  est le déterminant de la matrice formée par ces trois vecteurs.

$$\text{Soit : } \left| \vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) \right| = \text{Dét} \begin{pmatrix} X_A & X_B & X_C \\ Y_A & Y_B & Y_C \\ Z_A & Z_B & Z_C \end{pmatrix}$$

**Rappel** : le produit scalaire de deux vecteurs noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$  est un nombre qui représente la longueur projetée du vecteur A sur le vecteur B ; il a pour valeur  $(X_A \cdot X_B + Y_A \cdot Y_B + Z_A \cdot Z_B)$ .

### 8.3.4 Applications

La théorie des matrices trouve, en topographie, les applications suivantes :

- **Résolution d'un système** de trois équations à trois inconnues (généralisable à l'ordre n). Soit à résoudre le système ci-après :

$$\begin{cases} aX + b \cdot y + cZ + d = 0 \\ eX + fY + gZ + h = 0 \\ iX + jY + kZ + l = 0 \end{cases}$$

$X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont inconnues et peuvent être déterminées directement par :

$$X = \frac{Dét_X}{Dét} \text{ avec } Dét_X = \text{Det} \begin{pmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{pmatrix} \text{ et } Dét = \text{Dét} \begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{Dét_Y}{Dét} \text{ avec } Dét_Y = \text{Det} \begin{pmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{pmatrix} \text{ et } Z = \frac{Dét_Z}{Dét} \text{ avec } Dét_Z = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{pmatrix}$$

Une application de ces formules est donnée dans les tableaux de calcul aux moindres carrés du chapitre 1.

• **Distance d'un point à un plan :**

La distance  $PH$  d'un point  $P$  à un plan défini par deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  concourants en un point  $M$  s'exprime par :

$$PH = \frac{\text{Dét}(\vec{PM}, \vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$$

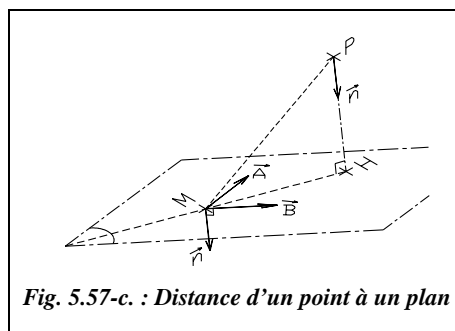


Fig. 5.57-c. : Distance d'un point à un plan

$PH$  est le rapport du déterminant de la matrice 3 lignes, 3 colonnes formée des trois vecteurs  $(\vec{PM}, \vec{A}$  et  $\vec{B})$  par la norme du produit vectoriel de  $\vec{A}$  par  $\vec{B}$ .

Démonstration :  $PH = |\vec{PM} \cdot \vec{n}| = \left| \vec{PM} \cdot \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|} \right| = \frac{\text{Dét}(\vec{PM}, \vec{A}, \vec{B})}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$

$\vec{n}$  est un vecteur normal unitaire.

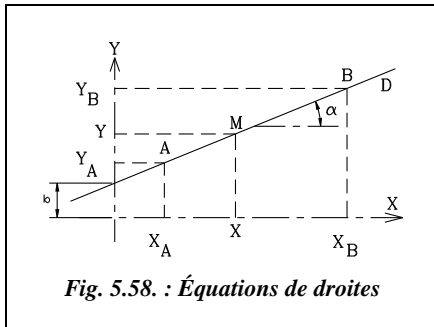
Une application de cette formule est détaillée au chapitre 7 du tome 1, paragraphe 1.4.2.

## 9 ÉQUATIONS DE DROITES

### 9.1 Droite donnée par deux points et interpolation linéaire

#### 9.1.1 Équation d'une droite donnée par deux points

Il existe deux manières d'écrire l'équation de la droite  $D$  (fig. 5.58.) :



1- directement : 
$$\frac{X - X_A}{Y - Y_A} = \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}$$

2- par l'équation type :  $Y = aX + b$

$a$  et  $b$  sont obtenus par la résolution du système suivant :  $Y_A = aX_A + b$

$$Y_B = aX_B + b$$

Le coefficient directeur de cette droite est noté  $a$  :

$$a = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \tan \alpha$$

L'ordonnée à l'origine de cette droite est noté  $b$  :

$$b = Y_A - a \cdot X_A$$

#### Application

L'équation de la droite passant par A(12,21 m ; 17,45 m) et B(65,47 m ; 44,44 m) est :  $Y = a.X + b$  avec  $a = 0,5068$  et  $b = 11,26$  m ; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 5.

### 9.1.2 Interpolation linéaire

Le cas de la figure 5.58. correspond aussi à la résolution d'une interpolation linéaire (communément appelée règle de trois) : on connaît l'abscisse  $X_M$  d'un point M de la droite AB, on cherche son ordonnée  $Y_M$ .

Le résultat est donné par la formule suivante :

$$Y_M = Y_A + (X_M - X_A) \cdot \frac{(Y_B - Y_A)}{(X_B - X_A)}$$

#### Exemple

Déterminez l'altitude  $H$  d'un point M situé au point kilométrique 125,124 km sur une route rectiligne définie par les deux points A et B suivants :

- A d'altitude 130,231 m situé au point kilométrique 124,321 km ;
- B d'altitude 121,881 m situé au point kilométrique 127,006 km.

#### Réponse

$$H_M = 130,231 + (125,124 - 124,321) \cdot \frac{121,881 - 130,231}{127,006 - 124,321} = 127,734 \text{ m.}$$



### Programmation en BASIC standard

L'interpolation linéaire peut être programmée ainsi :

```

10 INPUT "Abscisse du point 1 ";X1 : INPUT "Ordonnée du point 1 ";Y1
20 INPUT "Abscisse du point 2";X2 : INPUT "Ordonnée du point 2 ";Y2
30 INPUT "Abscisse du point cherché ";X
40 PRINT "Ordonnée du point cherché : "; Y1+(X-X1)*(Y2-Y1)/(X2-X1)

```

## 9.2 Droite de pente connue, passant par un point

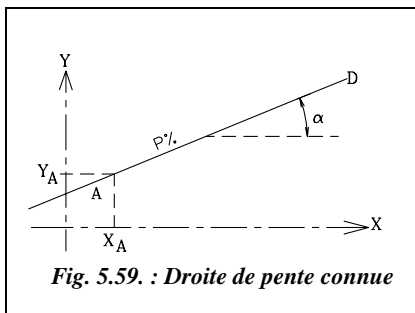


Fig. 5.59. : Droite de pente connue

Les données sont le point A ( $X_A, Y_A$ ) et la pente  $p$  (par exemple 25 %,  $p = 0,25$ ).

Par définition, on a :  $a = p$  (coefficient directeur de la droite).

Il reste à résoudre ( $Y_A = a \cdot X_A + b$ ) qui permet d'obtenir  $b$ .

$$a = p = \tan \alpha$$

$$b = Y_A - p \cdot X_A$$

### Application

Donnez l'équation de la droite de pente  $p = 20 \%$  passant par le point A (12,21 m ; 17,45 m).

### Réponse

$Y = a \cdot X + b$  avec  $a = 0,20$ , soit  $\alpha = 12,567$  gon et  $b = 15,01$  m ; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 8.5.

## 9.3 Droite perpendiculaire à une autre droite

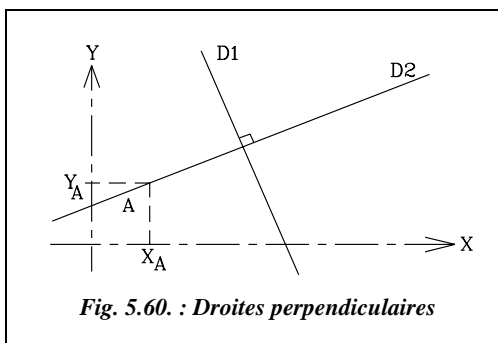


Fig. 5.60. : Droites perpendiculaires

On connaît la droite  $D_1$  d'équation :  $Y = a \cdot X + b$  ; on cherche l'équation de  $D_2$  perpendiculaire à  $D_1$  et passant par le point A ( $X_A, Y_A$ ).

**Le coefficient directeur de  $D_2$  est  $-1/a$ .**

L'équation de  $D_2$  s'écrit :  $Y = -1/a \cdot X + c$ .

$c$  est donné par  $Y_A = -1/a \cdot X_A + c$ .

Donc l'équation de  $D_2$  est :

$$Y = -\frac{1}{a}X + \left(Y_A + \frac{X_A}{a}\right)$$

#### Application

Donnez l'équation de la droite  $D_2$  passant par le point  $A(33,94 \text{ m} ; 78,36 \text{ m})$  et perpendiculaire à la droite  $D_1$  d'équation  $Y = 0,25x + 14,40$ .

#### Réponse

$Y = a.X + c$  avec  $a = -4$  et  $c = 214,12 \text{ m}$  ; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 9.5.

## 9.4 Droite parallèle à une autre droite

On cherche l'équation de la droite  $D_2$  passant par le point  $A(X_A, Y_A)$  et parallèle à la droite  $D_1$  d'équation  $Y = a . X + b$ .

**Le coefficient directeur de  $D_2$  est  $a$ .**

L'équation de  $D_2$  s'écrit  $Y = a . X + c$ .

La résolution de  $Y_A = a . X_A + c$  donne  $c$ .

Donc l'équation de  $D_2$  est :

$$Y = a . X + (Y_A - a . X_A)$$

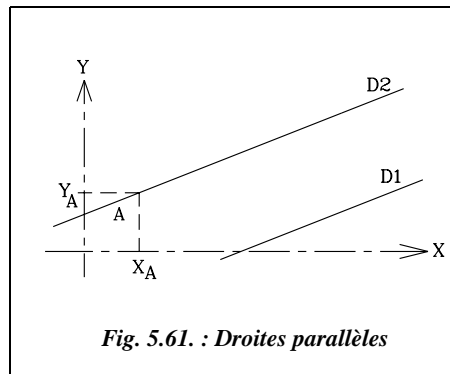


Fig. 5.61. : Droites parallèles

#### Application

Avec les données du paragraphe 9.3., trouvez la droite  $D_2$  parallèle à la droite  $D_1$  et passant par le point  $A$ .

#### Réponse

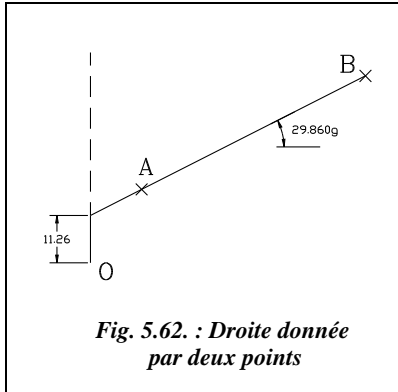
$Y = a.x + c$  avec  $a = 0,25$  et  $c = 69,88 \text{ m}$  ; la résolution graphique est détaillée au paragraphe 9.5.

## 9.5 Construction graphique



L'environnement de travail est le suivant : angles en grades, zéro sur l'axe des abscisses (à l'est), sens trigonométrique.

◆ **Premier exercice : § 9.1.**



Dessinez directement la droite AB : **LIGNE** du point 12.21,17.45 au point 65.47,44.44

La commande **LISTE** donne des informations sur tout objet dessiné. En cliquant sur la droite AB, elle fournit la valeur de l'angle  $\alpha$ , à 200 grades près suivant le sens dans lequel elle a été dessinée (de A vers B ou de B vers A).

On lit  $\alpha = 29.860$  gon, soit  $a = \tan \alpha = 0.5068$ .

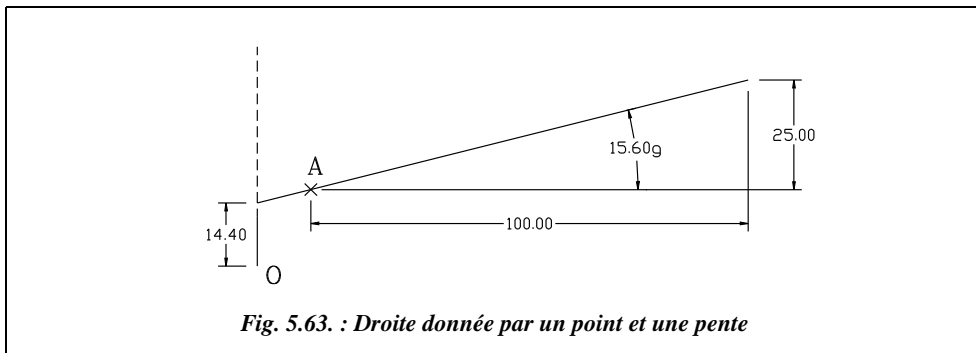
Obtenir  $b$  n'est pas immédiat et rarement indispensable. Nous vous présentons une solution possible pour l'exemple.

Construisez l'axe des Y : **LIGNE** du point 0,0 au point 0,50. **CHANFREIN** entre la droite AB et l'axe des Y pour obtenir l'ordonnée à l'origine. **ID** **EXTRémité** de... pour obtenir la valeur de l'ordonnée à l'origine :  $b = 11.26$  m.

◆ **Deuxième exercice : § 9.2.**

Dessinez directement la droite en utilisant la définition d'une pente en pourcentage (25 %, soit 25 m en Y pour 100 m en X) : **LIGNE** du point 12.21,17.45 au point @100,25

Pour obtenir les valeurs de  $a$  et  $b$ , voir l'exemple précédent.



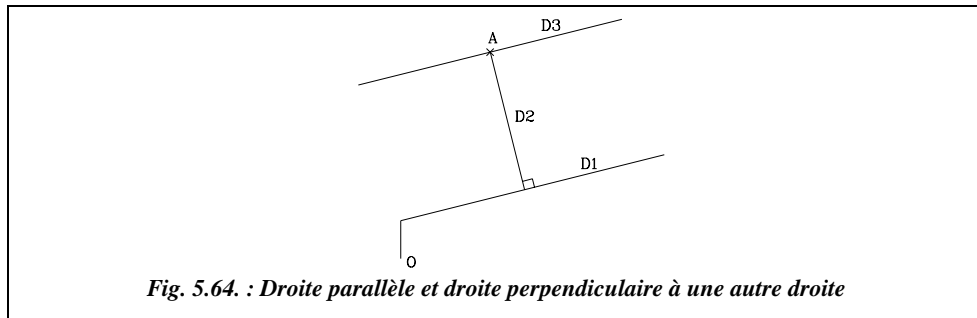
◆ **troisième et quatrième exercices : § 9.3. & 9.4.**

Dessinez la droite  $D_1$  qui est donnée : **LIGNE** du point 0,14.40 au point 40,24.40.

