PRIMITIVES
EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Dérivée et primitives

1) Calculez la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=3x^3-9x+1$.

2) Déduisez-en deux primitives de la fonction g définie par $g(x)=9x^2-9$

3) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2 à 11 – Primitives sans fonction logarithme

Déterminer une primitive de f sur un intervalle contenu dans son ensemble de définition

Exercice n°2. **Usage des tableaux de primitives usuelles**

1) $f(x)=2x+1$ 2) $f(x)=10x^4+6x^3-1$ 3) $f(x)=(x-1)(x+3)$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-x^2$

5) $f(x)=\dfrac{-4}{3x^5}$ 6) $f(x)=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 7) $f(x)=\sin x-2\cos x$

Exercice n°3. **Primitive et constante**

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3x-1+\dfrac{2}{x^2}$.

Déterminer la primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour x=1.

Exercice n°4.

Trouver **la** primitive F de f sur I vérifiant la condition donnée

1) $f(x)=1-x+x^2-x^3$ I=$\mathbb{R}$ $F(1)$=0

2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ I=$]0;+\infty[$ $F(1)$=1

Exercices n°5 à n°8 : Déterminer une primitive des fonctions données

Exercice n°5. Forme $u'u^n$

1) $f(x)=3(3x+1)^4$	2) $f(x)=16(4x-1)^3$	3) $f(x)=(2x+7)^6$	4) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$	6) $f(x)=\sin x\cos x$		

Exercice n°6. **Forme** $\dfrac{u'}{u^2}$

1) $f(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$	2) $f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$	3) $f(x)=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$	4) $f(x)=\dfrac{-1}{(2-x)^2}$
5) $f(x)=\dfrac{2}{(4-3x)^2}$	6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$	7) $f(x)=\dfrac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}$	8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$			

Exercice n°7.

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3x+4}{(x+1)^3}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout $x\neq -1$, $f(x)=\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}$.

2) En déduire une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$.

Exercice n°8. **Forme** $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ 5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\sqrt{x}$.

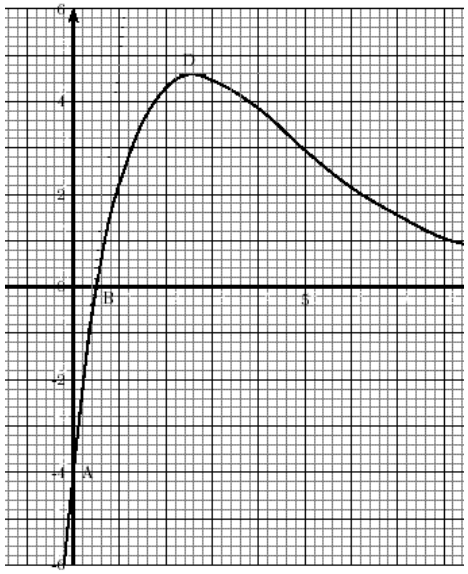
1) Calculez la dérivée de g sur $]0;+\infty[$

2) soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

Déduisez de la première question une primitive de f sur $]0;+\infty[$

Exercice n°10.

La courbe (C) donnée ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



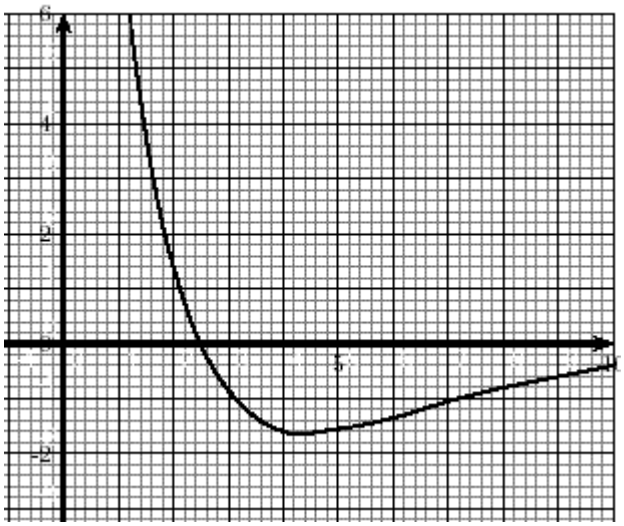
1) Pour chacune des affirmations ci-dessous indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse :

a. Toute primitive de f s'annule pour 0,5.

