DEVOIR de NIVEAU N°1 de MATHEMATIQUES

Durée : 2H
Classes : Tles C

EXERCICE-1

On considère la fonction $f : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2-|x|}-x \end{matrix}$, de représentation graphique (C) dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

1- a) Démontrer que pour tout x élément de $]-1;1[$, $x^2-|x| \leq 0$. En déduire l'ensemble de Définition D_f de f.

b) Démontrer que pour tout $x > 1$, $2x-1 > 2\sqrt{x^2-x}$

2- a) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

En déduire les asymptotes éventuelles à (C).

b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y=-2x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

3- a) Démontrer que : - Pour tout $x<-1$, $f'(x)=\frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$

- Pour tout $x>1$, $f'(x)=\frac{2x-1-2\sqrt{x^2-x}}{2\sqrt{x^2-x}}$

b) En déduire le sens de variation et le tableau des variations de f.

4- Tracer la courbe (C).

EXERCICE-2

Dans le plan on considère un triangle ABC de centre de gravité G. On définit les fonctions f et g du plan dans l'ensemble des nombres réels telles que pour tout M :

$g(M)=\overline{MA}.\overline{MB}+\overline{MB}.\overline{MC}+\overline{MC}.\overline{MA}$

$f(M)=MA^2+MB^2+MC^2$.

1- Démontrer que, quel que soit le point M : $g(M)=3MG^2+g(G)$ et $g(G)=-\frac{1}{2}f(G)$.

2- Calculer $f(G)$ en fonction de AB, AC, BC et déduisez-en l'expression de $g(M)$ en fonction de MG, AB, BC, CA.

3- Dans le cas particulier où le triangle ABC est équilatéral de coté a, déterminer l'ensemble des points M tels que : $\frac{a^2}{4} \leq g(M) \leq \frac{a^2}{2}$.

|LYCEE CLASSIQUE D'ABIDJAN| 20 octobre 2016

DEVOIR de MATHEMATIQUES

Durée : 2H
Classe : TC_4

EXERCICE-1

Répondre à l'aide du schema (recopier) suivant :
par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour l'exercice entièrement juste.

Question	a	b	c	d
Réponse				

Dans le plan, on considère un triangle (ABC) et on note

- G le barycentre du système $\{(A, 3) ; (B, 1) ; (C, 1)\}$;
- Q le barycentre du système $\{(A, 3) ; (C, 1)\}$;
- R le barycentre du système $\{(A, 3) ; (B, 1)\}$;
- P le milieu du segment [BC].

a. Les droites (CR) et (BQ) sont sécantes en G.
b. Le point G appartient à la droite (AP).
c. Le point G est l'image du point A par l'homothétie de centre P et de rapport $\frac{1}{5}$.

On appelle E l'ensemble des points M du plan tels que $(\overline{\mathrm{MB}},\overline{\mathrm{MC}}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

d. L'ensemble E' décrit par G lorsque A décrit E est une droite parallèle à (BC).

EXERCICE-2

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2(x+2)$.

1. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 4$ admet, sur $[0 ; +\infty[$, une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2}.
3. En déduire la résolution de l'inéquation $g(x) > 4$ sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} + x$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. Étudier la parité de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, en déduire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Peut-on en déduire une ou plusieurs droites asymptotes à la courbe (C_f) ?

3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe (C_f) en $+\infty$, en déduire l'équation d'une droite asymptote à (C_f) en $-\infty$.
4. a. Démontrer que f est dérivable sur les intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$ puis que $f'(x) = \frac{\sqrt{g(x^2)} - 2}{x^2\sqrt{x^2+2}}$.

b. Déduire de la partie A que $f'(x) > 0$ sur $]\sqrt{\alpha} ; +\infty[$.

c. En déduire les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $\sqrt{2}$.
6. Tracer la courbe (C_f) en vous aidant de tous les renseignements obtenus précédemment.

 | Cissé M. G. Email : c.mauricegustave@live.fr Tel : 60 913 161 Professeur certifié de Math

DEVOIR de MATHEMATIQUES

Durée : 2H
Classe : TC

EXERCICE-1

Valider ou infirmer les propositions suivantes :

1. Si une suite u est croissante et majorée par 5 , alors elle converge vers 5.
2. Si une suite u est monotone et bornée , alors elle est convergente.
3. Si une suite u n'est pas convergente , alors elle n'est pas bornée.
4. Si deux suites ont la même limite, alors elles sont adjacentes.
5. Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont bornées.
6. Une suite convergente est bornée.
7. Une suite bornée est convergente.
8. Une suite qui tend vers $+\infty$ ne peut pas être majorée.
9. Si $u_n - v_n$ tend vers 0 alors u_n et v_n ont la même limite.
10. Si (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$ alors $u_n - v_n$ tend vers 0.
11. Si pour tout $n \geq 10$, $|u_n - 3| \leq \frac{1}{n^2}$ alors (u_n) converge vers 3.