Dessinez  $D_2$  perpendiculaire à la droite  $D_1$  : **LIGNE** du point 33.94,78.36 au point **PER**pendiculaire à...  $D_1$ .

Dessinez  $D_3$  parallèle à la droite  $D_1$  : *COPIER* ⊥ <choix des objets> cliquez sur la droite puis validez (↵), du point *MILieu* de... au point *A* *EXTrémité* de...

Pour obtenir les valeurs de  $a$  et  $b$ , voir le premier exemple.



## 10 LES ANGLES : UNITÉS ET CONVERSIONS

### 10.1 Définitions

#### 10.1.1 Le radian (rad)

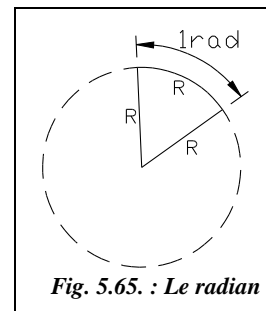
C'est l'angle au centre interceptant sur le cercle un arc de longueur égale à son rayon (fig. 5.65.).

Un angle de  $\alpha_{\text{rad}}$  intercepte donc une longueur de  $R \cdot \alpha_{\text{rad}}$  sur le cercle.

Le périmètre d'un cercle de rayon  $R$  est égal à  $2 \cdot \pi \cdot R$ .

La constante  $\pi$  peut être calculée ainsi :

$$\tan(\pi / 4) = 1 \text{ d'où } \pi = 4 \cdot \arctan(1) = 3,14159\dots$$



#### Application

Calculez au millimètre près la longueur de l'arc d'un demi-cercle de rayon 10 m.

#### Réponse

$$L = \pi \cdot 10 = 31,416 \text{ m.}$$

#### 10.1.2 Le degré (deg ou °)

C'est la **360<sup>e</sup> partie du cercle**. Il est généralement exprimé en degrés décimaux (121,636°). On peut aussi l'exprimer en degrés sexagésimaux dont les sous-multiples sont :

- la **minute sexagésimale** : 1' vaut  $1/60^\circ$
- la **seconde sexagésimale** : 1" vaut  $1/60^\circ$  de minute soit  $1 / 3\,600^\circ$

#### Application

- 1 - Transformez  $121,636^\circ$  en degrés-minutes-secondes (la plupart des calculatrices permettent de le faire directement au moyen d'une fonction pré-programmée).
- 2 - Transformez  $35^\circ 12' 28''$  en degrés décimaux.
- 3 - Combien mesure un mile marin sachant qu'il intercepte un arc de méridien de 1' ?

#### Réponses

- 1 -  $0,636^\circ$  sont  $0,636 \cdot 60 = 38,16$  minutes et  $0,16$  minutes sont  $0,16 \cdot 60 = 9,6$  secondes ;  
la réponse est donc :  $121^\circ 38' 10''$ .
- 2 -  $35 + 12 / 60 + 28 / 3\,600 \approx 35,208^\circ$ .
- 3 - Avec un rayon moyen de  $R = 6\,367$  km,  $1 \text{ mile} = 6\,367 \cdot 2\pi / 360 / 60 = 1,852$  km.

### 10.1.3 Le grade (symbole : gon)

Le terme « grade » représente l'unité, « gon » est sa notation ; c'est par définition la **400<sup>e</sup> partie du cercle**. C'est l'unité usuelle du topographe.

On utilise aussi souvent les sous-multiples du grade, à savoir : décigrade (**dgon**), centigrade (**cgon**), milligrade (**mgon**), décimilligrade (**dmgon**).

Un cgon est aussi une **minute centésimale** ( $1/100^\circ$  de grade), notée `.

Un dmgon est aussi une **seconde centésimale** ( $1/10\,000^\circ$  de grade), notée ``.

**Attention** : ne pas confondre la notation des minutes ou secondes sexagésimales (' et ") avec la notation des minutes ou secondes centésimales (` et `` : l'orientation des apostrophes est inversée). Ces notations sont d'ailleurs à éviter absolument pour ne garder que les sous-multiples du grade.

## 10.2 Conversions

Elles sont faites par règle de trois à partir des égalités suivantes :  $2\pi_{\text{rad}} = 360^\circ = 400 \text{ gon}$

#### Application

- 1 - Convertissez  $96^\circ 18' 46''$  en grade puis en radian.
- 2 - Sur la documentation Leica du T2, on lit : écart type =  $0,8''$  ; traduisez en gon.

#### Réponses

- 1 -  $96 + 18/60 + 46/3\,600 = 96,313^\circ \cdot 400 / 360 = 107,014 \text{ gon} \cdot \pi / 200 = 1,681 \text{ rad}$ .
- 2 -  $0,8 / 60 / 60 \cdot 400 / 360 = 0,00025 \text{ gon}$ , soit  $2,5 \text{ dmgon}$ .



## 10.3 Ordres de grandeur

Il est bon de connaître les quelques ordres de grandeur suivants pour apprécier la précision des mesures angulaires réalisées sur le terrain avec les différents appareils de topographie. Certains théodolites permettent d'apprécier le dmgon.

Pour un angle  $\varepsilon$  petit et exprimé en radian, on peut écrire :  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$  et  $\cos \varepsilon \approx 1$ .

Exemples :  $\sin(0,1\text{rad}) = 0,0998$ ;  $\sin(0,2\text{rad}) = 0,197$

$\cos(0,1\text{rad}) = 0,0995$ ;  $\cos(0,2\text{rad}) = 0,980$

Comme  $1 \text{ gon} \approx 1/64 \text{ rad}$ , cela entraîne qu'un écart d'angle de 1 gon à une distance de 64 m donne 1 m en bout de visée.

De même, on a :

1 cgon $\approx 1/6\,400 \text{ rad}$	1 cgon à 64 m donne 1 cm
1 mgon $\approx 1/64\,000 \text{ rad}$	1 mgon à 64 m donne 1 mm
1 dmgon $\approx 1/640\,000 \text{ rad}$	1 dmgon à 64 m donne 1/10 mm

## 10.4 Caractéristiques d'une visée

### 10.4.1 Sensibilité d'une visée

Notée  $s$ , c'est le déplacement de l'extrémité de la visée pour une variation d'angle de 1 dmgon. La sensibilité  $s$  est proportionnelle à la portée de la visée, c'est-à-dire :

$$s_{\text{cm/dmgon}} = 100\,000 D_{\text{km}} \frac{\pi}{200} \cdot \frac{1}{10\,000}$$

$s$  est exprimée en centimètre par décimilligrade.

Soit, en simplifiant :

$$s_{\text{cm/dmgon}} \approx 0,157 \cdot D_{\text{km}}$$

En changeant d'unité pour les angles, on obtient :

$$s_{\text{cm/mgon}} \approx 1,57 \cdot D_{\text{km}}$$

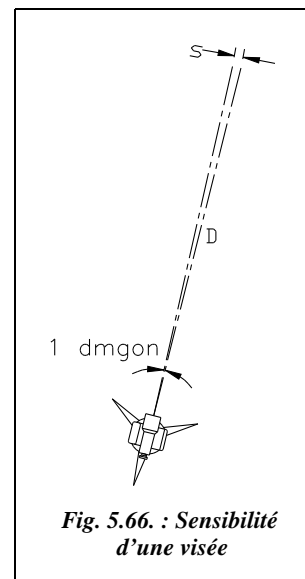


Fig. 5.66. : Sensibilité d'une visée

### 10.4.2 Déplacement d'une visée

C'est la valeur du déplacement de l'extrémité de la visée pour une variation d'angle  $\Delta_{\text{dmgon}}$ .

$$d_{\text{cm}} = s_{\text{cm/dmgon}} \cdot \Delta_{\text{dmgon}}$$

### Application

Calculez l'écart en centimètre que représente une erreur d'appréciation de 1 cgon à une distance de 500 m.

### Réponse

$$d = 1,57 \cdot 0,5 \cdot 10 \approx 7,9 \text{ cm.}$$

## 11 CALCULS PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

### 11.1 Utilité de ce mode de calcul

Dans certains problèmes, les données sont telles qu'il est impossible, ou parfois seulement difficile, de résoudre directement, c'est-à-dire d'obtenir une formule « simple » donnant l'inconnue cherchée. Par formule simple, on entend une expression du type :

$$X = f(a, b, c) \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des constantes du problème posé.}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- **Premier cas** : l'inconnue cherchée intervient dans l'équation finale sous sa forme simple  $X$  et dans un sinus, un cosinus, une tangente, etc.

Exemple :  $2X + \cos X = 5$ . Cela est impossible à résoudre directement.

Une application de ce type de calcul à la résolution d'une équation du troisième degré est traitée au chapitre 4 du tome 1, paragraphe 2.3.5 ; cela est utile si on ne dispose pas des racines de ce type d'équation.

- **Deuxième cas** : la complexité du problème fait que l'on n'arrive pas (c'est peut-être impossible) à obtenir une expression de l'inconnue. On obtient une suite d'équations dans lesquelles les paramètres se reportent et se mélangent à des inconnues intermédiaires et à l'inconnue principale.

Pour résoudre ces deux types de problème, il existe une méthode de calcul numérique rigoureuse qui permet d'aboutir au résultat. Il est plus simple de la détailler sur des exemples.

**Attention** : le principe de la méthode de calcul repose sur la théorie mathématique des séries. Suivant l'équation à résoudre et suivant la valeur de départ choisie, la série peut ne pas converger. Dans cette dernière hypothèse, le résultat ne pourra pas être trouvé ; il faut alors soit chercher une nouvelle forme de l'équation à résoudre, soit changer de

technique de détermination : méthode de Newton, bissection des calculatrices (voir § 11.2.2.) ou bien fonction « valeur cible » d'Excel (voir § 11.2.4.).

## 11.2 Exemple de résolution par approximations successives

Dans cet exemple, on obtient une formule non soluble directement.

Considérons un point P à partir duquel on veut déterminer un alignement Px perpendiculaire à une direction Ay (fig. 5.67.).

Pour cela, on se fixe un point C sur l'alignement Ay et un point B milieu de [AC]. Depuis le point P, au moyen d'un théodolite, on mesure les angles :

APB = 34,651 gon, noté  $P_1$  ;

BPC = 57,471 gon, noté  $P_2$  ;

On cherche à calculer l'angle CPx permettant l'implantation de la direction Px directement depuis la station P.

Cette méthode peut aussi être utilisée pour construire une parallèle à Ay en cherchant l'angle Cpx - 100.

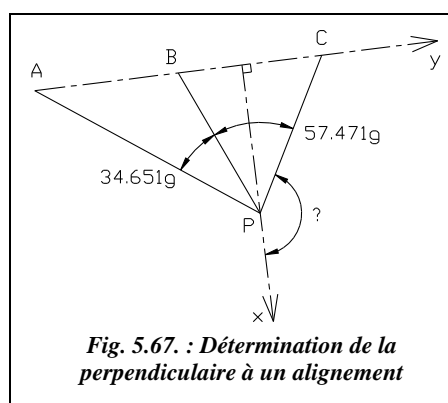


Fig. 5.67. : Détermination de la perpendiculaire à un alignement

### 11.2.1 Relation littérale permettant de calculer l'angle Cpx, noté X

Dans le triangle APB, on écrit :  $\frac{\sin A}{BP} = \frac{\sin P_1}{AB}$ .

De même, dans le triangle BPC :  $\frac{\sin C}{BP} = \frac{\sin P_2}{BC}$ .

Comme AB = BC, on obtient :  $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin P_1}{\sin P_2}$ .

Si l'on mène une parallèle à Ay passant par le point P, on peut écrire autour du point P :  $300 = A + P_1 + P_2 + X$ , d'où  $A = 300 - (P_1 + P_2 + X)$  et  $C = X - 100$ .

Comme  $\sin(300 - \alpha) = -\cos \alpha$  et  $\sin(\alpha - 100) = -\cos \alpha$ ,

l'équation finale donnant X est :

$$\frac{\cos(P_1 + P_2 + X)}{\cos X} - \frac{\sin P_1}{\sin P_2} = 0$$

## 11.2.2 Résolution par approximations successives

La première étape est d'isoler l'inconnue  $X$ , par exemple en transformant l'équation

$$\text{ainsi : (1) } X = \arccos\left[\frac{\sin P_1}{\sin P_2} \cdot \cos X\right] - (P_1 + P_2)$$

Il reste à résoudre par approximations successives (voir le tableau suivant).

Le principe est de donner une valeur de départ à l'inconnue  $X$ , ce qui permet de calculer la partie droite de l'équation modifiée (1). Le résultat de ce calcul donne une valeur  $X'$  qu'il reste à comparer à  $X$ . Lorsque  $X' = X$ , la solution est trouvée.

La valeur de départ pour  $X$  est 150 gon.

A partir de la treizième itération (ligne 14), on constate que le troisième chiffre après la virgule ne varie plus. On peut donc considérer que le résultat est connu avec trois chiffres significatifs, ce qui correspond à la précision des données :

$$X = -31,536 \text{ gon}$$

Comme  $\cos(200 + X) = -\cos X$ , l'angle cherché est donc :

$$X = 168,464 \text{ gon}$$

	A	B
1	$X$ (gon)	$\arccos\left(\frac{\sin P_1}{\sin P_2} \cdot \cos X\right) - (P_1 + P_2)$
2	150,000	38,769
3	38,769	-28,515
4	-28,515	-32,655
5	-32,655	-31,100
6	-31,100	-31,704
7	-31,704	-31,472
8	-31,472	-31,561
9	-31,561	-31,527
10	-31,527	-31,540
11	-31,540	-31,535
12	-31,535	-31,537
13	-31,537	-31,536
14	-31,536	-31,536

**Attention**, on peut aussi obtenir l'équation :  $X = \arccos\left[\frac{\sin P_2}{\sin P_1} \cdot \cos(P_1 + P_2 + X)\right]$ .

