OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES

4ème ANNEE INDUSTRIELLE

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur au Cameroun

LES GRANDS PROFS DE MATHS

AVANT-PROPOS

La collection « Les grandprofs de maths» , après trois éditions de supports pédagogiques pour l'enseignement secondaire général, a choisi cette année de produire des documents pour l'enseignement secondaire technique au Cameroun.

Lancés officiellement le 02/07/2021 pour s'arrêter en septembre 2021, cet ouvrage et toute la collection dans les sections industrielles et sciences de technologie et de tertiaire sont le fruit du travail d'un groupe d'enseignants dévoués qui ont décidé de mettre leur professionnalisme au service du publique; ils sont réunis autour de deux forums à savoir : ''Les grandprofs de maths'' et ''Profmaths Lytech & CETIC''.

Dans la mesure où il se pose avec acuité un réel problème de manuel de mathématiques dans l'enseignement technique, les documents de cette collection arrivent à point nommé pour donner un coup d'oxygène dont ce milieu en avait besoin. Sa conformité avec le programme en vigueur au Cameroun viendra remettre de l'ordre dans le processus enseignement/apprentissage dans cette section où les mathématiques sont un outil indispensable pour une installation optimale des ressources des matières professionnelles.

Cette édition 4 n'aurait jamais vu le jour sans la détermination d'un groupe d'enseignants. Une mention honorable est à décerner à l'un des administrateurs du forum ''Les grandprofs de maths'' *M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien*, qui n'a pas abandonné le projet des travaux dans l'enseignement technique après quelques tentatives infructueuses ; il a conduit à bon port les travaux de l'édition 4. Ce travail d'équipe doit son succès à tous les enseignants qui ont apporté leur contribution dans la réalisation des livres de cette édition. Ce serait ingrat de ne pas mentionner ces gladiateurs qui ont mis leur professionnalisme et précieux temps à contribution pour la fusion d'un livre de cette collection, dans ce volet, toutes nos félicitations à *Dr. KOUAKEP, M. TCHEUKO TCHOMI , M KPADJOUDA, M. MPENGSOUI AMARA HENRI, M. SIYAPDJE HENRI ,M. EWANE Fabrice et M. GUELA*. Nous remercions enfin *M. NGANDI Michel* pour la réalisation des jolies couvertures utilisées dans cette édition.

La perfection n'étant pas de ce monde, nous sollicitons l'indulgence des utilisateurs sur des éventuelles coquilles que pourraient contenir un livre de l'édition 4. Nous restons ouverts à toute critique constructive des utilisateurs à l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr .

Tous les enseignants ou passionnés des mathématiques désirant faire partir de la famille ''Les grandprofs de maths'' /« GPM » et disponible à participer aux futurs projets du groupe sont priés de bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : M. **Guela Kamdem Pierre** (697 473 953 / 678 009 612), M. **Pouokam Léopold Lucien** (696 090 236 / 651 993 749), M. **Tachago Wabo Wilfried Anders**on (699 494 671) et M. **NTAKENDO Emmanuel** (676 519 464).

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

Sous la supervision de **M. Léo Lucien Pouokam**, ont bénévolement travaillé les auteurs suivants :

No	Nom	Contact	Chapitre(s) réalisé(s)
1	ABDOULAYE NCHARE SOUFON	**693489464/ 67932589**	NOMBRES REELS
2	DJOKOKAYE JANVIER RODRIGUE	**677290153/697285961**	CALCUL LITTÉRAL
3	DOMTCHUENG HERMANN PATRICK	**695116475/ 675957731**	EQUATION INEQUATION SYSTEME
4	HAMADOU ROGER	**697180064**	STATISTIQUES
5	CHERIFAIN TOKO	**695798901**	APPLICATIONS AFFINES
6	WAMBA ROLIN CÉDRIQUE	**690.06.43.52/ 653.00.06.05**	THÉORÈMES DE THALES
7	DGOUMTSOP TINDO TELESPHORE.	**676401806/ 694986113**	TRIGONOMÉTRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE.
8	TOUALE STÈVE IGOR	**676269981 / 699014826**	HOMOTHÉTIE
9	OLOMO BASILE	**674404311/ 691171842**	VECTEURS
10	OUAFEU TOKAM GUY PAULIN	**676093969 / 695652841.**	CORDONNÉES D'UN VECTEUR:
11	MBA WAFO ALEXANDRE.	**679446655 / 655595681**	SECTION D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION PAR UN PLAN PARALLÈLE À LA BASE.
TD	**WAFO CALVIN**	693445317	TRAVAUX DIRIGES

Nous remercions tous les relecteurs anonymes ainsi que tout le groupe GPM pour leurs remarques.

Table des matières

MODULE N°13 : RELATIONS ET OPERATIONS FONDAMENTALES DANS L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

CHAPITRE 1 : LES NOMBRES REELS.

MOTIVATION :

En classe de troisième année, on a appris à calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les longueurs des deux autres côtés. Ainsi le calcul de longueur a amené les mathématiciens à définir la notion de racine carré d'un nombre positif.

LECON 1 : RACINES CARREES

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Reconnaitre et déterminer la racine carrée d'un nombre positif
- Transformer, effectuer des opérations, simplifier une expression comportant des racines carrées
- Reconnaitre un nombre réel et renforcer les acquis sur les nombres réels

PREREQUIS :

1) Complète les pointillés par le nombre qui convient : $...^2 = 25;\ ...^2 = 25;\quad \sqrt{(-26)^2}$.
   Réponse : $\mathbf{5^2 = 25;\ (-5)^2 = 25\ ;\ \sqrt{(-26)^2} = 26}$
2) Complète les pointillés par $\in ou \notin$: $25 \ldots \mathbb{N};\ -18 \ldots\ \mathbb{D};\ \frac{1}{4} \ldots\ \mathbb{Z}; 2022 \ldots \mathbb{Q}$. **Réponse :**
   $\mathbf{25} \in \mathbb{N}; \mathbf{-18} \in \mathbb{D};\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \notin \mathbb{Z}; \mathbf{2022} \in \mathbb{Q}$
3) Compare 1,24 et $-3{,}14$. **Réponse :** $\mathbf{1,24 > -3,14}$
4) Complète l'encadrement de π par deux nombres entiers naturels consécutifs.
   Réponse : $\mathbf{3 < \pi < 4}$

SITUATION PROBLÈME :

Madame passa a hérité d'un terrain carré. D'après les documents, l'aire est de 49 hectares. Elle souhaite connaitre le côté de ce terrain sans faire recours à un géomètre. Aide-la.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Un carré a pour aire $a\ cm^2$. Quelle est la longueur x du côté de ce carré lorsque :
   $x^2 = 49,\ x^2 = 1{,}44$?
2) Ecris sans radical $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}}\ et \sqrt{\frac{16}{9}}$; puis $\sqrt{16} \times \sqrt{9}\ et\ \sqrt{4 \times 9}$. Que constates-tu ?
3) Effectue les opérations suivantes : $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} =$ $\qquad \frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} =$
4) a) Trouve deux nombres dans $\mathbb{Q}$ vérifiant la relation $x^2 = 9$.

   b) Peux-tu trouver deux nombres rationnels vérifiant l'égalité $x^2 = 2$? Que peux-tu dire de l'ensemble $\mathbb{Q}$? Cette égalité peut-elle avoir des solutions dans un autre ensemble ? Si oui, lequel ?
5) a) Compare $4\ et\ 3\sqrt{2}$ en utilisant la calculatrice

   b) Comparer 4^2 et $(3\sqrt{2})^2$ et en déduire la comparaison de $4\ et\ 3\sqrt{2}$

   c) Sachant que : $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$, donne un encadrement de $3\sqrt{2}$

RESOLUTION :

1) Pour $x^2 = 49, x = \sqrt{49} = 7$ c'est-à-dire $x = 7\ cm$. De même pour $x^2 = 1.44, x = \sqrt{1,44}$ et donc $x = 1,2\ cm$

2) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{3^2}} = \frac{4}{3}\ et\ \sqrt{\frac{16}{9}} = \sqrt{(\frac{4}{3})^2} = \frac{4}{3}$. On constate que $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}}$.

$\sqrt{16} \times \sqrt{9} = 4 \times 3 = 12$ et $\sqrt{16 \times 9} = \sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$. On constate que $\sqrt{16} \times \sqrt{9} = \sqrt{16 \times 9}$

ATTENTION $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ et $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$. On constate que $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16 + 9}$

3) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{2}{1-\sqrt{3}} = \frac{2 \times (1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3}) \times (1+\sqrt{3})} = \frac{2(1+\sqrt{3})}{1-3} = -(1+\sqrt{3})$

4) a) $x^2 = 9\ équivaut$ à $x = 3\ ou\ x = -3$. Ces deux nombres sont -3 et 3.

b) On ne saurait avoir deux nombres rationnels vérifiant l'égalité $x^2 = 2$. Pour cela on construit un nouvel ensemble dans lequel cette égalité admet des solutions. Nous l'appellerons $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels

5) a) $3\sqrt{2} = 4,242640..$ donc $4 < 4,242640$

b) $4^2 = 16\ et\ (3\sqrt{2})^2 = 18, donc\ 4 < 3\sqrt{2}$

c) $1,41 < \sqrt{3} < 1,42$ entraine $3 \times 1,41 < 3 \times \sqrt{2} < 3 \times 1,42$ donc $4,23 < 2\sqrt{3} < 4,26$

Résolution de la situation problème :

Comme $49 = 7^2$,on conclut que le coté de ce terrain carré est de 7 hectares.

RESUME :

1. Définitions et propriétés

- On appelle **racine carrée** d'un nombre positif a, le nombre positif dont le carré est égal à a. La racine carré de a se note $\sqrt{a}$ et on lit **racine carrée de a**. le symbole $\sqrt{}$ s'appelle le radical
- Pour $a \geq 0$, on a : $(\sqrt{a})^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$; et pour $a < 0$, $\sqrt{a}$ n'existe pas.
- On appelle **carré parfait** le produit d'un entier par lui-même.

Exemple :

$$\sqrt{0} = 0;\ \sqrt{1} = 1;\ \sqrt{4} = 2;\ \sqrt{9} = 3;\ \sqrt{6,25} = 2,5;\ \sqrt{6^2} = 6;\ (\sqrt{13})^2 = 13$$

2. Operations sur les raciness carrées

- Pour tous nombres positifs a et b, $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- Pour tous nombres positifs $a\ et\ b$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ avec b non nul
- Pour a positif ou nul, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$
- a est un nombre positif et n un entier relatif non nul, on a:
  $\sqrt{a^{2n}} = a^n\ et\ \sqrt{a^{2n+1}} = a^n\sqrt{a}$

Exemple :

$$\sqrt{4} \times \sqrt{18} = \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{64} = 8;\ \sqrt{25 \times 36} = \sqrt{25} \times \sqrt{36} = 5 \times 6 = 30$$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3;\ \sqrt{\frac{169}{64}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{64}} = \frac{13}{8}$$

$\sqrt{a^4b^{15}c^8} = a^2b^7c^4\sqrt{b}$ avec a ; b et c tous positifs

- Pour tous nombres positifs a et b, les formules $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$ Par exemple $\sqrt{64}+\sqrt{25} = 8+5 = 13$ et $\sqrt{64+25} = \sqrt{89}$, or $13 \neq \sqrt{89}$. On conclut que $\sqrt{64}+\sqrt{25} \neq \sqrt{64+25}$

3. **Simplification (Règles)**

Pour simplifier une expression comportant des racines carrées, on peut:

- Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre sous le radical.
- Faire apparaitre le produit d'un carré parfait (le plus grand possible) par un entier

Exemple : Simplifie les expressions suivantes : $\sqrt{112}$; $\sqrt{8}$

$$\sqrt{112} = \sqrt{2^4 \times 7} = 2^2\sqrt{7} = 4\sqrt{7} \text{ et } \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\times\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

4. **Ecriture des quotients sans radical au dénominateur**

a et b étant deux nombres positifs,

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = (\sqrt{a})^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a-b$$

Ce résultat ne comporte pas de radical. On dit que $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ est **l'expression conjuguée** de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, et inversement

Exemple 1:

Expression	Expression Conjuguée
$2+\sqrt{5}$	$2-\sqrt{5}$
$\sqrt{11}-4$	$\sqrt{11}+4$
$\sqrt{13}-\sqrt{7}$	$\sqrt{13}+\sqrt{7}$

Règle: Pour écrire un quotient sans radical au dénominateur ou encore rendre rationnel le dénominateur d'une fraction, on multiplie son numérateur et son dénominateur par l'expression conjuguée de son dénominateur.

Exemple 2:

$$\frac{4}{3\sqrt{7}} = \frac{4(\sqrt{7})}{3\sqrt{7}(\sqrt{7})} = \frac{4\sqrt{7}}{21};\ \frac{3}{2+\sqrt{5}} = \frac{3(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \frac{6-3\sqrt{5}}{4-5} = -6+3\sqrt{5}$$

5. **Ensemble des nombres reels**

Les ensembles des nombres connus jusqu'ici sont: $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$. Lorsqu'on résout l'équation $x^2 = 2$, on a comme solution: $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$. En utilisant la calculatrice, $\sqrt{2} = 1{,}41421356237$. Ce nombre n'est pas rationnel, Il est par conséquent un nombre **irrationnel.** La réunion des ensembles des nombres rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des nombres **réels** noté $\mathbb{R}$. On conclut avec la chaine d'inclusion :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemple:

$0; \frac{7}{3}; \sqrt{13};\ -3.1234; \pi$ sont des nombres reels.

Propriétés de comparaison et d'encadrement des nombres réels

a et b étant deux nombres strictement positifs, on a:

- $a < b$ *signifie* $a - b < 0$
- $a = b$ *signifie que* $a - b = 0$
- $a < b$ *signifie que* $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

- $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$
- Si $a < b$ et c un réel, alors $a + c < b + c$
- Si $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- Si $a < b$ et c un nombre réel non nul .Alors $a \times c < b \times c$ si c est positif; et $a \times c > b \times c$ si c est négatif.

a, b, c, d, x et y étant des nombres positifs et, sachant que : $a < x < b$ et $c < y < d$, on a les encadrements suivants :

- Somme $x + y$: $a + c < x + y < b + d$
- L'opposé $-y$: $-d < -y < -c$
- La difference $x - y$: $a - d < x - y < b - c$
- Le produit xy: $ac < xy < bd$

NB : Ces résultats sont vrais si on remplace l'inégalité strict ($<$ *ou* $>$) par l'inégalité au sens large ($\leq$ *ou* $\geq$).

<u>Exemple :</u> $2 < \sqrt{5}$ équivaut à $2^2 < (\sqrt{5})^2$ donc $4 < 5$.

Un encadrement de $\sqrt{3} - 1$ lorsque $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$ est : $1{,}73 - 1 < \sqrt{3} - 1 < 1{,}74 - 1$ donc $0{,}73 < \sqrt{3} - 1 < 0{,}74$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1) Cite les carrés parfaits de la liste suivante : 901; 49; 27; 144; 18
2) Calcule : $\sqrt{10000}$; $\sqrt{0{,}0036}$; $\sqrt{16}$
3) Une sphère a pour aire 1256 cm^2. Quel est son rayon r? Prendre $\pi = 3{,}14$
4) Ecrire plus simplement: $\sqrt{75}$; $\sqrt{40} - \sqrt{160}$; $2\sqrt{500} + 3\sqrt{75}$: $\left(\sqrt{14}\right)^2$; $\frac{24\sqrt{18}}{9\sqrt{32}}$; $\sqrt{20} \times \sqrt{45} \times \sqrt{80}$
5) Ecris sans radical au dénominateur : $\frac{-10}{3\sqrt{5}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$
6) Donne un encadrement de $\frac{p}{q}$ (p et q positifs) lorsque : $1{,}5 < p < 3$ *et* $0{,}5 < q < 0{,}8$

RESOLUTION :

1) Les carrés parfaits sont: 49 et 81 car
$\sqrt{49} = 7$ *et* $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{10000} = 100$; $\sqrt{0{,}0036} = 0{,}06$; $\sqrt{16} = 4$
2) Calculons le rayon r de la sphère: son aire est : $1256 = 4\pi r^2$;
donc $r = \sqrt{\frac{1256}{4\pi}} = \sqrt{\frac{1256}{4\times 3{,}14}} = \sqrt{100} = 10$; *soit* $r = 10cm$
3) Ecrivons simplement: $\sqrt{75} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{40} - \sqrt{160} = \sqrt{4} \times \sqrt{10} - \sqrt{16} \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = -2\sqrt{10}$; $2\sqrt{500} + 3\sqrt{75} = 2 \times 10\sqrt{5} + 3 \times 5\sqrt{5} = 20\sqrt{5} + 15\sqrt{3}$; $\left(\sqrt{14}\right)^2 = 14$; $\frac{24\sqrt{18}}{9\sqrt{32}} = \frac{24\times\sqrt{9}\times\sqrt{2}}{9\times\sqrt{16}\times\sqrt{2}} = \frac{24\times 3}{9\times 4} = \frac{72}{36} = 2$; $\sqrt{20} \times \sqrt{45} \times \sqrt{80} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} \times \sqrt{9} \times \sqrt{5} \times \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 2 \times 3 \times 4\sqrt{5} = 24\sqrt{5}$
4) Ecrivons sans radical au dénominsateur: $\frac{-10}{3\sqrt{5}} = \frac{-10(\sqrt{5})}{3\sqrt{5}(\sqrt{5})} = \frac{-10\sqrt{5}}{15} = \frac{-2\sqrt{5}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{3+\sqrt{6}}{3-2} = 3 + \sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{15}}{6}$
5) Donnons un encadrement de $\frac{p}{q}$: *on a* : $\frac{1{,}5}{0{,}8} < \frac{p}{q} < \frac{3}{0{,}5}$ $c'est-à-dire$ $1{,}875 < \frac{p}{q}$

LECON : 2 : NOTIONS D'INTERVALLES

NOMBRES REELS

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Reconnaitre un intervalle
- Traduire par une inégalité un intervalle et réciproquement
- Déterminer la réunion et l'intersection d'intervalles

PREREQUIS :

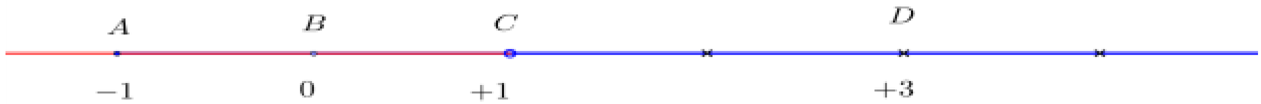
1. Citer cinq nombres réels x quelconques compris entre -4 et 5. Réponse : trivial
   Traduire par une double inégalité : x est compris entre -4 et 5. Réponse $-4 \leq x \leq 5$
2. Cite cinq nombres inférieurs ou égaux à -4. Traduire par une inégalité x est inférieur ou égal à -4
3. Citer cinq nombres strictement supérieurs à 5. Ttraduire par une inégalité x est strictement supérieur à 5

Situation problème :

Dans l'entreprise Nchare et fils, la durée d'un contrat à durée déterminée (**CDD**) est d'au moins un an et inférieur à 3 ans. Le directeur des ressources humaines voudrait traduire par une relation mathématique la plage de durée des contrats. Aide-le.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) La droite graduée ci-contre est divisée en deux demi-droites : une de couleur rouge et l'autre de couleur bleu.



Laquelle des deux demi-droites contient – elle le point d'abscisse $+3$?

L'abscisse a d'un point situé sur la demi-droite en rouge est donc inférieur ou égal à 3 ; on note : $a \leq 3$

L'abscisse b d'un point situé sur la demi-droite en bleu e à droite de D est donc strictement supérieur à $+3$; on note : $b > 3$

2) Traduis les intervalles suivants à l'aide des inégalités : $[-3;\ 3[$; $]0,5;\ 7,4[$; $]\leftarrow;-5]$

RESOLUTION :

1) C'est la demi-droite de couleur bleu qui contient le point d'abscisse $+3$
2) Traduisons à l'aide d'inégalité: soit x un nombre reel
   $x \in [-3;\ 3[$ équivaut à $-3 \leq \mathrm{x} < 3$
   $x \in]0,5;\ 7,4[$ équivaut à $0,5 < \mathrm{x} < 7,4$;
   $x \in]\leftarrow;-5]$ $équivaut$ à $x \leq -5$
3) Réponse à la situation problème : si on désigne par x la durée du contrat, on a : $1 \leq x < 3$. D'où la plage $[1;3[$

NOMBRES REELS

RESUME :

1) **Définitions- Notations- Représentations**

- Un **intervalle** est une **partie** de $\mathbb{R}$ (ou un sous-ensemble de $\mathbb{R}$) représentée sur une droite graduée par un ensemble de points qu'on peut parcourir d'un bout à l'autre sans interruption. Précisons qu'une partie de $\mathbb{R}$ peut être rien, un point, un segment, une demi-droite ou la droite des reels toute entière.
- $[a\,;b]$: Intervalle fermé en a et en b. Ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$.

- $[a\,;b[$: Intervalle fermé en a et ouvert en b. Ensemble des nombres x tels que $a \leq x < b$

- $]a\,;b]$: Intervalle ouvert en a et fermé en b. Ensemble des nombres x tels que $a < x \leq b$

- $]a\,;b[$: Intervalle ouvert en a et ouvert en b. Ensemble des nombres x tels que $a < x < b$

- $]\longleftarrow;b]$: Intervalle des nombres plus petits ou égaux à b. Ensemble des nombres x tels que $x \leq b$

- $]\longleftarrow;b[$: Intervalle des nombres plus petits que b. Ensemble des nombres x tels que $x < b$

- $[a\,;\longrightarrow[$: Intervalle des nombres plus grands ou égaux à a. Ensemble des nombres x tels que $a \leq x$

- $]a\,;\longrightarrow[$: Intervalle des nombres plus grands que a. Ensemble des nombres x tels que $a < x$

Remarque:

Les intervalles $[a\,;b]$, $[a\,;b[$, $]a\,;b]$ et $]a\,;b[$ sont des intervalles bornés de bornes $a$et b.

2) **Reunion et intersection d'intervalles**

Etant donnés deux intervalles I et J, on a:

- La réunion des intervalles I et J est constituée des nombres réels appartenant à I ou à J. On note $I \cup J$ et on lit: << I union J >>

Exemple : I=$\{a; b; c; d; -3; 2\}$ et J=$\{a; b; c; e; 2; 4\}$. On a : $I \cup J = \{a; b; c; d; e; -3; 2; 4\}$

- L'intersection des intervalles $I \cap J$ est constituée des nombres réels appartenant à la fois à I et à J. On note $I \cap J$ et on lit: $<< I\ inter\ J >>$

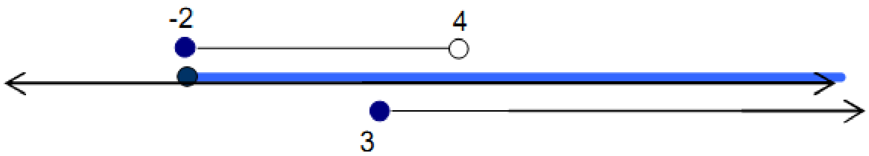
Exemple : En reprenant les ensembles $I\ et\ J$ de l'exemple ci-dessus, on a : $I \cap J$ =$\{a; b; c; 2\}$

EXERCICE D'APPLICATION :

1) Traduire sous forme d'intervalles les inégalités suivantes:
$$10 \leq x \quad ; \ x \leq 3\ et\ x \geq -7 \quad ; \ 0 \leq x < 6$$
2) Ecrire plus simplement: $[-5;\ 1] \cap [-2;\ 3]$
3) On donne $I = [-2;\ 4[\ et\ J = [3;\ \rightarrow [$. Détermine $I \cup J$ et $I \cap J$

RESOLUTION :

1) $10 \leq x\ équivaut$ à $x \in [10; \rightarrow [$;
   $x \leq 3\ et\ x \geq -7\ équivaut$ à $x \in] \leftarrow;\ 3] \cap [-7; \rightarrow [$;
   $-5 \leq x < 0\ équivaut$ à $x \in [-5; 0[$
2) L'écriture simple de $[-5;\ 1] \cap [-2; 3]$ est $[-2;\ 1]$
3) Pour déterminer $I \cup J$ on se sert de la figure suivante :



On trouve $I \cup J = [-2\ ; \rightarrow [\ et\ I \cap J = [3; 4[$

LECON 3 : VALEUR ABSULUE

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Reconnaître et calculer la valeur absolue d'un nombre réel
- Effectuer les calculs comportant les valeurs absolues
- Résoudre les problèmes concrets se ramenant à la notion de distance sur une droite

PREREQUIS :

1) Calcule $\sqrt{(-11)^2}\ et\ \sqrt{11^2}$. Que constates-tu? **Réponse :** $\sqrt{(-11)^2} = 121\ et\ \sqrt{11^2} = 121$. On constate que : $\sqrt{(-11)^2} = \sqrt{11^2}$
2) Donne la distance à zéro des nombres suivants : $+6\ ,12;\ -4{,}56$. **Réponse :** $+6\ ,12$ a pour distance à zéro $6\ ,12$**;** $-4{,}56$ a pour distance à zéro $4{,}56$**.**

SITUATION PROBLEME :

Après de la reconstitution de deux bornes d'un terrain de papa POUOKAM, le géomètre NCHARE lui remet un croquis sur lequel sont affichés les couples $(-5{,}2; 0)$ et $(+4{,}8; 0)$ comme coordonnées de bornes litigieuses A et B. L'unité graphique étant le mètre, Il voudrait rapidement savoir si la distance entre ses deux bornes est exactement de 10 m

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) a étant un nombre réel non nul, donne la valeur de $\sqrt{a^2}$.
2) Effectuer l'opération : $(+4,8)-(-5,2)$? En-déduire la distance entre le point d'abscisse $-5,2$ et le point d'abscisse $+4,8$.
3) Calculer : $\sqrt{(-5,2-4,8)^2}$

RESOLUTION :

1) $\sqrt{a^2} = a \; pour \; a \; positif \; et \sqrt{a^2} = -a \quad pour \; a \; négatif$
2) $(+4,8)-(-5,2) = (+4,8)+(+5,2) = (+10)$. On en déduit que la distance entre ces points est 10
3) $\sqrt{(-5,2-4,8)^2} = \sqrt{(-10)^2} = \sqrt{10000}$
4) Réponse de la situation problème. La distance entre les eux bornes est 10 mètres.

RESUME :

1. Définitions et proriétés
   - Soit a un nombre réel. On appellee **valeur absolue de a,** le nombre positif noté $|a|$, définit par : $|a| = a$ si a est positif et $|a| = -a$ si a est négatif
   - Pour tout nombre réel a, on a:
     - $|a^2| = a^2$ car un carré est positif
     - $|a| = 0$ équivaut à $a = 0$
     - $|-a| = |a|$
     - $\sqrt{a^2} = |a|$

   Exemple : $|25| = 25$; $|-3,14| = 3,14$; $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$

Propriétés :

Pour tous nombres $a \; et \; b$, on a:

- $|ab| = |a| \times |b|$. **Exemple :** $|(-7)(+3)| = |-7|.|+3| = |-21| = 21$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$. **Exemple:** $|-7+3 = 4| \; et |-7| + |+3| = 10$ donc $|-7+3| \leq |-7| + |+3|$
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (b non nul). **Exemple:** $\left|\frac{-5}{15}\right| = \frac{|-5|}{|15|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

2. **Valeur absolue et distance**

Une distance étant toujours positive, la distance entre deux nombres est donc la **difference** du plus grand nombre par le plus petit. Par exemple, la distance entre a et 1 est :$1 - a \; si \; a \leq 1$ et $a - 1 \; si \; a \geq 1$. Ainsi, on voit que la distance entre a et 1 est toujours égale à $|a-1|$. Plus généralement, a et b étant des réels quelconques, la distance entre a et b est $|a-b|$

Exemple: $|\sqrt{\mathbf{5}} - \mathbf{2}|$ est la distance entre $\sqrt{5} \; et \; 2$

Remarque:

- $|a| = |a-0|$ peut être interprété comme la distance entre a et 0
- Sur une droite graduée, a et $-a$ sont situés à égale distance de 0.
- Soit $A(a; \; 0)$ dans un repère orthonormal $(O; I; J)$ On a:

$OA = \sqrt{(X_A - X_O)^2 + (Y_A - Y_O)^2} = \sqrt{a^2} = |a - 0| = |a|$ car A et O sont situés sur l'axe des abscisses

EXERCICE D'APPLICATION :

Calculer la distance entre : $\sqrt{3}$ *et* 2; -9 et 7

RESOLUTION :

En utilisant la droite graduée suivante, on a :

2ARREES DUREÉ.... 100 minutes

- La distance entre $\sqrt{3}$ *et* 2 est : $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$
- La distance entre -9 et 7 est : $|7 - (-9)| = |7 + 9| = |16| = 16$

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

1- Compléte les pointillés

a) $3^{-4} \times 2^{-4} = 6^{\cdots\cdots}$

b) $\frac{3^4}{3^9} = 3^{\cdots\cdots}$

c) $(5^{-2})^5 = 5^{\cdots\cdots}$

2- Compare $9\sqrt{7}$ et 5 puis $\frac{1}{5}$ et $\frac{1}{9\sqrt{7}}$

3- Ecris plus simplement $\sqrt{(9\sqrt{7} - 5)^2}$

4- Ecris simplement

A = $\sqrt{48}$ - 2 $\sqrt{54}$ + 5 $\sqrt{24}$

B= $\sqrt{\frac{a^5 b^{11} c^7}{4 b^{11} c^3}}$

C= $\frac{5}{7}$ - $\frac{2}{7}$ x $\frac{5}{4}$

D = $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{6\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

5-

1. Développe E= (2 $\sqrt{7}$ - 4)²
2. En déduire l'écriture sans valeur absolue de $\left|44 - 16\sqrt{7}\right|$

6- Calcule A et donne le resultat sous forme d'une fraction irréductible

$$A = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$$

Exercice 2

1- Représente sur une droite graduée et écris plus simplement si possible l'ensemble des x tels que :

a- $x \in] \leftarrow 3 [\cap [-8, \rightarrow [$

b- $x \in]-5, 2 [U]-2;\ 5 [$

c- $8 \leq x < 12$

2- Recopie et complète le tableau suivant :

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[\mathbf{-3, 7}[$		
	$\boldsymbol{x < 1}$	

3- On considère les intervalles $\boldsymbol{I} = [\mathbf{-2, 5}[$ **et** $\boldsymbol{J} =]\longleftarrow, \mathbf{3}[$, trouve $\boldsymbol{I \cap J}$

Exercice 3

1- Donne l'écriture de B, $B = (2\sqrt{5} - \sqrt{15})^2$ sous la forme $a + b\sqrt{3}$

2- On donne $A = \frac{400\times10^{-3}\times0{,}6\times10^{-1}}{0{,}002\times(10^6)}$ et $B = 3\sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 4\sqrt{12} + 5$

En faisant apparaitre les différentes étapes repond aux questions suivantes :

a- Ecris A sous la forme d'une fraction irréductible, puis en déduis une notation scientifique de A.

b- Ecris B sous la forme $a + b\sqrt{3}$ ou a et b sont des entiers relatifs.

Sachant que $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, donner un encadrement d'ordre 2 de $7\sqrt{3} + 5$

3- On donne $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \times 4^3 - 6 \times (\frac{5}{2})^2$; écris A sous forme de fraction irréductible.

Exercice 4

On donne $A = 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{3}$ $B = \sqrt{75} + 7\sqrt{3} - 2\sqrt{27}$, $C = \frac{1}{5-\sqrt{3}}$ et $D = \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{11} + \frac{7}{3}$

1- Ecris chacun des nombres A et B suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible.

2- Ecris simplement (sans racine carrée au dénominateur) C

3- Montre clairement que $D = \frac{153}{55}$

Exercice 5

1- On donne $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \times 4^3 - 6 \times (\frac{5}{2})^2$; écris A sous forme de fraction irréductible.

2- On donne $B = \sqrt{27} - \sqrt{147} + \sqrt{48} + \sqrt{75}$; écris B sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels

3- Ecris C sous forme d'une fraction irréductible $C = \frac{\frac{4}{3}+\frac{7}{2}}{\frac{1}{6}-\frac{5}{3}}$

4- Ecris B sans symbole de radical au dénominateur $B = \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

CHAPITRE 2 : CALCUL LITTERAL

INTERET

L'intérêt du calcul littéral est l'aptitude Chez l'apprenant d'être capable de

- calculer la valeur numérique des expressions littérales (polynômes).
- Quantifier la production d'une entreprise.
- développer sens de l'ordre de la méthode de la rigueur et de la précision.

MOTIVATION

Dans la vie courante, la notion de calcul littéral vient compléter le raisonnement mathématique dans la détermination des expressions littérales (sous forme des polynômes) de la production d'une entreprise ; la construction des courbes paraboliques.

LECON 1 : POLYNOMES

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- Reconnaitre et définir un polynôme, son degré, son coefficient.
- Savoir développer et factoriser des expressions
- Savoir calculer la valeur numérique d'un polynôme.

Prérequis

1) Calcule : $-8 + 15 - 30 - 45$. $Réponse: -68$:
2) Réduis :$11a - 6a - 45a$. $Réponse: -40a$
3) Ecrire l'expression littérale du périmètre d'un champ rectangulaire de longueur $2x + 3$ et de largeur x. $Réponse: P = 2(3x + 3) = 6x + 6$

Situation problème

L'entreprise familiale de BOGNO fabrique et commercialise du savon en poudre. On note x la quantité journalière de savon produite en kg ; x est un nombre compris entre 0 et 30. Le cout de production, exprimé en FCFA est donné par : $P = x^3 - 20x^2 + 200x$. Cette entreprise vend sa production à 1200FCFA le Kg. BOGNO souhaite déterminer l'expression du bénéfice et de calculer son bénéfice pour une production journalière maximale.

Activité d'apprentissage :

On considère l'énoncé de la situation problème.

1) Complète le tableau suivant :

x	0	5	10	20	25	30
P						

2) On suppose que toute la production est vendue. Déterminer en fonction de x la recette totale R.
3) On désigne par B le bénéfice total, exprimer en fonction de x le bénéfice B.
4) Pour $x = 30$, calculer B.

