

Lycée Classique Adolphe Lundi 03 Décembre 2022	DEVOIR N°2 DE MATHÉMATIQUES – Tle C	Année Scolaire : 2021-2022 DURÉE : 1 h 20
---	--	--

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = -1 + x(\ln x)^2$

1-a) Calcule la limite de g en $+\infty$.

b) Démontre que la limite de g en 0 est -1 .

2- Etudie le sens de variations de g et dresser son tableau de variation.

3-a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

b) Démontre que $\forall x \in]0; \alpha[$ $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) > 0$

Partie B

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln x} + x + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

On donne (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé $(O; I; J)$.

1- Détermine l'ensemble de définition D_f de la fonction f .

2- Etudie la continuité de f en 0.

3- Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat.

4- Calcule les limites à gauche et à droite de f en 1. Donne une interprétation graphique des résultats.

5- Calcule la limite de f en $+\infty$.

6-a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Etudie la position de (C) par rapport à (D)

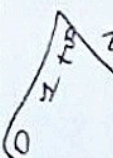
7- Démontre que $\forall x \in D_f$ $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$

8- Dédus les variations de f puis dresser son tableau de variation

9- Démontre que $f(\alpha) = \sqrt{\alpha} + \alpha + 1$.

10- Construis (C) et ses asymptotes.

BONNE et HEUREUSE ANNÉE 2022 A TOUS et A TOUTES



96/274

Lycée Sainte Marie Cocody
Terminale C



Mercredi 13 Janvier 2021
Durée : 4 heures



MATHEMATIQUES



EXERCICE 1 (4 points)

On considère quatre points A, B, C et D tels que trois quelconques ne soient pas alignés.

1. Démontre que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$

2. On suppose que ABCD est un parallélogramme. Soit (E_1) l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = BD$. Détermine puis construis (E_1) .

3. On suppose que ABCD est un rectangle.

a. Démontre que pour tout point M du plan, $MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$.

b. Détermine puis construis l'ensemble (E_2) des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$

EXERCICE 2 (5 points)(les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes)

1. Soit (E) l'équation dans $\mathbb{N}^2$, $xy - 5x - 5y - 7 = 0$.

a. Démontre que $xy - 5x - 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(y - 5) = 32$

b. Résous (E)

2. a. Soit le nombre A = 48 858 écrit dans le système décimal. Donne l'écriture de A dans le système hexadécimal et dans la base 7.

b. soit B = 11111100101^2 écrit dans le système binaire. Détermine l'écriture décimale de B.

3.a. le quotient d'un entier relatif x par 3 est 7. Quels sont les restes possibles ? Déduis-en les valeurs possibles de x.

b. 557 a pour quotient l'entier naturel q et pour reste 85 dans la division euclidienne par un entier naturel b. Détermine tous les couples (b ; q) d'entiers naturels qui conviennent.

PROBLEME (11 points)

PARTIE A

Soit φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - 2\ln x$

1. Calcule les limites de φ en $+\infty$ et à droite de 0.

2. On note φ' la dérivée de φ ; démontre que : pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\varphi'(x) = \frac{-2(1+x^2)}{x^3}$

3. a. Dresse le tableau de variation de φ .

b. Démontre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1; +\infty[$

4. Détermine le signe de $\varphi(x)$ pour tout x dans $]0; +\infty[$

PARTIE B

On considère la fonction ψ définie sur $]0; +\infty[$ par $\psi(x) = x^2(1 - \ln x) + 1 + \ln x$

1. Calcule les limites de ψ en $+\infty$ et à droite de 0.

2. On note ψ' la dérivée de ψ ; démontre que : pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\psi'(x) = x \varphi(x)$.

3. Démontre que $\psi(\alpha) > 0$.

4. a. Dresse le tableau de variation de ψ .

b. Démontre que l'équation $\psi(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]0; 1[$.

5. On admet que l'équation $\psi(x) = 0$ admet une unique solution γ dans $] \alpha; +\infty[$.
- a. Démontre que :
- $$\forall x \in]0; \beta[\cup]\gamma; +\infty[, \psi(x) < 0$$
- $$\forall x \in]\beta; \gamma[, \psi(x) > 0.$$
- b. Justifie que : $\beta \in]0,3; 0,4[$ et $\gamma \in]3,3; 3,4[$