Si vous essayez de trouver le résultat en partant de cette deuxième expression, vous constaterez que la méthode par approximations numériques ne donne pas de résultat : il existe un problème de convergence.



On peut contourner la difficulté au moyen d'une calculatrice possédant des fonctions préprogrammées de résolution d'équations. Par exemple, la fonction n° 5080 de la calculatrice FX850P qui est une résolution par la méthode de **Newton**. Il suffit d'entrer la fonction, de donner la valeur de départ puis de lancer le calcul pour obtenir un résultat. Une autre fonction utilisable, mais qui converge moins vite, est la bisection (fonction n° 5090).

Il existe encore une difficulté : cette équation n'aboutit à un résultat que pour certaines valeurs de départ correctement choisies pour  $X$ . En effet, utiliser la fonction  $\arccos()$  implique de respecter son domaine de définition :  $\arccos Y$  n'existe que pour  $Y \in ]-1, 1[$ , il faut donc choisir la valeur de départ pour  $X$  telle que la fonction  $\arccos(f(X))$  soit définie. Dans cet exemple, il faut choisir ( $162,022 < X < 253,734$ ) ou ( $-37,978 < X < 53,734$  gon).

### 11.2.3 Exemple de programmation de cette résolution en basic



Le programme suivant permet de résoudre ce problème sur une calculatrice programmable en Basic standard.

```
10 INPUT "Valeur de départ"; VD : REM entrée de la valeur de départ
15 INPUT "Nombre de chiffres après la virgule"; P : REM précision désirée
20 A = 34.561 + 57.471 : Y = VD : REM constantes de départ
50 X = ARCCOS(SIN(34.651) / SIN(57.471) * COS(Y)) - A : REM équation
60 IF ABS(X-Y) < 10^(-1*P) THEN GOTO 80 : REM si précision requise atteinte
70 Y = X : GOTO 50 : REM sinon faire une nouvelle itération
80 PRINT " X= "; INT(X*10^P) / 10^P : END
```

### 11.2.4 Utilisation d'un tableur pour résoudre ce problème



Démarrez Excel et placez (comme dans le tableau du paragraphe 11.2.2.) en case A2 la valeur de départ 150 gon. En case B2, inscrivez la formule suivante :

$$= \text{ACOS}(\text{SIN}(34,651 * \text{PI}() / 200) / \text{SIN}(57,471 * \text{PI}() / 200) * \text{COS}(A2 * \text{PI}() / 200)) * 200 / \text{PI}() - 34,561 - 57,471 \downarrow$$

Recopiez la formule vers le bas sur 15 lignes. En case A3, inscrivez = B2 $\downarrow$  et recopiez vers le bas sur 14 lignes. Réglez le nombre de chiffres après la virgule à trois sur les deux colonnes pour faire apparaître la valeur finale.

Autre solution : utilisez la fonction « valeur cible » (ou encore le solveur) d'Excel qui permet de faire varier un paramètre dans une équation jusqu'à obtenir une valeur désirée.

Inscrivez en case A1 une valeur de départ (quelconque) : =50 $\downarrow$

Inscrivez en A2 la formule :

$$= \text{COS}((34,651 + 57,471 + A1) * \text{PI}() / 200) / \text{COS}(A1 * \text{PI}() / 200) - \text{SIN}(34,651 * \text{PI}() / 200) / \text{SIN}(57,471 * \text{PI}() / 200) \downarrow$$

En restant sur la case A2, sélectionnez la fonction valeur cible du menu outils et donnez comme cellule à définir A2, comme valeur cible 0 et comme cellule à modifier A1. Le résultat est A1 = -31,5359137 gon.

## 11.2.5 Résolution graphique



Dans ce problème, la résolution graphique ne s'effectue pas par approximations : elle est unique et s'obtient directement par la construction suivante (fig. 5.68.).

L'environnement de travail est le suivant : angles en grades avec trois chiffres significatifs, sens horaire et zéro au nord.

Pour la construction des angles ABP et BPC :

- tracez une droite quelconque PA : *LIGNE* du point (cliquez vers le centre de l'écran) au point (cliquez vers la position de A, fig. 5.68.) ;
- construisez la droite (PB') à partir de (PA) : *COPIER* la droite (PA) puis faites tourner la copie par *ROTATION* d'un angle de  $34.651\text{ gon}$ , enfin *DEPLACER* cette dernière pour faire correspondre les *EXTrémités* de (PA) et (PB) ;
- créez de même (PC') en copiant (PB) puis en la faisant tourner de  $57.471\text{ gon}$  et en la déplaçant vers l'extrémité des deux autres.

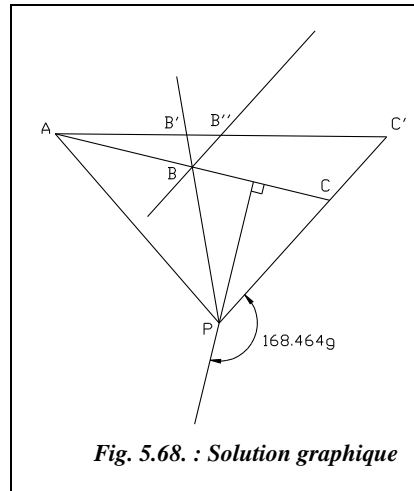


Fig. 5.68. : Solution graphique

Pour la construction de l'alignement Ax :

- tracez la droite quelconque AC' : *LIGNE* du point *EXTrémité* de (PA) au point *EXTrémité* de (PC') ;
- B étant le milieu de AC, on applique le théorème de Thalès pour dire que BB'' est parallèle à C'C, B'' étant le milieu de AC' ;
- créez la droite BB'' en copiant la droite PC' depuis son *MILieu* vers le *MILieu* de AC'. Cela donne le point B. Il reste à tracer une *LIGNE* de A vers B et à la prolonger (commande *PROLONGE*) jusqu'à la droite PC' pour obtenir l'alignement de départ Ax.

Construction de Ay perpendiculaire à Ax : *LIGNE* du point P (*EXTrémité* de.) au point *PERpendiculaire* à AC.

Mesurez l'angle cherché en dessinant une cotation angulaire.

## 11.3 Application

Connaissant le rayon  $R = 8,213\text{ m}$  et la surface du secteur circulaire schématisé à la figure 5.69. ( $S = 5,433680\text{ m}^2$ ), on cherche à calculer la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ .

**Réponse**

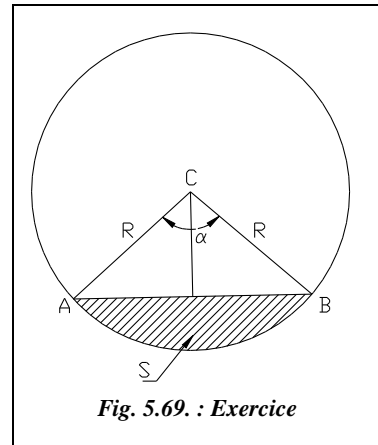
Si l'on note  $X$  la longueur de l'arc  $\widehat{AB}$ ,

$$S = \frac{\alpha_{\text{radian}}}{2\pi} \pi R^2 - \frac{R^2 \cdot \sin \alpha_{\text{radian}}}{2}$$

donc  $2S = R^2 (\alpha_{\text{radian}} - \sin \alpha_{\text{radian}})$

comme  $\widehat{AB} = X = R \alpha_{\text{radian}}$

on obtient  $2S = R^2 \left[ \frac{X}{R} - \sin\left(\frac{X}{R}\right) \right]$



Le tableau ci-contre détaille la résolution par approximations successives,  $X$  est demandé au millimètre près ; on note  $X' = \frac{2S}{R} + R \cdot \sin\left(\frac{X}{R}\right)$ . On prend 8,2 comme valeur de départ, valeur proche du rayon  $R$ .

**Résultat :  $X = 8,259$  m.**

Remarquez qu'il est nécessaire de faire les calculs avec quatre chiffres significatifs pour être sûr de la précision du troisième. En effet, si l'on s'arrête à trois chiffres, on trouve un résultat inexact de 8,258 dès la septième ligne. Pour retrouver la précision de la surface  $S$ , il faut aller jusqu'à  $X = 8,2588636$  m.

D'autres exercices utilisant cette méthode de calcul sont détaillés dans l'ouvrage :

- division de surfaces (voir chap. 4, § 2.3.2.) ;
- tension d'un ruban (voir tome 1, chap. 4, § 2.3.6.) ;
- transformation de coordonnées (voir tome 1, chap. 2, § 3.4.6.).

$X =$	$X' =$
8,2000	8,2272
8,2272	8,2418
8,2418	8,2497
8,2497	8,2540
8,2540	8,2562
8,2562	8,2575
8,2575	8,2581
8,2581	8,2585
8,2585	8,2586
8,2586	8,2587
8,2587	8,2588
8,2588	8,2588
8,2588	8,2588
8,2588	8,2589
8,2589	8,2589
8,2589	8,2589

# 12 THÉORIE DES ERREURS

## 12.1 Mesures topométriques : terminologie

La topographie exige l'observation de nombreuses mesures. Considérons la distance entre deux points parfaitement et très précisément définis : cette distance est unique et n'a qu'une valeur nommée **valeur vraie**. C'est une valeur utopique qu'il est impossible de connaître. Si nous mesurons plusieurs fois cette distance, nous obtenons des **résultats de mesurage** non tous identiques ; ces valeurs seront des valeurs approchées de la valeur vraie et celle que l'on retiendra, dans ce cas la moyenne arithmétique, sera nommée la **valeur conventionnellement vraie** de la distance.

Les mesures donnent des valeurs non toutes identiques parce que :

- 1 - les observations sont effectuées par des personnes et non des robots : les gestes et manipulations ne sont donc pas à chaque fois absolument identiques ;
- 2 - les conditions des observations changent : les variations de températures modifient la longueur d'une chaîne en acier, les différences de pression atmosphérique perturbent les ondes des distancemètres, etc. ;
- 3 - les instruments, aussi précis soient-ils, de conception et de fabrication humaine, sont forcément entachés d'erreurs : non perpendicularité des axes d'un théodolite, défauts dans les graduations du limbe, défaut d'horizontalité de l'axe optique d'un niveau, etc.

L'analyse de ces erreurs permet de se rendre compte que :

- certaines sont systématiques car inévitables (celles citées en 2 et 3 par exemple) ; en fait, on peut les connaître et souvent les éliminer par des procédés de mesurage ou tout simplement en les évaluant ;
- d'autres, en revanche, sont aléatoires ; on dit qu'elles sont accidentelles (celles citées en 1) : elles dépendent essentiellement des opérateurs.

Le problème du topomètre est donc de tenir compte de ces erreurs dans le résultat définitif de la grandeur mesurée et de définir jusqu'à quelles valeurs ces erreurs sont admissibles.

Il faut aussi combiner les erreurs commises sur les grandeurs mesurées (**mesures directes**) lorsque la grandeur cherchée est fonction de ces mesures.

Dans un premier temps, donnons la définition de certains termes normalisés par la norme *AFNOR NF X 07-00* :

- **le mesurage** est l'ensemble des opérations expérimentales ayant pour but de déterminer la valeur d'une grandeur. En topométrie, on utilise souvent le terme de **mesure**.



- **la méthode de mesurage** est le mode de comparaison utilisé. On distingue :
  - **le mesurage direct**, comparaison de la grandeur avec un étalon : par exemple mesurer une longueur avec un décimètre ou un angle avec un théodolite ;
  - **le mesurage indirect**, qui fournit le résultat de la grandeur par l'intermédiaire d'une formule faisant intervenir des mesures directes : par exemple la mesure de la surface d'un rectangle faisant intervenir la mesure de ses côtés ou encore la mesure d'une altitude en nivellement indirect faisant intervenir au moins une mesure de distance et une mesure angulaire.
- **la valeur vraie d'une grandeur** est la valeur qui caractérise une grandeur parfaitement définie : c'est une notion idéale qui ne peut généralement être connue.
- **la valeur conventionnellement vraie d'une grandeur** est la valeur approchée de la valeur vraie d'une grandeur ; la différence entre ces deux valeurs peut être négligée.
- **l'erreur de mesurage** est la discordance entre le résultat du mesurage et la valeur, que celle-ci soit vraie, conventionnellement vraie ou encore qu'elle soit la moyenne arithmétique d'une série de mesurages. Elle résulte des erreurs instrumentales, des erreurs d'observations commises par l'opérateur ainsi que des conditions d'observation : température, pression atmosphérique, humidité de l'air par exemple.
- **les fautes** ou erreurs parasites sont les erreurs grossières, non admissibles, qui résultent d'une exécution incorrecte du mesurage.

## 12.2 Les erreurs en topométrie

Les observations effectuées dans les opérations topographiques sont entachées d'inexactitudes plus ou moins importantes provenant de l'imperfection des sens, des instruments utilisés, des conditions atmosphériques, etc.

En améliorant les méthodes et les instruments, en répétant plusieurs fois les observations, les erreurs seront réduites, mais la valeur mathématiquement exacte ne sera jamais atteinte.

Les inexactitudes sont de deux natures différentes : les **fautes** et les **erreurs**.

### 12.2.1 Les fautes ou erreurs parasites

Ce sont des inexactitudes grossières qui proviennent de la maladresse des opérateurs et de leurs aides ainsi que de leurs négligences ; elles sont en général facilement décelables : faute de lecture sur un ruban, faute de lecture d'angle, faute de lecture sur la mire, etc. Il s'agit d'une faute lorsque la tolérance donnée pour les observations ou l'approximation donnée pour un instrument est dépassée.

Il faut se prémunir contre les fautes toujours possibles en se réservant un certain nombre de contrôles, par exemple, une longueur doit être mesurée au moins deux fois, à l'aller puis au retour, des réitérations sur la mesure des angles seront effectuées, etc.

