Lycée sainte Marie Cocody	**Devoir sur cours**	**Mardi 09 Février 2021**
Terminales C	**Mathématiques**	**Durée : 2h**

Exercice 1(2 points)
Ecris sur ta copie le numéro de l'affirmation suivi de VRAI si l'affirmation est vraie et FAUX si l'affirmation est fausse.

n°	Affirmation
1	Dans l'espace, deux droites non parallèles sont nécessairement sécantes
2	Dans l'espace, deux plans non parallèles sont sécants
3	Dans l'espace, trois vecteurs sont toujours coplanaires
4	$\overline{11111100100}^{2}$ est l'écriture en base 2 de 2020

Exercice 2 (6 points)

A. Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, 7 divise $3^{3n} + 2 \times 5^{3n-1}$
B.
1. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) d'inconnue x : $3x^2 + 6x + 5 \equiv 0[7]$
a. Justifie que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $3x(x+2) \equiv 2[7]$
b. Résous l'équation (E') et déduis les solutions de l'équation (E).(On pourra utiliser un tableau de congruences modulo 7)

2.Soit N un entier naturel tel que $N = \overline{361}^{b}$ dans le système de numération de base b avec ($b \geq 7$). On suppose que N a pour reste 3 dans la division euclidienne par 7.
a. Démontre que b est solution de l'équation (E).
b. Déduis de la question précédente, l'ensemble des valeurs possibles de b.

Exercice 3 (5,5 points)
ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de $[AB]$,
J est le milieu de $[CE]$, K est le point défini par
$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, L est le point défini par $\overrightarrow{BL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$,
M est le milieu de $[KL]$ et N celui de $[EH]$.
1.a. Complète la figure.
b. démontre que : $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
c. Déduis-en que les vecteurs $\overrightarrow{IN}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont coplanaires.
2. a. Exprime $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
b. Déduis-en que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$
c. Exprime $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
d. Déduis-en que les points M, I et J sont alignés.

Exercice 4 (6,5 points)
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
$A(1;\ 2;\ 7)$, $B(2\ ;\ 0;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 3)$, $D(3;\ -6;\ 1)$ et $E(4;\ -8;\ -4)$
1. Démontre que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit $\vec{u}(1;\ b;\ c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.
a. Détermine les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).
b. Déduis-en qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.
c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

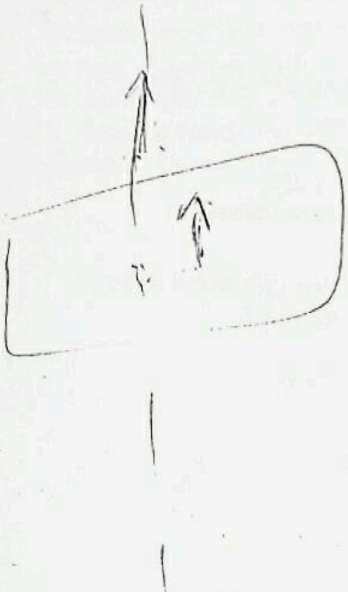
3. On considère la droite (Δ) de l'espace dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$

a. La droite (Δ) est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Détermine les coordonnées du point H, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4. Etudie la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).



Lycée Sainte Marie Cocody	Mercredi 13 Janvier 2021
Terminale C	Durée : 4 heures

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (4 points)

On considère quatre points A, B, C et D tels que trois quelconques ne soient pas alignés.

1. Démontre que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système

$$\{(A;1);\ (B;\ -1);\ (C;1)\}$$

2. On suppose que ABCD est un parallélogramme. Soit (E_1) l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = BD$. Détermine puis construis (E_1).