Résolution de l'activité d'apprentissage

1)

x	0	5	10	20	25	30
P	0	625	1000	4000	8125	15000

2) $R = 1200x$

3) $\mathrm{B} = \mathrm{R} - \mathrm{P} = 1200x - (x^3 - 20x^2 + 200x) = -x^3 + 20x^2 + 1000x$

4) $\mathrm{B} = -30^3 + 20 \times 30^2 + 1000 \times 30 = 21000$

Retenons :

$\boldsymbol{R_1}$) Une expression littérale est une expression qui contient une ou plusieurs lettres et parfois des nombres. Ces lettres sont appelées Variables

Un monôme : C'est une expression littérale de la forme ax^n , où a est un nombre coefficient, x est appelé variable et n est un entier naturel appelé degré du monôme.

Exemples :

- $2a + 7b - 5$ est une expression litterale de variables a et b.
- $-20x^2$ est un monôme de coefficient -20, de variable x et de degré 2
- 8 est un monôme de coefficient 8, de variable x et de degré 0.
- 0 est un monôme de coefficient 0, de variable x et de degré 0.

$\boldsymbol{R_2}$) Un polynôme est une somme algébrique de plusieurs monômes de même variable. La variable peut être n'importe quelle lettre de l'alphabet. Le degré d'un polynôme est celui de son monôme de plus haut degré.

Exemple :

- $P = x^3 - 20x^2 + 200x$ est un polynôme de variable x et de degré 3. On note : $d°P = 3$.

$\boldsymbol{R_3}$)

- Développer un polynôme c'est l'écrire sous la forme d'une somme algébrique d'autres expressions plus simples (monômes).
- **Réduire** une expression littérale, c'est l'écrire avec moins de termes.
- **Ordonner** un polynôme c'est le ranger suivant les puissances décroissantes des monômes ou alors suivant les puissances croissantes des monômes.

Propriétés

- $K(a + b) = Ka + Kb$
- $K(a - b) = Ka - Kb$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$

Exemple : Développe les expressions littérales suivantes

$2(x + 1) = 2x + 2$; $3x(x^2 + 2) = 3x^3 + 6x$

$(x + 1)(x + 2) = x^2 + 3x + 2$

$\boldsymbol{R_4}$)Les identités remarquables :

- $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Exemple : Développe les expressions littérales suivantes en utilisant les identités remarquables

$i.\,(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 3 + (3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

$ii.\ (x - 5) = (x)^2 - 2 \times (x) \times (5) + (5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$iii.\,(4x - 3)(4x + 3) = 16x^2 - 9$

$\boldsymbol{R_4}$) Factoriser une expression c'est l'écrire sous la forme d'un produit de facteurs. Exemple 1 : utiliser les identités remarquables pour factoriser

- $A = x^2 - 6x + 9 = (x)^2 - 2(x)(3) + (3)^2 = (x - 3)^2$
- $B = (x - 1)^2 - 25 = (x - 1 - 5)(x - 1 + 5) = (x - 6)(x + 4)$

Exemple 2 : utiliser un facteur commun pour factoriser

$A = 8x + 16 = 8(x + 2)$; $B = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$;

$C = (x + 3)(-x + 2) - (x + 3)(-3x + 7) = (x + 3)(2x - 5)$

EXERCICE D'APPLICATION

Soit l'expression littérale $P(x) = (x - 1)^2 + (x - 1)(x + 2)$.

1) Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant la puissance décroissante de x.
2) Donne le degré de P .
3) Factorise $P(x)$.

LECON 2 : FRACTIONS RATIONNELLES

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES

- ✓ Déterminer les conditions d'existence d'une fraction rationnelle ;
- ✓ Simplifier une fraction.

Prérequis

- Simplifie la fraction $\frac{15}{45}$. Réponse : $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$
- Calcule et simplifie $Q(a) = \frac{a+5}{a}$ pour $a = 20$. Réponse : $\frac{20+5}{20} = \frac{5}{4}$

Situation problème

BOGNO fabrique des briques en terre et les couvre avec une bâche plastique de forme carrée de côté x $(en\ metres)$. Il se souvient avoir coupé 16 m^2 pour offrir à sa tante. Maintenant sa bâche a une forme rectangulaire de longueur $x + 4$. Quelle est l'expression de la largeur de cette bâche ?

Activité d'apprentissage

1) Ecris l'expression de l'aire de la bâche rectangulaire en fonction de x.
2) Montrer que la largeur l de la bâche rectangulaire a pour expression $l = \frac{x^2-16}{x+4}$
3) Peux-tu calculer l pour $x = -4$?
4) Simplifie l puis calcule la largeur pour $x = 7$

Résolution de l'activité d'apprentissage :

1) L'expression de l'aire de la bâche carrée en fonction de x est: $A_1 = x^2$. l'expression de l'aire de la bâche rectangulaire en fonction de x est $A_2 = x^2 - 16$.
2) l'aire de la bâche rectangulaire peut s'écrire aussi $A_2 = l \times L$ $et\ on a$ $l = \frac{A_2}{L}$ c'est-à-dire $l = \frac{x^2-16}{x+4}$
3) Pour $x = -4$, il est impossible de calculer l.
4) Pour $x \neq -4$ $on\ a$: $l = \frac{x^2-16}{x+4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x+4} = x - 4$

   Pour $x = 7$, $l = 7 - 4 = 3$

Retenon :

R_1) Définition d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Exemple : $R(x) = \frac{x^2-2x+3}{(1-x)(2+x)}$ $\quad Q(a) = \frac{a+1}{a}$

R_2) Condition d'existence d'une fraction rationnelle

Une fraction rationnelle existe lorsque son dénominateur est différent de zéro.

Pour déterminer la condition d'existence d'une valeur numérique d'une fraction rationnelle, on peut d'abord et si possible factoriser le dénominateur et ensuite utiliser la propriété $ab \neq 0$, signifie que $a \neq 0 \; et \; b \neq 0$.

Exemple : Donne la condition d'existence de la fraction rationnelle suivante $A(x) = \frac{x^2-x+2}{3x-1}$

$A(x)$ *existe* si et seulement si $3x - 1 \neq 0$ équivaut à $3x \neq 1$ soit $x \neq \frac{1}{3}$

R_3) Simplification d'une fraction rationnelle

- **i.** Simplifier une fraction rationnelle c'est la rendre sous la forme la plus simple possible. Pour cela, On factorise le numérateur et le dénominateur si cela est nécessaire ;
- **ii.** On détermine la condition d'existence ;
- **iii.** On élimine les facteurs communs qui apparaissent au numérateur et au dénominateur ;
- **iv.** Ecrire l'expression simplifiée précédée de la condition d'existence.

Exemple : Simplifie la fraction rationnelle suivante $B(x) = \frac{(x-3)(x-3)}{-(x-3)(x+1)}$.

Condition d'existence : $B(x)$ existe si et seulement si $-(x - 3)(x + 1) \neq 0$ *Equivaut* à $-(x-3) \neq 0 \; et \; (x+1) \neq 0$ Ou encore $-x + 3 \neq 0 \; et \; x + 1 \neq 0$ Soit $x \neq 3 \; et \; x \neq -1$

Le facteur commun au numérateur et au dénominateur est $(\mathbf{x-3})$

l'expression simplifiée *de* $B(x)$ est : $B(x) = \frac{-x+3}{x+1}$.

EXERCICE D'APPLICATION

On pose $R(x) = \frac{4x(2x+3)}{(2x+3)(2x+7)}$

1) Donne la condition d'existence de $R(x)$.
2) Simplifie $R(x)$ puis détermine sa valeur numérique pour $x = 3$.

Résolution

1) $R(x)$*existe* si et seulement si $(2x + 3)(2x + 7) \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{-3}{2} \; et \; x \neq \frac{-7}{2}$
2) Pour $x \neq \frac{-3}{2} \; et \; x \neq \frac{-7}{2}$, $R(x) = \frac{4x}{(2x+7)}$

Pour $x = 3 \; on \; a \; R(x) = \frac{12}{13}$.

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

1- Donne l'écriture de $C = x^2 + 2(x+3)(-2x+5) - 9$ sous forme de produits de polynômes du premier degré.

2- On considère le polynôme $P(x) = (2x+3)^2 - (x+5)(2x+3)$
   a- Développe, réduis et ordonne le polynôme P suivant les puissances décroissantes de x .

   b- Factorise $P(x)$.
   c- Résoudre dans N l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 2

A- On donne deux polynômes $f(x) = (x+2)(x-4) + (3x-5)(2x+4)$ et
$g(x) = (2x - 3)^2 - (x-1)^2$
   1- Développe, réduis et ordonne $f(x)$.
   2- En déduis une factorisation de $f(x)$.
   3- Factorise $g(x)$.

B- On pose $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
   a- Donne la condition d'existence d'une valeur numérique de $q(x)$
   b- Simplifie $q(x)$.
   c- Déterminer la valeur numérique de q pour $x = -2$

Exercice 3

1- Donne la condition d'existence, puis simplifie l'expression C donnée par
$C = \frac{x^2-225}{(x+15)(x-1)}$.

2- L'expression factorisée de $P(x) = (2-2x)^2 + (x-1)(x+11)$ est :
$\boldsymbol{i})$ $5(x-5)(x+1)$ $\boldsymbol{ii})$ $(5x+5)(x-1)$ $\boldsymbol{iii})$ *aucune réponse*

3- Donne la forme factorisée de $P(x) = 9x^2 + 6x + 1 - (3x+1)(4x+5)$

4- Développe et réduis suivant les puissances décroissantes de x de $P(x) = (3x+1)^2$ est :

Exercice 4

On donne l'expression $B = \frac{x^2+2x}{x^2-4}$

a) Factorise $x^2 - 4$

b) Donne la condition d'existence d'une valeur numérique de B

c) Simplifie B

Exercice 5

On donne : $F(x) = (x-3)(3-2x) - (2x-3)(x-1)$ et $G(x) = (x-2)^2 - 25$

1. a. Développe, réduis et ordonne $F(x)$.
   b. Quel est son degré ?
   c. Donne la valeur numérique de F pour $x = -1$.
2. a. Factorise $F(x)$ et $G(x)$
   b. Résous dans IR l'équation $-2(2x-3)(x-2) = 0$.
3. Donne la condition d'existence *de* $H = \frac{G(x)}{F(x)}$.

CHAPITRE 3 : EQUATION-INEQUATION-SYSTEME

MOTIVATION :

La quasi-totalité des problèmes que nous rencontrons dans notre vie se résumera à déterminer la valeur d'une grandeur physique ou à comparer deus valeurs afin de prendre des décisions pertinentes. Ce chapitre posera les bases pour que nous puissions résoudre facilement les problèmes de notre vie.

LECON 1 : EQUATION

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Résoudre dans les équations du type: $ax+b=cx+d$
- Résoudre les équations du type $(ax+b)(cx+d)=0$
- Résoudre les problèmes de vie conduisant aux équations de premier degré dans IR.

PREREQUIS : ....

Résoudre les équations suivantes : $2x+1=5$; $-x+2=2$

Résolution :

$2x+1=5 \Rightarrow 2x=4$ $d'ou : x=\frac{4}{2}$ $donc : \quad x=2$

$-x+2=2 \Rightarrow -x=2-2$ $d'ou : -x=0$ $donc : \quad x=0$

SITUATION PROBLEME :

Trois frères découvrent le testament de leur père.

« Mes chers enfants, je vous lègue la somme 1900 000 FCFA fruit d'une vie de dur labeur que vous ne toucherez qu'en déterminant chacun la somme qui lui revient.

Mon fils GOMSI, tu recevras 70000 FCFA de plus que votre petite sœur KAMDJO.

Pour toi DOMTCHUENG mon fils ainé, ta part sera égale au double de la part votre petite sœur KAMDJO diminuée de 150000 FCFA.

Tache : Votre expertise est requise pour certifier que caque enfant aura trouvé le montant qui lui revient.

Consigne : Calculer la somme que devra percevoir chacun des enfants KAMDJO, GOMSI, et DOMTCHUENG

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Résoudre les équations suivantes : $4x=1980000$; $x+x+70-150=1900-2x$

Résolution :

$4x=1980000 \Rightarrow x=\frac{1980000}{4}$ $donc : x=495000$ $alors : \quad S=\{495000\}$

$x+x+70-150=1900-2x \Rightarrow x+x+2x=1900+150-70$ $donc : 4x=1980$ $alors : \quad S=\{495\}$

Essayons en exemple de résoudre la situation problème :

Si on pose : x la part de la petite sœur KAMDJO

part de la petite sœur KAMDJO	part du fils GOMSI	part du fils ainé DOMTCHUENG	Total à partager
x	X+70000	2x-150000	1 900 000

Ainsi on peut écrire : $\underbrace{x}_{kamdjo} + \underbrace{x+70000}_{Gomsi} + \underbrace{2x-150000}_{Domtchueng} = 1900000$

$d'ou : 4x - 80000 = 1900000 \Rightarrow 4x = 1980000$

$donc : x = \dfrac{1980000}{4} \Rightarrow x = 495000$

Donc :

part de la petite sœur KAMDJO	part du fils GOMSI	part du fils ainé DOMTCHUENG	Total à partager
459000FCFA	565000FCFA	840000FCFA	1 900 000

RESUME :

Une équation est une égalité dans laquelle figure une inconnue généralement notée x.
Toute valeur de x qui rend l'égalité vraie est appelée **solution de l'équation.**
Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Méthode de résolution d'une équation du type $ax + b = 0$

Une équation du type $ax + b = 0$ est appelée **équation du premier degré a une inconnue.**
Résoudre une telle équation revient à isoler l'inconnue.

Exemple3:

Résoudre $\dfrac{x}{2} - 3 + \dfrac{1-3x}{2} = \dfrac{5}{2} - x$

$$\frac{x-3x}{2} + x = \frac{5-1}{2} + 3 \Rightarrow \frac{-2x}{2} + x = \frac{4}{2} + 3$$
$$\Rightarrow -x + x = +2 + 3$$
$$\Rightarrow 0 = 5 \quad Fausse$$

$S = \{\phi\}$

Résoudre $6x + 3 = 10 - x$

$$6x + 3 = 10 - x \Rightarrow 6x + x = 10 - 3$$
$$\Rightarrow 7x = 7$$
$$\Rightarrow x = \frac{7}{7}$$
$$\Rightarrow x = 1$$

$S = \{1\}$

Résoudre $2x + 1 = 5$;

$$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 5 - 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{4}{2}$$
$$donc : \quad x = 2$$

Résoudre $2(x+1) = 4x + 7$

$$2(x+1) = 4x + 7 \Rightarrow 2x + 2 = 4x + 7$$
$$\Rightarrow -4x + 2x = +7 - 2$$
$$\Rightarrow -2x = 5$$
$$\Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

NB : la solution d'une équation du type $ax + b = 0$ lorsqu'elle existe est : $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

Remarque : lorsqu'une phrase mathématique est fausse, elle n'a pas de solution et son ensemble solution est $S = \phi \quad ou \quad S = \{\ \}$
Lorsqu'une phrase mathématique est toujours vraie, tout nombre est solution de l'équation et l'ensemble solution est $S = IR$

Equation du type $(ax+b)(cx+d) = 0$

Rappel : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
i.e : a et **b** sont deux nombres réels. $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad ou \quad b = 0$

Méthode de résolution d'une équation du type $(ax+b)(cx+d) = 0$

EQUATION-INEQUATION-SYSTEMES

Pour résoudre une équation du type,

- On résout séparément les équations $ax+b=0$ ou $cx+d=0$
- L'ensemble solution ainsi obtenu est $S=\left\{-\frac{b}{a}\,;-\frac{d}{c}\right\}$

Exemple 1: résoudre dans IR l'équation $(2x-5)(6x+3)=0$

$(2x-5)(6x+3)=0 \Rightarrow 2x-5=0$ *ou* $6x+3=0$

$\Rightarrow 2x=5$ *ou* $6x=-3$

$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$ *ou* $x=-\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

Exemple 2: résoudre dans IR $-3x(5-10x)=0$

$-3x(5-10x)=0 \Rightarrow -3x=0$ *ou* $5-10x=0$

$\Rightarrow 3x=5$ *ou* $-10x=-5$

$\Rightarrow x=\frac{0}{3}$ *ou* $x=\frac{-5}{-10}$

$S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$

Méthode de résolution d'une équation se ramenant à une équation du type $(ax+b)(cx+d)=0$

Résoudre dans IR l'équation $3x(x-2)-(x-2)(x+6)=0$

$3x(x-2)-(x-2)(x+6)=0 \Rightarrow (x-2)[3x-(x+6)]=0$

$\Rightarrow (x-2)(3x-x-6)=0$

$\Rightarrow (x-2)(2x-6)$

$\Rightarrow x-2=0$ *ou* $2x-6=0$

$\Rightarrow x=2$ *ou* $2x=6$

$\Rightarrow x=2$ *ou* $x=3$

$S=\{2\,;3\}$

Résoudre dans IR l'équation $(x+2)^2=(2x+5)^2$

$(x+2)^2=(2x+5)^2 \Rightarrow (x+2)^2-(2x-5)^2=0$

$\Rightarrow [(x+2)-(2x-5)][(x+2)+(2x-5)]=0$

$\Rightarrow (x-2x+2+5)(x+2x+2-5)=0$

$\Rightarrow (-x+7)(3x-3)=0$

$\Rightarrow -x=-7$ *ou* $3x=3$

$\Rightarrow x=7$ *ou* $x=1$

$S=\{7\,;1\}$

LECON 2 : INEQUATION

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

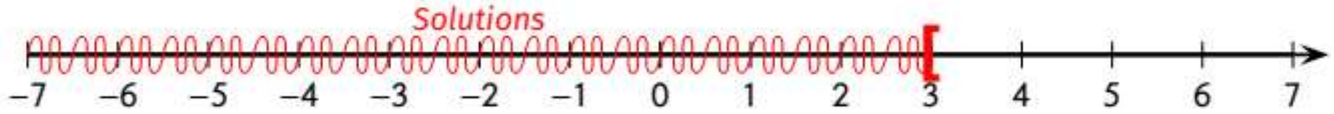
- Résoudre dans les équations du type: $ax + b \leq cx + d$
- Résoudre les problèmes de vie conduisant à une inéquation de premier degré dans IR.

PREREQUIS : ....

Représenter l'ensemble solution des inéquations suivantes sur une droite graduée.

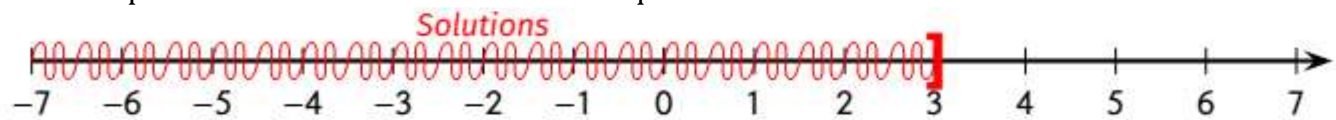
Cas1 : $x \leq 3$ Cas2 : $x \leq 3$ Cas3 : $x \geq 3$ Cas4 : $x > 3$

Cas 1: Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient x < 3



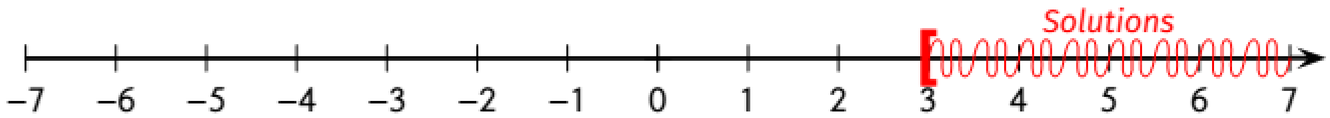
Le crochet n'est pas "tourné" vers les solutions car x ne peut pas être égal à 3 (symbole <).

Cas 2 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x \leq 3$

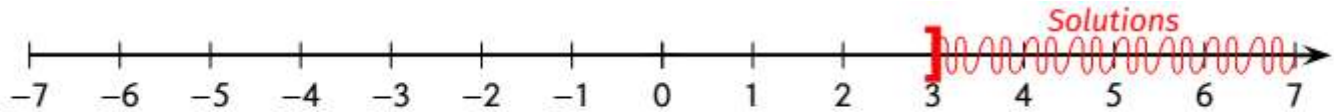


Le crochet est cette fois "tourné" vers les solutions car x peut être égal à 3 (symbole $\leq$).

Cas 3 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x \geq 3$



Cas 4 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x > 3$



SITUATION PROBLEME :

Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 7500FCFA pour faire, en moyenne, 40 glaces.

Sachant qu'une glace est vendue 250FCFA, combien doit-il vendre de glaces au minimum dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 20000 FCFA ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Résoudre les inéquations suivantes :

Cas5 : $4x > 20$ Cas6 : $250x - 187{,}5x > 20000$

Cas5 : $4x > 20 \Rightarrow x > \dfrac{20}{4}$

Donc : $\underline{\underline{x > 5}}$

$250x - 187{,}5x > 20000 \Rightarrow 62{,}5x > 20000$

Cas6 : $\Rightarrow x > \dfrac{20000}{62{,}5}$

$\Rightarrow x > 320$

Donc : $\underline{\underline{x > 320}}$

Solution :

• On note x le nombre de glaces vendues dans la semaine.

• Mise en inéquation :

Cout de fabrication : $\dfrac{7500}{40}x = 187{,}5x$

Prix de vente : $250x$

Bénéfice : $250x - 187{,}5x$

On veut que ce bénéfice soit supérieur à 20000 FCFA, cela se traduit donc par l'inéquation : $250x - 187{,}5x > 20000$.

• Résolution de l'inéquation :

$62{,}5x > 20000$

$x > \dfrac{20000}{62{,}5}$

$x > 320$

• Conclusion : le marchand devra vendre au moins 321 glaces pour faire un bénéfice supérieur à 20000 FCFA dans la semaine

RESUME :

Inéquation dans IR

Une inéquation est une **inégalité** dans laquelle se trouve une inconnue généralement notée **x.**

Toute valeur de **x** qui rend l'inégalité vraie est appelée **solution de l'inéquation.**

Résoudre une inéquation c'est trouver toutes ses solutions.

Remarques : pour résoudre une inéquation, on isole l'inconnue en tenant comte des règles suivantes :

- Si on **ajoute** ou **retranche** le même nombre de part et d'autre de l'inégalité, **l'inégalité ne change pas.** i.e. : $si\ a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad a, b\ et\ a \in IR$ s
- Si on **multiplie** ou **divise** les deux membres de l'inégalité par le même **nombre négatif, l'inégalité change de sens.** $Pour\ c < 0 \begin{cases} si\ a < b \Rightarrow a \times c > b \times c \\ si\ a < b \Rightarrow \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \end{cases} \quad a, b\ et\ c \in IR$

NB : le produit d'un nombre et de son inverse est égal à 1 i.e. : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = 1$

Exemples :

Exemple1 : Résoudre $2x+4\geq 0$

Solution :

$$2x+4\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -4$$
$$\Rightarrow x\geq \frac{-4}{2}$$
$$\Rightarrow x\geq -2$$

NB : La solution de l'inéquation est l'ensemble des nombres qui sont supérieurs ou égaux à -2
$S=[-2\,;\rightarrow[$

Exemple2 : Résoudre $2x+7>4x-1$

Solution :

$$2x+7>4x-1 \Rightarrow 2x-4x>-1-7$$
$$\Rightarrow -2x>-8$$
$$\Rightarrow x<\frac{-8}{-2}$$
$$\Rightarrow x<4$$

NB : La solution de l'inéquation est l'ensemble des nombres qui sont strictement inférieurs à 4
$S=]\leftarrow;4[$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Résoudre dans IR les inéquations suivantes : $3x+1\geq x-3$; $-x-1<+3$;

$$3x+1\geq x-3 \Rightarrow 2x\geq -4$$
$$\Rightarrow x\geq -2$$
$$donc : S=[-2\,;\rightarrow[$$

$$-x-1<+3 \Rightarrow -x<4$$
$$\Rightarrow x>4$$
$$donc : S=]4\,;\rightarrow[$$

Un vidéoclub propose deux formules de location de DVD :
— Formule A : abonnement d'un an pour 1800 FCFA, puis 350 FCFA par DVD loué.
— Formule B : sans abonnement, 500 FCFA par DVD loué.
À partir de combien de DVD loués dans l'année a-t-on intérêt à choisir la formule A ?

Solution :
• Choix de l'inconnue : x représente le nombre de DVD loués.
• Mise en inéquation :
Montant d'un an d'abonnement avec la formule A : $1800+350x$
Montant d'un an d'abonnement avec la formule B : $500x$
On cherche quand le montant de l'abonnement avec la formule A est avantageux, c'est-à- dire quand il coûte moins cher que l'abonnement avec la formule B.
On doit donc résoudre : $1800+350x<500x$.
• Résolution de l'inéquation :
$$1800+350x<500x$$
$$1800+350x-1800<500x-1800 \Rightarrow 350x<500x-1800$$
$$350x-500x<500x-500x-1800 \Rightarrow -150x<-1800$$
$$\frac{1}{-150}\times(-150x)>-1800\times\frac{1}{-150} \Rightarrow x>12$$
• **Conclusion :** On a intérêt à choisir l'abonnement A si on loue 12 DVD ou moins dans l'année (et donc l'abonnement B à partir de 13 DVD loués).

LECON 3 : Système de deux équations à deux inconnues

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Résoudre des systèmes d'équations de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ par substitution
- Résoudre les problèmes de vie conduisant à un système d'équations du premier degré dans IR*IR

PREREQUIS : ……………………………………………………………….

Le couple $(x=28\,;\,y=12)$ est il solution des équations $\begin{cases} x+y=40 \\ et \\ 9x+5y=312 \end{cases}$

Le couple $(x=60\,;\,y=65)$ est il solution des équations ? $\begin{cases} x+y=125 \\ et \\ 50x+35y=5125 \end{cases}$

$28+12=40$; $9\times 28+5\times 12=312$ Le couple $(x=28\,;\,y=12)$ est solution du système $\begin{cases} x+y=40 \\ et \\ 9x+5y=312 \end{cases}$

$60+65=125$; $50\times 60+35\times 65=5275$. Comme $50\times 60+35\times 65\neq 5125$ Le couple $(x=28\,;\,y=12)$ n'est pas solution du système $\begin{cases} x+y=125 \\ 50x+35y=5125 \end{cases}$

SITUATION PROBLEME :

Antoine et Thomas ont reçu de l'argent pour renouveler leurs vêtements de travail
Antoine a acheté cinq tee-shirts et deux jeans : il a payé 6800FCFA. Thomas a acheté quatre tee-shirts, un jean et un blouson qui coûte 6000 FCFA : il a payé 10600 FCFA.
Leur patron très exigent veut savoir quels étaient le prix d'un tee-shirt ? Et Quel est le prix d'un jean ?
Ce que les compères ont oublié, ils risquent donc le licenciement pour faute de gestion.
Aidez Antoine et Thomas à obtenir le prix d'un tee-shirt, et le prix d'un jean ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère les équations $4x+y=4600 \quad (1)$ et $5x+2y=6800 \quad (2)$

1- De l'équation (1) exprimer y
2- Dans l'équation (2) remplacer y par sa valeur obtenue en à la question1
3- En déduire la valeur numérique de x puis celle y

Résolution :

1- De l'équation (1), $y=4600-4x \quad (3)$
2- (3) dans (2), $5x+2(4600-4x)=6800 \Rightarrow 5x-8x+9200=6800$
3- on a : $-3x=-2400 \Rightarrow x=\dfrac{-2400}{-3}$ donc : $\underline{\underline{x=800}}$ alors $y=4600-4\times 800$ donc : $\underline{\underline{y=1400}}$

Résolution de la situation problème:

En notant x le prix d'un tee-shirt et y celui d'un jean, on obtient : $\begin{cases} 5x+2y=6800 \\ 4x+y+6000=10600 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} 5x + 2y = 6800 & (2) \\ 4x + y = 4600 & (1) \end{cases}$

Donc en conclusion :
Le système admet une seule solution : le couple (800 ; 1400).
Le prix d'un tee-shirt est **800 FCFA** et y celui d'un jean **1400 FCFA**

RESUME :

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues on peut utiliser plusieurs méthodes tels que : (La méthode par combinaison, la méthode graphique, méthode par substitution).
Nous nous intéresserons à la **méthode par substitution** pour cette année.

Méthode de résolution d'un système par substitution

Pour résoudre un système de deux équations à deux inconnues on procède comme suit :

- Dans l'une des équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de la deuxième
- On remplace dans l'autre équation cette inconnue par son expression déterminée plus haut, puis on résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur numérique de la deuxième inconnue.
- On remplace cette deuxième inconnue par sa valeur dans l'expression de la première afin de trouver aussi la valeur de la première inconnue.

NB : l'ensemble solution est présenté sous la forme $S = \{(x\ ;\ y)\}$

Méthode de résolution d'un problème conduisant à système

Pour résoudre un problème contenant deux inconnues, il fait:
1) Choisir les inconnues : Il s'agit ici d'identifier clairement les grandeurs sont on cherche la valeur.
2) Mettre en équation : Il s'agit d'utiliser les informations de l'énoncé pour écrire les deux équations qui les traduisent
3) Résoudre le système obtenu par substitution.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice 1 :

Trois cahiers et un stylo coûtent 570 FCFA. Cinq cahiers et trois stylos coûtent 1070 FCFA. Calculer le prix d'un cahier et le prix d'un stylo.

Corrigé :

Soient x le prix d'un cahier et y le prix d'un stylo.
On écrit le système qui traduit les deux conditions :

$$\begin{cases} 3x + y = 570 \\ 5x + 3y = 1070 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 570 - 3x \\ 5x + 3y = 1070 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 570 - 3x \\ 5x + 3(570 - 3x) = 1070 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 570 - 3x \\ -4x + 1710 = 1070 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 570 - 3x \\ -4x = -640 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 570 - 3x \\ x = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 570 - 3 \times 160 \\ x = 160 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 90 \\ x = 160 \end{cases} \Rightarrow S = \{(160\ ;\ 90)\}$$

On trouve finalement : x = 160 et y = 90.
Un cahier coûte 160 FCFA et un stylo coûte 90 FCFA.

CHAPITRE 3 : EQUATION-INEQUATION-SYSTEME

MOTIVATION :

Dans la vie courante, on est parfois amené à manipuler des données numériques en vue de résoudre des problèmes concrets, de faire des prévisions budgétaires, d'analyser des formules dans plusieurs domaines scientifiques tels qu'en économie, en chimie, physique, etc…

Ces données numériques ou formules étant parfois complexes, il devient dès lors nécessaire d'introduire de nouveaux concepts mathématiques afin de mieux les appréhender. Comme concepts majeures ; on peut citer sans nul doute les **équations et inéquations** du 1er degré à une inconnue, les **systèmes d'équations linéaires du 1er degré à deux inconnues**.

Ainsi, par le biais de ces outils majeurs, beaucoup de domaines scientifiques ont connu un grand essor, donnant de ce fait aux équations et inéquations une place de choix dans les disciplines mathématiques les plus utilisées.

LECON 1 : **Equations et inéquations du 1er degré à une inconnue.**

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

Dans cette leçon, il sera principalement question pour nous de d'offrir à l'élèves les techniques nécessaires à la résolution d'une équation ou d'une inéquation. En outres, à l'issue de ce cours l'élève devra être en mesure d'analyser et interpréter les données d'un exercice, d'effectuer une mise en équation ou en inéquation afin de résoudre un problème donné.

PREREQUIS : …………………………………………………………………………

1- Remplace les pointillés par le nombre qui convient :
$\boldsymbol{a)\ \frac{\dots}{4} = -4 \quad b)\ 2 \times \dots. + 3 = 4 \quad c)\ \dots\dots + 6 = -2}$
2- **5** amis veulent s'associer à part égale pour acheter un ballon qui coûte **3000F.** Quel sera la part de chacun ?
3- $\boldsymbol{x}$ représentant un nombre, traduire sous forme d'intervalle : $x > 5$; $x \leq 4$
Cite 4 nombres appartenant à l'intervalle $]\leftarrow; 2]$; $]1; 3[$

Résolution :

1- $\boldsymbol{a)\ \frac{-16}{4} = -4\ ;\ b)\ 2 \times 0,5 + 3 = 4\ ;\ c) - 8 + 6 = -2}$
2- $\boldsymbol{3000 \div 5 = 600}$ **,** la part de chacun est 600F
3- $\boldsymbol{x > 5 \Leftrightarrow x \in\ ]5\,; \rightarrow[\ \ ;\ x \leq 4 \Leftrightarrow x \in\ ]\leftarrow; 4]}$
$4\ nombres\ dans\ ]\leftarrow; 2] : on\ peut\ citer\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$
$4\ nombres\ dans\ ]1; 3[: on\ peut\ citer$ 1,1 ; 1,45 ; 2 ; 2,9995

SITUATION PROBLEME :

Enoncé : Des amis décident de s'associer à part égale pour acheter un téléviseur qui coûte **51000F.** Au moment d'aller au moment d'aller au marché, 4 d'entre eux abandonnent le projet. Cependant le reste d'amis réussi à acheter cette télé en donnant **3000F** chacun.

Quel est nombre total d'amis présents au initialement ?

Tache : Votre expertise est requise pour certifier que caque enfant aura trouvé le montant qui lui revient.

Consigne : Calculer la somme que devra percevoir chacun des enfants KAMDJO, GOMSI, et DOMTCHUENG

Solution :

- **Choix de l'inconnue et mise en équation :**
  Soit x le nombre d'amis présent initialement. $x-4$ représente le nombre d'amis restant.
  On a l'équation $3000\times(x-4)=51000$

- Déterminons x :

$$3000\times(x-4)=51000 \Leftrightarrow 3000x-12000=51000$$
$$\Leftrightarrow 3000x=51000+12000$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{63000}{3000}$$
$$\Leftrightarrow x=21$$

Il y avait 21 amis au départs

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1. On désire trouver un nombre inconnue noté $\boldsymbol{x}$ qui vérifie la relation $\boldsymbol{7x+2=5x+8}$
   1.1 Vérifier que en retranchant $5x$ de chaque membre de l'égalité, on obtient $2x+2=8$
   1.2 Vérifier que en retranchant 2 à chaque membre de l'égalité dans $2x+2=8$, on obtient $\boldsymbol{2x=6}$ puis propose une valeur adéquate à $\boldsymbol{x}$
2. Tamo veut vendre ses billes à raison de **25F** l'une jusqu'à être à mesure de s'offrir un biscuit de **315F**. Il aimerait connaître le nombre minimal de billes à vendre à cet effet.
   2.1 Notons par n ce nombre. Justifie que la relation $\boldsymbol{25\times n\geq 315}$ illustre le problème posé.
   2.2 En divisant membre à membre par 25, vérifié que la relation $25n\geq 315$ est équivalente à $\boldsymbol{n\geq 12,6}$
   2.3 Propose alors la plus petite valeur possible que n peut avoir.