## 12.2.2 Les erreurs

Ces inexactitudes sont absolument inévitables. Elles proviennent de l'imperfection des instruments utilisés, de l'imperfection des sens de l'individu.

Leur valeur est faible par rapport aux fautes et de toute façon obligatoirement inférieure à la tolérance. Mais quoique petite, la somme de ces erreurs donne aux résultats une inexactitude dont il est recommandé de se préoccuper.

Par exemple, une distance est mesurée à l'aide d'une chaîne comportant une erreur d'étalonnage ; cette erreur se reproduit à chaque portée avec la même valeur et le même signe. Une telle erreur est dite systématique : on peut la connaître en valeur et en signe. Supposons enfin que cette longueur soit chaînée sans prendre soin de s'aligner à chaque portée : on commet à chaque portée une erreur qui, quoique conservant le même signe, n'a pas la même valeur ; supposons enfin que, toujours pour déterminer cette même longueur, à l'extrémité de chaque portée les repères au sol n'aient pas été faits parfaitement en coïncidence avec la graduation de la chaîne, parfois avant, parfois après ; cette erreur, dite de tracé, se reproduit tantôt positive, tantôt négative.

De telles erreurs sont dites accidentelles ; elles ne peuvent être quantifiées.

### 12.2.2.1 Les erreurs systématiques

Ces erreurs se reproduisent toujours identiquement à elles-mêmes. Elles sont dues à une cause permanente connue ou inconnue. Il est toujours possible de la corriger soit par le calcul (par exemple la correction d'étalonnage d'un ruban, tome 1, chap. 4, § 2.3.) soit par un mode opératoire (par exemple le double retournement, tome 1, chap. 3, § 4.2.).

Les mesures topométriques consistent essentiellement en mesures de longueurs et en mesures d'angles. Nous allons rappeler ci-après quelques erreurs systématiques caractéristiques de ces types de mesures.

**Pour les mesures de longueurs** (voir tome 1, chap. 4)

- par chaînage, les erreurs systématiques sont essentiellement des erreurs d'étalonnage et, pour les éliminer, il faut apporter aux valeurs observées des corrections d'étalonnage ; ces corrections sont multiples : tensions, température, étalonnage proprement dit. C'est aussi l'erreur de chaînette, d'alignement et le défaut d'horizontalité ;
- par des IMEL (instruments de mesures électroniques des distances) : par exemple les distancemètres. Les erreurs systématiques sont l'erreur d'étalonnage et celles dues aux conditions atmosphériques, essentiellement la température et la pression.

**Pour les mesures d'angles** (voir tome 1, chap. 3)

- erreurs de collimation horizontale et verticale ;
- erreur de tourillonnement ;

- erreur d'excentricité de l'axe de rotation de l'alidade ;
- inégalité des graduations du limbe ;
- erreurs dues à la réfraction, etc.

### 12.2.2.2 Les erreurs accidentelles

Sont appelées accidentelles les erreurs qui ne présentent pas un caractère systématique, c'est-à-dire qui ne peuvent être ni calculées d'avance ni éliminées par la méthode opératoire ; elles sont dues à des causes fortuites ou non analysables ; on ne peut que constater leur existence et les subir.

Elles changent ou non de signe, mais changent continuellement de valeur. Détaillons ces erreurs pour les deux principaux types de mesures effectuées en topométrie, à savoir :

#### les mesures de longueurs

- par chaînage : ce sont essentiellement les erreurs de matérialisation de l'extrémité des portées et les erreurs de lecture ;
- par les IMEL : on retrouve certaines des erreurs de mesures d'angles ci-après ;

**et les mesures d'angles** : ce sont surtout les erreurs de centrage, de pointé, de lecture et de flamboiement de l'air.

On définit deux types d'erreur :

**a - l'erreur absolue** qui est la différence algébrique entre le résultat du mesurage et la valeur de comparaison. Suivant la valeur de comparaison utilisée, on distingue :

- **l'erreur absolue véritable  $e$**  qui est la différence algébrique entre le résultat du mesurage  $x$  et la valeur vraie  $\mu$  :

$$e = x - \mu$$

- **l'erreur apparente  $v$** , appelée **écart probable** en mesures directes et **résidu** en mesures indirectes, c'est la différence algébrique entre le résultat du mesurage  $x$  et la valeur conventionnellement vraie.

**b - l'erreur relative** qui est le quotient de l'erreur absolue par la valeur vraie ; c'est une valeur algébrique usuellement exprimée en pourcentage.

On ne peut pas tenir compte de l'erreur accidentelle sous forme d'une correction apportée au résultat du mesurage, mais, seulement à la fin d'une série de mesurages exécutés dans des conditions pratiquement identiques, on peut fixer les limites dans lesquelles se situe cette erreur avec une probabilité donnée. L'étude de ces limites constituent la théorie des erreurs accidentelles.

## 12.3 Modèle mathématique

Le calcul des probabilités permet d'estimer la valeur vraie par une valeur dite conventionnellement vraie et permet également d'évaluer l'incertitude sur cette valeur conventionnellement vraie.

### 12.3.1 Expérimentation

Reprenons, dans les mêmes conditions, un très grand nombre de fois la même mesure et reportons sur un axe orienté les résultats. Nous constatons que toutes les valeurs sont dispersées entre deux extrêmes et qu'entre ces deux bornes leur répartition n'est pas uniforme : la densité de ces mesures va en croissant d'un terme extrême inférieur jusque vers le milieu de l'intervalle complet, puis décroît jusqu'à une autre valeur extrême maximale en passant sensiblement par les mêmes valeurs. Si l'on indique sous chacune des valeurs le nombre de répétitions nous notons une accumulation vers le milieu de l'intervalle de répartition.

Calculons les indices de dispersion d'une série de mesurages directs.

Une longueur a été chaînée 50 fois de suite et on a noté les valeurs suivantes :

2	mesures à	74,54 m	9	mesures à	74,59 m
3	mesures à	74,55 m	6	mesures à	74,60 m
5	mesures à	74,56 m	4	mesures à	74,61 m
8	mesures à	74,57 m	2	mesures à	74,62 m
10	mesures à	74,58 m	1	mesures à	74,63 m

Représentons graphiquement (fig. 5.70.) les résultats obtenus : on réalise un histogramme des mesures effectuées en portant sur un axe horizontal les mesures et au droit de chaque intervalle ainsi défini on peut construire des rectangles dont la surface est égale au nombre de mesures. Si l'on trace la courbe en laissant des aires sensiblement égales à l'intérieur et à l'extérieur de chaque rectangle, on obtient la courbe de la figure 5.70.

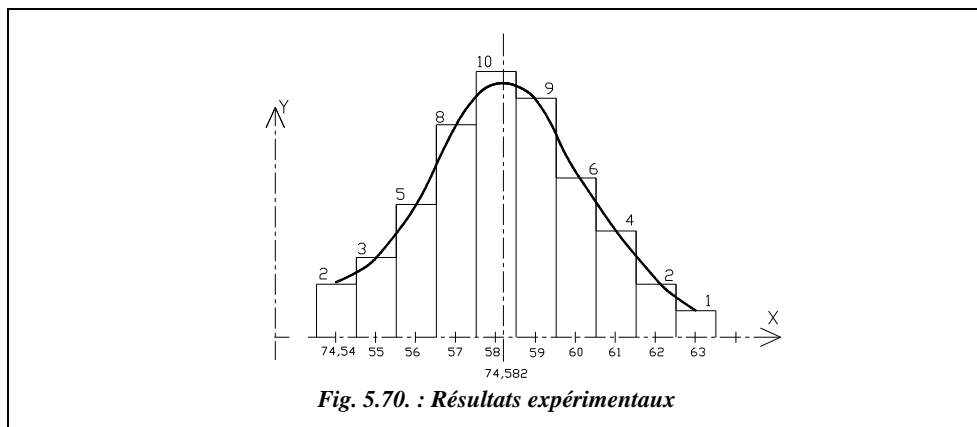


Fig. 5.70. : Résultats expérimentaux

Cette courbe est très proche d'une courbe qui est symétrique par rapport à la droite d'abscisse 74,582 m, valeur la plus probable ou moyenne arithmétique, et qui a la forme d'une « cloche ».

### Introduction de la courbe de Gauss

Cette expérience a été faite bien souvent et les résultats sont constants : la courbe de répartition a toujours la même allure (fig. 5.71.). Les courbes obtenues dans l'étude de différents cas sont superposables par un simple changement d'échelle des abscisses et des ordonnées ; ainsi on peut représenter par la même courbe, par exemple :

- les erreurs de fermeture des triangles d'une triangulation.
- les écarts de tir à l'arc, au pistolet, etc.

Ces courbes dites « courbes de Gauss » ont la même équation, caractéristique de la loi de répartition des erreurs accidentelles :

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \text{où } x \text{ représente les valeurs possibles de la mesure, } \sigma \text{ et } \mu \text{ sont des paramètres.}$$

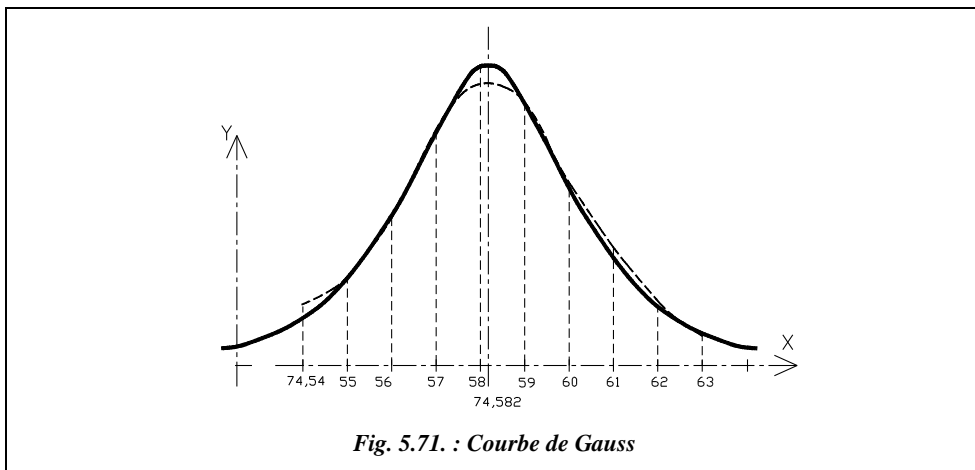


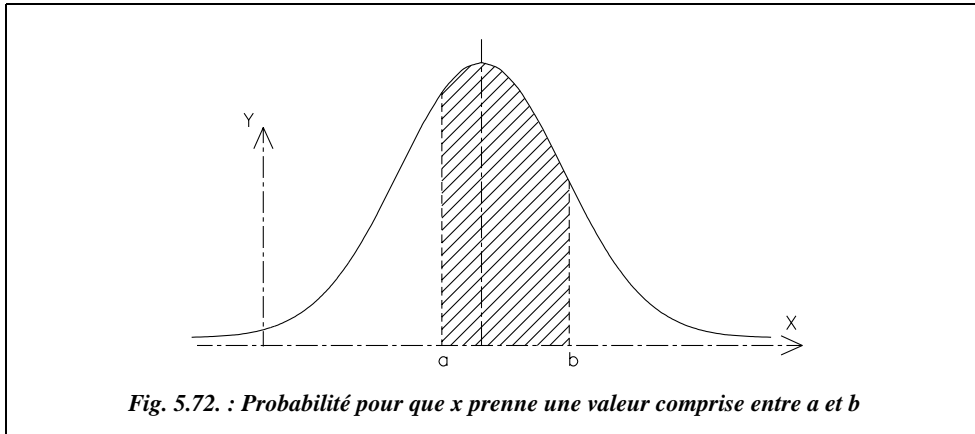
Fig. 5.71. : Courbe de Gauss

### 12.3.2 Hypothèse de travail

On admet qu'une mesure topométrique  $X$  est une variable aléatoire dont la loi de distribution est une loi normale de paramètres  $\mu$  (valeur vraie) et  $\sigma$  (incertitude moyenne quadratique ou écart type) et de densité de probabilité la fonction ci-dessus (§ 12.3.1.). Ainsi la probabilité pour que la mesure  $X$  prenne une valeur comprise entre deux valeurs  $a$  et  $b$ , est l'aire comprise entre les droites d'équation  $x = a$  et  $x = b$ , l'axe des abscisses et la courbe, soit :

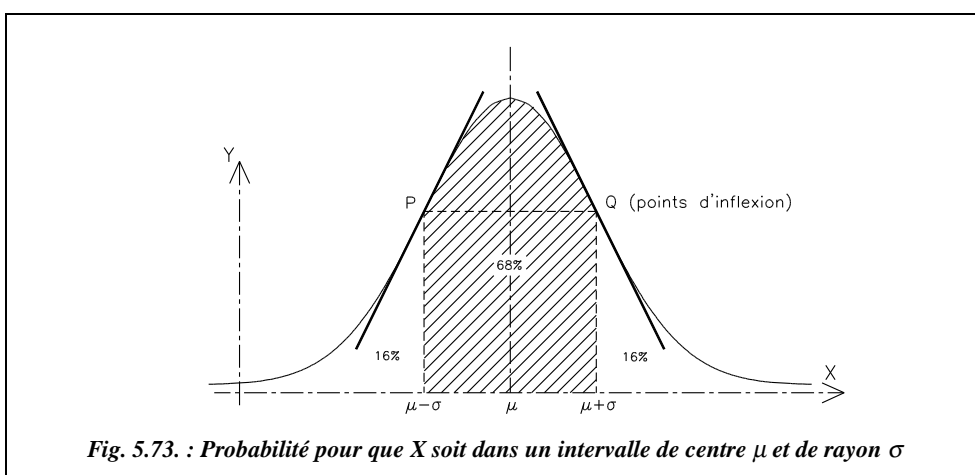
$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

Cette probabilité est donc égale à l'aire de la surface hachurée sur la figure 5.72.



La courbe théorique (courbe de Gauss) est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = \mu$  (fig. 5.73.). Elle présente deux points d'inflexion (changement de courbure) Q et P d'abscisses respectives  $\mu + \sigma$  et  $\mu - \sigma$ .  $\sigma$  est l'erreur moyenne quadratique d'une mesure ou écart type.

