DEVOIR DE MATHS –TERMINALE C

EXERCICE 1

1. Soit f la fonction définie par : $f(x)=|x-2|\sqrt{4-x^2}$.

   a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

   b) Etudie la dérivabilité de f en -2 et en 2.

2. Démontre que la fonction $g(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|}$ est prolongeable par continuité en 0.

EXERCICE 2

ABCD est un rectangle de centre O et de sens direct tel que $AB = 3AD$.

On pose $AD = a$ où $a > 0$

G est le point du plan tel que : $3\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{AB} = \vec{O}$.

1. Montre que G est le barycentre des points pondérés (B ; 3) , (C ; 2) et (D ; -2).

2. Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$3MB^2 + 2MC^2 - 2MD^2 + 3a^2 = 0.$$

3. Détermine et construis l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que :

$$\left\|-6\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\|.$$

4. Pour tout nombre réel m , on note (Δ_m) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$3\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{MD} = ma^2 .$$

   a) Démontre que : $M \in(\Delta_m) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AD} = -\dfrac{ma^2}{3}$

   b) Détermine (Δ_0) et (Δ_{-3}).

   c) Calcule m pour que (Δ_m) soit la médiatrice du segment [AD].

PROBLEME

On considère les fonctions f et g définies de IR vers IR par :

$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

($\mathscr{C}f$) est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O , I , J) (unité : 1 cm)

Partie A

1. Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans IR et que $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$
2. Encadre α à 0,01 près.
3. Etudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

1. Détermine l'ensemble de définition de f et calcule les limites de f aux bornes de cet ensemble.
2. Démontre que (Δ) : $y = x + 2$ est une asymptote à ($\mathscr{C}f$) et étudie les positions relatives de ($\mathscr{C}f$) et (Δ) .
3. Démontre que $f(\alpha) = 2 + \frac{3}{2}\alpha$ puis encadre $f(\alpha)$.

4.a) Démontrer que $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{xg(x)}{\left(x^2 - 1\right)^2}$

b) Déduis-en les variations de f puis dresse le tableau de variation de f.

5. Détermine l'image de l'intervalle]-1; 1 [par la fonction f.
6. Ecris une équation de (T) la tangente à ($\mathscr{C}f$) au point d'abscisses -2.
7. Soit h la restriction de f à] -∞ ; -1 [.

a) Démontre que h est une bijection de] -∞; -1 [vers un intervalle K que l'on précisera.

b) Dresse le tableau de variation de h^{-1} .

c) Calcule $\left(h^{-1}\right)'(0)$

8. Construis ($\mathscr{C}f$) et ($\mathscr{C}_{h^{-1}}$).