BACCALAUREAT BLANC
SESSION FEVRIER 2023

Durée : 4h
Coefficient : 4

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

SERIE D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/2 ; 2/2 et 3/3
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE N°1 (2 points)

Ecris le numéro de chaque affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie ou de faux si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Une fonction continue sur un intervalle admet au moins une primitive sur cet intervalle
2	a étant un nombre réel strictement positif , et n un nombre entier naturel, on a : $\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt{a^{6n}}}}$ est égale à $\sqrt{a}$
3	On considère la fonction f de R vres R définie par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ .On note (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporte à un repère (O ;I ;J).Le point de (Cf) d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe (Cf)
4	Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle K a et b sont deux éléments de K tels que $a < b$ S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout x element de [a ;b] , $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

EXERCICE N°2 (2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets du tableau ci-dessous, trois réponses A , B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé correct.

Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse

N°	Enoncé		Réponses
1.	Si A et B sont deux évènements indépendants tels que $p(A \cap B) = 0{,}21$ et $P(A) = 0{,}3$, alors on a …	A	$p(B) = 0{,}063$
		B	$p(B) = 0{,}7$
		C	$p(B) = 0{,}09$
2.	L'ensemble de validité de l'équation dans R : $\ln(5 - x^2) = ln4x$ est ….	A	$]0 ; 5[$
		B	$]-\sqrt{5}; 0[$
		C	$]0; \sqrt{5}[$
3.	f admet un prolongement par continuité en a si	A	f n'est pas définie en a et $\lim_{x \to a} f(x) = k$, k étant un réel
		B	f est définie en a et $\lim_{x \to a} f(x) = k$, k étant un réel
		C	f n'est pas définie en a et $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, k étant un réel
4	Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .Soient I et J les points d'affixes respectives 1 et i On note (ꞁ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant : $\lvert z-1 \rvert = \lvert z-i \rvert$ (ꞁ) est …..	A	La droite (IJ) privée du segment [IJ]
		B	La droite (IJ)
		C	La médiatrice du segment [IJ]

EXERCICE N°3 (3points)

1.a) Justifie que $-2+6i$ est une racine carrée de $-32-24i$

b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$.

2. Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2iz^2 + 4(1+i)z + 16 + 16i \quad (z \in C)$

a) Vérifie que : $P(z) = (z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)]$.

b) Déduis-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ;\vec{u} ; \vec{v})$, (unité graphique 2 cm)
Soient A ; B et C les points d'affixes respectives -2 ; $4i$ et $2-2i$

a) Place A, B, et C

b) Démontre que le triangle ABC est rectangle isocèle en A

c) Détermine l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme

EXERCICE N°4 (4 points)

On se propose de déterminer une primitive de la fonction $h(x) = \frac{8x^3-6x^2-1}{(1-2x)^2}$ sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

1. Soit k la fonction dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ et définie par , $k(x) = \frac{8x^3-8x^2+2x-1}{(1-2x)^2}$

a. Démontre que $\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[\ ; k(x) = 2x - \frac{1}{(1-2x)^2}$

b. Déduis-en une primitive K de k sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$

2. Soit g la fonction définie sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x^2}{1-2x}$

a. On suppose que g est dérivable sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. Calcule la dérivée de g notée g' sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, +\infty[$

b. Démontre que $\forall x \in]\frac{1}{2}, +\infty[\ ; h(x) = k(x) - g'(x)$

c. En utilisant les questions 1.b et 2.b, déduis- en une primitive H de h sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$

d. Déduis- en la primitive H_1 de h sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ qui s'annule en 1 .

EXERCICE N°5 (5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0 ;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e} - x\ln x \ ; \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I ;J) .L'unité graphique 2cm

1.a) Justifie que f est continue en 0

b) Justifie que : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ puis interprète le résultat obtenu.

2. Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interprète graphiquement ce résultat

3. Soit g la fonction numérique définie sur $]0 ;+\infty[$ par $g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$

On suppose que :

- L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α_1 et α_2
- Pour tout $x \in]0; \alpha_1[\cup]\alpha_2; +\infty[\ g(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha_1; \alpha_2[\ g(x) < 0$

a)On suppose que f est derivable sur $]0 ; +\infty[$ Justifie que :$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = g(x)$

b) Déduis-en les variations de f puis dresse son tableau de variation

4. a)Démontre que $f(\alpha_1) = \alpha_1 - \frac{{\alpha_1}^2}{E}$

b) Trace la courbe (C_f) de f (on prendra $\alpha_1 = 0{,}5$; $f(\alpha_1) = 0{,}4$; $\alpha_2 = 2{,}7$ et $f(\alpha_2) = 0$)

5. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[e ; +\infty[$

a)Justifie que h est une bijection de $[e; +\infty[$ vers un intervalle K à préciser

b) Sachant que $h(1) = \frac{1}{e}$,Calcule $(h)'(1)$ puis déduis la valeur de $(h^{-1})'(\frac{1}{e})$

EXERCICE N° 6 (5 points)

Lors du lancement de ses activités, le conseil scolaire du collège Anador organise une kermesse au cours de laquelle, le comité d'organisation met en place un jeu. Le jeu consiste à miser d'abord 300F et ensuite titrer simultanément 3 boules d'un sac contenant 2 boules blanches et 4 boules noires toutes indiscernables au toucher.