3. On suppose que ABCD est un rectangle.

a. Démontre que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$;

b. Détermine puis construis l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que

$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

EXERCICE 2 (5 points)(les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes)

1. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{N}^2$, $xy - 5x - 5y - 7 = 0$.

a. Démontre que $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \iff (x-5)(y-5) = 32$

b. Résous (E)

2. a. Soit le nombre A = 48 858 écrit dans le système décimal. Donne l'écriture de A dans le système hexadécimal et dans la base 7.

b. soit B = $\overline{11111100101}^2$ écrit dans le système binaire. Détermine l'écriture décimale de B.

3.a. le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? Déduis-en les valeurs possibles de x.

b. 557 a pour quotient l'entier naturel q et pour reste 85 dans la division euclidienne par un entier naturel b. Détermine tous les couples (b ; q) d'entiers naturels qui conviennent.

PROBLEME (11 points)

PARTIE A

Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1. Calcule les limites de φ en $+\infty$ et à droite de 0.

2. On note φ' la dérivée de φ ; démontre que : pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$

3. a. Dresse le tableau de variation de φ.

b. Démontre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1;+\infty[$

4. Détermine le signe de $\varphi(x)$ pour tout x dans $]0;+\infty[$

PARTIE B

On considère la fonction ψ définie sur $]0;+\infty[$ par $\psi(x) = x^2(1-\ln x) + 1 + \ln x$

1. Calcule les limites de ψ en $+\infty$ et à droite de 0.

2. On note ψ' la dérivée de ψ ; démontre que : pour tout $x \in\ ]0;+\infty[$, $\psi'(x) = x\,\varphi(x)$.

3. Démontre que $\psi(\alpha) > 0$.

4. a. Dresse le tableau de variation de ψ.

b. Démontre que l'équation $\psi(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0;1[$.

5. On admet que l'équation $\psi(x) = 0$ admet une unique solution γ dans $]\alpha;\ +\infty[$.

a. Démontre que :

$\forall x \in\ ]0; \beta[\ \cup\ ]\gamma;\ +\infty[,\ \psi(x) < 0$

$\forall x \in\ ]\beta;\ \gamma[,\ \psi(x) > 0$.

b. Justifie que : $\beta \in\ ]0{,}3;\ 0{,}4[$ et $\gamma \in\ ]3{,}3;\ 3{,}4[$

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x^2} \quad si\ x \in\ ]0;\ +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.a. Démontre que f est continue à droite en 0

b. f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifie. Interprète graphiquement le résultat.

2.Calcule la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement ce résultat.

3. On note f' la dérivée de f. Démontre que $\forall x \in\ ]0;\ +\infty[,\ f'(x) = \frac{\psi(x)}{(1+x^2)^2}$.

4. Dresse le tableau de variation de f.

5. Démontre que si λ est solution de l'équation $\psi(x) = 0$ alors $\ln \lambda = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}$

6. Déduis-en que $f(\beta) < 0$ et $f(\gamma) > 0$.

7. Vérifie que $f(1) = 0$ et déduis-en le signe de f.

8. Trace la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra : OI = 3 cm ; OJ = 8 cm. $\beta = 0{,}35$ et $\gamma = 3{,}35$

Lycée sainte Marie Cocody	Devoir sur cours n°2	vendredi 20 novembre 2020
Terminales C	Mathématiques	Durée : 2h

Exercice 1 (6 points)

Cet exercice est un **questionnaire à choix multiple** (QCM)
Pour chaque question, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Tu noteras le numéro de la question, la réponse ainsi qu'une justification de la réponse choisie.

1. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$? a. 0 b. $\frac{1}{2}$ c. $+\infty$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{\sin x+x}{x}$. On prolonge la définition de f à $\mathbb{R}$ en posant $f(0)=a$. Peut-on trouver a tel que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$?
a. impossible b. $a=0$ c. $a=2$

3. Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}f(\frac{1}{x})$?
a. elle n'existe pas b. 1 c. $+\infty$

4. Même énoncé qu'à la question 3. Que vaut $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}f(\frac{1}{x})$?
a. 0 b. 1 c. elle n'existe pas

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, réponds par V(vrai) ou F(faux) sans aucune justification !

