Corrigé exercice 1

1. $\dfrac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\dfrac{c}{2u-1}=\dfrac{2au^2-au+2bu-b+c}{2u-1}\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\2b-a=0\\c-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1/4\\c=-3/4\end{cases}\Rightarrow f(u)=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3/4}{2u-1}$.

2. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\frac{2}{2x-1}\,dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ln|-2-1|\right)$

soit $\dfrac{3}{8}\ln 3$.

3. La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u=\sin x$:

$f(u)=\dfrac{u^2-1}{2u-1}\Rightarrow f(\sin x)=\dfrac{\sin^2 x-1}{2\sin x-1}=\dfrac{\cos^2 x}{1-2\sin x}$; pour pouvoir intégrer $f(\sin x)$, il faut que ce soit sous la forme $(\sin x)'F'(\sin x)=(\cos x)F'(\sin x)$ où *F* est une primitive de *f*. Or on a à intégrer $\dfrac{\cos^3 x}{1-2\sin x}=\cos x\left[\dfrac{\cos^2 x}{1-2\sin x}\right]=\cos x\left[\dfrac{1-\sin^2 x}{1-2\sin x}\right]$ donc tout va bien.

On a finalement $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{8}\ln|2\sin x-1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=\frac{3}{8}\ln 2$.

Corrigé exercice 2

1. $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. $g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$ d'où on tire par identification : $\begin{cases}a+b+c=0\\c-b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\c-b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/2\\c=1/2\\a=-1\end{cases}$. On a donc $g(x)=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$.

b. $\displaystyle\int g(x)dx=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|\Rightarrow G(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$ (ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Pour trouver une primitive de $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$, il suffit d'utiliser $\displaystyle\int u'u^n dx=\frac{1}{n+1}u^{n+1}$ avec $u=x^2-1$ et $n=-2$: $\displaystyle\int f(x)dx=\frac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1}=\frac{-1}{x^2-1}$.

3. A première vue (et même à seconde vue) il faut intégrer par parties :

$$u=\ln x,\ v'=\frac{2x}{(x^2-1)^2}\Rightarrow u'=\frac{1}{x},\ v=\frac{-1}{x^2-1},$$

ce qui donne

$$I=\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x dx=\left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}dx$$
$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\left(-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1\right)$$
$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{13}{8}\ln 3+\frac{17}{6}\ln 2.$$