- Si le joueur n'obtient aucune boule blanche parmi les 3 boules tirées, il ne reçoit rien
- Si le joueur obtient une boule blanche parmi les 3 boules tirées, il reçoit 500F
- Si le joueur obtient les deux boules blanches parmi les 3 boules tirées, il reçoit 1000F

Un élève en classe de troisième souhaite participer au jeu, mais il hésite.
Il veut d'abord savoir si le jeu lui est favorable.
A l'aide d'une production basée sur tes connaissances mathématiques, apporte une réponse à la préoccupation de cet élève

BAREME ET CORRIGE DU BAC BLANC TD

EXERCICE N° 1 (2points)

1- V (0,5point) 2- F (0,5point) 3- V (0,5point) 4 - V (0,5point)

EXERCICE N° 2 (2points)

1- B (0,5point) 2- C (0,5point) 3- A (0,5point) 4- C (0,5point)

EXERCICE N° 3 (3points)

1.a) Justifions que $-2+6i$ est une racine carrée de $-32-24i$

$(-2+6i)^2 = 4-24i-36 = -32-24i$ Donc $-2+6i$ est une racine carrée $-32-24i$ (0,25 point)

1b) Résous dans ℂ, l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$.

Résolvons l'équation $z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i) = 0$

$\Delta = [-2(1+i)]^2 - 4\times 1\times 8(1+i) = 4(1+2i-1) - 32 - 32i = 8i - 32 - 32i = -32 - 24i$

D'après la question 1 : $-2+6i$ est une racine carrée de $-32-24i$

or $-32-24i$ a deux racines opposées donc $\delta_1 = -2+6i$ et $\delta_2 = 2-6i$

$z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a} = \frac{2(1+i)-2+6i}{2} = \frac{8i}{2} = 4i$ $\quad z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a} = \frac{2(1+i)+2-6i}{2} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

0,5 point

2a) Vérifions que : $P(z) = (z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)]$.

$(z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)] = z^3 - 2(1+i)z^2 + 8(1+i)z + 2z^2 - 4(1+i)z + 16(1+i)$

$= z^3 - 2z^2 - 2iz^2 + 8z + 8iz + 2z^2 - 4z - 4iz + 16 + 16i$

$= z^3 - 2iz^2 + 2z^2 - 2z^2 + 8z - 4z + 8iz - 4iz + 16 + 16i$

$= z^3 - 2iz^2 + 2z^2 - 2z^2 + 4z + 4iz + 16 + 16i$

$= z^3 - 2iz^2 + 4(1+i) + 16 + 16i = P(z)$

Donc $P(z) = (z+2)[z^2 - 2(1+i)z + 8(1+i)]$

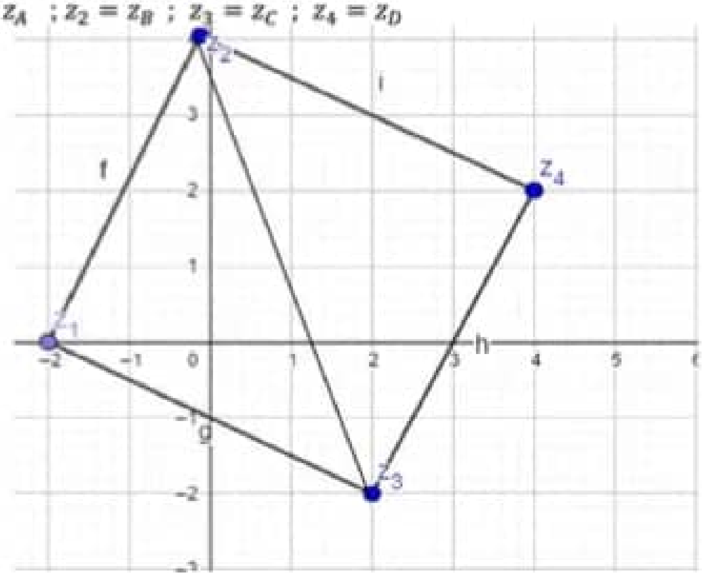
0,5 point

2b) Déduisons-en les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Les solutions sont $S_{\mathbb{C}} = \{-2; 4i; 2-2i\}$ (0,25 point)