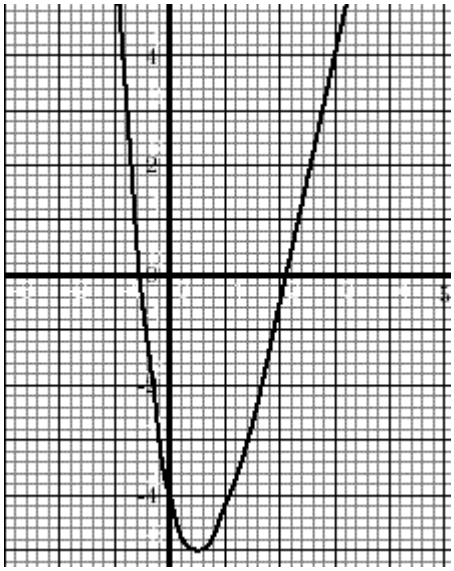
b. Toute primitive de f est décroissante sur [0 ; 0,5].

2. Parmi les courbes (C_1) et (C_2) données ci-dessous, l'une est la représentation graphique d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Indiquer laquelle en précisant les raisons de votre choix.

Courbe 1



Courbe 2



Exercice n°11 à 16 – Primitives utilisant les fonctions logarithmes et exponentielles

Exercice n°11.

Déterminez une primitive de la fonction *f* proposée sur l'intervalle *I* donné :

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur I=$]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur I=$]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ I=$]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur I=$\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I=$]-1;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I=$]-\infty;-1[$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ sur $]2;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

Exercice n°12.

On considère la fonction définie sur I=$[4;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels *a,b,* et *c* tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

2) En déduire une primitive de *f* sur $[4;+\infty[$

Exercice n°13.

Déterminez une primitive de la fonction *f* proposée sur l'intervalle *I* donné :

1) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ sur I=$\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

2) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ sur I=$[1;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ sur $]1;+\infty[$

4) $f(x)=\tan x$ sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice n°14.

Déterminez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction *f* donnée :

1) $f(x)=\frac{1}{4}e^x$	2) $f(x)=e^{-x}$	3) $f(x)=e^{2x+3}$	4) $f(x)=xe^{x^2}$	5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

Exercice n°15.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^x$

Déterminez les nombres *a* et *b* tels que la fonction *F*, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x)=(ax+b)e^x$ soit une primitive de *f*.

Exercice n°16.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{e^{-x}+1}$

1) Vérifiez que pour tout *x* de $\mathbb{R}$, on a $f(x)=\frac{3e^x}{e^x+1}$

2) Déduisez en la primitive *F* de *f* qui s'annule pour *x*=0

PRIMITIVES - CORRECTION

Exercice n°1

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3\times 3x^2-9\times 1=9x^2-9$.

2) Si on note g la fonction définie par $g(x)=9x^2-9$, alors grâce à la question 1), on dispose d'une primitive de g en la personne de la fonction f. Un autre primitive de g serait la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)+k$, où k est une constante réelle quelconque. Ainsi $f(x)=3x^3-9x+1+50=3x^3-9x+51$ est une autre primitive de g

3) Puisque $g(x)=9x^2-9=9\left(x^2-1\right)=9(x-1)(x+1)$, on peut établir le signe de $g(x)$, donc le sens de variation de f: Pour $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $g(x)>0$ et pour $x\in]-1;1[$, $g(x)<0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$, strictement décroissante sur $]-1;1[$, et strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

Exercice n°2

1) La fonction f définie par $f(x)=2x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x)=2\times\frac{x^2}{2}+1\times x=x^2+x}$

2) La fonction f définie par $f(x)=10x^4+6x^3-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x)=10\times\frac{x^5}{5}+6\times\frac{x^4}{4}-1\times x=2x^5+\frac{3x^4}{2}-x}$

3) La fonction f définie par $f(x)=(x-1)(x+3)=x^2+3x-x-3=x^2+2x-3$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}+2\times\frac{x^2}{2}-3\times x=\frac{x^3}{3}+x^2-3x}$

4) La fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{x^3}{3}}$

5) La fonction f définie par $f(x)=\frac{-4}{3x^5}=-\frac{4}{3}x^{-5}$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=-\frac{4}{3}\times\frac{x^{-5+1}}{-5+1}=-\frac{4}{3}\times\frac{x^{-5+1}}{-4}=\frac{x^{-4}}{3}=\frac{1}{3x^4}}$

6) La fonction f définie par $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}+2\sqrt{x}}$

7) La fonction f définie par $f(x)=\sin x-2\cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc il existe une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{F(x)=-\cos x-2\sin x}$

Exercice n°3

f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$ définies par $F(x)=\frac{3x^2}{2}-x-\frac{2}{x}+k, k\in\mathbb{R}$.