La probabilité que la mesure  $X$  soit dans l'intervalle de centre  $\mu$  et de rayon  $\sigma$  est égale à l'aire hachurée (fig. 5.73.). Le calcul donne environ 0,68 ( $\approx 2/3$ ).



Cela revient à dire que si l'on effectue une mesure, nous avons deux chances sur trois de trouver une erreur absolue inférieure à cette limite qu'est l'écart type.

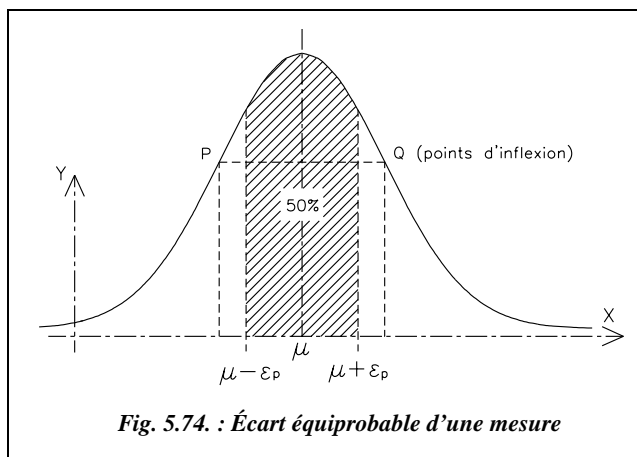
Définissons l'écart équiprobable d'une mesure, l'écart maximal d'une mesure et la distribution statistique normale.

• **Écart équiprobable d'une mesure**

C'est l'écart qui a une probabilité de 50 % de ne pas être dépassé en valeur absolue.

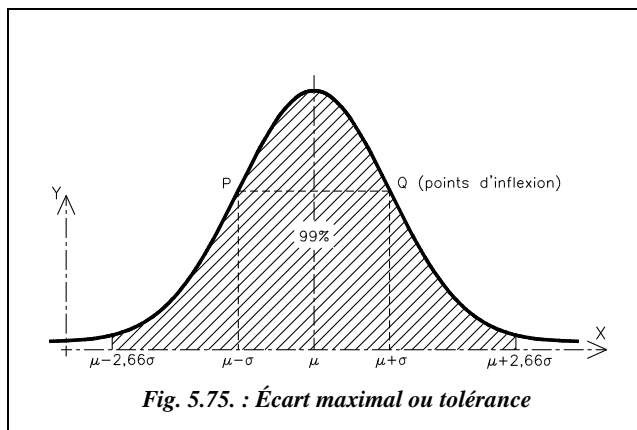
On montre que (fig 5.74.) :

$\begin{aligned} \varepsilon_p &= 0,68 \sigma \\ \varepsilon_p &\approx 2/3 \sigma \end{aligned}$
---



• **Écart maximal ou tolérance d'une mesure**

L'axe des abscisses étant asymptote à la courbe de Gauss, l'écart maximal est théoriquement infini puisque ce serait celui qui aurait une probabilité 100 % de ne pas être dépassé en valeur absolue. Mais il est évident qu'il n'existe pas, en réalité, de si grands écarts. En fait, il est impossible de savoir avec précision où se situe leur limite.



**On fixe toutefois arbitrairement sa probabilité en convenant** que l'écart maximal tolérable est celui qui a une probabilité de 99 % de ne pas être dépassé.

Le calcul montre que  $\varepsilon_m = 4 \varepsilon_p \approx 2,66 \sigma$ .

Cette valeur conventionnelle définit la limite au-delà de laquelle on n'a plus affaire à des erreurs mais *a priori* à des fautes.

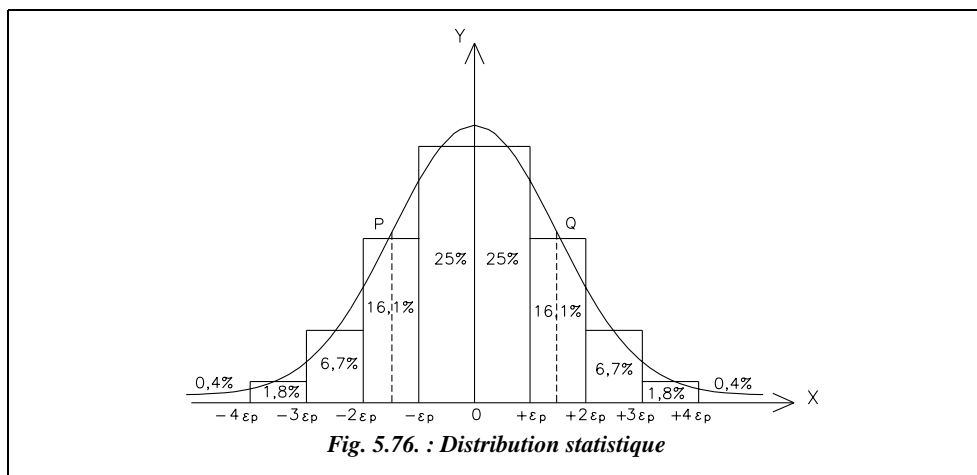
Ces valeurs (2,66 ; 0,68 ; etc.) peuvent être retrouvées dans la table de la loi normale unité de paramètres  $m = 0$  et  $s = 1$ .

- **Distribution statistique normale**

Si l'on considère la distribution des erreurs en pourcentage, on peut répartir les erreurs positives, ou négatives, en cinq classes (fig. 5.76.) :

- la première contient toutes les erreurs supérieures à 0 et inférieure à  $\varepsilon_p$  (erreur probable) : elle contient 25 % des erreurs ;
- la deuxième contient toutes les erreurs comprises entre un et deux écarts probables : elle en contient 16,1 % ;
- la troisième contient toutes les erreurs comprises entre deux et trois  $\varepsilon_p$  : elle en contient 6,7 % ;
- la quatrième contient toutes les erreurs comprises entre trois et quatre  $\varepsilon_p$  : elle en contient 1,8 % ;
- la cinquième au-delà, soit 0,4 %.

En d'autres termes, les ordonnées de l'histogramme des fréquences sont proportionnelles aux nombres suivants : 25 ; 16,1 ; 6,7 ; 1,8.



**Remarque**

En général, les cahiers des charges des travaux de géomètre indiquent la tolérance autorisée. On peut leur reprocher de ne pas préciser le pourcentage maximal des erreurs ayant un ordre de grandeur voisin de la tolérance : on peut ainsi aboutir à de véritables contradictions. Un travail où 20 % des résultats avoisinent les limites est juridiquement correct, alors que la distribution normale indique que 3 % seulement des erreurs doivent être comprises entre trois et quatre écarts probables.



### 12.3.3 Valeur conventionnellement vraie

On démontre que la meilleure estimation de  $\mu$  est la moyenne arithmétique des mesures effectuées qui est donnée par la formule suivante :

$$x_m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

On l'appelle « valeur la plus probable de la valeur vraie » ou « valeur conventionnellement vraie » mais ce n'est pas la valeur exacte – que l'on ne peut jamais connaître.

Dans l'exemple proposé, on trouve  $x_m = 74,582$  m.

### 12.3.4 Écart type expérimental d'une mesure

L'écart type expérimental est conventionnellement noté  $s$  ; par abus de notation, il est souvent noté  $\sigma$ . On démontre que pour un nombre limité de mesures, sa meilleure estimation est :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$$

Déterminons l'erreur moyenne quadratique sur l'exemple précédent :

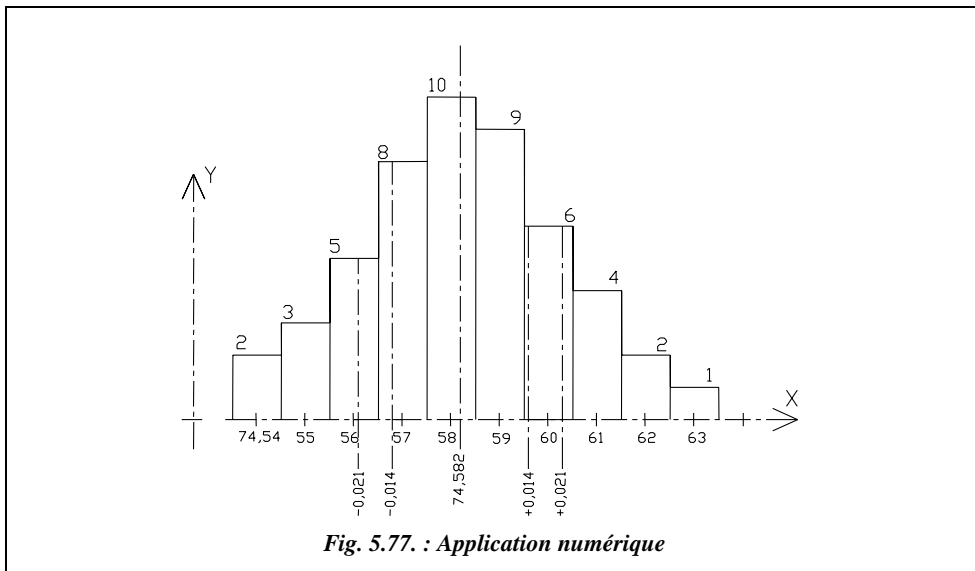
Nombre de mesures $n_i$	Mesures (m)	Moyenne (m)	Valeurs absolues des écarts à la moyenne (cm)	Somme des carrés des écarts
2	74,54	74,582	4,2	35,28
3	74,55		3,2	30,72
5	74,56		2,2	24,20
8	74,57		1,2	11,52
10	74,58		0,2	0,20
9	74,59		0,8	5,76
6	74,60		1,8	19,44
4	74,61		2,8	31,36
2	74,62		3,8	28,88
1	74,63		4,8	23,04
				Σ $(v_i)^2 = 210,40$

L'erreur moyenne quadratique est donnée par :  $s^2 = \frac{\sum v_i^2}{n-1} = \frac{210,40}{49} = 4,30$  .

Donc  $s = 2,1$  cm.

L'ensemble des 50 mesures de distances effectuées se résume donc à :

- la valeur la plus probable : 74,582 m
- l'écart type expérimental :  $s$  0,021 m
- l'écart équiprobable :  $\varepsilon_p$  0,014 m
- l'écart maximal ou tolérance :  $2,7.\sigma \approx 4.\varepsilon_p$  0,056 m



Sur l'histogramme (fig. 5.77.), traçons les droites d'abscisse  $74,582 - 0,021 = 74,561$  m et  $74,582 + 0,021 = 74,603$  m ; on obtient une aire d'environ :  $2 + 8 + 10 + 9 + 4,8 = 33,8$  mesures sur 50, c'est-à-dire une fréquence de 67,6 %.

Entre les droites d'abscisse  $74,582 - 0,014 = 74,568$  m et  $74,582 + 0,014 = 74,596$  m, on obtient une aire d'environ :  $5,7 + 10 + 9 + 0,5 = 25,2$  c'est-à-dire une fréquence de 50,4 %.

Entre les droites d'abscisse  $75,582 - 0,056 = 75,526$  m et  $75,582 + 0,056 = 75,638$  m, on trouve les 50 valeurs, c'est-à-dire une fréquence de 100 %.

On retrouve donc approximativement les valeurs théoriques de 68 % , 50 % et 99 %.

### 12.3.5 Incertitude sur la valeur conventionnellement vraie

Soit  $\sigma$  l'incertitude sur une mesure isolée. On effectue cette mesure  $n$  fois dans les mêmes conditions de manière indépendante ; l'incertitude sur la moyenne  $x_m$  de ces  $n$  mesures

est égale à :  $\boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Lorsque  $n$  devient très grand, cette incertitude diminue, ce qui signifie que la valeur conventionnellement vraie  $x_m$  se rapproche de la valeur vraie  $\mu$ , d'où l'intérêt de faire un grand nombre de mesures.

### 12.3.6 Théorie des erreurs accidentelles des mesures indirectes

En topométrie, il est fréquent d'effectuer plusieurs mesures directes pour connaître notamment une distance, une dénivelée. Ces mesures sont additionnées comme la somme de dénivelées ou font l'objet de produits comme la distance horizontale et la dénivelée à partir de la distance inclinée et de l'angle vertical.

#### 12.3.6.1 Théorème

Les erreurs sont suffisamment petites pour être considérées comme des infiniment petits du premier ordre et permettre de négliger leurs carrés ou leurs produits, c'est-à-dire les infiniment petits du deuxième ordre.

##### ◆ Énoncé du théorème

L'erreur sur une fonction de plusieurs variables est la différentielle totale de la fonction, les différentielles des variables représentant les erreurs sur celles-ci.

##### ◆ Démonstration de ce théorème

On note  $F = f(X, Y, Z)$  où  $F$  inconnue est donnée en fonction des mesures directes  $X, Y, Z$ . On note  $dX, dY, dZ$  les erreurs des variables  $X, Y, Z$ . On a :

$$F + dF = f(X + dX, Y + dY, Z + dZ)$$

En développant par la formule de Taylor, on obtient :

$$F + dF = f(X, Y, Z) + \frac{dX}{1!} f'_X + \frac{dX^2}{2!} f''_{XX} + \dots + \frac{dY}{1!} f'_Y + \frac{dY^2}{2!} f''_{YY} + \dots + \frac{dZ}{1!} f'_Z + \frac{dZ^2}{2!} f''_{ZZ} + \dots$$

En négligeant les termes de second ordre, on obtient :

$$F + dF \approx f(X, Y, Z) + f'_X \cdot dX + f'_Y \cdot dY + f'_Z \cdot dZ$$

D'où :  $\boxed{dF \approx f'_X \cdot dX + f'_Y \cdot dY + f'_Z \cdot dZ}$

On remarque que l'influence d'une erreur sur le résultat est indépendante de l'influence de toutes les autres erreurs. En effet, l'influence de l'erreur  $dX$  sur le résultat est  $f'_X \cdot dX$ , c'est-à-dire la valeur qui représente la variation de la fonction  $F$  quand  $X$  varie seule ( $dY = dZ = 0$ ).