3a)Plaçons les points A, B, et C

$z_1 = z_A$; $z_2 = z_B$; $z_3 = z_C$; $z_4 = z_D$



0,75 point

3b) Démontrons que le triangle ABC est rectangle isocèle en A

$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{4i+2}{2-2i+2}=\frac{4i+2}{4-2i}=i$; $\arg(i)=\frac{\pi}{2}$; $AB=|4i+2|=2\sqrt{5}$ $AC=|4-2i|=2\sqrt{5}$

0,5 point

Comme Arg $(i)=\frac{\pi}{2}$ et $AB=AC=2\sqrt{5}$ .Alors le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en A

3c) Déterminons l'affixe D tel que ABDC soit un parallélogramme

ABDC soit un parallélogramme équivaut à $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{CD}}$ équivaut à $z_B-z_A=z_D-z_c$

0,25 point

On a : $z_D=z_B+z_C-z_A$ Donc $z_D=4+2i$

EXERCICE N°4 (4 points)

1- a) Démontrons que $\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ $k(x)=2x-\frac{1}{(1-2x)^2}$

0,75 point

$\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, $2x-\frac{1}{(1-2x)^2}=\frac{2x(1-2x)^2-1}{(1-2x)^2}=\frac{2x(1-4x+4x^2)-1}{(1-2x)^2}=\frac{2x-8x^2+8x^3-1}{(1-2x)^2}=\frac{8x^3-8x^2+2x-1}{(1-2x)^2}=k(x)$

Donc $k(x)=2x-\frac{1}{(1-2x)^2}$

1b.)Déduisons-en une primitive K de k sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

$K(x)=x^2-\frac{1}{2(1-2x)}+c$

0,5 point

2-a) Calculons $g'(x)$

g est dérivable sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ et $\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ $g'(x)=\left(\frac{x^2}{(1-2x)}\right)'=\frac{-2x^2+2x}{(1-2x)^2}$

0,75 point

2 b) Démontrons que $\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$; $h(x)=k(x)-g'(x)$

$\forall x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$; $k(x)-g'(x)=\frac{8x^3-8x^2+2x-1}{(1-2x)^2}-\frac{2x-2x^2}{(1-2x)^2}=\frac{8x^3-8x^2+2x-1-2x}{(1-2x)^2}=\frac{8x^3-6x^2-1}{(1-2x)^2}=\mathrm{h}(x)$

0,75 point

Donc $h(x)=k(x)-g'(x)$

2 c) En utilisant les questions 1.b et 2.b, déduisons- en une primitive H de h sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

$H(x)=x^2-\frac{1}{2(1-2x)}-\frac{x^2}{(1-2x)}+C$

0,5 point

2d) Déduisons- en la primitive H_1 de h sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ qui s'annule en 1

$\mathrm{H}(1)=0$ équivaut à $1^2-\frac{1}{2(1-2\times1)}-\frac{1^2}{(1-2\times1)}+C=0$ équivaut à $c=-\frac{5}{2}$

0,25 point

$H(x)=x^2-\frac{1}{2(1-2x)}-\frac{x^2}{(1-2x)}-\frac{5}{2}$

0,5 point

EXERCICE N°5 (4points)

1a) **Justifions que f est continue en 0**

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\left(\frac{x^2}{e} - x\ln x\right) = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2}{e}\right) = 0 \\ \lim_{x \underset{>}{\to} 0}(x\ln x) = 0 \end{cases}$$

0,25 point

1b) **Justifions que $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$ puis interpretons le resultat**

$$\lim_{x \underset{>}{\to} 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\left(\frac{\frac{x^2}{e} - x\ln x - 0}{x-0}\right) = \lim_{x \underset{>}{\to} 0}\left(\frac{x^2 - ex\ln x}{xe}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x - e\ln x}{e}\right) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to 0}(x) = 0 \\ \lim_{x \underset{>}{\to} 0}(\ln x) = -\infty \end{cases}$$

0,25 point

Interpretation

f n' est pas derivable a droite de 0 . La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut . 0,25 point

2)Calculons les limites $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis interpretons les resultats

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{e} - x\ln x\right) = \lim_{x \to +\infty}\left[x^2\left(\frac{1}{e} - \frac{\ln x}{x}\right)\right] = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

0,25x2 point

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\frac{x^2}{e} - x\ln x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{e} - \frac{\ln x}{e}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left[x\left(\frac{1}{e} - \frac{\ln x}{xe}\right)\right] = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

Interpretation

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ Donc la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (OJ)

0,25 point

3a) Justifions que $\forall x \in]0;+\infty[\ f'(x) = g(x)$

f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in]0;+\infty[\ f'(x) = \left(\frac{x^2}{e} - x\ln x\right)' = \frac{2x}{e} - [\,(x)'\ln x + (\ln x)'x] = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$ 0,5 point

Comme $g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$ alors $f'(x) = g(x)$