Résolution :

1- $\boldsymbol{7x+2=5x+8}$

1.1
$$\boldsymbol{7x+2-5x=5x+8-5x \Leftrightarrow 7x-5x+2=5x-5x+8}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2x+2=8}$$

1.2
$$\boldsymbol{2x+2=8 \Leftrightarrow 2x+2-2=8-2}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow 2x=6}$$

On peut ainsi proposer comme valeur x la valeur 3

2- 2.1 Si n désigne le nombre de billes vendu, alors l'argent produit par la vente est $\boldsymbol{25\times n}$ *ou encore* $\boldsymbol{25n}$. Or pour être en mesure d'acheter son biscuit, l'argent dont il dispose doit être au moins égale à **315F ,** d'où l'équation $25n\geq 315$

2.2

$$25n\geq 315 \Rightarrow \frac{25n}{25}\geq\frac{315}{25}$$
$$\Rightarrow n\geq 12{,}6$$

2.3 Chaque bille étant entière, le nombre minimal à prévoir est **13 billes**

RESUME :

1. **Equations du 1er degré à une inconnue**

Définition : Une équation du 1er degré à une inconnue est toute expression mathématique pouvant se mettre sous la forme $\boldsymbol{ax+b=0}$, où a et b sont des nombres donnés , $a\neq 0$ et $\boldsymbol{x}$ est l'inconnue recherchée.

EQUATION-INEQUATION-SYSTEMES

1.1 Résolution :

On dit qu'un nombre est solution de l'équation $ax + b = 0$ s'il vérifie l'équation quand on remplace x par lui .

Exemple : soit l'équation $2x - 6 = 0$.

Pour $x = 3$, on a $2 \times 3 - 6 = 6 - 6 = 0$. Donc 3 est une solution de l'équation $\mathbf{2x - 6 = 0}$

Retenons : pour résoudre une équation du type $ax + b = 0$, on écrit :

$\boldsymbol{ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b}$ *(on peut leur expliquer ceci en terme de soustraction par b)*

$\boldsymbol{\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}}$ *(on peut leur expliquer ceci en terme de dision par $\boldsymbol{a}$)*

Puis l'ensemble solution est donné par l'écriture $\boldsymbol{S} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$

Exemple : Résolvons

$(E): 3x - 6 = 0$; $(F) : 4x + 2 = -6$; $(H): -5x + 10 = 0$; $(K): 7 - x = 0$

1.2 Equations du type $\boldsymbol{ax + b = cx + d}$

Pour ce type d'équations, on regroupe les termes contenant l'inconnue à gauche de l'égalité et les autres après l'égalité tout en changeant de signe quand on passe d'un membre de l'égalité à l'autre. *(cependant on peut aussi leur expliquer ce principe en terme de soustraction membre à membre, sauf que c'est plus ardu à la compréhension chez l'apprenant)*

Exemple : Résoudre $5x + 4 = -3x + 12$

Ensemble solution : $S = \{1\}$

1.3 Equations du type $\boldsymbol{(ax + b)(cx + d) = 0}$

- **Rappel :** Etant donné deux nombre A et B , **A×B = 0 ⇔ A = 0** ou **B = 0**

Pour résoudre ce type d'équation, on écrit : $\boldsymbol{(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \text{ ou } cx + d}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow ax = -b \text{ ou } cx = -d}$

$\boldsymbol{\Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \text{ ou } x = -\frac{d}{c}}$

$\boldsymbol{S = \left\{-\frac{b}{a}; -\frac{d}{c}\right\}}$

Exemple : Résoudre $(3x - 12)(-5x - 8) = 0$

2. Inéquations du 1er degré à une inconnue

Il s'agit de toute expression mathématique pouvant se mettre sous l'une des formes suivantes :

$\boldsymbol{ax + b < 0}$, $\boldsymbol{ax + b \leq 0}$, $\boldsymbol{ax + b > 0}$ *ou encore* $\boldsymbol{ax + b \geq 0}$; **a** et **b** désignent des nombres donnés, $\boldsymbol{x}$ est l'inconnue.

2.1 Méthode de résolution

On dit qu'un nombre est solution d'une inéquation donné si l'inégalité associée est vérifiée quand on remplace $l'inconnue$ $\boldsymbol{x}$ par lui.

- Pour résoudre $\boldsymbol{ax + b < 0}$ avec a positif , on écrit : $ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b$

  $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$

  L'ensemble solution est $\boldsymbol{S} =]\leftarrow ; -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}[$

- Pour résoudre $\boldsymbol{ax + b \leq 0}$ avec a positif , on écrit : $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow ax \leq -b$

  $\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$

L'ensemble solution est $\boldsymbol{S} =]\leftarrow\ ;\ -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}]$

❖ Pour résoudre $\boldsymbol{-ax+b<0}$ avec a positif, on écrit : $-ax+b<0 \Leftrightarrow -ax<-b$
$\Leftrightarrow ax>b$
$\Leftrightarrow\ x>-\frac{b}{a}$

L'ensemble solution est $\boldsymbol{S} =]-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}\ ;\ \rightarrow[$

Exemple : Résoudre

$(E): 2x+3<0$; $(F): -2x+3<0$; $(G): 2x+3\geq 0$; $(H): -2x+3\leq 0$; $(K): 4x-5\geq 6x+3$

Exercice : Résoudre chacune des équations ou inéquation suivantes :

$(\boldsymbol{a}): 1+x=3x-2$; $(b): \frac{3}{2}x+\frac{1}{3}=0$; $(c): -\frac{5}{3}x=-\frac{2}{3}x+7$; $(d): 4x-5<6x+3$

On peut au besoin donner davantage de devoir à faire dans le livre au programme

LECON 2 : Systèmes d'équation du premier degré dans $\mathbb{R}^2$

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

❖ Savoir résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues par substitution.

❖ Savoir résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues par combinaison .

❖ Résoudre un problème concret au moyen d'un système d'équations

PREREQUIS : ....

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $3t-5=0;\quad 4x+1=3x+6$
2. Soit x *et* y des réels. On pose $4x-2y+6=0$

   2.1 Montrez que $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{y}-\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}$, en proposant des valeurs à y, déduire 3 couples solutions de l'équation $4x-2y+6=0$

Solution : **1.**

$$3t-5=0 \Leftrightarrow 3t=5$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{5}{3}$$
$$S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$$
$$4x+1=3x+6 \Leftrightarrow 4x-3x=6-1$$
$$\Leftrightarrow x=5$$
$$S=\{5\}$$

SITUATION PROBLEME :

Une vendeuse a dans son comptoir des tomates et des oignons. En une journée, elle fait une recette de **2600F**. Lors de la comptabilité, elle se rend compte qu'elle a oublié le nombre de tomates vendues. Cependant, elle se rappelle qu'elle a vendu un mélange de **72** fruits.
Sachant qu'une tomate coûte **25F** et un oignon **50F.**
Aider la vendeuse à retrouver le nombre de tomates vendues.

Solution : Notons par t et par g le nombre de tomates et d'oignons vendus ; alors **t** et **g** vérifient les relations suivantes :

- $t + g = 72$ car elle a vendu un mélange de 72 fruits
- $25t + 50g = 2600$ car elle a fait une recette de **2600F** cette journée

Nous avons donc le système suivant :

$$\begin{cases} t + g = 72 & (1) \\ 25t + 50g = 2600 & (2) \end{cases}$$ selon l'équation (1) on a $g = 72 - t$

Elle a vendu **36** tomates

En substituant g par son expression dans (2), on a :

$$\begin{aligned} 25t + 50(72 - t) = 2600 &\Rightarrow 25t + 50 \times 72 - 50t = 2600 \\ &\Rightarrow 25t - 50t + 3500 = 2600 \\ &\Rightarrow -25t + 3500 = 2600 \\ &\Rightarrow t = \frac{2600 - 3500}{-25} \\ &\Rightarrow t = \frac{-900}{-25} \\ &\Rightarrow t = 36 \end{aligned}$$

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On pose (E): $\begin{cases} 25x + 50y = 2600 & (L_1) \\ x + y = 72 & (L_2) \end{cases}$ où x et y sont des réels.

1- En vous servant de la ligne (L_2), exprime x en fonction de y
2- En déduire que 1800 +25y = 2600
3- Résoudre le système (E)

Soit le système (F): $\begin{cases} 2s + 4t = 26 \\ 5s - 2t = 5 \end{cases}$

1. Montrez que $(F) \Leftrightarrow (F')$: $\begin{cases} 10s + 20t = 130 & (L_1) \\ -10s + 4t = -10 & (L_2) \end{cases}$
2. En additionnant membre à membre les lignes du système les lignes du système (F') , montrez que $24t = 120$
3. En déduire la valeur de t et celle de s

RESUME :

(*dans la suite on se limitera aux systèmes qui possèdent une unique solution*)

I- Définition et exemple

On appelle **systèmes d'équations linéaires du 1er degré dans $\mathbb{R}^2$** tout système d'équations pouvant se mettre sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des coefficients donnés, x et y les inconnues.

Résoudre un tel système revient à déterminer un couples de nombres (α, β) qui vérifient chaque ligne du système.

Exemple :

- Vérifiez que le couple (3 ; 4) satisfait aux lignes du système (E): $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$

Interprétation : on dit que le couple (3 ; 4) est solution du système (E) et on note $S = \{(3 ; 4)\}$

II- Méthodes de résolution

Pour résoudre un système d'équations, on peut utiliser soit la méthode par combinaison linaire ou bien la méthode par substitution.

1. Méthode par substitution

Elle consiste à choisir une des deux équations, exprimer une inconnue en fonction de l'autre, puis d'aller remplacer l'inconnue exprimée dans l'équation non utilisée, ensuite déduire la solution du système.

Exemple : Résolvons par substitution le système $(\boldsymbol{E})$: $\begin{cases} \boldsymbol{2x+3y=18} \\ \boldsymbol{-3x+y=-5} \end{cases}$

2. Méthode par combinaison linéaire

Elle consiste à modifier judicieusement les coefficients du système de départ, puis d'éliminer provisoirement une inconnue afin d'exprimer l'autre plus aisément et ainsi déduire facilement la solution du système.

Exemple : Résolvons par combinaison linéaire le système suivant $(\boldsymbol{E})$: $\begin{cases} \boldsymbol{4x-3y=8} \\ \boldsymbol{3x+y=-5} \end{cases}$

Devoir : proposer des exercices dans le livre au programme

LECON 3 : RESOLUTION GRAPHIQUE D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS OU INEQUATIONS.

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

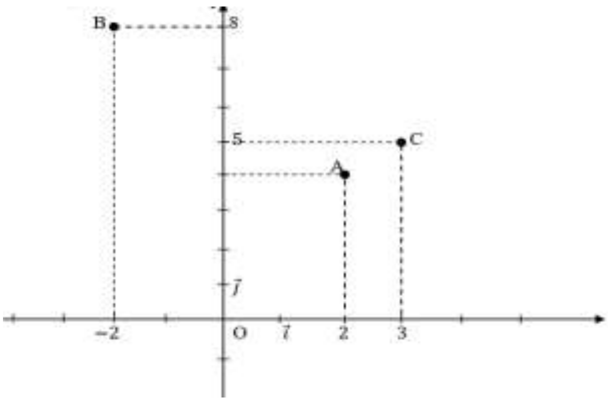
A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de :

- Tracer une droite
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes
- Faire un partitionnement du plan à l'aide d'une droite dans un repère orthonormé

PREREQUIS : ....

Dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on donne les points $A(2;4)$, $B(-2;8)$; $C(3;5)$, (D) et (L) des droites d'équations respectives $y=\ -x+6$ et $2x-y-1=0$. L'unité choisie est le centimètre.

1. Placer les points A, B et C dans le repère.



2. Vérifier que les points A et B appartiennent à (D)
   $y=\ -(2)+6$ *alors* $y=4$ *, ce qui signifie que pour* $x=2, y=4$ *, donc* $A\in(D)$
   $y=-(-2)+6$ *alors* $y=8$ *, Ce qui signifie* $x=2,\quad y=8$ *,* *donc* $B\in(D)$
3. Vérifier que le point C appartient à (L)
   C appartient à (L) signifie que pour $x=3$ *et* $y=5$ *on a :* $2(3)-(5)-1=0$

4. Déterminer les coordonnées du point E sachant que E appartient à (L) .
Pour $x = -4$ *(par exemple), on a* $\mathbf{2(-4) - y - 1 = 0}$, $\mathbf{y = -9}$ *d'où* $\boldsymbol{E(-4;\ -9) \in (L)}$

SITUATION PROBLEME :

Dans la boutique de Kamdem, on vend un chocolat et un bonbon à 15F puis 4 bonbons et un chocolat à 30F. Le jour de la fête, Ngono veut acheter les bonbons et les chocolats dans la boutique de Kamdem. Ngono est inquiet parce qu'il ne sait combien de bonbons et de chocolats il pourrait obtenir avec ses 35F. Ainsi, son ami Fati lui propose de résoudre le système $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 15} \\ \boldsymbol{4x + y = 30} \end{cases}$ en utilisant uniquement les équations de droites

Aide Biloa à faire ce travail.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ on considère les droites $(\boldsymbol{D_1})$ et $(\boldsymbol{D_2})$ d'équations respectives $\boldsymbol{x + y = 15\ et\quad 4x + y = 30}$

a. Montrer que le point $\boldsymbol{A(8, 7)}$ appartient à $(\boldsymbol{D_1})$ et déterminer les coordonnées des points B et C tels que B et C appartiennent à $(\boldsymbol{D_1})$

b. Déterminer les coordonnées des points D, E et F appartenant à $(\boldsymbol{D_2})$

2. a. Placer les points A, B et C dans le repère et tracer la droite $(\boldsymbol{D_1})$ passant par ces points

b. Placer les points D, E et F dans le repère et tracer la droite $D_2)$ passant par ces points

c. Que remarque-t-on ?

3. Que représente le point de coordonnées $(\mathbf{5; 10})$ pour le système $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 15} \\ \boldsymbol{4x + y = 30} \end{cases}$?

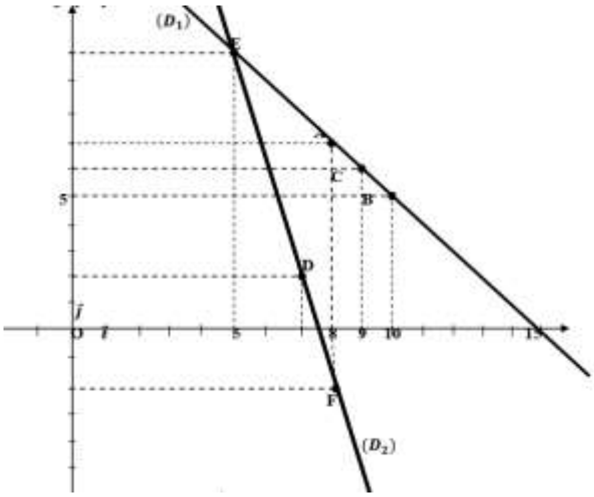
4. Aider Biloa à retrouver les quantités recherchées .

Résolution :

1. . **a.** A appartient à (D_1) signifie que pour $x = 8$ et $y = 7$ on a : (8)+(7) = 15.
   Déterminons les coordonnées de B et C :
   Pour $x = 10$ on : $10 + y = 15$, alors $B(10; 5)$.
   Pour $x = 9$ on : $9 + y = 15$, $y = 6$, alors $C(9; 6)$

   b. Déterminons les coordonnées des points D, E et F appartenant à (D_2)
   Pour $x = 7$ on a : $4(7) + y = 30$; $y = 2$, alors $D(7; 2)$
   Pour $x = 5$ on a : $4(5) + y = 30$, $y = 10$, $alors\ E(5; 10)$
   Pour $x = 8$, on a : $4(8) + y = 30$, $y = -2$ alors $F(8; -2)$

2. Représentation graphique :



3. Le point E(5 ; 10) est le point de rencontre des droites (D_1) et (D_2) et ses coordonnées vérifient en même temps les équations des droites $x + y = 15$ et $4x + y = 30$. on conclut alors que les coordonnées du point de rencontre des droite (D_1): $x + y = 15$ et (D_2): $4x + y = 30$ sont solution du système d'équations : $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 15} \\ \boldsymbol{4x + y = 30} \end{cases}$
4. Biloa doit savoir que le bonbon coûte 5F l'unité et le chocolat coûte 10F l'unité. Avec 35F Biloa peut avoir un bonbon et 3chocolats ou bien 3 bonbons et 2 chocolats ou encore 5 bonbons et un chocolat ou encore 7 bombons seulement.

RESUME :

1. **Utilisation des équations de droite dans la résolution des systèmes d'équations dans** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre les systèmes d'équations du type $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ on peut procéder par la représentation graphique , ainsi qu'il suit :

- On considère que (D_1) : $ax + by = c$ et (D_2) : $a'x + b'y = c'$
- On représente les droite (D_1) et (D_2)
- On conclut :
  Si (D_1) et (D_2) se rencontrent au point $A(x_A\,;y_A)$ alors le couple $(x_A\,;y_A)$ est solution du système.
  Si (D_1) et (D_2) ne se rencontrent pas, alors le système n'a pas de solution.
  Si (D_1) et (D_2) sont confondues alors le système a une infinité de solutions.

2. **Utilisation des équations de droites dans la résolution des systèmes d'inéquations dans** $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre les systèmes d'inéquations du type $\begin{cases} ax + by < c \\ a'x + b'y > c' \end{cases}$, on peut procéder par la représentation graphique ainsi qu'il suit :

- On considère que (D_1) : $ax + by = c$ et (D_2) : $a'x + b'y = c'$
- On représente la droite (D_1) et on hachure l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de la première inéquation.
- On représente les droite (D_2) et on hachure l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions de la deuxième inéquation.
- L'ensemble solution du système d'inéquations est la partie du plan où l'on retrouve les hachures des
  deux droites.

NB : l'Enseignant insistera sur les symboles $<$; $>$; $\leq$ $\boldsymbol{et}$ $\geq$

Exercice d'application

1- Résoudre graphiquement le système d'équations suivant : $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y - 6 = 0} \\ \boldsymbol{x - y = 0} \end{cases}$

2- Résoudre graphiquement le système d'inéquations suivant : $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y - 6 > 0} \\ \boldsymbol{x - y < 0} \end{cases}$

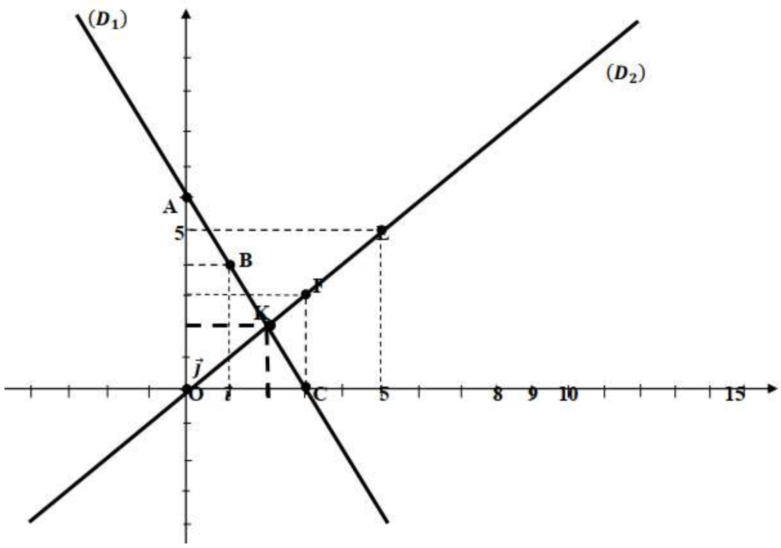
Solution :

1. Soit $(D_1) : 2x + y - 6 = 0$ et $(D_2): x - y = 0$

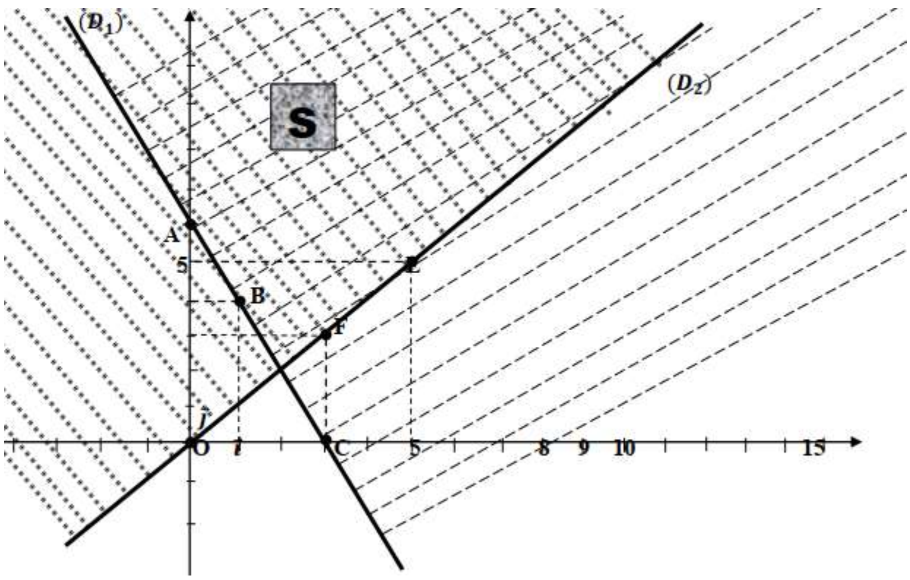
- Pour (D_1) on a les points $A(0; 6)$; $B(1; 4)$ et $C(3; 0)$

(L'Enseignant insistera une fois de plus sur la méthode de recherche des coordonnées déroulées plus haut)

- Pour $(\boldsymbol{D_2})$ on a les points $\boldsymbol{O(0; 0)}$; $\boldsymbol{E(5; 5)}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{F(3; 3)}$



Le point $K(2; 2)$ est le point de rencontre des droites (D_1) et (D_2) alors le système d'équations $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ a pour solution $S = \{(2; 2)\}$



L'Enseignant insistera sur le processus d'obtention de ce graphe. Il présentera clairement les éléments qui ont permis d'hachurer les différentes zones

Exercice d'application :

Exercice 1

1. Résoudre graphiquement les systèmes d'équations suivants :

$(\boldsymbol{S_1}) : \begin{cases} b - 7a = 4 \\ 6a - 3b = 3 \end{cases}$; $(\boldsymbol{S_1}) : \begin{cases} 5y - 3x = -1 \\ y = 3 - x \end{cases}$, $(\boldsymbol{S_1}) : \begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ 3x - 7y = 8 \end{cases}$

2. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

$(S_4) : \begin{cases} 3x - 5y < 8 \\ 2x + 3y > -3 \end{cases}$ $(S_5) : \begin{cases} 2x + 7y > 10 \\ -x + y < 2 \end{cases}$

Exercice 2

Résoudre graphiquement les problèmes suivants :

P1/. Une salle compte 400places. Les parterres sont à 23F et les balcons à 18F. Quand le théâtre est plein, la
recette est de 8100F. Combien y a-t-il de parterres, de balcons ?

P2/. Déterminer deux entiers sachant que leur somme est 666 et que si on divise le plus grand par le plus
petit le quotient est 3 et le reste 62.

P3/. Pour passer l'hivers, le gardien du zoo a acheté pour ses camélidés des pantoufles pour leurs pattes et
des bonnets pour leurs bosses. Il n'a que des chameaux et des dromadaires, et il a acheté 19 bonnets et 24
paires de pantoufles. Combien a-t-il de chameaux et combien de dromadaires ?

Travaux dirigés :

Exercice 1 :

1. Voici un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y : $\begin{cases} x + y = 40 \\ 9x + 5y = 312 \end{cases}$

   Démontrer, en le résolvant, que ce système admet pour solution x=28 et y=12
2. Un groupe de 40 personnes s'est inscrit pour une visite guidée en bus Yaoundé. Ce groupe est composée de x adultes et de y enfants.
   Les adultes paient 900 FCFA et les enfants 500 FCFA. Le responsable du groupe a remis 31200 FCFA à l'organisateur du circuit. Combien y a-t-il d'adultes et d'enfants dans ce groupe ?

Exercice 2 :

a) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x + y = 630 \\ 18x + 30y = 14220 \end{cases}$

b) Dans un parc zoologique, la visite coûte 300 FCFA pour les adultes et 180 FCFA pour les enfants. A la fin d'une journée, on sait que 630 personnes ont visité le zoo et que la recette du jour est de 142200 FCFA.
Parmi les personnes qui ont visité le zoo ce jour-là, quel est le nombre d'enfants ? Quel est le nombre d'adultes ?

Exercice 3 :

Résoudre le système de deux équations à deux inconnues suivant : $\begin{cases} x+y=15 \\ 400x+200y=4200 \end{cases}$

Pour financer une partie de leur voyage de fin d'année, des élèves de troisième vendent des gâteaux qu'ils ont confectionnés eux - même. Un même jour ils ont vendu 15 tartes, les unes aux myrtilles et les autres aux pommes. Une tarte aux myrtilles est vendue 400 FCFA et une tarte aux pommes 200 FCFA. La somme encaissée ce jour là est 4200 FCFA. Apres avoir mis le problème en équation, déterminer combien ils ont vendu de tartes de chaque sorte.

Exercice 4 :

Résoudre le système d'équations suivant par substitution:

$\begin{cases} 4x-8y=-36 \\ -8x+2y=-40 \end{cases}$; $\begin{cases} 9x-5y=57 \\ 3x+6y=-27 \end{cases}$; $\begin{cases} x+4y=14 \\ 8x-5y=44 \end{cases}$; $\begin{cases} -10x-4y=20 \\ 4x+7y=19 \end{cases}$; $\begin{cases} -7x+8y=-73 \\ 8x+6y=-68 \end{cases}$

$\begin{cases} 7x-10y=-20 \\ 9x-3y=-105 \end{cases}$; $\begin{cases} -5x-5y=10 \\ 8x+10y=-6 \end{cases}$

Exercice 5 :

Le périmètre d'un triangle isocèle est égal à 35 mm. La base mesure 7 mm de moins que chacun des côtés isocèles. Calculer les dimensions du triangle. On désignera par x la mesure d'un côté isocèle.

Exercice 6 :

Trois électriciens ont effectué les installations électriques dans les différents appartements d'un immeuble. Le premier a travaillé sur deux cinquièmes du nombre total d'appartements, le second a travaillé sur un cinquième du nombre total d'appartements plus 8 appartements, le dernier a travaillé sur les 16 appartements qui restent. Calculer le nombre total d'appartements de l'immeuble. En déduire, pour chaque électricien le nombre d'appartements sur lequel il a travaillé.

Exercice 7 :

Xavier a 3 ans de plus que son petit frère et 5 ans de moins que l'aîné de la famille. Sachant que la somme des âges des trois frères est 26 ans, déterminer l'âge de Xavier.
On notera x l'âge de Xavier. Calculer, ensuite, l'âge du cadet et de l'aîné.

Exercice 8 :

Un garage automobile propose à un client de reprendre son véhicule d'occasion au prix de 3 79000 FCFA pour acheter un nouveau véhicule neuf. Pour financer son achat, le client doit ajouter au montant de la reprise un quart du prix du nouveau véhicule puis compléter par un emprunt égal à la moitié du prix du nouveau véhicule.
Quel est le prix du nouveau véhicule ?
Quel est le montant de la somme empruntée ?

Exercice 9 :

Résoudre les équations suivantes

$12+x=5-13x$; $7x-8=3x+2$; $\frac{x}{5}+11=-9$; $5-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{3x}{2}+\frac{x}{3}-1=\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}x+1=\frac{1}{4}x-1$;
$5(x-2)+2(1-3x)=7x+12$; $5-12x+13{,}5=-x+12+3x-7{,}5$; $3x+7(8-x)+4=60+x$;
$4(x-1)-3(2-x)=2$

Exercice 10 :

Résoudre les équations suivantes

$x+5\leq 9$; $x-5>-2$; $4x\geq 20$; $-2x>8$; $10x-4\leq 26$

$-5x+7>8$; $x-2\leq 0$; $x+4>0$; $2x+7>0$; $3x-3<1-2x$

$2(x-3)\geq 8-3x$; $2(x+1)<3+2x$; $\frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{2}\leq 0$; $\frac{x}{2}-\frac{4-x}{4}>5$

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

1- Résous l'équation $(2x-3)(x+2)=0$
2- Résous dans R l'inéquation $2x-3\geq 5+3x$.
3- Donne l'ensemble des réels x tels que $-5\leq 2x-3\leq 3$
4- Donne l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x+5\leq 6x+17$

Exercice 2

1- Résous les systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R}$ puis représente sur une droite graduée l'ensemble des solutions

1) $\begin{cases} 2x+5\geq 5x-4 \\ x-7<2x-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 9x-15\geq 4x+13 \\ 19-5x\leq 7+3x \end{cases}$ 3) $-2\leq 8x+5\leq 3$

4) $-3\geq 4x-3\geq -5$

2- On considère le polynôme $P(x)=(2x+3)^2-(x+5)(2x+3)$

d- Développer, réduire et ordonner le polynôme P suivant les puissances décroissantes de x.

e- Factoriser $P(x)$.

Résoudre dans N l'équation $P(x)=0$.

Exercice 3

1- Résous dans $R\times\mathbb{R}$:

$\begin{cases} 2x-3y-5=0 \\ 3x+4y+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+4y+1=0 \\ 3x-y=9 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-6y=4 \\ 3x-9y=6 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=5 \end{cases}$

Exercice 4 :

1-) Résous dans IR^2 le système suivant :

(S) : $\begin{cases} x+y=26 \\ 5x+10y=165 \end{cases}$

2-) A la fin d'une journée, la caisse d'une vendeuse de beignets-haricots dans un établissement scolaire contient 26 billets, les uns de 500Fcfa et les autres de 1000Fcfa pour un montant total de 16500Fcfa. Soit x le nombre de billets de 500Fcfa et y le nombre de billets de 1000Fcfa.

a-) Montrer que x et y vérifient le système (S).

b-) Déterminer alors le nombre de billets de 500Fcfa et le nombre de billets de 1000Fcfa qu'elle possède ?

MODULE N° 14 :

CHAPITRE 4: STATISTIQUES

MOTIVATION : ……………………………………………………………………….

Les statistiques ont beaucoup d'applications dans les domaines variés : en démographie pour étudier les populations ; en géophysique pour les prévisions météorologiques, la climatologie, la pollution ; en sciences économiques et sociales et en économétrie l'étude du comportement d'un groupe de population ou d'un secteur économique s'appuie sur des statistiques ; en sociologie : les sources statistiques constituent des matériaux d'enquête ; en marketing le sondage d'opinion devient un outil pour la décision ou l'investissement ; dans les jeux de hasard et les paris pour prévoir les résultats ; en physique : l'étude de la mécanique statistique et de la thermodynamique statistique permet de déduire le comportement des particules ; en métrologie, pour tout ce qui concerne les systèmes de mesure et les mesures elles-mêmes.

LECON 1 : VOCABULAIRE, EFFECTIFS, FREQUENCES, MODE ET MOYENNE

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Regrouper dans un tableau statistique les données à caractère qualitatif ou quantitatif ;
- Compléter ce tableau statistique avec une ligne des effectifs ou des fréquences ;
- Déterminer le(s) mode(s) d'une série statistique ;
- Calculer la moyenne d'une série statistique.

PREREQUIS : ……………………………………………………………………….

1) Citer trois exemples des données à caractère qualitatif

<u>Réponse</u> : couleurs (vert-rouge-jaune)

2) Citer trois exemples des données à caractère quantitatif

<u>Réponse</u> : notes des élèves (12 ; 07 ; 15)

SITUATION PROBLEME :

Dans une classe de la quatrième année, le professeur principal a relevé pour chaque élève sa préférence de couleurs d'une part, à savoir : vert (V), rouge (R) et Jaune (J) :

R R J R V V R J J R J J V R R.

Il a aussi relevé d'autre part leurs tailles respectives :

145 147 150 155 149 153 145 149 149 155 155 147 155 153 155.

Quelle est la couleur préférée et la taille moyenne de cette classe ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

I-

1) Quel est l'effectif total de cette classe ?
2) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en s'appuyant sur les données de la situation problème

Couleurs	V	R	J	Total

Effectifs				

3) Quel est le caractère étudié dans ce tableau ? donner sa nature ?

II-

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en s'appuyant sur les données de la situation problème

Tailles (x_i)	145	147	149	150	153	155	Total
Effectifs (n_i)							
Fréquences							
Fréquences (%)							
$x_i \times n_i$							

2) Quel est le caractère étudié dans ce tableau ? donner sa nature ?

III- Répondre alors à la situation problème en remarquant que la moyenne est donnée par la formule :

$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i$. Avec N l'effectif total.

Résolution :

I-

1) L'effectif total de cette classe est de 15 élèves
2) Recopions et complétons le tableau ci-dessous en s'appuyant sur les données de la situation problème

Couleurs	V	R	J	Total
Effectifs	3	7	5	15

3) Le caractère étudié dans ce tableau est la couleur préférée des élèves
 La nature : qualitatif

II-

1) Recopions et complétons le tableau ci-dessous en s'appuyant sur les données de la situation problème

Tailles (x_i)	145	147	149	150	153	155	Total
Effectifs (n_i)	2	2	3	1	2	5	15
Fréquences	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{15}$	1
Fréquences (%)	13,33	13,33	20	6,67	13,33	33,33	100
$x_i \times n_i$	290	294	447	150	306	775	2262

2) Le caractère étudié dans ce tableau est la taille des élèves

La nature : quantitatif

III- Répondre alors à la situation problème

- La Couleur préférée par les élèves : rouge
- La taille moyenne des élèves :

$$\bar{x} = \frac{1}{15}(2262) = 150{,}8$$

Donc la couleur préférée des élèves de la classe de la quatrième année est le rouge et leur taille moyenne est de 150,8cm.