PARTIE C

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x \ln x}{1+x^2} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1.a. Démontre que f est continue à droite en 0
- b. f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifie. Interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule la limite de f en $+\infty$ puis interprète graphiquement ce résultat.
3. On note f' la dérivée de f . Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\psi(x)}{(1+x^2)^2}$.
4. Dresse le tableau de variation de f .
5. Démontre que si λ est solution de l'équation $\psi(x) = 0$ alors $\ln \lambda = \frac{\lambda^2+1}{\lambda^2-1}$
6. Dédus-en que $f(\beta) < 0$ et $f(\gamma) > 0$.
7. Vérifie que $f(1) = 0$ et déduis-en le signe de f .
8. Trace la courbe représentative ($\mathcal{C}$) de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) . On prendra : $OI = 3 \text{ cm}$; $OJ = 8 \text{ cm}$. $\beta = 0,35$ et $\gamma = 3,35$

LYCEE CLASSIQUE ABIDJAN – COMPOSITION N°2

SUJET DE MATHEMATIQUES Tle C (3 h)

30/01/20

Cette épreuve comporte deux (2) pages. L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE 1 (4 points)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points $A(1; 1; 1)$ et $B(3; 2; 0)$,

(P) est le plan passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et (Q) le plan d'équation $x - y + 2z + 4 = 0$

- 1) Justifie qu'une équation cartésienne de (P) est : $2x + y - z - 8 = 0$
- 2) On appelle sphère de centre A et de rayon r l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA = r$
 - a) Détermine une équation de la sphère (S) de centre A et de rayon AB
 - b) Calcule la distance du point A au plan (Q) et déduis en que le plan (Q) est tangent à la sphère (S)
 - c) Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ? Justifie ta réponse
- 3) Soit C le projeté orthogonal du point A sur le plan (Q)
 - a) Justifie que le point C a pour coordonnées $(0; 2; -1)$
 - b) Prouve que les plans (P) et (Q) sont sécants
 - c) Démontre qu'une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et (Q) est :

$$\begin{cases} x = k \\ y = -5k + 12 \\ z = -3k + 4 \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$
 - d) Vérifie que le point A n'appartient pas à la droite (D)

EXERCICE 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. E est l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $9y^2 = |4x^2 - 16x|$

- 1) a) Justifie que E est la réunion de la courbe E_1 d'équation : $4(x - 2)^2 - 9y^2 = 16$ et de la courbe E_2 d'équation : $4(x - 2)^2 + 9y^2 = 16$
 - b) Donne la nature et les coordonnées du centre K des courbes E_1 et E_2
- 2) a) Justifie que dans le repère $(K; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation réduite de E_1 est : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1$
 - b) Détermine dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les coordonnées des sommets A et A', des foyers F et F' puis une équation des asymptotes à E_1
- 3) a) Donne dans le repère $(K; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation réduite de E_2
 - b) Détermine dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ les coordonnées des foyers G et G' puis une équation des directrices à E_2

- 4) a) Après avoir placé dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ les sommets A et A', les foyers F et F' puis les asymptotes à E_1 , construis E_1
b) Place les éléments caractéristiques de E_2 et construit E_2 puis déduis en rouge la courbe de E

PROBLEME (11 points)

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln|x-2|} \quad \text{si } x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; 2[\cup]2 ; 3[\cup]3 ; +\infty[; f(1) = -1 \text{ et } f(2) = 0$$

PARTIE A On donne la fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $g(x) = \ln|x-2| - \frac{x-1}{2}$

- 1) a) Calcule la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$
b) Calcule la limite à gauche et à droite en 2
- 2) a) Justifie que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $g'(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$
b) Dresse le tableau de variation de g
- 3) a) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique k dans $]2 ; +\infty[$
b) Détermine une valeur approchée de k à 0,1 près
- 4) Justifie que pour $x \in]-\infty ; 2[\cup]k ; +\infty[$ $g(x) \geq 0$ et pour $x \in]2 ; k[$ $g(x) < 0$

Handwritten notes:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$

PARTIE B Soit (C) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ unité 1 cm

- 1) a) Justifie que la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ puis donne une asymptote à (C)
c) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donne une interprétation graphique des résultats
- 2) a) Vérifie que $f(x) = \frac{1}{\ln|x-2|} - \frac{1}{1-x}$ puis déduis en que f est continue en $x = 1$
b) Justifie que f est continue en 2
c) Démontre que (C) admet en $x = 1$ une tangente verticale
d) Etudie la dérivabilité de f en $x = 2$ et donne une interprétation graphique du résultat
- 3) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 2 ; 3\}$
a) Calcule $f'(x)$ et justifie que f(x) et g(x) ont le même signe
b) Démontre que $f(k) = k - 2$ et dresse le tableau de variation de f
c) Justifie que $f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty ; 3[$ et $f(x) \geq 0$ pour $x \in]3 ; +\infty[$
- 4) Construire dans le repère $(O ; I ; J)$ l'asymptote et les tangentes en $x = 1$; $x = 2$ à (C) puis (C)