EXERCICE-2

PARTIE-1

On considère la fonction f définie par : $x \in]-1;\, 1[,\, f(x) = \dfrac{x - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Déterminer les limites de f en -1 et 1 .
2. Etudier les variations de f .
3. Démontrer que l'équation : $x \in]-1;1[, f(x) = x$ admet une solution unique α .
4. Etudier le signe de $f(x) - x$.
5. a- Montrer que f est une bijection

   b- Justifier que *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.
6. représenter dans le même repère orthonormé (O ; I ; J) (unité 3cm), les courbes des fonctions f *et* f^{-1}

PARTIE-II

Soit (U_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 \in [0;\alpha] \\ U_{n+1} = f^{-1}(U_n) \end{cases}$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq \alpha$
2. Démontrer que la suite (U_n) est croissante ? En déduire sa convergence .
3. a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $\left|(f^{-1})'(x)\right| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

   b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|U_n - \alpha|$

   c- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$ et en déduire la limite de (U_n) .

Lycée Classique Abidjan	DEVOIR DE NIVEAU MATHEMATIQUES – Tle C (3ème trimestre)	Année Scolaire : 2018-2019
Lundi 08 Avril 2019		DUREE : 2 h30 mn

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples (x ; y) tels que : PGCD(x, y) = y – x.

1-a) A l'aide de algorithme d'Euclide , détermine le PGCD(363 ; 484).

b) Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ? Justifie ta réponse.

2-a) Soit n un entier naturel non nul. Le couple (n ; n + 1) appartient-il à S ? Justifie ta réponse.

b) Démontre que (x ;y) appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $x = k(y - x)$ et $y = (k + 1)(y - x)$.

c) Déduis que pour tout couple (x ; y) élément de S ; on a PPCCM(x ; y) = k(k + 1)(y – x).

3-a) Détermine l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b) Déduis l'ensemble des couples (x,y) de S tels que PPCM(x ; y) = 228.

EXERCICE 2

Soit f la fonction dérivable et définie sur [0 ; 1] par : $\begin{cases} f(x) = x^2\ln x - \dfrac{x^2 - 1}{2} \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1- Démontre que l'équation f(x) = x admet une unique solution dans [0 ; 1].

2- a) Etudie le sens de variation de f ' sur]0 ; 1] et dresse son tableau de variation.

b) Démontre que $\forall x \in [0 ; 1]$, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{e}$.

3- Démontre que $f([0,1]) \subset [0 ; 1]$.

4- Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [0 ;1]$.

b) En utilisant l'inégalité des inégalités des accroissements finis ; démontre que

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{2}{e}|U_n - \alpha|$.

c) Démontre que $\forall n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq (\dfrac{2}{e})^n$

d) En déduis la limite de la suite (U_n).

EXERCICE 3

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct$(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .Unité : 2cm

On considère les points A,B et C d'affixes respectives : $z_a = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$

1-a) Ecris z_A sous forme trigonométrique.

b) Place les points A, B et C dans le repère précédent.

2-a) Démontre que le triangle ABC est équilatéral.

b) Détermine le centre et le rayon du cercle (Γ_1) circonscrit au triangle ABC. Tracer (Γ_1).

3-a) Vérifier que l'ensemble (Γ_2) des points M d'affixe z qui vérifient : $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon et construire (Γ_2).

b) Vérifier que les points A et B sont des éléments de (Γ_2).

4- On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1.

b) Construis l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

c) Détermine l'image du cercle (Γ_2) par la rotation r_1.

5- Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M_0 l'image de M par r et z_0 l'affixe de M_0.
On posera : $z_0 = az + b$ avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que r transforme le cercle (Γ_2) en le cercle (Γ_1).

a) Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

b) Détermine en fonction de a l'affixe du point r(C) ; image du point C par la rotation r.

c) En déduis que r(C) appartient à un cercle fixe que l'on définira.

d) Vérifie que ce cercle passe par C_1.

EMPT Binzerville	DEVOIR SURVEILLE n°1 DE MATHEMATIQUES	Année scolaire 2016-2017	
Prof : M. KADJO	Niveau : Tle C	Durée : 2 h 45 min	Date : Mardi 04 octobre 2016

Exercice 1

1) a- Démontrer que pour tout entier naturel $n, n \geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$

b- Enoncer le critère de divisibilité par 11 et le démontrer.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation $x \equiv -1[5]$.

3) Soit $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 10 + a_0$, $a_n \neq 0$; l'écriture dans le système décimal de l'entier naturel N et $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

a- Montrer que $N \equiv S[9]$.

b- On considère l'entier $A = 4444^{4444}$. B est la somme des chiffres de A, C la sommes des chiffres de B et D la somme des chiffres de C. Montrer que $A \equiv 7[9]$. En déduire que $C \equiv 7[9]$.

c- En utilisant une majoration, montrer que A a au plus 17776 chiffres. En déduire que $B < 17776 \times 9$.

d- Montrer que $C < 42$ et déterminer toutes les valeurs possibles de C. En déduire que $D = 7$.

Exercice 2

On note 0, 1, 2, . . . , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. α et β correspondent à 10 et 11 respectivement.

1) Soit $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$. Déterminer l'écriture en base 10 de N_1.

2) On considère un entier naturel $N = \overline{a_n \dots a_1 a_0}^{12}$, $a_n \neq 0$.

a- Démontrer que $N \equiv a_0[3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre en base 12.

b- Soit $N_2 = 1131$. Déterminer l'écriture en base 12 de N_2. En utilisant l'écriture en base 12, justifier que N_2 est divisible par 3.

3) a- Démontrer que $N \equiv (a_n + \cdots + a_1 + a_0)[11]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b- En utilisant l'écriture en base 12, justifier que N_1 est divisible par 11.

4) Un nombre s'écrit $N_3 = \overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N_3 est à la fois divisible par 3 et 11.

Exercice 3

Dans cet exercice, on ne s'intéresse qu'aux diviseurs positifs de l'entier naturel n.

1) Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, la décomposition en produit de facteurs premiers de n.

a- Justifier par récurrence simple que le produit de p entiers naturels impairs est impair.

b- Démontrer que le nombre N de diviseurs de n est : $N = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

c- En déduire que n est un carré parfait si et seulement s'il a un nombre impair de diviseurs.

2) On suppose dans toute la suite que $n = p^\alpha q^\beta$. Démontrer que la somme des diviseurs de n est $S = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p-1} \times \frac{q^{\beta+1} - 1}{q-1}$.

3) a- On suppose dans cette question que n n'est pas un carré parfait. Démontrer que le produit des diviseurs de n est $P = n^{\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2}}$.

b- On suppose que n est un carré parfait. Calculer le produit des diviseurs de n.

4) Applications :

a- Déterminer un entier naturel n sachant que le produit de ses neuf diviseurs est $(225)^4 \times 15$.

b- Déterminer un entier naturel $n = p^\alpha q^\beta$, sachant qu'il a six diviseurs de somme 39.

DEVOIR n°2—Tle C---durée : 2 h et 50 min---Date : 18-10-16

Exercice 1 (*Arithmétique et codage affine*)

On choisit de coder un message en procédant comme suit : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on associe un nombre entier n de l'ensemble $\Phi = \{0; 1; 2; \dots; 24; 25\}$ selon le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Φ, le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est enfin associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour $a = 2$ et $b = 3$; on décide de coder la lettre P ; P correspond à 15 ; $n = 15$. $2 \times 15 + 3 = 33$; le reste de la division euclidienne de 33 par 26 est 7 et 7 correspond à la lettre H. ainsi pour $a = 2$ et $b = 3$, la lettre P est codée par la lettre H.