RESUME :

1) Définitions et vocabulaires

a) Définition

La statistique est une branche des mathématiques qui consiste à recueillir, traiter, et analyser un ensemble de données réelles pour établir des prévisions.

b) Vocabulaires

- L'ensemble sur lequel porte l'étude est appelé population.
- Chaque élément de la population est appelé individu.
- L'objet sur lequel porte l'étude est appelé caractère.
- Toute valeur possible du caractère est appelée modalité du caractère.
- On dit que le caractère est quantitatif lorsque les modalités sont des nombres, sinon on dit que le caractère est qualitatif.

NB : Donner la nature d'un caractère revient à dire s'il est quantitatif ou qualitatif.

2) Effectif et fréquence d'une modalité

L'effectif d'une modalité est le nombre d'individu relatif à cette modalité tandis que l'effectif total est le nombre total d'individus de la population étudiée.

La fréquence d'une modalité est le quotient de l'effectif de cette modalité par l'effectif total

On note $F_i = \frac{n_i}{N}$

Où F_i désigne la fréquence de la modalité numéro et N son effectif total.

NB :

- La fréquence peut être donnée sous forme de pourcentage. Dans ce cas : On a $F_i = \frac{n_i \times 100}{N}$
- La somme des fréquences en pourcentage est égale à 100
- La somme des fréquences simple est égal à 1.

3) Mode et moyenne d'une série statistique

a) Mode

Le mode d'une série statistique est toute modalité qui possède le plus grand effectif.

b) Moyenne d'une série statistique

La moyenne d'une série statistique est le quotient de la somme des produits de chaque modalité par son effectif, le tout par son effectif total. Si on note M la moyenne alors on

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N}$$

Remarque

- Une série statistique peut avoir plusieurs modes
- On ne calcule pas la moyenne d'une série statistique à caractère qualitatif.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

EXERCICE 1

Une enquête a été mené dans une classe de quatrième année de 10 élèves sur leurs menus préféré et on a obtenu les résultats suivants : ikok, ikok, mbongo, sauce jaune, mbongo, eru, eru, koki, koki et sauce jaune.

1) Quelle est la population étudiée?
2) Quelle est l'individu ?
3) Quel est le caractère étudié ?
4) Quelles sont les modalités de cette série statistique ?
5) Quelle est la nature du caractère étudié ?

EXERCICE 2

Pour le compte du mois de septembre 2020, un agent de la société Enéo a relevé les consommations en énergie en KWh de 16 familles. Les résultats sont les suivants : 300 100 100 250 150 250 100 150 100 250 150 150 200 150 200 et 150.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

consommation (x_i)	100	150	200	250	300	Total
Effectifs (n_i)						16
Fréquences (%)						100
$x_i \times n_i$						

2) Quel est le mode de cette série statistique ?
3) Calculer la moyenne en consommation de ces familles

RESOLUTION DES EXERCICES D'APPLICATION

EXERCICE 1

1) La population étudiée est l'ensemble de 10 élèves.
2) L'individu est l'élève.
3) Le caractère étudié est la couleur préférée.
4) Les modalités sont : ikok, mbongo, sauce jaune, eru, koki.
5) La nature du caractère : quantitatif

EXERCICE 2

1) Compléter le tableau ci-dessous :

consommation (x_i)	100	150	200	250	300	Total
Effectifs (n_i)	4	6	2	1	3	16
Fréquences (%)	25	37,5	12,5	6,25	18,75	100
$x_i \times n_i$	400	900	400	250	900	2850

2) Le mode c'est 150KWh
3) Calculons la moyenne

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N} = \frac{2850}{16}$$

$$M = 178{,}125KWh$$

<u>LECON 2</u> : DIAGRAMMES : A BANDES, A BATONS ET CIRCULAIRE

DUREE : 50 min

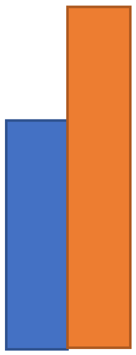
OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Construire le diagramme à bâton ou diagramme à bande ou diagramme circulaire d'une série statistique
- Interpréter un diagramme ou un pictogramme (Mode, tableau des effectifs et fréquence).

PREREQUIS : ....

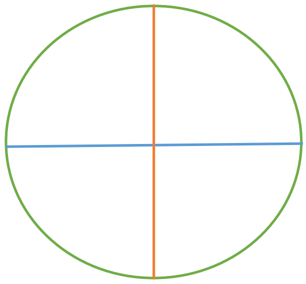
1) Dessiner deux rectangles collés en position verticale ayant même largeur 1cm et de longueur respectives 4cm et 6cm

Réponse :



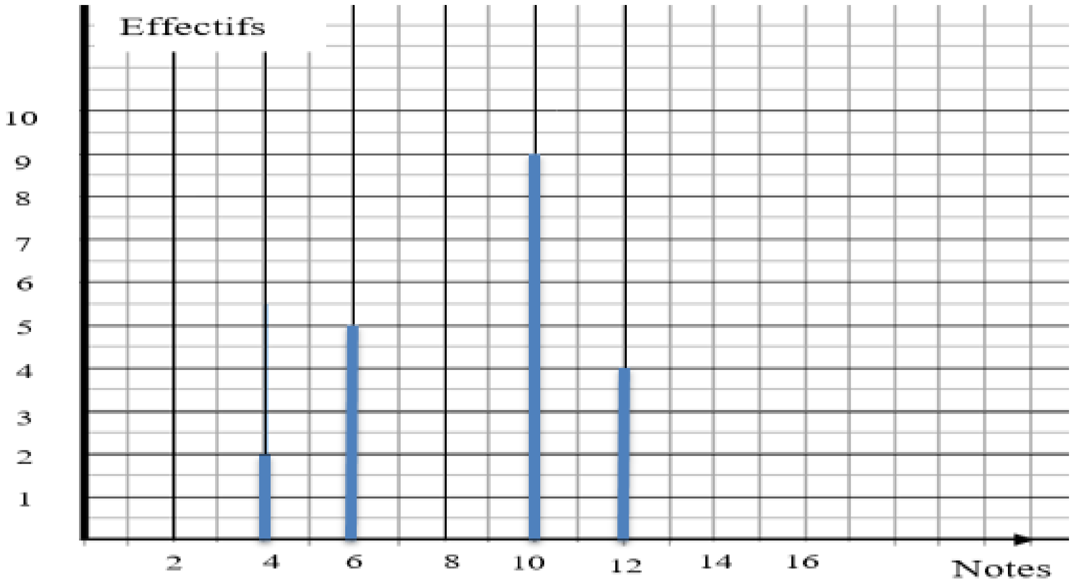
2) Dessiner un cercle et subdiviser le en quatre partie égale

Réponse :



SITUATION PROBLEME :

Dans une classe de la quatrième année d'un établissement de la place, le professeur de mathématiques a tracé le diagramme des notes de la première évaluation ci-dessous :



Aider le professeur de mathématiques à calculer la moyenne des notes des élèves de cette classe.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

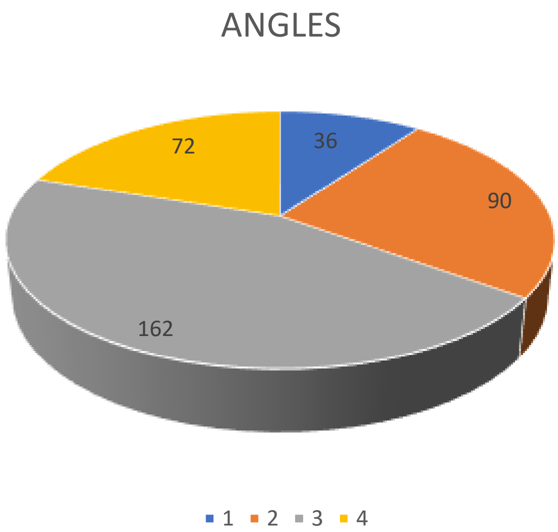
1) Ressortir un tableau des modalités (notes) et des effectifs de la classe de la quatrième année de la situation problème.
2) Compléter ce tableau par une ligne $de\ note \times effectif$.
3) Compléter ce tableau par une ligne appelée mesure des angles au centre, en utilisant la formule : $angle\ au\ centre = \frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total} \times 360$
4) A l'aide de la ligne ajoutée à la question 3) construire le diagramme circulaire de cette série.
5) Répondre alors à la situation problème en utilisant la ligne de la question 2).

Résolution :

1) 2) 3)

Notes	4	6	10	12	Total
Effectifs (n_i)	2	5	9	4	20
$note \times effectif$	8	30	90	48	176
$angle\ au\ centre$	36	90	162	72	360

4) Diagramme circulaire



5) Réponse à la situation problème :
$M = \frac{176}{20} = 8{,}8$
Donc la moyenne des notes des élèves de cette classe est de 8,8

RESUME :

1) Diagramme à bâton

Il est construit dans un repère. Les valeurs de la variable statistique sont portées en abscisse, à partir de chaque valeur, on trace un segment de droite vertical et dont la hauteur est proportionnelle à l'effectif correspondant. On peut retenir indifféremment une échelle qui explicite les effectifs ou les fréquences.

2) Diagramme circulaire

Lors de la construction du diagramme circulaire, chaque secteur du cercle représente une modalité du caractère ou variable. L'angle au centre est déterminé par la formule :

$$angle\ au\ centre = \frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total} \times 360$$

3) Diagramme à bande

Le diagramme à bande est un diagramme dans lequel les modalités d'une série statistique sont représentées par des bandes (rectangles) verticales ou horizontales. La longueur de chaque bande est proportionnelle à son effectif.

EXERCICE D'APPLICATION:

Le tableau statistique suivant donne les effectifs en fonctions de l'argent de poche journalier des élèves de la quatrième année d'un établissement de la place :

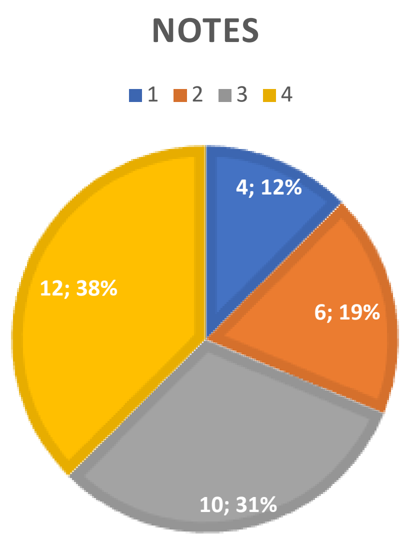
Montant	200	250	300	500	total
effectif	5	6	10	4	25

Construire le diagramme circulaire de cette série statistique

RESOLUTION DE L'EXERCICE D'APPLICATION

Complétons d'abord le tableau par une ligne de : $angle\ au\ centre = \frac{effectif\ de\ la\ modalité}{effectif\ total} \times 360$

Montant	200	250	300	500	total
effectif	5	6	10	4	25
$angle\ au\ centre$	72	86,4	144	57,6	360



EXERCICE A FAIRE A LA MAISON

EXERCICE1

Le tableau suivant donne la répartition des vendeuses de poissons braisés d'une ville de Douala selon le prix de vente des maquereaux braisés

Prix	5000	5500	6000	6500	7000
Nombre de poissons vendus	8	6	10	4	2

Représenter cette série par un diagramme à bâton

EXERCICE2

On a relevé les notes en anglais de 30 élèves d'une classe de quatrième année, les résultats sont consignés dans le tableau statistique suivant :

Note x_i	5	6	7	9	10	11	12	14	Total
Effectif n_i	2		5	3				2	
Fréquence F_i		10			20		10		

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2) Quel est le mode de cette série statistique?
3) Calculer la moyenne de cette série statistique

EXERCICE3

Le tableau statistique suivant donne les effectifs en fonctions de l'argent de poche journalier des élèves d'un lycée technique de la place :

Montant(FCFA)	200	250	300	500	Total
Effectif	363	132	99	66	

Construire le diagramme circulaire de cette série statistique.

EXERCICE4

A la question de savoir « quel est ton musicien préféré ? » les réponses des élèves de 3e sont consignées dans le tableau suivant :

Modalité	Happy d'effoulan	Maahlox	Mister Léo	Singuilar	Total
Effectif	10	8	15	7	

Quel est le mode de cette série statistique ? Dire qui est le musicien préféré.

EXERCICE5

Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'un quartier de la ville de Douala selon leur pension

Pension	85000	9500	100000	1005000	65000
Nombre d'élèves	35	60	45	22	33

Représenter cette série par un diagramme semi-circulaire.

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

On considère la série statistique suivante :

1, 2, 4, 0, 2, 3, 1, 4, 2, 3, 2, 3, 1, 2, 3, 2, 0, 1, 1, 2

a- Donner le tableau des effectifs et des fréquences de cette série.

b- Déterminer le mode et la moyenne de cette série.

Exercice 2

On a relevé les âges des élèves d'une classe de 3e. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Ages(en années)	[12; 14[	[14; 16[	[16; 18[	[18; 20[
Effectifs	6	17	10	7

1- Déterminer l'effectif total des élèves de cette classe.
2- Déterminer la classe modale de cette série.
3- Représenter l'histogramme de cette série statistique.

Exercice 3

Une enquête faite auprès de 120 personnes auprès de 120 personnes portait sur le nombre de livres que chacune avait lus au cours du dernier mois et donnait les résultats suivants :

12 personnes n'avaient lus aucun livre ; 48 personnes avaient lu 1 livre ; 30 personnes avaient lus 2 livres ; 21 personnes avaient lus 3 livres et 9 personnes avaient lus 4 livres.

1) Recopier le tableau suivant et le compléter.

Nombre de livre lus	0	1	2	3	4
Effectif					
Fréquences					
Fréquences en %					
Effectif cumulés croissant					
Effectif cumulé décroissant					

2) En précisant quelle partie du tableau est utilisées répondre aux questions suivantes :
   a) Combien de personnes ont lu au moins 2 livres ?
   b) Combine de personnes ont lu moins de 3 livres ?
3) Quelle est en moyenne, le nombre de livres lus par ces 120 personnes ?
4) Construire un diagramme semi-circulaire pour représenter les effectifs de cette enquête et indiquer par un calcul l'angle correspondant à chaque secteur angulaire.

Exercice 4

Note sur 20	2	6	7	8	10	11	12	14	16	17	19
Nombre d'élève	1	2	1	3	4	2	5	3	1	2	1

Le professeur de Mathématiques d'une classe de troisième a représenté les résultats d'un contrôle dans le tableau ci-dessus :

1- Sachant qu'il n'y avait pas d'élèves absents lors de ce contrôle, combien y a t – il d'élèves dans cette classe ?
2- Quelle est la moyenne de la classe à ce contrôle ?
3- Combien d'élèves ont obtenu au moins la note 10,
4- Le professeur affirme « 48% des élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 11» A t – il raison ? Justifié votre réponse.

CHAPITRE 5: APPLICATIONS AFFINES

MOTIVATION :

Les fonctions affines sont des outils de modélisation pour résoudre des problèmes concrètes et quotidien tels que :

- La Planification de repas, d'activités agricoles ou commerciales
- Prévisions d'augmentation ou de diminution du prix d'un article
- Participation à une activité de formation à l'école ou en milieu scolaire

LECON 1 : APPLICATIONS AFFINES

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: à la fin de cette leçon l'élève doit être capable de :

- Calculer l'image et l'antécédent d'un nombre par une application affine
- Déterminer le sens de variation d'une application affine
- Représenter graphiquement une fonction affine
- Résoudre une situation concrète modélisée par une application affine ou affine par intervalles.

PREREQUIS :

1. Calculer la valeur numérique des expressions littérales suivantes pour $x = 7$:
   $P = 7x - 9$; $B = \frac{3}{5}x + 6$
2. Résoudre les équations et inéquations suivants :
   $-4x + \frac{2}{3} = 5$; $8x - 4 = 5x + 2$; $3x - 5 > -2x + 6$
3. Représenter dans un repère orthonormé les droites suivantes :
   (d_1): $3x - 2y = -7$; (d_2) $y - 3x = -5$

<u>**Solution :**</u>

1. Calcul valeur numérique des expressions littérales suivantes pour $x = 7$
   $P = 7 \times 7 - 9 = \mathbf{40}$; $B = \frac{3}{5} \times 7 + 6 = \mathbf{\frac{51}{5}}$
2. Résoudre les équations et inéquations suivants :
   $-4x + \frac{2}{3} = 5 \Leftrightarrow -4x = 5 - \frac{2}{3}$
   $\Leftrightarrow x = -\frac{13}{12}$
   $$\boldsymbol{S} = \left\{-\mathbf{\frac{13}{12}}\right\}$$
   $8x - 4 = 5x + 2 \Leftrightarrow 8x - 5x = 2 + 4$
   $\Leftrightarrow 3x = 6$
   $\Leftrightarrow x = 2$
   $$\boldsymbol{S} = \{\mathbf{2}\}$$
   $3x - 5 > -2x + 6 \Leftrightarrow 3x + 2x > 6 + 5$

$\Leftrightarrow x > \frac{11}{5}$

$$\boldsymbol{S} = \left]\frac{11}{5}; \rightarrow\right[$$

3. Résoudre graphiquement le système suivant
   Posons $(d_1): 3x - 2y = -7$ et $(d_2): -3x + y = -5$

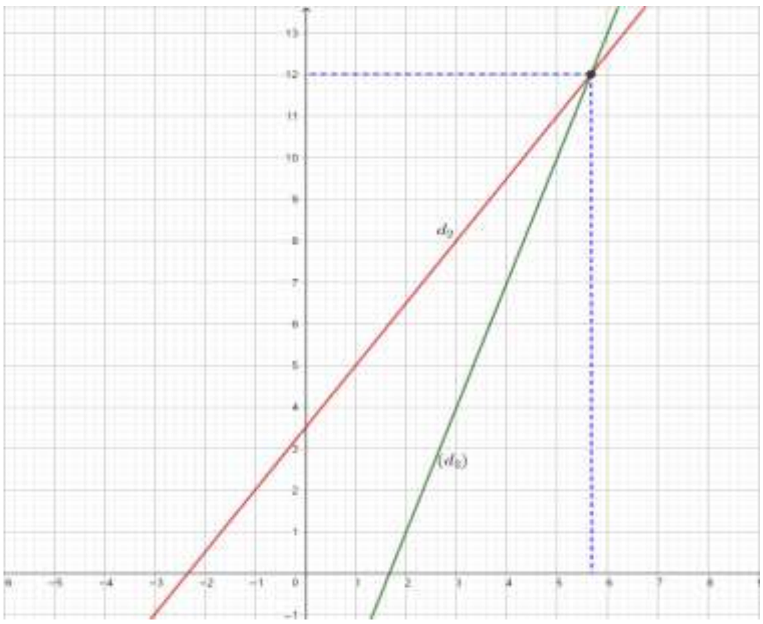
- (d_1): $3x - 2y = -7$ Table des valeurs

x	0	$\frac{-7}{3}$
y	$\frac{7}{2}$	0

- $(d_2): -3x + y = -5$ Table des valeurs

x	0	$\frac{5}{3}$
y	-5	0

Représentation des droites (d_1) et (d_2) dans un repère orthonormé.



SITUATION PROBLEME :

Pour la célébration de son mariage, Mme jeannette voudrait louer des marmites. De ce fait, elle se rend au service traiteur **''ici votre bonheur''** pour prendre des renseignements, le directeur du service lui propose deux (02) formules :

Formule A : 150 Francs CFA pour une marmite louée.

Formule B : abonnement mensuel de 500 Francs CFA à laquelle s'ajoute 100 Francs CFA par marmite louée.

Madame jeannette sollicite votre aide afin que vous lui donniez la meilleure formule à choisir pour 9 marmites louées et la meilleure formule à choisit pour 17 marmites louées.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Sur une semaine, on propose au public deux types de tarifs pour l'emprunt des livres dans la bibliothèque.

Le Tarif plein: 90 FCFA par livre emprunté.

Le tarif abonné : 50 FCFA par livre emprunté avec un versement d'une caution non remboursable de 1000 FCFA.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Nombres de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix payé au tarif plein				
Prix payé au tarif abonné				

2. On note $x (x \geq 1)$ le nombre de livres empruntés sur l'année et on désigne par $p(x)$ le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif plein et par $a(x)$ le prix payé pour l'emprunt de x livres au tarif abonné. Exprimer $p(x)$ et $a(x)$ en fonction de x.
3. On pose par la suite $p(x) = 90x \quad et \ a(x) = 50x + 1000$
   a) Résoudre l'équation $p(x) = a(x)$. Que représente la solution trouvée pour une personne empruntant des livres à la bibliothèque.
   b) Résoudre l'inéquation $p(x) > a(x)$ et interpréter la solution trouvée pour indiquer la formule la plus avantageuse selon les plages de valeurs de x.
4. On définit les droites (d_1) : $y = 0{,}9x$; (d_2): $y = 0{,}5x + 10$ avec y en milliers de francs CFA.
   a) Représenter les droites (d_1) et (d_2) dans un même repère et retrouver graphiquement la solution de la question 4a)

Résolution :

1. Recopions et complétons le tableau suivant :

Nombres de livres empruntés pendant l'année	10	20	50	100
Prix payé au tarif plein (en FCFA)	**900**	**1800**	**4500**	**9000**
Prix payé au tarif abonné (en FCFA)	**1500**	**2000**	**3500**	**6000**

2. Expression de $p(x)$ et $a(x)$ en fonction de x.
   x $étant$ le nombre de livres empruntés sur l'année alors on a :
   $\boldsymbol{p(x) = 90x \quad et \ a(x) = 50x + 1000}$

3. a) résolution de l'équation $p(x) = a(x)$.
$p(x) = a(x) \Leftrightarrow 90x = 50x + 1000$
$\Leftrightarrow 40x = 1000$
$\Leftrightarrow x = 25$

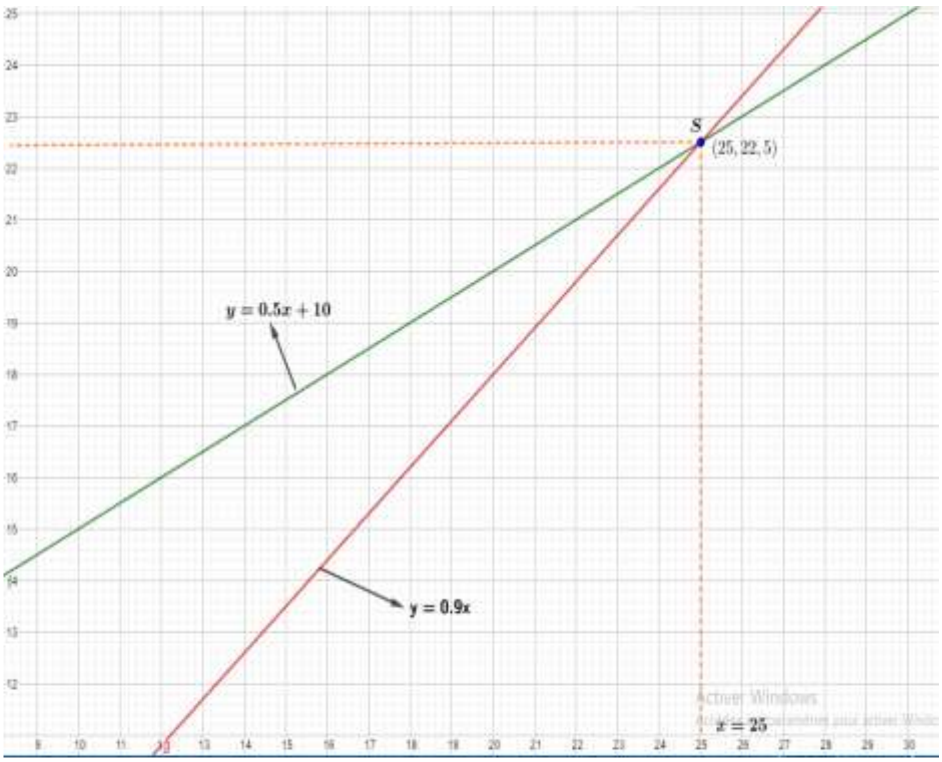
$$\boldsymbol{S = \{25\}}$$

Conclusion : La solution trouvée représente pour une personne empruntant des livres à la bibliothèque **le nombre de livre pour lequel cette personne dépensera la même somme** quelque soit le type de tarif choisit.

b) Résolution de l'inéquation $90x > 50x + 1000$
$90x > 50x + 1000 \Leftrightarrow 40x > 1000$
$\Leftrightarrow x > 25$

Conclusion : Le tarif abonné sera le plus avantageux pour $x > 25.\ ie\ x\epsilon]25;\ \rightarrow[$
Le tarif plein sera le plus avantageux pour $x < 25.\ ie\ x\ \epsilon]1;\ 25[$

4. Représentation des droites $(d_1) : y = 0{,}9x$; $(d_2): y = 0{,}5x + 10$



RESUME :

1. **Définition et vocabulaire**

Soit a et b deux nombres réels fixés. En associant à chaque nombre x un nombre $ax + b$ appelé image de x, on définit une **application affine.**
On note cette fonction ainsi : $\boldsymbol{g}: \mapsto \boldsymbol{ax+b}$ $\boldsymbol{ou}$ $\boldsymbol{g(x) = ax+b}$.

Remarque 1 :

- Un nombre réel x étant donné, le réel $g(x)$ est appelé **image de $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{g}$.**
- Un nombre réel y étant donné, le nombre réel x tel que $g(x) = y$ est appelé **antécédent de $\boldsymbol{y\ par\ \ g}$.**

Exemple :

Soit g la fonction affine définie par $g(x) = 2x - 3$

a) Calculer les images de $5, \ -3, \ 0$ par g

L'image de 5 par $\boldsymbol{g}$ est : $\boldsymbol{2 \times (5) - 3 = 7}$

L'image de -3 par $\boldsymbol{g}$ est : $\boldsymbol{2 \times (-3) - 3 = -9}$

L'image de 0 par $\boldsymbol{g}$ est : $\boldsymbol{2 \times (0) - 3 = -3}$

b) Calculer les antécédents par g de $23, \ 32, \ -19$

L'antécédent de 23 est 13 car $2x - 3 = 23 \iff x = 13$

L'antécédent de 32 est $\boldsymbol{\frac{35}{2}}$ car $2x - 3 = 32 \iff x = \frac{35}{2}$

L'antécédent de -19 est -11 car $2x - 3 = -19 \iff x = -11$

Remarque 2:

- Si $b = 0$, nous obtenons la fonction linéaire associée $f: x \longmapsto ax$
- La fonction $f: x \longmapsto 2x$ est la fonction linéaire associée à la fonction affine $g(x) = 2x - 3$.
- Une fonction linéaire est affine mais la réciproque est fausse.

2. Représentation graphique d'une fonction affine

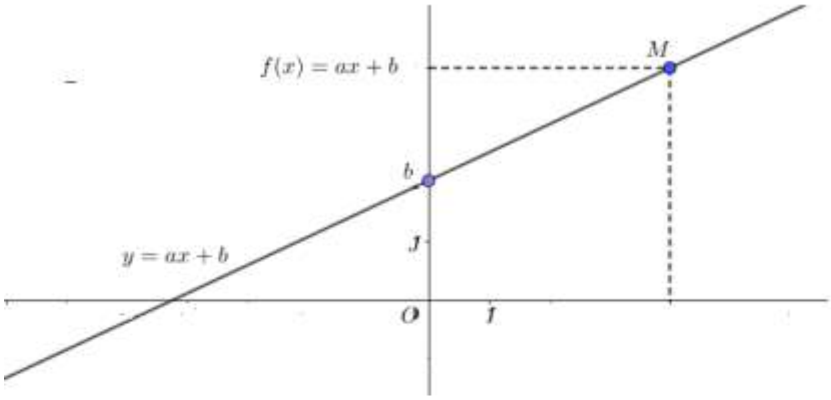
Propriété

Soit g la fonction affine définie par $g(x) = ax + b$, l'ensemble des points $M(x; ax + b)$ est appelé représentation graphique de la fonction affine.
Dans un repère, cette représentation est la droite

- Parallèle à droite représentant la fonction linaire associé.
- Passant par le point de coordonnées $(0; b)$

On dit que cette droite a pour équation $y = ax + b$ ou

- **a** est le coefficient directeur
- **b** l'ordonnée à l'origine. Il indique la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des ordonnées.



Propriété :
Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$. Soient m et n deux nombres.
On a :

$$\boldsymbol{a = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}}$$

Remarque 3 ;

- Si $a = 0$ la droite d'équation $y = ax + b$ est parallèle à l'axe des abscisses
- Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = ax + b$ et représente une fonction affine.

3. Sens de variation d'une fonction affine

Soient a et b deux nombres réels. Soit g la fonction affine définie par $g: x \longmapsto ax + b$.

- Si $a > 0$ alors g est **croissante**
- Si $a < 0$ alors g est **décroissante**
- Si $a = 0$ alors g est **constante**

Exemple :
Donner le sens de variations des applications affines ci-dessous, puis représenter ces applications dans un repère orthonormé.
$f: x \mapsto -2x + 3$; $h: x \longmapsto x - 1$; $g: x \longmapsto 5x$; $p: \longmapsto -7$

- $f: x \mapsto -2x + 3$ son coefficient est $-2 < 0$, donc f est **décroissante.**
- $h: x \longmapsto x - 1$ son coefficient est $1 > 0$, donc h est **croissante.**
- $g: x \longmapsto 5x$ son coefficient est $5 > 0$, donc g est **croissante.**
- $p: \longmapsto -3$ son coefficient est 0, donc p est **croissante.**

Représentons $\boldsymbol{f, h, g, p}$.

- $f: x \mapsto -2x + 3$, donc $y = -2x + 3$; table des valeurs

$\boldsymbol{x}$	0	$\frac{3}{2}$
$\boldsymbol{y}$	3	0

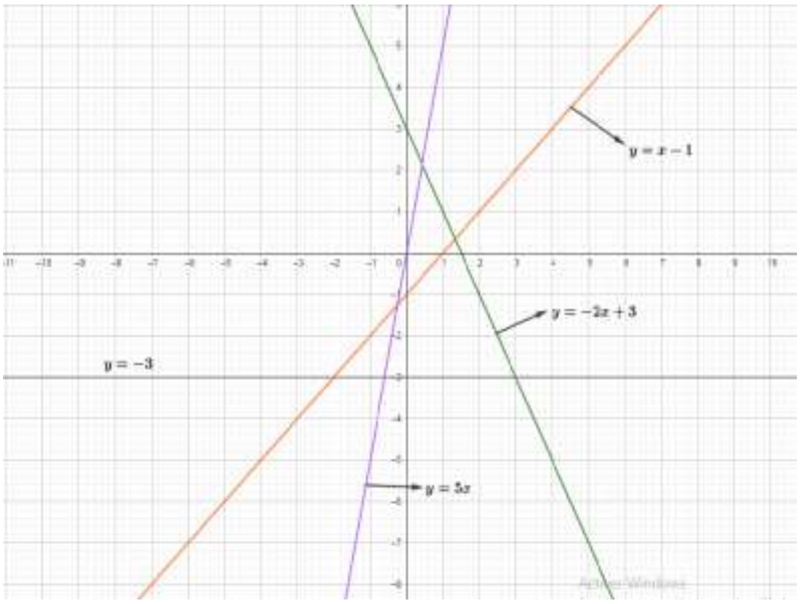
- $h: x \longmapsto x - 1$, donc $y = x - 1$; table des valeurs

x	0	1
y	-1	0

- $g: x \longmapsto 5x$, donc $y = 5x$; table des valeurs

x	0	1
y	0	5

- $p: \longmapsto -3$, donc $y = -3$



Remarques: f est une application. u et v sont deux réels.

- Si pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, on a $f(u) < f(v)$, alors **f est croissante.**
- Si pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, on a $f(u) > f(v)$, alors **f est décroissante.**
- Si pour tous nombres réels u et v tels que $u < v$, on a $f(u) = f(v)$, alors **f est constante.**

EXERCICES D'APPLICATIONS 1 :

Application 1 :

f désigne une application affine, déterminer le sens de variation de f dans chacun des cas suivants :

$a)$ $f(3) = -2$ et $f(5) = -4$ $b)$ $f(-1) = 3$ et $f(0) = 4$ $c)$ $f(-2) = 5$ et $f(-6) = -4$

C1) $f(4) = 6$ et $f(0) = 2$

Résolution :

$a)\ \ f(3) = -2\ \ et\ \ f(5) = -4$

$3 < 5\ et\ f(3) > f(5)\ \ car -2 > -4,\ \ donc\ f\ est\ \boldsymbol{décroissante}$

$b)\ \ f(-1) = 3\ \ et\ \ f(0) = 4$

$-1 < 0\ et\ f(-1) < f(0)\ \ car\ 3 < 4,\ \ donc\ f\ est\ \boldsymbol{croissante}$

$c)\ \ f(-2) = 5\ \ et\ \ f(-6) = -4$

$\text{C1})\ \ f(4) = 6\ \ et\ \ f(0) = 2$

$4 > 0\ \ et\ f(4) > f(0)\ \ car\ 6 > 2,\ \ donc\ f\ est\ \boldsymbol{croissante}$

Application 2 :

Soit f une fonction affine telle que $f(2) = -3\ \ et\ f(4) = 1.$ Déterminer la fonction affine f.

Résolution :

Première méthode :

$f(x)$ est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.

$$\begin{cases} f(2) = a \times 2 + b \\ \quad f(2) = -3 \\ f(4) = a \times 4 + b \\ \quad f(4) = 1 \end{cases} \quad \text{donc}\ \ a \times 2 + b = -3\ \ donc\ \ 2a + b = -3\ \ donc\ \ \boldsymbol{b = -3 - 2a}$$

$$donc\ \ a \times 4 + b = 1\ \ donc\ \ 4a + b = 1\ \ donc\ \ \boldsymbol{b = 1 - 4a}$$

On a donc $-3 - 2a = 1 - 4a\ \ donc\ \ 2a = 4\ \ donc\ \ \boldsymbol{a = 2}$

On a $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 - 2a \end{cases}$ donc $b = -3 - 2 \times 2 = -7$

$\underline{\boldsymbol{La\ fonction\ affine\ \ f\ est\ donc\ \ f : x \longmapsto 2x - 7}}$

Deuxième méthode :

$f(x)$ est une fonction affine donc $f(x) = ax + b$.

