SYSTEME D'EQUATIONS DANS IR² ET DANS IR³

I/ SYSTEME D'EQUATION DANS IR²

1/ Définition

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un ensemble (S) de deux équations de la forme (S) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où (x ; y) est le couple d'inconnues et a, b, c, a', b', c' sont des constantes appelées coefficients du système et vérifiant les conditions (a ; b) ≠ (0 , 0) et (a' ; b') ≠ (0 ; 0). Résoudre le système revient à trouver le ou les couples (x ; y) ∈ IR x IR qui satisfont simultanément les deux équations. Ces couples sont les solutions du système. Trois cas de figures peuvent se présenter lors de la résolution d'un système linéaire :

- il y a un couple de solution
- il n'y a pas de solution : S = ϕ
- il y a une infinité de solution : S = {(x ; y) ∈ IR x IR/ ax + by = c}

2/ Résolution algébrique

a/ Méthode par substitution (où par remplacement)

Exemple : Résoudre dans IR² le système suivant : (S) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 3(2x - 3) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 6x - 9 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 7x - 9 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x = -1 + 9 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2\left(\frac{8}{7}\right) - 3 \\ x = \frac{8}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} y = -\frac{5}{7} \\ x = \frac{8}{7} \end{cases}$

$S_{IR \times IR} = \{(-\frac{5}{7} ; \frac{8}{7})\}$

b/ Méthode par combinaison où par addition (où par élimination)

Exemple : Résoudre dans IR² le système suivant : (S) $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - y = -4 \\ x + 2y = 1 \;/(-3) \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - y = -4 \\ -3x - 6y = -3 \end{cases}$

$0 - 7y = -7$

$y = 1$

$\begin{cases} 3x - y = -4 \;/(2) \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x - 2y = -8 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

$7x + 0 = -7$

$x = -1$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

$S_{IR \times IR} = \{(-1 ; 1)\}$

c/ Méthode de Cramer

Exemple : Résoudre dans IR² le système suivant : (S) $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -5x + 7y = 3 \end{cases}$

La méthode Cramer consiste à utiliser les déterminants pour résoudre un système. On calcule le déterminant du système Δ, le déterminants lié aux différentes inconnues (Δ_x, Δ_y...) et on détermine la valeur des inconnues en calculant le quotient du déterminant de l'inconnue par celui du système.

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = (2)\times(7) - (-3)\times(-5) = -1$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = (-1)\times(7) - (-3)\times(3) = 2$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = (2)\times(3) - (-1)\times(-5) = 1$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2}{-1} = -2$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$

$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

$S_{IR \times IR} = \{(-2\ ;\ -1)\}$

Remarque

Trois cas de figures peuvent se présenter lors de la résolution d'un système linéaire : soit,
- il y a un couple de solution
- il n'y a pas de solution : $S = \phi$
- il y a une infinité de solution : $S = \{(x\ ;\ y) \in IR \times IR/\ ax + by = c\}$

2/ Résolution graphique

Exemple : Résoudre dans IR^2 le système suivant :

(S) $\begin{cases} 3x - y = -4 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

Le plan est muni repère orthogonal direct (O, I, J).
(D_1) et (D_2) deux droites d'équations respectives : $3x - y + 4 = 0$ et $x + 2y = 1$

		A	B
(D_1)	x	0	2
	y	- 3	1

		E	F
(D_2)	x	-1	-4
	y	0	1

Remarque

Trois cas de figures peuvent se présenter lors de la résolution graphique linéaire d'un système linéaire : soit,
- les droites sont sécantes dans ce cas il y a un couple de solution
- les droites sont strictement parallèles dans ce cas il n'y a pas de solution : $S = \phi$
- les droites sont confondues dans ce cas il y a une infinité de solution : $S = \{(x\ ;\ y) \in IR \times IR/\ ax + by = c\}$

II / SYSTEME D'EQUATION DANS IR^3

1 / a/ Méthode par substitution

Exemple : Résoudre dans IR^3 le système suivant : (S) $\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ 2x - (-1 - x - 2z) + 2z = -4 \\ 4x + (-1 - x - 2z) + 4z = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ 3x + 1 + 4z = -4 \\ 3x - 1 + 2z = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ 3x + 4z = -5 \\ 3x + 2z = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x \\ 3x + 2(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x) = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x \\ -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x \\ x = (\frac{3}{2})(\frac{2}{3}) \end{cases}$

$\begin{cases} y = -1 - x - 2z \\ z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x \\ x = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = -1 - 1 - 2z \\ z = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}(1) \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2 - 2(-2) \\ z = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$S_{IR \times IR \times IR} = \{(1\ ;\ 2\ ;\ -2)\}$

b/ Méthode par pivot de GAUSS

Exemple : Résoudre dans IR^3 le système suivant : (S) $\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ x + 3y + 4z = 10 \\ 3x - 2y - z = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ x + 3y + 4z = 10 \ /(-2) \\ 3x - 2y - z = 2 \ /(-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -2x - 6y - 8z = -20 \\ -6x + 4y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -2x - 6y - 8z = -20 \end{cases}$$

$$0 - 7y - 11z = -26$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \ /(3) \\ -6x + 4y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 3y - 9z = -18 \\ -6x + 4y + 2z = -4 \end{cases}$$

$$0 + y - 7z = -22$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -7y - 11z = -26 \\ y - 7z = -22 \ /(7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -7y - 11z = -26 \\ 7y - 49z = -154 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -7y - 11z = -26 \\ 7y - 49z = -154 \end{cases}$$

$$0 - 60z = -180$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -7y - 11z = -26 \\ -60z = -180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -7y - 11z = -26 \\ -60z = -180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = -6 \\ -7y - 11z = -26 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$S_{IR \times IR \times IR} = \{(1\ ;\ -1\ ;\ 3)\}$