BACCALAUREAT BLANC 2024

MATHEMATIQUES

Durée : *4 heures*
Coefficient : 5

Série C

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

Le candidat devra se munir d'un papier millimétré. L'usage de toute calculatrice scientifique est autorisé.

Exercice 1 (*2 points*)

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque proposition du tableau ci-dessous suivi de ***Vrai*** si la proposition est vraie ou de ***Faux*** si la proposition est fausse.

N°	***Propositions***
1	Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, croissante et minorée sur l'intervalle $]2; 8[$ alors la limite de f à droite en 2 est finie.
2	Soit A et B deux points distincts du plan. On note $r(A, \frac{\pi}{2})$ la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $t_{\overrightarrow{AB}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Alors la composée $r(A, \frac{\pi}{2}) \circ t_{\overrightarrow{AB}}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3	f étant une bijection de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$, si $f(2) = e$ et $f'(2) \neq 0$ alors la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en e, et le nombre dérivé de f^{-1} en e, noté $\left(f^{-1}\right)'(e)$, est égal à $\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$.
4	Une primitive sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $x \mapsto \tan x$ est la fonction $x \mapsto -\ln(\cos x)$.

Exercice 2 (*2 points*)

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des lignes a, b, c et d permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque énoncé suivi de la lettre de la ligne qui donne l'affirmation vraie.

N°	***Enoncés***	***Informations***	
1	Soit (u_n) la suite numérique définie sur IN par : $u_n = -\frac{5}{2^n}$. Alors la suite (u_n) …	*a*	diverge vers $+\infty$
		b	converge vers 0
		c	diverge vers $-\infty$
		d	converge vers -5
2	$\overline{1011011}^2$ est l'écriture en base de 2 du nombre …	*a*	109
		b	181
		c	102
		d	91
3	$ABCD$ est un carré, I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[BC]$. On note $t_{\overrightarrow{AC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, et $S_{(AB)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AB). Alors la composée $t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$ est la symétrie glissée d'axe et de vecteur respectivement égaux à …	*a*	(IJ) et $\overrightarrow{AB}$
		b	(IJ) et $\overrightarrow{AC}$
		c	(BC) et $\overrightarrow{AD}$
		d	(BC) et $\overrightarrow{IJ}$
4	Soit z le nombre complexe défini par : $z = -\sqrt{7} \times e^{i\frac{\pi}{6}}$. L'argument principal de z est …	*a*	$-\frac{\pi}{6}$
		b	$\frac{5\pi}{6}$
		c	$-\frac{5\pi}{6}$
		d	$\frac{\pi}{6}$

Tourne la page STP

Exercice 3 (**3 points**)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$). L'unité graphique est : 2 cm.
Soit M et H deux points du plan de couples de coordonnées respectifs (x ; y) et (x ; 3), x et y étant des nombres réels, et (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que : $\dfrac{\text{MO}}{\text{MH}} = \dfrac{1}{2}$.

1. Démontre que (Γ) est une ellipse dont tu préciseras l'excentricité, un foyer et la directrice associée.

2. *a*) Démontre que : $\text{M} \in (\Gamma) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{(y+1)^2}{4} = 1$.

   b) Détermine les coordonnées du centre et des sommets de (Γ) dans le repère (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$).
3. Trace l'ellipse (Γ).

Exercice 4 (**3 points**)

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).
On considère les points A(2; 1 ; 3), B(–3 ; –1 ; 7) et C(3; 2 ; 4), et la droite (D) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = -3t \\ z = t + 4 \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$.

1. *a*) Vérifie que les points A, B et C déterminent un plan.

   b) Justifie que la droite (D) est orthogonale au plan (ABC).

   c) Détermine une équation du plan (ABC).
2. *a*) Détermine les coordonnées du point H, intersection de la droite (D) et du plan (ABC).

   b) Démontre que : $H = bar\ \{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$.
3. On désigne par (Γ_1) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$, et par (Γ_2) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$.

   a) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ_1).

   b) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ_2).

Exercice 5 (**5 points**)

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.
Pour tout nombre réel x, on pose : $g_n(x) = n(x+1) + e^x$ et on admet que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n telle que : $\forall x \in]-\infty, \alpha_n[$, $g_n(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha_n\ ; +\infty[$, $g_n(x) > 0$.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction numérique f_n par : $f_n(x) = \dfrac{xe^x}{n + e^x}$ et on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. *a*) Calcule la limite de f_n en $-\infty$, puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

   b) Calcule la limite de f_n en $+\infty$.
2. *a*) Justifie que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C_n) en $+\infty$.

   b) Étudie les positions relatives de (C_n) par rapport à (D).

 ☞ *Tourne la page STP*

3. Vérifie que : $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$.

4. On admet que f_n est dérivable sur ℝ, et on note f_n' sa fonction dérivée.

   a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \dfrac{e^x g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

   b) Étudie les variations de f_n et dresse son tableau de variations.

5. On définit les intégrales I et u_n par : $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} xe^x dx$ et $u_n = \displaystyle\int_{-1}^{0} f_n(x)dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, justifie que : $\mathrm{I} = \dfrac{2-e}{e}$.

   b) Démontre que pour tout entier naturel non nul *n*, $\dfrac{2-e}{en+1} \leq u_n \leq \dfrac{2-e}{en+e}$.

   c) Déduis-en que la suite (u_n) est convergente et précise sa limite.

6. Soit la suite (v_n) de terme général v_n tel que : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a) Justifie que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{k+1}^{k+2} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k+1}$.

   b) Déduis-en que : $\ln(n+2) - \ln 2 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$.

   c) Démontre que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$. (On pourra utiliser les questions 5.*b* et 6.*b*).

Exercice 6 (***5 points***)

Afin de se rendre au Centre d'Information et d'Orientation pour participer à une séance d'entretien et d'échange sur le choix des différentes filières après l'obtention du BACCALAUREAT, un groupe d'établissements secondaires de la DRENA de SASSANDRA dont le vôtre cherche des CARS de transport pour le déplacement de ses élèves. Le transporteur choisi, dispose de deux types de camion: les uns sont de 36 places et les autres sont de 25 places. On estime que le nombre d'élèves à transporter est compris entre 300 et 1100. Le coordonnateur se rend compte que s'il prend seulement des CARS de 36 places, 3 élèves occuperont le dernier CAR et s'il choisit uniquement des CARS de 25 places, 8 élèves occuperont le dernier CAR. Il décide donc d'utiliser les deux types de CARS de sorte que toutes les places soient occupées.

Le transporteur demande au coordonnateur de lui communiquer le nombre d'élèves participant à cette rencontre et le nombre de CARS de chaque type qu'il souhaite affréter.

N'ayant pas les connaissances requises pour effectuer les calculs, il sollicite ton aide.

A l'aide d'un raisonnement cohérent basé sur tes connaissances mathématiques, aide celui-ci à répondre à la demande du transporteur.