$a = \frac{f(2)-f(4)}{2-4} = \frac{-3-1}{-2} = 2$ Ainsi $f(x) = 2x + b$ car $\boldsymbol{a = 2}$

$f(2) = -3\ \ \ donc\ \ 2 \times 2 + b = -3\ \ donc\ \ \boldsymbol{b = -7}$

$\underline{\boldsymbol{La\ fonction\ affine\ \ f\ est\ donc\ \ f : x \longmapsto 2x - 7}}$

4. Application affine par intervalle (Représentation graphique)

La représentation graphique d'une application affine par intervalles est faite de segments, de droites ou de demi-droites.

Remarque :

Une fonction est dite **affine par intervalle** lorsqu'elle est d'abord affine et lorsque la variable appartient à un intervalle précis.

Exemple :

L'application f $définie\ \ par$: $\begin{cases} f(x) = 2x + 5 \quad si \quad x \leq -1 \\ f(x) = 2 \quad si \quad x[-1\,;3] \\ f(x) = -2x + 8 \quad si\ x \geq 3 \end{cases}$ est une application affine par intervalle.

Représentons dans le repère $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$.

- $f(x) = 2x + 5 \iff y = 2x + 5$

  Pour $x \leq -1$ $c'est$ à $x \,\epsilon\, [\leftarrow;\, -1]$

  D'où le tableau

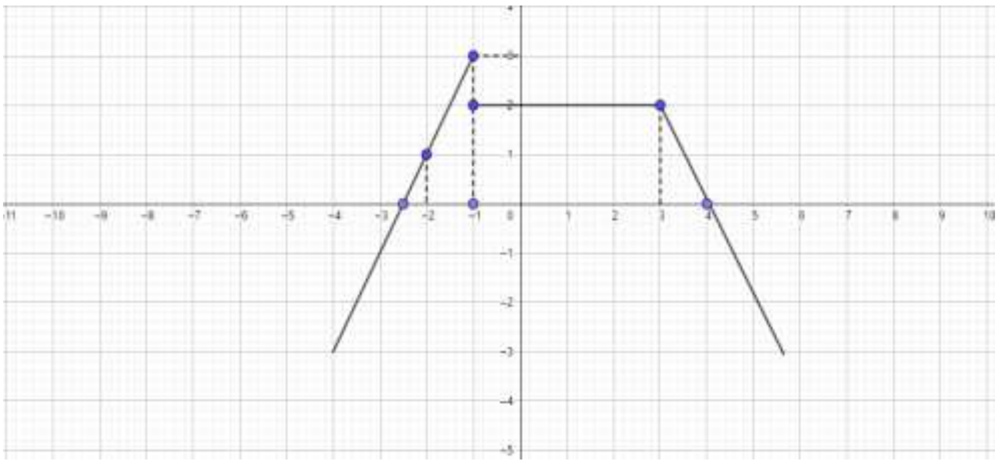
x	-2	$-2{,}5$	-1
y	1	0	3

- $f(x) = 2 \iff y = 2, \quad pour \quad -1 \leq x \leq 3$

- $f(x) = -2x + 8 \iff y = -2x + 8,\ pour\ \ x \geq 3\ \ c'est\ \ x\,\epsilon\ [3; \rightarrow[$

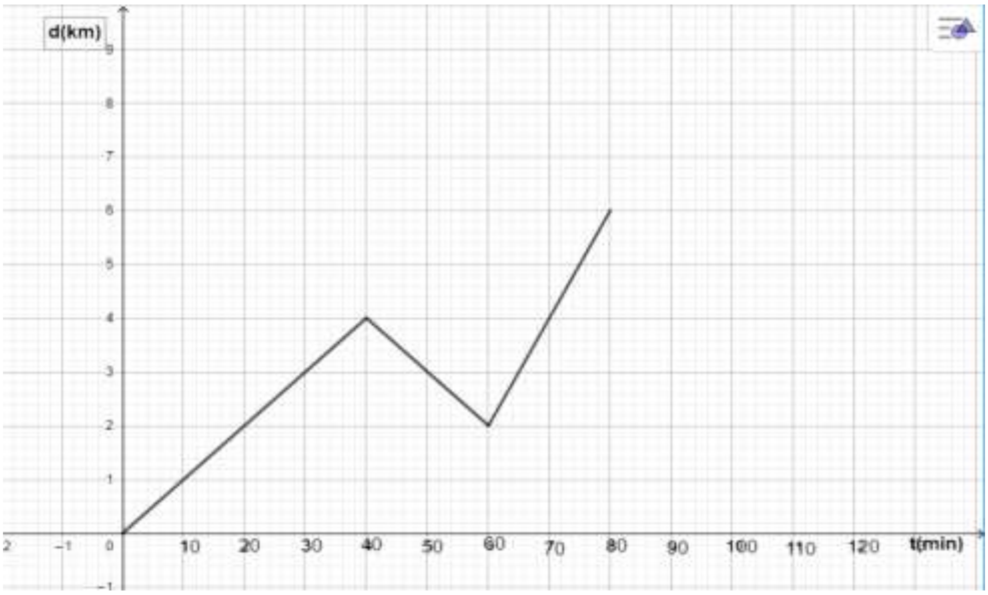
  D'où le tableau

x	3	4	6
y	2	0	-4



EXERCICE D'APPLICATION 2 :

Charline est partie de son village à midi en direction du village voisin situé à 6 km. Le graphique ci-dessous indique la distance **d** en km, de Charline à son village en fonction du temps écoulé **t,** en minutes, depuis son départ.



1. a) A quelle distance de son village se trouvait Charline 20 minutes après son départ ?
   c) Combien de temps a-t-elle mis pour parcourir 3km ?
2. Charline a dû rebrousser chemin pour trouver son porte-monnaie qui est tombé.
   a) A quel moment cela s'est-il produit ?
   b) Quand est-elle repartie vers le village voisin ?
3. Combien de temps a-t-elle finalement mis pour arriver au village voisin ?

<u>Résolution :</u>

1. a) Charline se trouvait à **2 km** de son village après 20 minutes de son départ.
   c) Elle a mis **30 min** pour parcourir 3 km.

2. a) Charline a rebroussé chemin après **40 minutes** de son départ.
   c) Elle est repartie vers le village après **60 minutes** de son départ de son village.
   d) Elle a mis 80minutes soit **1h 20 min** pour arriver au village voisin.

<u>Travail à faire à la maison:</u>

<u>Exercice 1 :</u> Représenter graphiquement dans le repère orthonormé $(\boldsymbol{O}, \boldsymbol{I}, \boldsymbol{J})$. La fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 \quad si \;\; x \leq 1 \\ f(x) = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3} \quad si \; 1 \leq x \leq 4 \\ f(x) = x - 4 \qquad si \; x \geq 4 \end{cases}$$

<u>Exercice 2 :</u> Résoudre la situation problème.

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

1- Soit la fonction affine définie dans $R\ par\ f(2) = 3\ et\ f\ (-1) = 1$
   a) Donne l'expression de $f(x)$ puis représente f dans un repère
   b) Résous graphiquement l'équation $f(x) = -1$, puis retrouve le résultat par le calcul

Exercice 2

Soit le nombre réel m tel que $m\ =\ 2\sqrt{11} - 4\sqrt{3}$

1- a) Comparer $2\sqrt{11}$ et $4\sqrt{3}$
b) En déduis le signe de m.
2- soit f une application affine définie par $f(x)\ =\ mx\ +\ 5$.
a) f est-elle croissante ou décroissante ?
b) Sans le calcule, range par ordre croissant les nombres suivants : $f(5/2)$; $f(2\ -\ 3\sqrt{5})$; $f(-2)\ et\ f(1)$.

Exercice 3

On considère deux fonctions affines : $f(x) = \frac{4}{3}x$ et $g(x)\ =\ -x + 6$

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), unité : 1 cm.
1. Construis les représentations graphiques des fonctions $f\ et\ g$.
2. Soit A le point d'intersection de ces deux droites. Déterminer par le calcul les coordonnées du point A

MODULE N°15 : CONFIGURATIONS ET TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES DU PLAN

CHAPITRE 6 : THEOREME DE THALES

MOTIVATION : Plusieurs techniciens sont de nos jours confrontés aux problèmes de calcul de longueur, du parallélisme lorsqu'ils sont en face de certaines configurations. Ce chapitre leur permettra de pallier à ce problème.

LECON 1 : Propriété directe de Thales

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable

- ✓ De reconnaitre une configuration permettant d'employer les propriétés de Thales,
- ✓ D'utiliser la propriété directe pour calculer une distance,
- ✓ D'utiliser la propriété directe pour partager un segment dans un rapport donné.

PREREQUIS : ………………………………………………………………………

1. Dans chacun des cas suivants, détermine la valeur de R, avec $R \neq 0$:

a) $\frac{R}{15} = \frac{1}{5}$, b) $\frac{13}{R} = \frac{1}{5}$, c) $\frac{17}{15} = \frac{R}{3}$, d) $\frac{3}{7} = \frac{3}{R}$

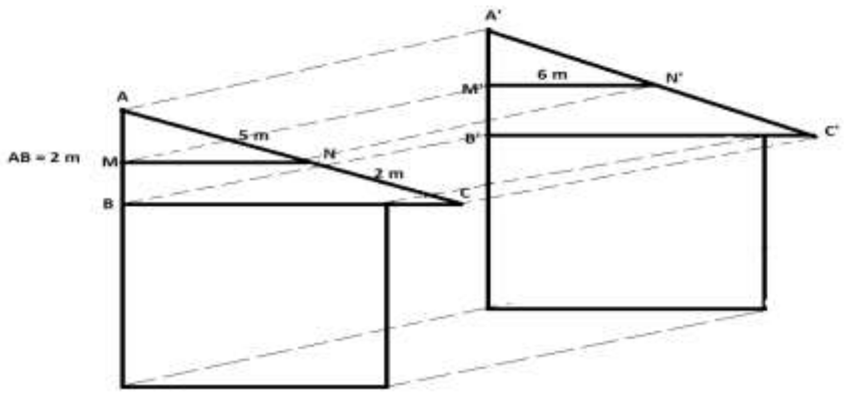
2. Quand dit-on que deux droites (D) et (D') sont parallèles ?

Résolution :

1. a) $\frac{R}{15} = \frac{1}{5}$ est équivalent à $R \times 5 = 1 \times 15$, donc $R = \frac{1\times15}{5} = \frac{15}{5} = 3$. $\boldsymbol{R = 3}$
   b) $\frac{13}{R} = \frac{1}{5}$ est équivalent à $13 \times 5 = R \times 1$, donc $R = \frac{13\times5}{1} = 13 \times 5 = 65$. $\boldsymbol{R = 65}$
   c) $\frac{17}{15} = \frac{R}{3}$ est équivalent à $17 \times 3 = 15 \times R$, donc $R = \frac{17\times3}{15} = \frac{51}{15} = 3{,}4$. $\boldsymbol{R = 3{,}4}$
   d) $\frac{3}{7} = \frac{3}{R}$ est équivalent à $3 \times R = 7 \times 3$, donc $R = \frac{7\times3}{3} = 7$. $\boldsymbol{R = 7}$
2. Deux droites (D) et (D') sont parallèles si elles sont perpendiculaires à une même troisième.

SITUATION PROBLEME ………………………………………………………

Après avoir monté les murs de son magasin, M. Mengue a contacté un charpentier qui lui a fait un dessin de la charpente portant les dimensions des lattes nécessaires (voir la figure ci-dessous). A sa grande surprise, il constante que les dimensions des lattes AM et BC ont été effacées. Aide son fils qui fait la classe de 4eme année MACO à déterminer ces dimensions sachant que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

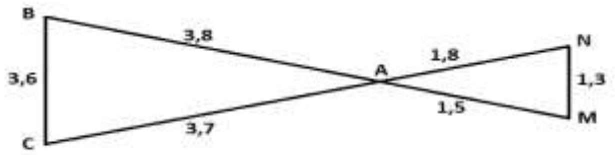


ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

I. ABC est un triangle tel que $AB = 8cm$ et $AC = 12cm$ et $BC = 14cm$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = 6cm$. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N tel que.

1. Faire la figure ;
2. Utilise ta règle graduée pour donner une valeur approchée de AN et MN;
3. Calculer les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ puis conclure ;
4. Détermine les dimensions des lattes AM et BC.

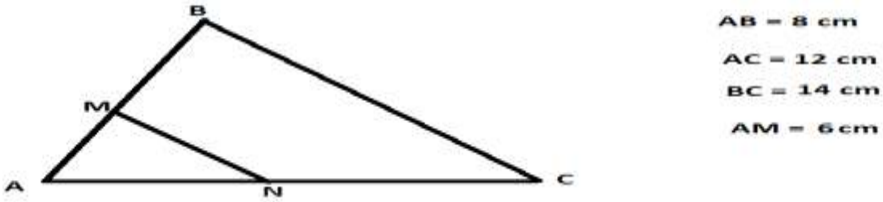
II. Reproduis la figure ci-dessous où (MN) et (BC) sont parallèles



Calcule les rapports $\frac{AM}{AB}$, $\frac{AN}{AC}$ et $\frac{MN}{BC}$ puis conclure.

Résolution :

1. Figure



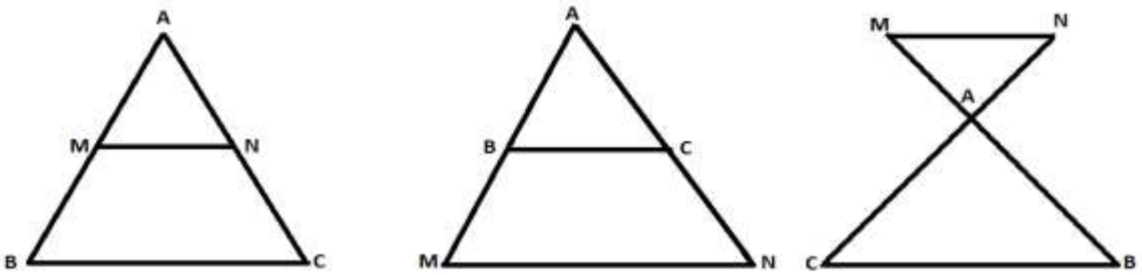
2. On trouve $AN = 8{,}8cm$ et $MN = 10{,}4cm$
3. On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{6}{8} = 0{,}7$; $\frac{AN}{AC} = \frac{8{,}8}{12} = 0{,}7$; $\frac{MN}{BC} = \frac{10{,}4}{14} = 0{,}7$. Conclusion : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = 0{,}7$
4. En considérant le triangle ABC, comme $(MN)//(BC)$, d'après ce qui précède, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
   $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ donc $AM = \frac{AB \times AN}{AC} = \frac{2\times 5}{7} = 1{,}4\ m$
   De même, $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ donc $BC = \frac{AC \times MN}{AN} = \frac{7\times 6}{5} = 8{,}4\ m$

Les lattes AM et BC mesurent respectivement $1{,}4\ m$ et $8{,}4\ m$.

II. On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{1{,}5}{3{,}8} = 0{,}4$, $\frac{AN}{AC} = \frac{1{,}8}{3{,}7} = 0{,}4$, $\frac{MN}{BC} = \frac{1{,}3}{3{,}6} = 0{,}4$. Conclusion : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

RESUME :

- **Propriété directe**
  ABC et AMN sont des triangles. Mappartient à (AB) et N appartient à (AC). Si (MN) est parallèle à (BC), alors d'après la propriété directe de Thales, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.
  Nous avons trois configurations possibles :

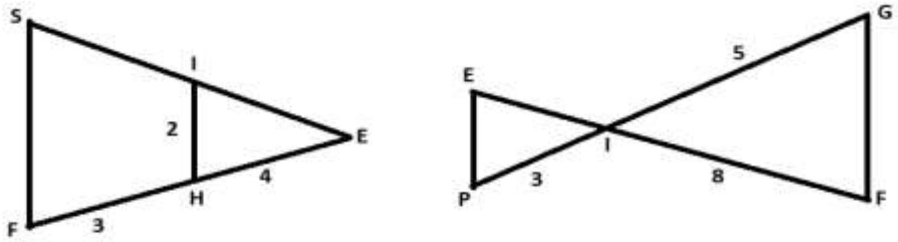


- **Conséquence de la propriété directe**

En considérant les trois configurations ci-dessus avec (MN) // (BC), on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Exemple : Sur les figures ci-dessous, $(IH)//(SF)$ et $(GF)//(EP)$. Calculons SF et IE



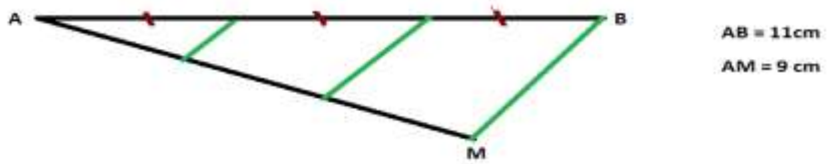
<u>Utilisation</u> : **La propriété directe de Thales est utilisée pour :**

- ✓ Calculer une distance
- ✓ Partager un segment dans un rapport donné ;

  Pour partager un segment $[AB]$ en n parties égales, on procède de la manière suivante :
  - On trace le segment $[AB]$,
  - On place un point M n'appartenant pas à $[AB]$ tel que la distance AM soit un multiple de n.
  - On subdivise le segment $[AM]$ en n parties égales,
  - On trace les parallèles à la droite (MB) passant par les points de la subdivision,
  - Le théorème de Thales permet de conclure que le segment $[AB]$ est subdivisé en n parties égales

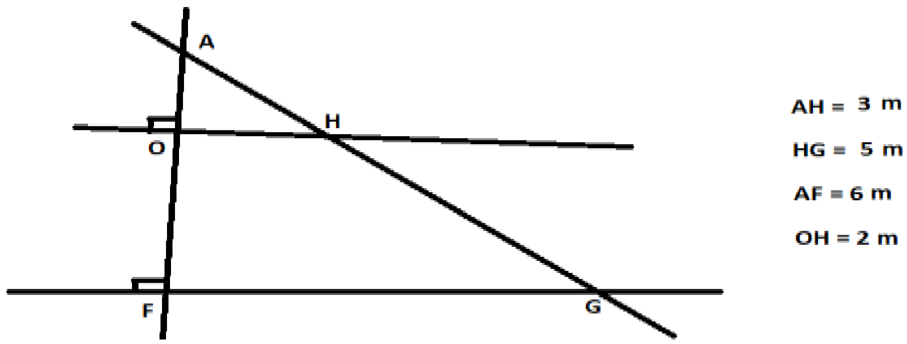
Exemple Partage le segment [AB] de longueur 11cm en 3 parties égales.

Résolution



EXERCICES D'APPLICATIONS :

On considère la figure suivante :



1. Justifie pourquoi les droites (OH) et (FG) sont parallèles.
2. En déduire les distances AO et FG.

Résolution :

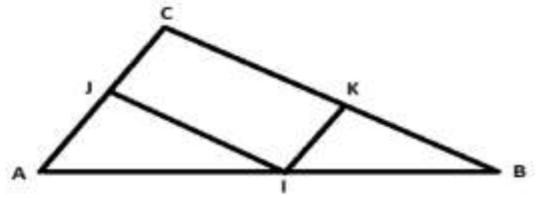
1. Comme les droites (OH) et (FG) sont toutes perpendiculaires à la droite (AF) alors elles sont parallèles.
2. Calculons les distances AO et FG.

   Considérons le triangle AFG, Comme les droites (OH) et (FG) sont parallèles d'après la question 1),

- d'après la propriété directe de Thales, on a :
$\frac{AO}{AF} = \frac{AH}{AG}$, c'est-à-dire $AO = \frac{AF \times AH}{AG} = \frac{AF \times AH}{AH+HG} = \frac{6\times3}{3+5} = \frac{18}{8} = 2{,}25m$. Donc $AO = 2{,}25m$.
- d'après la conséquence de la propriété de Thales, on a :
$\frac{AH}{AG} = \frac{OH}{FG}$, c'est-à-dire $FG = \frac{AG \times \text{OH}}{AH} = \frac{8\times2}{3} = \frac{16}{3} = 5{,}33m$. Donc $FG = 5{,}33m$.

Exercice 1

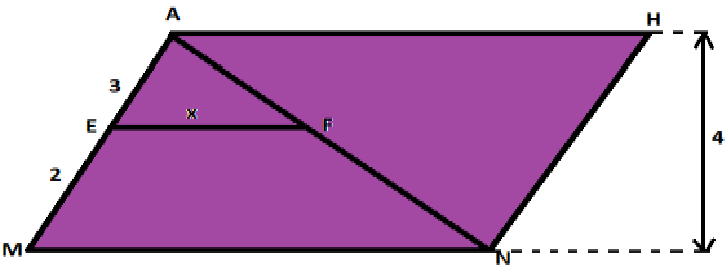
Dans la figure ci-dessous, $(IJ) // (BC)$ et $(KI) // (AC)$. De plus, on a $AI = \frac{3}{4}AC$



1. Ecrire les égalités de rapport découlant de l'énoncé de Thales.
2. En déduire que $KI = \frac{1}{4}AC$

Exercice 2

Hassan veut carreler un sol ayant la forme d'un parallélogramme. Pour cela, il souhaite déterminer l'aire de ce sol à fin d'estimer le nombre de mètre carré de carreau qu'il faudra pour cette surface. Le sol est représenté par la figure ci-dessous.



En te basant sur la figure et en utilisant le fait que (EH) est parallèle à (AH) détermine la surface de ce sol en fonction du nombre réel x.

NB : L'unité de longueur est le mètre.

LECON 2 : Propriété réciproque de Thales

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable d'utiliser la propriété réciproque pour justifier un parallélisme.

PREREQUIS : ……………………………………………………………………

1. Compare les fractions suivantes : $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{7}$,
2. Donne l'arrondi d'ordre 1 des nombres réels 5,2500011 et 5,249999 puis compare les.

Résolution

1. $\frac{3}{5} = \frac{3\times7}{5\times7} = \frac{21}{35}$ et $\frac{5}{7} = \frac{5\times5}{7\times5} = \frac{25}{35}$, comme $\frac{21}{35} < \frac{25}{35}$ alors $\frac{3}{5} < \frac{5}{7}$
2. Posons N et M les arrondis de 5,199999 et 5,200001 respectivement. On a : $N = 5{,}2$ et $M = 5{,}2$. On constate que $N = M$.

SITUATION PROBLEME : ……………………………………………………………………

Pendant le déroulement des épreuves pratiques du CAP industriel, il est demandé aux élèves de A4 MENU de réaliser la charpente dont la maquette est donnée ci-dessous (figure 1). La charpente est réussie si les lattes MN et BC gardent le même écartement entre elles. La pièce représentée par la figure 2 est la charpente réalisée par le candidat VOUGMO. A-t-il réussi ?

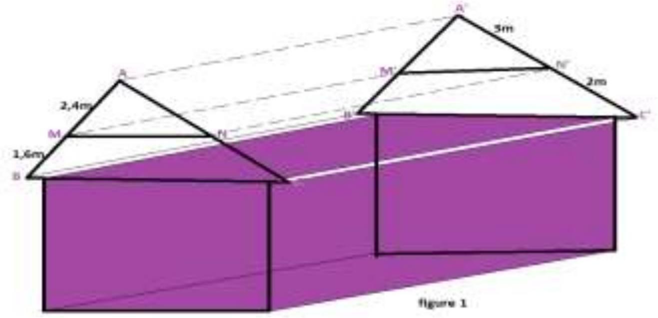


figure 1

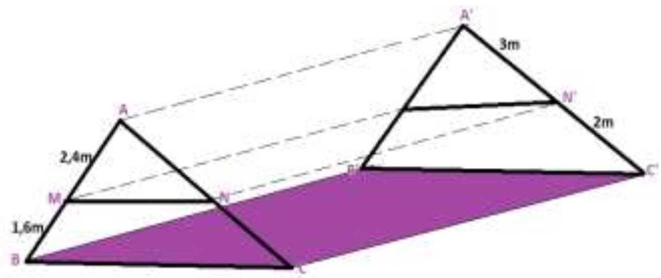


figure 2

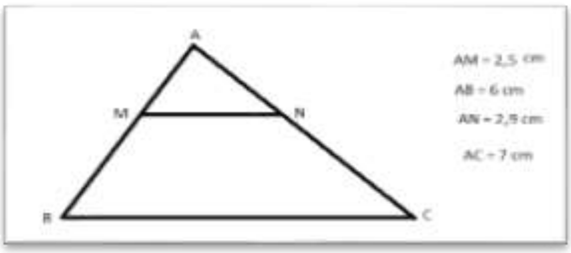
ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

ABC est un triangle tel que $AB = 6cm$ et $AC = 7cm$. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = 2{,}5cm$ et N un point du segment $[AC]$ tel que $AN = 2{,}9cm$.

1. Faire la figure ;
2. Calcule les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ puis conclure ;
3. En utilisant ton équerre, vérifie que les droites (MN) et (BC) sont parallèles ;
4. Quelle conclusion peut-on tirer ?
5. En s'inspirant de ce qui précède, le candidat VOUGMO a-t-il réussi sa charpente ?

Résolution :

1. Figure



2. Calculons les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$,

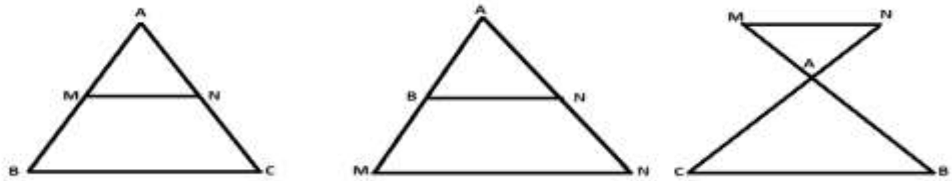
On a : $\frac{AM}{AB} = \frac{2,5}{6} = 0,4$ de même $\frac{AM}{AB} = \frac{2,9}{7} = 0,4$ conclusion $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

3. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
4. Comme $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
5. Considérons le triangle ABC de la charpente réalisée par le candidat VOUGMO. Nous avons :
   $\frac{AM}{AB} = \frac{2,4}{4} = 0,6$ et $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6$

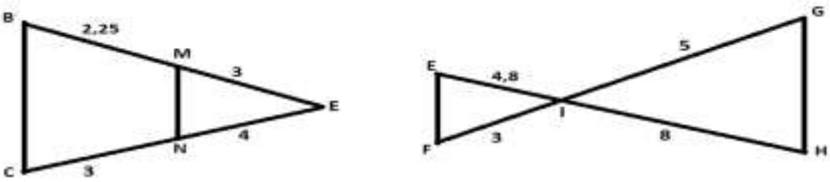
On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, donc d'après ce qui précède, les droites (MN) et (BC) sont parallèles et donc elles gardent le même écartement entre elles. Par conséquent, le candidat VOUGMO a réussi sa charpente.

RESUME :

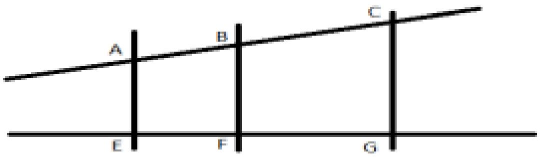
- **Propriété réciproque de Thales**
  Soit ABC un triangle. M appartient à la droite (AB) et N appartient à la droite (AC) tels que les points A, M et B soient alignés dans le même ordre que les points A, N et C.
  Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors d'après la propriété réciproque de Thales, (MN) est parallèle à (BC).
  Nous avons trois configurations possibles :



Exemple Pour chacune des figures ci-dessous, montre que $(MN)//(BC)$ et que $(EF)//(GH)$

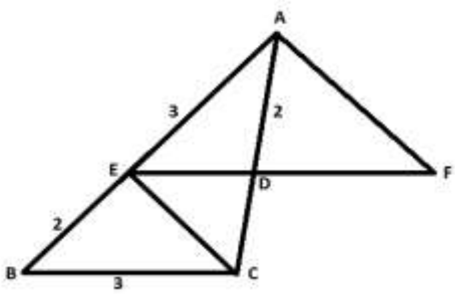


- Dans la configuration ci-dessous, si $(AE)//(BF)$, $(BF)//(CG)$ alors on a :
  $\frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EG}$; $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG}$.



EXERCICES D'APPLICATIONS :……………………………………………

On considère la figure ci-dessous où la droite (ED) est parallèle à la droite (BC). L'unité de mesure est le cm.



1. Calcule la distance la distance AC puis DC.
2. Calcule la distance ED.
3. F est un point de la droite (ED) tel que $DF = 2{,}7$. Les droites (CE) et (FA) sont-elles parallèles ?

Résolution

1. Calculons les distances AC et DC.
   - Comme la droite (ED) // (BC), d'après la propriété directe de Thales, $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$

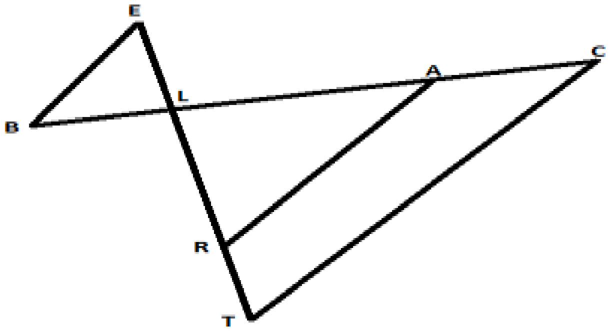
   On en déduit $AC = \frac{AB \times AD}{AE} = \frac{5\times2}{3} = \frac{10}{3} = 3{,}3$. $AC = 3{,}3cm$
   - $DC = AC - AD = 3{,}3 - 2 = 1{,}3$. Donc $DC = 1{,}3cm$
2. D'après la conséquence de la propriété de Thales, on a : $\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$

   On en déduit $ED = \frac{AE \times BC}{AB} = \frac{3\times3}{5} = \frac{9}{5} = 1{,}8$. $ED = 1{,}8cm$
3. On a $\frac{DE}{DF} = \frac{1{,}8}{2{,}7} = 0{,}6$ et $\frac{DC}{DA} = \frac{1{,}3}{2} = 0{,}6$. Comme $\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DA}$, alors d'après la propriété réciproque de Thales, les droites (CE) et (FA) sont parallèles.

Exercice 1

On considère la figure ci-dessous où (AR) // (CT). Les points E, L, R et T sont alignés. Les points C, A, L et B sont également alignés.

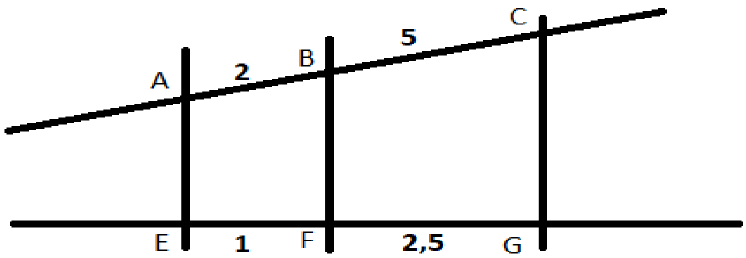
On donne $LC = 6cm, LT = 9cm, LA = 4{,}8cm, LB = 1{,}5$ et $LE = 3cm$.



1. Calcule la distance RL,
2. Les droites (BE) et (TC) sont-elles parallèles ?

Exercice 2

L'unité de longueur est le Centimètre. On donne la figure ci-dessous :



Démontre que les droites (AE), (BF) et (CG) sont deux à deux parallèles.

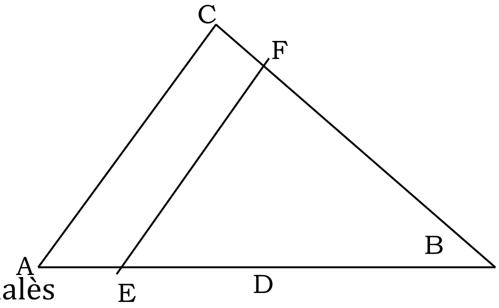
ENTRAINE-TOI

Exercice 1

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en C. D et E sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD], la perpendiculaire à (BC) passant par E coupe (BC) en F .

1- Justifie que (AC) et (EF) sont parallèles.

2- montre que $\frac{EF}{AC} = \frac{3}{4}$



Exercice 2

1- Présente et dessine les trois configurations de Thalès

2- Recopier et compléter les phrases par « directe » ou « réciproque »

Pour calculer les distances, on utilise la propriété ……………………………… de Thalès, alors que pour justifier le parallélisme, on utilise la propriété……………………………

3- Sur la figure ci-contre (AG) et (RB) sont parallèles.

L'unité de longueur est le centimètre.

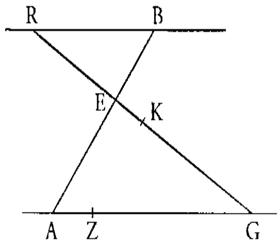
On donne : $BE = 3$; $AE = 5$; $AG = l0$ et $EG = 8$.

Les dimensions ne sont pas respectées sur le schéma.

a) Calcule les distances RB et RE.

b) On donne GK = 6,4 et GZ = 8.

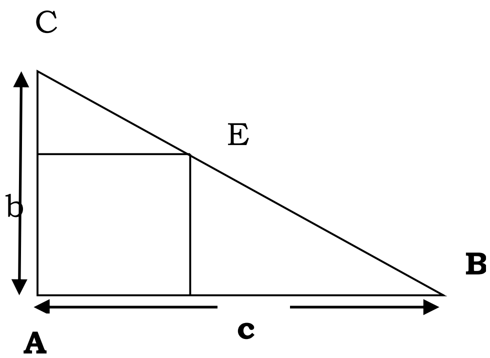
Montrer que les droites (ZK) et (AE) sont paralleles.



Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A dont les côtés $[AB]$ et $[AC]$ mesurent respectivement c et b.

Utilise le théorème de Thalès pour calculer la longueur x du côté du carré inscrit dans ce triangle en fonction de b et c.



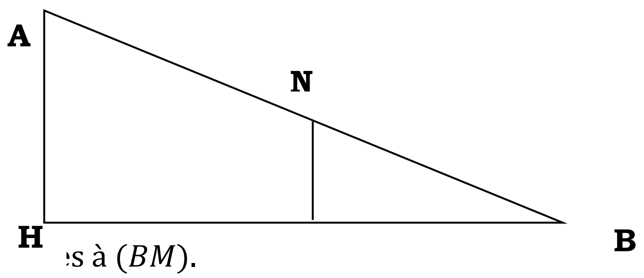
Exercice 4

Deux demi-droites $[AX)$ et $[AY)$ et trois cercles de centre A, de rayons respectifs 1 ; 2 ; et 4 coupent $[AX)$ respectivement en B, M et P et $[AY)$ respectivement en C, N et Q.

