

**DEVOIR SURVEILLE DE MATHÉMATIQUES**

Durée : 2H

**EXERCICE 1 (4 Points)**

Pour chacune des propositions suivantes indique Vrai si elle est vraie et Faux si elle est fausse

- 1) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $\arg(z^n) = n \arg(z) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 2) L'argument d'un nombre imaginaire pur est de la forme  $k\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- 3) Si  $a \equiv 0[n]$  et  $a \equiv 0[m]$  alors  $a \equiv 0[nm]$
- 4) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers, le PGCD ( $a$ ;  $b$ ) =  $a$  si et seulement si  $b \equiv 0 [a]$

**EXERCICE 2 (4 Points)**

Donne la seule réponse exacte parmi les trois proposées.

1. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $z_n = (1 - \sqrt{3}i)^n$ .  $z_n$  est un réel positif si et seulement si :  
 a)  $n = 6$                                       b)  $n = 3 + 6k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ )                                      c)  $6k$ , ( $k \in \mathbb{N}$ )
2. Soient les complexes  $a = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $b = -3e^{-i\frac{\pi}{3}}$   
 a)  $a + b$  est complexe imaginaire pur    b)  $a + b$  est un réel positif    c)  $a + b$  est un réel négatif.
3. l'équation  $4x + 6y = 5$  admet :  
 a) aucune solution                      b) une unique solution                      c) au moins une solution
4. Soit  $n$  un entier naturel. On pose  $p = 5n - 3$  et  $q = n + 1$ . On a :  
 a) 8 divise PGCD ( $p$ ,  $q$ )                      b) PGCD ( $p$ ,  $q$ ) divise 8                      c) PGCD ( $p$ ,  $q$ ) = 8  $\Leftrightarrow n = 8k + 5$ ,  $k \in \mathbb{N}$

**EXERCICE 3 (7 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 1cm sur chaque axe.

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définies par :  $f(x) = x e^{(1 + \frac{1}{x})}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

- 1) a) Calcule les limites de  $f$  en 0 à gauche et à droite  
 b) Donne une interprétation graphique des résultats.
- 2) a) Calcule les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$   
 b) Démontre que la droite  $(D)$  d'équation  $y = e(x + 1)$  est asymptote à  $(C_f)$ .
- 3) a) Justifier que  $f$  est dérivable à gauche en 0 et préciser son nombre dérivée à gauche en 0.  
 b) Démontre que  $f$  n'est pas dérivable à droite en 0 puis interprète graphiquement le résultat.
- 4) Détermine la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- 5) Détermine le sens de variation de  $f$  et dresse son tableau de variation.
- 6) Construis la courbe  $(C_f)$

**EXERCICE 4 (5 points)**

Un astronome a observé au jour  $J_0$  le corps céleste  $A$ , qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard, il observe le corps  $B$ , dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle  $J_1$  le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.

En utilisant une démarche argumenté, détermine le nombre de jours qui s'écouleront entre  $J_0$  et  $J_1$ .