### 12.3.6.2 Loi de composition

C'est la loi reliant l'erreur commise sur le résultat d'un mesurage indirect d'une grandeur aux erreurs commises lors des mesurages directs des grandeurs composantes.

Soit  $F = f(X, Y, Z)$  où  $F$  inconnue est donnée en fonction des mesures directes  $X, Y, Z$  et  $dX, dY, dZ$  qui sont les erreurs sur les variables  $X, Y, Z$ . Le théorème du paragraphe 12.3.6.1. donne :  $dF \approx f'_X \cdot dX + f'_Y \cdot dY + f'_Z \cdot dZ$ .

En pratique, cette formule sert généralement à calculer l'erreur systématique  $dF$  sur  $F$  si  $dX, dY, dZ$  représentent les erreurs systématiques respectives de  $X, Y, Z$  ; les produits  $f'_X \cdot dX, f'_Y \cdot dY$  et  $f'_Z \cdot dZ$  sont les erreurs partielles qui résultent de l'erreur commise sur une grandeur composante. Lorsque les erreurs systématiques ont été éliminées, l'incertitude de mesurage sur  $X$ , par exemple, est accidentelle : elle obéit au hasard, elle est tantôt positive, tantôt négative, et après étude de l'instrument utilisé on connaît son écart type  $\sigma_X$  ; de même, on connaît  $\sigma_Y$  et  $\sigma_Z$ . Considérons les  $n$  déterminations suivantes de  $F$  :

$$\begin{aligned} F_1 &= f(X_1, Y_1, Z_1) \\ F_2 &= f(X_2, Y_2, Z_2) \\ \dots & \\ F_n &= f(X_n, Y_n, Z_n) \end{aligned}$$

Les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suivent la même loi puisque ce sont  $n$  mesures de la même grandeur. Il en va de même pour  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  et pour  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

Soit  $dF_1, dF_2, \dots, dF_n$  les erreurs accidentelles vraies (inconnues) commises dans les mesures. On démontre que pour un très grand nombre de mesures ( $n$  tendant vers

l'infini), l'erreur moyenne quadratique ou écart type  $\sigma_F$  de  $F$  vaut :  $\sigma_F = \sqrt{\frac{\sum dF_i^2}{n}}$ .

Or  $dF_i \approx f'_X \cdot dX_i + f'_Y \cdot dY_i + f'_Z \cdot dZ_i$  ; en élevant au carré et en faisant la somme puis en divisant par  $n$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\sum dF_i^2}{n} &= (f'_X)^2 \frac{\sum dX_i^2}{n} + (f'_Y)^2 \frac{\sum dY_i^2}{n} + (f'_Z)^2 \frac{\sum dZ_i^2}{n} \\ &+ 2f'_X \cdot f'_Y \frac{\sum dX_i \cdot dY_i}{n} + 2f'_Y \cdot f'_Z \frac{\sum dY_i \cdot dZ_i}{n} + 2f'_Z \cdot f'_X \frac{\sum dZ_i \cdot dX_i}{n} \end{aligned}$$

Les doubles produits de la forme  $\frac{\sum dX_i \cdot dY_i}{n}$  sont des quantités petites.

De plus, le signe des termes  $dX_i \cdot dY_i$  ne peut être précisé puisque  $dX_i$  et  $dY_i$  sont des erreurs accidentelles ; la somme  $\sum dX_i \cdot dY_i$  est donc composée de termes de même ordre de grandeur dont les signes sont distribués au hasard et dont, par conséquent, la somme a tendance à s'annuler (en probabilité). En revanche, les termes de la somme  $\sum dX_i^2$  sont

tous positifs ; par définition,  $\sqrt{\frac{\sum dX_i^2}{n}}$  est l'écart type  $\sigma_X$  de la mesure  $X$ .

On peut donc négliger les doubles produits par rapport aux termes quadratiques, d'où :

$$\sigma_F^2 \approx (f'_X)^2 \cdot \sigma_X^2 + (f'_Y)^2 \cdot \sigma_Y^2 + (f'_Z)^2 \cdot \sigma_Z^2$$

### 12.3.6.3 Précision d'un instrument de mesurage

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que  $\sigma_X$  est l'écart type de la mesure directe  $X$  après étude de l'instrument. En effet, nous n'allons pas réitérer  $n$  mesures de  $X$ , de  $Y$ , de  $Z$  etc. pour en déduire leur écart type. Les écarts types choisis caractérisent la précision de l'instrument de mesure utilisé ; le constructeur étudie l'instrument en effectuant un certain nombre de mesures (comme réalisé au paragraphe 12.3.4.) dans des conditions précises et normalisées par exemple par les normes *DIN 18723*.

Par exemple, pour les théodolites, le constructeur effectuera quatre séries de mesures par différentes conditions météorologiques ; une série de mesures comprendra trois groupes de mesures à des distances comprises entre 100 et 250 m ; les visées sont voisines de l'horizontale ; dans chaque groupe on pratique cinq mesures de direction en position I de la lunette et cinq en position II ; on fait tourner le cercle gradué entre chaque groupe de mesures d'environ 67 gon pour les théodolites optico-mécaniques, on le fait tourner sur son embase d'environ 133 gon ou on change sa position sur son trépied dans le cas de théodolites électroniques, etc.

Après plusieurs années d'utilisation, le topomètre détermine lui-même la précision pratique de son instrument : « l'écart type pratique » pourra alors être deux à trois fois supérieurs à « l'écart type constructeur » (précision deux à trois fois moins bonne). Par exemple, pour le Wild T2, le constructeur donne  $\sigma = \pm 2,5$  dmgon sur une visée ; usuellement on admet  $\sigma = \pm 5$  à 6 dmgon.

Les écarts types suivants sont donnés par les constructeurs pour les appareils les plus courants :

- théodolites : écart type sur la direction horizontale et sur l'angle vertical ;
- niveaux : écart type d'un cheminement avec double nivellement sur 1 km ;
- distancemètres : écart type sur la distance inclinée suivant la visée, en millimètre et ppm (partie par millions ou mm par km).

### 12.3.6.4 Écart type d'une somme algébrique

Soit la fonction :  $F = X + Y - Z$ . On remarque que :  $f'_X = f'_Y = -f'_Z = 1$ . Donc la loi de composition donne :  $\sigma_F^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2$ ; d'où :

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2}$$

Quand les termes de la somme algébrique ont la même précision  $\sigma$ , s'il y a  $n$  termes :

$$\sigma_F = \sigma\sqrt{n}$$

### 12.3.6.5 Écart type d'un produit

Soit la fonction :  $F = X.Y$ ; on a :  $f'_X = Y$  et  $f'_Y = X$ .

Donc :  $\sigma_F^2 = \sigma_X^2.Y^2 + \sigma_Y^2.X^2$  soit :

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_X^2.Y^2 + \sigma_Y^2.X^2}$$

### 12.3.6.6 Écart type d'un produit de fonctions

Soit la fonction  $F = f(X) \cdot g(Y)$ , la dérivée de  $F$  par rapport à  $X$  est  $f'_X \cdot g(Y)$ . De même, la dérivée de  $F$  par rapport à  $Y$  est  $g'_Y \cdot f(X)$ .

D'où :

$$\sigma_F^2 = (f'_X)^2 \cdot (g(Y))^2 \cdot \sigma_X^2 + (g'_Y)^2 \cdot (f(X))^2 \cdot \sigma_Y^2$$

Exemple : pour  $F = X \cdot \sin Y$  on obtient  $\sigma_F^2 = \sigma_X^2 \cdot \sin^2 Y + \sigma_Y^2 \cdot X^2 \cdot \cos^2 Y$ .

## 12.4 Applications

### 12.4.1 Triangulation

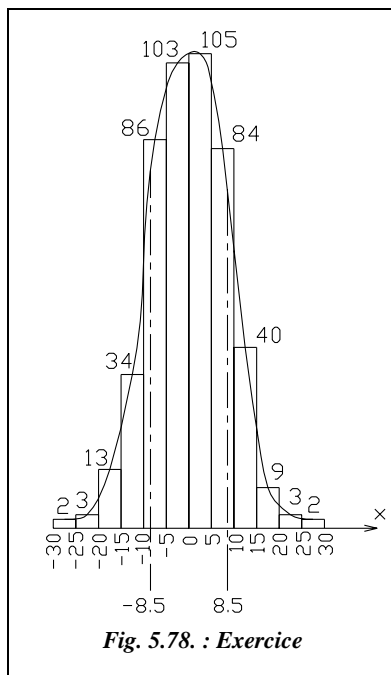
Dans cet exercice, nous étudions l'erreur de fermeture angulaire de 484 triangles de l'ancienne triangulation de la France. On a obtenu :

- 243 erreurs de fermetures positives ;
- 241 erreurs de fermetures négatives ;
- la somme des erreurs positives est égale à 1 614,4 dmgon ;
- la somme des erreurs négatives est égale à 1 611,2 dmgon.

La répartition est donnée par le tableau suivant : par exemple, 34 erreurs négatives sont comprises entre 10 et 15 dmgon.

0 dmgon	5	10	15	20	25	30
+	105	84	40	9	3	2
-	103	86	34	13	3	2

Pour représenter graphiquement cette répartition (fig. 5.78.), on porte sur un axe horizontal les divisions  $-30$  dmgon,  $-25$ , ...,  $0$ , ...,  $+25$ ,  $+30$  dmgon et on construit sur chaque base un rectangle ayant pour hauteur le nombre des erreurs : la surface de ces rectangles est donc proportionnelle au nombre des erreurs.



### Énoncé

Déterminez la courbe laissant des aires égales à l'intérieur et à l'extérieur de chaque rectangle. L'écart type est de  $8,5$  dmgon (on ne peut le calculer ici car on n'a pas les écarts exacts mais des « fourchettes d'écarts » : on obtiendrait  $8,7$  dmgon en prenant les écarts moyens :  $2,5$  ;  $7,5$  ;  $12,5$  ;  $17,5$  ;  $22,5$  ;  $27,5$  dmgon). Vérifiez graphiquement que l'aire encadrée par les droites d'abscisse  $+8,5$  et  $-8,5$  mgon est de  $68\%$  et qu'il reste  $16\%$  de part et d'autre.

### Réponse

L'aire délimitée par la courbe (fig. 5.78.) est de  $2420$  unités<sup>2</sup>.

L'aire comprise entre l'axe des abscisses, les droites d'abscisse  $-8,5$  et  $+8,5$  mgon et la courbe est de  $68\%$  ( $1640$  unités<sup>2</sup>).

Les droites d'abscisse  $-8,5$  et  $+8,5$  mgon ne passent pas exactement par les points d'inflexion de cette courbe car, le nombre d'essais étant petit, la courbe n'est pas exactement identique à la courbe théorique.

## 12.4.2 Résolution de triangle

### Énoncé

Dans un triangle de sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et de côtés opposés respectifs  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on connaît :

- $c = 2\,653,24$  m ;
- $\hat{A} = 58,5287$  gon ;
- $\hat{B} = 65,8652$  gon ;
- $\sigma_{\hat{A}} = 5$  dmgon ;
- $\sigma_{\hat{B}} = 5$  dmgon ;
- $\sigma_c = 12$  cm.

Déterminez l'écart type sur les côtés  $a$  et  $b$ , calculés à partir des données précédentes.

**Réponse**

Les relations suivantes donnent  $a$  et  $b$  :  $a = c \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})}$  et  $b = c \frac{\sin \hat{B}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})}$

On obtient donc, après simplifications :

$$(\sigma_a)^2 = \left[ \sigma_c \frac{\sin \hat{A}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})} \right]^2 + \left[ c \frac{\sin \hat{B}}{\sin^2(\hat{A} + \hat{B})} \sigma_{\hat{A}} \right]^2 + \left[ c \frac{\sin \hat{A} \cdot \cos(\hat{A} + \hat{B})}{\sin^2(\hat{A} + \hat{B})} \sigma_{\hat{B}} \right]^2.$$

On obtient une relation identique pour  $\sigma_b$ , en permutant  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$ .

Application numérique :  $\sigma_a = 10,4$  cm et  $\sigma_b = 11,2$  cm.

Le terme prépondérant est ici l'écart type de mesure de la base  $c$ . Finalement, on peut écrire :

$$a = 2\,274,88 \text{ m} \pm 10 \text{ cm} ; b = 2\,459,23 \text{ m} \pm 11 \text{ cm} ; \hat{C} = 75,6061 \text{ gon} \pm 7 \text{ dmgon}.$$

**12.4.3 Nivellement trigonométrique****Énoncé**

La dénivelée entre deux points A et B a été mesurée par nivellement trigonométrique.

On connaît :  $\sigma_D = 2$  cm ,  $\sigma_V = 2$  mgon et  $\sigma_{ht} = \sigma_{hr} = 5$  mm.

Déterminez l'écart type sur cette dénivelée.

Les observations sont les suivantes :

Stations	Points visés	$D_i$ (m)	$V$ (gon)	$h_r$ (m)	$\Delta H$
A ( $h_i = 1,530$ m)	B	325,620	98,9542	1,600	5,279
B ( $h_i = 1,559$ m)	A	325,582	101,0250	1,600	5,283

**Réponse**

L'écart type sur la dénivelée est déterminé comme suit :

- dénivelée de A vers B :  $\Delta H_{A \rightarrow B} = H_B - H_A = ht + Di \cdot \cos V - hr$   
 $(\sigma_{\Delta H_{A \rightarrow B}})^2 = (\sigma_{ht})^2 + (\sigma_D \cdot \cos V)^2 + (Di \cdot \sin V \cdot \sigma_V)^2 + (\sigma_{hr})^2 = 12,4$  mm.
- dénivelée de B vers A : même calcul avec les valeurs lues en station en B :  
 $\sigma_{\Delta H_{B \rightarrow A}} = 12,4$  mm.
- dénivelée moyenne :  $\Delta H_{AB} = (\Delta H_{A \rightarrow B} - \Delta H_{B \rightarrow A}) / 2$  et  $(\sigma_{\Delta H}) = 12,4 / \sqrt{2} \approx 9$  mm.

Le terme prépondérant de ces incertitudes est l'écart type sur la lecture angulaire de l'angle zénithal  $V$ .