1) Fait une figure (unité 1cm)
2) Prouve que les droites (AB), (MN) et (P Q) sont parallèles.

Exercice 5

On considère le schéma suivant :



(AH) et (MN) sont perpendiculaires à (BM).

$AH = 15\ cm, BH = 20\ cm$ et $BM = 12\ cm$

1) Démontre que (AH) et (MN)sont paralleles
2) a – Calcule le rapport $\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BH}}$

   b- en déduire la valeur du rapport $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AH}}$
3) Calcule MN

CHAPITRE 3 : TRIGONOMETRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

MOTIVATION : ....

Il arrive dans la vie des situations où l'armée, les équipes de recherche doivent déterminer la position d'un homme, d'un avion, d'un navire… Ils font alors recours à l'une des techniques de la trigonométrie appelée la triangulation qui consiste à mesurer deux angles et une distance précise.

LECON 1 : COSINUS, SINUS ET TANGENTE D'UN ANGLE AIGU

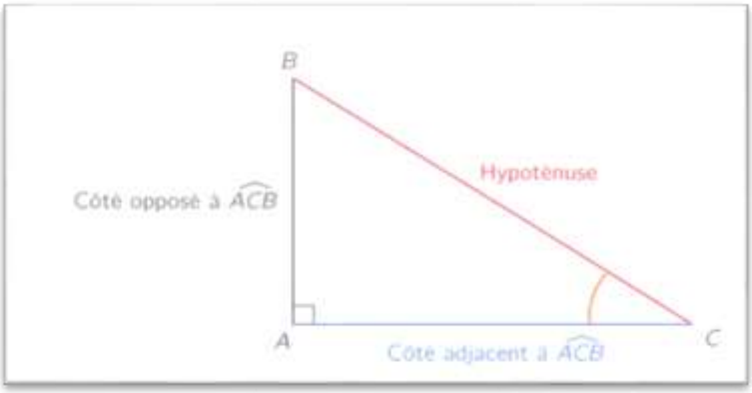
DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de:

- Calculer le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle
- Utiliser la calculatrice pour trouver le sinus, cosinus et/ou la tangente d'un angle de mesure connue
- Utiliser la calculatrice pour trouver la mesure d'un angle de sinus, cosinus et/ tangente connu

PREREQUIS : ....

1. On considère un triangle ABC rectangle en A.
   - Le côté [AB] est appelé côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$.
   - Le côté [AC] est appelé côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$.
   - Le côté [BC] est appelé hypoténuse.

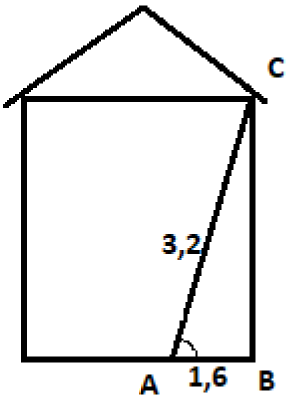


En considérant le même triangle ABC rectangle en A,

   - Donner le côté opposé à l'angle $\widehat{ABC}$.
   - Donner le côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$.

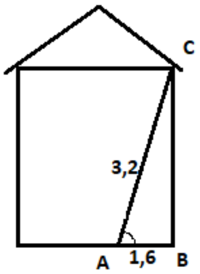
2. Utilisation de la calculatrice.

SITUATION PROBLEME :



En attendant les ouvriers et pour soutenir le plafond de son salon, M. Tindo cale une poutre en dessous de celui-ci (en C sur la figure). Cette poutre a une longueur de 3,2m. La distance AB du pied de la poutre au mur du salon est de 1,6 m. Le plafond étant bien soutenu, pour d'éventuels autres problèmes de ce genre, M Tindo souhaite connaitre la mesure de l'angle formé par la poutre et le sol. Aide-le à Calculer.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :



Sur la figure ci-contre, considérons le triangle ABC rectangle en B.

1. Soit dans le triangle ABC, l'angle $\widehat{BAC}$. Calculer le rapport $\frac{Longueur\ du\ côté\ adjacent}{Longueur\ de\ l'hypoténuse} = \frac{AB}{AC}$.
2. Soit M un point de (AC) et N son projeté orthogonal sur (AB). Justifier que $\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM}$; $\frac{BC}{AC} = \frac{NM}{AM}$ et $\frac{BC}{AB} = \frac{NM}{AN}$.

Les nombres $\frac{AN}{AM}$; $\frac{NM}{AM}$ et $\frac{NM}{AN}$ gardent chacun une valeur constante pour tout point M de (AC).

Nous admettons que ces nombres ne dépendent que de l'angle $\widehat{BAC}$.

Le premier, égal à $\frac{AB}{AC}$ est le **cosinus** de l'angle $\widehat{BAC}$. Il est noté cos $\widehat{BAC}$.

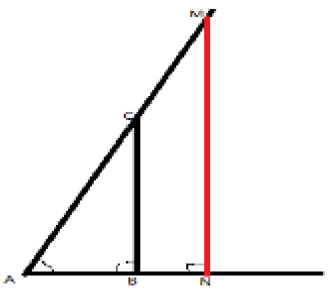
Le second, égal à $\frac{BC}{AC}$ est le **sinus** de l'angle $\widehat{BAC}$. Il est noté sin $\widehat{BAC}$.

Le troisième, égal à $\frac{BC}{AB}$ est la **tangente** de l'angle $\widehat{BAC}$. Elle est notée tan $\widehat{BAC}$.

3. A l'aide d'une calculatrice, après s'être assuré qu'elle est sur degré, entrez le résultat obtenu à la question ci-dessus, puis pressez la touche 2ndF et la touche cos. La valeur obtenue est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. On note mes $\widehat{BAC}$.

Résolution :

1. $\frac{Longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \widehat{BAC}}{Longueur\ de\ l'hypoténuse} = \frac{AB}{AC} = \frac{1,6}{3,2} = 0,5.$
2.



Dans le triangle ANM où les droites (BC) et (NM) sont parallèles, d'après la propriété de Thalès, on a :
$\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM}$.

On a également :

$\frac{BC}{NM} = \frac{AC}{AM} \Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{NM}{AM}$.

On a finalement :

$\frac{BC}{NM} = \frac{AB}{AN} \Leftrightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{NM}{AN}$.

3. 0,5 2ndF cos $= cos^{-1}0{,}5 = 60°$. mes $\widehat{BAC} = 60°$.

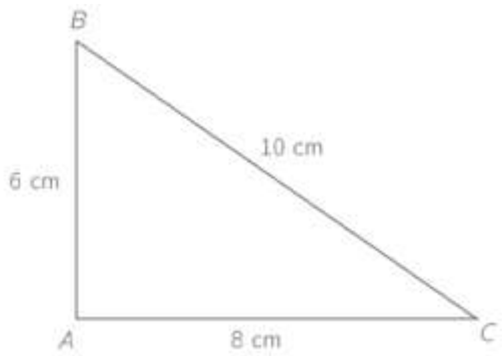
Réponse à la situation problème : La mesure de l'angle formé par la poutre et le sol est 60°.

RESUME :

Dans un **triangle rectangle**,

- Le **cosinus** d'un angle aigu est égal à $\frac{Longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ cet\ angle}{Longueur\ de\ l'hypoténuse}$
- Le **sinus** d'un angle aigu est égal à $\frac{Longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ cet\ angle}{Longueur\ de\ l'hypoténuse}$
- La **tangente** d'un angle aigu est égale à $\frac{Longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ cet\ angle}{Longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ cet\ angle}$

Exemple :



Dans le triangle ABC ci-contre rectangle en A, on a :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Propriétés :

- Le sinus, le cosinus et la tangente n'ont pas d'unité
- Le sinus et le cosinus d'un angle aigu sont compris entre 0 et 1
- La tangente d'un angle aigu est toujours supérieure à 0, mais pas nécessairement inférieure à 1 comme le cosinus et le sinus.

NB : Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu ne se calculent que dans un triangle rectangle.

Utilisation de la calculatrice :

Régler la calculatrice sur la position « Degré » (les choix sont Degré, Radian ou Grade).

- Pour calculer sin 25° par exemple, en fonction des calculatrices, on peut entrer : 25 sin ou encore sin 25 =

- Pour trouver la mesure de l'angle dont le sinus est égal à 0,814 par exemple, en fonction des calculatrices, on peut entrer :
  0,814 2ndF sin $= sin^{-1}(0{,}814) = 54{,}488 \ldots$
  ou encore shift sin(0,814)$= sin^{-1}(0{,}814) = 54{,}488 \ldots$

Une manipulation analogue nous permet de manipuler le cosinus et la tangente.

Exemple : Complète le tableau ci-dessous en utilisant la calculatrice.

Dans les cases de la première ligne du tableau, tu écriras les valeurs approchées entières pour les mesures des angles.

Dans les autres cases, tu écriras les arrondis d'ordre 3.

a°	6	10		47			72			89
cos a°								0,242		
Sin a°					0,5					
tan a°			0,488			1,732			11,430	

Solution :

a°	6	10	26	47	30	60	72	76	85	89
cos a°	0,995	0,985	0,899	0,682	0,866	0,5	0,309	0,242	0,087	0,017
Sin a°	0,105	0,174	0,438	0,731	0,5	0,866	0,951	0,970	0,996	1
tan a°	0,105	0,176	0,488	1,072	0,577	1,732	3,078	4,011	11,430	57,290

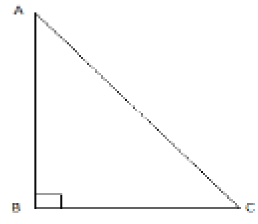
EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. ABC est un triangle rectangle en B tel que : AC=7,5 et BC=4,5.
   Calcule sin $\hat{A}$.
2. ABC est un triangle rectangle en A tel que : AC=10,8 et BC=13,5.
   Calcule cos $\hat{C}$.
3. L'unité de longueur est le centimètre.
   ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que : AB=2 et BC=1,5.
   Calcule cos $\hat{C}$.
4. ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB=7,5 et AC=12,5.
   Calcule tan $\hat{C}$.
5. Utilise une calculatrice pour compléter le tableau ci-dessous.
   Dans les cases de la première ligne du tableau, tu écriras les valeurs approchées entières pour les mesures des angles.
   Dans les autres cases, tu écriras des arrondis d'ordre 3.

a°	7°	21°			
cos a°				0,951	
sin a°			0,574		
tan a°					0,675

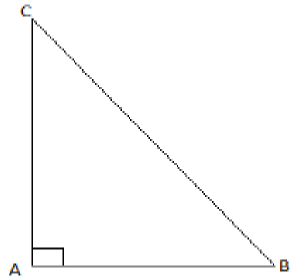
SOLUTIONS EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. ABC est un triangle rectangle en B tel que : AC=7,5 et BC=4,5.
   Calcule sin $\hat{A}$.
   Solution :



$$\sin \hat{A} = \frac{Longueur\ du\ côté\ opposé}{Longueur\ de\ l'hypoténuse} = \frac{BC}{AC} = \frac{4,5}{7,5} = 0,6$$

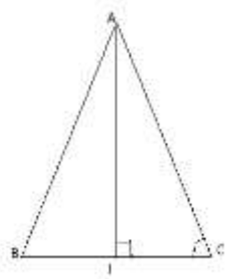
2. ABC est un triangle rectangle en A tel que : AC=10,8 et BC=13,5.
   Calcule cos $\hat{C}$.
   Solution :



$$\cos \hat{C} = \frac{Longueur\ du\ côté\ adjacent}{Longueur\ de\ l'hypoténuse} = \frac{AC}{BC} = \frac{10,8}{13,5} = 0,8$$

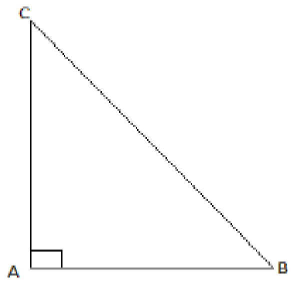
3. L'unité de longueur est le centimètre.
   ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que : AB=2 et BC=1,5.
   Calcule cos $\hat{C}$.

   Solution :



$$\cos \hat{C} = \frac{Longueur\ du\ côté\ adjacent}{Longueur\ de\ l'hypoténuse} = \frac{IC}{AC}\ \left(\text{or } IC = \frac{BC}{2} \text{ et } AC = AB\right) = \frac{0,75}{2} = 0,375$$

4. ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB=7,5 et AC=12,5.
   Calcule tan $\hat{C}$.
   Solution :



$$\tan \hat{C} = \frac{Longueur\ du\ côté\ opposé}{Longueur\ du\ côté\ adjacent} = \frac{AB}{AC} = \frac{7,5}{12,5} = 0,6$$

5. Utilise une calculatrice pour compléter le tableau ci-dessous.
   Dans les cases de la première ligne du tableau, tu écriras les valeurs approchées entières pour les mesures des angles.

Dans les autres cases, tu écriras des arrondis d'ordre 3.

a°	7°	21°	$35°$	$18°$	$34°$
$\cos a^\circ$	0,993	0,934	0,819	0,951	0,829
$\sin a^\circ$	0,122	0,358	0,574	0,309	0,559
$\tan a^\circ$	0,123	0,384	0,700	0,325	0,675

LECON 2 : RELATIONS TRIGONOMETRIQUES

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de:

- Donner les propriétés trigonométriques des angles aigus
- Calculer la longueur d'un côté d'un triangle connaissant un angle de ce triangle et la longueur d'un autre côté

PREREQUIS : ....

1. Déterminer x dans chacun des cas suivants :

$$a)\ \frac{x}{3}=\frac{7}{2}\qquad b)\ 4x=\frac{16}{5}\qquad c)\ \frac{3}{2}=\frac{15}{x}$$

Solution :

a) $\frac{x}{3}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2x=21$

$\Leftrightarrow x=\frac{21}{2}=10{,}5$

b) $4x=\frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{4x}{1}=\frac{16}{5}$

$\Leftrightarrow 20x=16$

$\Leftrightarrow x=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}=0{,}8$

c) $\frac{3}{2}=\frac{15}{x} \Leftrightarrow 3x=30$

$\Leftrightarrow x=\frac{30}{3}=10$

2. Déterminer x dans chacun des cas suivants :

$$a)\ x^2-1=3\qquad b)\ x^2+y^2=1\ avec\ y=0{,}4$$

Solution :

a) $x^2-1=3 \Leftrightarrow x^2=4$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{4}\ \ ou\ \ x=-\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow x=2\ \ ou\ \ x=-2$

b) $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x^2=1-y^2$

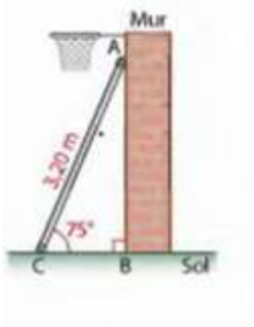
$\Leftrightarrow x^2=1-(0{,}4)^2$

$\Leftrightarrow x^2=1-0{,}16$

$\Leftrightarrow x^2=\ 0{,}84$

$\Leftrightarrow\ x=\sqrt{0{,}84}\ \ ou\ \ x=-\sqrt{0{,}84}$

SITUATION PROBLEME :



Une échelle de longueur $AC = 3{,}20\,m$ est appuyée contre un mur. Pour la sécurité, l'échelle doit faire un angle de 75° avec le sol.
À quelle distance AB du point B, doit se placer le sommet A de l'échelle ?

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1. Dans la figure ci-dessus, soit le triangle ABC rectangle en B. Calculer la distance AB.
2. Vérifier que $sin^2\widehat{BCA} + cos^2\widehat{BCA} = 1$ sachant que $AB^2+AC^2=BC^2$.
3. Calculer $tan\,\widehat{BCA}$ puis $\frac{sin\widehat{BCA}}{\cos\widehat{BCA}}$ et conclure.

Résolution :

1. Le triangle ABC étant rectangle en B, $\sin\widehat{BCA} = \frac{AB}{AC}$
   Soit : $\sin 75° = \frac{AB}{3{,}20}$
   Soit : $AB = 3{,}2 \times \sin 75°$
   Soit : $AB \approx 3\ m$
2. $$sin^2\widehat{BCA} + cos^2\widehat{BCA} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$$
   $$= \frac{AB^2+BC^2}{AC^2}$$
   $$= \frac{AC^2}{AC^2} \quad \text{(ABC étant rectangle en B, } AB^2+BC^2=AC^2\text{)}$$
   $$= 1$$

Pour cette question, on pourra aussi utiliser la calculatrice et calculer directement le cosinus et le sinus de 75°.

3. $tan\,\widehat{BCA} = tan\,75° \approx 3{,}732$.
   $sin\,\widehat{BCA} = sin\,75° \approx 0{,}9659$ et $cos\,\widehat{BCA} = cos\,75° \approx 0{,}2588$, $\frac{sin\widehat{BCA}}{\cos\widehat{BCA}} = \frac{0{,}9659}{0{,}2588} \approx 3{,}732$.
   Nous pouvons conclure que $tan\,\widehat{BCA} = \frac{sin\widehat{BCA}}{\cos\widehat{BCA}}$.

Réponse à la situation problème : le sommet A de l'échelle doit se placer à une distance de 3 m du point B.

RESUME :

Propriété :

Pour tout angle aigu α, on a : $(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$.

Exemple :

On considère un angle α tel que $\cos(\alpha) = \frac{3}{4}$. Calculons $\sin(\alpha)$.

On peut écrire $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$

Soit $sin^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha)$

$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$

D'où $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $sin(\alpha) = -\frac{\sqrt{7}}{4}$. Mais comme le sinus d'un angle aigu est compris entre 0 et 1, on a $sin(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Remarque :

Pour simplifier les notations, on peut noter $cos^2(\alpha)$ à la place de $(\cos(\alpha))^2$, $sin^2(\alpha)$ à la place de $(\sin(\alpha))^2$ et $tan^2(\alpha)$ à la place de $(\tan(\alpha))^2$.

Propriété :

Pour tout angle aigu α non droit :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

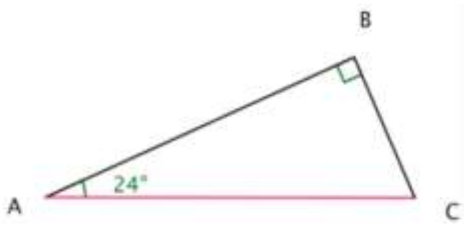
Exemple :

On considère un angle α tel que : $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$. On a :

$\tan(\alpha) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Calcul de longueurs :

Calculons dans chaque cas la mesure du segment rouge (arrondi au millimètre)



Exemple1 :

Dans le triangle ABC rectangle en B, où $BC = 2{,}6$ calculer la longueur de l'hypoténuse AC :

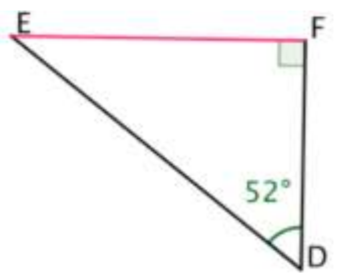
On a

$sin\,\widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$ d'où $sin\,(24) = \frac{2{,}6}{AC}$ donc $\frac{\sin(24)}{1} = \frac{2{,}6}{AC}$ c'est-à-dire $AC \times \sin(24) = 2{,}6 \times 1$

On obtient enfin $AC = \frac{2{,}6 \times 1}{\sin(24)} = 6{,}4$

La longueur AC est alors 6,4 cm.

Exemple2 :



Dans le triangle EFD rectangle en F et où DF=3,7 calculer la longueur du côté opposé EF.

On a :

tan $\widehat{EDF} = \frac{EF}{DF}$

d'où tan (52) $= \frac{EF}{3,7}$ on obtient : EF = tan(52°)×3,7

La longueur EF est alors 4,7 cm.

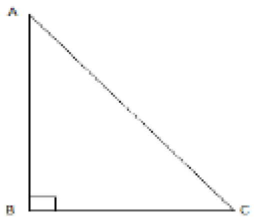
Lignes trigonométriques des angles de mesure 30°, 45° et 60°

Mesure de l'angle α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan α	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. L'unité de longueur est le centimètre.
   Dans un triangle ABC rectangle en B, on : $AC = 32,5$ $sin\ \hat{A} = \frac{5}{13}$ et $cos\ \hat{A} = \frac{12}{13}$.
   Calculer AB et BC.

   Solution :

   Calcul de AB :
   Dans le triangle ABC rectangle en B,
   $\cos \hat{A} = \frac{Longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \hat{A}}{Longueur\ de\ l'hypoténuse}$
   $= \frac{AB}{AC}$

   C'est-à-dire $\frac{12}{13} = \frac{AB}{32,5}$ c'est-à-dire $AB = \frac{12 \times 32,5}{13} = 30.$
   Calcul de BC :
   Dans le triangle ABC rectangle en B,
   $\sin \hat{A} = \frac{BC}{AC}$ c'est-à-dire $\frac{5}{13} = \frac{BC}{32,5}$ c'est-à-dire $BC = \frac{5 \times 32,5}{13} = 12,5.$

2. L'unité de longueur est le centimètre.
   ABC est un triangle rectangle en B tel que :
   $tan\ \hat{A} = \frac{4}{3}$ et BC=2.
   Calcule AB et AC.

   Solution :
   Calcul de AB :
   Dans le triangle ABC rectangle en B,
   $tan\ \hat{A} = \frac{BC}{AB}$ c'est-à-dire $\frac{4}{3} = \frac{2}{AB}$ c'est-à-dire $AB = \frac{3 \times 2}{4} = 1,5\ cm.$

   Calcul de AC :

Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après la propriété de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 1{,}5^2 + 2^2$

$= 2{,}25 + 4$

$= 6{,}25$

Donc $AC = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5\ cm$.

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

I- ABC triangle tel que $AB = 3cm, BC = 4cm$ et $AC = 5cm$

a- Construis ce triangle

b- Justifie que ABC est un triangle rectangle en B

II- ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4cm$ et $BC = 8cm$.

1- Montrer que $AC = 4\sqrt{3}cm$.

2- a- Calculer $sin\widehat{ACB}$.

b- En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

Exercice 2

ABC est un triangle rectangle en A.

1- Calcule $cos\widehat{C}$ si $BC = 10{,}3cm$ et $AC = 8{,}5cm$

3- Calcule $sin\hat{B}$ si $BC = 6{,}5cm$ et $AC = 3{,}5cm$

4- Calcule BC et AC si $AB = 4cm$ et $cos\hat{C} = \frac{3}{5}$

Exercice 3

ABC est un triangle tel que : $AB = 2\sqrt{3}$; $AC = 2$ et $BC = 4$

a- Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie

Préciser l'hypoténuse

b- Détermine $\cos B$ et donne une mesure en degré de l'angle $\widehat{B}$

En déduis sans calculer $sin\ 60°$

Exercice 4

1- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 40cm$;

$AC = 30cm$ et $BC = 50cm$

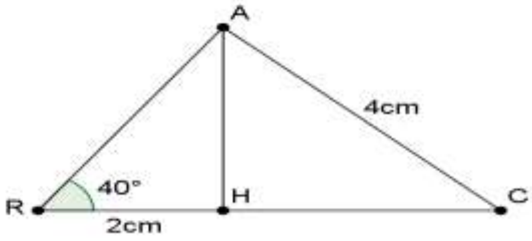
Calcule $\tan\hat{B}$

2- On donne un angle aigu $\hat{A}$ tel que $\cos\hat{A} = \frac{1}{3}$ et $\sin\hat{A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Calcule $\tan\hat{A}$

Exercice 5

I- $[AH]$ est une hauteur du triangle ARC.



1)Calculer une valeur approchée de la longueur de [AH]

2)Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\hat{C}$.

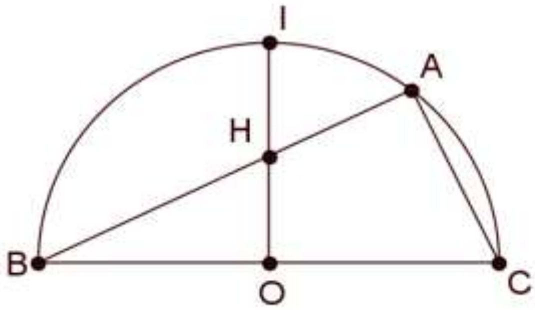
3)Calculer une valeur approchée de la longueur HC (utiliser la table trigonométrique).

II-

On considère un demi-cercle de centre O et de diamètre [BC]

$BC = 10$ cm ; $AC = 2\sqrt{5}$ cm

Montre que H est le milieu de [OI].



CHAPITRE 8 : HOMOTHETIE

MOTIVATION : Dans la vie courante, il est parfois très difficile pour certains techniciens de réduire ou d'agrandir certains objets de manière à obtenir un objet ayant la même forme. Ce cours nous permet de résoudre ce problème.

LECON : Homothéties

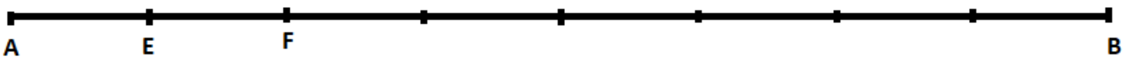
DUREE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable :

- ✓ De construire l'image d'un point ou d'une figure simple par une homothétie,
- ✓ D'utiliser une homothétie pour agrandir ou réduire une figure simple.

PREREQUIS : ……………………………………………………………………….

Observe la figure ci-dessous :



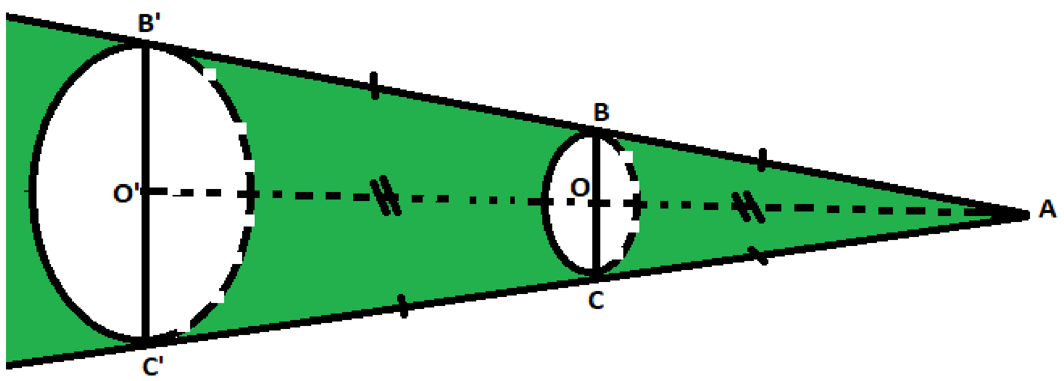
1. Compléter les pointillés par le nombre qui convient :
   $\overrightarrow{AB} = \cdots \overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{EF} = \cdots \overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{BE} = \cdots \overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{FB} = \cdots \overrightarrow{FA}$
2. Répond par vrai ou faux aux propositions suivantes :
   a. $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AF}$, b. $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$;
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AE}$.

Résolution

1. $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{7}\overrightarrow{EB}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{7}{6}\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{FB} = -3\overrightarrow{FA}$
2. a. vraie, b. vraie
3. $\overrightarrow{AB} = 8\overrightarrow{AE}$

SITUATION PROBLEME :

Lors des travaux pratiques aux ateliers, M. MBA a demandé aux élèves de la classe de 4ème année MENU de réaliser le dessin représenté par la figure ci-dessous. Le grand disque du dessin a été obtenu à partir du petit disque en bois grâce à une lampe torche placé en A. La surface du grand disque est de 4 mètre carré. L'élève NDI est coincé car il ne sait pas comment faire pour obtenir l'aire du petit disque afin de le tailler à la machine.



Aide-le en déterminant l'aire de ce disque.

HOMOTHETIE

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

En considérant la figure de la situation problème, répondre aux questions ci-dessous.

1. Exprime le vecteur $\overrightarrow{AB'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, Le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et le vecteur $\overrightarrow{AO'}$ en fonction de $\overrightarrow{AO}$,
2. Donne une interprétation de chaque relation obtenue à la question 1),
3. Quelle conclusion peut-on tirer ?
4. Sachant qu'une homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2, trouve l'aire du petit disque.

Résolution :

1. Comme les points B, C et O sont respectivement les milieux des segments $[AB']$, $[AC']$ et $[AO']$, alors on a les relations suivantes :
   $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO'} = 2\overrightarrow{AO}$
2. - Comme $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$, On dit que le point B' est l'image du point B par l'homothétie de centre A et rapport 2,

   - $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$, On dit que le point C' est l'image du point C par l'homothétie de centre A et rapport 2,

   - $\overrightarrow{AO'} = 2\overrightarrow{AO}$, On dit que le point O' est l'image du point O par l'homothétie de centre A et rapport 2,
3. D'après la question 2) on conclut en disant que le grand disque est l'image du petit disque par l'homothétie de centre A et rapport 2 ou alors que le petit disque est l'image du grand disque par l'homothétie de centre A et rapport $\frac{1}{2}$.
4. Comme l'homothétie de rapport k multiplie les aires par k^2 et que le grand disque mesure $4m^2$, alors d'après la question 3) on a :

$$Aire_{grand\ disque} = 2^2 \times Aire_{petit\ disque} = 4\ Aire_{petit\ disque}$$

Ainsi, $Aire_{petit\ disque} = \frac{Aire_{grand\ disque}}{4} = \frac{4}{4} = 1,$ donc $Aire_{petit\ disque} = 1\ m^2$

RESUME :

- **Définition et caractéristiques d'une homothétie**

Soient O un point du plan, k un nombre réel positif non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k toute transformation du plan dans lui-même, qui à tout point M du plan associe le point M' tel que

$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$. En d'autres termes, un point M' est l'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k si $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.

Les caractéristiques d'une homothétie sont donc son **centre** et son **rapport.**

L'homothétie de centre O et de rapport k est notée $h_{(O;k)}$ ou tout simplement par h.

L'écriture $h_{(O;k)}(M) = M'$ $(h(M) = M')$ est **équivalente** à $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ et signifie que M' est l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Exemple :

- $\overrightarrow{OM'} = 3\,\overrightarrow{OM}$ signifie que M' est l'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport 3,
- $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}$ signifie que C est l'image d'un point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{4}$.

Programme de construction de l'image d'un point et d'une figure par une homothétie

Image d'un point par une homothétie

Méthode : Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie de centre O et de rapport k, on place

le point M' de tel sorte que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.

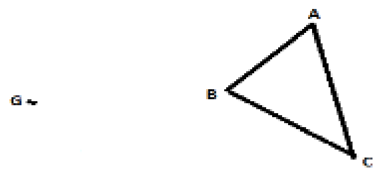
Exemple : Plaçons le point F, image du point E par l'homothétie de centre G et de rapport 5.

Comme le point Fest l'image du point E par l'homothétie de centre G et de rapport 5, alors on a la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{GF} = 5\,\overrightarrow{GE}$, d'où le schéma :

Image d'une figure par une homothétie

Méthode : Pour construire l'image d'une figure par une homothétie de centre donné et rapport donné, on construit l'image de chaque point de cette figure par cette homothétie.

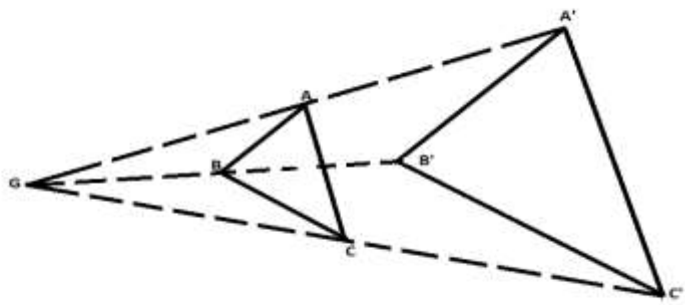
Exemple : Sur la figure ci-dessous, construisons l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre G et de rapport 2 :



Résolution :

Soit $A'B'C'$ l'image de ABC par l'homothétie de centre G et de rapport 2. On doit construire $A'B'C'$ tel que :

$\overrightarrow{GA'} = 2\,\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB'} = 2\,\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC'} = 2\,\overrightarrow{GC}$, alors on a la figure suivante :



Propriétés des homothéties

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k tel que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

On a les propriétés suivantes :

- L'homothétie multiplie les distances par k, donc $A'B' = kAB$, $A'C' = kAC$ et $B'C' = kBC$
- L'homothétie multiplie les aires par k^2, donc $Aire_{A'B'C'} = k^2 Aire_{ABC}$

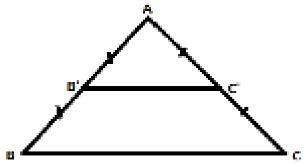
Remarque :

Une homothétie permet d'agrandir ou de réduire une figure :

- Lorsque le rapport d'une homothétie est supérieur à 1, on a un agrandissement,
- Lorsque le rapport d'une homothétie est inférieur à 1, on a une réduction.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

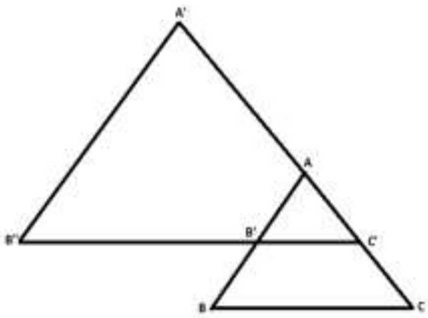
On considère la figure ci-dessous où ABC est un triangle équilatéral de côté 5cm :



1. Quelle transformation du plan permet de passer du triangle ABC au triangle $AB'C'$? Préciser ses caractéristiques
2. En déduire la longueur du segment $[B'C']$,
3. Construis l'image $C''B''A'$, du triangle $C'B'A$ par l'homothétie de centre C' et de rapport 4,
4. En déduire l'aire du triangle $C''B''A'$. (Indication, on pourra d'abord calculer l'aire du triangle C).

Résolution :

1. La transformation du plan qui permet de passer du triangle ABC au triangle $AB'C'$ est l'homothétie de centre A et de rapport $k = \frac{1}{2}$ car d'après la figure, on a :
   $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et le point A est invariant par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
2. Comme le triangle $AB'C'$ est l'image de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ et compte tenu du fait que l'homothétie multiplie les longueurs par k, alors on a :
   $B'C' = \frac{1}{2} \times BC = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2} = 2{,}5cm.$ Donc $B'C' = 2{,}5cm$
3. Voir figure ci-dessous, le point C'' est confondu avec C' car $h_{(C';2)}(C') = C'$.