1) On prend $a = 0$ et $b = 76$. Coder les lettres A, F et W.
2) On prend $a = 13$. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre.
3) Dans toute la suite on prend $a = 5$ et $b = 2$.
   a- On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont même reste dans la division euclidienne par 26, alors $n - p$ est un multiple de 26.
   b- En déduire que $n = p$.
   c- Coder le mot AET.
4) On se propose de décoder la lettre E.
   a- montrer que le décodage de la lettre E revient à déterminer l'élément n de Φ telle que $5n - 26y = 2$ où y est un entier .
   b- On considère l'équation (E): $5x - 26y = 2$. Déterminer une solution particulière de (E).
   c- Résoudre l'équation (E) ci-dessus.
   d- Déterminer l'unique couple $(x; y)$ solution de (E) telle que $0 \leq x \leq 25$. Décoder la lettre E.

Exercice 2 .

1) Soit x un nombre réel. Ecrire $x^4 + 4$ comme produit de deux polynôme à coefficient entiers. (*Indication* : $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$).
2) Soit n un entier naturel $(n \geq 2)$. On pose $A = n^2 - 2n + 2$; $B = n^2 + 2n + 2$ et $d = PGCD(A; B)$
   a- Justifier que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
   b- Montrer que tout diviseur commun à A et n divise 2.
   c- Montrer que tout diviseur commun à A et B divise $4n$.
3) On suppose n impair.
   a- Montrer que A et B sont des nombres impairs. En déduire que d est impair.
   b- Montrer que d divise n. En déduire que d divise 2 et que A et B sont premiers entre eux.
4) On suppose que n est pair
   a- Montrer que 4 ne divise pas A.
   b- Montre que $d = 2p$ où p est un nombre impair.
   c- Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$.

Exercice 3.

1) Soit b un entier naturel $(b > 3)$. Ecrire le nombre $(b + 1)^3$ en base b.
2) Montrer que pour tout entier naturel n, $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11 et $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 17
3) Déterminer le reste de la division euclidienne de 7^{1978} par 9.
4) a- Décomposer 1980 en produit de facteurs premiers. En déduire tous les entiers naturels n tels que n^2 divise 1980.
   b- Soit a et b deux entiers naturels ; $m = PPCM(a; b)$ et $d = PGCD(a; b)$. On suppose que $m^2 - 5d^2 = 1980$. Déduire de la question précédente que $d = 3$. En déduire m.
   c- Justifier que a et b sont solutions du système $\begin{cases} ab = 135 \\ PGCD(a; b) = 3 \end{cases}$. Déterminer toutes les valeurs possible de a et b.

Lycée Classique D'Abidjan	DEVOIR COMMUN Tle C	Année scolaire 2015-2016
11 Janvier 2016	MATHEMATIQUES	Durée : 2 h 30

EXERCICE

1..On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k\ ;\ 68+109k)$ où k appartient à l'ensemble des entiers relatifs Z.

c. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante : à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

b. Montrer que quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1\ [227]$.

c .En utilisant 1) b), en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A, $g[f(a)] = a$.

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$ *si* $0 < x < 1$; $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

On note Cf la courbe de f dans un repère orthonormé (O, I, J)

1. a. Démontrer que f est continue en 0 et en 1

   b. Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat

2. Soit la fonction k définie sur $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$ par : $k(t) = -\ln(1-t) - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) - \frac{2t^3}{3}$

   a. Etudier les variations de k

   b. En déduire que pour $t \in [0\ ;\ \frac{1}{2}]$ on a : $0 \leq -\ln(1-t) - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) \leq \frac{2t^3}{3}$

(on admettra que $\forall t \in [0 ; \frac{1}{2}]$, $\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) \geq t + \frac{t^2}{2}$)

3. Soit la fonction g définie sur]0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

   a. En posant **t = -p** dans la double inégalité du 2. b démontrer que pour tout $p \in [-\frac{1}{2}\ ;\ 0]$ on a :

$$0 \leq g(1+p) - g(1) + \frac{p}{2} \leq \frac{2p^2}{3}$$

b. Calculer $\lim_{p \to 0} \frac{g(1+p) - g(1)}{p}$ et en déduire que g est dérivable en 1. Préciser g'(1) et f '(1)

4. Soit la fonction **h** définie sur **]0 ; 1[** par **h(x)** $= lnx - 1 + \frac{1}{x}$
Etudier les variations de h et en déduire que pour tout $x \in]0 ; 1[$; $h(x) > 0$