Finalement, on peut écrire:  $\Delta H_{AB} = 5,282 \text{ m} \pm 9 \text{ mm}$ .



## 12.4.4 Polygonation

### Énoncé

Un opérateur effectue une polygonation pour laquelle la précision exigée est :

- angle donnés à  $\pm 2$  mgon près.
- précision relative en distance :  $1/5\ 000$ .

L'opérateur ne dispose que d'un théodolite dont l'écart type constructeur sur une visée est de 3 mgon et d'un ruban de 100 m de classe II et d'écart type 2 cm.

Déterminez combien de fois il lui faudra réitérer chaque mesure d'angle et de distance pour obtenir la précision exigée, la distance entre sommets étant de 80 m. Même question avec un ruban de 50 m de même écart type.

### Réponses

- Un angle  $H_z$  est issu à chaque sommet de deux lectures angulaires effectuées avec un écart type de 3 mgon. L'écart type sur la mesure d'un angle est donc de  $3 \cdot \sqrt{2} = 4,2$  mgon. Pour obtenir un écart type de 2 mgon, il faut répéter cinq fois ( $n = 4,2^2 / 2^2$ ) la lecture de chaque angle, donc il faut dix lectures angulaires par station ou par exemple cinq paires de séquences.
- Pour une distance moyenne de 80 m entre sommets, l'écart type autorisé est de  $(80 / 5\ 000)$  soit 1,6 cm. Avec un ruban de 100 m et d'écart type 2 cm, il faut répéter chaque mesure linéaire deux fois ( $2^2 / 1,6^2$ ).
- Si le ruban est limité à 50 m, chaque mesure demande deux portées, l'écart type de chaque mesurage est donc de  $2 \cdot \sqrt{2} = 2,8$  cm, valeur à laquelle il faut théoriquement ajouter une erreur d'alignement. Il faut alors répéter chaque mesurage trois à quatre fois ( $2,8^2 / 1,6^2$ ).



# ANNEXES

## 1 OUTIL INFORMATIQUE

Le cédérom livré avec cet ouvrage contient tous les fichiers informatiques auxquels il a été fait référence.

Le fichier LISEZMOI.HLP du cédérom détaille :

- le mode d'emploi du cédérom et l'accès aux divers fichiers ;
- les conventions et notations de chaque type de documents.

Le fichier LISEZMOI.DOC est une version destinée à une sortie papier (format Word).

### 1.1 Utilisation du cédérom

Le matériel minimal nécessaire pour utiliser confortablement les fichiers proposés est le suivant :

- pour le QBASIC : compatible PC du type 486 avec un DOS ultérieur au 5.0 ;
- pour AutoCAD LT : compatible PC du type pentium, 32 MO de RAM, Windows 95 ;
- pour EXCEL : compatible PC du type pentium, 16 MO de RAM, Windows 95.

À partir de Windows, double-cliquez sur le fichier LISEZMOI.HLP situé sur la racine du cédérom et suivez ses instructions.

### Remarque

L'ensemble de cet ouvrage a été mis au point au moyen des logiciels Word et Excel. La mise en page finale a été réalisée sur FrameMaker. Tous les schémas ont été réalisés sur AutoCAD LT (ils sont proposés sur le cédérom).

## 1.2 Tableur

Le tableur utilisé est Excel de Microsoft (version ultérieure à 5.0c). Il a été choisi pour ses qualités de convivialité et sa grande puissance de calcul. La version 5 marque le début de la programmation des macro-fonctions en Visual Basic : c'est pourquoi nous avons choisi cette dernière de façon que les fichiers réalisés restent utilisables par les versions ultérieures... (Excel 7, depuis 1995, puis Excel 97). Notez que depuis Excel 7, les programmes écrits sous Excel 5 sont automatiquement traduits en anglais.



Le symbole ci-contre marque dans l'ouvrage tout paragraphe dans lequel il est fait référence à Excel. Pour voir la liste des tableaux fournis sur le cédérom, leur utilisation et les fonctions programmées qui sont ajoutées au jeu de fonctions d'Excel, lisez le fichier LISEZMOI.HLP.

Les tableaux de l'ouvrage respectent la convention suivante : données en bleu et en caractères droits, résultats de calculs en rouge et en italique. Le séparateur des décimales choisi est la virgule, bien que le point du clavier numérique soit souvent préférable dans la pratique d'Excel.

### Attention

Certains calculs du livre peuvent paraître faux si vous les vérifiez avec une calculatrice. Ceci peut venir du fait que le tableur n'arrondit aucun chiffre alors que les résultats intermédiaires que vous voyez sont arrondis. Si vous vérifiez les calculs sur les tableaux fournis, vous devez trouver exactement le même résultat (si ce n'était pas le cas, veuillez nous le signaler). Dans certains cas, une valeur est volontairement arrondie par la fonction `ARRONDI()` d'Excel, par exemple, pour un calcul en retour de polygonale ou pour des calculs de gisements définitifs à partir des coordonnées d'un point déterminé graphiquement.

Le tableau suivant donne la liste des exercices utilisant Excel dans l'ouvrage.

<b>Tome, chapitre</b>	<b>Paragraphe</b>	<b>Exercices</b>
Tome 1, chap. 3	§ 5.2.4.	Programmation d'un gisement dans un tableau
Tome 1, chap. 4	§ 2.3.6.	Tableau de résolution par approximations successives
Tome 1, chap. 5	§ 1.2.7.3.	Écriture d'un tableau de calcul de régression linéaire
Tome 2, chap. 1	§ 9.5.	Résolution d'une insertion avec le solveur d'Excel
	§ 10.1.5.	Écriture d'un tableau de calcul d'excentrement
	§ 10.3.3.	Transformation à sept paramètres avec le solveur
Tome 2, chap. 2	§ 1.5.1.	Écriture d'un tableau de calcul de polygonale
Tome 2, chap. 5	§ 8.2.6.	Écriture d'un tableau de changement de repère
	§ 11.2.3.	Résolution par approximations successives

Les tableaux suivants donnent, par ordre d'apparition dans l'ouvrage, les différents tableaux de calcul d'Excel auxquels il a été fait référence.

<b>Contenu</b>	<b>Fichier (.XLS)</b>	<b>Chapitre, §</b>
		<b>Tome 1</b>
Transformations de coordonnées	COORDON	2 § 3.4. et 4 § 7.1.6.
Calculs d'altérations linéaires et angulaires	ALTERAT	2 § 3.4. et 4 § 7.1.6.
Réduction d'un tour d'horizon	REDUCHZ	3 § 4.4. et 6.8.
Calcul de gisement	GISEMENT	3 § 5.2.4.
Calcul de GO moyen de station	GOSTAT	3 § 6.6. et 6.8.
Calcul de point inaccessible	PTINAC	3 § 7.4. et 8 § 2.4.3.
Gestion de l'ensemble des tableaux	MENUTOPO	4 § 7.1.6.
Réduction à la projection de distances mesurées	DISTANCE	4 § 7.3.
Carnet de nivellement direct ordinaire mixte	NIMINAK	5 § 1.5. et 1.6.
Carnet de nivellement direct de précision mixte	NIMINA2C	5 § 3.4.
Calcul de point nodal de nivellement ordinaire	NODALNO	5 § 1.7.3.
Calcul de point nodal de nivellement de précision	NODALNP	5 § 1.7.3.
Carnet de nivellement indirect trigonométrique	NIVINDT	6 § 8.2.
Carnet de nivellement indirect géodésique	NIVINDG	6 § 8.2.
Ondulations du Géoïde sur l'ellipsoïde Clarke 80	GEOIDE	7 § 1.4.
Calcul de clothoïde (tableau d'implantation)	CLOTHO	9 § 6.2.9.

Contenu	Fichier (.XLS)	Chapitre, §
		<b>Tome 2</b>
Calcul d'un point par insertion ou recoupement	TRIANGU	1
Résolution graphique d'une multilatération	FICHLAT	1 § 4.3.
Résolution graphique d'une intersection	FICHINT	1 § 5.3.
Résolution graphique d'un relèvement	FICHREL	1 § 6.3.
Calculs de relèvements doubles	RELDUO	1 § 7.1.3. et 7.3.3.
Calcul de station excentrée	EXCENT	1 § 10.1.
Transformation de Helmert, changement de repère	HELMERT	1 § 10.3. et 5 § 8.2.6.
Calcul de cheminement polygonal	POLYGO	2 § 1.5.
Calcul de point nodal	NODALXY	2 § 2.3.1.
Résolution de triangles	TRIANGLE	5 § 4.3.8.
Calcul de surfaces	SURFACES	5 § 6.6.2.

### 1.3 Dessin assisté par ordinateur

Le logiciel choisi, AutoCAD LT, ou AutoCAD pour portables (LapTop) qui est une version allégée d'AutoCAD, est suffisant pour effectuer toutes les constructions graphiques proposées dans l'ouvrage. Il suffit également pour la majorité des dessins de base du topographe. Son prix abordable et son intégration au monde Windows s'ajoutent au fait qu'AutoCAD est le logiciel de DAO le plus répandu actuellement en bâtiment et travaux publics.

La version complète d'AutoCAD permet de programmer des fonctions complémentaires en LISP qui facilitent le travail d'habillage du dessinateur. Le logiciel ADTOPO, par exemple, adjoint à AutoCAD des outils tels que la lecture de certains carnets de terrain, le tracé de carroyage, de talus, de courbes de niveau, et de profils en long et en travers, le calculs de cubatures, la gestion de bibliothèques de symboles, etc.



Le symbole ci-contre marque une référence à AutoCAD LT.

Cet ouvrage ne constituant pas un apprentissage de ce logiciel, nous considérons que les notions de base sont acquises : utilisation générale, notions de systèmes de coordonnées, choix d'objets, accrochages, etc.

#### 1.3.1 Conventions d'écriture pour les exercices proposés

Les références aux commandes et menus d'AutoCAD LT sont en majuscule et en italique, de même que toutes les options de commandes ou les entrées de coordonnées, à savoir :

- les commandes sont en majuscules et en italique terminées par le caractère ENTRÉE symbolisé par ↵ (exemple : *LIGNE*↵) ;
- les valeurs ou coordonnées entrées sont en italique (exemple : @120 < 36.321↵) ;
- le séparateur décimal est le point, la virgule sert à séparer les coordonnées (x, y, z) ;
- les accrochages sont repérés par les lettres majuscules servant de raccourcis clavier (exemple : *EX*Trémité) ;
- les options de commande sont indiquées par la (les) lettre(s) de l'option en italique (exemple : *R*éférence↵) ;
- les références aux menus sont indiquées par leurs noms et imbrications (exemple : MODES / CONTROLE DES UNITES) ;
- le caractère □ représente la touche **ESPACE** (équivalente à ENTRÉE sur AutoCAD).

#### Attention

**Le séparateur des décimales est le point ;** la virgule sert à séparer les coordonnées (x, y, z). Cette difficulté, qui vient des habitudes anglosaxones, implique une certaine confusion dans le texte de l'ouvrage car pour les autres chiffres, nous avons conservé la notation française dans laquelle le séparateur des décimales est la virgule.

### 1.3.2 Bibliothèque de symboles topographiques

Une bibliothèque de symboles topographiques est associée au livre. Elle se trouve sur le cédérom et son installation s'effectue par simple copie (voir le fichier LISEZMOI.HLP). Cette bibliothèque s'utilise à partir d'un fichier menu TOPO.MNU. Le chargement de ce dernier dans AutoCAD ajoute aux menus déroulants un menu à icônes permettant une utilisation facile de la bibliothèque installée sur le disque dur. Ce menu modifié donne aussi accès à quelques macro-fonctions et utilitaires comme le dessin de formats normalisés en espace-papier ou en espace-objet.

Certains autres dessins ont été joints (hors bibliothèque), par exemple :

- |  |         |               |
|--|---------|---------------|
| • un rapporteur sur papier                     | fichier | RAPPORT.DWG ; |
| • une carte de la projection Lambert en France | fichier | LAMBERT.DWG ; |
| • une carte du géoïde sur la France            | fichier | GEOIDE.DWG.   |

### 1.3.3

### Liste des exercices proposés sur AutoCAD LT 95

Chapitre	Paragraphe	Exercices
<b>Tome 1</b>		
Chapitre 3	§ 5.3.	Calcul graphique d'un gisement.
	§ 6.8.2.	Semis de points pour les calculs de dV et G0moyen.
Chapitre 8	§ 6.2.2.	Auscultation d'ouvrages (résolution graphique).
Chapitre 9	§ 2.5.	Calcul graphique d'un tableau d'implantation de points.
	§ 5.2.4.	Calcul graphique d'un raccordement circulaire double.
	§ 5.3.3.	Raccordement circulaire à inflexion.
	§ 5.4.2.2.	Tableau de piquetage de courbe.
	§ 5.5.	Tableau d'implantation de raccordement circulaire.
	§ 6.2.9.1.	Raccordement progressif entre alignements (clothoïde).
	§ 6.2.9.2.	Raccordement progressif entre deux cercles (clothoïde).
Chapitre 10	§ 1.6.	Digitalisation (AutoCAD version complète).
	§ 2.4.	Tracé d'un profil en long et de profils en travers.
	§ 2.5.2.2.	Points d'entrée en terre d'un terrassement.
<b>Tome 2</b>		
Chapitre 1	§ 4.3.	Résolution graphique d'une multilatération.
	§ 5.3.	Résolution graphique d'une intersection.
	§ 6.3.	Résolution graphique d'un relèvement.
	§ 7.2. et 7.3.	Calcul graphique d'un relèvement double.
	§ 7.4.	Calcul graphique d'un relèvement triple.
	§ 10.1.5.	Résolution graphique d'un excentrement.
	§ 10.2.3.	Vérification graphique d'un rabattement.
Chapitre 2	§ 1.5.	Construction d'une polygonale et ajustement graphique.
	§ 1.7.	Calcul graphique d'une polygonale et calcul de stations intermédiaires alignées.
	§ 2.3.2.	Calcul graphique d'un point nodal en planimétrie.
Chapitre 3	§ 1.2.2.	Calcul de surface.
	§ 2.1.1.	Partage d'un polygone par une limite issue d'un sommet.
	§ 2.3.1.	Partage d'un triangle en trois surfaces.
	§ 2.4.	Division d'un quadrilatère en 4 surfaces égales.
	§ 2.5.1.	Division d'un triangle avec limite parallèle à un côté.
	§ 3.3.	Redressement de limite.
Chapitre 4	§ 1.4.	Intersection de deux droites.
	§ 3.1.	Droites tangentes à un cercle.
	§ 3.2.	Droites tangentes à deux cercles.
	§ 5.1.	Cercle défini par trois points.