4. Déduisons l'aire du triangle $C''B''A'$, c'est-à-dire l'aire du triangle $C'B''A'$ car $C'' = C'$:
   Comme le triangle $C'B''A'$ est l'image de $AB'C'$ par l'homothétie de centre C' et de rapport 2, alors il suffit de déterminer l'aire du triangle $AB'C'$ et la multiplier par 2^2 pour obtenir l'aire du triangle $C'B''A'$.
   Déterminons l'aire du triangle ABC :
   Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issu de A,
   $$Aire_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$
   - Déterminons la hauteur AH :

   1ère Méthode :
   Comme le triangle AHB est rectangle en H d'après la propriété de Pythagore, on a :
   $AH^2 = AB^2 - HB^2 = 5^2 - (2{,}5)^2 = 18{,}75,$ donc $AH = 4{,}33$

   2ème Méthode :
   Comme le triangle AHB est rectangle en H et comme ABC est équilatéral alors $mes\hat{B} = 60°$, alors :

$sin60° = \frac{AH}{AB}$ par conséquent $AH = AB \times sin60°$ ainsi $AH = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AH = 4{,}33$

- Ainsi l'aire du triangle ABC est :
  $Aire_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{5 \times 4{,}33}{2} = 10{,}8$, donc $Aire_{ABC} = 10{,}8cm^2$
- Comme $AB'C'$ est l'image de de ABC par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, alors

$Aire_{AB'C'} = (\frac{1}{2})^2 Aire_{ABC} = \frac{1}{4} \times 10{,}8 = 2{,}7$, donc $Aire_{AB'C'} = 2{,}7cm^2$.
Comme $C'B''A'$ est l'image de de $AB'C'$ par l'homothétie de centre C' et de rapport 3, alors $Aire_{C'B''A'} = 3^2 Aire_{AB'C'} = 9 \times 2{,}7 = 24{,}3$, donc $Aire_{C'B''A'} = 24{,}3cm^2$.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1 :

Répondre par « vrai » ou « faux » les affirmations suivantes

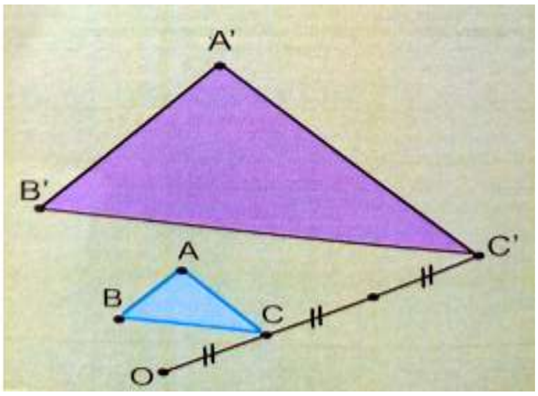
1- Si A est l'image du point B par une homothétie de centre O alors , les points A, B et O sont alignés.
2- L'écriture $\overrightarrow{OM'} = 3\,\overrightarrow{OM}$ signifie que M est l'image de M' par l'homothétie de centre O et de rapport 3.
3- Une figure et son image par une homothétie sont semblables.
4- Une homothétie de rapport k non nul multiplie les distances et les mesures des angles par k.

Exercice 2 :

Les points A , , C , D et E sont quatre points alignés tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$

Recopie et complète chacune des phrases suivantes :

1- C est l'image du point ………. par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
2- ……… est l'image du point E par l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$
3- E est l'image du point D par l'homothétie de centre B et de rapport ……...
4- B est l'image du point A par l'homothétie de centre ……. et de rapport $\frac{2}{3}$.



Exercice 3 :

Sur la figure ci-contre , ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 6\ cm$ et $C = 8\ cm$.

A'B'C' est l'image de ABC par l'homothétie de centre O

1- Donner en justifiant le rapport de cette homothétie.
2- Quelle est la nature de du triangle A'B'C' ?
3- Déterminer la longueur BC .
4- Calculer le périmètre , puis l'aire du triangle ABC.
5- En déduire le périmètre , puis l'aire du triangle A'B'C'

Exercice 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J) . On donne les points suivants A(1, −2) et B(3,2)

1- Placer ces points dans le plan.

2- Déterminer les coordonnées du point C centre de l'homothétie qui transforme B en A et de rapport 3
3- Construire le point D image du point B par l'homothétie de centre O et de rapport 2

Exercice 5 :

Dorcas et Nadine sont deux sœurs ayant la même morphologie. L'ainée Dorcas mesure 1,8 m et la cadette Nadine mesure 1,6 m.

La couturière a dans le tableau ci-contre les mesures de Nadine.

Les deux sœurs doivent avoir le même modèle de robe pour la soirée.

Dresser un tableau similaire contenant les mesures de la grande sœur Dorcas

Mesure de Nadine	
Longueur robe	138 cm
Longueur manche	47 cm
Tour manche	32 cm
Longueur pince devant	23 cm
Tour poitrine	89 cm
Superficie du tissu	2 m^2

CHAPITRE 9 : VECTEURS

MOTIVATION : Dans la vie de tous les jours, nous sommes souvent confrontés aux situations d'augmentation ou de diminution des forces qu'on exerce dans nos différents travaux. Cette leçon nous donnera les outils nécessaires pour comprendre et schématiser ses forces sous forme de vecteurs.

LECON : Vecteurs

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES

A la fin de la leçon l'élève doit être capable de :

- Définir et de construire le vecteur a.$\vec{u}$ à partir du vecteur $\vec{u}$;
- Reconnaitre deux vecteurs colinéaires ;
- Reconnaitre un vecteur directeur d'une droite données ;

PREREQUIS

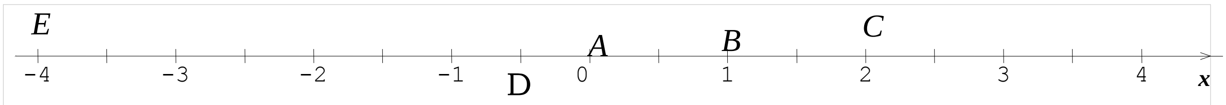
A et B sont deux points de la droite graduée tel que AB = 1 cm

a) Construire les points C et D tel que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) Donner l'abscisse de chacun des points C et D dans le repère (A ; B)

c) Place le point E d'abscisse -4 dans le repère (A ; B)

SOLUTION



SITUATION PROBLEME :

Jean pierre veut dépanner un circuit électrique à l'extérieur de sa maison, il demande à sa fille Irène de lui placer une échelle qui a une taille de trois demi de celle qu'il utilise d'habitude qui est derrière la maison pour avoir une bonne hauteur. Elle ne comprend pas, aide là en lui expliquant et en faisant un schéma.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

1) Place deux points A et B sur ta feuille, trace ensuite le vecteur $\overrightarrow{AB}$
2) Divise le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en deux parties égales.
3) Place ensuite un point C tel que $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$
4) Que peut-on dire des points A, B et C
5) Aide ainsi Irène par un schéma pour sa situation

Résolution :

1) 2) 3

4) les points A, B et C sont alignés

5)

Il suffit de prendre l'échelle qui dépasse de moitié l'échelle présente.

RESUME :

a) **Définition :**

Considérons un réel k et un vecteur $\vec{u}$. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\,\vec{u}$ qui est défini par :

- $0.\vec{u} = \vec{0}$
- $\vec{w} = k\,\vec{u}$ (avec k et $\vec{u}$ qui ne sont pas nuls) tels que $\vec{w}$ a la même direction que $\vec{u}$, mais :
  - $\vec{w}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$;
  - $\vec{w}$ a le sens contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$.
- $\|k\,\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

Propriétés :

- $k\,\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$).
- $(k + h)\vec{u} = k\vec{u} + h\vec{u}$
- $k(h\vec{u}) = (kh)\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Exemple

E et F sont deux points du plan. Construit le point M tel que $3\overrightarrow{EM}+5\overrightarrow{FM}=\vec{0}$

Solution :

On a $3\overrightarrow{EM} + 5\overrightarrow{FM} = 0$ implique que $3(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FM})+5\overrightarrow{FM}=\vec{0}$

$$3\overrightarrow{EF}+3\overrightarrow{FM}+5\overrightarrow{FM}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{EF}+8\overrightarrow{FM}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{FM}=-\frac{3}{8}\overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{FM}=\frac{3}{8}\overrightarrow{FE}$$

b) **Vecteurs colinéaires**

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si l'on peut trouver un réel k tel que l'on puisse écrire l'une de ces relations : $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{ku}$.

Exemple : $\vec{u}$ et - $\frac{1}{2}$ $\vec{u}$ sont colinéaires mais de sens opposés

NB : Pour reconnaitre deux vecteurs colinéaires, il faut remarquer que leurs supports sont parallèles.

c) **Vecteur directeur**

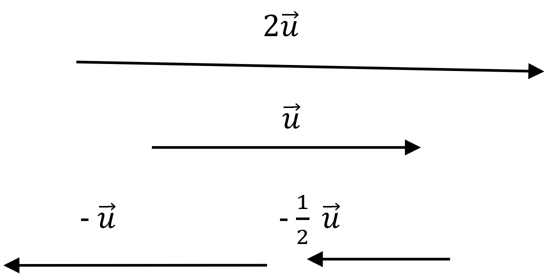
Définition :

Un vecteur est dit directeur d'une droite s'il est colinéaire à tout vecteurs définit à partir de deux points de cette droite.

Exemple

Trace un vecteur $\vec{u}$ puis construit 2 $\vec{u}$; - $\vec{u}$; - $\frac{1}{2}$ $\vec{u}$. Compare les différentes directions

Solution



On remarque que les vecteurs ont tous la même direction. On dit qu'ils sont colinéaires et de plus le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur aux autres vecteurs.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

<u>Exercice1</u>

On donne les égalités vectorielles suivantes :

Exprimer en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ les sommes vectorielles suivantes :

a)$\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}$ b)$2\overrightarrow{MN}$-$3\overrightarrow{KL}$-$\overrightarrow{PQ}$ c)$\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}-\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}$ sachant que

$\overrightarrow{KL}$=-$\frac{2}{3}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{IJ}$; $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{EF}$-$2\overrightarrow{IJ}$; $\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EF}$

Solution

Exprimons en fonction de $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ les sommes vectorielles suivantes :

a)$\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{IJ}+3\overrightarrow{EF}$-$2\overrightarrow{IJ}+\frac{5}{6}\overrightarrow{EF}$

$$=\left(-\frac{3}{2}+3+\frac{5}{6}\right)\overrightarrow{EF}+(1-2)\overrightarrow{IJ}=\frac{19}{6}\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{IJ}$$

b) $2\overrightarrow{MN}$-$3\overrightarrow{KL}$-$\overrightarrow{PQ}=\frac{43}{6}\overrightarrow{EF}-7\overrightarrow{IJ}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}-\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}$=-$\frac{17}{8}\overrightarrow{EF}+\frac{11}{6}\overrightarrow{IJ}$

<u>Exercice2</u>

Soit un triangle OAB tel que OB=6cm ; OA=5cm et AB=4cm.

a)Faire une figure

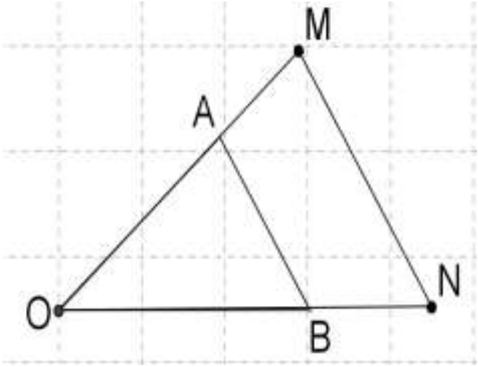
b) Placer les point M et N tels que $\overrightarrow{OM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{ON}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OB}$

c)Trouver le réel k tel que $\overrightarrow{MN}=k\overrightarrow{AB}$.

d) Donner en justifiant la position relative de (MN) et (AB)

Solution

a)



c) On a: $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AO} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Par identification on trouve k=$\frac{3}{2}$

d) $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{MN}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ par conséquent les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

Devoirs à faire à la maison:

Exercice1

Simplifier les écritures suivantes :

a) $3.(2.\vec{u})$; (-5); $(\frac{1}{3}\vec{u})$; $-1.(2.\vec{u})$
b) $2.\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{u}$; $\frac{1}{5}\vec{u} - \vec{u}$; $\frac{3}{2}(\frac{2}{3}\vec{u}) + \frac{4}{5}(\frac{1}{2}.\vec{u})$
c) $\frac{3}{5}.(\vec{u} + \vec{v})$; $\frac{1}{5}(\vec{u} - \vec{v})$; $-2.(\vec{i} + \vec{j}) + 3.(-2.\vec{j})$

Exercice2

Marquer trois points distincts A, B et C. construire le point D tel que

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Que représente le point D pour le segment $[BC]$? Justifier

Construire E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Que représente E pour le triangle ABC ? Justifier

Exercice3

On considère le parallélogramme ABCD.

Montrer que :

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$

Exercice4

On donne trois points distincts A, B, C.

Construire les points B' et C' tels que

$\overrightarrow{BB'} = 2.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CC'} = 2.\overrightarrow{AC}$

Démontrer que $\overrightarrow{B'C'} = 3\overrightarrow{BC}$

CHAPITRE 10 : COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Leçon 1 : Cordonnées et distances

DUREE : 100 min

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

-Déterminer les cordonnées d'un vecteur, d'une somme de vecteurs et d'un produit de vecteur par un réel.

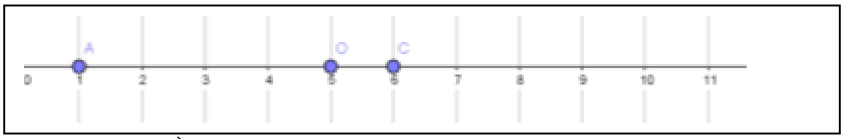
-Calculer la norme d'un vecteur et la distance entre deux points.

Motivation :

L'interprétation des cartes géographiques, des plans de chantier , à une échelle réduite fait intervenir le calcul des distances entre différents lieux à l'aide de leurs coordonnées géographiques. Dans cette leçon nous verrons comment déterminer ces coordonnées et calculer les distances.

Pré requis :

1) Définir repère orthonormé
2) Donner l'ordonnée et l'abscisse du point A(-1 ;5)
3) On donne



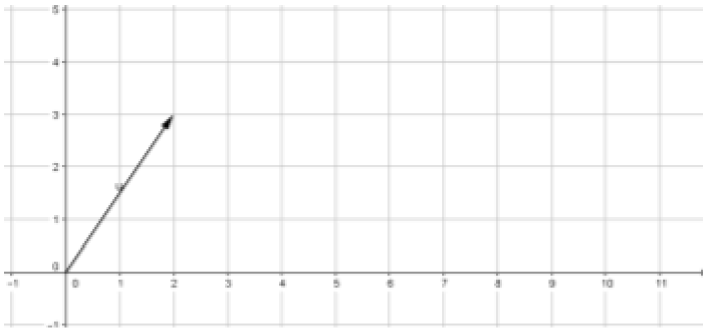
Exprimer $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

4) Soit $\vec{u}(2\,;3)$un vecteur dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.Dessiner un représentant de $\vec{u}$ d'origine le point O, puis déduire son expression en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
5) Enoncer la propriété de Pythagore.

Solution :

1) Un repère orthonormé est constituée de deux droites perpendiculaires, dont l'unité de graduation est 1 et est de même longueur sur chaque droite.

2) L'ordonnée de A est 5 et son abscisse est -1.
3) $\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$
4) $\vec{u} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

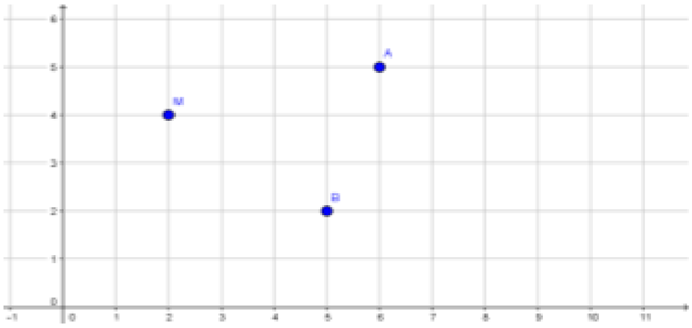


5) Propriété de Pythagore : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres cotés.

Situation problème :

Une compétition de tour cycliste est organisée dans un département du Cameroun. Les coureurs doivent partir de la localité Banengo pour Mendong en passant par Akwa. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{1000000}$ est représentée les trois localités : A (Akwa) , B(Banengo), M(Mendong), vous devez l'interpréter sans utiliser une regle graduée

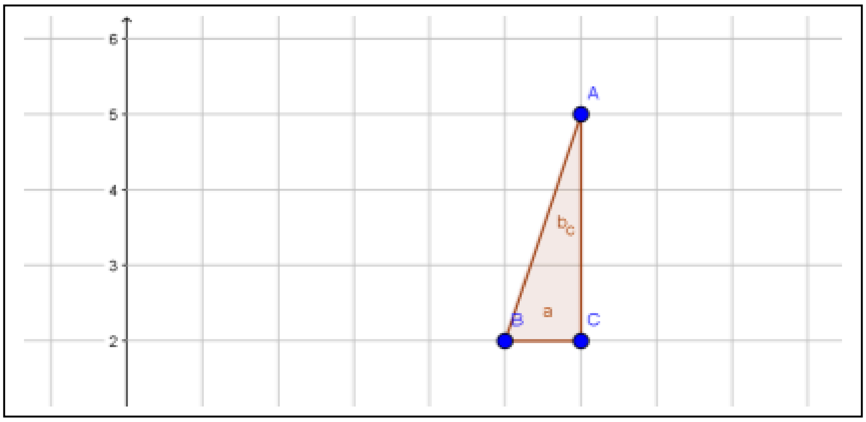
Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$graduée en cm, quelle est la distance qui sépare chaque localité à l'autre ?



Quelle est la longueur de ce tour

Activité d'apprentissage :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J), on donne les points A(6 ;5) , B(5 ;2), C(6 ;2) et M(2 ;4), tels que le triangle ABC soit rectangle en C.



1) Calcule la distance AC à l'aide des ordonnées de A et C.
2) Calcule la distance BC à l'aide des abscisses de B et C.

3) Calcule la distance AB à l'aide de la propriété de Pythagore.
4) Calcule de même AM et MB
5) Déduire la longueur du tour ci-dessus.
6) Sachant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
   a) Exprimer$\overrightarrow{AC}$en fonction de $\overrightarrow{OJ}$.
   b) Exprimer$\overrightarrow{CB}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$.
   c) Déduire les cordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Solution de l'activité d'apprentissage :

1) AC=$y_A - y_C$ =5-2=3
2) BC=$x_C - x_B$ =6-5 =1
3) AB=$\sqrt{(1)^2+(3)^2}=\sqrt{10}$
4) AM=$\sqrt{(2-6)^2+(4-5)^2}=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$
   MB=$\sqrt{(5-2)^2+(2-4)^2}=\sqrt{(3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$
5) La longueur du tour est donc AB+AC+BC = $\sqrt{10}+\sqrt{17}+\sqrt{13}$ =10,89…cm
   Soit en valeur réelle 10,89 × 1000000=10890934,56cm=108 ,90 km
   a/ $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{OJ}$
   b/ $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{OI}$
   c/ $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{OJ}-\overrightarrow{OI}$ d'où $\overrightarrow{AB}\binom{-1}{-3}$

Résumé :

1) **Coordonnées d'un vecteur:**

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, Soit A et B deux points, on a $\overrightarrow{AB}\binom{x_B-x_A}{y_B-y_A}$

Exemple : A$\binom{3}{-2}$, B$\binom{-1}{5}$, on a $\overrightarrow{AB}\binom{-1-3}{5-(-2)}=\binom{-4}{7}$

2) **Coordonnées du milieu d'un segment** :

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, Soit A et B deux points, I le milieu de [AB] on a I$\begin{pmatrix}\frac{x_A+x_B}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}\end{pmatrix}$

Exemple: A$\binom{3}{-2}$, B$\binom{-1}{5}$, on a I $\begin{pmatrix}\frac{3-1}{2}\\ \frac{-2+5}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}$

3) **Distance entre deux points:**

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, Soit A et B deux points, on a AB =$\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Exemple : A$\binom{3}{-2}$, B$\binom{-1}{5}$, on a :AB =$\sqrt{(-1-3)^2+(5+2)^2}=\sqrt{65}$

4) **Propriétés**

P1 : Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$, on peut écrire $\vec{u}=a\vec{i}+b\vec{j}$ et la norme de $\vec{u}$ est $||\vec{u}||=\sqrt{a^2+b^2}$

P2 : Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$,$\vec{v}\binom{a'}{b'}$ et t un réel ,les coordonnées de $t\vec{u}$ sont $\binom{ta}{tb}$ et ceux de $\vec{u}+\vec{v}\binom{a+a'}{b+b'}$

P3 : Deux vecteurs égaux ont les mêmes cordonnées.

C'est-à dire $\vec{u}\binom{a}{b}=\vec{v}\binom{a'}{b'}$ équivaut à $a = a'$ et $b = b'$

Exercice d'application

COORDONNEES D'UN VECTEUR

On considère les points $A(1;-3), B(2;1), C(5;2)$.

1. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les distances AB et AC.
3. Détermine les coordonnées du point I , milieu du segment [AB]
4. Soient E et F deux points tels que $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$.
5. Déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.
6. Déterminer les cordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Solution :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. AB $=\sqrt{(1)^2 + (4)^2} = \sqrt{17}$ et AC $=\sqrt{(4)^2 + (5)^2} = \sqrt{41}$

3. I $\begin{pmatrix} \frac{2+1}{2} \\ \frac{1-3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\overrightarrow{AE} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$

5. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}. = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$

6. ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Posons D$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On a $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-x \\ 2-y \end{pmatrix}$ d'où $5 - x = 1$ et $4 = 2 - y$, donc $x = 4$ et $y = -2$.

Leçon 2 : Vecteurs colinéaires

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :

-Définir deux vecteurs colinéaires.

-Justifier que deux vecteurs sont colinéaires dans un repère.

MOTIVATION :

La construction des structures en architecture requiert le parallélisme ou des droites ayant des vecteurs directeurs de même direction dans l'espace, elle fait appel à l'utilisation des logiciels programmés sur la base des calculs. Dans cette leçon nous verrons comment justifier dans un repère que deux vecteurs sont colinéaires.

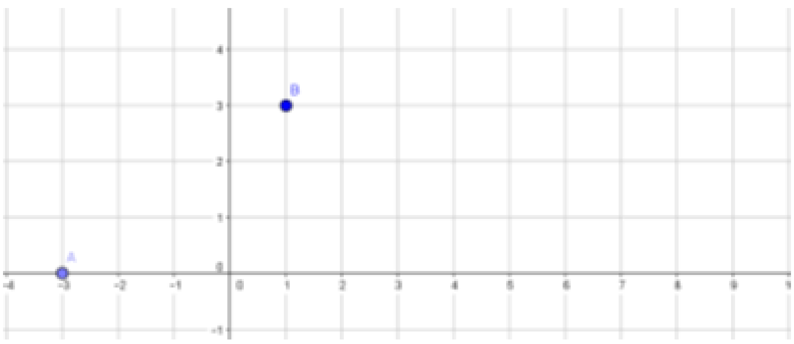
Pré requis :

1) Quand dit-on que deux droites sont perpendiculaires ?
2) Quand dit-on que deux droites sont parallèles?
3) Placer les points $A\binom{-3}{0}$ et $B\binom{1}{3}$ dans un repère puis déterminer les cordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Solution :

1) Deux droites sont perpendiculaires si l'angle qu'elles forment est de 90°
2) Deux droites sont parallèles quand elles sont perpendiculaires à une même droite.
3) Repère

$\overrightarrow{AB}\binom{1+3}{3-0}=\binom{4}{3}$



Situation problème :

Un technicien en bâtiment relève les cordonnées terrestres de quatre points d'un terrain à partir d'un appareil. Il trouve $A\binom{2}{1}$; $B\binom{1}{3}$; $C\binom{4}{1}$ et $D\binom{2}{5}$ .Le propriétaire voudrait construire deux murs le long de (AB) et (CD), en exigeant que ceux-ci soient parallèles. Les cordonnées des points sont 'ils conforment à son souhait ?

Activité d'apprentissage :

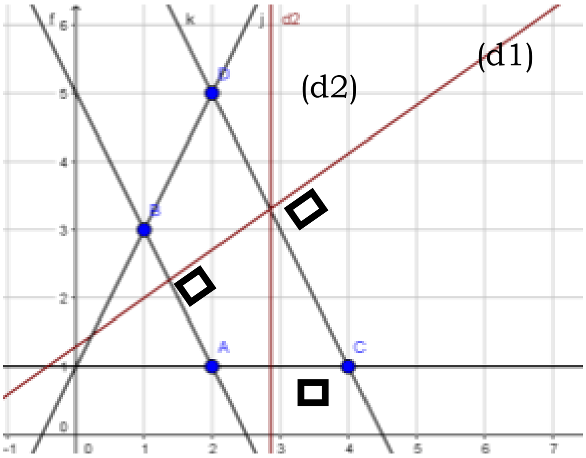
Le plan est munit d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne les points $A\binom{2}{1}$; $B\binom{1}{3}$; $C\binom{4}{1}$ et $D\binom{2}{5}$.

1) Placer les points A, B , C et D dans le repère.
2) Tracer une droite (d_1) perpendiculaire à (AB) et une droite (d_2) perpendiculaire à (AC)

3) Vérifier à l'aide d'une équerre que (d_1) et (DC) sont perpendiculaires, puis que (d_2) et (BD) ne sont pas perpendiculaires.
4) Déduire que (AB) et (DC) sont parallèles et que (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.
5) Déterminer les cordonnes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$
6) Calculer $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{DC}}$ - $x_{\overrightarrow{DC}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$ puis $x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{BD}}$ - $x_{\overrightarrow{BD}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$
7) Que constates tu ?

Solution de l'activité d'apprentissage :

1) Repère



4) (AB) et (DC) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à une même droite (d_1)
(AC) et (BD) ne sont pas parallèles car la droite (d_2) est perpendiculaire à l'une et pas à l'autre.

5) Calcul des cordonnées

$\overrightarrow{AB}\binom{1-2}{3-1} = \binom{-1}{2}$, $\overrightarrow{DC}\binom{4-2}{1-5} = \binom{2}{-4}$;$\overrightarrow{AC}\binom{4-2}{1-1} = \binom{2}{0}$;$\overrightarrow{BD}\binom{2-1}{5-3} = \binom{1}{2}$

6) $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{DC}}$ - $x_{\overrightarrow{DC}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$= -1(-4) – (2)(2) = 4-4=0

$x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{BD}}$ - $x_{\overrightarrow{BD}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$ =2(2) -1(0) =4

7) Je constate que cette différente est nulle quand il ya parallélisme des droites et différente de zéro dans le cas contraire.

Résumé:

1) Vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colineaires si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- L'un d'eux est nul
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la meme direction
- Il existe un rée k tel que $\vec{u}$ = k $\vec{v}$
- Les droites qu'ils dirigent sont parallèles.

2) Caractérisation de deux Vecteurs colinéaires

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{a'}{b'}$deux vecteurs . $\vec{u}$ et$\vec{v}$ sont colineaires si et seulement si$ab' - a'b = 0$

Exemple : Justifions que $\vec{u}\binom{3}{-2}$ et $\vec{v}\binom{15}{-10}$ sont colinéaires; on a3(-10) – (-2) (15) = -30+30=0

Exercice d'application

On considère les points$A(1;5)$, $B(5;-3)$ et C, D tels que $\overrightarrow{CD}\binom{-1}{2}$.

1. Déterminer les cordonnées de $\overrightarrow{AB}$
2. Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$sont colinéaires.
3. On donne $C(0,-1)$. Détermine les coordonnées du point D.

Solution :

1. $\overrightarrow{AB}\binom{5-1}{-3-5} = \binom{4}{-8}$
2. $4(2) - 8(-1) = 8 + 8 = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
3. Posons D$\binom{x}{y}$, on a $\binom{x-0}{y+1} = \binom{-1}{2}$. Donc $x = -1$ et $y = 1$

Leçon 3 : Vecteurs Orthogonaux

DUREE : 50 min

Objectifs pédagogiques :

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de :
-Définir deux vecteurs orthogonaux.
-Justifier que deux vecteurs sont orthogonaux dans un repère.

Motivation :

La construction des structures en architecture requiert également l'orthogonalité ou des droites ayant des vecteurs directeurs de directions perpendiculaires dans l'espace, elle fait appelle à l'utilisation des logiciels programmés sur la base des calculs. Dans cette leçon nous verrons comment justifier dans un repère que deux vecteurs sont orthogonaux.

Pré requis :

Quand dit-on que deux droites sont perpendiculaires ?

Solution :

Deux droites sont perpendiculaires lorsqu'elles forment entre elles un angle droit.

Situation problème :

Le technicien en bâtiment ci-dessus relève sur une autre parcelle les cordonnées terrestres de trois points à partir d'un appareil. Il trouve A$\binom{2}{1}$; B$\binom{4}{1}$ et C$\binom{4}{3}$.Le propriétaire voudrait construire deux murs le long de (AB) et (BC), en exigeant que ceux-ci soient perpendiculaires. Les cordonnées des points sont 'ils conforment à son souhait ?

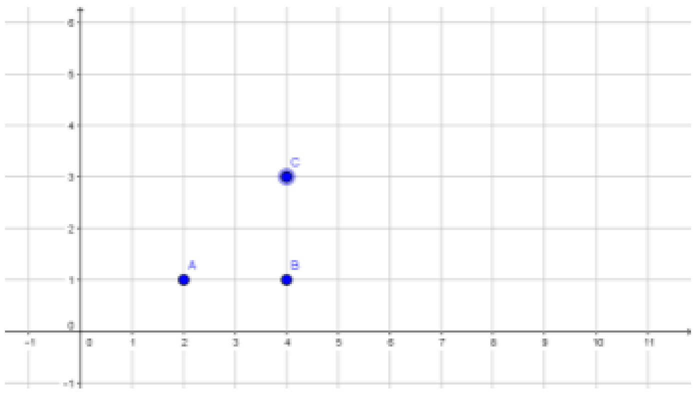
Activité d'apprentissage :

Le plan est munit d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On donne les points A$\binom{2}{1}$; B$\binom{4}{1}$ et C$\binom{4}{3}$.

1) Placer les points A, B et C dans le repère.
2) Vérifier à l'aide d'une équerre que (AB) et (BC) sont perpendiculaires, puis que (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.
3) Déterminer les cordonnes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4) Calculer $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{BC}}$ puis $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$
5) Que constates tu ?

Solution de l'activité d'apprentissage :

1) Repère



3) Calcul des cordonnées $\overrightarrow{AB}\binom{4-2}{1-1} = \binom{2}{0}$, $\overrightarrow{BC}\binom{4-4}{3-1} = \binom{0}{2}$ et $\overrightarrow{AC}\binom{4-2}{3-1} = \binom{2}{2}$

4) $x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{BC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{BC}}$ = 2(0) +0(2) =0+0=0

$x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}}$ =2(2) +0(2) =4

6) Je constate que cette somme est nulle quand il ya perpendicularité des droites et différente de zéro dans le cas contraire.

Résumé :

1) Vecteurs orthogonaux :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions perpendiculaires
- Les droites qu'ils dirigent sont perpendiculaires.

2) Caractérisation de deux Vecteurs orthogonaux :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, Soit $\vec{u}\binom{a}{b}$ et$\vec{v}\binom{a'}{b'}$deuxvecteurs . $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' = 0$

Exemple : Justifions que $\vec{u}\binom{3}{-2}$ et$\vec{v}\binom{4}{6}$ sont orthogonaux. On a 3(4) + (-2) (6) = 12-12=0

Exercices d'application

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,I,J). Soit les points A(-1 ;-4) ; B(4 ;-2) et C(2 ;3).

1. a/ Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
   b/ Justifier alors que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Solution :

1. a/ $\overrightarrow{AB}\binom{4+1}{-2+4} = \binom{5}{2}$ et $\overrightarrow{BC}\binom{2-4}{3+2} = \binom{-2}{5}$
   b/ 5(-2)+2(5)= -10+10=0 , donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.
   c/ Le triangle ABC est rectangle en B.

ENTRAINE-TOI

Exercice 1

On considère trois points non alignés A ; B ; C

1- Marque les points P et Q tels que $\overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
2- Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires
3- Démontrr que les points Q ; C et P sont alignées
4- Soit un point n'appartenant à aucune des droites (AB) et (CP). Marque le point J tel que $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{QC}$ puis démontre que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

Exercice 2

Dans le plan rapporté à un repère(O, I, J). On considère les points$A\binom{3}{-4}$; $B\binom{2}{3}$; $C\binom{-5}{2}$.

1- Place les points A, B et C dans le repère.
2- a- Calcule les coordonnées des vecteurs$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. B-b-b- Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
3- Calcule les distancesAB et BC.
En déduis la nature exacte du triangleABC.
4- Calcule les coordonnées du point I milieu de$[\boldsymbol{BC}]$.
5- Ecris une équation de la droite(AB).

Exercice 3

On donne les points $A(2; 2), B(7; 5), C(6; 8)$ et $D(1; 5)$ dans un repère orthonormé du plan

a- Représente dans ce repère les points A, B, C et D
b- Calcule AD, BC, et montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
c- Donne en justifiant la nature du quadrilatère ABCD d- On considère la droite (D) d'équation $y = -3x + 1$.

Donner une équation de la droite (D') perpendiculaire à (D) et passant par le point $A(-2; 1)$

Exercice 4

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, I, J). On considère les vecteurs $\vec{u}(1; 1)$ et $\vec{v}(2; m)$.
Comment faut-il choisir m pour que les droites dirigées respectivement par $\vec{u}$ et par $\vec{v}$ soit :

a- perpendiculaires ?
b- parallèles ?

Exercice 5

L'unité de longueur est le $centimètre$. Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$

1- Place les points $A\binom{7}{1}, B\binom{8}{4}$ et $C\binom{-1}{7}$ dans le repère
2- Détermine les coordonnés des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3- Montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux

4- En déduis de 2) les distances AB, AC et BC.
5- Montre que le triangle ABC est rectangle.
6- Détermine une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 6

1- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, I, J)$, on donne les points $A\ (-1\,;-2)$ et $B(5\,;-4)$. Ecrire une équation de la droite (AB)

2- Ecris une équation de la droite (D) passant par $C\ (-1\,;\ 2)$ et perpendiculaire à la droite (D') de vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{-1}$.