1. Si une fonction f n'est pas continue sur un intervalle K, alors elle n'est pas dérivable sur K.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour deux réels a et b, $f(a)\times f(b)\leq 0$ alors f s'annule au moins une fois entre a et b.
3. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'équation $y=(2x+1)^3-x$ au point d'abscisse 0 est 2.
4. la courbe d'équation $y=x\sqrt{x(2-x)}$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

Exercice 3 (4 points)

Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x)=x^2-3 \text{ si } x\in\,]-\infty;1[\\ f(x)=\sqrt{x-1}-2 \text{ si } x\in\,]1;+\infty[\\ f(1)=-2 \end{cases}$

1. Etudie la continuité de f en 1.
2. Etudie la dérivabilité de f en 1 et interprète graphiquement le résultat.
3. Donne l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm. (inutile d'étudier le sens de variation !!)

$X=\frac{1}{x}$

$x\to+\infty$; $X\to 0$

Exercice 4 (4 points)

Dans chacun des cas suivants, justifie la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle K puis calcule $f'(x)$

1. $f(x) = x^2 cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et $K = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ et $K =]0; +\infty[$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{1+sinx}}{x-1}$ et $K = [0; 1[$.
4. $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$ et $K =]0; +\infty[$

08

Exercice 5 (2 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = \frac{x-sinx}{3x+1}$.

1. Démontre que : $\forall x \in]-\infty; -1[$, $\frac{x+1}{3x+1} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{3x+1}$. Déduis-en la limite de f en $-\infty$.
2. Donne un encadrement de f sur $]1; +\infty[$ et déduis-en la limite de f en $+\infty$.

3.- $f'(x) = \frac{\sqrt{1+sinx}}{x-1}$

Lycée Sainte Marie Cocody Terminale C	Mercredi 26 septembre 2018 Durée : 4 heures

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (6 points)

On considère le triangle ABC rectangle isocèle en A de sens direct tel que AB = a (a > 0)
Soit E le milieu de [AB] et G le symétrique de C par rapport à E.

1. Fais une figure et démontre que G est le barycentre des points pondérés (A,1), (B,1) et (C,−1).
2. Soit D le symétrique de A par rapport à (BC).
   a. Démontre que ABDC est un carré.
   b. Démontre que pour tout point M du plan, le vecteur $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M
3. On considère respectivement les ensemble (Γ) et (Γ′) des points M du plan tels que :
   $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$ et $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 3a^2$.
   a. Vérifie que A appartient à (Γ) et C appartient à (Γ′).
   b. Démontre que (Γ) est le cercle de centre G et de rayon $a\sqrt{2}$.
   c. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ′).
   d. Construis (Γ) et (Γ′).

EXERCICE 2 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$, a et b étant des réels.

1. Démontre que f admet un prolongement par continuité en 1 si et seulement si $a + b + 1 = 0$.
2. Pour $a + b + 1 = 0$, détermine le prolongement par continuité en 1 de f.

PROBLEME (11 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variations.
2. Justifie qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$ puis détermine une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
3. Démontre que : $\forall\, x \in]-\infty; \alpha[,\ g(x) < 0$ et $\forall\, x \in]\alpha; +\infty[,\ g(x) > 0$

PARTIE B

1. a. Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Calcule la limite de f à droite et à gauche en -1. Interprète graphiquement les résultats
   c. Calcule la limite de f à droite et à gauche en 1. Interprète graphiquement les résultats.
2. Démontre que $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;1\}$ $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$. Déduis-en le tableau de variation de f.
3. a. Démontre que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (Δ) d'équation $y = x + 2$.
   b. Etudie la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ).
4. Trace la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite(Δ).

PARTIE C

1. Détermine les abscisses des points de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite(Δ).
2. Détermine une équation de chacune de ces tangentes et représente les.
3. Déduis-en graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = x + m$