DEVOIR N° : Tle C (1h30 mn) 14 / 01 /21

EXERCICE 1

1) a) Résous dans Z l'équation : $2y \equiv 6 [11]$

b) A l'aide de la congruence modulo 11 démontre que l'équation (E) : $11x + 2y = 94 \Leftrightarrow 2y \equiv 6 [11]$

c) Déduis-en que les solutions de (E) sont les couples $(8 - 2k ; 3 + 11k)$; $k \in Z$

2) Soit n un entier naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) d'entiers vérifiant : $n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$

a) Démontre que le couple (a ; - b) est une solution de (E)

b) Détermine le reste de la division euclidienne de n par 22

3) p et q sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 9. YAO est né en 19pq, en 2004 son âge est curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance

a) Justifie qu'en 2004, l'âge de YAO vérifie $10 + p + q$ puis donne une autre expression de son âge

b) Déduis-en de ce qui précède, l'âge de YAO en 2004

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x - \sqrt{|x^2 - 1|}$ et Cf sa courbe dans un repère orthonormé (O ; I ; J)

1) a) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et interprète graphiquement le résultat

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et justifie que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptôte à Cf

2) a) Etudie la continuité de f en $x = - 1$ puis en $x = 1$

b) Justifie que f n'est pas dérivable en $x = - 1$ et en $x = 1$ et donne une équation des demi-tangentes à Cf

3) a) Démontre que pour $x \in]- \infty ; - 1[\cup]1 ; +\infty [$; $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ et $x \in]- 1 ; 1[$ $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) Justifie que $f'(x) > 0$ pour $x \in]- \infty ; - 1[\cup]0 ; 1[$ et que $f'(x) < 0$ pour $x \in]1 ; +\infty [$

c) Résoudre dans]- 1 ; 0[l'inéquation : $\sqrt{1 - x^2} + x \leq 0$ et déduis-en le signe de f '(x) dans]- 1 ; 0[

d) Dresse le tableau de variation de f et trace la courbe de f dans le repère (O ; I ; J) unité : 1 cm

4) Justifie que pour tout x de [1 ; 2], $| f'(x) | < 1$ et démontre à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que : $| f(x) - 1 | < | x - 1 |$

EXERCICE 3

On donne les fonctions f et g définies sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$ et $g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

1) Détermine les primitives de g sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ et déduis-en G la primitive de g telle que $G(\frac{\pi}{4}) = - 2$

2) a) Justifie que pour tout x de $[0 ; \frac{\pi}{4}]$, $g'(x) = \dfrac{\cos^4 x + 3\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x}$

b) Détermine les réels a et b tels que : $g'(x) = \dfrac{a}{\cos^2 x} + \dfrac{b}{\cos^4 x}$

c) Déduis-en F la primitive de f sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ qui prend la valeur $- 1$ en $x = \frac{\pi}{4}$