	§ 5.2.	Cercle défini par deux points et la tangente en l'un d'eux.
	§ 5.3.	Cercle passant par deux points et tangent à une droite.
	§ 5.4.	Cercle donné par un point, un rayon et une tangente.
	§ 5.5.	Cercle défini par deux tangentes et son rayon.
	§ 5.6.	Cercle défini par un point et deux tangentes.
	§ 5.7.	Cercle défini par trois tangentes.
	§ 5.9.	Cercle défini par deux points et son rayon (ou une flèche).
	§ 6.4.	Construction graphique d'un point relevé.
Chapitre 5	§ 4.3.6.	Résolution graphique d'un triangle.
	§ 6.6.3.	Mesures de surfaces.
	§ 8.2.7.	Changement de repère.
	§ 9.5.	Détermination graphique de caractéristiques de droites.
	§ 11.2.5.	Construction de la perpendiculaire à un alignement.

## 1.4 Programmes en basic standard



Les programmes fournis sur le cédérom sont écrits pour le QBASIC du DOS (à partir de la version 5.0). Ils sont fractionnés en plusieurs sous-programmes dont les noms sont donnés dans l'ouvrage. Le symbole ci-contre marque une référence au QBASIC.

Bien que les numéros de ligne ne soient pas nécessaires en QBASIC, ils sont indiqués dans les listings du livre en vue d'une programmation sur calculatrice. Chaque listing comporte une partie explicative écrite en italique à droite du listing en regard des lignes concernées.

Ce procédé de calcul étant démodé depuis l'arrivée des tableurs et autres logiciels de DAO, il est inutile de programmer la mise en page des résultats ou la saisie des données. Leur présentation est donc austère ; ils sont donnés simplement pour les algorithmes qu'ils contiennent.

Le but de ces programmes est leur utilisation éventuelle avec des calculatrices ou avec des ordinateurs portables peu puissants et ne pouvant exploiter les tableurs ni la DAO.

Chaque programme est proposé sous forme de fichier d'extension .BAS pour QBASIC et sous forme de fichier texte (extension .TXT) pour être chargé dans les calculatrices possédant une interface avec un ordinateur (voir le fichier LISEZMOI.HLP pour la liste des programmes et les listings fournis sur le cédérom).

## Programmes cités dans le livre

Le tableau suivant donne la liste des programmes cités dans l'ouvrage.

Contenu	Fichier .BAS	Chapitre, §
		<b>Tome 1</b>
Programmation du calcul de gisement en BASIC	GISEMENT	3 § 5.2.2.
Calcul de <i>G</i> 0moyen de station	GOSTAT	3 § 6.7.
Point inaccessible	PTINAC	8 § 2.4.3.
		<b>Tome 2</b>
Calcul d'insertion par les moindres carrés	TRIANGU	1 § 9.5.
Programmation des calculs du chapitre droites et cercles	INTERS	4 § 7.
Résolution de triangles	TRIANGLE	5 § 4.3.7.
Calculs de surfaces	SURFACES	5 § 6.6.1.
Changement de repère	ROTATRAN	5 § 8.2.5.
Interpolation linéaire	-	5 § 9.1.2.
Résolution par approximations successives	-	5 § 11.3.3.

## 1.5 Calculatrice programmable



Il est fait parfois référence à la calculatrice FX 850P de CASIO (ou modèle équivalent) car elle est programmable en BASIC standard et les programmes listés dans l'ouvrage peuvent être très facilement adaptés à cette machine. Si vous disposez de l'interface de liaison à un ordinateur, vous pouvez utiliser les listings de ces programmes qui sont fournis en format texte (fichiers .TXT du répertoire BASIC installé sur votre disque). La notation utilisée distingue les frappes alphanumériques au clavier (en majuscule) des touches de fonction comme [EXE] ou [ANS] (entre crochets).

Cette calculatrice est très complète et facile à programmer car elle utilise le BASIC standard ; son prix reste du même ordre que celui des calculatrices graphiques qui présentent peu d'intérêt en topographie.

Le tableau suivant liste les exercices proposés sur l'utilisation ou la programmation de calculatrices.

Tome, chapitre, paragraphe	Contenu
Tome 1, chapitre 3, § 5.2.	Calcul de gisement.
Tome 2, chapitre 5, § 8.1.1.	Conversion de coordonnées.
Tome 2, chapitre 5, § 11.2.2.	Résolution par approximations successives.

## 2 BIBLIOGRAPHIE

### **Publications de l'IGN (Institut géographique national)**

(2, Av. Pasteur, B.P. 68, 94160 Saint Mandé)

- WILLIS P., *Thèse sur la mesure de phase en GPS* (1989).
- DUQUENNE F., *Guide de l'utilisateur du GPS* (1994).
- DUQUENNE H., *Champ de pesanteur, géoïde et altimétrie : concepts fondamentaux* (1997), publication du LAREG (Laboratoire de Recherche et de Géodésie).
- Publications sur le site internet ([www.ign.fr](http://www.ign.fr)) et notes techniques diverses.

### **Documents édités par l'AFT (Association française de topographie)**

(136 bis, rue de Grenelle, 75700 Paris)

- *Lexique topographique* (publié dans la revue XYZ).
- Revue XYZ.
- LEVALLOIS F., 300 ans de géodésie française (1995).

### **Documents édités par l'Ordre des géomètres experts**

(13, rue Léon Cogniet, 75017 Paris)

- VIALARD et NISSE, *Précis de calculs topométriques* (1982).
- Revue *Géomètre*.

### **Livres édités par les éditions Eyrolles**

[www.eyrolles.com](http://www.eyrolles.com)

- VILLESUZANNE D., *Topométrie générale* (1988), épuisé.
- LAPOINTE et MEYER, *Topographie appliquée* (1986), épuisé.
- BRABANT M., *Topométrie opérationnelle* (1980), épuisé.
- DURBEC G., *Cours de topométrie générale* (1975), épuisé.
- D'HOLLANDER R., *Topographie générale* (1971), épuisé.

### **Autres éditeurs**

- DUQUENNE, WILLIS, etc., *GPS : localisation et navigation*. Hermes (1996).
- KRAUS, WALDHÄUSL, *Manuel de photogrammétrie*. Hermes (1998).
- VILLESUZANNE D., *Canevas ordinaires : implantations*. L'école chez soi (1991).
- SPOT, *des yeux braqués sur la terre*. Presses du CNRS (1989).
- LAUZON et DUQUETTE, *Topométrie générale*. École Polytechnique Montréal (1980).

### Éditions STU

(Services techniques de l'urbanisme, ministère de l'Urbanisme et du Logement)

- *Gestion des plans : les canevas topographiques* (1983).
- *Environnement et aménagement, cartes utiles : le recueil de données cartographiques* (1983).
- *Environnement et aménagement : l'usage des photographies aériennes* (1983).

### Documents divers

- D'HOLLANDER R., *Cours de topographie de l'ESTP*, document de cours non édité.
- *Rapports techniques sur les niveaux numériques*. Leica (1991).
- LABORDE M., *Manuel de topographie et topométrie*. École nationale des sciences géographiques (1984).
- ICTAVRU du Centre d'études des transports urbains. Ministère de l'Équipement (1990).

### Adresses internet

- **Serveur de l'IGN** <http://schubert.ign.fr>  
[www.ign.fr](http://www.ign.fr)
- **Paramètres de transformation** de coordonnées :  
<ftp://schubert.ign.fr/CIAG/index.CIAG.html>
- **Inventaire des matériels et logiciels GPS (IGN)** : <http://www.cnig.fr>
- **SPOTimage** [www.spotimage.fr](http://www.spotimage.fr)
- **Autodesk** [www.autodesk.com](http://www.autodesk.com)
- **Microsoft** [www.microsoft.com](http://www.microsoft.com)
- **Géomètres sans frontières** <http://www.geometre.iplus.fr/gsf>

## 3 NOTATIONS USUELLES DE L'OUVRAGE

Tout au long de l'ouvrage, les variables utilisées dans le texte sont mises en italique de manière à les distinguer du corps du texte. Le tableau ci-dessous récapitule ces notations.

Notation préconisée	Autre notation	Unité usuelle	Signification
<i>A</i>		m	paramètre d'une clothoïde.
<i>a</i>		m	demi grand axe d'ellipse ou coefficient directeur d'une droite ou côté d'un triangle.
<i>b</i>		m	demi petit axe d'ellipse ou ordonnée à l'origine d'une droite ou côté d'un triangle.

Notation préconisée	Autre notation	Unité usuelle	Signification
$CG, CD$		gon	lectures angulaires en cercle à gauche et cercle à droite.
$Cna$		m	correction de niveau apparent.
$dv$	$rc$	dmgon	correction de réduction à la corde.
$Di, Dp$		m	distance inclinée suivant une visée, distance suivant la pente.
$Dh$		m	distance en projection horizontale sur le terrain.
$Dn$	$\Delta Z, \Delta h, \Delta H$	m	dénivelée mesurée sur la normale au Géoïde ou à l'ellipsoïde.
$Do, Dr$		m	distance sur l'ellipsoïde ( $Do$ ) et dans le plan de projection ( $Dr$ ).
$Emq, Rmq$		cm	écart moyen quadratique et rayon moyen quadratique.
$ei, ri$		mgon, cm	écarts angulaires ( $ei$ ) et écarts linéaires ( $ri$ ).
$E, N, H$	$X, Y, Z$	m	coordonnées Est et Nord en projection plane, $H$ étant l'altitude.
$f$		-	inverse de l'aplatissement d'un ellipsoïde ou flèche d'un arc.
$f_E, f_N$ $C_E, C_N$		cm	fermetures ( $f$ ) et compensations ( $C$ ) en coordonnées Est et Nord d'un cheminement polygonal.
$fa, Ca$		mgon	fermeture et compensation angulaire d'un cheminement polygonal.
$f_L, f_D$		cm	fermetures en longueur et en direction d'un cheminement polygonal.
$f_H, C_H$		cm	fermeture et compensation altimétrique d'un nivellement.
$G0$	$V0$	gon	gisement moyen de station ou $G0$ de station.
$Gij$	$Vij$	gon	gisement de la direction $ij$ .
$Gapp$		gon	gisement approché d'une visée.
$Gobs$		gon	gisement observé d'une visée.
$ht$		mm	hauteur des tourillons d'un appareil en station.
$hv$	$hm$	mm	hauteur de voyant (ou miroir ou graduation visée sur la mire).
$H$	$Z$	m	altitude d'un point en référence au Géoïde.
$Hg, Hd$		gon	angles horizontaux de gauche ou de droite d'un cheminement polygonal.
$H_z$		gon	angle horizontal (différence de lectures angulaires).
$i, n$		gon	angle de site et angle nadiral (angles verticaux).
$kr$		-	coefficient d'altération linéaire.
$k$		-	coefficient d'une homothétie.
$K$		-	constante stadimétrique d'une lunette.
$L$		m	longueur d'un raccordement progressif.
$L_j$		gon	lecture angulaire horizontale sur le point $j$ .
$L_v, L_r$		gon	lectures angulaires avant et arrière dans un cheminement polygonal.
$m, m_1, m_2$		mm	lectures sur mire (fil niveleur, fil stadimétrique inférieur et supérieur).
$m$		mm	module linéaire ou lecture sur fil niveleur.

Notation préconisée	Autre notation	Unité usuelle	Signification
$mra$	$k$	-	module de réfraction atmosphérique.
$p$		...	pente (%) ou demi-périmètre d'un polygone (m).
$P$	-	-	Point nodal (NP : point nodal principal ; NS : point nodal secondaire)
$q$		-	coefficient de niveau apparent.
$r$		m	distance d'excentrement ou rayon polaire.
$r, \alpha$		m, gon	coordonnées polaires : distance puis angle.
$\mathcal{R}$		m	rayon d'un parallèle en projection plane.
$R_N$		m	rayon de la sphère la plus proche d'un ellipsoïde.
$rx, ry, rz$		radian	angles de rotation dans un changement de repère.
$S$		m <sup>2</sup>	surface.
$s, t$		cm	sensibilité d'une visée, demi-plage d'indécision d'une visée.
$tx, ty, tz$		m	composantes d'un vecteur de translation.
$T, \sigma$		cm	tolérance, écart type.
$V$	$z$	gon	angle zénithal (angle vertical affiché par la plupart des théodolites).
$X, Y, Z$		m	coordonnées géocentriques.
$\Delta$	$N$	m	ondulation du Géoïde (hauteur au-dessus de l'ellipsoïde Clarke 80).
$\Delta hi$		m	dénivelée instrumentale.
$\lambda, \varphi, h$		degré	coordonnées géographiques (ou géodésiques).
$\rho, v$	$\rho, N$	m	petite et grande normale d'un ellipsoïde.
$\gamma$		gon	convergence des méridiens.
$\Gamma$		m <sup>-1</sup>	courbure (inverse du rayon).
$(I, J)$		-	segment capable IJ.
$\Gamma j$		-	segment distance issu du point J.

### Remarque

D'après l'AFT (Association Française de Topographie), les termes modules, correction et coefficients sont définis ainsi :

- module ( $m$ ) : c'est un coefficient voisin de 1 qui permet d'obtenir une valeur corrigée à partir d'une valeur initiale (une mesure par exemple).
- correction ( $c$ ) : c'est une quantité (positive ou négative) à ajouter à une valeur mesurée pour obtenir une valeur corrigée.
- coefficient ( $k$ ) : c'est une valeur souvent proche de 0 (zéro) en relation avec un module associé de valeur  $m \approx k + 1$ .