3b) les variations de f et son tableau de variation

- Le signe $f'(x)$
  $\forall x \in]0;\alpha_1[\cup]\alpha_2;+\infty[\ g(x) > 0 \text{ donc } f'(x) > 0$
  $\forall x \in]\alpha_1;\alpha_2[\ g(x) < 0 \text{ donc } f'(x) < 0$ 0,25 point
- Sens de variation de f

  $\forall x \in]0;\alpha_1[\cup]\alpha_2;+\infty[\ f'(x) > 0$ Donc f est strictement croissante sur $]0;\alpha_1[$ et $]\alpha_2;+\infty[$
  $\forall x \in]\alpha_1;\alpha_2[\ f'(x) < 0$ Donc f est strictement décroissante sur $]\alpha_1;\alpha_2[$ 0,25 point

- **Tableau de variation**

0,25 point

x	0		α_1		α_2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha_1)$	↘	$f(\alpha_2)$	↗	$+\infty$

4a) On sait que $g(\alpha_1) = 0$ *equivaut à* $\frac{2\alpha_1}{e} - 1 - ln\alpha_1 = 0$ *donc* $ln\alpha_1 = \frac{2\alpha_1}{e} - 1$

$$f(\alpha_1) = \frac{{\alpha_1}^2}{e} - \alpha_1 ln\alpha_1 = \frac{{\alpha_1}^2}{e} - \alpha\left(\frac{2\alpha_1}{e} - 1\right) = \frac{{\alpha_1}^2}{e} - \frac{2{\alpha_1}^2}{e} + \alpha_1 = \alpha_1 - \frac{{\alpha_1}^2}{e}$$

0,25 point

4b)

0,25 point

5a) h est continue et strictement croissante [e ;+∞[.Elle admet une bijection de [e ;+∞[vers [0 ; +∞[
Donc K = [0 ;+∞[

0,25 point

5b) $h'(1) = \frac{2}{e} - 1 - \ln(1) = \frac{2-e}{e}$ et $(h^{-1})'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{h'(1)} = \frac{e}{2-e}$

0,5 point

EXERCICE N°6(5 points)

CM1 : Pertinence

- Je vais utiliser la leçon sur Probabilité et variable aléatoire
- Je vais déterminer les valeurs prises par X
- Je vais déterminer les différentes probabilités prise par la variable X
- Je vais dresser le tableau de la loi de probabilité
- Je vais déterminer l'espérance mathématique de X
- Je vais comparer l'espérance mathématique de X à zéro
- Je vais conclure

0,75 POINTS
1-2 ind sur 7 → 0,25
3-5 ind sur 7 → 0,5
6-7 ind sur 7 → 0,75
Règle des 2/3

CM2 : Utilisation correcte des outils mathématiques en situation

1- déterminons les valeurs prises par X

X(Ω)= {−300 ; 200 ; 700}
X= -300 s'il tire 2 boules noires
X= 200 s'il tire 1 boule blanche et 1 boule noire
X= 700 s'il tire 2 boules blanches

2,5 points
2ind sur 5→ 1
3 ind sur 5 → 1,5
4 ind sur 5 → 2,5
Règle des 2/3 (2/3) × 5

2- Déterminons les différentes probabilités prise par la variable X

$P(X = -300) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$; $P(X = 200) = \frac{C_2^1 \times C_4^2}{C_6^3} = \frac{3}{5}$; $P(X = 700) = \frac{C_2^2 \times C_4^1}{C_6^3} = \frac{1}{5}$

3- Dressons le tableau de la loi de probabilité

x	-300	200	700
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

4- Déterminons l'espérance mathématique de X

$E(X) = \sum x_i p_i = \frac{1}{5}(-300 \times 1 + 200 \times 3 + 700 \times 1) = \frac{1000}{5} = 200$

5 - Comparons l'espérance mathématique de X à zéro

$E(X) = 200$. Donc $E(X) > 0$ d'où le jeu est favorable au joueur

CM3 : Cohérence de la réponse

- Le résultat produit est conforme au résultat attendu
- Le résultat produit est en adéquation avec la démarche (formules sont juste même si le modèle est faux)
- La qualité des enchainements de la démarche

1,25 points 1ind sur 3 → 0,75 2 ind sur 3 → 1,25 **Règle des 2/3**

CP : Critère de perfectionnement (Concision; Originalité, Bonne présentation)

- Concision

  $E(X) = \frac{1}{5}(-300 \times 1 + 200 \times 3 + 700 \times 1)$ (non concis)

  $E(X) = 200$ (Concis)

0 ,5 POINTS 1 ind sur 3 → 0,25 2 ind sur 3 → 0,5 **Règle des 2/3**

- Originalité

  $E(X) = 200$

- Présentation :

  Propreté de la production (Présence des titres des étapes, pas de rature et de surcharge)