

Corrigé exercice 8

On sait que $\theta'(t) = a - b\theta(t)$, avec $a = 2,088 \times 10^{-4}$ et $b = 2,32 \times 10^{-4}$. On pose: $y = \theta - 90$
d'où $\theta = y + 90$ et $\theta' = y'$, par dérivation.

$$\theta'(t) = a - b\theta(t) \Leftrightarrow y' = a - b(y + 90) \Leftrightarrow y' = -by + a - 90b \quad .$$

Or $a - 90b = 2,088 \times 10^{-4} - 90 \times 2,32 \times 10^{-4} = 0$. D'où l'équation se réduit à: $y' = -by$

b) L'équation $y' = -by$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Sa solution générale est de la forme : $y = ke^{bt}$ où k est un réel quelconque. Comme $\theta(t) = y + 90$, on en déduit :

$$\theta(t) = ke^{bt} + 90 \text{ . Sachant que } \theta(0) = 20 \text{ , on peut déterminer la constante } k : \theta(0) = ke^0 + 90 = 20 \Leftrightarrow k + 90 = 20 \text{ et } k = -70 \text{ .}$$

D'où l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t : $\theta(t) = 90 - 70e^{bt}$

2°) La température atteint 80°C au bout du temps t tel que $\theta(t) = 80$, c'est-à-dire :

$$90 - 70e^{bt} = 80 \Leftrightarrow -70e^{bt} = -10 \Leftrightarrow e^{bt} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 7}{b} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 7}{2,32 \times 10^{-4}} \approx 8387,5$$

La température atteint 80°C au bout d'environ 8387 secondes, soit $2h \ 19' \ 47''$