On cherche k pour que $F(1)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}-1-\frac{2}{1}+k=0\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$

La primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui s'annule pour x=1 est donc $\boxed{F(x)=\frac{3x^2}{2}-x-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}}$

Exercice n°4

1) f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme donc admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+k, k\in\mathbb{R}$. On cherche k pour que $F(1)=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+k=0 \Leftrightarrow \frac{7}{12}+k=0$ $\boxed{\Leftrightarrow k=-\frac{7}{12}}$. La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1)=0$ est donc $\boxed{F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{7}{12}}$

2) f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives définies sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+k, k\in\mathbb{R}}$. On cherche k pour que $F(1)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{1}-2\sqrt{1}+k=0\ 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}+k=0$ $\boxed{\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}}$. La primitive F de f sur $]0;+\infty[$ qui vérifie $F(1)=1$ est donc $\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}-2\sqrt{x}+\frac{5}{2}}$

Exercice n°5

1) $f(x)=3(3x+1)^4$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et $f(x)=u'(x)(u(x))^4$ où $u(x)=3x+1 \Rightarrow u'(x)=3$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^5}{5}=\frac{(3x+1)^5}{5}}$

2) $f(x)=16(4x-1)^3$. f est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=4\times 4(4x-1)^3$, donc de la forme $f(x)=4u'(x)(u(x))^3$, où $u(x)=4x-1 \Rightarrow u'(x)=4$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\cancel{4}\times\frac{(u(x))^4}{\cancel{4}}=(4x-1)^4}$

3) $f(x)=(2x+7)^6$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que puissance d'une fonction qui l'est, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\times 2\times(2x+7)^6$, donc de la forme $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)(u(x))^6$, où $u(x)=2x+7 \Rightarrow u'(x)=2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(u(x))^7}{7}=\frac{(2x+7)^7}{14}}$

4) $f(x)=(6x-2)(3x^2-2x+3)^5$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et de la forme $f(x)=u'(x)(u(x))^5$, où $u(x)=3x^2-2x+3 \Rightarrow u'(x)=6x-2$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^6}{6}=\frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}}$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$. f est définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et continue sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ en tant que produit et puissance de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$, donc de la forme $f(x)=-u'(x)\times(u(x))^4$, donc $\boxed{F(x)=-\frac{(u(x))^5}{5}=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}$

6) $f(x)=\sin x\cos x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\cos x\sin x$, donc de la forme $f(x)=u'(x)u(x)$, où $u(x)=\sin x \Rightarrow u'(x)=\cos x$. Ainsi une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est définie par $\boxed{F(x)=\frac{(u(x))^2}{2}=\frac{(\sin x)^2}{2}}$

Exercice n°6

1) $f(x)=\dfrac{4}{(1+4x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$, f est de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{4};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{1+4x}}$

2) $f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{3\times 2}{(2x+1)^2}$ est de la forme $f(x)=\dfrac{3\times u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{3}{u(x)}=-\dfrac{3}{2x+1}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{(4x+3)^2}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{\frac{1}{4}\times 4}{(4x+3)^2}$ est de la forme $f(x)=\dfrac{1}{4}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]-\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{4(4x+3)}}$

4) $f(x)=\dfrac{-1}{(2-x)^2}$ f est définie et continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in]2;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ ou $u(x)=2-x\Rightarrow u'(x)=-1$ donc f admet une primitive sur $]2;+\infty[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{2-x}}$

5) $f(x)=\dfrac{2}{(4-3x)^2}$ f est définie et continue sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-3)}{(4-3x)^2}$ est de la forme $f(x)=-\dfrac{2}{3}\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, donc f admet une primitive sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{2}{3(4-3x)}}$

6) $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour tout $x\in\mathbb{R}$, f est de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$, où $u(x)=x^2+x+1\Rightarrow u'(x)=2x+1$ donc f admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{x^2+x+1}}$

7) $f(x)=\dfrac{4x-10}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{2;3\}=]-\infty;2[\cup]2;3[\cup]3;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$ donc de la forme $f(x)=\dfrac{2u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=x^2-5x+6\Rightarrow u'(x)=2x-5$ donc f admet une primitive sur $]3;+\infty[$ (ou n'importe lequel des trois intervalles de son ensemble de définition), définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{2}{u(x)}=-\dfrac{2}{x^2-5x+6}}$

8) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $]k\pi;(k+1)\pi[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $]k\pi;(k+1)\pi[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}=-\dfrac{1}{\sin x}}$

9) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour x appartenant à l'un des intervalles $\left]k\dfrac{\pi}{2};(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{-u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, elle admet une primitive sur chaque intervalle $\left]k\dfrac{\pi}{2};(k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{u(x)}=\dfrac{1}{\cos x}}$

Exercice n°7

1) Pour tout $x\neq-1$, $\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}=\dfrac{a(x+1)+b}{(x+1)^3}=\dfrac{ax+a+b}{(x+1)^3}$. Ainsi $\dfrac{a}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{(x+1)^3}=f(x)$ si et seulement si pour tout $x\neq-1$, $ax+a+b=3x+4\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\a+b=4\end{cases}\Leftrightarrow b=1$ Ainsi, pour tout $x\neq-1$, $\boxed{f(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+1)^3}}$

2) f est continue sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions qui le sont, donc elle admet des primitives F sur $]-1;+\infty[$. Puisque la fonction $x\to\dfrac{3}{(x+1)^2}$ est de la forme $x\to\dfrac{3u'(x)}{\left(u(x)\right)^2}$, où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, une de ses primitives sur $]-1;+\infty[$ est la fonction $x\to-\dfrac{3}{u(x)}=-\dfrac{3}{x+1}$. Puisque la fonction $x\to\dfrac{1}{(x+1)^3}=(x+1)^{-3}$ est de la forme $x\to u'(x)\left(u(x)\right)^{-3}$, où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, une de ses primitives sur $]-1;+\infty[$ est la fonction $x\to\dfrac{u(x)^{-3+1}}{-3+1}=-\dfrac{1}{2}u(x)^{-2}=-\dfrac{1}{2u(x)^2}=-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$. On déduit donc qu'une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ est la fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par $F(x)=-\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

Exercice n°8

1) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ f est définie et continue sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=3x+2\Rightarrow u'(x)=3$, elle admet une primitive sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{3x+2}}$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-5x}}$ f est définie et continue sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$, $f(x)=-\dfrac{1}{5}\times\dfrac{-5}{\sqrt{2-5x}}$. f étant de la forme $f(x)=-\dfrac{1}{5}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2-5x\Rightarrow u'(x)=-5$, elle admet une primitive sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{5}\right[$ définie par $\boxed{F(x)=-\dfrac{1}{5}\times 2\sqrt{u(x)}=-\dfrac{2}{5}\sqrt{2-5x}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$ f est définie et continue sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}$. f étant de la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2x-3\Rightarrow u'(x)=2$, elle admet une primitive sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)}=\sqrt{2x-3}}$

4) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (le discriminant du trinôme x^2+x+1 est strictement négatif), et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=x^2+x+1\Rightarrow u'(x)=2x+1$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{x^2+x+1}}$

5) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ f est définie et continue sur chacune des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$. f étant de la forme $f(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, elle admet une primitive sur chacun des intervalles $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$ définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)}=\sqrt{x^2-1}}$

6) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$ f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, et pour $x\in\mathbb{R}$, f étant de la forme $f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$, où $u(x)=2+\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ définie par $\boxed{F(x)=2\sqrt{u(x)}=2\sqrt{2+\sin x}}$

Exercice n°9

1) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

2) Puisque $g'(x)=\dfrac{3}{2}f(x)$, on déduit que $f(x)=\dfrac{2}{3}g'(x)$. Une primitive sur $]0;+\infty[$ de f est donc la fonction définie par $\boxed{F(x)=\dfrac{2}{3}g(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}}$

Exercice n°10

1) a) FAUX. $f(0,5)=0$, mais cela n'influe par sur le signe de ses primitives

b) VRAI. Puisque f est négative sur [0 ;0,5] et positive sur $[0,5;+\infty[$, toute primitive de f est décroissante sur [0 ;0,5] et croissante sur $[0,5;+\infty[$

2) C'est la **courbe 2** qui correspond à la représentation graphique de toute primitive de f.