3- Ecris une équation de la droite (Δ') passant par $E\ (3\,;-4)$ et parallèle à la droite (Δ) d'équation $2x + y - 1 = 0$

Exercice 7

1) Donne un vecteur directeur ; puis le coefficient directeur des droites dont les équations sont les suivantes :
$(D1) : 2x + y - 1 = 0$ $(D2) : -2x - y - 6 = 0$ $(D3) : -2x + 5y + 4 = 0$
2) Dans chaque cas dire si les droites sont parallèles ou pas
   a- $(d1) : x + 2y + 1 = 0$ $(d2) : x + 2y - 4 = 0$
   b- $(d1) : 6x - 2y - 10 = 0$ $(d2) : y = \frac{x}{3} + 5$
   c- $(d1) : y = 2x + 2$ $(d2) : y = 3x + 1$

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé (0, I, J). On donne les points $A\binom{-1}{3}$; $B\binom{-6}{-2}$ et la droite $(D): 2x + 2y - 1 = 0$.

1- Place les points A et B dans le repère.
2- a) Calcule les distances OA, OB et AB.
   b) En déduis la nature exacte du triangle ABC.
3- Montre qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est : $x - y + 4 = 0$.
4- Justifie que les droites (AB) et (D) sont perpendiculaires.
5- Construis la droite (D) dans le repère (O, I, J).

Exercice 9

L'unité de longueur est le centimètre.
Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, on donne $A\binom{3}{2}$, $B\binom{-1}{3}$ et $C\binom{2}{-2}$.

1- **a)** Place les points A , B et C dans le repère (O, I, J)
b) Représente graphiquement la droite $(\mathfrak{H}): x + 4y - 11 = 0$
2- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3- **a)** Calcule les distances AB , AC et BC
b) En déduis la nature exacte du triangle ABC.
4- Donne l'équation cartésienne de la droite (BC).
5-Détermine les coordonnées du point I milieu de $[BC]$.
6-Détermine les coordonnées du point D, tel que ABDC soit un parallélogramme

MODULE N° 16 : SOLIDE DE L'ESPACE

CHAPITRE11 : SECTION D'UNE PYRAMIDE OU D'UN CONE DE REVOLUTION PAR UN PLAN PARALLELE A LA BASE.

MOTIVATION : Plusieurs techniciens de nos jours sont ouverts aux réseaux sociaux dans l'appréciation des modèles à représenter, cependant, ils rencontrent jusqu'ici des difficultés pour reproduire identiquement les modèles découverts en fonction des dimensions à réaliser. Dans ce chapitre, un outil leur sera donner pour leur aider dans cette tâche.

LECON 1 : section d'une pyramide par un plan parallèle a sa base.

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : à la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- ✓ Faire apparaitre sur la représentation d'une pyramide, la section par un plan parallèle au plan de la base.
- ✓ Représenter le tronc d'une pyramide.
- ✓ Utiliser les propriétés de réduction lors des calculs de longueurs, d'aires ou de volume du tronc.

PREREQUIS :

Calculer l'aire totale et le volume d'une pyramide dont la base est un carré de côté 6Cm et la hauteur de la pyramide mesure 4Cm.

SOLUTION :

- Calcul de l'aire totale ; $A_T = aire\ laterale\ (A_L) + aire\ de\ base\ (A_B)$.
  $A_L = perimetre\ de\ la\ base\ \times génératrice, A_B = côté \times côté$.

Considérons la figure ci-dessous, SABCD est une pyramide de sommet S et de base le carré ABCD ; SO représente sa hauteur, SE l'une de ses génératrices, SA, SB. SC et SD sont les arrêtes de la pyramide.

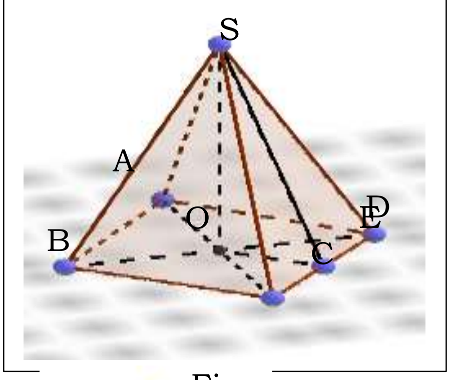
Ainsi, l'aire totale $A_T = C \times 4 \times SE + C \times C$

Or SE=$\sqrt{SO^2 + OE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5\ Cm$.

D'où $\boldsymbol{A_T = 6 \times 4 \times 5 + 6 \times 6 = 306Cm^2}$

- Calcul du volume de la pyramide.

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \times S_B \times H = \frac{1}{3} \times C \times C \times SO = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times 4 = 48\ Cm^3}$$

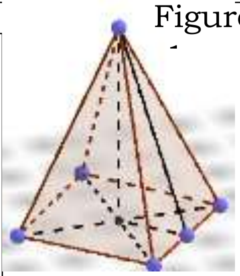


Figure

SITUATION PROBLEME

Dans un atelier de construction métallique, il est demandé aux apprenants de quatrième année de représenter une figure (figure 2) identique à celle proposée ci-dessous (figure1) ; sachant que la figure 1 est une pyramide à base carré, de hauteur 4 Cm et de volume 48 Cm^3 et on désire que la figure 2 ait une hauteur de 8 Cm.

Comment s'y prendront ? Calculer pour cette hauteur le volume correspondant.



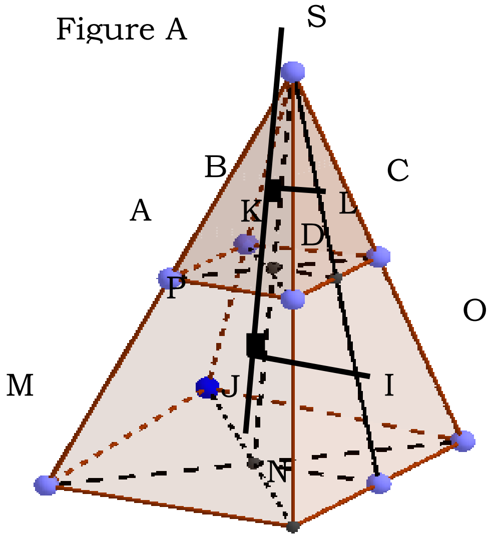
ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Deux pyramides P1 et P2 à bases carrés sont observables sur la figure ci-contre ;

P1 : pyramide SABCD et P2 : Pyramide SMPON, SK=8Cm, SJ=12Cm et le volume de la pyramide SABCD est de 96 Cm^3.

a. Reproduire P1 et P2;
b. Calculer l'aire du carré ABCD et en déduire la distance AD puis KL.
c. A l'aide des propriétés de Thales, calculer JI puis déduis-en MN.
d. Calculer l'aire du carré MPON, puis le volume de la pyramide SMPON.
Posons $k = \frac{SK}{SJ}$
e. Calculer : $A = l'aire\ du\ carré\ ABCD \times \frac{1}{k^2}$, puis $V = volume\ SABCD \times \frac{1}{k^3}$ comparer A et V avec l'aire du carré MPON et volume de la pyramide SMPON ; que peut conclure ?

Figure A



Correction

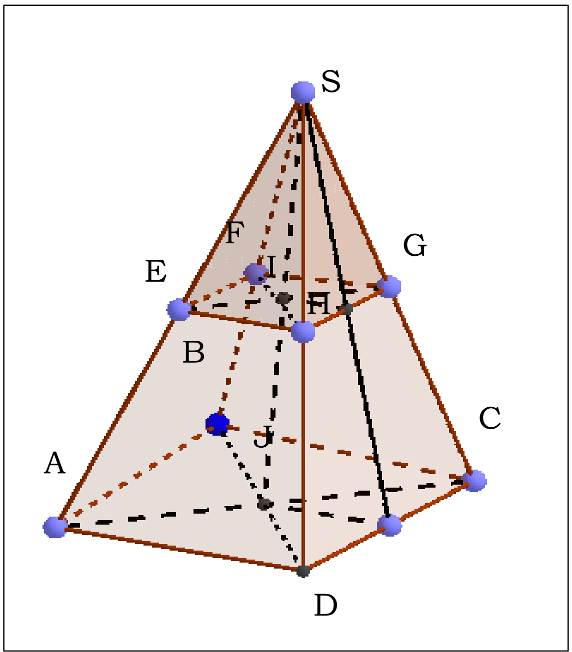
a. Voir Figure A
b. $volume\ SABCD = \frac{1}{3} \times aire\ du\ carré\ ABCD \times hauteur$ Donc
$aire\ du\ carré\ ABCD = \frac{3\times\ volume\ SABCD}{hauteur} = \frac{3\times 96}{8} = 36cm^2$. $aire\ du\ carré\ ABCD = AD \times AD$, d'où $AD = 6cm$. Puis $KL = 3cm$.
c. D'après la conséquence de la propriété de Thales, on a : $\frac{SK}{SJ} = \frac{KL}{JI}$ d'où JI $= \frac{SJ\times KL}{SK} = \frac{12\times 3}{8} = \frac{9}{2}cm$ d'où MN = 9Cm. Car SKL et SJL sont deux triangles semblables et (IJ) // (KL).
d. Aire carré MPON = 9× 9 = $81cm^2$ et Volume de la pyramide SMPON $= \frac{1}{3} \times aire\ du\ carré\ MPON \times hauteur = \frac{1}{3} \times 81 \times 12 = 324cm^3$.
e. $A = l'aire\ du\ carré\ ABCD \times \frac{1}{k^2} = 36 \times \frac{1}{\left(\frac{8}{12}\right)^2} = 36 \times \frac{9}{4} = 81cm^2$. Et

$$V = volume\ de\ SABCD \times \frac{1}{k^3} = 96 \times \frac{1}{\left(\frac{8}{12}\right)^3} = 96 \times \frac{27}{8} = 324cm^3.$$

$A = l'aire\ du\ carré\ MPON = l'aire\ du\ carré\ ABCD \times \frac{1}{k^2}$ Et
$V = volume\ SMPON = volume\ de\ SABCD \times \frac{1}{k^3}$. Avec $k = \frac{SK}{SJ}$.

Résumé

Considérons SEFGH et SABCD deux pyramides régulières de bases les carrés EFGH et ABCD respectivement. H et h sont les hauteurs des pyramides SABCD et SEFGH respectivement, S et s sont les surfaces de bases des carrés ABCD et EFGH respectivement enfin V et v les volumes des pyramides SABCD et SEFGH respectivement.



Figure

Si on Pose $\boldsymbol{k} = \frac{SI}{SJ} = \frac{h}{H}$ alors, $\boldsymbol{k} = \frac{SI}{SJ} = \frac{SH}{SD} = \frac{SG}{SC} = \frac{SF}{SB} = \frac{SE}{SA} = \frac{EH}{AD}$.

$\boldsymbol{k^2} = \frac{s}{S} \to \boldsymbol{S} = \frac{s}{k^2} \to \boldsymbol{s} = \boldsymbol{k^2} \times \boldsymbol{S}$

$\boldsymbol{k^3} = \frac{v}{V} \to \boldsymbol{V} = \frac{v}{k^3} \to \boldsymbol{v} = \boldsymbol{k^3} \times \boldsymbol{V}$.

Solution de la situation problème

Il faudra déterminer la longueur des arêtes, la surface de base de la pyramide et les surfaces latérales puis assembler.

$\boldsymbol{k} = \frac{h}{H} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\boldsymbol{V} = \frac{v}{k^3} = \frac{48}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \boldsymbol{48 \times 8 = 384cm^3}$.

Exercice d'application

Considérons les pyramides de la figure 3 ci-dessus ;

Tels que la pyramide SEFGH ait un volume de $192cm^3$ avec SI = 6cm et SJ=9cm, calculer le volume du tronc EFGHABCD.

Correction

On a v=$192cm^3$, le volume du tronc EFGHABCD est donné par V-v

Calculons le volume V de la pyramide SABCD, $\boldsymbol{V} = \frac{v}{k^3} = \frac{192}{\left(\frac{6}{9}\right)^3} = \boldsymbol{192 \times \frac{9}{4} = 432cm^3}$.

Ainsi volume du tronc EFGHABCD = V-v = 432-192 = 240cm^3.

LECON2 : section d'un cône de révolution par un plan parallèle a sa base.

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : à la fin de cette leçon, l'élève devra être capable de :

- ✓ Faire apparaitre sur la représentation d'un cône, la section par un plan parallèle au plan de la base.
- ✓ Représenter le tronc d'un cône.
- ✓ Utiliser les propriétés de réduction lors des calculs de longueurs, d'aires ou de volume du tronc.

PREREQUIS :

Calculer l'aire totale et le volume d'un cône de révolution dont la base est de 6Cm de rayon et la hauteur du cône mesure 4Cm.

SOLUTION :

- Calcul de l'aire totale ; $A_T = aire\ laterale\ (A_L) + aire\ de\ base\ (A_B)$.

$$A_L = perimetre\ de\ la\ base\ \times génératrice, A_B = côté \times côté$$

Considérons la figure ci-contre,

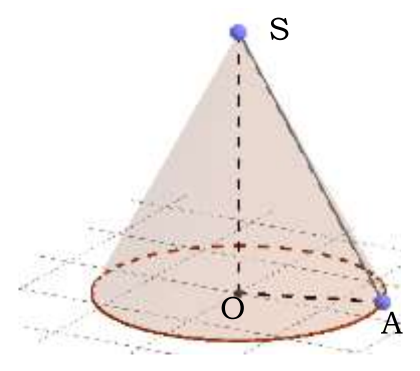
Ainsi, l'aire totale $A_T = 2\pi R \times SA + \pi R^2$

Or SA=$\sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = 5\ Cm$.

D'où $A_T = 2 \times 3.14 \times 6 \times 5 + 3.14 \times 36 = 301.44 Cm^2$

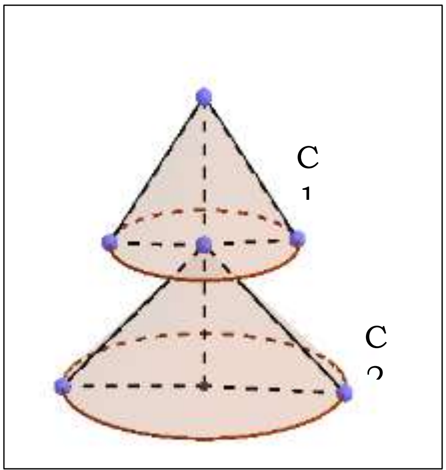
- Calcul du volume de la pyramide.

$V = \frac{1}{3} \times S_B \times H = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times SO = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 36 \times 4 = 150.72\ Cm^3$



SITUATION PROBLEME

Le toit des maisons sacrées dans les chefferies est le plus souvent disposé comme l'indique la figure ci-dessous ; les deux montures sont de formes identiques.



Sachant que C1 a une hauteur h=4Cm, de surface latérale s=24$\boldsymbol{cm^2}$ et C2 a une hauteur H=8Cm.

Etant aussi donné que les tôles ne couvrent que la surface latérale, déterminer le cout total des tôles qu'il faudra pour tôler entièrement cette torture sur la base qu'un mètre carré de tôle coute 2500frs

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

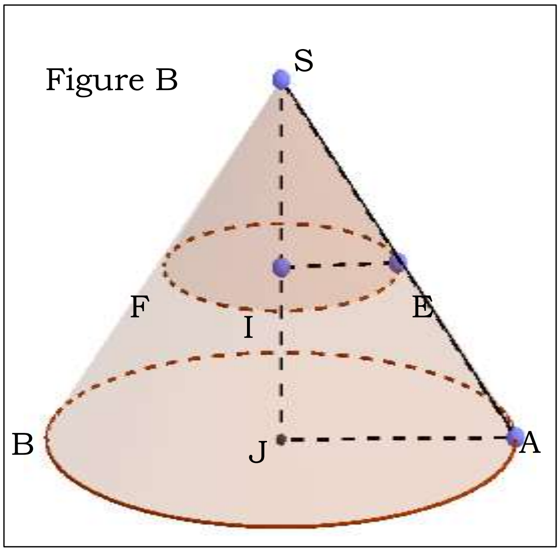
Deux cônes de révolutions C1 et C2 à bases sont observables sur la figure ci-dessous ;

C1 : Cône SAB et C2 : Cône SEF, SI=8Cm, SJ=12Cm et le volume de la Cône SEF est de 96 Cm^3.

a. Reproduire C1 et C2;
b. Calculer l'aire de base du Cône SEF et en déduire son rayon.
c. A l'aide des propriétés de Thales, calculer JA.
d. Calculer l'aire de base du Cône SAB, puis le volume du Cône SAB.

   Posons $k = \frac{SI}{SJ}$

e. Calculer : $A = l'aire\ du$ Cône SEF $\times \frac{1}{k^2}$, puis $V = volume\ SEF \times \frac{1}{k^3}$ comparer A et V avec l'aire du Cône SAB et volume du Cône SAB respectivement ; que peut conclure ?



Correction

a. Voir Figure B

b. $volume\ SEF = \frac{1}{3} \times$ l'aire de base du Cône SEF $\times\ hauteur$ Donc

l'aire de base du Cône SEF $= \frac{\mathbf{3\times\ volume\ SEF}}{\mathbf{hauteur}} = \frac{\mathbf{3\times 96}}{\mathbf{8}} = \mathbf{36cm^2}$.

l'aire de base du Cône SEF $\pi \times R \times R = 36cm^2$. D'où $\boldsymbol{R \times R} = \frac{\mathbf{36}}{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{11.5}\boldsymbol{cm}$. **d'où R = 3.39cm**

c. D'après la conséquence de la propriété de Thales, on a : $\frac{SI}{SJ} = \frac{IE}{JA}$ **d'où JA =** $\frac{\boldsymbol{SJ\times IE}}{\boldsymbol{SI}} = \frac{\mathbf{12\times 3.39}}{\mathbf{8}} = \mathbf{5.08}\boldsymbol{cm}$. Car SIE et SJA sont deux triangles semblables et (IE) // (JA).

d. **l'aire de base du Cône SAB =** $\boldsymbol{\pi \times R \times R} = \mathbf{3.14 \times 5.08 \times 5.08 = 81.03}\boldsymbol{cm^2}$.

volume du Cône SAB= $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times$ **aire de base du Cône SAB** $\times\ \boldsymbol{hauteur} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times \mathbf{81.03 \times 12 = 324.12}\boldsymbol{cm^3}$.

e. $A =$ **l'aire de base du Cône SEF** $\times \frac{1}{k^2} = 36 \times \frac{1}{\left(\frac{8}{12}\right)^2} = 36 \times \frac{9}{4} = 81cm^2 \cong 81.03cm^2$. Et

$$V = \boldsymbol{volume\ SEF} \times \frac{1}{k^3} = 96 \times \frac{1}{\left(\frac{8}{12}\right)^3} = 96 \times \frac{27}{8} = 324cm^3 \cong \mathbf{324.12}\boldsymbol{cm^3}.$$

$\boldsymbol{A} =$ **l'aire de base du Cône SAB = l'aire de base du Cône SEF** $\times \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^2}}$ **Et**

$\boldsymbol{V = volume\ SAB = volume\ de\ SEF} \times \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{k^3}}$. **Avec** $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{SI}}{\boldsymbol{SJ}}$.

Résumé

Considérons SEF et SAB deux Cônes de révolutions. H et h sont les hauteurs des Cônes SAB et SEF respectivement, S et s sont les surfaces de bases des Cônes de révolutions SAB et SEF respectivement enfin V et v les volumes des Cônes de révolutions SAB et SEF respectivement.

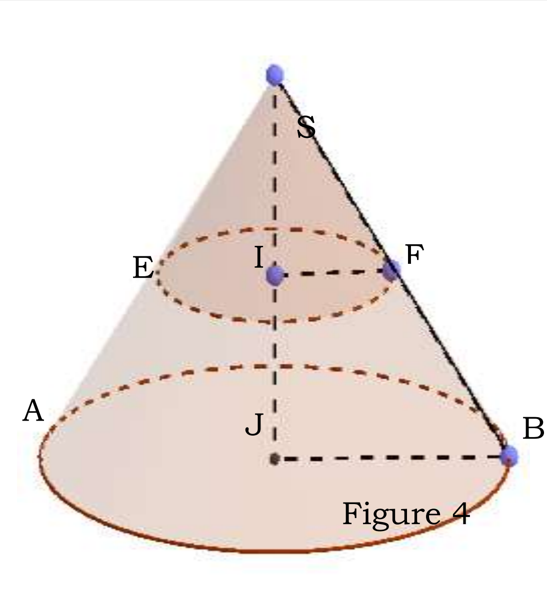


Figure 4

Si on Pose $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{SI}}{\boldsymbol{SJ}} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{H}}$ **alors,** $\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{SI}}{\boldsymbol{SJ}} = \frac{\boldsymbol{SE}}{\boldsymbol{SA}} = \frac{\boldsymbol{SF}}{\boldsymbol{SB}} = \frac{\boldsymbol{IF}}{\boldsymbol{JB}}$.

$\boldsymbol{k^2 = \frac{s}{S} \to S = \frac{s}{k^2} \to s = k^2 \times S}$

$\boldsymbol{k^3 = \frac{v}{V} \to V = \frac{v}{k^3} \to v = k^3 \times V}$.

Solution de la situation problème

Calcul de la surface laterale du cône C2.

$k = \frac{h}{H} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $S = \frac{s}{k^2} = \frac{24}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 24 \times 4 = 96cm^2$.

Cout total des tôles.

$nombre\ de\ metres\ carr\acute{e}\ de\ toles \times prix\ unitaire = (24 + 96) \times 2500 = 300{,}000frs$.

Considérons les pyramides de la figure 4 ci-dessus ;

Tel que le cone SEF ait un volume de $160.28cm^3$ avec SI = 6cm et SJ=9cm, calculer le volume du tronc EFGHABCD.

Correction

On a v=$192cm^3$, le volume du tronc EFGHABCD est donné par V-v

Calculons le volume V de la pyramide SABCD, $\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{k^3}} = \frac{\mathbf{160.28}}{\left(\frac{6}{9}\right)^3} = \mathbf{160.28} \times \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}} = \mathbf{360.63cm^3}$.

Ainsi volume du tronc EFGHABCD = V-v = 360.63-160.28 = 200.35$\boldsymbol{cm^3}$.

TRAUVAUX DIRRIGES

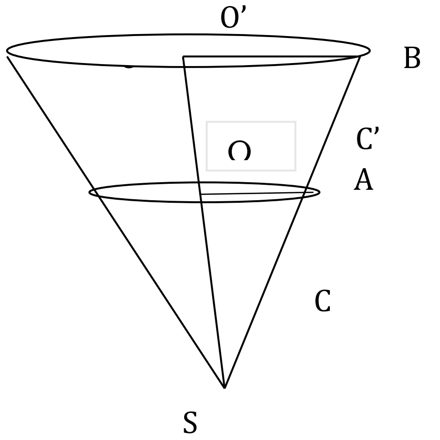
PROBLEME 1

A/ Un château d'eau a la forme d'un tronc de cône représenter ci-dessous en trait plein .précisons qu'un tronc de cône est la partie d'un cône comprise entre la base et un plan parallèle à cette base . dans tout le problème, nous négligerons l'épaisseur des parois. Nous avons : OO'=OA=OS=5(mètre) .

a) Déterminer O'B
b) Déterminer le volume du cône C de sommet S et base le disque de rayon [OA].Le résultat sera arrondi au mètre cube .rappelons que le volume d'un cône est donné par la formule suivante :
   V=1/3xBxh, ou B représente l'aire de la base et h la hauteur du cône.
c) Soit C' le cône de sommet S et de base le disque de rayon [O'B]. En constatant que le cône C' est un agrandissement du cône C monter que le volume de C' est 8 fois plus grand que le volume de C. quel est alors le volume du cône ?
d) En déduire le volume du château d'eau . vous en donnerez une valeur approchée au mètre cube le plus proche.

B/ Nous considérons ,dans la suite du problème que pour des raisons techniques le château d'eau ne peut contenir que 900m^3 d'eau .la consommation moyenne en eau des particuliers s'élève 2.25m^3 par minute le château d'eau étant initialement plein ,on désire connaitre la quantité d'eau restant à chaque instant.

a) Quelle est la quantité d'eau restante au bout de 40min ? Au bout de 6h ?
b) On désigne par V la quantité d'eau restante au bout de t minutes .exprimer V en fonction de t
c) Dans un repère orthogonal représenter graphiquement V en fonction de t : Prendre en abscisse 1Cm pour représenter 20minutes et ordonnée 1Cm pour représenter 100Cm^3. Limiter le graphique aux valeurs possibles de t et de V
d) A l'aide d'une lecture graphique ,estimer le temps mis (heures et minutes) pour dépenser 500Cm^3 d'eau .
   De même estimer quantité d'eau dans le réservoir au bout de 1h40min



PROBLEME 2: (l'unité est le centimètre)

Le solide SABCD est une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un rectangle de centre O.

On donne $AB = 2\sqrt{5}$; $AD = 4\sqrt{5}$ et SO = 6.

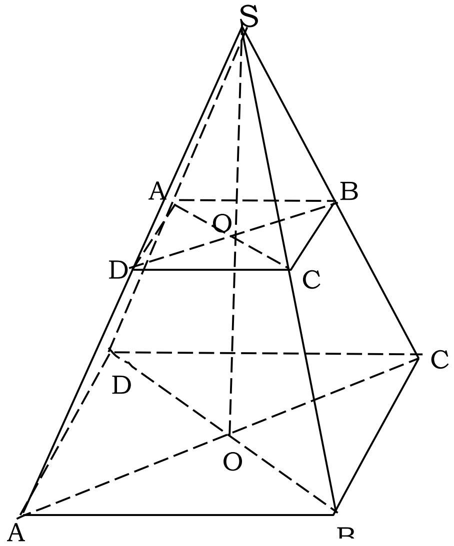
1) Calculer le volume de la pyramide SABCD.

2) On coupe cette pyramide à mi-hauteur par un plan parallèle au plan de la base ABCD. Ce plan coupe [SO] en O'. On appelle A', B' ; C' et D' les intersections de ce plan avec les droites (SA) ; (SB), (SC) et (SD).

a) Quelle est la nature de la section A'B'C'D'.

b) Quelle est la nature du solide A'B'C'D' ABCD.

c) Etablir que le coefficient de réduction k =0,5.



ENTRAINE-TOI

Exercice 1

Monsieur ELOUGA vient de se lancer dans la cosmétique et veut créer sa marque de parfum. Il rencontre un spécialiste et celui-ci lui propose d'être original en adoptant des boites spéciales, en forme de cône de révolution. Il contacte une entreprise et celle-ci lui propose le modèle ci-dessous (figure 1) qui est un flacon de verre ayant la forme d'un cône de révolution. Sa hauteur SO est égale a 7cm, sa base est un disque dont le pourtant est un cercle de diamètre 19cm. (On négligera l'épaisseur du verre). Ce flacon est constitué d'un réservoir et d'un bouchon obtenus en coupant le cône par un plan parallèle à la base. La hauteur SO' du bouchon est égale à 4cm.

Monsieur ELOUGA engage ensuite une équipe de quatre jeunes statisticiens pour mener une étude sur le terrain avant le lancement de son parfum. Cette équipe accepte de faire en une semaine, soit 5heures de travail par jour et lui propose deux modes de paiement au choix :

Mode 1 : 35000 Frs pour toute l'équipe

Mode 2 : 2000 Frs par heure de travail plus 1500 Frs de taxi journalier et par membre de l'équipe.

Le diagramme a bande ci-dessous (Figure 2), dresser par l'équipe de statisticiens au terme de la semaine de travail donne la répartition de 1000 personnes réparties par âge.

1- Quel volume de parfum en litre peut contenir le réservoir de ce flacon ?
2- Quel mode de paiement doit choisir Monsieur ELOUGA pour ne pas trop dépenser ?
3- Quel est l'âge moyen du public intéressé par ce produit ?

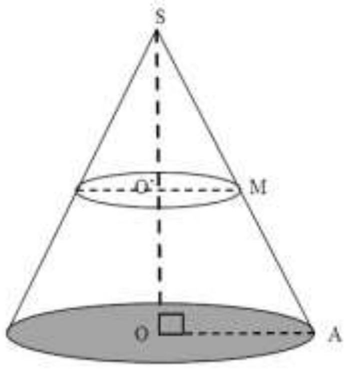


Figure 1

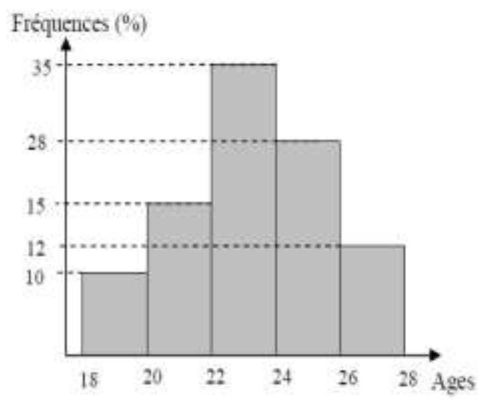


Figure 2

Exercice 2

Pour organiser la soirée de fin d'année, un cocktail de remerciement est offert par KETU à ses camarades. Il compte réaliser l'apéritif sans alcool dont la recette est la suivante : au fond d'un verre cylindrique (voir figure 3) de hauteur $8cm$ et de rayon $4cm$, mettre un demi-citron coupé en morceaux, quelques feuilles de menthe, une cuillerée à café de sucre roux et remplir de glace pilée à ras bord.

Pour la circonstance, son ami Jean a fait fabriquer pour y mettre de la glace pilée un grand récipient en tôle qui a la forme d'un tronc de pyramide A'B'C'D'ABCD (voir figure 1) obtenu par section d'une pyramide régulière SABCD de hauteur $52{,}2cm$, dont la base ABCD est un carré de centre H et de coté $45cm$ et tel que $\frac{SH'}{SH} = \frac{2}{3}$.

KETU dispose également de 4 litres de jus de goyaves .Chacun de ses invités et lui-même consomme exactement un verre (voir figure 2) remplit de ce jus et il n'en reste à la fin du service que 7,5 centilitres.

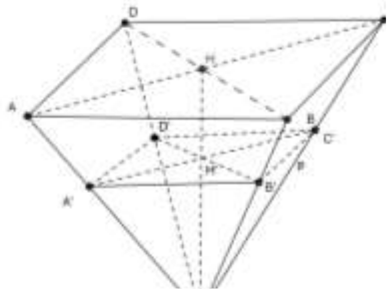
Remarque : Un citron est assimilable à une sphère de $6cm$ de diamètre. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon R est $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Prendre $\pi = 3{,}14$

<u>Tâches :</u>

Tâche 1 : Quel volume de glace pilée doit-on mettre dans l'apéritif une fois le citron placée au fond du verre en négligeant les espaces vides, le sucre et la menthe.

Tâche 2 : Détermine le volume maximal de glace pilée que peut contenir le grand récipient.

Tâche 3 : Détermine le nombre de camarades de KETU ayant pris part à ce cocktail.



Figure

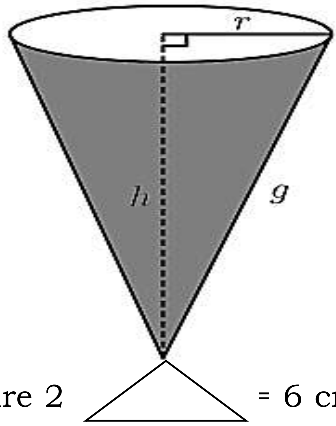


Figure 2 = 6 cm et r = 5 cm

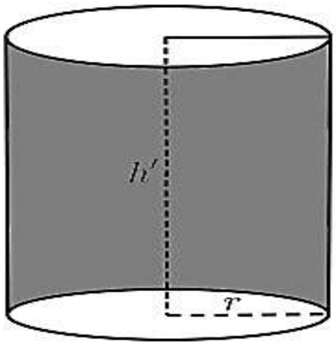
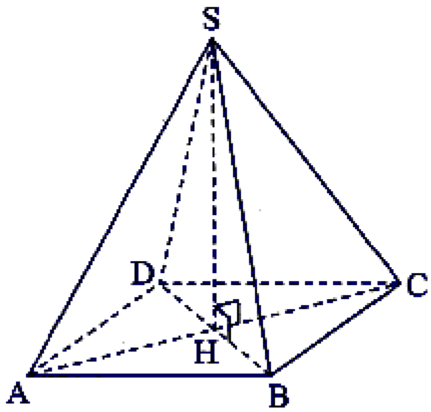


Figure 3 : r' = 4cm et h'

Exercice 3

Une pyramide régulière de sommet S a pour base le carré ABCD telle que son volume V est égal à 108 cm³.

Sa hauteur [SH] mesure 9 cm.



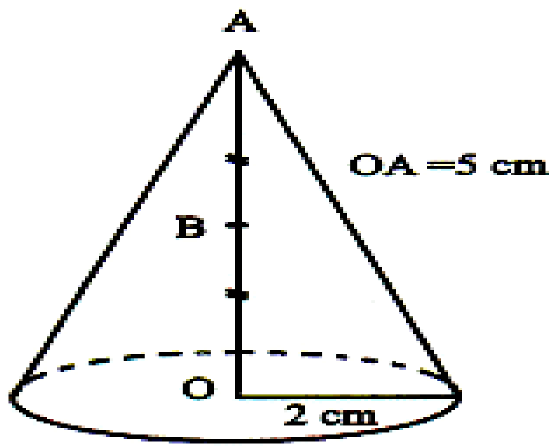
a- Vérifie que l'aire de ABCD est bien 36 cm².

b- En déduis la valeur de AB.

c- Montre que le périmètre du triangle ABC est égal à $12+6\sqrt{2}$ cm.

Exercice 4

On considère un cône de révolution de hauteur 5 cm et dont la base a pour rayon 2 cm. Le point A est le sommet du cône et O le centre de sa base. B est le milieu de [AO].



1- Calcule le volume du cône en cm^3.
On arrondira à l'unité.
2- On effectue la section du cône par le plan parallèle à la base qui passe par B. On obtient ainsi un petit cône. Est-il vrai que le volume du petit cône obtenu est égal à la moitié du volume du cône initial ?