5. a. Démontrer que pour tout $x \in]0 ; 1[$; $f'(x) = \frac{h(x)}{(lnx)^2}$

b. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

c. Tracer Cf dans le repère (O, I, J). Prendre 10 cm pour unité graphique

Lycée Classique D'Abidjan	DEVOIR COMMUN Tle C	Année scolaire 2015-2016
11 Janvier 2016	MATHEMATIQUES	Durée : 2 h

EXERCICE

1..On considère l'équation (E) : **109x - 226y = 1** où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le PGCD de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme (141+ 226k ; 68+109k) où k appartient à l'ensemble des entiers relatifs Z.

c. En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul **d** inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul **e** tels que **109d = 1+ 226e** . (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que a ≤ 226

On considère les deux fonctions **f** et **g** de A dans A définies de la manière suivante :
à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que g[f(0)]= 0 .

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul **a** de A, $a^{226} \equiv 1$ [227].

c .En utilisant 1)c), en déduire que, quel que soit l'entier non nul **a** de A, g[$f(a)$] = a .

PROBLEME

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $\mathbf{f(x)} = \frac{x-1}{\ln x}$ *si* $0 < x < 1$; **f(0) = 0** et **f(1) = 1**

On note Cf la courbe de f dans un repère orthonormé (O, I, J)

1. **a.** Démontrer que f est continue en 0 et en 1

   b. Etudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat

2. Soit la fonction **k** définie sur $[0\,;\frac{1}{2}]$ par : $\mathbf{k(t)} = -\ln(1-t) - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) - \frac{2t^3}{3}$

   a. Etudier les variations de k

   b. En déduire que pour $t \in [0\,;\frac{1}{2}]$ **on a :** $0 \le -\ln(1-t) - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) \le \frac{2t^3}{3}$

3. Soit la fonction g définie sur]0 ; 1] par : $\mathbf{g(x)} = \frac{1}{f(x)}$

   a. En posant **t = -p** dans la double inégalité du **2. b** démontrer que pour tout p ∈ $[-\frac{1}{2}\,; 0]$ on a :

   $$0 \le g(1+p) - g(1) + \frac{p}{2} \le \frac{2p^2}{3}$$

b. Calculer $\lim_{p\to 0} \frac{g(1+p)-g(1)}{p}$ et en déduire que g est dérivable en 1.Préciser g'(1) et f '(1)

4.Soit la fonction **h** définie sur **]0 ; 1[** par **h(x)** = $\boldsymbol{\ln x - 1 + \frac{1}{x}}$

Etudier les variations de h et en déduire que pour tout x ∈]0 ; 1[; h(x) > 0

5. **a**. Démontrer que pour tout x ∈]0 ; 1[; **f '(x)** = $\frac{h(x)}{(\ln x)^2}$

b. Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

c. Tracer Cf dans le repère (O, I, J). Prendre 10 cm pour unité graphique

Lycée Classique D'Abidjan	DEVOIR SURVEILLE Tle C4	Année scolaire 2015-2016
17 decembre 2015	MATHEMATIQUES	Durée : 2 h 00

EXERCICE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;u,v)$ (unité graphique : 1 cm).

On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$.

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.
Calculer les affixes des points images de O, B et C par f. Placer les points B, C et leurs images B' et C' sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?

2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation : $z^3 - 3z^2 + 2z = 0$
En déduire que f possède 3 points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. *a.* Montrer pour tout z de C l'égalité suivante : $z' - 1 = (z-1)^3$.
b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z-1$ et α un argument de $z-1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z'-1$ en fonction de r et de α.
Soit A le point d'affixe 1. Déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle (u, AM') et une mesure de l'angle (u, AM).
c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.
d. Montrer que si M appartient à la demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B, alors M' appartient à une demi-droite D' que l'on déterminera. Justifier l'appartenance du point B' à Γ' et à D'.
Compléter la figure avec les différents élément : Γ, Γ', D et D'.

PROBLEME

Le but de ce problème est d'étudier, dans un premier temps (partie A), la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \text{ pour } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2},$$

puis (partie B) de trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = x$.

Partie A

Dans cette partie le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique : 2 cm. On désigne pa C la représentation graphique de f.

I. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x+2) - \ln x - \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{4}$.

1. a. Étudier le sens de variation de g.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.
2. Montrer que, pour tout x de $[2;3]$, on a $g(x) < \dfrac{1}{2}$.