SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1 :

u et v sont les suites numériques définies par:

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ [n \in \mathbb{N}^*] \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \ [n \in \mathbb{N}^*]. \end{cases}$$

1. On pose : $w_n = v_n - u_n \ [n \in \mathbb{N}^*]$.

Démontrer que la suite w de terme général w_n est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

2. Démontrer que la suite u est décroissante et que la suite v est croissante.

3. Démontrer que :

pour tout nombre entier naturel n non nul, $u_n \geq v_n$
et en déduire que : $u_1 \geq u_n \geq v_n \geq v_1$

4. On pose : $t_n = 3u_n + 8v_n [n \geq 1]$.

Démontrer que la suite t de terme général t_n est constante.

Exercice 2 :

u est la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \ [n \in N^*]\,. \end{cases}$$

1. Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite n.

2. v est la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \quad [n \in N^*].$$

a) Démontrer que :

$$\text{pour tout } n \text{ élément de } \mathrm{N}^*, \mathrm{u_n} \neq -1.$$

b) Démontrer que v est une suite geometrique dont on précisera le terme v_1 et la raison.
c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
d) En déduire la limite de la suite u.

<u>Exercice 3 :</u>

Soit $(U_n)_n; (V_n)_n; (S_n)_n$ et $(T_n)_n$ des suites numériques définies par :

$$U_0 = 0; U_{n+1} = \frac{1 + U_n}{2}; V_0 = 2; V_{n+1} = \frac{1 + V_n}{2}; S_n = U_n + V_n; T_n = V_n - U_n.$$

1. Calculer les quatres premiers termes de chaque suite.
2. Vérifier que (S_n) est une suite constante.
3. Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Exprimer (V_n) en fonction de n.
4. Déduire les expressions de (U_n) et (V_n) en fonction de n.
5. Étudier la monotonie de (U_n) et (V_n).
6. (U_n) et (V_n) convergent-elles ?

<u>Exercice 4 :</u>

On considère la suite numérique $(U_n)_n$ définie par

$$U_0 = -1;\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n}$$

1. Démontrer que tout $\forall n \in \mathbb{N}; |U_n| < \sqrt{3}$.

2. Déterminer la monotonie de (U_n).

3. Quelles sont les limites possibles de cette suite.

4. Montrer que cette suite est convergente, puis déduire sa limite.
   Soit maintenant $(V_n)_n$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = \frac{U_n - \sqrt{3}}{U_n + \sqrt{3}}$.
   (a) Montrer que (V_n) est géométrique, dont on donnera le premier terme et la raison.
   (b) Calculer la limite de (V_n), puis retrouver la limite de (U_n).

Exercice 5 :

On veut montrer qu'il existe une unique suite arithmétique $(U_n)_n$ telle que la somme S_n de ses n premiers termes vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = -n^2 + \frac{5}{2}n$.

1. Calculer U_1 et la raison r à partir de S_1 et S_2.
2. Vérifier que la suite $(U_n)_n$ ainsi déterminée, convient. Soit $(V_n)_n$ la suite définie, à partir de $(U_n)_n$ avec $V_n = 10^{U_n}$.
3. Quelle est la nature de $(V_n)_n$? Quelle est sa limite ?
4. Calculer en fonction de n: $T_n = V_1 + \cdots + V_n$ et $P_n = V_1 \times \ldots \times V_n$.
5. En déduire les limites de T_n et P_n.

Exercice 6 :

On admet que la suite $(U_n)_n$ définie par

$$U_0 = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{4 + 3U_n}{3 + U_n}$$

est à termes strictement positifs. On définit $(V_n)_n$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$.

1. Montrer que (V_n) est géométrique, dont on donnera le premier terme et la raison.
2. Calculer la limite de (V_n), puis celle de (U_n).
3. Quelle est la monotonie de (V_n) ?

La correction se fera dans la plateforme et dans les groupes Télégramme de Cours en ligne.

Pour en faire partie, Regarde cette vidéo 👇👇

https://youtu.be/b8hEM7Y2rDg