Exercice n°11

1) $f(x)=x^2-5x+\dfrac{1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x)=\dfrac{x^3}{3}-5\dfrac{x^2}{2}+\ln(|x|)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{5x^2}{2}+\ln(x)}$ puisque $x\in]0;+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}=x+1+\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x+\ln(|x|)=\dfrac{x^2}{2}+x+\ln(x)}$ puisque $x\in]0;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x)=7\ln(|x|)+5\times2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}=7\ln(x)+10\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}}$,car $x\in]0;+\infty[$

4) $f(x)=\dfrac{3}{3x-4}$. f est continue sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$, et puisque $f(x)=\dfrac{3}{3x-4}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=3x-4\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|3x-4|)=\ln(3x-4)}$ car $x\in\left]\dfrac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. f est continue sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;+\infty[$, et puisque $f(x)=\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|x+1|)=\ln(x+1)}$ car $x\in]-1;+\infty[$

6) Si $x\in]-\infty;-1[$, $\boxed{F(x)=\ln(|x+1|)=\ln(-(x+1))=\ln(-x-1)}$

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2;+\infty[$, et puisque $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x^2-4\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|x^2-4\right|\right)=\ln\left(x^2-4\right)}$ car $x\in]2;+\infty[$

8) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$. f est continue sur $[2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2;+\infty[$, et pour tout $x\in[2;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{3x-5}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=3x-5\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left(\left|3x-5\right|\right)=\dfrac{1}{3}\ln\left(3x-5\right)}$ car $x\in[2;+\infty[$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=x^2+2x+2\Rightarrow u'(x)=2x+2$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+2x+2\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)}$, puisque $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2+2x+2>0$

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$. f est continue sur $]-1;1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;1[$, et pour tout $x\in]-1;1[$, puisque $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}$ puisque $x\in]-1;1[\Rightarrow 1-x^2<0$

Exercice n°12

1) Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2}$

Ainsi $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b-2a=-3\\-2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3+4=1\\c=-4+2=-2\end{cases}$. Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $\boxed{f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4;+\infty[$ A partir de l'écriture $f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}$, on déduit l'expression d'une primitive F de f sur $[4;+\infty[$: $\boxed{F(x)=x^2+x-2\ln\left(\left|x-2\right|\right)=x^2+x-2\ln\left(x-2\right)}$ car $x\in[4;+\infty[\Rightarrow x-2>0$

Exercice n°13

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, puisque $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|\sin x\right|\right)=\ln\left(\sin x\right)}$, puisque $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin x>0$.

2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[1;+\infty[$, et pour tout $x\in[1;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln x=u'(x)\times u(x)$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\dfrac{\left(u(x)\right)^2}{2}=\dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{2}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. f définie est continue sur $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1;+\infty[$, et pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1/x}{\ln x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|\ln(x)\right|\right)=\ln\left(\ln(x)\right)}$ car $x\in]1;+\infty[\Rightarrow\ln x>0$

4) $f(x)=\tan x$. f définie est continue sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, et pour tout $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, puisque $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, $\boxed{F(x)=-\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=-\ln\left(\left|\cos x\right|\right)=-\ln\left(-\cos x\right)}$, puisque $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow\cos x<0$.

Exercice n°14

1) $f(x)=\dfrac{1}{4}e^x$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{4}e^x}$.

2) $f(x)=e^{-x}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=-\left(-e^{-x}\right)=-u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=-1$, $\boxed{F(x)=e^{u(x)}=e^{-x}}$.

3) $f(x)=e^{2x+3}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2e^{2x+3}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=2x+3\Rightarrow u'(x)=2$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=\dfrac{1}{2}e^{2x+3}}$.

4) $f(x)=xe^{x^2}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2xe^{x^2}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ ou $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=e^{x^2}}$.

5) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x\Rightarrow u'(x)=e^x$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)=\ln\left(e^x+1\right)}$ car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x+1>0$

Exercice n°15

La fonction *F*, définie sur $\mathbb{R}$, par $F(x)=(ax+b)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonction qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

F sera une primitive de *f* si et seulement si pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\a+b=2\end{cases}$

Une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est donc $\boxed{F(x)=(x+1)e^x}$

Exercice n°16

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3}{e^{-x}+1}=\dfrac{3\times e^x}{(e^{-x}+1)\times e^x}=\dfrac{3e^x}{e^{-x}\times e^x+1\times e^x}=\dfrac{3e^x}{1+e^x}$

2) . f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas (car $x\in\mathbb{R}\Rightarrow 1+e^x>0$ donc $\neq 0$) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et en utilisant l'écriture $f(x)=\dfrac{3e^x}{e^x+1}=3\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ ou $u(x)=e^x+1$, on obtient $\boxed{F(x)=3\ln(|u(x)|)+k=3\ln(|e^x+1|)+k=3\ln(e^x+1)+k}$ car $e^x+1>0$ sur $\mathbb{R}$